Thematische Aufgabensammlung

Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 10 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

OJM

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
https://www.olympiade-mathematik.de/

zusammengestellt von Steffen Polster
https://mathematikalpha.de
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Algebra & Analysis

I.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01003:
Zerlege 900 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer reziproken Werte gleich dem reziproken Wert von 221 ist!

Lösung von svrc:
Die beiden gesuchten Summanden bezeichnen wir mit a und b. Die beiden Bedingungen lauten

$$a + b = 900, \quad (1) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{221} \quad (2)$$

(2) lässt sich zu

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{900}{ab} = \frac{1}{221}$$

umschreiben, so dass $ab = 900 \cdot 221 = 198900$ gilt. Mit $a = 900 - b$ aus (1) folgt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (900 - b) \cdot b &= 198900 \\ b^2 - 900 \cdot b &= -198900 \\ b^2 - 900 \cdot b + 450^2 &= 450^2 - 198900 \\ (b - 450)^2 &= 3600 \end{aligned}$$

und somit die Möglichkeiten $b_1 = 390$ und $b_2 = 510$. Somit lauten die beiden Summanden - unter Beachtung der Kommutativität der Addition - dementsprechend 390 und 510.

Aufgabe V11011:
Im VEG Neuendorf werden 82,5 ha mit Getreide, 48,72 ha mit Hackfrüchten und 20,47 ha mit Luzerne bestellt. Die Hackfruchtflächen sollen je Hektar 34 kg, die Luzerneflächen 20 kg und die Getreideflächen 17,5 kg Phosphorpentoxyd (P2 05) erhalten.
Wieviel Dezitonnen Superphosphat werden benötigt, wenn dieses 17,3 Prozent Phosphorpentoxyd enthält?

Lösung von svrc:
Für die Hackfruchtflächen werden $48{,}72 \cdot 34\text{kg} = 1656{,}48\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Luzerneflächen werden $20{,}47 \cdot 20\text{kg} = 409{,}40\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Für die Getreideflächen werden $82{,}5 \cdot 17{,}5\text{kg} = 1443{,}75\text{kg}$ P_2O_5 benötigt. Insgesamt werden somit 3509,83kg P_2O_5 benötigt.

Superphosphat enthält 17,3 Prozent P_2O_5, sodass insgesamt $\frac{3509{,}63}{0{,}173}\text{kg} \approx 20286\text{kg}$ Superphosphat benötigt werden. Da eine Dezitonne 100kg entspricht, werden 202,86 Dezitonnen Superphosphat benötigt.

Aufgabe V11012:
Welche Werte kann x in folgenden Gleichungen annehmen?

$$\begin{aligned} &a) \quad \sin x = \sin 69^\circ \\ &b) \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 32^\circ\right) = 1 \\ &c) \quad \sin^2 x + \cos^2 \frac{x}{2} = 3{,}2 \end{aligned}$$

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
a) $x_1 = 69^\circ; x_2 = 111^\circ$. Wenn die Lösungen unter Berücksichtigung der Periodizität gegeben wurden, also mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$x_1 = 69^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad ; \quad x_2 = 111^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b) $x_1 = 26^\circ; x_2 = 206^\circ$. Bei Berücksichtigung der Periodizität

$$x = 26^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

c) Da sowohl $\sin^2 x$ als auch $\cos^2 x$ höchstens den Wert 1 annehmen können, kann die Summe beider niemals 3,2 betragen. Es gibt mithin kein x, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 011012:
In der UdSSR wird heute in 37 Minuten genau soviel Gas erzeugt wie im zaristischen Russland während des gesamten Jahres 1913.
Berechnen Sie die Steigerung in Prozent!

Lösung von Christiane Czech:
Für die Menge des heute in 37 min produzierten Gases brauchte man 1913 genau $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525600$ min. Die Gasproduktion steigerte sich also um das $\frac{525600}{37}$ fache, also um $\left(\frac{525600}{37} - 1\right) \cdot 100\% = 1420441\%$.

Aufgabe 021011:
Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m.

Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m. Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

Lösung von André Lanka:
Aus dem Strahlensatz ergibt sich als Höhe h der Pyramide

$$\frac{h}{20 \text{ m}} = \frac{h - 7{,}3 \text{ m}}{15 \text{ m}}$$

was zu $h = 29{,}2$ m führt. Damit können wir die Länge l der Baugrube berechnen:

$$\frac{l}{29{,}2 \text{ m}} = \frac{47 \text{ m}}{21{,}9 \text{ m}}$$

was $l \approx 62{,}7$ m ergibt. Die Pyramide hat ein Volumen von

$$V_p = \frac{1}{3}(20 \text{ m} \cdot 62,7 \text{ m} \cdot 29{,}2 \text{ m}) = 12205{,}6 \text{ m}^3$$

Der Teil der Pyramide, der noch nicht ausgehoben ist, hat ein Volumen von

$$V_n = \frac{1}{2}(15 \text{ m} \cdot 47 \text{ m} \cdot 21{,}9 \text{ m}) = 5146{,}5 \text{ m}^3$$

Der ausgebaggerte Boden hat daher ein Volumen von $V_p - V_n \approx 7000 \text{ m}^3$.

Aufgabe 031011:
Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4235 g.
Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule? (Dichte des Kupfers $\rho = 8{,}93 \text{ g/cm}^3$.)

Lösung von Korinna Grabski:
Es gelten folgende Bezeichnungen und Formeln:
m_D Masse Kupferdraht, V_D Volumen Kupferdraht, der ein Kreiszylinder der Länge l_D mit dem Durchmesser d_D ist, $\rho_D = 8{,}93 \text{ g/cm}^3$ Dichte des Kupfers, $m_S = 4235$ g Masse Spule inkl. Draht, $m_L = 235$ g Leermasse der Spule

$$\begin{aligned}
m_D &= m_S - m_L \\
V_D &= \frac{\pi}{4} d_D^2 \cdot l_D \\
\rho_D &= \frac{m_D}{V_D} = \frac{4(m_S - m_L)}{\pi d_D^2 l_D} \\
l_D &= \frac{4(m_S - M_L}{\pi d_D^2 \rho_D} = 116391{,}85 cm \approx 1{,}164 km
\end{aligned}$$

Es befinden sich ca. 1,164 km Kupferdraht auf der Spule.

Aufgabe 041011:
In einem Betrieb, in dem Elektromotoren montiert werden, können durch die Anschaffung einer neuen Fließbandanlage, deren Kosten 105000 MDN betragen, die Lohnkosten je Motor um 0,50 MDN und die Gemeinkosten um jährlich 8800 MDN gesenkt werden.
a) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit die Kosten der neuen Anlage bereits in drei Jahren durch die Einsparungen an Löhnen und Gemeinkosten gedeckt werden?
b) Wie viele Motoren müssen jährlich mindestens montiert werden, damit darüber hinaus noch ein zusätzlicher Gewinn von jährlich 10000 MDN entsteht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn pro Jahr x Motoren montiert werden, so werden pro Jahr $0{,}50 \cdot x + 8800$ MDN eingespart. Damit die Kosten der Anlage nach drei Jahren gedeckt sind, muss gelten $3 \cdot (0{,}5 \cdot +8800) = 105000 \Rightarrow x = 52400$.

b) Von den 105000 MDN müssen jährlich 35000 MDN eingespart werden, und außerdem soll es noch 10000 MDN zusätzlichen Gewinn geben, deshalb gilt: $35000 + 10000 = 0{,}5 \cdot x + 8800 \Rightarrow x = 72400$.
Es müssen jährlich mindestens 72400 Motoren montiert werden.

Aufgabe 081011:
Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, dass genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Problem ist beschrieben durch $0{,}25 \cdot x + 5 = 150$. Also erschienen 580 Jugendliche, von denen zunächst 435 Platz fanden, bevor 150 gingen.

Aufgabe 101012:
Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichnet s_n die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

a) Für welche positive ganze Zahl n erhält man $s_n = 2415$?

b) Für welche positive ganze Zahl m ist s_m genau 69 mal so groß wie m?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl, für die $\frac{n(n+1)}{2} = 2415$ gilt. Dann folgt $n^2 + n - 4830 = 0$ und hieraus entweder $n = 69$ oder $n = -70$. Da aber $-70 < 0$ ist, kann nur $n = 69$ die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 69:

$$s_{69} = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415$$

b) Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl m, für die $\frac{m(m+1)}{2} = 69m$ gilt. Wegen $m \neq 0$ folgt daraus $\frac{m+1}{2} = 69$, also $m = 137$. Daher kann nur diese Zahl die gewünschte Eigenschaft haben. Tatsächlich gilt für die positive ganze Zahl 137

$$s_{137} = \frac{137 \cdot 138}{2} = 137 \cdot 69$$

Aufgabe 111013:
Es sei x eine Variable, die alle von 1 und -1 verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann.

Geben Sie eine Möglichkeit an, den Term $\frac{x}{x^2-1}$ so als Summe zweier Brüche darzustellen, dass die Variable x nur in den Nennern dieser beiden Brüche und dort in keiner höheren als der 1. Potenz auftritt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es liegt nahe, für die gesuchten Quotienten der Nenner $x+1$ und $x-1$ zu wählen, weil deren Hauptnenner gleich dem Nenner des vorgegebenen Terms ist. Wir wählen also den Ansatz

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

daraus folgt

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{ax - a + bx + b}{x^2-1}$$

also nach Multiplikation mit $x^2 - 1$

$$x = ax - a + bx + b = x(a+b) - a + b \qquad (1)$$

Für $x = 0$ folgt daraus, dass notwendig $-a + b = 0 \quad (2)$ gilt. Aus (1) und (2) folgt weiterhin $x = x(a+b)$ und somit, da dies auch für mindestens ein $x \neq 0$ gelten soll: $a + b = 1 \quad (3)$.

Das Gleichungssystem (2), (3) hat nur die Lösung $a = b = \frac{1}{2}$. Die Probe bestätigt die gefundene Zerlegung

$$\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{x-1+x+1}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x^2-1}$$

Aufgabe 121014:
In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:

Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte.

Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der ursprüngliche Preis p_1 wird um $p_1\% = \frac{p_1}{100}$ gesenkt. Also ist der neue Preis p_2 gleich $p_2 = p_1 - p_1 \cdot \frac{p_1}{100} = p_1 - \frac{p_1^2}{100}$. Da p_2 21 Groschen beträgt, gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{p_1^2}{100} + p_1 &= 21 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2100 &= 0 \\ p_1^2 - 100 \cdot p_1 + 2500 &= 400 \\ (p_1 - 50)^2 &= 400 \\ p_1 &= 50 \pm 20 \end{aligned}$$

Also war der ursprüngliche Preis p_1 30 oder 70 Groschen. Zu diesem ursprünglichen Preis konnte der Bauer genau drei Tiere kaufen. Zu 21 Groschen kann er n Tiere kaufen, wobei er jeweils sein ganzes Geld ausgibt. Also gilt: $3 \cdot p_1 = 21 \cdot n \Leftrightarrow n = \frac{p_1}{7}$. Da n eine natürliche Zahl ist, muss p_1 durch 7 teilbar sein. Dies gilt für 70, aber nicht für 30 Groschen. Also betrug der ursprüngliche Preis 70 Groschen. Der Bauer kann nun 10 Tiere kaufen.

Aufgabe 141012:
Ein VEB hat für das Jahr 1975 die Produktion von 10000 Stück seines Haupterzeugnisses vorgesehen. Weiterhin ist geplant, die für die Jahre 1976, 1977, 1978, 1979 vorgesehenen Produktionszahlen so zu steigern, dass die für 1979 vorgesehene Zahl den vierfachen Wert der Zahl für 1975 erreicht. Dabei soll die prozentuale Steigerung von Jahr zu Jahr alle vier Mal gleich sein.

a) Wieviel Prozent beträgt bei gerundeter Rechnung, d. h. ohne Berücksichtigung der Stellen nach dem Komma, dieser jährliche Zuwachs?
b) Geben Sie die (entsprechend gerundeten) Produktionsziffern für die Jahre 1976, 1977, 1978 und 1979 an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit Hilfe der Zinseszinsformel erhält man $P_{1979} = P_{1975} \cdot (1+p)^4$. Diese liefert mit $P_{1979} = 4 \cdot P_{1975}$ nach Umstellen: $p = \sqrt[4]{4} - 1 = \sqrt{2} - 1$ den Wert $p = 0{,}41 = 41\%$.

Damit folgt:
$P_{1976} = P_{1975} \cdot 1{,}41 = 14142$ Stück $\quad P_{1977} = P_{1976} \cdot 1{,}41 = 20000$ Stück
$P_{1978} = P_{1977} \cdot 1{,}41 = 28283$ Stück $\quad P_{1979} = P_{1978} \cdot 1{,}41 = 40000$ Stück

Aufgabe 151013:
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, den Wert für das Verhältnis $a : b$ zweier positiver reeller Zahlen a und b mit $a < b$ so zu wählen, dass folgendes gilt!

Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ dieser Zahlen beträgt 60% ihres arithmetischen Mittels.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für zwei Zahlen a und b mit $0 < a < b$ sei $\sqrt{ab}$ gleich 60 % von $\frac{a+b}{2}$. Dann gilt

$$\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{ab} \qquad \text{also} \qquad a+b = \frac{10}{3}\sqrt{ab} \tag{1}$$

Sei nun $\frac{a}{b} = m$ das gesuchte Verhältnis, dann gilt $bm = a < b$, wegen $b > 0$, also $m < 1$.

Durch Einsetzen in (1) erhält man ferner

$$bm + b = \frac{10}{3}\sqrt{b^2 m} \qquad \text{wegen } b > 0 \text{ also}$$

$$b(m+1) = \frac{10}{3}b\sqrt{m} \qquad ; \qquad m+1 = \frac{10}{3}\sqrt{m}$$

Durch Quadrieren und Subtraktion von $\frac{100}{9}m$ erhält man daraus

$$m^2 - \frac{82}{9}m + 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $m_1 = 9$ und $m_2 = \frac{1}{9}$ von denen nur die zweite die Eigenschaft $m < 1$ hat.

Also können zwei Zahlen nur dann die gestellten Bedingungen erfüllen, wenn ihr Verhältnis $m = a : b = 1 : 9$ ist. Umgekehrt folgt hieraus $b = 9a$, also $\frac{a+b}{2} = \frac{9a+a}{2} = 5a$ sowie, da $a > 0$ ist, $\sqrt{ab} = \sqrt{9a^2} = 3a$, und $3a$ sind genau 60 % von $5a$.

Also erfüllen a, b genau dann die gestellten Bedingungen, wenn $a : b = 1 : 9$ gilt.

Aufgabe 201012:
Beweisen Sie, dass $\dfrac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}$ für alle ganzen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$

a) (als reelle Zahl) definiert ist und sogar

b) eine ganze Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2 \geq y^2$$

Wegen $y \neq 0$, also $y^2 > 0$, ist somit

$$x^2 - 2xy + 2y^2 \neq 0 \qquad \text{also} \qquad \frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}$$

als reelle Zahl definiert.

b) Es gilt

$$(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$$

also ist wegen der Ganzzahligkeit von x und y auch

$$\frac{x^4+4y^4}{x^2-2xy+2y^2}=x^2+2xy+2y^2$$

eine ganze Zahl.

Aufgabe 241011:
Zwei natürliche Zahlen, die zwischen 10 und 20 liegen, lassen sich *im Kopf* nach folgendem Verfahren relativ schnell und sicher multiplizieren:

Man addiere zur ersten Zahl die Einerziffer der zweiten Zahl, hänge an die erhaltene Summe eine Ziffer 0 an und addiere zu der nun erhaltenen Zahl das Produkt der Einerziffern der beiden gegebenen Zahlen.

Um beispielsweise nach dieser Regel $16 \cdot 12$ zu berechnen, addiert man 2 zu 16, erhält 18, hängt eine 0 an und addiert zu der nun erhaltenen Zahl 180 das Produkt $6 \cdot 2$, also 12. Es ergibt sich 192, in der Tat die gesuchte Zahl $16 \cdot 12$.

Beweisen Sie, dass dieses Verfahren für alle natürlichen Zahlen zwischen 10 und 20 zum richtigen Ergebnis führt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden zu multiplizierenden Zahlen lassen sich in der Gestalt $10+a$ bzw. $10+b$ schreiben, wobei a bzw. b ihre Einerziffern sind. Nach dem beschriebenen Verfahren hat man zuerst $10+a+b$, dann $10\cdot(10+a+b)$ und schließlich $10\cdot(10+a+b)+a\cdot b$ zu bilden. Diese Zahl ist gleich

$$100+10a+10b+ab$$

Andererseits ist das gesuchte Produkt

$$(10+a)\cdot(10+b)=100+10a+10b+ab$$

Es stimmt also mit der nach den Verfahren berechneten Zahl überein. w. z. b. w.

Aufgabe 271014:
Ist es möglich, einen Quader mit den Kantenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{8}$ vollständig mit Würfeln gleicher Kantenlängen auszufüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe solche Würfel mit einer Kantenlänge a, so müsste (u.a. auch)

$$x\cdot a=\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad y\cdot a=\sqrt{3} \tag{1}$$

gelten. Dabei müssten x und y ganze Zahlen sein, da sie die Anzahl der Würfel längs der Kanten des Quaders angeben würden.

Aus (1) folgte $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Das ist ein Widerspruch, da links eine rationale und rechts eine irrationale Zahl stehen würde. Die Frage muss also verneint werden.

Aufgabe 301013:
Wenn die Produktion eines Betriebes um 50% zurückging (z. B. infolge des Ausfalls eines Teils der Anlage), so muss sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d. h. um 100% erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!

(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muss sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim Zurückgehen um a Prozent wird der Anfangswert mit $\left(1-\frac{a}{100}\right)$ multipliziert, bei anschließender Erhöhung um b Prozent wird der dann erreichte Wert mit $\left(1+\frac{b}{100}\right)$ multipliziert. Damit der nun insgesamt erhaltene Wert gleich dem Anfangswert ist, muss

$$\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right))1$$

sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1+\frac{b}{100} &= \frac{1}{1-\frac{a}{100}} = \frac{100}{100-a} \\ \frac{b}{100} &= \frac{100}{100-a} - 1 = \frac{a}{100-a} \\ b &= \frac{100a}{100-a} \end{aligned}$$

als eine gesuchte Formel.

Aufgabe 311012:
Von einem Quader sind gegeben: das Volumen 24552 cm^3, der Oberflächeninhalt 17454 cm^2 und die Länge 3 cm einer Kante. Inge und Rolf wollen die Längen der anderen Kanten ermitteln.

Inge sagt, dass sie Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung gefunden hat und dass die gesuchten Längen, in cm gemessen, ganzzahlig sind.

Rolf entgegnet, er könne quadratische Gleichungen noch nicht lösen; aber wenn die Ganzzahligkeit der gesuchten Längen bekannt sei, so seien seine BASIC-Kenntnisse ausreichend, um die Aufgabe mit Hilfe eines Computers zu lösen.

Wie könnte die Aufgabe von Inge gelöst worden sein, und wie von Rolf?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sind a, b die Maßzahlen der in cm gemessenen anderen Kanten, so folgt

$$3\cdot a\cdot b = 24552 \qquad (1)$$

$$2\cdot(ab+3a+3b) = 17454 \qquad (2)$$

$$\text{aus (1) folgt} \qquad ab = 8184 \qquad (3)$$

$$\text{aus (2) folgt} \qquad ab+3a+3b = 8727$$

Subtrahiert man hiervon (3), so folgt $3a+3b=543$, also $a+b=181$ (4).

Aus (4) folgt $b=181-a$; setzt man dies in (3) ein, so folgt

$$a\cdot(181-a) = 8184 \qquad ; \qquad a-181a+8184=0$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1;2} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{32761}{4} - 8184} = \frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$a_1 = 93 \qquad ; \qquad a_2 = 88$$

Nach (4) gehören hierzu die Werte $b_1 = 88$ bzw $b_2 = 93$.

Man bestätigt, dass sie außer (4) auch (3) erfüllen, woraus für sie auch (1) und (2) als erfüllt folgen. Damit sind die Längen der anderen Kanten ermittelt; sie betragen 88 cm und 93 cm.

b) Rolf könnte folgendermaßen zur Aufstellung eines Programms gelangen:

Wir lassen a die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen. Für jedes a soll der Computer den Wert b aus (1) berechnen und dann prüfen, ob (2) erfüllt wird (sowie, wenn das zutrifft, a und b ausgeben).

Das Ende des Ablaufs soll erreicht sein, wenn kein ganzzahliges b mehr auftreten kann. (Da b mit wachsendem a fällt (wie aus (1) ersichtlich ist), kann jedenfalls beendet werden, wenn $b < 1$ ist. Das wird sicher erreicht (wichtig!), weil a nicht nur wächst, sondern sogar über jede Schranke hinaus wächst. Einen solchen Ablauf realisiert z. B. das Programm

```
10 A=0
20 A=A+1
30 B=24552/3/A
40 IF B<1 THEN END
50 IF 2 * (A*B + 3*A + 3*B )=17454 THEN PRINT A,B
60 GOTO 20
```

Hinweis: Zur Verkürzung der Rechenzeit kann man Zahlenwerte, die im Ablauf oft gebraucht werden, einmal zu Anfang ermitteln und an eine Variable übergeben.

Weiter kann man überhaupt das System (1),(2) durch das einfachere (3),(4) ersetzen (und dabei noch als Folgerung aus (4) nutzen: Wächst a um 1, so fällt b um 1). Vor allem aber lässt sich die Abbruchbedingung günstiger wählen: Es genügt, nur Paare mit $a \leq b$ zu suchen, was nach (4) mit $a \leq 90$ gleichwertig ist (und damit zudem ermöglicht, statt der obigen Zeilen 20, 40, 60 das günstigere FOR-NEXT zu verwenden). Praktischer ist also z. B. das Programm

```
10 P =8184
20 B=181
30 FOR A=1 TO 90
40 B=B-1
50 IF A*B=P THEN PRINT A,B
60 NEXT A
```

Aufgabe 321011:
Bernd rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1:7 erhält er die mit 7 Stellen nach den Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.1428571.

Nun meint er: Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne noch einen weiteren Schritt zahlenmäßigen Rechnens durchführen zu müssen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, mit nur einem einfachen weiteren Rechenschritt auszukommen.

Beschreiben und begründen Sie, wie der gesuchte Dezimalbruch auf eine dieser Arten gefunden werden kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei dem bekannten schriftlichen Verfahren zur Division durch 7 können, wenn das Verfahren nicht mit Rest 0 endet, höchstens sechs verschiedene Reste auftreten. Sobald derselbe Rest zweimal auftritt, tritt eine Wiederholung der jeweils anschließend erhaltenen Ergebnisziffern ein. Daher muss der entstehende Dezimalbruch, wenn er nicht nach spätestens 6 Stellen abbricht, periodisch-unendlich mit einer Periodenlänge sein, die nicht größer als 6 ist.

Das Taschenrechnerergebnis 0.1428571 zeigt (gleichgültig, ob die letzte Ziffer 1 durch Runden oder Abbrechen ohne Runden zustandekam):

Es ergeben sich, beginnend mit der Zehntel-Ziffer 1, sechs verschiedene Ziffern, darunter die sechste nicht aufzurundende Ziffer 7, und danach erfolgt kein Abbruch. Also kann der gesuchte wahre Dezimalbruch nur der periodisch-unendliche Dezimalbruch $0{,}\overline{142857}$ sein.

Aufgabe 341015:
Geben Sie eine Gleichung in einer Unbekannten x so an, dass beide Seiten der Gleichung für alle reellen Zahlen x definiert sind, dass die Gleichung unendlich viele reelle Zahlen als Lösung hat, von denen aber keine ganzzahlig ist!

Zeigen Sie, dass die von Ihnen angegebene Gleichung diesen Bedingungen genügt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei mögliche Beispiele sind:

I. Die Gleichung

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

Offenbar sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert. Beweis der übrigen Eigenschaften:

Für alle $x<\frac{1}{4}$ ist

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}-x+\frac{3}{4}-x=1-2x>1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

für alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ ist

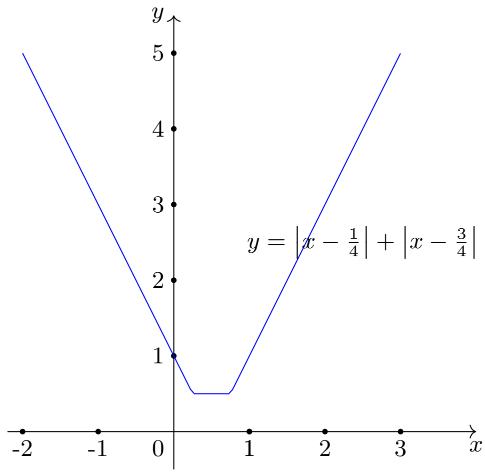
$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-x=\frac{1}{2}$$

für alle $x>\frac{3}{4}$ ist

$$\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=x-\frac{1}{4}+x-\frac{3}{4}=2x-1>2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}$$

Also sind genau alle x mit $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$ Lösung der Gleichung; keine dieser Zahlen ist eine ganze Zahl.

Eine andere Nachweismöglichkeit entsteht unter Verwendung des Graphen der durch $f(x)=\left|x-\frac{1}{4}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|$ definierten Funktion f (siehe Abbildung).



II. Die Gleichung $\sin x = 1$. Wieder sind beide Seiten für alle reellen Zahlen x definiert; weiter gilt:

Alle Lösungen der Gleichung sind die Zahlen

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k+1}{2}\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Da π irrational ist und alle $\frac{4k+1}{2}$ rational und von 0 verschieden sind, sind alle Lösungen irrational, also nicht ganzzahlig.

II Runde 2

Aufgabe V11025:
Peter sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere eine ungerade Anzahl Streichhölzer! Verdopple in Gedanken die Anzahl in der linken Hand, verdreifache die Anzahl in der rechten Hand, addiere beides und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl hast.“
Wie macht Peter das? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von svrc:
Mit $g = 2k$ für eine natürliche Zahl k bezeichnen wir die gerade Anzahl Streichhölzer. Mit $u = 2l + 1$ für eine nichtnegative ganze Zahl l bezeichnen wir die ungerade Anzahl Streichhölzer. Es gibt zwei Varianten.

Erste Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der linken Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_1 des Rätsels

$$n_1 = 2 \cdot g + 3 \cdot u = 4k + 6l + 3.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels ungerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der linken Hand befindet.

Zweite Variante: Die gerade Anzahl Streichhölzer befindet sich in der rechten Hand. Dann gilt für das Ergebnis n_2 des Rätsels

$$n_2 = 2 \cdot u + 3 \cdot g = 6k + 4l + 2.$$

In diesem Falle gilt, dass das Ergebnis des Rätsels gerade ist. Dann weiß Peter, dass sich die gerade Anzahl Streichhölzer in der rechten Hand befindet.

Aufgabe 011021:
Im Jahre 1970 sollen in der Sowjetunion mindestens 900 Milliarden kWh und 1980 wenigstens 2700 Milliarden kWh Elektroenergie erzeugt werden. Für die USA nimmt die Bundesenergiekommission 1475 Milliarden kWh bzw. 2230 Milliarden kWh an.
Wann würde die UdSSR die USA in der Erzeugung von Elektroenergie überholt haben, wenn man eine gleichmäßige Steigerung der Energieerzeugung annimmt?

Lösung von Christiane Czech:
Die produzierte Energiemenge E (in Mrd. kWh) lässt sich, wenn eine gleichmäßige Steigerung vorausgesetzt wird, mit linearen Funktionen beschreiben, diejenige der Sowjetunion ist $E_{SU} = 900 + 180x$, die der USA $E_{USA} = 1475 + 75{,}5x$, wobei x die Anzahl der Jahre nach 1970 ist.
Die Energieproduktion beider Länder ist gleich, wenn

$$E_{SU} = E_{USA}, \text{ also } 900 + 180x = 1475 + 75{,}5x$$

oder nach Umstellen $x \approx 5{,}5$ gilt. Dies wird somit im Jahre 1976 der Fall sein.

Aufgabe 021021:
Die in einem Stadtbezirk geleiteten Industriebetriebe erfüllten im I. Quartal 1962 den Plan der Bruttoproduktion gegenüber dem gleichen Zeitraum des Vorjahres mit 112,4%. Insgesamt wurden für 4,7 Millionen DM mehr Waren produziert. Der Volkswirtschaftsplan wurde gleichzeitig um 5,6% übererfüllt.
Wie hoch war die im Volkswirtschaftsplan vorgesehene Bruttoproduktion des I. Quartals 1962?

Lösung von André Lanka:
Im I. Quartal 1961 wurden Waren im Wert von

$$\frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{12{,}4\%} = \frac{4{,}7 \text{ Millionen DM}}{0{,}124} \approx 38 \text{ Millionen DM}$$

produziert. Im I. Quartal 1962 waren es demnach Waren im Wert von 38 Millionen DM $\cdot 1{,}124 \approx 42{,}7$ Millionen DM.
Das entspricht 105,6% des Volkswirtschaftsplans.
Vorgesehen waren also $\frac{42{,}7 \text{ Millionen DM}}{1{,}056} \approx 40$ Millionen DM.

Aufgabe 021022:
In einem Steinkohlenwerk soll für einen 800 m tiefen Schacht eine Förderanlage gebaut werden. Es sollen Lasten bis zu 12 Mp gefördert werden.
Das Förderseil besteht aus Stahldrähten und verträgt unter Berücksichtigung der notwendigen Sicherung eine Belastung von 20 kp je mm^2 Querschnitt.
Wie groß muss der metallische Querschnitt des Seils sein, damit es sowohl die eigene Last als auch die zu fördernde Last tragen kann? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}8 \frac{p}{cm^3}$)

Lösung von André Lanka:
Das Seil muss das Gewicht von 12 Mp, sowie das Eigengewicht fördern. Das Eigengewicht ergibt sich als $V \cdot \gamma = x \cdot 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$. Dabei ist x der Querschnitt des Seils in cm^3.
Das Seil fördert 2000 $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ Querschnitt. Damit benötigt das Seil einen Querschnitt von

$$x = \frac{12000 \text{ kp}}{2000 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} - 624 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}} \approx 8{,}721 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 061021:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz:

$$w^2 + w = \frac{15}{4} \qquad (1) \quad ; \quad w^2 \cdot w = a \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

$$w_1 = \frac{3}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad w_2 = -\frac{5}{2}$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{und} \qquad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8}$$

Durch Einsetzen findet man, dass die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$$

hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$. Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

Aufgabe 191021:
Ein rechteckiges Bild, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 3 verhalten, soll einen überall gleich breiten Rahmen erhalten, dessen Flächeninhalt so groß ist wie der des Bildes.
Ermitteln Sie alle diejenigen Werte des Längenverhältnisses der Außenkanten des Rahmens, die diese Forderung erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $2a$ die Länge der kürzeren Seite des Bildes, dann ist $3a$ die Länge seiner längeren Seite. Es sei d die Breite des Rahmens, dann sind $2a + 2d$ bzw. $3a + 2d$ die Längen der Außenkanten des Rahmens.
Die in der Aufgabe gestellte Forderung ist genau dann erfüllt, wenn die von diesen Kanten eingeschlossene Fläche einen doppelt so großen Flächeninhalt hat wie die des Bildes, d. h. genau dann, wenn

$$(2a + 2d)(3a + 2d) = 2 \cdot 2a \cdot 3a$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$6a^2 + 4ad + 6ad + 4d^2 = 12a^2$$
$$4d^2 + 10ad - 6a^2 = 0$$
$$d^2 + \frac{5}{2}ad - \frac{3}{2}a^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat genau die Lösungen

$$d_{1,2} = -\frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a + \frac{24}{16}a^2}$$

von denen genau $d = \frac{a}{2}$ nicht negativ ist. Daher ist die Forderung genau dann erfüllt, wenn die Außenkanten die Längen $2a + 2\frac{a}{2} = 3a$ und $3a + 2\frac{a}{2} = 4a$ haben.

Ist dies der Fall, so haben sie das Längenverhältnis 3:4, und auch umgekehrt gilt:
Haben die Außenkanten das Längenverhältnis $(2a+2d) : (3a+2d) = 3 : 4$, so folgt $8a+8d = 9a+6d$, also $2d = a$ und damit $d = \frac{a}{2}$. Somit erfüllt genau das Längenverhältnis 3:4 die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 231022:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Zahlenpaare $(g; r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, die die Gleichung erfüllen:

$$\frac{3}{3r^2+1} = g$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Zahlenpaar $(g; r)$ die verlangten Eigenschaften hat, so folgt:
Da das Quadrat jeder reellen Zahl ≥ 0 ist, gilt

$$3r^2 + 1 \geq 1 \tag{1}$$

Hieraus folgt einerseits $3r^2 + 1 > 0$; daher und wegen $3 > 0$ ist

$$\frac{3}{3r^2+1} > 0$$

Andererseits folgt aus (1), dass

$$\frac{3}{3r^2+1} \leq \frac{3}{1} = 3$$

gilt. Somit erfüllt die ganze Zahl g die Ungleichung $0 < g \leq 3 \quad (2)$.
Aus $\frac{3}{3r^2+1} = g$ folgt weiter

$$3gr^2 + g = 3 \qquad ; \qquad r^2 = \frac{3-g}{3g}$$

Diese Gleichung lautet für die ganzzahligen Lösungen von (2), wie in der Tabelle angegeben:

g	$r^2 = \frac{3-g}{3g}$
1	$r^2 = \frac{2}{3}$
2	$r^2 = \frac{1}{6}$
3	$r^2 = 0$

Daher können nur die Paare

$$\left(1; \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(1; \sqrt{-\frac{2}{3}}\right), \quad \left(2; \sqrt{\frac{1}{6}}\right), \quad \left(2; \sqrt{-\frac{1}{6}}\right), \quad (3; 0)$$

die verlangten Eigenschaften haben.
Sie haben diese Eigenschaften, denn 1, 2 und 3 sind ganze Zahlen und $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{6}}, 0$ sind reelle Zahlen.
Ein Probe durch Einsetzen der Zahlen bestätigt die Lösung.

Aufgabe 231024:
Beweisen Sie, dass es genau eine positive rationale Zahl x gibt, die die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $3^3 = 27$.
Aus $0 < x < 1$ folgt auch $x^x < 1$; denn da x rational ist, gibt es natürliche Zahlen $p, q > 0$ mit $x = \frac{p}{q}$, und damit ist $x^x = \frac{p}{x^q} = \sqrt[q]{x^p}$. Aus $x < 1$ folgt somit $x^p > 1$ und daraus $\sqrt[q]{x^p} < 1$.
Aus $x = 1$ folgt $x^x = 1$.
Aus $1 < x < 3$ folgt $x^x < x^3$, da für Potenzen mit einer Basis oberhalb 1 gilt: Je größer ihr Exponent ist, um so größer ist ihre Potenz. Weiter folgt analog $x^3 < 3^3$.
Mit den gleichen Begründungen folgt aus $x > 3$, dass $x^x > x^3 > 3^3$ gilt.

Aus (I) bis (IV) folgt, dass unter allen positiven rationalen Zahlen x genau die Zahl $x = 3$ die Gleichung $x^x = 27$ erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 011031:
Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU wurde über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft berichtet, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben.
In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais.
Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha.
Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?

Lösung von Christiane Czech:
Der Ertrag an Erbsen beträgt $708 \cdot 31$ dt. Da die 21% der gesamten Anbaufläche, auf denen Erbsen angebaut werden, 708 ha entsprechen, beträgt die Gesamtfläche $\frac{708}{0{,}21}$ ha. Auf dieser wurde also ein Ertrag von $\frac{38 \cdot 708}{0{,}21}$ dt erzielt.
Die Maisanbaufläche beträgt $\frac{0{,}3 \cdot 708}{0{,}21}$ ha, es wurden also $\frac{18 \cdot 708}{0{,}21}$ dt Mais geerntet.
Die Fläche, auf der weder Mais noch Erbsen angebaut wurden, beträgt $\frac{0{,}49 \cdot 708}{0{,}21}$ ha. Damit beträgt der Ernteertrag der restlichen Getreidekulturen

$$\frac{\left(\frac{38 \cdot 708}{0{,}21} - 708 \cdot 31 - \frac{18 \cdot 708}{21}\right) \text{dt}}{\frac{0{,}49 \cdot 708}{0{,}21} \text{ha}} = 27{,}5 \frac{\text{dt}}{\text{ha}}$$

Aufgabe 051033:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, b und c für die gilt: $a + bc = (a + b)(a + c)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit jeder der folgenden Gleichungen

$$a + bc = a^2 + ac + ab + bc \qquad ; \qquad a(a + b + c - 1) = 0 \tag{1}$$

Da das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner Faktoren Null ist, folgt, dass

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a + b + c - 1 = 0$$

sein muss, und umgekehrt ist in jedem dieser Fälle die Gleichung (1) und damit die gegebene Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung ist also erfüllt für alle Zahlentripel (a,b,c) mit

1. $a = 0$ und reellen Zahlen b und c und
2. reellen Zahlen a, b und c, für die $a + b + c = 1$ gilt.

In allen anderen Fällen ist sie nicht erfüllt.

Aufgabe 051035:
Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

1. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung
$$\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$
(mindestens) eine Lösung.
2. Wenn die Gleichung (1) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (1). (Diskussion)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Gleichung (1) eine Lösung x_0 besitzt, so gilt:

$$\frac{a(x_0+1)+b}{c(x_0+1)+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$$

$$c(x_0+1)+d \neq 0 \qquad ; \qquad cx_0+d \neq 0$$

Daraus folgt

$$(a(x_0+1)+b)(cx_0+d) = (c(x_0+1)+d)(ax_0+b) \tag{2}$$

$c^2+d^2>0$, weil c und d nicht gleichzeitig Null sein können. Und weiter

$$ad = bc \qquad ; \qquad c^2+d^2>0 \tag{3}$$

Wenn (1) eine Lösung besitzt, so muss (3) gelten, und umgekehrt, wenn (3) gilt, dann hat (1) eine Lösung; denn aus (3) folgt, dass für alle reellen Zahlen x_0 sicher (2) gilt, und daraus folgt weiter:

I. Ist $c=0$, dann ist wegen (3) auch $a=0$ und $d\neq 0$. Also ist für jede reelle Zahl x_0 sicher (1) erfüllt.

II. Ist $c\neq 0$, dann ist die Gleichung (1) für jede reelle Zahl x_04 mit $x_0 \neq -\frac{d}{c}$ und $x_0 \neq -\frac{d+c}{c}$ erfüllt.
$x_0 = -\frac{d}{c}$ und $x_0 = -\frac{d+c}{c}$ sind nicht Lösung von (1).

Aufgabe 061034:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung

$$x^2+x+3 = k(x^2+5)$$

eine in x quadratische Gleichung ist, die
a) eine Doppellösung hat!
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k\neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0 \tag{1}$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanten nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}} = \frac{1\pm\sqrt{-20k^2+32k-11}}{2(k-1)}$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2+32k-11=0 \qquad \text{d. h.} \qquad k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0$$

ist. Das ist für $k=\frac{11}{10}$ und für $k=\frac{1}{2}$ und nur für diese der Fall.

b) Die Gleichung (1) hat genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wenn $-20k^2+32k-11>0$ ist. Daraus folgt

$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$$

und schließlich

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{11}{20}\right) < 0$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder $k-\frac{1}{2}>0$ und gleichzeitig $k-\frac{11}{20}<0$ ist, also für $\frac{1}{2}<k<1$, $1<k<\frac{11}{10}$, oder
$k-\frac{1}{2}<0$ und gleichzeitig $k-\frac{11}{20}>0$ ist. Es gibt keinen Wert von k, der den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügt.

Also hat die Gleichung (1) für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k voneinander verschiedene reelle Lösungen.

Aufgabe 161032:
Von einer Gleichung

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

werde vorausgesetzt, dass alle Koeffizienten a_3, a_2, a_1 und a_0 ganze Zahlen sind.
Beweisen Sie, dass dann folgender Satz gilt!
Wenn eine rationale Zahl x eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist x eine ganze Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine rationale Zahl x sei eine Lösung der gegebenen Gleichung. dann gibt es ganze Zahlen $q \neq 0$ und p, die zueinander teilerfremd sind und für die $x = \frac{p}{q}$ ist. Hiernach ist

$$\frac{p^4}{q^4} + a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad \text{also}$$

$$p^4 = -a(a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3)$$

Daher ist q ein Teiler von p^4, Da aber q zu p und folglich auch zu p^4 teilerfremd ist, ergibt sich, dass q nur $+1$ oder -1 sein kann.
Also ist $x = \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, w. z. b. w.

Aufgabe 181033:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20} + \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl a gilt

$$\begin{aligned}
a^2-3a+2 &= (a-1)(a-2) \quad &;\quad a^2-5a+6 &= (a-2)(a-3)\\
a^2-7a+12 &= (a-3)(a-4) \quad &;\quad a^2-9a+20 &= (a-4)(a-5)\\
a^2-11a+30 &= (a-5)(a-6) \quad &;\quad a^2-13a+42 &= (a-6)(a-7)\\
a^2-8a+7 &= (a-1)(a-7)
\end{aligned}$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für $k = 1, \ldots, 6$

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))} = -\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a-(k+1)}$$

Also ist für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-7} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ gleichbedeutend hiermit

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)} = \frac{6}{a^2-8a+7} = \frac{a^2+5a}{a^2-8a+7}$$

$$a^2+5a-6 = 0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a = 1$ und $a = -6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ äquivalent mit $a = -6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 231031:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(g;r)$ aus einer ganzen Zahl g und einer reellen Zahl r, für die

$$\frac{r}{r^2-6r+10} = g$$

gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Wenn $(g;r)$ ein Paar mit den verlangten Eigenschaften ist, so folgt:
Ist $g=0$, so ist $r=0$. Ist $g \neq 0$, so folgt: r erfüllt die Gleichung

$$r^2 - (6+\frac{1}{g})r + 10 = 0$$

Deren Diskriminante ist folglich nichtnegativ, d. h., es gilt

$$\left(3+\frac{1}{2g}\right)^2 - 10 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|3+\frac{1}{2g}\right| \geq \sqrt{10}$$

Da g ganzzahlig und von 0 verschieden ist, gilt $|g| \geq 1$, also $\frac{1}{|g|} \leq 1$ und daher $\frac{1}{g} \geq -1$, $3+\frac{1}{2g} \geq 3-\frac{1}{2} > 0$
Also ist $|3+\frac{1}{2g}| = 3+\frac{1}{2g}$ und es folgt weiter

$$3+\frac{1}{2g} \geq \sqrt{10} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2g} \geq \sqrt{10}-3$$

Wegen $\sqrt{10}-3>0$ also einerseits $\frac{1}{2g}>0$, $g>0$, andererseits $2g \leq \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \sqrt{10}+3 < 8$, $g<4$.
Daher verbleiben (im Fall $g \neq 0$) nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle

g	$r^2-(6+\frac{1}{g}r)+10=0$	Lösungen	
1	$r^2-7r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$	$r_1=5$, $r_2=2$
2	$r^2-6{,}5r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{13}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$	$r_1=4$, $r_2=\frac{5}{2}$
3	$r^2-\frac{19}{3}r+10=0$	$r_{1,2}=\frac{19}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}}$	$r_1=\frac{10}{3}$, $r_2=3$

Also können höchstens folgende geordnete Paare die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

$$(0;0), \quad (1;5), \quad (1;2), \quad (2;4), \quad (2;\frac{5}{2}), \quad (3;\frac{10}{3}), \quad (3;3)$$

2. Diese Paare $(g;r)$ erfüllen die Bedingungen der Aufgabe; denn in ihnen ist jeweils g ganzzahlig und es gilt:

g	r	$r^2-6r+10$	$\frac{r}{r^2-6r+10}$
0	0	10	0
1	5	$25-30+10=5$	1
1	2	$4-12+10=2$	1
2	4	$16-24+10=2$	2
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}-\frac{60}{4}+\frac{40}{4}=\frac{5}{4}$	2
3	$\frac{10}{3}$	$\frac{100}{9}-\frac{180}{9}+\frac{90}{9}=\frac{10}{9}$	3
3	3	$9-18+10=1$	3

Aufgabe 281034:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ reeller Zahlen, die die folgenden Gleichung (1) erfüllen!

$$a^3-b^3-a^2+b^2+a-b=0 \qquad (1)$$

Lösung von Steffen Polster:
Durch Polynomdivision folgt $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ und mittels binomischer Formel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Dann wird aus (1)

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - a^2 + b^2 + a - b &= (a-b)(a^2+ab+b^2) + (a-b)(a+b) + (a-b) = 0 \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2+a+b+1) = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllen damit alle Paare (a,b) mit $a = b$ die Gleichung (1). Der zweite Faktor kann nicht Null werden, da gilt

$$\begin{aligned} a^2+ab+b^2+a+b+1 = a^2 + a(b+1) + b^2+b+1 = 0 \\ a_{1;2} = -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2+2b+1-(4b^2+4b+4)}{4}} \\ = -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}(b^2+\frac{2}{3}b+1)} = -\frac{b+1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\left(\left(b+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}\right)} \end{aligned}$$

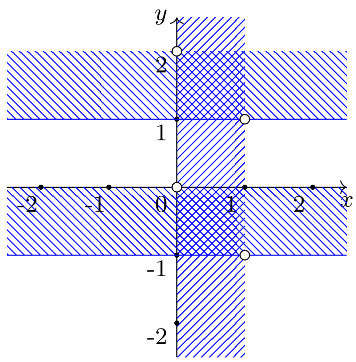
Der Radikand ist damit stets negativ. Damit gibt es kein reelles Paar (a,b) mit $(a^2+ab+b^2+a+b+1) = 0$. (1) hat ausschließlich alle Paare (a,b) mit $a = b$ als Lösungen.

Aufgabe 311032:
Man ermittle und zeichne in einem x,y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x;y)$
a) die Gleichung $[x]^2 + [y]^2 = 1$ (1)
b) die Gleichung $[x^2] + [y^2] = 1$ (2)
erfüllen.
Gegebenenfalls ist jeweils durch einen der Zeichnung beigefügten Text zu sichern, dass für jeden Punkt der Ebene eindeutig aus der Darstellung hervorgeht, ob er zur Menge der anzugebenden Punkte gehört oder nicht.
Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq z < g+1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Lösung von Steffen Polster:
a) Nach Definition ergibt $[z]$ für jedes reelle z eine ganze Zahl. Die Quadrate $[x]^2, [y]^2$ sind sicher ≥ 0 und damit wird $[x]^2, [y]^2 \in \{0,1,4,9,...\}$. Ist (x,y) Lösung von (1), so können $[x]^2, [y]^2$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x]^2 = 0, [y]^2 = 1$

Damit $[x]^2 = 0$ gilt, muss $[x] = 0$ und $0 \leq x < 1$ gelten. $[y]^2 = 1$ ergibt $[y] = 1$ oder $[y] = -1$ und die möglichen Intervalle $1 \leq y < 2$ bzw. $-1 \leq y < 0$.

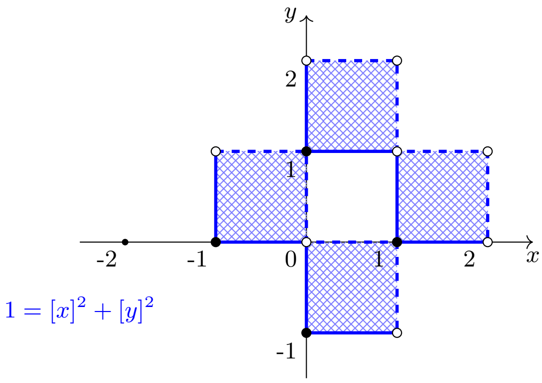


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1) und (0,0) – (0, – 1) – (−1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0) und (−1,1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

2. Fall: $[x]^2 = 1, [y]^2 = 0$

In Analogie zum 1.Fall wird: $0 \leq y < 1$ und $1 \leq x < 2$ bzw. $-1 \leq x < 0$.

Die Lösungsmenge der Aufgabe a) ist damit

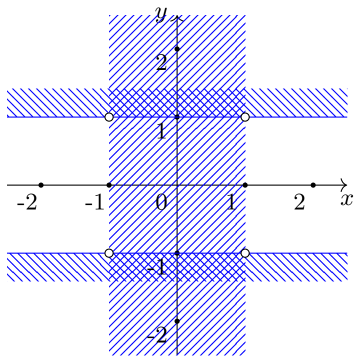


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken (0,2) - (0,1) – (1,1), (0,0) – (0, – 1) – (−1,1), (−1,1) – (−1,0) – (0,0) und (1,1) – (1,0) – (2,0) mit Ausnahme der Endpunkte (0,2), (1,1), (0,0), (−1,1), (2,0) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei quadratischen Bereiche gehören nicht zur Lösung.

b) Die Quadrate $[x^2], [y^2]$ sind sicher ≥ 0, da x^2 und y^2 nicht negativ sind. Da $[x^2], [y^2]$ ganzzahlig sind und wird $[x^2], [y^2] \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Ist (x,y) Lösung von (2), so können $[x^2], [y^2]$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen:

1. Fall: $[x^2] = 0, [y^2] = 1$

Damit $[x^2] = 0$ gilt, muss x^2 im Intervall $0 \leq x^2 < 1$ liegen und somit $-1 < x < 1$ gelten.
$[y^2] = 1$ ergibt das Intervall $1 \leq y^2 < 2$ und damit die zwei Intervalle $1 \leq y < \sqrt{2}$ und $-\sqrt{2} < y \leq -1$.

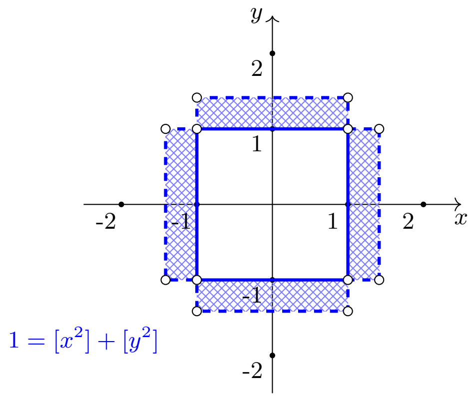


In der grafischen Darstellung sind damit alle Punkte der doppelgerasterten Bereiche Lösung. Dabei gehören die Punkte auf den Strecken von (−1,1) nach (1,1) sowie von (−1,−1) nach (−1,1) mit Ausnahme der Endpunkte (−1,1), (1,1), (−1, – 1) und (1, – 1) zur Lösungsmenge. Die anderen Seitenränder der zwei rechteckigen Bereiche gehören nicht zur Lösung

2. Fall: $[x^2] = 1, [y^2] = 0$

In Analogie zum 2.Fall wird: $-1 < y < 1$ und $1 \leq x < \sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2} < x \leq -1$.

Die Lösungsmenge der Aufgabe b) ist damit



Aufgabe 331031:
Beweisen Sie, dass sich der Bruch $\frac{1}{1994}$ als Summe von genau 1994 Stammbrüchen darstellen lässt, von denen keine zwei einander gleich sind!
Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\frac{1}{1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2\cdot 1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} = \dots = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} = \frac{1}{2\cdot 1994} + \frac{1}{2^2\cdot 1994} + \dots + \frac{1}{2^{1992}\cdot 1994} + \frac{1}{3\cdot 2^{1991}\cdot 1994} + \frac{1}{6\cdot 2^{1991}\cdot 1994}$$

$\square$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir zeigen allgemeiner, dass sich jeder Stammbruch $\frac{1}{k}$ als Summe von $n \geq 3$ verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt. Die Behauptung folgt dann für $n = k = 1994$.

Sei zuerst $n = 3$. Dann gilt offenbar $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$, sodass sich jeder Stammbruch als Summe von drei verschiedenen Stammbrüchen schreiben lässt.

Lässt sich aber jeder Stammbruch als Summe von $n-1$ verschiedenen Stammbrüchen darstellen, so auch jeder als Summe von n verschiedenen:

Ist nämlich $\frac{1}{2k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$ eine Darstellung von $\frac{1}{2k}$ als Summe von $n-1 \geq 3$ paarweise verschiedener Stammbrüche, so sind deren Nenner alle größer als $2k$ und es gilt $\frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}$, sodass auch jeder Stammbruch als Summe von genau n verschiedenen Stammbrüchen geschrieben werden kann.
Wiederholte Anwendung dieses Prozesses, der die Summandenanzahl jeweils um eins erhöht, zeigt diese Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, $\square$.

Aufgabe 341032:
Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 123456789$ ist also die Differenz

$$D := (n-4) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+7) - (n-7) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)$$

zu berechnen. Dabei ergeben sich beim Ausmultiplizieren der Produkte jeweils gleiche Vorzeichen bei den Termen mit geraden Exponenten von n und verschiedene bei ungeraden Exponenten von n. Es ergibt sich also

$$= 2n^3 \cdot (-4-2-1+7) + 2n \cdot (-8+56+28+14) = 180n = 22.222.222.020$$

IV Runde 4

Aufgabe 011041:
Wie auf dem XXII. Parteitag der KPdSU mitgeteilt wurde, wird in der Sowjetunion von 1960 bis 1980 die Produktion von Produktionsmitteln (d.s. Rohstoffe, Maschinen, Ausrüstungen für Industrie, Landwirtschaft und Verkehr usw.) auf das 6,8 fache steigen.
Aber auch die Produktion von Gebrauchsgütern (Güter, die für den Bedarf der Bevölkerung bestimmt sind) soll stark anwachsen, sie soll auf das Fünffache steigen. Die gesamte Industrieproduktion steigt auf das 6,2 fache.
a) Wieviel Prozent der gesamten Industrieproduktion betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln im Jahr 1960?
b) Wieviel Prozent würde er im Jahre 1980 betragen?

Lösung von Eckard Specht:
Seien a_0, b_0 und c_0 die Produktion von Produktionsmitteln, Gebrauchsgütern bzw. die gesamte Industrieproduktion im Jahr 1960 sowie a_1, b_1 und c_1 die avisierten Größen im Jahr 1980.
Dann gilt $a_1 = 6{,}8a_0$, $b_1 = 5{,}0b_0$ und $c_1 = 6{,}2c_0$ und ferner $a_0 + b_0 = c_0$ und $a_1 + b_1 = c_1$ bzw. $6{,}8a_0 + 5{,}0b_0 = 6{,}2c_0$. Die erste Gleichung wird nun durch c_0, die zweite durch $6{,}2c_0$ dividiert. Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{c_0} = 1 \qquad ; \qquad \frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} + \frac{25}{31}\frac{b_0}{c_0} = 1$$

welches die Lösung $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3}$ und $\frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{3}$ besitzt.
a) Im Jahr 1960 betrug der Anteil der Produktion von Produktionsmitteln demnach $\frac{a_0}{c_0} = \frac{2}{3} = 66{,}7\%$.
b) Im Jahr 1980 hätte dieser Anteil $\frac{34}{31}\frac{a_0}{c_0} = \frac{68}{93} = 73{,}1\%$ betragen.

Aufgabe 051044:
Man berechne die Differenz D aus der Summe der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen ≤ 100 und der Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen < 100.

Lösung von ZePhoCa:
Es gilt: Summe der ungeraden Quadrate $< 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i-1)^2$ und Summe der geraden Quadrate $\leq 100 = \sum\limits_{i=1}^{50}(2i)^2$. Also gilt

$$D=\sum_{i=1}^{50}(2i)^2-\sum_{i=1}^{50}(2i-1)^2=\sum_{i=1}^{50}4i^2-\sum_{i=1}^{50}(4i^2-4i+1)=-50+\sum_{i=1}^{50}4i=$$
$$=-50+4\cdot\frac{50}{2}\cdot 51=5050$$

Aufgabe 051045:
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x und y, die die Gleichung erfüllen:

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1]=6$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $-1\leq\sin\alpha\leq 1$ und $-1\leq\cos\alpha\leq 1$ gilt

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1]\leq 6$$

für alle reellen x und y, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gleichzeitig

$$\sin(x-y)=1 \qquad ; \qquad \cos(2x-y)=1 \qquad (1)$$

gilt. Das Gleichungssystem (1) ist daher mit der gegebenen Gleichung äquivalent und genau dann erfüllt, wenn es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so dass

$$x-y=\frac{\pi}{2}+2m\pi \qquad ; \qquad 2x-y=2n\pi$$

gilt. Daher erhält man alle Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn $k=n-m$ und m in der Gleichungen

$$x=-\frac{\pi}{2}+2(n-m)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$y=[2(n-2m)-1]\,\pi=[2(k-m)-1]\,\pi$$

unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Aufgabe 071044:
Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Länge seiner Hypotenuse und der Summe der Sinus seiner spitzen Winkel!
Welche Werte kann die Sinussumme annehmen?

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen die Winkel und Seiten des Dreiecks auf kanonische Weise, sodass die Hypotenuse c, die Katheten a und b sowie die ihnen gegenüberliegenden Innenwinkel mit α bzw. β lautet.

Nach der Definition der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck gilt $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ und analog

$$\sin\beta=\frac{b}{c} \qquad \text{also} \qquad \sin\alpha+\sin\beta=\frac{a+b}{c}$$

bzw.

$$A=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{4}\cdot(2ab)=\frac{1}{4}\cdot((a+b)^2-(a^2+b^2))=\frac{1}{4}\cdot\left((\sin\alpha+\sin\beta)^2c^2-c^2\right)=$$
$$=\frac{c^2}{4}\cdot((\sin\alpha+\sin\beta)^2-1)$$

Für feste Hypotenusenlänge c kann sich, damit das Dreieck bei C einen rechten Winkel besitzt, nach dem Satz des Thales der Punkt C nur auf einem Kreis, der die Hypotenuse als Durchmesser hat, bewegen. Damit ist die Höhe auf c nach unten durch 0 und nach oben durch den Umkreisradius, also $\frac{c}{2}$ beschränkt, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks im Intervall $\left(0; \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{2}\right]$ aus Stetigkeitsgründen jeden Wert annehmen kann, sodass $0 < (\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 1 \leq 1$ gilt und damit die Sinussumme also genau die Werte aus dem Intervall $(1; \sqrt{2}]$ annimmt.

Aufgabe 091044:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $sx^2 \cdot (x-1) + t \cdot (x+1) = 0$ sind, so gilt:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$$

Lösung von cyrix:
a,b,c sind die drei Nullstellen des normierten Polynoms $x^2 \cdot (x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1)$. Daher gilt

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2(x-1) + \frac{t}{s} \cdot (x+1) \ .$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} -a-b-c &= -1 \\ ab+bc+ac &= \frac{t}{s} \\ -abc &= \frac{t}{s} \end{aligned}$$

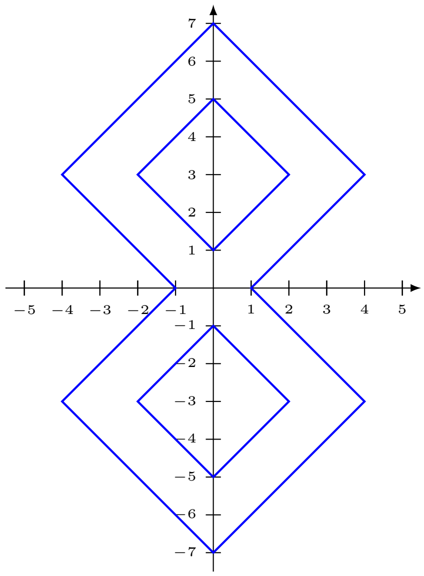
und somit

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (a+b+c) \cdot \frac{ab+bc+ac}{abc} = 1 \cdot \frac{\frac{t}{s}}{-\frac{t}{s}} = -1 \ .$$

Aufgabe 131045:
Veranschaulichen Sie in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$$

Lösung von cyrix:
Zunächst stellen wir fest, dass $f(x,y) = f(-x,y)$ und $f(x,y) = f(x,-y)$, es liegt also eine Symmetrie zur x-Achse und zur y-Achse vor. Wir können uns also auf den ersten Quadranten beschränken. Es gilt dann $x,y > 0$ und die Gleichung geht über in $|x + |y-3| - 3| = 1$.
Sei nun $0 < y < 3$. Wir erhalten $|x - y + 3 - 3| = 1 \iff |x-y| = 1$. Für $x > y$ erhalten wir dann $y = x - 1$ und für $y > x$ folgt $y = x + 1$. Sei nun $y \geq 3$.
Dann geht unsere Gleichung über in $|x + y - 6| = 1$. Für $x + y < 6$ erhalten wir $y = -x + 5$ und für $x + y \geq 6$ folgt $y = 7 - x$.
Zeichnen wir die 4 Geraden und spiegeln diese, so erhalten wir also folgendes schönes Bild:



Aufgabe 141041:
Es sei

$$z = \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{4}{199^2}\right)$$

Man stelle die rationale Zahl z in der Form $z = \frac{p}{q}$ dar, wobei p, q ganze, teilerfremde Zahlen sind und $q > 0$ ist!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist

$$1 - \frac{4}{(2k-1)^2} = \frac{4k^2 - 4k - 3}{(2k-1)^2} = \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1}$$

Daraus folgt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = -\frac{2n+1}{2n-1}$$

Nun ist $\mathrm{ggT}(2n+1, 2n-1) = 1$, dieses folgt z. B. leicht mithilfe des euklidischen Algorithmus:
$2n + 1 = 1 \cdot (2n - 1) + 2$
$2n - 1 = (n - 1) \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
Der Produktwert z folgt mit $n = 100$: $z = -\frac{2 \cdot 100 + 1}{2 \cdot 100 - 1} = -\frac{201}{199}$

Aufgabe 151043A:
Ist z eine reelle Zahl, so werde mit $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$ bezeichnet, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die $-10 \leq x \leq 2$ und $[x^2] = [x]^2$ gilt!

Lösung von MontyPythagoras:
Offenkundig wird durch $[x]$ die reelle Zahl x auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet. Gemäß Definition gilt:

$$[x^2] \leq x^2 < [x^2] + 1$$

Und laut Aufgabenstellung $[x^2] = [x]^2$, so dass gelten muss:

$$[x]^2 \leq x^2 < [x]^2 + 1$$

Es sei nun $x = g + f$, wobei $g = [x]$ der nächstkleineren ganzen Zahl entspreche, und es gilt darüber hinaus $0 \leq f < 1$. Daher:

$$g^2 \leq (g+f)^2 < g^2 + 1$$
$$g^2 \leq g^2 + 2gf + f^2 < g^2 + 1$$
$$0 \leq 2gf + f^2 < 1$$

Die Gleichung ist schon einmal grundsätzlich erfüllt für $f = 0$, so dass alle ganzzahligen $x \in \{-10, -9, ..., 1, 2\}$ die Gleichung erfüllen. Sei nun x nicht ganzzahlig, also $f > 0$. Aufgeteilt auf zwei Ungleichungen muss gelten:

$$(1) \qquad 2gf + f^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad (2) \qquad 2gf + f^2 < 1$$

Da $f > 0$ ist, folgt aus (1) als weitere Voraussetzung

$$2g + f > 0$$

woraus man schon einmal schließen kann, dass $g \geq 0$ sein muss, da $f < 1$ ist. Somit kommt grundsätzlich nur $x > 0$ in Frage, und damit nur $g = 0$ oder $g = 1$. Aus (2) folgt:

$$-g - \sqrt{g^2+1} < f < -g + \sqrt{g^2+1}$$

Da außerdem $f > 0$ gelten muss, die linke Seite hier aber kleiner als null ist, folgt als schärfere Bedingung:

$$0 < f < -g + \sqrt{g^2+1} \qquad \text{oder} \qquad g < x < \sqrt{g^2+1}$$

Für $g = 0$ bedeutet das $0 < x < 1$, für $g = 1$ folgt $1 < x < \sqrt{2}$.
Gesamtlösung: Vereinigt man diese Lösungsintervalle mit den ganzzahligen Lösungen $x = 0$ und $x = 1$, gilt allgemein $0 \leq x < \sqrt{2}$, sowie alle ganzen Zahlen im Intervall $[-10, 2]$.

Aufgabe 161043B:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen p, für die die Gleichung

$$\frac{x^2 - p + 3p^2}{x - p} + 2x = 3$$

eine Lösungsmenge L hat, die
a) leer ist,
b) genau ein Element enthält,
c) aus mehr als einem Element besteht!

Lösung von Steffen Polster:
Sicher muss $x \neq p$ gelten. Schrittweises Umformen liefert

$$3x^2 - 2px + p(3p-1) = 3(x-p)$$
$$3x^2 - x \cdot (2p+3) + p \cdot (3p+2) = 0$$
$$x^2 - \frac{2p+3}{3}x + \frac{p(3p+2)}{3} = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat die von p abhängigen Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{2p+3}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)}$$

Die Diskriminante ist $D = \frac{1}{6}(-32p^2 - 12p + 9)$. Für $D < 0$ existiert keine reelle Lösung x, für $D = 0$ genau eine Lösung x_0 und für $D > 0$ zwei Lösungen x_1, x_2.

$$-32p^2 - 12p + 9 = 0 \Rightarrow p_1 = -\frac{3}{4}; \quad p_2 = \frac{3}{8}$$

Die Funktion $f(p) = -32p^2 - 12p + 9$ wäre in einer grafischen Darstellung eine nach unten geöffnete Parabel (Koeffizient vor p^2 ist negativ), hätte ein lokales Maximum und zwischen p_1 und p_2 positive Funktionswerte.
Damit ergibt sich als Lösung:
1. für $p < -\frac{3}{4}$ oder $p > \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung keine reelle Lösung x.
2. für $p_1 = -\frac{3}{4}$ und $p_2 = \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau eine reelle Lösung x.
3. für $-\frac{3}{4} < p < \frac{3}{8}$ hat die Ausgangsgleichung jeweils genau zwei reelle Lösungen x_1 und x_2.

Aufgabe 191042:
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt!

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + \frac{1}{465} - \frac{1}{466} = \frac{1}{234} + \frac{1}{235} + \frac{1}{236} + ... + \frac{1}{465} + \frac{1}{466}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir formen die Gleichung in der Aufgabenstellung äquivalent um wie folgt

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} &= \frac{2}{234} + \frac{1}{236} + ... + \frac{2}{466} \\
1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{233} &= \frac{1}{117} + \frac{1}{118} + ... + \frac{1}{233} \\
\\
1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} &= \frac{2}{118} + \frac{2}{120} + ... + \frac{2}{232} \\
1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{166} &= \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + ... + \frac{1}{116}
\end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich folgende weitere Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{58} &= \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + ... + \frac{1}{58} \\
1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{29} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{29} \\
1 - \frac{1}{2} + -... - \frac{1}{14} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{14} \\
1 - \frac{1}{2} + -... + \frac{1}{7} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7} \\
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Aufgabe 221043A:
a) Jemand fragt nach reellen Zahlen a, b mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

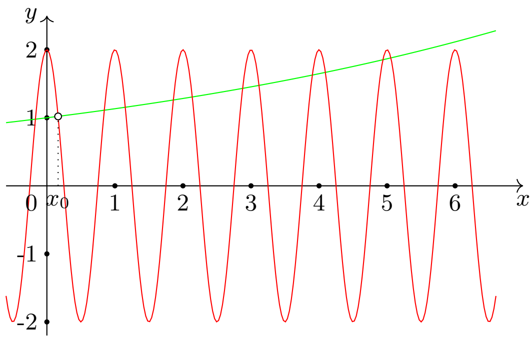
$$a^x = b \cdot \cos x \tag{1}$$

genau 1983 positive reelle Lösungen x hat (unabhängig von der Anzahl der eventuell vorhandenen nicht positiven Lösungen).
Geben Sie ein solches Paar $(a; b)$ reeller Zahlen an und beweisen Sie, dass es die genannte Eigenschaft besitzt!
b) Ermitteln Sie zu dem von Ihnen angegebenen Paar $(a; b)$ für eine positive Lösung x_0 der Gleichung (1) die Zahl $[x_0]$, d.i. diejenige ganze Zahl $g = [x_0]$, für die $g \leq x_0 < g + 1$ gilt!

c) Gibt es auch eine reelle Zahl a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ derart, dass für jede reelle Zahl $b \neq 0$ die Gleichung (1) unendlich viele positive reelle Lösungen x hat?
Hinweise:
1. Als Näherungswert für π kann auf 4 Dezimalstellen genau $\pi = 3{,}1416$ verwendet werden.
2. Bei der Herleitung von Aussagen über Lösungen der Gleichung (1) sind auch graphisch-anschaulich begründete Beweismittel zugelassen.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Zahl der positiven reellen Lösungen ist nur dann beschränkt, wenn $a > 1$ ist, weil nur dann mit wachsendem x irgendwann $a^x > |b|$ ist, und damit die Anzahl der Lösungen endlich ist. Bei $a < 1$ würde a^x gegen null gehen und unendlich viele Schnittpunkte mit $b\cos x$ haben. Da $a^x > 1$ für $x > 0$ ist, muss außerdem $|b| > 1$ sein, um überhaupt Schnittpunkte zu produzieren. Damit ist Aufgabenteil c) schon beantwortet.

Aufgrund der relativ großen Beliebigkeit kann man für Aufgabenteile a) und b) „angenehme“ Zahlen wählen. Zeichnet man beispielhaft die Graphen der Kurven a^x und $b\cos x$, stellt sich das Problem wie folgt dar:



In grün dargestellt ist die Funktion $f(x) = a^x$, in rot die Funktion $g(x) = b\cos x$, wobei allerdings auf der x-Achse hier Vielfache von 2π gezählt werden.

Man erkennt leicht, dass innerhalb eines Intervalls von der Breite 2π immer genau zwei Schnittpunkte liegen. Die Kurve f schneidet immer einen positiven Peak der Kosinusfunktion doppelt, so dass in diesem Beispiel eine ungerade Anzahl von positiven Schnittpunkten vorliegt. Man muss die Zahlen a und b also so wählen, dass die „grüne“ Kurve zwischen zwei positiven Peaks der „roten“ Kurve austritt. In diesem Beispiel tritt sie nach Peak Nummer 5 aus und wir haben 11 Schnittpunkte.

Da wir genau 1983 positive Nullstellen wollen, muss der Austritt erfolgen nach Peak Nummer 991. Daher muss gelten:

$$a^{991\cdot 2\pi} = a^{1982\pi} < b$$

und

$$a^{992\cdot 2\pi} = a^{1984\pi} > b$$

Wir setzen daher einfach

$$b = a^{1983\pi}$$

mit $a{,}b > 1$. Damit ist Aufgabenteil a) immer erfüllt. Wir geben nun $b = 2$ vor, so dass

$$a = 2^{\frac{1}{1983\pi}}$$

Dann ist a nur geringfügig größer als 1. Die „grüne“ Kurve beginnt also sehr flach, es ist $f(x) \approx 1$ für kleine x. Der erste Schnittpunkt liegt also etwa bei

$$1 \approx 2\cos x_0$$

$$x_0 \approx \frac{\pi}{3} \approx 1.047$$

Daher gilt $[x_0] = 1$, was Aufgabenteil b) erfüllt.

Aufgabe 221045:
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = x^4 - 16 + 5x^3 + 6x^2 - 4x = (x^2-4)(x^2+4) + 5x \cdot x^2 + 6x^2 - 4x \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x+3x) \cdot x^2 + (2x) \cdot (3x) + (2x-3x) \cdot 4 \\ &= (x^2-4)(x^2+4) + (2x) \cdot (x^2+4) + (3x) \cdot (x^2-4) + (2x) \cdot (3x) \\ &= (x^2 - 4 + 2x) \cdot (x^2 + 4 + 3x) = (x^2 + 2x - 4) \cdot (x^2 + 3x + 4)\ . \end{aligned}$$

Da $x^2 + 3x + 4 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$ stets positiv ist, folgt also aus der Gleichung der Aufgabenstellung $x^2 + 2x - 4 = 0$ bzw. $(x+1)^2 = 5$, also $x = -1 \pm \sqrt{5}$, sodass die Gleichung genau zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt, $\square$.

Aufgabe 231045:
Ermitteln Sie alle diejenigen Winkelgrößen x, für die $0° \leq x \leq 180°$ (1) und

$$\left(2^{\sqrt{\sin x}} - \sin x\right) \cdot \sin x = 1 \qquad (2)$$

gilt!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $\sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} = 1 + \sin^2 x$.

Für den angegebenen Bereich für x ist $0 \leq \sin x \leq 1$. Also ist $\sqrt{\sin x} \leq 1$ und damit $2^{\sqrt{\sin x}} \leq 2$, wobei Gleichheit nur genau für $\sin x = 1$, also $x = 90°$ eintritt.

Für alle reellen Zahlen z gilt $2z \leq 1 + z^2$, wobei Gleichheit nur für $z = 1$ eintritt, da diese Ungleichung äquivalent ist zu $0 \leq 1 - 2z + z^2 = (1-z)^2$.
Also ist für $x \neq 90°$ und damit $z := \sin x \neq 1$

$$1 + \sin^2 x = \sin x \cdot 2^{\sqrt{\sin x}} < \sin x \cdot 2 < 1 + \sin^2 x$$

was ein Widerspruch darstellt. Also kann x nicht verschieden von $90°$ sein.
Für $x = 90°$ und damit $\sin x = 1$ folgt aber schnell die Identität $\left(2^{\sqrt{1}} - 1\right) \cdot 1 = (2^1 - 1) = 1$, sodass es genau eine Lösung für x im vorgegebenen Intervall gibt, nämlich $x = 90°$.

Aufgabe 251044:
Ermitteln Sie alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen r, für die die Gleichung

$$\frac{2x}{r(x+r)} + \frac{1}{x-2r} = \frac{4x - r + 6}{r(x-2r)(x+r)}$$

a) genau zwei verschiedene reelle Lösungen, b) genau eine reelle Lösung, c) keine reelle Lösung besitzt!

Lösung von cyrix:
Ist $x \neq -r$ und $x \neq 2r$, so geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner äquivalent über in

$$4x - r + 6 = (2x)(x-2r) + r(x+r) = 2x^2 - 4rx + rx + r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2x^2 - (3r+4)x + r^2 + r - 6 = 0$$

also $x^2 - \frac{3r+4}{2} \cdot x + \frac{r^2+r-6}{2} = 0$. Diese quadratische Gleichung in x hat genau die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3r+4}{4} \pm \sqrt{\frac{D}{16}} \qquad \text{mit}$$

$$D = (3r+4)^2 - 8(r^2+r-6) = 9r^2 + 24r + 16 - 8r^2 - 8r + 48 = r^2 + 16r + 64 = (r+8)^2$$

also $x_{1/2} = \frac{3r+4 \pm (r+8)}{4}$, d. h. $x_1 = \frac{3r+4-r-8}{4} = \frac{r}{2} - 1$ und $x_2 = \frac{3r+4+r+8}{4} = r + 3$.

Diese beiden Lösungen fallen genau für $r = -8$ zusammen.
Nun müssen noch die Scheinlösungen dieser quadratischen Gleichung ausgeschlossen werden, für die $x = -r$ oder $x = 2r$ ist:

Fall 1.1: Es ist $-r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = 2$.
Fall 1.2: Es ist $-r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{3}{2}$.
Fall 2.1: Es ist $2r = x_1 = \frac{r}{2} - 1$. Das ist äquivalent zu $r = -\frac{2}{3}$.
Fall 2.2: Es ist $2r = x_2 = r + 3$. Das ist äquivalent zu $r = 3$.

Zusammenfassend ergibt sich also, dass die Gleichung der Aufgabenstellung genau für $r \in \left(\{-8, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 2, 3\right\}$ genau eine Lösung besitzt, für alle anderen von Null verschiedenen r genau zwei und nie gar keine Lösung besitzt.

Aufgabe 271041:
Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = 0$$

genau zwei reelle Lösungen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 10 = (x-2)^4 + x^2 - 2x - 6 = (x-2)^4 + (x-1)^2 - 7$$

definierte Funktion. Für sie gilt:

(1) Es ist $f(0) = 10 > 0$.
(2) Für alle x im Intervall $1 \leq x \leq 2$ ist

$$\begin{aligned} -1 \leq x - 2 \leq 0 \qquad &\text{also} \qquad (x-2)^4 \leq 1 \qquad \text{und} \\ 0 \leq x - 1 \leq 1 \qquad &\text{also} \qquad (x-1)^2 \leq 1 \qquad \text{also} \\ f(x) &\leq 1 + 1 - 7 < 0 \end{aligned}$$

(3) Es ist $f(4) = 16 + 9 - 7 > 0$.
(4) Im Intervall aller $x < 1$ ist f streng monoton fallend, denn aus $x_1 < x_2 < 1$ folgt

$$\begin{aligned} x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \qquad &\text{also} \qquad (x_1-2)^4 > (x_2-2)^4 \qquad \text{und} \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \qquad &\text{also} \qquad (x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 \qquad \text{also} \qquad f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

(5) Im Intervall aller $x > 2$ ist f streng monoton steigend, denn aus $2 < x_1 < x_2$ folgt

$$\begin{array}{lllll} 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 & \text{also} & (x_1-2)^4 < (x_2-2)^4 & \text{und} & \\ 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 & \text{also} & (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 & \text{also} & f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Wegen (1), (2) gibt es im Intervall $(0;1)$ und wegen (2), (3) im Intervall $(2;4)$ aufgrund der Stetigkeit von f je mindestens eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Wegen (4) gibt es unter allen $x < 1$ und wegen (5) unter allen $x > 2$ auch jeweils keine weitere Lösung; wegen (2) liegt auch im Intervall $[1;2]$ keine Lösung. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Aufgabe 281044:
Beweisen Sie, dass für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wie man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann, gilt

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = (x^2+4)(x^2-6x+10) = (x^2+4)((x-3)^2+1)$$

Für alle reellen x gilt $x^2 + 4 > 0$ und $(x-3)^2 + 1 > 0$. Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt 0 wäre.
II. Für alle reellen x wird

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = x^2(x^2 - 6x + 9) + 5\left(x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{144}{25}\right) - \frac{144}{5} + 40 =$$

$$= x^2(x-3)^2 + 5\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \geq \frac{56}{5} > 0$$

Aufgabe 291042:
Von zwei reellen Zahlen werde gefordert:
Die Summe aus dem Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.
Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Für die Summe $s := x + y$ zweier reeller Zahlen x, y mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1 \qquad (1)$$

folgt zunächst

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{s-x} + \frac{1}{x(s-x)} = 1$$

und daraus

$$x^2 - sx + s + 1 = 0 \qquad (2)$$

Da in (1) notwendig $x \neq 0$ und $y = s - x \neq 0$ gilt, folgt aus (2) weiter

$$0 \neq x(s-x) = sx - x^2 = s + 1 \qquad \text{d. h.} \qquad s \neq -1 \qquad (3)$$

Andererseits wird (2) durch quadratische Ergänzungen zu

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - s - 1$$

Folglich ist $s^2 - 4s - 4 \geq 0$, $(s-2)^2 \geq 8$ und schließlich

$$|s - 2| \geq 2\sqrt{2} \qquad (4)$$

Insgesamt liegt s also notwendigerweise in einem der Intervalle

$$s < -1; \qquad -1 < s \leq 2 - 2\sqrt{2}; \qquad s \geq 2 + 2\sqrt{2} \qquad (5)$$

(II) Ist umgekehrt s aus einem dieser Intervalle, so sind die Zahlen

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - s - 1}$$

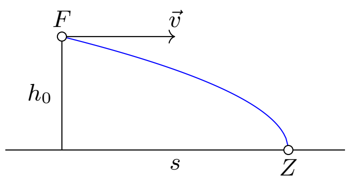
reelle (wegen (4)), $\neq 0$ (wegen (3)) und es gilt $x + y = s$ sowie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$. Also sind die gesuchten Werte für s genau diejenigen, die in einem der Intervalle aus (5) liegen.

I.II Bewegungsaufgaben

I Runde 1

Aufgabe V01002:
Schiffbrüchigen soll mit Hilfe eines Flugzeuges, welches in 500 m Höhe mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fliegt, Hilfe gebracht werden.
In welcher Entfernung von den Schiffbrüchigen muss der Verpflegungskanister ausgelöst werden, damit er sein Ziel erreicht? (g = 10 m/s^2)

Lösung von Steffen Polster:



Der Kanister muss in der Entfernung s vom Zielpunkt abgeworfen werden, da er längs der Bahn eines waagerechten Wurfs den Zielpunkt erreicht. Für einen waagerechten Wurf gilt:

$$s = v_0 \cdot t \qquad ; \qquad h = h_0 - \frac{g}{2}t^2$$

wobei v_0 die Flugzeuggeschwindigkeit, h_0 die Abwurfhöhe und t die Wurfzeit ist. Der Boden wird für $h = 0$ erreicht, so dass sich ergibt

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad ; \qquad s = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt $s \approx 278$ m.

Aufgabe 011013:
Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in km/h)?
b) Wie lang ist der Zug?

Lösung von Christiane Czech:
Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v in 9 s an dem Fußgänger vorbei, der ihm in dieser Zeit 9 m entgegenkommt. Der Zug fährt also eine Strecke von $s - 9$ m, wobei s die Länge des Zuges ist. Damit ist

$$v = \frac{s - 9m}{9s}$$

Da der Zug in 27 s eine Strecke von 171 m+s zurücklegt, ist aber auch

$$v = \frac{171m + s}{27s}$$

Nach Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Umstellen erhalten wir $s = 99$ m und durch Einsetzen $v = 10\frac{m}{s} = 36\frac{km}{h}$.

Aufgabe 211011:
Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.

Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, dass er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.

Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die mit dem PKW zurückgelegte Strecke sei x km, die mit dem Zug zurückgelegte Strecke y km. Die Gesamtstrecke war dann $(x + y)$ km lang, und es gilt

$$x + \frac{y}{5} = \frac{x + y}{3} \quad (1) \qquad \text{sowie} \qquad \frac{x + y}{2} = x + (x + 20) \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$15x + 3y = 5x + 5y \qquad ; \qquad y = 5x \tag{3}$$

aus (2) folgt

$$x + y = 2x + 2x + 40 \qquad ; \qquad y = 3x + 40 \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4) folgt $5x = 3x + 40$ und daraus $x = 20$. Nach (3) ergibt sich damit $y = 100$.

Der Reisende legte folglich mit dem PKW 20 km und mit dem Zug 100 km zurück, Die Gesamtstrecke betrug also 120 km.

II Runde 2

Aufgabe 041024:
Der Weg von einem Ort A nach einem Ort B ist 11,5 km lang und führt zuerst bergauf, dann verläuft er auf gleicher Höhe und schließlich bergab. Ein Fußgänger, der von A nach B ging, legte diesen Weg in 2 h 54 min zurück.
Für den Rückweg auf gleichem Kurs brauchte er 3 h 6 min. Dabei ging er jeweils bergauf mit einer Geschwindigkeit von $3\frac{km}{h}$, auf dem Mittelteil mit einer Geschwindigkeit von $4\frac{km}{h}$ und bergab mit $5\frac{km}{h}$.
Wie lang sind die einzelnen Teilabschnitte, wenn man voraussetzt, dass auf jedem Teilabschnitt die jeweilige Geschwindigkeit konstant war?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der drei Teilabschnitte seien a, b und $a+x$.
Dann gelten:

$$2a+b+x=11{,}5 \tag{1}$$
$$\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{a+x}{5}=2{,}9 \tag{2}$$
$$\frac{a+x}{3}+\frac{b}{4}+\frac{a}{5}=3{,}1 \tag{3}$$

Aus (2) und (3) erhält man $x=1{,}5$ und damit aus (1) $2a+b=10$ und aus (2) $32a+15b=156$.
Aus diesen Gleichungen berechnet man $b=4$ und $c=3$.

Der Weg führt 3 km bergauf, dann 4 km auf gleicher Höhe und schließlich 4,5 km bergab, wenn man von A nach B geht. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 081024:
Ein Kraftwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Straße von A nach B. Ein zweiter Kraftwagen fährt auf der gleichen Straße ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit von B nach A.
Beide Kraftwagen beginnen diese Fahrt zur gleichen Zeit in A bzw. in B. An einer bestimmten Stelle der Straße begegnen sie einander.
Nach der Begegnung habe der erste noch genau 2 h bis nach B zu fahren, der zweite noch genau $\frac{9}{8}$ h bis nach A. Die Entfernung zwischen A und B beträgt (auf der Straße gemessen) 210 km.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Kraftwagen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Maßzahlen der Geschwindigkeiten (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) der beiden Kraftwagen K_1, K_2 seien v_1, v_2; die Maßzahlen der Zeiten (in h), in denen sie die Strecke AB durchfahren, seien t_1, t_2.

Dann gilt (1) $210=v_1t_1=v_2t_2$.
Ferner ist sowohl (t_1-2) h als auch $(t2-\frac{9}{8})$ h die Zeit vom Fahrtbeginn bis zur Begegnung, so dass (2) $t_1=t_2+\frac{7}{8}$ gelten muss.

Schließlich ergibt sich die Entfernung vom Treffpunkt T nach B als $(v_1\cdot 2)$ km und von T nach A als $(v_2\cdot\frac{9}{8})$ km, woraus (3) $v1\cdot 2+v_2\cdot\frac{9}{8}=210$ folgt.

Die Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ergibt sich mit

$$210\cdot t_2\cdot 2+210\cdot\left(t_2+\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{9}{8}=210\cdot\left(t_2+\frac{7}{8}\right)\cdot t_2$$
$$t_2^2-\frac{9}{4}t_2-\frac{63}{64}=0$$
$$t_{2_{1;2}}=\frac{9}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{81+63}=\frac{9}{8}\pm\frac{12}{8}$$

Davon ist allein $t_2=\frac{21}{8}$ brauchbar, da $t_2>0$ gilt. Nach (2) und (1) folgt hieraus weiter $t_1=\frac{7}{2}$ und $v_1=60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sowie $v_2=80\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufgabe 111022:
Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden. Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.
a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?
b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Entfernung von A nach B betrage s km. Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4}\frac{km}{h}$ und das zweite mit $\frac{s}{3}\frac{km}{h}$.
Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt soweit von B entfernt wie das zweite, wenn

$$s - \frac{s}{4}t = 2\left(s - \frac{2}{3}t\right)$$

gilt. Wegen $s \neq 0$ ist dies äquivalent mit $1 - \frac{t}{4} = 2\left(1 - \frac{t}{3}\right)$, also mit $t = \frac{12}{5} = 2{,}4$.
Nach genau 2,4 h war daher das erste Auto doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.

b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{5}s$ genau $\frac{3}{5}s$ des Weges, das zweite wegen $\frac{s}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}s$ genau $\frac{4}{5}$ des Weges zurück.

III Runde 3

Aufgabe 041031:
Ein Fußgänger geht (mit konstanter Geschwindigkeit) um 9.00 Uhr von A nach dem 12,75 km entfernten B.
Auf der gleichen Straße fährt um 9.26 Uhr ein Straßenbahnzug von A nach B ab. Er überholt den Fußgänger um 9.36 Uhr und fährt nach 4 Minuten Aufenthalt in B wieder zurück. Dabei begegnet er dem Fußgänger um 10.30 Uhr.

a) Wieviel Kilometer legen der Fußgänger und der Straßenbahnzug durchschnittlich in der Stunde zurück?

b) In welcher Entfernung von A überholt der Straßenbahnzug den Fußgänger, und wo begegnet er ihm bei der Rückfahrt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei v_1 die Geschwindigkeit des Fußgängers und v_2 die Geschwindigkeit der Straßenbahn. Sei s_1 die Strecke von A zum ersten Treffpunkt und s_2 die Strecke von B bis zum zweiten Treffpunkt. Dann gilt:

$$(1): \quad v_1 = \frac{s_1}{36} = \frac{12{,}75 - s_2}{90} \qquad ; \qquad (2): \quad v_2 = \frac{s_1}{10} = \frac{12{,}75 + s_2}{60}$$

Die Lösungen für dieses linearen Gleichungssystems sind $s_1 = 3$ und $s_2 = 5{,}25$ Damit:

$$v_1 = \frac{3\text{km}}{\frac{3}{5}\text{h}} = 5\frac{\text{km}}{\text{h}} \qquad ; \qquad v_2 = \frac{12{,}75\text{km} + 5{,}25\text{km}}{1\text{h}} = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Fußgänger legt in der Stunde durchschnittlich 5 km, der Straßenbahnzug in der gleichen Zeit durchschnittlich 18 km zurück.
b) Der Fußgänger wird, 3 km von A entfernt, vom Straßenbahnzug überholt und begegnet ihm, 5,25 km von B entfernt.

Aufgabe 121034:
Ein Lokomotivführer bemerkte am Anfang eines 20 km langen Streckenabschnitts s, dass er eine Verspätung von genau 4 min hatte.
Er fuhr daraufhin diese Strecke s mit einer um 10 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit, als sie der Fahrplan vorsah. Am Ende der Strecke s war erstmalig wieder Übereinstimmung mit dem Fahrplan erreicht.
Wie groß war die für s vorgesehene fahrplanmäßige Durchschnittsgeschwindigkeit?

Lösung von Steffen Polster:
Für den Weg gilt $s = 20$ km. Sind v_1 die vorgesehene Geschwindigkeit im Abschnitt s und t_1 die vorgesehene Zeit, so ist

$$v_1 = \frac{20km}{t_1} \tag{1}$$

Der Lokomotivführer fährt mit $v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h}$ und benötigt die Zeit t_2, die 4 min $= \frac{1}{15}$ h kürzer ist als t_1. Das ergibt

$$v_2 = v_1 + 10\frac{km}{h} = \frac{20km}{t_1 - \frac{1}{15}h} = t_2$$

Einsetzen von (1) führt zum Ergebnis $t_1 = \frac{2}{5}$ h $= 24$ min und der vorgesehenen Geschwindigkeit $v_1 = 50\frac{km}{h}$. Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

IV Runde 4

Aufgabe 011042:
Auf einem Fluss mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit v fährt ein Motorboot mit konstanter Eigengeschwindigkeit c stromab nach einem Ziel, das vom Start die Entfernung s hat, und wieder zurück.
Ein anderes Motorboot fährt mit der gleichen Eigengeschwindigkeit zu einem ebenfalls in der Entfernung s, aber genau senkrecht zur Strömungsrichtung liegenden Ziel und wieder zurück.
a) Wieviel reine Fahrzeit benötigen die beiden Boote?
b) Welches Ergebnis erhält man für $s = 250$ m, $v = 150\ \frac{m}{min}$ und $c = 250\ \frac{m}{min}$?

Lösung von Eckard Specht:
a) Wenn das Boot mit der Strömung fährt, addieren sich die Geschwindigkeiten. Fährt es ihr entgegen, ist die Differenz die Effektivgeschwindigkeit. Die Fahrzeit ist die Summe aus dem Abschnitt, auf dem das Boot mit $c + v$ fährt und dem mit $c - v$:

$$t_1 = \frac{s}{c+v} + \frac{s}{c-v} = \frac{2vs}{c^2 - v^2}$$

Bewegt es sich aber senkrecht zur Strömung, spielt die Geschwindigkeit des Flusses keine Rolle (sie muss natürlich vom Boot kompensiert werden). Dann ist $t_2 = \frac{2s}{c}$.
b) Nach Einsetzen der Zahlenwerte folgt: $t_1 = 1\frac{14}{30}$ min, im anderen Fall: $t_2 = 2$ min.

Aufgabe 031041:
Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.
Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 $\frac{km}{h}$ auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnungen: 1. Radfahrer: x, 2. Radfahrer: y, Länge der Brücke b, Geschwindigkeit der Radfahrer: $v_x = v_y$ und des Autos: v_A, Weg: s, Zeit: t

Zum Zeitpunkt t_0 fährt y los und zum Zeitpunkt t_1 x. Zum Zeitpunkt t_2 begegnen sich x und y, d. h. $s_{x,t_2} + s_{y,t_2} = b$. Da $s_{x,t_2} = \frac{3}{8}b$ ist damit $s_{y,t_2} = \frac{5}{8}b$.
Schließlich erreicht zum Zeitpunkt t_3 y das Ziel, also $s_{y,t_3} = b$ und damit $s_{x,t_3} = \frac{6}{8}b$. x gelangt zum Zeitpunkt t_4 zur anderen Seite der Brücke: $s_{x,t_4} = b$, d. h. $s_{x,t_4-t_3} = \frac{1}{4}b$.

Fall 1: Das Auto fahre in gleicher Richtung wie x, fährt damit bei t_3 los und kommt bei t_4 an, legt eine Strecke von $s_{A,t_4-t_3} = b$ zurück, d. h. es gilt

$$v_A = \frac{s_{A,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{b}{t_4 - t_3} \quad \text{und} \quad v_x = \frac{s_{x,t_4-t_3}}{t_4 - t_3} = \frac{\frac{b}{4}}{t_4 - t_3}$$

Damit ergibt sich $v_x = \frac{v_A}{4} = 20 \frac{\text{km}}{h}$.

Fall 2: Das Auto fahre in entgegengesetzter Richtung wie x, fährt damit bei t_0 los und kommt bei t_1 an und legt wieder eine Strecke von $s_{A,t_1-t_0} = b$ zurück, d. h. es gilt

$$v_A = \frac{s_{A,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{b}{t_1 - t_0} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{s_{y,t_1-t_0}}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{b}{4}}{t_1 - t_0}$$

Damit ergibt sich ebenfalls $v_y = v_x = \frac{v_A}{4} = 20 \frac{\text{km}}{h}$.

I.III Logarithmen-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 041016:
a) Berechnen Sie ohne Rechenhilfsmittel einen ganzzahligen Näherungswert für

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

b) Ist dieser Näherungswert kleiner oder größer als der exakte Wert?

Lösung von Annika Heckel:
Verwendete Formeln (bekannt aus dem Schulunterricht):

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v \tag{1}$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \tag{2}$$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \tag{3}$$

Nach (1) gilt

$$\lg 3 - \lg 2 = \lg \frac{3}{2}, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{\lg 5}{\lg \frac{3}{2}}$$

Nach (2) und (3) gilt:

$$x = \log_{\frac{3}{2}} 5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$$

Durch Ausprobieren ganzzahliger Werte für x erhält man:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1{,}5; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3{,}375; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5{,}0625; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7{,}59375$$

Es ist folglich 4 die beste ganzzahlige Näherung für x, weil sie am nächsten an die Lösung der Gleichung (= 5) kommt. Da $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 5$ ist folglich der Näherungswert $x = 4$ größer als die tatsächliche Lösung.

II Runde 2

Aufgabe 041022:
Berechnen Sie ohne Verwendung von Näherungswerten (ohne Benutzung von Logarithmentafel oder Rechenstab):

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 32 - 5 \cdot \lg 25$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Gesetze werden angewandt:
(1) $\lg(ab) = b \cdot \lg a$
(2) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$
(3) $\lg x = \log_{10} x$
(4) $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ und insbesondere $\log_a a = 1$, weil $a^1 = a$ und folglich $\lg 10 = 1$.
Damit kann nun äquivalent umgeformt werden:

$$y = 10 - 2 \cdot \lg 2^5 - 5 \cdot \lg 5^2 = 10 - 2 \cdot 5 \cdot \lg 2 - 5 \cdot 2 \lg 5 = 10 - 10 \cdot \lg 2 - 10 \cdot \lg 5 =$$

$$= 10 \cdot (1 - \lg 2 - \lg 5) = 10 \cdot (1 - (\lg 2 + \lg 5)) = 10 \cdot (1 - (\lg(2 \cdot 5))) = 10 \cdot (1 - \lg 10) = 0$$

Aufgabe 081022:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Bedingung $\log_2 [\log_2(\log_2 x)] = 0$ genügen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genügt x der geforderten Bedingung, so setzen wir $\log_2(\log_2 x) = a$ und erhalten $\log_2 a = 0$.
Das bedeutet $2^0 = a$, also $a = 1$.
Damit ist $\log_2(\log_2 x) = 1$. Wir setzen $\log_2 x = b$ und erhalten $\log_2 b = 1$. Das bedeutet $b = 2$.

Damit ist $\log_2 x = 2$, also muss $x = 4$ sein, wenn es der geforderten Bedingung genügen soll.

Aufgabe 091021:
Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten $\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}$.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 \lg 3790 < 4$ also $[\lg 3790] = 3$.

Wegen $10^{-2} < 0{,}0379 < 10^{-1}$ ist $-2 \lg 0{,}0379 < -1$ also $[\lg 0{,}0379] = -2$.
Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1{,}5$.

III Runde 3

Aufgabe 021032:
Berechnen Sie:

$$\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128$$

Lösung von André Lanka:

$$\begin{gathered}\log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 \frac{1}{32} + ... + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 1 + \log_2 2 + ... + \log_2 64 + \log_2 128 = \\ = \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 \frac{1}{128} + \log_2 128 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{32} + \log_2 32 + ... \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 2 + \log_2 1 \\ = \log_2 \frac{1}{256} - \log_2 128 + \log_2 128 - \log_2 64 + \log_2 64 - \log_2 32 + \log_2 32 ... - \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 1 \\ = \log_2 \frac{1}{256} + \log_2 1 = \log_2 256 + 0 = -\log_{2^8} = -8\end{gathered}$$

Aufgabe 031031:
Man löse die Gleichung $\lg(2x+1) - \lg x = 2$.

Lösung von Manuel Naumann:
Mit Hilfe der Logarithmengesetze und der Tatsache, dass $\lg x = 2$ nur für $x = 100$ gilt, folgt:

$$\lg(2x+1) - \lg x = \lg \frac{2x+1}{x} = 2$$
$$\frac{2x+1}{x} = 100 \Rightarrow x = \frac{1}{98}$$

Aufgabe 071032:
Es ist zu beweisen, dass $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ ist, wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind und $a \neq 1, b \neq 1$ ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $\log_a b$ diejenige reelle Zahl x, für die $a^x = b$ gilt. Analog ist $\log_b c$ diejenige reelle Zahl y, für die $b^y = c$ gilt. Dann ist $c = b^y = (a^x)^y = a^{x \cdot y}$, also $\log_a c = x \cdot y = \log_a b \cdot \log_b c$, $\square$.

Aufgabe 081033:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b mit $a > b$ und $a^2 + b^2 = 6ab$ stets gilt:

$$\lg(a+b) - \lg(a-b) = \frac{1}{2} \lg 2$$

Lösung von cyrix:
Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 6ab \\ 2a^2 + 2b^2 - 4ab &= a^2 + b^2 + 2ab \\ 2(a-b)^2 &= (a+b)^2 \\ \sqrt{2}|a-b| &= |a+b| \end{aligned}$$

wobei ebenfalls nach Voraussetzung $a > b$ und damit $a - b > 0$ und daher $|a-b| = a - b$. Ferner gilt a, b positiv und damit $a + b = |a+b| > 0$. Es gilt also: $\sqrt{2}(a-b) = a + b$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \sqrt{2} \\ \lg \frac{a+b}{a-b} &= \lg 2^{\frac{1}{2}} \\ \lg(a+b) - \lg(a-b) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 101034:
Unter $n!$ (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$ gilt:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + ... + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

Lösung von cyrix:
Es ist bekanntermaßen für alle positiven reellen Zahlen $a \neq 1$ und $b \neq 1$ die Identität $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ erfüllt.
Setzen wir dies ein, so wird die linke Seite der zu zeigenden Gleichung zu

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots \frac{1}{\log_n x} = \frac{\ln 2}{\ln x} + \frac{\ln 3}{\ln x} + \frac{\ln 4}{\ln x} + \dots \frac{\ln n}{\ln x} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n}{\ln x} =$$

$$= \frac{\ln(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)}{\ln x} = \frac{\ln(n!)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln_{n!} x}$$

$\square$.

Aufgabe 121035:
Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + ... + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \lg\frac{606}{625}$$

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lg\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \lg(k^2-1) - 2\lg(k) = \lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k) \qquad \text{also}$$

$$\lg\left(1 - \frac{1}{25^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{26^2}\right) + \dots + \lg\left(1 - \frac{1}{100^2}\right) = \sum_{k=25}^{100} \lg\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=25}^{100} (\lg(k-1) + \lg(k+1) - 2\lg(k)) = \sum_{k=25}^{100} \lg(k-1) + \sum_{k=25}^{100} \lg(k+1) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \sum_{k=24}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{101} \lg(k) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(25) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \sum_{k=26}^{99} \lg(k) + \lg(100) + \lg(101) - 2\lg(25) - 2\lg(100) - 2\sum_{k=25}^{100} \lg(k)$$

$$= \lg(24) + \lg(101) - \lg(25) - \lg(100) = \lg\left(\frac{24 \cdot 101}{25 \cdot 100}\right) = \lg\left(\frac{606}{625}\right)$$

Aufgabe 141033:
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a, für die $a \neq 1$ gilt.
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $x^{\log_a x} = a^2 x$ erfüllen!

Lösung von Nuramon:
Damit $\log_a x$ definiert ist, muss x positiv sein. Durch Anwendung von $\log_a$ auf beide Seiten erhalten wir die äquivalente Gleichung $(\log_a x)^2 = 2 + \log_a x$.
Dies ist eine quadratische Gleichung in $\log_a x$ mit Lösungen $\log_a x = -1$ und $\log_a x = 2$.
Damit erfüllt x die Gleichung genau dann, wenn $x = \frac{1}{a}$ oder $x = a^2$ gilt.

Aufgabe 161034:
Beweisen Sie, dass gilt

$$\lg\left(1+\frac{1}{1}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{2}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{3}\right) + ... + \lg\left(1+\frac{1}{99}\right) = 2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt nach den Logarithmengesetzen

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lg(n+1) - \lg n \qquad (n > 0)$$

Summiert man nun von $n = 1$ bis $n = 99$, so erhält man

$$\lg\left(1+\frac{1}{99}\right) + \lg\left(1+\frac{1}{98}\right) ... + \lg\left(1+\frac{1}{1}\right) = \lg 100 - \lg 99 + \lg 99 - + ... - \lg 2 + \lg 2 - \lg 1 =$$

$$= \lg 100 - \lg 1 = 2 - 1 = 0$$

Die Behauptung ist damit bewiesen.

Aufgabe 171033:
Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term

$$z = \frac{\lg(7-4\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}$$

definiert werden soll.
Jens sagt, dass z eine natürliche Zahl ist; Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl; Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, dass der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie wer recht hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $2-\sqrt{3} > 0$, also ist $\lg(2-\sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2-\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

also ist auch $7 - 4\sqrt{3} > 0$ und folglich $\lg(7-4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2-\sqrt{3} \neq 1$, also $\lg(2-\sqrt{3}) \neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z = \frac{\lg((2-\sqrt{3})^2)}{\lg(2-\sqrt{3})} \qquad \text{also} \qquad z = \frac{2\lg(2-\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})} = 2$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

IV Runde 4

Aufgabe 081045:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $4 \cdot \log_4 x + 3 = 2 \cdot \log_x 2$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Mit $\log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ und $y := \log_2 x$ geht die Gleichung über in $[4 \cdot \frac{y}{2} + 3 = 2 \cdot \frac{1}{y}$, also

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Damit erhält man die erste Lösung $y_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ und also $x_1 = 2^{y_1} = \sqrt{2}$ und als zweite $y_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ und damit $x_2 = 2^{y_2} = \frac{1}{4}$.
Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt beide Werte.

Aufgabe 091042:
Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0, b > 0$ und $a \neq 1, b \neq 1$ ermittle man alle Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Es gilt $\ln_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$ und somit

$$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b \iff \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a} \iff \left(\frac{\ln x}{\ln b}\right)^2 = (\log_b x)^2 = 1$$
$$\iff x = b \vee x = \frac{1}{b}\ .$$

Aufgabe 171045:
Beweisen Sie, dass der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} \qquad (1)$$

eine reelle Zahl definiert und dass diese rational ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um zu zeigen, dass der Term (1) eine reelle Zahl definiert, benutzt man, dass die Funktion $\lg x$ für alle $x > 0$ reelle Werte annimmt, und dass $\lg x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 1$ ist. Daher reicht es, die Ungleichungen

$$5\sqrt{2} - 7 > 0, \qquad 3 - 2\sqrt{2} > 0, \qquad 3 - 2\sqrt{2} \neq 1 \qquad (2)$$

zu beweisen, etwa so:

$$50 > 49 \to \sqrt{50} > \sqrt{49} \to 5\sqrt{2} - 7 > 0$$
$$9 > 8 \to \sqrt{9} > \sqrt{8} \to 3 - 2\sqrt{2} > 0$$

Wäre $3 - 2\sqrt{2} = 1$, so wäre $\sqrt{2} = 1$ oder $2 = 1$.
Um nun zu zeigen, dass (1) sogar rational ist, stellt man fest, dass

$$5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^2 \qquad 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \qquad (3)$$

bzw. $(5\sqrt{2} - 7)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^3$ (4) gilt. Benutzt man z. B. (4), so erhält man

$$\frac{\lg(5\sqrt{2} - 7)}{\lg(3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\lg((3 - 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lg((3 - 2\sqrt{2})}{\lg(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3}{2}$$

Das Kürzen der Logarithmen ist nach (2) erlaubt. Da $\frac{3}{2}$ eine rationale Zahl ist, ist alles gezeigt.

I.IV Wurzel-Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 221012:
In einer Diskussion über irrationale Zahlen wurde erwähnt, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ irrational sind.

Peter meinte: „Dann muss auch $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational sein.“ „Wie beweist du das?“ fragte Katrin. „Es gibt doch keinen Satz, wonach stets dann $x+y$ irrational sein muss, wenn x und y irrational sind.“ „Ja, aber speziell für die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ kann ich beweisen, dass auch ihre Summe $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irrational ist“, erwiderte Peter.

a) Bestätigen Sie durch ein Beispiel Katrins Meinung, dass es irrationale Zahlen x, y mit rationaler Summe $x+y$ gibt!

b) Wie könnte Peter den von ihm angekündigten Beweis führen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Zahlen $x=\sqrt{2}$ und $y=-\sqrt{2}$ beispielsweise sind irrational, aber ihre Summe $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ ist rational.

b) Angenommen, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ wäre rational. Dann gäbe es ganze Zahlen a,b mit $b\neq 0$ und $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$. Wegen $\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$ wäre auch $a\neq 0$. Weiter folgte

$$\sqrt{5}=\frac{a}{b}-\sqrt{2} \quad ; \quad 5=\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}\sqrt{2}+2$$
$$\frac{2a}{b}\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}-3 \quad ; \quad \sqrt{2}=\frac{a}{2b}-\frac{3b}{a}=\frac{a^2-3b^2}{2ab}$$

also der Widerspruch, dass $\sqrt{2}$ rational wäre. Daher war die eingangs gemachte Annahme falsch, d. h., $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ist irrational.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ wäre auch $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-7=\sqrt{10}$ rational, was ein Widerspruch ist, da 10 keine Quadratzahl und die Wurzel einer natürlichen Zahl, die nicht Quadratzahl ist, bekanntermaßen irrational ist.

II Runde 2

Aufgabe 051023:
Beweise: Wenn gilt $0<b<a$ (1) und $a^2+b^2=6ab$ (2) dann ist

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}$$

Lösung von Kitaktus:
Da a und b von 0 verschieden sind, gilt

$$\frac{6ab+2ab}{6ab-2ab}=2$$

Unter Verwendung von (2) folgt

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=2$$

Wegen $a>b>0$ sind $a+b$ und $a-b$ positiv und man kann die Wurzel ziehen und erhält

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}.$$

III Runde 3

Aufgabe 191032:
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die erstens in der Gleichung

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} + 3^{\sqrt{2x-4y+1}} = 2$$

der Term auf der linken Seite (als reelle Zahl) definiert ist und zweitens diese Gleichung erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der genannte Term ist genau dann definiert, wenn die Ungleichungen

$$1 + x - 3y \geq 0 \quad (2) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 \geq 0 \quad (3)$$

gelten. Ist dies der Fall, so gelten die Ungleichungen

$$2^{\sqrt{1+x-3y}} \geq 1 \quad (4) \qquad ; \qquad 3^{\sqrt{2x-4y+1}} \geq 1 \quad (5)$$

Also kann (1) nur dann erfüllt werden, wenn sowohl in (4) als auch in (5) das Gleichheitszeichen steht. Dies trifft nur dann zu, wenn

$$1 + x - 3y = 0 \quad (6) \qquad \text{und} \qquad 2x - 4y + 1 = 0 \quad (7)$$

gelten. Das Gleichungssystem (6), (7) hat genau das Paar

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

als Lösung. Umgekehrt folgt für dieses Paar aus (6), (7) auch (2), (3) und (1). Daher hat genau dieses Paar alle verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 341035:
Hat man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, so werde ein Punkt der Ebene genau dann ein rationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde genau dann ein irrationaler Punkt genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde genau dann ein gemischter Punkt genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational, die andere irrational ist.
a) Gibt es eine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?
b) Für jede der drei Sorten beantworte man folgende Frage:
Gibt es eine Gerade, auf der sich von dieser Sorte genau ein Punkt, dagegen von jeder der beiden anderen Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet?

Lösung von cyrix:
Wir zeigen zuerst folgendes Lemma: Befinden sich auf einer Gerade mindestens zwei rationale Punkte, dann enthält diese Gerade keine irrationalen oder keine gemischten Punkte.

Beweis:
Seien (x_1,y_1) und (x_2,y_2) zwei verschiedene rationale Punkte, die auf der Geraden liegen. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x_1 = x_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur y-Achse und jeder Punkt auf der Gerade besitzt die gleiche x-Koordinate. Also hat jeder Punkt mindestens eine rationale Koordinate, sodass es auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

2. Fall: $y_1 = y_2$. Dann verläuft die Gerade parallel zur x-Achse, sodass alle Punkte auf ihr die gleiche – eine rationale – y-Koordinate besitzen und es wieder auf dieser Geraden keine irrationalen Punkte gibt.

3. Fall: $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$. Dann verläuft die Gerade weder parallel zur x-, noch zur y-Achse und es gibt reelle Zahlen $m \neq 0$ und n, sodass die Punkte (x,y) auf der Geraden alle die Gleichung $y = mx + n$ erfüllen. Dabei sind jedoch $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ und $n = y_1 - mx_1$ beide sogar rational, sodass für jedes rationale x auch $y = mx + n$ rational ist. Umgekehrt ist aber auch für jedes rationale y auch $\frac{y-n}{m} = x$ rational, sodass es auf der Geraden keine gemischten Punkte gibt, $\square$.

Mit diesem Lemma lässt sich die Frage aus Aufgabenteil a) sowie die Fragen aus Aufgabenteil b), die sich auf die Sorten gemischter bzw. irrationaler Punkte beziehen, leicht negativ beantworten, da in all diesen Situationen jeweils mindestens zwei rationale Punkte auf der Geraden liegen müssten, was dazu führt, dass eine der beiden anderen Sorten nicht auf der Gerade vertreten sein kann.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, ob es eine Gerade gibt, die genau einen rationalen und jeweils mindestens zwei gemischte und irrationale Punkte enthält. Dies ist der Fall, wie etwa die Gerade, die durch die Gleichung $y = \sqrt{2} \cdot x$ beschrieben wird, zeigt. Diese enthält nämlich den rationalen Punkt (0,0), die gemischten Punkte $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$ und die irrationalen Punkte $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$, wobei jeweils in der x- und y-Koordinate das gleiche Vorzeichen zu wählen ist.

IV Runde 4

Aufgabe 011043:
Es sei
$$s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$
Berechnen Sie s_2 und s_3 und versuchen Sie, einen rationalen Wert für s zu finden! (Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösung von Eckard Specht:
Wir setzen $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Dann gilt
$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$
und weiter nach der 3. binomischen Formel
$$u^3 v^3 = (20 + 14\sqrt{2} \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 8$$
also $uv = 2$. Ferner gilt stets
$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3) \Rightarrow s^3 - 6s - 40 = 0$$
Glücklicherweise lässt sich eine Wurzel dieser kubischen Gleichung (die bereits in reduzierter Form vorliegt) durch Probieren leicht finden, nämlich $s = 4$.
Eine Polynomdivision durch $(s - 4)$ liefert nun $s^3 - 6s - 40 = (s - 4)(s^2 + 4s + 10) = 0$, d. h. die anderen beiden Wurzeln sind komplex: $s_{2,3} = -2 + \sqrt{6}i$. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt also 4; die weiteren Potenzen sind demnach $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$.

Aufgabe 061045:
Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung genügen:
$$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{2a + x}$$

Lösung von cyrix:
Multiplikation der Gleichung mit $\sqrt{a + x}$ überführt diese in (die wegen $a + x \neq 0$ äquivalente Gleichung) $a + x - |a| = \sqrt{(2a + x) \cdot (a + x)}$.

1. Fall: $a > 0$. Dann ist $|a| = a$ und man erhält durch Quadrieren $x^2 = x^2 + 3ax + 2a^2$ bzw. $x = -\frac{2}{3} \cdot a$. Damit erhält man $a + x = \frac{1}{3} \cdot a$ bzw.

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{\frac{1}{3}a} - \sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{3}a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{3a} = \sqrt{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) < 0 \leq \sqrt{2a - x}$$

   also einen Widerspruch zur Ausgangsgleichung, sodass es in diesem Fall keine Lösungen gibt.

2. Fall: $a \leq 0$. Dann ist $|a| = -a$, sodass die Gleichung übergeht in $2a + x = \sqrt{(2a+x) \cdot (a+x)}$.

   Fall 2.1: $2a + x = 0$. (Wegen $a + x \neq 0$ ist in diesem Fall $a \neq 0$, denn sonst würde aus $2a + x = 0$ nach Subtraktion von $a = 0$ sofort auch $a+x = 0$ folgen.) Dann ist $x = -2a$ und $\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a+x}$, sodass dies Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

   Fall 2.2: Es ist $2a + x \neq 0$, also auch $\sqrt{2a+x} \neq 0$, sodass wir dadurch dividieren können. Damit erhalten wir die Gleichung $\sqrt{2a+x} = \sqrt{a+x}$ bzw. nach Quadrieren $2a + x = a + x$, also $a = 0$. Tatsächlich vereinfacht sich aber in diesem Fall die Ausgangsgleichung zu $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{0}{x}} = \sqrt{x}$, was für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Zusammenfassung: Für positive a hat die Gleichung keine Lösung, für negative a ist jeweils $x = -2a$ die einzige Lösung und für $a = 0$ erfüllt jede positive reelle Zahl x die Gleichung.

Aufgabe 071046:
Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist $x \geq \sqrt{x}$, damit $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$, wobei aber letzteres ausgeschlossen ist, da man sonst wegen $x + \sqrt{x} = 0$ einen Nullnenner im Bruch unter der Wurzel auf der rechten Seite erhalten würde. Sei also ab sofort $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $\sqrt{x + \sqrt{x}} \neq 0$ geht die Gleichung äquivalent über in

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \text{bzw.} \qquad x - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Nach Division durch $\sqrt{x} \neq 0$ und umsortieren erhält man $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x-1}$. Quadriert man diese Gleichung, was wegen $x \geq 1$ und also $\sqrt{x} - \frac{1}{2} > 0$ eine Äquivalenzumformung ist, führt dies auf $x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1$ bzw. $\sqrt{x} = \frac{5}{4}$, also $x = \frac{25}{16}$.

Tatsächlich bestätigt die (mathematisch nicht notwendige) Probe (da es sich ausschließlich um Äquivalenzumformungen gehandelt hat), dass $x = \frac{25}{16}$ Lösung der Ausgangsgleichung ist. Diese ist auch, wie gezeigt, die einzige Lösung.

Aufgabe 131044:
Man untersuche, ob die Zahl

$$x = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

positiv, negativ oder gleich Null ist!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$x+\sqrt{2}=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{4+\sqrt{7}-(4-\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

Dann ist

$$x=0\Leftrightarrow x+\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{7}=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 14=(4+\sqrt{7})+(4-\sqrt{7})+2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow 6=2\sqrt{(4+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})}\Leftrightarrow 3=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$$

was eine wahre Aussage ist. Also ist $x=0$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Aus $4+\sqrt{7}>4-\sqrt{7}>0$ folgt $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}>0$. Daher folgt aus

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=4+\sqrt{7}-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}=8-2\sqrt{9}=2$$

bereits $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{2}$ und somit $x=0$.

Zweite Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Zunächst sind die auftretenden Wurzeln alle definiert, da wegen $2<\sqrt{7}<3$ die Radikanden nicht-negativ sind. Wir multiplizieren x mit der positiven Zahl $r=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{2}$ und erhalten mit der dritten binomischen Formel

$$r\cdot x=4+\sqrt{7}-2-\sqrt{16-7}-\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1-\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

Betrachte nun die Gleichung $y-1=\sqrt{2}\sqrt{4-y}$ für $2<y<3$. Beide Seiten sind positiv, daher ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und liefert

$$y-1=\sqrt{2}\sqrt{4-y}\iff(y-1)^2=8-2y\iff y^2-7=0\impliedby y=\sqrt{7}$$

Daraus folgt $r\cdot x=0$ und da r positiv war also $x=0$.

Aufgabe 141044:
Man ermittle alle rationalen Zahlen r, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^r=4$$

Lösung von weird:
Wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ist $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^r$ eine Lösung der Gleichung $x+\frac{1}{x}=4$, womit also dann

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^r=2\pm\sqrt{3}$$

gilt. Diese Gleichung hat aber einerseits für jede Vorzeichenwahl eine eindeutig bestimmte Lösung $r \in \mathbb{R}$, andererseits sind $r = \pm 2$ jeweils offensichtlich Lösungen, welche dann auch tatsächlich die gesuchten rationalen Lösungen der Aufgabe sind.

Aufgabe 181043B:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die erstens jede in dem Ausdruck

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

auftretende Wurzel und damit dieser Ausdruck insgesamt (als reelle Zahl) existiert und zweitens diese Zahl gleich 1 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Genau dann existiert jede in dem angegebenen Ausdruck auftretende Wurzel, wenn die Beziehungen gelten:

$$x \geq 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad x+3 \geq 4\sqrt{4-1} \qquad (2) \qquad ; \qquad x+3 \geq 6\sqrt{x-1} \qquad (3)$$

(I) Angenommen, für eine reelle Zahl x sei dies der Fall, und für sie gelte auch

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \qquad (4)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} &= 1 - \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \\ x+3-4\sqrt{x-1} &= 1 - 2\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + x + 6 - 6\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= 3 - \sqrt{x-1} \qquad (5) \end{aligned}$$

also $\sqrt{x-1} \leq 3 \quad (6)$.
Aus (4) und (5) folgt weiter

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 2 \quad \text{also} \quad \sqrt{x-1} \geq 2 \quad (7)$$

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$4 \leq x-1 \leq 9 \quad (9) \qquad \text{also} \qquad 5 \leq x \leq 10 \quad (10)$$

Daher können nur diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften haben.

(II) Umgekehrt gilt: Wenn eine reelle Zahl x die Bedingung (10) erfüllt, so gilt für sie (1) sowie (9), also (6) und (8); ferner gilt

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 \geq 0$$

also

$$x^2 + 6x + 9 \geq 16x - 16 \qquad \text{d. h.} \qquad (x+3)^2 \geq 16(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+3 > 0$ folgt) die Ungleichung (2).
Weiterhin gilt

$$x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2 \geq 0$$

also

$$x^2 + 16x + 64 \geq 36x - 36 \qquad \text{d. h.} \qquad (x+8)^2 \geq 36(x-1)$$

und daraus ergibt sich (da aus (10) auch $x+8 > 0$ folgt) die Ungleichung (3). Ferner gilt

$$(\sqrt{x-1} - 2)^2 = x - 1 - 4\sqrt{x-1} + 4 = x + 3 - 4\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (8) folgt (7). Weiterhin gilt

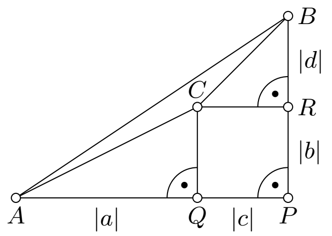
$$(3 - \sqrt{x-1})^2 = 0 - 6\sqrt{x-1} + x - 1 = x + 8 - 6\sqrt{x-1}$$

hieraus und aus (6) folgt (5).
Aus (5) und (7) aber ergibt sich, dass x auch (4) erfüllt. Somit haben genau diejenigen reellen Zahlen x, für die (10) gilt, die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 191043A:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für reelle Zahlen a,b,c,d kann man als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck APB mit Katheten der Längen $AP = |a| + |c <$ und $BP = |b < +|d|$ betrachten.
Q und R seien die Punkte auf den Katheten mit $AQ = |a|$ und $BR = |d|$. Der Punkt C ergänze das Dreieck QPR zu einem Rechteck (siehe Skizze).



Im Dreieck ABC gilt dann $AC + BC \geq AB$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(|a| + |c|)^2 + (|b| + |d|)^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \qquad (1)$$

Wählt man entsprechen der Aufgabe $a = 2\cos x \cos y$. $c = 2\sin x \sin y$, $b = d = \sin(x-y)$, so gilt nach einem Additionstheorem

$$a + c = 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2\cos(x-y)$$

und nach dem trigonometrischen Pythagoras

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 4(\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)) = 4$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man die Behauptung.

Aufgabe 191045:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine reelle Zahl x habe die genannten Eigenschaften. Dann gilt $x^2 + 5x + 28 \geq 0$, und, wenn man $y = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ setzt, $y^2 - 24 = 5y$.
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $y = 8$ und $y = -3$, so dass eine der Gleichungen

$$x^2 + 5x + 4 = 40 \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + 5x + 4 = -15$$

folgt. Von diesen beiden Gleichungen besitzt nur die erste reelle Lösungen, und zwar $x = -9$ und $x = 4$. Also können höchstens diese beide Zahlen die geforderten Eigenschaften haben.
Sie habe diese Eigenschaften auch, denn es gilt

$$(-9)^2 + 5(-9) + 28 = 64 \geq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 4^2 + 5 \cdot 4 + 28 = 64 \geq 0$$

also existiert für diese Zahlen x die Wurzel $\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ und es gilt

$$(-9)^2 + 5(-9) + 4 = 40 = 5 \cdot 8 = 5\sqrt{(-9)^2 + 5(-9) + 28} \qquad \text{bzw.}$$

$$4^2 + 5 \cdot 4 + 4 = 40 = 5 \cdot 8 = 5\sqrt{4^2 + 5 \cdot 4 + 28} \qquad (2)$$

Daher erfüllen genau die Zahlen $x = -9$ und $x = 4$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 331045:
Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational“ genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt“ genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.
a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational“, „irrational“, „gemischt“!
b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?
Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!
c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Lösung von cyrix:
a) Es kann keine Gerade geben, die nur aus rationalen oder irrationalen Punkten besteht: Jede Gerade, die nicht parallel zur y-Achse verläuft, enthält für jede reelle Zahl x einen Punkt mit dieser x-Koordinate, also insbesondere Punkte mit rationaler und Punkte mit irrationaler x-Koordinate. Und für jede Parallele zu y-Achse gilt dieses Argument entsprechend mit den y-Koordinaten.

Auch kann keine Gerade nur gemischte Punkte enthalten: Gäbe es eine solche, so kann sie nicht parallel zur x-Achse verlaufen, denn sonst wäre entweder für alle Punkte auf dieser Geraden die y-Koordinate rational, oder für alle irrational, während sowohl Punkte mit rationaler als auch mit irrationaler x-Koordinate auf ihr liegen, also auf jeden Fall auch ein rationaler bzw. ein irrationaler Punkt.

Analog schließt man aus, dass es sich um eine Gerade handelt, die parallel zur y-Achse liegt. Für jede sonstige Gerade aber durchlaufen sowohl die x- als auch die y-Koordinaten der auf ihr liegenden Punkte alle reellen Zahlen, wobei jede nur genau einmal (als x- und einmal als y-Koordinate) angenommen. Lägen auf ihr nur gemischte Punkte, so müsste jeder Punkt mit irrationaler x-Koordinate eine rationale y-Koordinate besitzen, sodass es mindestens so viele rationale wie irrationale reelle Zahlen geben müsste. Tatsächlich sind aber die irrationalen Zahlen überabzählbar, während die rationalen nur abzählbar sind, was ein Widerspruch zur gerade gewonnenen Feststellung ist. Also gibt es keine Gerade, die nur aus gemischten Punkten besteht.

b) Für jede Kombination gibt es solche Geraden:
Auf der Geraden $y = 0$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit irrationaler x-Koordinate).
Auf der Geraden $y = \sqrt{2}$ liegen ausschließlich irrationale Punkte (die mit irrationaler x-Koordinate) und gemischte (die mit rationaler x-Koordinate). Und auf der Geraden $y = x$ liegen ausschließlich rationale Punkte (die mit rationaler x-Koordinate) und irrationale (die mit irrationaler x-Koordinate).

c) Auch solche Geraden gibt es, z. B. $y = \sqrt{2} \cdot x$. Auf dieser Geraden liegt der rationale Punkt $(0,0)$, der gemischte Punkt $(1,\sqrt{2})$ und der irrationale Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

I.V Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe 031015:
Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{oder} \quad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

Begründen Sie Ihre Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bildet die Differenz

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1)-(100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)}$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhält man im Zähler

$$100^{100}+100^{89}-100^{90}-100^{99} = 100^{99}\cdot(100-1)-100^{89}\cdot(100-1) > 0$$

Da der Nenner ebenfalls positiv ist, ist die Differenz größer als Null. Also ist der erste Bruch größer.

Aufgabe 051014:
Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$, $|v| < |c|$. Es ist zu beweisen, dass dann gilt:

$$\left|\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right| < |c|$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $|u| < |c|$ folgt zunächst $c \neq 0$ und weiter $\left|\frac{u}{c}\right| < 1$. Aus $|v| < |c|$ folgt $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$. Somit ergibt sich

$$0 < \left(1-\frac{u}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right) = 1-\frac{u+v}{c}+\frac{uv}{c^2} \qquad \text{und}$$
$$0 < \left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right) = 1+\frac{u+v}{c}+\frac{uv}{c^2}$$

und daraus

$$-\left(1+\frac{uv}{c^2}\right) < \frac{u+v}{c} < 1+\frac{uv}{c^2} \tag{1}$$

insbesondere also auch $1+\frac{uv}{c^2} > 0$, so dass sich nach Division der Ungleichung (1) durch $1+\frac{uv}{c^2}$ und anschließender Multiplikation mit $|c|$ die Behauptung ergibt.

Aufgabe 161012:
Geben Sie alle reellen Zahlen x $(x \neq -3)$ an, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{2}{x+3}-\frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3}-\frac{1}{10} \tag{1}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eins reelle Zahl x $(\neq -3)$ erfüllt genau dann (1), wenn

$$-\frac{2}{5} \geq \frac{3}{x+3} \tag{2}$$

gilt. Für alle $x > -3$ ist $\frac{3}{x+3}$ positiv, also (2) nicht erfüllt.

Für $x < -3$ ist (2) gleichbedeutend mit jede der Ungleichungen

$$-2(x+3) \leq 15 \qquad ; \qquad x+3 \geq -7{,}5 \qquad ; \qquad x \geq -10{,}5$$

Also wird (2) und folglich ebenso auch (1) genau von denjenigen Zahlen x erfüllt, für die $-10{,}5 \leq x < -3$ gilt.

Aufgabe 171012:
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\dfrac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ definiert ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Term $\sqrt{33-8x-x^2}$ ist genau dann definiert, wenn $33-8x-x^2 \geq 0$ ist.

Der Term $\frac{1}{\sqrt{33-8x-x^2}}$ ist genau dann definiert, wenn $\sqrt{33-8x-x^2}$ definiert ist und $\sqrt{33-8x-x^2} \neq 0$ gilt. Diese Forderungen sind der Reihe nach gleichwertig mit

$$33-8x-x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2+8x+16 < 49 \quad \rightarrow \quad (x-4)^2 < 49 \quad \rightarrow \quad |x-4| < 7$$

$$0 \leq x+4 < 7 \qquad \text{oder} \qquad -7 < x+4 < 0 \quad \rightarrow \quad -4 \leq x < 3 \qquad \text{oder} \qquad -11 < x < -4$$

Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller x, für die $-11 < x < 3$ gilt.

Aufgabe 181012:
In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: „Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ...“

Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist a negativ.“

Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... sind a und b negativ.“

Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist b negativ.“

Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... braucht weder a noch b negativ zu sein.“

Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahlen $a = 1$ und $b = -2$ sind von 0 verschieden; sie haben die Eigenschaft $a > b$ und wegen $|1| = 1, |-2| = 2$ auch die Eigenschaft $|a| < |b|$.

Da $a = 1$ jedoch nicht negativ ist, ist sowohl die von Antje als auch die von Bernd zur Diskussion gestellte Aussage falsch.
Ferner gilt: Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt; so ist b negativ; denn wäre b nicht negativ, so folgte $a > b > 0$, also $|a| = a > b = |b|$ im Widerspruch zu $|a| < |b|$.

Damit ist bewiesen, dass die von Cornelia zur Diskussion gestellte Aussage wahr und die von Doris zur Diskussion gestellte Aussage falsch ist.

Aufgabe 191013:
Man ermittle alle reellen Zahlen x mit $-1 \leq x \leq 1$, für die der Term $x^2 + 3x + 4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen x gilt

$$x^2 + 3x + 4 = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$$

für $-1 \leq x \leq 1$ gilt ferner $x^2 \leq 1, 3x \leq 3$, also

$$x^2 + 3x + 4 \leq 1 + 3 + 4 < 9$$

Daraus folgt: Wenn der Term für reelles x mit $-1 \leq x \leq 1$ eine ganzzahlige Quadratzahl ergibt, so kann dies nur die Zahl 4 sein.
Die Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 4$ ist nun gleichwertig mit $x(x + 3) = 0$.

Daher hat sie genau die Lösungen $x = 0$ und $x = -3$. Von diesen erfüllt genau die erstgenannte die Bedingung $-1 \leq x \leq 1$. Also hat genau die Zahl $x = 0$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 201011:
a) Geben Sie ein Paar (x, y) reeller Zahlen an, das die folgenden Ungleichungen (1), (2) und (3) erfüllt!

$$10y - x \leq 100 \qquad (1)$$
$$5y - 5x > 0 \qquad (2)$$
$$y + x \geq 21 \qquad (3)$$

b) Beweisen Sie, dass es mehr als zehn verschiedene derartige Paare (x, y) gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Ein Paar (x,y) erfüllt dann die Ungleichungen (1),(2),(3), wenn es die Ungleichungen

$$10y - 100 \leq x \quad (4) \qquad ; \qquad x < y \quad (5) \qquad ; \qquad 21 - y \leq x \quad (6)$$

erfüllt. Ferner hat eine Zahl y die Eigenschaft, dass es zu ihr Zahlen mit (4), (5), (6) gibt, wenn y die Ungleichungen

$$10y - 100 < y \qquad ; \qquad 21 - y < y$$

erfüllt. Dies ist der Fall, wenn die Ungleichungen

$$9y < 100 \qquad ; \qquad 21 < 2y$$

bestehen; dies wiederum trifft dann zu, wenn

$$\frac{21}{9} < y < \frac{100}{9}$$

gilt. Beispielsweise erfüllt $y = 11$ diese Ungleichungen. Für diesen Wert von y geht sowohl das System (4), (5) als auch das System (5), (6) über in $10 \leq x < 11 \qquad (7)$.
Nun gibt es mehr als zehn verschiedene reelle Zahlen x, die (7) erfüllen. Die mit diesen Zahlen x gebildeten Paare $(x, 11)$ sind somit bereits mehr als zehn verschiedene Paare, die (1), (2) und (3) erfüllen.

Zu a) genügt es, ein Paar (x,y) anzugeben und nachzuweisen, dass es (1), (2),(3) erfüllt.

Aufgabe 231012:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $x^3 - 9x > 0$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$$

Damit lässt sich die linke Seite der Ungleichung als Produkt dreier Faktoren darstellen. Ein Produkt dreier Faktoren ist genau dann positiv, wenn

(a) alle drei Faktoren positiv sind oder
(b) zwei Faktoren negativ sind und der dritte positiv ist.

Fall (b) tritt genau dann ein, wenn der zweitgrößte Faktor x negativ und der größte Faktor $x+3$ positiv ist, d. h. genau dann, wenn die Ungleichungen $x < 0$ und $x > -3$ gelten, Fall (a) genau dann, wenn $x - 3$ positiv ist, also $x > 3$ gilt.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x die zu ermittelnden, für die gilt:

$$-3 < x < 0 \qquad \text{oder} \qquad x > 3$$

Aufgabe 251011:

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ gilt!

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus den Angaben im Tafelwerk ergibt sich, dass für die Wurzeln jedenfalls folgende Ungleichungen gelten

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \tag{1}$$
$$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83 \tag{2}$$
$$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45 \tag{3}$$
$$2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 \tag{4}$$

Aus (1) und (2) bzw. (3) und (4) folgt

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} < 5{,}07 \qquad \text{bzw.} \tag{5}$$
$$5{,}08 < \sqrt{6} + \sqrt{7} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt unmittelbar

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7} \qquad \text{(w. z. b. w.)}$$

b) Es gilt

$$\sqrt{40} < \sqrt{42} \tag{8}$$

Daraus folgt

$$2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} < 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} \tag{9}$$
$$5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} + 8 < 6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + 7 \tag{10}$$
$$(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 \tag{11}$$

Da $\sqrt{6}+\sqrt{7}>0$ ist, folgt aus (11) weiter

$$\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7} \qquad \text{(w.z.b.w)}$$

Aufgabe 271012:

a) Gibt es eine *ganze Zahl* x, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt?

b) Ermitteln Sie alle diejenigen *reellen Zahlen* x, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jede ganze Zahl x gilt entweder $x=1$ oder $x\geq 2$ oder $x\leq 0$.

Wenn $x=1$ ist, so existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht.

Wenn $x\geq 2$ ist, so ist $x-1\geq 1$; für den Kehrwert gilt daher $\frac{1}{x-1}\leq 1$.

Wenn $x\leq 0$ ist, so ist $x-1$ negativ und daher auch $\frac{1}{x-1}$ negativ.
Damit ist bewiesen, dass es keine ganze Zahl x gibt, für die $\frac{1}{x-1}>1987$ gilt.

(1) b) Für jede reelle Zahl $x\leq 1$ gilt entweder $x=1$, und dann existiert $\frac{1}{x-1}$ nicht, oder es gilt $x<1$, also $x-1<0$ und folglich $\frac{1}{x-1}<0$.

Für alle reellen $x\leq 1$ ist damit bewiesen, dass sie die Ungleichung $\frac{1}{x-1}>1987$ nicht erfüllen.

(2) Für reelle $x>1$, ist $x-1$ positiv und daher die Ungleichung $\frac{1}{x-1}>1987$ der Reihe nach äquivalent mit

$$1>1987\cdot(x-1)\Rightarrow \frac{1}{1987}>x-1>0\Rightarrow 1<x<\frac{1988}{1987} \qquad (1)$$

Alle diejenigen x aus (1) erfüllen die gegebene Ungleichung.

II Runde 2

Aufgabe 091024:
Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2+6x>9$ äquivalent?

(1) $-3<x<1$	(2) $x>-3$	(3) $x<1$
(4) $x<1$ oder $x>-3$	(5) $x>1$ oder $x<-3$)	

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent

$$x^2+2x-3>0$$
$$(x+1)^2>4$$
$$(x+1)^2-2^2>0$$
$$(x-1)(x+3)>0$$

nach Fallunterscheidung erhält man als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x>1$ oder $x<-3$.

Damit ist gezeigt, dass von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.

Aufgabe 111023:
Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{u}{v}$, für die $\frac{u+kv}{v+ku} < 1 \quad (*)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte $(*)$, Dann ist $v + ku > 0$ und es folgt aus $(*)$:

$$(1) \quad u + kv < v + ku \qquad \text{also} \qquad (2) \quad (u - v)(1 - k) < 0$$

Wegen $u > v$ folgt daraus $k > 1$. Also können höchstens alle $k > 1$ Lösungen von $(*)$ sein.
Tatsächlich ist für $k > 1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie $(*)$ erfüllt.

Aufgabe 151024:
Für positive reelle Zahlen a und b gelte

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \qquad (1)$$

Es ist zu beweisen, dass dann für diese Zahlen $a + b \geq 2 \quad (2)$ gilt.
Ferner sind alle positiven reellen Zahlenpaare (a, b) zu ermitteln, für die (1) gilt und für die in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von Steffen Polster:
Umformen von (1) ergibt, da $a > 0$, $b > 0$

$$a + b = 2ab \quad (2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{2b - 1} \quad (3)$$

Da $a > 0$ nach Aufgabenstellung ist, wird aus (3): $\frac{b}{2b-1} > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}$ (analog aus Symmetriegründen $a > \frac{1}{2}$), womit (3) für alle möglichen b definiert ist. Einsetzen von (3) in (2) ergibt

$$a + b = 2\frac{b^2}{2b - 1} \qquad (4)$$

Für alle möglichen $b > \frac{1}{2}$ wird

$$\frac{b^2}{2b - 1} \geq 1 \Leftrightarrow b^2 \geq 2b - 1 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 1)^2 \geq 0 \qquad (5)$$

Da $(b - 1)^2$ für $b > \frac{1}{2}$ stets positiv ist, kann (4) abgeschätzt werden

$$a + b = 2\frac{b^2}{2b - 1} \geq 2$$

w. z. b. w.
Die Zahlenpaare $(a; b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $b > \frac{1}{2} \wedge a = \frac{b}{2b-1}$ erfüllen Gleichung (1).
Die Gleichheit in (2) gilt für $\frac{b^2}{2b-1} = 1$, d. h. nach (5) für $(b - 1)^2 = 0$, also $b = 1$ und somit $a = 1$, d. h. das Zahlenpaar $(1, 1)$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$H(a,b) := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad \text{das } \textit{harmonische Mittel} \text{ und}$$

$$A(a,b) := \frac{a + b}{2} \qquad \text{das } \textit{arithmetische Mittel} \text{ von } a \text{ und } b.$$

Nach Voraussetzung ist $H(a,b) = \frac{2}{2} = 2$. Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel gilt

$$A(a,b) \geq H(a,b),$$

also $a + b \geq 2$, wobei Gleichheit genau für $a = b$, also $a = b = 1$, eintritt.

Aufgabe 171023:
Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ definiert ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 30 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{169}{4}$$

$$\left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{13}{2}$$

$$x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \quad \text{oder} \quad x + \frac{7}{2} < -\frac{13}{2}$$

und damit $x > 3$ oder $x < -10$. Die gesuchte Menge ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

Aufgabe 201024:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0 < z < 1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

Lösung von Steffen Polster:
Da $z > 0$ ist, kann umgeformt werden

$$z + \frac{1}{z} \geq 4 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 1 \geq 4z \quad \Rightarrow \quad z^2 - 4z + 1 \geq 0$$

Die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 1 =$ hat die Lösungen

$$0 < z_1 = 2\sqrt{3} < 1 \qquad \text{und} \qquad 1 < z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Eine quadratische Funktion $y = z^2 - 4z + 1 = (z - 2)^2 - 3$ hat ihre Nullstellen bei z_1 und z_2 und ist eine nach oben geöffnete Parabel. Damit hat die Funktion im Intervall $(z_1; 1)$ negative Funktionswerte.
Die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung sind damit alle reellen Zahlen $0 < z \leq 2 - \sqrt{3}$.

Aufgabe 251022:
Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a + 3b} < \sqrt{a + b} + \sqrt{a + 2b}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt

$$\sqrt{a^2 + 3ab} < \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung der Wurzelgesetze und Addition von $2a+3b$ erhält man

$$a+(a+3b)+2\sqrt{a}\sqrt{a+3b}<(a+b)+(a+2b)+2\sqrt{a+b}\sqrt{a+2b}$$

Unter Benutzung der binomischen Formel ergibt sich daraus

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}\right)^2<\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}\right)^2$$

Weil aus $u2<v^2$ stets $|u|<|v|$ folgt, gilt weiter

$$\left|\sqrt{a}+\sqrt{a+3b}\right|<\left|\sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}\right|$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, gilt schließlich die ursprüngliche Behauptung. w. z. b. w.

III Runde 3

Aufgabe 031036:
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x,y), für die gilt:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$$

und $x>2, y>2$.

Lösung von Manuel Naumann:
Es gilt:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{y}>\frac{x-2}{2x}\Rightarrow y<\frac{2x}{x-2}$$

In diese letzte Beziehung kann man nun konkrete Werte für x einsetzen. Unter Beachtung der Voraussetzungen, d. h. $x,y>2$, erhält man für

$$\begin{aligned}
x=3:&\quad 2<y<6\rightarrow y=3, y=4 \text{ oder } y=5\\
x=4:&\quad 2<y<4\rightarrow y=3\\
x=5:&\quad 2<y<\frac{10}{3}\rightarrow y=3\\
x=6:&\quad 2<y<3
\end{aligned}$$

Für $x=6$ existiert also keine natürliche Zahl y, so dass die Ungleichung erfüllt wird.
Aus $\frac{1}{y}>\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$ ist ersichtlich, dass für größer werdendes x, $\frac{1}{y}$ ebenfalls größer und somit y immer kleiner werden muss. Für $x>5$ können deshalb keine weitere Lösung existieren.

Aufgabe 061032:
Zeigen Sie, dass für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c stets gilt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{9}{a+b+c}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $a>0, b>0, c>0$ gilt

$$a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\leq 0 \qquad \text{d. h.}$$

$$ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c-6abc\leq 0$$

Durch Addition von $pabc$ erhält man

$$(bc + ac + ab)(a + b + c+) \leq 9abc$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 061035:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(2x - 1) + \lg\sqrt{x - 9} > 1$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x - 9 > 0$ und $2x - 1 > 0$ gilt. Dies ist genau für $x > 9$ der Fall.
Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lg(2x-1) + \frac{1}{2}\lg(x-9) &> 1 \\ \lg(2x-1)(x-9) &> 2 \\ \lg(2x^2 - 19x + 9) &> \lg 100 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$2x^2 - 19x + 9) > 100 \qquad \text{oder} \qquad x2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2} > 0$$

gilt. Wegen $(x - 13)(x + \frac{7}{2}) = x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{91}{2}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(x - l3)\left(x + \frac{7}{2}\right) > 0 \tag{1}$$

Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn entweder (2) $x - 13 > 0$ und $x + \frac{7}{2} > 0$ oder (3) $x - 13 < 0$ und $x + \frac{7}{2} < 0$.
Aus (2) folgt $x > 13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x < -\frac{7}{2}$ und umgekehrt.
Davon ist wegen $x - 9 > 0$ nur $x > 13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x > 13$ und nur für diese erfüllt.

Aufgabe 071035:
Für welches reelle a nimmt die Summe der Quadrate der Lösungen der Gleichung
$x^2 + ax + a - 2 = 0$ ihren kleinsten Wert an?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Diskriminante des Polynoms $x^2+ax+a-2$ ist $a^2-4(a-2) = (a-2)^2+4$ ist für jedes reelle a positiv, also gibt es auch für jedes reelle a genau zwei Lösungen $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2+ax+a-2 = 0$ und diese sind keine doppelten Nullstellen.
Nach Vieta gilt $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1x_2 = a - 2$. Somit ist

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a - 2) = a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3$$

Die Summe der Quadrate der Lösungen wird daher genau dann minimal, wenn $a = 1$.

Aufgabe 091033:
Geben Sie
a) eine notwendige und hinreichende,
b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie
c) eine hinreichende und nicht notwendige
Bedingung dafür an, da $\sqrt{1 - |\log_2|5-x||} > 0$ gilt!
Die anzugebenden Bedingungen sind dabei so zu formulieren, dass sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

Lösung von cyrix:
Damit die Wurzel definiert ist, muss der Radikand nicht-negativ sein.
Dafür muss also $|\log_2|5-x|| \leq 1$ bzw. $-1 \leq \log_2|5-x| \leq 1$ gelten, was äquivalent ist zu $\frac{1}{2} \leq |5-x| \leq 2$.
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $5-x \geq 0$, also $x \leq 5$: Dann muss $\frac{1}{2} \leq 5-x \leq 2$ gelten, was äquivalent zu $x \in \left[3; \frac{9}{2}\right]$ ist.
2. Fall: $5-x < 0$, also $x > 5$: Dann ist $|5-x| = -(5-x) = x-5$ und es muss $\frac{1}{2} \leq x-5 \leq 2$ gelten, was äquivalent ist zu $x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$.

Zusammengefasst, ergibt sich also eine notwendige (und, wie wir gleich sehen werden, nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung erfüllt ist, durch

$$x \in \left[3; \frac{9}{2}\right] \qquad \text{oder} \qquad x \in \left[\frac{11}{2}; 7\right]$$

denn sonst wäre die Wurzel gar nicht definiert. (Dies beantwortet dann Teil b).)
Im Falle, dass die Wurzel definiert ist, die Gleichung aber nicht gilt, muss die Wurzel, und damit auch ihr Radikand, Null werden, sodass dann $|\log_2|5-x|| = 1$, also $\log_2|5-x| \in \{-1, 1\}$ und damit $|5-x| \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ gelten muss. Es ergibt sich weiter $5-x \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$, also diesen Gedanken abschließend $x \in \left\{3; \frac{9}{2}; \frac{11}{2}; 7\right\}$. Nur genau dann, wenn x einen dieser vier Werte annimmt, wird die Wurzel 0, ist also definiert, aber nicht echt positiv.
Somit ergibt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Ungleichung der Aufgabenstellung zu

$$x \in \left(3; \frac{9}{2}\right) \qquad \text{oder} \qquad x \in \left(\frac{11}{2}; 7\right)$$

was dann Teil a) beantwortet.

Eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, wie sie Teil c) fordert, erhält man etwa dadurch, dass man nur eines der beiden Intervalle betrachtet, also z. B. ausschließlich $x \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$ fordert.

Aufgabe 131036:
Man beweise, dass die Ungleichung $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 1, b \neq 1$ gilt!

Lösung von cyrix:
Es ist $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ und umgekehrt $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$. Also ist mit $x = |\log_a b| \in \mathbb{R}_{>0}$ der zweite Summand $|\log_b a| = \frac{1}{x}$, sodass für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ zu zeigen verbleibt. Diese ist aber äquivalent zu $x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$ bzw. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$, was offenbar wahr ist.

Aufgabe 171031:
Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, dass dann $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $a \leq b$. Dann gilt, da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wird

$$(a+b)^n = (2b)^n \qquad \Rightarrow \qquad (a+b)^2 = 2^n b^n$$

Ferner gilt $(a+b)^2 \leq 2^n b^n + 2^n a^n \quad (*)$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde also auch $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$. w. z. b. w.

Aufgabe 191036:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2 \geq a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 = (a^2+b^2-c^2)^2$$

Daraus folgt (die Existenz der nachstehenden Wurzel sowie)

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)-4a^2c^2} \geq a^2+b^2-c^2$$

$$a^2+2ac+c^2+b^2+2\cdot\sqrt{(a^2+c^2+b^2+2ac)(a^2+c^2+b^2-2ac)}+a^2-2ac+c^2 \geq 4a^2+4b^2$$

$$(\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2})^2 = 4(a^2+b^2)$$

Diese beiden Wurzeln existieren wegen $(a\pm c)^2+b^2 \geq 0$. Wegen $(a^2+b^2) \geq 0$ und $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Aufgabe 201032:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$2y+x<20 \tag{1}$$
$$y-x<4 \tag{2}$$
$$y-ax\geq 6 \tag{3}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir formen die Ungleichungen jeweils nach y um:

$$y<-\frac{1}{2}x+10 \quad (1) \qquad ; \qquad y<x+4 \quad (2) \qquad ; \qquad y\geq ax+6 \quad (3)$$

Kombiniert man (1) mit (3), so muss gelten:

$$-\frac{1}{2}x+10>ax+6 \qquad \rightarrow \qquad \left(a+\frac{1}{2}\right)x<4 \tag{4}$$

Kombiniert man (2) mit (3), so folgt:

$$x + 4 > ax + 6 \qquad \rightarrow \qquad (a-1)x < -2 \tag{5}$$

Wenn $\left(a+\frac{1}{2}\right)$ und $(a-1)$ das gleiche Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall unendlich viele Lösungen, da ich Ungleichungen (4) und (5) jeweils durch die Klammerausdrücke teilen kann und die jeweils schärfere Bedingung die Lösungsmenge bestimmt.
Wenn $a = 1$ ist, ist Ungleichung (5) nicht erfüllbar.
Wenn $a = -\frac{1}{2}$, dann ist Ungleichung (4) auf jeden Fall erfüllt und es gibt unendlich viele Lösungen. Es ist neben $a = 1$ nur dann möglich, dass es keine Lösung gibt, wenn die beiden Klammerausdrücke unterschiedliche Vorzeichen haben und die Ungleichungen (4) und (5) sich widersprechen. Ungleiche Vorzeichen liegen vor für $-\frac{1}{2} < a < 1$, denn dann ist $a+\frac{1}{2} > 0$ und $a-1 < 0$. Somit gilt laut Ungleichung (4):

$$x < \frac{4}{a+\frac{1}{2}}$$

und laut Ungleichung (5):

$$x > \frac{-2}{a-1}$$

und in Kombination:

$$\frac{4}{a+\frac{1}{2}} > \frac{-2}{a-1}$$

Wir multiplizieren mit beiden Nennern. Das Produkt der beiden Nenner ist voraussetzungsgemäß kleiner als null, so dass sich die Richtung der Relation umdreht:

$$4(a-1) < -2\left(a+\frac{1}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad a < \frac{1}{2}$$

Für diese a widersprechen sich die Ungleichungen (4) und (5) nicht. Es gibt daher unendlich viele Lösungen für $a < \frac{1}{2}$ oder $a > 1$, dazwischen gibt es keine Lösung.

Aufgabe 211034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 1$$

Lösung von cyrix:
Offensichtlich kann x nicht 0 sein, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Analog muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten, da für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sofort $x^2 > \frac{1}{3}$ und damit $1-3x^2 < 1-1 = 0$ folgen würde, sodass der Radikand negativ und die Wurzel nicht mehr definiert wäre.

Sei also im Folgenden $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Dann ist $1-3x^2 < 1$, also $\sqrt{1-3x^2} < 1$ und damit $1-\sqrt{1-3x^2} > 0$. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x. Ist dieser negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, sodass wir ein erstes Lösungsintervall erhalten, nämlich $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$.

Ist dagegen $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu $-\sqrt{1-3x^2} < x-1$ bzw. $\sqrt{1-3x^2} > 1-x$. Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu $1-3x^2 > (1-x)^2 = 1-2x+x^2$ bzw. $0 > -2x+4x^2 = (-2x)(1-2x)$.
Wegen $x > 0$ ist $-2x < 0$, die Ungleichung also äquivalent zu $1-2x > 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, sodass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ die Ungleichung erfüllen.

Aufgabe 241032:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

$$2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst die linke Ungleichung:

$$2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-x < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \qquad x(x+1) < \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad x^2+x < x^2+x+\frac{1}{4}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt. Die rechte Ungleichung nach dem gleichen Prinzip:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2} < x-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\rightarrow \qquad x(x-1) < \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad x^2-x < x^2-x+\frac{1}{4}$$

Auch diese Ungleichung ist immer erfüllt (die Einschränkung $x \geq 1$ ist wegen $\sqrt{x-1}$ notwendig).

Aufgabe 261036:
Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $x > 1$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

gelten!

Lösung von cyrix:
Durch Division durch $x^{\frac{2}{3}} > 0$ geht die zu zeigende Ungleichungskette äquivalent über in

$$\frac{3}{2}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right) < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Wegen $1 < x$ ist $0 < \frac{1}{x} < 1$, sodass aufgrund der Bernoulli-Ungleichung $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ sowie $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ gilt, woraus sofort die zu zeigende Ungleichungskette folgt, $\square$.

Aufgabe 291034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1 \qquad (1)$$

Lösung von Steffen Polster:
Der linke Term der Ungleichung (1) ist nur für $x \geq -5$ und $x \neq -1$ definiert. Gleichzeitig ist der Nenner $\sqrt{x+5} \geq 0$ und der Zähler $x+1$ nur für $x > -1$ positiv, so dass der gesamte Bruch nur für $x > -1$ positiv wird und so evtl. Lösungen der Ungleichung (1) ergeben kann.
Außerdem ist die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+1}$ für $x > -1$ streng monoton fallend, da $f'(x) = -\frac{x+9}{2(x+1)^2 \cdot \sqrt{x+5}} < 0$ für $x > -1$ ist.
Umstellen von (1) ($x \neq -1$) und Quadrieren liefert eine quadratische Ungleichung

$$x + 5 > x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 > x^2 + x - 4$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $0 = x^2 + x - 4$ sind

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \qquad ; \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Nur x_2 liegt im Bereich $x > -1$. Da die oben genannte Funktion $f(x)$ streng monoton fallend ist, ergibt sich als Lösungsmenge von (1) das Intervall

$$x \in (-1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}]$$

Aufgabe 301034:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (1) erfüllen!

$$||x-2|-2| < 1 \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung (1) ist äquivalent zu $-1 < |x-2| - 2 < 1$ bzw. $1 < |x-2| < 3$.
Es ist $|x-2| < 3$ äquivalent zu $-3 < x-2 < 3$ bzw. $-1 < x < 5$, sodass nur solche reelle Zahlen auch (1) erfüllen können.
Weiterhin wird $1 < |x-2|$ genau von denjenigen reellen Zahlen x erfüllt, für die $1 < x-2$ (d. h. $x > 3$) oder $-1 > x-2$ (d. h. $x < 1$) gilt.
Zusammen wird also (1) genau von den reellen Zahlen mit $-1 < x < 1$ oder $3 < x < 5$ erfüllt.

Aufgabe 311031:
Beweisen Sie, a) dass gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 22 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 23 \cdot 25} > \frac{1}{5}$$

b) dass für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2m-1)} > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

Lösung von cyrix:
Es folgt a) aus b) mit $m = 13$, sodass es genügt die Ungleichung aus b) für alle $m \geq 2$ zu zeigen. Dazu sei

$$x := \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}$$

Mit $(k-1)(k+1) = k^2 - 1 < k^2$ für alle natürlichen Zahlen k folgt dann

$$x^2 = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2m-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} > \frac{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot ((2m-3) \cdot (2m-1)}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2} = \frac{1}{2m-1}$$

also $x^2 > \frac{1}{2m-1}$ bzw. $x > \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$, $\Box$.

Aufgabe 331035:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen m und n, für die

$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$$

eine ganze Zahl ist.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\begin{aligned} z &:= \frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{m^2-1}{m+1} + \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(m-1)(m+1)}{m+1} + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} = n-1+m-1+\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

genau dann eine ganze Zahl, wenn auch $z-(n-1)-(m-1) = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} =: x$ eine ganze Zahl ist. Offensichtlich ist $0 < x$ und wegen $m \geq 1$ sowie $n \geq 1$ gilt

$$0 < x = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

sodass $x = 1$ gelten muss, da es die einzige ganze Zahl in diesem Intervall $(0;1]$ ist. Also muss Gleichheit auch an den vorhergehenden Abschätzungen gegolten haben, d. h. $m = n = 1$.

Tatsächlich ist für das Paar $(m;n) = (1;1)$ die Zahl $z = \frac{1^2}{1+1} + \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ eine ganze Zahl, sodass es genau ein Paar positiver ganzer Zahlen, nämlich das gerade betrachtete gibt, was der Bedingung der Aufgabenstellung genügt.

IV Runde 4

Aufgabe 031043:
Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.
Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Lösung von Steffen Weber:
Es gilt $27 < 20 \cdot 7 = 20\sqrt{49} < 20\sqrt{57}$. Also ist

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 = 25 + 27 + 228 < 25 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57 = (5 + 2\sqrt{3 \cdot 19})^2$$

Somit ist $2\sqrt{7 \cdot 10} < 5 + 2\sqrt{3 \cdot 19}$ bzw.

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 7 + 2\sqrt{7 \cdot 10} + 10 < 3 + 2\sqrt{3 \cdot 19} + 19 = (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2$$

Daraus folgt $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$ und $Z_1 < Z_2$.

Aufgabe 041042:
Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

Lösung von cyrix:
Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x > 0$.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung äquivalent zu

$$x^2 - 2p^2 < 2px \qquad \text{bzw.} \qquad (x^2 - 2px + p^2) < 3p^2$$

also $(x-p)^2 < 3p^2$ und damit

$$-\sqrt{3}p < x - p < \sqrt{3}p \qquad \text{bzw.} \qquad (1-\sqrt{3})p < x < (1+\sqrt{3})p$$

Dabei fallen die Lösungen mit $x \leq 0$ aufgrund der Fallannahme weg, und es bleibt (wegen $p < 0$) die Lösungsmenge

$$\{x|0 < x < (1+\sqrt{3})p\}$$

für diesen Fall.

2. Fall: Sei nun $x < 0$.
Es ist $x = 0$ nicht Teil des Definitionsbereichs der in der zu betrachtenden Ungleichung auftretenden Terme.
Dann ist die zu betrachtende Ungleichung diesmal äquivalent zu $x^2 - 2p^2 > 2px$, was sich analog äquivalent umformen lässt zu

$$(x-p)^2 > 3p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x - p < -\sqrt{3}p \quad \text{oder} \qquad x - p > \sqrt{3}p)$$

und damit $(x < (1-\sqrt{3})p$ oder $x > (1+\sqrt{3})p)$.
Der zweite Teil entfällt aufgrund der Fallannahme, sodass die Lösungsmenge für diesen Fall

$$\{x|x < (1-\sqrt{3})p\}$$

lautet. Zusammen ergibt sich also in Abhängigkeit vom Parameter $p > 0$ folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R}|x < (1-\sqrt{3})p \vee 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}.$$

Aufgabe 071043:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn a, b, c die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind, dann hat die Gleichung

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

keine reellen Lösungen.

Lösung von Nuramon:
Es ist zu zeigen, dass die Diskriminante des Polynoms $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ negativ ist, also dass

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 < 0$$

gilt. Nach Kosinussatz gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ für den Winkel α zwischen den Dreiecksseiten b,c. Somit ist

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (2bc\cos\alpha)^2 - 4b^2c^2 = 4b^2c^2(\cos^2\alpha - 1) = -4b^2c^2\sin^2\alpha < 0.$$

Aufgabe 101043A:
Man ermittle alle positiven reellen Zahlen c, für die $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gilt.
Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Lösung von cyrix:
Es ist $\ln 12 > \ln 4$, also $\frac{1}{\ln 12} < \frac{1}{\ln 4}$. Für $c \geq 1$ ist auch $\ln c \geq 0$ und damit $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} \leq \frac{\ln c}{\ln 4}$, woraus sofort die behauptete Ungleichung folgt. Diese ist also zumindest für alle $c \geq 1$ erfüllt.

Andernfalls ist $0 < c < 1$ und $\ln c < 0$. Dann folgt $\log_{12} c = \frac{\ln c}{\ln 12} > \frac{\ln c}{\ln 4}$.
Damit dennoch $[\log_{12} c] \leq [\log_4 c]$ gelten kann, müssen beide Logarithmen auf die gleiche ganze Zahl n abgerundet werden, d. h., es muss eine negative ganze Zahl n geben mit $n \leq \log_4 c < \log_{12} c < n+1$. Demnach muss $4^n \leq c < 12^{n+1}$.

Für $n = -1$ liefert dies $c \in \left[\frac{1}{4}; 1\right)$ und für $n = -2$ die Aussage $c \in \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{12}\right)$.

Für $n \leq -3$ ist $3^n \leq \frac{1}{27} < \frac{1}{12}$, also $12^{n+1} = 12 \cdot 12^n = 12 \cdot 3^n \cdot 4^n < 4^n$, sodass die obere Intervallgrenze kleiner würde als die untere und damit keine weiteren Lösungen entstehen.
Die Gleichung ist also genau für alle c mit $\frac{1}{16} \leq c < \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4} \leq c$ erfüllt.

Aufgabe 101045:
Es sei r eine von Null verschiedene reelle Zahl. Man ermittle alle reellen Zahlen $x \neq 0$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

erfüllen. Dabei sind folgende Fälle zu untersuchen:

a) Es sei $r < -6$. b) Es sei $r = -6$. c) Es sei $-6 < r < 0$. d) Es sei $r > 0$

Lösung von cyrix:
Die Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} = \frac{r+6}{2r}$.
a) Ist $r < -6$, dann $r+6 < 0$ und $2r < 0$, also $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit wird die Ungleichung falsch für alle negativen x und nur wahr für alle positiven x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$, also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es ist also $x \in \left(0; \frac{4r}{r+6}\right)$.

b) Für $r = -6$ ist $\frac{r+6}{2r} = 0$, sodass die Ungleichung genau von allen positiven x erfüllt wird: $x \in (0; \infty)$.

c) Ist $-6 < r < 0$ ist $r+6 > 0$ aber $2r < 0$, sodass $\frac{r+6}{2r}$ negativ ist. Damit ist die Ungleichung auf jeden Fall für alle positiven x wahr und darüberhinaus für alle negativen x, die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ also $x < \frac{4r}{r+6}$ erfüllen. Es folgt $x \in \left(-\infty; \frac{4r}{r+6}\right) \cup (0; \infty)$.

d) Ist $r > 0$, so auch $\frac{r+6}{2r} > 0$. Damit erfüllen wieder alle negativen x automatisch die Ungleichung nicht, da dann auch $\frac{2}{x} < 0$ ist. Darüber hinaus erfüllen nur diejenigen positiven x die Ungleichung, für die $\frac{x}{2} < \frac{2r}{r+6}$ gilt, sodass wir in diesem Fall die Lösungsmenge $x \in \left(\frac{4r}{r+6}; \infty\right)$ erhalten.

Aufgabe 111043B:
Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung anhand der Lösung der folgenden Aufgabe:

Es sei $ABCDE$ ein ebenes konvexes Fünfeck derart, dass A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Als Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.
Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert! Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $AB = a$ und $BC = b$ bedeutet.
Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, dass er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.
Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

Lösung von cyrix:
Es ist $F = ab + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und $u = 3a + 2b$, also $b = \frac{u-3a}{2}$ und damit

$$F = a \cdot \frac{u}{2} - \frac{3}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{1}{a} \cdot \left(2F + 3a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \frac{2F}{a} + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

Es gilt für positive reelle Zahlen x und y die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ bzw. nach Multiplikation mit 2: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, wobei Gleichheit für $x = y$ eintritt. Setzt man $x := \frac{2F}{a} > 0$ und $y := \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a > 0$ in diese Ungleichung ein, erhält man

$$u = x + y \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{2F}{a} \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a} = 2 \cdot \sqrt{(6 - \sqrt{3})F}$$

Dabei nimmt u also seinen minimalen Wert genau dann an, wenn

$$\frac{2F}{a} = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

bzw. $4F = (6 - \sqrt{3})a^2$, also $a = 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$ und $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \cdot F$, sodass wir

$$ab = F - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = F \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}\right) = F \cdot \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$$

und schließlich

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{4\frac{F}{6-\sqrt{3}}}{F \cdot \frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}} = \frac{4}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

erhalten.

Aufgabe 181044:
Man beweise: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, dann gilt

$$\text{a)} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \qquad \text{also} \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

also wegen $a > 0, b > 0$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad ; \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

womit die erste Behauptung gezeigt ist.

b) Ebenso zeigt man
$$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} \qquad (2)$$
sowie für die Zahlen
$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{c+d}{2} \quad (3) \qquad \text{auch} \qquad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad (4)$$
Aus (1), (2), (3) und (4) folgt
$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$
d. h. die zweite Behauptung.

Aufgabe 201046:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!
$$y > x^2 - 2x + c \quad (1) \qquad ; \qquad y < x + c \quad (2) \qquad ; \qquad y < -2x + 1 \quad (3)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein reelles c habe das System (1), (2), (3) eine Lösung (x, y). Dann ergibt sich aus (1) und (3) die Beziehung
$$x^2 - 2x + c < -2x + 1 \qquad \text{d. h.} \qquad c < 1 - x^2$$
und somit $c < 1$. Eine Lösung kann daher höchstens für $c < 1$ existieren. Umgekehrt hat das System (1), (2), (3) für jedes c mit $c < 1$ eine Lösung, z. B. eine mit $y = c$. Für diesen Wert von y ist es nämlich äquivalent zu
$$x^2 - 2x < 0 \quad (4) \qquad ; \qquad 0 < x \quad (5) \qquad ; \qquad c < -2x + 1 \quad (6)$$
(4) und (5) sind äquivalent mit den Ungleichungen $0 < x < 2$ (7) und (6) ist äquivalent mit
$$x < \frac{1-c}{2} \qquad (8)$$
Wegen $c < 1$ gilt $\frac{1-c}{2} > 0$, und demnach sind (7) und (8) durch reelle x erfüllbar.
Das System (1), (2), (3) hat folglich genau für alle reellen Zahlen c, die kleiner als 1 sind, eine Lösung.

Aufgabe 241045:
Es sei
$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{999998}} + \frac{1}{\sqrt{999999}} + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$$
Weisen Sie nach, dass dann $1998 < T < 1999$ gilt!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = -1 + \sqrt{n+1}$$
und somit
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > -2 + 2\sqrt{n+1} > -2 + 2\sqrt{n}$$

Für die obere Schranke ergibt die Abschätzung für

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

analog das geforderte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad \text{für } (n > 1)$$

Mit $n = 100000$ ergibt sich dann die Behauptung.

Aufgabe 271043B:
Ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{2}$ besagt:
Aus einem Näherungswert $\frac{a}{b}$, dessen Zähler a und Nenner b positive ganze Zahlen sind, wird ein neuer Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ nach der Vorschrift

$$a' = a^2 + 2b^2 \quad (1) \qquad ; \qquad b' = 2ab \quad (2)$$

gewonnen. Um einschätzen zu können, ob $\frac{a}{b}$ ein geeigneter Anfangswert für dieses Verfahren sein kann, behandelt man die folgende Aufgabe (bei der die Zahl $\sqrt{2}$ wie ein bekannter Wert verwendet wird):
Man ermittle alle diejenigen $\frac{a}{b}$ (a, b positive ganze Zahlen), bei denen die Vorschrift (1), (2) auf einen besseren Näherungswert $\frac{a'}{b'}$ führt, d. h.

$$\left|\frac{a'}{b'} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zu diskutierende Ungleichung

$$\left|\frac{a^2 + 2b^2}{2ab} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$$

gilt wegen $a,b > 0$ genau dann, wenn

$$|a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2}| < |2a^2 - 2ab\sqrt{2}|$$

und dies ist äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}|^2 < 2a \cdot |a - b\sqrt{2}| \tag{3}$$

Da für ganze a,b wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ stets $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$, also $|a - b\sqrt{2}| > 0$ gilt, ist (3) äquivalent mit

$$|a - b\sqrt{2}| < 2a \quad \Rightarrow \quad -2a < a - b\sqrt{2} < 2a \quad \Rightarrow \quad -a < b\sqrt{2} < 3a \tag{4}$$

Für $b > 0$ ist (4) äquivalent mit $b\sqrt{2} < 3a$. Also führen (1), (2) genau für alle $\frac{a}{b} > \frac{1}{3}\sqrt{2}$ auf einen besseren Näherungswert.

Aufgabe 271046:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn für reelle Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ gilt, dass jede dieser Zahlen im Intervall $5 \leq x \leq 10$ liegt, dann gilt für diese Zahlen stets

$$2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5) \leq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + ... + a_5^2 + b_5^2 \leq \frac{5}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_5b_5)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Es gilt stets $(a_i - b_i)^2 \geq 0$, also

$$2a_ib_i \leq a_i^2 + b_i^2 \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die linke der behaupteten Ungleichungen.

2. Da nach Voraussetzung

$$a_i \leq 10 \leq 2b_i, \quad \text{also} \quad 2b_i - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad b_i \leq 10 \leq 2a_i, \quad \text{also} \quad 2a_i - b_i \geq 0$$

gilt, folgt ferner

$$(2b_i - a_i)(2a_i - b_i) \geq 0$$
$$5a_ib_i - 2b_i^2 - 2a_i^2 \geq 0$$
$$a_i^2 + b_i^2 \leq \frac{5}{2}a_ib_i \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

Addiert man diese fünf Ungleichungen, so ergibt sich die rechte der behaupteten Ungleichung.

Aufgabe 311041:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen k, für die die folgende Aussage (1) wahr ist:
(1) Für jedes Paar $(a;b)$ reeller Zahlen a,b gilt $a^2 + b^2 \geq k \cdot ab$

Lösung von cyrix:
Die Aussage gilt genau für alle $-2 \leq k \leq 2$. Wir zeigen dies per vollständiger Fallunterscheidung nach der Größe von k:

Fall 1: $k > 2$. Dann ist für $a = b = 1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = 2 \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Fall 2: $0 \leq k \leq 2$.
Fall 2.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq 2 \cdot ab \geq k \cdot ab$.
Fall 2.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$. Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 3: $-2 \leq k < 0$.
Fall 3.1: Es ist $ab \geq 0$. Dann ist $a^2 + b^2 \geq 0 \geq k \cdot ab$.
Fall 3.2: Es ist $ab < 0$. Dann ist wegen $0 \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auch $a^2 + b^2 \geq (-2)ab \geq k \cdot ab$.
Damit ist in beiden Unterfällen Aussage (1) wahr.

Fall 4: $k < -2$. Dann ist für $a = 1$, $b = -1$ die Ungleichung $a^2 + b^2 = 2 = (-2) \cdot ab < k \cdot ab$ erfüllt, sodass die Aussage (1) falsch ist.

Die Aussage (1) wird also genau für $-2 \leq k \leq 2$ erfüllt, $\square$.

I.VI Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe V01004:
Bestimmen Sie die Unbekannten aus:

$$2^x \cdot 2^y = 2^{22} \quad (1) \qquad ; \qquad x - y = 4 \quad (2)$$

Lösung von svrc:
Wir können (1) umschreiben zu

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = 2^{22},$$

sodass wir das lineare Gleichungssystem

$$x + y = 22 \quad (3) \qquad , \qquad x - y = 4 \quad (4)$$

lösen müssen. Aus (4) folgt $x = y + 4$ und setzen wir dieses Ergebnis in (3) ein, so ergibt sich

$$x + y = (y + 4) + y = 2y + 4 = 22$$

und somit $y = 9$ und daher $x = 13$.

Aufgabe 091012:
In jedem von drei Betrieben I, II, III wurden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 produziert. Die Produktionskosten je Stück waren für gleichartige Erzeugnisse in allen drei Betrieben gleich. Aus nachstehender Tabelle sind die Stückzahlen der täglich produzierten Erzeugnisse sowie die täglichen Gesamtproduktionskosten zu ersehen.

Betrieb	Tägliche Stückzahlen			Tägliche Gesamtproduktionskosten in M
	E_1	E_2	E_3	
I	5	5	8	5950
II	8	6	6	6200
III	5	8	7	6450

Wie hoch waren die Produktionskosten je Stück der einzelnen Erzeugnisarten?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien p_i die Produktionskosten für E_i, dann gilt

$$5p_1 + 5p_2 + 8p_3 = 5950 \quad (1); \qquad 8p_1 + 6p_2 + 6p_3 = 6200 \quad (2); \qquad 5p_1 + 8p_2 + 7p_3 = 6450 \quad (3)$$

Auflösung des linearen Gleichungssystems ergibt: $p_2 = 300$, $p_3 = 400$ und $p_1 = 250$.

Aufgabe 131011:
Ermitteln Sie alle Mengen $\{a,b,c\}$ aus rationalen Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft, dass $\left\{\frac{10}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{9}{4}\right\}$ die Menge der Summen aus je zwei Zahlen von $\{a,b,c\}$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu lösen sind die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rlll} \text{I.} & a+b = 10/3 \quad ; & a+c = -5/12 \quad ; & b+c = 9/4 \\ \text{II.} & a+b = 10/3 \quad ; & a+c = 9/4 \quad ; & b+c = -5/12 \\ \text{III.} & a+b = -5/12 \quad ; & a+c = 10/3 \quad ; & b+c = 9/4 \\ \text{IV.} & a+b = -5/12 \quad ; & a+c = 9/4 \quad ; & b+c = 10/3 \end{array}$$

V. $a + b = 9/4 \quad ; \quad a + c = 10/3 \quad ; \quad b + c = -5/12$

VI. $a + b = 9/4 \quad ; \quad a + c = -5/12 \quad ; \quad b + c = 10/3$

Jedes dieser Gleichungssysteme hat die Lösungen 3, -3/4 und 1/3. Die gesuchte Menge ist also $\{-3/4, 1/3, 3\}$.

Aufgabe 221011:
In einer Abteilung eines VEB werden drei Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 hergestellt. Aus der nachfolgenden Tabelle sind die täglich anfallenden Rohstoff-, Energie- und Lohnkosten in Mark je Stück der drei Erzeugnisse ersichtlich. Ferner ist die Gesamthöhe der Mittel angegeben, die täglich für Rohstoffe, Energie und Löhne zur Verfügung stehen.

Beweisen Sie, dass es möglich ist, die täglich zu produzierenden Stückzahlen der Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 so festzusetzen, dass alle zur Verfügung stehenden Mittel, die hier genannt sind, restlos ausgeschöpft werden!

Beweisen Sie, dass durch diese Forderung des Ausschöpfens die Stückzahlen eindeutig bestimmt sind, und ermitteln Sie diese!

Kostenart	Kosten in M je Stück für E_1	E_2	E_3	Insgesamt zur Verfügung stehende Mittel in Mark
Rohstoffkosten	6	7	9	4950
Energiekosten	1	2	2	1100
Lohnkosten	5	6	8	4300

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Mittel werden genau dann bei Festsetzung von Stückzahlen e_1, e_2, e_3 für E_1, E_2 bzw. E_3 ausgeschöpft, wenn die Gleichungen

$$6e_1 + 7e_2 + 9e_3 = 4950 \tag{1}$$
$$e_1 + 2e_2 + 2e : 3 = 1100 \tag{2}$$
$$5e_1 + 6e_2 + 8e_3 = 4300 \tag{3}$$

gelten. Angenommen, für Stückzahlen e_1, e_2, e_3 treffe diese zu. Dann folgt, indem man (1) von der Summe aus (2) und (3) subtrahiert, $e_2 + e_3 = 450 \quad (4)$.

Subtrahiert man (1) von der mit 6 multiplizierten Gleichung (2), so erhält man $5e_2 + 3e_3 = 1650 \quad (5)$.

Subtrahiert man (5) von der mit 5 multiplizierten Gleichung (4), so ergibt sich $2e_3 = 600$, also $e_3 = 300$.

Hieraus und aus (4) folgt $e_2 = 150$ und unter Berücksichtigung von (2) $e_1 = 200$.

Daher können nur diese Stückzahlen die Gleichungen (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen diese Gleichungen, wie eine Probe zeigt.

Damit ist bewiesen, dass es möglich ist, die gesamten Mittel auszuschöpfen, und dass die Stückzahlen durch diese Forderung eindeutig bestimmt sind. Für E_1, E_2, E_3 betragen sie 200, 150 bzw. 300.

Aufgabe 241013:
Ermitteln Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, für die die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$x \cdot (y+z) = 0. \qquad (I.1)$$
$$y \cdot (x+z) = 0. \qquad (I.2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) Wenn ein Tripel (x,y,z) reeller Zahlen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt, eo folgt:

So liegt genau einer der vier folgenden Fälle (A),(B),(C),(D) vor:

(A) Es gilt $x = 0$ und $y = 0$.

(B) Es gilt $x = 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fall folgt aus (2), dass $z = -x = 0$ gilt.

(C) Es gilt $x \neq 0$ und $y = 0$. In diesem Fall folgt aus (1), dass $z = -y = 0$ gilt.

(D) Es gilt $x \neq 0$ und $y \neq 0$. In diesem Fell folgt aus (1) und (2), dass $z = -x = -y$ gilt.

Daher können nur die folgenden Tripel (1) und (2) erfüllen:

(a) Alle Tripel (0,0,z) mit beliebigem reellem z.
(b) alle Tripel (0,y,0) mit beliebigem reellem $y \neq 0$,
(c) alle Tripel (x,0,0) mit beliebigem reellem $x \neq 0$,
(d) alle Tripel (x,x, $-x$) mit beliebigem reellem $x \neq 0$.

(II) Es gilt für jedes Tripel

in (a): $0 \cdot (0+z) = 0$;
in (b): $0 \cdot (y+0) = 0$, $y \cdot (0+0) = 0$;
in (c): $x \cdot (0+0) = 0$, $0 \cdot (x+0) = 0$;
in (a): $x \cdot (x+x) = 0$;

womit in allen Fällen (1) und (2) bestätigt sind.

Aus (I) und (11) folgt, dass genau die in (a),(b),(c) und (d) genannten Tripel die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.

II Runde 2

Aufgabe 151022:
Hubert hat drei Kästchen, deren jedes eine Anzahl von Kugeln enthält.
Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun zur Zeit jeweils darin sind.
Danach stellt er fest, dass in jedem der Kästchen genau 64 Kugeln sind.
Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die jedes der Kästchen ursprünglich enthielt!

Lösung von Steffen Polster:
Zu Beginn seine im 1.Kastchen a Kugeln, im zweiten b Kugeln und im dritten c Kugeln. Die drei Umlegungen verändern die Inhalte der Kästchen wie folgt:

Aktion	1.Kästchen	2.Kästchen	3.Kästchen
	a	b	c
I	$a-b-c$	$2b$	$2c$
II	$2a-2b-2c$	$3b-a-c$	$4c$
III	$4a-4b-4c$	$6b-2a-2c$	$-a-b+7c$

Alle Kästchen enthalten dann 64 Kugeln. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$4a-4b-4c=64 \qquad -2a+6b-2c=64 \qquad -a-b+7c=64$$

mit der Lösung $a=104$, $b=56$ und $c=32$. Im ersten Kästchen waren zu Beginn 104 Kugeln, im zweiten 56 und im dritten 32 Kugeln.

Aufgabe 221023:
Von einem rechtwinkligen Dreieck wird gefordert:
(1) Der Umfang des Dreiecks beträgt 132 cm.
(2) Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks beträgt 6050 cm^2.
Beweisen Sie, dass es rechtwinklige Dreiecke gibt, die die Forderungen (1) und (2) erfüllen, und dass die Längen der Dreiecksseiten durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind!
Geben Sie diese Seitenlängen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Dreieck mit den Maßzahlen a,b,c der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen ist nach dem dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung genau dann rechtwinklige mit c als Maßzahl der Hypotenusenlänge, wenn $a^2+b^2=c^2 \quad (3)$ gilt.
Es erfüllt genau dann (1) und (2), wenn darüber hinaus der Gleichungen

$$a+b+c=132 \tag{4}$$
$$a^2+b^2+c^2=6050 \tag{5}$$

gelten.
I. Wenn (3), (4), (5) erfüllt sind, so folgt:
Nach (3) und (5) gilt $2c^2=6050, c^2=3025$, wegen $c>0$ als $c=55$ und damit nach (4) und (3)

$$a+b=77 \tag{6}$$
$$a^2+b^2=3025 \tag{7}$$

Aus (6) folgt $b=77-a$ und damit aus (7) $a^2-77a+1452=0 \quad (8)$ mit der Lösung $a=\frac{77}{2}\pm\frac{11}{2}$, d. h. entweder $a=44$ und $b=33$ oder $a=33$ und $b=44$.
Also können nur die Kathetenlängen 33 cm, 44 cm und die Hypotenusenlänge 55 cm den Forderungen (1) und (2) genügen.
Ein Probe zeigt, dass sie den Bedingungen genügen. Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 241021:
Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a,b,c,d) von reellen Zahlen a,b,c,d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!

$$a^2+bc=0 \tag{1}$$
$$ab+bd=0 \tag{2}$$
$$ac+cd=0 \tag{3}$$
$$bc+d^2=0 \tag{4}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn reelle Zahlen a,b,c,d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b=0$, so folgt aus (1) und (4),

dass $a = 0$ und $d = o$ gilt. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), dass $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.
Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem erfüllen:
(A) Alle Quadrupel $(0{,}0{,}c{,}0)$ mit beliebigem reellen c,
(B) alle Quadrupel $\left(a{,}b, -\frac{a^2}{b}, -a\right)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem $b \neq 0$.
Die Probe durch Einsetzen der Werte in die Gleichungen des Systems bestätigt die Lösungen.

Aufgabe 291021:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \qquad (1)$$
$$\frac{x+\sqrt{x}}{y+\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn reelle Zahlen x und y die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, so folgt:
Nach (1) gilt $y = \frac{9}{4}x$ (3), nach (2) gilt $2x + 2\sqrt{x} = y + \sqrt{y}$ (4).
Setzt man (3) in (4) ein, so folgt

$$2x + 2\sqrt{x} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\sqrt{x} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}x^2 \qquad (5)$$

Nach (1) ist $x \neq 0$, somit folgt aus (5) $x = 4$. Hieraus und aus (3) folgt $y = 9$.
Die Probe bestätigt, dass (1) und (2) genau von dem Paar $(x; y) = (4; 9)$ erfüllt werden.

III Runde 3

Aufgabe 031033:
Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0, b > 0$). Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308. Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1000 zu wenig erhalten.
Wie heißen die Zahlen a und b?

Lösung von Manuel Naumann:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei b die kleinere Zahl. Dann ergibt sich aus den Angaben folgendes Gleichungssystem:

$$575b + 227 = ab - 100 \qquad ; \qquad 572b + 308 = ab - 1000$$

Dieses Gleichungssystem kann man beispielsweise lösen, wenn man die erste Gleichung nach b umstellt. Man erhält $b = -\frac{327}{575-a}$.
Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, führt das nach äquivalenten Umformungen auf die Lösung $a = 576$. Daraus ergibt sich durch die Beziehung $b = -\frac{327}{575-a} = 327$.

Aufgabe 071033:
Ingelore sagt zu ihrer Schwester Monika:

„Wir haben gestern im Mathematikunterricht Berechnungen an einer quadratischen Pyramide durchgeführt und dabei für das Volumen und den Oberflächeninhalt gleiche Maßzahlen erhalten.

Ich weiß zwar noch, dass alle Maßzahlen natürliche Zahlen waren, kann mich aber nicht mehr daran erinnern, wie sie lauten.“
„Welche Maßzahlen meintest du, als du ‚alle Maßzahlen‘ sagtest?“
„Ich meinte die Maßzahlen der Seitenlänge der Grundfläche, der Höhe, des Volumens und des Oberflächeninhalts der Pyramide.“
„Waren diese Stücke mit zusammenpassenden Maßeinheiten versehen, waren z. B. die Längen in cm der Oberflächeninhalt in cm^2 und das Volumen in cm^3 angegeben?“
„Ja so war es.“

Aus diesen Angaben kann Monika die Aufgabe rekonstruieren. Wie kann das geschehen?

Lösung von cyrix:
Wir gehen von einer geraden quadratischen Pyramide aus, da sonst die Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist.
Sei $a \neq 0$ die Maßzahl der Kantenlänge der Grundfläche und $h \neq 0$ die der Höhe der Pyramide. Dann ist deren Volumen V gleich $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und ihr Oberflächeninhalt

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$$

Aus $V = A$ folgt damit $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$ bzw. nach Division durch $\frac{a}{3}$ und Umsortieren $a \cdot (h - 3) = 3 \cdot \sqrt{4h^2 + a^2}$. Quadrieren liefert

$$a^2 \cdot (h-3)^2 = 9 \cdot (4h^2 + a^2) \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 \cdot (h^2 - 6h + 9) = 36h^2 + 9a^2$$

was nach Subtraktion von $9a^2$ und Division durch h die Gleichung $a^2 \cdot h - 6a^2 = 36h$, also $h \cdot (a^2 - 36) = 6a^2$ und damit $h = \frac{6a^2}{a^2-36}$ liefert.
Da h eine natürliche Zahl ist, muss der Nenner $a^2 - 36$ Teiler des Zählers $6a^2$ sein. Also muss auch $a^2 - 36$ ein Teiler von $6a^2 - 6 \cdot (a^2 - 36) = 216$ sein.

Für jeden Teiler t von 216, der durch 2, aber nicht 4 teilbar ist, wäre $t + 36$ gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also keine Quadratzahl. Analog können wir auch die durch drei, aber nicht 9 teilbaren Teiler t von 216 ausschließen, da auch dann $t + 36$ nicht die Quadratzahl a^2 ergeben kann.
Es verbleiben die Teiler 1, 9, 27, 4, 36, 108, 8, 72 und 216. Von diesen erfüllt nur $t = 108$, dass $t + 36$ eine Quadratzahl ergibt, nämlich $t + 36 = 144 = 12^2 = a^2$. Also ist

$$a = 12 \qquad \text{und} \qquad h = \frac{6a^2}{a^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12^2}{12^2 - 36} = \frac{6 \cdot 12}{12 - 3} = 8$$

Tatsächlich ist für diese Werte der Länge der Grundseite $a = 12$ und Höhe der Pyramide $h = 8$ das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 384$ und die Oberfläche

$$A = a^2 + a \cdot \sqrt{4h^2 + a^2} = 144 + 12 \cdot \sqrt{256 + 144} = 144 + 12 \cdot 20 = 384 = V.$$

Aufgabe 091034:
Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq -b$; denn wäre $a = -b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0 = a + b = ab = -b^2$, also $b = 0$, $a = 0$, im Widerspruch dazu, dass nach Aufgabenstellung $b < a$ sein müsste.
Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a + b = a^2 - b^2$ oder $a + b = b^2 - a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a + b \neq 0$ auf $1 = b - a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b < a$ führen.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a+b=a^2-b^2$, woraus wegen $a+b\neq 0$ weiter $1=a-b$, also $a=b+1$ folgt. Setzt man dies in $a+b=ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b+1=b^2+b$, d. h. $b^2-b-1=0$, die die Lösungen

$$b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad ; \qquad b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

und nur diese hat. Die zugehörigen Werte für a sind

$$a_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad ; \qquad a_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Somit können höchstens die Paare (a_1,b_1) und (a_2,b_2) Lösung der Aufgabe sein, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 111031:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a;b)$ reeller Zahlen a,b mit $a\neq 0, b\neq 0$, für die folgendes gilt:
(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.
(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar $(a;b)$, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt:

$$(3) \quad a+b=6 \qquad \text{und} \qquad (4) \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$$

Aus (3) folgt $b=6-a$ und $a\neq 6$, hieraus und aus (4): $\frac{1}{a}+\frac{1}{6-a}=6$.
Nach Multiplikation mit $a(6-a)$, Subtraktion von $6a(6-a)$ und Division durch 6 ergibt sich $a^2-6a+1=0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (3): $b_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$. Also können höchstens die Paare $(3+2\sqrt{2};3-2\sqrt{2})$ und $(3-2\sqrt{2};3+2\sqrt{2})$ Lösung sein.
Tatsächlich gelten für die Gleichungen

$$3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{9-8}=6$$

sowie diejenigen Gleichungen, die durch Vertauschung von $(+2\sqrt{2})$ mit $(-2\sqrt{2})$ entstehen.

Aufgabe 151033:
Beim Druck einer Mathematikaufgabe wurde statt $(1+a^2x^2):x^2=b$ (mit gegebenen Zahlen a,b) versehentlich die Gleichung $(1+a^2x^2)\cdot x^2=b$ (mit denselben Zahlen a,b) gedruckt.
Trotzdem hatte die so entstandene Gleichung dieselbe nichtleere Lösungsmenge wie die ursprünglich vorgesehene Gleichung.
Man ermittle diese Lösungsmenge!

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nehmen an, dass $a,b\in\mathbb{R}$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Aus der ersten, „eigentlich richtigen“ Aufgabe folgt einerseits:

$$(1) \qquad 1+a^2x^2=bx^2$$

Die zweite, „falsch gedruckte“ Aufgabe lautet andererseits: (2) $\qquad (1+a^2x^2)\cdot x^2=b$, (1) in (2) eingesetzt ergibt:

$$(3) \qquad bx^2\cdot x^2=b$$

$b = 0$ erfüllt zwar diese Gleichung, würde aber wegen (1) erfordern, dass

$$1 + a^2x^2 = 0$$

ist, was in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist. Daher muss in (3) gelten: $x^4 = 1$. Da $x \in \mathbb{R}$, ist die Lösungsmenge $\{1, -1\}$.

Aufgabe 211033:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a; b)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen!

$$[a] + 2b = 6{,}6$$
$$[2a] + 3b = 11{,}9$$

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird mit $[r]$ diejenige ganze Zahl g bezeichnet, für die $g \leq r < g+1$ gilt.
So ist z. B. $[4{,}01] = 4$, da $4 \leq 4{,}01 < 5$ gilt; $[7] = 7$, da $7 \leq 7 < 8$ gilt; $[-\pi] = -4$, da $-4 \leq -\pi < -3$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wegen $[a] \in \mathbb{Z}$ ist nach der ersten Gleichung der Nachkommaanteil von b entweder 0,3 oder 0,8, da nur für diese $2b$ den Nachkommaanteil 0,6 besitzt. Aber nur die erste Möglichkeit führt nicht zu einem Widerspruch mit der zweiten Gleichung, da der Nachkommaanteil von $3b$, und damit auch von $11{,}9 = [2a] + 3b$, bei der zweiten Möglichkeit wegen $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ also 0,4 betragen würde, was ein Widerspruch ist.

Also gilt $b = [b] + 0{,}3$ und die beiden Gleichungen gehen über in $[a] + 2[b] = 6$ sowie $[2a] + 3[b] = 11$.
Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich des Nachkommaanteils von a:

1. Fall: Es ist $0 \leq a - [a] < \frac{1}{2}$. Dann ist $0 \leq 2a - 2[a] < 1$, also $2[a] \leq 2a < 2[a] + 1$ und damit $[2a] = 2[a]$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a]; [b]) = (4; 1)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a; b) = (4 + c; 1{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.

2. Fall: Es ist $\frac{1}{2} \leq a - [a] < 1$. Dann ist $1 \leq 2a - 2[a] < 2$, also $2[a] + 1 \leq 2a < 2[a] + 2$ und damit $[2a] = 2[a] + 1$. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[a] + 2[b] = 6 \qquad ; \qquad 2[a] + 1 + 3[b] = 11$$

welches die Lösung $([a]; [b]) = (2; 2)$ besitzt. Damit sind für alle $0 \leq c < \frac{1}{2}$ die Paare $(a; b) = (2{,}5 + c; 2{,}3)$ Lösungen des Ausgangssystems.
Zusammenfassend ergibt sich also folgende Lösungsmenge:

$$\left\{ (a,b) \middle| \exists 0 \leq c \leq \frac{1}{2} : (a = 4 + c \wedge b = 1{,}3) \vee (a = 2{,}5 + c \wedge b = 2{,}3) \right\}.$$

Aufgabe 321032:
Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.
a) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!
b) Beweisen Sie, dass ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

Lösung von cyrix:
a) Es sei q die Seitenlänge des Quadrats, a und b die beiden Seitenlängen des zu konstruierenden Rechtecks. Dann ist $a \cdot b = q^2$ der gemeinsame Flächeninhalt und $2(a+b) = n \cdot (4q)$ der Umfang des Rechtecks. Es gilt also $a + b = 2nq$ bzw. $b = 2nq - a$.
Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$q^2 = a \cdot (2nq - a) = 2nq \cdot a - a^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 - 2nq \cdot a + q^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in a hat die Lösungen

$$nq \pm \sqrt{n^2q^2 - q^2} = (n \pm \sqrt{n^2-1})q$$

Wegen

$$b = \frac{q^2}{a} = q \cdot \frac{1}{n \pm \sqrt{n^2-1}} = q \cdot \frac{n \mp \sqrt{n^2-1}}{n^2 - (n^2-1)} = (n \mp \sqrt{n^2-1})q$$

stimmen die beiden Rechtecke aber bis auf die Reihenfolge der Kantenlängen a und b überein.

b) In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge nq und dessen eine Kathete die Länge q besitzt, hat nach dem Satz des Pythagoras die zweite Kathete die Länge $\sqrt{n^2q^2 - q^2} = \sqrt{n^2-1} \cdot q$. Es genügt also ein solches Dreieck zu konstruieren und dann einerseits die Differenz und andererseits die Summe der beiden Kathetenlängen für a und b durch antragen zu erhalten.

Ein solches rechtwinkliges Dreieck erhält man mit dem Satz des Thales: Man zeichne eine Strecke AB der Länge nq (ggf. durch n-faches Abtragen einer Strecke der Länge q auf einer Geraden), halbiere sie und zeichne den Kreis um den Mittelpunkt durch die Endpunkte der Strecke.

Dann gilt für jeden Punkt $C \notin \{A,B\}$ auf dem Kreis, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C ist. Sei nun C einer der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Kreis um A mit Radius q. Dann ist $\triangle ABC$ ein solches gesuchtes Dreieck, sodass sich die Kantenlängen a und b des gesuchten Rechtecks daraus konstruieren lassen, $\square$.

IV Runde 4

Aufgabe 111044:
Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$-2x + 3y = 2m \quad (1) \qquad ; \qquad x - 5y = -11 \quad (2)$$

Lösung von cyrix:
Aus (2) folgt $5y - 11 = x < 0$, also wegen $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ direkt $y = 1$ oder $y = 2$. Im ersten Fall ist $x = -6$ und $m = \frac{15}{2}$, im zweiten $x = -1$ und $m = 4$.
Damit ergeben sich die beiden Lösungstripel $(4, -1{,}2)$ und $\left(\frac{15}{2}, -6, 1\right)$. Die Probe bestätigt, dass beide angegebenen Tripel Lösungen des Gleichungssystems sind.

Aufgabe 171046:
Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 2 + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 &= 6 \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine Lösung (x, y), dann folgt mit

$$z = x + y \qquad \text{aus (1)} \qquad (3)$$
$$xy = 2 + 3\sqrt{2} - z \qquad (4) \qquad \text{bzw. mit}$$
$$z^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad \text{aus (2)}$$
$$z^2 - 2xy = 6$$

Aus (4) und (5) ergibt sich für z eine quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z - 10 - 6\sqrt{2} = 0$$

mit den Lösungen (6) und (7)

$$z_1 = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad z_2 = -4 - \sqrt{2}$$

Setzt man nun (6) bzw. (7) in (3) und (4) ein, so erhält man die folgenden Gleichungssysteme

$$x + y = 2 + \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 2\sqrt{2} \qquad (6')$$
$$x + y = -4 - \sqrt{2} \qquad ; \qquad xy = 6 + 4\sqrt{2} \qquad (7')$$

In beiden kann man nach dem Einsetzungsverfahren etwa y eliminieren und erhält eine quadratische Gleichung für x. Diese hat im Falle (7') keine reellen Lösungen und im Falle (6') die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y-Werte sind $y_1 = \sqrt{2}$ und $y_2 = 2$.
Hat das Gleichungssystem (1), (2) Lösungen, so können das höchstens $(2, \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, 2)$ sein. Wie man durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt, sind dies tatsächlich Lösungen.

Aufgabe 201043A:
Ermitteln Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist!

$$x \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = 2 \log_y(5 - \sqrt{24}) \qquad (1)$$
$$y - x = 2 \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen mit $y > 0$ und $y \neq 1$ erfülle (1) und (2). Wegen

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - \sqrt{24} \quad \text{folgt dann} \quad x^2 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 4 \cdot \log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Da $\sqrt{3} \neq \sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq 1$ ist, ist $\log_y(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ definiert und ungleich Null. Daraus folgt $x^2 = 4$. Wegen (2) und $y > 0$ ist $x = y - 2 > -2$, also muss $x - 2$ sein. Nach (2) ergibt sich $y = 4$. Folglich kann nur das Paar $(x; y) = (2; 4)$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Wegen

$$2 \cdot \log_4(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_4(5 - \sqrt{24})$$

und $4 - 2 = 2$ erfüllt es diese beiden Gleichungen tatsächlich. Daher ist genau das Paar $(2; 4)$ das gesuchte.

Aufgabe 251043B:
Gegeben seien reelle Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4.
Man ermittle zu jedem möglichen Fall für diese $a_1, ..., a_4$ jeweils alle diejenigen Tripel (b_1, b_2, b_3) reeller Zahlen (bzw. beweise gegebenenfalls, dass es keine solchen Tripel gibt), für die das Gleichungssystem

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + x_3^2 = b_1 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + a_3 x_3^2 = b_2 \qquad (2)$$
$$x_2^2 + a_4 x_3^2 = b_3 \qquad (3)$$

genau ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen als Lösung hat.

Lösung von cyrix:
Das Gleichungssystem ist linear in x_1^2, x_2^2 und x_3^2, sodass mit einem Lösungstripel (x_1,x_2,x_3) auch jedes Tripel der Form $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$, wobei die Vorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können, eine weitere Lösung ist. Damit es nur eine eindeutig bestimmte Lösung gibt, muss also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gelten.
Damit das Tripel (0,0,0) aber überhaupt eine Lösung ist, muss $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ gelten, denn sonst würde für ein $b_i \neq 0$ das Lösungstripel $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die i-te Gleichung nicht erfüllen.

Ergo hat das Gleichungssystem der Aufgabenstellung genau dann genau eine Lösung, wenn $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ist und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1y_1 + a_2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_2 + a_3y_3 &= 0 \\ y_2 + a_4y_3 &= 0 \end{aligned}$$

allein die triviale Lösung $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ besitzt, also die drei Gleichungen linear unabhängig sind. Dafür muss $a_3 \neq a_4$ gelten, denn sonst wären die zweite und dritte Gleichung identisch. Ist aber $a_3 \neq a_4$, so folgt aus diesen beiden Gleichungen direkt $y_2 = y_3 = 0$. Damit folgt, dass $a_1 \neq 0$ sein muss, denn sonst wäre etwa auch $(y_1,y_2,y_3) = (1,0,0)$ Lösung des betrachteten Gleichungssystems. Ist aber $a_1 \neq 0$, so folgt wieder direkt mit $y_2 = y_3 = 0$ auch $y_1 = 0$.

Zusammenfassend gilt also:

Aufgabe 261043A:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x_1, x_2, x_3) von reellen Zahlen x_1, x_2, x_3, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \qquad (1) \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 3 \qquad (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen das Gleichungssystem erfüllt, so folgt: Setzt man aus (1) $x_3 = 3 - x_1 - x_2 \quad (4)$ in (2) ein, so ergibt sich

$$x_1^3 + x_2^3 + 27 - 27(x_1 + x_2) + 9(x_1 + x_2)^2 - x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3 = 3$$

nach Division durch 3 also

$$9(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2) = 8 \qquad (5)$$

Setzt man (4) in (3) ein, so folgt

$$3x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2) = 1 \qquad (6)$$

Für die beiden Zahlen

$$p = x_1x_2 \quad (7) \qquad ; \qquad s = x_1 + x_2 \quad (8)$$

besagen (5) und (6) also

$$9s - 3s^2 + ps = 8 \quad (9) \qquad ; \qquad 3p - ps = 1 \quad (10)$$

Nach Addition und anschließender Division durch 3 folgt

$$p = s^2 - 3s + 3 \quad \Rightarrow \quad p = s^2 - 3s + 3 \qquad (11)$$

Einsetzen in (9) ergibt

$$9s - 3s^2 + s^3 - 3s^2 + 3s = 8 \quad \Rightarrow \quad (s - 2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 2$$

Nach (11), (7), (8) folgt hieraus

$$p = 1 \qquad ; \qquad x_1 x_2 = 1 \qquad ; \qquad x_1 + x_2 = 2 \tag{12,13}$$

Setzt man $x_2 = 2 - x_1$ aus (13) in (12) ein, so folgt $x_1 = 1$ und damit aus (3) und (4) $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Also kann nur das Tripel (1,1,1) das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 281046:
Beweisen Sie, dass zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$
$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$
$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt!

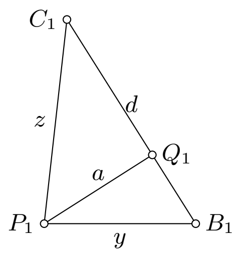
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei (a, b, c, d) ein beliebiges Quadrupel positiver reeller Zahlen mit $a+b+c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$. Durch Anwendung des Satzes des Pythagoras erhält man die Aussage: Zahlen y, z mit

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d$$

existieren dann, wenn zwei Dreiecke $B_1Q_1P_1$, $C_1Q_1P_1$, beide bei Q_1 rechtwinklig, mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$ und mit der gemeinsamen Seite P_1Q_1 der Länge $P_1Q_1 = a$ so existieren, dass

$$B_1Q_1 + C_1Q_1 = d$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn es ein Dreieck $B_1C_1P_1$ mit $B_1P_1 = y$, $C_1P_1 = z$, $B_1C_1 = d$ gibt, in dem $P_1Q_1 = a$ die Länge der auf B_1C_1 senkrechten Höhe P_1Q_1 ist und diese Höhe ihren Fußpunkt Q_1 zwischen B_1 und C_1 hat; diese letzte Bedingung besagt, dass im Dreieck $B_1C_1P_1$ die Innenwinkel bei B_1 und C_1 spitz sind.



Entsprechend gilt: Zahlen z, x mit

$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d$$

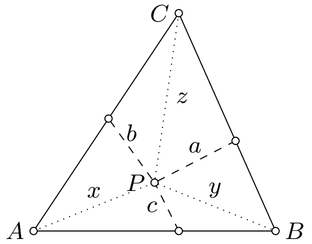
bzw. Zahlen x,y mit

$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

existieren dann, wenn ein Dreieck $C_2A_2P_2$ mit $C_2P_2 = z$, $A_2P_2 = x$, $C_2A_2 = d$, spitzen Innenwinkeln be C_2, A_2 und mit der zu C_2A_2 senkrechten Höhe der Länge b existiert, bzw. wenn ein Dreieck $A_3B_3C_3$ mit $A_3P_3 = x$, $B_3P_3 = y$, $A_3B_3 = d$, spitzen Innenwinkeln bei A_3, B_3 und mit der zu A_3B_3 senkrechten Höhe der Länge c existiert. Wegen der Übereinstimmung

$$A_2P_2 = A_3P_3, \qquad B_3P_3 = B_1P_1, \qquad C_1P_1 = C_2P_2$$

in diesen Bedingungen gilt somit:



Wenn zu einem Dreieck ABC mit $BC = CA = AB = d$ ein Punkt P (in der Ebene oder im Raum) existiert, der von den Geraden durch B, C bzw. durch C, A bzw. durch A, B die Abstände a bzw. b bzw. c hat und für den in allen drei Dreiecken BCP, CAP, ABP die bei A, B und C auftretenden Innenwinkel spitz sind, dann existiert ein Tripel (x, y, z), das die drei geforderten Gleichungen erfüllt.

Nun existiert stets sogar in der Ebene durch A, B, C ein Punkt P, der diese Bedingungen erfüllt. Dies kann man folgendermaßen zeigen:

Man konstruiere drei von einem P ausgehende Strahlen, von denen je zwei einen Winkel der Größe 120° miteinander bilden. Auf ihnen trage man Strecken der Länge a, b bzw. c von P aus ab und errichte in deren Endpunkten jeweils die Senkrechte auf dem betreffenden Strahl. Diese drei Senkrechten bilden einen Dreieck ABC, in dem jeder Innenwinkel (nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck) die Größe $360° - 2 \cdot 90° - 120° = 60°$ hat, das also gleichseitig ist.

Ist s seine Seitenlänge, so ist sein Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$$

die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BCP, CAP, ABP, also

$$F = \frac{1}{2}s(a+b+c) = \frac{1}{4}s \cdot d\sqrt{3}$$

Daher gilt $a = d$, und alle Bedingungen werden von ABC mit P erfüllt.

I.VII (quadratische) Funktionen, Folgen

I Runde 1

Aufgabe 091014:
Es sei $f(x)$ die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ definierte Funktion und x_0 eine beliebige reelle Zahl.

Beweisen Sie, dass dann $f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$ gilt!

(Dabei bezeichnet $f(x_0 - 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 - 1$ und $f(x_0 + 1)$ den Wert der Funktion an der Stelle $x_0 + 1$.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen

$$f(x_0 - 1) = 2(x_0 - 1)^2 - 3(x_0 - 1) + 4 = 2x_0^2 - 7x_0 + 9 \qquad \text{und}$$
$$f(x_0 + 1) = 2(x_0 + 1)^2 - 3(x_0 + 1) + 4 = 2x_0^2 + x_0 + 3 \qquad \text{gilt}$$
$$f(x_0 - 1) = f(x_0 + 1) - 8x_0 + 6$$

w. z. b. w.

Aufgabe 121012:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch die Gleichung $y = x^2$ gegeben.

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die nicht parallel zur y-Achse verläuft und mit der Parabel genau einen Punkt P mit der Abszisse 3 gemeinsam hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingung, nicht parallel zur y-Achse zu verlaufen, wird genau dann von einer Geraden erfüllt, wenn sie eine Gleichung der Form $y = mx + b$ hat. Jede Gerade mit einer solchen Gleichung hat genau dann gemeinsame Punkte mit der Parabel $y = x^2$ wenn die Gleichung

$$x^2 - mx - b = 0$$

reelle Lösungen besitzt, und zwar sind die Lösungen dann die Abszissen der gemeinsamen Punkte. Daher erfüllen m, b genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die Gleichung (1) genau die Lösung $x = 3$ besitzt, also genau dann, wenn (1) die Form $(x - 3)^2 = 0$ hat, d. h, $m = 6$ und $b = -9$ ist. Demnach erfüllt genau die Gerade $y = 6x - 9$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 211014:

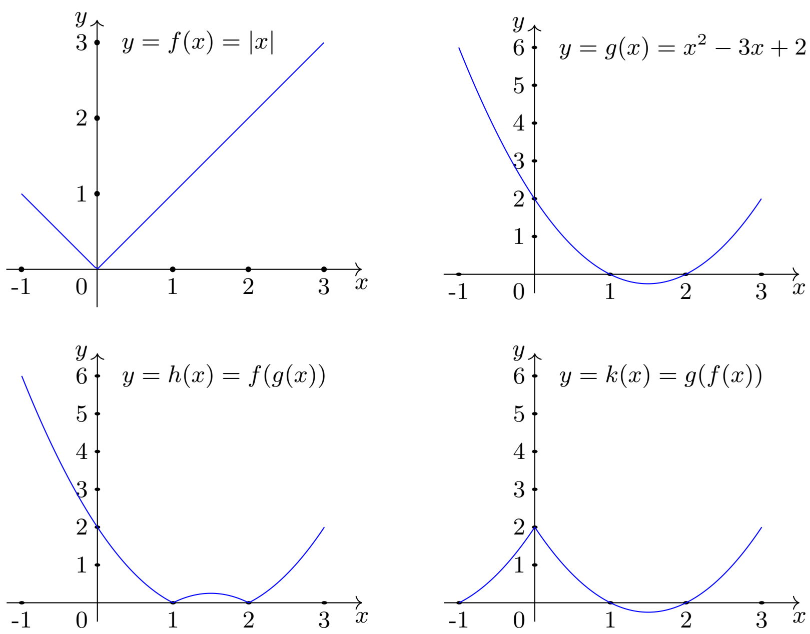
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ durch $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ definiert sind!

b) Im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ seien nun durch $h(x) = f(g(x))$, $k(x) = g(f(x))$ zwei weitere Funktionen h und k definiert.

Hinweis: Man erhält also z. B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, dass man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f(g(x)) = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1) = g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g(f(-1)) = g(|-1|) = g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, dass man auf Teilstücke des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) siehe Abbildungen



b) Es ist

$$h(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } g(x) \geq 0 \text{ ist} \\ -g(x) & \text{, falls } g(x) < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von h aus dem von g dadurch, dass man die unterhalb der x-Achse gelegenen Teilstücke des Graphen von g durch diejenigen Kurven ersetzt, die sich ergeben, wenn man diese Teilstücke an der x-Achse spiegelt.
Für $g(x) = x^2 - 3x + 2$ betrifft dies genau das eine Teilstück im Intervall $1 < x < 2$.

Ferner ist

$$k(x) = g(|x|) = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } x \geq 0 \text{ ist} \\ g(-x) & \text{, falls } x < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Daher entsteht der Graph von k aus dem von g dadurch, dass man das zum Intervall $-1 < x < 0$ gehörende Teilstück des Graphen von g durch diejenige Kurve ersetzt, die sich ergibt, wenn man das zum Intervall $0 < x < 1$ gehörende Teilstück des Graphen von g an der y-Achse spiegelt.

Aufgabe 291012:
Jens gibt in seinen Taschenrechner eine positive Zahl A ein und wendet dann folgenden Ablauf von Rechenoperationen an: Addition von 1, aus dem Ergebnis Ziehen der Quadratwurzel.

Nun wiederholt er denselben Ablauf von Rechenoperationen mehrere Male. Er beobachtet, dass nach genügend häufiger Wiederholung das Ergebnis auf einem Zahlenwert Z „stehenbleibt", d. h., dass der Ablauf, auf Z angewandt, wieder Z ergibt (oder sich nur um einen - durch das interne Runden des Rechners entstandenen - sehr kleinen Betrag von Z unterscheidet).

a) Beweisen Sie, dass aus jeder positiven Zahl A, für die diese Beobachtung zutrifft, dieselbe Zahl Z entstehen muss, unabhängig von der Ausgangszahl A!

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem Kleincomputer zu arbeiten, sollten Sie mit einem geeigneten Programm die in a) zu beweisende Behauptung für die Anfangswerte $A = 1, 2, \ldots, 10$ überprüfen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn aus einem positiven Wert A ein „stehenbleibender" Wert Z entsteht, so ist er erstens positiv und hat zweitens die Eigenschaft $\sqrt{Z+1} = Z$.

Hieraus folgt, in der Tat unabhängig von A, dass $Z + 1 = Z^2$, also $Z^2 - Z - 1 = 0$ gilt und demnach, da wegen $Z > 0$ die negative Lösung dieser Gleichung ausscheidet

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618034$$

sein muss.

b) Bei dem folgenden BASIC-Programm wird der Prozess abgebrochen, wenn die Differenz aufeinanderfolgender Ergebnisse dem Betrag nach kleiner als 10^{-6} ist. 100 FOR A=1 TO 10

```
110  Y=A
120  X=Y
130  Y=SQR(X+1)
140  IF ABS(Y-X) >= 1E-6 THEN 120
150  PRINT Y
160 NEXT A
```

Aufgabe 311013:
Eine Funktion f (die in einem Intervall reeller Zahlen definiert ist und reelle Funktionswerte hat)

heißt genau dann streng konkav, wenn für alle $x_1 \neq x_2$ ihres Definitionsbereiches und alle positiven q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) \tag{1}$$

Man beweise: Wenn f eine für alle reellen Zahlen definierte streng konkave Funktion ist, dann gilt für alle reellen u, v mit $u \neq v$ die Ungleichung

$$f(u) + f(v) < 2 \cdot f\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{2}$$

und es gelten für alle reellen a, b mit $b \neq 0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+2b) &< 2 \cdot f(a+b), \\ f(a) + f(a+3b) &< f(a+b) + f(a+2b). \end{aligned} \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wendet man (*) mit $x_1 = u, x_2 = v, q_1 = q_2 = 5$ an, so folgt

$$f\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) > \frac{1}{2} f(u) + \frac{1}{2} f(v)$$

und daraus (1).
Für alle reellen a,b mit $b \neq 0$ erfüllen $u = a$ und $v = a + 2b$ die Ungleichung $u \neq v$, also ist (1) anwendbar und ergibt wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+2b}{2} = a + b$$

die Ungleichung (2).
Ferner erfüllen auch $u = a + b$ und $v = a + 3b$ die Ungleichung $u \neq v$, und damit führt (1) wegen

$$\frac{u+v}{2} = \frac{2a+4b}{2} = a + 2b$$

auf

$$f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+2b) \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt durch Addition

$$f(a) + f(a+2b) + f(a+b) + f(a+3b) < 2 \cdot f(a+b) + 2 \cdot f(a+2b)$$

und daraus, indem man auf beiden Seiten $f(a+b) + f(a+2b)$ subtrahiert, die Ungleichung (3).

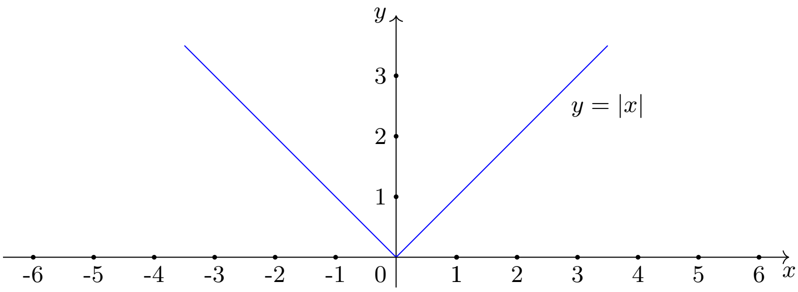
Aufgabe 341016:
Es seien Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3, ... für alle reellen Zahlen x definiert durch

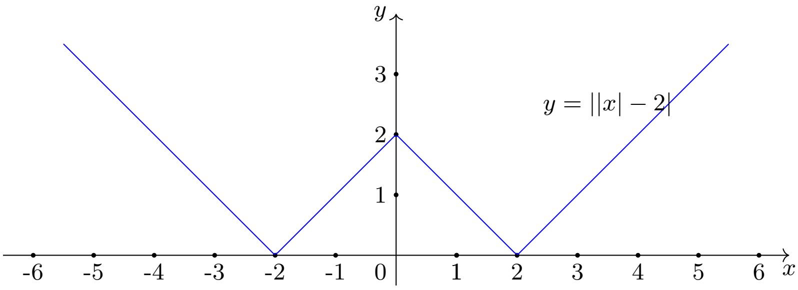
$$\begin{aligned} f_0(x) &= |x|, \\ f_1(x) &= ||x| - 2|, \\ f_2(x) &= |||x| - 2| - 2|, \\ &\ \ ... \end{aligned}$$

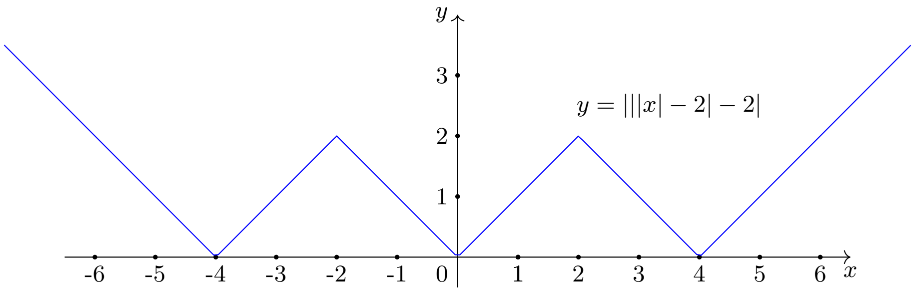
allgemein: $f_k(x) = |f_{k-1}(x) - 2|$ für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1 und f_2! Beschreiben Sie allgemein das Aussehen des Graphen der Funktion f_k!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt die Graphen von f_0, f_1 und f_2.







Beschreibung des Graphen von f_k: Die Funktion hat $(k+1)$ Nullstellen, symmetrisch zum Nullpunkt gelegen und mit Abständen zu je 4 Einheiten voneinander. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegt ein lokales Maximum.

In den Intervallen, die durch diese Nullstellen und Maxima voneinander abgegrenzt werden, verläuft der Graph geradlinig, immer abwechselnd mit den Anstiegen -1 und 1.

Bemerkung: Ausgehend von f_0 kann man diese Graphen der Reihe nach folgendermaßen erhalten: Der Graph von f_k wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, und dann werden alle Kurventeile, die dabei unterhalb von der x-Achse zu liegen kommen, an der x-Achse gespiegelt; so entsteht der Graph von f_{k+1}.

II Runde 2

Aufgabe V11021:
Die Industrieproduktion der Sowjetunion erhöhte sich 1960 um 10%. Auch in den folgenden Jahren wird die Produktion jährlich etwa in dieser Größenordnung weiter anwachsen.
Berechnen Sie, auf das Wievielfache die Industrieproduktion der UdSSR
a) in den nächsten 10 Jahren,
b) in den nächsten 20 Jahren,
c) bis zum Jahre 2000
anwachsen wird, wenn man eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde legt!

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
A sei die Anfangsproduktion. Dann gilt bei einer jährlichen Wachstumsrate von 10%:

1959	A		
1960	$A + \frac{1}{10}A$	$= A\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1$
1961	$A \cdot 1{,}1 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1$	$= A \cdot 1{,}1\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1^2$
1962	$A \cdot 1{,}1^2 + \frac{1}{10}A \cdot 1{,}1^2$	$= A \cdot 1{,}1^2\left(1 + \frac{1}{10}\right)$	$A \cdot 1{,}1^3$

Nach n-jährigem Wachsen ergibt sich $A \cdot 1{,}1^n$, weil sich durch Ausklammern stets nur ein weiterer Faktor von 1,1 ergibt. Danach gilt die Formel:

$$x = A \cdot 1{,}1^n$$

Da es nach der Aufgabe nicht auf die Produktion selbst ankommt, sondern auf die Vervielfachung, kann $A = 1$ gesetzt werden; somit ergibt sich:
zu a) $x = 1{,}1^{10} = 2{,}59 \approx 2{,}6$,
zu b) $x = 1{,}1^{20} = 6{,}73 \approx 6{,}8$,
zu c) $x = 1{,}1^{40} = 45{,}26 \approx 45{,}3$.

Die Industrieproduktion der UdSSR wächst in den nächsten 10 Jahren auf das 2,6fache, in den nächsten 20 Jahren auf das 6,8fache ..., wenn eine jährliche Wachstumsrate von 10% zugrunde gelegt wird.

Aufgabe 081021:
Eine arithmetische Zahlenfolge ist eine Folge $\{a_1, a_2, \dots\}$ von Zahlen, bei der die sämtlichen Differenzen $a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ einander gleich sind.
Zeigen Sie, dass es genau eine arithmetische Zahlenfolge gibt, bei der für jedes $n = 1, 2, \dots$ die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ der ersten n Glieder $n^2 + 5n$ beträgt!

Lösung von StrgAltEntf:
Ist d die Differenz der arithmetischen Folge (a_n), so gilt $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, \dots$. Es folgt

$$s_n = (a_1 + 0 \cdot d) + (a_1 + 1 \cdot d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d) =$$

$$= n \cdot a_1 + (0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) \cdot d = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Es soll $s_n = n^2 + 5n$, also $n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2 + 5n$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gelten. Es folgt $a_1 + \frac{n-1}{2}d = n + 5$ für alle $n = 1, 2, \dots$.
Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = 6$ und mit $n = 2$ dann $6 + \frac{1}{2}d = 7$, also $d = 2$.
Es handelt sich also um die arithmetische Folge $6, 8, 10, 12, \dots$.

Aufgabe 121023:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem sind zwei Parabeln gezeichnet. Die eine ist der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Die zweite liegt ebenfalls symmetrisch zur y-Achse; ihr Scheitelpunkt ist $S(0; 6)$.
Sie hat ferner folgende Eigenschaft:
Fällt man von den Schnittpunkten A und B beider Parabeln die Lote auf die x-Achse (Fußpunkte seien A_1 bzw. B_1), so ist das Viereck A_1B_1BA ein Quadrat.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die zweite Parabel die x-Achse schneidet!

Lösung von Steffen Polster:
Auf Grund der Symmetrie zur y-Achse und ihres Scheitelpunktes muss die zweite Parabel eine Gleichung der Form $y = ax^2 + 6$ mit einem reellen a haben.
Die Schnittpunkte von $y = x^2$ und $y = ax^2 + 6$ haben die Abszissen

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}} \qquad ; \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}$$

Damit das Vierecke A_1B_1BA ein Quadrat wird, muss o. B. d. A. für x_1 die Ordinate gleich $2x_1$ sein. Aus

$$2\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}=\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-a}}\right)^2$$

ergibt sich $a_1=-\frac{1}{2}$. Die Funktion $y=-\frac{1}{2}x^2+6$ hat ihre Nullstellen bei

$$x_1=2\sqrt{3}\qquad;\qquad x_2=-2\sqrt{3}$$

Die gesuchten Punkte sind also $S_1(2\sqrt{3};0)$ und $S_2(-2\sqrt{3};0)$.

Aufgabe 281022:
Weisen Sie nach, dass es genau eine quadratische Funktion f gibt, die die Bedingung

$$\frac{f(x)+f(x+2)}{6}=x^2-3\qquad(*)$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt, und dass diese Funktion zwei ganzzahlige Nullstellen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine quadratische Funktion f, d. h. eine mit reellen $a\neq 0$, b,c durch $f(x)=ax^2+bx+c$ für alle reellen x definierte Funktion f die Bedingung (*) erfüllt, so folgt: Wegen

$$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c=ax^2+4ax+bx+4a+2b+c\qquad\text{also}$$

$$f(x)+f(x+2)=2ax^2+2(2a+b)x+2(2a+b+c)$$

gilt für alle reellen x die Gleichung $f(x)+f(x+2)=6^2-18$, d. h. die Gleichung

$$2ax^2+2(2a+b)x+2(2a+b+c)=6x^2+0\cdot x-18\qquad(**)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich aus (**) die Gleichungen

$$2a=6;\qquad 2(2a+b)=0;\qquad 2(2a+b+c)=-18$$

Aus ihnen folgt $a=3$, $b=-6$, $c=-9$ und somit die Funktion $f(x)=3x^2-6x-9$. Diese Funktion erfüllt die Bedingung (*), wie eine Probe bestätigt.
Die Gleichung $f(x)=0$, d. h. $3x^2-6x-9=0$, hat genau die Lösungen

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3};\qquad x_1=3\quad,\quad x_2=-1$$

Da dies zwei ganze Zahlen sind, ist damit auch der zweite geforderte Nachweis geführt.

Aufgabe 301024:
Für jede ganze Zahl $n>0$ sei

$$a_n=((n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1})^{-1}$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s=a_1+a_2+...+a_{1989}+a_{1990}$$

Beweisen Sie, dass hieraus $0{,}5<s<1$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes $n>0$ gilt

$$a_n=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Damit folgt

$$s=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{1990}}-\frac{1}{\sqrt{1991}}=1-\frac{1}{\sqrt{1991}}<1$$

und wegen $\frac{1}{1991}<\frac{1}{4}$, also $\frac{1}{\sqrt{1991}}<\frac{1}{2}$ auch $s>\frac{1}{2}$.

III Runde 3

Aufgabe 081034:
Eine quadratische Funktion der Form $y = x^2 + px + q$ wird im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt.
Die Schnittpunkte des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse begrenzen auf dieser eine Strecke mit der Länge 7 Längeneinheiten. Das Bild der Funktion schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S_y(0; 8)$.
Ermitteln Sie die reellen Zahlen p und q!

Lösung von cyrix:
Aufgrund des angegebenen Punkts S_y auf der Parabel ist $q = 8$. Die Nullstellen der Funktion können angegeben werden durch $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, sodass sich ihr Abstand berechnet zu $2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{p^2 - 4q}$. Dieser ist nach Aufgabenstellung gleich 7, sodass sich $p^2 - 4q = 49$ bzw. $p^2 = 81$, also $p = \pm 9$ ergibt.
Damit ergeben sich zwei Lösungspaare: $(p,q) = (-9,8)$ oder $(p,q) = (9,8)$. Die Probe bestätigt beide Ergebnisse.

Aufgabe 091036:
Von einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.
Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

Lösung von StrgAltEntf:
Aus der Funktionsgleichung und der Tabelle ergibt sich für $x = 1$ bzw. $x = 2$

$$(1) \quad a + b + c = 1 \qquad , \qquad (2) \quad 4a + 2b + c = 2$$

Subtrahiert man (1) von (2) bzw. 2 mal (1) von (2), erhält man (3) $\quad 3a + b = 1$ und (4) $\quad 2a - c = 0$ und hieraus $b = 1 - 3a$ und $c = 2a$. Für die quadratische Funktion ergibt sich somit

$$(5) \quad y = ax^2 + (1 - 3a)x + 2a$$

Einsetzen von $x = 3$ bzw. $x = 4$ liefert

$$(6) \quad n_1 = 9a + 3(1 - 3a) + 2a = 2a + 3 \qquad , \qquad (7) \quad n_2 = 16a + 4(1 - 3a) + 2a = 6a + 4$$

Da n_1 aus {0,1,...,9} sein soll, ergibt sich aus (6) und (7) folgende Tabelle

n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
n_2	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22

Da auch n_2 aus {0,1,...,9} und außerdem a nicht 0 sein soll, verbleiben für a nur die beiden Lösungen $a = -\frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$.
Für die Funktionsgleichung folgt dann aus (5):

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

Aufgabe 101033:
Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen $f(x)$ an, die die Eigenschaft haben, dass für jedes reelle x gilt: $f(x) = f(x+1) - a$

Lösung von cyrix:
Sei $f(x) = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n. Dann geht die Bedingung über in die Aussage $mx + n = m(x+1) + n - a = mx + n + (m - a)$ bzw. $m = a$. Tatsächlich erfüllen auch alle linearen Funktionen $f(x) = ax + n$ mit Anstieg a die Bedingung, wie man leicht durch Einsetzen überprüft.

Aufgabe 111035:
Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d. h. für alle reellen x gelte $f(x+p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt.
Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

$$\text{a)} \quad F(x) = \frac{1}{2} f(x) \qquad ; \qquad \text{b)} \quad G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Lösung von cyrix:
a) Die Funktion $F(x)$ hat auch die Periode p. Einerseits ist für alle reellen x die Gleichung

$$F(x+p) = \frac{1}{2} f(x+p) = \frac{1}{2} f(x) = F(x)$$

wahr, da f p-periodisch ist. Andererseits würde aber auch für jede kleinere positive Zahl q, für die für alle reellen x die Gleichung $F(x+q) = F(x)$ gilt, folgen, dass wiederum für alle reellen x auch $f(x+q) = 2 \cdot F(x+q) = 2 \cdot F(x) = f(x)$ erfüllt ist, was im Widerspruch zur Minimalität von p stünde. Also gibt es kein solches $0 < q < p$ und auch F ist p-periodisch.

b) Analog rechnet man nach, dass G $2p$-periodisch ist: Einerseits gilt für alle reellen x die Gleichung

$$G(x+2p) = f\left(\frac{x+2p}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + p\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = G(x)$$

da f p-periodisch ist. Und andererseits folgt aus der Existenz eines $0 < q < p$, welches für alle reellen x die Gleichung $G(x+2q) = G(x)$ erfüllt, dass auch für alle reellen x die Gleichung $f(x+q) = G(2x+2q) = G(2x) = f(x)$ erfüllt ist, was wieder der Minimalität von p widerspricht.

Aufgabe 141034:
Es seien a, b gegebene positive reelle Zahlen, und es sei f die für alle natürlichen Zahlen n durch die Gleichung

$$f(n) = a^n + b^n + (a+b)^n$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass dann $[f(2)]^2 = 2 \cdot f(4)$ gilt!

Lösung von Nuramon:
Betrachte die Polynome $p(x) = (a^2 + x^2 + (a+x)^2)^2$ und $q(x) = 2(a^4 + x^4 + (a+x)^4)$.
Wir beobachten:

1.) $p(x)$ und $q(x)$ sind beide Polynome vierten Grades in x und haben den Leitkoeffizienten 4.
2.) Es ist $p(0) = 4a^4 = q(0)$.
3.) Es ist $p(-a) = 4a^4 = q(-a)$

4.) Es ist $p(a) = 36a^4 = q(a)$
5.) Es ist $p(2a) = (1+4+9)^2a^4 = 196a^4 = 2 \cdot (1+16+81)a^4 = q(2a)$.
6.) Da a positiv ist, sind $0, -a, a, 2a$ vier paarweise verschiedene Zahlen.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist

$$[f(2)]^2 = p(b) = q(b) = 2 \cdot f(4)$$

Aufgabe 151036:
Vorbemerkungen: Ist x eine reelle Zahl, so wird mit $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist: $[x] \leq x < [x] + 1$.
Beispielsweise ist $[\pi] = 3$, $[-4{,}2] = -5$, $[5] = 5$.

Eine Funktion f, die für alle reellen x erklärt ist, heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt, so dass für alle x gilt: $f(x+p) = f(x)$.
Eine solche Zahl p heißt eine positive Periode von f.
Gibt es eine kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft, so heißt sie die kleinste positive Periode von f.
Beispielsweise ist $f(x) = 1$ eine periodische Funktion f, die keine kleinste positive Periode besitzt, während z. B. $f(x) = \sin x$ die kleinste positive Periode 2π besitzt.
a) Beweisen Sie, dass durch $y = (-1)^{[x]}$ eine für alle reellen Zahlen x erklärte Funktion f definiert ist!
b) Beweisen Sie, dass die unter a) erklärte Funktion f periodisch ist!
c) Weisen Sie nach, dass diese Funktion f eine kleinste positive Periode besitzt, und ermitteln Sie diese!
d) Stellen Sie f graphisch dar!

Lösung von ochen:
a) Die Funktion $g\colon \mathbb{Z} \to \{-1{,}1\}$, $k \mapsto (-1)^k$ ist durch

$$g(k) = \begin{cases} 1, & 2 \mid k \\ -1, & 2 \nmid k \end{cases}$$

erklärt. Weiter ist die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$ wie in der Aufgabenstellung erklärt. Da der Definitionsbereich von g eine Teilmenge des Wertebereichs von h ist, ist auch deren Komposition $f = g \circ h$ erklärt.

b) Offenbar gilt für jede reelle Zahl x und jede ganze Zahl k

$$[x+k] = [x] + k,$$

da $[x] + k$ ganzzahlig ist und $[x] + k \leq x + k < [x] + k + 1$ gilt.
Insofern folgt für alle reellen Zahlen x

$$f(x+2) = (-1)^{[x+2]} = f(x+2) = (-1)^{[x]+2} = (-1)^{[x]} \cdot (-1)^2 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 eine Periode von f.

c) Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl p mit $0 < p < 2$ und $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden die Fälle, ob $0 < p < 1$ oder $1 \leq p < 2$ gilt.
Falls $0 < p < 1$ gilt, setzen wir $x = 1 - p$, so folgt $0 < x < 1$ und insbesondere

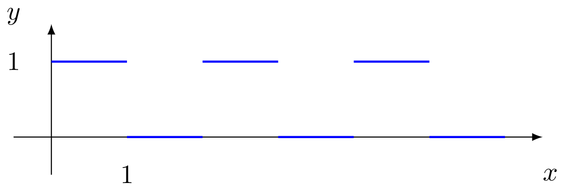
$$f(x+p) = (-1)^{[p+(1-p)]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Falls $1 \leq p < 2$ gilt, betrachten wir $x = 0$, so folgt

$$f(x+p) = f(p) = (-1)^{[p]} = (-1)^1 = -1 \neq 1 = (-1)^0 = (-1)^{[x]} = f(x).$$

Somit ist 2 die kleinste Periode von f.

d)



Aufgabe 181031:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) \cdot f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x = 0, x = 3, x = -3$, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \cdot f(2) = -9 \cdot f(0), &\quad \text{also} \quad f(0) = 0 \\ 3 \cdot f(5) = 0 \cdot f(3), &\quad \text{also} \quad f(5) = 0 \\ -3 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-3), &\quad \text{also} \quad f(-1) = 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Aufgabe 181035:
Man untersuche, ob es reelle Zahlen a, b, c, d mit folgender Eigenschaft gibt:
Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ definierte Funktion ist, so gilt $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$ und $f(3) = 1$.
Gibt es solche Zahlen a, b, c, d, so ermittle man alle derartigen Zahlen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen a, b, c, d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$\begin{aligned} d = 10 \qquad (1) \qquad &; \qquad a + b + c + d = 12 \qquad (2) \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \qquad (3) \qquad &; \qquad 27a + 9b + 3c + d = 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a, b, c, d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$\begin{aligned} a + b + c = 2 &\quad \text{also} \quad c = 2 - a - b \qquad (5) \\ 8a + 4b + 2c = -6 &\quad \text{also} \quad 4a + 2b + c = -3 \qquad (6) \\ 27a + 9b + 3c = -9 &\quad \text{also} \quad 9a + 3b + c = -3 \qquad (7) \end{aligned}$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a + b = -5 \quad \text{also} \quad b = -5 - 3a \qquad (8) \qquad \text{und} \qquad 8a + 2b = -5 \qquad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a = 5$, woraus man $a = \frac{5}{2}$ (10) erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich $b = -\frac{25}{2}$ (11).
Daraus und aus (10) und (5) folgt

$$x = 2 - \frac{5}{2} + \frac{25}{2} = 12 \qquad (12)$$

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.
II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen. Die gesuchten Zahlen lauten somit $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{25}{2}, c = 12, d = 10$.

Aufgabe 191035:
Von einer Funktion f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen erklärt ist, sei vorausgesetzt, dass folgendes gilt:
(1) Es ist $f(1) = 1$.
(2) Für jedes $x \neq 0$ ist

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot f(x)$$

(3) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Beweisen Sie, dass für jede Funktion f, die diese Voraussetzungen erfüllt, gilt:

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) und (3) folgt

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2 \quad ; \quad f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3$$
$$f(5) = f(3+2) = f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2) = 5 + 2 = 7$$

Aus (2) folgt daher

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$$

Hieraus und aus (3) folgt

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$
$$f\left(\frac{3}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7}\right) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$
$$f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7}\right) + f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Aufgabe 201035:
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 3$ und für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung $x_n > 2$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Für den Nachweis wird hier folgende Aussage verwendet:
Für eine positive reelle Zahl a gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$, wobei Gleichheit nur im Fall $a = 1$ gilt.

Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion. Für $k = 1$ gilt die Behauptung, da $a_1 = 3 > 2$ nach Aufgabenstellung ist.

Angenommen die Aussage gelte für n, dann ist $x_n > 2$. Für $n+1$ wird dann

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{\frac{x_n}{2}}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{x_n}{2} > 0$ und $\neq 1$ ist, wird nach der Hilfsaussage $\frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} > 2$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

Anmerkung: Die Hilfsaussage kann einfach bewiesen werden.

$$\forall a > 0: \; a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn der Klammerausdruck 0, d. h., $a = 1$ ist.

Aufgabe 221035:
Untersuchen Sie, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = 1981x^4 + 1979x^3 + 1982x^2 + 1978x + 1980$$

definierte Funktion f eine Nullstelle hat!

Lösung von MontyPythagoras:
Man zerlege die Funktion wie folgt:

$$f(x) = 2 + 1978(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x^2(3x^2 + x + 4)$$

$$f(x) = 2 + 1978 \cdot \frac{x^5-1}{x-1} + x^2\left(3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4 - \frac{1}{12}\right)$$

Der Term $\frac{x^5-1}{x-1}$ hat keine Nullstelle, denn $x^5 - 1$ hätte nur die Nullstelle $x = 1$, die aber künstlich erzeugt wurde durch die Erweiterung mit dem Nenner $x-1$. Eine eventuelle andere Nullstelle von $1+x+x^2+x^3+x^4$ müsste dann aber auch Nullstelle von $x^5 - 1$ sein.
Daher ist der ganze Ausdruck $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 0$ für alle x. Alle anderen Terme sind auch immer größer als null, so dass man insgesamt festhalten kann, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist und daher keine Nullstellen aufweist.

Aufgabe 241031:
In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$:
„Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte.“
Bernd behauptet dagegen: „Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat.“
Untersuchen Sie sowohl für Annes als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Die Aussage von Anne ist falsch. Die Funktion $y = \cos x$ hat unendlich viele Nullstellen, sie ist nach oben beschränkt ($y \leq 1$).
Eine beliebige quadratische Parabel kann z. B. die Gleichung $y = ax^2$ aufweisen. Lässt man a sehr klein werden, wird die Parabel extrem flach und nähert sich zumindest für relativ kleine x der Funktion $y = 0$, so dass es beliebig viele Schnittpunkte geben kann. Erst, wenn $ax^2 > 1$ wird, also $|x| > \frac{1}{\sqrt{a}}$, gibt es keine weiteren Schnittpunkte.

Es ist also nur eine Frage der Wahl des Parameters a, wie viele Schnittpunkte es zwischen den Funktionen gibt. Daher ist die Aussage von Bernd korrekt, wobei durch Hinzufügen eines konstanten Summanden $y = ax^2 + b$ auch möglich ist, beliebig viele Parabeln zu erzeugen, die genau 10 Schnittpunkte mit der Funktion $y = \cos x$ haben.

Aufgabe 241036:
Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f(\frac{3}{7})$.
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

Lösung von MontyPythagoras:
Wegen (3):

$$f(1+0) = f(1) \cdot f(0) \qquad ; \qquad f(0) = \frac{2}{2} = 1$$

Ebenfalls wegen (3):

$$f(0) = f(1) \cdot f(-1) \qquad ; \qquad f(-1) = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

Allgemein gilt:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2$$

$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) \cdot f(x) = f(x)^3$$

Auf diese Weise folgt allgemein weiter

$$f(nx) = f(x)^n \qquad ; \qquad f(nx)^{\frac{1}{n}} = f(x) \tag{4}$$

Wenn $nx = y$, gilt auch

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = f(y)^{\frac{1}{n}} \tag{5}$$

Wegen (4) folgt:

$$f(k \cdot 1) = f(1)^k = 2^k$$

Zusammen mit (5):

$$f\left(\frac{k}{n} \cdot 1\right) = (2^k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{k}{n}}$$

Und somit:

$$f\left(\frac{3}{7}\right) = 2^{\frac{3}{7}}$$

Aufgabe 251032:
a) Es sei a eine beliebige positive reelle Zahl, und es sei f die im Intervall $0 \leq x \leq a$ (1) durch

$$f(x) = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} \tag{2}$$

definierte Funktion.
Beweisen Sie, dass f im Intervall (1) streng monoton fallend ist!
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D, in dem durch (2) eine Funktion f definiert wird!
Untersuchen Sie, ob f im gesamten Bereich D streng monoton fallend ist!
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann in einem Bereich B streng monoton fallend, wenn für alle reellen Zahlen x_1, x_2 in B gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus $0 \leq x_1 < x_2 \leq a \quad (3)$ folgt

$$x_1^2 < x_2^2 \leq a^2 \qquad \to \qquad a^2 - x_1^2 > a^2 - x_2^2 \geq 0 \qquad \to \qquad \sqrt{a^2 - x_1^2} > \sqrt{a^2 - x_2^2}$$

Multipliziert man hierin beide Seiten mit 2 und addiert $2a$, so folgt weiter

$$a + x_1 + 2\sqrt{a + x_1}\sqrt{a - x_1} + a - x_1 > a + x_2 + 2\sqrt{a + x_2}\sqrt{a - x_2} + a - x_2$$
$$(\sqrt{a + x_1} + \sqrt{a - x_1})^2 > (\sqrt{a + x_2}\sqrt{a - x_2})^2$$

Wegen $\sqrt{a + x_1} + \sqrt{a - x_1} > 0$ folgt hieraus

$$\sqrt{a + x_1} + \sqrt{a - x_1} > \sqrt{a + x_2} + \sqrt{a - x_2}$$

b) Durch (2) wird für genau diejenigen reellen Zahlen x eine Zahl $f(x)$ definiert, für die $a + x \geq 0$ und $a - x \geq 0$ gilt. Diese Bedingung ist gleichwertig mit $-a \leq x \leq a \quad (*)$.

Also gibt (*) den gesuchten größtmöglichen Definitionsbereich D an. Da beispielsweise $-a < 0$ und $f(-a) = \sqrt{2a} < 2\sqrt{a} = f(0)$ gilt, ist f in D nicht streng monoton fallend.

Aufgabe 271032:
Es sei a eine gegebene positive reelle Zahl.
Von einer Funktion f, die für alle reellen Zahlen x definiert ist, werde vorausgesetzt, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
(1) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) + f(x + a) = 1$.
(2) Es gibt eine reelle Zahl c, so dass für alle reellen Zahlen x, die $c < x \leq c + a$ erfüllen, $f(x) > \frac{1}{2}$ gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Funktion f ist periodisch; es gibt eine kleinstmögliche Periode von f.
Ermitteln Sie diese kleinstmögliche Periode von f.
Hinweis:
Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive reelle Zahl p gibt, so dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive reelle Zahl p, mit der dies gilt, eine Periode von f.

Lösung von cyrix:
Es ist nach (1) für alle reellen Zahlen x die Gleichung $f(x + a) = 1 - f(x)$ gegeben, sodass für alle rellen Zahlen x die Gleichheit $f(x + 2a) = 1 - f(x + a) = 1 - (1 - f(x)) = f(x)$ folgt, sodass f periodisch ist.

Wir zeigen indirekt, dass $2a$ bereits die kleinste Periode dieser Funktion ist, indem wir annehmen, dass $p < 2a$ eine weitere Periode von f wäre, also für alle x die Gleichung $f(x + p) = f(x)$ gilt.

Nach (2) gibt es eine reelle Zahl c mit $f(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $c < x \leq c+a$. Insbesondere ist dann $f(c+a) > \frac{1}{2}$, also nach (1) $f(c) = 1 - f(c+a) < \frac{1}{2}$, sodass $f(c) \neq f(c+p)$ für alle $0 < p \leq a$ gilt. Also muss $2a > p \geq a$ sein. Dann ist aber $0 < 2a - p \leq a$, also $f(c + 2a - p) = f(c + 2a) = f(c) < \frac{1}{2}$ im Widerspruch zu (2), da $c < c + 2a - p \leq c + a$ und damit $f(c + 2a - p) > \frac{1}{2}$ gilt.
Demnach gibt es keine Periode $p < 2a$, sodass $2a$ die kleinste Periode von f ist.

Aufgabe 281032:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (f, g) von Funktionen f und g, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) f ist eine quadratische Funktion, in deren Darstellung $y = f(x)$ der bei x^2 stehende Koeffizient

1 beträgt.
(2) Für alle reellen x gilt $f(x+1) = g(x)$.
(3) f hat genau eine reelle Nullstelle.
(4) Es gilt $g(5) = 4$.

Lösung von Steffen Polster:
Nach (1) hat die Funktion f die Gleichung $f(x) = x^2 + bx + c$ mit noch unbekannten reellen Zahlen b und c. Nach (2) wird

$$g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 + b(x+1) + c = x^2 + (b+2)x + b + c + 1 \qquad (5)$$

Damit (3) erfüllt wird, muss der Term $x^2 + bx + c$ ein vollständiges Quadrat sein, d. h. es wird

$$0 = x^2 + bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c \quad \Rightarrow \quad -\frac{b^2}{4} + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b^2}{4} \qquad (6)$$

Setzt man (6) in (5) und anschließend entsprechend (4) für $x = 5$ und den Funktionswert $g(x) = 4$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (b+2)x + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ g(5) &= 5^2 + (b+2)5 + \frac{b^2}{4} + b + 1 \\ 4 &= \frac{1}{4}(b^2 + 24b + 144) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat die Lösungen $b_1 = -16$ und $b_2 = -8$. Rückrechnen ergibt $c_1 = 64$ und $c_2 = 16$ mit den 2 Lösungen

$$\begin{aligned} 1) \qquad f(x) = x^2 - 16x + 64 \qquad &; \qquad g(x) = x^2 - 14x + 49 \\ 2) \qquad f(x) = x^2 - 8x + 16 \qquad &; \qquad g(x) = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt die Lösungen.

Aufgabe 301032:
Bekanntlich nennt man jede Folge von n Zahlen der Form

$$a_1 = z; \qquad a_2 = z + d; \qquad a_3 = z + 2d; \qquad a_n = z + (n-1)d \qquad (1)$$

($n \geq 1$ natürliche Zahl; z, d reelle Zahlen) eine (endliche) arithmetische Folge.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen arithmetischen Folgen (1), in denen auch z und d natürliche Zahlen mit $z \geq 1$, $d \geq 1$ sind und für die $n \geq 3$ sowie gilt:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1991 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Es ist $11 \cdot 181 = 1991$, wobei 11 und 181 Primzahlen sind. Also hat 1991 genau die vier Teiler 1, 11, 181 und 1991.

Fall 1: Es ist n ungerade, d. h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m - 1$. Dann ist mit $x := z + (m-1) \cdot d$

$$a_1 = x - (m-1)d, \quad a_2 = x - (m-2)d, \quad \ldots, \quad a_m = x, \quad a_{m+1} = x + d,$$

$$\ldots \quad a_n = a_{m+(m-1)} = x + (m-1)d \qquad \text{und}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (x - (m-1)d) + \cdots + (x + (m-1)d) = (2(m-1)+1)x = nx$$

Insbesondere sind n und x Teiler und Gegenteiler von 1991. Da $x = z + (m-1)d > \frac{n}{2}$ gilt, entfallen die Teiler 181 und 1991 als Möglichkeiten für n, da der jeweils zugehörige Gegenteiler kleiner wäre als $\frac{n}{2}$, also auch als x. Wegen $n \geq 3$ verbleibt nur die eine Möglichkeit $n = 11$, was $181 = x = z + 5d$ bzw. $z = 181 - 5d$ bedeutet.

Damit gibt es für jedes ganzzahlige $1 \leq d \leq \frac{180}{5} = 36$ genau eine solche arithmetische Folge, da dann auch immer $z \geq 1$ eindeutig bestimmt ist. (Weitere kann es in diesem Fall nicht geben.) Also existieren in diesem Fall genau 36 Lösungen.

Fall 2: Es ist n gerade, d. h., es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 2$ mit $n = 2m$. Dann ist für jedes $1 \leq i \leq m$,

$$a_i + a_{n+1-i} = (z + (i-1)d) + (z + (n-i)d) = 2z + (n-1)d =: x$$

also

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_m + a_{m+1}) = m \cdot x$$

sodass auch hier m und x Teiler und Gegenteiler von 1991 sein müssen. Wegen $x = 2z + (n-1)d \geq 2 + (n-1) > n = 2m$ fallen für m die Teiler 181 und 1991 wieder wegen zu großem x weg und auch $m = 1$ entfällt wegen $m \geq 2$, sodass $m = 11$ und damit $181 = x = 2z + 21d$ bzw. $z = \frac{1}{2} \cdot (181 - 21d)$ folgt. Da z eine ganze Zahl ist, muss also d ungerade sein und wegen $z \geq 1$ folgt auch $1 \leq d \leq 7$, da $9 \cdot 21 = 189 > 181$ ist. Also existieren in diesem Fall genau 4 Lösungen.

Zusammen ergeben sich also genau 40 arithmetische Folgen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 311036:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele verschiedene Paare (f, g) von Funktionen gibt, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gilt $f(0) = 1992$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.
Hinweis: Zwei Paare (f_1, g_1) und (f_2, g_2) von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, sind genau dann voneinander verschieden, wenn es (mindestens) eine reelle Zahl x gibt, für die (mindestens) eine der Ungleichungen $f_1(x) \neq f_2(x)$, $g_1(x) \neq g_2(x)$ gilt.

Lösung von ochen:
Sei eine reelle $c > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass

$$f(x) = 1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right), g(x) = c$$

alle Eigenschaften erfüllt. Es sind $f,g\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ für alle reellen Zahlen x definiert. Weiter gilt $f(0) = 1992 \cdot \exp(0) = 1992$. Für alle reellen Zahlen x erhalten wir

$$\frac{g(x)f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \cdot 1992 \cdot \exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)}{1992 \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} = \frac{c \cdot \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right) \cdot \exp \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{c}\right)\right)} =$$

$$= c \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) = c + 1 = g(2x) + 1.$$

Da es unendlich viele unterschiedliche reelle Zahlen $c > 0$ gibt, existieren unendlich viele verschiedene Paare (f,g) mit den gewünschten Eigenschaften.

IV Runde 4

Aufgabe 081042:
Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a \neq b$ und $ab > 0$. Man untersuche, ob für

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \text{der Ausdruck} \quad s = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

existiert! Ist dies der Fall, so drücke man s weitgehend vereinfacht durch a und b aus, in diesem Falle rational!

Lösung von cyrix:
Wegen $ab > 0$ sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ, also die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ in jedem Falle positiv. Dann ist deren Summe wegen $a \neq b$ echt größer als 2 und $x > 1$, sodass $\sqrt{x-1}$ definiert ist. Aufgrund der strengen Monotonie der Wurzel-Funktion ist auch $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$, sodass der Nenner von s nie verschwindet und dieser Term also für jede solche Wahl von a und b wohldefiniert ist.

Zur Vereinfachung von s erweitern wir den Bruch mit $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ und erhalten

$$s = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$$

Dabei ist

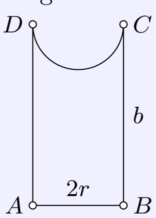
$$x^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} - 4\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$s = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right|$$

Ist $|a| > |b|$, so ist die Differenz im Betrag positiv und man erhält $s = \frac{a}{b}$, andernfalls ist sie negativ und man erhält $s = \frac{b}{a}$.

Aufgabe 101043B:
Die Abbildung zeigt ein Flächenstück, das aus der Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $AB = CD = 2r$ und $BC = AD = b$, $b > r$, durch Herausschneiden einer Halbkreisscheibe mit dem Durchmesser CD entstanden ist.
Man denke sich nun eine positive reelle Zahl F beliebig gegeben. Dann sind alle geordneten Paare (r, b) positiver reeller Zahlen mit $r < b$ zu ermitteln, für die das entsprechende Flächenstück den Inhalt F und dabei möglichst kleinen Umfang hat.



Lösung von cyrix:
Der Umfang u des Flächenstücks ermittelt sich zu $u = 2b + 2r + \pi r = 2b + (2+\pi)r$ und sein Flächeninhalt zu $F = b \cdot 2r - \frac{1}{2}\pi r^2$. Damit ist $2b = \frac{F}{r} + \frac{\pi}{2}r$. Einsetzen liefert $u = \frac{F}{r} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r$.

Fasst man u als Funktion von r auf, ergibt sich $u'(r) = -\frac{F}{r^2} + \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$. Diese Funktion besitzt die einzige Nullstelle $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$. Es ist wegen $F > 0$ die Funktion u' streng monoton wachsend für $r > 0$.

Insbesondere ist also $u'(r)$ negativ und $u(r)$ streng monoton fallend für $0 < r < r_0$ sowie $u'(r)$ positiv und $u(r)$ streng monoton wachsend für $r > r_0$. Damit hat also u nicht nur ein lokales, sondern auch sein globales Minimum an der Stelle r_0. Es ergibt sich

$$b_0 = \frac{F}{2r_0} + \frac{\pi}{4} r_0 = \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}}{\sqrt{F}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi}} \cdot (1 + \pi) = r_0 \cdot (1 + \pi)$$

und damit das gesuchte Lösungspaar $(r,b) = (r_0, (1 + \pi)r_0)$ mit $r_0 = \sqrt{\frac{F}{2+\frac{3}{2}\cdot\pi}}$.

Bemerkung: Der Umfang ergibt sich dann zu $u_0 = 2b_0 + (2 + \pi)r_0 = (4 + 3\pi)r_0 = 2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \cdot r_0 = 2\sqrt{F} \cdot \sqrt{2 + \frac{3}{2} \cdot \pi} = 2 \cdot \frac{F}{r_0}$.

Aufgabe 101044:
Man gebe alle quadratischen Funktionen $f(x)$ an, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) = f(-x)$ erfüllen.

Lösung von cyrix:
Sei $f(x)$ die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$mit $a \neq 0$. Dann ist die Bedingung der Aufgabenstellung äquivalent zur Aussage, dass für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c \qquad \text{also}$$

$$ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c) = ax^2 + (-b) \cdot x + c$$

bzw. $(2a + 2b)x + (a + b) = 0$. Da dies für alle reellen Zahlen x gelten soll, muss $2a + 2b = 0$, also $b = -a$ gelten.
Tatsächlich erfüllen auch alle quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 - ax + c$ mit beliebigen, reellen Zahlen $a \neq 0$ und c die gewünschte Gleichung, denn es gilt

$$f(x + 1) = a(x + 1)^2 - a(x + 1) + c = a(x + 1)(x + 1 - 1) + c = a(x + 1)x + c = a(x^2 + x) + x =$$

$$= a(-x)^2 - a(-x) + c = f(-x)$$

Aufgabe 121044:
In einer Ebene mit rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x, y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$.
Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, dass k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0; 1)$!

Lösung von cyrix:
Es sei $P(s; t)$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Sein Abstand von der Geraden g erhält man leicht als $|t - (-1)| = |t + 1|$, da der Fußpunkt des Lots von P auf g die Koordinaten $(s; -1)$ besitzt. (Es ist g parallel zur x-Achse, also jede dazu senkrechte Gerade – wie etwa das Lot von P auf diese Gerade – parallel zur y-Achse, sodass auf dieser Senkrechten dann alle Punkte die gleiche x-Koordinate besitzen.)

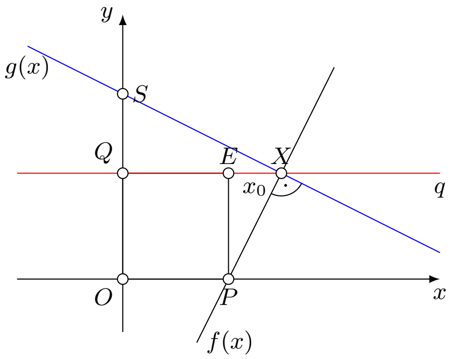
Und der Abstand von P und F ergibt sich durch Anwenden des Satzes von Pythagoras (man zeichne ggf. Parallelen zur x- und y-Achse durch F und P ein, um das entsprechende rechtwinklige Dreieck zu sehen) zu $\sqrt{(s - 0)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{s^2 + (t - 1)^2}$.

Der Punkt P hat also genau dann denselben Abstand von g wie von F, wenn $|t+1| = \sqrt{s^2+(t-1)^2}$ bzw. $(t+1)^2 = s^2+(t-1)^2$, also $s^2 = (t+1)^2-(t-1)^2 = 4t$ und schließlich $t = \frac{1}{4}s^2$ gilt.
Die Menge der Punkte, für die die y-Koordinate ein Viertel des Quadrats der x-Koordinate ist, wird genau durch den Graphen k angegeben, was das zu Zeigende beweist.

Aufgabe 131043A:
a) Beweisen Sie, dass man zu gegebenem reellen x_0 die Zahl $x_0^2+x_0+1$ nach der folgenden Methode grafisch ermitteln kann!
Man konstruiert in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O dasjenige Quadrat $OPEQ$, für das E die Koordinaten $(1;1)$ hat und Q, E auf einer Parallelen q zur x-Achse liegen.
Auf q zeichnet man einen Punkt X so, dass die gerichtete Strecke EX die Länge x_0 hat, unter Berücksichtigung des Vorzeichens von x_0. Im Punkt X errichtet man auf der Geraden durch P und X die Senkrechte; sie schneidet die y-Achse in einem Punkt Y. Dann hat Y die zu ermittelnde Zahl $x_0^2+x_0+1$ als Ordinate.

b) Beweisen Sie mit diesem grafischen Verfahren, dass die durch $f(x) = x^2+x+1$ für alle reellen x definierte Funktion f keine reelle Nullstelle hat!

Lösung von Steffen Polster:



Die Darstellung des Koordinatensystems zeigt die Aufgabenstellung für einen o. B. d. A. gewählten reellen Wert $x_0 = \frac{1}{2}$.
Die lineare Funktion $f(x)$ sei die durch die Punkte P und X verlaufende Funktion. Für ein beliebiges reelles x_0 ($x_0 \neq 0$) ergibt sich als Anstieg der Funktion $m_{f(x)} = \frac{1}{x_0}$ und die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{x_0} \cdot x + 1 - \frac{1}{x_0}$$

Die zu $f(x)$ im Punkt X senkrechte lineare Funktion sei $g(x)$. Deren Anstieg ist $m_{g(x)} = \frac{1}{m_{f(x)}} = -x_0$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $X(1+x_0;1)$ in die Gleichung $g(x) = -x_0 \cdot x + n$ ergibt für n:

$$n = 1 + x_0 + x_0^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x_0 \cdot x + 1 + x_0 + x_0^2$$

n ist die Ordinate des Schnittpunktes S der Senkrechten in X zu $f(x)$ mit der Ordinatenachse.
Für den Fall $x_0 = 0$ schneidet die Senkrechte in X zu PX die Ordinatenachse in $(0;1)$, was ebenfalls der Behauptung entspricht. w. z. b. w.

b) Angenommen $f(x) = 1+x+x^2$ hätte eine reelle Nullstelle x_0, so müsste nach a) der Schnittpunkt S für x_0 eine Ordinate gleich 0, d. h. $S(0;0)$, besitzen. Für die Lage des Punktes X existieren drei Möglichkeiten:

1. Fall: X liegt rechts von E, d. h. $x_0 > 0$
In diesem Fall hat die Gerade durch P und X einen positiven Anstieg m. Die dazu Senkrechte durch X hat einen negativen Anstieg. Da X im 1. Quadranten liegt und $y_X > 0$ ist, kann die Senkrechte nie durch den Koordinatenursprung verlaufen. Für ein $x_0 > 0$ hat $f(x)$ keine Nullstelle.

2. Fall: X liegt auf E, d. h. $x_0 = 0$
Wie schon in a) gezeigt, verläuft die Senkrechte durch X zu PX durch $S(0;1)$. Also liegt auch hier keine Nullstelle vor.

3. Fall: X liegt links von E, d. h. $x_0 < 0$

Für $x_0 < -1$ ist X im 2. Quadranten. Die durch X verlaufende Gerade, senkrecht zu PX, hat einen positiven Anstieg, womit sie nicht durch den Ursprung verlaufen kann.
Für $x_0 = -1$ ist X auf der Ordinatenachse und der Schnittpunkt S gleich $Q(0; 1)$. Auch hier liegt folglich keine Nullstelle von $f(x)$ vor.

Für $-1 < x_0 < 0$ beträgt der Anstieg der Geraden durch X und P nach a) $m = \frac{1}{x_0}$. Die Senkrechte dazu durch X hat somit einen Anstieg $-x_0$. Da $-1 < x_0 < 0$ ist, entspricht diesem Anstieg $-x_0$ (> 0) ein Anstiegswinkel kleiner als 45° ($\tan 45° = 1$).
Jede Gerade durch X und den Ursprung, mit X links von E und $x_X > 0$, hat aber einen Anstieg größer 45°. Damit kann die Senkrechte durch X zu PX auch hier nicht durch den Ursprung verlaufen.
Jede Möglichkeit der Wahl eines reellen x_0 führt zu einem Widerspruch. $f(x) = 1+x+x^2$ hat keine reelle Nullstelle. w. z. b. w.

Aufgabe 141045:
In einem Klub Junger Mathematiker gibt es Streit um das Monotonieverhalten von Funktionen. Bekannt ist von zwei Funktionen f und g, dass beide für alle reellen Zahlen x definiert sind, f im gesamten Definitionsbereich streng monoton wächst, und dass die Gleichung $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle x erfüllt ist.
Annemarie folgert nun daraus: „Dann ist auch g eine auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsende Funktion.“
Brigitte widerspricht: „Es lässt sich nur schließen, dass g im gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.“
Christa meint: „Ihr habt beide nicht recht.“
Wer von diesen Schülern hat nun recht?

Anmerkung: Eine Funktion f wird genau dann streng monoton wachsend bzw. fallend in einem Intervall bezeichnet, wenn für alle Zahlen x_1, x_2 aus diesem Intervall, für die $x_1 < x_2$ gilt, die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Lösung von Nuramon:
Christa hat recht.
Ist zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, so ist f streng monoton wachsend und es gilt $g(x)^2 - f(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Aber $g(x)$ ist weder streng monoton wachsend, noch streng monoton fallend, denn $g(-1) = g(1)$, obwohl $-1 < 1$ ist.

Aufgabe 151043B:
In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(x; y)$ seien die Punkte $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ und $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ sowie der Graph k derjenigen Funktion f gegeben, die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert ist.
Man beweise:
Es gibt eine Zahl c, so dass k in der xy-Ebene die Menge aller derjenigen Punkte der xy-Ebene ist, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu den Punkten F_1 und F_2 gleich c ist. Man ermittle diese Zahl c!

Lösung von MontyPythagoras:
Ein Punkt auf dem Graphen k sei gegeben durch die Koordinate $(x, \frac{1}{x})$. Der Abstand d_1 zum Punkt F_1 ist:

$$d_1 = \sqrt{\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2}$$

Wurzelausdruck vereinfachen:

$$d_1 = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{x} + 2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

Wir substituieren:

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \qquad ; \qquad B = 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

so dass gilt:

$$d_1 = \sqrt{A - B}$$

In analoger Weise erhält man

$$d_2 = \sqrt{A + B}$$

Es muss nun gelten:

$$|\sqrt{A+B} - \sqrt{A-B}| = c$$

Quadrieren:

$$A + B + A - B - 2\sqrt{(A+B)(A-B)} = c^2$$
$$c^2 = 2A - 2\sqrt{A^2 - B^2}$$

Es ist

$$A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = A^2 - B^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4$$

$$A^2 - B^2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2$$

Da $(x + \frac{1}{x})^2 \geq 4$, folgt:

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

und somit:

$$c^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) = 8$$

Also ist die gesuchte Zahl $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 151046:
Es sei f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion. Vorausgesetzt werde, dass f nullstellenfrei ist, d. h., dass keine reelle Zahl x mit $f(x) = 0$ existiert.
Untersuchen Sie, ob aus dieser Voraussetzung folgt, dass auch die durch $F(x) = f(2x) + f(3x)$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion F nullstellenfrei ist!

Lösung von Kornkreis:
Dies gilt nicht, was man an folgendem Gegenbeispiel sieht:
Wähle $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $f(2) = -1$. Dann erfüllt f die Bedingungen der Aufgabenstellung, aber es ist $F(1) = f(2) + f(3) = -1 + 1 = 0$.

Aufgabe 181043A:
Es sei a eine positive, von 1 verschiedene reelle Zahl. Ferner sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$$

definierte Funktion.
Man beweise, dass f eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion g als Umkehrfunktion besitzt, und ermittle diese Funktion g!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei y eine beliebige reelle Zahl. Für x gelte die Gleichung

$$\frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = y \qquad (1)$$

Durch Multiplikation mit a^x erhalten wir eine quadratische Gleichung in $t = a^x > 0$:

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

Diese hat die Lösungen

$$t_1 = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{und} \qquad t_2 = y - \sqrt{y^2+1}$$

Nun ist $y - \sqrt{y^2+1} << 0$ im Widerspruch zu $t = ax > 0$. Daher gilt

$$a^2 = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \text{bzw.} \qquad x = \log_a(y + \sqrt{y^2+1})$$

Damit ist für beliebiges reelles y ein reelles x eindeutig bestimmt, denn es ist

$$\sqrt{y^2+1} > |y| \geq -y \qquad \text{und somit} \qquad y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

so dass $\log_a(y + \sqrt{y^2+1})$ als reelle Zahl definiert ist. Diese reelle Zahl x erfüllt auch die Gleichung (1).
Die Funktion $f(x)$ besitzt also eine Umkehrfunktion und dies ist

$$g(y) = \log_a(y + \sqrt{y^2+1})$$

Aufgabe 191041:
Es seien a, b, c und d beliebig gegebene reelle Zahlen. f und g seien die für alle reellen x durch

$$f(x) = c \cdot 10^{ax} \qquad , \qquad g(x) = 10^{bx+d}$$

definierten Funktionen.
Ermitteln Sie (jeweils zu gegebenen a, b, c, d) alle diejenigen Punkte, die der Graph von f mit dem Graph von g gemeinsam hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gegeben sind die reellen Zahlen a, b, c, d. Die Graphen von f und g haben genau dann den Punkt mit dem Koordinatenpaar (x_0,y_0) gemeinsam, wenn

$$y_0 = c \cdot 10^{ax_0} = 10^{bx_0+d} \qquad (1)$$

gilt.
I. (Analyse) Angenommen, es gäbe ein Paar (x_0, y_0), das (1) erfüllt.
Im Fall $c \leq 0$ ist dies wegen $10^{ax_0} > 0$, und $10^{bx_0+d} > 0$ unmöglich, und somit die Annahme falsch.
Im Fall $c > 0$ existiert $\lg c$, und aus (1) ergibt sich

$$10^{ax_0+\lg c} = 10^{bx_0+d} \qquad (2)$$

Hieraus folgt (wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion)

$$ax_0 + \lg c = bx_0 + d \qquad (3)$$

Im Unterfall $a \neq b$ folgt weiter

$$x_0 = \frac{d - \lg c}{a - b} \qquad (4)$$

so dass höchstens das Paar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$ mit x_0 aus (4) die Gleichungen (1) erfüllen kann.
Ist aber $a = b$ und auch noch $\lg c \neq d$, so stellt (3) einen Widerspruch dar, d. h., die eingangs gemachte Annahme ist falsch.

II. (Synthese, „Probe“)
Im Fall $c > 0, a = b, \lg c = d$ ist die Gleichung (2) für beliebiges x_0 erfüllt, so dass die Paare (x_0, y_0), x_0 beliebig reell und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$, die Gleichungen (1) erfüllen.
Im Fall $c > O, a \neq b$ stellen die Übergänge von der rechten Gleichung (1) über (2), (3) nach (4) äquivalente Umformungen dar, so dass das Paar (x_0, y_0), x_0 aus (4) und $y_0 = c \cdot 10^{ax_0}$ die Gleichungen (1) erfüllt.

III. Ergebnis:
Im Fall $c \leq 0$ und im Fall $c > 0$, $a = b$, $ßlgc \neq d$ haben die Graphen von f und g keinen gemeinsamen Punkt.
Im Fall $c > 0$, $a = b$, $\lg c = d$ haben die Graphen von f und g die Punkte mit den Koordinatenpaaren $(x, c \cdot 10^{ax})$, x beliebig reell, gemeinsam (die Graphen fallen zusammen).
Im Fall $c > 0$, $a \neq b$ haben die Graphen von f und g genau den Punkt mit dem Koordinatenpaar $(x_0, c \cdot 10^{ax_0})$, x_0 aus (4), gemeinsam.

Aufgabe 201045:
Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, dass $x_1 = 5$ und für alle $n = 1, 2, ..., 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

gelten soll.
Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, ..., 1000$ die Ungleichung $4 \leq x_n \leq 5$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die endliche Folge $\{x_1, ..., x_{1000}\}$ ist induktiv vorgegeben, indem das erste Glied und jedes weitere Glied mit Hilfe des vorhergehenden angegeben wird:

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n}$$

$(n = 1, ..., 999)$. Diese Vorgabe in der Aufgabe setzt stillschweigend voraus, dass stets $x_n \neq 0$ ist.
Zum Beweis der Behauptung $4 \leq x_n \leq 5$ für alle $n = 1, ..., 1000$ bietet sich damit die Methode der vollständigen Induktion an, wobei dann diese Ungleichung sogar für jede natürliche Zahl n bewiesen werden kann.

a) Beweis von $x \geq 4$.
Wir zeigen die Verschärfung $x_n > 4$. Für $n = 1$ gilt diese Behauptung wegen $x_1 = 5 > 4$. Es sei jetzt $x_k > 4$. Dann ergibt sich für das folgende Glied x_{k+1} ebenfalls

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 16}{2x_k} = \frac{(x_k - 4)^2}{2x_k} + 4 > 4$$

Demnach gilt $x_n > 4$ für alle natürlichen Zahlen.

b) Beweis von $x_n \leq 5$.

Aus $x_n > 4$ folgt $x_n^2 + 16 < 2x_n^2$ und damit weiter

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 16}{2x_n} < x_n$$

d. h., die Folgt x_n ist streng monoton fallend. Wegen $x_1 = 5$ gilt dann sogar $x_n < 5$ für alle natürlichen Zahlen $n > 1$.

Aufgabe 211043A:
In einem Mathematikzirkel wird über nichtkonstante Funktionen diskutiert, die für alle reellen Zahlen definiert sind und deren Funktionswerte wieder reelle Zahlen sind.
Sind f und g zwei solche Funktionen, so kann man die Funktion F für alle reellen x durch $F(x) = f(g(x))$ definieren.
Die Diskussion beschäftigt sich mit der Frage, ob derartige Funktionen f, g, F periodisch sind.
(Bekanntlich heißt eine Funktion ρ genau dann periodisch, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ so existiert, dass für alle x die Gleichung $\rho(x + p) = \rho(x)$ gilt.)
Jens behauptet: Ist g eine periodische Funktion (und f periodisch oder nicht), so ist auch stets die - wie oben erklärte - Funktion F periodisch.
Dirk behauptet: Ist f eine periodische Funktion (und g periodisch oder nicht), so ist auch stets die Funktion F periodisch.
Christa behauptet: Sind beide Funktionen f und g nicht periodisch, so ist auch stets F nicht periodisch.
Untersuchen Sie für jeden dieser drei Schüler, ob er damit eine wahre oder eine falsche Aussage gemacht hat!

Lösung von cyrix:
Jens hat Recht, während Dirk und Christa falsch liegen:
zu Jens: Ist g eine periodische Funktion mit Periode p, dann gilt für alle reellen x auch $F(x + p) = f(g(x + p)) = f(g(x)) = F(x)$, sodass auch F mit der gleichen Periode wie g periodisch ist.

zu Dirk: Es sei $f(x) = \sin(x)$ eine periodische Funktion und $g(x) = 0$ für alle $x \neq 0$ sowie $g(0) = \frac{\pi}{2}$. (Dann ist g eine nichtkonstante Funktion.) Damit ist aber $F(x) = f(g(x)) = \sin(0) = 0$ für alle $x \neq 0$ und $F(0) = f(g(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, sodass es keine reelle Zahl $p > 0$ geben kann, die $F(x+p) = F(x)$ für alle x erfüllt, denn zumindest für $x = 0$ gilt immer $F(0 + p) = F(p) = 0 \neq 1 = F(0)$.

zu Christa: Es sei $g(x)$ wie bei Dirk definiert und $f(x) = g(x - 1)$ für alle reellen Zahlen x. Dann sind (in analoger Weise wie bei der Betrachtung von F bei Dirk) beide Funktionen f und g nichtkonstant und nicht periodisch, erfüllen also Christas Voraussetzung. Weiterhin ist für alle rellen Zahlen $x \neq 0$ dann $F(x) = f(g(x)) = f(0) = g(-1) = 0$ und

$$F(0) = f(g(0)) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0$$

sodass für alle reellen Zahlen x und p die Gleichung $F(x + p) = 0 = F(x)$ gilt, also F periodisch (mit beliebiger Periodenlänge p) ist.

Aufgabe 231043B:
a) Geben Sie eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion f an, die für alle reellen Zahlen x die Eigenschaft

$$f(x + 1) = f(x) + (-1)^{[f(x)]} \tag{1}$$

hat!
Dabei bezeichnet, wenn z eine reelle Zahl ist, $[z]$ diejenige ganze Zahl $[z] = g$, für die $g \leq z \leq g + 1$ gilt.

Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Funktion f die Eigenschaft (1) hat!
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f im Intervall aller x, für die $-3 \leq x \leq 3$ ist!
b) Beweisen Sie, dass jede Funktion f mit der Eigenschaft (1) periodisch mit der Periode 2 sein muss, d. h., dass sie für jedes reelle x die Gleichung $f(x+2) = f(x)$ erfüllt!

Lösung von cyrix:
a) Es sei die Funktion f definiert als $f(x) := [x] \pmod 2 := [x] - 2 \cdot \left[\frac{[x]}{2}\right]$. Dann ist $f(x)$ gleich 0, wenn $[x]$ gerade ist und 1, wenn $[x]$ ungerade ist. Diese Funktion ist offenbar für alle reellen Zahlen x definiert.
Wir führen zum Nachweis von (1) eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $[x]$ ist gerade.
Dann ist $f(x) = 0$, $[x+1]$ ungerade, $f(x+1)$ also 1 und damit auch $f(x+1) = 1 = 0 + (-1)^0 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

2. Fall: $[x]$ ist ungerade.
Dann ist $f(x) = 1$, $[x+1]$ gerade, $f(x+1)$ also 0 und damit auch $f(x+1) = 0 = 1 + (-1)^1 = f(x) + (-1)^{[f(x)]}$.

Also erfüllt die angegebene Funktion f die Bedingung (1). Sie ist stückweise konstant, immer genau 0 in jedem Intervall $[2n, 2n+1)$ und immer genau 1 in jedem Intervall $[2n+1, 2n+2)$ für jede ganze Zahl n.

b) Sei f eine Funktion, die die Bedingung (1) erfüllt. Es ist dann für jedes x der Wert

$$[f(x+1)] = [f(x)] + (-1)^{[f(x)]} = [f(x)] \pm 1$$

sodass $[f(x+1)]$ und $[f(x)]$ niemals gleiche Parität haben können, d. h., von diesen beiden Werten ist immer genau einer gerade und genau einer ungerade.
Damit ist für jedes x der Term

$$(-1)^{[f(x+1)]} + (-1)^{[f(x)]} = (-1) + 1 = 0$$

wobei die -1 durch den ungeraden und die 1 durch den geraden Exponenten erzeugt wird.
Also ist für alle x

$$f(x+2) = f(x+1) + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x) + (-1)^{[f(x)]} + (-1)^{[f(x+1)]} = f(x), \square$$

Aufgabe 241043A:
a) Man beweise, dass für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2 \leq x < 4$ gilt $f(x) = p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt $f(x+2) = \frac{f(x)}{5 \cdot f(x) - 1}$.

b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1 \leq p \leq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Wegen (3) gilt:

$$f(x) = \frac{f(x-2)}{5f(x-2) - 1}$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x) = f(x-2)$$

$$5f(x-2)f(x) - f(x-2) = f(x)$$
$$f(x-2)(5f(x)-1) = f(x)$$
$$f(x-2) = \frac{f(x)}{5f(x)-1} = f(x+2)$$

Die Funktion ist also periodisch mit der Periodenlänge 4, sie ist wegen (2) definiert auf $[2;4[$. Durch (3) ist sie auch auf $[4;6[$ definiert, wenn

$$p' = \frac{p}{5p-1}$$

eine reelle Zahl ergibt. Das ist für alle $p \neq \frac{1}{5}$ der Fall. Da laut Aufgabenstellung $1 \leq p \leq 2$, ist die Funktion auf dem Intervall $[2;6[$ definiert, und damit wegen der Periodizität auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Wegen der Periodizität gilt $f(1985) = f(5)$. Es ist $f(3) = p$, und daher

$$f(1985) = f(3+2) = \frac{p}{5p-1}$$

Aufgabe 251046:
Es sei $F = (a_1, a_2, a_3, ...)$ diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:
(1) Die ersten vier Glieder der Folge F lauten $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 8$, $a_4 = 6$; sie bilden also die Teilfolge $(1, 9, 8, 6)$.
(2) Für jedes $n \geq 5$ ist a_n die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied a_n in der Folge F unmittelbar vorangehen.
Man untersuche, ob es in der Folge F außer der Teilfolge (a_1, a_2, a_3, a_4) noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von F besteht und $(1, 9, 8, 6)$ lautet.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass die Folge (rein)periodisch ist, dass also unendlich oft die Sequenz (1,9,8,6) in der Folge wiederholt auftritt:

Für jedes $n \geq 1$ betrachten wir das Quadrupel $q_n := (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})$. Da alle Folgenglieder nach Definition Ziffern sind, kann es höchstens 10^4 verschiedene solcher Quadrupel geben. Also muss es nach spätestens $10^4 + 1$ Folgengliedern ein Quadrupel wiederholt erscheinen.
Sei also $q_m = q_n$ mit $m > n$, also $q_{m+i} = q_{n+i}$ für $i = 0,1,2,3$. Dann ist aber auch $q_{m+4} = q_{n+4}$, da sich beide als Einerziffer der Summe $q_m + q_{m+1} + q_{m+2} + q_{m+3} = q_n + q_{n+1} + q_{n+2} + q_{n+3}$ berechnen. Analog folgt induktiv für alle natürlichen $k \geq 0$, dass $a_{m+k} = a_{n+k}$ gilt, sodass die Folge F ab a_n periodisch mit Periodenlänge $m - n$ (bzw. eines Teilers davon) ist.

Umgekehrt lässt sich aber auch aus vier aufeinanderfolgenden Folgengliedern das davor liegende (sofern existent) eindeutig berechnen: Es ist a_{m-1} die eindeutig bestimmte Ziffer, für die die Summe $a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2}$ die Einerziffer a_{m+3} besitzt. Stimmen aber q_m und q_n überein, gilt also, wie oben, $a_{m+i} = a_{n+i}$ für $i = 0,1,2,3$, so muss also auch $a_{m-1} = a_{n-1}$ gelten, sofern $n > 1$ ist. Induktiv folgt nun für jedes natürliche k mit $k < n$, dass auch $a_{m-k} = a_{n-k}$ ist.

Insbesondere ist dann für jedes natürliche ℓ

$$a_{\ell\cdot(m-n)+1} = a_{m-n+1} = a_1 = 1 \quad , \quad a_{\ell\cdot(m-n)+2} = a_{m-n+2} = a_2 = 9$$
$$a_{\ell\cdot(m-n)+3} = a_{m-n+3} = a_3 = 8 \quad \text{und} \quad a_{\ell\cdot(m-n)+4} = a_{m-n+4} = a_4 = 6$$

sodass sich die Teilfolge (1,9,8,6) in F unendlich oft wiederholt, $\square$.

Aufgabe 271042:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1, x_2 die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2+\sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösung von cyrix:
Wir beweisen zuerst ein
Lemma: Ist für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gegeben, dass $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ist, so ist auch $f(x_1 \cdot x_2) = 0$.

Beweis: Es ist nach (2) $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 = 0$, $\square$.

Zur eigentlichen Aufgabe:
Es ist mit $x_1 = x_2 = 1$ nach (2) $f(1) = f(1 \cdot 1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) = 2 \cdot f(1)$, also $f(1) = 0$.
Mit gleichen Werten für x_1 und x_2 folgt damit aus (1), dass

$$f(2) = f(1+1) = f(1^3) + f(1^3) = f(1) + f(1) = 0$$

ist. Nach dem Lemma folgt nun sukzessive, dass für alle positiven ganzen Zahlen n auch $f(2^n) = 0$ ist.
Insbesondere ist $f(4) = 0$ und $f(4^3) = 0$.
Nach (1) ist dann mit $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$ auch $f(5) = f(4+1) = f(4^3) + f(1^3) = 0 + 0 = 0$.
Nach (2) ist mit $x_1 = x_2 = \sqrt{5} \neq 0$ auch

$$0 = f(5) = f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot f(\sqrt{5})$$

also auch $f(\sqrt{5}) = 0$.
Nach dem Lemma ist dann auch $f(\sqrt{5}^3) = 0$ und $f(2^3) = 0$, also nach (1) mit $x_1 = 2$ und $x_2 = \sqrt{5}$ auch $f(2+\sqrt{5}) = f(2^3) + f(\sqrt{5}^3) = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 281042:
Zeigen Sie, dass es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es ist $f(0) = 7$.
(3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1), (2), (3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen.
Ein solches Beispiel ist etwa:
Für alle reellen x sei $f(x) = 7 \cdot 2^x; g(x) = 1$.
In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen $f(x) \neq 0$ für alle x und

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 2^{x+1}}{7 \cdot 2^x} = 2 = g(2x) + 1$$

auch (3).
Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiel kann es sein, einen Ansatz $g(x) = \text{const.}$, z. B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $2 \cdot g(x) = g(2x) + 1$).

So kann man eine Vielzahl weiterer Funktionenpaare f, g erhalten, z. B. für alle reellen x sei

$$f(x) = 7 \cdot 8^x \qquad , \qquad g(x) = x^3 + \frac{1}{7}$$

oder mit unstetigem f: $f(x) = 7 \cdot 2^x$ in jedem Intervall $k \leq x < k+1$ (k ganzzahlig), $g(x) = x + 1$ für alle reellen x.

Aufgabe 291043A:
Man beweise folgende Aussage:
Die Folge $(2n-1)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis:
Ist (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Folge und sind $k \geq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n zusammengesetzt, so ist $2^n - 1$ nicht Primzahl.
Beweis: Es sei $n = pq$ mit natürlichen Zahlen p,$q > 1$. Dann ist mit $x = 2^p$ die Zahl

$$2^n - 1 = x^q - 1 = (x-1)(x^{q-1} + ... + x + 1)$$

wegen $x + 1 > 1$ und $x^{q-1} + ... + x + 1 \geq x + 1 > 1$ zusammengesetzt. 2. Für jede natürliche Zahl $N > 1$ gilt: Keine der $N - 1$ Zahlen

$$n \in \{N! + 2; N! + 3; ...; N! + N\} \qquad (1)$$

ist Primzahl, denn diese Zahlen sind jeweils durch $2, 3, ..., N$ teilbar und größer als die genannten Teiler. Wählt man ein $N > 1$ mit $N > z + 1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgeglieder $2^n - 1$ die Länge $N - 1 > z$ und in diesem Abschnitt gibt es aufgrund 1. keine Primzahl.

Aufgabe 301044:
Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung gilt:

$$f(a) + f(a+b) - f(a-b) = a^2 + 4b + 2$$

Lösung von Kornkreis:
Zunächst setze $b = 1$ und setze für a verschiedene Werte ein: $m, m+1, m-1, m+2$ (man erhält also 4 Gleichungen, m sei eine beliebige natürliche Zahl).
Dann setze $b = 2$ und setze für a: $m, m+1$ (man erhält somit 2 Gleichungen).

Das ergibt ein Gleichungssystem aus 6 Gleichungen mit den 6 Unbekannten $f(m), f(m+1), f(m+2), f(m-1), f(m+3), f(m-2)$.

Als Lösung ergibt sich beispielsweise $f(m) = m^2 + 4$ und $f(m+1) = m^2 + 5$, dies gilt für alle natürlichen m, woraus schon der Widerspruch folgt, es kann also kein solches f geben.

Aufgabe 311043A:
Es sei f eine Funktion, die für alle positiven ganzen Zahlen n und nur für diese definiert sei und deren sämtliche Funktionswerte $f(n)$ ganzzahlig sind. Ferner werde vorausgesetzt, dass für alle positiven ganzen Zahlen m, n die Gleichung $f(f(m) + f(n)) = m + n$ gilt.
Man ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Funktionswert $f(1992)$ bei einer solchen Funktion f vorkommen können.

Lösung von Kornkreis:
Alle folgenden Variablen m,n,k seien positiv ganz.
Für $m = n$ lautet die Funktionalgleichung $f(2f(n)) = 2n$.
Das Argument $2f(n)$ der äußeren Funktion muss positiv ganz sein, also ist $f(n)$ stets positiv ganz.

f ist außerdem injektiv: aus $f(n) = f(k)$ folgt $2n = f(2f(n)) = f(2f(k)) = 2k$, also $n = k$.
Da in $f(f(m) + f(n)) = m + n$ die rechte Seite alle natürlichen Zahlen größer 1 annehmen kann, muss jede natürliche Zahl größer 1 ein Urbild haben.

Aus der Funktionalgleichung und der Injektivität von f folgt

$$2f(n) = f(n+1) + f(n-1) = f(n+2) + f(n-2) = ... = f(1) + f(2n-1)$$

denn wenn man f auf jede Seite dieses Gleichungssystems anwendet, erhält man immer $2n$.
$2f(n)$ besitzt also $n - 1$ verschiedene Darstellungen als Summe zweier verschiedener Summanden (verschieden wegen der Injektivität von f). [zwei Darstellungen heißen genau dann verschieden, wenn sie nicht durch Vertauschung der Summanden ineinander übergehen] Also muss offenbar $f(n) \geq n$ gelten für alle $n \geq 2$.

Wäre $f(1) > 1$, so wäre $2 = f(f(1) + f(1)) \geq 4$, Widerspruch, also ist $f(1) = 1$.
Wäre nun $f(2) > 2$, hätte die 2 kein Urbild, Widerspruch, also ist $f(2) = 2$. Induktiv kriegt man nun $f(n) = n$ für alle natürlichen n, was die Funktionalgleichung erfüllt.

Anmerkung: Man erhält schon aus $2f(n) = f(n+1)+f(n-1)$ die Lösung: das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle 1, damit ist $f(n) = a + bn$. Da f einen natürlichen Wertebereich hat, ist a ganz und $b \geq 0$. Wegen der Injektivität gilt $b \neq 0$. Damit, und da jede natürliche Zahl größer gleich 2 ein Urbild hat, ist $b = 1$ und $a = 1$ oder $a = 0$. Damit und nach Einsetzen in die Funktionalgleichung erhält man $a = 0$.

Aufgabe 311046:
Es sei q die größere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Man ermittle die letzte Ziffer (Einerstelle) in der dekadischen Zifferndarstellung der Zahl $[q^{1992}]$.
Hinweis: Ist z eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g für die $g \leq z < g + 1$ gilt, mit $g = [z]$ bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ sind $p = 2 - \sqrt{3}$ und $q = 2 + \sqrt{3}$. Für die Zahlen $a_n = p^n + q^n$ $(n = 0,1,2,3,\dots)$ gilt $a_n > 0$ sowie

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 14 \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = p^n(p^2 - 4p + 1) + q^n(a^2 - 4q + 1) = 0 \tag{2}$$

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Für $m = 0,1,2,\dots$ sind $a_{3m}, a_{3m+1}, a_{3m+2}$ ganze Zahlen mit 2 bzw. 4 bzw. 4 als letzter Ziffer:
Für $m = 0$ folgt dies aus (1), und trifft es für ein $m = k \geq 0$ zu, so ist nach (2) jeweils

$$a_{3(k+1)} = 4 \cdot a_{3k+2} - a_{3k+1}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 4 = 12$,

$$a_{3(k+1)+1} = 4 \cdot a_{3k+3} - a_{3k+2}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 2 - 4 = 4$,

$$a_{3(k+1)+2} = 4 \cdot a_{3k+4} - a_{3k+3}$$

eine ganze Zahl mit derselben letzten Ziffer wie $4 \cdot 4 - 2 = 14$.
Wegen $1992 = 3 \cdot 664$ hat somit a_{1992} die letzte Ziffer 2. Ferner ist $0 < p < 1$, also $p^{1992} - 1 < 0 < p^{1992}$. Nach Addition von q^{1992} folgt $a_{1992} - 1 < q^{1992} < a_{1992}$, d. h., q^{1992} liegt zwischen zwei ganzen Zahlen, deren letzte Ziffer 1 bzw. 2 ist. Damit ergibt sich $[q^{1992}] = 1$.

Aufgabe 321043B:
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen a, b, für die sich bei Division des Polynoms

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$

durch das Polynom

$$g(x) = x^2 + ax + b$$

erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl x, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

Lösung von cyrix:
Es ist

$$f(x) - g(x) \cdot (x^2 + ax) = (x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2) - (x^4 + ax^3 + bx^2 + ax^3 + a^2x^2 + abx) =$$

$$= (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 \qquad \text{und}$$

$$g(x) \cdot (2 - b - a^2) = (2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)$$

also mit $h(x) := x^2 + ax + 2 - b - a^2$:

$$f(x) - g(x) \cdot h(x) = (2 - b - a^2)x^2 + (1 - ab)x - 2 - ((2 - b - a^2)x^2 + (2a - ab - a^3)x + (2b - b^2 - a^2b)) =$$

$$= (1 - ab - 2a + ab + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b = (1 - 2a + a^3)x - 2 - 2b + b^2 + a^2b$$

Damit für kein x ein Rest bleibt, muss sowohl $1 - 2a + a^3 = 0$ also auch $2 - 2b + b^2 + a^2b = 0$ gelten.

Betrachten wir zuerst die Gleichung $1-2a+a^3 = 0$. Diese hat die Lösung $a_1 = 1$, sodass wir die Gleichung durch $a - 1$ teilen können und erhalten $0 = a^2 + a - 1$, was die weiteren Lösungen $a_{2/3} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Z}$ besitzt. Also ist die einzige ganzzahlige Lösung $a = 1$.

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so muss $2 - 2b + b^2 + b = 0$ bzw. $(-2 + b)(1 + b) = 0$, also $b \in \{-1{,}2\}$ gelten.

Demnach gibt es zwei ganzzahlige Paare $(a; b)$, sodass die Polynomdivision von f durch g keinen Rest lässt, nämlich $(1; -1)$ und $(1; 2)$. Die Probe bestätigt diese Lösungen.

Aufgabe 341044:
Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für jedes x in dem Intervall $[a, b]$ gilt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
(2) Die Funktion f ist nicht konstant.
(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.
Geben Sie (passend zu c) Zahlen a, b und im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f, g an, und weisen Sie nach, dass bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

Lösung von ochen:
Sei a,b,c beliebige reelle Zahlen mit $a < b$. Seien weiter y_1,$y_2 \in \mathbb{R}$ definiert als

$$y_1 := -\frac{c}{2} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}, \qquad y_2 := -\frac{c}{2} - \sqrt{1 + \frac{c^2}{4}}.$$

Es sind y_1,y_2 wohldefiniert und verschieden, da der Term unter der Wurzel $1 + \frac{c^2}{4}$ für alle reellen Zahlen c größer als Null ist. (Er ist sogar nicht kleiner als Eins.) Wir können weiter feststellen, dass y_1 und y_2 Nullstellen des Polynoms

$$p(y) = y^2 + cy - 1$$

sind.
Wir definieren f,g: $[a,b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} y_1, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ y_2, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}, \qquad g(x) = f(x) + c,$$

so gilt für alle reellen Zahlen x

$$f(x)g(x) = f(x)(f(x) + c) = (f(x))^2 + cf(x) - 1 + 1 = p(f(x)) + 1 = 1,$$

da f nur auf Nullstellen des Polynoms p abbildet. Weiter ist f nicht konstant, da $f(a) = y_1 \neq y_2 = f(b)$. Da definitionsgemäß $g(x) = f(x) + c$ für alle reellen x gilt, ist der Graph von g der um c in y-Richtung verschobene Graph von f.

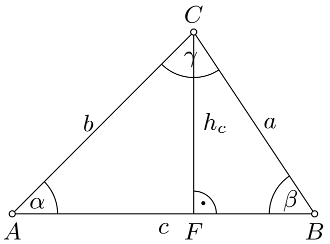
II Geometrie

II.I Dreiecke

I Runde 1

Aufgabe V01009:
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

Lösung von Steffen Polster:



In den rechtwinkligen Dreiecken AFC und BFC gilt zum einen $h_c = a \sin\alpha$, zum anderen $h_c = b \sin\beta$. Für den Flächeninhalt F wird mit dem Einsetzen der zwei Gleichungen

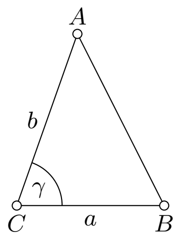
$$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin\alpha} \frac{h_c}{\sin\beta} \sin\gamma$$

Auflösen der Gleichung nach h_c ergibt die gesuchte Beziehung

$$h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Aufgabe V01011:
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?

Lösung von svrc:



Der Punkt, von dem die beiden Stollen ausgehen und in einer Ebene liegen, soll mit C bezeichnet werden. Die beiden Stollenlängen sind $a = 162{,}5\text{m}$ und $b = 200\text{m}$. Der Winkel, der von den beiden Stollenlängen a und b am Punkt C eingeschlossen wird, wird $\gamma = 70{,}5°$ genannt. Die gesuchte Stollenlänge nennen wir c.

Da im Dreieck die zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel gegeben sind, folgt die eindeutige Konstruierbarkeit bis auf Kongruenz aus den Kongruenzsätzen.

Mit dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \\ &= (162{,}5\text{m})^2 + (200\text{m})^2 - 2 \cdot (162{,}5\text{m}) \cdot (200\text{m}) \cdot \cos(70{,}5°) \approx 44708{,}8\text{m}^2 \end{aligned}$$

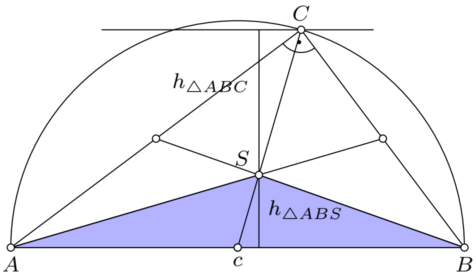
und damit $c \approx 211{,}4\text{m}$. Somit wird der Verbindungsstollen ungefähr 211,4m lang.

Aufgabe V01017:
Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:



Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.
Aus $F = \frac{gh}{2}$ folgt $h = \frac{2F}{g}$ und damit für das Dreieck ABS: $h_{\triangle ABS} = \frac{4}{3}$. Auch die Höhenabschnitte verhalten sich wie 1:2, daraus folgt:

$$h_{\triangle ABC} = 3h_{\triangle ABS} = 4 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad F_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

Aus den Verbindungslinien des Schwerpunkts S mit den Dreieckspunkten A, B und C entstehen somit drei flächengleiche Teildreiecke.
Aus c und h ergeben sich dann die Katheten mittels Höhensatz und Satz des Pythagoras zu $a = 8{,}94$ cm sowie $b = 4{,}47$ cm.

Aufgabe V11013:
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie b, c und α!

Lösung von svrc:
Da die Winkel β und γ an der Seite a anliegen, ist dieses Dreieck nach den Kongruenzsätzen bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar.
Für den Winkel α gilt nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 47° - 55° = 78°.$$

Mit dem Sinussatz gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

und daher

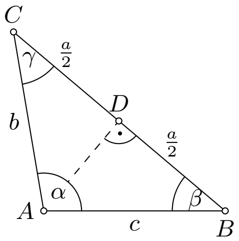
$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(47°)}{\sin(78°)} \approx 3{,}74\text{cm}.$$

Ebenso folgt mit dem Sinussatz

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(55°)}{\sin(78°)} \approx 4{,}19\text{cm}.$$

Aufgabe 011011:
Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: $AB = c = 87{,}51$ m, $\angle CAB = \alpha = 93{,}42°$.
Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!

Lösung von Christiane Czech:



Wegen $2\alpha > 180°$ kann α kein Basiswinkel sein. Für die Größe der beiden Basiswinkel $\angle ABC = \beta$ und $\angle ACB = \gamma$ gilt dann

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 43{,}29°$$

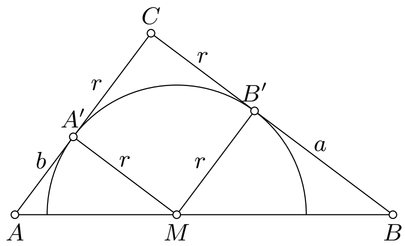
Da $AC = b$ wie AB ein Schenkel ist, gilt $b = c = 87{,}51$ m. Zeichnet man die auf $BC = a$ stehende Höhe AD ein, so erhält man im entstehenden rechtwinkligen Dreieck ABD die Gleichung $\cos\beta = \frac{a}{2c}$ und damit $a = 2c \cdot \cos\beta = 127{,}40$ m.

Aufgabe 021013:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.
Es ist zu beweisen, dass für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt, stets

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ist, wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!

Lösung von André Lanka:



Sei M der Mittelpunkt des Halbkreises mit Radius r und A' bzw. B' die Berührungspunkte des Halbkreises mit der Seite a bzw. b. Dann steht die Strecke MA' senkrecht auf a, weil a Tangente am Halbkreis ist. Ebenso steht MB' senkrecht auf b. Das Viereck $MA'CB'$ ist wegen drei rechten Winkel also ein Rechteck. Da weiterhin die benachbarten Seiten MA' und MB' gleichlang sind, handelt es sich um ein Quadrat.
Einerseits ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$

$$F = \frac{ab}{2}$$

andererseits ist

$$F = r^2 + \frac{(b-r)r}{2} + \frac{(a-r)r}{2} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}$$

Nach Gleichsetzung beider Formeln und Multiplikation mit $\frac{2}{abr}$, gewinnt man die gesuchte Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Aufgabe 071012:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Seiten folgende Längen (in cm) haben: $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$. Die Seite $\overline{AB}$ ist durch einen Punkt T so zu teilen, dass die Umfänge der Dreiecke $\triangle ATC$ und $\triangle TBC$ gleichlang sind.

Der Flächeninhalt (in cm^2) des Dreiecks $\triangle TBC$ ist zu berechnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Zahlenangaben verstehen sich in cm.

Zunächst kann mit der Umkehrung vom Satz des Pythagoras gezeigt werden, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt:

Es gilt: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = \overline{AB}^2$ und somit auch, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $\angle ACB$ ist.

Für die Umfänge der Dreiecke ergibt sich jeweils:

(1) $u_{\triangle ATC} = \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT}$

(2) $u_{\triangle BTC} = \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT}$

Bei gleichen Umfängen der Teildreiecke und Zusammensetzung von $\overline{AB}$ aus $\overline{AT}$ und $\overline{BT}$, ergibt sich für $\overline{BT}$:

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT} &= \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT} \\ \overline{AC} + \overline{AT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{BT} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \qquad \text{(II.1)} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes kann auf 2 verschiedene Arten berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ \overline{AB} \cdot h &= \overline{BC} \cdot \overline{AC} \\ h &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \text{(II.2)} \end{aligned}$$

Nun ergibt sich für den Flächeninhalt des Teildreiecks $\triangle TBC$ mit (1) und (2):

$$\begin{aligned} A_{\triangle TBC} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BT} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (13 + 5 - 12) \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} \approx 6{,}9 \end{aligned}$$

Das Teildreieck $\triangle TBC$ hat somit einen Flächeninhalt von ungefähr $6{,}9 cm^2$.

Aufgabe 141013:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2}; 0)$ und $B(\frac{1}{2}; 0)$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!

   (1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.

   (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für einen Punkt P seien $|AP| = a$ und $|BP| = b$ ganzzahlig. Wegen $|AB| = 1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a - 1 \leq b = a + 1$.

Ist $a - 1 = b$ oder $b = a + 1$, so bilden A, B, P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A, B und P enthält; dann liegt also P auf der x-Achse.

Ist $a - 1 < b < a + 1$, so folgt, da a, b ganzzahlig sind, $a = b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von AP, d. h. auf der y-Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i einer Menge mit den Eigenschaften I und II höchstens zwei Punkte auf der x-Achse und höchstens zwei Punkte auf der y-Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies kann man folgendermaßen finden:

Für einen Punkt $P(x, 0)$ auf der x-Achse sind

$$|AP| = \left|x + \frac{1}{2}\right| \qquad \text{und} \qquad |BP| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x - \frac{1}{2} = m$ ganzzahlig ist, also $x = m + \frac{1}{2}$ (1) mit ganzem m gilt. Für einen Punkt $P(0, y)$ auf der y-Achse ist

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

mit ganzem n gilt.

Daher erhält man z. B. dadurch vier derartige Punkte, dass man $(x, 0)$ mit x aus (1) für $m = -1$ und $m = 0$ sowie $(0, y)$ mit y aus (2) für $n = 1$ wählt. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

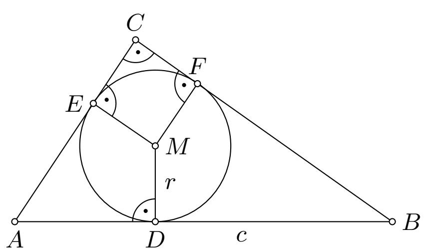
$$P_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = A \quad , \quad P_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) = B \quad , \quad P_3\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad , \quad P_4\left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung 1. Sie erfüllen aber auch die Bedingung II; denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht.

Aufgabe 151012:
Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.

Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei Dreieck ABC rechtwinklig mit $\angle ACB = 90°$. Ferner seien M der Mittelpunkt des Inkreises und D, E und F die Fußpunkte der von M auf die Seiten AB, AC und BC (in dieser Reihenfolge) gefällten Lote.

Da der Inkreis die Seiten in diesen Punkten berührt, sind D, E und F innere Punkte der Seiten. Nun gilt für den Umfang u des Dreiecks

$$u = AD + DB + AE + EC + BF + CF \tag{1}$$

Ferner gilt

$$AD = AE, \qquad DB = BF, \qquad EC = CF \tag{2}$$

als Abschnitte der Tangenten an den Inkreis. Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$u = 2AD + 2DB + 2EC \qquad \text{oder} \qquad u = 2(AD + DB) + 2EC \tag{3}$$

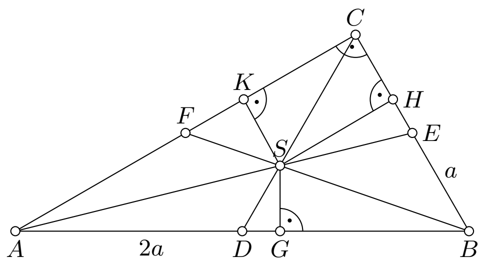
Das Viereck $MFCE$ enthält drei rechte Winkel und mit EM und MF ein Paar kongruenter Nachbarseiten. Es ist demnach ein Quadrat. Folglich hat EC die Länge r.

Unter Berücksichtigung von $AD + DB = AB$ folgt dann aus (3) $u = 2c + 2r$ oder $u = 2(c + r)$.

Aufgabe 161014:
Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{\angle ACB} = 90°$.

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. Darin seien d, E und F die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und AC, und es sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Dann gilt:

(1) Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt C auf einem Halbkreis über AB. Damit gilt $CD = a$.

(2) Da $\triangle DBC$ gleichseitig ist, folgt $\angle DCB = \angle CDB = \angle DBC = 60°$ und somit $\angle DCF = 30°$.

(2) Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks diese im Verhältnis 2 : 1 teilt, ist ferner $SD = \frac{a}{3}$ und $SC = \frac{2}{3}a$.

(2) Sei nun G der Fußpunkt des von S auf AB gefällten Lotes, dann ist SC der Abstand des Punktes S von der Seite AB.

Wegen $\angle SDG = 60°$ kann SG als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SD = \frac{a}{3}$ aufgefasst werden. Demnach gilt $SG = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

(2) Sei H der Fußpunkt des von S auf die Seite BC gefällten Lotes, dann ist SH der Abstand des Punktes S von der Seite BC.

Wegen $\angle SCH = 60°$ kann SH als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Somit gilt $SH = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

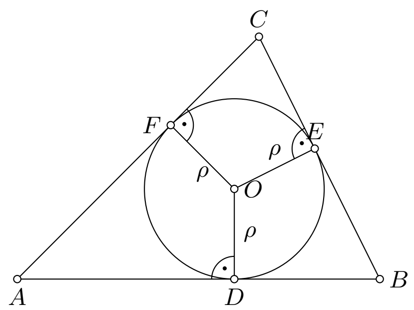
(2) Sei nun K der Fußpunkt des von S auf AC gefällten Lotes, dann ist SK der Abstand des Punktes S von der Seite AC.

Wegen $\angle SCF = 30°$ kann SK als halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Daher ist SK halb die lang wie SC. Somit gilt $SK = \frac{a}{3}$.

Aufgabe 181014:

Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel ACB.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muss sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



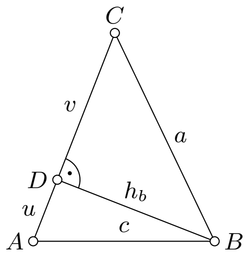
Der Inkreismittelpunkt sei O.
Dann steht gewiss der Radius ρ
stets senkrecht einmal auf AB,
zum zweiten tut er's mit BC.
Auch mit AC, der dritten Strecke,
da bildet er 'ne rechte Ecke;
Die Punkte, wo jeweils der Treff,
bezeichnet man mit D, E, F.
Das Dreieck ABO dabei,
des Inhalt $c \cdot \rho : 2$
wird durch DO nochmals geteilt.
Wenn man bei $\triangle ADO$ verweilt
und es mit $\triangle AFO$ vergleicht,
so sieht man - wie so üblich „leicht“
dass beide Flächen kongruent,
falls man den Kongruenzsatz kennt,
den man mit ssw beschreibt,
AO sich nämlich selbst gleich bleibt;

dann ist CD genau gleich ρ
und für OF gilt's ebenso;
der Winkel $\angle ADO$ ist Rechter,
und $\angle AFO$ macht's auch nicht schlechter.
Auch für das Dreieck BOD
stimmt der Vergleich mit $\triangle BOE$.
Das Viereck mit $FCEO$
bleibt noch als Rest.
Jetzt denkt man so:
Da drei der Winkel 90 Grad,
wohl auch der vierte soviel hat.
Darum muss es ein Rechteck sein.
Setzt man die Seitenlängen ein,
erkennt man, dass es folglich hat
den Flächeninhalt ρ^2.
Und unsre Lösung heißt nun so:
$\rho^2 + c \cdot \rho$.

Aufgabe 201013:
Gegeben seien die Seitenlängen $a = \overline{BC} = 15cm$, $b = \overline{AC} = 14cm$, $c = \overline{AB} = 13cm$ eines Dreiecks ABC.

Berechnen Sie die Länge h_b der durch B verlaufenden Höhe und den Flächeninhalt F dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt der genannten Höhe sei D; es sei $u = AD$, $v = CD$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_b^2 + v^2 = a^2 \quad (1) \qquad ; \qquad h_b^2 + u^2 = c^2 \quad (2)$$

Daraus folgt

$$v^2 - u^2 = a^2 - c^2 \qquad ; \qquad (v-u)(v+u) = 56 \text{ cm} \tag{3}$$

Läge D nicht zwischen A und C, so wäre $v - u = b = 14$ cm; hieraus und aus (3) folgte $v + u = 4$ cm, so dass der Widerspruch $v + u < v|u$ entstünde. Daher liegt D zwischen A und C, es gilt

$$v + u = b = 14 \text{ cm} \tag{4}$$

hieraus und aus (3) folgt $v - u = 4$ cm (5), aus (4) und (5) ergibt sich $2v = 18$ cm, $v = 9$ cm; hieraus und aus (1) folgt

$$h_b = \sqrt{a^2 - v^2} = 12 \text{ cm}$$

Damit erhält man auch $F = \frac{b \cdot h_b}{2} = 84 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 211013:
Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff des Durchmessers definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine „längste Strecke“ als „Durchmesser“ bezeichnen.[1)]

Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann lässt sich beweisen, dass für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geq \overline{XY}$ ist.

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!

(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

[1)] Das heißt man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, dass für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der „Durchmesser“ von F.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Dreiecksfläche F wird nur dann durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen zerlegt, wenn diese Gerade durch einen Eckpunkt von F geh , da andernfalls nur Zerlegungen entstehen können, bei denen eine Teilfläche ein Viereck ist.

Zu (1): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB = AC \geq BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB = AC$. Bei jeder Zerlegung von F in zwei Dreiecksflächen F', F'' hat mindestens eine dieser beiden Dreiecksflächen noch eine Seite mit der Länge d als längste Seite; d. h., sie hat denselben Durchmesser d wie F.

Also ist die Aussage (1) wahr.

Zu (2): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB > AC$ und $AB > BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB$. Eine Gerade, die durch C und einen Punkt P zwischen A und B geht, zerlegt F in zwei Dreiecksflächen F', F'', für die folgendes gilt:

Mindestens einer der Winkel $\angle APC, \angle BPC$ ist größer oder gleich 90°, also in den Dreiecken APC bzw. BPC der größte Winkel. Daher gilt mindestens eine der Ungleichungen $AC > PC$, $BC > PC$ und somit wegen $AB > AC$ und $AB > BC$ jedenfalls $AB > PC$.

Ferner gelten die beiden Ungleichungen $AB > AP$ und $AB > BP$. Also sind in den beiden Dreiecken APC, BPC alle Seitenlängen kleiner als $d - AB$.

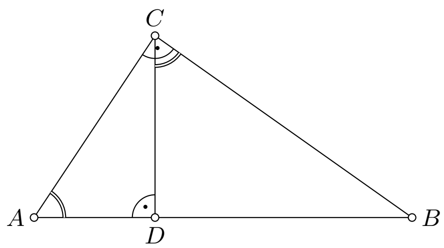
Folglich hat jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser als F. Somit ist auch Aussage (2) wahr.

Aufgabe 241012:
In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D. Für ihn gelte.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da in dem Dreieck ABC die Innenwinkel bei A und B spitz sind, liegt die Höhe CD innerhalb des Dreiecks. Nach Voraussetzung gilt $\angle CDA = \angle BDC = 90°$.

Aus der Voraussetzung folgt ferner $AC : CD = CB : BC$.
Daher sind die Dreiecke ACD und CBD nach dem Ähnlichkeitssatz „ssw“ einander ähnlich, da der jeweils genannte Winkel, in dem sie übereinstimmen, ein rechter Winkel ist, so dass ihm die größere der beiden jeweils genannten Seiten gegenüberliegt.

Daraus folgt $\angle DAC = \angle DCB \qquad (1)$.

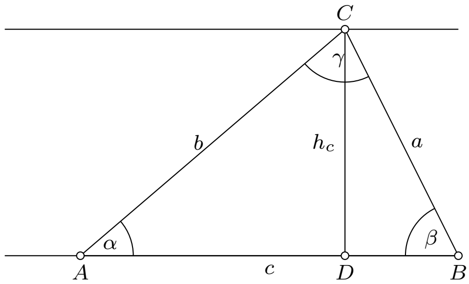
Ferner gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ADC nach dem Winkelsummensatz $\angle ACD = 90° - \angle DAC$. Wegen (1) erhält man damit

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 90°$$

II Runde 2

Aufgabe V11022:
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\measuredangle CAB = 41°, \measuredangle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm \frac{1}{2}°$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

Lösung von Steffen Polster:



a) Allgemeine Lösung: Es gilt $\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a}$ sowie $h_c = a \sin\beta$. Aus dem Sinussatz wird durch Einsetzen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

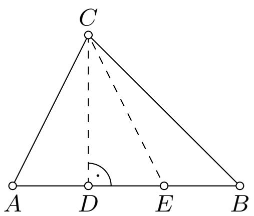
Für die gegebenen Werte ergibt sich somit $h_c = 169{,}5$ m. Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung des Messfehlers 169,5 m.

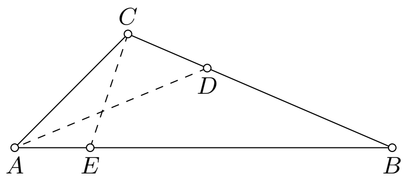
b) Berechnet man die Höhe h_c mit $c + 0.5$, $\alpha + 0.5°$ und $\beta + 0.5°$ ergibt sich $h_c = 173{,}3$ m.
Im Fall $c - 0.5$, $\alpha - 0.5°$ und $\beta - 0.5°$ wird $h_c = 165{,}7$ m.
Der mögliche Fehler ist somit $\frac{173{,}5 - 165{,}5}{2} = 4$ m.

Aufgabe 011023:
Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen?
Die Behauptung ist zu begründen!

Lösung von Eckard Specht:
Nein, es ist nicht möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Beweis: Zunächst ist festzustellen, dass der Schnitt durch das Dreieck ABC durch einen der Eckpunkte gehen muss, da ansonsten ein Viereck entsteht.
Angenommen, ABC sei spitzwinklig (linkes Bild).





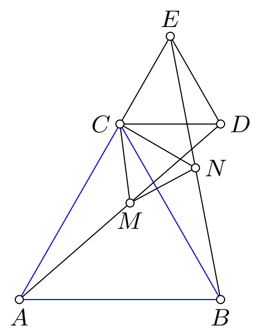
Dann erzeugt jeder geradlinige Schnitt durch einen Eckpunkt, hier C, an der gegenüberliegenden Seite AB zwei Winkel, von denen entweder beide rechtwinklig ($\angle CDA = \angle CDB = 90°$) oder einer spitz- und der andere stumpfwinklig ($\angle CEA < \angle CEB$) sind.

Im ersten Fall können die Dreiecke CDA und CDB nicht kongruent sein, da ihre Hypotenusen nach Voraussetzung ungleich lang sind; im zweiten Fall entsteht nur ein stumpfer Winkel, der keinen „Partner“ im anderen Teildreieck hat.

Ist das zu teilende Dreieck ABC dagegen stumpfwinklig (rechtes Bild), so erzeugt ein Schnitt durch einen der Eckpunkte, an denen spitze Innenwinkel vorliegen, hier AD, auf der gegenüber-liegenden Seite zwar einen stumpfen Winkel, der aber stets größer als der stumpfe Innenwinkel in $\triangle ABC$ ist.
Bei einem Schnitt durch den Eckpunkt mit dem stumpfen Innenwinkel, hier CE, gilt bezüglich der rechten Winkel dasselbe wie im ersten Fall. Selbst wenn dabei ein stumpfer Innenwinkel zustande kommt, hier $\angle AEC$, kann dieser nicht gleich dem verbleibenden Winkel $\angle ECB$ sein, weil dazu zwei Seiten des Dreiecks parallel sein müssten ($AB \parallel BC$), was nicht geht.
Es ist somit nicht möglich, ein beliebiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Aufgabe 021024:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E.
Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positivem Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, dass das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

Lösung von André Lanka:



Da der Winkel $\angle ECD = 60°$ ist, muss $\angle DCA = 120°$ sein. Genauso ist $\angle BCA = 60°$ und deshalb $\angle ECB = 120°$.
Die beiden Dreiecke $\triangle DCA$ und $\triangle ECB$ sind deswegen nach Kongruenzsatz SWS kongruent. Die beiden Seitenhalbierenden CN und CM sind dann gleichlang und das Dreieck $\triangle CMN$ ist gleichschenklig. Rotiert man das Dreieck $\triangle CAD$ um den Punkt C um $60°$ nach links, so bildet man es genau auf das Dreieck $\triangle CBE$ ab. Dabei wird auch M auf N abgebildet. Die beiden Punkte müssen bezüglich C einen Winkel von $60°$ haben, womit unter Beachtung der Gleichschenkligkeit gezeigt ist, dass $\triangle CMN$ gleichseitig ist.

Aufgabe 031022:
In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.
a) Es ist zu beweisen, dass stets $a + h_a \geq b + h_b$ ist!
b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ist I der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt $ah_a = 2I$ und $bh_b = 2I$. Damit erhalten wir

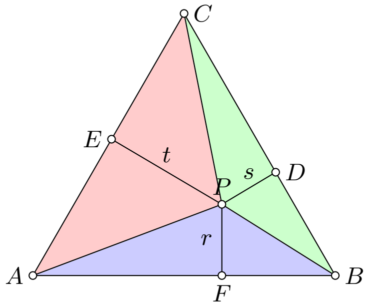
$$(a + h_a) - (b - h_b) = \left(a + \frac{2I}{a}\right) - \left(b + \frac{2I}{b}\right) = (a - b)\left(1 + \frac{2I}{ab}\right) \tag{1}$$

Wegen $a \geq b$ $(b > 0)$ und $ab \geq ab\sin\gamma = 2I$. ($\gamma$ ist die Größe eines Winkels, der von Dreiecksseiten mit den Längen a und b bestimmt wird) folgt hieraus die Aussage $(a + h_a) - (b - h_b) \geq 0$, die mit der behaupteten gleichbedeutend ist.

b) Aus (1) folgt, dass $(a+h_a)-(b+h_b) = 0$ genau dann gilt, wenn $ab = 2I$ oder wenn $a = b$ ist, d. h., wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b die Kathetenlängen sind, oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist und a und b die Längen von Schenkeln sind.

Aufgabe 081023:
Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Summe der Abstände dieses Punktes von den Seiten konstant:

$$r + s + t + u = h = 3r$$

Dabei bezeichnet h die Höhe des Dreiecks und r den Inkreisradius.
Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist so groß wie die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke.
Für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt $\frac{gh}{2}$, wobei $g = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ die Grundseite und h die Höhe sein soll. Die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke ist

$$\frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{gh}{2} = \frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2}$$

Damit folgt die Behauptung $h = s + t + u$.

Anmerkung: Diese Aussage ist der Satz von Viviani.

Aufgabe 101023:
In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $AB : SM = 3 : \sqrt{6}$ gilt.
Beweisen Sie, dass das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d. h. dass alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

Lösung von cyrix:
Da die Figur durch Drehung um die Gerade SM um 120° in sich selbst übergeht, ist $|AS| = |BS| = |CS|$ schon gegeben. Da das Dreieck $\triangle AMS$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M ist, gilt die Beziehung $|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2$. Es verbleibt also $|AM|$ zu berechnen:

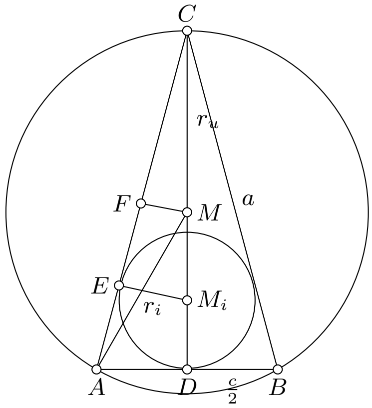
Da die Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Höhen zusammenfallen, berechnet sich deren Länge zu $s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Da die Seitenhalbierenden sich im Verhältnis 2 : 1 schneiden und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit dessen Umkreismittelpunkt zusammenfällt, ist $|AM| = \frac{2}{3} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.
Einsetzen liefert nun

$$|AS^2| = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 a^2 = \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\right) \cdot a^2 = a^2$$

also $|AS| = a = |BS| = |CS| = |AB| = |AC| = |BC|$, $\Box$.

Aufgabe 111024:
Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $AC = BC = a$ die Basislänge $AB = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis 1 : 4 beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = AB = a$. Seine Basislänge sei $AB = c$.
Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, wobei D auf AB liegen möge. Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\angle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D.

Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u. Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E, das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F.

Dann ist $AF = CF = \frac{a}{2}$, $AD = BD = AE = \frac{c}{2}$, $DM_u = \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}}$, $CM_i = \sqrt{(a - \frac{c}{2})^2 + r_i^2}$. Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle ACD$ einerseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_u \pm \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{u}}\right)^2 = a^2$$

wobei das obere und das untere Vorzeichen gilt, (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u\sqrt{4r_u^2 - c^2} = a^2 - 2r_u^2$$

$$4r_u^2 - c^2r_u^2 = a^4 - 4a^2r_u^2 + 4r_u^4$$

$$r_u = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \qquad (1)$$

und andererseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_i + \sqrt{a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + r_i^2}\right)^2 = a^2$$

$$r_i\sqrt{4a^2 - 4ac + c^2 + 4r_i^2} = ac - \frac{c^2}{2} - 2r_i^2$$

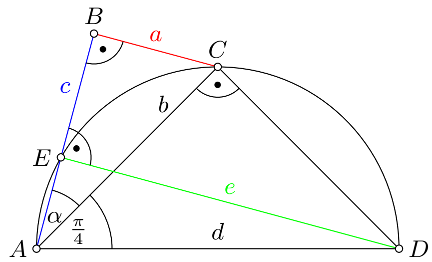
$$4a^2r_i^2 - 4acr_i^2 + c^2r_i^2 + 4r_i^4 = a^2c^2 - ac^3 - 4acr_i^2 + \frac{c^4}{4} + 2c^2r_i^2 + 4r_i^4$$

$$r_i = \frac{c\left(a - \frac{c}{2}\right)}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \qquad (2)$$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2 : \pi r_u^2 = 1 : 4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u = 2r_i$ gilt.
Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2 = c(2a - c)$, dies mit $(a - c)^2 = 0$ und daher mit $a = c$.

Aufgabe 141023:
Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels.
Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, dass der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.
Man beweise, dass dann $DE = AB + BC$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:

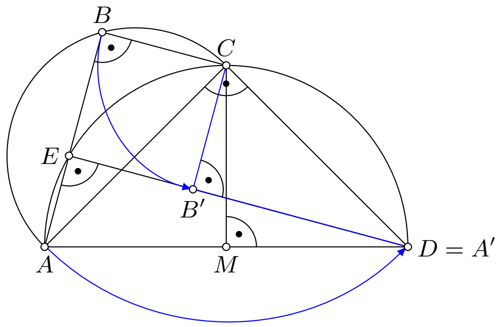


Es gilt

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}d \qquad \text{und} \qquad e = d\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$e = d\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + d\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}d\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}d\cos\alpha$$

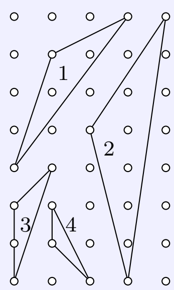
$$e = b\sin\alpha + b\cos\alpha = a + c$$



2.Lösung:
Auf Grund der Aufgabenstellung ist $AC = DC$. Wird das Dreieck ABC um 90° um C so gedreht, dass A auf D zu liegen kommt, so liegt das Bild B' von B auf der Strecke ED (der Winkel $\angle CDE$ ist gleich dem Winkel $\angle CAB$).

Auf Grund der rechten Winkel $\angle DEB = \angle EBC$ sind BC und ED parallel. Da $BC = B'C$ ist, ist das Viereck $EBCB'$ ein Quadrat.
Damit sind $B'D = AB$ und $EB' = BC$, so dass folgt
$ED = EB' + B'D = BC + AB$

Aufgabe 151023:
Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

Lösung von Steffen Polster:
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse identisch sind. Mit der Festlegung a ist die kleinste, b die mittlere und c die größte Seite, ergibt sich unter der Annahme, dass der waagerechte und senkrecht Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten x ist, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras für die Dreiecke:

Dreieck	a	b	c	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
1	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{25}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
2	$\sqrt{13}x$	$\sqrt{17}x$	$\sqrt{50}x$	$\sqrt{\frac{17}{13}}$	$\sqrt{\frac{50}{13}}$
3	$\sqrt{2}x$	$2x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
4	x	$\sqrt{2}x$	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$

Die Dreiecke 1, 3 und 4 sind paarweise zueinander ähnlich. Das Dreieck 2 ist zu keinem anderen der Dreiecke ähnlich.

Aufgabe 161022:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = AC = 4$ cm und die Länge $p = BD = 1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $CD = h$ und die Länge $q = AD$.

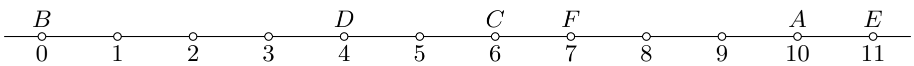
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die gesuchten Längen $a = BC$, $c = AB$, h,q gilt: (1) $^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras)
(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz)
(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz)
(4) $p + q = c$ (da D auf AB liegt).
Aus (2), (4) folgt $q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1{,}8x - 16 = 0$ sowie $x > 0$. Mit den Lösungen

$$x_{1,2} = -0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 + 16} = -0{,}9 \pm 4{,}1$$

folgt $q = 3{,}2$ cm und damit für restlichen Größen $c = 5$ cm, $a = 3$ cm und $h = 2{,}4$ cm.

Aufgabe 181021:
Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, dass $AB = 10$ cm; $BC = 6$ cm; $BE = 11$ cm; $CD = 2$ cm; $FD = 3$ cm; $AF = 3$ cm und $DE = 7$ cm gilt.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Angenommen, eine Anordnung von Punkten $A, ..., F$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefasst.
Wegen $BE = 11$ cm kann dabei erreicht werden, dass die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $BC = 6$ cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $DE = 7$ cm der Zahl 4 oder der Zahl 18.
Hiernach kann aber $CD = 2$ cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht.
Nun folgt weiter: Wegen $AB = 10$ cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $FD = 3$ cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7.
$AF = 3$ cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung im Bild die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.
In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E. (Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.)

Aufgabe 181024:
Von einem Dreieck ABC mit $\angle CAB = \alpha = 120°$ und $\angle BCA = \gamma = 30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt $\angle ABC = \beta = 30°$, und damit $AB = AC$ (1)
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt

$$AM = BM = CM = r \qquad (2)$$

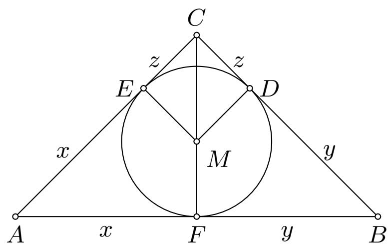
Wegen (l) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\angle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig.
Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist $CABM$ ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist BC die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang

$$CA + AB + BC = r + r + 2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})r$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus $CABM$, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Aufgabe 191023:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ und gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D, die Seite CA in E und die Seite AB in F.
Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte BD, DC, CE, EA, AF und FB, in Abhängigkeit von a, b und c ausgedrückt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $ME \perp AC$ und $MF \perp AB$. Weiter folgt $\triangle AEM \cong \triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $AM = AM; ME = MF$ und in der Größe $\angle AEM = \angle AFM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $AE = AF$.
Entsprechend lässt sich zeigen, dass $BF = BD$ und $CD = CD$ gilt. Für die gesuchten Seitenabschnitte

$$AE = AF = x, \qquad BF = BD = y, \qquad CD = CE = z$$

gilt somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + z &= a \qquad (1)\\ x + z &= b \qquad (2)\\ x + y &= c \qquad (3) \end{aligned}$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

Entsprechend ergibt sich

$$y = \frac{1}{2}(c + a - b) \qquad ; \qquad z = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

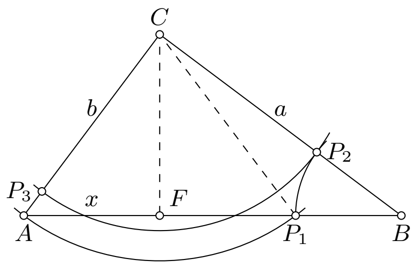
Die gesuchten Längen sind also

$$AE = AF = \frac{1}{2}(b + c - a); \qquad BF = BD = \frac{1}{2}(c + a - b); \qquad CD = CE = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Da die Existenz des Inkreises und folglich auch der gesuchten Längen als bekannt verwendet werden darf, ist eine Probe oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x,y,z nicht erforderlich.

Aufgabe 201022:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $BC = 4$ cm und $AC = 3$ cm. Der Kreis um C mit dem Radius AC schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.
Berechnen Sie das Verhältnis $AP_3 : CP_3$!

Lösung von Steffen Polster:



Wir lösen die Aufgabe allgemein. Aus den bekannten Sätzen am rechtwinkligen Dreieck (Satz des Pythagoras, Kathetensätze, Höhensatz) wird $CF = h = \frac{ab}{c}$. Der 1. Kreis um C hat den Radius b und schneidet AB auch in P_1. $\triangle ACP_1$ ist gleichschenklig, so dass $x = AF = FP_1$ gilt. x ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras zu $x = \sqrt{b^2 - h^2} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und somit

$$BP_1 = c - 2\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in P_2. Es wird

$$CP_2 = CP_3 = a - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in P_3. Jetzt wird

$$AP_3 = a - CP_3 = -\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und für das Verhältnis

$$\frac{AP_3}{CP_3} = -\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}$$

Setzt man die gegebenen Größen $a = 4$ und $b = 3$ ein, wird für das Verhältnis $AP_3 : CP_3 = 2 : 13$.

Aufgabe 211021:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB. Für den Höhenfußpunkt D gilt $AD < DB$.
In welchem Verhältnis $AD : DB$ teilt er die Hypotenuse?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Längen $AB = c$, $DC = h$, $AD = q$, $DB = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \quad (1) \quad \text{sowie} \qquad p + q = c \quad (2) \quad \text{und} \quad q < p \quad (3)$$

Ferner gilt nach dem Höhensatz $pg = h^2 \quad (4)$. Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2 \tag{5}$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$\begin{aligned} p(c-p) &= \frac{4}{25}c^2 \\ p_{1,2} &= \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25-16)} \\ &= \frac{c}{10}(5 \pm 3) \end{aligned}$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$ oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{4}{5}c$.
Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $AD : DB = q : p = 1 : 4$.

Aufgabe 211024:
Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.
Beweisen Sie, dass die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF. Wegen

$$\angle FCA + \angle ACB + \angle BCE = 45° + 90° + 45° = 180°$$

liegt C auf der Geraden durch E und F.
Die Mittelpunkte von BC, CA, AB seien U, V bzw. W. Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes, von Thales durch C, ist also der Umkreis des Dreiecks ABC. Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC.
Somit ist $WUCV$ ein Rechteck; E, F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV, und es gilt:

$$WE = WU + UE = WU + UC = WV + VC = WV + VF = WF \tag{1}$$

Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G. Dann gilt

$$\angle FWG = 90° - \angle AWV = 90° - \angle WBU = \angle EWB \tag{2}$$

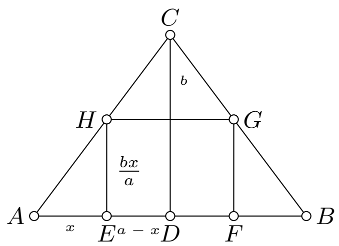
und $\angle GFW = 45° = \angle BEW \quad (3)$.
Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle FGW \cong \triangle EBW$, also $WG = WB$. Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E, F, w. z. b. w.

Aufgabe 241022:
Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, dass es nicht stumpfwinklig ist und dass für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung $CD \cdot AC = AD \cdot BC$ gilt.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\angle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Laut Voraussetzung sind dann die Dreiecke ADC und DBC ähnlich, da sie im Verhältnis zweier Seiten und im gegenüberliegenden Winkel der größeren Seite übereinstimmen. Damit ist $\gamma = \alpha + \beta = 90°$.

Aufgabe 251023:
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $AB = 20$ cm und der Höhenlänge $CD = 8$ cm.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben werden, dass E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und dass dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, dass es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $AD = BD = 10$ cm.
Es sei $AD = a$ und $DC = b$ (siehe Bild).
Für jedes Rechteck $EFGH$, das dem Dreieck ABC (mit E und F aus AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $AE = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt aus dem Strahlensatz

$$EH : DC = AE : AD \qquad \text{also} \qquad EH = \frac{bx}{a}$$

Da $EFGH$ ein Rechteck ist, gilt somit $FG = EH = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz

$$BF : BD = FG * DC$$

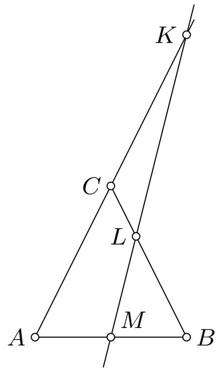
und damit $BF = x$. Hiernach ergibt sich $EF = ED + FD = 2(a - x)$. Der Flächeninhalt J des Rechtecks $EFGH$ ist folglich

$$J = 2(a-x)\frac{bx}{a} = \frac{2b}{a}(ax - x^2) = \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right) = \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Daraus folgt: Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$, also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.
Somit wird für genau dasjenige Rechteck $EFGH$, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind $EF = 10$ cm, $EH = 4$ cm, sein Flächeninhalt beträgt $J = 40$ cm^2.

Aufgabe 331023:
Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ABC mit $AC = BC$ die folgende Aussage gilt!
Verlängert man die Strecke AC über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke CB zwischen C und B, dass $3 \cdot CL = CB$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von AB, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Es ist

$$\frac{KA}{CA} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{MB}{MA} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Menelaus folgt die Behauptung.

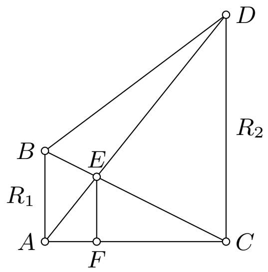
III Runde 3

Aufgabe 021036:
Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_g bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen:
Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen.
Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Fällt man von E aus das Lot auf die Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, dass EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_g angibt.
a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!
b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von $8\Omega, 10\Omega, 12\Omega$ parallel geschaltet werden?

Lösung von André Lanka:



a) Mit den Strahlensätzen ergibt sich

$$\frac{AF}{EF} = \frac{AC}{CD} \qquad \text{und} \qquad \frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB}$$

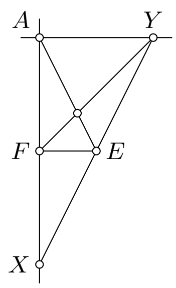
Nach Addition und Division durch die Länge der Strecke AC erhält man

$$\frac{AF + FC}{EF} = \frac{AC}{CD} + \frac{AC}{AB} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{EF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$$

Die Strecke EF ist also tatsächlich der gesuchte Widerstand.
b) Zuerst konstruiert man den Gesamtwiderstand von 8Ω und 10Ω. Anschließend wiederholt man die Konstruktion mit dem eben ermittelten Widerstand und 12Ω.

Aufgabe 031032:
Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)

Lösung von Manuel Naumann:



Der Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks ergibt sich aus dem Schnitt seiner Seitenhalbierenden.
Sei $\triangle AXY$ ein Dreieck, das die Voraussetzungen erfüllt, E der Punkt, der XY halbiert und F das Lot von E auf AX.
Dann folgt aus dem Strahlensatz die Beziehung $\frac{AX}{FX} = \frac{XY}{EX} = 2$.
D. h., $AX = 2FX$. Das Dreieck $\triangle AXE$ ist somit gleichschenklig.
In allen Dreiecken $\triangle AXY$, gilt also: $AE = EX = 3$ cm. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle AXY$ liegt auf der Strecke AE und teilt diese bekanntermaßen im Verhältnis $2 : 1$.

Somit liegen alle möglichen Schwerpunkte S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = 2$ cm.

Aufgabe 071031:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Lösung von cyrix:
Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ und o. B. d. A. die Winkelhalbierende durch B, welche die Seite AC im Punkt W_B schneide. O. B. d. A. betrachten wir das Teildreieck $\triangle ABW_B$.
Dessen Innenwinkel bei W_B sei mit ϕ bezeichnet; die Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$ bei A und B, wie üblich, mit α und β. Dann ist, da BW_B den Innenwinkel β halbiert, also $\angle W_B BA = \frac{\beta}{2}$, und aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck ABW_B schließlich $\phi = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist

$$\alpha < 180° - \beta \qquad \text{, also} \qquad \phi > 180° - (180° - \beta) - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Da in einem Dreieck dem größeren Innenwinkel auch immer die größere Seite gegenüberliegt, ist $|AB| > |AW_B|$, was zu beweisen war.

Aufgabe 081031:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei $AB = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so dass ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck $\triangle ABC$ ist.
Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

Lösung von cyrix:
Den Flächeninhalt F_3 des Dreiecks $\triangle CDE$ erhält man als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks $\triangle ABC$ und des Trapezes $ABDE$, also $F_3 = F_1 - F_2 = \frac{2}{3} \cdot F_1$.

Da die Strecken DE und AB parallel sind, sowie E und A bzw. D und B jeweils auf einem von C ausgehenden Strahl liegen, geht das Dreieck $\triangle CDE$ aus dem Dreieck $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit Zentrum C hervor. Der Streckungsfaktor sei k. Dann gilt $F_3 = k^2 \cdot F_1$, also $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, und damit $|DE| = k \cdot |AB| = \sqrt{6} \cdot 3$ cm.

Aufgabe 091035:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, und auf AB ein Punkt D.
Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. können wir $|AD| \geq \frac{1}{2}|AB|$ annehmen. (Andernfalls vertausche man im Folgenden jeweils die Rollen von A und B.)

Ist $D = B$, so wähle man E als Mittelpunkt der Seite AC (den man mit der üblichen Konstruktionsweise erhält). Das Dreieck $\triangle DEA = \triangle BEA$ besitzt die gleiche Höhe von A auf die Grundseite auf der Geraden g_{BE} wie das Dreieck $\triangle ABC$ auf dessen Grundseite, die wegen $g_{BC} = g_{BE}$ auf der gleichen Geraden liegt, während diese Grundseite im Dreieck $\triangle BEA$ aber nach Konstruktion nur halb so lang ist wie die entsprechende im Dreieck $\triangle ABC$. Damit besitzt es also auch genau die Hälfte von dessen Flächeninhalt.
Ist D identisch mit dem Mittelpunkt M der Strecke AB, so wähle man $E = C$ und man erhält mit der gleichen Begründung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AED = \triangle ACM$ genau halb so groß ist wie der des Ausgangsdreiecks $\triangle ABC$. Diesmal wird die Höhe von C auf die Grundseiten AE bzw. AB betrachtet.

Sei im Folgenden also nun D ein innerer Punkt der Strecke MB. Dann konstruiere man E als Schnittpunkt der Parallelen zu DC durch M mit der Geraden AC. (Da M innerer Punkt der Strecke AD ist, schneidet die Parallele zu DC durch M die Gerade g_{AC} im Inneren der Strecke AC.) Dann hat das Dreieck $\triangle ADE$ genau den halben Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, wie im Folgenden gezeigt wird:

Das Dreieck $\triangle ADC$ besitzt wieder die gleiche Höhe von C auf auf die Gerade $g_{AD} = g_{AB}$ wie das Dreieck $\triangle ABC$, sodass sich

$$F_{\triangle ADC} = \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

ergibt.
Analog kann man die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADE$ in Beziehung setzen, wenn man beachtet, dass sie die gleiche Höhe von D auf die Gerade $g_{AC} = g_{AE}$ besitzen. Es ist also

$$F_{\triangle ADE} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot F_{\triangle ADC} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

Nach dem Strahlensatz (da die Geraden g_{DC} und g_{ME} nach Konstruktion parallel sind und von zwei von A ausgehenden Strahlen geschnitten werden) gilt aber $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}$, sodass man nach Einsetzen genau das gewünschte Resultat $F_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot F_{\triangle ABC}$ erhält.

Aufgabe 101032:
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$.
Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:
1) Die Kreise um A durch C sowie C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.
2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.
3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.
4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.
5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung:
Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AC und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte. Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser AC, sodass das Dreieck $\triangle ACP$ nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.
Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von AC, sodass $|AP| = |CP|$, also auch $\angle PAC = \angle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle APC$). Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \sin\angle PAC = \frac{|CP|}{|AC|} \qquad \text{also} \qquad |CS| = |CP| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|AC|$$

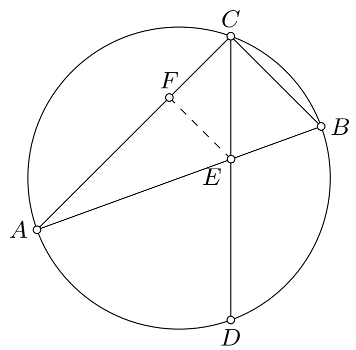
Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck $\triangle STC$ also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k := \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit Zentrum C hervor. Damit ist $F_{\triangle STC} = k^2 \cdot F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}F_{\triangle ABC}$, wie gewünscht.
Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ wurde hier nirgends benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

Aufgabe 111033:
Gegeben sei die Kathetenlänge $BC = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $AC : BC = 2 : 1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\angle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a!
Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Aufgabenstellung ist $AC = 2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras (1) $\quad AB = a\sqrt{5}$. Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD. Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$$AE : EB = AC : BC = 2 : 1$$

Daraus folgt wegen (1): $AE = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$ und $EB = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F. Dann gilt nach einem der Strahlensätze $EF : BC = AE : AB = 2 : 3$, woraus $EF = \frac{2}{3}a$ folgt. (siehe Abbildung)



Dreieck $\triangle EFC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\angle ACE$ eine Größe von 45° hat, auch gleichschenklig. Also gilt $EF = FC$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun $CE = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$.
Weiter gilt: $\triangle ADE \cong \triangle BCE$; denn $\angle BEC \cong \angle AED$ (Scheitelwinkel) und $\angle CBA \cong \angle CDA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen. Daher gilt: $CE : EB = AE : ED$, woraus man

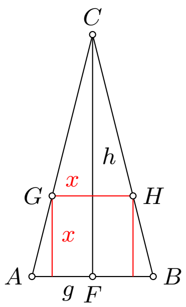
$$ED = \frac{AE \cdot EB}{CE} = \frac{\frac{2}{3}a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{5}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

erhält. Somit ergibt sich

$$CD = CE + ED = \frac{2}{3}a\sqrt{2} + \frac{5}{6}a\sqrt{2} = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$$

Aufgabe 121031:
Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $|CD| = h$ und die Basislänge $|AB| = g$ genannt.
Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, dass EF auf AB, G auf BC und H auf AC liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie $9 : 4$ verhalten.

Lösung von Steffen Polster:



Nach dem Strahlensatz gilt für die Grundseite g, die Höhe h und die Länge x der Quadratseiten

$$\frac{h-x}{x} = \frac{h}{g} \Rightarrow g = \frac{hx}{h-x} \tag{1}$$

Anderseits soll für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und der Flächeninhalt des Quadrats gelten:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{\frac{1}{2}gh}{x^2} = \frac{9}{4} \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt

$$18x^2 - 18hx + 4h^2 \Rightarrow x_1 = \frac{h}{3}; \quad x_2 = \frac{2h}{3}$$

Für die Lösungen wird (2) dann zu x_1: $g = \frac{h}{2}$ und x_2: $g = 2h$.
Für das Verhältnis $g : h = 1 : 2$ (spitzwinkliges Dreieck) bzw. $g : h = 2 : 1$ (stumpfwinkliges Dreieck) wird das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ gleich $9 : 4$.

Aufgabe 121036:
Beweisen Sie den folgenden Satz! Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem „Goldenen Schnitt“ geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem „Goldenen Schnitt“ in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

Lösung von cyrix:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und $\angle ACB = 36°$. Dann sind die beiden Basiswinkel $\angle BAC = \angle CBA$ jeweils $\frac{1}{2} \cdot (180° - 36°) = 72°$ groß. Da dem größeren Winkel in einem Dreieck die größere Seite gegenüberliegt, ist also auch $|AC| > |AB|$.

Sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei A durch BC.
Da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten schneidet, gilt $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ und insbesondere $|CW| > |WB|$.

Es ist $\angle BAW = \frac{1}{2}\angle BAC = 36°$, sodass das Dreieck $\triangle BAW$ ähnlich ist zum Dreieck $\triangle ABC$ und damit $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|WB|}$, also $|AB| = |CW|$ gilt. Damit ist die Basis AB genauso lang wie der größere Abschnitt der durch W geteilten Strecke AC.
Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Punkt W den Schenkel AC tatsächlich im Goldenen Schnitt teilt:

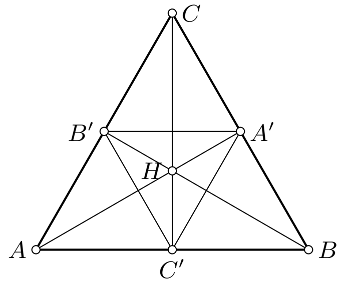
Setzt man diese Gleichheit sowie $|AC| = |BC| = |CW| + |WB|$ in das zuvor erhaltene Verhältnis ein, so ergibt sich $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|CW|+|WB|}{|CW|}$, sodass W die Strecke AC im Goldenen Schnitt teilt, $\square$.

Aufgabe 151034:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'} = \frac{CH}{HC'}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Aus den Bedingungen folgt durch Umkehrung des Strahlensatzes, dass $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Beispielsweise folgt aus der Gleichheit $\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'}$ durch Umstellen $\frac{|HA|}{|HB|} = \frac{|HA'|}{|HB'|}$, sodass nach Umkehrung des Strahlensatzes mit dem Zentrum H die Parallelität von AB und $A'B'$ folgt.
Das $\triangle A'B'C'$ ist somit Mittendreieck von $\triangle ABC$, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 181032:
Beweisen Sie:
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d. h., es gelte $AB = AC = BC$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss: $\triangle AMC \cong \triangle BMC$.
Also gilt $\angle ACM = \angle BMC$, d. h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende. Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.

B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB, und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$AM = MB \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle ACM = \angle MCB \quad (2)$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C', und hierfür ist $AC'BC$ ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M.

Somit sind $\angle MCB$ und $angleAC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt $\angle ACM = \angle AC'M$.
Also ist das Dreieck $AC'C$ gleichschenklig mit $AC = AC'$. Hieraus und aus $AC' = CB$ folgt $AC = BC$. (3)

Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $AB = CB$. (4)
Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Jede Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. Sie ist also genau dann auch eine Seitenhalbierende, wenn die beiden anliegenden Seiten gleich lang sind.
Sind also zwei Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende, dann sind alle drei Dreiecksseiten gleich lang, mithin das Dreieck gleichseitig. Und umgekehrt sind in einem gleichseitigen Dreieck alle Seiten gleich lang, also alle drei (und damit auch mindestens zwei) Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende.

Aufgabe 211032:
Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)!
Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AG}{BG} = 1$$

Lösung von cyrix:
Es seien a, b und c die Längen der Lote von A, B und C auf g. Da diese Lote alle senkrecht zu g und damit untereinander parallel sind, können wir die Strahlensätze anwenden und erhalten

(von E aus gesehen) $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{b}{c}$,

(von F aus gesehen) $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{c}{a}$ und

(von G aus gesehen) $\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{a}{b}$, also

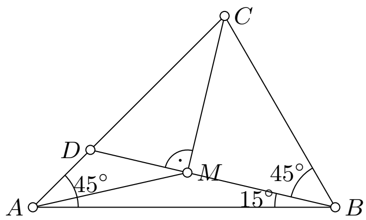
$$\frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} \cdot \frac{|AG|}{|BG|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \ , \Box.$$

Aufgabe 231032:
Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, dass

$$\angle BAC = \angle CBD = 45° \quad \text{und} \quad \angle ABD = \frac{1}{3}\angle BAC$$

gilt. Beweisen Sie, dass dann $AD = \frac{1}{3}AC$ gilt!

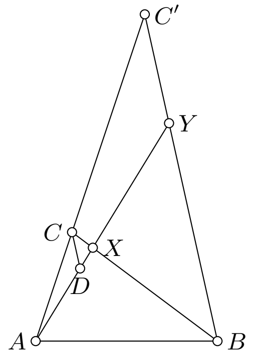
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $\angle ABD = 15°$. Nach dem Innenwinkelsatz folgt $\angle ACB = 75°$, $\angle ADB = 120°$ und daher als Nebenwinkel $\angle BDC = 60°$.



Es sei CM das Lot von C auf BD. Dann ist nach dem Innenwinkelsatz $\angle DCM = 30°$, $\angle BCM = 45°$, und daher ist $\triangle BDM$ gleichschenklig mit $MB = MC \quad (1)$.
In dem Dreieck DCM, das durch sein Spiegelbild an CM zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe (zugleich Seitenhalbierende) CM ergänzt wird, gilt $DC = 2MD \quad (2)$.
Der Kreis um M durch B, der wegen (1) auch durch C geht, geht nach der Umkehrung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes auch durch A. Also ist auch $\triangle ACM$ gleichschenklig mit $\angle CAM = \angle ACM = 30°$.
Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle AMD = 30°$; daher ist $\triangle AMD$ gleichschenklig mit $AD = AM \quad (3)$.
Aus (2) und (3) folgt $DC = 2AD$ und damit die Behauptung $AD = \frac{1}{3}AC$.

Aufgabe 241035:
a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $AC' = 3 \cdot AC$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $BY = 2 \cdot C'Y$ gilt!
Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.
b) Beweisen Sie, dass die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $BX : CX$ führt! Ermitteln Sie diesen Wert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



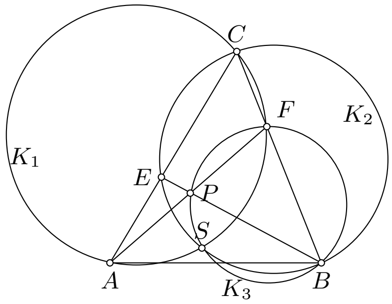
b) Für jedes Dreieck ABC und die hierzu nach a) konstruierten Punkte C', Y und X gilt:
Ist D der Schnittpunkt von AY mit der Parallelen durch C zu BC', so folgt aus dem Strahlensatz $CD = \frac{1}{3}C'Y = \frac{1}{6}BC$ und daher

$$BX : CX = BY : CD = 6$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt und der gesuchte Wert von $BX : CX$ ermittelt.

Aufgabe 251035:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Umkreise K_1 und K_2 der Dreiecke AFC bzw. EBC haben den Punkt C gemeinsam, während z. B. der auf K_2 gelegene Punkt E im Innern von K_1 und der auf K_1 gelegene Punkt F im Innern von K_2 liegt.
Folglich haben K_1 und K_2 außer C genau einen weiteren Punkt S gemeinsam. Für ihn gilt:

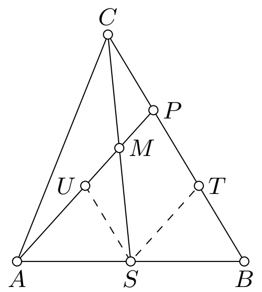


- $\angle PFS = \angle AFS$ (da P zwischen A und F liegt)
- $= \angle ACS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da F und C auf K_1 über dem Bogen $\widehat{AS}$ liegen)
- $= \angle ECS$ (da E zwischen A und C liegt)
- $= \angle EBS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da C und B auf K_2 über dem Bogen $\widehat{ES}$ liegen)
- $= PBS$ (da P zwischen E und B liegt).

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen somit P, F, S und B auf einem Kreis K_3, d. h., der Umkreis des Dreiecks PFB geht auch durch S.
Durch C geht er nicht, da er mit der Geraden durch B und C bereits die beiden von C verschiedenen Punkte B und F gemeinsam hat.
Also haben die Umkreise der Dreiecke AFC, EBC und PFB genau den Punkt S gemeinsam. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 271035:
Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $BP : PC$ und $AM : MP$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Parallele durch S zu AP bzw. zu BC schneide BC bzw. AP in T bzw. U (siehe Abbildung).
Nach dem Strahlensatz ist dann

$$BT : TP = BS : SA = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad BT = TP$$

$$TP : PC = SM : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad TP = PC$$

Daher gilt $BT = TP = PC$, also $BP : PC = 2 : 1$. Ferner ist nach dem Strahlensatz

$$AU : UP = AS : SB = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad AU = UP$$

$$MU : MP = MS : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad MU = MP$$

Daher gilt $MP = \frac{1}{2}UP = \frac{1}{4}AP$, also

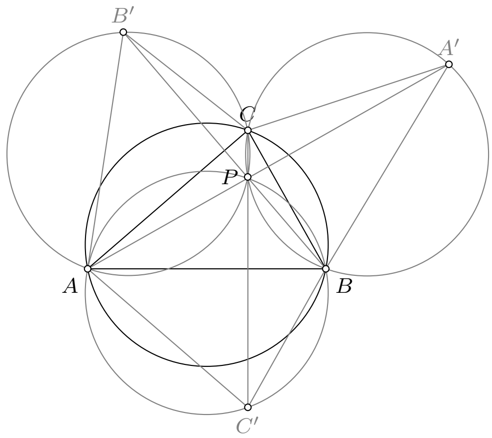
$$AM : MP = 3 : 1$$

Alternativ-Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten:
Nach dem Satz von Menelaus gilt $\frac{AB}{SB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{MS} = 1$ und somit $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{1}$.

Außerdem gilt ebenso nach Menelaus $\frac{BC}{PC} \cdot \frac{PM}{MA} \cdot \frac{AS}{SB} = 1$ und somit $\frac{AM}{MP} = \frac{3}{1}$.

Aufgabe 321036:
Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch die Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

Lösung von ochen:



Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis k. Wir spiegeln jeden der drei Eckpunkte A, B und C an ihrer gegenüberliegenden Dreieckseite, also A an BC, B an AC und C an AB. Die Bildpunkte nennen wir A', B' und C'.

Nun bilden wir die Umkreise der Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' und bezeichnen diese mit k_1, k_2 und k_3. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in zwei Punkten, der eine dieser Punkte ist C und der anderen Punkt heiße P.

Wir zeigen, dass P auch auf dem Umkreis k_3 liegt. Da $A'CPB$ ein Sehnenviereck ist, gilt

$$\angle BPC + \angle BAC = \angle BPC + \angle CA'B = 180°$$

Analog ist auch $B'APC$ ein Sehnenviereck ist, somit folgt

$$\angle CPA + \angle CBA = \angle CPA + \angle AB'C = 180°$$

Nun ist aber auch $C'BPA$ ein Sehnenviereck, da mit der Innenwinkelsumme im Dreieck

$$\angle APB + \angle BC'A = 180° + 180° - (\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB) = 180°$$

folgt. Da $C'BPA$ ein Sehnenviereck ist, liegt P auch auf k_3.

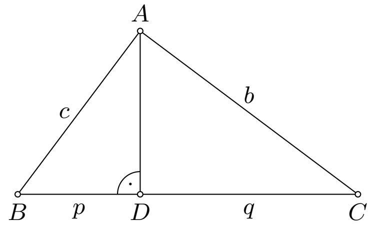
Wenn wir k_1 an der Seite BC spiegeln, erhalten wir den Kreis k, da A' auf A, B auf B und C auf C abgebildet werden. Weiter wird bei dieser Spiegelung auch P auf einen Punkt P_1 auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_1 liegt.

Analog können wir k_2 an der Seite AC und k_3 an der Seite AB spiegeln, dann erhalten wir den Kreis k, da bei der Spiegelung an AC die Punkte A auf A, B' auf B und C auf C abgebildet werden und bei der Spiegelung an AB die Punkte A auf A, B auf B und C auf C' abgebildet werden. Weiter wird bei diesen Spiegelung auch P auf einen Punkt auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_2 und auf k_3 liegt.

IV Runde 4

Aufgabe 011044:
Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie BC teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Der Höhenfußpunkt von A auf BC sei D.
Mit den Bezeichnungen $h = AD, q = BD$ und $p = CD$ sowie den üblichen Abkürzungen $b = CA, c = AB$ und $a = BC = p + q$ folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADB$:

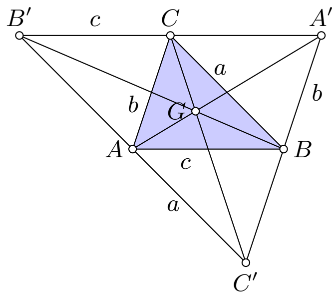
$$b^2 + c^2 = (h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) = 2h^2 + (p^2 + q^2)$$

$$b^2 + c^2 + 2pq = 2h^2 + (p^2 + 2pq + q^2) = 2h^2 + (p + q)^2 = 2h^2 + a^2$$

Nach Voraussetzung gilt $h^2 = pq$, so dass aus obiger Gleichung nach Subtraktion $b^2 + c^2 = a^2$ folgt. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist damit bewiesen, dass das Dreieck bei A rechtwinklig ist.

Aufgabe 021045:
Beweisen Sie, dass die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

Lösung von Eckard Specht:

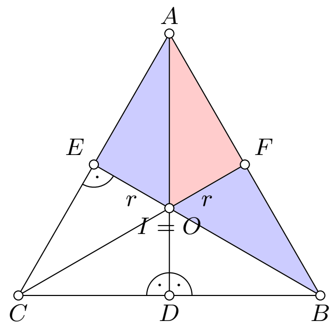


Beweis: Der Schwerpunkt des Dreiecks, in dem sich bekanntlich die Seitenhalbierenden schneiden, sei G; die Seitenlängen seien wie üblich a, b und c. Wir ergänzen nun das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABA'C$.
Dieses hat die Diagonalenlängen $BC = a$ und $AA' = 2m_a$, letzteres, weil sich in Parallelogrammen die Diagonalen stets halbieren. Jetzt können wir die Dreiecksungleichung auf das Dreieck ABA' anwenden: $b + c > 2m_a$.

Analoge Ungleichungen erhalten wir, wenn wir die Parallelogramme $BCB'A$ und $CAC'B$ betrachten: $c + a > 2m_b$ bzw. $a + b > 2m_c$. Eine Addition dieser drei Ungleichungen liefert die Behauptung $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

Aufgabe 031046:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote vom Inkreismittelpunkt I des Dreiecks auf den Seiten BC, CA bzw. AB.
Vom Inkreismittelpunkt darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Abstände $ID = IE = IF = r$ untereinander gleich sind und dem Inkreisradius r entsprechen. Dann folgt aus dem Kongruenzsatz SSW, dass z. B. die beiden rechtwinkligen Dreiecke AIE und AIF kongruent sind.

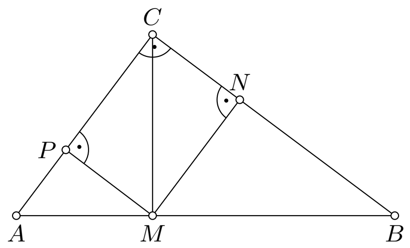


Fällt nun nach Voraussetzung der Umkreismittelpunkt O mit I zusammen, gilt auch $IA = IB = R$, da O gleiche Abstände (d.i. der Umkreisradius R) zu den Eckpunkten des Dreiecks hat. Somit sind nach SSW auch die Dreiecke AIF und BIF kongruent.
Diese Argumentation lässt sich fortführen, bis wir wieder beim Dreieck AIE ankommen und feststellen, dass alle sechs Teildreiecke kongruent sind, und das Dreieck mithin gleichseitig ist.

Aufgabe 041044:
Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle ACB = R$ und ein beliebiger Punkt M auf der Hypotenuse AB. Beweisen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Fall I: $M = A$
Die Relation reduziert sich auf $BA^2 \cdot AC^2 = CA^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall II: $M = B$
Die Relation reduziert sich auf $AB^2 \cdot BC^2 = CB^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall III: $M \neq A$, $M \neq B$

Der Schnittpunkt von BC und der Senkrechten auf BC durch M sei N. Der Schnittpunkt von AC und der Senkrechten auf AC durch M sei P. Nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz gelten:

$$AM^2 = AP^2 + MP^2 \qquad \text{und} \qquad BM^2 = MN^2 + BN^2 \qquad \text{sowie} \tag{1}$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}; \quad AP = \frac{MP \cdot AC}{BC} \qquad \text{und} \qquad \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}; \quad BN = \frac{MN \cdot BC}{AC} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$AM^2 \cdot BC^2 = MP^2 \cdot AC^2 + MP^2 + BC^2 \qquad \text{und} \qquad BM^2 \cdot AC^2 = MN^2 \cdot AC^2 + MN^2 + BC^2 \tag{3}$$

Durch Addition der Gleichungen (3) ergibt sich:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = (MP^2 + MN^2)(AC^2 + BC^2)$$

Unter Berücksichtigung von $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $MP^2 + MN^2 = PN^2$ und $PN = CM$ ($PMNC$ ist ein Rechteck) erhält man die Relation.

Aufgabe 061043:
In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle PQR$ so, dass P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

Anita glaubt, dass die Aufgabe nicht für jedes Dreieck $\triangle ABC$ lösbar ist.
Berthold ist der Meinung, dass es für jedes Dreieck $\triangle ABC$ genau eine Lösung gibt.
Claus nimmt an, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke $\triangle PQR$, die Lösung sind, sind einander kongruent.
Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck $\triangle ABC$ mit der Eigenschaft, dass nicht alle Dreiecke $\triangle PQR$, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

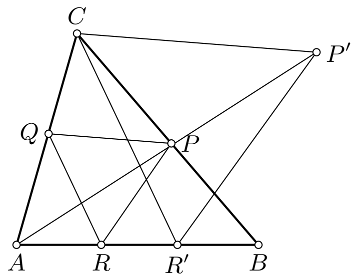
Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir zeigen, dass die Meinung und Behauptung von Dagmar richtig und daher die zu ihnen in Widerspruch stehenden Meinungen der drei anderen falsch sind.
Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass im gegebenen Dreieck (Bild)

$$|\angle BCA| \leq |\angle ABC| \leq |\angle CAB|$$

insbesondere also gilt

$$|\angle BCA| \leq 60° \qquad \text{und} \qquad |\angle CAB| \geq 60°$$



Unter diesen Bedingungen sei R' ein beliebiger (innerer) Punkt von AB. P' sei derjenige Punkt, für den $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist und der auf der anderen Seite von $g_{CR'}$ wie A liegt. Dann liegt P' auf der anderen Seite von g_{BC} wie A, weil $|\angle BCA| \leq 60°$ und $|\angle P'CA| = |\angle P'CR'| + |\angle R'CA| > 60°$ gilt.

Außerdem ist $|\angle P'CA| \leq 120°$ und $|\angle P'R'A| \leq 60° + |\angle CR'A| < 180°$, so dass $AR'P'C$ ein konvexes Viereck ist und insbesondere R' und C auf verschiedenen Seiten von $g_{AP'}$ liegen.
Da R' Punkt von AB ist, liegt B auf derselben Seite von $g_{AP'}$ wie R', so dass die Strecken BC und AP' einen Schnittpunkt haben, der mit P bezeichnet werde. Ist nun Q derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch C, für den

$$AQ : AC = AP : AP' \tag{1}$$

gilt, und R derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch B, für den

$$AR : AB = AP : AP' \tag{2}$$

gilt, so ist, da wegen $P \in AP'$ sicher $AP : AP' < 1$ ausfällt, Q innerer Punkt von AC und R innerer Punkt von AB.
Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt aufgrund von (1)

$$g_{PQ} \parallel g_{P'C} \quad \text{und aufgrund von (2)} \quad g_{PR} \parallel g_{P'R'}$$

Daher folgt aus dem 2. Strahlensatz, dass die drei Beziehungen

$$PQ : P'C = AP : AP' \qquad ; \qquad PR : P'R' = AP : AP'$$
$$\angle QPR = \angle CP'R'$$

bestehen. Da $\triangle P'C'R'$ gleichseitig ist, folgt somit

$$PQ = PR \qquad \text{und} \qquad \angle QPR = 60°$$

so dass $\triangle PQR$ gleichseitig ist.

Hieraus ergibt sich weiter, dass $QR \parallel CR'$ ist, so dass keine zwei der gleichseitigen Dreiecke, die zu verschiedenen Lagen von R' auf AB gehören, zusammenfallen können. Es gibt also zu jedem Dreieck ABC unendlich viele verschiedene gleichseitige Dreiecke, die der im Zirkel gestellten Aufgabe entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es bei mindestens einem Dreieck ABC unter diesen gleichseitigen Dreiecken mindestens zwei zueinander inkongruente gibt. Dazu wählen wir $\triangle ABC$ gleichseitig. Sind P_1, Q_1, R_1 die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB, so ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig and es gilt

$$P_1Q_1 = \frac{1}{2}AB$$

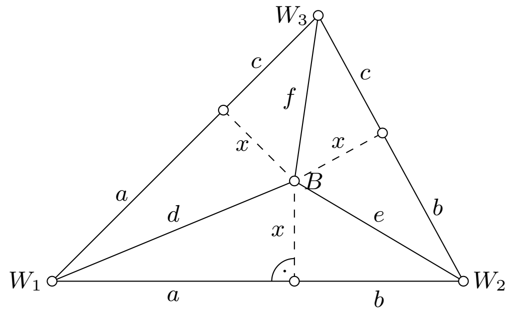
Sind P_2, Q_2, R_2 die Mittelpunkte von P_1C, Q_1A bzw. R_1B, so ist auch $\triangle P_2Q_2R_2$ gleichseitig und es gilt nach dem Kosinussatz

$$P_2Q_2 = \sqrt{BP_2^2 + BQ_2^2 - 2 \cdot BP_2 \cdot BQ_2 \cdot \cos 60°} = AB\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$$
$$= AB\frac{\sqrt{7}}{4} > P_1Q_1$$

so dass $\triangle P_1Q_1R_1$ und $\triangle P_2Q_2R_2$ infolge unterschiedlicher Seitenlängen inkongruente gleichseitige Dreiecke sind.

Aufgabe 071045:
Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1,W_2,W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände.
W_1,W_2,W_3 liegen nicht auf derselben Geraden.
Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken W_1W_2, W_2W_3 und W_3W_1) verbunden. Für die Strecken gilt: $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.
Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand.
Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden.
Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.
Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, ist dessen Winkelhalbierende. Infolgedessen ist B der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle W_1W_2W_3$ (somit der Inkreismittelpunkt).
Der Radius des Inkreises sei x, die in der Abbildung eingezeichneten Berührungsradien bestimmen Abschnitte auf den Dreiecksseiten, die wegen der Kongruenz der Teildreiecke (zwei Seiten und zwei Winkel stimmen überein) paarweise die gleiche Länge haben.
Die in der Aufgabenstellung gegebene Relation zwischen den Seitenlängen des $\triangle W_1W_2W_3$ bedeutet

$$a+b>a+c>b+c \qquad \text{also} \qquad a>b>c$$

Jede zulässige Fahrtroute führt von B zu einer Werkhalle und hat dort zwei mögliche Fortsetzungen. Das ergibt insgesamt sechs Routen. Drei von ihnen unterscheiden sich nur in der Orientierung von der anderen drei:

I: $B-W_1-W_2-W_3-B$ (gleiche Länge: $B-W_3-W_2-W_1-B$)
II: $B-W_2-W_1-W_3-B$ (gleiche Länge: $B-W_3-W_1-W_2-B$)
III: $B-W_1-W_3-W_2-B$ (gleiche Länge: $B-W_2-W_3-W_1-B$)

Die entsprechenden Längen sind:

$$\begin{aligned} I :& d+a+b+b+c+f \\ II :& e+b+a+a+c+f \\ III :& d+a+c+c+b+e \end{aligned}$$

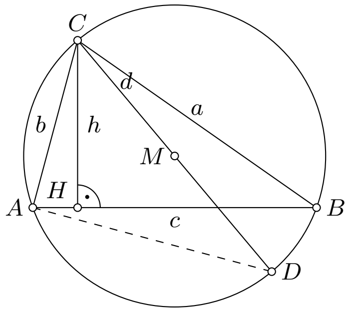
Nun werden die Längen der Routen I und II verglichen. Das ist gleichbedeutend mit dem Vergleich:

I	II
$b+d$	$a+e$
$b+\sqrt{a^2+x^2}$	$a+\sqrt{b^2+x^2}$
$b^2+2b\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2$	$a^2+2a\sqrt{b^2+x^2}+b^2+c^2$
$b\sqrt{a^2+x^2}$	$a\sqrt{b^2+x^2}$
$b^2a^2+b^2x^2$	$a^2b^2+a^2x^2$
b^2x^2	a^2x^2
b^2	a^2
b	a

Da auf beiden Seiten nur positive Werte vorkommen, bedeuten Quadrieren und Wurzelziehen äquivalente Umformungen des Vergleichs. Es kann also aus $b<a$ geschlossen werden, dass der Weg I kürzer ist als der Weg II.
Analog zeigt man, dass III kürzer als I ist. Somit sind die beiden Varianten von III die gesuchten Routen.

Aufgabe 081041:
a) Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck folgender Satz gilt!
Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.
b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F=\frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ schneide diesen im Punkt D.
Es gelte $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CH = h$, $CD = d$. Da die zu beweisende Aussage sich nicht ändert, wenn man A mit B vertauscht, so kann (eventuell durch eine solche Vertauschung) $\angle ABC < 90°$ erreicht werden.

Dann ist $D \neq A$; ferner $H \neq B$, und zwar liegen A und H auf demselben von B ausgehenden Strahl.
Nach dem Satz über die Peripheriewinkel über demselben Bogen (AC) folgt daher $\angle HBC = \angle ADC$.

Ferner ist nach der Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales $\angle BHC = \angle DAC = 90°$. Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BHC \sim \triangle DAC$ und damit $a : h = d : b$, also $ab = hd$.

b) Nach a) gilt $h = \frac{a \cdot b}{d}$. Nun ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2} c \cdot h$. Somit erhält man

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2d}$$

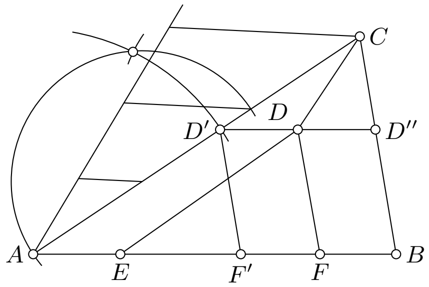
Aufgabe 101046:
Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden: Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt.
Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.
Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter der Annahme, dass in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:

(1) Dreieck EFD ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$AD' : AC = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz $2FB = F'B'$, also $FB = F'F$.



Konstruktion:
Man teilt AC im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}AC$. Die zweite Kathete sit dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}AC$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'.

Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist d, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:

Wegen $AD' = \frac{1}{3}\sqrt{3}AC$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu.
Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD.

Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss.

Aufgabe 171044:
Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehenden Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei s' die Gerade, die auf s in C senkrecht steht und t' die Gerade, die auf t in C senkrecht steht. s' zerlegt die Ebene ε, die von s und t aufgespannt wird, in die Halbebene $\varepsilon_s(1)$ und $\varepsilon_s(2)$, wobei $\varepsilon_s(1)$ die Halbebene ist, in der sich s befindet. Analog erhalten wir $\varepsilon_t(1)$ und $\varepsilon_t(2)$, wobei in $\varepsilon_t(1)$ t liege.

Behauptung: $L = \varepsilon_s(1) \cap \varepsilon_t(1)$ ist die gesuchte Menge.

Beweis: Ist P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A \in s$ und $B \in t$, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich in L schneiden, da die Mittelsenkrechten in $\varepsilon_s(1)$ bzw. $\varepsilon_t(1)$ liegen.
Liegt P in L, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf die Geraden, die s und t enthalten, auf s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Wir verlängern die Strecken CQ und CR um ihre eigene Länge über Q bzw. R hinaus. Wir erhalten die Punkte A und B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck bilden. Nach Konstruktion gilt $PA = PB = PC$, da PQ und PR auf den Mittelsenkrechten von CA bzw. CB liegen. Damit gehört P der gesuchten Menge an.

Aufgabe 191044:
Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$.
Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r, die die Eigenschaft haben, dass ein Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung besteht aus zwei Teilen. Erstens ist r durch a, b und F auszudrücken, und zweitens ist die Existenz eines Dreiecks mit a, b, r und F nachzuweisen.

I. Angenommen, es existiert ein Dreieck ABC mit $a = BC, b = AC$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r. Nun gilt mit $c = AB$ und $\gamma = \angle ACB$: $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$ (siehe Bezirksolympiade Aufgabe 191034),

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad ; \qquad \cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma} \qquad (1)$$

und nach dem Kosinussatz $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ (2). Damit ergibt sich

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4F} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2}} \qquad (3)$$

II. Wegen $0 < F \leq \frac{1}{2}ab$ ist $a^2b^2 > a^2b^2-4F^2 \geq 0$ und

$$a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2} \geq a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4F^2} > a^2+b^2-2ab \geq 0$$

d. h., jeder der in (3) angegebenen r-Werte existiert. Da $0 \leq \frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} < 1$ gilt, existiert ein γ mit $0 < \gamma < \pi$ und

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} \qquad (4)$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen entsprechend (3) gewählt wird. Hierzu gibt es ein Dreieck ABC, in dem (2) mit $c = AB$ gilt. Wegen $\sin\gamma > 0$ und (4) folgt

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{a^2b^2-4F^2}{ab}} = 2\frac{F}{ab}$$

also ist $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Aus (3), (4) und (2) folgt

$$r = \frac{abc}{4F}$$

d. h., r (mit dem entsprechenden Vorzeichen) ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Damit haben genau die durch (3) angegebenen Längen r die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 221044:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Also sei $A(0{,}0)$, $B(a{,}0)$, $C\left(\frac{a}{2}{,}b\right)$ und $D\left(\frac{a}{2}{,}0\right)$ mit $a{,}b \in \mathbb{R}^+$.
Die Gerade durch C und B hat die Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{-2b}{a}x + 2b$. Die Lotgerade durch D berechnet sich zu $f_2(x) = \frac{a}{2b}x - \frac{a^2}{4b}$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir dann den Schnittpunkt

$$D'\left(\frac{8ab^2+a^3}{2a^2+8b^2}, \frac{a^2b}{a^2+4b^2}\right)$$

Die Steigung der proportionalen Funktion durch A und D' lässt sich leicht berechnen zu

$$m_3 = \frac{2a^3b+8ab^3}{a^4+12a^2b^2+32b^4}$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$ berechnet sich zu $H\left(\frac{6ab^2+a^3}{2a^2+8b^3}, \frac{a^2b}{2a^2+8b^2}\right)$. Die Steigung der Geraden durch C und H ermittelt sich nach etwas Algebra dann zu

$$m_4 = -\frac{a^4+12a^2b^2+32b^4}{2a^3b+8ab^3}$$

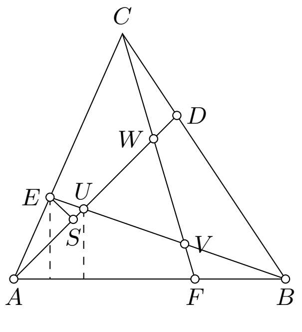
womit die Behauptung folgt.

Alternativ-Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir zeichnen zunächst eine Parallele zu $\overline{DD'}$ durch A, der Schnittpunkt mit $\overline{BC}$ sei E. Nun ist nach Winkelsummensatz im Dreieck DBD' $\angle 2 = 90° - \angle 1$.
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung gleichschenklig ist und D Mittelpunkt der Seite c ist, ist $\overline{DC}$ die Höhe auf der Seite c. Es gilt somit $\angle D'DC = 90° - \angle 2 = \angle 1$.
Da $\angle DD'C = 90°$ nach Voraussetzung ist, folgt somit die Ähnlichkeit der Dreiecke $DD'C$ und ABE. Nach Strahlensatz ist D' Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$. Die Strecke $\overline{AD'}$ ist somit Seitenhalbierende im Dreieck ABE. Nun war H laut Voraussetzung Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$, also ist die Strecke $\overline{CH}$ entsprechende Seitenhalbierende im Dreieck $DD'C$.

Nun können wir das Dreieck ABE wie folgt auf das Dreieck $DD'C$ abbilden: Wir drehen zunächst das Dreieck um B um 90° und erhalten danach das Dreieck BIG.
Anschließend verschieben wir noch B auf D und Strecken anschließend das Dreieck. Da Verschiebung und Achsenstreckung winkeltreue Abbildungen sind, ändern sich die Winkel entsprechender Strecken nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 241042:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $BD = 2 \cdot CD$, $CE = 2 \cdot AE$, $AF = 2 \cdot BF$ gilt.
Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $AE = \frac{1}{3}AC$. Da die Dreiecke ABE, ABC bezüglich der Grundlinie AE bzw. AC dieselbe Höhe haben, folgt [1]

$$J(ABE) = \frac{1}{3} \cdot J(ABC)$$

Der Schnittpunkt von AD mit der Parallelen durch E zu BC sei S. Dann folgt aus dem Strahlensatz $ES = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{6}BC$ und weiter

$$DE : DB = ES : SD = 1 : 6 \qquad \text{also} \qquad UE = \frac{1}{7}BE$$

Ferner ergibt der Strahlensatz für die Längen h_U, h_E der von U bzw. E auf die Gerade durch A und B gefällten Lote $h_U : h_E = BU : BE = 6 : 7$. Hiernach und nach (1) gilt

$$J(ABU) = \frac{6}{7} \cdot J(ABE) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

Analog folgt

$$J(BCV) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC) \qquad , \qquad J(CAW) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

[1] Ist XYZ ein Dreieck, so bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

und damit, wie behauptet

$$J(UVW) = J(ABC) - J(ABU) - J(BCV) - J(CAW) = \frac{1}{7} \cdot J(ABC)$$

Aufgabe 261041:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge.
Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

Lösung von cyrix:
Sei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann bildet die Drehung um U um den Drehwinkel $120°$ aufgrund der Gleichseitigkeit das Dreieck $\triangle ABC$ auf sich selbst ab, also auch Geraden durch zwei seiner Eckpunkte wieder auf eine solche Gerade.
Da auch Längen bei dieser Kongruenzabbildung erhalten bleiben, wird somit auch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ auf sich selbst abgebildet, sodass dies auch für dessen Umkreismittelpunkt U' gelten muss. Da aber U der einzige Fixpunkt bei dieser Drehung ist, folgt $U' = U$, $\square$.

Aufgabe 281045:
In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.
Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.
Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage.
Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein gleichseitiges Dreieck ABC erfülle die geforderten Bedingungen; seine Seitenlänge habe die Maßzahl a.
Das Lot von B auf g habe den Fußpunkt P und schneide k in Q, das Lot von A auf k habe den Fußpunkt R; die Punkte B und C seien auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R gelegen.
Für die Maßzahlen x, y von PA, RC folgt dann, dass QC die Maßzahl $x + y$ hat. Daher ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + 64 = a^2 \tag{1}$$
$$y^2 + 25 = a^2 \tag{2}$$
$$(x+y)^2 + 9 = a^2 \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

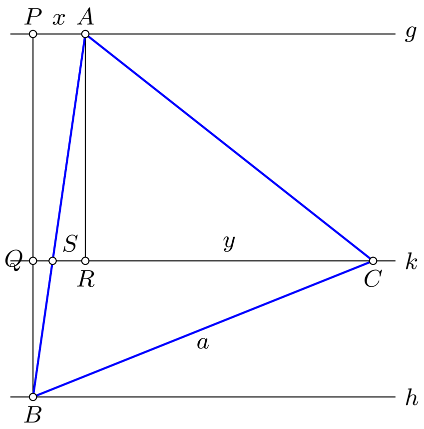
$$x^2 = a^2 - 64 \tag{4}$$
$$y^2 = a^2 - 25 \tag{5}$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 9 \tag{6}$$

und damit weiter

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2 \tag{7}$$
$$4(a^2 - 64)(a^2 - 25) = (80 - a^2)^2 \tag{8}$$
$$a^2(3a^2 - 196) = 0$$

Wegen $a > 0$ folgt somit, dass die Seitenlänge von ABC erhalten werden kann mit der Maßzahl

$$a = \frac{14}{\sqrt{3}} \tag{9}$$



II. Wird eine Seitenlänge nach der Angabe (9) erhalten, so folgt umgekehrt:
Wegen $196 > 3 \cdot 64$, also $\frac{14}{\sqrt{3}} > 8$ existieren x,y (> 0) mit (4), (5). Für diese gilt wegen (8) und $3 \cdot 80 > 196$, also $80 > \left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2$ auch (7), (6), also sind (1), (2), (3) erfüllt.

Wählt man daher B auf h, fällt das Lot BP von B auf g, legt A auf g mit x als Maßzahl von PA fest, fällt das Lot AR von A auf k und bestimmt dann C auf k mit y als Maßzahl von RC so, dass B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R liegen, so besagen (1), (2), (3) nach dem Satz des Pythagoras:
ABC ist mit der Maßzahl a der Längen $AB = AC = BC$ ein gleichseitiges Dreieck, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 291045:
Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Verbindungsstrecken der 3 Seitenmitten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a zerlegen es in vier kongruente Teildreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$.
Daher findet man bei jeder Verteilung von 5 Punkten nach dem Dirichletschen Schubfachschluss ein Teildreieck, in dem - einschließlich des Randes - mindestens zwei der 5 Punkte liegen.
Diese beiden haben einen Abstand, der nicht größer als die Seitenlänge, also nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. Folglich kann bei keiner Verteilung von 5 Punkten der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen größer als $\frac{a}{2}$ sein.

(II) Wir legen 2 der 5 Punkte in Eckpunkte und die restlichen 3 in die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks. Dann ist der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen gleich $\frac{a}{2}$.
Wegen (I) ist dies eine gesuchte Verteilung.

Aufgabe 311042:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B.
Ferner sei k_A der Kreis durch A, E, F; es sei k_B der Kreis durch B, F, D; und es sei k_C der Kreis durch C, D, E.
Man beweise, dass bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A, B, C, D, E, F, k_A, k_B, k_C gibt, die drei Kreise k_A, k_B, k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Lösung von Nuramon:
Lemma:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, $t \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um $90°$ um den Ursprung.
Dann existiert für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \alpha D(x) + t$ ein Punkt $s \in \mathbb{R}^2$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x - s) = \alpha D(x) - s$ gilt.
In anderen Worten: Jede Verknüpfung einer Drehstreckung um $90°$ um den Ursprung und einer Verschiebung lässt sich darstellen als eine Drehstreckung um $90°$ mit dem gleichen Streckfaktor um einen Punkt.

Beweis des Lemmas:
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Für das gesuchte $s \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

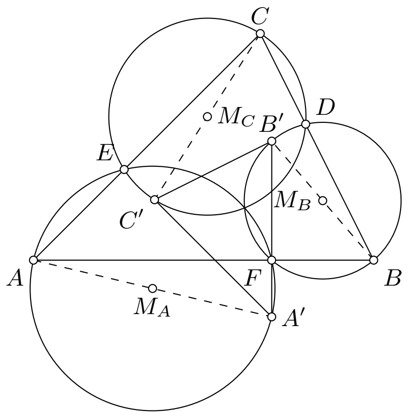
$$\alpha D(x) - s = f(x - s) = \alpha D(x - s) + t = \alpha D(x) - \alpha D(s) + t,$$

also $\alpha D(s) - s = t$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto \alpha D(v) - v$ surjektiv ist. Da g linear ist, genügt es sogar zu zeigen, dass g injektiv ist.
Angenommen $v \in \ker g$, also $g(v) = 0$, d. h. $\alpha D(v) = v$. Dann gilt

$$|v|^2 = \langle v, v\rangle = \alpha\langle v, D(v)\rangle = 0.$$

(Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil per Definition v orthogonal zu $D(v)$ ist.) Also muss $v = 0$ gelten, d. h. g injektiv sein. □

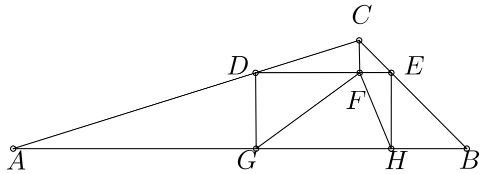
Beweis der Behauptung in der Aufgabe:
Die Mittelpunkte der Kreise k_A,k_B,k_C seien mit M_A,M_B,M_C bezeichnet. Es seien A',B' bzw. C' die den Punkten A,B bzw. C diametral in k_A, k_B bzw. k_C gegenüberliegenden Punkte.



Nach dem Satz von Thales, ist dann AF orthogonal zu $A'F$ und BF orthogonal zu $B'F$. Also liegen A' und B' beide auf dem Lot zu AB durch F. Analog liegen B' und C' auf dem Lot zu BC durch D, sowie C' und A' auf dem Lot zu AC durch E.
Da die erwähnten Lote untereinander jeweils die gleichen Winkel einschließen, wie die Seiten des Dreiecks ABC, folgt, dass das Dreieck $A'B'C'$ zu ABC ähnlich ist.
Nach obigem Lemma lässt sich diejenige affine Abbildung, die A,B,C auf A',B',C' abbildet, darstellen als eine Drehstreckung um 90° um einen Punkt S. Insbesondere steht also AS auf $A'S$ senkrecht. Nach dem Satz von Thales muss daher S auf dem Kreis k_A liegen. Analog lässt sich zeigen, dass S auch auf k_B und k_C liegt. □

Aufgabe 311045:
Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

Lösung von Kornkreis:
Im Folgenden sei mit Dreieck immer ein nichtentartetes Dreieck gemeint. Wir beweisen nun, dass jedes (nichtentartete) Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Dazu zeigen wir zunächst, dass jedes recht- oder stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.



Sei also ein recht- oder stumpfwinkliges Dreieck ABC gegeben und dessen größter Winkel sei (o. B. d. A.) bei C, siehe Skizze.

Die Höhe auf AB durch C liegt echt im Dreieck (da bei C der größte Winkel ist). Auf dieser Höhe wählen wir nun einen Punkt F ungleich C und nicht auf AB. Die Parallele bezüglich AB durch F schneide AC und BC in D bzw. E, beide Punkte sind jeweils von A,B verschieden. Die Fußpunkte von D und E auf AB seien G bzw. H, beide sind jeweils von A,B verschieden. Da F im Inneren von DE liegt, hat das Dreieck GFH einen nicht-spitzen Winkel höchstens bei F. Wenn F nahe genug an C liegt, ist dieser Winkel bei F allerdings immer spitz (da er gegen 0 geht, wenn F gegen C geht).

Alle Teildreiecke in ABC, außer dem Dreieck GFH, haben nun genau einen rechten Winkel. Man sieht leicht, dass man diese rechten Winkel verkleinert, wenn man F ein hinreichend kleines Stück nach unten zieht (d. h. den Abstand FC vergrößert), G ein hinreichend kleines Stück nach rechts und H nach links zieht (d. h. die Abstände AG und HB vergrößert). Die spitzen Winkel bleiben dabei spitz, wenn die Verschiebungen hinreichend klein sind. Des Weiteren bleibt das Dreieck GFH spitzwinklig.
Somit hat man ABC in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt.

Sei nun irgendein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Wähle die Ecke mit dem größten Winkel, o. B. d. A. sei dies C. Die Höhe durch C liegt dann vollständig im Dreieck und der Fußpunkt F auf AB ist von A,B verschieden. Verschiebe nun F ein hinreichend kleines Stück auf AB, dabei entstehen genau ein spitzwinkliges und genau ein stumpfwinkliges Dreieck als Zerlegung von ABC.
Nach Obigem lässt sich das stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegen. Damit haben wir ABC insgesamt in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt und die Aussage ist gezeigt.

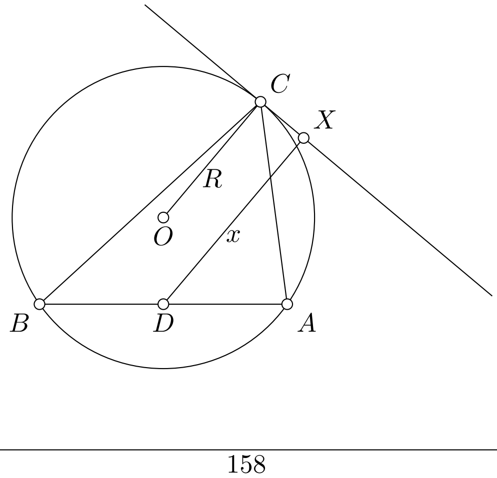
Aufgabe 321046:
Man beweise:
Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

Lösung von Nuramon:
Es seien x,y,z die Längen der erwähnten Lote. Für den Umkreisradius R des Dreiecks ABC gilt bekanntlich $R = \frac{abc}{4F}$. Die zu zeigende Behauptung ist daher äquivalent zu

$$x + y + z = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

Wir betrachten ein Koordinatensystem, bei dem der Umkreismittelpunkt O von ABC im Ursprung liegt. Auf diese Weise haben die Ortsvektoren A,B,C alle die Länge R. Es sei $D = \frac{1}{2}(A + B)$ der Mittelpunkt von AB. Schließlich sei X der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch C verlaufende Tangente an den Umkreis von ABC.



Die Strecken CO und XD sind parallel und haben die gleiche Orientierung. Daher gibt es ein $\lambda \geq 0$, so dass $X - D = \lambda C$, also $X = \lambda C + \frac{1}{2}(A+B)$ gilt.
Außerdem steht CX senkrecht auf CO. Somit gilt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X - C, C\rangle \\ &= \langle (\lambda-1)C + \frac{1}{2}(A+B), C\rangle \\ &= (\lambda-1)\langle C,C\rangle + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \\ &= (\lambda-1)R^2 + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = 1 - \frac{1}{2R^2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle)$. Somit folgt

$$x = |X - D| = \lambda R = R - \frac{1}{2R}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle).$$

Analog erhalten wir für die Längen der anderen beiden Lote

$$\begin{aligned} y &= R - \frac{1}{2R}(\langle B,A\rangle + \langle C,A\rangle), \\ z &= R - \frac{1}{2R}(\langle C,B\rangle + \langle A,B\rangle). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + y + z = 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2+c^2}{2R} &= \frac{1}{2R}(|A-B|^2 + |B-C|^2 + |C-A|^2) \\ &= \frac{1}{2R}(|A|^2 + |B|^2 - 2\langle A,B\rangle + |B|^2 + |C|^2 - 2\langle B,C\rangle + |C|^2 + |A|^2 - 2\langle C,A\rangle) \\ &= 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Aufgabe 331046:
An einem Dreieck ABC wurde festgestellt, dass es folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Der Innenwinkel $\angle BAC$ ist ein spitzer Winkel.
(2) Die Seite BC hat die Länge $a = BC = 6{,}5$ cm.
(3) Für die Seitenlängen $b = AC$ und $c = AB$ gilt $b - c = 4{,}5$ cm.
(4) Für die Längen h_b bzw. h_c der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen gilt: $h_c - h_b = 2{,}7$ cm.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Lösung von OlgaBarati:
$(b-c) = 45mm\;\; (i)$ und $h_c - h_b = 27mm\;\; (ii)$
Die beiden Höhen $h_c = b\sin\alpha$ und $h_b = c\sin\alpha$ führen mit (ii) und (i) zur Bestimmung von $\measuredangle BAC = \alpha : \alpha < 45°$:

$$h_c - h_b = 27mm$$

$$b\sin\alpha - c\cdot\sin\alpha = 27mm$$

$$(b-c)\sin\alpha = 27mm$$

$$45mm\sin\alpha = 27mm$$

$$\sin\alpha = \frac{27mm}{45mm} = \frac{3}{5},\;\; \alpha \approx 36.87°$$

Der Kosinussatz und (i) ergeben nach Umformung und mit $\cos(\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{4}{5}$ und $a = 65mm$:

$$(65mm)^2 = (c + 45mm)^2 + c^2 - 2(c + 45mm)c\frac{4}{5}$$

$$(65mm)^2 = c^2 + 90mm\ c + (45mm)^2 + c^2 - \frac{8}{5}c^2 - \frac{8}{5}45mm\ c$$

$$c^2 + 45mm\ c - 5500mm^2 = 0$$

$$c = -22{,}5mm \pm 77{,}5mm$$

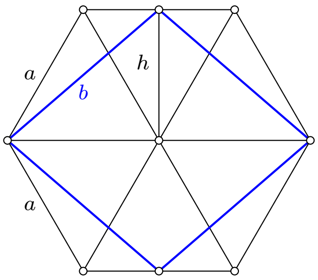
Es folgt hieraus nur eine positive Lösung mit $c = 55mm$ und es gibt somit nur ein Dreieck das mit den Seitenlängen, Angaben in Millimeter, $(a,b,c) = (65{,}100{,}55)$ existiert und die Bedingungen (1),(2),(3),(4) erfüllt.

II.II Vierecke; Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V01012:
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

Lösung von MontyPythagoras:



a) Es ist

$$b = \sqrt{a^2 + h^2}$$

wobei $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ist, und daher:

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

Der Umfang des Rhombus ist somit:

$$U_R = 4b = 2\sqrt{7}\,a$$

Die Fläche des Rhombus lautet:

$$A_R = 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 2ah = \sqrt{3}\,a^2$$

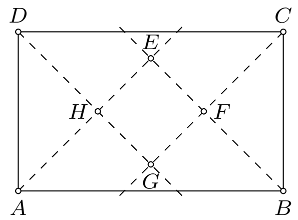
b) Die Fläche des Sechsecks lautet:

$$A_S = 6 \cdot \frac{1}{2}ah = 3ah$$

Die Fläche des Rhombus ist daher zwei Drittel des Flächeninhalts des Sechsecks, und daher gerundet 66,7%.

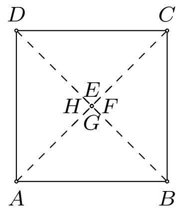
Aufgabe V11015:
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

Lösung von Steffen Polster:



a) Die vier Winkelhalbierenden bilden ein Quadrat $EFGH$.
F und H liegen aus Symmetriegründen auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks $ABCD$. Nach einem Strahlensatz gilt dann $EH : AE = EF : EB$. Da $AE = EB$ ist, gilt auch $EH = FH$. Analog folgt auch $FG = GH$, $EH = GH$ und $GF = EF$, d. h., alle vier Seiten von $EFGH$ sind gleich lang.
Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln von 45° (Winkelhalbierende). Das ist der Winkel bei E ein Rechter und $EFGH$ ist ein Quadrat.

b) Für ein Quadrat fallen die vier Punkte E, F, G und H zusammen, da auch die Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es entsteht keine Fläche.



Aufgabe 041013:
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.
a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Drachenviereck ist, wenn das Sehnenviereck ein Trapez ist! b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist. Dann sind die Tangenten an den Umkreis von $ABCD$ in benachbarten Eckpunkten nicht parallel zueinander und haben daher einen Schnittpunkt.
Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Tangenten in A und B mit E und entsprechend den der Tangenten in B und C mit F, in C und D mit G und den der in D und A mit H. E, F, G, H sind paarweise voneinander verschieden.

Aufgrund einer bekannten Eigenschaft von Tangentenabschnitten gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$|AE| = |BE|, \quad |BF| = |CF|, \quad |CG| = |DG|, \quad |DH| = |AH|$$

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt außerdem $|MA| = |MB| = |MC| = |MD|$.
Daher ist jedes der Vierecke $AEBM$, $BFCM$, $CGDM$, $DHAM$ ein Drachenviereck. Infolgedessen halbieren ihre Diagonalen ME, MF, MG bzw. MH die Winkel $\angle AEB$, $\angle BFC$, $\angle CBD$ bzw. $\angle DMA$ und stehen auf den Strecken AB, BC, CD bzw. DA senkrecht.

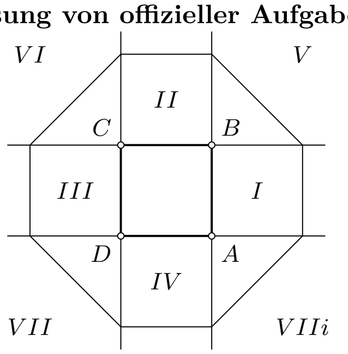
a) Ist nun $ABCD$ Trapez, so kann o. B. d. A. angenommen werden, dass $AB \perp CD$ ist. In diesem Fall ist auch die auf AB senkrechte Strecke ME parallel zu der auf CD senkrechten Strecke MG.
Folglich liegen ME und MG auf der Geraden g_{EG}, so dass die Diagonale EG von $EFGH$ die Winkel $\angle HEF$ und $\angle HGF$ halbiert. Daher ist nach dem Kongruenzsatz (sww) $\triangle EFG$ zu $\triangle EHG$ kongruent. Wegen $F \neq H$ liegen diese Dreiecke somit auf verschiedenen Seiten von g_{EG}, und zwar spiegelbildlich zu g_{EG}. Folglich ist $EFGH$ ein Drachenviereck.

b) Ja. Dazu ist zu zeigen: Ist $EFGH$ Drachenviereck, so ist $ABCD$ Trapez.

Beweis:
Wenn $EFGH$ Drachenviereck ist, so kann es o. B. d. A. zu g_{EG} symmetrisch angenommen werden, so dass g_{EG} jeden der beiden Winkel $\angle HEF$ und $\angle FGH$ halbiert. Wegen $\angle HEF = \angle AEB$ und $\angle HGF = \angle DGC$ (1) halbiert g_{EG} auch die beiden Winkel auf der rechten Seite von (1). Da g_{ME} den Winkel $\angle AEB$ und g_{MA} den Winkel $\angle DGC$ halbiert ist $g_{ME} = g_{EG} = g_{MG}$.
Außerdem steht g_{ME} auf AB und g_{MG} auf DC senkrecht. Daher steht sowohl AB als auch DC auf g_{EC} senkrecht, so dass $AB \perp CD$ gilt.

Aufgabe 051012:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Quadratseiten oder deren Verlängerungen gleich 4 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder, die im Bild mit I bis VIII bezeichnet sind, wobei die Punkte und Trennungsgeraden als zu allen ihren Feldern anliegenden Feldern zugehörig betrachtet werden.

Wir betrachten zunächst das Feld I. Die Abstände jedes Punktes P dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit e_{AB}, e_{BC}, e_{CD} bzw. e_{DA}. Dann gilt:

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA} = 4$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden g_{BC} und g_{DA} liegt, ist $e_{BC} + e_{DA} = 1$. Da die Geraden g_{AB} und g_{CD} parallel sind, und weil g_{CD} und P auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, ist $e_{CD} = e_{AB} + 1$. Daher folgt:

$$2e_{AB} + 1 + 1 = 4 \qquad ; \qquad e_{AB} = 1$$

Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf einer Parallelen zu g_{AB} im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Die Abstände jedes Punktes Q dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} bzw. f_{DA}. Dann gilt:

$$f_{AB} + f_{BC} + f_{CD} + f_{DA} = 4$$

Analog zum Fall $P \in I$ ist $f_{CD} = f_{AB} + 1$ und $f_{DA} = f_{BC} + 1$. Daraus folgt

$$2f_{AB} + 2f_{BC} + 2 = 4 \qquad ; \qquad f_{AB} + f_{BC} = 1$$

Q liegt daher auf der zu g_{AC} parallelen Diagonalen des aus $ABCD$ durch Spiegelung an D entstehenden Quadrates.
Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der schon gefundenen Strecken in den Feldern II und III, III und IV bzw. IV und I übereinstimmen.

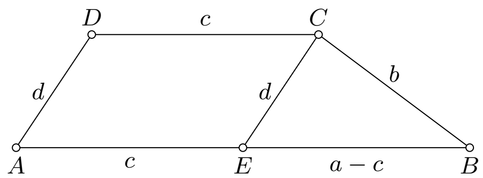
Im Innern des Quadrats (Feld IX) können keine derartigen Punkte liegen, da der Abstand jedes Punktes im Innern von jeder der Quadratseiten kleiner als die Seitenlänge ist, was dann auch für die entsprechenden Summen gilt.

Die gesuchte Punktmenge besteht also aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ liegen und von dessen Seiten jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel und kongruent ist.

Aufgabe 081013:
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

$\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).
$\triangle ABC$ ist konstruierbar aus $|CB|$, $\angle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).
$\triangle ACD$ ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).

b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
   - Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
   - Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
   - Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
   - Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig und hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

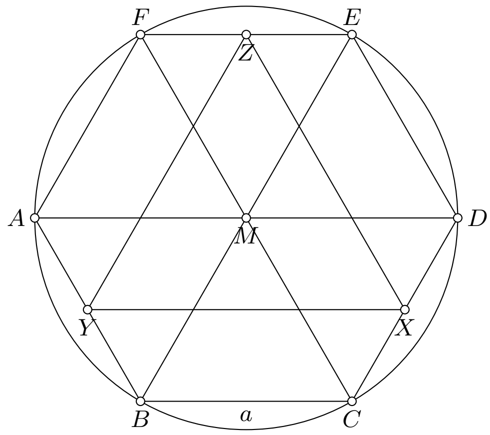
$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Aufgabe 091013:
In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF.

Berechnen Sie das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks sei M, seine Seitenlänge a. Dann zerlegen die Strecken MA, MB, ..., MF das Sechseck in 6 gleichseitige Teildreiecke mit der Seitenlänge a. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks sei I_T.

$$I_T = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \qquad \text{folgt} \qquad I_S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

Das Dreieck $\triangle XYZ$ ist gleichseitig, denn XY, YZ und XZ sind Mittellinien in den Trapezen $ABCD$, $CDEF$ und $ABEF$, diese Trapeze sind kongruent.

Dabei gilt $XY = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$ und somit

$$I_D = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

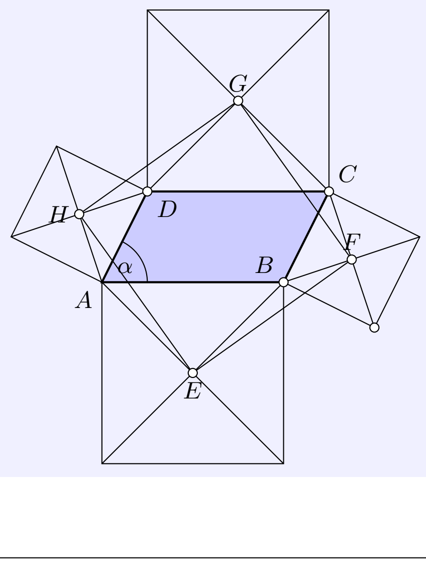
Daher ist

$$I_S : I_D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} : \frac{9}{16}a^2\sqrt{3} = 8 : 3$$

Aufgabe 101014:

Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

Man beweise, dass $EFGH$ ein Quadrat ist.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $|\angle DAB| = \alpha$, wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass $0° < \alpha \leq 90°$ gilt Dann ist

$$|\angle EAH| = |\angle GCF| = \alpha + 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{und}$$

$$|\angle EBF| = |\angle GDH| = 360° - (180° - \alpha) - 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{also}$$

$$|\angle EAH| = |\angle EBF| = |\angle GCF| = |\angle GDH| \tag{1}$$

Ferner ist (als halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten)

$$|AE| = |DG| = |BE| = |CG| \quad (2) \qquad \text{und} \qquad |AH| = |BF| = |CF| = |DH| \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$, also

$$|EH| = |EF| = |GF| = |GH| \tag{4}$$

und $|\angle AEH| = |\angle BEF|$, also $|\angle HEF| = |\angle WEB$, d. h. $|\angle HEF| = 90°$ (5). Wegen (4), (5) ist $EFGH$ ein Quadrat.

Bemerkung: Im Fall $\alpha = 90°$ entarten die Dreiecke $\triangle AEH$ usw., (4) und (5) bleiben aber trotzdem richtig.

Aufgabe 111012:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zu beweisende Satz ist äquivalent damit, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:

a) Jeder Rhombus ist sowohl ein Drachenviereck als auch ein Trapez.

b) Jedes Viereck, das sowohl Drachenviereck als auch ein Trapez ist, ist ein Rhombus.

Beweis zu a):

Ist $ABCD$ ein Rhombus, so gilt $|AB| = |BC|$ und $|CD| = |DA|$, also ist $ABCD$ auch ein Drachenviereck. Ferner gilt dann $AB \parallel CD$, und die Strecken BC und DA haben keinen Punkt gemeinsam, also ist $ABCD$ auf ein Trapez.

Beweis zu b):

Ist $ABCD$ ein Drachenviereck, so können seine aufeinanderfolgenden Ecken derart mit A, B, C, D bezeichnet werden, dass

$$|AB| = |BC| \qquad \text{und} \qquad |CD| = |DA| \tag{1}$$

gilt. Ist $ABCD$ zugleich ein Trapez, so kann die Bezeichnung außerdem noch so gewählt werden, dass $AB \parallel CD \quad (2)$ gilt.

Als Trapez ist $ABCD$ konvex. Daher wird es durch AC in zwei Dreiecke zerlegt. Dabei sind sowohl $\angle BAC$, $\angle DCA$ bezüglich AB, CD als auch $\angle DAC$, $\angle BCA$ bezüglich AD, BC Wechselwinkel. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ sind wegen (1) gleichschenklig. Daher gilt

$$\angle BAC \cong \angle BCA \qquad \text{und} \qquad \angle DAC \cong \angle DCA$$

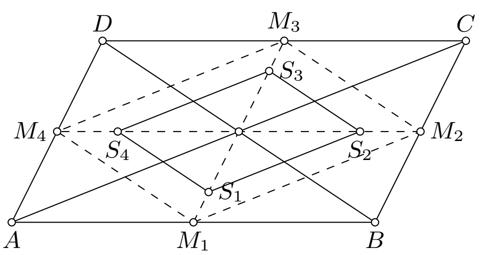
(als Basiswinkel). Ferner ist wegen (2) $\angle BAC \cong \angle DCA$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Folglich gilt auch $\angle DAC \cong \angle BCA$.

Da die Winkel Wechselwinkel sind, gilt mithin $AD \parallel BC$. Also sit $ABCD$ ein Parallelogramm und, da es außerdem ein Paar gleichlanger Nachbarseiten besitzt, sogar ein Rhombus.

Aufgabe 131012:
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.

Man beweise, dass dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien M_1,M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA. Da S_1, S_2, S_3, S_4 die Seitenhalbierenden MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 im Verhältnis 2:1 teilen, folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes

$$S_1S_2 \parallel M_1M_2 \parallel AC \parallel M_4M_3 \parallel S_4S_3$$

$$S_2S_3 \parallel M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4 \parallel S_1S_4$$

Also ist $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 141014:
In einem konvexen n-Eck $A_1A_2...A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120° haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ... , A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130°, ... betragen.

Man zeige, dass für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $A_1A_2...A_n$ sei ein konvexen n-Eck mit den verlangten Innenwinkelgrößen. Ihre Summe beträgt nach einer bekannten Formel $(n-2) \cdot 180°$.

Andererseits haben die Innenwinkel bei $A_1, A_2, ..., A_n$ der Reihe nach Größen, die mit 120° beginnen und immer um 5° größer sind als die vorhergehende. Dies sind folglich die Größen

$$120°, \quad 120° + 1 \cdot 5°, \quad ..., \quad 120° + (n-1) \cdot 5°$$

Ihre Summe ist

$$n \cdot 120^\circ + (1 + ... + (n-1)) \cdot 5^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^\circ$$

Somit folgt

$$(n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^\circ$$

also (unter Weglassung des Zeichens $\circ$)

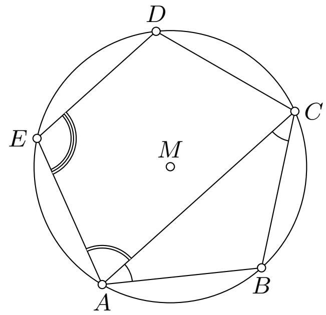
$$360n - 720 = 240n + 5n^2 - 5n \qquad , \qquad n^2 - 25n + 144 = 0$$

d. h. entweder $n = 9$ oder $n = 16$. Da das n-Eck $A_1A_2...A_n$ konvex ist, gilt $120^\circ + (n-1) \cdot 5^\circ < 180^\circ$, so dass $n = 16$ ausscheidet. Daher kann höchstens für $n = 9$ ein solches n-Eck existieren.

Aufgabe 171011:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Dann hat jeder seiner Innenwinkel die Größe $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Da man durch Drehung des Fünfecks um seinen Mittelpunkt um jeweils $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ jede seiner Diagonalen der Reihe nach mit jeder anderen zur Deckung bringen kann, genügt es, den Satz für eine beliebige dieser Diagonalen, z. B. für AC, zu beweisen.

Wegen $AB = BC$ und $\angle ABC = 108^\circ$ gilt $\angle BAC = \angle ACB = 36^\circ$ und folglich

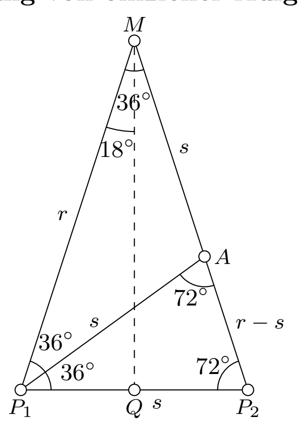
$$\angle CAE + \angle AED = (\angle BAE - \angle BAC) + \angle AED = (108^\circ - 36^\circ) + 108^\circ = 180^\circ$$

Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden folgt hieraus $AC \parallel ED$, w. z. b. w.

Aufgabe 221014:
Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2...P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks.

Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zwei benachbarte Eckpunkte P_1, P_2 des Zehnecks bilden mit dem Mittelpunkt M des Umkreises die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Seitenlängen

$$P_1M = P_2M = r \qquad r \qquad P_1P_2 = s$$

Für den Winkel $\angle P_1MP_2$ gilt, da er ein Zehntel eines Vollwinkels ist $\angle P_1MP_2 = 36^\circ$. Folglich gilt nach dem Innenwinkelsatz und dem Satz über Basiswinkel, angewandt auf Dreieck P_1MP_2,

$$\angle MP_1P_2 = \angle MP_2P_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

Die Halbierende des Winkels $\angle MP_1P_2$ schneidet die Gegenseite MP_2 in einem Punkt A. Für ihn gilt $\angle MP_1A = \angle AP_1P_2 = 36°$ und daher nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck P_1P_2A

$$\angle P_1AP_2 = 180° - 36° - 72° = 72°$$

Also sind die Dreiecke P_1MA und P_1P_2A gleichschenklig mit $AM = AP_1 = P_1P_2 = s$. Daraus folgt $AP_2 = MP_2 - AM = r - s$.

Ferner sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die Dreiecke MP_1P_2 und P_1P_2A einander ähnlich. Also gilt $P_1M : P_1P_2 = P_1P_2 : AP_2$, d. h. $\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$ und daher $s^2 + rs - r^2 = 0$ und da $s > 0$

$$s_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r^2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618r$$

Aufgabe 251013:
Der Querschnitt einen Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt.

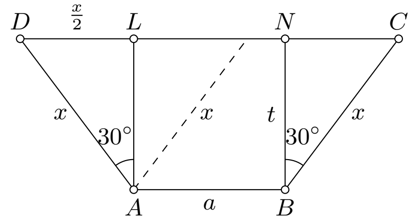
Wegen der geforderten Durchflussmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitte (Sohle des Grabens) vorgegeben.

Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F!

Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.

Man gebe eine derartige Lösung an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das genannte Trapez sei ABC mit $AB \parallel DC$ und $AB < DC$.

Die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf DC seien L bzw. N. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$AD = BC \quad ; \quad \angle DAL = \angle CBN = 30° \quad ; \quad AB = LN = a \quad ; \quad AL = BN = t$$

und das Trapez $ABCD$ hat den Flächeninhalt F.

Verschiebt man das Dreieck BCN längs BA so, dass das Bild von BN mit AL zusammenfällt, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel zwischen den Schenkeln 60° groß ist.

Damit sind die Basiswinkel auch jeweils 60° groß. Das betrachtete Dreieck ist also gleichseitig. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, dann gilt (nach dem Satz von Pythagoras oder der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck)

$$t = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

Daraus folgt

$$DL + NC = x = \frac{2t}{\sqrt{3}} \qquad \text{also}$$

$$DC = DL + LN + NC = a + \frac{2t}{\sqrt{3}}$$

Hieraus ergibt sich

$$F = \frac{1}{2}(AB + DC)t = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)t = at + \frac{t^2}{\sqrt{3}}$$

$$t^2 + at\sqrt{3} - F\sqrt{3} = 0$$

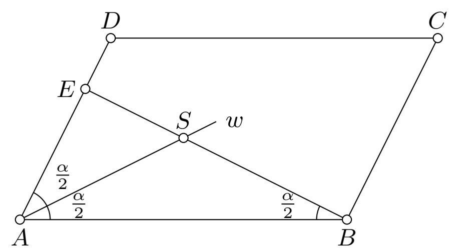
Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung scheidet die negative aus, und es folgt

$$t = \frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + F\sqrt{3}}$$

Aufgabe 261012:
Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle BAD$ hat. Jörg behauptet, dass sich allein aus diesen Angeben die Größe des Winkels $\angle CBA$ ermitteln lässt.

Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CBA$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus den genannten Angaben folgt:

Bezeichnet man die Größe des Winkels $\angle BAD$ mit α, dann gilt $\angle EAS = \angle SAB = \frac{\alpha}{2}$, da w den Winkel $\angle BAD$ halbiert und durch S verläuft.

Ferner gilt $AS = SB$, da S auf der Mittelsenkrechten s von AB liegt. Mithin ist des Dreieck ASB gleichschenklig, woraus

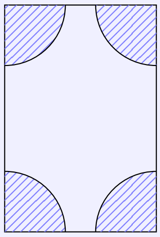
$$\angle SAB = \angle SBA = \frac{\alpha}{2}$$

folgt (Basiswinkel). Da das Lot BE durch S verläuft, ist ABE ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle AEB = 90°$ und $\angle ABE = \frac{\alpha}{2}$. Folglich gilt nach den Innenwinkelsatz $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90°$, also $\alpha = 60°$.

Wegen $\angle CBA = 180° - \alpha$ (benachbarte Winkel im Parallelogramm) gilt daher $\angle CBA = 120°$.

Damit ist Jörgs Behauptung als wahr erwiesen und die gesuchte Winkelgröße ermittelt.

Aufgabe 331014:



Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechteckseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o. B. d. A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \qquad (1)$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt

$$0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also

$$ab = 2\pi \cdot r^2 \qquad (2)$$

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit

$$1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

II. Wenn $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen a,b, > 0 mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

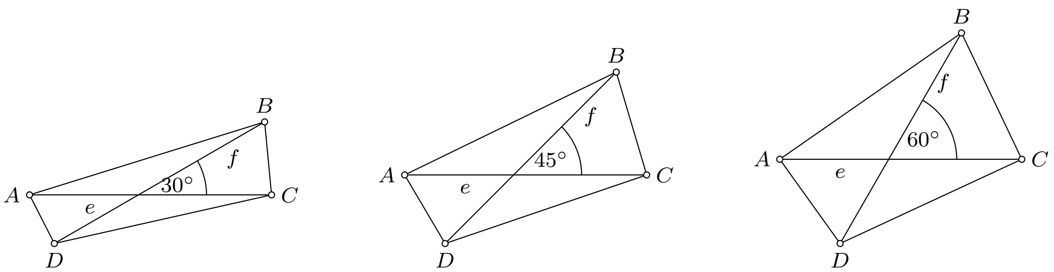
so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

II Runde 2

Aufgabe V11023:
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

Lösung von Steffen Polster:



Jedes der Vierecke wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Dabei entstehen die Diagonalenteile e_1, e_2, f_1, f_2 mit $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Mit dem Schnittwinkel α der Diagonalen ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Vierecks

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}e_1 \cdot f_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_2 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_1 \cdot f_2 \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_1 \sin(180° - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot e \cdot f \end{aligned}$$

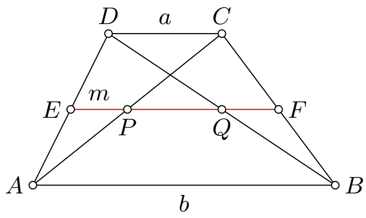
Damit folgt für die Verhältnisse der Flächeninhalte

$$F_1 : F_2 = \sin 30° : \sin 45° = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$$
$$F_2 : F_3 = \sin 45° : \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Aufgabe 031023:
Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als bekannt kann vorausgesetzt werden, dass die Länge der Mittellinie $m = \frac{a+b}{2}$ beträgt. Ferner ist offensichtlich, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auch auf der Mittellinie m liegen.
Nun bleibt zu untersuchen, wie groß die Streckenlängen EP und QF sind: Da die von A ausgehenden Strahlen AD und AC zwei Parallelen EP und DC schneiden, verhalten sich die Seiten $DC : EP$ wie $AD : AE = 2 : 1$, da die Mittellinie die Seite AD halbiert. Damit gilt $EP = \frac{a}{2}$.
Analog erhält man $QF = \frac{a}{2}$.
Setzt man diese Werte nun in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich

$$PQ = m - EP - QF = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Aufgabe 041023:
Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.
Man beweise, dass das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke flächengleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Abschnitte der einen Diagonalen mit a und b, die der anderen mit c und d und den Winkel zwischen a und c mit β, so erhält man für die Flächen der vier Dreiecke:

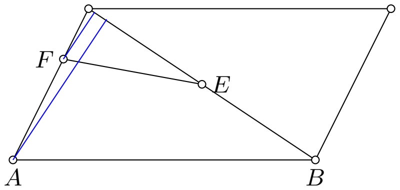
$$F_1 = 0{,}5ac\sin\beta \qquad ; \qquad F_2 = 0{,}5ad\sin(180^\circ - \beta)$$

$$F_3 = 0{,}5bd\sin\beta \qquad ; \qquad F_4 = 0{,}5bc\sin(180^\circ - \beta)$$

Aus $F_1 = F_2$ folgt $c = d$, und aus $F_1 = F_4$ folgt $a = b$. Das heißt, die Diagonalen halbieren einander, es liegt ein Parallelogramm vor.
Umgekehrt folgt, dass die Flächen der vier Dreiecke gleich sind, wenn die Diagonalen einander halbieren.

Aufgabe 051021:
Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen DB des Parallelogramms $ABCD$. Punkt F sei derjenige Punkt auf AD, für den $|DA| : |DF| = 3 : 1$ gilt.
Wie verhält sich das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle DFE$ zu dem des Vierecks $ABEF$, wenn man gleiche Maßeinheiten zugrundelegt?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

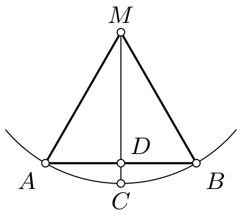


Die Höhen der Dreiecke DAB bzw. DFE auf g_{DB} bzw. g_{DE} sind zueinander parallel, da die zu diesen Höhen gehörenden Seiten DB bzw. DE der genannten Dreiecke auf derselben Geraden liegen.
Nach dem 2. Strahlensatz verhalten sich die Längen dieser Höhen aufgrund der Voraussetzung wie 3:1. Ferner verhalten sich die Längen der Grundseiten DB bzw. DE zueinander wie 2:1.
Daher verhalten sich die Flächeninhalte beider Dreiecke wie 6:1. Folglich verhält sich der Flächeninhalt des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$ wie 1:5.

Aufgabe 051022:
Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!
c) Um wie viel Prozent ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)
d) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Genauigkeit wie bei c)

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Weiter seien C eine Ecke und A und B die beiden benachbarten Ecken des Zwölfecks.
Dann gilt: $r = |MA| = |MC| = |MB| = |AB|$.
AB ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und $MC \perp AB$. $ACBM$ ist wegen $|AM| = |BM|$ und $|AC| = |BC|$ ein Drachenviereck.

a) Die Strecken AB und MC haben einen Schnittpunkt D. Setzt man $|DC >= x$, dann gilt

$$x = r - |MD| = r - \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

MD ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck MAB. Bezeichnet $s = |AC| = |BC|$ die Seitenlänge des Zwölfecks, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck CBD

$$s^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2(2-\sqrt{3}) \to s = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Der Umfang des Zwölfecks beträgt daher $12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt I_1 des Dreiecks MBC. Es gilt

$$I_1 = \frac{1}{2} r \cdot r \sin 30^\circ = \frac{r^2}{4}$$

Der Flächeninhalt $12I_1$ des Zwölfecks beträgt demnach $3r^2$.

c) Es ist

$$12r\sqrt{2\sqrt{3}} : 2r\pi \approx 3{,}106 : \pi \approx 0989$$

Weil $3{,}1055^2 < 36(2-\sqrt{3}) < 3{,}1065^2$ also $3{,}1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3{,}1065$ gilt und wegen $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$$0.9885 \cdot 3{,}1416 < 3{,}1055 < 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < 3{,}1065 < 0.9895 \cdot 3{,}1415$$

ausfällt. Der Umfang des Zwölfecks ist also um etwa 1,1% kleiner als der des Kreises.

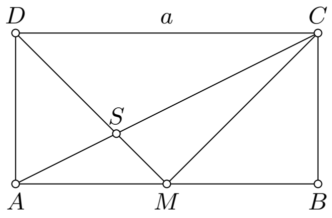
d) Wegen $0{,}9549 \cdot 3{,}1416 < 3 < 0{,}955 \cdot 3{,}1415$ ist

$$3r^2 : \pi r^2 = 3 : \pi \approx 0{,}955$$

Der Flächeninhalt des Zwölfecks ist also um etwa 4,5% kleiner als der des Kreises.

Aufgabe 071022:
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit Mund A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle SMC$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks $ABCD$ mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $I(ABGB) = a \cdot b$.
Ferner gilt $\triangle ASM \sim \triangle DSC$, da $\angle ASM \cong \angle DSC$ (Scheitelwinkel) und $\angle SAM \cong \angle DCS$ (Wechselwinkel) sind.

Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt $AM : CD = 1 : 2$. Ferner ist $I(\triangle AMC) = \frac{1}{4}a \cdot b$, und wegen $SM : SD = 1 : 2$ (Strahlensatz) gilt

$$I(\triangle AMS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{12}a \cdot b$$

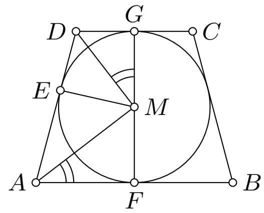
Somit erhält man

$$I(\triangle SMC) = I(\triangle AMC) - I(\triangle AMS) = \frac{1}{4}a \cdot b - \frac{1}{12}a \cdot b = \frac{1}{6}a \cdot b$$

Mithin gilt $I(ABCD) : I(\triangle SMC) = 6 : 1$.

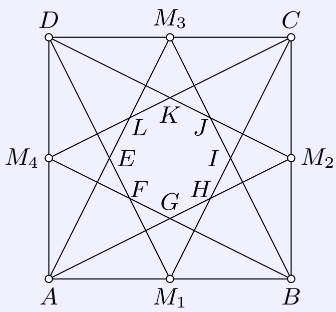
Aufgabe 131023:
Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ρ.
Man berechne diesen Inkreisradius ρ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmatrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD.
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel CDE und EAF. Wegen $\angle GDE + \angle EAF = 180°$ gilt daher (1) $\angle MDG + \angle MAF = 90°$.
Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklige sind, gilt (2) $\angle MDG + \angle DMG = 90°$. Aus (1) und (2) folgt $\angle MAF = \angle DMG$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.



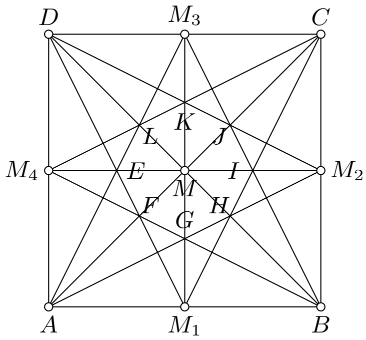
Wegen $DG = 1$ cm, $AF = 4$ cm und $MG = MF = \rho$ folgt daraus $DG : MG = MF : AF$ bzw. 1 cm : $\rho = \rho : 4$ cm, woraus man $\rho^2 = 4$ cm^2 und wegen $\rho > 0$ schließlich $\rho = 2$ cm erhält. Der Inkreisradius ρ hat die Länge 2 cm.

Aufgabe 191024:



Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ enthält.
Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da M_4M_2 Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf M_4M_2, und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M.



Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC. Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{M_4E}{DM_3} = \frac{AM_4}{AD} = \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad M_4E = \frac{a}{4}; \quad EM = \frac{a}{4}$$

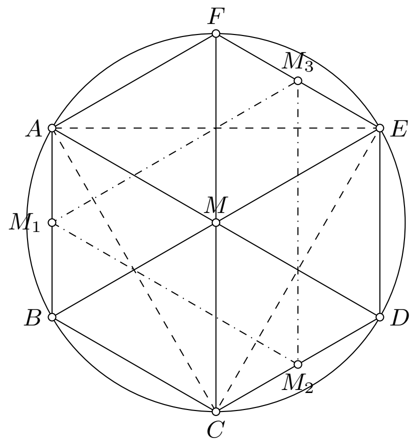
und

$$\frac{FM}{FA} = \frac{M_4M}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad FM = \frac{AM}{3}$$

Da AM die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $AM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $MF = \frac{a}{6}\sqrt{2}$.
Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2} \neq \frac{1}{4}$ folgt $ME \neq MF$ und hieraus nach der Seiten—Winkel-Relation $\angle MEF \neq \angle MFE$.
Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt $\angle LEF = 2\angle MEF$ und $\angle EFG = 2\angle MFE$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\angle LEF = \angle EFG$. Da somit in dem Achteck $EFGHIJKL$ zwei verschieden große Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

Aufgabe 221024:
Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, daher ist $F_1 = 6D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.
Jede der Seitenlänge des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge es gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Daher ist $s = AC = CE = EA = a\sqrt{3}$ und folglich $F_2 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.



Wegen $\angle BAD = 60°$ und $\angle ABC = 2 \cdot 60°$ ist $AD \parallel BC$ (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen).
Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $2a$ bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1; daher ist

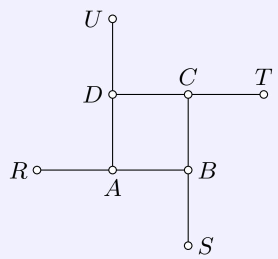
$$t = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = \frac{3}{2}a$$

und folglich

$$F_3 = \frac{t^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

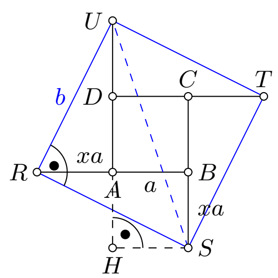
Somit gilt $F_1 : F_2 : F_3 = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{9}{16} = 8 : 4 : 3$.

Aufgabe 271023:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie in der Abbildung um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.
a) Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung sei $AB = BC = CD = DA = a$, $RA = UD = CT = BS = x \cdot a$ und die Strecke $RU = b$. Der Punkt H sei der Endpunkt der Verlängerung von DA um xa über A hinaus. Der Winkel $\angle SHA$ ist dann offensichtlich ein rechter Winkel.
Aus dem rechtwinkligen Dreieck SBR mit den Katheten xa und $a + xa$ ergibt sich für die Hypotenuse

$$RS^2 = (xa)^2 + (a + xa)^2 = a^2(2x^2 + 2x + 1) \rightarrow RS = b = a\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Aus Symmetriegründen muss $RS = ST = TU = UR = b$ gelten (bzw. durch analoge Rechnung nachzuweisen). Damit das Viereck $RSTU$ Quadrat ist, müssen die Innenwinkel rechte Winkel sein. Im rechtwinkligen Dreieck HSU mit den Katheten a und $a + 2xa$ wird für die Hypotenuse

$$US^2 = a^2 + (a + 2xa)^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) \rightarrow US = a\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras wird im Dreieck SRU aus

$$US^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) = RS^2 + RU^2$$

dass SRU ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle SRU = 90°$ ist. Analog weißt man die rechten Winkel bei S, T und U nach. Das Viereck $RSTU$ ist damit ein Quadrat.

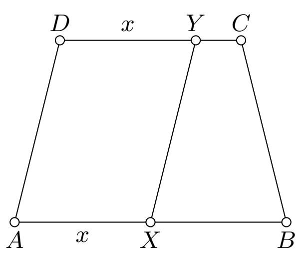
b) Der Flächeninhalt des Quadrates $RSTU$ ist $A_{RSTU} = b^2$, der des Quadrates $ABCD$ gleich $A_{ABCD} = a^2$. Es wird

$$\begin{aligned} A_{RSTU} &= 5A_{ABCD} \\ (a\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 &= 5a^2 \\ 2a^2 \cdot (x^2 + x - 2) &= 0 \rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2 \end{aligned}$$

$x_2 < 0$ entfällt, so dass für $x = 1$ das Quadrat $RSTU$ den fünffachen Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ hat.

Aufgabe 291023:
Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.
Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $AB < 3 \cdot CD$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenlängen AB, CD und die Höhe des Trapezes seien wie üblich mit a, c bzw. h bezeichnet.
Jede zu einem Schenkel, o. B. d. A. zu AD parallele Gerade, die des Trapez in zwei Vierecke zerlegt, muss AB in einem Punkt X zwischen A und B sowie CD in einem Punkt zwischen C und D schneiden (sonst ergäbe sich entweder überhaupt keine Zerlegung des Trapezes oder eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein Dreieck).
Die entstehenden Vierecke sind das Parallelogramm $AXYD$ und des Trapez $XBCY$.

Mit $x = AX = DY$ sowie wegen $c < a$ ist die Bedingung, dass X zwischen A und B sowie Y zwischen C und D liegt, äquivalent mit $x < c$. (1)
Wegen $XB = a - x$ und $YC = c - x$ haben die genannten Vierecke die Flächeninhalte

$$F(AXYD) = x \cdot h, \qquad F(XBCY) = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h = \left(\frac{1}{2}(a + c) - x\right) \cdot h$$

Also gibt es genau dann eine zu AD parallele Gerade mit $F(AXYD) = F(XBCY)$, wenn es eine Streckenlänge x mit (1) und

$$x \cdot h = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h \tag{2}$$

gibt. Die Gleichung (2) ist nun der Reihe nach äquivalent mit

$$x = \frac{1}{2}(a+c) - x \qquad \to \qquad x = \frac{1}{4}(a+c)$$

Diese Zahl erfüllt genau dann (1), wenn $\frac{1}{4}(a+c) < c$ gilt, und dies ist der Reihe nach äquivalent mit $a + c < 4c$ sowie $a < 3c$, wie es zu zeigen war.

Aufgabe 301023:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $AB > AD$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

Lösung von cyrix:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AC. Damit ist M auch der Mittelpunkt der anderen Diagonalen BD des Rechtecks $ABCD$. Da die Diagonalen eines Rechtecks auch gleichlang sind, gilt damit $|AM| = |BM|$. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichschenklig mit Basis AB.

Wegen $|AB| > |AD| = |BC|$ ist $\angle BAC < \angle ACB$, da im Dreieck $\triangle ABC$ dem kleineren Winkel auch die kleinere Seite gegenüberliegt. Wegen $\angle CBA = 90°$ und der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck ist somit $\angle BAM = \angle BAC < 45°$, also aufgrund der Gleichschenkligkeit im Dreieck $\triangle ABM$ auch $\angle MBA = \angle BAM < 45°$ und damit $\angle AMB > 90° = \angle AMP$, da die Mittelsenkrechte der Strecke AC natürlich durch M verläuft.

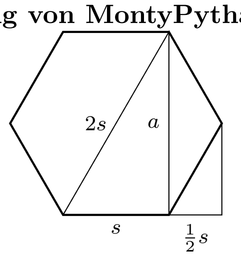
Weiterhin liegt wegen $|AM| = |BM|$ der Punkt M auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese verläuft durch den Mittelpunkt Q dieser Strecke, sodass $\angle MQA = 90°$ und wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AMQ$ auch $\angle AMQ = 180° - \angle MQA - \angle QAM < 180° - \angle MQA = 180° - 90° = 90° = \angle AMP$ gilt.

Zusammen ist also $\angle AMQ < \angle AMP < \angle AMB$, sodass, da Q, P und B auf einer Geraden liegen, also P im Innern der Strecke QB liegt, $\square$.

III Runde 3

Aufgabe V11032:
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

Lösung von MontyPythagoras:



a) Die genaue Formel lautet:

$$F_S = (s + \tfrac{1}{2}s)a = \tfrac{3}{2}as$$

Dabei gilt wegen des Satzes von Pythagoras:

$$a = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{3}\,s \quad \to \quad s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Und daher gilt für die genaue Formel:

$$F_S = \frac{3}{2\sqrt{3}}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

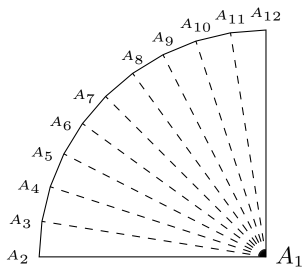
b) Der prozentuale Fehler ist immer gleich, egal ob $a = 50$mm oder irgendein anderer Zahlenwert ist. Der relative Fehler ist

$$1 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{7}{12}\sqrt{3}$$

Das entspricht etwa -1%. (Die Näherung ergibt einen größeren Wert als die genaue Formel, daher negativ).

Aufgabe 011033:
In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel.
Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

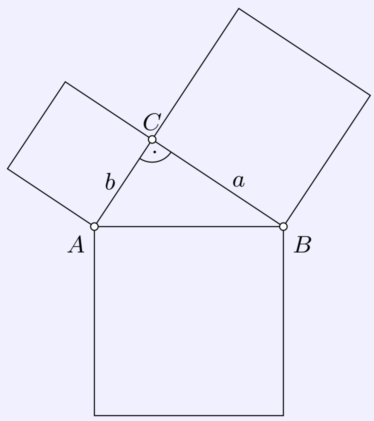
Lösung von Christiane Czech:



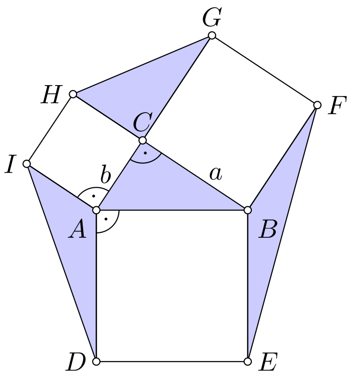
Wir legen einen Eckpunkt des Zwölfecks fest, etwa A_1, und zeichnen alle Diagonalen, die durch diesen Punkt gehen, ein. Dabei entstehen 10 Dreiecke, die durch solche Diagonalen und die Seiten des Zwölfecks begrenzt sind.
Die Innenwinkelsumme des Zwölfecks ist gleich der Summe aller Innenwinkel dieser Dreiecke, also gleich $10 \cdot 180° = 1800°$. Sind drei der Innenwinkel rechte Winkel (hier diejenigen bei A_{12}, A_1 und A_2), müssen die übrigen 9 Innenwinkel folglich eine Summe von $1800° - 270° = 1530°$ haben.
Ist darunter ein spitzer Winkel, so ist die Summe der restlichen 8 Winkel größer als $1530° - 90° = 1440°$. Diese sind jedoch alle kleiner als $180°$ (da das Zwölfeck konvex ist), ihre Summe ist also kleiner als $8 \cdot 180° = 1440°$. Damit kann es keine spitzen Winkel in diesem Zwölfeck geben.

Aufgabe 021034:

Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.
Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!



Lösung von Eckard Specht:



Nennen wir die Eckpunkte des Sechsecks D, E, F, G, H und I. Dann setzt sich der Flächeninhalt des Sechsecks zusammen aus vier Dreiecken und drei Quadraten:

$$A_{DEFGHI} = A_{ABC} + A_{ADEB} + A_{BFGC} + A_{CHIA} + \\ + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras folgt nun:

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2} \qquad A_{ADEB} = a^2 + b^2$$
$$A_{BFGC} = a^2 \qquad A_{CHIA} = b^2$$

Verbleiben noch die äußeren farbigen Dreiecksflächen. Doch diese sind alle untereinander gleich der Fläche des Dreiecks ABC.
Um das einzusehen, vergleichen wir z. B. die Dreiecke AID und ABC. Beide haben paarweise gleiche Seiten $AI = AC = b$ und $AD = AB = c$, die jeweils Supplementwinkel einschließen: $\angle IAD = 180° - \angle CAB$.
Wegen $\sin(\angle IAD) = \sin(180° - \angle CAB) = \sin(\angle CAB)$ und der bekannten Formel $\frac{bc}{2} \sin\alpha$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist also tatsächlich $A_{AID} = A_{ABC} = \frac{ab}{2}$.
Dasselbe gilt für A_{BEF} und A_{CGH}.
Alle Flächeninhalte addiert ergibt schließlich $A_{DEFGHI} = 2(a^2 + ab + b^2)$.

Aufgabe 061033:
Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:

$$AB = 30, AE = 63, AF = 50, BF = 40, CD = 49, CE = 200, DF = 38$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$EA + AF + FD + DC = 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = EC$$

Daraus folgt, dass die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben geraden liegen.
A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\angle ABF$. Dies folgt wegen

$$AB^2 + BF^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = AF^2$$

aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras.
Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF. Wegen $\triangle BFQ \sim \triangle AFB$ ist dann

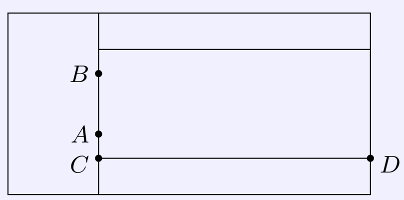
$$BQ = \frac{AB \cdot BF}{AF} = 24 \qquad \text{und} \qquad QF = \frac{BF^2}{AF} = 32$$

Also ist $QD = QF + FD = 70$. Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BQD$ nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$BD^2 = BQ^2 + QD^2 = 24^2 + 70^2 = 4(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $BD = 74$. Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

Aufgabe 061036:



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen.
Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\angle APB$ zu verstehen. Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

Anmerkung: Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

Lösung von cyrix:
Sei P auf CD mit $P \neq C$ gegeben. Dann sind die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, sodass sich nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck für die Winkel bei P die Gleichungen $\tan(\angle CPA) = \frac{|AC|}{|CP|}$ und $\tan(\angle CPB) = \frac{|BC|}{|CP|}$ ergeben.
Für den Sichtwinkel auf die Bühne von P aus gilt also

$$\angle APB = \angle CPB - \angle CPA = \arctan\left(\frac{|BC|}{|CP|}\right) - \arctan\left(\frac{|AC|}{|CP|}\right)$$

Der Formelsammlung entnehmen wir für reelle Zahlen x und y mit $xy > -1$ das Additionstheorem $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$.
Setzen wir unsere konkreten Verhältnisse aus der Aufgabe für x und y ein (die jeweils positiv sind, ihr Produkt also sicher größer als -1 ist), so erhalten wir

$$\angle APB = \arctan\left(\frac{\frac{|BC|}{|CP|} - \frac{|AC|}{|CP|}}{1 + \frac{|BC|}{|CP|} \cdot \frac{|AC|}{|CP|}}\right) = \arctan\left(\frac{|AB|}{|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}}\right)$$

Da die Arcustangens-Funktion streng monoton steigend ist, nimmt sie ihren maximalen Wert genau dann an, wenn auch das Argument maximiert wird. Damit erhalten wir den maximalen Sichtwinkel $\angle APB$ genau dann, wenn das Argument des Arcustangens maximal, also, da dessen Zähler nicht von der Wahl von P abhängt, wenn der Nenner minimal wird. Es verbleibt demnach der Ausdruck $|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}$ zu minimieren.

Für positive reelle Zahlen x und c betrachten wir die Funktion $f(x) = x + \frac{c}{x}$. Setzen wir $x := t \cdot \sqrt{c}$ mit einer positiven reellen Zahl t hier ein, erhalten wir

$$f(t \cdot \sqrt{c}) = t \cdot \sqrt{c} + \frac{c}{t \cdot \sqrt{c}} = \sqrt{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

was genau für $t = 1$, also $x = \sqrt{c}$ minimal wird.
Wenden wir dies auf unseren zu betrachtenden Term $|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}$ an, so wird dieser minimal – und der Sichtwinkel auf die Bühne maximal – , wenn $|CP| = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ gilt.
Dies beschreibt (da man nur „vor“ und nicht auch „hinter“ der Bühne sitzen kann) den eindeutigen Platz auf der Seitenloge mit dem besten Blickwinkel auf die Bühne.

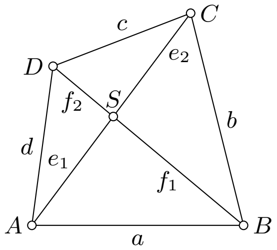
Ist die Seitenloge zu kurz, um den so errechneten Punkt P mit größtem Blickwinkel auf die Bühne zu enthalten, d. h., ist $|CD| < \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$, so ist $P = D$ zu wählen, also mit maximaler Entfernung zur Bühne, da der Blickwinkel auf die Bühne, wenn man den Punkt P auf dem von C ausgehenden und durch D verlaufenden Strahl wandern lässt, am Punkt $P = C$ gleich 0 beträgt, dann bis zum Maximum bei $P = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ streng monoton wächst, und abschließend mit gegen unendlich gehender Entfernung $|PC|$ wieder streng monoton auf Null fällt.
Ist also die Seitenloge schon vor Erreichen des Maximums zu Ende, ist genau dieser auf ihr am weitesten von der Bühne entfernte Punkt derjenige mit dem größten Sichtwinkel auf die Bühne.

Aufgabe 131031:
Man beweise, dass für alle konvexen Vierecke $ABCD$

$$\frac{1}{2}u < e + f < u$$

gilt! Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung seien die Diagonalen $AC = e = e_1 + e_2$ sowie $BD = f = f_1 + f_2$.
Die Dreiecksungleichungen für die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB ergeben

$$a + b > e \quad ; \quad b + c > f \quad ; \quad c + d > e \quad ; \quad d + a > b$$

Deren Summe wird $2a + 2b + 2c + 2d = 2e + 2f$, also $u = a + b + c + d > e + f \quad (1)$.
Andererseits wird für die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS mit den Dreiecksungleichungen

$$e_1 + f_1 > a \quad ; \quad e_2 + f_1 > b \quad ; \quad e_2 + f_2 > c \quad ; \quad e_1 + f_2 > d$$

Erneute Addition der vier Ungleichungen ergibt

$$2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 = 2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow e + f > \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{u}{2}$$

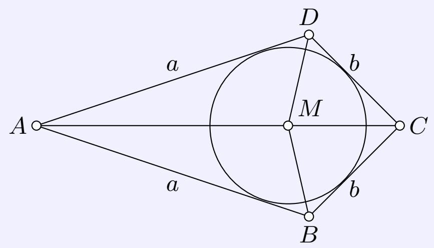
Mit (1) ist damit die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 141032:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit $AB = AD = a$, $BC = DC = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM}$$



Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wegen der Symmetrie im Drachenviereck gilt $BM = DM$. Somit ist nur

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM}$$

zu zeigen. Im Dreieck ABM bezeichnen β,μ die Winkel bei B,M. Nach dem Sinussatz gilt $\frac{a}{AM} = \frac{\sin\mu}{\sin\beta}$.
Im Dreieck BCM erhalten wir analog $\frac{b}{CM} = \frac{\sin(180°-\mu)}{\sin\beta}$.
Aus $\sin(180° - \mu) = \sin\mu$ folgt $\frac{a}{AM} = \frac{b}{CM}$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 141036:
Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben:
Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.

Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren!
Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt!

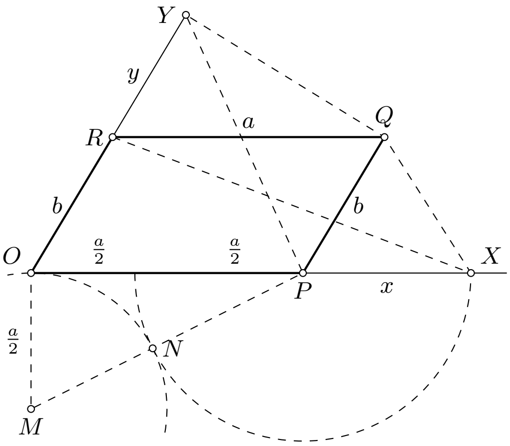
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $OP = a$, $OR = b$, $PX = x$, $RY = y$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a+b} \tag{1}$$

denn wegen $\angle ROP = \angle YRQ$ und $\angle ORX = \angle RYQ$ ist $\triangle ORX \sim \triangle RYQ$. Außerdem gilt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b+y} \tag{2}$$

weil wegen $\angle OPY = \angle OXQ$ und $\angle OYP = \angle PQX$ $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ gilt.



Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b + \frac{ab}{a+x}} \tag{3}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{4}$$

und hieraus wegen $x > 0$

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreiecke mit den Katheten OP und $OM = \frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius PN, so ist $PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgaben, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

(a) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.

(b) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.

(c) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MO. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann

(d) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius PN. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.

(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt

$$MP = \sqrt{OM^2 + OP^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Daher ist nach Konstruktion

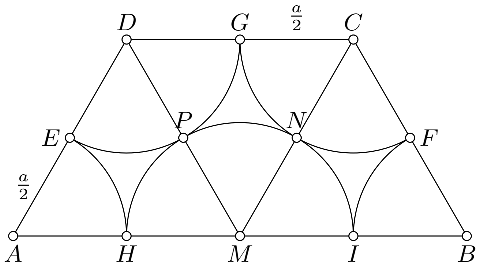
$$PX = PN = PM - MN = PM - MO = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Folglich gilt $x = PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und damit (4) und (3).
Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, dass $YQ \parallel RX$ ist, so gilt $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ und hieraus $\angle OPY = \angle PXQ$. Folglich ist $\angle PXQ + \angle YPX = 180°$.
Daher können die PY bzw XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt, sind also parallel.

(IV) Die angegeben Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

Aufgabe 161031:
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ und $AB > CD$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA.
Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, dass
der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,
der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,
der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und
der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.
Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P. Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AE = ED$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise $\frac{a}{2}$.
Sei x die gesuchte Länge der Seite AB, dann gilt $HI = x - a$ da wegen $AB > CD$ der Punkt H zwischen A und I liegt.
Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI, so ist $HM = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI.



Da M, N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$$MC = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}$$

Ebenso folgt $MD = \frac{x}{2}$, also $MA = MB = MC = MD$. Somit sind die Dreiecke AMD, DMC und CMB gleichschenklig und wegen Kongruenzsatz sss kongruent. Die Winkel $\angle AMD, \angle DMC$ und $\angle CMB$ sind folglich ebenfalls kongruent und da $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$ ist, ist jeder von ihnen $60°$ groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig und somit ist $MA = MB = a$. Die Seite AB hat also die Länge $2a$.

Aufgabe 171032:
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von $110°$ hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge UV, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch die Angaben über AB, BC, $\angle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als radius genau zwei Schnittpunkte.
Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Gerade durch A und C wie B, dieser sei d genannt, der andere D^*.
Die Konstruktion ergibt, dass $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über AB, BC, CD, AD, $\angle ABC$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$ den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}AC \cdot BB' + \frac{1}{2}AC \cdot DD' = AC \cdot \frac{1}{2}(BB' + DD')$$

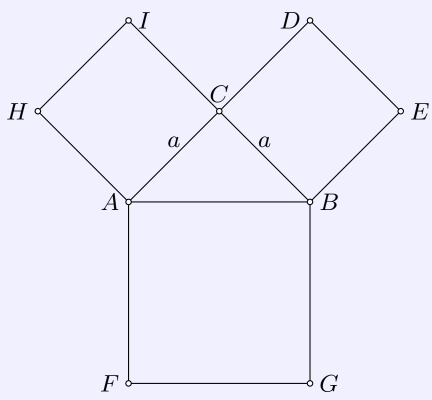
Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen AC und $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Rechteck $EFGH$, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.
Ist etwa $EF > FG$, liegt G' so auf EF, dass $FG' = FG$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz

$$FV^2 = EF \cdot FG' = EF \cdot FG$$

also ein über FV errichtetes Quadrat zu $EFGH$ flächeninhaltsgleich.
Daher führt (z. B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge UV:

(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.
(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.
(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird $EFGH$ ein Rechteck mit $EF > FG$.
(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.
(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.
(6) Man setze $F = U$. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat $UVWX$ ist zu $ABCD$ flächeninhaltsgleich.

Aufgabe 191031:
Die Abbildung zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit gegebener Kathetenlänge a, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.
a) Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen!
Ermitteln Sie (zu gegebenem a) den Durchmesser dieses Kreises!
b) Beweisen Sie:
Jeder Kreis, der die Punkte D, E, F, G, H und J in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die Gerade g durch C und M ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt

$$MD = MJ, ME = MH, MG = MF \qquad (1)$$

Ferner ist CM zugleich Höhe in ABC, also hat $\triangle BCM$ bei B bzw. M Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $MB = MC$. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von BC; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von DE, hiernach gilt $MD = ME$ (2).

$\triangle BCD$ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\angle DBC = 45°$, also ist $\angle DBM = 90° = \angle GBM$; ferner gilt $BD = a\sqrt{2} = BG$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle DBM \cong \triangle GBM$, also $MD = MG$ (3).
Aus (1), (2), (3) folgt, dass der Kreis k um M durch D auch durch E, F, G, H, J geht. Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

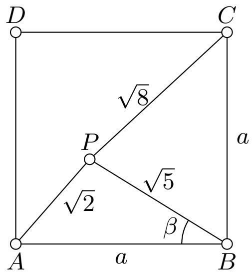
$$2MG = 2\sqrt{MB^2 + MG^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{10}$$

b) Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $M' \neq M$ jeder Kreis um M', der in seiner Fläche oder auf seinem Rande die Punkte D, E, F, G, H, J enthält, einen größeren Radius als k hat.
O. B. d. A. liege M' auf g oder in derjenigen durch g begrenzten Halbebene, die A enthält. Das Lot von M' auf g habe den Fußpunkt L.

Ist $L = M$ (also M' nicht auf g gelegen), so gilt $M'D > MD$. Ist $L \neq M$ und liegt L auf dem Strahl aus M durch C, so gilt $M'G \geq LG > MG$. Liegt L auf der Verlängerung von CM über M hinaus, so gilt $M'D \geq LD < MD$.
Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Aufgabe 201033:
Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{5}$ cm, $PC = \sqrt{8}$ cm gilt!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

Lösung von MontyPythagoras:



Die gesuchte Seitenlänge sei a. Mit dem Kosinusssatz erhält man im Dreieck ABP einerseits:

$$2 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \cos\beta \qquad \rightarrow \qquad (1) \qquad 2\sqrt{5}\, a \cos\beta = a^2 + 3$$

und andererseits im Dreieck PBC:

$$8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad \rightarrow \qquad 8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \sin\beta$$

$$(2) \qquad 2\sqrt{5}\, a \sin\beta = a^2 - 3$$

Quadriert man die Gleichungen (1) und (2) und addiert sie, dann folgt:

$$20a^2 = a^4 + 6a^2 + 9 + a^4 - 6a^2 + 9$$

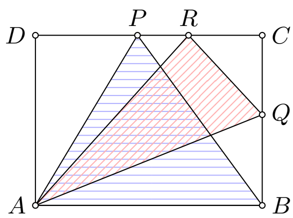
$$a^4 - 10a^2 + 9 = 0$$

$$a^2 = 5 \pm \sqrt{25 - 9} \qquad \rightarrow \qquad a_1^2 = 9 \qquad a_2^2 = 1$$

Positive Seitenlängen vorausgesetzt, kann die Seitenlänge des Dreiecks entweder $a = 3$ oder $a = 1$ betragen (in letzterem Falle liegt P natürlich außerhalb des Quadrats).

Aufgabe 231035:
Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, dass für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt;
Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.
Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck ABP unabhängig von der Wahl des Punktes P immer flächeninhaltsgleich ist und $A_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}ab$ gilt. Nun können wir die Punkte R und Q wählen und definieren einmal die Länge der Strecken $|\overline{CR}| =: x$ und $|\overline{CQ}| =: y$.

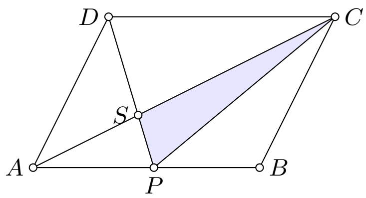
Der Flächeninhalt des Dreiecks AQR ist somit $A_{\triangle AQR} = ab - \frac{xy}{2} - \frac{(a-x)b}{2} - \frac{(b-y)a}{2} = \frac{1}{2}(ay + bx - xy)$. Nun überprüfen wir einmal Ulrike: Aus $F_1 < F_2$ folgt somit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab &< \frac{1}{2}(ay + bx - xy) \\ ab &< ay + bx - xy \\ ab - bx &< y(a-x) \\ b(a-x) &< y(a-x) \end{aligned}$$

Da $x \neq a$ laut Voraussetzung (R ist innerer Punkt der Strecke) und $a > x$ folgt somit $b < y$. Dieses ist also unmöglich. Analog folgt für Vera $b = y$, was auch unmöglich ist, da auch Q ein innerer Punkt sein soll. Für Waltraud folgt $y < b$, was möglich ist.

Aufgabe 311035:
Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.
a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?
b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



a) Ein Punkt, dessen Lage man auf einer Strecke beschreiben kann, ist der Mittelpunkt. Und tatsächlich ist dieser Punkt der gesuchte Punkt, wie man leicht einsehen kann.

Sei die Länge des Parallelogramms a und die Höhe b. Das Parallelogramm hat dann also eine Fläche von $A = ab$. Offensichtlich hat das $\triangle ASD$ den gleichen Flächeninhalt wie das $\triangle SPC$, da das $\triangle APD$ flächeninhaltsgleich zum $\triangle APC$ ist (Scherung).
Sei also der Flächeninhalt der Dreiecke x. Die Dreiecke APS und DSC sind ähnlich, da alle Winkel gleich sind. Nach Strahlensatz beträgt der Streckfaktor 2, die Fläche von $\triangle DSC$ ist also viermal so groß, wie die von $\triangle ASP$. Sei nun $A_{\triangle ASP} = y$, dann gilt:

(1) : $\quad x + 4y = \dfrac{ab}{2}$

(2) : $\quad x + y = \dfrac{ab}{4}$

(1) − (2) : $\quad 3y = \dfrac{ab}{4}$ und somit $y = \dfrac{ab}{12}$

Damit erhalten wir also $A_{\triangle SPC} = \dfrac{ab}{4} - \dfrac{ab}{12} = \dfrac{ab}{6}$.

b) Nun - verschiebt man P nach links wird der Flächeninhalt immer kleiner, verschiebt man P nach rechts, wird er größer. Liegt P schließlich auf B ist die Fläche maximal, nämlich $A = \frac{ab}{4}$.

Aufgabe 331033:
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, \ldots$ bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von cyrix:
Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_12} = |DC| + (12 - 6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4 + 1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_12| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2 + \sqrt{3})s^2 + (2 + \sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2 + \sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \cos\alpha)$, also

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 \cdot (4 - 3)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Kosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, $\square$.

IV Runde 4

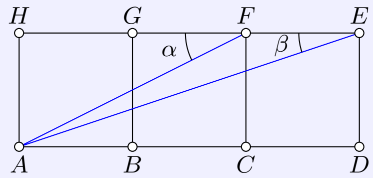
Aufgabe 021044:
Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

Lösung von André Lanka:
Es gibt genau ein Rechteck, das diese Bedingungen erfüllt.
Seien c und d die Rechteckseiten. Dann gilt $c \cdot d = a^2$ und $2(c + d) = 2 \cdot 4a$.

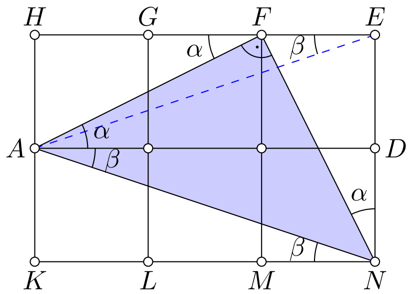
Aus der ersten Gleichung erhält man $c = \frac{a^2}{d}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, kommt man zu $2(\frac{a^2}{d} + d) = 8a$ und erhält $d^2 - 4ad + a^2 = 0$.
Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $d_1 = (2+\sqrt{3})a$ und $d^2 = (2-\sqrt{3})a$. Entsprechend kommen als Lösung ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2+\sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2+\sqrt{3}}$ und ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2-\sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2-\sqrt{3}}$ in Frage.
Da aber $\frac{a}{2+\sqrt{3}} = a(2-\sqrt{3})$ ist und entsprechend $\frac{a}{2\sqrt{3}} = a(2+\sqrt{3})$ ist, sind beide Rechtecke identisch. Es gibt also bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck.

Aufgabe 031042:

Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung.
Es ist zu beweisen, dass $\alpha + \beta = 45°$ ist!



Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, dass die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z. B. SSS).
Daher ist $\triangle AFN$ gleichschenklig mit den Basiswinkeln

$$\angle FNA = \angle FAN = \angle FAD + \angle DAN$$

$$\alpha = \angle HFA = \angle FAD \qquad \text{und} \qquad \beta = \angle DAN = \angle ANK$$

sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so dass aus obiger Gleichung

$$\angle FNA = 90° - \alpha - \beta = \angle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45°$.

Aufgabe 111043A:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $AB = AD > BC = CD$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $AB : BC = BC : FB$ gilt.
Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $EC = BC (= CD)$ und $FE = FB$ gilt.
Beweisen Sie, dass E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

Lösung von cyrix:
Aus $EC = BC$ und $FE = FB$ folgt, dass $EBCF$ ebenfalls ein Drachenviereck ist. Die Dreiecke ABC und FBC haben eine gemeinsamen Winkel in B.
Aus $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{FB}$ folgt, dass diese und somit die beiden Drachenvierecke kongruent sind mit $FE = FB < EC = BC$.

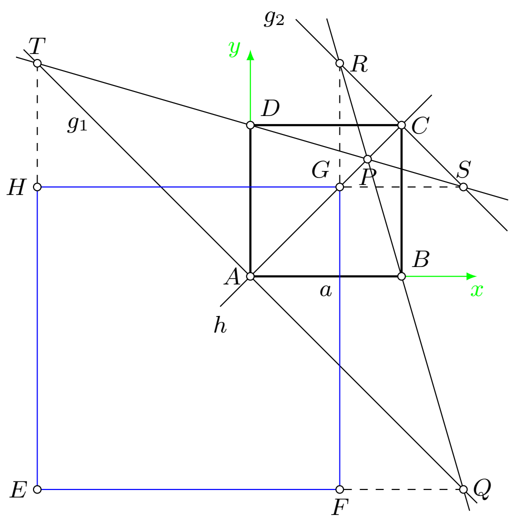
Definiere $\alpha := \angle DAB := \angle BCF$, $\beta = \angle ABC = \angle BCD = \angle EBC = \angle CFB$ und $\gamma := \angle BCD = \angle FEB$. Dann erhalten wir $\angle ECD = \gamma - \alpha$. Da das Dreieck ECD gleichschenklig mit Basis ED ist, gilt $\angle CDE = 90° - \frac{\gamma-\alpha}{2}$ und somit

$$\angle EDA = \angle CDA - \angle CDE = \beta - (90° - \frac{\gamma - \alpha}{2}) = \frac{2\beta + \gamma + \alpha - 2\alpha}{2} - 90° = 90° - \alpha = 90° - \angle DAB$$

Also schneidet die Gerade ED die Strecke AB im rechten Winkel.

Aufgabe 111045:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrates verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2.
Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt.
Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, dass $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$.

Lösung von Steffen Polster:



Zur Lösung der Aufgabe wird ein Koordinatensystem derart eingeführt, dass A im Koordinatenursprung liegt und AB auf der x-Achse sowie AD auf der y-Achse liegen.
Dann haben die Punkte die Koordinaten: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$ und $D(0;a)$. Der Punkt P auf AC (Funktion $y = x$) habe die Koordinaten $P(p;p)$. Die Gerade h liegt dann auf der linearen Funktion $y = x$, die Gerade g_1 durch A auf $y = -x \quad (1)$ und die Gerade g_2 durch C auf $y = -x + 2a \quad (2)$. Für die Gerade durch B und P ermittelt man

$$g(BP): \quad y = \frac{p}{p-a}x - \frac{pa}{p-a} \tag{3}$$

und für die Gerade durch D und P

$$g(DP): \quad y = \frac{p-a}{p}x + a \tag{4}$$

Lösen der Gleichungssysteme aus (2) und (3) bzw. (4) ergibt die Koordinaten der Punktes R und S zu:

$$R\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{ap}{2p-a}\right) \qquad ; \qquad S\left(\frac{ap}{2p-a}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

Auf Grund der symmetrischen Lage beider Punkte zu $y = x$ sind deren x- und y-Koordinaten vertauscht.
Analog ergibt sich aus den Gleichungssystemen aus (1) und (3) bzw. (4):

$$Q\left(\frac{ap}{2p-a}; \frac{ap}{a-2p}\right) \qquad ; \qquad T\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{ap}{2p-a}\right)$$

Wie man der Darstellung entnimmt, folgen daraus die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks $EFGH$ zu:

$$E\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{ap}{a-2p}\right); F\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{ap}{a-2p}\right); G\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right); H\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

und für die Seitenlängen des Rechtecks

$$EF = FG = GH = HE = 2a$$

Damit ist der Flächeninhalte $I_2 = 4a^2$ des Rechtecks $EFGH$ viermal so groß, wie der Flächeninhalt $I_1 = a^2$ des Ausgangsquadrates $ABCD$, d. h. $I_1 : I_2 = 1 : 4$.

Aufgabe 121041:
a) Zeigen Sie, dass es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist!
Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitz sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

Lösung von cyrix:
a) In einem konvexen n-Eck beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2) \cdot 180°$. Da in einem solchen konvexen n-Eck alle Innenwinkel kleiner als 180° und die spitzen jeweils kleiner als 90° sind, folgt also $(n-2) \cdot 180° < m \cdot 90° + (n-m) \cdot 180°$ bzw. $n - 2 < n - \frac{m}{2}$ und damit $m < 4$.

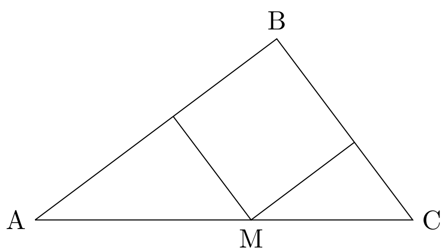
b) Es ist $m = 3$, wie etwa ein gleichseitiges Dreieck zeigt.

c) Sei $n \geq 3$ gegeben und der Winkel ε definiert als $\varepsilon = \frac{90°}{n}$, dann gilt $0 < \varepsilon < 90°$. Wählt man nun drei Winkel mit der Größe $90° - \varepsilon$ und für $n - 3$ Winkel jeweils die Größe $180° - \varepsilon$, dann ist deren Summe genau $3 \cdot 90° + (n-3) \cdot 180° - n \cdot \varepsilon = (n-2) \cdot 180°$, sodass man diese $3 + (n-3) = n$ Winkel als Innenwinkel eines konvexen n-Ecks verwenden kann.
Dies hat dabei wegen $180° - \varepsilon > 180° - 90° = 90°$ auch nur genau drei spitze Innenwinkel.

Aufgabe 121043A:
a) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat!
b) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $AB = AD = x$, $CB = CD = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat!
c) Man beweise! Sind M und U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt:

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



a,b) Der Inkreismittelpunkt ist durch den Schnittpunkt der Diagonale AC und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ gegeben. Falls $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist, so liegt B auf dem Thaleskreis über AC, welcher dann der Umkreis des Drachenvierecks ist.
c) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt: $\frac{xy}{2} = \rho^2 + \frac{(x-\rho)\rho}{2} + \frac{(x-\rho)\rho}{2}$ und somit $\rho = \frac{xy}{x+y}$. Wegen der Kongruenz der Dreiecke in der Skizze erhalten wir $\frac{|MC|}{\rho} = \frac{2r}{x} \Rightarrow |MC| = \frac{2\rho r}{x}$ und somit

$$|MU|^2 = (r - |MC|)^2 = \left(r - \frac{2\rho r}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2\rho}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2y}{x+y}\right)^2 = r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt: Aus $r = \frac{1}{2}AC$, $\rho < x + y$ und

$$4r^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2\rho(x+y) \Rightarrow \rho^2 + 4r^2 = (x+y-\rho)^2$$

folgt

$$\begin{aligned} r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2} = & r^2 + \rho^2 - \rho(x+y-\rho) \\ =& r^2 + 2\rho^2 - xy = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} - xy \\ =& \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x+y)^2\right) \\ =& \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 - 4x^3y - 4xy^3\right) \\ =& \frac{x^2+y^2}{4(x+y)^2}\left((x+y)^2 - 4xy\right) \\ =& r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 141042:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt:

$$\frac{a}{c} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Der Beweis erfolgt ähnlich zur Aufgabe 141032.
Seien die Innenwinkel des Tangentenvierecks durch $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ gegeben, so dass z. B. das Dreieck ABM die Innenwinkel α,β und $180° - \alpha - \beta$ hat. Nach dem Sinussatz in den Dreiecken ABM und BCM gilt

$$\frac{a}{AM} = \frac{\sin(180° - \alpha - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{b}{CM} = \frac{\sin(180° - \beta - \gamma)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} \; .$$

Division der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{a}{AM} \cdot \frac{CM}{b} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \iff \frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \; .$$

Für b,c erhalten wir entsprechend

$$\frac{b}{c} = \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\gamma+\delta)} \; .$$

Multiplikation beider Gleichungen ergibt

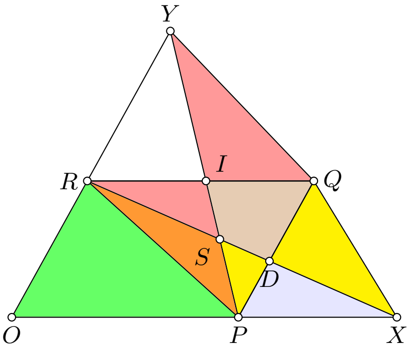
$$\frac{a}{c} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\delta)} \overset{!}{=} \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM} \; .$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, also

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180° - \gamma - \delta) = \sin(\gamma+\delta)$$

Aufgabe 161041:
Man beweise den folgenden Satz!
Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf seiner Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf seiner Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Hauptüberlegung bei dieser Aufgabe ist, dass die gelben und roten Dreiecke $\triangle RPD$ und $\triangle QDX$ sowie $\triangle RPI$ und $\triangle YIQ$ flächeninhaltsgleich sind. Das überlegt man sich wie folgt (ich zeige das für die gelben):

Das $\triangle RPQ$ ist flächeninhaltsgleich zum $\triangle RXQ$, da hier nur eine Scherung stattfindet (beide Dreiecke haben die gleiche Grundseite und Höhe). Diese beiden Dreiecke setzen sich jeweils nun aus dem Dreieck RDQ und einem gelben Dreieck zusammen, womit die Behauptung folgt. Für die roten Dreiecke läuft es analog.

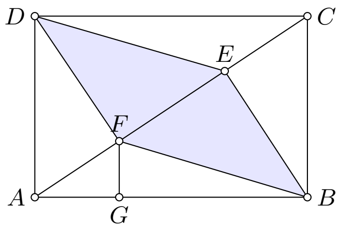
Der Flächeninhalt des Vierecks OPSR setzt sich nun zusammen aus dem halben Parallelogramm und dem Dreieck RSP. Die Fläche des Viereck $SXQY$ berechnet sich als

$$A = A_{\text{rot}} + A_{\text{gelb}} + (A_{\text{halbes Parallelogramm}} - A_{\text{rot}} - A_{\text{gelb}} + A_{\triangle RSP})$$

womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 161045:
Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q-mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.
Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Da die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a die Länge $d = a\sqrt{2}$ besitzt und die Diagonalen im Quadrat senkrecht aufeinander stehen, verschwindet das Viereck $FBED$ für $q = \sqrt{2}$. Wir unterscheiden nun die Fälle $q > \sqrt{2}$ und $q < \sqrt{2}$:



1. Fall: $q > \sqrt{2}$
Zunächst einmal definieren wir folgende Variablen: Sei $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{EC}| = |\overline{AF}|$ und $h := |\overline{FG}|$, wobei G der Lotfußpunkt von F auf die Seite AB ist.

Aus Symmetriegründen reicht es, dass wir den Flächeninhalt von Dreieck FBE berechnen und diesen anschließend verdoppeln.
Dafür stellen wir zunächst einmal fest, dass die Dreiecke ABF und CEB offensichtlich den gleichen Flächeninhalt haben, da sie zusammen mit Dreieck FBE jeweils ein Dreieck mit gleicher Höhe und Grundseite bilden. Wir berechnen nun zunächst den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ in Abhängigkeit von a und q. Laut Voraussetzung ist $x = q \cdot b$. Nun ist $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Einsetzen und quadrieren liefert:

$$a^2 + b^2 = q^2 b^2$$
$$a^2 = q^2 b^2 - b^2 = b^2(q^2 - 1)$$
$$b^2 = \frac{a^2}{q^2 - 1} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2 - 1}$$

Damit:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}}{2(q^2 - 1)}$$

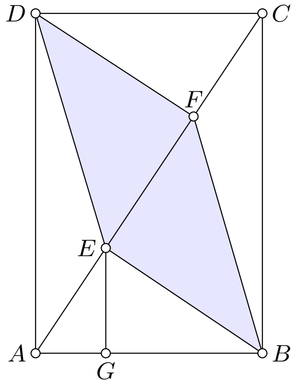
Laut Kathetensatz gilt im Dreieck ABC nun $b^2 = zx \iff z = \frac{b^2}{x}$.

Nach Strahlensatz gilt $\frac{b}{h} = \frac{x}{z} \iff h = \frac{bz}{x}$. Einsetzen liefert:

$$h = \frac{b \cdot \frac{b^2}{x}}{x} = \frac{b^3}{x^2} = \frac{b^3}{q^2 b^2} = \frac{b}{q^2} = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2(q^2 - 1)}$$

Der Flächeninhalt des Vierecks beträgt also:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2-1}}{2(q^2-1)} - 2 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{q^2-1}}{2q^2(q^2-1)} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(q^2-2)}{q^2(q^2-1)}$$



2. Fall: $q < \sqrt{2}$
Für $q < \sqrt{2}$ ändert sich die Reihenfolge von E und F auf der Diagonalen. Sei nun also $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{FC}| = |\overline{AE}|$ und $h := |\overline{EG}|$, wobei G der Lotfußpunt von E auf die Seite AB ist.

Nun gilt nach Kathetensatz $a^2 = zx \iff z = \frac{a^2}{x}$. Eingesetzt:

$$h = \frac{b \cdot \frac{a^2}{x}}{x} = \frac{a^2 b}{x^2} = \frac{a^2 b}{q^2 b^2} = \frac{a^2}{q^2 b} = \frac{a^2(q^2-1)}{q^2 a\sqrt{q^2-1}} = \frac{a\sqrt{q^2-1}}{q^2}$$

Der Flächeninhalt beträgt somit:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2-1}}{2(q^2-1)} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{q^2-1} \cdot a}{2q^2} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(q^2-2(q^2-1))}{q^2(q^2-1)} = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(2-q^2)}{q^2(q^2-1)}$$

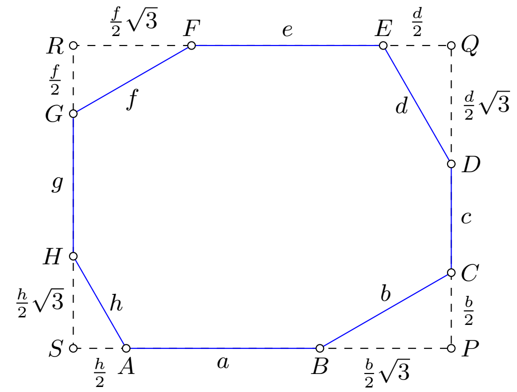
Somit folgt für den Flächeninhalt $A = \dfrac{a^2\sqrt{q^2-1}|q^2-2|}{q^2(q^2-1)}$

Aufgabe 211042:
Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $XY \leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $PQ = d$ beträgt.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob man jede Viereckfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!
Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Lösung von Nuramon:
So eine Zerlegung ist nicht immer möglich.
Es seien A,B,C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und es sei M der Mittelpunkt dieses Dreiecks. Dann hat das konkave Viereck $AMBC$ Durchmesser 1.
Zerlegt man $AMBC$ in zwei Teilflächen, so muss nach Schubfachprinzip eine dieser Teilflächen mindestens zwei der Punkte A,B,C enthalten und hat somit einen Durchmesser von mindestens 1.

Aufgabe 231046:
Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:
(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.
(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:
In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$ und $DE = HA$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Geraden durch A und B bzw. C und D bzw. E und F bzw. G und H mögen einander in den Punkten S, P, Q, R schneiden, wie es die Abbildung zeigt.
Dann ist $SPQR$ ein Rechteck, da die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG wegen der Sätze über Nebenwinkel und über die Winkelsumme im Dreieck rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei S, P, Q und R sind. Es gilt nämlich:

Die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG haben nach dem Nebenwinkelsatz je einen Winkel von 30° und einen Winkel von 60°, und zwar so, dass o. B. d. A.

$$\angle SAH = \angle PCB = \angle QED = \angle RGF = 60^\circ \qquad \text{sowie}$$

$$\angle SHA = \angle PBC = \angle QDE = \angle RFG = 30^\circ$$

gilt. Es sei nun ferner $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $EF = e$, $FG = f$, $GH = g$ und $HA = h$.
Nach einem bekannten Satz über gleichseitige Dreiecke gilt dann: $AS = \frac{h}{2}$, $PC = \frac{b}{2}$, $EQ = \frac{d}{2}$, $GR = \frac{f}{2}$ sowie

$$SH = \frac{h}{2}\sqrt{3}, \quad BM = \frac{b}{2}\sqrt{3}, \quad DQ = \frac{d}{2}\sqrt{3}, \quad RF = \frac{f}{2}\sqrt{3}$$

Da $SPQR$ ein Rechteck ist, gilt $SP = QR$ und $SR = PQ$, also

$$\frac{h}{2} + a + \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{f}{2}\sqrt{3} + e + \frac{d}{2} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{h}{2}\sqrt{3} + g + \frac{f}{2} = \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

woraus man

$$\sqrt{3}\left(\frac{b}{2} - \frac{f}{2}\right) = e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{3}\left(\frac{h}{2} - \frac{d}{2}\right) = \frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2}$$

erhält. Da die Maßzahlen von a,b,c,d,e,f,g,h laut Aufgabe rationalen Zahlen sein sollen, muss $\frac{b}{2} - \frac{f}{2} = 0$ und $\frac{h}{2} - \frac{d}{2} = 0$, also $b = f$ und $h = d$ gelten.
Wegen $e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} = 0$ und $\frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2} = 0$ folgt schließlich $e = a$ und $c = g$.
Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 321043A:
Zeigen Sie, dass es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, das heißt: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; $\ldots$; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.
(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:
(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2 \ldots P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1P_n \ldots P_{k+2}P_{k+1}$ über.
(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Streckenzug $P_{k+1}P_k \ldots P_2P_1$) abgebildet.
Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind.
Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. Freilich können Sie genaues Zeichnen auch durch - dann lückenlos zu gebende - Konstruktionsbeschreibung ersetzen.

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst ein paar grundsätzliche Überlegungen:

Zu Punkt (2.1): Der Streckenzug $P_1P_2\dots P_{k-1}P_k$ umfasst k Punkte, der Streckenzug $P_1P_nP_{n-1}\dots P_{k+2}P_{k+1}$ umfasst $n-k+1$ Punkte. Da durch die Drehung der eine auf den anderen Streckenzug abgebildet werden soll, muss die Anzahl der Punkte gleich sein. Daher gilt $k = n - k + 1$ beziehungsweise $n = 2k - 1$. Das Polygon hat daher eine ungerade Anzahl an Punkten.

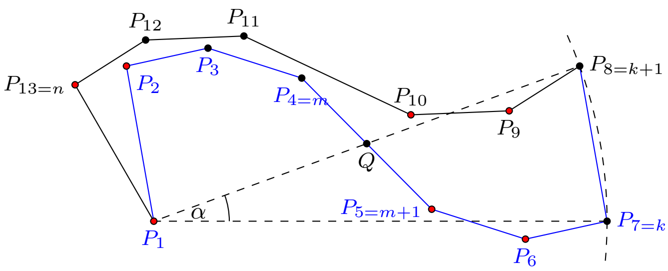
Zu Punkt (2.2): Da der Streckenzug $P_1P_2\dots P_kP_{k+1}$ durch Punktspiegelung auf sich selbst abgebildet wird, kann k nicht gerade sein.

Beweis:
Angenommen, $k = 2m$ sei gerade. Dann hat der zu spiegelnde Streckenzug $k + 1 = 2m + 1$ Punkte. Das heißt, der Punkt P_{m+1} müsste dem Punkt Q entsprechen, an dem gespiegelt wird, weil er dem „mittleren“ Punkt in der Reihenfolge entspricht und er daher auf sich selbst abgebildet werden muss. Wenn dann aber P_m an P_{m+1} gespiegelt wird, um P_{m+2} zu ergeben, dann liegen P_m, P_{m+1} und P_{m+2} auf einer Geraden und P_{m+1} wäre kein Eckpunkt.

Somit ist k ungerade, also $k = 2m - 1$ mit $m > 1$. Nun wird P_1 auf P_{2m} abgebildet, und P_m auf P_{m+1}. Der Spiegelpunkt Q ist somit die Mitte der Strecke P_mP_{m+1} als auch der Strecke P_1P_{k+1}.

Aus $k = 2m-1$ folgt außerdem $n = 4m-3$. Nachfolgend eine Zeichnung zur Erläuterung der Konstruktion. In diesem Beispiel wurde $m = 4$ gewählt. Die rot dargestellten Punkte P_3 und P_4 sind von den 13 Punkten die einzigen, die man frei wählen kann bei Vorgabe eines Drehwinkels α, alle anderen ergeben sich aus einer Konstruktionsvorschrift.

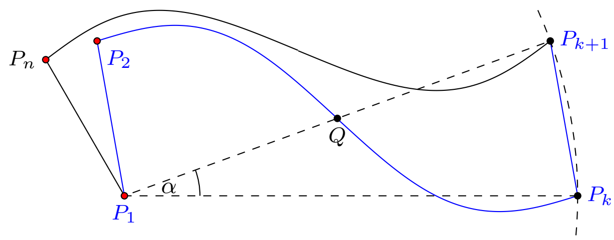
Da hier $m = 4$ gewählt wurde, ist $k = 7$ und $n = 13$. Vorgegeben werden o. B. d. A. die Punkte P_1 und P_k sowie der Drehwinkel $\alpha = 20°$.



Konstruktionsschritte:

1. P_8 ergibt sich wegen (2.1) durch die Drehung von P_7 um den Winkel α um P_1.
2. Q ist der Mittelpunkt der Strecke P_1P_8, wie in den Vorüberlegungen festgehalten.
3. Spiegelung von P_7 an Q ergibt P_2. Das Viereck $P_1P_7P_8P_2$ ist daher ein Parallelogramm, woraus sich zwangsläufig die S-Form des Streckenzuges $P_2...P_7$ ergibt.
4. Punkte P_3 und P_4 können relativ frei gewählt werden, Punkte P_5 und P_6 ergeben sich durch Spiegelung an Q. Wichtig ist, dass die Streckenlängen P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 und P_1Q streng monoton ansteigen. Eine Verkleinerung des Radius an irgendeinem Punkt würde ein „Zacken“ nach innen bedeuten, so dass das schwarze Polygon unweigerlich das blaue Polygon kreuzen würde, was laut Aufgabenstellung nicht sein darf.
5. Die Punkte P_9 bis P_{13} entstehen durch Drehung der Punkte P_2 bis P_6 um den Winkel α am Punkt P_1. Der blau hervorgehobene Streckenzug ist derjenige, der durch Punktspiegelung an Q auf sich selbst abgebildet wird.

Anmerkung:



Man kann zwischen P_2 und Q natürlich beliebig viele Punkte einfügen.
Solange diese nicht ein relativ enges Band verlassen, ist es möglich, dass umlaufend der Abstand zu P_1 nicht streng monoton wächst. Je größer der Winkel wird, um so kleiner wird diese Bandbreite. Bei unendlich vielen Punkten kann der Polygonzug zu einer Kurve werden. Die dargestellte Kurve ist eine Spirale mit linear wachsendem Abstand zu P_1, wodurch sich ein konstanter Abstand zwischen der schwarzen und der blauen Kurve ergibt. Wenn dieser auf null zusammenschmilzt, ist der maximale Drehwinkel erreicht. Die Kurve ist dann nur ein Kreis (quasi eine Spirale mit Steigung null), und das tritt ein, wenn $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1Q}$ ist. Dann gilt

$$\sin\frac{\alpha_{max}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{P_1Q}}{2\overline{P_1Q}} = \frac{1}{4} \qquad ; \qquad \alpha_{max} = 2\arcsin\frac{1}{4} \approx 28{,}955^\circ$$

Der Abstand zwischen den Kurven (radial von P_1 aus betrachtet) ist

$$\Delta(\alpha) = \frac{\alpha(1-4\sin\frac{\alpha}{2})}{\pi-\alpha}\overline{P_1P_k}$$

Leitet man das nach α ab, um den maximal möglichen Abstand zwischen den Kurven zu bestimmen, erhält man eine transzendente Gleichung für den optimalen Winkel:

$$\pi(1-4\sin\tfrac{\alpha}{2}) - 2\alpha(\pi-\alpha)\cos\tfrac{\alpha}{2} = 0$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden, man erhält $\alpha_{opt} \approx 15{,}032^\circ$.
Selbst bei diesem optimalen Drehwinkel, der größtmöglichen Platz zwischen den beiden Kurven erzeugt, ist der Abstand $\Delta(\alpha)$ nur etwa ein Dreiundzwanzigstel der Streckenlänge P_1P_k.

Aufgabe 331043:
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
a) Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.
b) Man ermittle diesen Flächeninhalt f, formelmäßig durch die Seitenlänge a des Achtecks ausgedrückt.

Lösung von cyrix:
Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos(45^\circ) = 2r^2 - 2r^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-2}\cdot a = \frac{4+2\sqrt{2}}{4}\cdot a^2$$

und damit

$$r = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4+2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o. B. d. A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0° \leq \angle P_1AS_1 < 45°$. Damit ist $0° < \angle S_1AP_2 \leq 45°$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45° + 45° = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0° + 90° = 90°$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90° = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45° - \angle S_1AP_2 = 45° - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45° - 90° + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.

Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, $\square$.

Aufgabe 341042:
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine reelle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S, y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $triangleACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a + 1 - a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

mit $p := r + r^2 - 1$ und $q := r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

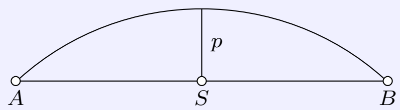
II.III Kreise; Ellipsen

I Runde 1

Aufgabe V01010:
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Lösung von MontyPythagoras:
Der Nagel weist den besten Halt auf, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Bei gleicher Fläche (von 1 cm^2) hat ein Dreieck den größten Umfang, vor dem Quadrat und dem Kreis. Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

Aufgabe V01014:



Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s;p)$?

Lösung von StrgAltEntf:
Es sei M der Kreismittelpunkt. Dann bildet MSA ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten AS und MS und der Hypotenuse AM.
Die Seitenlängen sind $\frac{s}{2}$, $r-p$ und r. Nach Pythagoras gilt $(\frac{s}{2})^2+(r-p)^2=r^2$. Diese Gleichung nach r aufgelöst ergibt

$$r = r(s,p) = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2}$$

Aufgabe V01016:
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Radius des kleinsten Kreises ist nach b) $r = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_1, r_2, r_3 und r_4. Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r^2 \quad ; \quad F_2 = \pi(r_1^2 - r^2) \quad ; \quad F_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$
$$F_4 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \quad ; \quad F_5 = \pi(r_4^2 - r_3^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r^2 = \pi(r_1^2 - r^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$r^2 = r_1^2 - r^2 \Rightarrow 2r^2 = r_1^2 \Rightarrow r_1 = r\sqrt{2}$$
$$r_1^2 - r^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 - r^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r\sqrt{3}$$
$$r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r\sqrt{4}$$
$$r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r\sqrt{5}$$

Die Kreise haben folgende Radien: $r = 2$ cm, $r_1 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_3 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_4 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Aufgabe V11014:
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Lösung von svrc:
Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse gerade die Summe des Erdradius und der Höhe des Fernsehturms ist. Wir setzen dafür $c = 6370{,}5$km. Die bekannte Kathete ist der Erdradius und wir schreiben dafür $a = 6370$km. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da die gesuchte Kathete b tangential am Erdgroßkreis anliegt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 = c^2 - a^2 = (6370{,}5\text{km})^2 - (6370\text{km})^2 = 6370{,}25\text{km}^2$$

und somit

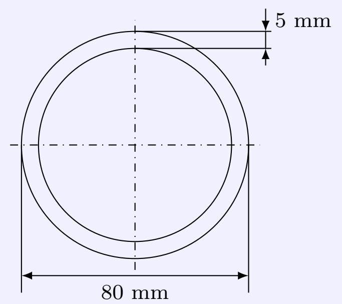
$$b \approx 79{,}8\text{km}.$$

Das bedeutet, dass man vom Fernsehturm etwa 79,8km weit sehen kann.

Aufgabe 021012:

Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben ($d = 80$ mm, $h = 15$ mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung).

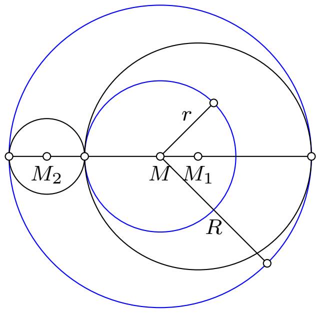
Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?



Lösung von André Lanka:
Während früher für eine Scheibe $\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \approx 75400$ mm^3 Messing benötigt wurden, können heute $\frac{\pi}{4} \cdot (d - 10\text{ mm})^2 \cdot h \approx 57700$ mm^3 eingespart werden. Es werden jetzt also nur noch 17700 mm^3 Messing benötigt.
Jetzt können ungefähr 4,25 Scheiben aus der Menge Messing gefertigt werden, die früher für eine Scheibe reichte.

Aufgabe 021014:
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.
a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle)!
b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle)?

Lösung von André Lanka:



Es gibt zwei verschiedene Fälle:
1. Der innere Kreis wird von dem zu konstruierenden Kreis umschlossen.
2. Der innere Kreis liegt nicht in dem zu konstruierenden Kreis.
a) Man zeichnet einen beliebigen Durchmesser in den großen Kreis. Für den 2. Fall halbiert man einen der beiden Teile des Durchmessers, der zwischen dem kleinen und dem großen Kreis liegt. Dort liegt der Mittelpunkt M_2 des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist folglich $\frac{R-r}{2}$.
Im 1. Fall halbiert man den Rest des Durchmessers und schlägt um diesen Punkt einen Kreis mit Radius $\frac{R+r}{2}$.
b) Bei 1. liegen alle Mittelpunkte auf einem Kreis mit Radius

$$\frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$$

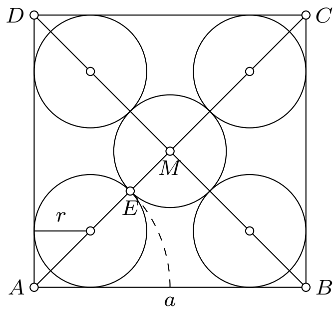
und dem gleichen Mittelpunkt wie die gegebenen konzentrischen Kreise. Im anderen Fall ist es ein Kreis mit dem Radius

$$\frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2}$$

und dem gleichen Mittelpunkt.

Aufgabe 031014:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, dass ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.
a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus! b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Diagonale des Vierecks hat die Länge $a\sqrt{2}$; und sie lässt sich auch in Abhängigkeit von r ausdrücken, und zwar als: $r\sqrt{2} + 4r + r\sqrt{2}$.
Gleichsetzen der beiden Terme führt auf $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.



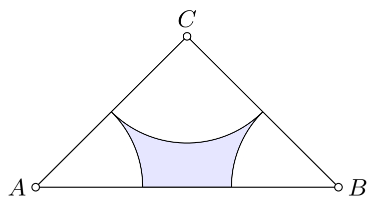
b) Man zeichne das Quadrat $ABCD$ und dessen Diagonalen; deren Schnittpunkt sei M. Von einem der Eckpunkte aus trage man auf der Diagonalen $\frac{a}{2}$ ab und bezeichne den erhaltenen Punkt auf der Diagonalen mit E. Wegen $\frac{a}{2} = r + r\sqrt{2}$ folgt für den gesuchten Radius $r = EM$.

Aufgabe 061011:
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten der Länge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ sind im Inneren um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius von der Länge $r = \frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!

b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt der Flächeninhalt I_K?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$I_D = \frac{a^2}{2} \tag{1}$$

Ferner gilt: $I_K = I_D - I_{D'}$, wobei $I_{D'}$ die Summe der Flächeninhalte der drei im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Kreissektoren ist. Da nach dem Satz des Pythagoras $|AB| = a\sqrt{2} > a$ gilt, schneiden sich die um A bzw. B jeweils mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreise nicht (siehe Bild).

Diese drei Kreissektoren lassen sich zu einer Halbkreisscheibe zusammensetzen, da die Winkelgrößen im Dreieck 180° beträgt. Daher gilt:

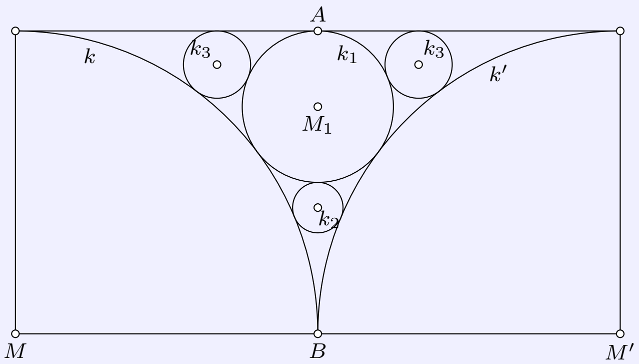
$$\begin{aligned} I_{D'} &= \frac{\pi a^2}{8} \\ I_K &= I_D - I_{D'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{2} \sim 0{,}2146 \cdot \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Wegen (1) beträgt somit der Inhalt I_K rund 21,46% des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

Aufgabe 061013:

In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise auf. Die Längen der Radien r und r' der Kreise k bzw. k' seien bekannt, und es ist $r = r'$.

Berechnen Sie die Längen r_1, r_2 und r_3 der Radien der Kreise k_1, k_2 und k_3!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise k, k', k_1, k_2 und k_3 der Reihe nach mit M, M', M_1, M_2 und M_3, den Berührungspunkt der Kreise k und k' mit B und den nicht auf BM_1 gelegenen Schnittpunkt von k_1 mit g_{BM_1} mit A, dann gilt

$$|MM_1| \quad = \quad r + r_1 \text{ sowie } AB \perp MB \text{ (Bild a)}$$

Außerdem gilt $|AB| = |MB| = r$, und daher $|M_1B| = r - r_1$. Daraus folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_1$, $(r+r_1)^2 = (r-r_1)^2 + r^2$, und somit $4rr_1 = r^2$, d. h. wegen $r > 0$: $r_1 = \frac{r}{4}$.

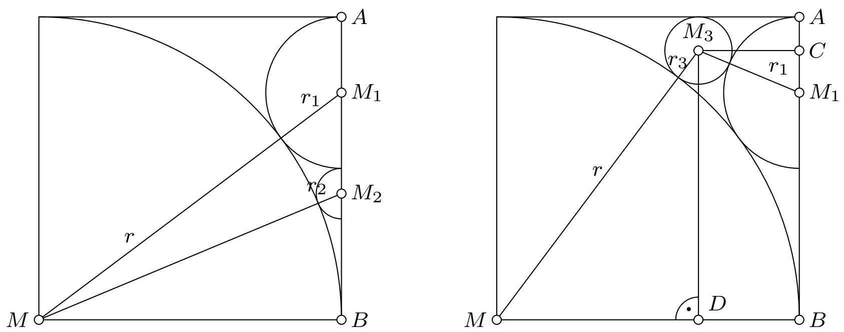
Ferner gilt $|MM_2| = r + r_2$ und $|M_2B| = r \cdot 2r_1 - r_2 = \frac{r}{2} - r_2$, also nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_2$, $(r+r_2)^2 = (\frac{r}{2} - r_2)^2 + r^2$, und somit $3rr_2 = \frac{r^2}{4}$, d. h. wegen $r > 0$: $r_2 = \frac{r}{12}$.

Weiterhin gilt $|M_1M_3| = r_1 + r_3$ und $|M_1C| = r_1 - r_3$, wobei C der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB ist (Bild b).

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle M_1CM_3$, erhält man dann

$$\begin{aligned} |M_3C|^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \\ &= 4r_1r_3 = rr_3, \end{aligned}$$

also $|M_3C| = \sqrt{rr_3}$. Schließlich gilt: $|MM_3| = r + r_3$ und $|M_3D| = r - r_3$, wobei D der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf MB ist, sowie $|MD| = r - |M_3C|$, also $|MD| = r - \sqrt{rr_3}$.



Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MDM_3$, gilt dann

$$\begin{aligned} (r + r_3)^2 &= (r - r_3)^2 + (r - \sqrt{rr_3})^2 \\ (r + r_3)^2 - (r - r_3)^2 &= (r - \sqrt{rr_3})^2 \\ 4rr_3 &= r^2 - 2r\sqrt{rr_3} + rr_3, \\ r - 3r_3 &= 2\sqrt{rr_3}. \text{ (wegen } r > 0) \\ r^2 - 6rr_3 + 9r_3^2 &= 4rr_3 \\ r_3^2 - \frac{10rr_3}{9} + \frac{r^2}{9} = 0, \end{aligned}$$

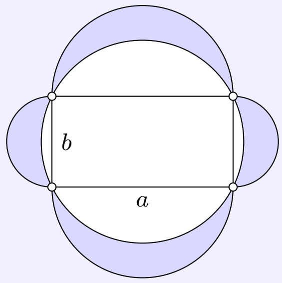
woraus sich für die Lösungen r_{3_1} und r_{3_2} die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_{3_1} &= \frac{5r}{9} + \sqrt{(25r^2 + 9r^2)\frac{1}{81}} = \frac{5r}{9} + 4r9 = r \text{ und} \\ r_{3_2} &= \frac{5r}{9} - 4r9 = \frac{r}{9} \end{aligned}$$

ergeben. Hiernach ist entweder $r_3 = r$ oder $r_3 = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ folgt $r_3 = \frac{r}{9}$. Zusammenfassend gilt also:

$$r_1 = \frac{r}{4}, \quad r_2 = \frac{r}{12} \quad \text{und} \quad r_3 = \frac{r}{9}.$$

Aufgabe 081012:



Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier blauen sichelförmigen Flächen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}\right) = \pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also

$$A_3 = ab.$$

Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

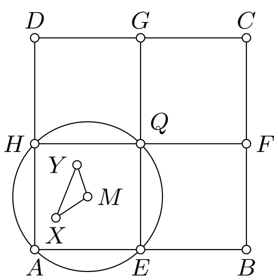
$$A = A_1+A_3-A_2 = \pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+ab-\pi\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe 191011:
Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 22 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, dass kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.

Wie groß muss Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt die folgende Aussage:

(*) Wenn ein Kreis mit dem Radius r zwei Punkte X und Y überdeckt, so ist $XY \leq 2r$. Das Quadrate sei $ABCD$, sein Mittelpunkt sei Q. Angenommen, vier Kreise mit dem Radius $r < 1$ cm haben die verlangte Eigenschaft. Jede Ecke des Quadrates muss dann von einem dieser Kreise überdeckt werden, und der betreffende Kreis kann wegen (*) keine andere Ecke überdecken.
Also muss jeder der vier Kreise eine Ecke des Quadrates überdecken.

Nun gibt es einen der vier Kreise, der Q überdeckt; auch dieser Kreis muss eine Ecke des Quadrates überdecken. Ist dies o. B. d. A. die Ecke A, so folgt nach (*)

$$\sqrt{2}\text{ cm} = AQ \leq 2r \qquad \text{also} \qquad r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ cm}$$

(Haben ferner vier Kreise mit einem Radius $r \geq 1$ cm die verlangte Eigenschaft, so gilt wegen $1 > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ für sie erst recht $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$).

Damit ist in jedem Fall bewiesen:

(I) Vier Kreise der verlangten Eigenschaft haben stets einen Radius $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm.

Ferner gilt:
(II) Wählt man $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm, so haben vier geeignet gelegene Kreise mit diesem Radius bereits die verlangte Eigenschaft.

Um dies zu zeigen, wähle man die Lage der Kreise so, dass sie die Strecken AQ, BQ, CQ bzw. DQ als Durchmesser haben. Sind nämlich E,F,G,H die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD bzw. DA, so überdecken vier so ausgewählte Kreise die Flächen von $HAEQ$, $EBFQ$, $FCGQ$, $GDHQ$ und damit jeden Punkt der Fläche des Quadrates $ABCD$.

Aus (I) und (II) folgt: Möglichst kleine Kreise mit der verlangten Eigenschaft liegen genau dann vor, wenn ihr Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm beträgt; d. h. Dirk muss $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm als Radius der Kreise wählen.

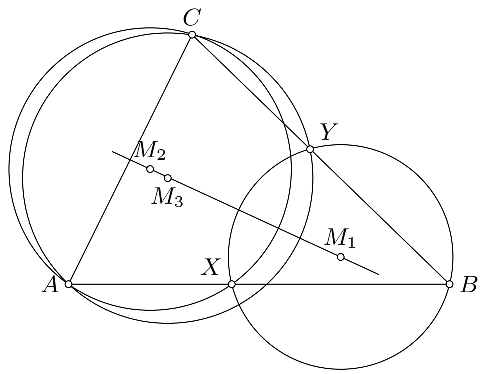
Aufgabe 341014:
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

   Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

   Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

   Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

   Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

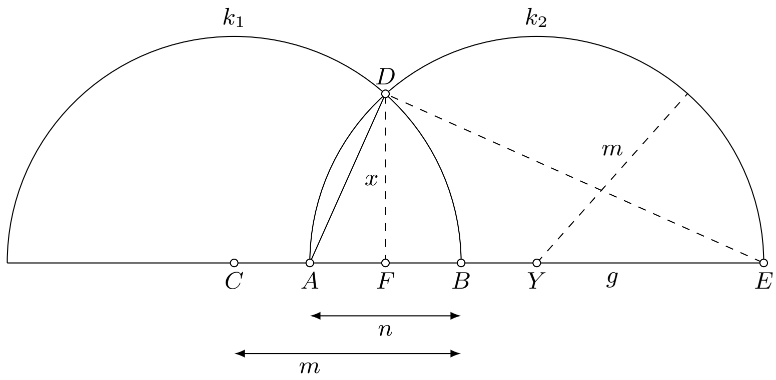
   Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

II Runde 2

Aufgabe 091023:
Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).
a) Führen Sie folgende Konstruktion aus:
Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E.
Von A aus werde die Strecke AB mit $AB = n$ so auf g abgetragen, dass B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $BC = m$ so abgetragen, dass A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich). Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius BC geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.
b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild:



b) Aus der Konstruktion folgt $AB = n \quad ; \quad AY = DY = EY = m$. Ferner ist $AD = x = BD$.
Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n \qquad \text{also} \qquad x = \sqrt{m \cdot n}$$

Aufgabe 171021:
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, dass sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von k_1 erfüllt sind, so haben k_2, k_3 und k_4 Durchmesser der Länge $(d + 1)$ cm, $(d + 2)$ cm bzw. $(d + 3$ cm und es gilt

$$\frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2$$

Hieraus erhält man $d^2 + d^2 + 2d + 1 + d^2 + 4d + 4 = d^3 + 6d + 9$, also $2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.
Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen.
Eine Kontrolle über die Summen der Kreisflächeninhalte bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 171022:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d. h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam.

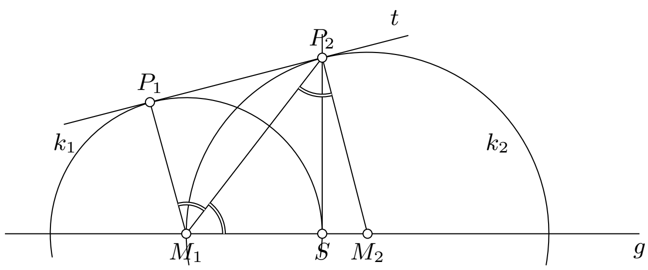
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis (direkt):
B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.
In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $BM > AM$.
Da AM Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises. Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam. Sie ist mithin Tangente des Kreises k.

Aufgabe 181022:
Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:
Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius BC. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.
Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge CD ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Konstruktion gilt $DC = DE = DB$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\angle CBE$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 281023:
Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, dass k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:
Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt: $\angle M_1SP_2 = 90°$ sowie nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $\angle M_1P_1P_2 = 90° \quad (1)$.
Hieraus sowie aus $M1S = M_1P_1$ (Radien von k_1) folgt $\triangle M_1SP_2 \cong \triangle M_1P_1P_2$. Daher gilt $\angle P_2M_1S = \angle P_2M_1P_1 \quad (2)$.
Da ferner $M_2M_1 = M_2P_2$ (Radien von k_2) gilt, folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle P_2M_1S = \angle M_1P_2M_2 \quad (3)$.
Aus (2) und (3) folgt $\angle P_2M_1P_1 = \angle M_1P_2M_2$ und daraus nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes $M_1P_1 \parallel M_2P_2$.
Daher und wegen (1), d. h. $M_1P_1 \perp t$, ist auch $M_2P_2 \perp t$. Nach der Umkehrung des Satzes über Tangente und Berührungsradius folgt daraus, wie behauptet, dass t auch Tangente an k_2 ist.

Der Beweis verläuft ohne jede Änderung für die folgenden Fälle:
(1) S ist innerer Punkt von M_1M_2, (2) S ist äußerer Punkt von M_1M_2 und (3) $S = M_2$.

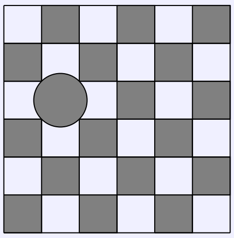
Aufgabe 341022:
Anja und Bernd sprechen darüber, wie man die an den Kreis k, dessen Mittelpunkt M sei, in einen seiner Punkte P gelegte Tangente t vollständig ausreichend beschreiben kann.
Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die auf MP senkrecht steht und mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.
Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen

aus der anderen folgt, d. h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:
(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.
(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.
Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2)!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
(1) Wir nehmen an, dass t noch einen Punkt P' gemeinsam mit k hat. Offensichtlich liegen diese Punkte nicht auf einer Geraden, bilden somit ein Dreieck mit rechten Winkel in P. Da dem größten Winkel immer die längste Seite gegenüberliegt, ist $\overline{MP'}$ die längste Seite, insbesondere also länger als $|\overline{MP}| = r$. Widerspruch.

(2) Wir nehmen an, dass der Winkel kein rechter ist. Da der (kürzeste) Abstand eines Punktes zur Geraden immer das Lot ist, existiert dann auf t ein Punkt P' mit $|\overline{MP'}| < |\overline{MP}| = r$. Somit liegt P' offensichtlich innerhalb des Kreises und t besitzt einen weiteren Punkt mit k. Widerspruch.

Aufgabe 341024:



Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt die Abbildung ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Die Abbildung zeigt einen solchen Umkreis.)

a) Beweisen Sie, dass für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt:
Der Flächeninhalt des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20%.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt!

Lösung von Steffen Polster:
a) O. B. d. A. werde die Breite eines Feldes des Schachbretts mit 1 angenommen. Für eine beliebige Breite a verändert sich das Verhältnis von bedeckter und Gesamtfläche nicht.
Insgesamt gibt es $4n^2$ Felder und damit eine Gesamtfläche $A = 4n^2$.
Ein überdeckender Kreis hat den Radius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und eine Fläche von $A_k = \frac{pi}{2}$.

$2n^2$ Felder sind schwarz und werden mit einem Kreis bedeckt. Jeder dieser Kreise überragt an jeder Seite eines Feldes das Feld um $\frac{1}{4}$ der Differenz zwischen Kreis- und Feldfläche. Benachbarte Umkreise schneiden sich jeweils nur in einem Punkt. Das gilt, da die Diagonalen der weißen Felder Tangenten zu den Umkreisen sind.
Allerdings treten an jedem Rand des Schachbretts n Felder auf, deren Kreis über den Rand hinausragt. Damit ragen insgesamt $4n$ Kreise um jeweils $\frac{1}{4}$ der Kreisfläche über das Schachbrett hinaus.

Damit ist die bedeckte Fläche

$$A_K = 2n^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 4n \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}$$

Der Anteil der bedeckten Fläche ist folglich

$$V = \frac{A_K}{A} = \frac{\pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}}{4n^2} = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$$

Die Zahlenfolge $(a_n) = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$ ist streng monoton wachsend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{\pi - 2}{8n(n+1)} > 0$ $(n > 0)$ ist. Gleichzeitig gilt für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} = \frac{\pi}{4} < 0{,}8$$

D. h., die bedeckte Fläche hat immer einen Anteil kleiner als 80%, die bedeckte somit mehr als 20%.

b) Es ist das kleinste n zu ermitteln, für welches

$$\frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} > \frac{3}{4}$$

wird. Umstellen ergibt

$$n > \frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)}$$

Es ist $3.\overline{1} = \frac{28}{9} < \pi < \frac{22}{7}$ und damit:

$$\frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\pi - 3)} \begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{9}} = 5 \\ > \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{7}} = 4 \end{cases}$$

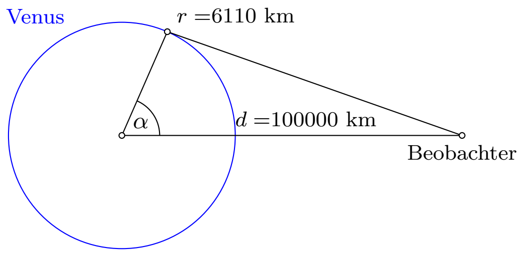
Das kleinste n, für das der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt, ist damit 5.

III Runde 3

Aufgabe V11031:
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

Lösung von MontyPythagoras:
a) Betrachtet man die Himmelskörper wie gefordert näherungsweise als scheibenförmig, dann ist das Raumschiff beim Vorbeiflug 3,84 mal näher als der Mond von der Erde entfernt ist. Außerdem ist die Venus $\frac{12220}{3476}$ mal größer als der Mond, so dass sie einem Beobachter im Raumschiff $\frac{12220}{3476} \cdot 3{,}84 = 13{,}5$ mal größer erscheinen würde als der Vollmond von der Erde aus gesehen.

b) Hier ist man versucht, zu antworten: „den ihm Zugewandten“. Es soll jedoch wohl der tatsächliche Beobachtungswinkel verwendet werden, um prozentual die sichtbare Fläche der Venus anzugeben. Leider lässt uns die Aufgabe auch im Unklaren darüber, ob mit der Entfernung von 100000 km der Abstand zum Schwerpunkt der Venus oder zur Oberfläche gemeint ist. Wir nehmen das erste an:



Es ist $\cos\alpha = \frac{r}{d}$. Die gesamte Oberfläche der Venus ist

$$A_g = 4\pi r^2$$

Der sichtbare Teil ist dagegen

$$A_s = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{d}\right)$$

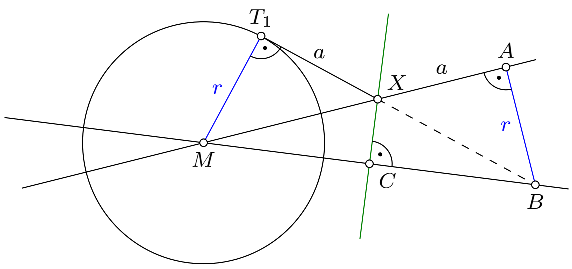
Somit ist der sichtbare Anteil der Oberfläche

$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{1-\frac{r}{d}}{2} = \frac{d-r}{2d}$$

Im vorliegenden Fall entspricht das etwa 46,9% der gesamten Oberfläche.

Aufgabe V11034:
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von MontyPythagoras:



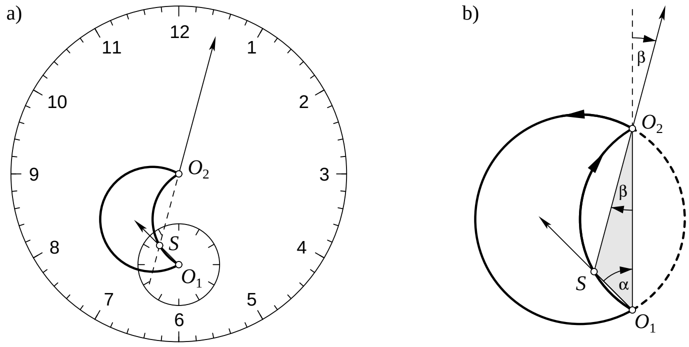
1. Man zeichne Punkt B so, dass die Strecke AB die Länge r (Radius des Kreises) habe und senkrecht stehe auf der Strecke AM, siehe Skizze.
2. Vom Punkt B zeichne man eine Gerade durch M.
3. Man konstruiere den Mittelpunkt C der Strecke MB.
4. Man zeichne eine Senkrechte auf die Gerade MB durch den Punkt C.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden (grün) mit der Geraden AM ist der gesuchte Punkt X.

Begründung:
Man erkennt, dass der Streckenzug MT_1XAB symmetrisch ist bezüglich der „grünen“ Geraden CX. a und r stehen senkrecht aufeinander sowohl im Punkt T_1 als auch im Punkt A. T_1 und X sind zwar anfangs noch unbekannt, aber der Punkt C auf der Symmetrieachse lässt sich mit obigen Schritten einfach konstruieren.

Aufgabe 011034:
Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Ziffernblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Ziffernblattes verläuft.

Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zur gleichen Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Konstruieren Sie diese Kurve für den folgenden Fall:
Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5$ cm (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich so groß gewählt)!
Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenziffernblattes.

Lösung von Eckard Specht:
Das Bild a) zeigt das Ziffernblatt der Armbanduhr und die Stellung der beiden Sekundenzeiger, nachdem beide einen Winkel von 15° überstrichen haben. Die Mittelpunkte der Zeiger seien O_1 bzw. O_2, deren Schnittpunkt S. Es genügt im Folgenden, ausschließlich das Dreieck O_1O_2S zu betrachten (Bild b).



a) Je weiter die Zeit voran schreitet, desto kleiner wird der Winkel α und desto größer der Winkel β. Da beide Zeiger aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit umlaufen, bleibt die Summe $\alpha + \beta$ konstant, die hier gleich dem Differenzwinkel beider Zeiger zu Beginn ist.

Wegen der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck folgt daraus: $\angle O_1SO_2 = 180° - (\alpha + \beta) = \text{const.}$

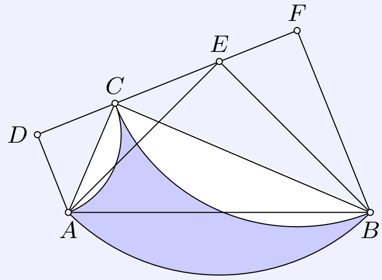
Die Strecke O_1O_2 ist ebenfalls konstant, somit kann der gesuchte geometrische Ort aller Schnittpunkte S nur ein Kreisbogen sein, für den alle Peripheriewinkel über der Sehne O_1O_2 konstant sind.

Erreicht einer der Zeiger die vertikale Richtung, kehrt sich die Umlaufrichtung von S um. Insgesamt ergibt sich somit eine, im Bild gezeigte möndchenförmige Figur.

b) Zur Konstruktion wird derjenige Kreisbogen gezogen, der über der Sehne O_1O_2 einen Peripheriewinkel von $\alpha + \beta$ fasst. Der kleinere der beiden Bögen O_1O_2 wird anschließend an der Geraden durch O_1 und O_2 gespiegelt.

Aufgabe 021031:

Vergleichen Sie die Flächeninhalte der grauen Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!
(Die Dreiecke $\triangle ACD, \triangle ABE$ und $\triangle CBF$ sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)



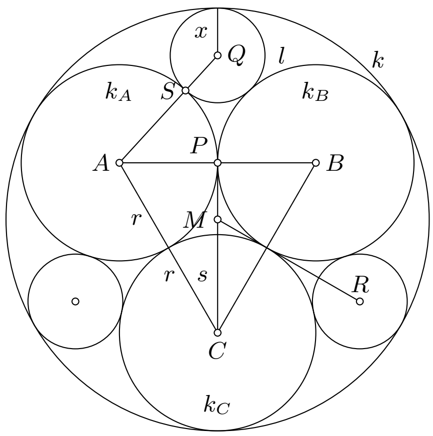
Lösung von Carsten Balleier:
Die graue Fläche besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC, erweitert um den Kreisabschnitt AB und vermindert um die Kreisabschnitte AC und BC.
Man berechne die Fläche eines dieser Abschnitte, hier die Fläche S_{AB} zwischen der Strecke AB und dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Sie ist gleich der Differenz aus dem Viertelkreis mit Mittelpunkt E und Radius AE und dem Dreieck ABE, also

$$S_{AB} = \frac{1}{4}\pi AE^2 - \frac{1}{2}AE^2 = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $AB = AE\sqrt{2}$ im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.
Der letzte Schritt nutzt den Satz des Pythagoras: diese beiden Summanden haben die gleiche Form wie der für S_{AB}, sie sind die anderen beiden Kreisabschnitte S_{AC} und S_{BC}.
Damit haben wir $S_{AB} = S_{AC} + S_{BC}$, d. h. die hinzugefügte Fläche ist genauso groß wie die abgeschnittenen Flächen. Also sind das Bogendreieck und das Geradendreieck ABC flächengleich.

Aufgabe 031035:
Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, dass sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

Lösung von Manuel Naumann:



Seien A, B bzw. C die Mittelpunkte der Kreise k_A, k_B bzw. k_C mit dem Radius r.
Der Abstand des Mittelpunktes M des Kreises k, in den diese drei Kreise einbeschrieben sind, zu den Punkten A, B und C ist aufgrund der Symmetrie gleich. Damit ist M Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Der Radius R des Kreises k ergibt sich nun z. B. durch $R = MA + r$.
Da das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist und seine Seitenlänge a durch $a = 2r$ bestimmt ist, berechnet sich die Länge s einer Seitenhalbierenden mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$s = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$$

Da M Schwerpunkt von $\triangle ABC$ ist, teilt M bekanntermaßen die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Damit hat die Strecke MA eine Länge von $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Deshalb gilt nun für R:

$$R = MA + r = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) r$$

Andererseits berühren sich k_A und k_B in einem Punkt P. Sei Q der Mittelpunkt des Kreises l mit Radius x, der k_A in einem Punkt S und k_B berührt. Dann ergibt sich der Radius R von k aus $R = MP + PQ + x$.
Da $AP = r$ erhält man über den Satz des Pythagoras

$$MP = \sqrt{MA^2 - AP^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Desweiteren gilt, dass $AQ = r + x$. Daraus folgt wieder mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{2rx + x^2}$$

Man findet für R also eine zweite Darstellung durch:

$$R = MP + PQ + x = \frac{r}{\sqrt{3}} + \sqrt{2rx + x^2} + x$$

Es ist nun möglich die beiden gefundenen Darstellungen für R gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach x umzustellen.

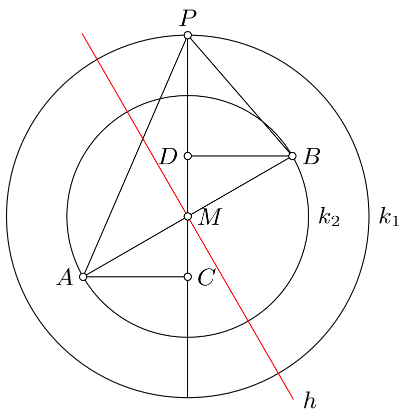
$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)r=\sqrt{2rx+x^2}+\frac{r}{\sqrt{3}}+x \Rightarrow \left(4+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)rx=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)r^2$$

$$x=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{4+\frac{2}{\sqrt{3}}}r \Rightarrow x=\left(\frac{3}{11}+\frac{4\sqrt{3}}{33}\right)\cdot r$$

Aufgabe 051036:
Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.
Man beweise, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes Punktes P auf der äußeren Kreislinie von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises konstant ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien M der Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_1 und k_2 und A und B die Endpunkte eines Durchmessers des inneren Kreises k_2.

Behauptung: $|PA|^2+|PB|^2=c$, wobei c nicht von $P\in k_1$ abhängt.



Beweis:
Es seien C und D die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g_{MP} und h die Senkrechte zu g_{AB} durch M (siehe Abbildung). Liegt P nicht auf h und nicht auf g_{AB}, so fallen C und D nicht mit A, B oder M zusammen, und es gilt für die Dreiecke ACM und BDM

- $|AM>=|BM|$ (als Radien des inneren Kreises)
- $|\angle ACM|=|\angle BDM|$ (als rechte Winkel)
- $|\angle AMC|=|\angle BMD|$ (als Scheitelwinkel)

Folglich sind die Dreiecke ACM und BDM kongruent nach dem Kongruenzsatz (wsw), und es gilt $|CM|=|DM|$ und $|AC|=|BD|$.
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass P auf derselben Seite von h wie B liegt. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle ACP$

$$|AP|^2=|AC|^2+(|CM|+|MP|)^2$$

sowie, angewandt auf $\triangle BPD$,

$$|BP|^2=|BD|^2+(|MP|-|DM|)^2$$

Wegen $|BD|=|AC|$ und $|DM|=|CM|$ folgt daraus

$$|BP|^2=|AC|^2+(|MP|-|CM|)^2$$

Also ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AC|^2 + |CM|^2 + 2|CM| \cdot |MP| + |MP|^2 + |AC|^2 + |MP|^2 - 2|CM| \cdot |MP| + |CM|^2 =$$

$$= 2\left(|AC|^2 + |CM|^2 + |MP|^2\right)$$

Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle ACM$

$$|AM|^2 = |AC|^2 + |CM|^2$$

und somit ist

$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

da $|AM|$ und $|MP|$ die Radien der konzentrischen Kreise sind.
Liegt P auf g_{AB} und zwar o. B. d. A. auf der Verlängerung von AB über B hinaus, erhält man

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |BM|)^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (|AM| + |MP|)^2 + (|MP| - |AM|)^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Liegt P auf h, so erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle AMP$ und $\triangle MBP$

$$|AP|^2 + |BP|^2 = |AM|^2 + |MP|^2 + |MP|^2 + |BM|^2$$

und wegen $|AM| = |BM|$

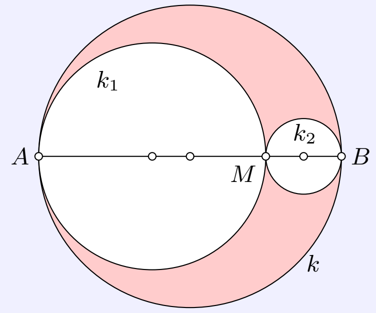
$$|AP|^2 + |BP|^2 = 2\left(|AM|^2 + |MP|^2\right) = c$$

Aufgabe 081035:
Beweisen Sie folgende Behauptung:
Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt der Satz:
Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.
M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen eines Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so dass G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.
Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist $\angle KGH + \angle GHL = 90°$.

Durch Übergang zu den Zentriwinkeln folgt $\angle KMH + \angle GML = 180°$. Ersetzt man hierin links jeden Summanden durch seine Ergänzung zu 180°, so folgt (da die Summe ebenfalls 180° betrug) wieder $\angle KCH + \angle GAL = 180°$.
Nach dem eingangs erwähnten Satz folgt hieraus die Behauptung.

Aufgabe 131035:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser AB der Länge d.
In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, dass sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so dass also $AM+MB = AB$ gilt.
Dabei sei $AM \geq MB$.
Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.
Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser farbigen Fläche am größten ist!



Lösung von Steffen Polster:
Die Länge der Strecke AM sei x. Dann wird der Flächeninhalt der farbigen Fläche

$$A = A_k - A_{k_1} - A_{k_2} = \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}(d-x)^2$$

Der Flächeninhalt A ist damit eine Funktion von x. Vereinfachen ergibt:

$$A = -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi d}{2}x = -\frac{\pi}{2}(x^2 - dx) = -\frac{\pi}{2}\left(\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\pi d^2}{8}$$

Der Flächeninhalt A wird maximal, wenn $\left(x - \frac{d}{2}\right)^2$ Null wird, d. h. für $x = \frac{d}{2}$. Der Flächeninhalt der farbigen Fläche wird somit maximal, wenn der Berührungspunkt M im Mittelpunkte des Kreises k liegt, d. h. $AM = \frac{d}{2}$.

Aufgabe 171036:
Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, dass A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, dass unter allen so entstandenen Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und dass diese für genau einen Wert r'_1 von r' zustande kommen!
Drücken Sie diesen Wert r'_1 und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, dass für den Wert r'_1 auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben!
Beweisen Sie, dass es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt, und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, dass es genau einen Wert r'_2 von r' mit folgender Eigenschaft gibt:
Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt!
Drücken Sie diesen Wert r'_2 und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn BC maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist:
Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r.
Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $B_1C_1 = 2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $MA_1 = r\sqrt{3}$ als Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $R' = r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt sich

$$F_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot MA_1 = r^2\sqrt{3}$$

b) Sind $M, r_1', A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1, bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_0 bzw C_0. Bei Spiegelung an der Geraden durch A, und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_0 in C_0 über.
Daher ist $\triangle A_1B_0C_0$ gleichschenklig mit $A_1B_0 = A_1C_0$, wegen $\angle B_0A_1C_0 = 60°$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt.

Weiter ist $\triangle MB_1B_0$ gleichschenklig mit $MB_1 = MB_0$, wegen $\angle MB_1B_0 = 60°$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_0$. Daher wird auch $\triangle MB_0C_0$ mit MB_00MC_0 und $\angle B_0MC_0 = 60°$ gleichseitig, folglich ist $B_0C_0 = r$ und $\triangle A_1B_0C_0$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt

$$F_0 = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} < F_1$$

c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt:
Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt.
Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben.
Damit ist gleichwertig, dass es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2, C_2 mit $B_2C_2 = A_2B_2$ oder, wegen $A_2B_2 = A_2C_2$ äquivalent hierzu, mit $\angle B_2A_2C_2 = 60°$ schneidet.

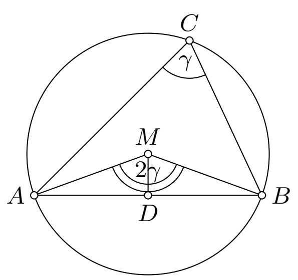
Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\angle MA_2B_2 = 30°$.
Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von 30° bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d. h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, dass r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel 30° beträgt.
Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r_2' bestimmt, und zwar ergibt sich:

Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r_2' = MA_2 = 2MB_2 = 2r$. Die Höhenlänge $A_2B_2 = r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\triangle A_2B_2C_2$; folglich beträgt

$$F_2 = \frac{1}{4}AB^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$$

Aufgabe 191034:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius r und hat $\angle ACB$ die Größe γ, so gilt $\sin\gamma = \frac{AB}{2r}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel $\angle AMB = 2\gamma$.
Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Es gilt $2\gamma \neq 180°$
In dem gleichschenkligen Dreieck ABM ist die Höhe MD zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist $\triangle ADM$ bei D rechtwinklig; es gilt $AD = \frac{1}{2}AB$ und $\angle AMD = \gamma$ in Falle $2\gamma < 180°$ bzw. $\angle AMD = 180° - \gamma$ im Fall $2\gamma > 180°$.
Wegen $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

$$\sin\gamma = \frac{AD}{AM} = \frac{AB}{2r}$$

2. Es gilt $2\gamma = 180°$. Dann ist $AB = 2r, \sin\gamma = \sin 90° = 1 = \frac{AB}{2r}$, w. z. b. w.

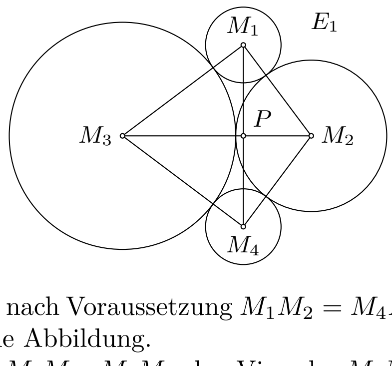
Aufgabe 221032:
Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, dass M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.
Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!
Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\angle APB$ halb so groß ist wie $\angle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

Lösung von cyrix:
Die Tangenten an k durch A und B schneiden sich in einem Punkt, der nicht in der gleichen Halbebene bezüglich g wie M, und damit auch P liegt. Also kann P nicht auf beiden Tangenten gleichzeitig liegen, sodass wir o. B. d. A. annehmen können, dass P nicht auf der Tangenten an k durch A liegt.

Es sei S der neben A zweite Schnittpunkt der Geraden AP mit k.
Dann gilt nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AMB = \angle APB$. Weiterhin stimmen die beiden Dreiecke $\triangle ASB$ und $\triangle APB$ auch im Winkel $\angle BAS = \angle BAP$ und der Seite AB überein, sind also kongruent. Damit folgt aufgrund der gleichen Lage auch direkt $S = P$, sodass P auf k liegt, $\square$.

Aufgabe 271033:
Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, dass sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren.
Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4.
Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.
Folgende Maße seien gegeben: $r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.
Wie groß muss dann h_4 sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für die Mittelpunkte der Kreise gilt nach Voraussetzung $M_1M_2 = M_4M_2 = 3$ cm (1), $M_1M_3 = M_4M_3 = 4$ cm (2) und $M_2M_3 = 5$ cm (3), siehe Abbildung.
Der Schnittpunkt der Diagonalen M_1M_4, M_2M_3 des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ sei P. Wegen (1), (2) in $M_1M_2M_3M_4$ ein Drachenviereck; daher gilt

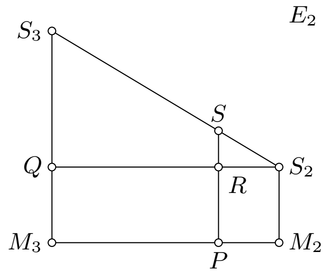
$$M_1P = PM_4 \quad (4) \qquad \text{und} \qquad \angle M_1PM_2 = 90° \quad (5)$$

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ folgt weiterhin nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras aus (1), (2), (3) $\angle M_2M_1M_3 = 90°$ (6).

Aus (5), (6) und $\angle M_1M_2P = \angle M_3M_2M_1$ folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle M_2PM_1 \sim \triangle M_2M_1M_3$, also

$$M_2P : M_2M_1 = M_2M_1 : M_2M_3 \qquad \Rightarrow \qquad M_2P = \frac{9}{5}\text{cm} \tag{7}$$

Da die Strecken M_2S_2 und M_3S_3 auf der Ebene E_1 senkrecht, also zueinander parallel sind, liegen die Punkte M_2, M_3, S_2, S_3 in einer gemeinsamen Ebene und bilden ein Trapez $M_2M_3S_3S_2$, in dem die Seitenlängen $M_2S_2 = h_2$, $M_3S_3 = h_3$ und (3) auftreten. (siehe Abbildung)



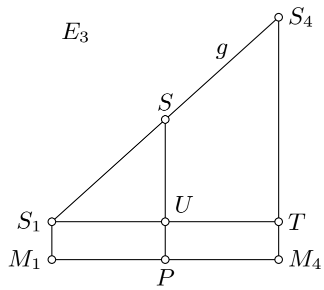
Die Parallele durch S_2 zu M_2M_3 schneidet M_3S_3 in einem Punkt Q, und da hiermit $M_2M_3QS_2$ ein Parallelogramm wird, ergibt sich

$$QS_3 = h_3 - h_2 = 2{,}5\text{cm} \tag{8}$$

Errichtet man die Senkrechte in P auf der Ebene E_1, so ist sie parallel zu M_2S_2 und M_3S_3, schneidet also S_2Q und S_2S_3 in Punkten R und S. Damit wird auch M_2PRS_2 ein Parallelogramm; ferner ergibt sich nach dem Strahlensatz und (3), (7), (8)

$$RS : QS_3 = S_2R : S_2Q = M_2P : M_2M_3 \quad \Rightarrow \quad RS = 0{,}9\text{cm}; \quad PS = h_2 + RS = 3\text{cm} \tag{9}$$

Da M_1S_1 und M_4S_4 ebenfalls auf E_1 senkrecht stehen, liegen M_1, M_4, S_1, S_4 in einer gemeinsamen Ebene E_3; in dieser liegt auch die Strecke PS. (siehe Abbildung)



Daher ist wieder $M_1M_4S_4S_1$ ein Trapez, und die Strecke PS ist parallel zu M_1S_1 und M_4S_4. Ihr Endpunkt S liegt nach seiner Definition auf S_2S_3, also in E_2 und damit auf der Schnittgeraden g von E_3 mit E_2. Auch S_1 und S_4 gehören sowohl zu E_2 als auch zu E_3; also ist g die Gerade durch S_1, S_4; folglich liegt S auf S_1S_4.

Die Parallele durch S_1 zu M_1M_4 schneidet M_4S_4 und PS in Punkten T bzw. U, und da hiermit $M_1M_4TS_1$ und M_1PUS_1 Parallelogramme werden, ergibt sich wegen (9)

$$US = PS - h_1 = 2\text{cm} \tag{10}$$

Aus dem Strahlensatz und (4), (10) erhält man damit

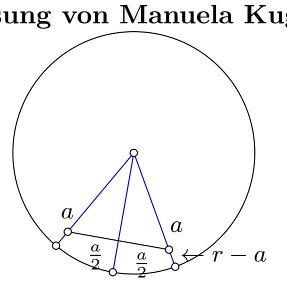
$$TS_4 : US = S_1T : S_1U = M_1M_4 : M_1P = 2 : 1$$
$$TS_4 = 2 \cdot US = 4\text{cm}$$

also die gesuchte Höhe $h_4 = h_1 + TS_4 = 5$ cm.

IV Runde 4

Aufgabe 021043:
Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, dass die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)

Lösung von Manuela Kugel:



Durch die Senkrechte zur Winkelhalbierenden entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Dieses Dreieck hat den Umfang $3a$. Der Rest des Kreisausschnittes hat einen Umfang von $2(r-a)+a+2\pi\frac{\pi}{6}$. Damit beide Umfänge gleich sind, muss

$$a = \frac{2r + 2\pi\frac{r}{6}}{4} = \frac{r}{12}(\pi + 6)$$

sein. Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144}$$

Für den zweiten Flächeninhalt gilt, dass er die Differenz zwischen dem gesamten Kreissegment abzüglich A_1 ist:

$$A_2 = \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144} = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(96\pi - \sqrt{3}(\pi+6)^2\right)$$

Nun gilt $A_1 = A_2 + k$. Wenn $k > 0$, so ist $A_1 > A_2$, wenn $k = 0$, so ist $A_1 = A_2$ und wenn $k < 0$, so ist $A_1 < A_2$. Daher wird nun die Differenz ermittelt:

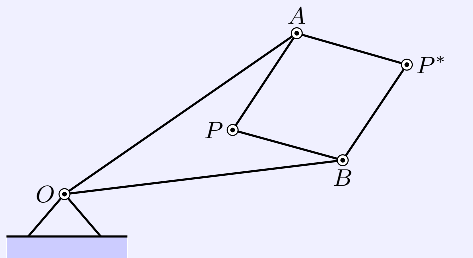
$$k = A_1 - A_2 \qquad = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 96\pi + \sqrt{3}(\pi+6)^2\right) = \frac{r^2}{4\cdot 144}(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 48\pi)$$

Abschätzung nach unten mit $\sqrt{3} < 1{,}8$ und $3{,}15 > \pi > 3{,}14$:

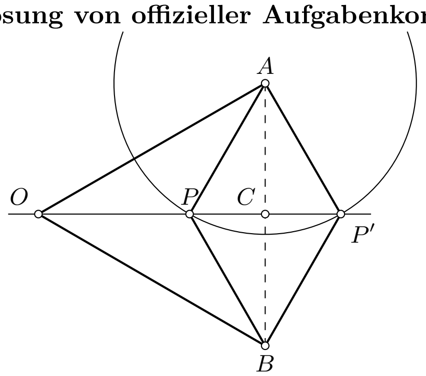
$$k < \frac{r^2}{4\cdot 144}(1{,}8(3{,}15+6)^2 - 48\cdot 3{,}14) < -\frac{0{,}0195}{2\cdot 144}r^2 < 0$$

Indem $k < 0$ gilt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks kleiner als der des abgeschnittenen Kreissegments.

Aufgabe 031045:
Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB (mit $OA = OB$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $OA > AP$.
Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, dass das Produkt der Entfernungen $OP = r$ und $OP^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



1. Lösung
Man betrachte den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Da die beiden Vierecke $AOBP'$ und $APBP'$ Drachenvierecke sind, gilt für ihre Diagonalen $AB \perp OP'$ und $AB \perp PP'$,und demnach liegen O, P und P' auf derselben Geraden.
Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_{AB} ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $APBP'$ und liegt daher auf AB. Er werde mit C bezeichnet. Der Punkt O liegt außerhalb der Strecke PP'.

Läge O auf PP', so hätte die Größe eines der beiden Winkel $\angle AOP, \angle AOP$ einen Wert, der größer oder gleich 90° ist, da ihre Summe 180° beträgt.
Daher wäre in einem der Dreiecke $POA, P'OA$ der Winkel mit dem Scheitel O der größte im betreffenden Dreieck. Folglich wäre PA oder $P'A$ die längste Seite im Dreieck, was wegen der Voraussetzung $|P'A| = |PA| < |OA|$ nicht möglich ist.
Daher gilt wegen $|PC| = |P'C|$

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OC| - |CP|)(|OC| + |CP|) = |OC|^2 - |CP|^2$$

ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|OC|^2 = |OA|^2 - |AC|^2 \qquad \text{und} \qquad |CP|^2 = |PA|^2 - |AC|^2$$

woraus sich ergibt, dass

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 - |PA|^2 \tag{1}$$

gilt, also $|OP| \cdot |OP'|$ nicht von der Stellung des Mechanismus abhängt.

Bemerkung: In den Grenzfällen $A = B$ oder $P = P'$ ist $APBP'$ kein Rhombus. Es gilt aber trotzdem (1); denn im Fall $A = B$ liegen P und P' auf der Geraden g_{OA}, und dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OA| - |PA|)(|OA| + |PA|) = |OA|^2 - |PA|^2$$

und im Fall $P = P'$ ist P Fußpunkt der Höhe auf AB im gleichschenkligen Dreieck AOB, und es folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$|OP| \cdot |OP'| = |OP|^2 = |OA|^2 - |PA|^2.$$

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

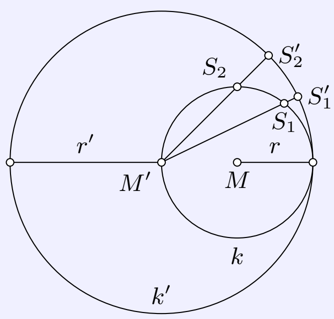
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass OA festliegt. O, P und P' liegen auf derselben Geraden (siehe erste Lösung), welche Sekante (im Grenzfall Tangente) des Kreises k mit dem Radius $|PA|$ um A ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Sekantentangentensatz:

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist.

Aufgabe 051046:

Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.
Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!



Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!
Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, dass die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.

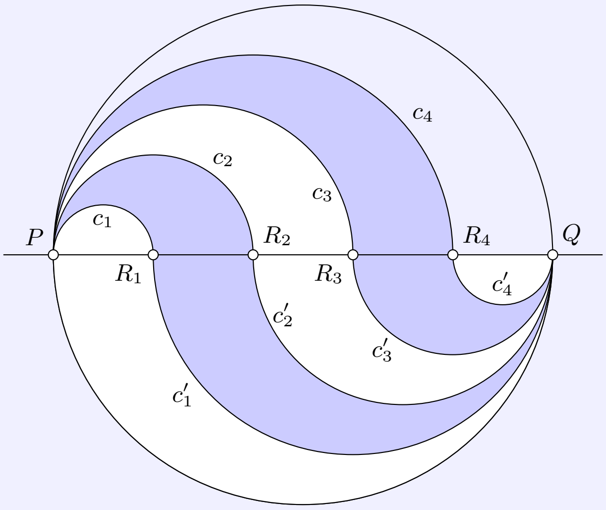
Lösung von cyrix:
Wir beweisen zuerst den Hilfssatz:
Der Kreis k habe den Radius 1 und damit k' den Radius 2. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze in der Aufgabenstellung hat der Bogen zwischen S_1' und S_2' eine Länge von $2 \cdot \angle S_1'M'S_2'$, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.
Da M' auf dem Kreis k liegt, ist $\angle S_1'M'S_2' = \angle S_1M'S_2$ ein Peripheriewinkel im Kreis k, dessen zugehöriger Zentriwinkel $\angle S_1MS_2$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz genau doppelt so groß ist, also $\angle S_1MS_2 = 2 \cdot \angle S_1M'S_2$ beträgt.
Da k den Radius 1 besitzt, hat der Bogen zwischen S_1 und S_2 damit die Länge $2 \cdot \angle S_1M'S_2$, also die gleiche wie der Bogen zwischen S_1' und S_2' auf k', $\Box$.

Wendet man den Hilfssatz auf die Situation an, in der einer der beiden von M' ausgehenden Strahlen M enthält, so schneidet dieser beide Kreise in ihrem Berührungspunkt. Da die von dort ausgehenden Bögen zu den Schnittpunkten des zweiten Strahls gleich lang sind, heißt dies, dass beim weiteren Abrollen von k an k' diese beiden Punkte sich berühren werden.
Da dieser Berührungspunkt auf k' fest ist, findet man bei jeder Lage des Kreises k den darauf fixierten (und sich somit mitbewegenden) Punkt, der später auf den Berührungspunkt abgerollt wird, indem man die Gerade durch den Berührungspunkt und M' mit k schneidet (und den von M' verschiedenen Schnittpunkt betrachtet, sofern es zwei verschiedene gibt).

Damit bewegt sich ein auf k fixierter Punkt P auf einem Durchmesser von k'.

Bemerkung:
Die Argumentation funktioniert auf diese Weise an sich nur dann, wenn sich M höchstens $\frac{\pi}{2}$ „vor“ oder „nach“ dem Berührungspunkt von P an k' befindet, da nur dann der von M' ausgehende und durch den Berührungspunkt verlaufende Strahl den Kreis k überhaupt noch zumindest tangiert.
Aber da k' den doppelten Radius von k hat, rollt k bei einer vollständigen Umdrehung um k' genau zweimal ab, sodass nach einer halben Runde P ein zweites mal k' berührt; genau am auf k' dem ersten Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt, sodass sich die beiden von M' ausgehenden und durch die Berührungspunkte verlaufenden Strahlen zu einer Gerade ergänzen und die Argumentation nun für beliebige Lagen von M, ohne Einschränkung an Winkel, durchführbar ist.

Aufgabe 081043:
In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n > 2$ gegeben.
Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$, so dass
$$PR_1 = R_1R_2 = ... = R_{n-2}R_{n-1} = R_{n-1}Q$$
gilt.
Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve ($i = 1, 2, 3, ..., n-1$).



Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, ..., b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

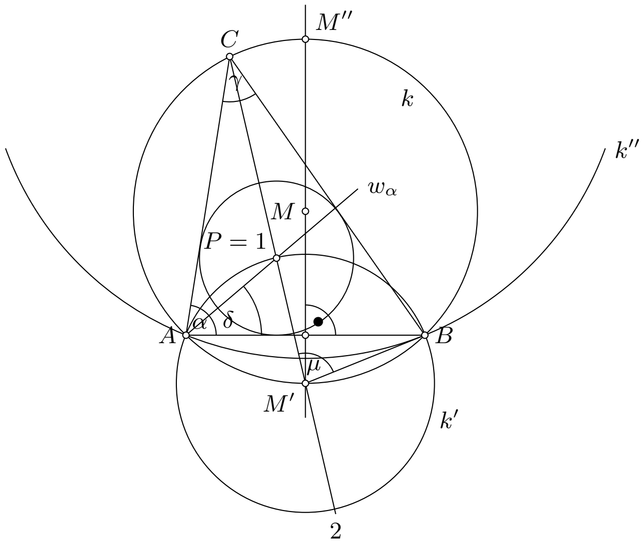
Lösung von cyrix:
Definieren wir zusätzlich $R_0 := P$, $R_n := Q$, sowie b_0 und b_n als Halbkreise über dem Durchmesser PQ in H' bzw. H, so ist nun allgemein nach dem Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven b_{i-1} und b_i mit $1 \leq i \leq n$ gefragt. Sei diese Fläche mit F_i bezeichnet.
Man kann F_i zerlegen in den Teil davon, der in H liegt, und den, der in H' liegt. Der erste lässt sich darstellen als die Differenz der Halbkreise in H über den Durchmessern PR_i und PR_{i-1}, der zweite als Differenz der Halbkreise in H' über den Durchmessern $R_{i-1}Q$ und R_iQ.
Damit berechnet sich der Flächeninhalt der Figur F_i zu

$$\frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} + \frac{(n-(i-1))^2}{n^2} - \frac{(n-i)^2}{n^2} \right) \cdot (2r)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot n^2} \cdot (2i - 1 + 2(n-i) + 1) = \frac{1}{n} \cdot \pi r^2$$

Der Kreis wird also in n flächengleiche Flächenstücke zerlegt.

Aufgabe 091045:
Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck $\triangle ABC$ liegen.
Beweisen Sie, dass der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Zunächst zeichnet man eine Planfigur (siehe Abbildung) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung.
Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2.



Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muss der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.

Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, dass der Punkt 1 auf w_α oder w_β liegt.

γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne AB. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $AM' = M'B$. Somit liegt M' auf w_γ.

Wir setzen $\angle CAB = \alpha$ und $\angle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne BC darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu \quad (1)$.

Ferner setzen wir $\angle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $B1$. Folglich gilt $\mu = 2\delta \quad (2)$.

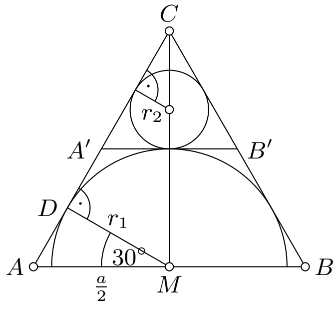
Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$; d. h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.

Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.

Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit.

Aufgabe 131041:
In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, dass sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, dass dann $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

Lösung von Steffen Polster:



Hat das gleichseitige Dreieck ABC die Seitenlänge a, so ist seine Höhe $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (nach Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck AMC).

Im rechtwinkligen Dreieck AMD ist der Winkel $\angle AMD = 30°$, die Seite $AM = \frac{a}{2}$ und $DM = r_1$. Dann wird

$$r_1 = \frac{a}{2}\cos 30° = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

Zieht man parallel zu AB die zweite Tangente an den Kreis k_1, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck

$A'B'C$ (Ähnlichkeitslage zu $\triangle ABC$). Für die Höhe h' von $\triangle A'B'C$ wird

$$h' = h - r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{h}{2}$$

Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C$ ist der Inkreismittelpunkt mit dem Schwerpunkt identisch. Daher wird die Höhe bzgl. des Inkreismittelpunktes im Verhältnis 1:2 geteilt. Damit wird für den Radius des Kreises k_2:

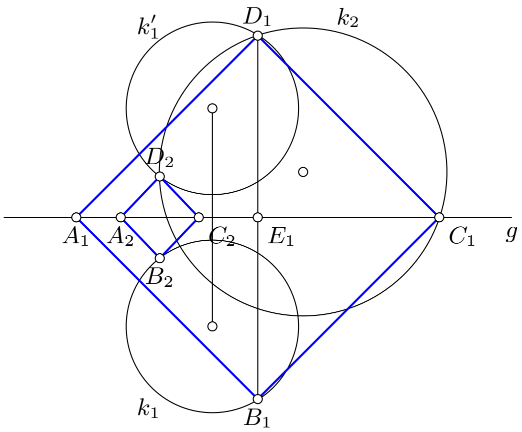
$$r_2 = \frac{1}{3}h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{12}\sqrt{3}$$

Folglich gilt $r_1 > r_2$ und für das Verhältnis ergibt sich: $r_1 : r_2 = 3 : 1$.

Aufgabe 171041:
In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

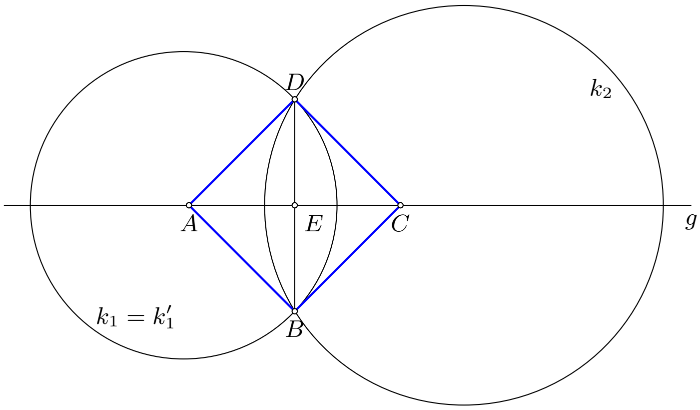
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analysis: Angenommen, es existiert ein Quadrat $ABCD$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates die Gerade g eine seiner Symmetrieachsen, und die nicht auf g liegenden Eckpunkte B und D liegen bezüglich g symmetrisch.
Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1', der durch Spiegelung von k, an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt E von g und BD der Diagonalenschnittpunkt des Quadrates $ABCD$, der von allen vier Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Daraus ergibt sich:

Wenn ein Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann es durch folgende Konstruktion erhalten werden:



II. Konstruktion:
(1) Man spiegelt k_1 an g; das Bild sei k_1'.
(2) Wenn k_1' und k_2 einen gemeinsamen, nicht auf g liegenden Punkt besitzen, so werde ein solcher mit D bezeichnet.
(3) Man spiegelt D an g, der Bildpunkt sei B.
(4) Die Gerade g schneidet als Mittelsenkrechte die Strecke BD in deren Mittelpunkt E. Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $EB = \frac{1}{2}BD$ ab. Die so konstruierten Punkte seien mit A bzw. C bezeichnet.

III. Beweis: Die unter II. beschriebene Konstruktion führt stets zu einem Quadrat der geforderten Art: A, C liegen auf g. Wegen der geforderten Eigenschaft von D liegt D auf k_2 und B als Spiegelpunkt auf k_1. Wegen $DE = EB = EC = EA \neq 0$ und $DB \perp AC$ ist $ABCD$ ein Quadrat.

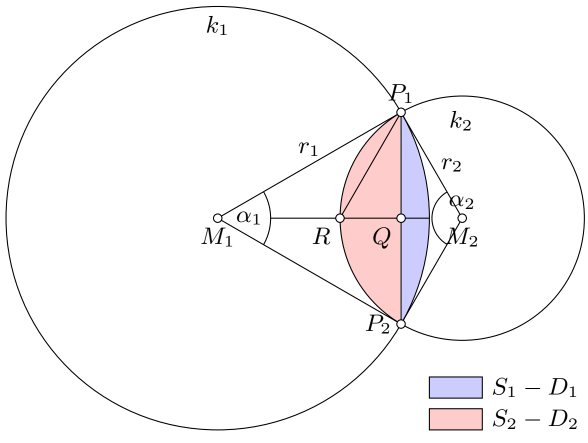


IV. Determination: Entsprechend der Lage von k_1, k_2 und g zueinander können folgende Fälle unterschieden werden:
1. k_1' und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam.
2. k_1' und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
2.1. der auf g liegt
2.2. der nicht auf g liegt.
3. k_1' und k_2 haben genau zwei Punkte gemeinsam,
3.1. die beide nicht auf g und nicht symmetrisch zu g liegen,
3.2. die beide nicht auf g, aber symmetrisch zu g liegen,
3.3. von denen genau einer auf g liegt,
3.4. die beide auf g liegen.
4. k_1' und k_2 fallen zusammen.

A) Im Fall 4. gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen.
B) Im Fall 3.1. gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (siehe Abbildung oben).
C) In den Fällen 2.2., 3.2., 3.3. gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (eine Möglichkeit die zweite Abbildung). D) In den Fällen 1., 2.1., 3.4. gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt.
Die Fallunterscheidung ist vollständig, die Fälle schließen einander aus. Also gilt:
Genau in den unter A), B) und C) genannten Fällen existiert ein solches Quadrat, dessen Existenz genau in den unter C) genannten Fällen eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 271044:
Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, dass der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und dass sich k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $P_1P_2 = 10$ cm gilt.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!
Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2. Die Gerade durch M_1, M_2 schneide P_1P_2 in Q.
Das Dreieck $P_1P_2M_1$ ist gleichseitig mit $P_1P_2 = M_1P_1 = M_1P_2 = r_1 = 10$ cm; daher gilt

$$\angle P_1M_1P_2 = \angle P_2P_1M_1 = \angle P_1P_2M_1 = 60^\circ$$

Da die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte die Schnittsehne halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist $QP_1 = \frac{1}{2}r_1$ und $\angle M_2QP_1 = 90°$; hieraus und aus $M_2P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}r_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$M_2Q = r_1\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}r_1 = \frac{1}{2}r_2$$

Verlängert man M_2Q über Q hinaus um seine eigene Länge bis R, so liegt folglich R auf k_2; außerdem aber ist P_1Q im Dreieck M_2RP_1 sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende. Dieses Dreieck ist daher auch mit $M_2P_1 = RP_1$ gleichschenklig, also sogar gleichseitig.
Da Q (als Punkt der Schnittsehne) innerhalb k_1 liegt, M_2 aber nach Voraussetzung außerhalb k_1, folgt wegen $r_2 < r_1$, dass R innerhalb k_1 liegt. Daraus und aus der Symmetrie bezüglich M_1M_2 ergibt sich: Es gilt

$$A = (S_1 - D_1) + (S_2 - D_2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

S_1: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_1$ von k_1 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_1 = \angle P_1M_1P_2 = 60°$,
S_2: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_2$ von k_2 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_2 = \angle P_1M_2P_2 = 2 \cdot \angle P_1M_2R = 120°$,
D_1: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_1$,
D_2: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_2$, wegen $\triangle M_2QP_2 \cong \triangle M_2QP_1 \cong \triangle RQP_1$ auch Flächeninhalt des Dreiecks M_2RP_1.

Hiernach und wegen $r_2^2 = \frac{1}{3}r_1^2$ erhält man nach den Flächeninhaltsformeln für Kreissektoren und gleichseitige Dreiecke

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r_1^2 \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{4}r_1^2\sqrt{3} \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \quad ; \quad D_2 = \frac{1}{4}r_2^2\sqrt{3}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right) r_1^2 = \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 100\text{cm}^2$$

Aufgabe 291041:
Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a.
Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $G_1G_2 = H_1H_2 = J_1J_2 = a$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c, so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

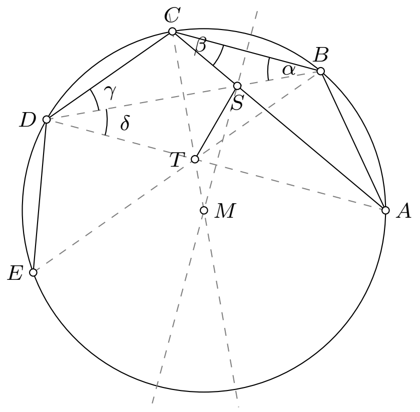
Dies ergibt sich aus dem Satz, dass jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.
Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten und deren Verlängerungen eines Dreiecks D. Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d. h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D, und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises.
Aus (3) folgt ferner, dass c den Radius hat:

$$r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jeder der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge $\sqrt{r^2 - s^2} = \frac{a}{2}$ beträgt; d. h., dann erfüllt c die Bedingungen (1) und (2).
Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgaben genannten Vorgaben von g, h, j, a gibt es genau vier Kreise C, die (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 341046:
In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $AB = BC = CD = DE$ gezeichnet.
Dabei sei diese Länge so gewählt, dass der von A über B, C, D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T.
Beweisen Sie, dass aus dieser Voraussetzung stets $AB^2 = AC \cdot ST$ folgt!

Lösung von MontyPythagoras:



Die blau gestrichelten Linien sind Symmetrieachsen durch den Mittelpunkt des Kreises. Wegen der Symmetrie bezüglich der Achse MS ist BC parallel zu AD und $\alpha = \beta$. Da $BC = CD$, ist $\alpha = \gamma$, und wegen der Parallelität von BC zu AD ist $\alpha = \delta$. Alle grün eingezeichneten Winkel sind daher gleich groß.
Zu zeigen ist:

$$AB^2 = AC \cdot ST \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{AB}{ST} = \frac{AC}{AB}$$

Da $AB = BC$ ist und $AC = BD$, ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{BC}{ST} = \frac{BD}{BC}$$

Da $\gamma = \delta$ ist und das Viereck $BCDT$ symmetrisch ist zur Spiegelachse CM, entsteht T auch durch Spiegelung von C an BD. Daher ist $ST = CS$. Setzt man das ein, lautet die zu zeigende Gleichung

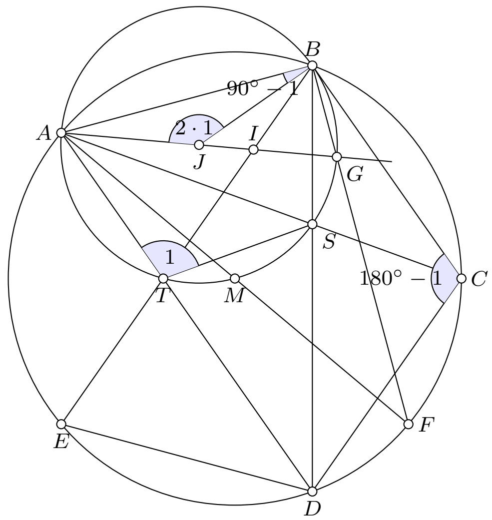
$$\frac{BC}{CS} = \frac{BD}{BC}$$

Wegen der Winkelgleichheit sind die Dreiecke BCD und BCS ähnlich, und die Gleichung ist erfüllt.

Alternativ-Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten:
Es ist zu zeigen:
1. $ATSB$ ist Sehnenviereck.
2. $|\overline{ST}| = |\overline{SC}|$
3. CB ist Tangente an den Umkreis von $ATSB$.

zu 1. Die Dreiecke ABD und EDB sind nach sss kongruent. Damit folgt dann $\angle DAB = \angle EBD$. Beides sind Umfangswinkel über der Sehne TS.

zu 2. Offensichtlich ist $BC \parallel TD$ und $BT \parallel CD$. Da zudem $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ ist, ist $BCDT$ eine Raute. Punkt S liegt dann auf der Diagonalen $\overline{BD}$ und es entstehen wieder kongruente Dreiecke.



zu 3. Wir zeichnen einen Durchmesser durch A, der Schnittpunkt mit dem Umkreis sei G. B liegt dann auf dem Thaleskreis und somit ist $\angle ABG = 90°$. Sei nun der Mittelpunkt des Umkreises J und $\angle BTA = \angle 1$. Nach Umfangswinkelsatz folgt dann $\angle BJA = 2 \cdot \angle 1$. Dreieck AJB ist gleichschenklig und somit folgt nach Basiswinkelsatz $\angle ABJ = 90° - \angle 1$.

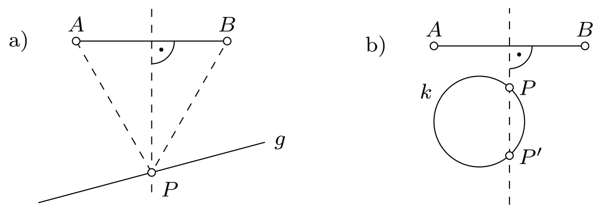
Viereck $TDBC$ ist eine Raute und $\angle DTB = 180° - \angle 1$ (Nebenwinkel). Nach Konstruktion ist $\angle DTB = \angle ABC$. Dann ist $\angle GBC = \angle 180° - \angle 1 - 90° = 90° - \angle 1$. Es ist somit $\angle GBC = ABJ$, womit $\angle JBC = 90°$ folgt.

II.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe 011015:
Es ist
a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist;
b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
Ist dieser Punkt stets vorhanden? Gibt es nur einen solchen Punkt?

Lösung von Steffen Weber:

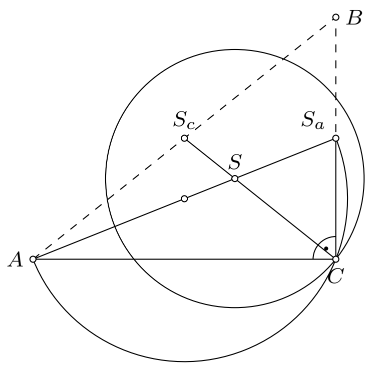


a) (Bild a) Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt der gegebenen Geraden g mit der Mittelsenkrechten von AB. Wenn diese parallel zu g verläuft, gibt es keine Lösung.

b) (Bild b) Wie oben. Wenn die Mittelsenkrechte mit dem gegebenen Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es keine Lösung. Ist sie Tangente, erhält man eine, ist sie Sekante, zwei Lösungen P und P'.

Aufgabe 031012:
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Carsten Balleier:



Analysis:
Da das gesuchte Dreieck ABC rechtwinklig sein soll, muss das Dreieck AS_aC ebenfalls rechtwinklig sein, wenn S_a der Mittelpunkt von BC ist. Damit muss C auf dem Thaleskreis über AS_a liegen.
Andererseits müssen sich s_a und s_c gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen. Somit kennt man den Abstand von C zum Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden, woraus auch der Rest folgt.
Wichtig dabei ist, dass beide Bedingungen für C (Lage auf dem Thaleskreis und Abstand zu S) gleichzeitig erfüllbar sein müssen.

Konstruktion:
Man zeichne die Strecke AS_a mit der Länge s_a, über der man einen Halbkreis errichtet. Danach ergibt sich S als Teilpunkt bei der Teilung von AS_a im Verhältnis 2 : 1. Um S wird ein Kreis mit dem Radius $\frac{2s_c}{3}$ gezogen.
Der Schnittpunkt mit dem vorher gezeichneten Halbkreis ist – sofern er existiert – der gesuchte Punkt C. Damit der Schnittpunkt tatsächlich auftritt, muss

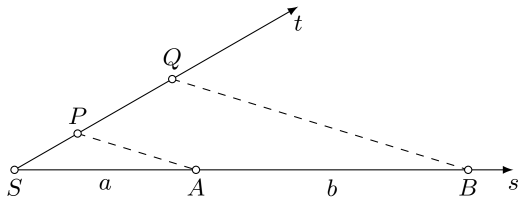
$$\frac{1}{3}s_a < \frac{2}{3}s_c < \frac{2}{3}s_a$$

gelten; andernfalls ist die Konstruktion nicht ausführbar.
Mit Hilfe der Länge s_c erhält man auf der Geraden CS den Punkt S_c. Der Punkt B ist dann der Schnittpunkt von AS_c und CS_a.

Aufgabe 121013:
Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b.

Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\dfrac{a \cdot b}{a+b}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man zeichne zwei von, einem Punkt S ausgehende, nicht auf derselben Gemden liegende Strahlen s, t.

Auf s trage man die Strecke SA der Länge a und auf deren Verlängerung über A hinaus die Strecke AB der Länge b ab.

Auf t trage man die Strecke SQ der Länge b ab.

Die Parallele durch A zu BQ schneidet t in einem Punkt P. Dann hat die Strecke SP die Länge $\frac{ab}{a+b}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $|SQ| = b$, $|SA| = a$, $|SB| = a + b$.. Ferner ist $AP \parallel BQ$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$|SP| : |SQ| = |SA| : |SB|$$

d. h. $\frac{|SP|}{b} = \frac{a}{a+b}$ und somit $|SP| = \frac{ab}{a+b}$.

Aufgabe 241014:
Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k, die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, dass jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und dass jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

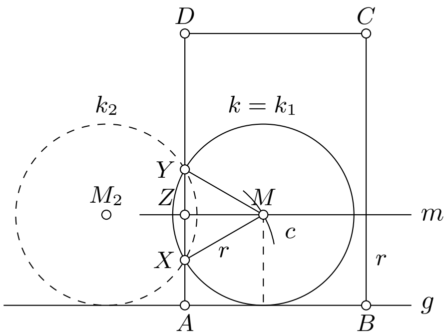
Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Kreis k die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

Für den Mittelpunkt M und den Radius r von k gilt $MX = MY = r$, also liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY sowie auf dem Kreis c um X mit r.

Da die Gerade g berührt, hat M von g den Abstand r. Wegen $AB \perp AD$ steht g senkrecht auf der Geraden durch X,Y und ist folglich parallel zu m. Daher ist der Abstand r, den M von g hat, auch der Abstand der beiden Parallelen g, m voneinander. Da der Mittelpunkt Z von XY auf m liegt und $ZA \perp g$ ist, gilt somit auch $AZ =$.

II. Daher hat ein Kreis k nur dann die geforderten Eigenschaften, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert den Mittelpunkt Z und die Mittelsenkrechte m von XY.

(2) Man konstruiert den Kreis c um X mit $r = AZ$.

(3) Man wählt einen Schnittpunkt M von c mit m und konstruiert den Kreis k um M durch X.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) und (3) liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY, also gilt $MX = MY$. Daher geht der nach (3) durch X gehende Kreis k auch durch Y. Wegen $AB \perp AD$ ist M zu g parallel und hat den Abstand AZ von g. Somit hat auch M den Abstand AZ von g.

Andererseits ist der Radius MX von k gleich AZ, da M nach (3) auf dem in (2) konstruierten Kreis c um X mit AZ liegt.
Also berührt k die Gerade g.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind wegen $X \neq Y$ und $Z \neq A$ (was aus X,$Y \neq A$ und der Lage von X, Y auf AD folgt) eindeutig ausführbar. Da X und Y auf der Seite AD des Rechtecks $ABCD$ liegen, aber nicht in A, liegt A auf der Verlängerung der Strecke XY, deren Mittelpunkt Z ist; also gilt $XZ = YZ < AZ$.

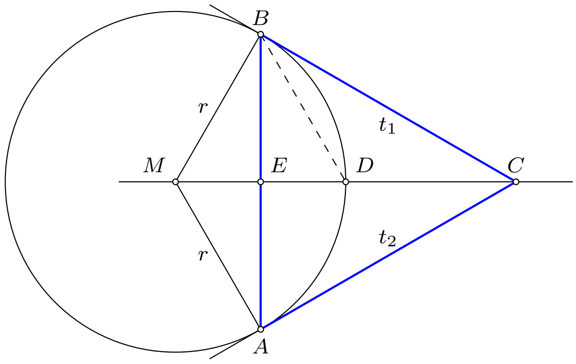
Der Punkt Z durch den die Gerade m geht, ist folglich ein innerer Punkt des in (2) konstruierten Kreises c. Daher schneidet m den Kreis c in zwei verschiedenen Punkten M_1, M_2; jeden von ihnen kann man in (3) als M wählen.

Somit gibt es genau zwei Kreise k_1, k_2 mit den geforderten Eigenschaften.

II Runde 2

Aufgabe V11024:
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Steffen Polster:



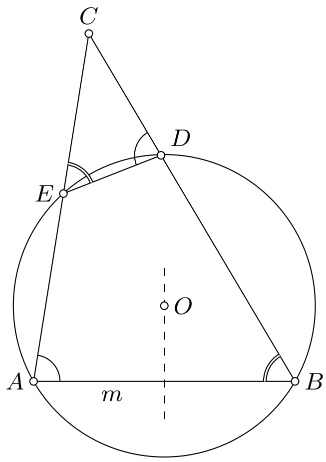
Behauptung: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

Beweis:
1. Winkel $\angle MBC$ ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck MDB ist gleichseitig, alle Seiten sind r, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle MED$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.
4. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel $\angle BCD$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.

Im $\triangle EBM$ treten die Winkel $\angle EMB = 60°$ (aus 2.), $\angle MBE = 30°$ (Basiswinkel in ABM) auf, folglich ist Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle EBM$ = Winkel $\angle EBC = 60°$. Im Dreieck EBC ist der Winkel $\angle EBC = 60°$, der Winkel $BCE = 30°$ und der Winkel $\angle BEC = 90°$.
Die Strecke EC ist Symmetrieachse im Dreieck. Daraus folgt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss.

Aufgabe 011024:
Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, dass das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Eckard Specht:
Konstruktion:
(Bild) O. B. d. A. sei AB die kürzeste der Seiten des Dreiecks ABC.
Wir wählen auf der Mittelsenkrechten m der Seite AB einen Punkt O derart, dass ein Kreis mit Mittelpunkt O durch die Eckpunkte A und B geht und weiterhin noch die beiden anderen Seiten in den Punkten D bzw. E schneidet.
Das Dreieck DEC ist dann dem ursprünglichen Dreieck ähnlich. Die kürzeste Seite als Sehne des Kreises auszuwählen, garantiert dabei, dass die Schnittpunkte D und E tatsächlich existieren.



Beweis:
$ABDE$ ist ein Sehnenviereck, in dem sich gegenüberliegende Winkel stets zu einem Gestreckten ergänzen. Also gilt:

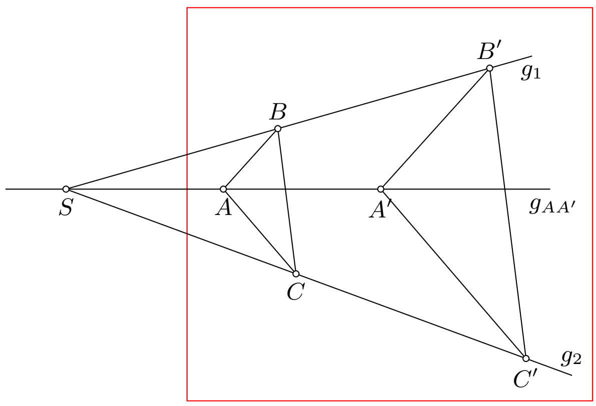
$$\angle CAB = 180° - \angle BDE = \angle CDE \qquad ; \qquad \angle CBA = 180° - \angle AED = \angle CED$$

Das abgeschnittene Dreieck DEC hat somit dieselben Innenwinkel wie das ursprüngliche Dreieck ABC und ist diesem daher ähnlich. Außerdem liegen sich gleiche Winkel stets gegenüber, so dass für alle nicht gleichschenkligen, also beliebigen Dreiecke $AB \nparallel ED$ gilt.

Aufgabe 061023:
Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so dass die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Analyse: Angenommen, ein Punkt A' ($\neq A$) des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen.
Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'.

Folglich gilt nach dem Strahlensatz $SB : SB' = SA : SA' = SC : SC'$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgendes Konstruktion ergibt:



Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige, von BC verschiedene, Parallele zu BC.
Sie schneide g_1 in B', g_2 in C', Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$ ist die gesuchte Gerade.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$SC : SC' = BC : B'C' \qquad \text{(Strahlensatz)}$$
$$= AC : A'C' \qquad (\text{da } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S.

Diskussion:
Da BC nicht zu g_2 oder G_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt.

Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B \neq B'$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar.
Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, dass B, C, B', C', A' auf den Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, wird hier verzichtet.

Aufgabe 121024:
a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ graphisch zu ermitteln.
Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so dass diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?

b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, dass $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

Lösung von Steffen Polster:
Seien a, b, c, q, p, h die üblichen Bezeichnungen in einem rechtwinkligen Dreieck. Mit p,q ist auch c rational. Also sind für die Wurzeln nur die Strecken a, b, h möglich. Insbesondere gilt, dass $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 - h^2 = p^2$ und $b^2 - h^2 = q^2$ Quadrate rationaler Zahlen sind.

a) Da $\sqrt{133}^2 + \sqrt{12}^2 = 145$ keine Quadratzahl ist und $\sqrt{12} < \sqrt{133}$ gilt, bleibt nur die Möglichkeit $a = \sqrt{133}$, $h = \sqrt{12}$ (oder symmetrisch dazu $b = \sqrt{133}$). Das Gleichungssystem aus dem Höhen- und Kathetensatz

$$pq = 12p(p + q) = 133$$

lässt sich eindeutig lösen durch $p^2 = 121 \Rightarrow p = 11$ und $q = \frac{12}{11}$

b) Da $\sqrt{133}^2 - \sqrt{11}^2 = 122$ kein Quadrat ist, bleibt nur der Ansatz $a = \sqrt{133}$, $b = \sqrt{11}$. Durch Addition der beiden Kathetengleichungen

$$p(p + q) = 133q(p + q) = 11$$

erhalten wir $(p + q)^2 = 144 \Rightarrow p + q = 12$. Einsetzen der Summe ergibt $p = \frac{133}{12}$ und $q = \frac{11}{12}$.
Bemerkung: Wurzeln zweier rationaler Zahlen sind simultant konstruierbar, falls die Summe oder Differenz das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Aufgabe 131024:
Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$.

Lösung von cyrix:
Im Sehnenviereck ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel zu 180°, sodass der Winkel $\gamma = DCB = 110°$ betragen muss. So kann man das gesuchte Viereck wie folgt konstruieren:
1) Konstruiere einen Winkel von $\gamma = 110°$ (ggf. als Nebenwinkel eines gegebenen 70°-Winkels) und nenne den Scheitelpunkt C.

2) Trage auf dem einen Scheitel dieses Winkels die Streckenlänge b von C aus ab und erhalte den Punkt B, sowie analog auf dem anderen Schenkel des Winkels die Streckenlänge c von C aus und erhalte den Punkt D.

3) Man konstruiere den Umkreis k des Dreiecks $\triangle BCD$ (durch Schnitt der Mittelsenkrechten von zwei der Seiten dieses Dreiecks und Kreis um diesen Schnittpunkt durch einen der Eckpunkte).

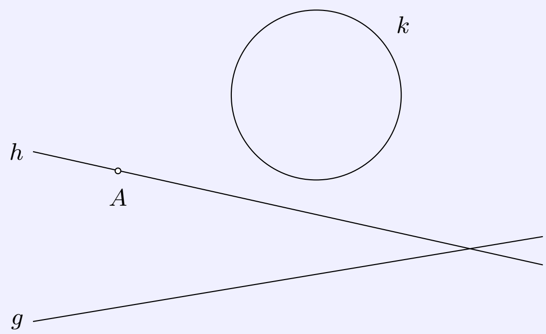
4) Der Kreis um B mit Radius a schneide k in zwei Punkten. Man wähle einen aus, sodass das Viereck $ABCD$ konvex ist. Dies ist dann das gesuchte.

Begründung:

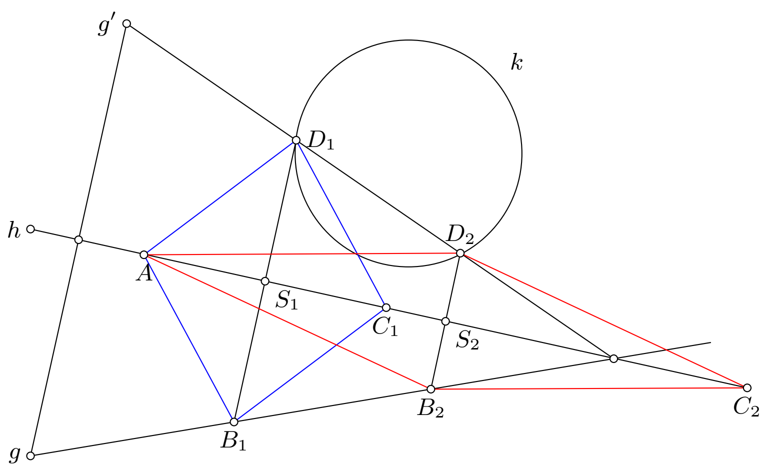
Da nach Konstruktion alle vier Punkte auf k liegen, ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Die Längen der Strecken AB, BC und CD haben nach Konstruktion (Schritte 4 bzw. 2) die geforderte Länge und aufgrund der Winkeleigenschaft von Sehnenvierecken hat mit Schritt 1) und der Vorüberlegung auch $\angle BAD$ als dem Winkel $\angle DCB$ gegenüberliegender Weinkel die gewünschte Größe.

Aufgabe 261024:
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.
Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!
Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!
Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?

Hinweis:
Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g, h, k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist.
Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion auf dem Arbeitsblatt:



Wenn es einen Rhombus ABC mit den genannten Eigenschaften gibt, so liegt seine Diagonale AC in der Geraden h, also geht B bei der Spiegelung an h in D über. Konstruiert man also diejenige Gerade g', die aus g durch die Spiegelung an h entsteht, so muss D ein Schnittpunkt von g' mit k sein.

Wie die Konstruktion auf dem Arbeitsblatt zeigt, schneiden sich g' und k in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Für jeden dieser beiden Punkte gilt:

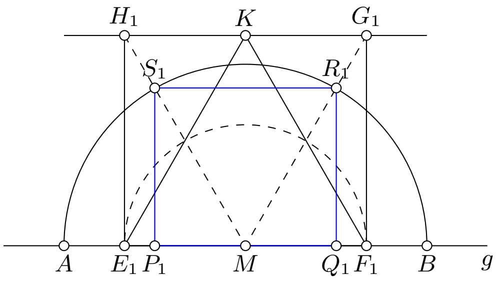
Spiegelt man ihn an h, so liegt der erhaltene Punkt B_1 bzw. B_2 wieder auf g. Ferner gilt: Schneidet h die Strecke B_1D_1 bzw. die Strecke B_2D_2 in S_1 bzw. S_2 und verlängert man die Strecke AS_1 bzw. AS_2 um ihre eigene Länge bis C_1 bzw. C_2, so liegt der erhaltene Punkt C_1 bzw. C_2 auf h, und sowohl $AB_1C_1D_1$ als auch $AB_2C_2D_2$ ist je ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, also je ein Rhombus.

Es gibt also mehr als einen Rhombus mit den genannten Eigenschaften; ferner wird (bei der auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Lage) offensichtlich $AD_1 \neq AD_2$, d. h., die beiden Rhomben ABC_1D_1 und ABC_2D_2 haben voneinander verschiedene Seitenlänge. Sie sind folglich nicht zueinander kongruent.

Aufgabe 281024:
Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$.
a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, dass die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Durchmesser des Halbkreises sei AB, sein Mittelpunkt M, die Gerade durch A und B sei g, der Halbkreis h.
Man konstruiert zunächst folgendermaßen ein Rechteck $EFGH$: (4) Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck EFK mit beliebiger Seitenlänge.
(5) Die Parallele durch K zu EF schneidet die in E und F auf EF errichteten Senkrechten in h bzw. G.

Man konstruiert dann folgendermaßen ein Viereck $P_1Q_1R_1S_1$:
(6) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}EF$ schneidet g in E_1 und F_1; man konstruiert auf derjenigen Seite von g auf der h liegt, das zu $EFGH$ kongruente Rechteck $E_1F_1G_1H_1$.
(7) Die Strahlen aus M durch G_1 bzw. H_1 schneiden h in R_1 bzw. S_1; man konstruiert die Lote R_1Q_1 bzw. S_1P_1 von R_1 bzw. S_1 auf g.



Schließlich konstruiert man folgendermaßen ein Viereck $P_2Q_2R_2S_2$:

(8) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}FG$ schneidet g in F_2 und G_2; man konstruiert auf derjenigen Seite von g, auf der h liegt, fas zu $FGHE$ kongruente Rechteck $F_2G_2H_2E_2$. (9) Die Strahlen aus M durch H_2 bzw. E_2 schneiden h in R_2 bzw. S_2; man konstruiert die Lote R_2Q_2 bzw. S_2P_2 von R_2 bzw. S_2 auf g.

c) Beweis, dass $P_1Q_1R_1S_1$ die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt:
Das nach (5) konstruierte Rechteck $EFGH$ hat als Seitenlänge FG die Höhenlänge des nach (4) konstruierten gleichseitigen Dreiecks EFK. Daher gilt

$$FG : EF = \frac{1}{2}\sqrt{3EF} : EF = \sqrt{3} : 2$$

Nach (6) ist $\angle ME_1H_1 = \angle MF_1G_1 = 90°$ und $E_1H_1)F_1G_1$ (Winkel bzw. Gegenseiten im Rechteck $E_1F_1G_1H_1$) sowie $ME_1 = MF_1 = \frac{1}{2}EF$. Damit folgt $\triangle ME_1H_1 \cong \triangle MF_1G_1$ 8sws), also $\angle E_1MH_1 = \angle F_1MG_1$.
Wegen (7) besagt das auch $\angle P_1MS_1 = \angle Q_1MR_1$.
Nach (7) liegen ferner P_1, Q_1 auf AB und R_1, S_1 auf h, also ist (1) erfüllt. Weiterhin folgt $\angle MP_1S_1 = \angle MQ_1R_1 = 90°$ und $MS_1 = MR_1$ (Radien von h). Also gilt $\triangle MP_1S_1 \cong \triangle MQ_1R_1$ (Innenwinkelsatz und wsw).
Damit folgt $P_1S_1 = Q_1R_1$ und $P_1Q_1R_1S_1$ ist als Rechteck nachgewiesen, erfüllt also (2).
Schließlich folgt aus dem Strahlensatz

$$Q_1R_1 : MQ_1 = F_1G_1 : MF_1$$

hiernach und wegen (6) gilt

$$Q_1R_1 : P_1Q_1 = F_1G_1 : E_1F_1 = FG : EF = \sqrt{3} : 2$$

also (3).
Entsprechend beweist man aus (8), (9): $P_2Q_2R_2S_2$ erfüllt (1), (2) und mit

$$P_2Q_2 : Q_2R_2 = FG : GH = \sqrt{3} : 2$$

auch (3).

III Runde 3

Aufgabe 041033:
Gegeben sind Strecken von den Längen $a = 5$, $b = 4$ und $c = 1$.
Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den algebraischen Ausdruck

$$x = \frac{a^2 + b^2}{3c}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man setze $a^2 + b^2 = y^2$. Dann ist y mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks als Hypotenuse konstruierbar. Aus $x = \frac{y^2}{3c}$ erhält man $x \cdot 3c = y^2$. Dann ist x nach dem Höhensatz konstruierbar.

Aufgabe 051032:
a) Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α das Maß des Winkels $\angle DAB$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von cyrix:

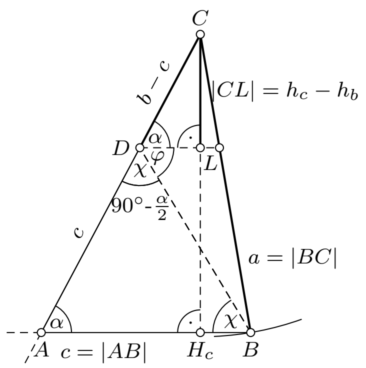
1) Man konstruiere zwei Strahlen, die von A ausgehen und den Winkel α einschließen.
2) Auf dem ersten Strahl markiere man einen beliebigen, von A verschiedenen Punkt B'.
3) Der Schnittpunkt des zweiten Strahls mit dem Kreis um A durch B' heiße D'.
4) Der Schnittpunkt der Parallelen zu AB' durch D' mit der Parallelen zu AD' durch B' heiße C'.
5) Die Länge der Strecke $B'D'$ wird auf dem Strahl AC' an C' in die Richtung angetragen, in der A nicht liegt. Der entstehende zweite Endpunkt dieser Strecke sei S'.
6) Auf dem Strahl AC' wird zusätzlich noch der Punkt S markiert, sodass die Strecke AS die Länge $e + f$ habe.
7) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' im Punkt B; die Parallele zu $D'S'$ durch S die Gerade AD' in D; und die Parallelen zu AB durch D sowie zu AD durch B sich in C.

Dann ist $ABCD$ der gesuchte Rhombus.

Beweis: Zuerst ist nach Konstruktion $AB'C'D'$ ein Parallelogramm (siehe Schritt 4)), wobei zwei benachbarte Seiten gleichlang sind (siehe Schritt 3)); also ein Rhombus.
Weiterhin hat es bei A den Innenwinkel α, ist also ähnlich dem gesuchten Viereck. Also gibt es eine positive rationale Zahl k, sodass das gesuchte Viereck durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum A aus dem Rhombus $AB'C'D'$ hervorgeht.
Dies gilt insbesondere auch für die Diagonalen und deren Summe, sodass sich der Streckungsfaktor k ergibt als $\frac{e+f}{|AC'|+|B'D'|} = \frac{|AS|}{|AS'|}$. Nach den Strahlensätzen ist dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AD|}{|AD'|}$.
Abschließend wird C wieder als vierter Parallelogrammpunkt konstruiert, sodass das so konstruierte Viereck $ABCD$ wieder ein Rhombus mit Innenwinkel α ist, dessen Diagonalensumme aber nun die gewünschte Größe hat.

Aufgabe 071036:
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm!
Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



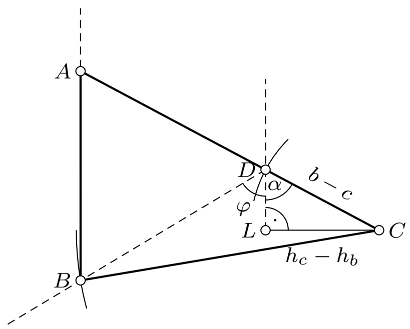
Planfigur und Konstruktion
Trägt man auf der Seite $b = |AC|$ die Strecke c ab, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b - c = |DC|$.
Legt man durch D eine Parallele zu $|AB|$ und fällt von C das Lot auf die Parallele, Lotfußpunkt sei L, dann erhält man eine Strecke $|CL| = h_c - h_b$, die gleich der gegebenen Strecke $h_c - h_b$ ist.
Beweis: Nach der Strahlensatzfigur mit Scheitelpunkt C ist

$$\frac{|CL|}{h_c} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \Leftrightarrow |CL| = h_c - \frac{ch_c}{b} = h_c - \frac{bh_b}{b} = h_c - h_b$$

da nach der Flächenformel $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ gilt.

Damit ist mit DLC ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, mit der Hypotenuse $b - c$ und einer Kathete $h_c - h_b$.
Mit ABD ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A und den Schenkeln c und entsprechend dem Basiswinkel $\chi = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ gegebenen.
Für den Konstruktionswinkel φ bei D ist $\varphi = 180° - \alpha - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, also $\varphi = \chi$. Die Ecke B liegt also auf einer Geraden, die den Supplementwinkel $\sphericalangle ADL$ von $\alpha = \sphericalangle CDL$ halbiert sowie auf einem Kreis $(C{,}a)$ beschrieben um C vom Radius a.

Die Ecke A liegt auf einer Parallelen zu $|DK|$ durch B sowie auf derjenigen Geraden durch $|CD|$.



Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks DLC.
(1a) Lege durch $h_c - h_b = |CL|$ die Punkte C und L fest.
(1b) Errichte eine Senkrechte zu $|CL|$ in L.
Beschreibe einen Kreis $(C,b-c)$ um C vom Radius $b-c$. Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Punkt D.
(2) Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks ABD.
(2a) Lege eine Gerade durch $|CD|$ und halbiere den Supplementwinkel von $\alpha = \sphericalangle LDC$, um den Winkel φ zu erhalten.
(2b) Lege eine Gerade durch D so, dass sie mit $|LD|$ den Konstruktionswinkel $\varphi = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ einschließt.
Beschreibe einen Kreis (C,a) um C vom Radius a. Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden ist die Ecke B.

(2c) Lege eine Parallele zu $|DL|$ durch B.
Schnittpunkt der Parallelen mit derjenigen Geraden durch $|CD|$ ist die Ecke A.

Bedingungen für die Konstruktion
Man liest aus der Konstruktionsskizze, dass $b - c > h_c - h_b$ sein muss, da $b - c$ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DLC ist.
Ferner muss $a > b - c$ sein, da der Punkt B sonst innerhalb des Dreiecks DLC liegt.

Aufgabe 111036:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:
Durch die Angabe zweier Innenwinkel ist das Dreieck bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Streckt man es nun noch um einen geeigneten Faktor, sodass auch die Bedingung an die Differenz der beiden Seitenlängen erfüllt ist, hat man das bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte gesuchte Dreieck konstruiert:

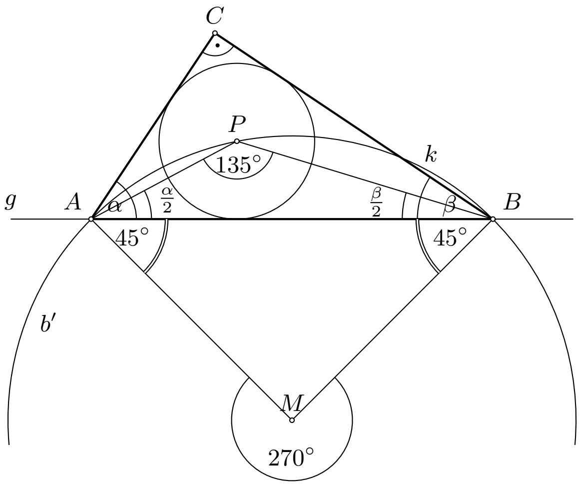
1) Man wähle eine beliebige, echte Strecke $A'B$, trage in A' α und in B β in die gleiche Halbebene an, sodass sich ein Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ergibt, der mit C' bezeichnet sei.
2) Man trage die Strecke $A'C'$ von C' auf der Geraden $C'B$ in Richtung B ab und erhalte damit den Punkt S'. Auf der gleichen Geraden trage man von B aus in Richtung C' die Streckenlänge $a - b$ ab und erhalte den Punkt S.
3) Die Parallele zu $A'S'$ durch S schneide die Gerade BA' in A und die Parallele zu $C'S'$ durch S schneide die Gerade BC' in C.

Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ das zu konstruierende.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle A'BC'$ ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck $\triangle ABC$. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, also auch $= \frac{a-b}{a'-b'}$ gilt, wobei a' und b' die Längen der Strecken BC' bzw. $A'C'$ seien.
Weiterhin gilt nach Konstruktionsschritt 2), dass $|BS'| = a' - b'$ und $|BS| = a - b$ ist.
Nach Strahlensatz gilt nun $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$ und analog $\frac{|CB|}{|C'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$. Damit geht das Dreieck $\triangle ABC$ aus dem Dreieck $\triangle A'BC'$ durch zentrische Streckung mit Zentrum B hervor, wobei der Streckungsfaktor genau so gewählt ist, dass die Differenz der Streckenlängen von BC und AC genau den angegebenen Wert hat.

Aufgabe 151032:
Gegeben sei eine Strecke AB mit $AB = 5$ cm.
Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB. Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B. Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck ABC, so ist

$$\alpha + \beta = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle BAP = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ABP = \frac{\beta}{2}$$

also $\angle BAP + \angle ABP = 45°$ und daher $\angle APB = 135°$.
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von $\triangle ABP$, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b' = \overset{\frown}{AB}$ von k gehört, die Größe 270°.

Also ist $\triangle ABM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, folglich gilt $\angle BAM = \angle ABM = 45°$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b', d. h. nicht auf derselben Seite von g wie P (siehe Abbildung).

Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2.

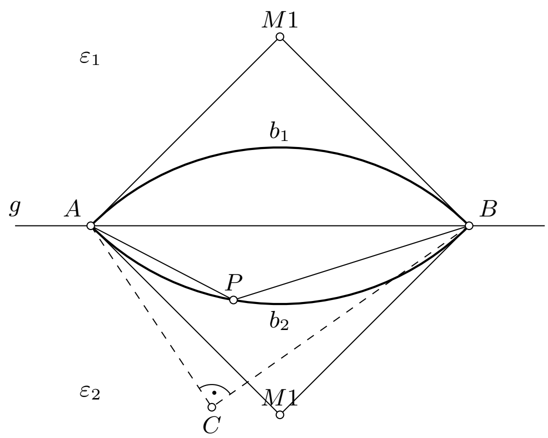
(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ε_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $M_1A = M_1B$. Der in ε_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ε_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $M_2A = M_2B$. Der in ε_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.

(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.



III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an.

Beweis:
Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.
Liegt P ($\neq A, B$) auf b_1, so ist $\angle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $M_1A = M_1B$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d. h. in ε_1 gelegenen Bogen $b_1' = \overset{\frown}{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpf, da auch M_1 in ε_1 liegt.

Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270°, folglich gilt $\angle SPB = 135°$, also $\angle BAP + \angle ABP = 45°$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAP$ bzw. $2 \cdot \angle ABP$ so an, dass die freien Schenkel in ε_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C, für den $\angle BAC + \angle ABC = 90°$, also $\angle ACB = 90°$ gilt.

In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierender, also der Inkreismittelpunkt. Daher gehört P der gesuchten Menge an.

IV. Analog beweist man, dass jeder Punkt P ($\neq A,B$) auf b_2 der gesuchten Menge angehört.
Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

Aufgabe 161036:
Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $AD = CD$, $AB = CB$ aus $a + b = 12$ cm, $f = 9$ cm und $\beta + \delta = 172°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\angle ADC$.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert, und beweisen Sie, dass alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $AB = BC = a$ und $AD = CD = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\angle CBA$ und $\angle ADC$.
Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E. Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

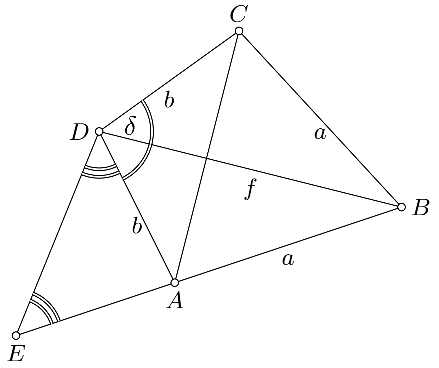
$$\angle DAE = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$$

Da $AE = AD$ nach Konstruktion gilt, ist $BE = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenklig. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$$\angle AED = \angle EDA = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}(\beta + \delta)\right) = 90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$$

Daraus ergibt sich, dass das Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

(1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.
(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an.



(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B. Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so ist D einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE, so sei A der Schnittpunkt.
(5) Man zeichne die Kreise um D mit DA und um B mit BA. Der Schnittpunkte dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BD = f$. Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, dass das Dreieck EDA gleichschenklig ist (*).
Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$$\angle EAD = \frac{1}{2}(\beta + \delta) \qquad \text{und} \qquad \angle ABD + \angle ADB = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD. (**) Daraus folgt:

$$\angle CBA + \angle ADC = \beta + \delta$$

Aus (**) folgt, dass das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit $AD = DC$, $AB = CB$ ist.

Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a + b$, der Winkel $\angle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar.

Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte D_1 und D_2. Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.
Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.
Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent, denn es gilt:

$BD_1 = BD_2 = f$, $\angle BA_1D_1 = \angle D_2A_2B$, wegen $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ als Stufenwinkel, weiter gilt $\angle BED_1 + \angle EBD_1 = \angle D_2D_1B$ (Außenwinkelsatz) sowie $\angle ED_1A_2 + \angle A_2D_2B = \angle D_1D_2B$, woraus wegen $\angle D_2D_1B = \angle D_1D_2B$ dann $\angle A_1BD_1 = \angle A_2D_2B$ folgt.

Aufgabe 181036:
Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $CM = 6$ cm, $CS = 7$ cm und $MS = 1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, dass sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

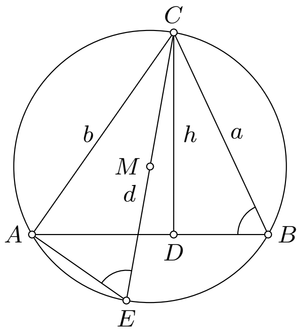
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB, so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis $1 : 2$, also liegt H im Abstand $HS = \frac{1}{2}SC$ auf der Verlängerung von CS.
Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB. MH verläuft also senkrecht zu AB.
Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d. h. dem Kreis um M durch C. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}CS$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H.

(2) Man konstruiert die Gerade durch H, die auf MH senkrecht steht.
(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C. Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

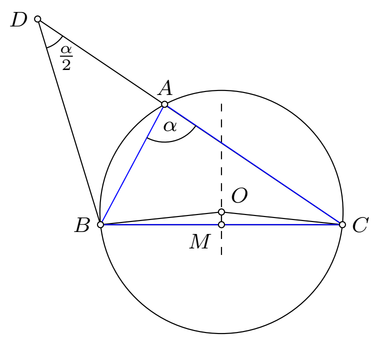
M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, da A, B und C nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $MA = MB$ und $\angle AHM = \angle BHM = 90°$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ssw; dieser ist anwendbar, da $\angle AHM, \angle BHM$ als rechter Winkel jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen).
Somit gilt $AH = BH$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $HS : SC = 1 : 2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.



IV. Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, dass H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in zwei Punkten.
Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\angle MHC < 90°$ ist, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B. Also existiert zu den gegebenen Punkten M, S, C genau ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 201036:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ die Bedingungen $a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$ erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, dass alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!
Hinweis:
In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als „einander kongruent“ bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgendeiner anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

Lösung von Steffen Polster:



Analyse:
Ist die Winkelsumme $\beta + \gamma$ bekannt, so ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz für den Winkel $\alpha = 80°$. Damit sind von dem gesuchten Dreieck die Stücke Seite a, die Seitensumme $b + c$ und der Winkel α bekannt.

Angenommen das Dreieck ABC ist gegeben, so sei der Punkt D die Verlängerung von CA, so dass $|CD| = c + b$ ist. Dann ergibt sich im Dreieck ABD der Winkel δ bei D zu

$$\delta = \frac{1}{2}(180° - (180° - \alpha)) = \frac{1}{2}\alpha$$

Der Winkel α ist Peripheriewinkel des Umkreises von ABC über der Sehne BC. Damit ist der Punkt A Schnittpunkt des Umkreisbogens BC mit der Strecke CD.

Konstruktion:
1. Das Dreieck BCD ist somit nach dem Kongruenzsatz SSW (Seiten a und $b+c$, Innenwinkel $\frac{\alpha}{2}$) konstruierbar.
2. Über BC wird ein gleichschenkliges Dreieck BCO konstruiert, für das der Winkel $\angle BAO = 10°$ ist. Damit wird der Winkel $\angle AOB = 160°$. Der Kreis um O mit dem Radius OA schneidet dann die Strecke CD außer in C in dem gesuchten Punkt A.

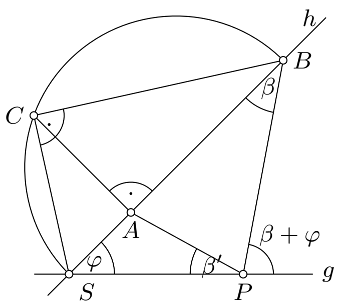
Der 1. Konstruktionsschritt ist im Sinne der Aufgabenstellung nach Kongruenzsatz SSW eindeutig ausführbar. Die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks ABC ist nach dem 2. Konstruktionsschritt ebenfalls eindeutig ausführbar.
Als Schnittpunkt des Umkreises mit der Strecke CD entsteht genau ein Punkt A. A liegt dann auf dem Kreis um O mit einem Peripheriewinkel gleich dem halben Zentriwinkel $\angle AOB$. Damit ist $\alpha = 80°$.
Das Dreieck ABC ist damit, bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 261033:
Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, dass A zwischen S und B liegt.
Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, dass sie h in S schneidet.
Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf g.
b) Der Innenwinkel $\angle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.
(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.
(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage (I) zutrifft!
(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a), (b) erfüllt (Abbildung), so folgt: Ist β die Größe des Innenwinkels $\angle SBP$ im Dreieck SBP, β' die Größe des Innenwinkels $\angle SPA$ im Dreieck SPA sowie φ die Größe des gemeinsamen Innenwinkels $\angle PSA = \angle PSB$ (1) in den Dreiecken SPA, SBP so ist

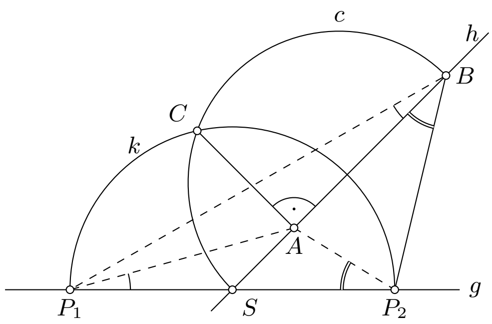
$$\beta < \beta + \varphi < 180° - \beta'$$

Also kann die Bedingung (b) (nicht mit $\beta = 180° - \beta'$, sondern) nur mit $\beta = \beta'$ (2) erfüllt sein.



Aus (1) und (2) folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daraus $PS : AS = BS : PS$, also $PS^2 = AS \cdot BS$. Daher gilt nach dem Kathetensatz $PS = CS$ (3) für einen Punkt C, der so gelegen ist, dass SBC ein rechtwinkliges Dreieck (4) ist, das SB als Hypotenuse (5) und darauf A als Höhenfußpunkt (6) hat.

Nach der Umkehrung des Thalessatzes folgt aus (4), (5): C liegt auf dem Kreis, der SB als Durchmesser hat.
Hiernach und nach (6), (3) ergibt sich, dass P ein Punkt ist, der durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) Konstruktionsbeschreibung:
(7) Man konstruiert den Kreis c der SB als Durchmesser hat.
(8) Man errichtet in A die Senkrechte auf SB. Einen der Punkte, in denen sie c schneidet, bezeichnet man mit C.
(9) Man konstruiert den Kreis k um S mit dem Radius CS. Jeder der beiden Punkte P_1, P_2, in denen er g schneidet, kann als Punkt P gewählt werden.

(III) Wenn ein Punkt P nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (Abbildung mit $P = P_1$ oder $P = P_2$):
Nach (9) liegt P auf g, also ist (a) erfüllt.
Nach (7), (8) und dem Thalessatz ist SBC ein rechtwinkliges Dreieck, das SB als Hypotenuse hat. Nach (8) ist A der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse. Also gilt nach dem Kathetensatz

$$CS^2 = AS \cdot BS$$

Hiernach und nach (9) ist $PS^2 = AS \cdot BS$ also

$$PS : AS = BS : PS$$

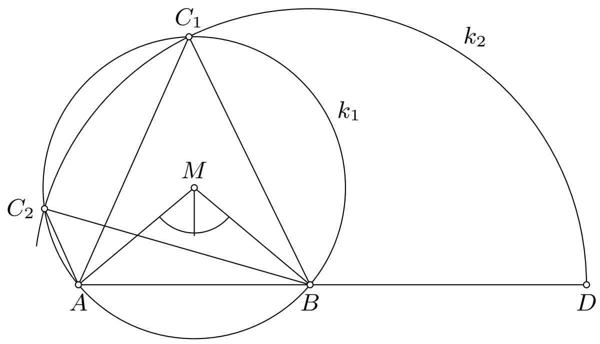
Hieraus und aus $\angle PSA = \angle PSB$ folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daher $\angle SBP = \angle SPA$, und hiermit ist auch (b) erfüllt.

Aufgabe 281035:
Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlänge $c = AB$ und $a = BC$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\angle ACB$ hat die Größe γ.
I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Anzahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenanten Fall diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so folgt:
Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1): $MA = MB = r$, sowie nach (3) und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle AMB = 2\gamma$.

Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis k_1, andererseits auf dem Kreis k_2 um B mit dem Radius a; dabei gilt nach (2) $a = s - AB$.

Damit ist bewiesen, dass jedes Dreieck, das (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann (siehe Abbildung):



II. 1. Man konstruiert einen Winkel der Größe 2γ; sein Schenkel sei M.
2. Man konstruiert den Kreis k_1 um M mit r, er schneidet die Schenkel des in 1. konstruierten Winkels in A bzw. B.
3. Man konstruiert die Länge $a = s - AB$ (z. B. indem man den Kreis um A mit s konstruiert, ihn mit dem von A aus durch B gehenden Strahls zum Schnitt D bringt und damit $a = BC$ erhält).
4. Man konstruiert den Kreis k_2 um B mit a. Er schneidet den Kreis k_1 in zwei Punkten C_1, C_2; jeder von ihnen kann als Endpunkt C in einem damit konstruierten Dreieck ABC genommen werden.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreiec ABC den Bedingungen (1), (2), (3) genügt:
Nach Konstruktionsschritt 2. und 4. liegen A, B und C_1 als auch C_2 auf einem Kreis mit dem Radius r, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3. und 4. gilt (wieder sowohl für $C = C_1$ als auch für $C = C_2$) $BC = s - AB$, also $AB + BC = s$, d. h., (2) ist erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1., 2. und 4. und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz gilt auch $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB = \gamma$, also (3).

IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2., 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt 4. führt, wie oben bemerkt, auf zwei Dreiecke ABC_1, ABC_2. Für sie gilt $\angle ABC_1 \neq \angle ABC_2$, also sind $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art.

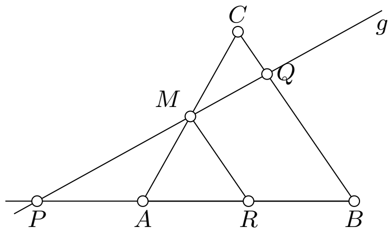
Aufgabe 291035:
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:
(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.
(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.
(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.
Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Gerade g, für die (1) und (2) gilt, erfüllt wegen $AM = MC$ genau dann auch (3), wenn der Abstand des Punktes P von der Geraden durch A, C doppelt so groß ist wie der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden.

Nach dem Strahlensatz ist dies genau dann der Fall, wenn $PM = 2 \cdot MQ$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt ferner:
Die Parallele durch M zu BC schneidet einerseits die Seite AB in ihrem Mittelpunkt R; andererseits ist die Bedingung $PM = 2 \cdot MQ$ äquivalent mit $PR = 2 \cdot RB = AB$, also mit

$$PA = (PR - AR =)\frac{1}{2} \cdot AB$$

Daher werden (zu gegebenem Dreieck ABC) die Bedingungen (1), (2), (3) genau von derjenigen Geraden g erfüllt, die durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.



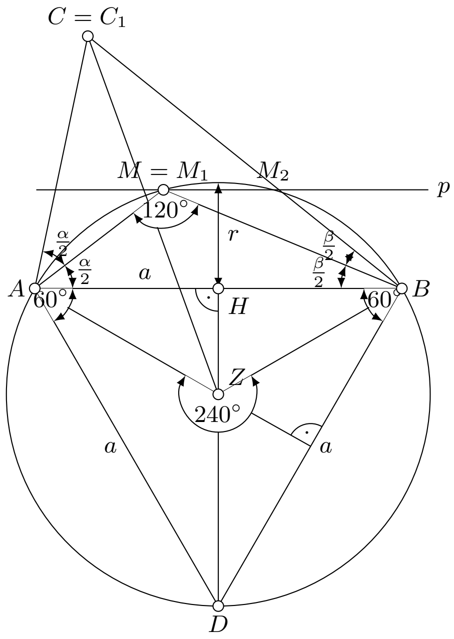
Man konstruiert die Mittelpunkte M bzw. R von AC bzw. AB und verlängert BA über A hinaus um die Länge $\frac{1}{2}AB$ bis P. Dann konstruiert man die Gerade g durch P und M.

Aufgabe 301036:
Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben.
Gefordert wird, dass c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\angle ACB$ die Größe von 60° hat.
a) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden.
b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen erfüllt, so folgt mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = ACB$ (Abbildung)
Ist M der Inkreismittelpunkt, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so ist nach dem Innenwinkelsatz

$$\angle AMB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2} = 120°$$

Daher liegt M nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz auf demjenigen Kreis k, in dem $\angle AMB$ ein zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe 240° gehörender Peripheriewinkel ist.



Ist ZD der Radius von k, der diesen Zentriwinkel halbiert, so zerlegen ZA, ZB, ZD den Vollwinkel in drei Winkel zu je $120°$, also ist ABD ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge c und Z sein Höhenschnittpunkt.

Ferner hat M den Abstand r von AB und liegt nicht auf dem von A über D nach B führenden Bogen. Daher gehört M derjenigen Parallelen im Abstand r zu AB an, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck ABC durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Höhenschnittpunkt Z.
2. Man konstruiert den Kreis k um Z durch A.
3. Man konstruiert diejenige Parallele p im Abstand r zu AB, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z, und wählt als M einen Schnittpunkt von k mit p.
4. Man trägt an AB in A den Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAM$ und an BA in B den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABM$ nach derjenigen Seite von AB an, auf der M liegt, und bringt die zweiten Schenkel dieser Winkel zum Schnitt C.

(c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:

Nach 1. ist $AB = c$, und die Dreiecke ABZ, BDZ, DAZ haben Innenwinkel von $30°, 30°, 120°$. Für den nach 3. erhaltenen Punkt M ist folglich $\angle AMB$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe $2 \cdot 120°$, also gilt $\angle AMB = 120°$. Daher ist

$$\angle BAM + \angle ABM = 180° - 120° = 60°$$

und nach 4. folgt

$$\angle ACB = 180° - (2 \cdot \angle BAM + 2 \cdot \angle ABM) = 180° - 2 \cdot 60^{\cdot} = 60^{\cdot}$$

Ferner folgt aus 4., das M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt von ABC ist. Sein Abstand von AB ist folglich der Inkreisradius, nach 3. beträgt er r.
Damit erfüllt das Dreieck ABC alle geforderten Bedingungen.

(d) Die Konstruktionsschritte 1., 2. und die Konstruktion von p in 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Der Abstand von Z zur Geraden p ist $d = ZH + r$, wo ZH im gleichschenkligen Dreieck ABZ Höhe, also auch Seiten- und Winkelhalbierende ist. Daher ist AZH ein Dreieck mit Innenwinkeln von $30°, 60°, 90°$, und $e = ZH$ ist die halbe Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Höhenlänge $AH = \frac{c}{2}$. Daraus folgt $\frac{c}{2} = a\sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{120}}{2\sqrt{3}}cm = \sqrt{10}cm$.

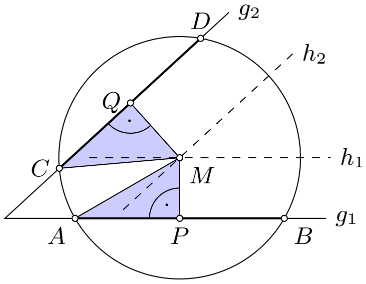
Wegen $3 < \sqrt{10}$, ist somit $d = (\sqrt{10} + 3)$ cm kleiner als der Radius $AZ = 2e = 2\sqrt{10}$ cm von k. Daher schneiden sich p und k in zwei Punkten M_1, M_2, unter denen nach 3. der Punkt M zu wählen ist, und es ist bewiesen, dass Dreiecke existieren, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Wegen $p \perp ZH$ liegen M_1 und M_2 ebenso wie A und B symmetrisch zur Geraden durch Z und H. Daher sind die beiden Dreiecke ABM_1, BAM_2 (mit dieser Reihenfolge entsprechender Punkte) zu einander kongruent.
Dasselbe gilt für die beiden nach 5. zu $M = M_1$ bzw. $M = M_2$ erhaltenen Dreiecke ABC_1 bzw. BAC_2. Damit ist gezeigt, dass es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die geforderten Eigenschaften erfüllt.

IV Runde 4

Aufgabe 011045:
Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 40°$.
Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll! Die Konstruktion ist zu begründen!
Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)

Lösung von Eckard Specht:



Analyse:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei M. Der Kreis schneide die beiden Schenkel g_1 und g_2 des Winkels in den Punkten A, B bzw. C, D. Ferner seien MP und MQ die Lote auf g_1 bzw. g_2.
Betrachten wir nun die rechtwinkligen Dreiecke APM und CQM, so sind diese durch ihre Hypotenusen $MA = MC = r$ sowie die Katheten $AP = \frac{a}{2}$ bzw. $CQ = \frac{b}{2}$ bekannt. Also sind auch die anderen beiden Katheten MP und MQ bekannt.
Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Konstruktionsbeschreibung:
Die Strecken MP und MQ lassen sich aus den gegebenen Stücken mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSW konstruieren. Nun werden zwei Parallelen $h_1 \parallel g_1$ und $h_2 \parallel g_2$ im Abstand MP bzw. MQ von den Schenkeln des Winkels gezogen. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M.
Es ist zu beachten, dass sich ein anderer Mittelpunkt ergibt, wenn die Abschnitte a und b auf den Schenkeln vertauscht werden.

Aufgabe 051042:
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10cm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
Dabei ist h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\angle BAC$ und β das Maß des Winkels $\angle CBA$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von cyrix:

1) Gegeben Sei eine beliebige echte Strecke, deren Endpunkte mit A und B' bezeichnet seien.

2) In A trage man den Winkel α und in B' den Winkel β in der entsprechenden Orientierung an die Strecke AB' an. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel heiße C'.

3) Man konstruiere im Dreieck $AB'C'$ die Höhen auf die Seiten $B'C'$ sowie AC', deren Längen mit h'_a bzw. h'_b bezeichnet seien.

4) Auf einem von A ausgehenden Strahl, auf dem keiner der beiden Punkte B' und C' liegt, trage man von A aus die Streckenlänge $h'_a + h'_b$ konstruktiv ab und erhalte den Punkt S'.

5) Auch auf diesem Strahl konstruiere man den Punkt S mit $|AS| = h_a + h_b$.

6) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' in B; die Parallele zu $C'S'$ durch S die Gerade AC' in C.

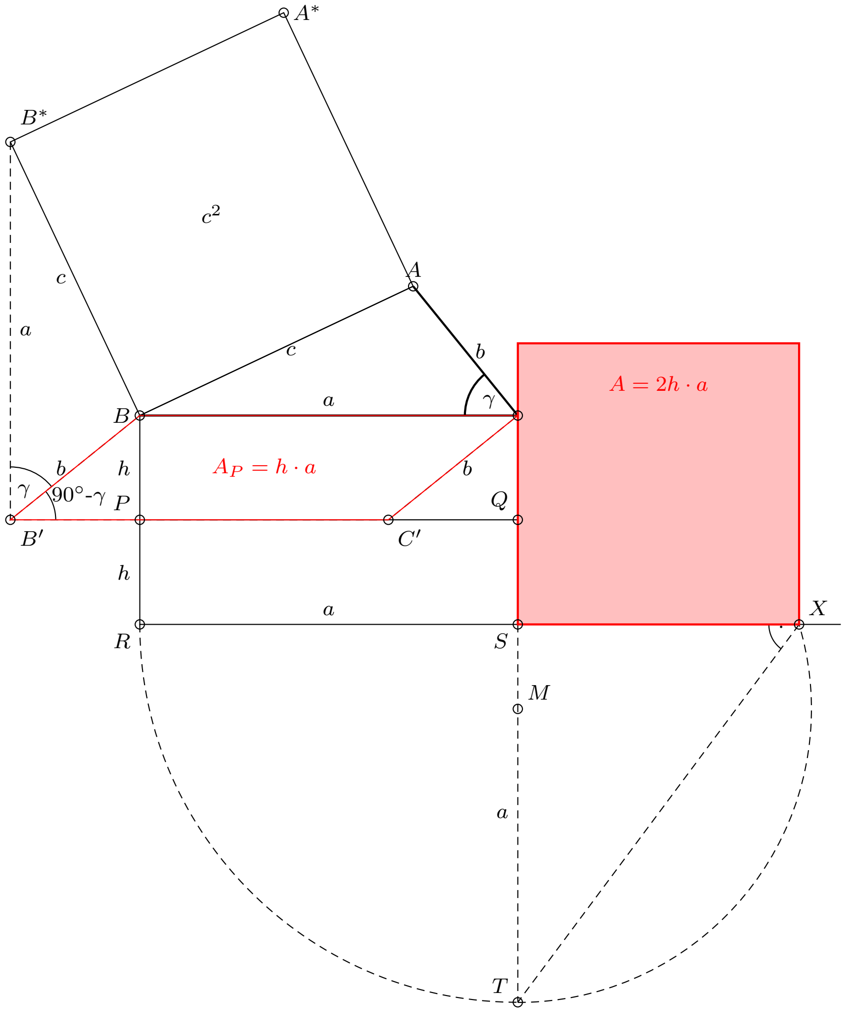
Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $\triangle AB'C'$ zum gesuchten Dreieck ähnlich. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass das gesuchte Dreieck durch Streckung um den Faktor k und Zentrum A aus dem Dreieck $\triangle AB'C'$ hervorgeht.
Insbesondere ist damit auch das Verhältnis entsprechender Höhen (sowie deren Summen) in den beiden Dreiecken jeweils gleich $k = \frac{h_a+h_b}{h'_a+h'_b} = \frac{|AS|}{|AS'|}$.
Nach den Strahlensätzen gilt dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AC|}{|AC'|}$, sodass im Dreieck $\triangle ABC$ die Höhen (und deren Summe) die richtige Länge besitzen.

Aufgabe 061044:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$; wie üblich sei $BC = a$, $CA = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\angle ACB$.
Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

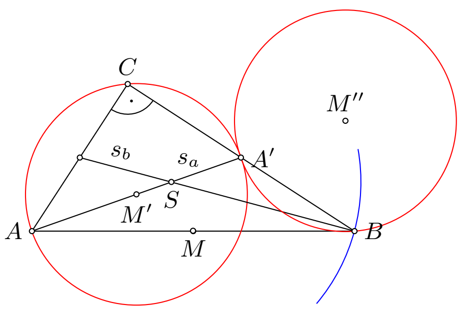
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

1. Errichte das Quadrat über $|AB| = c$.
2. Ergänze an der Quadratseite BB^* das zum Dreieck ABC kongruente Dreieck $B'BB^*$.
3. Bilde das Parallelogramm $B'C'CB$ aus den Seiten $|BB'|$ und $|BC|$; dieses hat den Flächeninhalt $A_P = a \cdot h = ab\sin(90° - \gamma) = ab\cos(\gamma)$.
4. Bilde aus dem Parallelogramm das flächengleiche Rechteck $PQCB$; verdopple das Rechteck zum Rechteck $RSCB$; dieses hat den Flächeninhalt $A = 2h \cdot a$.
5. Verlängere die Rechteckseite $|CS|$ um $a = |RS|$, Endpunkt sei T.
6. Errichte über der Strecke $|CT|$ den Thaleskreis (Mittelpunkt sei M).
7. Bestimme den Schnittpunkt derjenigen Geraden durch $|RS|$ mit dem Thaleskreis; der Schnittpunkt sei X.
8. Dann gilt für das rechtwinklige Dreieck CTX nach dem Höhensatz: Das Rechteck aus den Höhenabschnitten ($2h$ und a) der zur Hypotenuse gehörenden Höhe ist so groß wie das Quadrat über der Höhe; mit anderen Worten: $A = 2h \cdot a = 2b\cos(\gamma) \cdot a = 2ab\cos(\gamma)$.



Aufgabe 131042:
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm!
Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die Länge der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung ist AA' die Seitenhalbierende s_a des Dreiecks ABC. Da bei C ein rechter Winkel vorliegt, befindet sich C auf dem Thaleskreis k' über der Strecke AA'. M' sei der Mittelpunkt dieses Thaleskreises.

Der Punkt B ist dann das Spiegelbild von C an dem Seitenmittelpunkt A'. Damit liegt B auf einem weiteren Kreis k'' (rot in der Abbildung) mit dem Mittelpunkt M''. Dieser Mittelpunkt ist das Spiegelbild von M' an A'. Der Kreis k'' hat den gleichen Radius wie der Thaleskreis k'.

Der Schwerpunkt S, d. h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2. Der Punkt B liegt auf einem Kreisbogen (blau) um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Somit ist B eindeutig bestimmt. Der Punkt C ist der Schnittpunkt der verlängerten Strecke BA' mit dem Thaleskreis k'.

Konstruktion:
1. Zeichne eine Strecke AA' mir $AA' = s_a$.
2. Konstruiere über der Strecke AA' den Thaleskreis k' mit dem Mittelpunkt M'.
3. Spiegele den Punkt M' am Punkt A'. Das Ergebnis ist M''.
4. Zeichne einen Kreis k'' um M'' mit dem Radius des Kreises k'.
5. Teile die Strecke AA' im Verhältnis 2:1, so dass der Teilungspunkt S näher an A' als zu A liegt.
6. Konstruiere einen Kreis um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis k'' ist der Punkt B.
7. Zeichne eine Gerade BB'. Diese schneidet den Kreis k' in einem Punkt, dem gesuchten Punkt C.

Der blaue Kreis schneidet den grünen k'' in zwei Punkten. Die Konstruktion ist eindeutig, da der zweite Punkt eine kongruente Lösung ergibt. Es gibt eine Lösung, da $s_a < 2s_b$ und $s_b < 2s_a$.
Dieses ist gerade die Bedingung, dass der blaue und grüne Kreis einen Schnittpunkt haben. Im Fall $s_a = 2s_b$ bzw. $s_b = 2s_a$ bekommen wir den Grenzfall mit einer Seite des Dreiecks gleich 0.

Aufgabe 151045:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an der Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert!
Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I. Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einem Kreis:

$$BS = BU, \qquad AS = AT, \qquad CT = CU$$

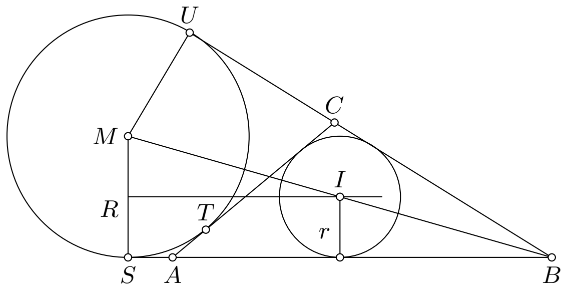
Ferner gilt

$$AB = BS - AS = BU - AS, \qquad BC = BU - CU, \qquad CA = CT + AT = CU + AS$$

und mithin

$$AB + BC + CA = BU - AS + BU - CU + CU + AS = 2BU \qquad \text{also} \qquad s = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = BU$$

Da die Strahlen aus B durch S bzw. Z die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einen bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\angle SBU$ (Abbildung).



Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.

(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Eckpunkt dieser Strecke sei M.

(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.

(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise und M bzw. I mit den Radien R bzw. r.

(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. B die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. SU.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Lauf Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner

$$s = BS = BU = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R > r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar.

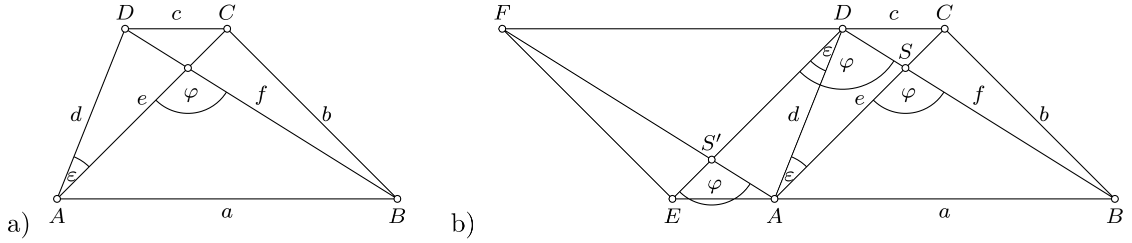
Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $MI \geq R + r$ gilt. Wegen $MI = MB - BI$ und $MB = \sqrt{s^2 + R^2}$ (Pythagoras) sowie $BI = \frac{MB \cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Beziehung gleichwertig mit $MB - MI \geq R + r$, also auch mit

$$\sqrt{s^2 + R^2}(1 - \frac{r}{R}) \geq R + r \qquad (*)$$

Für $MI = R + r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC. Für $MI > R + r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke. Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.

Aufgabe 161042:
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\varphi = 100°$ und $\varepsilon = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ε die Größe des Winkels $\angle DAC$ und φ die Größe des Winkels $\angle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.
Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von Stephan Hauschild:
Angenommen $ABCD$ wäre das gesuchte Trapez (Abbildung a).



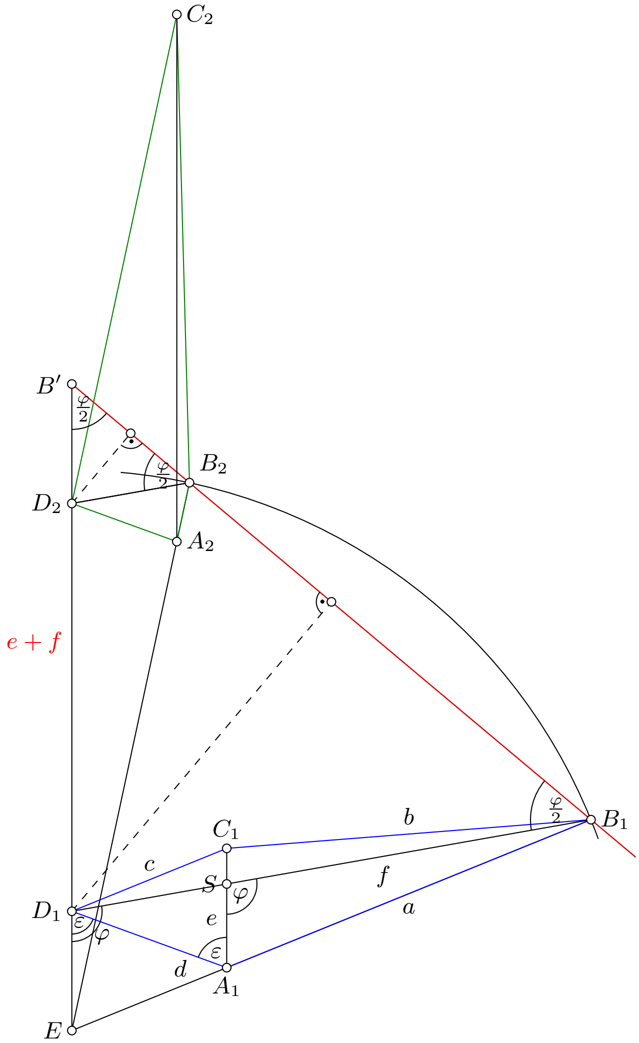
Wir setzen an das Trapez links ein um 180° gedrehtes Trapez $EADF$ an, so dass EA gleich $a + c$ wird (Abbildung b).
Die Winkel $\angle ES'A$ und $\angle EDB$ sind dann gleich dem Winkel φ (Winkel an geschnittenen Parallelen und Scheitelwinkel). Wir klappen die Strecke BD um D so heraus, dass der Bildpunkt B' auf der Geraden durch E und D liegt. Dann gilt $DB = DB'$ und $\angle DBB' = \angle DB'B = \frac{\varphi}{2}$. Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

a) Zuerst wird das Dreieck EBB' konstruiert. (aus $EB = a + c$, $EB' = e + f$ und $\angle BB'E = \frac{\varphi}{2}$, da das Dreieck $\triangle BB'D$ gleichschenklig ist). Diese Konstruktion ist allerdings mehrdeutig und liefert eine zweite Lösung B_2.

b) Der Schnitt der Mittelsenkrechten von BB' mit EB' ergibt den Punkt D.

c) Der Punkt A wird mit Hilfe des Winkels ε konstruiert.

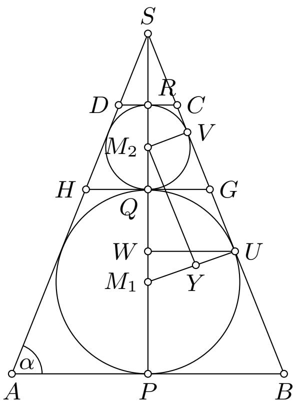
d) Der Punkt C ergibt sich dann durch Parallelverschiebung von DE durch A.



Die Punkte D_2, A_2, C_2 werden analog aus B_2 gewonnen. Damit ergeben sich 2 nicht kongruente Trapeze.

Aufgabe 201042:
Gegeben sei eine Länge r_1.
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $CD < AD = AB = BC$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, dass sie einander von außen berühren und dass k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt!
Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Trapez $ABCD$ mit den Kreisen k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$) habe die geforderten Eigenschaften.
Gilt $AD \parallel BC$, so ist $ABCD$ wegen $AD = BC$ ein Parallelogramm im Widerspruch zu $AB > CD$. Also gilt $AB \parallel CD$ und das Trapez ist wegen $AD = BC$ gleichschenklig.
Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich in S schneiden, liegen M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden m des $\angle ASB$, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von AB und CD ist.
Ferner liegt auch Q (der Berührungspunkt von k_1 und k_2) auf m. Die Parallele zu AB durch Q ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1 und k_2, die AD in H und BC in G schneidet.
Das Trapez $HGCD$, dessen Seiten von k_2 berührt werden, geht durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez $ABGH$ über, dessen Seiten von k_1 berührt werden.

Es sei $x = r_2 : r_1$m $a = AB$, $b = HG$, $C = DC$. Es ist $x = DC : HG = HG : AB$, also $b = ax$, $c = bx = ax^2$. U und V seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC.
Es gilt
$$a = AB = BC = BU + UG + GV + VC = BP + QG + QG + CR =$$
nach dem über de Gleichheit der Tangentenabschnitte
$$= \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$$
Diese Gleichung wird wegen $x > 0$ nur von $x = \sqrt{2} - 1$ erfüllt. Also kann das Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen genügen, wenn gilt:
$$r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$$
II. Konstruktionsbeschreibung
(1) Aus r_1 konstruiere man $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$.
(2) Man konstruiere die sich von außen in Q berührenden Kreise k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$).
(3) Man konstruiere die beiden äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2.
(4) Die Gerade durch M_1 und M_2 schneide die Kreise k_1, k_2 zusätzlich in R und P. Man errichte die Senkrechten auf dieser Geraden in R und P. Diese schneiden t und t' in A, D und B, C.
$ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

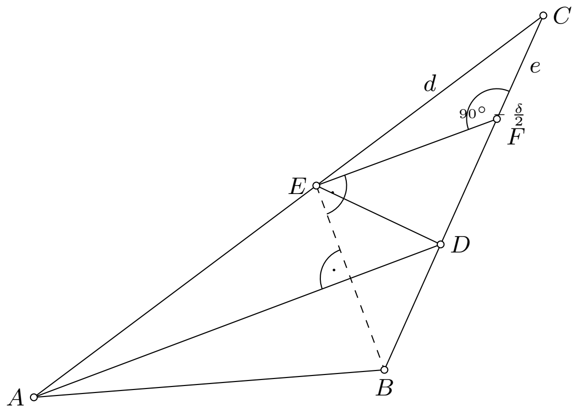
III. Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Nach Konstruktion ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AD = BC$. Die Kreise k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2 < r_1$ ist $CD < AB$. Wie in I. kann man herleiten, dass mit $x = r_2 : r_1$ die Gleichung $BC = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$ gilt.
Da nach Konstruktionsschritt (1) $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 2$, und es folgt $BC = a = AB$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig ausführbar. (2) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, und (3) und (4) sind es anschließend auch. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 231042:
„Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80°$ und der Differenz $u - v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a!“
Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80°$.
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\angle ABC$, $\angle ACB$ sind, so gilt:

$b - c = d$, $u - v = e$, $\beta - \gamma = \delta$.
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Es sei $\angle BAC = \alpha$, auf AC sei E der Punkte mit $AE = c$, azf DC sei F der Punkt mit $DF = v$. Dann ist $EC = d$ und $FC = e$.
Die Dreiecke ADB und ADE sind nach Kongruenzsatz sws kongruent, also liegen B und E symmetrisch zur Geraden durch A, D. Hieraus folgt einerseits $BE \perp AD$, andererseits $DE = v$. Also ist nach dem Thalessatz auch $BE \perp EF$ und folglich $EF \parallel AD$. Hiernach gilt $\angle CEF = \angle CAD = \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen, Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$) und nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle EFC$ daher

$$\angle EFC = 180° - \gamma - (90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = 90° + \frac{\delta}{2}$$

II. Daher entspricht ein Dreiecke ABC nur dann den Bedingungen der Aufgaben, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck EFC aus $EC = d$, $FC = e$ und $\angle EFC = 90° + \frac{\delta}{2}$.

(2) Man errichtet die Senkrechte in E auf EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CF über F hinaus sei B.

(3) Man konstruiert den Mittelpunkt D von BF.

(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CE über E hinaus sei A.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (2), (3) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt E auf dem Kreis um D durch B und F, also ist $DE = DB$ und daher $\triangle BED$ gleichschenklig mit - wegen (2), (4) - auf DA gelegener Höhe zu BE.
Somit liegen B und E symmetrisch bezüglich der Geraden durch A, D; also gilt $AB = AE$ und daher $b - c = AC - AB = EC = d$ (siehe (1)).

Ferner folgt $\angle BAD = \angle EAD$; d. h., AD ist die Winkelhalbierende von $\angle BAC$. Wegen (3), also $BD = DF$, folgt somit $u - v = CD - BD = FC = e$ (siehe (1)).
Nach (4) ist für $\alpha = \angle BAC$ schließlich $\frac{\alpha}{2} = \angle CEF$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen), woraus nach dem (auf $\triangle ABC$ und $\triangle EFC$ angewandten) Innenwinkelsatz und (1) auch folgt:

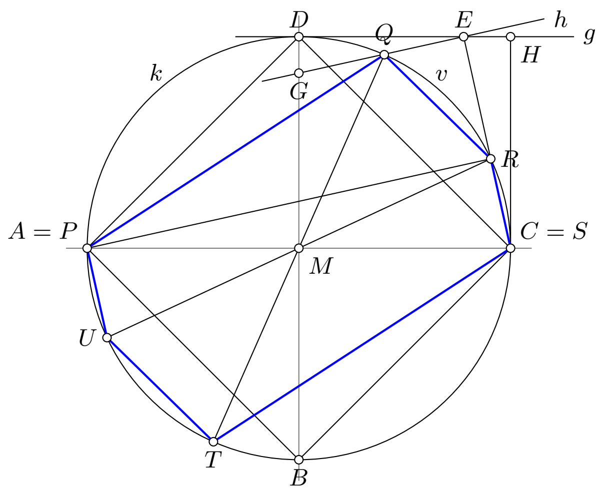
$$\beta - \gamma = 180° - \alpha - 2\gamma = 180° - 2(\angle CEF + \angle ECF) = 2\angle EFC - 180° = \delta$$

IV. Da für die gegebenen Größen $d > e$ und $90° + \frac{\delta}{2} < 180°$ gilt, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $\angle EFC > 90°$ schneidet die in (2) konstruierte Senkrechte die Verlängerung von CF über F hinaus; d. h., Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig ausführbar.

Auch Konstruktionsschritt (3) ist eindeutig ausführbar und Konstruktionsschritt (4) ebenfalls; denn da D auf der Verlängerung der Seite CF des Dreiecks EFC liegt, schneidet die in (4) zur Dreiecksseite EF konstruierte Parallele die Verlängerung der Seite CE dieses Dreiecks.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 251042:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k.
Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist!
Beweisen Sie, dass jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung ist nicht eindeutig; eine Lösungsmöglichkeit ist die folgende:
a) Konstruktionsbeschreibung:



(1) Man wählt $P = A$ und $S = C$.

(2) Man wählt auf dem von C nach D führenden Viertelkreisbogen v des Kreises k einen Punkt R $(\neq C, \neq D)$.

(3) Man konstruiert die Parallele g durch D zu AC und ihren Schnittpunkt E mit der Geraden durch C und R. Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt, da R nicht auf der Geraden durch A und C liegt, also die Gerade durch C und R nicht parallel zu g ist.

(4) Man konstruiert die Parallele h durch E zu AR und ihren Schnittpunkt Q mit dem Viertelkreisbogen v. Dieses Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt; denn ist M der Mittelpunkt von k und H derjenige Punkt, für den $DMCH$ ein Quadrat ist, so schneidet h die Quadratseiten DH und MD in inneren Punkten E bzw. G (das erste wegen $45° < \angle MCR = \angle MCE < 90°$, das zweite wegen $AR \perp CR$, also $h \perp CE$).

(5) Man konstruiert den Strahl aus R durch M und seinen Schnittpunkt U mit k.

(6) Man konstruiert den Strahl aus Q durch M und seinen Schnittpunkt T mit k.

b) Beweis der geforderten Eigenschaften:
Nach (2) und (4) ist $ACRQ$ ein konvexes Viereck, mit einem Durchmesser AC von k als einer Seite und einem Halbkreis über diesem Durchmesser einbeschrieben. Zentralsymmetrisch bezüglich M liegt hierzu nach (5) und (6) das Viereck $CAUT$. Damit und mit (1) ergibt sich $PQRSTU$ als ein konvexes Sechseck, dessen sämtlich Eckpunkte auf k liegen.

Wegen (3), also $DE \parallel AC$, ist

$$F(ACE) = F(ACD) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

Wegen (4), also $EQ \parallel AR$, ist $F(ARQ) = F(ARE)$. Damit folgt

$$F(ACRQ) = F(ACR) + F(ARQ) = F(ACR) + F(ARE) = F(ACE) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

und somit wegen der genannten Zentralsymmetrie

$$F(PQRSTU) = 2F(ACRQ) = F(ABCD)$$

Aufgabe 251043A:
Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:
- Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).

Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen lässt!
Beweisen Sie, dass durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!
Hinweis: Unter P_iP_j ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

Lösung von cyrix:
Offenbar ist $P_1P_2P_3P_4$ ein reguläres Tetraeder mit Umkugel K.
Besitzt dieses Tetraeder die Kantenlänge a und ist M_{12} der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2, so hat die von P_3 im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ ausgehende Höhe als Kathete im rechtwinkligen Dreieck $\triangle P_1P_3M_{12}$ die Länge

$$|P_3M_{12}| = \sqrt{|P_1P_3|^2 - |P_1M_{12}|} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ist S_{123} der Schwerpunkt im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, so gilt also $|P_3S_{123}| = \frac{2}{3} \cdot |P_3M_{12}| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, da der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende (und P_3M_{12} ist im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende) im Verhältnis 2:1 teilt.

Weiterhin steht im regulären Tetraeder die Schwerelinie P_4S_{123} senkrecht auf P_3S_{123}, sodass das Dreieck $\triangle P_4P_3S_{123}$ rechtwinklig in S_{123} ist. Damit ergibt sich

$$|P_4S_{123}| = \sqrt{|P_3P_4|^2 - |P_3S_{123}|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Sei schließlich M der Schnittpunkt der Schwerelinien im Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$. Da dieses regulär ist, ist es auch gleichzeitig dessen Umkugelmittelpunkt. Da M die Schwerelinien im Verhältnis 3:1 teilt, ist der Umkugelradius $r = |P_4M| = \frac{3}{4} \cdot |P_4S_{123}| = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.
Damit ist $d = 2r = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ bzw. $a = \frac{2}{\sqrt{6}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot d\right)$

Errichtet man also auf B über der Strecke DE mit Länge $|DE| = d$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DEF$ sowie dessen Schwerpunkt S als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden, dann erhält man die Strecke DS mit Länge $|DS| = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, siehe vorherige Berechnung. Errichtet man nun über dieser Strecke DS das Quadrat $DSXY$, so hat dessen Diagonale DX die Länge $|DX| = \sqrt{2} \cdot |DS| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d = a$.

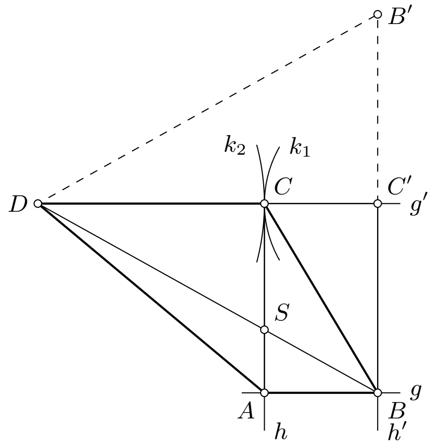
Nimmt man also nun die gerade auf B konstruierte Streckenlänge $|DX|$ in die Zirkelspanne, zeichnet auf K um einen beliebigen Punkt P_1 auf K einen Kreis k_1 mit Radius $a = |DX|$ sowie um einen beliebigen Punkt P_2 auf k_1 (und damit auf K) einen Kreis k_2 mit gleichem Radius, dann schneiden sich diese beiden Kreise in zwei Punkten, die P_3 und P_4 benannt seien.

Nach Konstruktion gilt $|P_1P_2| = a = |P_1P_3| = |P_1P_4| = |P_2P_3| = |P_2P_4|$, da P_2, P_3 und P_4 auf k_1 bzw. P_3 und P_4 auch auf k_2 liegen. Damit ist das Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ eindeutig festgelegt. Da jedoch das reguläre Tetraeder mit Kantenlänge a den gleichen Umkugeldurchmesser wie $P_1P_2P_3P_4$ besitzt, muss auch dieses ein reguläres Tetraeder sein, sodass auch $|P_3P_4| = a$ folgt.

Aufgabe 301041:
Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:
(1) Die Seite AB hat die Länge $AB = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $CD = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $AC = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $BD = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S, für diesen hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe φ.
(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Für den Schnittpunkt C' der Parallelen g' durch C zur Geraden g durch A, B und der Parallelen h' durch B zur Geraden durch A, C ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher ist $BC' = AC$, nach (3) also $BC' = e$.
Weiter ist $BC' \parallel AC$, nach dem Wechselwinkelsatz und nach (5) also $\angle DBC' = \angle ASB = \varphi$.
Damit und mit (4), also $BD = f$, sind im Dreieck DBC' die Längen zweier Seiten und die Größe des eingeschlossenen Winkels gegeben.
Ferner ist $CC' = AB$, nach (1) also $CC' = a$, und nach (2) ist $CD = c$. Daher liegt C auf dem Kreis k_1 um C' mit a und auf dem Kreis k_2 um D mit c.
Der Punkt A liegt auf g und h, und nach (5) haben die Strecken AC und BD einen Schnittpunkt S miteinander. Damit ist bewiesen, dass $ABCD$ durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(b) (1) Man konstruiert ein Dreieck DBC' mit $BD = f$, $BC' = e$, $\angle DBC' = \varphi$.
(2) Man konstruiert den Kreis k_1 um C' mit a und den Kreis k_2 um D mit c.
(3) Man wählt einen gemeinsamen Punkt von k_1 und k_2 als C, falls für ihn folgendes gilt:
Schneiden sich die Parallele g durch B zur Geraden g' durch C, C' und die Parallele h durch C zur Geraden h' durch B, C' in A, so schneiden die Strecken AC und BD einander.



Durchführung der Konstruktion : siehe Abbildung, ohne gestrichelte Linien.

(c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:
Nach den Konstruktionsschritten (1) und (2) ist $BD = f$ und $CD = c$, also sind (4) und (2) erfüllt.
Nach (3) ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher und nach (1),(2) ist $AC = BC' = e$ und $AB = CC' = a$, also sind (3) und (1) erfüllt. Nach der Wahl von C in (3) schneiden sich AC und BD in einem Punkt S, und wegen $AC \parallel BC'$ folgt nach dem Wechselwinkelsatz sowie nach (1), dass $\angle ASB = \angle DBC' = \varphi$ gilt, also auch (5) erfüllt ist.

(d) Der Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kongruenzsatz sws bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $BD = \sqrt{108}cm = 2\times\sqrt{27}cm = 2\times BC'$ und $\angle DBC' = 60°$ wird dabei DC' in einem gleichseitigen Dreieck $BB'D$ Seitenhalbierende und zugleich Höhe, und es folgt $DC' = BC' \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27} \cdot \sqrt{3}cm = 9cm = a + c$. Also haben die in (2) konstruierten Kreise k_1, k_2 genau einen Punkt, ihren Berührungspunkt C, gemeinsam, und D liegt auf der Verlängerung von $C'C$ über C hinaus.

Daher (und weil B im Parallelogramm $ABC'C$ der Ecke C gegenüberliegt) schneiden sich BD und AC.
Also führt (3) auf eindeutig bestimmte Punkte C und A.
Somit gibt es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$, das (1) bis (5) erfüllt.

II.V Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V01008:
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

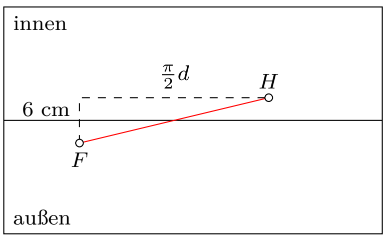
Lösung von Steffen Polster:

Das Volumen einer Halbkugel ergibt sich zu $V_H = \frac{4}{6}\pi r^3$. Mit $V_H = 1$ dm^3 wird $r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}} = 0{,}78$ dm. Der innere Durchmesser der Schöpfkelle muss 15,6 cm groß sein.

Aufgabe V01015:
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.

Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.

Lösung von Steffen Polster:



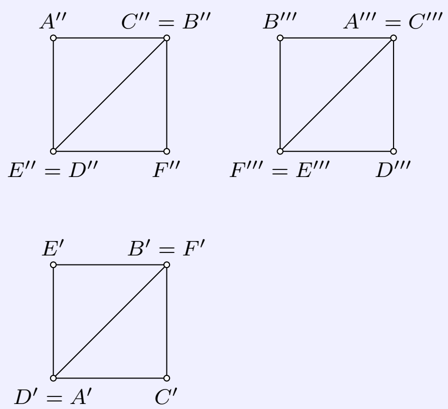
Die Fliege muss sowohl den Rand des Zylinders überklettern, als auch den halben Umfang des Zylinders überwinden. Breitet man äußere Mantelfläche und innere Mantelfläche in der Ebene aus, so erkennt man, dass der kürzeste Weg die eingezeichnete Gerade von der Fliege F zum Honig H ist.

Für das entstehende rechtwinklige Dreieck wird die Hypotenuse (Weglänge) gleich $\sqrt{6^2 + \left(\frac{\pi}{2}d\right)^2}$.
Für die konkreten Maße muss die Fliege $d \approx 16{,}8$ cm Weg zurücklegen.

Aufgabe 011014:
Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht. Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan? Die Antwort ist zu begründen!

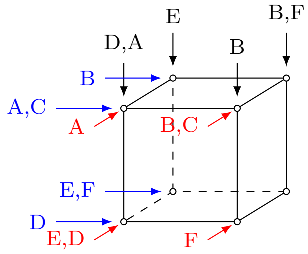
Lösung von Christiane Czech:
Die Kugel hat den Durchmesser a und damit ein Volumen von $\frac{\pi}{6}a^3$. Der Würfel hat ein Volumen von a^3, der Abfallspan also ein Volumen von $(1 - \frac{\pi}{6})a^3$. Das Volumen der Kugel ist somit etwas größer als das des Verschnitts, denn es gilt: $\pi > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} > 1 - \frac{\pi}{6}$.

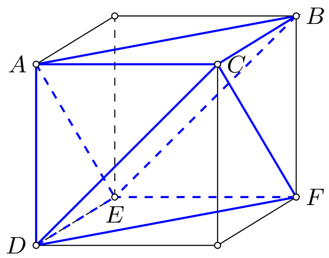
Aufgabe 031013:



Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriss, Aufriss und Seitenriss zeigt ($a = 6$ cm)!

Lösung von Rainer Sattler:





Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen, siehe erste Abbildung.

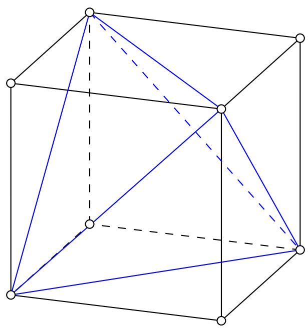
Des Weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Wenn man gedanklich die drei zu einem Buchstaben gehörenden Richtungspfeile verbindet, treffen sie sich immer alle in einem Punkt des Würfels. Dieser wird in der Parallelprojektion entsprechend mit diesem Buchstaben gekennzeichnet.

Anhand dieser Punkte werden alle Kanten eingetragen. Es entsteht die blaue Figur aus der 2. Abbildung, die aus 6 paarweise parallelen Dreiecksflächen besteht.

Aufgabe 041014:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder (Kantenlänge 6 cm).
a) Stellen Sie das Tetraeder im dimetrischen Verfahren dar!
b) Beweisen Sie, dass die Gegenkanten (Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben) eines regelmäßigen Tetraeders orthogonal sind!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Ein regelmäßiges Tetraeder kann man erhalten, wenn man die Flächendiagonalen eines Würfels wie in der Abbildung miteinander verbindet. Jede Kante des Tetraeders hat dann dieselbe Länge.
Dies kann man sich für die dimetrische Darstellung des Tetraeders zu Nutze machen, indem man in gewohnter Weise einen Würfel darstellt (Winkel zur Horizontalen 7° und 42°, Verkürzungsfaktor 0,5 auf der x-Achse) und die Flächendiagonalen geeignet zum Tetraeder verbindet.

b) Projiziert man die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders so aufeinander, dass sie sich schneiden, so liegen sie in derselben Ebene, da sich gegenüberliegende Kanten in gegenüberliegenden Würfelseiten befinden und diese einander bei Parallelprojektion genau dann schneiden, wenn sie aufeinander zu liegen kommen.

Demzufolge liegen die projizierten Tetraederkanten dann in derselben Ebene und sind die beiden Diagonalen einer Würfelfläche.

Nun ist aus dem Schulunterricht bekannt, dass die Diagonalen eines Quadrates (jede Würfelfläche ist ein Quadrat) einander im rechten Winkel schneiden. Damit ist gezeigt, dass die gegenüberliegenden Tetraederkanten orthogonal zueinander sind, wenn es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt.

Aufgabe 051013:
Wie verhält sich das Maß der Oberfläche eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zum Maß der Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, wenn das Maß der Rauminhalte beider Körper gleich ist?
Dabei werden bei beiden Figuren gleiche Maßeinheiten zugrundegelegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien r_1 der Grundkreisradius, I_1 der Oberflächeninhalt und V_1 das Volumen des Kegelkörpers sowie r_2, I_2 und V_2 die entsprechenden Maße des Zylinderkörpers. Die Länge der Mantellinie des Kegels beträgt wegen der Form des Achsenabschnittes $2r_1$.

Die Oberfläche des Kegelkörpers setzt sich aus einer Kreisscheibe vom Radius $r1$ und einem Kegelmantel vom Grundkreisradius r_1 und der Mantellinienlänge $s = 2r_1$ zusammen. Daher gilt:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(2r_1)^2 + \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2 \tag{1}$$

Als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks hat der Achsenabschnitt und damit auch der Kegelkörper die Höhenlänge $2r_1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und somit gilt

$$V_1 = \pi r_1^2 r_1 \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi r_1^3}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

Die Oberfläche des Zylinderkörpers setzt sich aus zwei Kreisscheiben vom Radius r_2 und einem Zylindermantel vom Radius r_2 und der Höhenlänge $2r_2$ zusammen. Daher gilt:

$$I_2 = 4\pi r_2^2 + 2\pi r_2^2 = 6\pi r_2^2 \tag{3}$$

und außerdem

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot 2r_2 = 2\pi r_2^3 \tag{4}$$

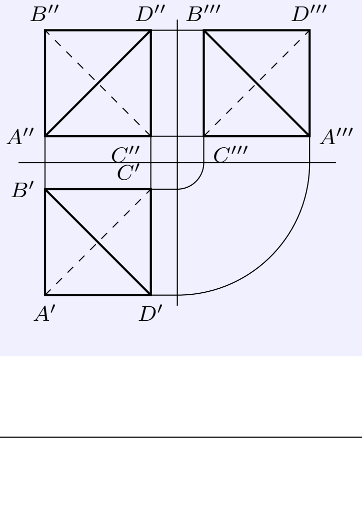
Wegen $V_1 = V_2$ folgt aus (2) und (4)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12} \tag{5}$$

und somit aus (1), (3) und (5)

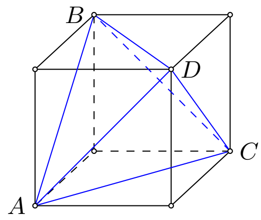
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

Aufgabe 101013:



Die Abbildung zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriss.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriss eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$).
b) Berechnen Sie sein Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Der dargestellte Körper kann aus einem Würfelkörper mit der Kantenlänge a hervorgehen, indem man von diesem mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, B, C; A, B, D; A, C, D und B, C, D vier kongruente Pyramiden abtrennt.



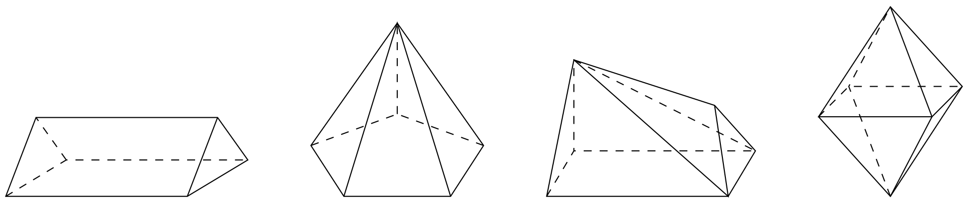
Das Volumen V des dargestellten Körpers ist also gleich der Differenz aus dem Volumen des Würfelkörpers mit der Kantenlänge a und der Summe der Volumina der vier abgetrennten Pyramidenkörper. Da jede von diesen das Volumen $V_P = \frac{1}{6}a^3$ hat, erhält man

$$V = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$$

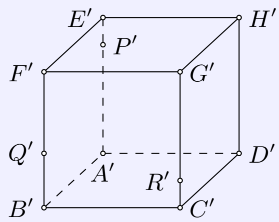
Aufgabe 121011:
Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!

Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es könnten zum Beispiel die in der Abbildung gezeigten Körper mit 9, 10, 11 bzw. 12 Kanten gezeichnet werden.



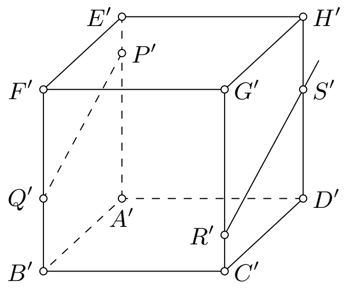
Aufgabe 231014:



Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, dass $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht, die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, dass der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Beschreibung der Konstruktion von S':

Man konstruiert auf den Strecken $A'E'$, $B'F'$ und $C'G'$ mittels Hilfskonstruktion (Strahlensatz) diejenigen Punkte P',Q' und R', für die

$$A'P' : P'E' = 4 : 1 \qquad ; \qquad B'Q' : Q'F' = 2 : 3 \qquad ; \qquad C'R' : R'G' = 1 : 4$$

gilt. Dann konstruiert man (Abbildung) die Parallele durch R' zu $Q'P'$ und bringt sie zum Schnitt mit der Geraden durch $D'H'$. Der Schnittpunkt ist S'.

Beweis, dass S den so konstruierten Punkt S' als Bild hat:

Da bei Parallelprojektion Teilverhältnisse unverändert bleiben, sind die konstruierten Punkte P',Q',R' die Bilder von P,Q bzw. R.
Da die Ebene durch A, B, F, E parallel zur Ebene durch D, C, G, H ist, werden diese beiden Ebenen von der Ebene durch P, Q, R in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten. Weil bei Parallelprojektion parallele Geraden parallele Bildgeraden haben, ist die konstruierte Parallele durch R' zu $Q'P'$ die Bildgerade der Geraden durch R, S. Ihr Schnittpunkt S' mit $D'H'$ ist folglich das Bild des Punktes S.

Aufgabe 261013:
Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.

In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden? Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden Fälle für drei Ebenen durch den Kugelmittelpunkt M:

1. Fall: Alle drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall entstehen genau zwei Teilflächen (die zwei Halbkugelflächen, deren gemeinsamer Rand der Großkreis ist, in dem die Ebene die Kugeloberfläche schneidet).

2. Fall: Genau zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall schneiden sich die beiden Großkreise, die durch den Schnitt der nicht identischen Ebenen mit der Kugeloberfläche entstehen, in genau zwei Schnittpunkten P und Q.

   Jede der beiden Halbkugelflächen, in die die Kugeloberfläche durch den einen Großkreis zerlegt wird, wird durch den zweiten Kreis nochmals in je zwei Teilflächen geteilt. Es entstehen daher insgesamt vier Teilflächen.

3. Fall: Keine zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesen Fall entstehen zunächst durch zwei der Ebenen wie im 2. Fall zwei Großkreise, die sich in zwei Punkten P, Q schneiden und die Kugeloberfläche in vier Teilflächen zerlegen. Die Gerade g durch P und Q enthält den Mittelpunkt M der Kugel, da sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ist und diese durch M gehen.

   Nun gibt es genau die beiden folgenden Unterfälle:

   3.1. Die Gerade g ist auch in der dritten Ebene enthalten. Dann verläuft der dritte Schnittkreis durch P und Q. Genau zwei der bereits entstandenen vier Teilflächen werden dabei nochmals geteilt. Es entstehen mithin genau sechs Teilflächen.

   3.2. Die Gerade g ist nicht in der dritten Ebene enthalten. Dann geht der dritte Schnittkreis weder durch P noch durch Q. Er schneidet die beiden anderen Schnittkreise in jeweils zwei von P und Q verschiedenen Punkten. Das sind insgesamt vier Punkte, durch die dieser dritte Kreis in vier Teile zerlegt wird. Jeder dieser vier Teilbogen wirkt als neue Begrenzung für je zwei neue Teilflächen, die aus einer alten entstanden sind. Also entstehen insgesamt $2 \cdot 4 = 8$ Teilflächen.

Die gesuchten sämtlichen Möglichkeiten lauten daher: Es können zwei, vier, sechs oder acht Teilflächen entstehen.

Aufgabe 281013:
Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h = 10cm$. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P*$ abgetrennt werden, deren Volumen $V*$ ein Drittel des Volumens V der ursprünglichen Pyramide P ist. Wie groß ist die Höhenlänge h^* dieser abgetrennten Pyramide P^*?

Hinweis : Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

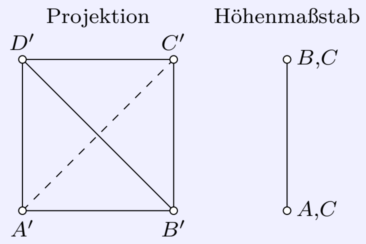
a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm

liegen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist S die Spitze beider Pyramiden, so geht P^* aus P durch zentrische Streckung hervor. Ist k der Streckungsfaktor, so gilt für die Volumina $V^* = k^3 V$. Daher wird die Forderung $V^* = \frac{1}{3}V$ genau dann erfüllt, wenn $k^3 = \frac{1}{3}$, d. h. $k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ und damit für die Höhenlänge gilt:

$$h^* = k \cdot h = \frac{10}{\sqrt[3]{3}} \text{ cm} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 291014:

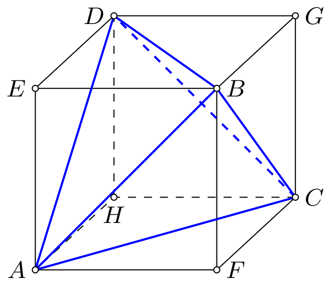


Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G und H liegen. Dabei sollen die Punkte E und G die gleiche Höhe wie B haben, die Punkte F und H dagegen die gleiche Höhe wie A (siehe Abbildung).

Die 8 Punkte $A, ..., H$ sind die Ecken eines Würfels, dessen Volumen a^3 beträgt.

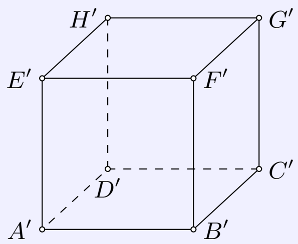
Die Punkte A, F, C, B sind die Ecken eines Tetraeders, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann. Daher hat dieses Tetraeder $AFCB$ das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

Die zu $AFCB$ kongruenten Tetraeder $AHCD, BEDA$ und $BGDC$ haben das gleiche Volumen. Werden von den Würfel alle vier genannten Tetraeder abgetrennt, so bleibt der in Aufgabentext beschriebene Körper übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Aufgabe 301014:



Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Viereckflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate. Die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang. D' liegt im Inneren von $A'B'F'E'$.

Beweisen Sie, dass es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Viereckflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, einen Körper z. B. durch konstruktive Beschreibung der Eckpunkte anzugeben und die genannten Bedingungen für den so angegebenen Körper als erfüllt nachzuweisen. Eine Möglichkeit hierfür ist die folgende. (siehe Abbildung)

Man wähle D,C,G,H so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf die Zeichenebene Z die gegebenen Punkte D',C',G',H' haben und dass genauer $C = C'$ ist, D und G eine miteinander übereinstimmende Höhe h über Z haben sowie H die Höhe $2h$ über Z hat. Bezeichnet H^* den Mittelpunkt von HH', so sind CD', $G'H'$, GH^* parallel und gleichlang zueinander, ebenso $D'D$ und H^*H, also gilt dasselbe auch für CD und GH; somit ist $CGHD$ ein Parallelogramm.

Mit einer weiteren Länge $k > h$ wähle man A,B,F,E so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf Z die Bilder A',B',F',E' haben, dass B die Höhe k hat, A und F die Höhe $k + h$ haben sowie E die Höhe $k + 2h$ über Z hat.

Ist A^* der Punkt der Höhe h über A', so folgt durch entsprechende Betrachtung von CB', DA^* und von $B'B$, A^*A, dass auch $ABCD$ ein Parallelogramm ist. In gleicher Weise zeigt man, dass $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$ und $EFGH$ ebenfalls Parallelogramme sind; jeweils zwei einander gegenüberliegende der 6 genannten Parallelogramme sind zueinander kongruent.

Ferner ist

$$CH = \sqrt{CH'^2 + (2h)^2} > CH' = D'G' = DG$$

Das Parallelogramm $CGHD$ hat also zwei verschieden lange Diagonalen und ist daher kein Rechteck; d. h., es enthält keinen Innenwinkel der Größe 90°. Dasselbe gilt für aus Parallelogramm $ABFE$.

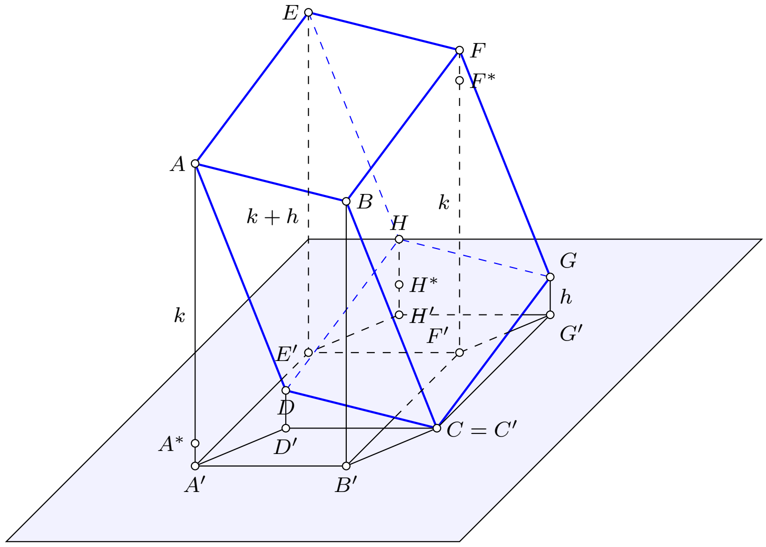
Nach Voraussetzung (siehe Abbildung der Aufgabe) gilt $B'D' < A'C'$. Daraus folgt

$$BD < BD' = \sqrt{B'D'^2 + k^2} < \sqrt{A'C'^2 + (k+k)^2} = AC$$

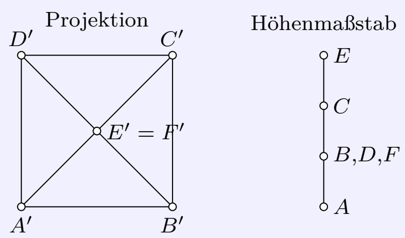
Somit enthalten auch $ABCD$ und $EFGH$ keinen Innenwinkel der Größe 90°.
Weiter gilt $C'F' < B'G'$. Daraus folgt: Ist F^* der Punkt der Höhe k über F', so ist

$$CF^* = \sqrt{C'F'^2 + k^2} < \sqrt{B'G'^2 + k^2} = BG'$$

also hat die Differenz $x = BG' - CF^*$ einen positiven Wert. Hat man nun die Länge h (zwar größer als 0, aber) genügend klein gewählt, so kann erreicht werden, dass CF zwar größer ist als CF^*, aber um weniger als $\frac{x}{2}$, und dass BG zwar kleiner ist als BG', aber ebenfalls um weniger als $\frac{x}{2}$. Dann gilt auch noch $CF < BG$ und damit ist erreicht, dass $BCGF$ und $ADHE$ um keinen Innenwinkel der Größe 90° enthalten.



Aufgabe 311014:



Zur Abbildung wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriss und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

$A'B'C'D'$ ist ein Quadrat, $E' = F'$ sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrecken geteilt.

Weisen Sie nach, dass die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie der Höhenmaßstab zeigt, liegen die Punkte B und D auf gleicher Höhe h, gemessen über der Höhe von A; dieselbe Höhe hat folglich auch der Mittelpunkt M von BD.

Ferner hat C die Höhe $2h$ über der von A; daher hat nach dem Strahlensatz auch der Mittelpunkt N von AC die Höhe h. Bei der Parallelprojektion geht jeweils der Mittelpunkt einer Strecke in den Mittelpunkt der Bildstrecke über; daher und weil im Quadrat $A'B'C'D'$ die Diagonalen einander halbieren, haben M und N denselben Bildpunkt

$$M' = N' = F' \tag{1}$$

Hiernach und wegen der gleichen Höhe gilt $M = N$, also schneiden sich die Strecken BD und AC (in diesem Punkt); folglich liegen A, B, C, D in einer gemeinsamen Ebene e.

Wegen (1) und da F ebenfalls die Höhe h hat, ist auch $M = N = F$, somit liegt F in der Ebene e. In der Abbildung sind die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ eingezeichnet; sie können nur als Bilder der Strecken

$$AB, BC, CD, DA \qquad (2)$$

zustande kommen. Wenn es einen nach der Beschreibung dargestellten ebenflächig begrenzten Körper gäbe, so wären dies vier seiner Kanten.

In jeder Kante müssten zwei Teilflächen seiner Oberfläche zusammenstoßen. Die einzigen ebenen Flächen, die je eine der Kanten (2) mit anderen der Punkte A, B, C, D, E, F verbinden, sind aber, da F in e liegt, das Viereck $ABCD$ und die vier Dreiecke ABE, BCE, CDE, DAE. In dem so begrenzten Körper (der Pyramide $ABCDE$) wäre aber F kein Eckpunkt, was der Beschreibung widerspricht, die auch F unter den Eckpunkten aufzählt.

Eine Änderung, die den Widerspruch beseitigt, ist z. B. das Weglassen einer der Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ aus der Zeichnung.

Der dann widerspruchsfrei dargestellte und beschriebene Körper entsteht aus der Pyramide $ABCDE$ durch Herausschneiden der entsprechenden unter den Teilpyramiden $ABFE$, $BCFE$, $CDFE$, $DAFE$.

Aufgabe 331015:
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

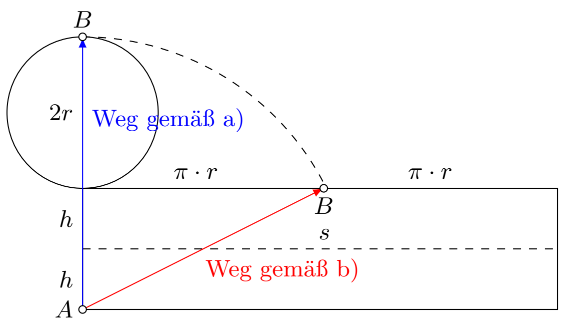
a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$4^2 + 8hr + 4r^2 = 4h^2 + \pi^2 r^2$$
$$8h = (\pi^2 - 4) \cdot r$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

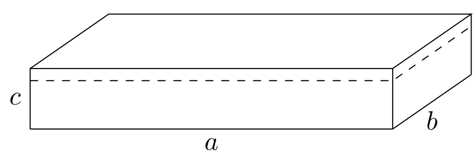
$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad (\approx 0{,}7337)$$

II Runde 2

Aufgabe 011022:
An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen $a = 120$ mm, $b = 60$ mm und $c = 17$ mm soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine.
Folgende Einstellungen sind möglich:
(1) 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm,
(2) 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm.

a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?
b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen $a = 150$ mm, $b = 50$ mm, $c = 17$ mm?
Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.

Lösung von Christiane Czech:

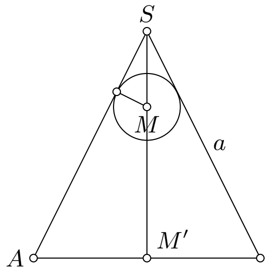


a) Bei Einstellung 1 wird man so einspannen, dass a in Hubrichtung liegt. Man benötigt für eine Fläche $\frac{60}{1{,}5} = 40$ Hübe, also $\frac{40}{46} = \frac{20}{23}$ min reine Arbeitszeit.
Bei Einstellung 2 spannt man so ein, dass b in Hubrichtung liegt. Man benötigt dann 80 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{20}{27}$ min.
Damit ist Einstellung 2 rationeller.

b) Bei Einstellung 1 wählt man die Einspannung wie oben; man braucht 34 Hübe, also $\frac{17}{23}$ min. Bei Einstellung 2 wählt man ebenfalls die Einstellung wie oben und braucht 100 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{25}{27}$ min.
Hier ist damit Einstellung 1 rationeller.

Aufgabe 031024:
In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis 1 : 2 (von der Spitze aus) teilt.
Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius der Kugel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Sind SA Mantellinie und MF Lot von M auf g_{SA} (siehe Abbildung), so gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle MFS \cong \triangle AM'S$, also wegen $|AM'| = \frac{a}{2}; |SA| = a$ und $|MF| = r$

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Besitzt die Höhe des Kegelkörpers, d. h. des gleichseitigen Schnittdreiecks mit der Seitenlänge a, die Länge h, so gilt $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nach Voraussetzung ist weiterhin $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ folgt: $|SM| = \frac{h}{3}$, so dass sich schließlich $r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ ergibt.

Aufgabe 061024:
Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verführt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.

a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenen Oktaeder zueinander?
b) Wie verhalten sich die Volumina von Oktaeder und einbeschriebenen Würfel zueinander?
c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?
d) Wie verhalten sich im zweiten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $V_w = a^3$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $O_w = 6a^2$.

Für das Volumen des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $V_o = \frac{1}{3}b^3 \cdot \sqrt{2}$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $O_o = 2b^2 \cdot \sqrt{3}$.

Das Oktaeder setzt sich aus einer vierseitigen Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche des Inhalts b^2 und deren Spiegelbild an der Grundfläche zusammen. Die Höhe ist die halbe Diagonale des Quadrates, also $\frac{b}{2}\sqrt{2}$.
Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Grundseite b. Deren Höhe ist $\frac{b}{2}\sqrt{3}$. Damit ist der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$.

a) Die Länge der Würfelkante sei a. Dann gilt für die Länge der Oktaederkante $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Daher ist

$$V_w = a^3 \qquad \text{und} \qquad V_o = \frac{1}{3}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right) = \frac{1}{6}a^3$$

und mithin $V_w : V_o = 6 : 1$.

b) Die Länge der Oktaederkante sei b. Die Mittelpunkte S der gleichseitigen Dreiecke liegen auf den Seitenhalbierenden. Diese werden von S im Verhältnis $1 : 2$ geteilt. Eine parallele Strecke zu b durch S

hat die Länge $\frac{2}{3}b$. Der Schnitt einer Ebene, in der eine Seitenfläche des einbeschriebenen Würfels liegt, mit dem Oktaeder ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}b$.
Die Länge der Quadratseite a ergibt sich aus

$$a^2 = \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{3}b\sqrt{2}$$

Daher gilt:

$$V_o = \frac{1}{3}b^3\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad V_w = \left(\frac{1}{3}b\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2}{27}b^3\sqrt{2}$$

und mithin $V_o : V_w = 9 : 2$.

c) Es ist $O_w = 6a^2$ und $O_o = a^2\sqrt{3}$. Daher ist $O_w : O_o = 2\sqrt{3} : 1$.

d) Es ist $O_o = 2b^2\sqrt{3}$ und $O_w = \frac{4}{3}b^2$. Daher ist $O_o : O_w = 3\sqrt{3} : 2$.

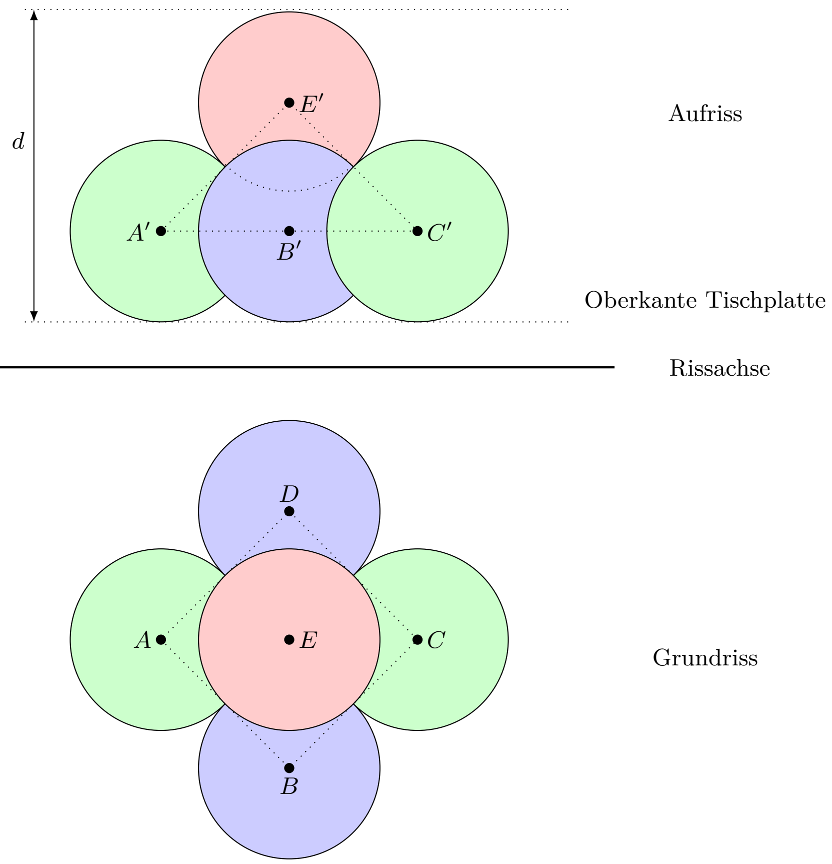
Aufgabe 071024:
Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, dass ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden.
Auf die entstandene mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt.
Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischplatte an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat $ABCD$ (Abbildung Grundriss) hat die Seitenlänge $2r$ und die Diagonalenlänge $2r\sqrt{2}$.
Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale AC enthaltender Schnitt ergibt das Aufrissbild.
Da das Dreieck $\triangle A'C'E'$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen

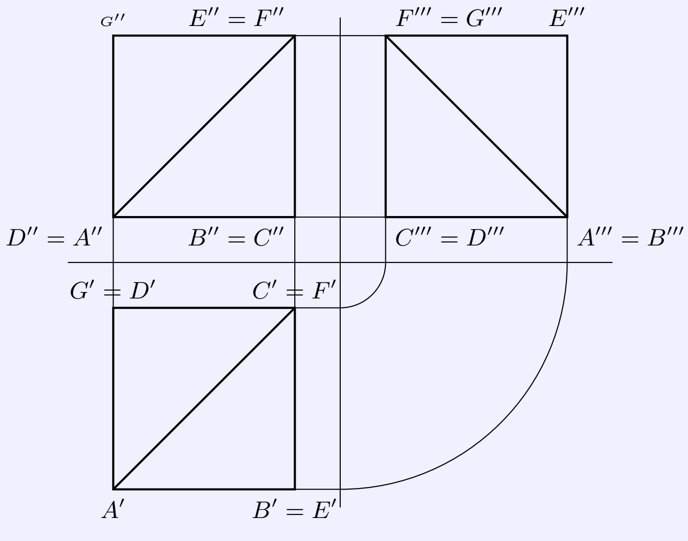
$$A'C' = AC = 2r\sqrt{2}; \qquad A'E' = AE = C'E' = CE = 2r$$

hat, so ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von E auf AC hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$.
Der gesuchte Abstand d beträgt daher

$$d = r + r\sqrt{2} + r = r(2 + \sqrt{2})$$



Aufgabe 121022:

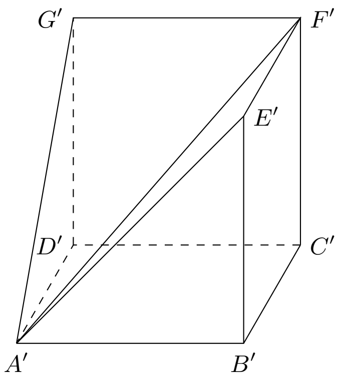


In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.

a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°; q = \frac{1}{2}\right)$.

b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!

Lösung von Steffen Polster:



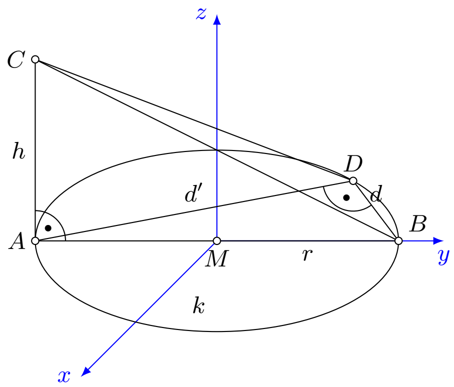
Der Körper entsteht, in dem aus einem Würfel eine Pyramide mit der Grundfläche $EFGH$ (H wäre der Punkt senkrecht über A, der zum Würfel ergänzt) und der Höhe a herausschneidet.
Damit wird für das Volumen V des Körpers

$$V = W_{\text{Würfel}} - V_{\text{Pyamide}} = a^3 - \frac{1}{3}a \cdot a^2 = \frac{2}{3}a^3 = 144cm^3$$

Aufgabe 141024:
Gegeben seien positive Streckenlängen h, r, d mit $d < 2r$. Es bezeichne ε eine Ebene und k einen in ε gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$.
Auf der Senkrechten zu ε durch A sei C ein Punkt mit $AC = h$. Auf k sei D ein Punkt mit $BD = d$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B!
b) Man beweise, dass $BD \perp CD$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Wir führen wie in der Abbildung ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem ein und legen den Mittelpunkt M des Kreises k in den Koordinatenursprung. Die Ebene ε sei die $x-y$-Koordinatenebene, so dass der Kreis k in ihr liegt.
Dann haben laut Aufgabenstellung die Punkte A, B, C die Koordinaten:

$$A(0; -r; 0) \qquad ; \qquad B(0; r; 0) \qquad ; \qquad C(0; -r; h)$$



$D(x; y)$ liegt auf dem Kreis k mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (1). Sein Abstand d vom Punkt B ist

$$d = \sqrt{(0-x)^2 + (r-y)^2 + 0^2}$$

Einsetzen von (1) nach x^2 umgestellt, ergibt nach Auflösen die Koordinate y von D:

$$d = \sqrt{r^2 - y^2 + (r-y)^2} \Rightarrow y = \frac{2r^2 - d^2}{2r}$$

Für die x-Koordinate des Punktes D folgt

$$x_{1;2} = \pm\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

O. B. d. A. wählen wir das positive x_1. Für den Abstand $AD = d'$ wird dann

$$d' = \sqrt{x^2 + (-r - y)^2}$$
$$d' = \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}\right)^2 + \left(-r - \frac{2r^2 - d^2}{2r}\right)^2}$$
$$d' = \sqrt{4r^2 - d^2}$$

Wählen wir o. B. d. A. den positiven Wert x_1, so wird der Flächeninhalt des Grunddreiecks der gesuchten Pyramide $A_\triangle = \frac{d \cdot d'}{2}$, da das Dreieck rechtwinklig ist. Der Punkt D liegt nämlich auf dem Thaleskreis des Durchmessers AB. Für das Volumen der Pyramide ergibt sich somit

$$V = A_\triangle \cdot \frac{h}{3} = \frac{d \cdot h}{6}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

Die Strecke CD steht auf BD senkrecht, wenn das Dreieck CDB rechtwinklig ist, mit dem rechten Winkel bei D. Dann muss nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung

$$CD \perp BD \quad \Leftrightarrow \quad CD^2 + BD^2 = CB^2 \tag{2}$$

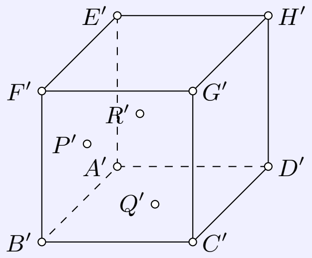
gelten. Für die Quadrate der drei Strecken ergibt sich durch Einsetzen der für D ermittelten Koordinaten

$$CB^2 = 4r^2 + h^2$$
$$DB^2 = d^2$$
$$CD^2 = \left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}\right)^2 + \left(\frac{2r^2 - d^2}{2r} + r\right)^2 + h^2$$
$$= -d^2 + h^2 + 4r^2$$

Daraus ergibt sich sofort (2) und CD und BD sind senkrecht zueinander. w. z. b. w.

Aufgabe 231023:
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben.
Ferner sind die Bilder P', Q' und R' dreier Punkte P, Q bzw. R gegeben, wobei P auf der Seitenfläche $ABFE$, Q auf der Seitenfläche $BCGF$, R auf der Seitenfläche $DAEH$ liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P, Q und R!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Arbeitsblatt:



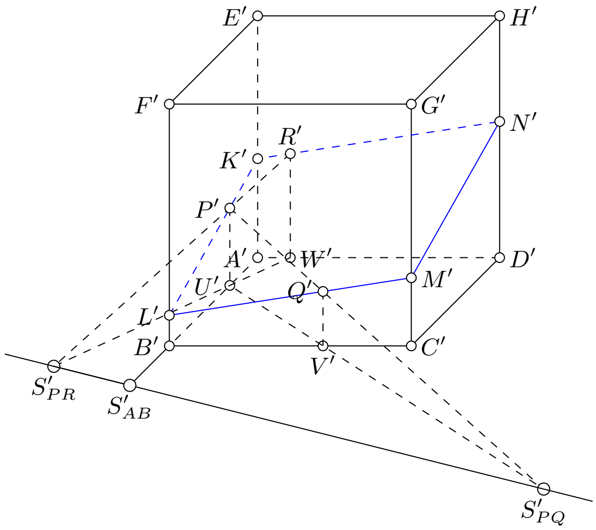
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Parallelen durch P, Q, R zu FB liegen in den Seitenflächen $ABFE$, $BDGF$ bzw. $DAEH$. Sie schneiden daher die Strecken AB, BC bzw. DA; die Schnittpunkte seien U, V bzw. W. Da parallele Geraden

bei Parallelprojektion wieder in parallele Geraden übergehen, folgt:

(1) Man konstruiere die Parallelen durch P', Q', R' zu $F'B'$ und ihre Schnittpunkte U', V' bzw. W' mit $A'B'$, $B'V'$ bzw. $D'A'$ dann sind U', V', W' die Bildpunkte von U, V bzw. W.
Wegen $PU \parallel QV$ liegen P, Q, U, V in derselben Ebene. Die Geraden durch P, Q bzw. U, V sind nicht zueinander parallel (denn wie die Konstruktion ergibt, ist $P'Q' \nparallel U'V'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{PQ}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da P und Q und folglich ihre Verbindungsgerade in dieser Ebene liegen) und in der Ebene durch A, B, C, D (da U und V in dieser liegen). Daraus folgt:

(2) Man konstruiere die Geraden durch P', Q' bzw. U', V' und ihren Schnittpunkt S'_{PQ}; dann ist S'_{PQ} der Bildpunkt eines Punktes S_{PQ} auf der Schnittgeraden$s$ der Ebene durch P, Q, R bzw. A, B, C, D.

(3) Man konstruiere die Geraden durch P', R' bzw. U', W' und ihren Schnittpunkt S'_{PR}; dann ist S'_{PR} der Bildpunkt eines Punktes S_{PR} auf der Schnittgeraden s.

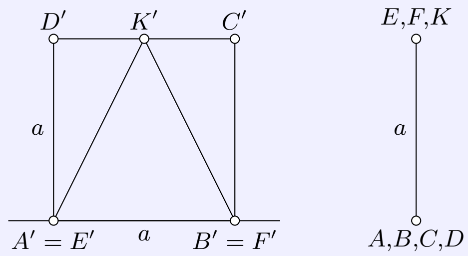


(4) die Gerade s' durch S'_{PQ}, S'_{PR}, so ist s' die Bildgerade von s.
Die Gerade durch A, B und die Gerade s liegen in der Ebene durch A, B, C, D. Sie sind auch nicht parallel zueinander (dann es ist $A'B' \nparallel s'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{AB}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da s in dieser Ebene liegt) und in der Ebene durch A, B, F, E. Das gilt auch von P.
Also ist die Gerade durch S_{AB} und P die Schnittgerade der Ebenen durch P, Q, R bzw. A, B, F, E. Die im Quadrat $ABFE$ gelegene Teilstrecke dieser Geraden ist folglich ein Teil der gesuchten Schnittfigur.

Daraus folgt: Konstruiert man
(5) die Gerade durch A', B' und ihren Schnittpunkt S'_{AB} mit s',
(6) die Gerade durch S'_{AB}, P' und ihre in $A'B'F'E'$ gelegene Teilstrecke $K'L'$ ('K' auf $A'E'$m L' auf $B'F'$, so ist $K'L'$ das Bild des Teiles der Schnittfigur (K auf AE, L auf BF).

Damit folgt weiter:
(7) Man verlängere $L'Q'$ bis zum Schnitt M' mit $C'G'$ sowie $K'R'$ bis zum Schnitt N' mit $D'H'$.
Dann ist das Viereck $K'L'M'N'$ das Bild der Schnittfigur $KLMN$.

Aufgabe 241024:



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.
Zeigen Sie, dass es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriss, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!
Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben:
Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, dass $UV...Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken $U, V, ..., Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a) bis e) zeigen fünf Beispiel für Körper der gesuchten in schräger Parallelprojektion. Als Lösung genügt es, zwei derartige Darstellungen und die zugehörigen Angaben aufzuführen.

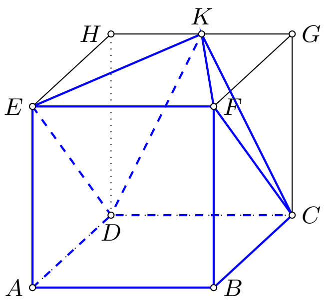


Abbildung a)

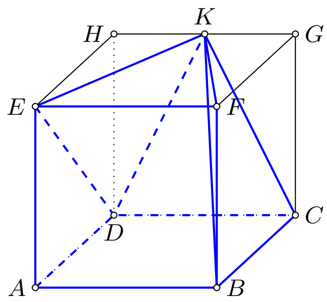


Abbildung b)

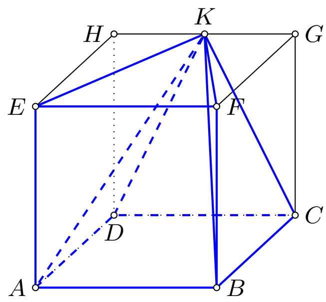


Abbildung c)

Zu a):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BCF, CFK, CDK, DEK, EFK$
Der Körper kann gebildet werden, indem man von dem Würfel $ABCDFEGH$ die Pyramiden $CGFK$ (Grundfläche CGF mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$, Länge der zugehörigen Höhe $GK = \frac{1}{2}a$, also Volumen $\frac{1}{12}a^3$) und $DHEK$ (zu $CGFK$ spiegelbildlich) abschneidet.
Daher beträgt das Volumen des Körpers $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

Zu b):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BFK, BCK, CDK, DEK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (Grundfläche $BCDGF$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $DEHK$ (Grundfläche DHE mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge $HK = \frac{1}{2}a$.
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 = \frac{3}{4}a^3$.

Zu c):
Seitenfächen $ABCD, ADK, AEK, ABFE, BFK, BCK, CDK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (wie in b)) mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $ADHEK$ (spiegelbildlich)
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.

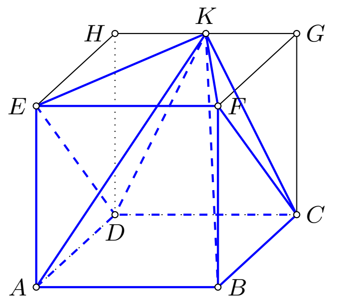


Abbildung d)

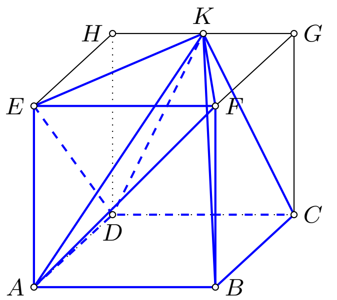
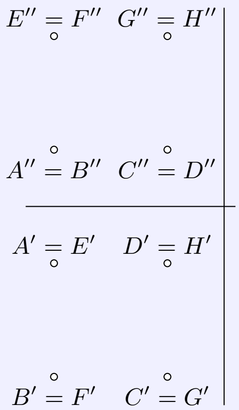


Abbildung e)

Zu d):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, ABK, BFK, BCF, CFK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$CGFK, DHEK$ (wie in a)), $ABFEK$ (Grundfläche $ABFE$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge a (Lot von K auf EF))
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

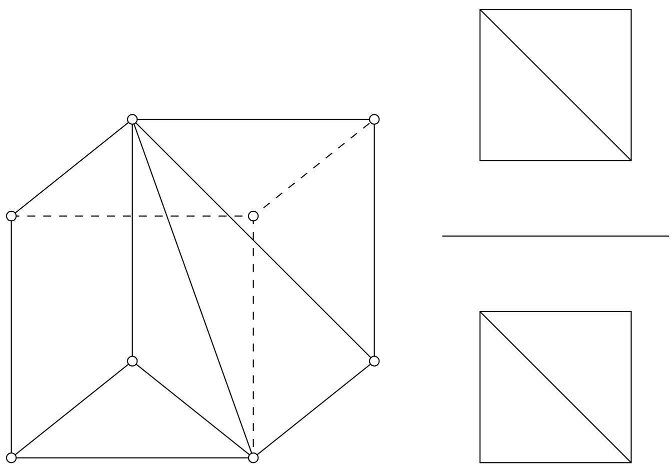
Zu e):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, AFK, ABF, BFK, BCK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$BCGFK, DHEK$ (wie in b)), $AEFK$ (Grundfläche AEF mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge a)
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{7}{12}a^3$.

Aufgabe 251024:



Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es die Abbildung in Zweitafelprojektion zeigt.
Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch Herausschneiden eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist.
Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

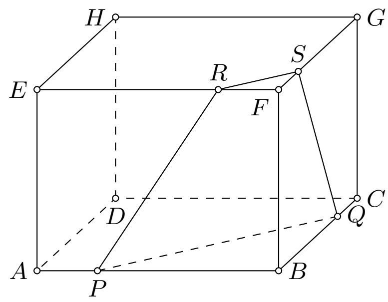


Aufgabe 261022:
Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.
a) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?
b) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Für jede Ebene E, die den Quader in einem n-Eck schneidet gilt:
Jedes Seite dieses n-Ecks ist der Durchschnitt der Ebene E mit mindestens einer Seitenfläche des Quaders. Dabei sind zwei verschiedene Seiten des n-Ecks nur dann in derselben Seitenfläche des Quaders enthalten, wenn diese Seitenfläche ganz in der Ebene E liegt und daher die gesamte Schnittfigur ist.
In diesem Fall also ist das n-Eck ein Rechteck und somit ein Trapez. In jedem anderen Fall aber, in dem ein Viereck entsteht, gibt es folglich vier paarweise verschiedene Seitenflächen des Quaders, deren Durchschnitt mit E die vier Vierecksseiten sind.

Da der Quader nicht mehr als drei paarweise nichtparallele Seitenflächen besitzt, müssen sich unter den genannten Seitenflächen mindestens zwei zueinander parallele befinden. Die (zueinander parallelen) Ebenen, in denen zwei solche Seitenflächen liegen, werden von der Ebene E in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten; das Viereck hat also (mindestens) zwei zueinander parallele Seiten und ist folglich ein Trapez.

Die in (a) gestellte Frage muss daher mit nein beantwortet werden.



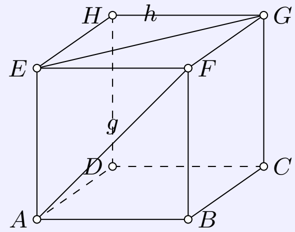
(b) Die in (b) gestellte Frage ist zu bejahen, wie man durch ein Beispiel der folgenden Art beweisen kann: Auf den Seiten AB und BC eines Quaders $ABCDEFGH$ (Abbildung) wähle man je einen Punkt P bzw. Q; auf den entsprechenden Seiten EF und FG der $ABCD$ gegenüberliegenden Fläche $EFGH$ zwei Punkte R bzw. S mit $FR < BP$ und $RS \parallel PQ$.

Wegen $FR \parallel BP$ wird dann $\angle FRS = \angle BPQ$; hieraus und aus $\angle RFS = 90° = \angle PBQ$ folgt $\triangle FRS \cong \triangle BPQ$, also $FS : BQ = FR : BP < 1$, d. h. $FS < BQ < BC = FG$, also ist die genannte Wahl von S

auf FG tatsächlich möglich, und es gilt $RS : PQ = FR : BP < 1$, d. h. $RS < PQ$.

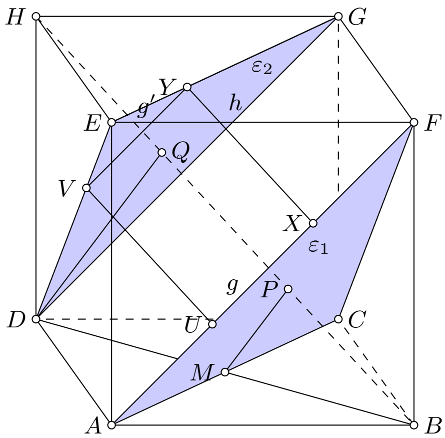
Wegen $RS \parallel PQ$ liegen P, Q, R, S in einer und derselben Ebene; diese hat als Schnittfigur mit dem Quader das Viereck $PQSR$, das wegen $RS < PQ$ kein Parallelogramm ist.

Aufgabe 271024:



Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet.
Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.
Ermitteln Sie den Abstand von g und h!
Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

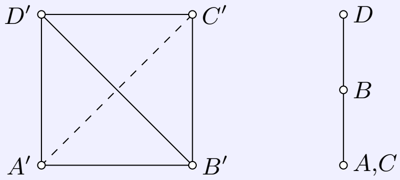


Die Ebenen ε_1 durch A, C, F und ε_2 durch D, E, G sind parallel zueinander; die Raumdiagonale BH die sie in P und Q schneide, steht auf diesen Ebenen senkrecht.
Alle von Punkte aus ε_1 auf ε_2 gefällten Lote haben somit die Länge PQ. Zu diesen Loten gehört auch XY mit der im Aufgabentext beschriebenen Lange.

Die Fußpunkte aller von Punkten aus g gefällten Lote bilden nämlich eine zu g parallele Gerade g' in ε_2. Wegen $g \parallel g' \nparallel h$ schneidet sie h in einem Punkt Y, dieser ist Fußpunkt eines X auf g, und wegen $XY \perp \varepsilon_1$, $XY \perp \varepsilon_2$ gilt $XY \perp g$, $XY \perp h$.
Also ist PQ gleich dem gesuchten Abstand XY. Ist nun M der Schnittpunkt von AC mit BD, so gilt: Die Ebene durch B,F,H,D schneidet ε_1 bzw. ε_2 in der Geraden durch P, P bzw. der Geraden durch D, Q. Wegen $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ ist daher $MP \parallel DQ$, nach dem Strahlensatz und wegen $BM = MD$ also $BP = PQ$.
Ebenso folgt $HQ = PQ$. Also ist der gesuchte Abstand

$$XY = PQ = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

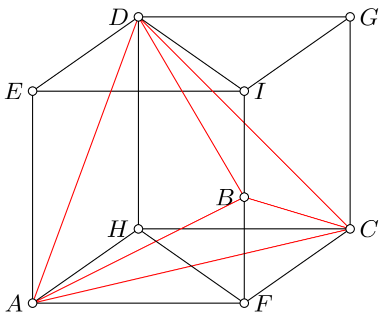
Aufgabe 291024:



Projektion Höhenmaßstab

Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.
a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!
b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a)



Die Figur mit den roten Kanten ist der darzustellende Körper $ABCD$.

b) Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G, H liegen, auf der Projektionsgeraden durch B außerdem der Punkt I. Dabei sollen E, G und I die gleiche Höhe wie D haben, F und H dagegen die gleiche Höhe wie A.

Damit ist $AFCHEIGD$ ein Würfel, dessen Volumen a^3 beträgt. $AFCB$ ist ein Tetraeder, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann; dessen Volumen also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

beträgt. $AHCD$ ist ein Tetraeder; sein Volumen ergibt sich entsprechend zu

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

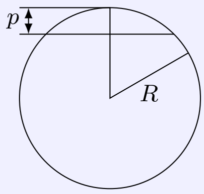
Weiter sind $AEIBD$ und $CGIBD$ Pyramiden, jeweils mit einem Trapez, $AEIB$ bzw. $CGIB$ als Grundfläche und ED bzw. GD als zugehöriger Höhe.
Jede dieser Pyramiden hat also das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) a \cdot a = \frac{1}{4}a^3$$

Werden die Tetraeder $AFCB$, $AHCD$ und die Pyramiden $AEIBD$, $CGIBD$ von dem Würfel abgetrennt, so bleibt der im Aufgabentext beschriebene Körper $ABCD$ übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{4}a^3$$

Aufgabe 311022:
Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, dass die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig.
Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungsachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.
Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen $V(C)$ von C ermitteln.
Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müssten zu diesem h unterschiedliche Werte $V(C)$ möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, $V(C)$ nicht allein aus h ermitteln.
Wer hat recht?



Hinweis : Für das Volumen $V(K), V(A), V(Z)$ einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A (Pfeilhöhe p siehe Abbildung) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r, Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad ; \qquad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3 \qquad ; \qquad V(Z) = \pi r^2 h$$

Lösung von OlgaBarati:
Die Behauptung, das Volumen $V(C)$ eines Restkörpers C sei allein mit h zu ermitteln ist genau dann widerlegt, wenn ein Restkörper $\bar{C}$ mit gleicher Höhe $h = \bar{h}$ existiert für den gilt, $V(C) \neq V(\bar{C})$. Es genügt somit einen Einzelfall zu zeigen um die Behauptung zu widerlegen. Dazu seien:

$$R = 5, \quad r = 4, \quad h = 6, \quad p = 2$$

$$\bar{R} = 4, \quad \bar{r} = 2, \quad \bar{h} = 6, \quad \bar{p} = 1$$

$$V(C) = V(K) - V(Z) - 2V(A) \neq V(\bar{C}) = V(\bar{K}) - V(\bar{Z}) - 2V(\bar{A})$$

$$\pi(\frac{4}{3}R^3 - r^2 h - 2Rp^2 + \frac{2}{3}p^3) \neq \pi(\frac{4}{3}\bar{R}^3 - \bar{r}^2\bar{h} - 2\bar{R}\bar{p}^2 + \frac{2}{3}\bar{p}^3)$$

$$\pi(\frac{4}{3} \cdot 5^3 - 4^2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot 2^3) \neq \pi(\frac{4}{3} \cdot 4^3 - 2^2 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 1^2 + \frac{2}{3} \cdot 1^3)$$

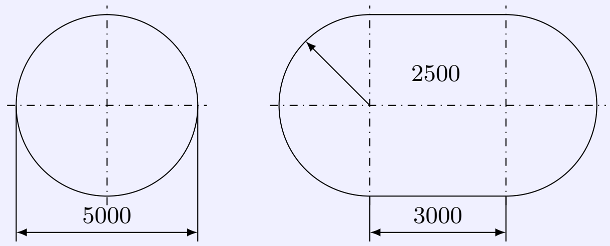
$$36\pi \neq 54\pi$$

$$V(C) \neq V(\bar{C})$$

Birgit hat recht.

III Runde 3

Aufgabe 011032:



In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“ in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (s. Abbildung) und ein Leergewicht von 30 Mp.
a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke? (Wichte des Stahls 7,85 $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Lösung von Christiane Czech:
Der Kocher hat die Form eines Zylinders, an dessen Grund- und Deckfläche jeweils eine Halbkugel angebracht ist.

a) Damit ist die Oberfläche gleich die Summe der Oberfläche der gesamten Kugel und der Mantelfläche des Zylinders, also gleich

$$4\pi(2{,}5\text{ m})^2 + 2\pi \cdot 2{,}5\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 125{,}7\text{ m}^2$$

Die Wichte eines Stoffes ist der Quotient aus Masse und Volumen (des Stahlmantels). Damit beträgt das Volumen des verwendeten Stahls 3,83 m^3. Die Wandstärke beträgt damit $\frac{3{,}82\text{ m}^3}{125\text{ m}^2} = 3$ cm.
b) Das Fassungsvermögen ist die Summe aus dem Volumen der Kugel und des Zylinders, also gleich

$$\frac{4}{2}\pi(2{,}5\text{ m})^3 + \pi(2{,}5\text{ m})^2 \cdot 3\text{ m} = 124{,}4\text{ m}^3$$

Aufgabe 041036:
Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhe h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.
Man beweise: $a + b + c + d = h$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen des Tetraeders ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h$$

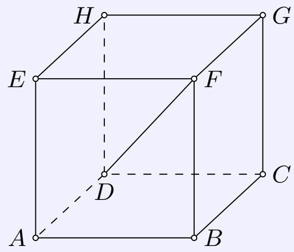
wobei G die Grundfläche bezeichnet. Durch einen Punkt im Inneren zerfällt der Tetraeder in 4 Teiltetraeder mit Grundfläche G und den Höhen a,b,c,d.
Da das ganze Tetraeder regelmäßig ist, haben alle 4 Teiltetraeder ebenfalls die Grundfläche G. Es gilt die Gleichung $V = V_a + V_b + V_c + V_d$, wobei V_* das Volumen des Teiltetraeders mit der entsprechenden Höhe ist. Nach Anwenden der Volumenformel erhalten wir

$$\frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}G \cdot a + \frac{1}{3}G \cdot b + \frac{1}{3}G \cdot c + \frac{1}{3}G \cdot d$$

und nach Kürzen $h = a + b + c + d$.

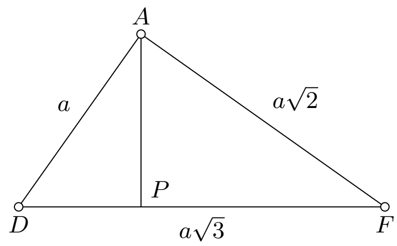
Aufgabe 061031:

Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$. Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A,B,C,G,H,E von der Diagonalen DF!



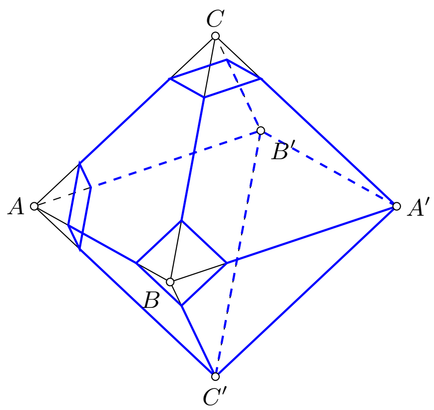
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe. Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa $\triangle ADF$. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ε_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe HP ist daher, wie aus $\triangle ADP \sim \triangle DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$



Aufgabe 091032:
Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, dass ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.
Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muss man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).
Da 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), dass die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen.
Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch ein Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, dass unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwas die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.
Man überzeugt sich leicht, dass man damit einen Körper der geforderten Art erhält.

Aufgabe 111034:
Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, dass die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt.
Wie groß muss der Radius r (R, h, r in cm gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

Lösung von cyrix:
Der ausgebohrte Teilkörper lässt sich zerlegen in einen Zylinder mit Radius r und Höhe $h_T := \frac{R-r}{R} \cdot h$ sowie einen Kreiskegel mit Radius r und Höhe $h - h_T = \frac{r}{R} \cdot h$, da das Bohrloch (von der Grundfläche aus gesehen) in einer Höhe von h_T die Mantelfläche des gegebenen Kreiskegelkörpers durchstößt.
Für das Volumen V des Ausgangskegels ergibt sich $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$ und für den Teilkörper

$$V_T = \pi r^2 \cdot h_t + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h - h_T) = \pi r^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(3\frac{R-r}{R} + \frac{r}{R}\right) \cdot h$$

Aus $V = 2V_T$ ergibt sich damit die Gleichung

$$R^2 = 2r^2 \cdot \frac{3R - 2r}{R} \qquad \text{bzw.} \qquad 6r^2R - 4r^3 - R^3 = 0$$

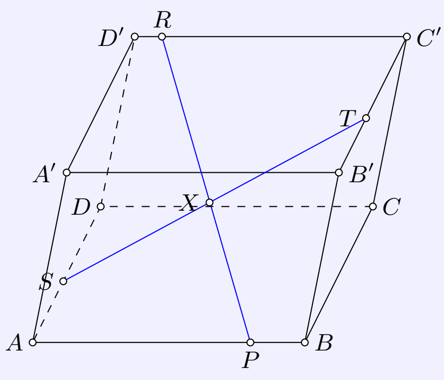
Mit $R = 6$ ergibt sich $4r^3 - 36r^2 + 216 = 0$ bzw. $r^3 - 9r^2 + 54 = 0$. Es ist $r^3 - 9r^2 + 54 = (r-3) \cdot (r^2 - 6r + 18)$, was $r = 3$ als einzige Nullstelle besitzt. Also muss der Radius r des Bohrlochs 3 cm betragen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offensichtlich gilt, dass, je größer der Radius r des Bohrlochs gewählt wird, desto größer auch das Volumen V_T des ausgebohrten Teilkörpers ist. Wählt man $r = 0$, so ist $V_T = 0$ und für $r = R$ ist $V_T = V$ der gesamte Ausgangskörper. Variiert man also r im Intervall $[0; R]$, so gibt es genau einen Wert, für den $V_T = \frac{1}{2}V$ gilt.
Wir wählen $r = \frac{1}{2}R$ und zerlegen den ausgebohrten Teilkörper in einen geraden Kreiszylinder sowie einen Kreiskegel. Beide haben als Grundfläche $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$ und als Höhe $\frac{1}{2}h$, sodass sich das Volumen des Teilkörpers ergibt zu

$$V_T = \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{2}V$$

Damit führt die Wahl von $r = \frac{1}{2}R = 3$ cm als einzige dazu, dass der Restkörper genau das halbe Volumen des Ausgangskörpers besitzt.

Aufgabe 121032:



Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d.i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.
Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wenn P ein Punkt auf AB, R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist.

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in den Raum des Parallelepipeds, dass A in dessen Ursprung liegt. Weiterhin identifizieren wir alle Punkte mit ihren jeweiligen Ortsvektoren und bezeichnen mit $\vec{a} := \vec{B}$,

$\vec{b} := \vec{D}$ und $\vec{c} := \vec{A'}$, sodass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

Dann gibt es eine reelle Zahl $0 \leq s_1 \leq 1$ mit $\vec{P} = s_1 \cdot \vec{a}$. Analog gibt es reelle Zahlen s_2, t_1 und t_2, die jeweils zwischen 0 und 1 liegen, sodass $\vec{R} = s_2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{S} = t_1 \cdot \vec{b}$ und $\vec{T} = \vec{a} + t_2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$ gilt.

Für jeden Punkt X auf der Strecke PR gibt es eine reelle Zahl $0 \leq k \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{P} + k \cdot (\vec{R} - \vec{P}) = (1-k) \cdot s_1 \cdot \vec{a} + k \cdot s_2 \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} = (s_1 - ks_1 + ks_2) \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c}$$

Analog gibt es für jeden Punkt X auf der Strecke ST eine reelle Zahl $0 \leq \ell \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{S} + \ell \cdot (\vec{T} - \vec{S}) = (1-\ell) \cdot t_1 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{a} + \ell \cdot t_2 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c} = \ell \cdot \vec{a} + (t_1 - \ell t_1 + \ell t_2) \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c}$$

Da X auf beiden Strecken liegt und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, müssen ihre jeweiligen Koeffizienten in beiden Darstellungen von $\vec{X}$ übereinstimmen, insbesondere also die von $\vec{c}$, sodass $k = \ell$ folgt.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar k) sein müssen, während aus der zweiten Darstellung folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar $\ell = k$) sind, sodass tatsächlich die Koeffizienten aller drei Vektoren übereinstimmen und X auf der Geraden $k \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, also der Raumdiagonalen AC' liegt.

Nun ist noch zu überprüfen, ob tatsächlich jeder Punkt auf der Raumdiagonalen AC' als Schnittpunkt X angenommen werden kann. Da das Parallelepiped konvex ist, schneiden sich je zwei Strecken, die durch Punkte auf dessen Oberfläche begrenzt werden, wieder im Innern oder auf dessen Oberfläche, sodass nur Punkte, die auf der Strecke AC' liegen, in Frage kommen, was $0 \leq k \leq 1$ bedeutet.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ erhalten wir $k = s_1 - ks_1 + ks_2$ bzw. $k \cdot (1 - s_2 + s_1) = s_1$, also für $s_2 - s_1 \neq 1$ die Darstellung $k = \frac{s_1}{1-s_2+s_1}$.

Setzt man hierbei $s_1 := s_2$, so ergibt sich $k = s_1$, was mit s_1 das gesamte Intervall $[0, 1]$ durchläuft, sodass auch tatsächlich alle Punkte auf der Strecke AC' als Schnittpunkte X angenommen werden.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die zueinander parallelen, aber verschiedenen Geraden AB und $D'C'$ spannen eine Ebene ε_1 auf. Damit liegt auch PR in dieser Ebene. Analog spannen auch die parallelen, aber verschiedenen Geraden AD und $B'C'$ eine Ebene ε_2 auf, in der dann die Strecke ST liegt.

Damit muss der Schnittpunkt X der zu betrachtenden Strecken auf der Schnittgerade der beiden Ebenen liegen. (Es sind ε_1 und ε_2 nicht identisch, da B' auf ε_2, nicht aber auf ε_1 liegt.) Da sowohl A als auch C' in beiden Ebenen enthalten sind, ist AC' genau deren Schnittgerade, sodass X auf dieser Gerade liegen muss.

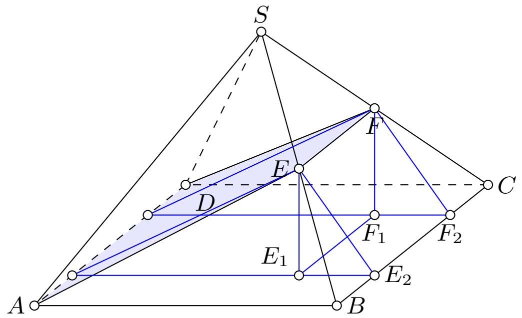
Aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds muss sich X innerhalb oder auf der Oberfläche des Parallelepipeds befinden, sodass nur Punkte auf der Strecke AC' in Frage kommen.

Wählt man jedoch für einen beliebigen Punkt X auf dieser Strecke die Punkte P und R als Schnitt der zu $ADD'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AB bzw. $D'C'$, so liegen diese Schnittpunkte (wieder aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds) auf den Strecken AB bzw. $D'C'$ und X auf PR. Wählt man für den gleichen Punkt X die Punkte S bzw. T als Schnittpunkte der zu $ABB'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AD bzw. $B'C'$, so liegen diese wieder auf den entsprechenden Strecken und X auch auf ST, sodass für jeden Punkt X auf der Strecke AC' Strecken PR und ST gemäß den Vorgaben gefunden werden können, die sich in X schneiden.

Damit ist genau die Strecke AC' die gesuchte Punktmenge.

Aufgabe 131033:
Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die Länge a.
E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

Lösung von Stephan Hauschild:
Berechnung des unteren Teilkörpers:
Der untere Teilkörper ist - geeignet zerlegt - auffassbar als Dreiecksprisma T_1 und zwei zusammenschiebbare Pyramiden T_2. Es ist die Grundfläche des Prismas $G = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ und die Prismenhöhe $h = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Damit wird



$$V_{T_1} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{16}\sqrt{2}$$

Für die zwei Pyramiden ergibt sich analog

$$V_{T_2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$$

und für den unteren Teilkörper

$$V_{\text{unten}} = V_{T_1} + V_{T_2} = \frac{5}{48}a^3\sqrt{2}$$

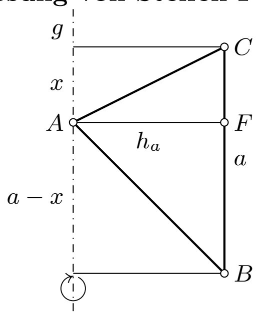
Für den oberen Teilkörper verbleiben damit noch

$$V_{\text{oben}} = V_{\text{Pyramide}} - V_{\text{unten}} = \frac{1}{16}a^3\sqrt{2}$$

und ein Verhältnis von $V_{\text{oben}} : V_{\text{unten}} = 3 : 5$.

Aufgabe 151031:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $BC = a$ und der Höhenlänge $AD = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

Lösung von Steffen Polster:



Rotiert das Dreieck um die Gerade g, so entsteht ein zylinderförmiger Körper, aus dem auf den Seiten der Grund- und Deckfläche ein Kegel herausgeschnitten wurde. Zylinder Z und beide Kegel K_1, K_2 haben als Radius die Höhe h_a. Die Höhe des Zylinders ist s, die der zwei Kegel x und $a - x$. Für das Volumen des gesuchten Körpers wird dann:

$$V = V_Z - V_{K_1} - V_{K_2} = \pi \cdot h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot x - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot (a - x) = \frac{2}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe 161035:
Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrundegelegt: Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.
Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrundegelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a. Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H, so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2$$

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

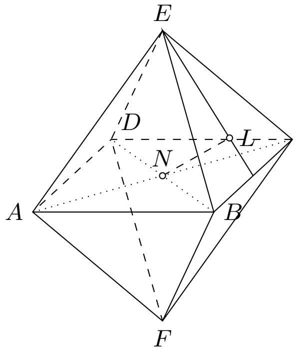
$$M_1 = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}$$

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt $M_2 = 3ah$. Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$$\begin{aligned} 3ah &= \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2} \\ 2h &= \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2} \\ 4h^2 &= h^2 + \frac{1}{12}a^2 \\ h &= \frac{1}{6}a \end{aligned}$$

Aufgabe 191033:
Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d. h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel (d. h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt).
Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, dass die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1 : r_2$, wobei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt M eines Würfels, d.i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist a die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von M zu den Ecken, d. h. der Umkugelradius $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von M zu den Seitenflächen, d. h. der Inkugelradius, ist $r = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Weiter sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Oktaeder (siehe Bild).



Sein Mittelpunkt N, d.i. der Schnittpunkt von AC, BD und EF, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist b die Kantenlänge des Oktaeders, also $BD = b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r = NB = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: $BCEN$ ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche BCE; für ihre Spitze N gilt $NB = NC = NE$, also handelt es sich um eine gerade Pyramide.

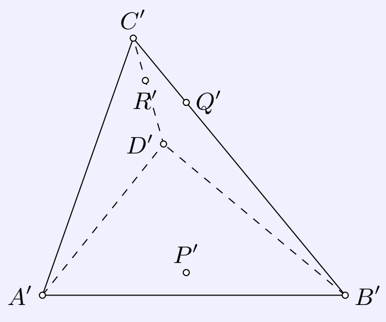
Der Fußpunkt L des Lotes von N auf, die Fläche BCE ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $LE = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.
Daraus und aus $NE = \frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, dass der Inkugelradius

$$r_2 = NL = \sqrt{NE^2 - LE^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

ist. Somit gilt $r_1 : r_2 = 1 : 1$.

Aufgabe 211036:
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben.
Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R'. Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211036



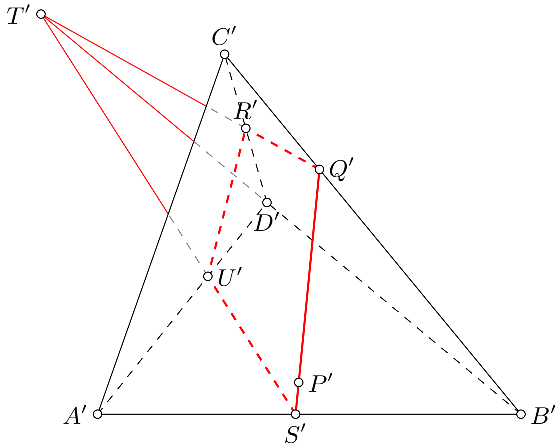
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert die Gerade durch Q', P' und bringt sie zum Schnitt S' mit $A'B'$.

(2) Man konstruiert die Gerade durch R', Q' und bringt sie zum Schnitt T' mit der Geraden durch B', D'.

(3) Man konstruiert die Gerade durch S', T' und bringt sie zum Schnitt U' mit $A'D'$.

(4) Man konstruiert die Strecke $R'U$'.



II. Beweis, dass die so konstruierte Figur $R'Q'S'U'$ die Projektion der Schnittfigur ist:
Die Gerade durch Q, P liegt in der Ebene e durch P, Q, R. Sie verläuft außerdem durch die Seitenflächen AB; daher schneidet sie den Rand von ABC in einem weiteren Punkt S, der zu e gehört. Folglich ist der in (1) konstruierte Punkt S' der Bildpunkt von S, und S liegt, wie die Konstruktion ergibt, auf AB.

Die Gerade durch R, Q liegt sowohl in e als auch in der Ebene durch B, C, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist sie auch nicht parallel zu BD (denn auch $RQ \parallel BD$ würde auch $R'Q' \parallel B'D'$ folgen). Also schneidet sie die Gerade durch B, D in einem Punkt T, der zu e gehört. Folglich ist der in (2) konstruierte Punkt T' der Bildpunkt von T.

Die Punkte S und T liegen sowohl in e als auch in der Ebene durch A, B, D; denn S liegt auf der Geraden durch A, B; T liegt auf der Geraden durch B, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist ferner die Gerade durch S,T nicht parallel zu AD, Also schneidet die Gerade durch S,T die (Gerade durch A,D und sogar, wie die Konstruktion zeigt, die) Strecke SD in einem Punkt$U$m der zu e gehört. Folglich ist der in (3) konstruierte Punkt U' der Bildpunkt von U.

De Strecke RQ liegt sowohl in e als auch in der Seitenfläche BCD, sie gehört also der Schnittfigur an. Ebenso gehören QS, SU und UR der Schnittfigur an. Diese vier Strecken bilden ein geschlossenes Vieleck und somit die gesamte Schnittfläche; das Viereck $R'Q'S'U'$ ist folglich deren gesuchte Projektion.

Aufgabe 221036:
Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, dass es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt!
Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

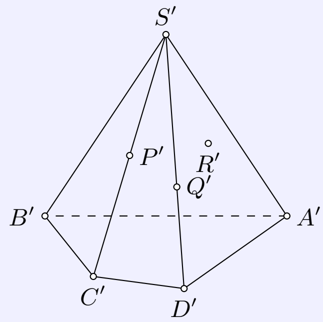
Lösung von cyrix:
Die Endpunkte zweier nicht-parallelen Flächendiagonalen auf den gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels bilden ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge $\sqrt{2}a$. (Dies prüft man leicht nach.)

Der Umkugelradius eines regulären Tetraeders beträgt das $\frac{\sqrt{6}}{4}$-fache seiner Kantenlänge, wie man leicht nachrechnet. (Der Umkreismittelpunkt fällt mit dem Schwerpunkt, also dem Schnittpunkt der Schwerelinien, die gleichzeitig Höhen sind, zusammen.)

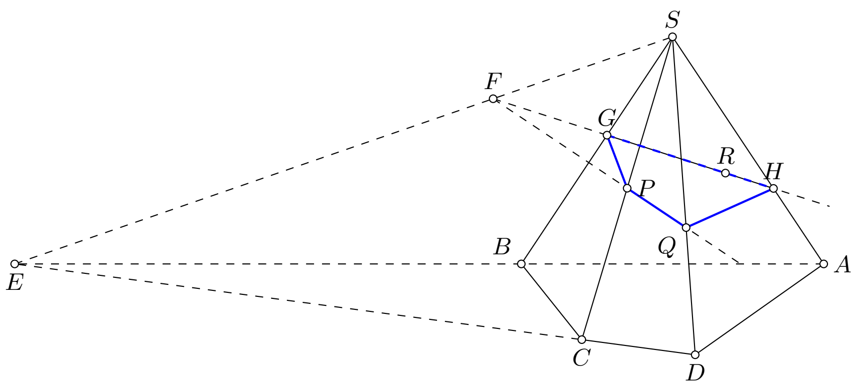
Für ein reguläres Tetraeder mit Kantenlänge $> \sqrt{2}a$ wäre also auch der Umkugelradius größer als $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, was den Umkugelradius des Würfels darstellt. Da aber alle Punkte des Teraeders auch zum Würfel gehören, muss die Entfernung aller Tetraederpunkte zum Umkugelmittelpunkt des Würfels kleiner oder gleich dem Umkugelradius des Würfels sein (wie dies für alle Punkte in oder auf dem Würfel

gilt). Damit kann aber auch der Umkugelradius des Tetraeders höchstens so groß sein wie der Umkugelradius des Würfels.
Also kann es kein größeres reguläres Teraeder geben, welches man aus dem Würfel herausschneiden kann, □.

Aufgabe 231036:
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.



Lösung von MontyPythagoras:



Konstruktionsanweisung:

1. E ist der Schnittpunkt von AB und CD.
2. Zeichne eine Gerade durch E und S.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.
4. F ist der Schnittpunkt der Geraden PQ und ES.
5. Zeichne eine Gerade durch F und R.
6. G ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante BS.
7. H ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante AS.

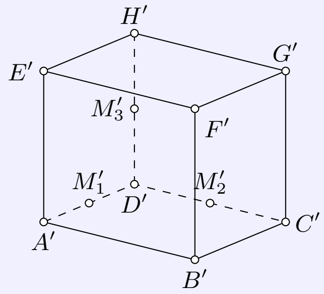
Das Viereck $PQHG$ ist die gesuchte Schnittfigur, die Strecke GH ist eine verdeckte Kante.

Aufgabe 241033:

Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.

Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten die Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen.

Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, dass das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.



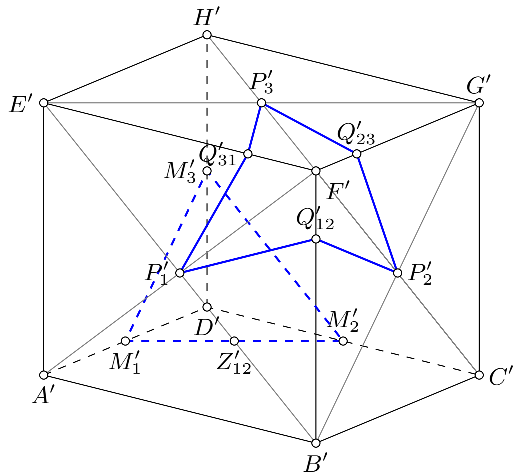
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat!

Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Die Grundfläche $M_1M_2M_3$ des Prismas hat mit der Oberfläche des Würfels genau die Strecken M_1M_2, M_2M_3 und M_3M_1 gemeinsam. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ enthält keinen Punkt der Würfeloberfläche.

Legt man einen Würfel des Kantenlänge $\frac{1}{2}AB$ so, dass er A als Ecke hat und dass seine von A ausgehenden Kanten Teilstrecken von AB, AD und AE sind, so ist M_1 eine Ecke dieses Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich der Mittelpunkt P_1 des Quadrates $ABFE$.



Daher gilt $M_1P_1 \parallel DF$; d. h., P_1 ist derjenige Punkt, in dem die Prismenkante M_1N_1 die Würfeloberfläche zum zweiten Mal (außer in M_1) durchstößt. Entsprechend durchstoßen die Kanten M_2N_2 und M_3N_3 die Würfeloberfläche in den Mittelpunkten P_2 bzw. P_3 der Quadrate $BCGF$ bzw. $EFGH$.

Legt man einen Würfel der Kantenlänge $\frac{3}{4}AB$ so, dass er B als Ecke hat und dass seine von B ausgehenden Kanten Teilstrecken von BA, BC und BF sind, so ist der Mittelpunkt Z_{12} der Strecke M_1M_2 eine Ecke des Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich derjenige Punkt Q_{12} auf BF, für den $BQ_{12} = \frac{3}{4}AB$ gilt.

Daher gilt $Z_{12}Q_{12} \parallel DF$, also liegt die Strecke $Z_{12}Q_{12}$ in der Seitenfläche $M_1M_2N_2N_1$ des Prismas. Somit sind P_1Q_{12} und $Q_{12}P_2$ die (außer M_1M_2 noch auftretenden) Schnittlinien dieser Seitenfläche mit der Oberfläche des Würfels.

Entsprechend gilt: Sind Q_{23} und Q_{31} diejenigen Punkte auf FG bzw. EF, für die $GQ_{23} = EQ_{31} = \frac{3}{4}AB$ gilt, so sind P_2Q_{23}, $Q_{23}P_3$ bzw. P_3Q_{31}, $Q_{31}P_1$ die (außer M_2M_3, M_3M_1 auftretenden) Schnittlinien des Flächen $M_2M_3N_3N_2$ bzw. $M_3M_1N_1N_3$ mit der Oberfläche des Würfels.

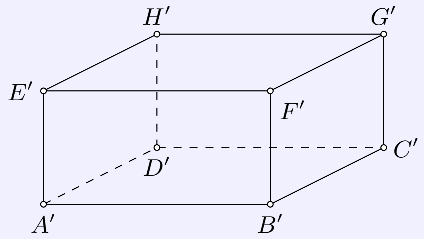
Damit ist bewiesen, dass eine nach der folgenden Beschreibung durchgeführt Konstruktion die gesuchten Bilder der Schnittlinien ergibt:

Man konstruiere die Bilde P_1', P_2', P_3' der Mittelpunkte P_1, P_2, P_3 der Quadrate $ABFE$, $BCGF$, $EFGH$, d.s. die Diagonalenschnittpunkte P_1', P_2', P_3' der Vierecke $A'B'F'E'$, $B'C'G'F'$, $E'F'G'H'$.

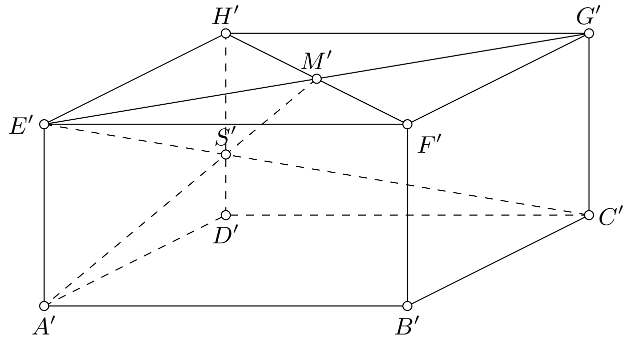
Ferner konstruiere man diejenigen Punkte Q_{12}', Q_{23}', Q_{31}' auf $F'B'$, $F'G'$ bzw. $F'E'$, für die $F'Q_{12}' = \frac{1}{4}F'B'$, $F'Q_{23}' = \frac{1}{4}F'G'$ bzw. $F'Q_{31}' = \frac{1}{4}F'E'$ gilt.

Dann sind das Dreieck $M_1'M_2'M_3'$ und das Sechseck $P_1'Q_{12}'P_2'Q_{23}'P_3'Q_{31}'$ die gesuchten Bilder der Schnittlinien.

Aufgabe 251036:
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.
a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecken EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Konstruktion siehe Abbildung



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M' der Strecken $E'G'$ und $F'H'$.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt S' der Strecken $A'M'$ und $E'C'$.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt S' das Bild des in der Aufgabe genannten Punktes S ist:
Wegen $AE \parallel CG$ liegen A, E, C und G in einer Ebene η. Diese enthält mit E und G auch den Schnittpunkt M der Rechteckdiagonalen EG un FH; dabei hat M als Bild den in (1) konstruierten Schnittpunkt von $E'G'$ und $F'H'$.
Die Ebene ε durch A, F, H enthält mit F und H auch M. Da somit die Ebenen η und ε beide die Punkte A und M enthalten, ist die Gerade g durch A und M die Schnittgerade von η und ε.
Ferner enthält η die Strecke EC; folglich enthält g den Schnittpunkt S von EC und ε. Dessen Bild S' ist somit der in (2) konstruierte Schnittpunkt der Bildgeraden g' mit der Strecke $E'C'$.

b) Da die Rechteckdiagonalen EG und FH einander halbieren, ist M der Mittelpunkt von HF; also AM Seitenhalbierende im Dreieck AFH. Ferner ist $EM = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}AC$. Daraus und aus dem Strahlensatz folgt $SM : SA = EM : AC = 1 : 2$.
Also ist S der Schwerpunkt des Dreiecks AFH. Folglich ist S genau dann der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, wenn dessen Seitenhalbierenden zugleich Höhen sind. Das trifft genau im Fall $AF = HF = AH$ zu.

Aus $AF = HF$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz ssw; dem rechten Winkel $\angle AEF = \angle HEF$ liegt als größtem Innenwinkel die längere Dreiecksseite gegenüber) und daher $AE = HE$.
Umgekehrt gilt: Aus $AE = HE$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz wsw), also $AF = HF$. Analog gilt: Aus $HF = AH$ folgt $EF = AE$ und umgekehrt.

Analog ist S für genau diejenigen Quader $ABCDEFGH$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, für die $EF = AE = HE$ gilt, d. h. für genau diejenigen Quader, die Würfel sind.

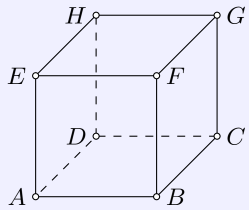
Aufgabe 261035:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt:
Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wird die Kugel von einer Ebene e_1 geschnitten, so entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_1, der die Kugeloberfläche in genau zwei Teilflächen zerlegt.
Beim Schnitt mit eine zweiten Ebene $e_2 \neq e_1$ entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_2. Er kann mit e_1 (wie jeder Kreis mit jeder Ebene, in der er nicht liegt) höchstens zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens zwei Teilbögen zerlegt.
Jeder dieser Teilbögen zerlegt seinerseits diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz (in sich geschlossen oder sie durchquerend) enthalten ist, in genau zwei neue Teilflächen, vermehrt also die Anzahl der bereits vorliegenden Teilflächen um genau 1. Somit entstehen höchstens $2 + 2 = 4$ Teilflächen.

Entsprechend folgt schrittweise weiter:
Beim Schnitt mir einer dritten/vierten/fünften Ebene $e_3/e_4/e_5$, die verschieden ist von allen vorangehenden Ebenen, entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis $k_3/k_4/k_5$.
Er kann mit e_1 und e_2 / mit e_1, e_2, e_3 / mit e_1, e_2, e_3, e_4 höchstens je zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens 4 / 6 / 8 Teilbögen zerlegt. Fügt man diese Teilbögen schrittweise einzeln zu der jeweils erreichten Zerlegung der Kugeloberfläche hinzu, so ergibt sich:

Jeder Teilbogen bewirkt für diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz enthalten ist, entweder eine Aufteilung in genau zwei neue Teilflächen oder aber keine neue Aufteilung (nämlich falls die Teilfläche noch an einer anderen, von dem Teilbogen nicht durchquerten Stelle zusammenhängt). Somit entstehen höchsten $4 + 4 = 8$ / $8 + 6 = 14$ / $14 + 4 = 22$ Teilflächen. w. z. b. w.

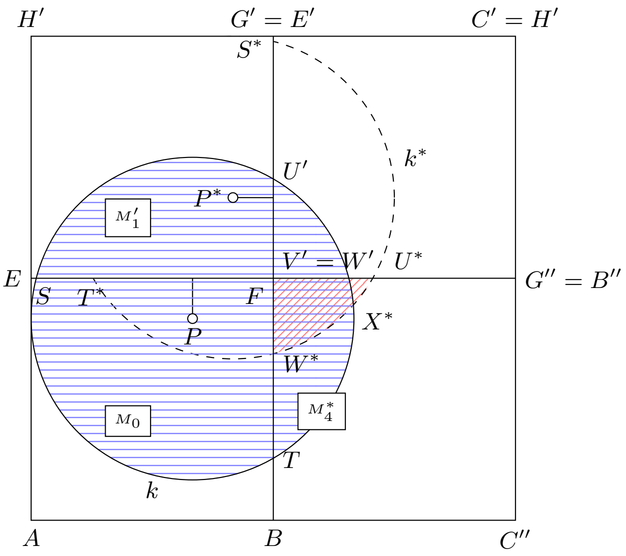
Aufgabe 281033:



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm.
Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge

4 cm hat!
Hinweis:
Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen.
Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, dass sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zur Angabe von Flächenstücken in einer Seitenfläche f des Würfels (oder einer Bildfläche f hiervon) bezeichne stets $\wideparen{XY}Z$ das Flächenstück mit derjenigen Randkurve, die aus dem in f enthaltenen Boden $\wideparen{XY}$ eines zuvor angegebenen Kreises und den Strecken YZ, ZX besteht. Entsprechend sei die Bezeichnung $\wideparen{XY_1}\wideparen{Y_1Y_2}Z$ verwendet.

Die gesuchte Menge M lässt sich in folgenden Schritten ermitteln (siehe Abbildung).
(0) In der Fläche $ABFE$ sind mindestens alle diejenigen Punkte auf die geforderte Weise erreichbar, die der Kreisfläche K um P mit dem Radius $r = 4$ cm angehören.
Die Kreislinie k um P mit r schneidet EF in einem Punkt S und BF in einem Punkt T. Die Punkte in $ABFE$, die der Kreisfläche K angehören, bilden dann das Flächenstück $M_0 = \wideparen{TS}F$.

(1) Durch Überqueren der Strecke EF sind in der Fläche $EFGH$ alle Punkte eines Flächenstückes M_1 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe die Fläche $EFGH$ um EF in die durch $A; B; FE$ gehenden Ebene e in die Lage $EFG'H'$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG' in einem Punkt U'. Die Punkte in $EFG'H'$, die der Kreisfläche K angehören, bilden das Flächenstück $M_1' = \wideparen{SU'}F$. Durch Zurückdrehen von $EFG'H'$ in $EFGH$ geht U' in einen Punkt U und damit $\wideparen{SU'}$ in einen Kreisboden $\wideparen{SU}$ sowie M_1' in das Flächenstück $M_1 = \wideparen{SU}F$ über.

(2) Durch Überqueren von BF sind in $BFGC$ alle Punkte eines Flächenstücks M_2 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ um BF in die Ebene e in die Lage $BFG''C''$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG'' in einem Punkt V''. Durch Zurückdrehen von $BFG''C''$ in $BFGC$ geht das Flächenstück $M_2'' = \wideparen{TV''}F$ aller in $BFG''C''$ zu K gehörenden Punkte über in $M_2 = \wideparen{TV}F$.

(3) Durch Überqueren erst von EF und dann von FG sind in $BFGC$ auch alle Punkte eines Flächenstücks M_3 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ erst um FG in die Ebene durch E,F,G,H in die Lage außerhalb $EFGH$ und wende dann die in (1) genannte Drehung um EF an. Dadurch kommt $BFGC$ in die Lage $B'FG'C'$ außerhalb $EFG'H'$.
Der Kreis k schneidet FB' in einem Punkt W' (der wegen $B' = G''$ mit dem schon in (2) genannten Punkt V'' zusammenfällt). Die Punkte $B'FG'C'$, die K angehören, bilden das Flächenstück $M_3' = \overset{\frown}{U'W'}F$.
Durch Zurückdrehen von $B'FG'C'$ in $BFGC$ geht $M_3' = \overset{\frown}{UW}F$ über.

(4) Man kann aber auch $B'FG'C'$ durch eine in der Ebene e ausgeführte Drehung um F in die Lage $BFG''C''$ bringen. Dabei gehen U', W' in die Punkte U^*, W^* über. Diese sind die Schnittpunkte von FG'' bzw. FB mit demjenigen Kreis k^*, der bei der genannten Drehung aus k entsteht.
Sein Mittelpunkt P^* entsteht bei dieser Drehung aus P, sein Radius ist r. Das Flächenstück M_3' geht bei dieser Drehung in $M_3'' = \overset{\frown}{U^*W^*}F$ über.

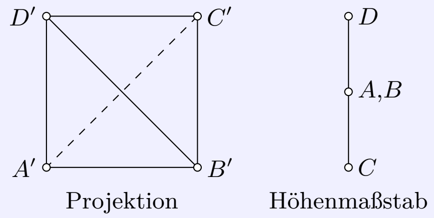
(5) Aus (2), (3), (4) folgt:
In $BFGC$ sind alle Punkte der Vereinigungsmenge $M_4 = M_2 \cup M_3$ auf die geforderte Weise erreichbar. Da die Kreise k und k^* in $BFG''C''$ genau einen Schnittpunkt X^* haben ergibt sich die Vereinigungsmenge $M_4^* = M_2'' \cup M_3 = \overset{\frown}{TX^*}\overset{\frown}{X^*U^*}F$.
Geht bei dem Zurückdrehen von $BFG''C''$ und $BFGC$ der Punkt X^* in X über, so geht M_4^* in $M_4 = \overset{\frown}{YX}\overset{\frown}{XU}F$ über.

(6) Durch Überqueren erst von EF, dann von FG und dann von BF sind in $ABFE$ keine neuen Punkte mehr erreichbar.
Dies ist daraus ersichtlich, dass die Menge $\overset{\frown}{T^*M^*}F$ aller in $ABFE$ zur Kreisfläche k^* um P^* mit r gehörenden Punkte bereits in M_0 liegt. Ebenso folgt:

Durch Überqueren erst von BF, dann von FG sind in $EFGH$ keine neuen Punkte erreichbar; denn man kann $EFG'H'$ durch die in (5) genannte Drehung in die Lage $E''FG''H''$ bringen; dabei geht M_1' in die Menge $\overset{\frown}{S^*U^*}F$ aller in $E''FG''H''$ zu k^* gehörenden Punkte über, auch in ihr liegen bereits alle in $E''FG''H''$ zu k gehörenden Punkte (die wegen $G''FE''H'' = B'FG'C'$ das schon in (1) genannte Flächenstück M_3' bilden).

Damit ist auch gezeigt, dass durch weiter fortgesetztes Überqueren von Kanten keine neuen Punkte mehr erreichbar sind.
Die gesuchte Menge ist also die Vereinigungsmenge der in (0), (1) und (5) durch Angabe ihrer Randkurven und deren konstruktiver Gewinnung beschriebenen Flächenstücke M_0, M_1 und M_4.

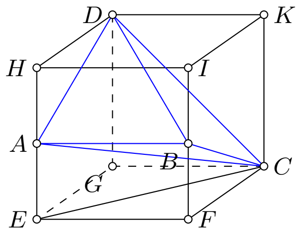
Aufgabe 291033:



Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat.

Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



wie in der Abbildung gezeigt, kann der Körper $ABCD$ aus einem Würfel $EFGHIKD$ erhalten werden, indem man die Pyramiden $ABFEC$, $ABIHD$, $ADGEC$m $BCKID$ entfernt.
Die ersten beiden haben als Grundfläche je ein Rechteck mit den Seitenlängen a, $\frac{a}{2}$, also dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$.
Die letzten beiden haben als Grundfläche je ein Trapez mit parallelen Seiten der Länge a, $\frac{a}{2}$ und der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4}a^2$.
Alle vier Pyramiden haben die Höhenlänge a. Damit ergibt sich als gesuchtes Volumen von $ABCD$

$$V = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Aufgabe 301033:
Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.

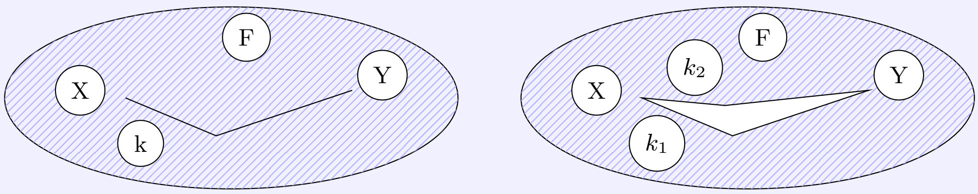
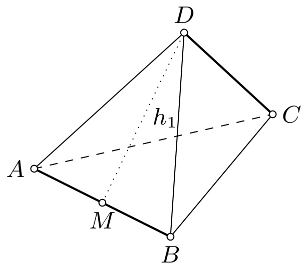
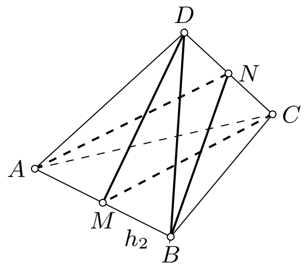


Abbildung a) Abbildung b)

Die Abbildungen a und b verdeutlichen den Vorgang des „Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$“:
Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2.
Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d. h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so lässt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, dass die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.
Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.
b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so lässt sich F ebenfalls so verbiegen, dass die Randkurve zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.
Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede der beiden entstehenden Zylinder-Mantelflächen hat als Umfang ihres Grund- und Deckkreises die doppelte Länge jeweils einer Kurve, längs deren die Tetraederfläche F aufgeschnitten wird.
Die Höhe des betreffenden Zylinders ist die Länge des Lotes, das von einem Punkt der einen Schnittkurve auf ein - in der ursprünglichen Lage von F geradlinigen - Stück der anderen Schnittkurve gefällt wird, wenn dieses Lot ganz in der Tetraederfläche verläuft. So ergibt sich (siehe Abbildungen):





Ist a die Kantenlänge des Tetraeders $ABCD$, so hat im Fall a) der Zylinder den Grundkreisumfang $u_1 = 2AB = 2a$ und die Höhe $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Im Fall b) hat der Zylinder den Grundkreisumfang $u_2 = 2(CM + MD) = 2a\sqrt{3}$ und die Höhe $h_2 = \frac{a}{2}$.
Für die Höhen gilt also

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{3}$$

für die Grundkreisradien r_1 bzw. r_2 gilt

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

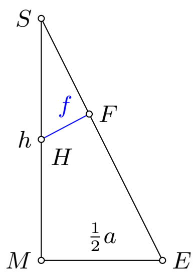
Also gilt für die Volumina $V_i = \pi r_i^2 h_i$ $(i = 1{,}2)$ der beiden Zylinder

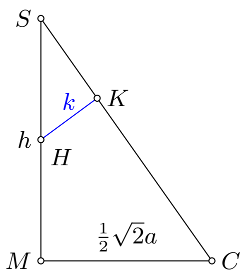
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

und daher $V_2 > V_1$, d. h., der in b) genannte Zylinder hat das größere Volumen.

Aufgabe 311033:
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat $ABCD$, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates $ABCD$.
Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.
Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = HF$ und $k = HK$ das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Mittelpunkt der Strecke BC sei E. Die Höhe der Pyramide sei h, die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche sei a. Wir legen nun einen Schnitt durch MES und durch MCS:

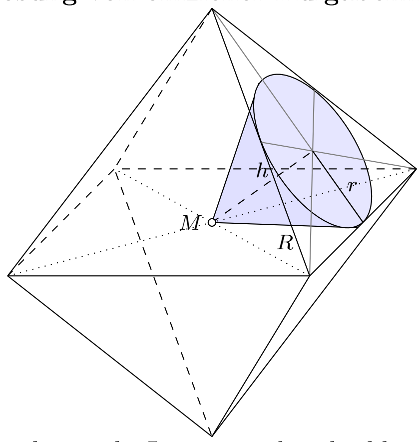




Das gesuchte Volumen der Pyramide ist
$$V = \frac{1}{3}a^2h$$
Wir müssen daher a und h mithilfe der gezeigten Schnitte aus den gegebenen Längen f und k ermitteln. Es gilt im linken Schnitt:
$$\frac{f}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}}$$
$$f^2(h^2 + \frac{1}{4}a^2) = \frac{1}{16}a^2h^2$$
$$16f^2h^2 + 4f^2a^2 = a^2h^2$$
$$(a^2 - 16f^2)h^2 = 4f^2a^2$$
$$h^2 = \frac{4f^2a^2}{a^2 - 16f^2} \qquad (1)$$
Aus dem rechten Schnittbild erhält man in ähnlicher Weise:
$$\frac{k}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}}$$
Und mit den gleichen Rechenschritten wie oben:
$$h^2 = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 8k^2} \qquad (2)$$
Wir setzen (1) und (2) gleich und lösen nach a^2 auf:
$$\frac{4f^2a^2}{a^2 - 16f^2} = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 8k^2}$$
$$f^2(a^2 - 8k^2) = k^2(a^2 - 16f^2)$$
$$8f^2k^2 = (k^2 - f^2)a^2$$
$$a^2 = \frac{8f^2k^2}{k^2 - f^2} \qquad (3)$$
Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:
$$h^2 = \frac{4f^2 \cdot \frac{8f^2k^2}{k^2-f^2}}{\frac{8f^2k^2}{k^2-f^2} - 16f^2} = \frac{32f^4k^2}{8f^2k^2 - 16f^2(k^2 - f^2)} = \frac{4f^2k^2}{2f^2 - k^2}$$
$$h = \frac{2fk}{\sqrt{2f^2 - k^2}}$$
Diese Gleichung und Gleichung (3) setzen wir in die Formel für das Volumen ein:
$$V = \frac{2fk}{3\sqrt{2f^2 - k^2}} \cdot \frac{8f^2k^2}{k^2 - f^2} = \frac{16f^3k^3}{3(k^2 - f^2)\sqrt{2f^2 - k^2}}$$

Aufgabe 321033:
Zeigen Sie, dass es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, dass jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!
Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundradius r und die Höhe h solcher Kegel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bildet man in jeder der acht Seitenflächen eines regulären Oktaeders (diese Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke) den Inkreis, so hat jeder dieser acht Kreise mit genau drei anderen je genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich jeweils den Berührungspunkt auf einer gemeinsamen Kante zweier Seitenflächen (diese Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der Kanten).

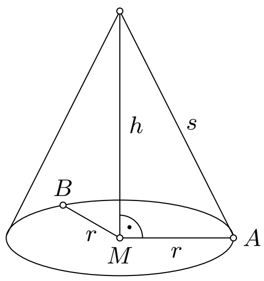
Verbindet man den Mittelpunkt M des Oktaeders mit den Kreisen, so erhält man acht Kreiskegel, die die gewünschten Berührungen aufweisen.
Sie sind gerade Kegel, da das Lot von M auf je eine Seitenfläche deren Inkreismittelpunkt als Fußpunkt hat (siehe Abbildung).
Da diese acht Lote einander gleichlang sind, sind die acht Kegel (ebenso wie ihre Grundkreise) einander kongruent. Alle ihre Mantellinien sind also von gleicher Länge; daher sind die Kegel einer Kugel so einbeschrieben, dass (zum Einbeschreiben in diese Kugel) ihre Höhe möglichst groß ist.

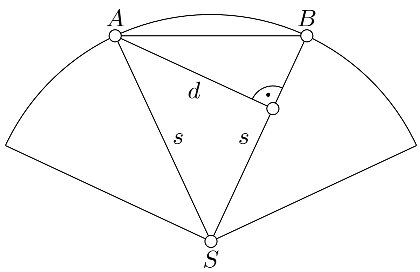
Die Länge dieser Mantellinien, also der Kugelradius R, ist in dem von vier Oktaederkanten gebildeten Quadrat der Abstand des Quadratmittelpunktes von einem Kantenmittelpunkt, also beträgt die Kantenlänge $2R$.
Der Grundkreisradius r der Kegel ist (nach dem Satz über den Schwerpunkt auf den Seitenhalbierenden) ein Drittel der Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $2R$, also $r = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{3}$.
Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich als Höhenlänge der Kegel

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{6}$$

Aufgabe 331036:
Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r, die Spitze von K sei S, die Höhe $h = MS$ von K betrage $h = r \cdot \sqrt{3}$.
Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, dass der Winkel $\angle AMB$ die Größe $120°$ hat.
Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, dass sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.
Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r!

Lösung von Kornkreis:
Die Hauptidee ist den Kegel abzuwickeln. Gefragt ist dann also einfach nach der kürzesten Entfernung von einem Punkt zur Strecke. Diese kürzeste Entfernung ist bekannterweise das Lot.





Gesucht ist also im Dreieck ASB die Höhe auf der Seite $\overline{AS}$ (im folgenden als d bezeichnet). Dazu berechnen wir nun zuerst die Länge der Seite $\overline{AB}$ durch Sinussatz im $\triangle ABM$. Da dieses Dreieck gleichschenklig ist, betragen die beiden unbekannten Winkel 30° (Basiswinkelsatz). Nun ist:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin(120°)} = \frac{r}{\sin(30°)} \iff |\overline{AB}| = \frac{\sin(120°)r}{\sin(30°)}$$

Nun ist $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ bekannt und

$$\sin(120°) = \sin(90° + 30°) = \sin(90°)\cos(30°) + \cos(90°)\sin(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Eingesetzt also:

$$|\overline{AB}| = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}r$$

Dann berechnen wir die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$, welches ja Mantellinien vom Körper sind. Nach Pythagoras gilt also:

$$s^2 = h^2 + r^2 = (\sqrt{3}r)^2 + r^2 = 4r^2$$

und somit $s = 2r$.
Sei nun $\alpha = \angle BSA$. Nach Kosinussatz gilt im Dreieck ASB nun:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}r)^2 &= (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos(\alpha)\\ 3r^2 &= 4r^2 + 4r^2 - 8r^2 \cdot \cos(\alpha)\\ \alpha &= \arccos\left(\frac{5}{8}\right)\end{aligned}$$

Nun gilt weiterhin $\sin(\alpha) = \frac{d}{2r}$. Eingesetzt und umgestellt erhalten wir also:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r$$

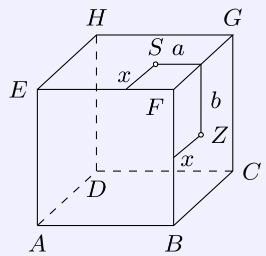
Dieses lässt sich noch vereinfachen. Es ist nach dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Dadurch erhalten wir also für $\sin(\arccos x)$ nun

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Somit:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} \cdot 2r = \sqrt{\frac{39}{64}} \cdot 2r = \frac{\sqrt{39}}{4}r$$

Aufgabe 341036:

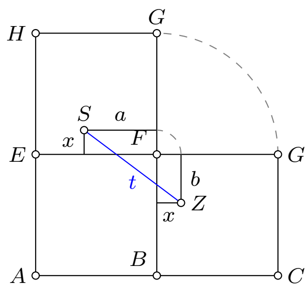


Auf der Oberfläche eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 1 seien S und Z zwei Punkte. Ein Weg vom Startpunkt S zum Zielpunkt Z werde genau dann zulässig genannt, wenn er ganz auf der Oberfläche des Würfels verläuft.
Der Startpunkt S liege auf der Quadratfläche $EFGH$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand a

mit $0 < a < 1$ und zu EF einen Abstand x.
Der Zielpunkt Z liege auf der Quadratfläche $BCGF$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand b mit $0 < b < 1$ und zu BF ebenfalls den Abstand x.
Die Längen a und b seien - unter Einhaltung von $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ beliebig, aber - fest vorgegeben.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von diesen a und b) alle diejenigen Werte x mit $0 < x < 1$, für die es zwei voneinander verschiedene zulässige Wege von S nach Z gibt, die beide unter allen zulässigen Wegen von S nach Z dieselbe möglichst kleine Länge haben!

Lösung von MontyPythagoras:
Einer der kürzestmöglichen Wege von S nach Z ist der direkte, geradlinige Weg über die Kante FG hinweg. Die Länge dieses Weges ist $l = a + b$. Der Punkt, an dem der Weg die Kante FG kreuzt, muss vom Punkt F auch den Abstand x haben, da ein Punkt mit größerem oder kleinerem Abstand zu F einen Umweg bedeuten würde.
Selbst wenn a und b so groß wie möglich werden, ist bei dem direkten Weg immer $l < 2$. Der Weg über die Kanten EH, AD und BC ist auf jeden Fall größer als 2, weil zwei komplette Würfelflächen überquert werden müssen.

Wenn x nun klein wird, S also an die Kante EF und Z an BF heranrückt, dann ist auch ein Weg möglich über die Kante EF und BF. Wir stellen nachfolgend die drei Würfelflächen $ABFE$, $EFGH$ und $BCGF$ abgewickelt dar:



Die Länge dieser diagonal verlaufenden Strecke ist dann:

$$t(x) = \sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2}$$

Es gibt kein lokales Minimum - je kleiner x, desto kleiner auch t. Aber der Weg soll ja auch nur gleich l sein, also

$$\sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2} = a + b$$
$$(x+a)^2 + (x+b)^2 = (a+b)^2$$
$$2x^2 + 2ax + 2bx + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$x^2 + (a+b)x - ab = 0$$
$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + ab}$$

Es kommt nur diese Lösung der quadratischen Gleichung in Frage, das ansonsten $x < 0$ wäre. Somit folgt:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 6ab + b^2} - (a+b)\right)$$

Außerdem ist auch

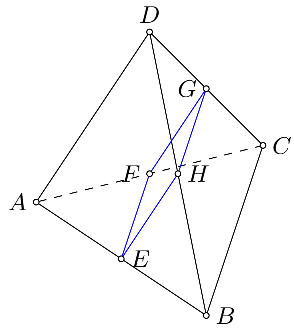
$$x_2 = 1 - x_1$$

eine gültige Lösung, denn dann haben S und Z den gleichen Abstand zur Würfelfläche $CDHG$ wie in der vorliegenden Lösung zur Fläche $ABFE$. Der Weg ist gleich lang, er führt dann aber über die Kanten GH und GC.

IV Runde 4

Aufgabe 021046:
Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass eine quadratische Schnittfigur entsteht.
a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

Lösung von Manfred Worel:
a) A, B, C, D seien die Ecken des regelmäßigen Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt der Kante $AB = a$. Eine der gesuchten Schnittebenen, die den Tetraeder so schneidet das eine quadratische Schnittfigur entsteht, ist die Ebene ε, die durch den Punkt E geht und parallel zu den Kanten AD und BC verläuft.
b) Die unter a) beschriebene Ebene ε schneide die Kanten AC, CD und BD in dieser Reihenfolge in den Punkten F, G und H.



Dann gilt $EF \parallel BC$ und $GH \parallel BC$ und somit $EF \parallel GH$, sowie $FG \parallel AD$ und $HE \parallel AD$ und somit $FG \parallel HE$.
Hieraus folgt nach dem Strahlensatz

$$EF = FG = GH = HE = BH = HD = CG = GD = CF = AF = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur $EFGH$ ist demnach ein Rhombus und die Punkte F, G, H sind in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Kanten AC, CD, BD.
Da die vier Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ gleichseitige Dreiecke sind und E der Mittelpunkt von AB ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$CE = DE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Damit ist das Dreieck $\triangle CDE$ gleichschenklig. Da G der Mittelpunkt von CD ist, ist er auch der Fußpunkt des Lotes von E auf DC. Damit ist EG die Höhe auf die Basislänge des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle CDE$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$EG^2 = DE^2 - DG^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Da die Strecken EH, HG und EG der Beziehung

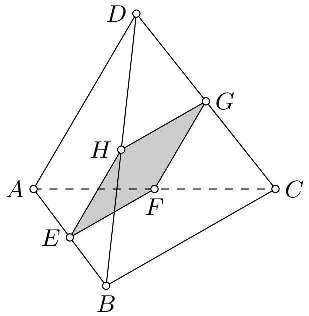
$$EG^2 = EH^2 + HG^2 \qquad \left(\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$

genügen ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das Dreieck $\triangle EGH$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei H. Wegen $\angle EHG = 90°$ ist der Rhombus $EFGH$ ein Quadrat.
c) Für den Flächeninhalt A des Quadrates $EFGH$ gilt:

$$A = |EF| \cdot |EH| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Aufgabe 041045:
Die Länge der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante wird eine Ebene ε so gelegt, dass sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei einander nicht schneidenden Kanten verläuft.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



A, B, C, D seien die Ecken des Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt von AB (siehe Abbildung). Dann kann ε o. B. d. A. als E enthaltend und parallel zu AD und BC vorausgesetzt werden.
Daher schneidet ε weder AD noch BC. Folglich liegen A und D bzw. B und C jeweils auf derselben Seite von ε, während A und B auf verschiedenen Seiten von ε liegen. Mithin schneidet ε die Kanten AC, CD und DB. Die Schnittpunkte seien in dieser Reihenfolge mit $F.G$ und H bezeichnet.

Dann gilt

$$EF \parallel BC \quad \text{und} \quad GH \parallel BC \qquad \text{sowie} FG \parallel AD \quad \text{und} \quad HE \parallel AD$$

Daraus folgt nach dem 2. Strahlensatz

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur ist demnach ein Rhombus. Da wegen der Regelmäßigkeit des Tetraeders die Seitenflächen untereinander kongruente regelmäßige Dreiecksflächen sind, sind deren Höhen untereinander kongruent; es gilt also

$$|DE| = |CE| = |DF| = |BF|$$

Da außerdem $|CD| = |BD|$ ist, gilt nach dem Kongruenzsatz (sss) $\triangle CDE \cong \triangle BDF$ und folglich $\angle DCE \cong \angle DBF$.
Wegen $|CG| = |BH| = \frac{1}{2}|CD|$ gilt nach dem Kongruenzsatz (sws) $\triangle CGE \cong \triangle BHF$ und mithin $|GE| = |HF|$. Die Mittelpunkte von GE und HF fallen im Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus zusammen, so das GE und HF Durchmesser desselben Kreises sind.
Damit ist $EFGH$ als Rhombus und Sehnenviereck ein Quadrat und hat den Flächeninhalt

$$I = |EF|^2 = \frac{a^2}{4}$$

Aufgabe 051043:
Man beweise folgenden Satz:
Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M.
Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.
Anmerkung:
Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

Lösung von cyrix:
Für jeden Punkt P auf einer solchen Ebene, die den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen halbiert, gilt, dass seine Lote auf die beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind. Umgekehrt bildet die Menge der Punkte, für die deren Lote auf diese beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind, genau jeweils eine solche Winkelhalbierenden-Ebene.

Da jede dieser Ebenen eine Kante des Tetraeders enthält, und keine zwei Tetraederkanten parallel sind, sind auch keine zwei dieser sechs Ebenen zueinander parallel. Es folgt, dass sich je drei von ihnen in genau einem Punkt schneiden.

Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden-Ebenen durch die Geraden A_1A_2, A_1A3 und A_2A4. Auf der ersten dieser Winkelhalbierenden-Ebenen liegen alle Punkte, deren Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\varepsilon_{A_1A_2A_4}$ gleichlang sind; in der zweiten die, für die die Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\varepsilon_{A_1A_3A_4}$ gleichlang sind; und auf der dritten die, für die die Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_4}$ und $\varepsilon_{A_2A_3A_4}$ gleichlang sind. Für den Punkt M stimmen also die Längen der Lote auf alle vier Seitenflächen-Ebenen überein. Damit ist aber M in jeder der sechs Winkelhalbierenden-Ebenen enthalten, also ihr gemeinsamer Schnittpunkt.

Da die Lote von M auf die Seitenflächenebenen alle gleichlang sind, berührt eine Kugel um M mit diesem Radius genau alle Seitenflächen (in den jeweiligen Lotfußpunkten).

Aufgabe 061042:
Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\triangle ABC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$, das in der Ebene ε liegt.
Die Fußpunkte der Lote von A,B,C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$.
Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{\triangle A_1B_1C_1}$?

Lösung von cyrix:
Sei ϕ der Winkel zwischen den beiden Ebenen und g ihre Schnittgerade.
Durch die Orthogonalprojektion werden Strecken in ε, die parallel zu g sind, auf kongruente Strecken in ε_1 abgebildet.
Für Strecken in ε, die senkrecht zu g verlaufen, sind deren Bilder in ε_1 dagegen um den Faktor $\cos\phi$ gestreckt (bzw., da $\cos\phi \leq 1$ ist, eher „gestaucht“). Die Bilder von Parallelen zu g in ε sind auch weiterhin in ε_1 parallel zu g; analog werden auch die zu g in ε orthogonalen Geraden wieder auf in ε_1 zu g orthogonale Geraden abgebildet.
Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ in ε. Ist eine der Seiten des Dreiecks (o. B. d. A. AB) parallel zu g, dann ist ihr Bild (also dann A_1B_1) kongruent zu ihr, während ihre Höhe (h_{AB}) senkrecht zu g verläuft, und so dessen Bild ($h_{A_1B_1}$) eine um den Faktor $\cos\phi$ gestreckte Länge besitzt. Da die Bilder dieser beiden Strecken auch in der Zielebene senkrecht aufeinander stehen, berechnet sich der Flächeninhalt des Bilddreiecks zu

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot |A_1B_1| \cdot |h_{A_1B_1}| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \cos\phi \cdot h_{AB} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Ist dagegen keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ parallel zu g, dann schneidet (genau) eine der Parallelen in ε zu g durch die drei Eckpunkte die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite in einem inneren Punkt.
Sei dies o. B. d. A. die Parallele durch A; und deren Schnittpunkt mit BC heiße D. Dann ist AD parallel zu g und die Höhen von B und C auf AD orthogonal zu g, sodass sich auf diese Teildreiecke die eben gemachte Überlegung jeweils einzeln anwenden lässt, also (mit D_1 als Bildpunkt von D bezüglich der Orthognalprojektion)

$$I_{\triangle A_1B_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABD} \qquad \text{und} \qquad I_{\triangle A_1C_1D_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ACD}$$

gilt.
Abschließend ist festzustellen, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sich aus den jeweiligen zwei Teildreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ bzw. entsprechend $\triangle A_1B_1D_1$ und $\triangle A_1C_1D_1$ zusammensetzen, sich ihre Flächeninhalte also aus der Summe derer der jeweiligen beiden Teildreiecke ergibt und damit in jedem Fall gilt:

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \cos\phi \cdot I_{\triangle ABC}$$

Aufgabe 071042:
Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, dass er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.
Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \tag{1}$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wie berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

Fall 1: Es sei $h \geq \frac{a}{2}$.
Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kanten von Pyramide und Behälter.
Wie legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AQB im Basisquadrat der Pyramide.
Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $SM = SM' = s$; $MM' = a$,
Die Höhe SP dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h, die Seiten SM, SM' sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide.
Wegen $h \geq \frac{a}{2}$ gilt $\angle MSP \leq 45°$, also $\angle MSM' \leq 90°$. Hieraus folgt $MQ \leq MS = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = M'Q$, dann gilt:

$$V_2 = a \cdot s \cdot x \tag{2}$$

Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

$$x = \frac{ah}{s} \tag{3}$$

Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

$$V_2 = a^2 h = V_1$$

d. h., die Behältervolumina sind für $h \geq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

2. Fall: Es sei $h < \frac{a}{2}$.
Die Schnittfigur ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck. Wie im Fall 1 fällen wir von M' der Lot $M'Q$ auf die Verbindungsstrecke der Punkt M und S.
Wegen $\angle MSM' > 90°$ ist $s_1 = MQYMS = s$. Für der Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = M'Q$):

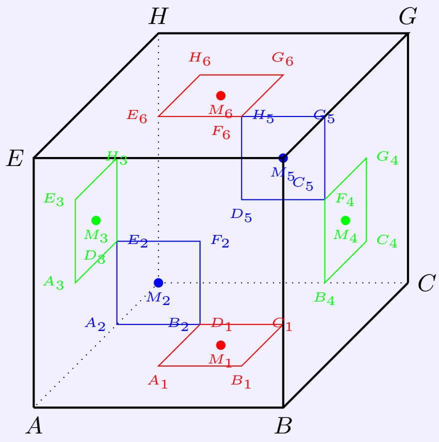
$$V_2 = as_1x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{ah}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s}$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$, gilt also $V_2 > V1$.
Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Aufgabe 081046:
Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate

$$A_1B_1C_1D_1, A_2B_2F_2E_2, A_3D_3H_3E_3, B_4C_4G_4F_4, D_5C_5G_5H_5, E_6F_6G_6H_6$$

einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, ..., M_6$ gelegen, und zwar so, dass die drei Geraden $g_{M_1M_6}, g_{M_2M_5}, g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden. Aus W werden die drei Quader

$$A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6, A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5, A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$$

herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Lösung von cyrix:
Jeder der drei herausgeschnittenen Quader hat ein Volumen von $x^2 \cdot a$. Jedoch überschneiden sie sich in einem Würfel der Kantenlänge x (und Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$ und $g_{M_3M_4}$), sodass dieser Teil nur von einem Quader herausgeschnitten wird, die beiden übrigen ihn aber nicht erneut entfernen.
Also hat der Restkörper ein Volumen von $a^3 - 3ax^2 + 2x^3$. Wenn dies gleich dem halben Volumen des Ausgangswürfels entsprechen soll, muss

$$\frac{1}{2}a^3 = a^3 - 3ax^2 + 2x^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 4x^3 - 6ax^2 + a^3 = 0$$

gelten. Offenbar erfüllt $x = \frac{a}{2}$ diese Gleichung, da

$$4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 6 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^3 = \left(\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1\right) \cdot a^3 = 0$$

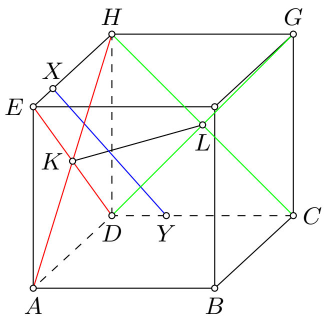
ist. Also kann man $4x^3 - 6ax^2 + a^3$ darstellen als $4x^3 - 6ax^2 + a^3 = (2x - a) \cdot (2x^2 - 2ax - a^2)$. Wäre $x \neq \frac{a}{2}$, so müsste der zweite Faktor $2x^2 - 2ax - a^2$ also Null ergeben. Die Lösungen für die sich so ergebende Gleichung in x lauten

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Dabei ist jedoch die eine Lösung $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot a$ negativ (für $a > 0$) und die andere $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot a$ größer als a und somit auch nicht zulässig.
Es verbleibt die einzig mögliche Wahl für x im Intervall $[0, a]$ mit $x = \frac{1}{2}a$ als einzige Lösung.

Aufgabe 091043:
A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abbildung gewählt seien.
K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $DY = EX$ ist.
Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Vektorielle Lösung:
Wir legen den Würfel in ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $D = (0,0,0)^T$, $A = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)^T$, $H = (0,0,1)^T$.
Dann haben wir $K = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $L = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ und $X = (1,0,1) - r \cdot (1,0,0)^T$, $Y = r \cdot (0,1,0)^T$, $0 \leq r \leq 1$, wobei die beiden Faktoren der Richtungsvektoren wegen $|DY| = |EX|$ identisch sind.
Die Strecke $|KL|$ ist gegeben durch

$$|KL| = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-s) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq s \leq 1 \right\} .$$

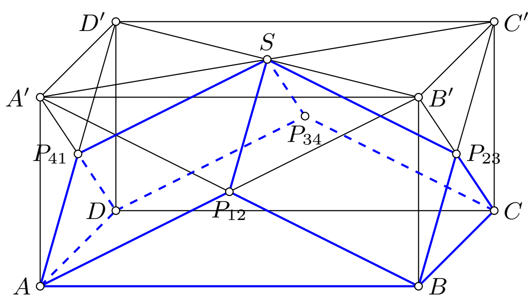
Für den Mittelpunkt M der Strecke $|XY|$ gilt

$$M = \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1-r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-r) \\ \frac{1}{2}(1-(1-r)) \\ \frac{1}{2}(1-r) + \frac{1}{2}(1-(1-r)) \end{pmatrix} ,$$

welcher mit $s = r - 1$ auf der Strecke $|KL|$ liegt.

Aufgabe 101042:
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und den Kantenlängen $AB = a, AD = b, AA' = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten. Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.
a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\alpha = 60°, q = 1$ dar.
Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.
b) Man berechne $V_R : V_Q$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man bezeichne die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge.

E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $B'D'$ bzw $A'C'$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam.

E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $ABB'A'$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen AB' bzw. $A'B$. Der Schnittpunkte P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade SP_{12} die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

Wegen der Konvexität der Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam.
Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade AP_{12} Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt BP_{12} in der Schnittgeraden von E_2 und

$ABB'A'$.

Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, dass die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, dass die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte des Restkörpers erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenflächen bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte hinzu.
Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $f + f - k = 2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q der Quaders in Beziehung gesetzt werden:

Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z. B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt.

Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.

Aufgabe 111046:
Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$. Man beweise, dass dann gilt

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1$$

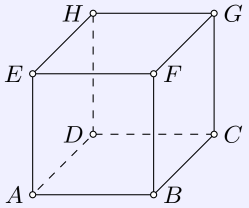
Lösung von cyrix:
Es sei L_D der Höhenfußpunkt von D auf die Tetraederfläche $\triangle ABC$ sowie L_{SD} analog der von S auf die gleiche Fläche. Dann sind nach Konstruktion die Geraden DL_D und SL_{SD} parallel, sodass nach Strahlensatz $\frac{|SL_{SD}|}{|DL_D|} = \frac{|SD'|}{|DD'|}$ gilt.
Da diese Strecken die Höhen der Tetraeder $ABCS$ bzw. $ABCD$ über der gleichen Grundfläche $\triangle ABC$ sind, stehen ihre Volumina V_D bzw. V im gleichen Verhältnis, also $V_D = \frac{|SD'|}{|DD'|} \cdot V$.
Auf analoge Weise berechnen sich die Volumina V_A, V_B und V_C der Tetraeder $SBCD$, $SACD$ bzw. $SABD$ zu $V_A = \frac{|SA'|}{|AA'|} \cdot V$, $V_B = \frac{|SB'|}{|BB'|} \cdot V$ und $V_C = \frac{|SC'|}{|CC'|} \cdot V$.

Die vier Tetraeder $SABC$, $SABD$, $SACD$ und $SBCD$ zerlegen den Tetraeder $ABCD$ vollständig in vier Teilkörper, sodass sich ihre Volumina zum Volumen des Gesamt-Tetraeder aufaddieren. Es gilt also

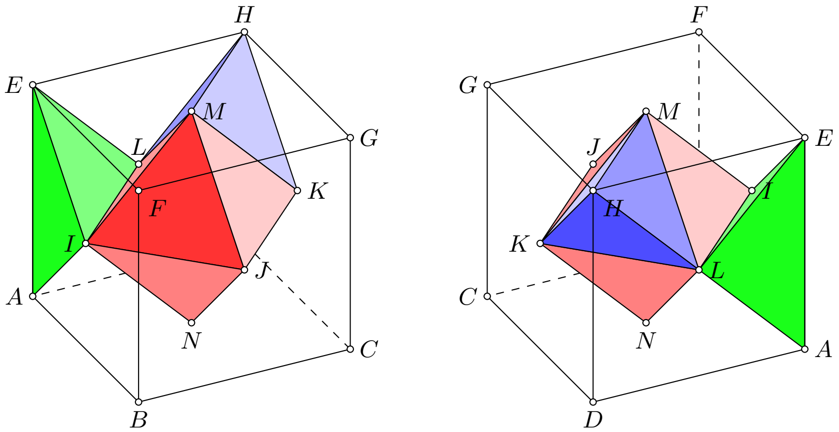
$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = \left(\frac{|SA'|}{|AA'|} + \frac{|SB'|}{|BB\prime|} + \frac{|SC'|}{|CC'|} + \frac{|SD'|}{|DD'|} \right) \cdot V$$

was wegen $V \neq 0$ direkt das Gewünschte zeigt, $\square$.

Aufgabe 121042:
Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.
a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!



Lösung von MontyPythagoras:
Der Würfel wird zerlegt in drei Arten von Körpern, siehe nachfolgendes Bild:



1. Ein regelmäßiges Oktaeder im Zentrum des Würfels (rot).
Die Eckpunkte des Oktaeders liegen jeweils in der Mitte der äußeren Würfelflächen, die Kantenlänge des Oktaeders ist eine halbe Würfelflächendiagonale. Die quadratische Grundfläche eines halben Oktaeders (Pyramidengrundfläche) ist dann genau eine halbe Würfelfläche, die Höhe einer Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass sich als Volumen des Oktaeders ergibt:

$$V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3$$

2. Auf jeder Oktaederfläche sitzt ein regelmäßiges Tetraeder (blau), dessen Spitze der Eckpunkt eines Würfels ist. Es gibt daher acht dieses Tetraeder. Er besitzt die gleiche Kantenlänge wie der Oktaeder, also eine halbe Würfelflächendiagonale $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$.
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders wird als bekannt vorausgesetzt und wird hier nicht hergeleitet. Das Volumen dieser Tetraeder ist dann

$$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{24}a^3$$

3. Die Würfelkanten bilden mit zwei Tetraederflächen und jeweils einer Viertel-Würfelfläche eine schiefe, wenngleich symmetrische Pyramide (grün). Die Grundfläche (z. B. ELA) ist $\frac{1}{4}a^2$, die Höhe der Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass das Volumen der Pyramide

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{24}a^3$$

beträgt. Das Volumen der Pyramide entspricht also der des Tetraeders. Da eine solche Pyramide an jeder Würfelkante liegt, gibt es derer zwölf.

Der Würfel wird also in 21 Teile geteilt, 1 Oktaeder, 8 Tetraeder und 12 schiefe Pyramiden. Kontrolle:

$$V_{ges} = V_O + 8V_T + 12V_P = \frac{1}{6}a^3 + \frac{8}{24}a^3 + \frac{12}{24}a^3 = a^3$$

Aufgabe 131046:
Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AC = AD$ liegt A auf der mittelsenkrechten Ebene ε von CD. Ebenso liegt B auf ε.
Daher ist ε diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $SA = SB = SC = SD$, dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S, diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungsebenen von je einer Tetraederkante und S überein.

Jeder der an S angrenzenden Seitenflächen des Tetraeders $SBCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen. Entsprechende gilt für die Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Tetraeder $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

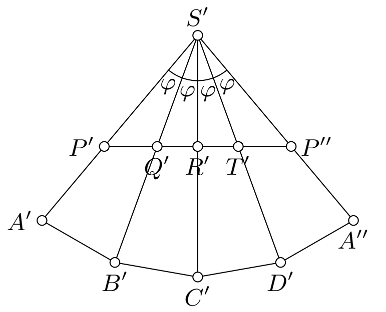
Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittkanten Anlass, die (außer durch S) durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen durch innere Punkte des Dreiecks ABC gehen, also diejenigen, die durch D, einer der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen.
Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen.
Demnach wird das Tetraeder $ABCS$ in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Tetraeder.
Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K = \frac{1}{24}V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders $ABCD$ ist. Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also

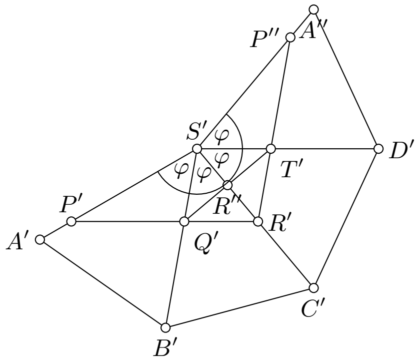
$$V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2}$$

Aufgabe 141043A:
Es sei $ABCDS$ eine geraden vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen ρ ($0° < \rho < 90°$), für die folgendes gilt:
Hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe ρ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzügen $PQRTP$ ein kürzester.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$0° < \varphi < 45°$



$45° < \varphi < 90°$

Wir denken uns den Pyramidenmantel längs der Kanten SA aufgeschnitten und in eine Ebene so „abgewickelt", dass eine Figur wie in der Abbildung entsteht, also ein Sechseck $S'A'B'C'D'A''$, bei dem

$$\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB \quad ; \quad \triangle S'B'C' \cong \triangle SBC \quad ; \quad \triangle S'C'D' \cong \triangle SCD \quad ; \quad \triangle S'D'A'' \cong \triangle SDA$$

und für den bei S' gelegenen Innenwinkel $\angle A'S'A''$ des Sechsecks $\angle A'S'A'' = 4\varphi$ gilt. Dabei gilt ferner:

(1) Jeder der betrachteten geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$ geht dabei in einen gleichlangen nicht geschlossenen Streckenzug $P'Q'R'T'P''$ über, wobei P', Q', R', T', P'' jeweils innere Punkte von SA', SB', SC', SD', SA'' sind und $S'P' = S'P''$ gilt.
Umgekehrt entspricht jedem der in (1) genannten Streckenzüge $P'Q'R'T'P''$ ein gleichlanger Streckenzug $PQRTP$ auf dem Pyramidenmantel.

Damit ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, alle φ mit $0° < \varphi < 90°$ zu ermitteln, für die unter alle bei (1) genannten Streckenzügen ein kürzester existiert.
Wir untersuchen dazu zwei Fälle:

1) $0° < 4\varphi < 180°$, d. h. das Sechseck $S'A'B'C'D'A''$ ist konvex.
2) $180° < 4\varphi < 360°$, d. h. das Sechseck S' eine einspringende Ecke oder ist zu einem Fünfeck ausgeartet.

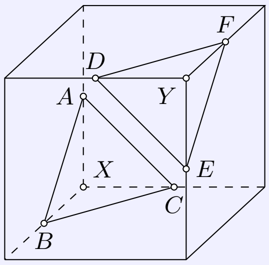
Fall 1: Wegen der Konvexität des Sechsecks schneidet die Strecke $P'P''$ jede der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$ in genau einem inneren Punkt, die in dieser Reihenfolge mit Q', R', T' bezeichnet seien.

Beweis: Da der Innenwinkel des Sechsecks bei S' die Größe 4φ hat, liegen P' und P'' auf verschiedenen Seiten jeder der Geraden durch S' und B', durch S' und C', sowie durch S' und D'. Folglich schneidet $P'P''$ jede dieser Geraden, und zwar im Innern des Sechsecks, also im Innern der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$, da das Sechseck konvex ist.

Daher ist $P'Q'R'T'P''$ in diesem Falle einer der Streckenzüge (1) und hat die Länge $P'P''$, ist also der kürzeste.

Fall 2: In diesem Fall enthält entweder $P'P''$ den Punkt S' (wenn $4varphi = 180°$) oder $P'P''$ enthält keinen Punkt einer der Strecken $S'B', S'C', S'D'$.
Ist daher $P'Q'R'T'P''$ einer der zulässigen Streckenzüge (1), so liegen bei wenigstens einem der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ nicht alle drei angegebenen Punkte auf derselben Geraden.
Ersetzt man daher einen solchen Streckenzug durch die Verbindungsstrecke seiner Endpunkte, so hat diese eine kleinere Länge als der Streckenzug und liegt wegen $2\varphi < 180°$ innerhalb des Sechsecks und bildet mit den restlichen beiden Strecken von $P'Q'R'T'P''$ zusammen einen anderen zulässigen Streckenzug (1) von kleinerer Länge.
Daher gibt es im Fall 2 keinen kürzesten unter den Streckenzügen (1).
Die gesuchte Menge der Winkelgrößen φ ist die Menge aller φ mit $0° < \varphi < 45^\varphi$.

Aufgabe 141046:

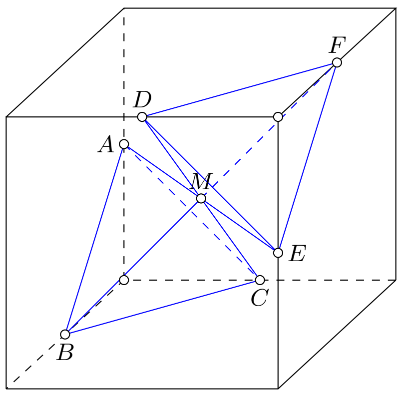


Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y.
Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, die Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, dass A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.

a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, dass folgendes gilt!
Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (das ist ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.
b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Angenommen, eine Zuordnung zwischen A, B, C und D, E, F habe die geforderte Eigenschaft. Wir bezeichnen dabei jetzt mit A', B', C' den A, B und C zugeordneten Punkt.
Da AB Kanten sein soll, muss AB mindestens zwei Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gegen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der mithin auch AB und $A'B$ liegen.

Wir beachten jetzt, dass EF und AB in einer gemeinsamen Ebene ε liegen. Der Mittelpunkt des Würfels liegt nämlich aus Symmetriegründen sowohl auf AE als auch auf BF, so dass AE und BF in einer gemeinsamen Ebene ε liegen.
Die Ebene ε enthält D nicht; weil die Ebene durch D, E, F nicht A, B, C enthält. Daher kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es muss also $A'B' = EF$, d. h. entweder $A' = E$ und $B' = F$ oder $A' = F$ und $B' = E$, und aus Symmetriegründen $B'C' = FD$ und $C'A' = DE$ sein. Daraus folgt, dass $A' = E$, $B' = F$, $C' = D$ sein muss.



II. Umgekehrt hat in der Tat diese Zuordnung die geforderte Eigenschaft, dass die Strecken AE, BF, CD, AB, BC, CA, DE, EF, FD die sämtlichen Kanten einer aus Polyedern zusammensetzbaren Figur sind.

Der Mittelpunkt von AE ist aus Symmetriegründen zugleich der von BF, der von CD sowie der der Würfels. Daher besteht die gesuchte Figur aus den beiden Tetraedern $ABCM$ und $DEFM$.

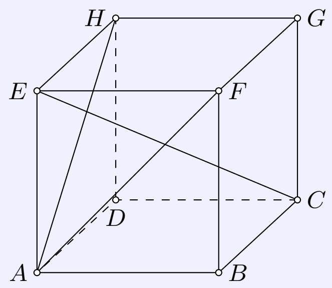
b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Wegen $AE = BF = CD = a\sqrt{2}$ haben auch AM, BM, CM, DM, EM, FM die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Daher sind die beiden Tetraeder regelmäßig, zueinander kongruent und haben nach einer bekannten Formel das Volumen

$$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$$

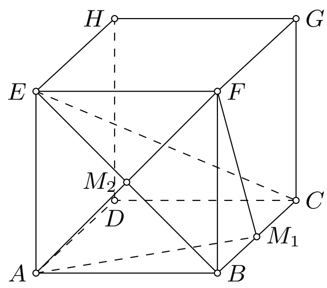
Die gesamte Figur hat das Volumen $\frac{a^3}{12}$.

Aufgabe 151041:

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, dass sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.
Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke BC und M_2 des des Quadrates $ABFE$. Nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes ist dann $M_1M_2 \parallel CE$. Die zu CE parallele Ebene durch A und F geht durch M_2 und enthält somit die zu CE parallele Gerade durch M_2. Also geht sie durch M_1.



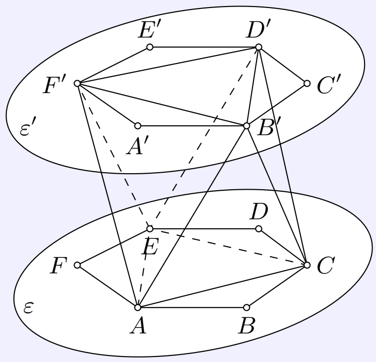
Der Teilkörper, den sie vom Würfel $ABCDEFGH$ abschneidet, ist folglich das Tetraeder $ABFM_1$. Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM_1 als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt, dass sein Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

beträgt.
Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

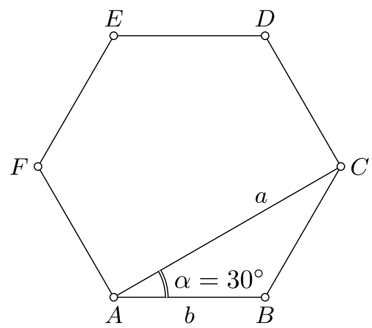
Wegen $3V_T = \frac{1}{4}a^3$ beträgt infolgedessen das Volumen des Restkörpers $V_R = \frac{3}{4}a^3$.

Aufgabe 161046:



In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel.
In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, dass die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen.
Gegeben seien die Seitenlänge $a = AC$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε'.
Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn man den Körper durch sechs Pyramiden ergänzt, ergibt sich ein einfaches Prisma mit sechseckiger Grundfläche. Die zu ergänzenden Pyramiden sind zum Beispiel $ABCB'$, $AEFF'$ oder $A'B'F'A$. Alle diese Pyramiden sind gleich groß. Das Sechseck stellt sich wie folgt dar:



Es gilt $a = \sqrt{3}\, b$. Die Fläche des Sechsecks ist dann:

$$A_S = ab + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}ab$$

Die Grundfläche einer der sechs zu ergänzenden Pyramiden ist:

$$A_P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$$

Das Volumen einer Pyramide ist:

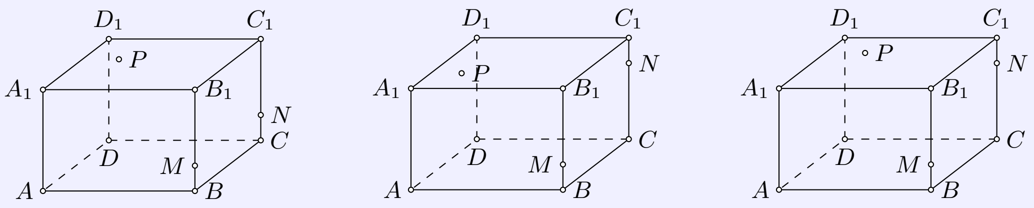
$$V_P = \frac{1}{3}hA_P = \frac{1}{12}abh$$

Dann ergibt sich für das Volumen des gesuchten Körpers:

$$V_K = hA_S - 6V_P = \frac{3}{2}abh - 6 \cdot \frac{1}{12}abh = abh$$

$$V_K = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a^2 h$$

Aufgabe 171043B:

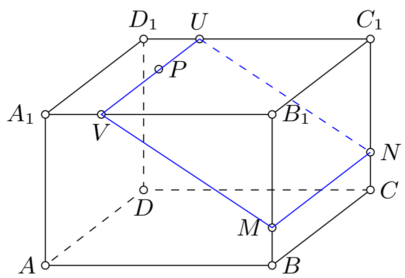


$CN = BM$ $\qquad$ $CN > BM$ $\qquad$ $CN > BM$

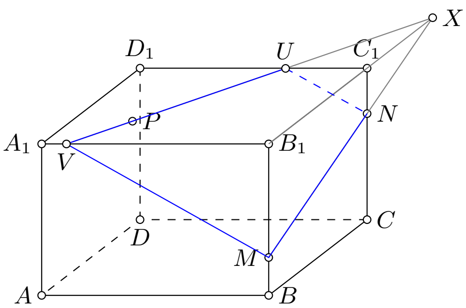
Auf den Abbildungen ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt.
Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechteckfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.
Konstruieren Sie (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den 1. Fall ist insbesondere folgender grundlegender Satz der räumlichen Geometrie von Bedeutung:

(i) Liegen eine Gerade g und ein Punkt P in einer Ebene ε und ist h die Parallele zu g durch P, so liegt auch h in ε.
Aus der Voraussetzung $CN = BM$ folgt zunächst $MN \parallel B_1C$. Die Parallele h zu B_1C_1 durch P liegt nach (i) in der Ebene $\varepsilon(A_1,B_1,C_1D_1)$ und auch in der Ebene $\varepsilon(M,N,P)$ wegen $MN \parallel h$; sie ist also die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

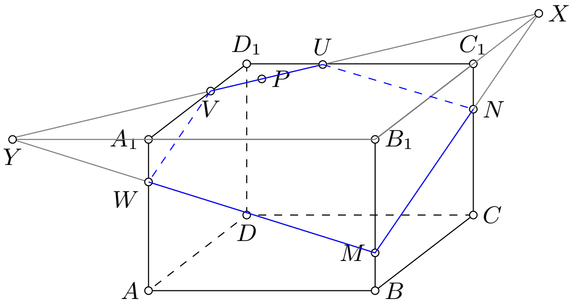


Da bei der Parallelprojektion — die ja der Kavalierperspektive zugrunde liegt — parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man in der vorliegenden Kavaliersperspektive selbst die Schnittfigur $MNUV$ (siehe obere Abbildung), indem man die Parallele zu MN durch P mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt bringt.



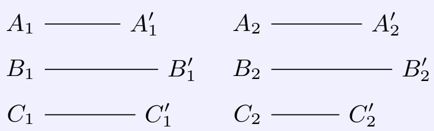
Im 2. Fall ist $MN \nparallel B_1C_1$ wegen $CN > BM$; da diese Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt X. Die Gerade PX ist nun offensichtlich der Schnitt der Ebene $\varepsilon(A_1, B_1, C_1, D_1)$ mit $\varepsilon(M, N, P)$.

Diese Schnittgerade kann in der Darstellung selbst konstruiert werden (siehe oberes Bild); sie schneidet auf Grund der Lage von P die Kanten C_1D_1 und A_1B_1 in Punkten U und V Damit ist $MNUV$ die gesuchte Schnittfigur.



Im 3. Fall kann zunächst in gleicher Weise verfahren werden. Die Gerade PX schneidet zwar auch hier die Kante C_1D_1 in einem Punkt U, aber nur die Verlängerung der Strecke A_1B_1 über A_1 hinaus in einem Punkt Y (siehe 3.Abbildung); folglich schneidet PX die Kante A_1D_1 in einem Punkt V.
Die Gerade YM schneidet schließlich die Kante AA_1 in einem Punkt W. Damit ist jetzt das Fünfeck $MNUVW$ die gesuchte Schnittfigur.

Aufgabe 181042:
In einer Ebene ε seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte 6 Strecken A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' gegeben:



Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = A_1A_1'$, $b_1 = B_1B_1'$, $c_1 = C_1C_1'$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = A_2A_2'$, $b_2 = B_2B_2'$, $c_2 = C_2C_2'$ hat.
a) Beschreiben Sie eine in ε durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (1)!
Falls $P_1Q_1 < P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 < V_2$;
falls $P_1Q_1 = P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 = V_2$;
falls $P_1Q_1 > P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 > V_2$ (1)
Dass P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (!) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.
b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A_1', ..., C_2C_2'$ auf der Abbildung auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wir gehen von den Volumen $V_1 = a_1b_1c_1$ und $V_2 = a_2b_2c_2$ der Quader aus. Offenbar ist $V_1 \lesseqqgtr V_2$; gleichwertig mit

$$\frac{a_1b_1}{c_2} \lesseqqgtr \frac{a_2b_2}{c_1} \qquad (1)$$

Damit ist aber bereits eine einfache Lösung vorgezeichnet. Die Terme auf den beiden Seiten von (1) sind nämlich Strecken. Sie können anhand der Strahlensätze konstruiert werden.
Wir wählen also als Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 der Länge $\frac{a_1b_1}{c_2}$ bzw. $\frac{a_2b_2}{c_1}$.
Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen zwei von einem Punkt S_1 ausgehende Strahlen s_1, t_1, die nicht auf einer Geraden liegen. Entsprechend wählen wir zwei Strahlen s_2, t_2 mit gemeinsamem Scheitelpunkt S_2.
Durch Streckenabtragung konstruieren wir die Punkte $P_1 \in s_1$, $R_1, T_1 \in t_1$ und $P_2 \in s_2$ sowie $R_2, T_2 \in t_2$, für die $S_1P_1 = a_1$, $S_1R_1 = c_2$, $R_1T_1 = b_1$ und R_1 zwischen S_1, T_1 liegt sowie $S_2P_2 = a_2$, $S_2R_2 = c_1$, $R_2T_2 = b_2$ und R_2 zwischen S_2, T_2 liegt.

Die Parallele zu P_1R_1 durch T_1 schneidet s_1 in Q_1, und die Parallele zu P_2R_2 durch T_2 schneidet s_2 in Q_2.

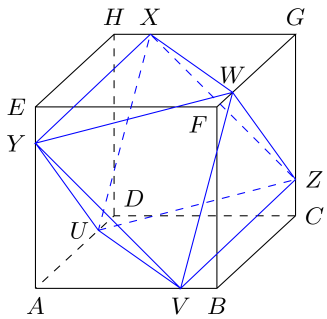
Beweis: Nach dem Strahlensatz ist $P_1Q_1 : a_1 = b_1 : c_2$ und $P_2Q_2 : a_2 = b_2 : c_1$.
Nun gilt $P_1Q_1 \lesseqgtr P_2Q_2$ genau dann, wenn (1) und damit $V_1 \lesseqgtr V_2$.
Damit ist gezeigt, dass die oben konstruierten Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (*) der Aufgabenstellung besitzen.

b) Die in a) beschriebene Konstruktion führt auf $P_1Q_1 < P_2Q_2$ und damit auf $V_1 < V_2$.

Aufgabe 181046:
Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.
Beweisen Sie, dass auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, wir haben ein regelmäßiges Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften konstruiert.
Wir betrachten die Umkugel K dieses Oktaeders. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ist infolge des Strahlensatzes mit dem Würfelmittelpunkt identisch. Daraus folgt, dass der Würfelmittelpunkt M mit dem Kugelmittelpunkt notwendig zusammenfällt.

Die Kugel um M mit dem Radius r mit $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ schneidet die Kanten des Würfels u.a. in den Punkten U, V, W, X, Y, Z (siehe Bild).



$UVWX$ ist ein Parallelogramm, da UV und XW zueinander parallel und gleichlang sind. Da $UVWX$ symmetrisch zur Ebene durch A, C, G liegt, gilt $UW = VX$ damit ist $UVWX$ ein Rechteck. Sei nun $x = AV = AU = GW = GX$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$VW = \sqrt{a^2 + 2(a-x)^2}$$

Aus der Bedingung $VW = UV = \sqrt{2}x$ ergibt sich $x = \frac{3}{4}a$. $UVWX$ ist dann nach Konstruktion ein Quadrat.
Wir wählen nun noch Y auf AE und Z auf GC mit $AY = GZ = \frac{3}{4}a$. Es folgt analog $YU = YV = YW = ZU = ZV = ZW = ZX$.
Daher sind die Dreiecke UVY, VWY, WXY, XUY, UVZ, VWZ, WXZ, XUZ gleichseitig. Der eingeschlossene Körper ist somit aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen zusammensetzbar, d. h., er ist ein regelmäßiger Oktaeder.
Wir berechnen V. Das Oktaeder setzt sich aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a\sqrt{2}\frac{1}{2}$ und der zugehörigen Höhe $\frac{a}{2}$ zusammen. Damit ist

$$V = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}a^3$$

Analog berechnen wir das Volumen des konstruierten Oktaeders. Es ist

$$\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 \frac{3}{4}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{16}a^3 > \frac{1}{2}a^3 = 3V$$

Damit erfüllt das konstruierte Oktaeder alle gestellten Bedingungen.

Aufgabe 191046:
Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, dass jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt.
Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder.
Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vier Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge $2r$.
Es sei Z der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d. h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge

$$h = \frac{2}{3}r\sqrt{6} \qquad (1)$$

Z teilt jedes Lot im Verhältnis $3 : l$. (2)
Den Satz (2) kann man z. B. über Volumenbetrachtungen (bei Zerlegung des Tetraeders in vier kongruente Tetraeder) oder durch Anwendung des Strahlensatzes beweisen. (Man darf (2) auch als bekannt voraussetzen.)
Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders $ABCD$ sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $M_1M_2M_3M_4$ im Abstand r. Damit ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z. Es kommt nun darauf an, die Höhe h' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h zu ermitteln, weil damit dann auch das Volumen V' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h und nach (1) in Abhängigkeit von r zu berechnen ist.

Wir geben dafür zwei Möglichkeiten an:
1. $ABCD$ geht durch zentrale Streckung mit dem Streckenzentrum Z aus $M_1M_2M_3M_4$ hervor. Das Streckungsverhältnis K ist wegen (2) (mit (D)

$$K = \left(\frac{1}{6}r\sqrt{6} + r\right) : \frac{1}{6}r\sqrt{6} = 1 + \sqrt{6} \qquad (3)$$

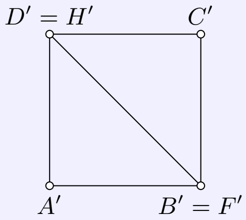
2. Wir verlängern die Kanten M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 bis zu den Durchstoßpunkten A', B', C' mit der Ebene durch A, B, C.
Das Tetraeder $M_4A'B'C'$ ist wegen der Parallelität der Ebenen durch A, B, C bzw. M_1, M_2, M_3 wieder regulär und hat die Höhe $h+r$. Wiederholen wir diesen Prozess noch dreimal (bzgl. der anderen Flächen), so erhalten wir schließlich das Tetraeder $ABCD$ mit

$$h' = h + 4r \qquad (4)$$

Mit (3) bzw. (4) berechnet man das Volumen

$$V' = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3$$

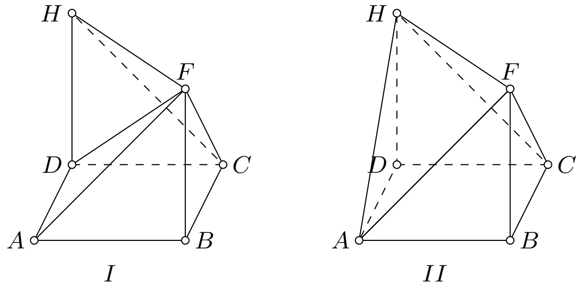
Aufgabe 201044:



Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriss haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.)
Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrissebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.
Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrissebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.

Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$) dar!
Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Körper I (siehe Bild) erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da er genau sechs Ecken (A, B, C, D, F, H) und den angegebenen Grundriss besitzt. Letzteres folgt aus der Lage von AF über AB, von HF und DF über BD, von FC über BC, von HC über CD sowie die Lage von F über B und der von H über D.
Damit wird jede Kante entweder auf einer der Seiten des Quadrates $ABCD$, aus dessen Diagonale BD oder - bei senkrechter Lage zur Grundrissebene - als Punkt auf A, B, C oder D im Grundriss abgebildet.
Nach Konstruktion liegt F (bzw. H) im Abstand a über B (bzw. D). Der Körper I ist auch - wie gefordert - ebenflächig begrenzt, da alle Seitenflächen Dreiecke sind und die Fläche $ABCD$ nach Voraussetzung eben ist.
Analoge Betrachtungen zeigen, dass auch der Körper II den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es ist noch zu zeigen, dass die Körper I und II unterschiedliches Volumen haben, und es sind diese Volumina zu berechnen.
Ergänzt man den Körper I durch die Pyramide $AFDH$, so erhält man offensichtlich den Körper II, damit unterscheiden sich die Volumina V_I und V_{II} der Körper um das Volumen V_p der Pyramide $AFDH$ und sind damit auch unterschiedlich.

$$V_{II} = V_I + V_P \tag{1}$$

Den Körper I kann man sich aus den drei Pyramiden $ABDF$, $DBCF$ und $DCHF$ zusammengesetzt denken. Ergänzt man den Körper I zu einem Würfel mit der Kantenlänge a, so erkennt man, dass für jede dieser Pyramiden als Grundfläche eine halbe Seitenfläche des Würfels und als Höhe die Kantenlänge a gewählt werden kann. Das gilt auch für die Pyramide $AFDH$ (mit der Grundfläche ADH). Damit gilt

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{6}a^3 \tag{2}$$

Daher folgt

$$V_I = \frac{1}{2}a^3 \qquad \text{und} \qquad V_{II} = \frac{2}{3}a^3$$

Aufgabe 211043B:
Beweisen Sie, dass man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, ..., P_{12}$ so verteilen kann, dass für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!
Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

Lösung von MontyPythagoras:
Wir bezeichnen die Kugel der Anschaulichkeit halber wie einen Globus. Der Äquator liege in der xy-Ebene, der Nordpol auf der positiven z-Achse. Wir haben insgesamt 12 Punkte zu platzieren, davon platzieren wir sechs auf der nördlichen Hemisphäre und sechs auf der südlichen.
Der Punkt P_1 liege am Nordpol. Die 5 weiteren Punkten in der nördlichen Hemisphäre werden so angeordnet, dass sie alle auf derselben Höhe („Breitengrad") liegen und ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Der Punkt P_2 liege auf dem Nullmeridian, also in der xz-Ebene. Die Höhe werde so bestimmt, dass der geradlinige Abstand zum Nordpol P_1 genau gleich r ist. Dann gilt

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Da der Punkt P_2 mit dem Nordpol P_1 und dem Urspung der Kugel ein gleichseitiges Dreieck bildet, kann man unmittelbar schlussfolgern, dass die Koordinaten des Punktes P_2 lauten:

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass die Seiten dieses regelmäßigen Fünfecks länger sind als r. Die Koordinaten von P_3 lauten

$$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos 72^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin 72^\circ \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Die Strecke P_2P_3 hat demnach eine Länge von

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r(1-\cos 72^\circ)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin 72^\circ\right)^2$$

$$d^2 = r^2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cdot 2\cos 72^\circ + \frac{3}{4}\right)$$

$$d^2 = \frac{3}{2}(1-\cos 72^\circ)r^2$$

$$d = r\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos 72^\circ)} \approx 1{,}018r > r$$

Alle Punkte werden jetzt an der Äquatorebene gespiegelt. Die gespiegelten Punkte erhalten ein Apostroph. Dementsprechend ist P_1' der Südpol, und jeder andere gespiegelte Punkt hat die gleichen x- und y-Koordinaten, aber die negative z-Koordinate, also

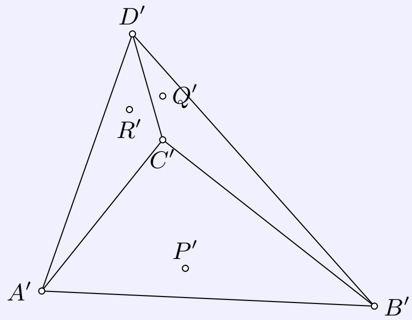
$$\vec{p_2'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass die Punkte P_2 bis P_6, die das nördliche Fünfeck bilden, jeweils einen Abstand r zu ihrem gespiegelten Pendant haben, weil der eine bei der Höhe $\frac{1}{2}r$ und der andere bei der Höhe $-\frac{1}{2}r$ liegt. Wir haben daher 12 Punkte so angeordnet, dass sie, wenn man einem Meridian vom Nordpol zum Südpol folgt, jeweils einen Abstand von r haben. Der Abstand vom Punkt P_2 zu dem Nachbarn seines Pendants, also zu P_3' ist dementsprechend deutlich größer als r. Man kann nun die Abstände vergrößern, indem man die Punkte auf der südlichen Halbkugel um einen bestimmten Winkel um die z-Achse dreht.

Dadurch wächst der Abstand von P_2 zu seinem ehemals gespiegelten Gegenüber P_2'. Diesen Abstandszuwachs kann man nutzen, um den Abstand der Fünfeckpunkte zum Pol zu vergrößern, womit der Beweis erbracht wäre, dass man einen Abstand zwischen zwei Punkten größer als r einstellen kann.

Aufgabe 211046:
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Abbildung). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211046

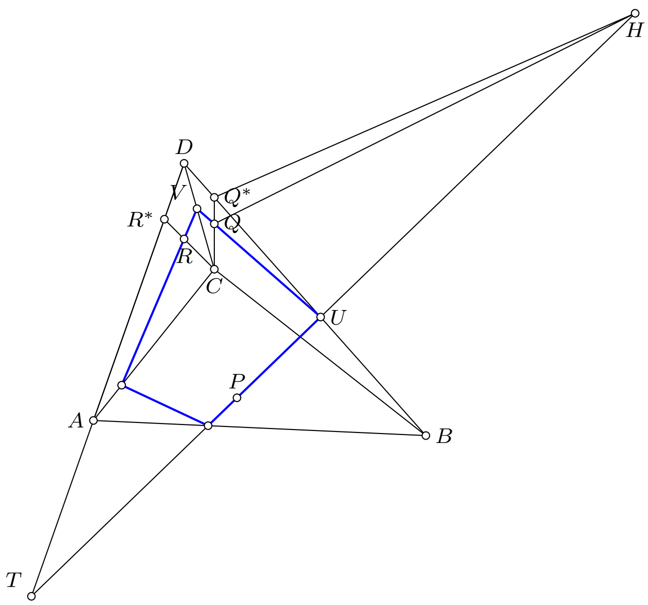


Lösung von moudi:
Da sich die Lösung in der projektiven Geometrie abspielt, muss die Lösung durch reine Inzidenz (nur Schnittpunkte von Geraden) konstruierbar sein.

Meine Konstruktion findet im Raum statt, deshalb spreche ich von den Punkten A, B, C etc. und nicht von den Projektionen A', B', C' etc.

Es ist klar, dass es genügt, z. B. die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR zu konstruieren. (Ich gehe im Folgenden vom Fall aus, dass die Schnittfigur ein Dreieck ist, die anderen Fälle gehen analog.) Dann schneidet man s mit AD und erhält T, man schneidet s mit BD und erhält U. Man schneidet UQ mit CD und erhält V. Das Dreieck TUV, wobei R auf TV liegen muss(!), ist dann die Schnittfigur.

Wie erhält man nun die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR?
Da P in der Ebene ABD liegt, liegt P schon auf s. Ich konstruiere jetzt einen weiteren Punkt von s. Dazu projiziere ich die Punkte Q und R von C aus auf die Seiten BD resp. AD und erhalte die Punkte Q^* und R^*. Der Schnittpunkt H der Geraden QR und Q^*R^* ist dann ein weiterer Schnittpunkt der Ebenen ABD und PQR.



Konkrete Konstruktionsanleitung für Dreieck TUV:

1. Schneide CQ mit BD: Q^*
2. Schneide CR mit AD: R^*
3. Schneide QR mit Q^*R^*: H $\quad (s = HP)$
4. Schneide HP mit AD: T
5. Schneide HP mit BD: U
6. Schneide QU mit CD: V

Aufgabe 221043B:
Fünf Kugeln $K_1, \dots, K_5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte $M_1, \dots, M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden.
Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1, \dots, K_5$.
Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1, \dots, M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Lösung von cyrix:
Es sei $M_1M_2M_3M_4M_5$ das in der Aufgabenstellung beschriebene regelmäßige Fünfeck. Dann hat dieses die Kantenlänge $2r$. Sei M dessen Mittelpunkt. Dann ist das Dreieck $\triangle M_1M_2M$ gleichschenklig mit Basislänge $|M_1M_2| = 2r$ und $\angle M_1MM_2 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ sowie $|M_1M| = |M_2M| =: R$.

Nach dem Kosinussatz ist dann

$$4r^2 = |M_1M_2| = |M_1M|^2 + |M_2M|^2 - 2|M_1M||M_2M| \cos\angle M_1MM_2 =$$

$$= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 72^\circ = 2R^2 \cdot (1 - \cos 72^\circ)$$

Es ist $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, also $4r^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} R^2$ bzw.

$$R^2 = \frac{8}{5-\sqrt{5}} r^2 = \frac{8(5+\sqrt{5})}{25-5} r^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{5} r^2$$

Aus Symmetriegründen ist M auch der Fußpunkt des Lots von M_6 auf die Ebene durch die Mittelpunkte der anderen Kugeln. Also ist das Dreieck $\triangle M_1MM_6$ rechtwinklig in M und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$|MM_6|^2 = |M_1M_6|^2 - |M_1M|^2 = 4r^2 - \frac{10+2\sqrt{5}}{5} r^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5} r^2$$

also wegen $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$ und damit $10 - 2\sqrt{5} > 10 - 5 = 5$ ist damit

$$|MM_6|^2 < \frac{5}{5}r^2 = r^2$$

also $|MM_6| < r$, sodass der Mittelpunkt M des Fünfecks echt innerhalb der Kugel K_6 liegt, diese also die Ebene durch $M_1, \ldots, M_5$ schneidet.

Aufgabe 221046:
Beweisen Sie, dass sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!

Lösung von OlgaBarati:
Die Eckpunkte der Grundfläche des würfelförmigen Hohlkörpers mit der Kantenlänge a seien mit A,B,C,D und die Diagonale $\overline{BD}$ zwischen den Punkten B und D mit d_w bezeichnet.

$$d_w = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Die Eckpunkte der Grundfläche Tetraeders mit der Kantenlänge a seien mit X,Y,Z und die den Eckpunkten gegenüberliegenden Flächen seien mit x,y,z bezeichnet.

Die Anordnung des ersten Tetraeders erfolgt auf seiner Grundfläche im Hohlkörper auf dessen Grundfläche stehend und zwar mit der Höhenlinie seiner Grundfläche (des gleichseitigen Dreiecks) gleich der Diagonalen d_w mit seinem Eckpunkt X auf dem Eckpunkt des Hohlkörpers D. Die Anordnung des zweiten Tetraeders erfolgt um 180° gedreht auf seiner Spitze stehend, so dass die Flächen x_1,x_2 der beiden Tetraeder plan aufeinander liegen.

Die Bestimmung der Länge der diagonalen $\overline{X_1X_2} = 2d_t - \frac{1}{3}d_t$ dieser beiden so (für die Berechnung außerhalb des Hohlkörpers) angeordneten Tetraeder ergibt sich aus den beiden Höhen der Grundflächen abzüglich deren Überlappung.

$$\frac{5}{3}d_t = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}a = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{3a}}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{3} \cdot a$$

Mit

$$d_w^2 = 2a^2 < (\frac{5}{3}d_t)^2 = \frac{75}{36}a^2 = (\frac{5}{3}d_t)^2$$
$$d_w < \frac{5}{3}d_t$$

folgt dass der zweite Tetraeder nicht so in den Hohlkörper passt, dass seine Spitze dessen Boden trifft. Es ist daher zu überprüfen ob der hochstehende Teil des zweiten Tetraeders auch innerhalb des Hohlkörpers liegt.

Mit $d_t = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ergibt sich für die Höhe des Tetraeders $h_t^2 = a^2 - (\frac{2}{3}d_t^2)$ und nach Umformung

$$h_t = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

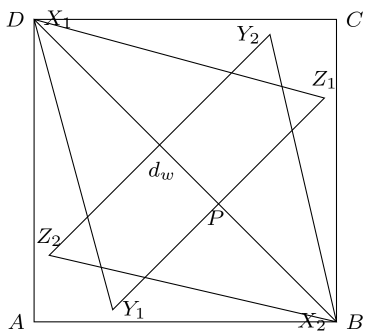
Die Höhe des würfelförmigen Hohlkörpers ist mit $h_w = a$ gegeben.

Die Bestimmung der Höhendifferenz Δh erfolgt mit der Gleichung:

$$\Delta h = (\frac{5}{3}d_t - d_w)\frac{3h_t}{d_t} \quad ; \quad \Delta h \leq h_w - h_t$$
$$\frac{5d_t h_t}{d_t} - \frac{3h_t d_w}{d_t} \leq a(1-\frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad 5h_t - \frac{3h_t d_w}{d_t} \leq a(1-\frac{\sqrt{6}}{3})$$
$$\frac{5}{3}\sqrt{6}a - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \leq a(1-\frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad \frac{5}{3}\sqrt{6}a - 4a \leq a(1-\frac{\sqrt{6}}{3})$$
$$a(\frac{5}{3}\sqrt{6} - 4 \leq a(1-\frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad a(5\sqrt{6}-12) \leq a(3-\sqrt{6})$$
$$6\sqrt{6}a \leq 15a \quad ; \quad a \leq \frac{15}{6\sqrt{6}}a \approx 1{,}02a$$

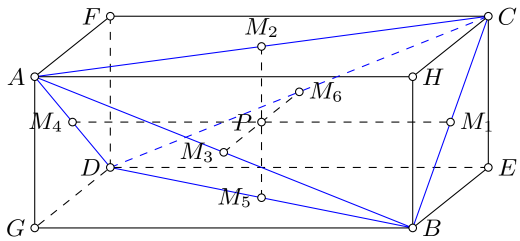
Die Höhe der beiden so angeordneten Tetraeder passt in den Hohlkörper.
Da ein Kreisbogen mit dem Radius a abgetragen an Punkt D vollständig im Inneren des Hohlkörpers liegt, liegen auch die Punkte $Y1$,$Y2$ und $Z1$,$Z2$ im Inneren des Hohlkörpers.

Es ist somit möglich zwei Tetraeder mit der Kantenlänge a in einem würfelförmigen Hohlkörper mit der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterzubringen. □



Aufgabe 231043A:
Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $BC = AD$, $CA = BD$ und $AB = CD$ vorausgesetzt.
Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und dass dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d. h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die durch BC gehende und gleichzeitig zu AC parallele Ebene sowie die durch AC gehende und gleichzeitig zu BC parallele Ebene bilden ein Paar zueinander paralleler Ebenen.
Dasselbe gilt für die durch CA gehende und zu VD parallele Ebene sowie die durch BD gehende und zu CA parallele Ebene.
Ein drittes Paar zueinander paralleler Ebenen bilden die durch AB gehende zu CD parallele Ebene und die durch CD gehende zu AB parallele Ebene.

Diese drei Ebenenpaare ergeben ein Parallelepiped [2] $AGBHFDEC$. Darin ist $HE = AD$, wegen der Voraussetzung $BC = AD$ also $HE = BC$ und somit das Parallelogramm $BECH$ ein Rechteck.

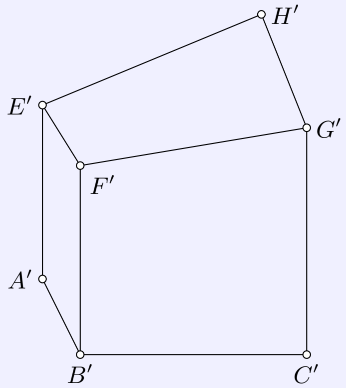
[2] Zu den Kanten dieser Körper kann auch gelangen, indem man die durch $A, B, C, D, M_1, ..., M_6$ gehenden, zu M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 parallelen Geraden verwendet.

Entsprechend weist man die anderen Seitenflächen des Parallelepipeds als Rechteck nach; diese ist somit ein Quader.

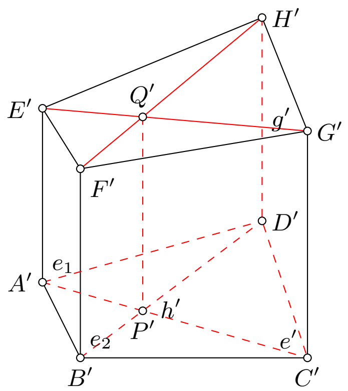
Die Punkte $M_1, ..., M_6$ sind die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) seiner Seitenflächen. Legt man die drei jeweils zu einem Paar gegenüberliegender Seitenflächen paralleler Ebenen durch M_2, M_3, M_5, M_6 bzw. durch M_3, M_1, M_6, M_4 bzw. durch M_1, M_2, M_4, M_5, so folgt einerseits:
Die Gerade durch M_1, M_4, die Gerade durch M_2, M_5 und die Gerade durch M_3, M_6 sind jeweils Schnittgerade von zwei dieser drei Ebenen. Der Schnittpunkt P der drei Ebenen liegt somit auf allen drei Strecken M_1M_4, M_2M_5 und M_3M_6.

Andererseits zerlegen die drei Ebenen den Quader $AGBHFDEC$ in acht kongruente Teilquader. Der Punkt P ist gemeinsame Ecke dieser Teilquader; in jedem Teilquader führt die von P ausgehende Körperdiagonale zu einem der Punkte A, G, B, H, F, D, E, C.
Daher hat P von diesen acht Punkten gleiche Abstände, insbesondere gilt: $PA = PB = PC = PD$. Folglich ist P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$.

Aufgabe 231044:
Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und dass die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.
Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Die Strecke $E'G'$ schneidet die Strecke $F'H'$ in einem Punkt Q'.

(2) Die Parallele durch Q' zu $A'E'$ schneidet die Strecke $A'C'$ in einem Punkt P'.

(3) Die Parallele durch H' zu $A'E'$ schneidet die Gerade durch B', P' in einem Punkt D'.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt D' das Bild von D ist:
Da $EFGH$ ein ebenes Viereck ist, schneiden sich EG und F in einem Punkt Q, und der in (1) konstruierte Punkt Q' ist sein Bild.

Die Ebene e_1 durch A, E, G und die Ebene e_2 durch B, F, H gehen beide durch Q, und sie sind beide parallel zu AE. Also ist die durch Q parallel zu AE gehende Gerade die Schnittgerade von e_1 und e_2. Sie schneidet somit die in e_1 liegende Strecke AC in einem Punkt P, und der in (2) konstruierte Punkt P' ist sein Bild.
Zugleich ist P als ein Punkt auf der Schnittgeraden h von e_2 mit der Ebene e durch A, B, C nachgewiesen. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden h ist B. Da aber auch D in e und (wegen $DH \parallel BF$) in e_2 liegt, ist D ebenfalls ein Punkt von h, d. h., die Gerade h durch B und P geht auch durch D; ihr Bild ist die in (3) konstruierte Gerade durch B', P'.
Andererseits liegt D auch auf der Parallelen g durch H zu AE, und deren Bild ist die in (3) konstruierte Parallele zu H' zu $A'E'$. Daher ist der in (3) konstruierte Punkt D' das Bild von D.

Aufgabe 241043B:
Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann nicht entartet, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

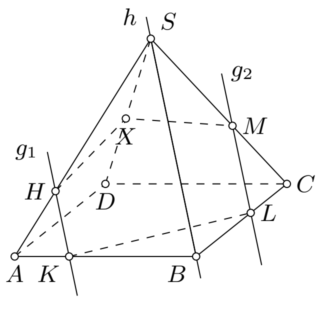
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Durchschnitt von P mit E sei das nicht entartete Parallelogramm $HKLM$; für die Gerade g_1 durch H und K sowie die Gerade g_2 durch M und LL gilt hiernach $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$.

Die Grundfläche der Pyramide sei $ABCD$, die Spitze S; die Oberfläche P besteht somit aus der Quadratfläche $ABCD$ und den Dreiecksflächen ABS, BCS, CDS, ADS. Keine zwei der Ebenen, in denen diese fünf Flächen liegen, sind zueinander parallel, also auch nicht diejenigen beiden Ebenen E_1, E_2, die g_1 bzw. g_2 als Durchschnitt mit E haben. Somit ist der Durchschnitt von E_1 mit E_2 eine Gerade h.

Für diese gilt $g_1 \parallel h$ und $g_1 \neq h$; denn andernfalls hätten g_1 und h, da sie in E_1 liegen, einen gemeinsamen Punkt; dieser würde (da er auf h läge) auch zu E_2 und folglich (da er in E läge) zu g_2 gehören, was wegen $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$ nicht möglich ist.
Ebenso beweist man $g_2 \parallel h$ und $g_2 \neq h$.

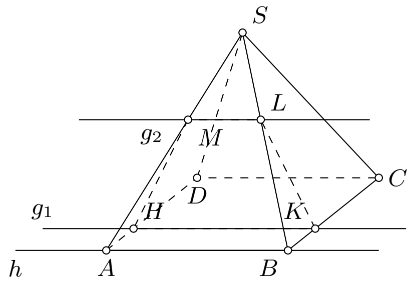
Für E_1 und E_2 liegt nun einer der folgenden Fälle (1), (2), (3), vor:

(1) In E_1, E_2 liegen zwei benachbarte Dreiecksflächen aus P, o. B. d. A.; In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt BCS.
Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch B und S, und es läge (o. B. d. A.) H zwischen A und S, K zwischen A und B, L zwischen B und C, M zwischen C und S. (siehe Abbildung)



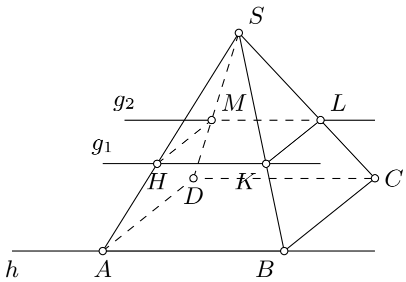
Da g_1 zwar durch H, aber wegen $g_1 \parallel h$, $g_1 \neq h$ nicht durch S ginge, also von der Geraden durch A und S verschieden wäre, schnitte E die Ebene durch A, D, S in einer Geraden, die mit der Dreiecksfläche ADS eine Strecke HX gemeinsam hätte.
Die Schnittfigur von E mit der Pyramidenoberfläche P hätte somit außer H, K, L, M einen weiteren Eckpunkt X, wäre also nicht, wie angenommen, ein nicht entartetes Parallelogramm. Daher ist Fall (1) nicht möglich.

(2) In E_1, E_2 liegen eine Dreiecksfläche und die Quadratfläche aus P, o. B. d. A.: In E_1 liegt $ABCD$, in E_2 liegt ABS.
Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch A und B, und es läge (o. B. d. A.) H zwischen A und D, K zwischen B und C, L zwischen BB und S, M zwischen A und S (siehe Abbildung).



Wegen $HA \perp AB$, $KB \perp AB$ und $HK \parallel AB$ wäre $ABKH$ ein Rechteck. Ferner wäre $MS < AS$, also wegen $ML \parallel AB$ nach dem Strahlensatz $ML < AB = HK$; somit wäre $HKLM$ kein Parallelogramm. Also ist auch der Fall (2) nicht möglich.

(3) In E_1, E_2 liegen zwei nicht benachbarte Dreiecksflächen aus P, o. B. d. A.: In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt CDS.



In diesem Fall ist h die zu AB und DC parallele Gerade durch S, und es liegt (o. B. d. A.) H in A oder zwischen A und S, K in B oder zwischen B und S, L in C oder zwischen C und S, M in D oder zwischen D und S (siehe Abbildung).

Aus $HK \parallel AB$, $HK = ML$, $ML \parallel DC$ und dem Strahlensatz folgt

$$HS : AS = HK : AB = ML : DC = MS : DS$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $HM \parallel AD$. Also ist die Ebene E parallel zur Ebene durch A, B, C, D und schneidet P folglich in einer zu $ABCD$ ähnlichen Figur, d. h. in einem Quadrat.

Aufgabe 251045:
Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, dass als Schnittfigur a) ein regelmäßiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Viereck, c) ein regelmäßiges Fünfeck entsteht!

Lösung von cyrix:
a) Schneidet man etwa durch die drei mit einem Eckpunkt des Würfels durch Kanten verbundenen Eckpunkte, so erhält man als Schnittfigur ein gleichseitiges (und damit regelmäßiges) Dreieck. Dies ist also möglich.

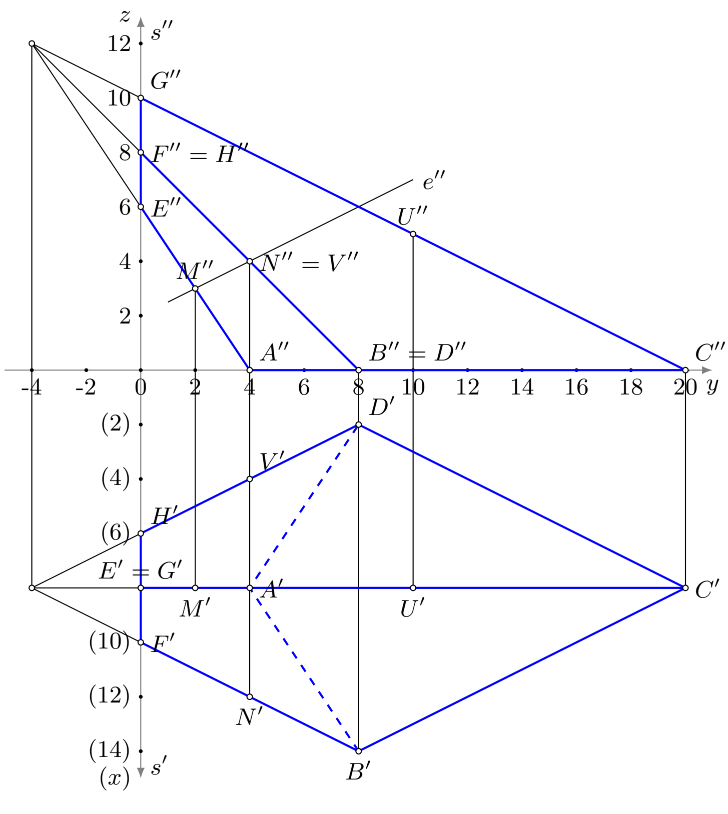
b) Schneidet man etwa den Würfel parallel zu einer seiner Seitenflächen, erhält man ein Quadrat, also regelmäßiges Viereck, als Schnittfläche. Dies ist also möglich.

c) Werden durch die Schnittebene nur die drei Seitenflächen des Würfels, die einen Eckpunkt gemeinsam haben, in ihrem Inneren geschnitten, entstehen nur drei Schnittkanten mit dem Würfel, also als Schnittfigur nur ein Dreieck. Demzufolge muss ein ebener Schnitt, der ein Fünfeck erzeugt, mindestens ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels in deren Inneren schneiden. Die auf diesen entstehenden Schnittkanten sind aber – wie die Seitenflächen – zueinander parallel, was im regelmäßigen Fünfeck nicht vorkommen kann.

Also ist es nicht möglich, ein regelmäßiges Fünfeck als Schnittfigur eines ebenen Schnitts durch einen Würfel zu erhalten.

Aufgabe 261046:
Beweisen Sie, dass es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, einen Körper K zu beschreiben und aus seiner Beschreibung herzuleiten, dass er die Eigenschaften (1) bis (4) hat.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende: K sei der Restkörper, der verbleibt, wenn man einer Pyramide $P = ABCDS$ vermittels einer geeigneten Schnittebene s eine Pyramide $EFGHS$ abschneidet.
Dabei seien P und s gegegen durch ihre Darstellung in Zweitafelprojektion (siehe Abbildung), wobei die Aufrissebene und die (noch nicht in die Zeichenebene heruntergeklappte) Grundrissebene zugleich die y,z-Ebene bzw. die x,y-Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems seien.



In diesem Koordinatensystem sei

$$A = (8,4,0), \quad B = (14,8,0), \quad C = (8,20,0), \quad D(2,8,0), \quad S = (8,-4,12)$$

Als Schnittebene s sei die $x-z$-Ebene gewählt. Für ihre Schnittpunkte E, F, G, H mit den Kanten AS, BS, CS, DS erhält man

$$E = (8,0,6), \quad F = (10,0,8), \quad G = (8,0,10), \quad H = (6,0,8)$$

Für den so definierten Restkörper K gilt in der Tat, wie gefordert:

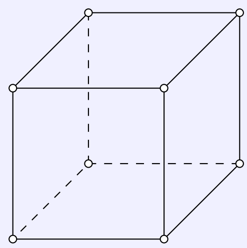
(1) Die Oberfläche von K besteht genau aus den sechs ebenen Vierecken $ABCD$ (Grundfläche P in der $x-y$-Ebene), $EFGH$ (Schnittfläche von P mit der Ebene s), $ABFE$, $BDGF$, $CDHG$, $DAEH$ (Teilflächen der Seitenflächen ABS, BCS, CDS, DAS von P).
(2) Die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ haben die Seitenkanten AB, BC, CD, DA bzw. EF, FG, GH, HE, also keine gemeinsame Seitenkante.
(3) Außer diesen hat der Körper K noch genau die 4 Seitenkanten AE, BF, CG, DH.
(4) Deren Mittelpunkte sind

$$M = (8{,}2{,}3), \quad N = (12{,}4{,}4), \quad U = (8{,}10{,}5), \quad V = (4{,}4{,}4)$$

Dass diese vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, kann man z. B. folgendermaßen nachweisen:

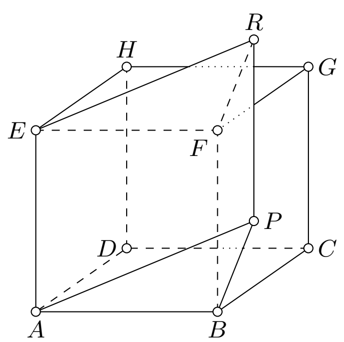
Wegen der Gleichheit der Aufrisse $N'' = V''$ steht die durch M,N,V gelegte Ebene e senkrecht zur Aufrissebene; bei senkrechter Projektion von e auf die Aufrissebene ergibt sich also eine Gerade e''; sie geht durch M'', N''. Diese Gerade e'' in der $y-z$-Ebene hat den Anstieg $(4-4):(4-2) = \frac{1}{2}$. Dagegen hat die Gerade durch N'', U'' den Anstieg $(5-4):(10-4) = \frac{1}{6}$.
Also liegt U'' nicht auf e''; folglich kann auch U nicht auf e liegen.

Aufgabe 271043A:



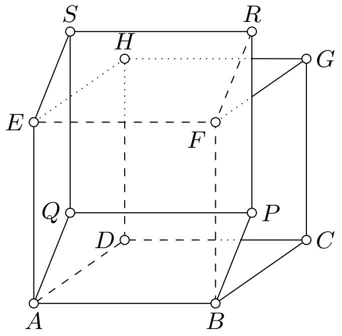
Die Abbildung wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.
Zeigen Sie, dass dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!
Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen!
Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der die Abbildung entstehen würde!
Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zehneckiger Körper:

Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, R$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PA, FR, RE, AE, BF, CG, DH, PR$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABP, EFR, BCGF, CDHG, DAEH, APRE, PBFR$



Zwölfeckiger Körper:

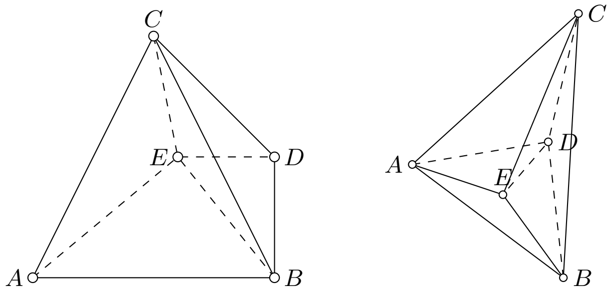
Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PQ, QA, FR, RS, SE, AE, BF, CG, DH, PR, QS$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABPQ, EFRS, BCGF, CDHG, DAEH, AQSE, QPRS, PBFR$

Für beide Körper: Gerade in Projektionsrichtung z. B. die Gerade durch P und B.

Aufgabe 291043B:
Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E.
Sie seien so im Raum gelegen, dass keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und dass keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleich lang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Fallunterscheidung: a) Es existieren vier Punkte - o. B. d. A. die Punkte A, B, C, D - so, dass der fünfte Punkt E im Inneren des Tetraeders $ABCD$ liegt (linkes Bild).

b) Negation von Fall a) (rechtes Bild)

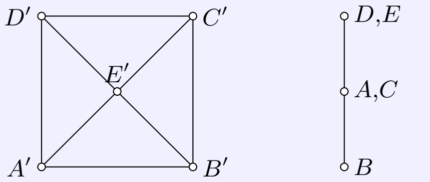


Im Fall a) lassen sich entweder ein oder zwei der Tetraeder mit dem Eckpunkt E aus dem Tetraeder $ABCD$ „herausschneiden“. Damit entstehen in diesem Fall 10 Polyeder.

Im Fall b) muss eine der Verbindungsstrecken (im Bild ist es DE) im Inneren des Körpers verlaufen, wenn $ABCDE$ konvex ist (konvexe Hülle). Schneidet man nun aus diesem konvexen Körper die drei Tetraeder heraus, die eine zu DE windschief verlaufende Kanten haben, so erhält man drei weitere Körper. Damit existieren in diesem Fall 4 Polyeder.

In jedem Fall sind alle diese Polyeder voneinander verschieden, da sie nicht in allen Verbindungsstrecken übereinstimmen können und laut Voraussetzung alle Verbindungsstrecken voneinander verschieden sind.

Aufgabe 291046:

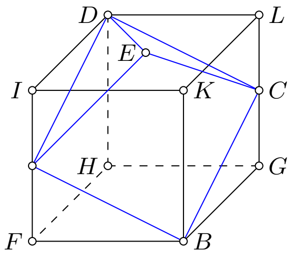


Projektion Höhenmaßstab

Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt des Quadrates.
Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft! Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst beweist man die Einzigkeit des Polyeders.

Wegen der laut Aufgabenstellung gleichen Höhe von A und C über der Ebene durch F, B, G, H schneidet die Strecke AC die Strecke BD (= Raumdiagonale im Würfel). Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene und E kann nur die Spitze einer„zugehörigen“ vierseitigen Pyramide sein.

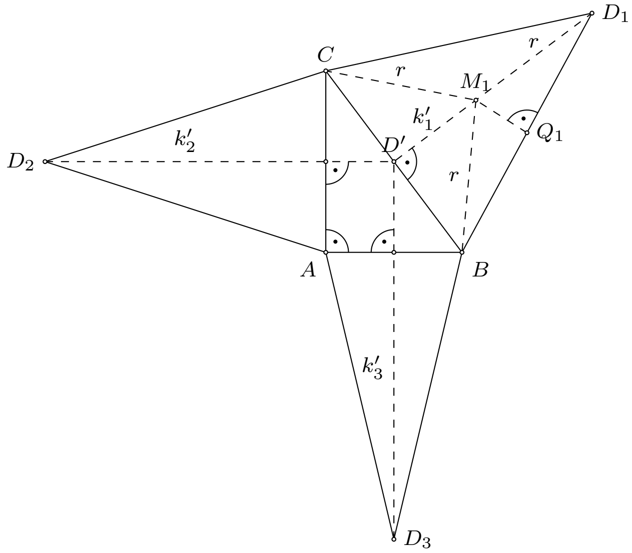


Für die Volumenberechnung bieten sich verschiedene Wege an:

1. Subtraktion der Volumina von Teilkörpern, die die Pyramide zu einem Würfel ergänzen, vom Würfelvolumen.
2. Direkte Berechnung des Volumens
2.1. mit $ABCD$ als Grundfläche
2.2. bei Zusammensetzung der vierseitigen Pyramide aus den beiden Tetraedern $ACED$ und $ACEB$. Der Weg 2.2 ist der eleganteste.
In jedem Fall ergibt sich $V = \frac{1}{6}a^3$.

Aufgabe 301043B:
Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass zwischen ihnen folgende Abstände auftreten:
$AB = 7{,}2$ cm; $AC = 9{,}6$ cm; $AD = 15{,}6$ cm; $BC = 12{,}0$ cm; $BD = 15{,}6$ cm; $CD = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AB = 3 \cdot 2{,}4$ cm; $AC = 4 \cdot 2{,}4$ cm; $BC = 5 \cdot 2{,}4$ cm und $3^2 + 4^2 = 5^2$, also $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ist das Dreieck ABC nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bei A rechtwinklig.
Dreht man, ausgehend von einem Netz $ABCD_1D_2D_3$ des Tetraeders $ABCD$ (siehe Abbildung), die Dreiecke BCD_1, CAD_2 und ABD_3 um BC, CA bzw. AB so, dass D_1, D_2 und D_3 im Punkt D zusammentreffen, so beschreiben dabei D_1, D_2 und D_3 Kreisbögen k_1, k_2, k_3.



Deren Bilder k_1', k_2', k_3' bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene sind geradlinig und senkrecht auf BC, CA bzw. AB.

Da die Dreiecke BCD_1, CAD_2, ABD_3 gleichschenklig sind, gehen k_1', k_2' , k_3' durch die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB; d. h. sie sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Ihr Schnittpunkt, das Bild D' von D bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene, ist also der Umkreismittelpunkt von ABC, und dieser ist nach der Umkehrung des Thalessatzes der Mittelpunkt der Hypotenuse BC.

Da der Mittelpunkt M derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche A, B, C und D liegen, insbesondere gleiche Abstände r zu A, B und C hat, liegt er auf der Senkrechten, die im Umkreismittelpunkt von ABC auf der Zeichenebene errichtet wird; d. h. M liegt auf $D'D$ und ist folglich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD (die Abbildung zeigt seine Lage M_1, wenn das Dreieck BCD in die Lage BCD_1 gedreht ist).

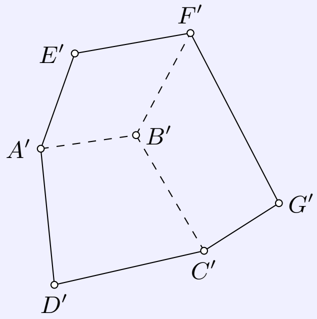
Damit und mit $BD' = \frac{1}{2}BC = 6$ cm folgt nach dem Satz des Pythagoras einerseits $D'D^2 = BD^2 - BD'^2$, wegen $BD = 13 \cdot 1{,}2$ cm ; $BD' = 5 \cdot 1{,}2$ cm und $13^2 - 5^2 = 12^2$ also $DD' = 12 \cdot 1{,}2$ cm; andererseits folgt

$$(D'D - r)^{+} BD'^2 = r^2, \qquad (D'D)^2 + BD'^2 - 2r \cdot D'D = 0$$

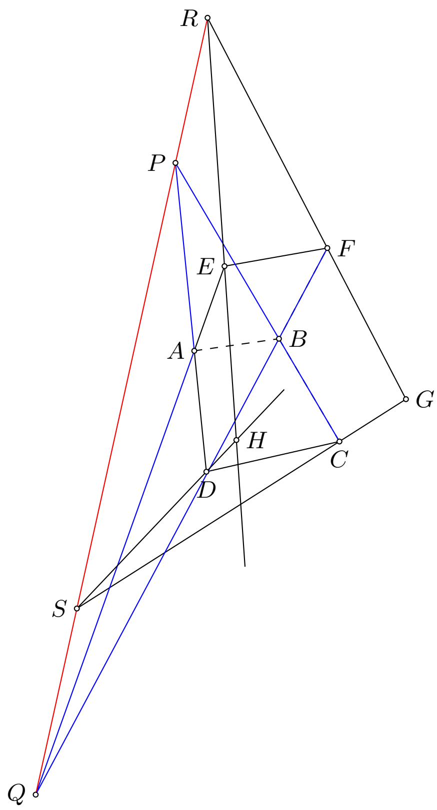
$$r = \frac{BD^2}{2D'D} = \frac{(13 \cdot 1{,}2)^2}{24 \cdot 1{,}2} cm = 8{,}45 cm$$

(Die Formel $r \cdot D'D = \frac{BD}{2} \cdot BD$ folgt auch, weil M auf der Mittelsenkrechen QM von BD liegt und daher $\triangle MQD \cong \triangle BD'D$ ist.)

Aufgabe 301046:
Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder $A', B', C', D', E', F', G'$ von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion.
Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$.
Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)



Lösung von MontyPythagoras:



Zunächst die Konstruktionsanweisungen:

1. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AD und BC, der Schnittpunkt ist P.
2. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AE und BF, der Schnittpunkt ist Q.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.

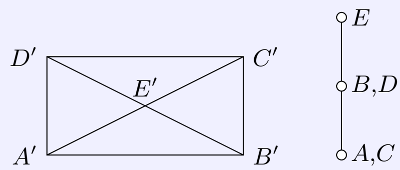
4. Zeichne eine Gerade entlang FG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei R.
5. Zeichne eine Gerade durch R und E.
6. Zeichne eine Gerade entlang CG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei S.
7. Zeichne eine Gerade durch S und D.
8. Der Schnittpunkt der Geraden RE und SD ist der gesuchte Punkt H.

Begründung:
Die „rote“ Gerade PQ ist die Schnittlinie der Ebenen $ADHE$ und $BCGF$. Wir kennen zwar H nicht, aber die Ebene $ADHE$, in der H liegt, ist allein durch die Kanten AE und AD definiert.

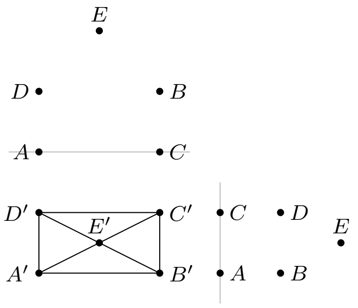
Da AD und BC in einer Ebene liegen, müssen sie die Schnittlinie im selben Punkt, nämlich P schneiden. Sinngemäß das gleiche gilt für AE und BF, die sich in Q schneiden. Die Schnittlinie muss daher durch die Punkte P und Q verlaufen.

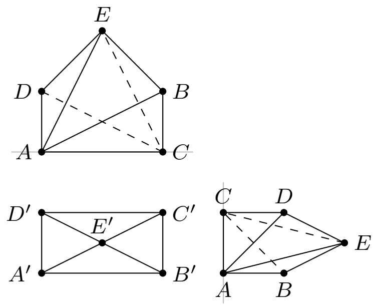
Nachdem wir so die Schnittlinie konstruiert haben, können wir auf H Rückschlüsse ziehen. Da EH und FG ebenfalls in einer Ebene liegen sollen, müssen ihre Geraden sich auf der Schnittlinie im selben Punkt schneiden. Daher schneiden wir die Gerade FG mit der Schnittlinie und erhalten den Schnittpunkt R. R muss der Schnittpunkt von EH mit der Schnittlinie PQ sein, daher legen wir eine Gerade durch R und E. Das gleiche noch einmal mit CG und DH, die sich ebenfalls auf der Schnittlinie PQ schneiden müssen.

Aufgabe 311043B:
In der Abbildung ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt.
$A'B'C'D'$ ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D.
Vorausgesetzt wird ferner, dass der Körper genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!
b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriss aus der Abbildung übernommen ist!
Im Auf- und Seitenriss sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren Linien verdeckt); die Abbildung selbst ist in dieser Weise aufzufassen.



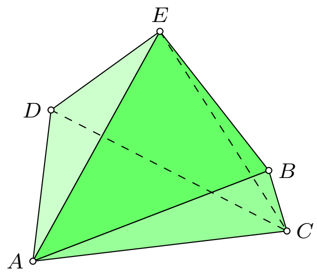
Lösung von MontyPythagoras:
Da von oben nach unten erst E, dann B und D und am Ende A und C kommen, muss E durch gerade Kanten mit den anderen vier Punkten verbunden sein. Aber auch die vier Punkte A, B, C, D sind umlaufend untereinander verbunden, wie das Rechteck $A'B'C'D'$ beweist. Wir zeichnen in den drei Ansichten die Punkte und danach die Strecken wie angegeben ein.

Schritt 1: 

Schritt 2: 

In der Vorderansicht sind CD und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie hinter den ABC, ABE und AED verlaufen müssen. In der Seitenansicht rechts sind CB und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie von links gesehen hinter den Flächen ABE, ADE und ADC angeordnet sind.

Aus den genannten Gründen ist die Zuordnung aller Kanten und damit auch die Form des Körpers insgesamt eindeutig. Der Körper sieht dann wie folgt aus:



Aufgabe 341045:
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d. h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Lösung von cyrix:
In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3}r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

III Kombinatorik

III.I Mengen; Logik

I Runde 1

Aufgabe 041012:
In der Aufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & & V & A & T & E & R \\ + & M & U & T & T & E & R \\ \hline & E & L & T & E & R & N \end{array}$$

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Geben Sie sämtliche Lösungen an, und weisen Sie nach, dass es keine weiteren geben kann!

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende Gleichungen (Klammerausdrücke sind optional):

$$R + R = N(+10) \tag{1}$$
$$E + E(+1) = R(+10) \tag{2}$$
$$T + T(+1) = E(+10) \tag{3}$$
$$A + T(+1) = T(+10) \tag{4}$$
$$V + U(+1) = L + 10 \tag{5}$$
$$M + 1 = E \tag{6}$$

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar:
Wenn $R \leq 4$ dann kein Übertrag in (1), d. h. R gerade, und mit $R \neq 0$ (dies gilt, weil sonst in (1) $N = R$ wäre):

$$R = \{2, 4\} \Rightarrow E = \frac{R(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{7a}$$

Wenn $R \geq 5$, dann mit Übertrag in (1), d. h. R ungerade:

$$R = \{5, 7, 9\} \Rightarrow E = \frac{R - 1(+10)}{2} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

wobei $E = 9$ entfällt, da dies nur erreicht wird bei $R = 9$ (7b). Also

$$R \in \{2, 4, 5, 7, 9\} \qquad \text{und} \qquad E \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \tag{7c}$$

Betrachtet man zu den Werten aus (7a) und (7b) nun noch Gleichung (3), so ergibt sich analog:
Wenn $E \leq 4$ dann kein Übertrag in (2), d. h. E gerade mit $E(+10) = 2T$, und mit $E \neq 0$ (siehe (7c)):

$$E = \{2, 4\} \Rightarrow T = \frac{E(+10)}{2} = \{1, 2, 6, 7\} \tag{8a}$$

Wenn $E > 5$ ($E \neq 5, E \neq 9$ siehe (7c)), dann mit Übertrag in (2), d. h. E ungerade:

$$E = 7 \Rightarrow T = \frac{E - 1(+10)}{2} = \{3, 8\} \qquad \text{also} \tag{8b}$$

$$E \in \{2, 4, 7\} \qquad \text{und} \qquad T \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} \tag{8c}$$

Ich betrachte (7c) und (8c): Da R nur 2 werden kann bei $E = 1$ oder $E = 6$ folgt $R \neq 2$. Analog gilt $R \neq 7$, da hierfür $E = 3$ oder $E = 8$ gegeben sein muss, d. h. $R \in \{4, 5, 9\}$ (9).
A ergibt sich mit (3), (4) und (8c) wie folgt: wenn $T < 4$ dann $A = 0$ und wenn $T > 5$ dann $A = 9$ (10).
Weiterhin gilt mit (6): $M \in \{1, 3, 6\}$ (11).
Es gilt also zusammenfassend:

$$R = 4 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{2,7\} \Rightarrow M = \{1,6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3,8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0,9\}\}$$
$$R = 5 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow E = \{2,7\} \Rightarrow M = \{1,6\} \Rightarrow T = \{\{6\}\{3,8\}\} \Rightarrow A = \{\{9\}\{0,9\}\}$$
$$R = 9 \Rightarrow N = 8 \Rightarrow E = \{4\} \Rightarrow M = \{3\} \Rightarrow T = \{2,7\} \Rightarrow A = \{0,9\}$$

Probiert man diese Fälle systematisch mit den verbleibenden freien Größen V,U,L durch, so kommt man auf folgende 8 Lösungen: $VATER + MUTTER = ELTERN$

$$20374 + 693374 = 713748 \quad ; \quad 59624 + 176624 = 236248 \quad ; \quad 79624 + 156624 = 236248$$

$$90374 + 623374 = 713748 \quad ; \quad 49625 + 186625 = 236250 \quad ; \quad 89625 + 146625 = 236250$$

$$50249 + 362249 = 412498 \quad ; \quad 60249 + 352246 = 412498$$

Aufgabe 071014:
Herr X stellt am 30.05.1967 fest, dass er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazu setzt. Außerdem bemerkt er, dass die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist.

Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es bezeichne $ab.cd.efgh$ das Geburtsdatum und ik das Alter von Herrn X. Es seien also
a und b die Ziffern für den Tag, c und d die Ziffern für den Monat, e, f, g und h die Ziffern für das Jahr und i und k die Ziffern für das Alter.

Dann muss gelten:

$e = 1$, und f kann nur 9 oder 8 sein, da die Anzahl der Lebensjahre von Herrn X zweistellig sein muss und er demnach nach 1799 geboren wurde.
$c = 0$, da es nur 12 Monate gibt und die 1 bereits vergeben ist.
$a = 2$, da ein Monat höchstens 31 Tage haben kann, die 0 und die 1 vergeben sind, und somit 30 und 31 auch nicht in Frage kommen.

Fall 1: Sei $f = 9$
Dann muss gelten

A) $10g + h + 10i + k = 66$, falls Herr X nach dem 30.5. Geburtstag hat,
B) $10g + h + 10i + k = 67$ andernfalls.

Aus A) folgt, dass entweder

a) $g + i = 6$ und $h + k = 6$ oder
b) $g + i = 5$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus B) folgt, dass entweder

c) $g + i = 6$ und $h + k = 7$ oder
d) $g + i = 5$ und $h + k = 17$ gilt.

Aus den noch verbliebenen Ziffern ist keins der vier Gleichungspaare realisierbar. Die Annahme $f = 9$ ist falsch.

Fall 2: Sei $f = 8$.

Dann gilt, ähnlich wie oben,

C) $10g + h + 10i + k = 166$ oder

D) $10g + h + 10i + k = 167$.

Aus C) folgt, dass entweder

e) $g + i = 16$ und $h + k = 6$ oder

f) $g + i = 15$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus D) folgt, dass entweder

g) $g + i = 16$ und $h + k = 7$ oder

h) $g + i = 15$ und $h + k = 17$ gilt.

Mit den noch vorhandenen Ziffern ist nur g) realisierbar.Folgende vier Verteilungen sind möglich: $g = 9$ und $i = 7$, $h = 4$ und $k = 3$, $g = 7$ und $i = 9$ und $h = 3$ und $k = 4$.

Das Alter von Herrn X kann damit 73, 74, 93 oder 94 Jahre sein. Von diesen Zahlen ist nur 73 Primzahl. Es ergibt sich damit folgende Verteilung:

$$f = 8, \quad i = 7, \quad k = 3, \quad g = 9 \quad \text{und} \quad h = 4.$$

Für b und d stehen nur noch die Ziffern 5 und 6 zur Verfügung. Aus g) folgt, weil es aus D) hervorgegangen ist, dass Herr X vor dem 30.5. Geburtstag hatte. Damit ist $d = 5$ und $b = 6$.

Herr X wurde am 26.05.1894 geboren und ist 73 Jahre alt.

Aufgabe 081014:

In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & * & * & \cdot & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
\hline
 & * & * & * & 1 & *
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Lösung von Manuela Kugel:

Ansatz:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & b & \cdot & c & d \\
\hline
 & e & f & g & 1 & \\
 & & h & i & j & 1 \\
\hline
 & k & \ell & m & 1 & n
\end{array}$$

Dabei sind $a, \ldots, n$ jeweils Ziffern 0 bis 9, wobei unterschiedliche Variablen denselben Wert haben dürfen. Offensichtlich muss dann $n = 1$ und $g = 0$ gelten, d. h., eine Teilaufgabe lautet $1ab \cdot d = ef01$. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingungen?

Die Ziffern b und d müssen jeweils ungerade sein, weil nur das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade ist. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ≤ 9 endet auf 1 in genau den Fällen: $1 \cdot 1 = 1$, $3 \cdot 7 = 21$, $7 \cdot 3 = 21$, $9 \cdot 9 = 81$.

Nun werden die obigen Fälle diskutiert:

1. $b=1$, $d=1$
   $1a1\cdot 1 = ef01 \Rightarrow e=0, a=0, f=1 \Rightarrow 101\cdot 1 = 0101$
   $101\cdot c = hij1 \Rightarrow c=1, h=0, i=1, j=0 \Rightarrow 101\cdot 1 = 0101$
2. $b=3$, $d=7$
   $1a3\cdot 7 = ef01 \Rightarrow a=4, e=1, f=0 \Rightarrow 141\cdot 7 = 1001$
   $143\cdot c = hij1 \Rightarrow c=7, h=1, i=0, j=0 \Rightarrow 141\cdot 7 = 1001$
3. $b=7$, $d=3$
   $1a7\cdot 3 = ef01 \Rightarrow a=6, e=0, f=5 \Rightarrow 167\cdot 3 = 0501$
   $167\cdot c = hij1 \Rightarrow c=3, h=0, i=5, j=0 \Rightarrow 167\cdot 3 = 0501$
4. $b=9$, $d=9$
   $1a9\cdot 9 = ef01 \Rightarrow a=8, e=1, f=7 \Rightarrow 189\cdot 9 = 1701$
   $189\cdot c = hij1 \Rightarrow c=9, h=1, i=7, j=0 \Rightarrow 189\cdot 9 = 1701$

Damit lauten die 4 Lösungen wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \hline
 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 4 & 3 & \cdot & 7 & 7 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 & 1 & 8 & 7 & 1 & 1
\end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 8 & 9 & \cdot & 9 & 9 \\ \hline
 & 1 & 7 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 7 & 0 & 1 \\ \hline
 & 1 & 8 & 7 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 6 & 7 & \cdot & 3 & 3 \\ \hline
 & 0 & 5 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 5 & 0 & 1 \\ \hline
 & 0 & 5 & 5 & 1 & 1
\end{array}$$

Aufgabe 091011:
Bei einem international besetzten Radrennen ergab sich folgende Rennsituation.

Das Feld der Teilnehmer war in genau drei Gruppen (Spitzengruppe, Hauptfeld, letzte Gruppe) aufgesplittert. Jeder Fahrer fuhr in einer dieser Gruppen. Genau 14 Fahrer waren in der letzten Gruppe, darunter kein DDR-Fahrer. Genau 90 Prozent der übrigen Fahrer bildeten das Hauptfeld. Darin fuhren einige, jedoch nicht alle DDR-Fahrer. Die Spitzengruppe umfasste genau ein Zwölftel des gesamten Teilnehmerfeldes. Von den dort vertretenen Mannschaften waren genau die polnischen am schwächsten und genau die sowjetischen am stärksten vertreten.
a) Wieviel Fahrer nahmen insgesamt teil?
b) Wieviel DDR-Fahrer waren in der Spitzengruppe?
c) Wieviel Mannschaften waren in der Spitzengruppe vertreten?

Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnungen:
x ist die Anzahl aller Fahrer, s die Anzahl der Fahrer in der Spitzengruppe, h die Anzahl der Fahrer des Hauptfeldes und l die Anzahl der Fahrer der letzten Gruppe.
Die Indizes stehen für die entsprechenden Länder: s (sowjetisch), d (deutsch), p (polnisch).

Dann gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{rlrl}
x = s+m+l & (1) & l = 14 & (2) \\
l_d = 0 & (3) & h = 0{,}9\cdot(x-l) & (4) \\
h_d \neq 0 & (5) & s_d \neq 0 & (6) \\
s = \dfrac{1}{12}x & (7) & s_s > s_d > s_p & (8)
\end{array}$$

Aus (1), (2), (4) und (7) folgt dann: $x = \frac{1}{12}x + 0{,}9\cdot(x-14) + 14 \Rightarrow \frac{11}{12}x = 0{,}9x + 1{,}4 \Rightarrow x = 84$. Womit sich direkt $s = 7$ ergibt.

Aus (8) folgt, dass $s_s \geq 3$ und $s_p \geq 1$ (da $s_d \geq 2$). Nun gilt aber schon $s = 7 \geq s_s + s_d + s_p \geq 3+2+1 = 6$. Gäbe es eine vierte Mannschaft im Spitzenfeld, so wäre sie also maximal mit einem Fahrer vertreten, was dem widerspricht, dass die polnische Mannschaft die wenigsten Fahrer (mindestens einen) hat. Also besteht das Spitzenfeld aus Fahrern von genau 3 Ländern. Die Zahl 7 so in 3 Summanden aufzuteilen, dass der kleinste und größte Summand ungleich dem mittleren sind, geht einzig durch die Variante: $7 = 1 + 2 + 4$. Folglich gilt $s_d = 2$, also waren in der Spitzengruppe 2 deutsche Fahrer vertreten.
a) Es nahmen 84 Fahrer am Radrennen teil.
b) Davon waren 2 Fahrer in der Spitzengruppe.
c) In der Spitzengruppe fuhren Fahrer aus drei Mannschaften.

Aufgabe 101011:
Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel.

Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen, und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige, der das letzte Streichholz fortnehmen kann.

Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

Lösung von Kornkreis:
Für eine einfache Vorstellung betrachtet man das umgekehrte Problem, bei dem man mit 0 Streichhölzern anfängt und welche hinzufügt.

Wenn A 139 Streichhölzer vorsetzt, muss B spielen und A hat dann eine Anzahl von 140 bis 149 vor sich, von der er gewinnen kann. Wie kann A sicher 139 vorsetzen?

Indem A vorher 128 vorsetzt; rückwärts also 117, 106, 95, 84, 73, 62, 51, 40, 29, 18, 7; d. h., A spielt also im ersten Zug 7, im zweiten ergänzt er so viel, dass es 18 sind usw.

Aufgabe 111014:
In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcccc} & D & R & E & I \\ + & D & R & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline & N & E & U & N \end{array}$$

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e, aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet. Dann gilt $e,z,h \in \{0,1,2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächstniederen Stelle 29 nicht überschreitet. Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müsste

$$3I = 10e + N \qquad \text{und} \qquad 3D + h = N$$

gelten. Durch Substitution von N erhält man $3I = 10e + h + 3D$, also $3(I - D) = 10e + h$. Daraus folgt wegen $10e + h \geq 0$ zunächst $I \geq D$, wegen $I \neq D$ also

$$I > 0 \qquad \text{und daher} \qquad 1e + h > 0 \tag{1}$$

Ferner folgt $I - D = \frac{10e+h}{3}$ (2).

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage:

$$e = 1 \quad , \quad h = 2 \quad , \quad I - D = 4 \quad (3a) \qquad ; \qquad e = 2 \quad , \quad h = 1 \quad , \quad I - D = 7 \quad (3b)$$

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1{,}2\}$ folgt $3d < 9$, wegen $D > 0$, also $D \in \{1{,}2\}$ (4) und damit wegen (3) $I \in \{5{,}6{,}8{,}9\}$.

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher $I \in \{6{,}8{,}9\}$ (6), $N \in \{8, 4, 7\}$ (7). Ferner ist $3E + e = U + 10z$ und $3R + z = 10h + E$, d. h. $E = 3R + z - 10h$. Durch Substitution von E erhält man $9R + 37 - 20h + e = U + 10z$, also

$$R = \frac{30h + 7z - e + U}{9} \tag{8}$$

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Diese drei Möglichkeiten müssen der Reihe nach untersucht werden.

Fall 1: Es sei $I = 6$. Dann ist $N = 8, e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 4, R = 7, E = 1$;
$z = 1$, dann $U = 6, R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ + & 2 & 7 & 1 & 6 \\ \hline & 8 & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$. Dann ist $N = 4, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;
$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

Das führt auf folgende Lösung:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ + & 1 & 5 & 7 & 8 \\ \hline & 4 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$. Dann ist $N = 7, e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$. In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:
$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;
$z = 1$, dann $U = 1, R = 4$ und $E = 3$;

$z = 2$, dann $U = 3$ $R = 5$ und $E = 7 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.

Das führt auf folgende Lösung:
$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ + & 2 & 4 & 3 & 9 \\ \hline & 7 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

Aufgabe 131014:
Jens und Dirk spielen das folgende Spiel

Sie wählen abwechselnd für je einen Koeffizienten einer durch $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu definierenden Funktion f reelle Zahlen a ($\neq 0$), b, c in dieser Reihenfolge. Jens beginnt. Liegen nach erfolgter Wahl von a, b, c die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung, so hat Dirk gewonnen, liegen sie unsymmetrisch, Jens. Das Spiel endet genau dann unentschieden, wenn f keine Nullstellen hat.

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei diesem Spiel um ein „ungerechtes Spiel“ handelt. Als ein ungerechtes Spiel wird ein Spiel bezeichnet, bei dem einer der Spieler bei allen Spielmöglichkeiten des anderen den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind nach der Lösungsformel bekanntlich:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sollen sie symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, so muss gelten: $x_1 = -x_2$. Setzt man dies in die Lösungsformel ein, ergibt sich:

$$-\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dies führt zu $-b = b$, was genau dann erfüllt ist, wenn $b = 0$. Das heißt, dass, falls Nullstellen existieren, diese immer symmetrisch zum Ursprung liegen, wenn b von Dirk mit dem Wert $b = 0$ gewählt wird.

Dirk kann dennoch nicht den Sieg erzwingen, da Jens mit der Wahl von c für beliebige Werte von a und b erzwingen kann, dass es keine Nullstellen gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn der Ausdruck unter der Wurzel kleiner als Null ist: $b^2 - 4ac < 0$. Damit handelt es sich um kein ungerechnetes Spiel.

Aufgabe 151014:
In

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{H} & \mathrm{A} & \mathrm{U} & \mathrm{S} \\ \hline \mathrm{S} & \mathrm{T} & \mathrm{A} & \mathrm{D} & \mathrm{T} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Spalten seien, von der Einerstelle beginnend, mit 1 bis 5 bezeichnet.

I. Angenommen, bei einer Ersetzung entstehe eine Lösung. Dann kann für diese Ersetzung S nur eine der Ziffern 1 oder 2 sein, da die Summe dreier vierstelliger Zahlen kleiner als 30000 ist und die fünfstellige natürliche Zahl „STADT“ nicht mit 0 beginnen kann.

Fall 1: Es sei $S = 1$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 3$.

Da die Summe mit den Ziffern 1 und 3 beginnt, und unter den Zahlen, die gleich 13 oder um 1 oder 2 kleiner als 13 sind, nur $12 = 3 \cdot 4$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 4$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 1 entstehen.

Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die das Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen $10, \dots, 19$ ist. Von allen derartigen Ziffern 3, 4, 5 oder 6, scheiden 3 und 4 aus, da sie bereits vergeben sind. Da aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 6 = 18$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer 6 entstehen kann, entfällt $A = 6$.

A kann demnach nur 5 sein, und damit nur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 5 entsteht, darf Spalte 2 keinen Übertrag liefern, also kann U nur eine der Ziffern 0, 1, 2 oder 3 darstellen. Davon sind 1 und 3 bereits vergeben.

Für $U = 0$ entstünde $D = 0$ und damit ein Widerspruch. Also kann U nur 2 sein, woraus weiter $D = 6$ folgt.

Fall 2: Es sei $S = 2$.

Aus Spalte 1 folgt dann unmittelbar $T = 6$.

Da die Summe mit den Ziffern 2 und 6 beginnt und unter den Zahlen, die gleich 26 oder um 1 oder 2 kleiner als 26 sind, nur $24 = 3 \cdot 8$ durch 3 teilbar ist, kommt nur $H = 8$ in Frage, und aus Spalte 3 muss der Übertrag 2 entstehen. Also muss A eine der Ziffern bezeichnen, für die des Dreifache oder das um 1 oder 2 vermehrte Dreifache eine der Zahlen $20, \dots, 29$ ist.

Von allen derartigen Ziffern, 6, 7, 8 oder 9, scheiden 6 und 8 aus, da 1 sie bereits vergeben sind. Weil aus Spalte 2 ein Übertrag von höchstens 2 entstehen kann und $3 \cdot 7 = 21$ ist, woraus durch Addition von 0, 1 oder 2 keine Zahl mit der Endziffer entstehen kann, entfällt $A = 7$.

A kann demnach nur 2 sein, und damit zur Berechnung der Summe in Spalte 3 die Endziffer 9 entsteht, muss aus Spalte 2 ein Übertrag von 2 zur Verfügung stehen.

Demnach kann nur U eine der Ziffern 7, 8 oder 9 sein. Davon ist 7 die einzige noch nicht vergebene Ziffer, woraus weiter $D = 1$ folgt.

Somit können nur die Einsetzungen $A = 5$, $D = 6$, $H = 4$, $S = 1$, $T = 3$, $U = 2$, und $A = 9$, $D = 1$, $H = 8$, $S = 2$, $T = 6$, $U = 7$ zu Lösungen führen.

II. In der Tat sind bei diesen Einsetzungen verschiedene Buchstaben stets durch verschiedene Ziffern ersetzt, und da ferner die entstehenden Additionsaufgaben

	4	5	2	1			8	9	7	2
+	4	5	2	1		+	8	9	7	2
+	4	5	2	1		+	8	9	7	2
1	3	5	6	3		2	6	9	1	6

richtig gelöst sind, erfüllen diese Einsetzungen alle gestellten Forderungen.

Aufgabe 161011:
In das Kryptogramm sind anstelle der Buchstaben Ziffern (0, 1,..., 9) so einzusetzen, dass eine Additionsaufgabe mit richtiger Lösung entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern darstellen.

	K	A	T	E	R
+	K	A	T	Z	E
	T	I	E	R	E

Geben Sie sämtliche Lösungen dieser Aufgabe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man stelle sich die Spalten der Aufgabe von links nach rechts fortlaufend nummeriert vor. Dann gilt:

(1) Aus $r + E = E$ folgt $R = 0$ (Spalte 5).
(2) Wegen $R \neq 0$ und daher $E \neq 0$ folgt $E + z = 10$ (Spalte 4).
(3) Wegen $E \neq z$ und (2) folgt $E \neq 5$, $Z \neq 5$.
(4) Wegen (2) gilt $2T + 1 = E$ oder $2T + 1 = 10 + E$ (Spalte 3).
(5) Wegen (3) und (4) gilt $T \neq 2$ und $T \neq 7$.
(6) Wegen (1) gilt $K > 0$ und damit $T \neq 7$ (Spalte 1).
(7) Wegen (4) und $T \neq E$ folgt $T \neq 9$.

Somit kann T nur eine der Zahlen 3, 4, 5, 6 oder 8 sein.

(I) Es sei $T = 3$. Dann wäre $E = 7$ und $Z = 3$, was wegen $Z \neq T$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 3$.

(II) Es sei $T = 4$. Dann ist $E = 9$ und $Z = 1$. Da T gerade ist, kann aus der Spalte 2 kein Übertrag in Spalte 1 erfolgt sein. Also ist $K = 2$ und $A < 5$, was unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen nach den Bedingungen der Aufgabe aus $A = 3$ und $I = 6$ führt. Damit erhält man die folgende Lösung:

	2	3	4	1	0
+	2	3	4	1	9
	4	6	9	0	9

(III) Es sei $T = 5$. Dann erhält man $E = 1, Z = 9$ und $K = 2$, da bei ungeradem T ein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgen muss. Wegen $T = 5$ ist $2A + 1 = 10 + I$, also unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahl $I = 7$ und damit $A = 8$. Damit erhält man als weitere Lösung:

	2	8	5	1	0
+	2	8	5	9	1
	5	7	1	0	1

(IV) Es sei $T = 6$. Dann wäre $E = K = 3$, was wegen $E \neq K$ ein Widerspruch wäre. Also gilt $T \neq 6$.

(V) Es sei $T = 8$. Dann erhält man $E = 7$, $Z = 3$ und $K = 4$, da in diesem Falle kein Übertrag aus Spalte 2 in Spalte 1 erfolgt sein kann. Aus $I = 2A + 1$ und unter Berücksichtigung der bereits verwendeten Zahlen folgt $I = 5$ und $A = 2$. Damit erhält man als dritte Lösung der Aufgabe:

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 2 & 8 & 7 & 0 \\ + & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 8 & 5 & 7 & 0 & 7 \end{array}$$

Die angegebenen Lösungen sind auch alle möglichen Lösungen.

Aufgabe 161013:
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, dass nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diese Möglichkeit besteht nicht. Von jedem der 8 Eckpunkte eines jeden Würfels gehen genau 3 Kanten, also eine ungerade Anzahl von Kanten, aus.

Gäbe es einen in der Aufgabe geforderten (räumlichen) Streckenzug; dann müssten mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes die Anzahlen der zu einander übrigen 6 Punkte führenden Kanten gleich der von diesem Punkte fortführenden Kanten sein, d. h. in jedem dieser 6 Punkte müsste eine gerade Anzahl von Kanten enden, was nicht der Fall ist. Folglich gibt es keinen derartigen Streckenzug.

Aufgabe 171013:
Sind a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, 1, ...n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + ... + a_1 \cdot 8 + a_0,$$

so sagt man, z sei im Oktalsystem durch die Ziffern a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dargestellt, und schreibt kurz

$$z = [a_n a_{n-1} ... a_1 a_0]_8.$$

Die natürliche Zahl, die im dekadischen System die Darstellung 135 hat, lautet z. B. im Oktalsystem $[207]_8$; denn es gilt $135 = 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 7$ sowie $0 \leq 2; 0; 7 \leq 7$ und $2 > 0$.

a) Stellen Sie die natürliche Zahl, deren Darstellung im dekadischen System 214 lautet, im Oktalsystem dar!

b) Im Kryptogramm

$$\begin{array}{cccccc} [& E & I & N & S &]_8 \\ +[& E & I & N & S &]_8 \\ \hline [& Z & W & E & I &]_8 \end{array}$$

wird gefordert, für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern so einzusetzen, dass im Oktalsystem dargestellte natürliche Zahlen entstehen, für die die angegebene Additionsaussage wahr ist.

Geben Sie mindestens eine Lösung dieses Kryptogramms an, und zeigen Sie, dass die angegebene Lösung alle verlangten Eigenschaften hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die höchste Potenz von 8, die nicht größer als 214 ist, ist $8^2 2 = 64$. Das größte Vielfache von 64, das nicht größer als 214 ist, ist $3 \cdot 64 = 192$. Ferner gilt $214 = 192 + 22$ sowie $22 = 2 \cdot 8 + 6$. Damit erhält man $214 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 6$ und somit, weil $0 \leq 3; 2; 6 \leq 7$ und $3 > 0$ ist, $2140[326]_8$.

b) Eine Lösung ist z. B.

$$\begin{array}{rcccccl} & [& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ + & [& 3 & 0 & 5 & 4 &]_8 \\ \hline & [& 6 & 1 & 3 & 0 &]_8 \end{array}$$

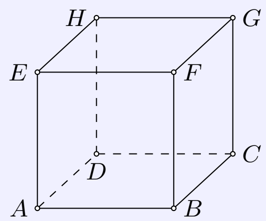
Diese Lösung hat die verlangten Eigenschaften: Für die verschiedenen Buchstaben E, I, N, S, Z, W sind die verschiedenen Ziffern 3, 0, 5, 4, 6, 1 eingesetzt, für gleiche Buchstaben immer gleiche Ziffern.
Sie erfüllen die Bedingungen $0 \leq a_i \leq 7$ und die als Anfangsziffern stehenden Ziffern 3, 6 sind nicht 0. Die dargestellten Zahlen sind

$$[3054]_8 = 3 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 4 = 1580$$

$$[6130]_8 = 6 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 0 = 3160$$

und für sie ist 1580 + 1580 = 3150 eine wahre Aussage.

Aufgabe 171014:



Es sei M die Menge aller 12 Kanten und aller 12 Flächendiagonalen eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H. Gibt es einen Streckenzug, bei dem jede in M enthaltene Strecke genau einmal durchlaufen wird?

Wenn ja, geben Sie ein Beispiel dafür (durch Angabe der Folge der Eckpunkte des Streckenzuges), und zeigen Sie, dass der so angegebene Streckenzug die verlangte Eigenschaft hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ecken des Würfels seien wie in der Abbildung bezeichnet. Dann ist

$$M = \{AB, AC, AD, AE, AF, AH, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CF, CG, CG, DE, DG, ...$$

$$...DH, EF, EG, EH, FG, FH, GH\}$$

Die Folge $(A, B, C, A, D, B, E, A, F, B, G, C, D, E, F, C, H, D, G, E, H, F, D, H, A)$ gibt einen Streckenzug an.
Unterstreicht man etwa in der Aufzählung der Elemente von M eine Strecke genau dann, wenn sie in dem angegebenen Streckenzug auftritt, so erhält jedes Element von M genau eine Unterstreichung. Ferner tritt keine Strecke auf, die nicht in M enthalten ist. Daher erfüllt der angegebene Streckenzug die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 181013:
Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:

Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, dass auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und dass jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten.

Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein „Paar“ und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.

Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines „Paares“ oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten „Paare“ besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, dass das Spiel stets damit enden muss, dass sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beim Ziehen zweier Karten sind genau die folgenden Fälle möglich:

A: Es werden zwei gerade Zahlen gezogen. Dann scheiden Sie entweder als „Paar“ aus dem Spiel aus oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier gerader Zahlen eine gerade Zahl ist:

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung bleibt unverändert.

B: Es werden zwei ungerade Zahlen gezogen. Dann scheiden sie entweder als „Paar“ aus dem Spiel aus, oder an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Auf ihr steht eine gerade Zahl, da die Differenz zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ist.

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung vermindert sich um genau 2.

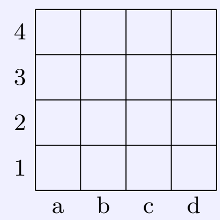
C: Es wird eine gerade und eine ungerade Zahl gezogen. Dann scheiden sie aus dem Spiel aus und an ihre Stelle tritt eine neue Karte. Sie trägt eine ungerade Zahl, da die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ist.

Die Anzahl der Karten mit ungeradzahliger Beschriftung verändert sich nicht.

Nun gilt einerseits:
Bei jedem Ziehen (mit evtl. anschließendem Hinzufügen einer Reservekarte) wird die Gesamtzahl der im Spiel befindlichen Karten kleiner. Also muss das Spiel stets damit enden, dass sich keine oder genau eine Karte im Spiel befindet.

Andererseits waren anfangs im Spiel genau 15 ungeradzahlig beschriftete Karten, und deren Anzahl hat sich nach den Feststellungen in A, B, C stets um eine gerade Zahl (0 oder 2) geändert. Somit ist auch am Spielende eine ungerade Anzahl von Karten mit ungeradzahliger Beschriftung im Spiel. Daher ist der Fall, dass am Spielende überhaupt keine Karte mehr im Spiel ist, nicht möglich, und es verbleibt als einzige Möglichkeit das Spielende mit genau einer im Spiel befindlichen Karte, w. z. b. w.

Aufgabe 211012:



Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... , $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, eine Markierung erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann folgt:

Falls von den Feldern a1, a4, d1, d4 keines markiert wäre, so wäre eines der Felder b3, c2 und eines der Felder b2, c3 markiert, da jede Diagonale ein markiertes Feld enthalten müsste. Dann lägen jedoch diese beiden markierten Felder in derselben Zeile oder in derselben Spalte, was beides den Bedingungen der Aufgabe widerspricht.

Also ist von den Feldern a1, a4, d1, d4 eines markiert. Durch eine Drehung kann etwa erreicht werden, dass a4 markiert ist.

Auf der Diagonalen a1 - d4 muss nun genau eines der Felder b2, c3 markiert sein. Man kann erreichen, dass c3 markiert ist, indem man, wenn dies nicht zutrifft, die Spiegelung an der Diagonalen a4 - d1 durchführt. (Bei dieser Spiegelung bleibt das markierte Feld a4 an seinem Platz.)

In der b-Spalte kann nun nur noch das Feld b1 markiert sein; als viertes markiertes Feld kommt schließlich nur noch d2 in Frage.

Also kann eine Markierung nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch Drehung, Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen aus der Markierung a4, b1, c3, d2 hervorgeht.

II. Umgekehrt ist ersichtlich, dass bei dieser Markierung in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.

Mit I. und II. ist geneigt: Es gibt bis auf Drehungen und Spiegelungen genau eine Markierung mit den verlangten Eigenschaften, nämlich die Markierung a4, b1, c3, d2 (oder eine im Sinne der Aufgabenstellung nicht davon verschiedene).

Aufgabe 221013:

Zehn kleine Zifferlein

Wilhelm Busch gab ein Exempel
durch den braven Lehrer Lämpel.
Welcherart man soll sich plagen,
ließ er einstmals so ihn sagen:
„Nicht allein im Schreiben, Lesen
übt sich ein vernünftig Wesen,
sondern auch in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen.“
Liest man dieses umgekehrt,
ist es sicher auch viel wert:
„Nicht allein in Rechnungssachen
soll der Mensch sich Mühe machen,
sondern ein vernünftig Wesen
soll auch manchmal etwas lesen.“
Darum zögert bitte nicht,
lest zuerst mal dies Gedicht!

Erstens sei sogleich gesagt,
dass nach Zahlen wird gefragt.
Unter diesen sei’n vorhanden
zwei dreistellige Summanden.
Der Summe wir nun unterstellen
(da ’s möglich ist in vielen Fällen),
sie habe eine Stelle mehr.
Jetzt ist es sicher nicht sehr schwer
zu zählen, dass zehn Ziffern man
in dieser Rechnung einmal an,
und zwar genau (wie man so sagt)!
Damit auch später keiner fragt:
Die 0 würd’ vorne sehr schlecht passen,
drum ist sie dort nicht zugelassen.
Genau ein Übertrag auch sei,
nicht etwa zweie oder drei!
(Ein Übertrag - das sei erklärt,
damit es jedermann erfährt -,
das ist ein Fall, der dann passiert,
wenn jemand Zahlen hat addiert
und ihre Summe, wie sich zeigt
die 9 an Größe übersteigt.)

Nun, liebe Tochter, lieber Sohn,
was kann bei dieser Addition
man für Ergebnisse erwarten?

Jetzt dürft ihr mit dem Lösen starten.
Als Lösung seien angegeben
- zumindest soll man danach streben -
alle möglichen E n d beträge!
Dabei beweise man recht rege,
dass es, hält man die Regeln ein,
nur diese Summen können sein.
(Der Summanden vielfache Möglichkeiten
sollen uns keine Sorgen bereiten,
nach ihnen ist hier n i c h t gefragt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Lösung:

In dem Ergebnis mit vier Stellen
wird jedem Löser gleich erhellen,
dass vorn stets nur die 1 kann sein:
Sie kommt vom Übertrag herein,
den man erhält in Spalte „Hundert“
(Wenn’s anders wär’, wär’ man verwundert.)
Die 0, die kann in den Summanden
auf keinen Fall hier sein vorhanden,
da eine andre Ziffer man
ja niemals zweimal nehmen kann;
denn, wie soeben wurd’ verraten,
der Übertrag ist schon „verbraten“.
Auch bei den Einern und bei Zehn
darf im Ergebnis 0 nicht stehn,
sonst gäb’s den zweiten Übertrag,
den, wie wir wissen, keiner man.
Nun ist die Lösung halb gewonnen,
es wird mit 1 und 0 begonnen.

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ + & & - & - & - \\ \hline = & 1 & 0 & - & - \end{array}$$

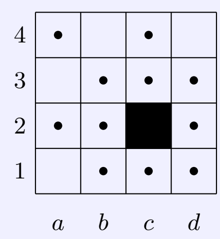
Jetzt denkt man nach bei den Summanden,
was ist an Hunderten vorhanden?
Zunächst hat man vielleicht gedacht
so an die Ziffern 2 und 8
jedoch es geh’n auch 3 und 7;
und 4 und 6 sind noch geblieben.
Darum mach man sich „auf die Schnelle“
aus diesen eine Art Tabelle:

Verbrauchte Ziffern	Restliche Ziffern	Einzig brauchbare Summenbildungen	
0,1,2,8	3,4,5,6,7,9	-	
0,1,3,7	2,4,5,6,8,9	$2+6=8$	$4+5=9$
0,1,4,6	2,3,5,7,8,9	$2+7=9$	$3+5=8$

Nun muss man schließlich noch probieren,
so den Rest zu kombinieren,
dass kein Übertrag entsteht,
wenn man ans Addieren geht.
Überlegt man eine Weile,
sieht man bei der ersten Zeile,
dass es hier nicht funktioniert,
wie und was man auch probiert.
Zeile zwei und drei sodann
bieten je ’ne Lösung an:
Erstens 1, 0, 9 und 8.
Und, falls man es anders macht,
kann man zweitens sich erfreu’n
auch an 1, 0, 8 und 9.
Diese beiden Summen sind
einzig möglich. Jedes Kind
sieht, dass es nur so kann sein,
wenn man hält die Regeln ein.

Aufgabe 231013:
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und senkrechten Reihe und die Felder in Richtung der beiden Diagonalen erreichen kann.

In der Abbildung ist die Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, und die von ihr erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Die Buchstaben und Zahlen am Rand dienen zur eindeutigen Benennung der Felder. So steht z. B. die Dame in der Abbildung auf c2.



Auf einem Quadrat aus 4 mal 4 Feldern sollen nun vier Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.

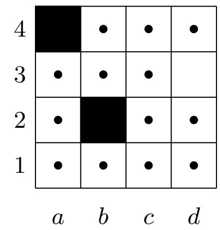
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn es eine Lösung der Aufgabe gibt, dann muss in jeder Reihe und in jeder Spalte genau eine Dame stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass in der Zeile 4 die Dame auf a4 oder auf b4 steht.

Fall 1: Die erste Dame stehe auf a4.

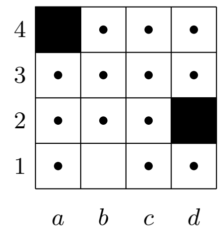
Dann kann in der Zeile 2 die zweite Dame entweder auf b2 oder d2 gestellt werden.

Fall 1a: Die Dame stehe auf b2.



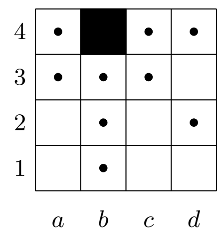
Dann kann in Zeile 1 keine Dame mehr aufgestellt werden. Es gibt in diesem Falle mithin keine Lösung.

Fall 1b: Die Dame stehe auf d2.

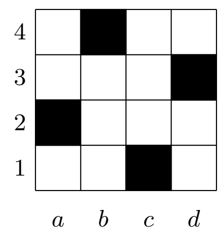


Dann kann in Zeile 3 keine Dame mehr aufgestellt werden. Folglich gibt es in diesem Falle ebenfalls keine Lösung.

Fall 2: Die erste Dame stehe auf b4.



Dann folgt zwangsläufig für die Standorte der restlichen drei Damen Zeile 3 : d3, Zeile 2 : a2, Zeile 1 : c1. Also kann es (bis auf Drehung und Spiegelung) nur die Aufstellung der Abbildung als Lösung geben.



II. In der Tat erfüllt diese Aufstellung die Bedingungen der Aufgabe. Daher erfüllt (bis auf Drehung und Spiegelung) genau diese Aufstellung die Bedingungen.

Aufgabe 261014:
Jürgen behauptet, dass es ein Positionssystem mit der Basis m gibt, in dem die folgende Rechnung richtig ist:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 7 & 0 & 1 & \cdot & 3 \quad 4 \\
\hline
2 & 5 & 0 & 3 & & \\
 & 3 & 4 & 0 & 4 & \\
\hline
3 & 0 & 4 & 3 & 4 &
\end{array}$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen m, für die das zutrifft!

Hinweis : In einen Positionssystem mit der Basis m gibt es genau die Ziffern 0, 1, ..., $m-2$, $m-1$. Jede natürliche Zahl wird als Summe von Produkten aus jeweils einer Potenz von m mit einer der Ziffern dargestellt; dabei werden die Potenzen noch fallenden Exponenten geordnet. Geschrieben wird dann die Folge der Ziffern, so wie es für $m = 10$ bei der dekadischen Schreibweise natürlicher Zahlen bekannt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da in der Rechnung als größte verwendete Ziffer die 7 auftritt, kann eine natürliche Zahl m nur dann die Basis eines Positionssystems sein, in dem die Rechnung richtig ist, wenn $m \geq 8$ gilt. Da in der Teilrechnung

$$\begin{array}{ccccc}
2 & 5 & 0 & 3 & \\
 & 3 & 4 & 0 & 4 \\
\hline
3 & 0 & 4 & 3 & 4
\end{array}$$

ein Übertrag auftritt, der die Bedeutung $5 + 3 = 0 + 1 \cdot m$ hat, folgt $m = 8$. Also kann die Rechnung nur im Oktalsystem richtig sein.

II. In der Tat ergibt sich bei Übertragung der Faktoren und des in der Rechnung enthaltenen Produktes aus den Oktalsystem ins Dezimalsystem

$$\begin{aligned}
[701]_8 &= 7 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 449 \\
[34]_8 &= 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 28 \\
[30434]_8 &= 3 \cdot 8^4 + 0 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 12572
\end{aligned}$$

und es gilt $449 \cdot 28 = 12572$.

Aue I. und II. folgt: Die angegebene Rechnung ist genau im Positionssystem mit der Basis $m = 8$ richtig.

Aufgabe 271013:

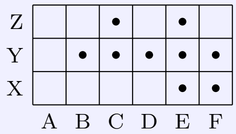


Abbildung a)

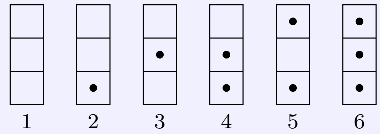


Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) kann (mit Berücksichtigung des eingezeichneten Punktmusters) aus den sechs Teilen in Abbildung b) zusammengesetzt werden.

Geben Sie eine Möglichkeit für eine solche Zusammensetzung an und untersuchen Sie, ob die von Ihnen angegebene Möglichkeit die einzige ist!

Hinweis: Zur Bezeichnung der Teilquadrate sollen die in der Abbildung a angegebenen Buchstaben benutzt werden. So wird z. B. das rechte obere Feld mit FZ bezeichnet.

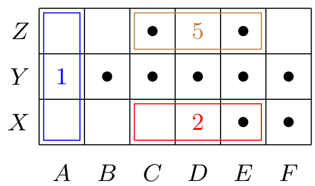
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch systematisches Erfassen aller möglichen Stellungen einzelner Teile erkennt man, dass es für Teil 5 nur eine Lagemöglichkeit gibt, für Teil 2 dagegen zwei Möglichkeiten, für Teil 1 drei und für alle anderen Teile sogar vier Lagemöglichkeiten.
Folglich ist es günstig, die Einpassungsmöglichkeiten der sechs Teile in der angegebenen Reihenfolge zu untersuchen.

Teil 5 kann nur eine Lage einnehmen, nämlich CZ, DZ, EZ.

Teil 2 kann nur zwei Lagen einnehmen. Die Lage AZ, BZ, CZ entfällt, weil das Feld CZ bereits von Teil 5 belegt ist. Also muss Teil 2 die Lage CX, DX, EX einnehmen.

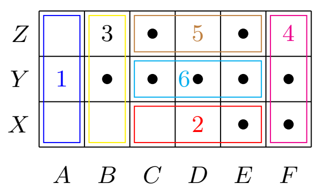
Teil 1 kann nur drei Legen einnehmen. Die Lagen AX, BX, CX und BX, CX, DX entfallen, weil das Feld CX bereits von Teil 2 belegt ist. Also muss Teil 1 die Lage AX, AY, AZ einnehmen.

Die auf diese Weise erhaltene Teilung ist in der Abbildung festgehalten. Danach folgt unmittelbar weiter:



Für Teil 3 ist nur noch BX, BY, BZ möglich, für Teil 4 nur noch FX, FY, FZ und für Teil 6 nur noch CY, DY, EY.

Damit ist als eine Möglichkeit des Zusammensetzens die in der nachfolgenden Abbildung gezeigte gefunden, und zugleich ist bewiesen, dass sie die einzige ist.



Aufgabe 321014:

		1	1	1
2		2	1	
	2			
2		2		
			1	

Wir betrachten ein Quadrat, das sich aus 25 kongruenten Teilquadraten zusammensetzt. Mit 5 verschiedenen Farben werden je 5 Teilquadrate gefärbt; dadurch entstehen 5 einfarbige Muster. Für jedes solche Muster kann man feststellen, ob es eine Symmetrieachse hat, die zugleich Symmetrieachse für das ganze Quadrat (ohne Berücksichtigung der Farben) ist. Eine solche Symmetrieachse eines Musters werde *zulässig* genannt.

In der Abbildung beispielsweise hat das Muster der Farbe 1 keine *zulässige* Symmetrieachse; dagegen hat das Munter der Farbe 2 die angedeutete *zulässige* Symmetrieachse. (Seine drei anderen Symmetrieachsen sind nicht *zulässig.*)

Ermitteln Sie, ob es möglich ist, eine Färbung anzugeben, bei der jedes der 5 Muster genau eine *zulässige* Symmetrieachse hat, und zwar so, dass

a) nur eine der Symmetrieachsen des ganzen Quadrates,
b) jede der vier Symmetrieachsen des ganzen Quadrates

unter den Symmetrieachsen der Muster vorkommt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie in den zwei Abbildungen ersichtlich, sind Färbungen der beiden genannten Arten möglich.

1	1	5	1	1
2	2	1	2	2
3	3	2	3	3
4	4	3	4	4
5	5	4	5	5

5	5	1	2	1
5	3	3	3	2
3	4	1	4	3
2	4	4	4	5
2	2	1	5	1

1

2

3,4

5

Aufgabe 331011:
Christa und Jürgen spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

Die Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein auf ein streifenförmiges Spielbrett aus 9 Feldern (siehe Skizze). Jeder Dominostein soll genau zwei Felder belegen; kein Feld darf mehrfach belegt werden. Das Spiel ist beendet, sobald ein Spieler nicht mehr legen kann; dieser Spieler hat dann verloren.

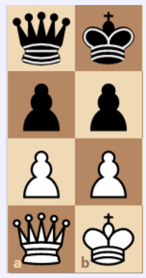
Das Spiel macht den beiden bald keinen Spaß mehr. Woran kann das liegen?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der nachziehende Spieler kann stets den Gewinn erzwingen.

Setzt nämlich das anziehende Spieler seinen ersten Stein auf eines der Felderpaare (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), so kann der Nachziehende auf (6,7) setzen, und danach hat jeder der beiden Spieler noch genau eine Setzmöglichkeit, was für den Anziehenden den Verlust zur Folge hat. Dasselbe gilt, wenn der Nachziehende eine der Anfangsmöglichkeiten (8,9), (7,8), (6,7), (5,6) mit (3,4) beantwortet.

Aufgabe 341011:
Frank und Felix denken sich das *kleinste Schach der Welt* aus:
- Das Spielfeld hat 2×4 Felder.
- Weiß spielt mit den Figuren König, Dame und zwei Bauern; Schwarz ebenso.
- Zu Anfang werden die Figuren wie in der Abbildung aufgestellt.
- Dann wird nach den Regeln des üblichen Schachspiels verfahren, sofern der Platz für ihre Anwendung ausreicht. (Erkundigen Sie sich nötigenfalls nach den Regeln!)



Frank stellt drei Behauptungen auf: Es sei möglich, so zu spielen, dass
a) das Spiel unentschieden endet,
b) Weiß gewinnt,
c) Schwarz gewinnt.

Beweisen Sie, dass die drei Behauptungen zutreffen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, je ein Beispiel einer Partie anzugeben:

a) **1.** a2:b3, Da4:b3, **2.** Da1:a3+, Db3:a3, **3.** b2:a3+, Kb4:a3 Remis, da nur noch die Könige auf dem Brett sind.

b) **1.** a2:b3, a3:b2, **2.** Da1:a4 matt.

c) **1.** a2:b3, Kb4:a3, **2.** b2:a3, Da4:a3, **3.** Da1-a2+, Da3:a2 matt.

II Runde 2

Aufgabe 041021:
Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:

a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.

b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.

c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunamen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt.
Dann gibt es wegen c) folgende Personen: BX, XY,YD, DZ.

Wegen a) gilt X $\neq$ B, Y $\neq$ D. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin Y $\neq$ B, X $\neq$ D gilt, ist wegen b) nur X = A, Y = C, Z = B möglich.
Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

Aufgabe 071021:
In

$$\begin{array}{cccccc} & F & U & E & N & F \\ + & & Z & W & E & I \\ \hline S & I & E & B & E & N \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.
Untersuchen Sie, wie viele Lösungen die Aufgabe hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S, B sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S \neq 0$ und $S = 1$, da $U + Z < 20$ ist und $F + 1 \leq 10$ sein muss.
(2) $F = 9$, da $F + 1 \geq 10$ sein muss.
Daraus folgt (3) $F + 1 = 10$ und daraus wiederum (4) $I = 0$.
Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, dass $F + I = N$, also wegen (4) $F = N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muss, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d. h. die Aufgabe hat keine Lösung.

Aufgabe 101022:
Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball. Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün.
(3) Der Ball ist schwarz.
B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.
C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) Der Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.
D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe des Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann!
Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!
Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.
Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

Lösung von cyrix:
a) Die Aussage D (2) ist offenbar wahr und D (3) offensichtlich falsch, da es um einen einfarbigen Ball geht. Also muss auch D (1) wahr sein und Ds Pullover hat die gleiche Farbe wie der Ball.

Wäre C (3) falsch, so wäre der Ball insbesondere weder grün noch schwarz, sodass auch Aussage C (1) falsch sein müsste. Dann hätte C aber nur höchstens eine wahre Aussage getroffen, was im Widerspruch zur Annahme dieses Aufgabenteils a) steht. Also muss C (3) richtig sein; die Farbe des Balls ist damit grün, schwarz oder gelb. Und damit nicht rot, sodass C (2) falsch ist und damit auch C (1) wahr sein muss, was die Farbe des Balls auf schwarz oder grün einschränkt.

Damit ist die Aussage B (1) falsch, denn der Ball ist weder gelb noch weiß. Demnach müssen B (2) und B (3) wahr sein, sodass der Ball (und damit auch der Pullover) grün sein muss. Tatsächlich sind dann auch die Aussagen A (1) und A (2) wahr, während A (3) falsch ist. Es handelt sich damit tatsächlich um eine Lösung.

b) Wieder sehen wir direkt ein, dass D (2) wahr und D (3) falsch ist. Nun folgt aber, dass dann auch D (1) falsch sein muss, sodass wir nur wissen, dass Ball und Pullover verschiedene Farben haben.
Da D(1) die einzige Aussage ist, die die Farbe des Pullovers thematisiert, können wir keine weiteren Schlüsse zu dieser ziehen und damit dessen Farbe auch nicht angeben.

Zur weiteren Bestimmung der Farbe des Balls betrachten wir nun die Aussage C (1): Ist der Ball entweder schwarz oder grün, so natürlich erst recht auch entweder grün oder schwarz oder gelb.
Aus der Gültigkeit von C (1) würde direkt auch die von C (3) folgen, sodass C nur höchstens eine falsche Aussage getroffen hätte, was der Annahme für diesen Aufgabenteil b) widerspricht. Also muss C (1) falsch sein, sodass der Ball weder schwarz noch grün ist. Von den beiden übrigen Aussagen von C muss genau eine wahr sein, sodass der Ball entweder rot oder gelb ist.
Damit ist aber die Aussage B (1) falsch, denn wenn der Ball nicht gelb ist, muss er ja rot sein.[1] Da der Ball weder schwarz noch grün ist, ist B (2) wahr und B (3) falsch, sodass auch B genau zwei falsche Aussagen getroffen hat.

Schließlich sind die Aussagen A (3) und A (1) falsch, sodass A (2) wahr sein muss, was, da der Ball nicht grün ist, nur geht, wenn der Ball rot ist. Damit ist der Ball also rot und das einzige, was wir über den Pullover aussagen können, ist, dass er nicht rot ist.

Aufgabe 111021:
Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z. B. der Schüler A, verlässt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen. Jeder der Schüler B, C, D und E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch. Sie lauten:
(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.
(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.
(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.
(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.
A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben.
Wie kann das geschehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: Jedes Quadrat ist gleichzeitig ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez. Jedes Rechteck ist zugleich ein Parallelogramm und ein Trapez.
A kann daher z. B. folgendermaßen schließen:

[1] Es stellt sich jedoch die Frage, wie B zu dieser Schlussfolgerung gelangt.

Angenommen, die Aussage (1) wäre falsch, d. h., es gäbe auf der Zeichnung entweder keine Quadrat oder genau 1 Quadrat.
Nach den Spielregeln wären dann die Aussagen (2) bis (4) wahr. Gäbe es genau 1 Quadrat, so gäbe es nach (2) noch ein weiteres Rechteck, also mindestens 2 Parallelogramm, im Widerspruch zu (3). Gäbe es kein Quadrat auf der Zeichnung, so nach (2) und (4) auch kein Rechteck und kein Trapez, im Widerspruch zu (3).
Also ist (1) wahr. Daher gibt es mindestens 2 Quadrate auf der Zeichnung.
Also ist (3) falsch, und (2), (4) sind wahr.
Gäbe es 3 oder mehr Quadrate auf der Zeichnung, so müsste wegen (2) und (4) die Anzahl der Trapeze mindestens 12 betragen, was nicht möglich ist. Daher gilt:
Es gibt auf der Zeichnung genau 2 Quadrate, genau 4 Rechtecke und genau 8 Trapeze.

Aufgabe 151021:
Vor dem Beginn eines Pferderennens fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Einlauf der drei Favoriten A, B und C.
Zuschauer (1): „A oder C gewinnt."
Zuschauer (2): „Wenn A Zweiter wird, gewinnt B."
Zuschauer (3): „Wenn A Dritter wird, dann gewinnt C nicht."
Zuschauer (4): „A oder B wird Zweiter."
Nach dem Einlauf stellte sich heraus, dass die drei Favoriten A, B, C tatsächlich die ersten drei Plätze belegten und dass alle vier Aussagen wahr waren.
Wie lautete der Einlauf?

Lösung von Steffen Polster:
Aus der Aussage (1) folgt, dass entweder A oder oder C gewinnt; auf keinen Fall aber B. Damit ergibt sich aus (2), dass A nicht Zweiter wird, da sonst im Widerspruch zu (1) B gewinnen müsste.
Da (3) gilt, wird aus A Dritter, dass C nicht gewinnt und somit B Sieger wäre, im Widerspruch zu (1). Damit kann A nur noch Platz 1 belegen.
Nach der Aussage (4) ist dann B Zweiter und folglich C Dritter. Der Einlauf lautet damit A-B-C.

Aufgabe 161023:
In der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccc} \text{L} & \text{O} & \text{T} & \text{T} & \text{O} \\ + & \text{T} & \text{O} & \text{T} & \text{O} \\ \hline \text{S} & \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{L} \end{array}$$

sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so dass eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für eine solche Ersetzung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine Ersetzung habe die verlangten Eigenschaften. Die Spalten seien von rechts nach links mit 1 bis 5 nummeriert. Wegen $L \neq S$ folgt aus Spalte (5)

$$L + 1 = S \qquad (1)$$

und damit aus Spalte 4 zunächst

$$Q + T \geq 9 \qquad (2)$$

Wäre nun $T \geq 5$, so ergäbe sich aus Spalte 2 ein Zehnerübertrag, also wegen (2) auch aus Spalte 3, und aus den Spalten 3 und 4 folgte $I = P$. Also ist

$$T \leq 4 \qquad (3)$$

in Spalte 2 entsteht kein Zehnerübertrag; wegen $I \neq P$ muss folglich in Spalte 3 ein Übertrag entstehen, d. h., es gilt sogar

$$Q + T \geq 10 \quad (2a) \qquad \text{wegen (3) also} \qquad Q \geq 6 \quad (4)$$

Daher verbleiben nur folgende Möglichkeiten:

a) Es ist $Q = 9$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 8$ und wegen (1) $S = 9$. Wegen $Q \neq S$ ist dies ein Widerspruch.

b) Es ist $Q = 8$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 6$ und wegen (1) $S = 7$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 2$ oder $T = 3$ oder $T = 4$. Ist $T = 2$, dann folgt $E = 5, I = 0, P = 1$. Ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ im Widerspruch zu $S = 7$.

c) Es ist $Q = 7$; dann folgt (aus Spalte 1) $L = 4$ und wegen (1) $S = 5$. Wegen (2a) und (3) gibt es nur die Möglichkeiten $T = 3$ oder $T = 4$. Davon scheidet $T = 4$ wegen $L = 4$ aus, und ist $T = 3$, dann folgt $E = 7$ mit Widerspruch zu $Q = 7$.

d) Es ist $Q = 6$; dann folgt $L = 2$ und $S = 3$. Es kann nur $T = 4$ gelten, dann folgt $E = 9, I = 0, P = 1$.

Daher können nur die Ersetzungen

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ + & 2 & 8 & 2 & 8 \\ \hline 7 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 6 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ + & 4 & 8 & 4 & 8 \\ \hline 7 & 3 & 2 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ + & 4 & 6 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 9 & 2 \end{array}$$

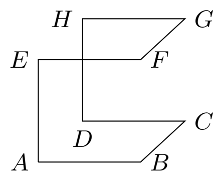
die geforderten Eigenschaften haben. Sie haben diese Eigenschaften; denn in jeder von ihnen wurden für L, Q, T, S, P, I, E verschiedene Ziffern eingesetzt und es ist jeweils eine im dekadischen Zahlensystem richtig gerechnete Additionsaufgabe entstanden.

Aufgabe 161024:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$.
Man ermittle alle verschiedenen Streckenzüge, die lediglich aus Würfelkanten zusammengesetzt sind und folgende Eigenschaften haben!
(1) Der Streckenzug beginnt und endet im Punkt A.
(2) Bei einmaligem Durchlaufen des Streckenzuges wird jeder Eckpunkt eines Würfels genau einmal erreicht.
Dabei gelten zwei Streckenzüge genau dann als verschieden, wenn es eine Würfelkante gibt, die in einem der beiden Streckenzüge vorkommt, in dem anderen aber nicht. Insbesondere gelten Streckenzüge, die sich nur in der Durchlaufrichtung unterscheiden, nicht als verschieden.

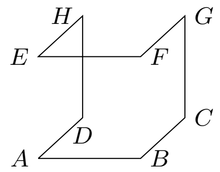
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder der gesuchten Streckenzüge muss genau zwei von A ausgehende Würfelkanten enthalten, also genau zwei der drei kanten AB, AD, AE. Der Durchlauf kann so gewählt werden, dass er entweder mit AB oder mit AD beginnt.

1. Beginnt er mit AB, so kann er nur mit einer der übrigen beiden von B ausgehenden Würfelkanten fortgesetzt werden, also entweder als ABC oder als ABF.

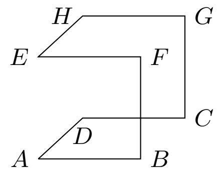
1.1 Nach der Fortsetzung ABC verbleiben ebenso nur die Möglichkeiten $ABCD$ und $ABCG$.
1.1.1 Bei der Wahl von $ABCD$ gibt es sowohl von A als auch von D aus nur noch je eine Möglichkeit der Weiterführung, nämlich zu E bzw. H hin. Dann sind alle Punkte erfasst und der Streckenzug kann nur noch durch die Strecke FG geschlossen werden.
Also gibt es im Fall 1.1.1 nur die Möglichkeit $ABCDHGFEA$:



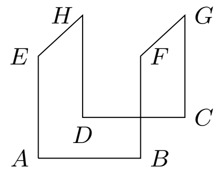
1.1.2 Angenommen, bei der Wahl von $ABCG$ könnte auf G nun H folgen. Dann gäbe es, um über einen noch nicht erfassten Punkt zu F zu gelangen, nur die Fortsetzung $ABCGHEF$, und der nun noch verbleibende Punkt D ließe sich nur auf Wege über einen bereit erfassten Punkt erreichen, da F und D nicht Eckpunkte einer gemeinsamen Würfelkante sind.
Wegen dieses Widerspruchs kann auf $ABCG$ nur F folgen, und als einzige Möglichkeit der Fortsetzung schließt sich an: $ABCGFEHDA$:



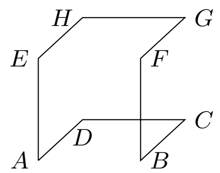
1.2 Nach der Fortsetzung ABF verbleiben nur die Möglichkeiten $ABFE$, $ABFG$.
1.2.1 Zu $ABFE$ existiert wie in 1.1.1 nur die Fortsetzung $ABFEHGCDA$



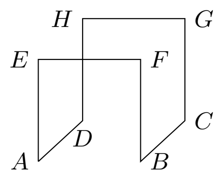
1.2.2 Zu $ABFG$ existiert mit analoger Begründung wie im Fall 1.1.2 nur die Fortsetzung $ABFGCDHEA$



2. Beginnt der Streckenzug mit AD, so kann er nur als ADC oder ADH fortgesetzt werden.
2.1 Nach ADC gibt es nur die Fortsetzungen $ADCB$ und $ADCG$. Zu jeder von ihnen existiert wie in 1.1.1 bzw. 1.1.2 nur eine Weiterführung. Da ein mit $ADCG$ beginnender Streckenzug bereits in 1.2.1 vorkommt, verbleibt außer ihm nur die Weiterführung von $ADCB$, d. h.: $ADCBFGHEA$



2.2 Nach ADH gibt es nur $ADHE$ und $ADHG$ und dazu wieder nur je eine Weiterführung. Davon kommt $ADHE$ bereits in 1.1.2 vor, und es verbleibt nur $ADHGCBFEA$



Damit ist gezeigt, dass nur die sechs aufgezählten Streckenzüge den Forderungen der Aufgabe genügen können. Sie erfüllen in der Tat diese Forderungen; denn jeder enthält jede der Würfelkanten genau einmal, beginnt und endet mit A und verläuft nur längs der Würfelkanten.
Ferner sind die Streckenzüge sämtlich verschieden voneinander, wir folgende Tabelle ausweist. Darin ist zu je zwei der genannten Streckenzüge eine Würfelkante angegeben, die in dem einen Streckenzug vorkommt, in dem anderen aber nicht.

	1.1.2	1.2.1	1.2.2	2.1	2.2
1.1.1	CD	BC	BC	AB	AB
1.1.2		BC	BC	AB	AB
1.2.1			FE	AB	AB
1.2.2				AB	AB
2.1					DC

Aufgabe 211022:
Über das Ergebnis eines 100 m-Laufs mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit erreichten, wurden folgende vier Aussagen gemacht:
(1) A wurde nicht Zweiter, oder B wurde Erster.
(2) A wurde Zweiter, und C wurde Vierter.
(3) A wurde Zweiter, und B wurde Dritter.
(4) C wurde Vierter, oder B wurde Fünfter.
Entscheiden Sie, ob es möglich ist, dass
a) alle vier Aussagen (1) bis (4),
b) genau drei dieser Aussagen,
c) genau zwei dieser Aussagen,
d) genau eine dieser Aussagen,
e) keine dieser Aussagen
gleichzeitig wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Aussagen (2) und (3) wahr sind, so wurde A Zweiter und B Dritter, also ist dann Aussage (l) falsch. Daher ist es nicht möglich, dass alle vier Aussagen (1) bis (4) gleichzeitig wahr sind.

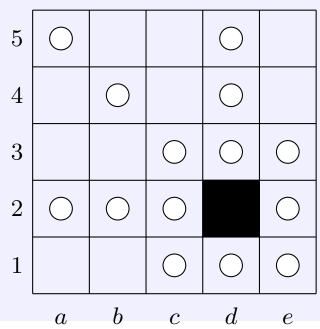
b) bis e) Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist es jeweils möglich, dass die genannte Zahl von Aussagen wahr ist. Dabei bedeute das Zeichen x irgendwelche von A, B, C verschiedene Teilnehmer.

Zu b) $BAxCxx$ (genau (1), (2) und (4) sind wahr),
zu c) $xAxCBx$ (genau (2) und (4) sind wahr),
zu d) $BACxxx$ (genau (1) ist wahr)
zu e) $CAxBxx$ (alle Aussagen sind falsch).

Aufgabe 221022:
Es seien 64 paarweise verschiedene Zahlen beliebig gewählt und dann so auf die Felder eines Schachbretts verteilt, dass in jedem Feld genau eine dieser Zahlen steht. Für jede derartige Zahlenverteilung werden nun folgende Definitionen gegeben:
1. Man suche zunächst in jeder (waagerechten) Zeile des Schachbretts die größte Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die kleinste mit a bezeichnet.
2. Man suche zunächst in jeder (senkrechten) Spalte des Schachbretts die kleinste Zahl auf. Unter den so aufgesuchten acht Zahlen werde die größte mit b bezeichnet.
Axel behauptet über die so definierten Zahlen a und b:
„Wenn $a \neq b$ ist, dann muss sogar stets $a > b$ gelten.“
Untersuchen Sie, ob dies zutrifft oder nicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Diejenige Zahl, die in derselben Zeile wie a und in derselben Spalte wie b steht, sei c genannt.
Für sie gilt $a \geq c$, da a in der genannten Zeile die größte Zahl ist, und $c \geq b$, da b in der genannten Spalte die kleinste Zahl ist. Daher gilt $a \geq b$, für $a \neq b$ also sogar $a > b$. Axels Behauptung trifft mithin zu.

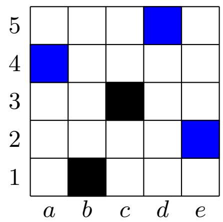
Aufgabe 231021:
Auf einem Schachbrett kann eine Dame so ziehen, dass sie von ihrem Platz aus alle Felder in der waagerechten und in der senkrechten Reihe und die Felder der beiden sich in ihrem Standpunkt schneidenden Diagonalen erreichen kann.
In der Abbildung ist die Stellung der Dame durch ein schwarzes Feld gekennzeichnet, die erreichbaren Felder sind mit Punkten markiert. Buchstaben und Zahlen am Rande sollen helfen, die Felder zu benennen (hier steht z. B. die Dame auf d2).



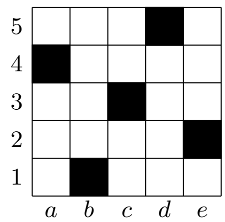
Auf einem Quadrat aus 5×5 Feldern sollen nun 5 Damen so aufgestellt werden, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Stellen Sie fest, ob dies möglich ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls alle Aufstellungen der geforderten Art, die sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen!

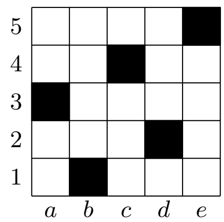
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Aufstellung von 5 Damen die Forderung erfüllt, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann, so folgt zunächst, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Dame stehen muss.
Ferner kann bei der Aufstellung nur eine der beiden Möglichkeiten (1), (2) zutreffen:

(1) Auf dem Feld c3 steht eine Dame.
In Zeile 1 muss dann eine Dame entweder auf b1 oder auf d1 stehen. Durch eventuelle Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Aus dem Bild ist ersichtlich, dass drei weitere Damen nur noch auf a4, d5 und e2 stehen können.



(2) Auf den Feld c3 steht keine Dame.
Stünde dann in keinem der Felder b1, d1, a2, a4, b5, d5, e2, e4 $(*)$ eine Dame, so müsste von den beiden Zeile 1 und 5 die eine in einem Eckfeld (Spalte a oder e), die andere in ihrem Mittelfeld (Spalte c) besetzt sein. Das Entsprechende würde für die beiden Spalten a und e gelten.
Dies ergäbe einen Widerspruch, da die Dame auf dem Mittelfeld der Zeile 1 oder 5 die Dame auf dem Mittelfeld der Spalte a oder e erreichen könnte.
Also steht eine Dame auf einem der Felder(*).
Durch eventuelle Drehung oder Spiegelung kann erreicht werden, dass auf b1 eine Dame steht. Auf e3 kann dann keine Dame stehen, da von den Damen auf b1, e3 alle Felder der Zeile 2 erreicht würden.
Also muss in Zeile 3 eine Dame auf a3 stehen. Aus dem Bild ist dann ersichtlich:
Auf d4 kann keine Dame stehen (keine Möglichkeit für Zeile 5), also steht auf c4 eine, und dann können zwei weitere Damen nur noch auf d2 und e5 stehen.
Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Spiegelung und Drehung höchstens die beiden Aufstellungen der Bilder.





II. Diese beiden Aufstellungen erfüllen auch die Bedingung, dass keine Dame auf einem Feld steht, das von einer anderen erreicht werden kann.
Sie lassen sich nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen, da bei jeder Drehung oder Spiegelung des Quadrates das Feld c3 in sich übergeht, das im linken Bild besetzt ist, im rechten Bild aber nicht.
Somit gibt es bis auf Drehung und Spiegelung genau die beiden Aufstellungen der geforderten Art, die in den letzten beiden Bildern angegeben sind.

Aufgabe 271021:

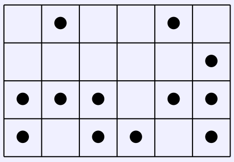


Abbildung a)

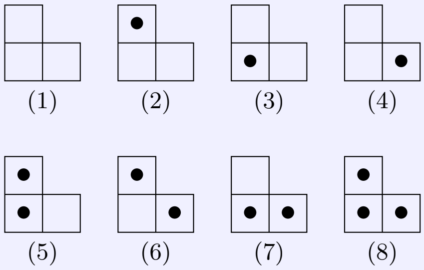
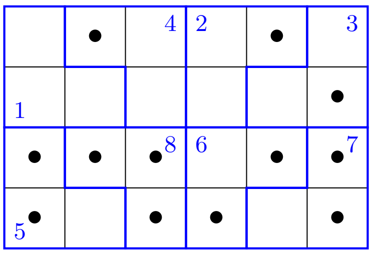


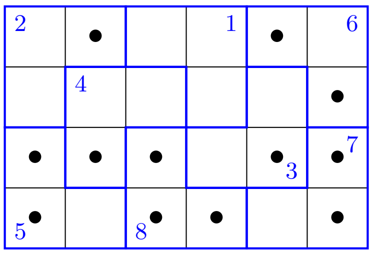
Abbildung b)

Das Rechteck in der Abbildung a) soll aus den Teilen der Abbildung b) zusammengesetzt werden. Jedes Teil soll genau einmal verwendet werden; die Teile sind ohne Anwendung von Spiegelungen, nur durch Verschiebungen und Drehungen in die gewünschte Lage zu bringen.

Zeichnen Sie zwei verschiedene Zusammensetzungen des Rechteckes, die auf diese Weise entstehen können!
Überprüfen Sie darin die Erfüllung der geforderten Bedingungen, indem Sie die (jeweils in die gewünschte Lage gebrachten) Teile durch ihre Nummern kennzeichnen!

Lösung von Steffen Polster:
Es gibt sogar genau die beiden nachfolgenden Lösungen:





Aufgabe 301021:

$$\begin{array}{cccccc} & & m & o & r & d \\ + & & r & a & u & b \\ \hline = & k & r & i & m & i \end{array}$$

In dem Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.
a) Beweisen Sie, dass sogar in keiner Lösung des Kryptogramms der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!
b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

Lösung von cyrix:
a) Um führende Nullen zu vermeiden muss $k = 1$ gelten, da die Summe von zwei vierstelligen Zahlen kleiner ist als 20.000, also als fünfstellige Zahl nur die erste Ziffer Eins haben kann. Also muss bei der Addition in der Tausenderstelle ein Übertrag entstehen.

Dann gilt entweder $m + r = 10 + r$, was auf den Widerspruch $m = 10$ führt, oder aber $m + r + 1 = 10 + r$, was $m = 9$ bedeutet, und, dass auch in der Hunderterstelle ein Übertrag entstanden ist.

Wegen $a \neq m = 9$ ist $a \leq 8$. Außerdem gilt entweder $o + a = 10 + i \geq 10$ oder $o + a + 1 = 10 + i \geq 10$, also in jedem Fall $o + a \geq 9$ und damit $o \geq 9 - a \geq 1$, sodass in jedem Fall $o \neq 0$ gilt, $\square$.

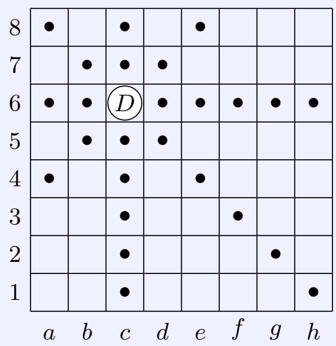
b) Wir geben im Folgenden vier dieser Lösungen mit paarweise verschiedenen Werten von a an:

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 6 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 4 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 4 & 3 & 8 \\ + & & 3 & 6 & 5 & 2 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & 8 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 2 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 2 & 3 & 6 \\ + & & 3 & 8 & 5 & 4 \\ = & 1 & 3 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

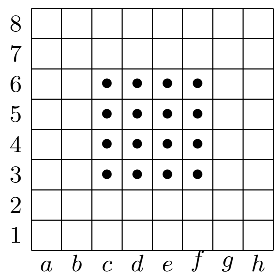
Die zweite geht aus der ersten sowie die vierte aus der dritten jeweils durch Vertauschung von a und o hervor, während man die dritte aus der ersten (sowie die vierte aus der zweiten) durch Vertauschen der Paare (a,o) und (b,d) erhält. Man rechnet leicht nach, dass dies alles Lösungen des Kryptogramms sind.

Aufgabe 311021:

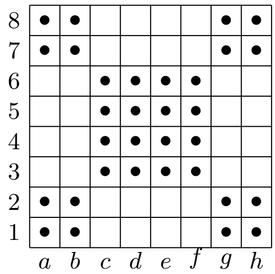


Beim Schachspiel darf die Dame auf dem Schachbrett waagerecht, senkrecht und diagonal um eine beliebige Anzahl Felder gezogen werden. Man sagt auch, diese Felder werden von der Dame bedroht. So sind in der Abbildung von der Dame auf c6 genau die markierten Felder bedroht.
Leonhard Euler (1707 - 1783) behandelte die Aufgabe, auf einem Schachbrett 8 Damen so aufzustellen, dass keine dieser Damen eine andere bedroht.
Wir wollen die Aufgabe hier durch die Zusatzforderung vereinfachen, dass keine der 8 Damen auf eines der 16 Felder gestellt werden darf, die sowohl den Zeilen 3, 4, 5, 6 als auch den Spalten c, d, e, f angehören. Man ermittle alle Aufstellungen, die diese Forderungen erfüllen.
Hinweis: Die verbotenen Felder wirken nicht etwa als Sperre der Bedrohung; z. B. bedroht eine Dame auf b3 auch die Felder g3, h3, f7 und g8.

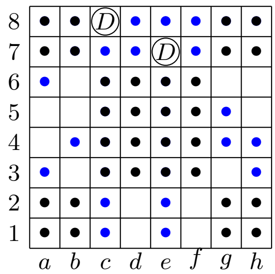
Lösung von Steffen Polster:
In der nachfolgenden Darstellung sind die gesperrten Felder mit einem Kreis markiert.



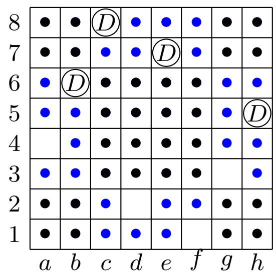
Da in der Spalte c, d, e oder f eine Dame stehen muss, ist dies nur in der 1., 2., 7. oder 8. Zeile möglich. Analog schlussfolgert man, dass Damen in der 3. bis 6. Zeile nur in der Spalte a, b, g oder h platziert werden können. Damit sind in der Spielfeld jeweils 4 Felder „damenfrei“.



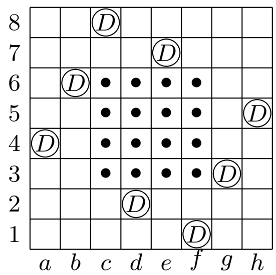
Zu Beginn sei die Dame in c8.
In der 7. Zeile kann dann die Dame nur in der Spalte e stehen, andernfalls müssten in der 1. und 2. Zeile die zwei Damen in benachbarten Spalten stehen und sich gegenseitig bedrohen.
In der Abbildung sind alle von den Damen bedrohten Felder blau markiert.



In der 6. Zeile kann nur auf b6 eine Dame platziert werden. Würde sie auf den einem der anderen noch freien Felder g6 oder h6 stehen, könnte in die 8. Spalte keine Dame untergebracht werden. Daraus folgt sofort auch h5 als Feld mit Dame.



Für die restlichen Damen sind nur noch 4 frei.



Damit ist eine mögliche Aufstellung gefunden.
Es existieren drei weitere Aufstellungen, die sich durch Drehungen um den Mittelpunkt des Spielfeldes mit $90°, 180°$ und $270°$ ergeben.

Aufgabe 321023:
Gegeben seien n zueinander parallele Geraden sowie weitere n zu ihnen senkrechte, also untereinander ebenfalls parallele Geraden.
Damit entstehen n^2 Schnittpunkte (Gitterpunkte).

Klaus versucht, einen geschlossenen (d. h. zum Anfangspunkt zurückkehrenden) Streckenzug zu zeichnen.
Jede Strecke dieses Streckenzuges soll auf einer der gegebenen Geraden liegen, und jeder Gitterpunkt soll genau einmal von dem Streckenzug erreicht werden.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 4$ und für $n = 6$ der Versuch erfolgreich realisiert werden kann!
b) Beweisen Sie, dass der Versuch für $n = 9$ nicht erfolgreich realisiert werden kann!

Lösung von cyrix:
Die Geraden einer jeden Richtung seien von 1 bis n durchnummeriert, sodass sich die Schnittpunkte als Paare (x,y) angeben lassen, wobei diese Bezeichnung für den Schnittpunkt der Gerade x der einen mit Gerade y der anderen Richtung stehe.

a) Ein Weg, der für gerade $n = 2k$ (also insbesondere für $n = 4$ und $n = 6$) die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, ist wie folgt gegeben:

$$(1,1) \to (1,n) \to (2,n) \to (2,2) \to (3,2) \to (3,n) \to (4,n) \to (4,2) \to \dots$$

$$\to (2i,2) \to (2i+1,2) \to (2i+1,n) \to (2i+2,n) \to \dots \to (n,2) \to (n,1) \to (1,1)$$

Dabei stehe $P \to Q$ für die geradlinige Verbindung von P und Q. Insbesondere müssen P und Q genau eine Koordinate gemeinsam haben, damit diese Strecke auf einer der Geraden liegt.

b) Wir zeigen allgemein, dass für ungerade n (also insbesondere für $n = 9$) kein solcher Weg möglich ist:

Wir färben die Gitterpunkte schachbrettartig im Wechsel schwarz und weiß ein. Gäbe es einen geschlossenen Weg, der o. B. d. A. bei einem schwarzen Punkt beginnt, entlang der Gitterlinien jeden der geradzahlig vielen $n^2 - 1$ weiteren Gitterpunkte genau einmal besucht und dann direkt zum Ausgangspunkt zurückkehrt, dann würde auf diesem Weg aufgrund der ungeradzahlig vielen n^2 überwundenen Teilstrecken zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten auf diesem Weg insgesamt ungeradzahlig oft die Farbe wechseln, d. h., der Ziel-Gitterpunkt müsste die Farbe weiß haben.
Dies ist aber der Ausgangsgitterpunkt, der schwarz ist, was ein Widerspruch darstellt, sodass es einen solchen Hamilton-Kreis nicht geben kann, $\square$.

Aufgabe 321024:
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm mehr als 64 Kreise mit einem Durchmesser von je 1 cm so einzubeschreiben, dass sich je zwei Kreise nicht überschneiden und dass kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt!

Lösung von cyrix:
Ja, dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Konstellation mit 68 solchen Kreisen an:

Dazu legen wir derart ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass eine seiner Ecken im Koordinatenursprung liegt, die von dieser Ecke ausgehenden Kanten auf den positiven Koordinatenachsen liegen und es die Kantenlänge 16 besitzt. (Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht als 5 mm.) Weiterhin sei $h := \frac{7}{4}$.

Wir wählen nun zwei Arten von Punkten aus:

$$M_1 := \{(1+2i; 1+2j \cdot h) | 0 \leq i \leq 7 \wedge 0 \leq j \leq 4\} \qquad \text{und}$$

$$M_2 := \{(2+2i; 1+(2j+1) \cdot h) | 0 \leq i \leq 6 \wedge 0 \leq j \leq 3\}$$

Dabei soll $M = M_1 \cup M_2$ die Menge der Mittelpunkte der ausgewählten Kreise sein. Zuerst stellen wir $|M_1| = 8 \cdot 5 = 40$ und $|M_2| = 7 \cdot 4 = 28$, also $|M| = 68$ fest, da die Punkte in M_1 ungerade und die in M_2

gerade x-Koordinaten haben, die beiden Mengen also disjunkt sind.

Weiterhin sind die x-Koordinaten aller Punkte in M mindestens 1 und höchstens $1 + 14 = 15$, gleiches gilt wegen $1 + 8 \cdot h = 1 + 14 = 15$ auch für die y-Koordinaten, sodass kein Kreis mit Radius 1 um einen beliebigen dieser Mittelpunkte Punkte außerhalb des Quadrats enthält.

Diese Mittelpunkte kann man sich hierbei in einzelnen Zeilen gleicher y-Koordinate aufgereiht vorstellen: Zuunterst eine Reihe von acht Mittelpunkten auf der Linie $y = 1$, dann eine zweite Reihe von sieben Mittelpunkten, die „mittig versetzt“ gegenüber der ersten Reihe auf der Linie $y = 1 + h$ liegen, usw., immer entsprechend im Wechsel.

Zwei Mittelpunkte auf der gleichen Zeile haben offenbar den Abstand von mindestens 2, sodass sich die Kreise mit Radius 1 um sie nicht überschneiden.

Zwei benachbarte Mittelpunkte einer Zeile bilden mit dem„zwischen ihnen“ liegenden Mittelpunkt einer benachbarten Zeile ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite der Länge 2 und Höhe auf diese der Länge h. Damit haben die beiden Schenkel nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\sqrt{1+h^2} = \sqrt{1+\frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{65}{16}} > \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2$, sodass sich auch hier keine zwei Kreise mit Radius 1 um diese Mittelpunkte überschneiden. Gleiches gilt erst recht für weiter entfernt liegende Mittelpunkte.

Damit überschneiden sich keine zwei Kreise mit Radius 1 um die in M angegebenen Mittelpunkte und auch besitzt keiner dieser 68 Kreise Punkte außerhalb des Quadrats, sodass diese Anordnung der mehr als 64 Kreise die Aussage der Aufgabenstellung erfüllt, $\square$.

Aufgabe 331024:
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, dass keine über den Rand hinausragt!

Lösung von cyrix:
Dies ist möglich. Wir geben im Folgenden eine Verteilung mit 66 Kugeln an. Dazu seien im Folgenden alle Längen in der Einheit cm gemessen, sodass wir nur die Maßzahlen angeben.

Entlang einer Kante der Grundfläche können vier Kugeln nebeneinander gelegt werden, sodass sich zwei benachbarte berühren und die beiden äußeren den jeweiligen Rand des Kastens. Von diesen Reihen können vier hintereinander auf die Grundfläche gelegt werden, sodass sich ein quadratisches Raster von 4×4 Kugeln ergibt. Deren Mittelpunkte liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche im Abstand $\frac{1}{2}$ zu ihr liegt.

Auf diese Schicht von 16 Kugeln kann nun eine zweite derart gelegt werden, dass jede Kugel der zweiten Schicht in die „Lücke“ der von vier ein „2×2-Quadrat“ bildenden Kugeln der ersten Schicht rollt und eine damit möglichst nah an der Grundfläche liegende Position (gemeint ist der Abstand des Mittelpunkts der Kugel von der Grundfläche) einnimmt.
Da sich aus dem 4×4-Raster der Kugeln der ersten Schicht genau $3 \cdot 3$ solche Lücken ergeben, können in die zweite Schicht insgesamt 9 Kugeln gelegt werden.

Die Mittelpunkte von vier Kugeln eines solchen „2×2-Quadrats“ der ersten Schicht sowie der Mittelpunkt der in der zugehörigen Lücke liegenden Kugel der zweiten Schicht bilden eine quadratische Pyramide, deren Kanten allesamt die Länge 1 besitzen. Aus Symmetriegründen liegt der Fußpunkt des Lots der Spitze dieser Pyramide auf seine Grundfläche im Mittelpunkt des Quadrats, sodass sich ein rechtwinkliges

Dreieck zwischen Eckpunkt des Quadrats, dessen Mittelpunkt und der Spitze der Pyramide ergibt und sich deshalb die Länge der Höhe h dieser Pyramide nach dem Satz des Pythagoras zu

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ergibt.

Auf gleiche Weise kann nun auf die zweite Schicht aus Symmetriegründen eine dritte Schicht, die identisch mit der ersten aufgebaut ist, gelegt werden, auf diese eine vierte Schicht, die identisch aufgebaut ist wie die zweite, und darauf eine fünfte Schicht, die wiederum identisch ist mit der ersten.

Nach Konstruktion sind auf diese Weise $16 + 9 + 16 + 9 + 16 = 66$ Kugeln in den Kasten gelegt worden, wobei keine von diesen über die Grund- oder eine der vier Seitenflächen des Kastens hinausragt. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Kugeln der fünften Schicht nicht über die Deckfläche des Kastens hinausragen.

Dazu stellen wir fest, dass nach Konstruktion die Mittelpunkt der Kugeln einer Schicht immer in einer Ebene liegen, die parallel ist zur Ebene der Kugeln der darunterliegenden Schicht, und diese beiden Ebenen einen Abstand von h besitzen.

Damit liegen die Mittelpunkte der Kugeln der fünften Schicht also in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche des Kastens liegt, und zu dieser einen Abstand von $\frac{1}{2} + 4 \cdot h = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{8} < \frac{1}{2} + 3 = 4 - \frac{1}{2}$ besitzt, also zur Deckfläche einen Abstand von mehr als $\frac{1}{2}$, sodass keine Kugel der fünften Schicht (und damit auch keine der darunterliegenden) über die Deckfläche hinausragt.

Damit ist es möglich, mehr als 64 Kugeln gemäß der Aufgabenstellung in dem Kasten unterzubringen, $\square$.

III Runde 3

Aufgabe 041034:
Von sechs Schülern einer Schule, die an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teilnahmen, erreichten zwei die volle Punktzahl. Die Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:

(1) A und C, (2) B und F, (3) F und A, (4) B und E, (5) D und A.

Nun wissen wir, dass in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.
Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Anfang wäre es wohl Kandidat A zu betrachten, da dieser in 3 Aussagen vorkommt. Wenn A nun nicht volle Punktzahl hat, da muss von diesen 3 Aussagen eine mit beiden falschen Aussagen dabei sein. Wenn nun A und C beide falsch sind, dann müssten also F und D volle Punktzahl erhalten haben. Dann wären aber B und E beide leer ausgegangen, und somit hätten wir bei Aussage (4) wieder 2 verkehrte. Das funktioniert also nicht.
Die gleiche Argumentation klappt auch für den Fall, dass A und F beide falsch sind und dass A und D beide falsch sind. A muss also volle Punktzahl erhalten haben und C, F und D nicht.
Es fehlt dann also noch die Aussage, in der beide Angaben nicht stimmen.

Nach Aussage (2) haben B und F volle Punktzahl erhalten und nach Aussage (4) B und E. B kann somit nicht volle Punktzahl erreicht haben, da in diesem Fall in beiden Aussagen eine Angabe richtig wäre.
Somit hat B nicht volle Punktzahl erreicht. Dann hat E volle Punktzahl erreicht.
Somit haben A und E volle Punktzahl erreicht.

Aufgabe 101035:
Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte.
Nach Abschluss des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt. Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt: A, der sich besser als D platzierte, erreichte wie dieser kein Remis. C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

Lösung von cyrix:
Da bei einem Turnier, in dem jeder von n Spielern gegen jeden anderen genau einmal antritt, genau $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Partien ausgetragen werden, und in diesem Turnier genau 15 Partien gespielt wurden, nahmen an diesem also $n=6$ Spieler teil. Diese seien mit A,B,C,D,E und F bezeichnet.

Sei darüber hinaus die Punktzahl des Siegers mit x_1, die des Zweitplatzierten mit x_2 usw., die des Letzten mit x_6 bezeichnet. Dann gilt $x_1>x_2>\cdots>x_6$, also, da nur Vielfache von $\frac{1}{2}$ als Punktzahlen möglich sind, $x_1\geq x_2+\frac{1}{2}$, $x_2\geq x_3+\frac{1}{2}$, $\ldots$, $x_5\geq x_6+\frac{1}{2}$ und damit insbesondere auch $x_4\geq x_6+1$, $x_3\geq x_6+\frac{3}{2}$ sowie $x_2\geq x_6+2$. Da aber nach Aufgabenstellung $x_2=x_6+2$ gilt, folgt auch Gleichheit in den vorherigen Ungleichungen, d. h. $x_5=x_6+\frac{1}{2}$, $x_4=x_6+1$ und $x_3=x_6+\frac{3}{2}$.

Da in jeder Partie insgesamt in Summe ein Punkt an beide Spieler vergeben wird, wurden im gesamten Turnier also 15 Punkte vergeben, sodass sich $x_1+x_2+\cdots+x_6=15$ ergibt. Setzt man die zuvor erhaltenen Werte für x_2 bis x_5 in Abhängigkeit von x_6 ein, wird dies zu $x_1+5\cdot x_6+5=15$. Setzt man nun zusätzlich noch $x_1\geq x_2+\frac{1}{2}=x_6+\frac{5}{2}$ ein, erhält man $6x_6+\frac{15}{2}\leq 15$ bzw. $x_6\leq\frac{15}{12}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}$. Da auch für x_6 nur Vielfache von halben Punkten zulässig sind, folgt $x_6\leq 1$.

Umgekehrt erhält man mit $x_1\leq 5$ (da auch der Sieger nicht mehr als einen Punkt pro Gegner erhalten kann) die Beziehung $5\geq x_1=10-5x_6$ bzw. $x_6\geq 1$, zusammen mit der vorherigen Abschätzung also $x_6=1$ und damit auch $x_5=\frac{3}{2}$, $x_4=2$, $x_3=\frac{5}{2}$, $x_2=3$ und $x_1=5$.

Es gibt insgesamt 9 Partien, an denen mindestens einer der beiden Spieler A oder D beteiligt war (je 4 gegen die übrigen Turnierteilnehmer und eine gegeneinander). Unter diesen war kein Remis, sodass die genau 5 Remis des Turniers alle unter den 6 Partien der Spieler B, C, E und F zu finden sind.

Damit gibt es genau zwei dieser vier Spieler, nennen wir sie X und Y, die untereinander kein Remis erzielten. Für die anderen beiden Spieler gilt, dass sie sowohl untereinander als auch gegen X und Y remis spielten. Damit haben diese beiden keine ganzzahlige Punktzahlen und müssen Dritt- und Fünftplatzierter sein.
Demnach hat C als dritter sowohl gegen E, F als auch insbesondere B remisiert.

Bemerkung: Die Aussage, dass C gegen den Vierten gewonnen hat, wurde in dieser Lösung nicht verwendet.

Aufgabe 101036:
Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet.
Es ist zu beweisen, dass es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so dass der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

Lösung von cyrix:
Wir zerlegen den Würfel durch parallele Schnitte in 27 mit je $\frac{1}{3}$ als Kantenlänge. Dann müssen in mindestens einem Teilwürfel 2 dieser 28 Punkte liegen. Der maximale Abstand, den zwei Punkte in einem Würfel haben können, entsteht, wenn sie die Endpunkte einer seiner Raumdiagonalen bilden.

Diese hat die $\sqrt{3}$-fache Länge der Kantenlänge des Würfels, woraus sich sofort die Behauptung ergibt, $\square$.

Aufgabe 141031:
In dem Schema sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.
Geben Sie alle Lösungen dafür an! (A und Ä gelten als verschiedene Buchstaben.)

$$\begin{array}{ccccc} & A & R & Z & T \\ & A & R & Z & T \\ \hline Ä & R & Z & T & E \end{array}$$

Lösung von weird:
Indem wir nachfolgend die oben auftretenden Buchstaben gleich als Variablennamen mit den ihnen entsprechenden Zahlenwerten verwenden, können wir, da offenbar $\ddot{A} = 1$ gelten muss, sofort die Gleichung

$$2(1000A + 100R + 10Z + T) = 10000 + 1000R + 100Z + 10T + E$$

aufstellen, aus welcher sich nach einer einfachen Umformung

$$100R + 10Z + T = 250(A - 5) - \frac{E}{8}$$

ergibt. Aus dieser kann man zunächst unmittelbar folgern, dass E durch 8 teilbar sein muss, und da $E = 0$ sofort auf den Widerspruch $T = E$ führen würde, bleibt als nur mehr die Möglichkeit $E = 8$.
Da $100R+10Z+T$ jedenfalls positiv ist, bleiben dann für A nur mehr eine der Möglichkeiten $A \in \{6,7,8,9\}$, wobei auch die Fälle $A = 7$ und $A = 9$ sofort ausscheiden, da sie auf den Widerspruch $Z = T = 9$ führen würden und auch $A = E = 8$ natürlich nicht geht. Es bleibt also nur mehr der Fall

$$A = 6,\ 100R + 10Z + T = 249$$

übrig, welcher dann auch tatsächlich eine Lösung der Aufgabe ist:

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 2 & 4 & 9 \\ & 6 & 2 & 4 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 9 & 8 \end{array}$$

Aufgabe 161033:
Bei dem folgenden Kryptogramm sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, dass eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

$$\begin{array}{ccccc} & I & N & E & S \\ + & J & E & N & S \\ + & A & M & E & S \\ \hline N & A & M & E & N \end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass es im dekadischen Zahlensystem keine Lösung der Aufgabe gibt!
b) Zeigen Sie, dass die Aufgabe im System mit der Basis 8 eine Lösung hat, und geben Sie alle Lösungen in diesem System an!
Hinweis: Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 7$ $(i = 0, \ldots, n)$ und $a_n > 0$, so bezeichnet man durch Hintereinanderschreiben $a_n \ldots a_2 a_1 a_0$ im System mit der Basis 8 die Zahl

$$z = a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \cdots + a_2 8^2 + a_1 8^1 + a_0 8^0$$

Zur Unterscheidung von der Zahl mit denselben Ziffern im dekadischen Zahlensystem kann man die Zahl z auch mit $z = [a_n ... a_2 a_1 a_0]_8$ bezeichnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gäbe eine Lösung. Wir betrachten die einzelnen Spalten der Aufgabe.
Es werden jeweils drei einstellige Zahlen (und gegebenenfalls ein Übertrag) addiert. Wegen $3 \cdot 9 = 27$ kann dabei aus der letzten Spalte höchstens ein Übertrag von 2 in die nächstfolgende Spalte erfolgen. Wegen $3 \cdot 9 + 2 = 29$ gilt dies auch für die übrigen Spalten.
Daher kommt wegen $I + J + A(+\ddot{U}) = A + 10N$ und $I + J + \ddot{U} = 8 + 9 + 2$ für N nur der Wert 1 in Frage. Daraus folgt $S = 7$. Nun müsste in der zweitletzten Spalte $SE + 1 + 2 = E + k \cdot 10$ (k ganzzahlig) sein, woraus $E = 7$ folgen würde im Widerspruch zu $E \neq S$. Daher gibt es im dekadischen System keine Lösung der Aufgabe.

b) Angenommen, die Aufgabe hat im System mit der Basis 8 eine Lösung.
Dann gilt wegen $3 \cdot 7 = [25]_8$, $3 \cdot 7 + 2 = [27]_8$ dass ein möglicher Übertrag in jeder Spalte höchstens 2 betrage kann. Analog wie bei a) folgt daraus $N = 1$. Wegen

$$\begin{array}{ccccc} 3 \cdot 0 = 0 & 3 \cdot 1 = 3 & 3 \cdot 2 = 6 & 3 \cdot 3 = [11]_8 & 3 \cdot 4 = [14]_8 \\ 3 \cdot 5 = [17]_8 & 3 \cdot 6 = [22]_8 & 3 \cdot 7 = [25]_8 & & \end{array}$$

folgt hieraus $S = 3$. Nun gilt in der vorletzten Spalte $2E + 1 + 1 = E + k \cdot [10]_8$ (k ganzzahlig), woraus man $E = 6$ und $k = 1$ erhält.
In der zweiten Spalte entsteht dabei bei Addition von $1 + N + E + M = 1 + 1 + 6 + M$ ein Übertrag von 1. Die erste Spalte liefert somit $I + J + A + 1 = A + N \cdot [10]_8$, also $I + J + 1 = [10]_8$ bzw. $I + J = 7$.
Mit den von N, S, E verschiedenen Ziffern $0, 2, 4, 5, 7$ ist dies wegen $I \neq 0$, $J \neq 0$ nur dadurch möglich, dass entweder $I = 2$ und $J = 5$ oder $J = 2$ und $I = 5$ gilt.

Damit verbleiben für A ($\neq 0$) nur die Ziffern 4 und 7 und für M nur die von A verschiedenen unter den Ziffern 0, 4 und 7. Die Aufgabe kann also höchstens durch die folgenden Ersetzungen im System mit der Basis 8 gelöst werden:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 5 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 4 & 0 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 4 & 7 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 7 & 0 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 7 & 0 & 6 & 1_8 \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} & & 5 & 1 & 6 & 3 \\ + & & 2 & 6 & 1 & 3 \\ + & & 7 & 4 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 7 & 4 & 6 & 1_8 \end{array}$$

Da diese Ersetzungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind sie die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 171035:
Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, dass bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so dass die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Lösung von Kornkreis:
Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist $(101 - m)$ die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen.
Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten $101 - m$ ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein.
Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl (in der Aufgabe geht es speziell um $n = 100$).
Nehmen wir nun an, wir könnten eine Auswahl von $n+1$ verschiedenen Zahlen aus $\{1, \ldots, 2n\}$ treffen, sodass keine Zahl dieser Auswahl ganzzahliges Vielfaches einer anderen Zahl dieser Auswahl ist. Wir betrachten nun so eine Auswahl. Diese besteht aus $a \geq 0$ Zahlen aus $A := \{1, \ldots, n\}$ und $b \geq 0$ Zahlen aus $B := \{n+1, \ldots, 2n\}$. Nach Voraussetzung gilt $a + b = n + 1$.

Jedes natürliche $m \in A$ kann durch Multiplikation mit einer Zweierpotenz auf eine Zahl in B abgebildet werden: Ansonsten gäbe es nämlich ein natürliches $r \geq 0$ mit $m \cdot 2^r < n + 1$ und $m \cdot 2^{r+1} > 2n$, woraus dann $2n < m \cdot 2^{r+1} < 2n + 2$ folgen würde, Widerspruch.

Weiterhin sind für beliebige $m_1, m_2 \in A$ (aus der Auswahl der a Zahlen aus A) die Zahlen $m_1 \cdot 2^{r_1} \in B$ und $m_2 \cdot 2^{r_2} \in B$ verschieden, da sonst aus $m_1 \cdot 2^{r_1} = m_2 \cdot 2^{r_2}$ (nach Division durch die kleinste der beiden Zweierpotenzen) $m_1 | m_2$ oder $m_2 | m_1$ folgen würde, Widerspruch zur speziellen Auswahl der $n+1$ Zahlen. Ebenso stimmt auch keine der b Zahlen aus B mit einem $m \cdot 2^r \in B$ überein, wobei m eine der a Zahlen aus A sei.

Daraus folgt nun $a+b \leq n$, da B genau n Elemente besitzt. Dies steht aber im Widerspruch zu $a+b = n+1$. Daher kann es keine solche spezielle Auswahl geben, was die Behauptung der Aufgabenstellung beweist.

Aufgabe 181034:
Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen Sie folgende Aussagen:
(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.
Ist es möglich, dass a) alle vier Aussagen b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

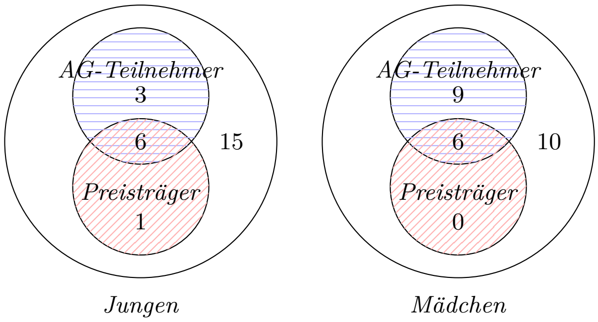
A B D	wahre Aussagen	falsche Aussagen
b r w	(1),(2), (3)	(4)
b w r	(2),(4)	(l), (3)
r b w	(l), (2)	(3),(4)
r w b	(l), (2)	(3),(4)
w b r	(1),(2)	(3),(4)
w r b	(l)	(2),(3),(4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass a) und e) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

Aufgabe 201031:
In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:
(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.
(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.
(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden „Preisträger“ genannt.)
(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.
(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.
Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

Lösung von Steffen Polster:



Aus dem Aufgabentext ergibt sich sofort für die Anzahl Mädchen M und die Anzahl Jungen J: $M = J = 25$. Für die Preisträger gilt, dass jeweils 6 Mädchen und 6 Jungen Preise errangen, die gleichzeitig AG-Mitglied sind. Da kein weibliches AG-Mitglied ohne Preis blieb, muss ein Junge aus einer AG keinen Preis errungen haben.
Eintragen der Daten in zwei Diagramme ergibt dann: 15 Jungen sind kein Preisträger und in keiner AG.

Aufgabe 221034:
Beweisen Sie folgende Aussage:
In einem Quadrat mit der Seitenlänge a gibt es zehn Punkte, die so im Innern oder auf dem Rande des Quadrates gelegen sind, dass je zwei dieser zehn Punkte einen Abstand größer als $\frac{2}{5}a$ zueinander haben.

Lösung von cyrix:
Wir starten auf einer der Kanten des Quadrates und wählen deren Endpunkte und den Mittelpunkt aus. Je zwei benachbarte dieser ausgewählten Punkte haben einen Abstand von $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$.

Auf der Parallele zu dieser Grundseite im Abstand $\frac{1}{3}a$ wählen wir zwei Punkte aus, jeweils im Abstand $\frac{1}{4}a$ zum jeweiligen Seitenrand des Quadrats. Dann haben diese beiden Punkte untereinander den Abstand $\frac{1}{2}a > \frac{2}{5}a$. Jeder der beiden Punkten bildet mit den zwei „benachbarten“ Punkten der Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge $\frac{1}{2}a$ und Höhe $\frac{1}{3}a$ auf dieser.
Damit haben die beiden Schenkel eine Länge von $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot a = \sqrt{\frac{9+16}{4^2 \cdot 3^2}} \cdot a = \frac{5}{12}a > \frac{2}{5}a$, sodass auch hier keine zwei Punkte einen zu kleinen Abstand zueinander besitzen.

Auf der Parallele zu Grundseite im Abstand von $\frac{2}{3}a$ wählen wir die Punkte wieder aus wie auf der Grundseite selbst, sodass diese an der Parallelen im Abstand $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite gespiegelt wurde. Es ergeben sich dadurch die gleichen Abstände wie in der eben durchgeführten Überlegung.

Schließlich wählen wir die letzten zwei noch fehlenden Punkte auf der Parallelen zur Grundseite im Abstand von $\frac{3}{3}a$, also der gegenüberliegenden Quadratseite, wieder genauso aus wie auf der Parallelen im Abstand von $\frac{1}{3}a$ zur Grundseite, sodass sich das Muster entsprechend fortsetzt.

Damit haben wir 10 Punkte in bzw. auf dem Rand des Quadrats angegeben, sodass keine zwei verschiedene einen Abstand von $\frac{2}{5}a$ oder weniger zueinander haben, $\square$.

Aufgabe 231033:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen so in zwei Mengen A und B einteilt, dass jede natürliche Zahl in genau einer dieser beiden Mengen enthalten ist, dann gibt es eine natürliche Zahl d so, dass in einer der beiden Mengen A, B drei Zahlen der Form a, $a+d$, $a+2d$ enthalten sind (man könnte auch sagen, dass (mindestens) eine der beiden Mengen A, B eine arithmetische Folge der Länge 3 enthält).

Lösung von Nuramon:
Angenommen es gäbe solche Mengen A,B. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $0 \in A$. Um langatmige Formulierungen zu vermeiden, benutzen wir im Folgenden Matrizen wie beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & X & Y & Z \end{pmatrix}$, um auszudrücken, dass $0 \in A, 1 \in X, 2 \in Y, 3 \in Z$.

Wir unterscheiden nach allen möglichen Verteilungen von 0,1,2,3 auf A und B und zeigen jeweils, dass 8 sowohl in A als auch in B liegen müsste, was einen Widerspruch darstellt.

Fall 1: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & A \end{pmatrix}$
Die arithmetischen Folgen (0,3,6) und (1,3,5) zeigen, dass dann $5{,}6 \in B$. Die Folgen (4,5,6) und (5,6,7) zeigen, dass $4{,}7 \in A$. Also $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$
Wegen (0,4,8) müsste $8 \in B$ sein. Wegen (2,5,8) müsste andererseits aber $8 \in A$ gelten. Widerspruch!

Fall 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (2,3,4) folgt $4 \in A$. (1,4,7) zeigt dann $7 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & & & B \end{pmatrix}$
(3,5,7) zeigt jetzt $5 \in A$. (4,5,6) zeigt dann $6 \in B$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & A & B & B & A & A & B & B \end{pmatrix}$
Wegen (6,7,8) folgt $8 \in A$, was im Konflikt mit der Folge (0,4,8) steht.

Fall 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & A \end{pmatrix}$.
Mit (2,3,4) folgt direkt $4 \in B$. (0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (4,5,6) folgt dann $5 \in A$. (1,4,7) zeigt $7 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & A & B & A & B & A \end{pmatrix}$
Nun stehen aber (2,5,8) und (4,6,8) im Konflikt zueinander.

Fall 4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ A & B & A & B \end{pmatrix}$
(0,2,4) zeigt $4 \in B$. (1,3,5) zeigt $5 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ A & B & A & B & B & A \end{pmatrix}$
(1,4,7) zeigt $7 \in A$, woraus mit (5,6,7) dann $6 \in B$ folgt: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & A & B & B & A & B & A \end{pmatrix}$
Der Widerspruch folgt jetzt aus (4,6,8) und (2,5,8).

Fall 5: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ A & B & B & A & \end{pmatrix}$
(0,3,6) zeigt $6 \in B$. Mit (2,4,6) folgt dann $4 \in A$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ A & B & B & A & A & & B \end{pmatrix}$
(3,4,5) zeigt $5 \in B$. Mit (5,6,7) ist dann $7 \in A$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & B & B & A & A & B & B & A \end{pmatrix}$
Der Widerspruch folgt aus (0,4,8) und (2,5,8).

In allen anderen Fällen gäbe es schon unter den Zahlen 0,1,2,3 eine arithmetische Folge der Länge 3, die ganz in A oder ganz in B liegt.

Aufgabe 271036:

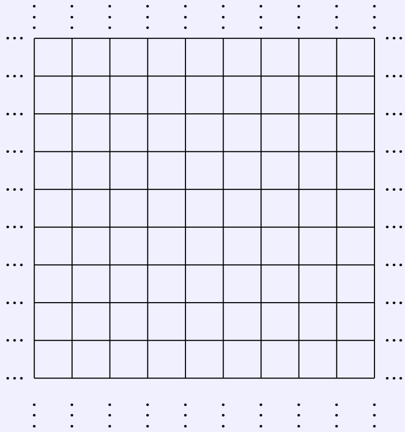


Abbildung a)

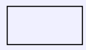


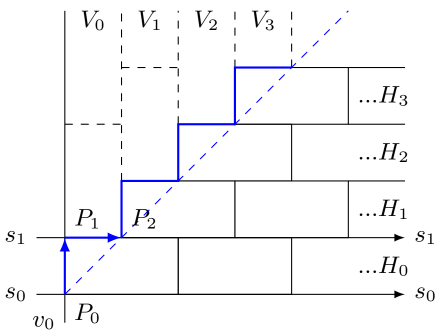
Abbildung b)

Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt (Abbildung a).
Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm (Abbildung b) so ausgefüllt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
Kein Punkt der Ebenen soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen.
Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen, beliebig herausgegriffenen Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke.
Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein derartiges Ausfüllen der Ebene E ist möglich, wie sich z. B. folgendermaßen nachweisen lässt:

Auf einer der horizontalen Geraden g_0 betrachte man ihren Schnittpunkt P_0 mit einer vertikalen Geraden v_0 und einen Strahl s_0, der auf g_0 von P_0 ausgeht. (siehe Abbildung)

Eine zu g_0 benachbarte horizontale Gerade g_1 schneide v_0 in P_1; der von P_1 ausgehende zu g_0 gleichsinnig parallele Strahl sei s_1. Die Strahlen s_0, s_1 und die Strecke P_0P_1 begrenzen einen Halbstreifen H_0, der mit Rechtecken der genannten Art ausgefüllt werde.



Er werde ferner längs des Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_0P_1}$ und dann längs eines Verschiebungspfeils $\overrightarrow{P_1P_2}$, der um 1 cm in Richtung s_1 verläuft, verschoben; dabei entsteht ein ebenfalls ausgefüllter Halbstreifen H_1. Aus H_1 bilde man entsprechend H_2, aus H_2 ebenso H_3 ... u. s. w.

Es entsteht eine treppenförmige Lagerung L von Rechtecken.
Verschiebt man sie längs $\overrightarrow{P_1P_2}$ und spiegelt dann an der Geraden durch P_0, P_2, so erhält man eine Lagerung, die sich aus ausgefüllten vertikalen Halbstreifen $V_0, V_1, V_2, \ldots$ zusammensetzt und zusammen mit der Lagerung L einen Quadranten der Ebene E ausfüllt.

Durch Spiegelung an g_0 und v_0 erhält man schließlich eine Ausfüllung der gesamten Ebene E. Für sie gilt:

1. Jede der gegebenen horizontalen Geraden hat mit jedem Halbstreifen H_i der Lagerung L höchstens Randpunkte gemeinsam, zerlegt also keines der Rechtecke, die H_i ausfüllen, in kleinere Flächenstücke.
2. Jede der gegebenen vertikalen Geraden hat wegen des treppenförmigen Aufbaus der Lagerung L höchstens mit endlich vielen der Halbstreifen H_i gemeinsame Punkte und kann daher auch höchstens endlich viele der Rechtecke, die L ausfüllen, in kleinere Flächenstücke zerlegen.

Entsprechende Aussagen gelten für die durch Verschiebung und Spiegelung aus L entstehenden Lagerungen; dabei ist für diejenigen Lagerungen, die aus vertikalen Halbstreifen bestehen, überall „horizontal“ und „vertikal“ zu vertauschen.

Daraus folgt insgesamt, wie gefordert, dass jede der gegebenen vertikalen und horizontalen Geraden nur endlich viele der zur Ausfüllung von E verwendeten Rechtecke in kleinere Flächenstücke zerlegt.

Aufgabe 291032:
In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geq 3$ von Städten $S_1, S_2, ..., S_n$.
Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes.
Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n-1$ Farben so gefärbt, dass für jede Stadt gilt:
Die $n-1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n-1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.
Untersuchen Sie für jedes $n \geq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, dass für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!
(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, 2, ..., n)$ gilt:
Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

Lösung von Nuramon:
Es gibt für jedes $n \geq 3$ so eine Färbung der Straßen.

Notation: Wenn die Straße von S_i nach S_j mit der Farbe f gefärbt ist, dann schreiben wir $S_i \xrightarrow{f} S_j$.

Im Folgenden geben wir für jede Stadt an, wie man die von ihr ausgehenden Straßen mit den Farben 1,2, ..., $n-1$ färben kann:

- Für S_1 färben wir $S_1 \xrightarrow{1} S_2$ und $S_1 \xrightarrow{2} S_3$. Mit jeder der Farben 3,4, ..., $n-1$ färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_1 ausgehenden Straßen.

- Für S_2: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{1} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{2} S_1$.

Falls $n > 3$, dann färben wir $S_2 \xrightarrow{2} S_3$ und $S_2 \xrightarrow{1} S_n$. Die restlichen Farben verteilen wir wieder beliebig auf die übrigen Straßen, die von S_2 ausgehen.

- Für S_k mit $2 < k < n-1$ färben wir $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und $S_k \xrightarrow{k} S_{k+1}$. Mit den von 1 und k verschiedenen Farben färben wir in beliebiger Weise je eine der restlichen von S_k ausgehenden Straßen.

- Für S_{n-1} färben wir $S_{n-1} \xrightarrow{1} S_2$ und $S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.

- Für S_n: Falls $n = 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_1$.
Falls $n > 3$, dann färben wir $S_n \xrightarrow{1} S_2$ und $S_n \xrightarrow{2} S_3$. Die restlichen Straßen seien wieder beliebig, aber in gültiger Weise, gefärbt.
Wir wählen jetzt die Reihenfolge $F_1 = 1, F_2 = 2, \ldots, F_{n-1} = n-1$. Diese erfüllt die Bedingung (*), denn:

- Falls wir bei S_1 starten, dann erhalten wir die Fahrt:

$$S_1 \xrightarrow{1} S_2 \xrightarrow{2} S_3 \xrightarrow{3} S_4 \xrightarrow{4} \ldots \xrightarrow{n-2} S_{n-1} \xrightarrow{n-1} S_1$$

- Falls wir bei S_k mit $k \neq 2$ starten, so beginnt die Fahrt mit $S_k \xrightarrow{1} S_2$ und verläuft anschließend auf der gleichen Route wie die obige Fahrt.
- Falls wir bei S_2 starten: Für $n = 3$ erhalten wir die Fahrt $S_2 \xrightarrow{1} S_3 \xrightarrow{2} S_1$. Für $n > 3$ startet die Fahrt mit $S_2 \xrightarrow{1} S_n \xrightarrow{2} S_3$ und verläuft anschließend wieder auf der gleichen Route, wie die Fahrt, die bei S_1 startet.
In jedem Fall endet die Fahrt bei S_1 und somit ist (*) erfüllt.

Aufgabe 331034:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ + & \mathrm{E} & \mathrm{I} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \\ \hline = & \mathrm{F} & \mathrm{Ü} & \mathrm{N} & \mathrm{F} \end{array}$$

Das nebenstehende Kryptogramm stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, dass eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.
Dabei soll auch die Regel beachtet werden, dass als Anfangsziffer (für E und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf.
Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Untersuchen Sie, ob eine Lösung existiert! Wenn das der Fall ist, untersuchen Sie, ob verschiedene Lösungen existieren und geben Sie jede Lösung an!
Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht jeder Buchstabe in der einen dieser Lösungen durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Lösung von cyrix:
Da die fünf Summanden untereinander gleich sind, ist die Summe ein Vielfaches von 5, endet also auf die Ziffer 0 oder 5. Da F auch die führende Ziffer der Summe ist, folgt $F = 5$ und damit auch, dass S ungerade ist.

Da in der Tausenderstelle bei der Addition kein Übertrag entsteht, muss $5 \cdot E < 10$ gelten, woraus wegen $E \neq 0$ sofort $E = 1$ folgt. Da $5 \cdot E = F$ gilt, darf auch in der Hunderterstelle kein Übertrag entstehen.

Also muss auch $5 \cdot I < 10$ und wegen $I \neq E = 1$ also $I = 0$ gelten. Also ist $\ddot{U} \geq 2$ der Übertrag, der aus der Zehnerstelle erhalten wird.

Ist u der Übertrag, der bei der Addition der Einerstellen entsteht, so it wegen $S \neq 1$ direkt $S \geq 3$, also $u \geq 1$. Andererseits ist $S \leq 9$, also $u \leq 4$.
An der Zehnerstelle gilt also $5 \cdot N + 4 \geq 5 \cdot N + u = N + 10 \cdot \ddot{U} \geq 20 + N$ bzw. $4 \cdot N \geq 16$, also $N \geq 4$.

Fall 1: $N = 4$. Dann ist $5 \cdot N = 20$, sodass $u = 4$ (daraus $S = 9$) und $\ddot{U} = 2$ folgt. Wir erhalten die Lösung

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ + & 1 & 0 & 4 & 9 \\ \hline = & 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Fall 2: $N = 6$ oder $N = 8$. Dann endet $5 \cdot N + u$ auf die Ziffer $u \leq 4 < N$, sodass sich hier keine Lösung ergibt.
Fall 3: $N = 5$. Dann wäre $N = F$, sodass hier keine Lösung existiert.
Fall 4: $N = 7$. Dann ist $5 \cdot N = 35$, also $u = 2$, woraus $S = 5 = F$ folgt, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Fall 5: $N = 9$. Dann ist $5 \cdot N = 45$, also $u = 4$, woraus der Widerspruch $S = 9 = N$ folgt.

Damit gibt es für das Kryptogramm nur die genau eine, bereits angegebene, Lösung.

Aufgabe 341034:
Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt.
Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt.
Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, dass jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.
Eine Zahl n werde genau dann eine „freundliche“ Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:
Bei jeder Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, dass das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.
Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle „freundlichen“ Zahlen!

Lösung von cyrix:
Für jede symmetrische Belegung gilt, dass die 10 Teilquadrate oberhalb der Diagonalen AC jeweils die gleiche Farbe wie die 10 Teilquadrate unterhalb dieser Diagonalen haben müssen, während die Farben der 5 Diagonalfelder beliebig sind. Dies ist auch hinreichend. Aus einer Auswahl von 25 Blättchen lässt sich also genau dann keine zu AC symmetrische Belegung erzeugen, wenn sie keine 10 paarweise disjunkte Paare von gleichfarbigen Blättchen besitzt.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Anzahl der Blättchen der Farbe $1, 2, \ldots, n$ unter den 25 ausgewählten, dann lassen sich aus diesen maximal

$$P := \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{2}\right]$$

solcher Paare bilden. Wegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 25$ ist $P = \frac{25-u}{2}$, wobei u die Anzahl der ungeraden Zahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. (Dann ist, da 25 ungerade ist, auch u ungerade und somit P eine ganze Zahl.) Aus diesen Blättchen lässt sich also genau dann keine bezüglich AC symmetrische Belegung bilden, wenn es mehr als 5, also mindestens 7 ungerade Blättchenanzahlen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt.

Dafür muss aber $n \geq 7$ sein. Dies bedeutet, dass alle $n \leq 6$ „freundlich" sind. Ist jedoch $n = 7$, so kann man $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 1$ und $a_7 = 19$, bzw. für $n > 7$ schließlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$ (und Rest beliebig ≥ 1) auswählen, sodass bei dieser Wahl jeweils keine bezüglich AC symmetrischen Belegungen möglich sind. Also sind alle $7 \leq n \leq 25$ „unfreundlich".

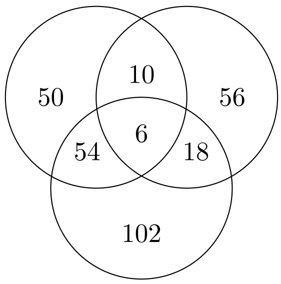
IV Runde 4

Aufgabe 041046:
In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

- 120 Schüler die Zeitschrift „Technikus"
- 90 Schüler die Zeitschrift „Fröhlichsein und Singen"
- 180 Schüler die Zeitschrift „Die Trommel"
- 60 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel" und „Technikus"
- 16 Schüler die Zeitschriften „Technikus" und „Fröhlichsein und Singen"
- 24 Schüler die Zeitschriften „Die Trommel" und „Fröhlichsein und Singen"
- 6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I. a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?
b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig? II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

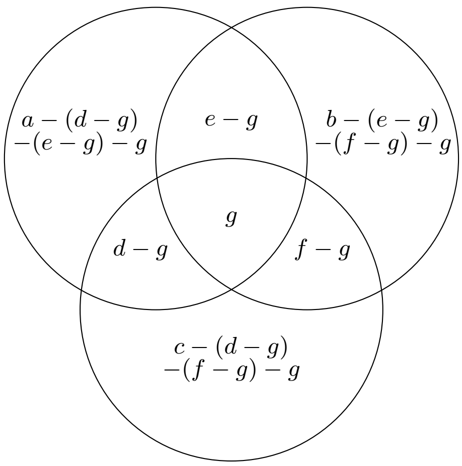
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



1)

Die Lösungen zu I) ergeben sich aus der Abbildung 1:

a) 208 Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften.
b) 296 Schüler lesen mindestens eine der Zeitschriften, 4 also keine.



2)

Die Lösungen zu II ergeben sich aus Abbildung 2:

x: Zahl der Schüler, die genau eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
y: Zahl der Schüler, die mindestens eine der Zeitschriften regelmäßig lesen.
z: Zahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmäßig lesen.

$$x = a + b + c - 2(d + e + f) + 3g$$
$$y = a + b + c - (d + e + f) + g$$
$$z = a + d + e + f - (a + b + c + g)$$

Aufgabe 081044:
Im Innern eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien 288 Punkte gelegen. Es soll eine Anzahl von Parallelen zu AB derart gezogen werden, dass auf ihnen durch die Strecken AD und BC jeweils (zu AB parallele) Strecken abgeschnitten werden. Ferner soll von jedem der 288 Punkte auf genau eine der Parallelen das Lot gefällt werden.
Man beweise: Bei jeder Verteilung der 288 Punkte im Innern des Quadrates ist es möglich, die Parallelen und die Lote so zu wählen, dass die Summe L der Längen aller dieser Parallelstrecken und aller dieser Lote kleiner als $24a$ wird.

Lösung von cyrix:
Zeichnen wir die zwölf Parallelstrecken im Abstand $\frac{1}{24}a$, $\frac{3}{24}a$, $\frac{5}{24}a$, ..., $\frac{23}{24}$ zu AB in das Quadrat ein, so liegt jeder Punkt im Inneren (oder auf dem Rand) des Quadrats in einer Entfernung von höchstens $\frac{1}{24}a$ zur nächsten dieser Parallellinie, sodass das Lot des Punktes auf diese Parallellinie höchstens diese Länge besitzt.
Also ist die Summe der Länge aller dieser Lote höchstens $288 \cdot \frac{1}{24}a = 12a$. Hinzu kommen die Streckenlängen der Parallelstrecken, welche jeweils a lang sind, sodass für diese Verteilung $L \leq 24a$ folgt.

Liegt mindestens einer der 288 Punkte nicht auf einer Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit einer natürlichen Zahl $1 \leq k \leq 11$, so ist sein Lot zu seiner nächstgelegenen eingezeichneten Parallelstrecke echt kleiner als $\frac{1}{24}a$, sodass für diese Verteilung sogar $L < 24a$ folgt. (Der Punkt darf ja laut Aufgabenstellung nicht auf dem Rand liegen, sodass die Fälle $k = 0$ und $k = 12$ auch nicht möglich sind.)

Andernfalls liegen alle 288 Punkte auf einer der elf Parallelen zu AB im Abstand von $\frac{2k}{24}$ mit $1 \leq k \leq 11$, sodass man anstatt der oben genannten nun diese 11 Parallelstrecken einzeichnen kann. Die Lote der Punkte auf die Strecke, auf der sie liegen, sind jeweils 0 lang, sodass in diesem Fall L nur aus den Längen der Parallelstrecken besteht, also man in diesem Fall sogar $L = 11a < 24a$ erreichen kann.

Aufgabe 101041:
Bilden Sie alle Mengen von fünf ein- oder zweistelligen Primzahlen derart, dass in jeder dieser Mengen jede der Ziffern 1 bis 9 genau einmal auftritt!

Lösung von cyrix:
Sei M eine solche Menge. Wir geben für einige Ziffern alle ein- und zweistelligen Primzahlen an, in denen sie als Ziffer enthalten sind:

2: 2, 23, 29 | 4: 41, 43, 47 | 5: 5, 53, 59 | 6: 61, 67 | 8: 83, 89

Da die fünf Primzahlen insgesamt 9 Ziffern besitzen sollen, ist unter ihnen genau eine einstellige und sind die übrigen vier zweistellig.

Fall 1: Es ist $2 \in M$. Dann muss die 5 in einer zweistelligen Primzahl vorkommen.

Fall 1.1: $53 \in M$. Dann muss auch $89 \in M$ sein, da sonst die Ziffer 8 nicht mehr vorkommen kann.
Fall 1.1.1: $61 \in M$. Dann muss auch, um die Ziffer 4 abzudecken, $47 \in M$ sein. Wir erhalten $M_1 = \{2, 53, 89, 61, 47\}$.
Fall 1.1.2: $67 \in M$. Dann muss zur Abdeckung der Ziffer 4 auch $41 \in M$ sein, sodass wir $M_2 = \{2, 53, 89, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 1.2: $59 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der 8, dass $83 \in M$.
Fall 1.2.1: $61 \in M$. Zur Abdeckung der 4 muss dann auch $47 \in M$ gelten.
Wir erhalten $M_3 = \{2, 59, 83, 61, 47\}$.
Fall 1.2.2.: $67 \in M$. Für die Ziffer 4 muss dann auch $41 \in M$ sein, sodass $M_4 = \{2, 59, 83, 67, 41\}$ folgt.

Fall 2: Es ist $23 \in M$. Dann folgt zur Abdeckung der Ziffer 8 auch $89 \in M$. Es folgt, dass die 5 nur allein stehen kann, also $5 \in M$. Zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6 gibt es nun wieder zwei Möglichkeiten, sodass wir die beiden Mengen $M_5 = \{23, 89, 5, 61, 47\}$ und $M_6 = \{23, 89, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Fall 3: Es ist $29 \in M$. Dann folgt analog dem zweiten Fall, dass $83 \in M$ und $5 \in M$. Wieder ergeben sich die gleichen zwei Möglichkeiten zur Abdeckung der Ziffern 4 und 6, sodass wir abschließend die beiden Mengen $M_7 = \{29, 83, 5, 61, 47\}$ und $M_8 = \{29, 83, 5, 67, 41\}$ erhalten.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass es genau diese acht Mengen gibt, die der Aufgabenstellung genügen.

Aufgabe 121043B:
Dirk und Jens spielen ein Spiel mit folgenden Regeln:
Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen „Zug“. Ein „Zug“ besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen.
Dabei darf keiner der Spieler den gleichen „Zug“ zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen.
Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am „Zug“ befindliche Spieler aber keinen „Zug“ nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

Lösung von cyrix:
Nein, kein Spieler kann den Sieg erzwingen. Dies wird im Folgenden bewiesen:
Sei o. B. d. A. Dirk der anziehende Spieler.

a) Dirk kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Indem Dirk in seinem ersten Zug drei Hölzchen nimmt, verbleiben Jens noch vier, sodass er nicht direkt gewinnen kann.

Wählt Jens nun zwei oder drei Hölzchen, verbleiben für Dirks zweiten Zug noch höchstens zwei, sodass er durch deren Wegnahme gewinnen würde. Also hat Jens nur die Möglichkeit, Dirks Sieg zu verhindern, indem er in seinem ersten Zug genau ein Hölzchen zieht. Dann hat Dirk für seinen zweiten Zug genau drei Hölzchen vor sich liegen, die er aber nicht alle gleichzeitig nehmen kann, da er im vorherigen Zug drei Hölzchen genommen hatte.

Würde Dirk nun ein Hölzchen ziehen, verblieben für Jens zwei, die dieser auch nehmen und damit gewinnen kann. Also muss Dirk zwei der letzten drei Hölzchen wegnehmen, sodass Jens sich nur noch einem einzigen Hölzchen gegenüber sieht, was er aber nicht nehmen kann, da er im letzten Zug auch nur ein einzelnes gezogen hatte.

Dirk kann also durch die Wahl dieses Startzugs (und der weiteren Züge wie hier angegeben) verhindern, dass er verliert und zumindest ein Unentschieden erzwingen.

b) Jens kann erzwingen, dass er nicht verliert:
Wenn Dirk im ersten Zug drei Hölzchen wegnimmt, kann Jens – wie eben gesehen – auch verhindern, dass er verliert, und mindestens ein Unentschieden erzwingen. Nimmt Dirk dagegen im ersten Zug zwei Hölzchen, so verbleiben für Jens' ersten Zug noch fünf. Indem er nun ein Hölzchen zieht, kann er auch in diesem Fall erzwingen, dass er nicht verliert:
Für Dirks zweiten Zug liegen noch vier Hölzchen da. Nimmt dieser nur ein Hölzchen, kann Dirk im zweiten die verbleibenden drei wegnehmen und gewinnen. Also muss Dirk in seinem zweiten Zug drei Hölzchen (zwei ist aufgrund seines ersten Zugs verboten) wegnehmen, sodass Jens nur eines verbleibt, was er aber nicht nehmen kann. Das Spiel endet hier also unentschieden.

Abschließend ist noch zu betrachten, wie Jens agieren sollte, wenn Dirk in seinem ersten Zug nur ein Hölzchen genommen hat. Dann kann Jens in seinem ersten Zug auch ein Hölzchen ziehen, sodass für Dirks zweiten Zug noch genau fünf Hölzchen daliegen. Dirk muss nun zwei oder drei Hölzchen ziehen (da eines aufgrund seines ersten Zugs verboten ist), sodass drei oder zwei verbleiben, die aber Jens in jedem Fall dann in seinem zweiten Zug nehmen und damit gewinnen kann.

Also kann in jedem Fall, egal wie Dirk zieht, Jens durch seine Spielweise erreichen, dass er nicht verliert. Da beide Spieler erreichen können, dass sie nicht verlieren, kann keiner den Sieg erzwingen.

Aufgabe 121046:
Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.
Die erste Karawane marschierte jeweils drei Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils zwei Tage hintereinander und legte dann zwei Ruhetage ein.
Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B, C, D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.
Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.
Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.
Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

Lösung von cyrix:
Es sei $n = 4q + r$ mit $n,q,r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0 \leq r < 4$ die Anzahl der Tage, die beide Karawanen von A nach B unterwegs sind. Da die erste Karawane in C nicht nach einer durch 4 teilbaren Tagesanzahl ankommt (das wäre ja einer ihrer Ruhetage), kann n nicht gerade sein (da sie nach $2n$ Tagen C erreicht). Also ist r entweder 1 oder 3.
Letzteres kann aber nicht sein, da die zweite Karawane an allen solch darstellbaren Tagen einen Ruhetag einlegt, also dann nicht gleichzeitig mit der ersten Karawane in B hätte eintreffen können. Es gibt also eine nicht-negative ganze Zahl q, sodass beide Karawanen nach genau $4q + 1$ Tagen den Ort B erreichen.

Die erste Karawane ist also nach $12q + 3$ Tagen am Ziel angekommen und ist in dieser Zeit an $9q + 3$ Tagen marschiert; davon an $3q + 1$ Tagen von A nach B, sodass die Gesamtstrecke von A nach D genau drei mal solang ist wie die Teilstrecke von A nach B.
Dieses Teilstück hat die zweite Karawane mit $2q + 1$ Marschtagen bewältigt, sodass sie für die Gesamtstrecke von A nach D insgesamt $6q + 3$ Marschtage benötigt. Dabei ist der $6q + 3$-te Marschtag genau der

$2\cdot(6q+2)+1=12q+5$-te Tag nach Abreise in A, sodass diese zweite Karawane genau zwei Tage nach der ersten in D eintrifft.

Aufgabe 141043B:
Sechs Schüler eines Mathematikzirkels machen mit dem folgenden Ratespiel ein kleines Logiktraining.
Peter, Klaus, Monika, Ilona und Uwe verstecken fünf Gegenstände:
Zirkel, Radiergummi, Lineal, Bleistift und Füller so bei sich, dass jeder genau einen dieser Gegenstände hat. Dann bekommt Dirk fünf Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau zwei falsch sind. Die Aussagen lauten:

Uwe: „Wenn Peter den Zirkel nicht hat, dann hat Klaus das Lineal nicht.“
Monika: „Uwe hat soeben eine wahre Aussage gemacht.“
Peter: „Ich habe den Zirkel, oder Klaus hat das Lineal nicht.“
Klaus: „Ich habe das Lineal nicht, oder Uwe hat den Bleistift.“
Ilona: „Ich habe den Füller, oder ich habe den Bleistift.“

Man untersuche, ob sich nach diesen Regeln alle Verstecke der Gegenstände eindeutig ermitteln lassen! Wie lauten, falls dies möglich ist, die Verstecke?

Lösung von Nuramon:
Die Aussage von Uwe ist genau dann wahr, wenn die Aussage von Monika wahr ist. Ebenso sind die Aussagen von Uwe und Peter logisch äquivalent.
Da genau zwei der fünf Aussagen falsch sind, müssen also Uwe, Monika und Peter jeweils die Wahrheit gesagt haben und es müssen Klaus und Ilona gelogen haben.

Da Klaus lügt, muss Klaus das Lineal haben.
Nach Peters Aussage muss somit Peter den Zirkel haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	?	Zirkel	Lineal	?

Uwe bzw. Ilona können den Bleistift nicht haben, denn sonst hätten Klaus bzw. Ilona die Wahrheit gesagt. Also muss Monika den Bleistift haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	?	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

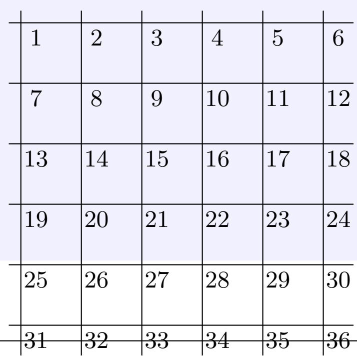
Da Ilona lügt, kann sie nicht den Füller haben. Also muss Uwe den Füller haben.

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	?

Somit kann nur Ilona den Radiergummi haben.
Also lassen sich alle Verstecke ermitteln. Sie lauten

Schüler	Uwe	Monika	Peter	Klaus	Ilona
hat	Füller	Bleistift	Zirkel	Lineal	Radiergummi

Aufgabe 151042:
In einem vorgegebenen quadratischen Gitternetz sollen die in der Abbildung dargestellten 36 Schnittpunkte der Gitterlinien durch einen geschlossenen Streckenzug derart verbunden werden, dass
(1) jede Teilstrecke des Streckenzuges entweder waagerecht oder senkrecht verläuft,
(2) beim Durchlaufen des Streckenzuges jeder der 36 Punkte genau einmal erreicht wird und
(3) die entstehende Figur mindestens zwei Symmetrieachsen besitzt, die gleichzeitig auch Symmetrieachsen des Quadrates mit den Eckpunkten 1, 6, 36, 31 sind.
Zeichnen Sie möglichst viele derartige Streckenzüge, die untereinander nicht kongruent sind, und beweisen Sie, dass es keine weiteren mit den geforderten Bedingungen gibt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Quadrat besitzt genau vier Symmetrieachsen. Zwei enthalten Diagonalen und zwei gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.
Im vorliegenden Fall liegen auf den Symmetrieachsen die die Diagonalen enthalten, jeweils 6 Gitterpunkte.
Hätte ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) eine die Diagonale d enthaltende Symmetrieachse, so gäbe es in s eine Teil-Streckenzug t von einem der sechs Punkte auf d zu einem anderen, wobei t außer seinen Endpunkten keinen weiteren Punkt auf d enthielte.
Dann käme in s auch der durch Spiegelung an d aus t entstehende Streckenzug t' vor. Dieser würde aber mit t zusammen bereits einen geschlossenen Streckenzug bilde, ohne dass alle gegebenen Punkte auf ihm liegen.
Deshalb scheiden die die Diagonalen enthaltenden Geraden als Symmetrieachsen aus.

Die restlichen zwei Achsen teilen nun das Quadrat in vier Teilquadrate.
Angenommen, ein Streckenzug s mit den Eigenschaften (1), (2), (3) könnte, nachdem er einmal (aus einem anderen Teilquadrat kommend) in das linke obere Teilquadrat q (Abbildung 1) eingetreten ist und dort einen Teil-Streckenzug t durchlaufen hat, q wieder verlassen, ohne alle 9 Punkte von q durchlaufen zu haben.

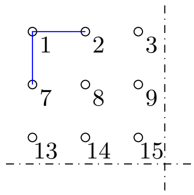


Abbildung 1

Dann enthielte s auch den durch Spiegelung an der einen Symmetrieachse aus t entstehenden Streckenzug T' sowie die durch Spiegelung an der anderen Symmetrieachse aus t, T' entstehenden Streckenzüge t'', t'''.
Die Streckenzüge t, t', t'', t''' würden bereits einen geschlossenen Streckenzug bilden, der nicht alle gegebenen Punkte enthielte. Daher genügt es, diejenigen Teil-Streckenzüge zu untersuchen, die alle 9 Punkte von q durchlaufen. Der gesamte Streckenzug s liegt aus Symmetriegründen dann fest und hat die geforderten Eigenschaften.
Der Streckenzug von 2 nach 1 und von da nach 7 kann bereit eingezeichnet werden, da der Punkt 1 nicht anders erreichbar ist.

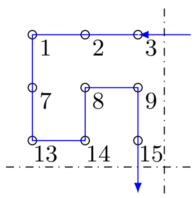


Abbildung 2

Fall 1:
Der Streckenzug komme vom rechten Quadrat und erreiche den Punkt 3, verlaufe zu 2, 1, 7 und von dort weiter zum Punkt 13.
Dann liegt der restliche Verlauf des Streckenzuges eindeutig fest, da vom letzten der neun Punkte das linke untere Quadrat erreicht werden muss (Abbildung 2).

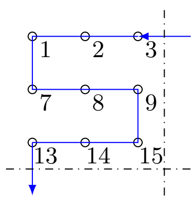


Abbildung 3

Fall 2:
Der Streckenzug verlaufe wie im Fall 1 bis zum Punkt 7 und weiter zum Punkt 8. Von dort an liegt der restliche Streckenzug eindeutig fest (Abbildung 3)

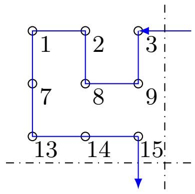


Abbildung 4

Fall 3:
Der Streckenzug verlaufe vom Punkt 3 zum Punkt 9. Eine Verlängerung zum Punkt 15 würde den in Abbildung 3 gezeichneten, an einer Diagonalen gespiegelten Streckenzug ergeben. Bei einer Weiterführung von Punkt 9 zum Punkt 8 ist der übrige Verlauf eindeutig festgelegt. (Abbildung 4)

Damit sind alle Möglichkeiten, mit dem Punkt 3 zu beginnen, ausgeschöpft. Der Streckenzug beginne im Punkt 9.
Bei der Weiterführung über die Punkte 8 oder 15 wäre der Punkt 3 nicht erreichbar, wenn der Streckenzug zum linken unteren Quadrat weitergeführt werden soll.

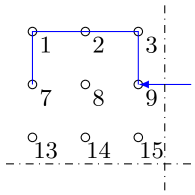


Abbildung 5

Fall 4:
Verlaufe der Streckenzug also über die Punkte 9, 3, 2, 1 und 7 (Abbildung 5). Bei der Weiterführung nach 13 könnte 8 nicht mehr einbezogen werden. Bei der Weiterführung nach 8 würde 13 oder 15 unerreichbar sein,
Es gibt in diesem Falle also keinen derartigen Streckenzug.

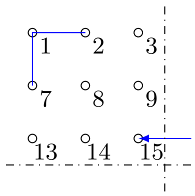
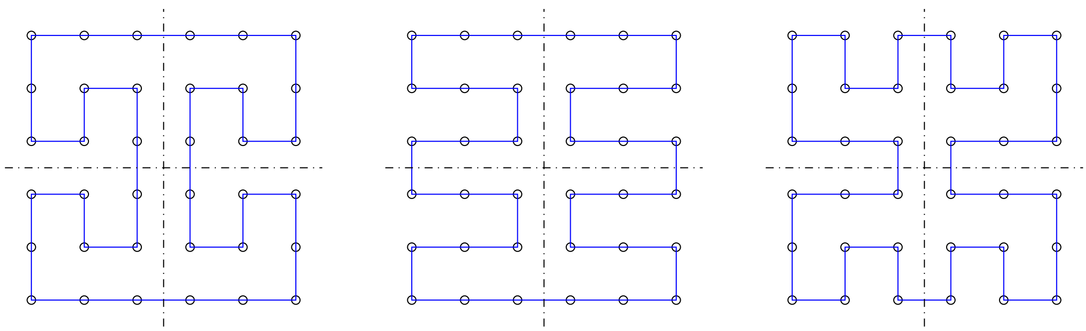


Abbildung 6

Fall 5:
Der Streckenzug beginne im Punkt 15. Bei der Weiterführung nach 9 ergibt sich die gespiegelte Abbildung 4. Bei der Weiterführung nach 14 ergibt sich gespiegelte Abbildung 1. Andere Möglichkeiten, den Streckenzug von Punkt 15 aus weiterzuführen, gibt es nicht.

Damit ist gezeigt, dass es drei und nicht mehr als drei Streckenzüge der geforderten Art gibt. Die geschlossenen Streckenzüge haben folgende Form:



Aufgabe 161043A:
Bei einem sportlichen Dreikampf ergab sich in jeder der drei Sportarten eindeutig eine Reihenfolge der Sportler (gekennzeichnet durch Platzziffern 1, 2, 3, ...).
In jeder der drei Sportarten wurden für die ersten fünf Plätze Punkte so vergeben, dass die Punktzahl (natürliche Zahl > 0) mit wachsender Platzziffer immer kleiner wurde und vom 2. Platz an mit wachsender Platzziffer die Punktdifferenz zwischen benachbarten Plätzen stets konstant war.
Diese Punktbewertung war für jede der drei Sportarten die gleiche.
Nach zwei Wettkämpfen ergab sich, dass die ersten drei Plätze in jeder dieser beiden Sportarten stets von den Sportlern A, B, C errungen wurden (nicht notwendig in dieser Reihenfolge).
Jeder der Sportler A und B hatte nach zwei Wettkämpfen 17 Punkte, und der Sportler C hatte nach zwei Wettkämpfen 16 Punkte erreicht.
In der Gesamtwertung des Dreikampfes (Summe der drei erreichten Punktzahlen) siegte der Sportler D. Zweiter wurde der Sportler C.
Man ermittle in den einzelnen drei Sportarten für die Sportler C und D diejenigen Platzziffern, die diese Bedingungen erfüllen!

Lösung von OlgaBarati:
Nach 2 Wettkämpfen haben die Sportler A,B,C mit den jeweils errungenen Plätzen von 1 bis 3 insgesamt 50 Punkte (17/17/16) erreicht.
Unter den Voraussetzungen kann die Aufteilung der Platzierungen nur folgendermaßen aussehen: A und B die Plätze 1./3. und 3./1. und für C zwei mal der 2. Platz. Sei $x \in \mathbb{N}$ die Punktzahl für Platz 1 und mit C=16: $(x-k)=8$.

$$2x+2(x-k)+2(x-(k+l))=50 \qquad ; \qquad 2x+16+16-2l=50$$

$$\Longrightarrow x-l=9 \qquad \Longrightarrow l=k-1 \quad (1)$$

Die Summe P bildet die Gesamtpunkte der drei Wettkämpfe bestehend aus den 75 Punkten für die ersten drei Plätze plus der Punkte für die Plätze vier und fünf:

$$P=75+3(x-(k+2l))+3(x-(k+3l) \qquad \Longrightarrow P=123-15l \quad (2)$$

Die Punkte pro Wettkampf: $P/3=41-5l$ bzw. für die Plätze vier und fünf $P_{4;5}/3=41-25-5l=16-5l$
Nun lässt sich leicht abschätzen das $l<3$ sein muss und nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.
Sportler D muss für den Sieg mehr als 18 Punkte erreichen damit C mit mindestens 18 Punkten Platz 2 erreicht.
Die Punkte für D: $D_p=2(x-(k+2l))+x \geq 19$ Mit $x=9+l$ und $k=l+1$

$$D_p=2(9+l-(l+1+2l))+9+l=25-3l$$

Für $l=1$ ergibt sich für C: $\{2;2;5\}$ und für D: $\{4;4;1\}$
Für $l=2$ ergibt sich ebenfalls für C: $\{2;2;5\}$ und für D: $\{4;4;1\}$
Punkteverteilung $l=1:$ 10,8,7,6,5 und $l=2:$ 11,8,6,4,2

Aufgabe 211044:
Mehrere Personen spielen ein Spiel mit drei Würfeln, auf deren Seitenflächen anstelle der üblichen Zahlen Buchstaben stehen. Auf jedem Feld steht genau ein Buchstabe; jeder Buchstabe kommt nur einmal vor.
Nach jedem Wurf muss der Spieler versuchen, aus den drei Buchstaben, die oben liegen, ein Wort zu bilden.
Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von Buchstaben auf die Würfel derart möglich ist, dass mit den so beschrifteten Würfeln im Laufe des Spiels auf diese Weise die Wörter

$$AUF, BEI, BEN, CUP, GER, ICH, IDA, IST, MAN, NOT, TOR, ZUG$$

gebildet werden können!
Wenn dies der Fall ist, so untersuchen Sie, ob die Verteilung der Buchstaben auf die Würfel aus den

genannten Angaben eindeutig hervorgeht, d. h., ob für jeden der drei Würfel (bis auf die Reihenfolge) eindeutig folgt, welche Buchstaben auf ihm stehen! Ist auch dies der Fall, so ermitteln Sie diese Verteilung!

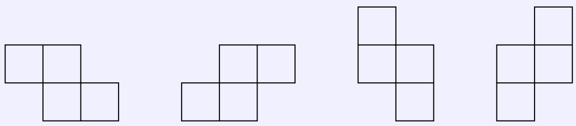
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Da die Wörter BEI,BEN gebildet wurden, liegen I,N auf demselben Würfel, ebenso R wegen der Wörter TOR,NOT. Die Buchstaben A,B,C,D,E,G,H,M,O,S,T treten in Wörtern mit I,N,R auf. Daher bleiben für den ersten Würfel nur die Buchstaben F,P,U,Z.

Wegen der Wörter ZUG,CUP liegt U nicht auf diesem und wir haben die Belegung **I**,**N**,**R**,**F**,**P**,**Z**. Damit bleiben die folgenden Kombinationen für die anderen beiden Würfel übrig:

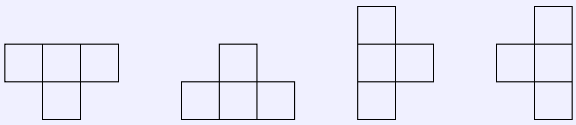
$$AU, BE, CU, GE, CH, DA, ST, MA, OT, UG.$$

Aus den Wörtern mit U folgt, dass A,C,G auf demselben Würfel liegen. Weitere Vergleiche ergeben, dass U,E,H,D,M auf dem zweiten und A,C,G,B auf dem dritte Würfel liegen.
Aus den beiden Wörtern ST,OT folgt dann, dass diese eindeutig zu **U**,**E**,**H**,**D**,**M**,**T** und **A**,**C**,**G**,**B**,**S**,**O** ergänzt werden.

Aufgabe 241046:
a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8 Schachbrettes derart mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 64$ zu nummerieren, dass für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



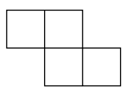
die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.
b) Dieselbe Aufgabe ist für



zu lösen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) es genügt, die Aufgabe für die Reste modulo 4 der Zahlen $1, 2, \ldots, 64$ zu lösen, von denen es 16 in jeder Klasse gibt. Indem wir die Reste gemäß der Tabelle

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

verteilen, sehen wir, dass die Bedingung erfüllt ist. Für die Teilfigur  können die beiden oberen Felder mit (3,0), (0,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,1), (1,0) bzw. (0,3) belegt sein. Dann sind die beiden unteren mit (1,0), (0,3), (3,2), (2,1), (1,2), (2,3), (3,0) bzw. (0,1) belegt und 4 teilt die Summe.

Analog diskutiert man die anderen Teile oder führt entsprechende Symmetriebetrachtungen an.

x	y	z
a	g	b
c	u	d
e	f	h

b) Angenommen die verlangte Nummerierung existiert.
Da das Schachbrett nur 28 Randfelder hat und auf jeweils 32 Feldern gerade bzw. ungerade Zahlen eingetragen sind, muss es zwei benachbarte Felder geben, von denen keines auf dem Rand liegt und eines eine gerade Zahl g, das andere Feld eine ungerade Zahl u enthält.
Wir betrachten die Teilfiguren:
Damit lassen sich folgende Aussagen treffen:

a	g	b
	u	

(1): Wegen (obige Figur) gilt $a \not\equiv b \pmod 2$.

	y
a	g
	u

(2): Wegen (obige Figur) gilt $a \not\equiv y \pmod 2$.

y	
g	b
u	

(3): Wegen (obige Figur) gilt $b \not\equiv y \pmod 2$.
Die Beziehungen (1), (2), (3) liefern einen Widerspruch. Folglich existiert die verlangte Nummerierung nicht.

Aufgabe 261043B:
a) Beweisen Sie, dass fünf paarweise verschiedene reelle Zahlen existieren, mit denen die folgende Aussage gilt!
Für jede Auswahl von drei der fünf Zahlen existiert ein Dreieck, dessen Seitenlängen die drei ausgewählten Zahlen als Maßzahlen haben (wobei zum Messen aller drei Seitenlängen dieselbe Maßeinheit benutzt wird).
b) Ermitteln Sie, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, wie viele paarweise nicht kongruente Dreiecke insgesamt sich aus diesen fünf Zahlen auf die in a) genannte Art gewinnen lassen!
c) Beweisen Sie, dass stets dann, wenn fünf derartige Zahlen vorliegen, mindestens eines der genannten Dreiecke spitzwinklig ist!

Lösung von cyrix:
a) Notwendig und hinreichend für die Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus drei Seitenlängen ist, dass diese drei positiv sind und die Dreiecksungleichung erfüllen, also die Summe von je zwei dieser drei Längen größer ist als die dritte. Ist dabei die Summe der beiden kleineren Längen größer als die größte, dann folgen die anderen beiden Ungleichungen automatisch.

Seien nun $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ die fünf paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Dann lässt sich aus je drei von diesen fünf genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn $0 < s_1$ und $s_1 + s_2 > s_5$ gilt. Alle anderen Ungleichungen folgen dann direkt.
Offensichtlich gibt es solche reellen Zahlen, z. B. $s_i := 3 + i$ für $1 \leq i \leq 5$.

b) Da sich zwei Auswahlen von je drei dieser Streckenlängen immer in mindestens einer Streckenlänge unterscheiden, lassen sich genau so viele paarweise inkongruente Dreiecke aus diesen Streckenlängen konstruieren, wie es Auswahlen von drei verschiedenen Elementen aus einer fünf elementigen Menge ohne Beachtung der Reihenfolge gibt, also $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ Stück.

c) Ein Dreieck ist genau dann spitzwinklig, wenn sein größter Innenwinkel kleiner als 90°, dessen Kosinus also positiv ist. Nach dem Kosinussatz ist dies genau dann der Fall, wenn das Quadrat der größten

Seitenlänge kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen.

Wir nehmen indirekt an, es gäbe reelle Zahlen $0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < s_5$ mit $s_1 + s_2 > s_5$ (sodass die Bedingung aus Aufgabenteil a) erfüllt ist), aus denen sich kein spitzwinkliges Dreieck bilden ließe.
Dann sind insbesondere die Dreiecke mit den Seitenlängen s_1,s_2,s_3, s_2,s_3,s_4 sowie s_3,s_4,s_5 nicht spitzwinklig, sodass

$$s_1^2 + s_2^2 \leq s_3^2 \qquad , \qquad s_2^2 + s_3^2 \leq s_4^2 \qquad \text{und} \qquad s_3^2 + s_4^2 \leq s_5^2$$

gilt. Einsetzen liefert

$$s_5^2 \geq s_4^2 + s_3^2 \geq (s_3^2 + s_2^2) + s_3^2 = 2s_3^2 + s_2^2 \geq 2(s_2^2 + s_1^2) + s_2^2 = 2s_1^2 + 3s_2^2$$

Mit $s_1 + s_2 > s_5$ folgt also

$$s_1^2 + 2s_1s_2 + s_2^2 = (s_1 + s_2)^2 > s_5^2 \geq 2s_1^2 + 3s_2^2$$

bzw. $0 > s_1^2 - 2s_1s_2 + 2s_2^2 = (s_2 - s_1)^2 + s_2^2$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Damit war die Annahme, es gäbe kein spitzwinkliges Dreieck falsch und somit ist die Existenz eines solchen bewiesen, $\square$.

Aufgabe 281043B:
Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.
a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält. b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir lösen folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung:
Es sei n, $n \geq 1$, eine gegebene natürliche Zahl. Über $2n + 1$ sonst beliebige Punkte in der Ebene werde vorausgesetzt, dass sich unter je drei dieser $2n+1$ Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte enthält.
b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt:
Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

Lösung dieser Verallgemeinerung:
a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der $2n + 1$ Punkte mit dem Radius 1 cm. Für die Lage der anderen $2n$ Punkte gibt es nun folgende Möglichkeiten:

1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren noch n weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann ist ein ein Kreis der behaupteten Art.
2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren höchstens $n - 1$ weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte. Einer von ihnen sei P. Für P und jeder der n anderen dieser $n + 1$ Punkte gilt:
Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser n anderen Punkte, d. h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für $2n + 1$ Punkte in einer Ebene so anzugeben, dass sie zwar die

Voraussetzungen erfüllen, dass aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand l, $l > 3$ cm, haben.
Im Inneren von k_1 wähle man $n+1$ Punkte, im Inneren von k_2 n Punkte. Unter je drei dieser $2n+1$ Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Inneren desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben.
Jeder Kreis c aber, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält, muss unter diesen $n+2$ Punkte sowohl einen inneren Punkt P_1 von $k:1$ als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$lcm = M_1M_2 \leq M_1P_1 + P_1P_2 + P_2M_2 < \frac{1}{2} + P_1P_2 + \frac{1}{2}cm$$

also $P_1P_2 > l - 1cm > 2$ cm gelten muss und daher c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muss. Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres $n+2$ der $2n+1$ Punkte enthält. Für $n = 6$ erhält man aus dieser Verallgemeinerung die Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 291044:

In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.
Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderungen erfüllen!

				65
	41			
		81		
1				

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die im nachfolgenden Bild mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. Spalte und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

$$y - x = 65 - y \qquad (1)$$
$$41 - z = w - 41 \qquad (2)$$
$$3 \cdot (z - x) = 1 - z \qquad (3)$$
$$w - y = 81 - w \qquad (4)$$

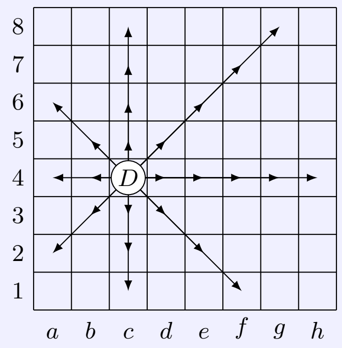
Aus (1) und (2) folgt $x = 2y - 65 \quad (5)$ bzw. $z = 82 - w \quad (6)$. Setzt man dies in (3), d. h. $4z - 3x = 1$ ein, so folgt

$$327 - 4w - 6y + 195 = 1 \qquad ; \qquad 2w = 261 - 3y$$

Hieraus und aus (4), d. h. $2w = 81 + y \quad (7)$ erhält man $261.3y = 81 + y$, also $y = 45 \quad (8)$.
Damit ergibt sich aus (7), (6), (5): $w = 63$, $z = 19$, $x = 25 \quad (9)$.
Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die im zweiten Bild genannten Zahlen, z. B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

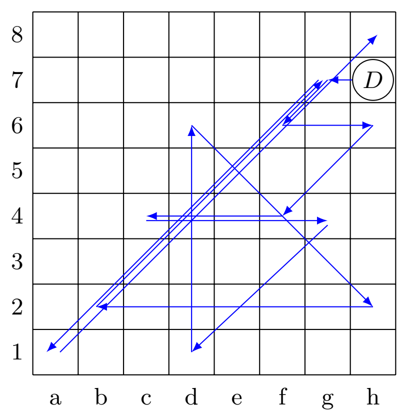
25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

Aufgabe 331041:



Auf einem Schachbrett wird eine Figur Dame betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z. B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)
Als Länge eines Zuges werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.
Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:
(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d. h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine größere Länge haben als der Zug, an den er sich anschließt.
(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges benachbart sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).
(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen werden.
Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, dass sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Lösung von cyrix:



Es ist $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 5 < 4\sqrt{2} < 6 < 7 < 5\sqrt{2} < 6\sqrt{2} < 7\sqrt{2}$.

Wenn es einen Weg gibt, der alle diese Streckenlängen erfüllt, dann muss er in einem Eckfeld enden, o. B. d. A. h8. Der Zug davor muss dann in a1 starten, der davor in g7 und der davor in b2. Dann jedoch wäre zuvor kein Zug der Länge 7 möglich gewesen, da man dazu am Rand des Schachbretts stehen und auch ankommen muss. Also kann nicht jede der Längen ≥ 7 in der Zugfolge vorkommen.

Streichen wir den Zug der Länge 7, so machen wir hierbei die Summe um den kleinstmöglichen Wert kleiner, bleiben also maximal (unter der Voraussetzung, dass alle kürzeren Züge nun möglich sind). Wir benötigen also einen Zug der Länge 6, der in b2 endet. Dies kann sowohl b8 als auch h2 sein. Da beide symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen (auf der sich auch das Zielfeld h8 des letzten Zug befindet), können wir o. B. d. A. h2 als dessen Ausgangsfeld wählen.

Dort muss nun ein Zug der Länge $4\sqrt{2}$ ankommen, der also nur in d6 gestartet sein kann. Der davor erfolgende Zug der Länge 5 muss dann von Feld d1 ausgegangen sein. Dort muss ein Zug der Länge $3\sqrt{2}$ sein Ziel gefunden haben, der damit von a4 oder g4 gestartet sein muss.

Wir geben im folgenden einen Weg an, der in h7 startet, aufsteigend alle Längen von 1 bis $7\sqrt{2}$, mit Ausnahme der Länge 7, durchläuft und im Nachbarfeld h8 von h7 endet:

h7 – g7 – f6 – h6 – f4 – c4 – g4 – d1 – d6 – h2 – b2 – g7 – a1 – h8

Diese Zugfolge hat maximale Länge unter Einhaltung der Bedingungen (1) und (2), ist also eine gesuchte.

III.II Berechnen von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten

I Runde 1

Aufgabe V01013:
Wieviel Diagonalen besitzt ein 4775-Eck?

Lösung von StrgAltEntf:
Für die Anzahl d der Diagonalen eines n-Ecks gilt:

$$d(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$$

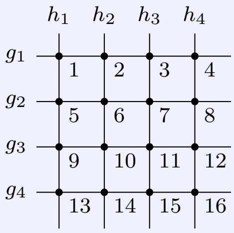
Begründung: Von jeder der n Ecken lässt sich zu $n-3$ anderen Ecken eine Diagonale zeichnen. Bei $n \cdot (n-3)$ wird aber jede Diagonale doppelt gezählt. Folglich gibt es $\frac{1}{2}n \cdot (n-3)$ Diagonalen.

Setzt man $n = 4775$ ein, so ergeben sich für das 4775-Eck genau 11393150 Diagonalen.

Aufgabe 031016:
Beim Fußball-Toto ist auf dem Tippschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird. Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten:
Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tippscheine müsste jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte? Der Lösungsweg ist zu begründen.

Lösung von Carsten Balleier:
Bei nur einem Spiel bräuchte man drei Tippscheine, einen für jede der Möglichkeiten. Bei zwei Spielen müsste man einen Tippschein für jede denkbare Kombination ausfüllen, also $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten.
Mit jedem weiteren Spiel muss die Zahl mit drei multipliziert werden, bei 12 Spielen führt das auf $3^{12} = 531441$ Tippscheine.

Aufgabe 181011:



Die Abbildung zeigt vier zueinander parallele Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist.

Ferner zeigt die Abbildung eine Nummerierung der entstehenden Schnittpunkte.

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur nummerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.

b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 nummerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden nummerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), dass für die Ecken jedes in a) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten!

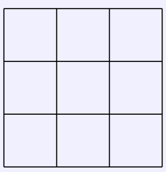
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die genannten Quadrate sind genau die folgenden:
9 Quadrate der Seitenlänge a,
4 Quadrate der Seitenlänge 2a,
1 Quadrat der Seitenlänge 3a
zusammen also genau 14 Quadrate.

b) Angenommen, es gäbe eine solche Färbung. Bezeichnet darin
A die Farbe des Punktes 1,
B die Farbe des Punktes 3,
C die Farbe des Punktes 11,
D die Farbe des Punktes 9,
so sind A,B,C,D in geeigneter Reihenfolge alle vier Farben Rot, Blau, Grün, Gelb. Ferner folgt:

Der Punkt 6 kann nicht die Farbe A haben, da diese sonst für zwei Ecken des Quadrates 1/2/6/5 aufträte, so dass eine der anderen Farben bei seinen Ecken fehlen müsste.

Ebenso ergibt sich durch Betrachtung der Quadrate 2/3/7/6, 6/7/11/10, 5/6/10/9, dass der Punkt 6 auch nicht die Farben B,C,D haben kann.
Dieser Widerspruch beweist, dass es keine Färbung der in (b) genannten Art gibt.

Aufgabe 191014:



In die neun quadratischen Felder der Abbildung sollen die Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, dass jede dieser Zahlen genau einmal vorkommt und dass in jeder Spalte und jeder Zeile und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe auftritt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen dieser Art! Dabei werden zwei Eintragungen genau dann als kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung der genannten Art vorliegt, so gilt:
Da die Summe aller eingetragenen Zahlen $1 + ... + 9 = 45$ beträgt, ergibt sich in jeder der drei Spalten (und folglich auch in jeder Zeile und in jeder Diagonale) die Summe 15. Nun gibt es genau 8 Darstellungen der Zahl 15 als Summe von drei zueinander verschiedenen der Zahlen $1, ..., 9$ nämlich

$$1+5+9, \quad 2+4+9, \quad 3+4+8, \quad 4+5+6, \quad 1+6+8, \quad 2+5+8, \quad 3+5+7, \quad 2+6+7 \qquad (1)$$

In diesen 8 Darstellungen tritt nur die Zahl 5 viermal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art muss folglich die Zahl 5 im mittleren Feld stehen, da dieses viermal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.

Ferner treten in den Darstellungen (1) (außer der Zahl 5) nur die Zahlen 2, 4, 6, 8 je dreimal als Summand auf. Bei jeder Eintragung der genannten Art müssen folglich diese Zahlen in den Eckfeldern stehen, da jedes dieser Felder dreimal bei der Summenbildung in Zeilen, Spalten oder Diagonalen herangezogen wird.
Liegt eine derartige Eintragung vor, so kann daher durch eine Drehung erreicht werden, dass die Zahl 2 im linken oberen Eckfeld steht. Im rechten unteren Eckfeld muss dann 8 stehen.
Also stehen 4 bzw. 6 im rechten oberen bzw. linken unteren Feld oder umgekehrt. Falls 4 nicht im rechten oberen Eckfeld steht, kann dies folglich durch eine Spiegelung erreicht werden, die die Felder der Zahlen 2, 5, 8 unverändert lässt.
Daher ist jede Eintragung der genannten Art kongruent zu einer Eintragung, bei der die in der nachfolgenden Abbildung angegebenen Besetzungen von Feldern vorliegen:

2		4
	5	
6		8

Es gibt aber genau eine solche Eintragung, nämlich:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Die gesuchte größtmögliche Zahl von nicht zueinander kongruenten Eintragungen der genannten Art ist daher 1.

Aufgabe 201014:

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: „Musst dich nicht quälen!
’s sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag’ dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier’
des Abstand kleiner ist als vier“
(Er meint natürlich Zentimeter.)
„Und dies beweis mir mal!“ sagt Peter:
„Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht.“

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Zehn Zentimeter ist das Kantenmaß
des Würfelkörpers ganz aus purem Glas.
Das heißt, es gibt dann immer 5^3
der Würfel von der Kantenlänge 2,
in die der Würfel sei zerlegt gedacht,
was in Gedanken keine Mühe macht.
Da 126 dargestellt
als $5^3 + 1$, weiß alle Welt,
dass zwei der Punkte letztlich man zum Schluss
im gleichen kleinen Würfel finden muss.

Nun fragt man nach dem Abstand maximal
in einem kleinen Würfel dieser Wahl.
Das muss die Raumdiagonale sein,
die nach Pythagoras man findet fein
als $2 \cdot \sqrt{3}$; und jetzt ist klar,
dass der Beweis schon fast vollendet war.
Denn $2 \cdot \sqrt{3}$ liegt unter 4,
und dies zu zeigen, überlass ich dir.

Aufgabe 291013:
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 14 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.

Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um 4 Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um 2 Schritte. Werfen sie aber die gleiche Augenzahl, so setzt jeder seinen Stein um 3 Schritte vorwärts.

Dieses Würfeln und Voransetzen beider Steine gilt als ein *Zug*. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines *Zuges* der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht. Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von *Zügen*, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Spiel nach n „Zügen“ unentschieden endet, so beträgt die Summe s der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritten $6n$. Ferner hat der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 14a + 14b = 14(a + b)$$

Folglich ist s ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 14 und somit ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 42 der Zahlen 6 und 14; d. h., es gilt $s = 42g$ mit einer ganzen Zahl g.

Daher ist $6n = 42g$, $n = 7g$, d. h. n durch 7 teilbar. In weniger als 7 „Zügen“ kann daher kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 7 „Zügen“ kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z. B., indem der eine Spieler in diesen 7 „Zügen“ stets 2 Schritte setzen muss und der andere Spieler stets 4 Schritte (da er stets die größere Zahl gewürfelt hat).

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von „Zügen“, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 7.

Aufgabe 311011:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x;y)$ positiver natürlicher Zahlen x und y, für die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x + y < 1991. \tag{III.1}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zu $x = 1$ wird (1) genau für $y = 1, 2, \ldots, 1988, 1989$ erfüllt; daher gibt es insgesamt

1989 Paare mit $x = 1$, für die (1) gilt.

Analog erhält man insgesamt

1988 Paare mit $x = 2$, für die (1) gilt,

1987 Paare mit $x = 3$, für die (1) gilt, ...

1 Paar mit $x = 1989$, für das (1) gilt, nämlich das Paar $(1989, 1)$

Die Anzahl aller Paare mit (1) ist folglich gleich der Summe $1 + \cdots + 1998 + 1989$; diese beträgt nach einer bekannten Formel

$$\frac{1989 \cdot 1990}{2} = 1979055$$

Aufgabe 321013:
In einer Urne liegen 10 Kugeln, auf denen die Zahlen von 1 bis 10 stehen, jede dieser Zahlen auf genau einer Kugel.

Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd je eine Kugel (ohne dabei die Zahl auf ihr zu kennen). Nachdem so jeder Spieler fünf der Kugeln erhalten hat, werden folgendermaßen Punkte vergeben: A bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 2 teilbar ist; B bekommt genau dann einen Punkt, wenn die Summe der Zahlen auf seinen Kugeln durch 3 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden vier Ergebnisse eines Spiels möglich sind:

Beide Spieler bekommen einen Punkt;
keiner bekommt einen Punkt;
nur A bekommt einen Punkt;
nur B bekommt einen Punkt.

b) Es werde eine große Zahl solcher Spiele gespielt (damit dies möglich ist, werden nach jedem Spiel die Kugeln wieder in die Urne gelegt).
Gefragt wird, wie oft dabei A und wie oft B einen Punktgewinn erwarten kann.

Geben Sie ein Computerprogramm an, das die Beantwortung dieser Frage unterstützt! Schätzen Sie ein, ob Ihr Programm Vermutungen oder genauer gesicherte Aussagen (über die Punktzahlen im Verhältnis zur Zahl der Spiele) ermöglicht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der geforderte Nachweis kann durch Angabe von Beispielen erbracht werden. Solche Beispiele sind:

Hat A die Kugeln 1,2,3,4,6, also B die Kugeln 5,7,8,9,10, so ergeben sich für A bzw. B die Summen 16 bzw. 39, also bekommen beide Spieler einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,5, so sind die Summen 15 bzw. 40, also bekommt keiner einen Punkt.
Hat A die Kugeln 1,2,3,4,8, so sind die Summen 18 bzw. 37, also bekommt nur A einen Punkt.

Hat A die Kugeln 1,2,3,4,9, so sind die Summen 19 bzw. 36, also bekommt nur B einen Punkt.

b) Erste Möglichkeit: Ein BASIC-Programm, das große Zahlen zufällig durchgeführter Spiele simuliert, ist z. B. das folgende:

```
100 RANDOMIZE: S=24000: PA=0: PB=0: DIM Z(10)
110 PRINT " SPIELE","PUNKTE A","PUNKTE B"," REL.A"," REL.B"
120 FOR X=1 TO S
130   SA=0: SB=0: FOR J=1 TO 10: Z(J)=J: NEXT J
140   FOR U=10 TO 1 STEP -1
150     N=INT(RND(I)*U)+I: K=Z(N)
160     IF U/2=INT(U/Z) THEN SA=SA+K ELSE SB=SB+K
170     IF N=U THEN 190
180     FOR J=N+1 TO U: N(J-1)=N(J): NEXT J
190   NEXT U
200   IF SA/2=INT(SA/2) THEN PA=PA+1
210   IF SB/3=INT(SB/3) THEN PB=PB+1
220   IF X/1200=INT(X/1200) THEN PRINT X,PA,PB,PA/X,PB/X
239 NEXT X
```

Kommentar:

100: Vorbereitung zur Zufallszahlenerzeugung für S Spiele. In den Variablen PA, PB werden die von A bzw. B in diesen Spielen erreichten Punkte gezählt. Das Feld Z gibt die Zahlen auf den Kugeln an: Die J-te Kugel trägt die Zahl Z(J).

110: Ausgabe einer Kopfzeile für die Ergebnis-Tabelle. Diese soll auflisten: Die Anzahl der bisher gespielten Spiele, die darin für A und B erreichten Punkte sowie deren relative Häufigkeiten (Punktzahlen dividiert durch Anzahl der Spiele).

120-230: In dieser Schleife wird je ein Spiel simuliert und ausgewertet. Die Variable X zählt die Spiele.

130: In den Variablen SA, SB werden die Zahlen auf den von A bzw. von B gezogenen Kugeln aufsummiert.

140-190: In dieser Schleife wird das Ziehen der Kugeln simuliert. Die Variable U gibt an, wieviele Kugeln jeweils vor dem Ziehen in der Urne sind.

150: Die N-te Kugel wird gezogen (N eine Zufallszahl mit $1 \leq N \leq U$), diese Kugel trägt die Zahl K.

160: Je nachdem, ob vor dem Ziehen eine gerade oder ungerade Zahl U von Kugeln in der Urne war, hat A bzw. B gezogen; dementsprechend wird K zu SA oder zu SB addiert.

170-180: Entscheidung, ob nach dem Ziehen die Kugeln, die nun jeweils als J-te (J = 1,...,U-1) gezählt werden, neu anzugebende Zahlen tragen: War die U-te Kugel gezogen worden (170), so ändert sich nichts an den Zahlen auf den verbleibenden U-1 Kugeln. Andernfalls aber (180) gilt für die Kugeln von der (N+1)-ten an: Jeweils die Beschriftung der früher als J-te gezählten Kugel tritt nun als Beschriftung der (J-l)-ten auf.

200-210: Die Punktzahlen für A bzw. B werden erhöht, falls das Spiel für A bzw. B eine durch 2 bzw. 3 teilbare Summe ergab.

220: Jeweils nach einer durch 1200 teilbaren Anzahl von Spielen werden die erreichten Punkte und relativen Häufigkeiten ausgegeben.

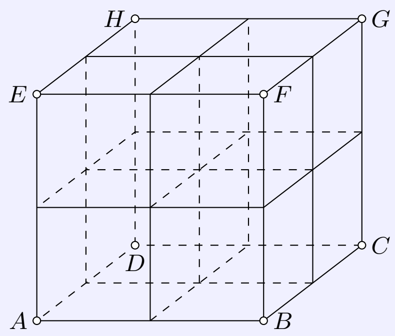
Anfangs- und Endzeilen im Beispiel einer Ergebnistabelle:

SPIELE	PUNKTE A	PUNKTE B	REL.A	REL.B
1200	596	420	.4966667	.35
2400	1195	806	.4979167	.3358334
3600	1803	1195	.5008334	.3319444
...				
22800	11440	7676	.5017544	.3366667
24000	12049	8060	.5020417	.3358334

Aus solchen Beispielen kann als Vermutung entnommen werden:

A kann einen Punktgewinn in einer Anzahl erwarten, deren Größenordnung die Hälfte aller Spiele ist; für B ist die entsprechend zu erwartende Größenordnung ein Drittel aller Spiele.

Aufgabe 341012:

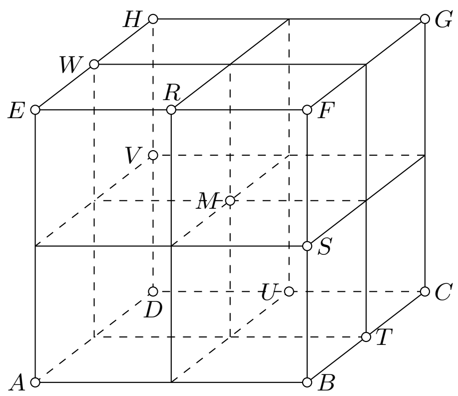


Die Abbildung zeigt ein aus Strecken zusammengesetztes Gitter. Diese Strecken sind - nach Zerlegung eines Würfels $ABCDEFGH$ in acht einander gleichgroße Teilwürfel - die Kanten dieser Teilwürfel.
Eine Ameise, die sich nur auf diesen Strecken bewegen kann, soll auf einem möglichst kurzen Weg von A nach G gelangen.
Wie viele verschieden Wege gibt es hierfür insgesamt,

a) wenn alle Strecken des Gitters zugelassen sind.

b) wenn nur solche Strecken des Gitters zugelassen sind, die der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$ angehören?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Zur eindeutigen Kennzeichnung eines möglichst kurzen Weges von A nach G ist insgesamt 6 mal die Richtung der nächsten Strecke anzugeben, je 2 mal nach rechts, nach hinten und nach oben. Daher gibt es ebenso viele verschiedene Wege, wie es verschiedene Reihenfolgen der Buchstaben **r, r, h, h, o, o** gibt. Die Anzahl dieser Reihenfolgen ist bekanntlich

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$$

b) Ein Weg bleibt genau dann nicht nur auf der Oberfläche des Würfels $ABCDEFGH$, wenn er über den Punkt M führt (siehe Abbildung). Von A nach M gibt es genau $3! = 6$ Wege (Reihenfolgen von **r, h, o**), ebenso von M nach G. Also beträgt die Anzahl der auszuschließenden Wege $6 \cdot 6 = 36$. Die Anzahl der Wege nur auf der Oberfläche ist somit 54.

Aufgabe 341013:
Karin und Rolf sammeln Straßenbahnfahrscheine. Jeder Fahrschein hat eine Nummer aus 6 Ziffern. Ist darin die Summe der ersten drei Ziffern gleich der Summe der letzten drei Ziffern, so heißt der Schein ein *Glücksschein.*

Um die Chance hierfür abzuschätzen, wollen Karin und Rolf wissen, wieviel Prozent aller Fahrscheine *Glücksscheine* sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Nummer von 000000 bis 999999 gleich oft vorkommt.

Karin schreibt ein einfaches Computerprogramm, mit dem die gesuchte Prozentzahl dadurch ermittelt wird, dass eine Anweisungsfolge 1000000 mal abläuft. Da das lange dauert, schreibt Rolf ein Programm, in dem eine (andere) Anweisungsfolge nur 1000 mal ablaufen muss (und sonst nur wenige weitere Anweisungen zu durchlaufen sind).

Schreiben Sie je ein solches Programm und erläutern Sie, warum damit die gesuchte Prozentzahl gefunden wird! (Die Wahl der Programmiersprache ist natürlich freigestellt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Beispiele für Programme der genannten Art sind:

1. Programm:

```
1  z = 0
2  for a = 0 to 9
3    for b = 0 to 9
4      for c = 0 to 9
5        for d = 0 to 9
6          for e = 0 to 9
7            for f = 0 to 9
8              if a+b+c = d+e+f then z = z+1
9            next
10          next
11        next
12      next
13    next
14  next
15  print z/10000
```

2. Programm:

```
1  dim n(27)
2  for s = 0 to 27
3    n(s) = 0
4  next
5  for a = 0 to 9
6    for b = 0 to 9
7      for c = 0 to 9
8        s = a+b+c
9      next
10    next
12  next
13  z = 0
14  for s = 0 to 27
15    z = z + n(s)*n(s)
16  next
17  print z/10000
```

Im 1. Programm läuft die Anweisung 8, wenn die Schleifen 2 – 7, 9 – 14 verfolgt werden, 1000000 mal ab; es wird einfach jede der Nummern von 000000 bis 999999 auf die Eigenschaft $a + b + c = d + e + f$ untersucht. Liegt sie vor, so wird die (zu Beginn in 1 auf 0 gesetzte) Zählvariable z um 1 erhöht. Sie gibt am Ende also die Anzahl aller „Glücksschein“ - Nummern an, so dass in 15 das Hundertfache von $z/1000000$ als die gesuchte Prozentzahl ausgegeben wird.

Das 2. Programm beruht auf folgender Überlegung: Für jede Nummer von 000000 bis 999999 ist die Summe $s = a+b+c$ der ersten drei Ziffern a, b, c eine der Zahlen von 0 bis 27. Kommt ein solcher Wert s unter allen 1000 Dreiergruppen der ersten drei Ziffern genau $n(s)$ mal als Summe vor, so kommt er unter allen Dreiergruppen der letzten drei Ziffern d, e, f ebenfalls genau $n(s)$ mal als Summe vor.

Für genau $(n(s) \cdot n(s))$ Nummern liegt daher die Eigenschaft $a + b + c = d + e + f$ speziell so vor, dass gerade für diesen Wert s die beiden Gleichungen $a + b + c = s$ und $d + e + f = s$ gelten. Damit ist bewiesen:

Die Anzahl z aller „Glücksschein“-Nummern ist die Summe aller für $s = 0, \dots, 27$ gebildeten Produkte $(n(s) \cdot n(s))$.

Eben diese Summe rechnet das 2. Programm aus: Die Ermittlung der Häufigkeiten $n(s)$ geschieht beim Durchlaufen 5 - 7, 10 - 12 der Anweisungsfolge 8, 9, in der für jede der 1000 Dreiergruppen abc von 000 bis 999 jeweils die Anzahl $n(s)$ der betreffenden Summe $s = a+b+c$ um 1 erhöht wird. (Zur Vorbereitung hierfür wurden zu Beginn in l - 4 alle $n(s)$ auf 0 gesetzt.) In 13 - 16 wird aus den so erhaltenen Werten $n(s)$ die Summe der Produkte $(n(s) \cdot n(s))$ gebildet.

Der errechnete Prozentwert lautet 5,5252 %.

II Runde 2

Aufgabe 131022:
Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab. In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz.
Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen vergeben.
Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.
Zeigen Sie, dass diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe $22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 = 133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie damit zusammen 347 Punkte für die ersten, zweiten und dritte Plätze.
Es sei g die Anzahl der errungenen Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt

$$7g + 5s + 4b = 347 \tag{1}$$

Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z

$$g = k + x, \quad s = k + y, \quad b = k + z \tag{2}$$

wobei (3) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens einer der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0 = x{,}y{,}z = 3$ gilt.
Aus (1), (2) folgt

$$16k + 7x + 5y + 4z = 347 \tag{6}$$

Wegen (3), (4), (5) gilt $7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \geq 7 + 5y + 4z \geq 4 \cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt

$$16k + 36 \geq 347 \geq 16k + 12 \tag{7}$$

Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16k \geq 311 > 304$, also (8) $k > 19$. Aus der rechten Ungleichung in (6) folgt $16k \leq 335 < 336$, also (9) $k < 21$.
Wegen (8), (9) gilt (10) $k = 20$.
Hieraus und aus (6) folgt $7x + 5y + 4z = 27$. Wäre $z = 0$, so müsste $7x = 27 - 5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y = 0$, so müsste $7x = 27 - 4z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft.
Also ist (11) $x = 0$, und $5y = 27 - 4z$ muss durch 5 teilbar sei, was unter den Möglichkeiten $z = 0, 1, 2, 4$ nur für (12) $z = 3$ zutrifft und auf (13) $y = 3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13), folgt die zu beweisende Behauptung, dass s, g, b durch die Bedingung der Aufgabe eindeutig bestimmt sind, nämlich $g = 20$, $s = b = 23$.

Aufgabe 291022:
Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht:
Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld A. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld A.
Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus.
Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt.
Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein Zug.
Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein Zug ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt.
Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, dass ein Stein beim Voransetzen das Feld A erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).
Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines Zuges der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld A steht.
Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf A steht.
Falls jedoch beide Steine auf A stehen, endet das Spiel unentschieden.
Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von Zügen, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?
Begründen Sie ihre Antwort!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Spiel nach n „Zügen“ unentschieden endet, so beträgt die Summe der Anzahlen aller von beiden Steinen insgesamt zurückgelegten Schritte $3n$. Ferner hat dann der Stein des einen Spielers eine Anzahl a vollständiger Umläufe zurückgelegt und der Stein des anderen Spielers eine Anzahl b vollständiger Umläufe, also gilt

$$s = 8a + 8b = 8(a + b)$$

Folglich ist a ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 24 der Zahlen 3 und 8; d. h., es gilt $s = 24g$ mit einer ganzen Zahl g. Daher ist $3n = 24g, = 8g$.
Wäre hierbei $g = 1, n = 8$, so folgte $8(a + b) = s = 24$, $a + b = 3$, was mit positiven ganzen Zahlen a,b auf $a = 1, b = 2$ oder $a = 2, b = 1$ führen würde; d. h., der Stein eines Spielers hätte genau einen vollen Umlauf zurückgelegt, woraus wegen $n = 8$ folgte, dass er in jedem dieser 8 „Züge“ nur einen Schritt zu gehen hätte, der des anderen Spielers also stets zwei Schritte.
Das führt auf den Widerspruch, dass dessen Stein beim vierten Zug auf das Feld A gekommen wäre.

Also muss $g \geq 2$ sein, d. h.: In weniger als 16 „Zügen“ kann kein unentschiedenes Spiel entstehen.

II. In 16 „Zügen“ kann ein unentschiedenes Spiel entstehen, z. B. folgendermaßen (die Felder nach A seien mit $1, \ldots, 7$ nummeriert):

Zug	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Spieler 1 Schrittzahl	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2
erreichtes Feld	1	3	5	7	1	3	4	5	7	1	2	3	4	5	6	A
Spieler 2 Schrittzahl	2	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1
erreichtes Feld	2	3	4	5	6	7	1	3	4	5	7	1	3	5	7	A

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchte kleinstmögliche Anzahl von „Zügen“, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann, beträgt 16.

Aufgabe 311023:
Man beweise, dass sich in einer Ebene 100 verschiedene Geraden so legen lassen, dass die Anzahl aller derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von je mindestens zwei der 100 Geraden sind, genau 1991 beträgt.

Lösung von ochen:
Seien P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 beliebige Punkte in einer Ebene.

Wir legen 3 Geraden durch P_1, 3 Geraden durch P_2, 3 Geraden durch P_3, 15 Geraden durch P_4 und 76 Geraden durch P_5.

Weiter fordern wir, dass
-jede Gerade sich mit jeder anderen schneidet.
-keine der Geraden durch zwei der Punkte P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 verläuft.
-in allen Punkte mit Ausnahme von P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 sich höchstens zwei Geraden schneiden.

Um dies zu gewährleisten, fügen wir die Geraden nacheinander in den Punkten P_i hinzu und achten darauf, dass die hinzugefügte Gerade nicht parallel zu einer der vorherigen ist und dass sie durch keinen der Schnittpunkte der vorigen Geraden (bis auf P_1,P_2,P_3,P_4,P_5) geht.

Wir zählen nun die Geraden und die Anzahl der Schnittpunkte.
Es sind insgesamt $3+3+3+15+76=100$ Geraden. Wir zählen nun die Punkte, in denen sich genau zwei Geraden schneiden. Das sind

$$\frac{1}{2}((3+3+3+15+76)^2-(3^2+3^2+3^2+15^2+76^2))=1986.$$

Zusätzlich schneiden sich noch Geraden in den Punkten P_1,P_2,P_3,P_4,P_5. Die Anzahl aller Punkte, in denen sich mindestens zwei Geraden schneiden, beträgt also 1991.
Wir nutzen hier, dass

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i\right)^2 - \sum_{1\leq i\leq n} a_i^2\right)$$

Aufgabe 321022:
An einem Kraftsportwettbewerb nehmen Robert, Stefan und Tilo teil. Robert schafft 20 Klimmzüge. Stefan nimmt sich vor, mindestens 80% der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen; Tilo will mindestens 60% der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen.
Gibt es eine kleinstmögliche Anzahl von Klimmzügen für Stefan und Tilo, so dass beide Vorhaben erfüllt werden?
Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese Anzahl!

Lösung von cyrix:
Es seien s und t die Anzahlen der Klimmzüge von Stefan und Tilo. Dann soll also $s\geq\frac{4}{5}\cdot(20+t)=16+\frac{4}{5}t$ und $t\geq\frac{3}{5}\cdot(20+s)=12+\frac{3}{5}s$ gelten.

Da keiner eine negative Anzahl an Klimmzügen durchführt, ist damit $s\geq 16$. Setzt man dies ein, erhält man $t\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 16=12+\frac{48}{5}$, also, da t eine ganze Zahl ist, $t\geq 22$.

Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\geq 16+\frac{4}{5}\cdot 22=16+\frac{88}{5}$, also $s\geq 34$. Einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung liefert $s\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 34$, also $s\geq 33$.
Einsetzen dieser besseren Abschätzung in die erste Ungleichung liefert $s\geq 16+\frac{4}{5}\cdot 33$, also $s\geq 43$, einsetzen dieses Wertes in die zweite Ungleichung $t\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 43$, also $t\geq 38$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\geq 16+\frac{4}{5}\cdot 38$, also $s\geq 47$, einsetzen in die zweite $t\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 47$, alo $t\geq 41$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\geq 16+\frac{4}{5}\cdot 41$, also $s\geq 49$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 49$, also $t\geq 42$.
Einsetzen in die erste Ungleichung liefert $s\geq 16+\frac{4}{5}\cdot 42$, also $s\geq 50$. Einsetzen in die zweite Ungleichung liefert $t\geq 12+\frac{3}{5}\cdot 50=42$.

Damit erfüllen $s=50$ und $t=42$ als kleinste Werte beide Ungleichungen, sodass es auch einen kleinsten Wert $s+t=92$ gibt, was (wegen $s\geq 50$ und $t\geq 42$) der kleinste solche Wert ist.

Aufgabe 341021:
a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, ..., 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?
b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, dass für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?
Hinweis: In a) und b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

Lösung von ochen:
a) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt.

Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt, so gibt es 5 Möglichkeiten welche der Zahlen auf der unteren Seitenfläche steht. Anschließend drehen wir den Würfel so um die vertikale Achse, dass die kleinste nach vorn zeigt. Es gibt damit noch $3! = 6$ Möglichkeiten wie die anderen 3 Seitenflächen beschriftet wurden. Weiter kann jeder Würfel auf eindeutige Art so hingelegt werden, dass die 1 oben liegt und die kleinste Zahl der vier benachbarten Seitenflächen nach vorn zeigt. Es gibt also insgesamt $5 \cdot 3! = 30$ paarweise verschiedene Verteilungen.

b) Wir nehmen einen Würfel und beschriften seine Seitenflächen so, dass jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt und Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen die Summe 7 haben.
Wir legen den Würfel so hin, dass 1 auf der oberen Seitenfläche liegt. Da 6 (und nicht 2) auf der gegenüberliegenden Seite steht, können ihn so um die vertikale Achse drehen, dass die Seite mit der 2 nach vorn zeigt. Somit liegt 5 auf der hinteren Seite. Nun kann 3 auf der linken oder auf der rechten Seitenfläche stehen. Es gibt also insgesamt 2 Möglichkeiten.

III Runde 3

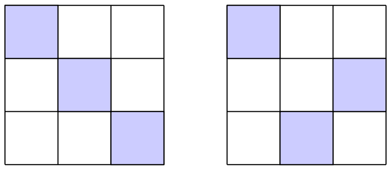
Aufgabe 211035:
In der 1. Stufe der Mathematikolympiade gab es im Jahre 1976 in der Olympiadeklasse 9 folgende Aufgabe:
„Jemand behauptet, dass es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1976 Stücke herzustellen: Man teile einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, dann wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke in jeweils genau 7 Teile u. s. w.
Ist es möglich, dass man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1976 Papierstücke erhält?„ Als Lösung musste bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, genau 1976 Papierstücke zu erhalten.
Wir wollen jetzt für irgendeine Zahl $n \geq 1$ von n Papierstücken ausgehen und diese in der beschriebenen Weise jeweils in genau n Teile teilen.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n mit $1 \leq n < 1976$, für die es auf diese Weise gelingen kann, genau 1976 Papierstücke zu erhalten!

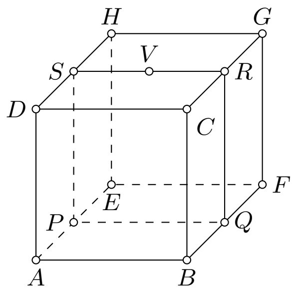
Lösung von Nuramon:
Mit jeder Teilung erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um $n-1$. Nach t Teilungen sind es also $n + t(n-1)$ Papierstücke.
Gesucht sind also alle n mit $1 \leq n < 1976$, für die ein $t \in \mathbb{N}$ existiert mit $n + t(n-1) = 1976$.
Wegen $1976 = n + t(n-1) = (n-1)(t+1) + 1$, ist dies genau dann der Fall, wenn $n-1 < 1975$ ein Teiler von $1977 = 3 \cdot 659$ ist (659 ist prim), also genau dann, wenn $n-1 \in \{1, 3, 659\}$.
Also ist so eine Zerlegung möglich, genau dann, wenn $n \in \{$2,4,660$\}$.

Aufgabe 251033:
Aus 27 Würfeln mit der Kantenlänge a wird ein Würfel mit der Kantenlänge $3a$ zusammengesetzt. Jeder der 27 kleinen Würfel ist entweder völlig weiß oder völlig schwarz angestrichen.
Beim Zusammensetzen soll auf jeder der sechs quadratischen Seitenflächen des großen Würfels ein Muster entstehen, das in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein schwarzes und genau zwei weiße Quadrate enthält.

Ermitteln Sie
a) die kleinste, b) die größte Anzahl schwarzer Würfel, mit der diese Forderungen erfüllbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die auf den Seitenflächen der großen Würfels geforderten Muster gibt es als zueinander nicht kongruente Möglichkeiten, genau diejenigen beiden, die in der nachfolgenden Abbildung dargestellt sind:





Weiterhin gilt:
(1) Mit weniger als acht schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

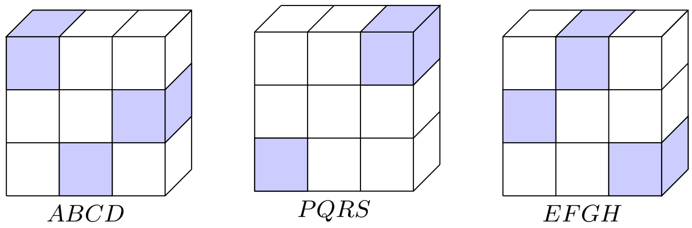
Beweis: Angenommen, es gäbe eine solche Zusammensetzung mit sieben oder weniger schwarzen Würfeln. In der „vorderen“ (d. h. das Quadrat ABC ausfüllenden) Schicht wären dann genau drei schwarze Würfel, ebenso in der „hinteren“ (das Quadrat $EFGH$ ausfüllenden) Schicht.
Für die „mittlere“ (das Quadrat $PQRS$ ausfüllenden) Schicht verbliebe somit höchstens ein schwarzer Würfel. Wäre er, falls vorhanden, einer der drei nach Voraussetzung in der Zeile PQ auftretenden schwarzen Würfel, so enthielte die Zeile RS keinen schwarzen Würfel. Da dies den Voraussetzungen widerspricht, ist die Aussage (1) bewiesen.

(2) Mit mehr als elf schwarzen Würfeln ist keine Zusammensetzung der geforderten Art möglich.

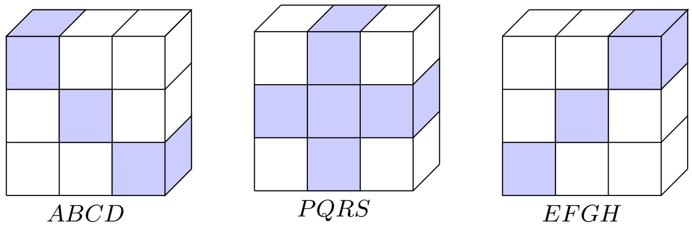
Beweis: Angenommen, es gäbe ein solche Zusammensetzung miz zwölf oder mehr schwarzen Würfeln. In der vorderen und der hinteren Schicht wären je genau drei schwarze Würfel, außerdem wäre möglicherweise der den Mittelpunkt des großen Würfels enthaltende kleine Würfel schwarz.

Unter den acht Würfeln, die die Randlinie der Quadrates $PQRS$ ausfüllen befänden sich daher mindestens 5 schwarze Würfel. Unter ihnen könnte es nur vier geben, die keinen der Punkte P, Q, R, S enthalten. Also müsste mindestens einer dieser Punkte, o. B. d. A. der Punkt P, in einem schwarzen Würfel enthalten sein. Es verbleiben noch mindestens 4 schwarze Würfel; von ihnen dürtfe nach Voraussetzung keiner mehr der Streckenzug SPQ erreichen.
Das führt aus den Widerspruch, dass für diese mindestens 4 schwarzen Würfel nur noch die drei Plätze bei U, R und V frei wären; somit ist auch Aussage (2) bewiesen.

(3) Mit acht Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



(4) Mit elf Würfeln ist eine Zusammensetzung der geforderten Art möglich, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.



Aus (1) und (3) folgt: Die in a) gesuchte kleinste Anzahl ist 8. Aus (2) und (4) folgt: Die in b) gesuchte größte Anzahl ist 11.

Aufgabe 261032:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen $0, 1, ..., 6$ je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steins dieselbe Zahl steht).
Insgesamt besteht hiernach ein Dominospiel aus genau 28 Steinen.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Seitenhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
a) Ermitteln Sie die kleinste Anzahl $k > 1$ von verschiedenen Steinen eines Dominospiels, die eine geschlossene Kette bilden können!
b) Aus einem Dominospiel sollen geschlossene Ketten aus je k verschiedenen Steinen gebildet werden (k sei die in a) genannte Zahl). Dabei soll jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer dieser Ketten verwendet werden.
Ermitteln Sie die größte Anzahl g von Ketten, die so zustande kommen können!
c) Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Ketten aus je k verschiedenen Steinen, die sich überhaupt bilden lassen! (Es darf also jeder Stein des Dominospiels in beliebig vielen dieser Ketten auftreten.)
Dabei gelten zwei geschlossene Ketten genau dann als gleich, wenn sie bei geeigneter Wahl eines Anfangssteins und einer Durchlaufrichtung gleichlautende Zahlenfolgen zeigen.
Beispielsweise gelten die beiden Ketten (2, 4), (4, 5), (5, 5), (5, 1), (1, 2) und (5, 4), (4, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 5) als einander gleich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Aus zwei verschiedenen Steine eines Dominospiels kann man keine geschlossene Kette bilden, denn in jeder geschlossenen Kette $(a,b),(b.a)$ aus zwei Steinen sind diese einander gleich.
Aus drei Steinen eines Dominospiels kann man eine geschlossene Kette bilden, z. B. (0,1),(1,2),(2,0). Also ist die in (a) gesuchte kleinste Anzahl $k = 3$.

(b) In jeder geschlossenen Kette $(a,b),(b,c),(c,a)$ aus 3 verschiedenen Steinen eines Dominospiels sind a, b und c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$.

Die Anzahl aller derjenigen Steine eines Dominospiels, die ein Paar verschiedener Zahlen tragen, ist $28 - 7 = 21$. Wegen $21 : 3 = 7$ lassen sich daher höchstens 7 Ketten in der geforderten Art bilden.

Dass sich 7 Ketten in dieser Art bilden lassen, zeigt das Beispiel

$$(0{,}1),(1{,}2),(2{,}0); \quad (0{,}3),(3{,}4),(4{,}0); \quad (0{,}5),(5{,}6),(6{,}0);$$
$$(1{,}3),(3{,}5),(5{,}1); \quad (1{,}4),(4{,}6),(5{,}2); \quad (2{,}3),(3{,}6),(6{,}2); \quad (2{,}4),(4{,}5),(5{,}2)$$

Also ist die in (b) gesuchte Anzahl $g = 7$.

(c) Wie in (b) gezeigt wurde, enthält jede geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen eines Dominospiels drei paarweise verschiedene Zahlen. Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedener Zahlen a, b, c genau drei Steine mit je einem Paar verschiedener dieser Zahlen, und es gibt (nach der Erklärung, welche geschlossenen Ketten als gleich zu gelten haben) genau eine geschlossene Kette aus diesen drei Steinen, nämlich die Kette $(a,b),(b,c),(c,a)$.
Also gibt es genau so viele geschlossene Ketten aus je drei verschiedenen Steinen, wie es Mengen aus je drei paarweise verschiedenen der Zahlen 0, ..., 6 gibt.

Drei Elemente aus einer Menge mit sechs verschiedenen Zahlen auszuwählen, ohne Bedeutung der Reihenfolge der Wahl und ohne wiederholte Wahl eines Elements, entspricht einer Kombination von n Elementen zur k-ten Klasse mit $n = 6$ und $k = 3$, d. h.

$$\binom{6}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Die gesuchte Anzahl von Ketten ist 35.

Aufgabe 301035:
Man untersuche, ob es eine Menge M von 1991 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:
(1) Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
(2) Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Wir geben im Folgenden eine Menge M mit $2^{11} = 2048 > 1991$ verschiedenen positiven natürlichen Zahlen an, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dann ist jede 1991-elementige Teilmenge von M eine, die die Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es sei P die Menge der elf Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31, die sämtlich nicht größer als 31 sind. Für jede der 2^{11} Teilmengen von P bilden wir das Produkt der in ihr enthaltenen Primzahlen und nennen die Menge dieser Produkte M. Dann hat M genau $2^{11} = 2048$ Elemente. Diese sind offensichtlich alles positive ganze Zahlen.

Für jedes Element von M gilt, dass in seiner Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen als P enthalten sind, also kein Primfaktor, der größer als 31 ist. Damit ist (1) erfüllt. Weiterhin ist jede Primzahl in der Primfaktorzerlegung eines jeden Elements höchstens mit dem Exponenten 1 enthalten.

Betrachten wir nun zwei verschiedene Zahlen a und b aus M bzw. ihre zugehörigen Teilmengen A und B aus P. Da diese verschieden sind (aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung), gibt es mindestens ein Element $p \in P$, welches in der einen (o. B. d. A.) Teilmenge A enthalten ist, der anderen B aber nicht. Also ist dann a durch p teilbar, b aber nicht.
Damit ist ihr Produkt ab durch p teilbar. Da jedoch keine der Zahlen aus M, insbesondere also auch nicht a, durch p^2 teilbar ist, kann auch ab damit nicht durch p^2 teilbar nicht sein, sodass in der Primfaktorzerlegung von ab die Primzahl p mit ungeradem Exponenten 1 enthalten ist, also ab keine Quadratzahl sein

kann. (Bei Quadratzahlen ist in der Primfaktorzerlegung der Exponent jeder Primzahl gerade.) Also ist auch (2) erfüllt, $\square$.

Aufgabe 321031:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, für die gilt:

$$19 < x^2 + y^2 < 93$$

Lösung von cyrix:
Wegen $93 > x^2 + y^2 \geq x^2$ ist $9 \geq x^2$. Wir geben nun für jedes $0 \leq x \leq 9$ die Werte für y an, die diese Ungleichungskette erfüllen:

- $x = 0$, also $19 < y^2 < 93$, d. h. $5 \leq |y| \leq 9$ ($2 \cdot 5 = 10$ Lösungen)
- $x = 1$, also $18 < y^2 < 92$, d. h. $5 \leq |y| \leq 9$ (10 Lösungen)
- $x = 2$, also $15 < y^2 < 89$, d. h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 3$, also $10 < y^2 < 84$, d. h. $4 \leq |y| \leq 9$ (12 Lösungen)
- $x = 4$, also $3 < y^2 < 77$, d. h. $3 \leq |y| \leq 8$ (12 Lösungen)
- $x = 5$, also $y^2 < 68$, d. h. $|y| \leq 8$ (17 Lösungen)
- $x = 6$, also $y^2 < 57$, d. h. $|y| \leq 7$ (15 Lösungen)
- $x = 7$, also $y^2 < 44$, d. h. $|y| \leq 6$ (13 Lösungen)
- $x = 8$, also $y^2 < 29$, d. h. $|y| \leq 5$ (11 Lösungen) und
- $x = 9$, also $y^2 < 12$, d. h. $|y| \leq 3$ (7 Lösungen).

Damit gibt es insgesamt $10 + 10 + 12 + 12 + 12 + 17 + 15 + 13 + 11 + 7 = 119$ verschiedene Lösungspaare, die diese Ungleichungskette erfüllen.

Aufgabe 341033:
Antje und Beate beschließen, nachdem ihnen das Spielen mit gewöhnlichen Spielwürfeln zu langweilig wurde, diese durch reguläre Oktaeder zu ersetzen mit den Augenzahlen 1 bis 8.
Bevor sie an die Herstellung dieser Spieloktaeder gehen, vereinbaren sie noch, dass (in Analogie zum Spielwürfel) die Summe der Augenzahlen je zweier einander gegenüberliegender Flächen 9 betragen soll.
Als sie am nächsten Tag ihre selbstgebastelten Oktaeder vergleichen, stellen sie fest:
Ihre Oktaeder sind - auch bei Einhaltung der Vereinbarung - voneinander verschieden in dem Sinne, dass durch keine Drehung die Anordnung der Augenzahlen zur Übereinstimmung gebracht werden kann.
a) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen der Augenzahlen es unter Einhaltung der Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen insgesamt gibt!
b) Ermitteln Sie, wie viel in dem genannten Sinne verschiedene Anordnungen es insgesamt gibt, wenn die Vereinbarung über gegenüberliegende Flächen nicht eingehalten werden muss!

Lösung von cyrix:
a) Wir legen das Oktaeder so auf den Tisch, dass die Fläche mit der 1 nach unten zeigt. Dann liegt die Fläche mit der 8 oben. Nun drehen wir das Oktaeder so lang um seine senkrechte Symmetrieachse, bis die Fläche mit der 2 nach vorn zeigt.
Dann liegt ihr gegenüber die Fläche mit der 7. Darüber hinaus, ist die Lage des Oktaeders nun eindeutig bestimmt, während die verbleibenden vier Flächen noch mit den Zahlen von 3 bis 6 beschriftet werden

müssen:

Suchen wir zuerst den Platz für die 3, so haben wir dafür vier verschiedene Möglichkeiten, während die entsprechend gegenüberliegende Fläche mit der 6 beschriftet wird. Für die verbleibenden zwei Flächen gibt es nun noch zwei Möglichkeiten, welche von ihnen mit der 4, und die andere dann mit der 5 beschriftet wird. Insgesamt gibt es also genau $4 \cdot 2 = 8$ verschiedene Oktaederbeschriftungen, bei denen die Summe gegenüberliegender Flächen 9 ergibt, die sich nicht durch Drehung ineinander überführen lassen.

b) Wieder legen wir das Oktaeder mit der Fläche mit der 1 nach unten auf den Tisch. Dann gibt es 7 Möglichkeiten, welche Zahl die nach oben zeigende Fläche zeigt. Nun drehen wir das Oktaeder so, dass von den verbleibenden sechs Flächen diejenige mit der kleinsten Zahl nach vorn zeigt.
Damit ist die Lage des Oktaeders eindeutig bestimmt und die verbleibenden fünf Zahlen können in beliebiger Reihenfolge auf den noch verbleibenden fünf Flächen des Oktaeders verteilt werden. Dafür gibt es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, sodass es insgesamt $7 \cdot 120 = 840$ verschiedene Oktaederbeschriftungen gibt, die nicht durch Drehung ineinander überführt werden können.

IV Runde 4

Aufgabe 041041:
Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden.
Es stehen drei verschiedene Sorten von Büchern im Wert von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Lösung von Kitaktus:
Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt $600M - 30M - 24M - 18M = 528M$.
27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch $528M - 486M = 42M$ übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen.
Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht
b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.
c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M
d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M
e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe 061046:
Geben Sie die Gesamtanzahl aller verschiedenen ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leq 100$$

an! Dabei gelten zwei Lösungspaare (x_1,y_1), (x_2,y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist.

Lösung von Matthias Lösche:
Sei $x = 0$ dann sind für y möglich: $-100...100 \Rightarrow$ Anzahl: 201
Sei $x = -1$ oder 1 dann sind für y möglich: $-99...99 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 199$
Sei $x = -2$ oder 2 dann sind für y möglich: $-98...98 \Rightarrow$ Anzahl $2 \cdot 197$
usw. bis
Sei $x = -99$ oder 99 dann sind für y möglich $-1...1 \Rightarrow$ Anzahl: $2 \cdot 3$
Sei $x = -100$ oder 100 dann sind für y möglich: $0 \Rightarrow$ Anzahl : $2 \cdot 1$

$$2\sum_{i=1}^{100}(2i-1) + 201 = 2 \cdot 100^2 + 201 = 20201$$

Aufgabe 261045:
Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, 2, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen.
In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, 2, ..., 6 je genau einmal vor.
Eine Kette entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, dass benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen.
Eine Kette heißt geschlossen, wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen.
Eine geschlossene Kette aus drei verschiedenen Steinen werde kurz Dreierkette genannt. Zwei Dreierketten gelten genau dann als gleich, wenn sie aus den selben Steinen bestehen.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen aus je genau 7 verschiedenen Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ bestehenden Mengen $\{K_1, \ldots, K_7\}$, bei denen jeder Stein des Dominospiels in höchstens einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vorkommt!
(Wie üblich heißen zwei Mengen M= $\{K_1, \ldots, K_7\}$ und $M' = \{K'_1, \ldots, K'_7\}$ genau dann einander gleich, wenn jede in der Menge M enthaltene Kette K_i auch in M' enthalten ist und umgekehrt auch jede in M' enthaltene Kette in M.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jeder Dreierkette $(a,b),(b,c),(c,a)$ sind a,b,c drei paarweise verschiedene Zahlen; denn wäre $a = b$, so wären (b,c) und (c,a) zwei gleiche Steine; entsprechend widerlegt man $a = c$ und $b = c$.
Umgekehrt gibt es zu je drei paarweise verschiedenen Zahlen a,b,c genau eine Dreierkette, die diese Zahlen enthält. Ferner gilt:

I. Wenn $M = \{K_1, \ldots, K_7\}$ eine Menge mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften ist, so folgt: Da in den Dreierketten $K_1, \ldots, K_7$ kein Stein mehrmals auftritt, enthalten sie 21 Steine. Da das Dominospiel aber nur 21 Steine (a,b) mit $a \neq b$ enthält, kommt jeder dieser Steine in genau einer der Ketten $K_1, \ldots, K_7$ vor.
Also enthält einer dieser Ketten, o. B. d. A. die Kette K_1, den Stein (0,1). Man kann daher eine eventuelle Umbenennung der Zahlen 2,3,4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser fünf Zahlen die neue Benennung 2 (1) erhält, mit der

$$K_1 = (0,1),(1,2),(2,0) \tag{2}$$

ist. Weiter enthält nun eine der Ketten $K_2, \ldots, K_7$, o. B. d. A. die Kette K_2 den Stein (0,3). Da K_2 außerdem keinen der in (2) genannten Steine enthält, folgt somit: In K_2 kommt außer 0 und 3 als dritte

Zahl weder 1 noch 2 vor. Man kann daher eine Umbenennung der Zahlen 4,5,6 so vornehmen, dass diejenige dieser drei Zahlen die neue Benennung 4 (3) erhält, mit der

$$K_2 = (0{,}3)(3{,}4),(4{,}0) \tag{4}$$

ist. Danach folgt:
O. B. d. A. enthält K_3 den Stein (0,5) und außerdem keinen der Steine in (2), (4), also außer 0, 5 keine der Zahlen 1,2,3,4. Somit ist

$$K_3 = (0{,}5)(5{,}6),(6{,}0) \tag{5}$$

O. B. d. A. enthält K_4 den Stein (1,3) und außerdem keinen der Steine in (2), (4). Als kann man eine Umbenennung der Zahlen 5,6 so vornehmen, dass diejenige Zahle dieser zwei Zahlen die neue Bezeichnung 5 (6) erhält mit der

$$K_4 = (1{,}3)(3{,}5),(5{,}1) \tag{7}$$

O. B. d. A. enthält K_5 den Stein (1,4) und außerdem keinen der Steine in (2), (4),(7). Somit ist

$$K_5 = (1{,}4)(4{,}6),(6{,}1) \tag{8}$$

O. B. d. A. enthält K_6 den Stein (2,3) und außerdem keinen der Steine in (4),(7). Somit ist

$$K_6 = (2{,}3)(3{,}6),(6{,}2) \tag{9}$$

Für K_7 verbleibt nur

$$K_7 = (2{,}4)(4{,}5),(5{,}2) \tag{10}$$

Also können nur solche Mengen $M = \{K_1,...,K_7\}$ die in der Aufgabe genannten Eigenschaften haben, die nach Ausführung von Umbenennungen gemäß (1), (3), (6) die in (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) genannten Ketten enthalten.

II. Jede solche Menge hat diese Eigenschaften, da eine Umbenennung gemäß (3) die Kette (2) nicht ändert und ebenso eine Umbenennung gemäß (6) keine der Ketten (2), (4), (5) ändert, so dass die an M gestellten Forderungen der Aufgabe sich - nach diesen Umbenennungen - aus den Angaben (2), (4), (5), (7), (8), (9), (10) bestätigen lassen.

III. Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau alle diejenigen Mengen $M = \{K_1, \dots, K_7\}$, die gemäß (1) - (10) zu erhalten sind, die in der Aufgabe geforderten Eigenschaften haben.
Ferner folgt: Je zwei solche Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwei unterschiedliche Wahlen in (1) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da diejenige Kette, die nach der zu M führenden Wahl (1) die in (2) genannte Kette K_1 ist, nicht in M' vorkommt.

Ebenso folgt: Je zwei Mengen M, M', bei deren Gewinnung zwar dieselbe Wahl in (1), aber unterschiedliche Wahlen in (3) getroffen wurden, sind voneinander verschieden, da die in M gemäß (4) enthaltene Kette K_2 nicht in M' vorkommt. Entsprechend sind auch je zwei Mengen voneinander verschieden, bei deren Gewinnung in (1) sowie in (3) jeweils gleichlautende Wahlen, aber in (6) unterschiedliche Wahlen getroffen wurden.

Somit ergibt sich insgesamt: Man erhält bei allen nur den $5 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten, die Wahlen in (1), (3), (6) zu treffen, Mengen mit den in der Aufgabe geforderten Eigenschaften, jede dieser Mengen genau einmal. Also beträgt die gesuchte Anzahl dieser Mengen $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Aufgabe 271045:
Worte aus den Buchstaben E, R und S sollen nach folgenden Regeln aus einem zu Anfang vorgegebenen Wort gebildet werden:
(1) Endet das Wort auf S, so kann ein R angefügt werden.
(2) An ein Wort darf dasjenige Wort angefügt werden, welches aus den gleichen Buchstaben, aber in

umgekehrter Reihenfolge besteht.
(3) Treten in einem Wort drei gleiche Buchstaben unmittelbar hintereinander auf, dann dürfen sie durch ein R ersetzt werden.
(4) Zwei aufeinanderfolgende R oder E dürfen weggelassen werden.
Eine beliebige Wahl der Reihenfolge und beliebig häufige Wiederholung der Regelanwendung sind zugelassen.
Ist es möglich, durch genügend häufige Anwendung dieser Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten?

Lösung von OlgaBarati:
Es gibt hier zwei Start-Szenarien, einmal mit Regel (1) ESR und einmal mit Regel (2) ESSE welche sich mit den Regeln (2),(3),(4) beliebig fortsetzen lassen.
z. B. ES ESSE ESSEESSE ESSSSE ERRRSE ERSE.
z. B. ESR ESRRSE ESSE

Entscheidend ist jedoch, jedes nachfolgende Wort beginnt stets mit E und endet mit E.
Die zwischen E....E liegenden Buchstaben S sind mit den gegebenen Regeln nicht vollständig zu eliminieren, da bedingt durch die Regeln (2) und (4) S stets aus 2er-Potenzen besteht und daher mit Regel (3) nicht vollständig zu eliminieren ist.

Sei 2^n der Anzahl der Buchstaben S die durch Anwendung der Regeln (2),(4) gebildet wird und $2^m \cdot 3$ die Anzahl der Buchstaben S die durch Regel (3) eliminiert werden.

$$n,m \in \mathbb{N}_0 \qquad ; \qquad 2^n - 2^m * 3 \neq 0$$

$$2^n \neq 2^m \cdot 3 \qquad ; \qquad 2^{n-m} \neq 3$$

Man gelangt also nicht zu E, EE bzw. EEEE woraus über ERRR dann ER werden könnte. Es ist nicht möglich mit den gegebenen Regeln aus dem Wort ES das Wort ER zu erhalten.

Aufgabe 301045:
Ein Mathematiklehrer, der demnächst den Flächeninhalt von Kreisen behandeln wollte, stellte folgende vorbereitende Hausaufgabe:
Auf kariertem Papier (quadratische Kästchen) der Seitenlänge 5 mm) sollten die Schüler um einen Eckpunkt eines Kästchens Kreise mit den Radien 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm und 5 cm zeichnen.
Zu jedem dieser Kreise sollten sie unter allen Kästchen, die gemeinsame Punkte mit der Kreisfläche haben, diejenigen zählen,
a) die vollständig in der Kreisfläche enthalten sind,
b) deren Vereinigungsmenge die Kreisfläche vollständig überdeckt.
Offenbar ergibt das Produkt des Flächeninhaltes eines Kästchens mit der in (a) gefundenen Anzahl einen zu kleinen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises, mit der in (b) gefundenen Anzahl dagegen einen zu großen Näherungswert.
Anschließend sollte noch das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungswerte (als ein dritter Näherungswert) berechnet werden.
Die Schüler, die sehr sorgfältig gearbeitet hatten, erhielten folgende Ergebnisse:

Radius r in cm	Anzahl der bei a)	Kästchen bei b)	Näherungswert des Flächeninhalts in cm^2
1	4	16	$(1 + 4) : 2 = 2{,}5$
2	32	60	$(8 + 15) : 2 = 11{,}5$
3	88	132	$(22 + 33) : 2 = 27{,}5$
4	164	224	$(41 + 56) : 2 = 48{,}5$
5	276	344	$(69 + 86) : 2 = 77{,}5$

Nun wurde bemerkt, dass jeweils die Maßzahlen des dritten Näherungswertes sämtlich nach dem Komma die Ziffer 5 haben.

Trifft das auch bei der Wahl aller Radien r zu, deren Maßzahlen in cm die natürlichen Zahlen größer als 5 sind?

Lösung von cyrix:
Wir legen ein Koordinatensystem so in die Ebene des karierten Papiers, dass dessen Koordinatenursprung im Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt, dessen Koordinatenachsen mit den durch diesen Eckpunkt eines Kästchens verlaufenden Gitterlinien zusammenfallen und die Kästchenlänge 1 betrage. (Damit sind also geradzahlige Radien $r > 10$ zu betrachten.)

Wir bemerken, dass bei einer Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel 90° der Kreis wieder auf sich selbst und Kästchen wieder auf Kästchen, jedoch keines auf sich selbst, abgebildet werden. Also genügt es, die jeweiligen Kästchen im ersten Quadranten zu zählen und deren Anzahl dann mit vier zu multiplizieren, da es aufgrund der Drehung in den anderen Quadranten immer genauso viele Kästchen der entsprechenden Sorte wie im ersten Quadranten gibt.

Es sei A die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die vollständig innerhalb des Kreises liegen. Identifizieren wir ein Kästchen mit den Koordinaten (x,y) seiner rechten oberen Ecke, wobei also x und y dann beides positive ganze Zahlen sind, so liegt das Kästchen genau dann vollständig in der Kreisfläche, wenn $x^2 + y^2 \leq r^2$ gilt.

Analog sei B die Anzahl der Kästchen im ersten Quadranten, die gemeinsame Punkte mit dem Kreis besitzen. Bezeichne hier (u,v) die Koordinaten der linken unteren Ecke des Kästchens, wobei dann u und v nicht-negative ganze Zahlen sind. Dann besitzt das Kästchen genau dann mindestens einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis, wenn die linke untere Ecke des Kästchens noch im oder auf dem Kreis liegt, also $u^2 + v^2 \leq r^2$ gilt.

Offenbar führt jede Lösung von $x^2+y^2 \leq r^2$ mit $x,y \in \mathbb{Z}_{>0}$ via $u := x$, $v := y$ auch zu einer von $u^2+v^2 \leq r^2$, sodass $B \geq A$ gilt. Tatsächlich erhält man so natürlich alle Lösungen der zweiten Ungleichung, für die weder u noch v Null sind. Es fehlen also genau diese, wo mindestens eine der beiden Variablen verschwindet.

Ist $u = 0$, so kann v alle Werte von 0 bis r annehmen, analog anders herum. Da die Lösung (0,0) hier in beiden Fällen mitgezählt wurde, hat die Ungleichung $u^2 + v^2 \leq r^2$ also (für nicht-negativ ganzzahliges r) genau $2r - 1$ Lösungen, bei denen mindestens eine der beiden Variablen u bzw. v Null ist.
Also gilt $B = A + (2r - 1)$ bzw. $\frac{A+B}{2} = A + r - \frac{1}{2}$.

Da die tatsächliche Kästchenanzahl in allen vier Quadranten insgesamt das Vierfache der hier gezählten Kästchen im ersten Quadranten ist, gilt für das arithmetische Mittel der insgesamt gezählten Kästchenanzahlen, dass dieses ein Vielfaches von 4 ist, von dem 2 subtrahiert werden. Da der Flächeninhalt eines Kästchens $\frac{1}{4}\text{cm}^2$ beträgt, ist also für jedes ganzzahlige r (d. h., der gezeichnete Kreis hat einen Radius, der ein natürliches Vielfaches der Kästchenlänge von 5mm ist) das arithmetische Mittel der errechneten Flächeninhalte eine ganze Zahl von cm^2 minus $\frac{1}{2} = 0{,}5$, sodass die Maßzahl des dritten Näherungswerts immer auf $\ldots{,}5$ endet.

Aufgabe 321042:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ denke man sich in

$$p_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$$

auf der rechten Seite durch genügend häufiges Ausmultiplizieren alle Klammern beseitigt und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von x geordnet, so dass in dem (so geschriebenen) Polynom

jede Potenz von x genau einen Koeffizienten erhält (eine Zahl, die als Faktor bei dieser Potenz steht).
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind mindestens drei Koeffizienten ungerade.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die gilt:
Bei dieser Darstellung von $p_n(x)$ sind genau drei Koeffizienten ungerade.

Lösung von ochen:
a) Die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} in dieser Darstellung sind 1, da wir das Monom x^0 nur bekommen, wenn wir n mal x^0 miteinander multiplizieren und wir das Monom x^{2n} nur bekommen, wenn wir n mal x^2 miteinander multiplizieren.
Weiter ist die Summe aller Koeffizienten $p_n(1) = 3^n$ und somit ungerade. Wären die Koeffizienten von x^0 und x^{2n} die einzigen ungeraden, wäre aber die Summe aller Koeffizienten gerade. Somit muss es einen dritten ungeraden Koeffizienten geben.

b) Wir zeigen erst folgendes Lemma.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $n = 2^m$. Weiter seien $0 < k < n$ beliebig, so ist $\binom{n}{k}$ gerade.

Beweis: Sei s die größte natürliche Zahl, sodass k durch 2^s teilbar ist. Insbesondere ist $s < m$, also folgt

$$2^{-s} \cdot k\binom{n}{k} = 2^{-s} \cdot n\binom{n-1}{k-1} = 2^{m-s} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Da die rechte Seite gerade ist und $2^{-s}k$ ungerade ist, muss $\binom{n}{k}$ gerade sein. $\square$

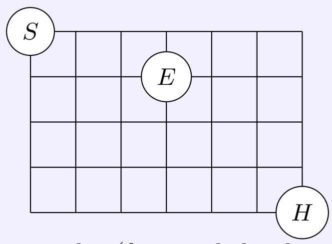
Sei m eine beliebige natürliche Zahl und $n = 2^m$. Dann betrachten wir das Polynom p_n mit $n = 2^m$.
Wir wenden nun den binomischen Lehrsatz an

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+x)^k x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l x^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{l} x^l x^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{l} x^{2(n-k)+l}$$

Nach obigem Lemma ist $\binom{n}{k}\binom{k}{l}$ gerade, falls $k,l \notin \{0,n\}$ ist. Falls $k,l \in \{0,n\}$ ist, handelt es sich bei $x^{2(n-k)+l}$ um eines der Monome x^0,x^n,x^{2n}.
Andernfalls werden nur Monome mit geradzahligen Koeffizienten summiert. Somit sind x^0,x^n,x^{2n} die einzigen Monome mit ungeraden Koeffizienten, falls n eine Zweierpotenz ist. Da es unendlich viele Zweierpotenzen gibt, ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 321045:
In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar.
Robert wählt für seinen Weg von der Schule S nach Hause H an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.
Kommt er an die Ecke E, so kauft er sich ein Eis.



Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen

Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus:
Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.
a) Er erklärt dazu: „Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von S nach H führen über die Ecke E.“
Trifft das zu?
b) Seine Mutter meint: „Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über E führen.“
Trifft das zu?

Lösung von cyrix:
a) Um auf einem möglichst kurzen Weg nach Hause zu kommen, muss er − in beliebiger Reihenfolge − 6 Wegstücke nach rechts und 4 nach unten zurücklegen. Dafür gibt es $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ Möglichkeiten, sodass Robert genau so viele Wege prinzipiell zur Verfügung hat.

Bei E kommt er nur genau dann vorbei, wenn unter den ersten vier Wegstücken genau eines nach unten dabei war. Dafür gibt es $\binom{4}{1} = 4$ mögliche Wege von S nach E. Um nach dem Eiskauf noch nach Hause zu kommen, müssen weitere 3 Wegstücke nach rechts und 3 nach unten zurückgelegt werden, wofür es $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ Möglichkeiten gibt, sodass genau $4 \cdot 20 = 80 > 70 = \frac{1}{3} \cdot 210$ möglichst kurze Wege von S nach H über E führen. Robert hat also mit seiner Aussage recht.

b) Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Robert durch Zufallsentscheidungen von S nach E gelangt, genügt es, die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Wege von S nach E zu bestimmen und diese zu addieren.

Jeder dieser Wege besitzt eine Länge von 4 und tatsächlich ist sowohl zu Beginn als auch an jedem Zwischenpunkt eine Entscheidung zu treffen, da an jeder dieser Stelle zwei mögliche Fortsetzungen für kürzeste Wege nach H existieren. Also hat jeder dieser Wege eine Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, sodass Robert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ in E vorbeikommen dürfte. Roberts Mutter hat also mit ihrer Aussage auch recht.

IV Zahlentheorie

IV.I Teibarkeit, Primzahen

I Runde 1

Aufgabe 061012:
Wieviel natürliche Zahlen $n < 1000$ gibt es, die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man mit $[x]$ die größte ganze Zahl, de nicht größer als x ist, so beträgt die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 1000 sind $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$.

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$.

Dabei wurden aber die Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, doppelt gerechnet. Ihre Anzahl ist $\left[\frac{999}{15}\right] = 66$.

Von den 999 Zahlen sind also 999 - 333 - 199 + 66 = 533 Zahlen weder durch 3 noch durch 5 teilbar.

Aufgabe 231011:
Anne setzt in den beiden Termen $a^2 - b^2$ und $a - b$ je eine natürliche Zahl für a und b ein. Sie berechnet die dabei entstehenden Zahlen. Entsteht aus $a^2 - b^2$ beim Einsetzen die Zahl z und aus $a - b$ die Zahl n, so stellt Anne fest, dass sich aus z und n dann $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl ergibt.

Gilt das immer?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt nicht immer. Setzt man nämlich sowohl für a als auch für b dieselbe Zahl ein, so erhält man $n = 0$, und es ergibt sich nicht $\frac{z}{n}$ als eine natürliche Zahl, da Brüche mit dem Nenner 0 nicht existieren.

Aufgabe 251012:
Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest.

Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag.

Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: „Ich bin heute $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie mein Sohn und 11 mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6 mal so alt sein wie sie und 4 mal so alt wie mein Sohn.“

Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, dass diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen. Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: „Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind.“

Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die von einem der drei Lehrer gemachten Aussagen zutreffen und x das Alter seines jüngeren Kindes ist, dann ist $11x$ das Alter dieses Lehrers und somit, de er $\frac{11}{2}$ mal so alt ist wie sein älteres Kind, $2x$ das Alter des älteren Kindes.

Daher können die Altersangaben für die drei Lehrer nur durch 11 teilbare Zahlen sein. Da es zwischen 20 und 50 nur die drei durch 11 teilbaren Zahlen 22, 33 und 44 gibt und die Lehrer sämtlich verschieden alt sind, können die Aussagen folglich nur dann zutreffen, wenn (*)

der älteste Lehrer 44 Jahre alt ist und seine Kinder 4 bzw. 8 Jahre alt sind,

der zweite Lehrer 33 Jahre alt ist und seine Kinder 3 bzw. 6 Jahre alt sind,

der jüngste Lehrer 22 Jahre alt ist und seine Kinder 2 bzw. 4 Jahre als sind.

II. Wenn einer der Lehrer $11x$ Jahre alt ist und seine Kinder x bzw. $2x$ Jahre alt sind, so ist er $5\frac{1}{2}$ mal so alt wie sein älteres und 11 mal so alt wie sein jüngeres Kind.

Ferner ist sein jüngeres Kind in genau x Jahren so alt wie sein älteres jetzt, nämlich $2x$ Jahre, und dann ist sein älteres Kind $3x$ Jahre alt und der Lehrer $12x$ Jahre, d. h. aber 6 mal so alt wie sein jüngeres und 4 mal so alt wie sein älteres Kind.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle in der Aufgabe genannten Aussagen zutreffen und dass durch diese Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind. Sie lauten wie in (*) angegeben.

Aufgabe 271011:
Wie viele geordnete Paare von ganzen Zahlen (x, y) gibt es insgesamt, für die $x \cdot y = 1987$ gilt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl 1987 ist durch keine der Zahlen

$$2, 3, 5, 6, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$$

teilbar (wie man z. B. durch Berechnen der 14 Divisionen 1987 : 2, 1987 : 3, ... mit einem Taschenrechner feststellen kann. Wegen $\sqrt{1987} < 44$ besagt dies, dass 1987 durch keine Primzahl p teilbar ist, für die $p \leq \sqrt{1987}$ gilt.

Damit ist bewiesen: 1987 ist eine Primzahl. Daraus folgt, dass es genau die folgenden vier geordneten Paare ganzer Zahlen $(x; y)$ mit $x \cdot y = 1987$ gibt:

$$(1{,}1987) \quad , \quad (-1, -1987) \quad , \quad (1987, 1) \quad , \quad (-1987, -1)$$

Aufgabe 281011:

a) Bernd hörte, dass der Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) nachwies:

Für jede ganze Zahl x mit $-40 < x < 41$ ist die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Bernd wollte dies für mindestens zehn dieser Zahlen nachrechnen.

Rechnen Sie dies ebenfalls für mindestens zehn dieser Zahlen nach!

b) Untersuchen Sie, ob sogar für jedes ganzzahlige x die Zahl $x^2 - x + 41$ eine Primzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es genügt z. B., mindestens für zehn der genannten Zahlen x die unten angegebenen Feststellungen I., II., III. auszuführen:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 - x + 41$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x^2 - x + 41$	151	173	197	23	251	281	313	347	383	421
x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x^2 - x + 41$	461	503	547	593	641	691	733	797	853	911
x	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$x^2 - x + 41$	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

I. Die Quadratwurzeln aller hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ sind kleiner als 41.

II. Alle Primzahlen unterhalb 41 sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

III. Für jede der hier aufgeführten Zahlen $x^2 - x + 41$ gilt: Sie ist durch keine der in II. genannten Primzahlen teilbar.

Aus I., II., III. folgt nämlich, dass alle diese Zahlen $x^2 - x + 41$ selbst Primzahlen sind.

b) Nicht für jedes ganzzahlige x ist $x^2 - x + 41$ eine Primzahl. Zum Beweis dieser Aussage genügt es, eine ganze Zahl x zu nennen, für die sich erweist, dass $x^2 - x + 41$ keine Primzahl ist. Ein solches Beispiel ist etwa $x = 41$; denn hierfür wird $x^2 - x + 41 = 41^2$.

Aufgabe 301012:
Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen lässt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, dass darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.

Bert sagt dazu: „Es genügt, nur die natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit $G \leq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch $G = \mathrm{INT}(\mathrm{SQR}(Z))$ ermittelt werden kann).“
Er sagt außerdem: „Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren.“

Armin entgegnet: „Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, dass jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird.“

a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?

b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu jeder Nichtprimzahl $Z > 1$ gibt es natürliche Zahlen $A,B > 1$ mit $Z = A \cdot B$, und mindestens eine dieser Zahlen muss kleiner oder gleich $\sqrt{Z}$ sein; denn wären $A > \sqrt{Z}$ und $B > \sqrt{Z}$, so folgte der Widerspruch $Z = AB > \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} = Z$. Also hat jede Nichtprimzahl auch mindestens einen Teiler, der gemäß Berts Vorschlag geprüft wird. Daher ist Berts Aussage wahr, Armins Entgegnung nicht.

b) Für jede Primzahl Z sind nach Armins Verfahren $Z - 2$ Zahlen zu überprüfen, nach Berta Vorschlag $G - 1$ Zahlen. Ist Z eine mindestens dreistellige Zahl, also $100 \leq Z$, so folgt

$$10 \cdot (G - 1) \leq 10 \cdot \sqrt{Z} - 10 \leq \sqrt{Z} \cdot \sqrt{Z} - 10 < Z - 2$$

also ist die Anzahl $G - 1$ kleiner als ein Zehntel der Anzahl $Z - 2$. Berts zweite Aussage ist somit ebenfalls wahr.

Aufgabe 331012:
Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl gibt es; denn die Zahl $z = 2 \cdot 7^6$ hat die genannten Eigenschaften.

Beweis: Diese Zahl lautet 235298, sie ist also sechsstellig. Ferner sind Teiler von z unter den natürlichen Zahlen genau die Zahlen 1, 7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6 sowie das Zweifache dieser sieben Zahlen.

Keine zwei dieser vierzehn Zahlen sind einander gleich, und unter ihnen befindet sich auch die Zahl $2 \cdot 7 = 14$.

II Runde 2

Aufgabe 021023:
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$n = \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

immer eine natürliche Zahl ist!

Lösung von André Lanka:

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{2m + 3m^2 + m^3}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer genau eine durch 3 und mindestens eine durch 2 teilbar. Damit ist das Produkt der drei Zahlen auf jeden Fall durch 6 teilbar.

Aufgabe 021025:
Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, dass die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Lösung von André Lanka:
Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Das liegt daran, dass jede 10er Potenz bei Division durch 9 den Rest 1 lässt.
Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht, weswegen die gegebene Zahl und die umgestellte Zahl den gleichen Rest bei Division durch 9 lassen. Ihre Differenz ist deswegen durch 9 teilbar.

Aufgabe 031021:
a) Beweisen Sie, dass die Zahl $2^{256}-1$ keine Primzahl ist!
b) Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Mit Hilfe der dritten binomischen Formel kann man einen Term der Form $2^{2^n}-1$ in zwei Faktoren zerlegen. Es gilt:

$$2^{2^n}-1=(2^n-1)(2^n+1)$$

Den Ausdruck $2^{256}-1$ kann man, wenn man dieses Verfahren mehrfach anwendet, in mehrere Faktoren aufspalten.

$$2^{256}-1=(2^1-1)(2^1+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)(2^{128}+1)$$

b) $2^1+1=3, 2^2+1=5$ und $2^4+1=17$ sind Primzahlen und damit Primfaktoren von $2^{256}-1$.

Aufgabe 031025:
Durch welche Zahlen ist das Produkt dreier beliebiger, aber aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen teilbar, deren Summe ungerade ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.
Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist genau eine durch 4 teilbar.
Wegen der drei im Produkt enthaltenen Faktoren 2, 3 und 4 ist das Produkt stets durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar.

Aufgabe 061022:
Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p,q ganzzahlig und $q\neq 0$). Man beweise, dass dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Indirekter Beweis:
Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c\neq 0,\pm 1$), dann müsste gelten $q-p=c\cdot m$ (m ganzzahlig) und $q=c\cdot n$ (n ganzzahlig).
Daraus würde folgen $q=c(n-m)$. Dann wären q und p durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

Aufgabe 091022:
Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1<a_2<a_3<a_4$ so, dass jede der Zahlen

$$d_1=a_4-a_3;\quad d_2=a_3-a_2;\quad d_3=a_2-a_1;\quad d_4=a_4-a_2;\quad d_5=a_3-a_1;\quad d_6=a_4-a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen $a_1, \dots, a_4$ seien die vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \dots, d_6$ die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2, \qquad d_5 = d_2 + d_3, \qquad d_6 = d_1 + d_2 + d_3$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet der Fall aus.

II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2(, dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, dass d_6 gerade und größer als 2 ist.

IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, dass entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl. Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d6 = d_2 + 4$. Nun ist von den drei ganzen Zahlen der Form $d_2, d_2 + 2, d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber $d_2 > 1$ ist, also $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2, \qquad a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5, \qquad a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7$$

Daher können $a_1, ..., a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = n + 2, \qquad a_3 = n + 5, \qquad a_4 = n + 7 \tag{*}$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (*) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen Primzahl

$$\begin{aligned} d_1 &= a_4 - a_3 = 2, \qquad & d_2 &= a_3 - a_3 = 3, \qquad & d_3 &= a_2 - a_1 = 2 \\ d_4 &= a_4 - a_2 = 5, \qquad & d_5 &= a_3 - a_1 = 5, \qquad & d_6 &= a_4 - a_1 = 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 101024:
Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass mindestens eine der Zahlen

$$x = 2mn; \qquad y = m^2 - n^2; \qquad z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Ist m oder n durch 5 teilbar, so auch x. Andernfalls sind sowohl $m^4 - 1$ als auch $n^4 - 1$ und damit auch

$$(m^4 - 1) - (n^4 - 1) = m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = yz$$

durch 5 teilbar, sodass auch mindestens eine der Zahlen y oder z durch 5 teilbar sein muss, $\square$.

Bemerkung: Dass für eine nicht durch 4 teilbare ganze Zahl t die Zahl $t^4 - 1$ durch 5 teilbar sein muss, folgt aus dem kleinen Satz von Fermat oder auch via

$$(5s \pm 1)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 1 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 1^2 \pm 5s \cdot 1^3 + 1^4 - 1 \quad \text{und}$$

$$(5s \pm 2)^4 = 5^4 s^4 \pm 4 \cdot 5^3 s^3 \cdot 2 + 6 \cdot 5^2 s^2 \cdot 2^2 \pm 4 \cdot 5s \cdot 2^3 + 2^4 - 1$$

welche wegen $1^4 - 1 = 0$ und $2^4 - 1 = 15$ alle durch 5 teilbare Zahlen sind.

Aufgabe 161021:
Es sei q eine ganze Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\frac{q^3-q}{6}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$q^3 - q = q(q^2 - 1) = q(q-1)(q+1)$$

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $q-1, q, q+1$ ist stets eine durch 2 und eine durch 3 teilbar. Mithin ist ihr Produkte $q^3 - q$ durch 6 teilbar, d. h., $\frac{q^3-q}{6}$ ist eine ganze Zahl. **Alternativ-Lösung von cyrix:**
Es ist

$$\binom{q+1}{3} = \frac{(q+1)\cdot q\cdot(q-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{q^3-q}{6}$$

eine ganze Zahl, da sie die Anzahl der Möglichkeiten entspricht, aus einer Menge mit $q+1$ Elementen eine drei-elementige Teilmenge auszuwählen.

Aufgabe 201021:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $1 + 4\cdot 9^{2n}$ eine Primzahl ist!

Lösung von Nuramon:
Es gilt

$$1 + 4\cdot 9^{2n} \equiv 1 + 4\cdot(-1)^{2n} \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$$

Daher ist $1 + 4\cdot 9^{2n}$ nur für $n = 0$ prim.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist

$$1 + 4\cdot 9^{2n} = 1^4 + 4\cdot(3^n)^4, \tag{IV.1}$$

sodass wir die Sophie-Germain-Identität anwenden können und erhalten die Faktorisierung

$$\begin{aligned} 1 + 4\cdot 9^{2n} &= (1^2 + 2\cdot(3^n)^2 + 2\cdot 1\cdot 3^n)\cdot(1^2 + 2\cdot(3^n)^2 - 2\cdot 1\cdot 3^n) && \text{(IV.2)} \\ &= (1 + 2\cdot 9^n + 2\cdot 3^n)\cdot(1 + 2\cdot 9^n - 2\cdot 3^n). && \text{(IV.3)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nur dann eine Primzahl, wenn der kleinere zweite Faktor den Wert 1 annimmt, was aber wegen $9^n > 3^n$ für positive n nie der Fall ist. Für $n = 0$ erhält man dagegen die Primzahl $1 + 4\cdot 9^{2\cdot 0} = 2$, sodass dies die einzige Lösung darstellt.

Aufgabe 251021:
Geben Sie alle Tripel (a, b, c) von ganzen Zahlen a, b, c mit $a \leq b \leq c$ und $a\cdot b\cdot c = 1985$ an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Primfaktorzerlegung von 1985 lautet $5\cdot 397 = 1985$.
Nimmt man noch den Faktor 1 hinzu, so gibt es für natürliche Zahlen a,b,c genau die folgenden Darstellungen:

(1) $1\cdot 5\cdot 397 = 1985$ (2) $1\cdot 1\cdot 1985 = 1985$

Da die Tripel aller ganzen Zahlen gesucht sind, sind noch die Fälle zu beachten, in denen genau zwei der Faktoren negatives Vorzeichen haben:
Aus (1) entstehen so genau die Darstellungen $(-1)\cdot(-5)\cdot 397$, $(-19\cdot 5\cdot(-397)$ und $1\cdot(-5)\cdot(-397$.
Aus (2) ergeben sich die Darstellungen $(-1)\cdot(-1)\cdot 1985$ und $1\cdot(-1)\cdot(-1985)$.
Insgesamt gibt es genau die sieben genannten Tripel, die die Aufgabenstellung erfüllen.

Aufgabe 271022:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$\frac{n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6}{n+2} \qquad (1)$$

eine natürliche Zahl ist!

Lösung von Steffen Polster:
Polynomdivision von Zähler und Nenner ergibt

$$(n^4 - 2n^3 - 3n^2 + 7n - 6) : (n+2) = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$$

Der Term $a_n = n^3 - 4n^2 + 5n - 3$ (n natürliche Zahl) wächst ab einem n_0 streng monoton. Es wird $a_0 = -3, a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 3, ...$ (2) und

$$a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 5n + 2 > 0 \quad \text{für} \quad n \geq 2; n_0 = 2$$

Damit wird (1) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ zu einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 281021:
Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und die durch 450 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für natürliche Zahlen, deren Zifferndarstellung nur us Ziffern 0 und 1 besteht, gilt:

1. Eine solche Zahl ist genau dann positiv, wenn die Anzahl der Ziffern 1 nicht Null ist.
2. Sie ist genau dann durch 450 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 50 teilbar ist, da 9 und 50 zueinander teilerfremd sind.
3. Sie ist genau dann durch 50 teilbar, wenn ihre Ziffernfolge auf ...00 endet; da die Teilbarkeit durch auch bei Endung ...50 möglich ist, da hier aber nur 0 und 1 vorkommen.
4. Sie ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist; ihre Quersumme ist hier gleich der Anzahl der Ziffern 1 in der Zifferndarstellung.

Die Zifferndarstellung der kleinsten Zahl, die alle diese Bedingungen erfüllt, besteht folglich aus genau neun Ziffern 1 und zwei anschließenden Ziffern 0. D. h., die gesuchte Zahl lautet 11111111100.

Aufgabe 321021:
Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl z, die genau vier Teiler t_1, t_2, t_3, t_4 mit $1 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < z$ hat!

Lösung von Steffen Polster:
Hat die natürliche Zahl z die Primfaktorzerlegung

$$z = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$$

wobei die p_i ($i = 1,2,...,n$) verschiedene Primfaktoren sind und die a_i deren Häufigkeit in der Zerlegung, so ist die Anzahl der Teiler t von z (inkl. 1 und z selbst) gleich

$$t = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Da die gesuchte Zahl z 6 Teiler (inkl. 1 und z) haben soll, wird

$$6 = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$$

Jeder Faktor $(a_i + 1)$ ist größer als 1, so dass nur das Produkt $6 = 3 \cdot 2$ möglich ist, d. h. z hat genau 2 Primteiler, von denen einer doppelt, der andere einfach auftritt, d. h.

$$z = p_1^2 \cdot p_2$$

Setzt man die kleinsten Primzahlen 2 und 3 für p_1 und p_2 ein, wird $z = 2^2 \cdot 3 = 12$. 12 ist die gesuchte Zahl. Ihre von 1 und z verschiedenen Teiler sind: 2, 3, 4 und 6.

III Runde 3

Aufgabe V11035:
Unter der Zahl $n!$, gelesen „n Fakultät“, versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z. B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Wieviel Endnullen hat die Zahl 50! (50 Fakultät)? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von weird:
Tatsächlich ist ja die Vielfachheit einer Primzahl p in $n!$ bekanntlich einfach

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor,$$

was für $n = 50$ und $p = 5$ dann tatsächlich

$$\lfloor \frac{50}{5} \rfloor + \lfloor \frac{50}{25} \rfloor = 12$$

ergibt.

Alternativ-Lösung von svrc:
Wir zerlegen alle Faktoren in ihre Primfaktoren. Eine Endnull entsteht genau dann, wenn die Primzahlen 2 und 5 miteinander multipliziert werden. Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus den Faktoren, die als Endziffer eine Null oder eine Fünf haben, d.h:

$$5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 2^2 \cdot 5, 25 = 5^2, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 35 = 5 \cdot 7, 40 = 2^3 \cdot 5, 45 = 3^2 \cdot 5, 50 = 2 \cdot 5^2.$$

Insgesamt taucht der Primfaktor 5 12 Mal auf. Da der Primfaktor 2 in jeder geraden Zahl auftaucht, hat die Zahl 50! insgesamt 12 Endnullen.

Aufgabe 021033:
Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wie viele Lösungen gibt es?

Lösung von André Lanka:
Die gesuchte Zahl muss durch 11 und durch 9 teilbar sein. Wegen letzterem ist auch die Quersumme durch 9 teilbar. Beim Umstellen der Ziffern ändert sich die Quersumme der Zahl nicht. Die neu gebildete ist also auch durch 9 teilbar.
Da sie durch Multiplikation mit $\frac{2}{9}$ aus der ursprünglichen Zahl erhalten wurde, muss die anfängliche Zahl zweimal durch 9 teilbar sein. Die gesuchte Zahl ist also nicht nur durch $11 \cdot 9$ sondern sogar durch $11 \cdot 9 \cdot 9$ teilbar.
Die einzige dreistellige Zahl, die diese Bedingung erfüllt ist 891. Sie ist zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 021035:
Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!

Lösung von André Lanka:
Seien $n-1$, n und $n+1$ die drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Dann ist

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6^n = 3n(n^2+2)$$

Wenn n durch 3 teilbar ist, ist der Faktor $3n$ durch 9 teilbar und damit das ganze Produkt. Wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, also wenn $n = 3k+1$ gilt, dann ist der zweite Faktor $n^2+2 = (3k+1)^2+2 = 9k^2+6k+3$ durch 3 teilbar und mit der ersten 3 dann das ganze Produkt durch 9.
Bei der letzten Möglichkeit, Rest 2 bei Division durch 3 kann auch äquivalent genutzt werden, dass bei Division durch 3 der Rest -1 auftritt. Dann gilt $n = 3k-1$ und für den zweiten Faktor analog $n^2+2 = (3k-1)^2+2 = 9k^2-6k+3$. Damit ist der zweite Faktor durch 3 und das ganze Produkt durch 9 teilbar sind.

Aufgabe 031034:
Man zeige, dass für jede natürliche Zahl n der Term n^3+11n durch 6 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Da $6 = 2 \cdot 3$ und 2 und 3 teilerfremd sind, ist zu zeigen, dass $3|(n^3+11n)$ und $2|(n^3+11n)$.
Der Term n^3+11n lässt sich aber als $n \cdot (n^2+11)$ schreiben. Es ist nun nachzuweisen, dass 2 entweder n oder n^2+11 teilt und dass 3 entweder n oder n^2+11 teilt.
Wenn 2 kein Teiler von n ist, dann lässt sich n durch $n = 2p+1$ darstellen, wobei p eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt:

$$n^2+11 = 4p^2+4p+12 = 2 \cdot (2p^2+2p+6) \Rightarrow 2|(n^2+11)$$

Wenn 3 kein Teiler von n ist, dann lässt n beim Teilen durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. n lässt sich also darstellen durch $n = 3p+1$ oder $n = 3p+2$, wobei p jeweils wieder eine natürliche Zahl ist.
Im ersten Fall gilt:

$$n^2+11 = 9p^2+6p+12 = 3 \cdot (3p^2+2p+4) \Rightarrow 3|(n^2+11)$$

Im zweiten Fall gilt:

$$n^2+11 = 9p^2+12p+15 = 3 \cdot (3p^2+4p+5) \Rightarrow 3|(n^2+11)$$

Das heißt: In jedem Fall ist n^3+11n durch 2 und durch 3 und damit durch 6 teilbar.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $(n-1)n(n+1) = n^3-n$ das Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen, von denen damit min. eine durch 2 und eine durch drei, das Produkt also durch 6 teilbar ist. Damit ist auch $n^3+11n = (n^3-n)+12n$ durch 6 teilbar, $\square$.

Zweite Alternativ-Lösung von Nuramon:
Wir nehmen n^3+11n Bauklötze, die alle Einheitswürfel seien. Die Aufgabe ist es diese Bauklötze auf 6 gleich große Haufen zu verteilen.
Aus n^3 davon bauen wir dazu einen Würfel mit Kantenlänge n. Den Rest legen wir erstmal zur Seite.

Falls $n > 1$ ist, dann betrachten wir zunächst all jene Bauklötze, die an der Oberfläche des n^3 Würfels liegen. Da ein Würfel 6 Seiten hat, können wir die Bauklötze, die nicht an einer Kante des n^3-Würfels liegen ohne Rest verteilen.

Ebenso können wir die Bauklötze, die an den Kanten liegen, aber keine Ecken sind, ohne Rest verteilen, denn ein Würfel hat $12 = 2 \cdot 6$ Kanten. Um die 8 Ecken zu verteilen nehmen wir uns noch 4 Klötze von den beiseite gelegten $11n$ Bauklötzen hinzu, so dass wir 12 Klötze haben, die sich ohne Rest auf 6 Haufen verteilen lassen.
Somit bleiben nun noch ein $(n-2)^3$-Würfel und die restlichen, beiseite gelegten Bauklötze zu verteilen.
Wir wiederholen dieses Verfahren (d. h. das Verteilen der Oberfläche des großen Würfels unter Hinzunahme von 4 extra Klötzen), bis von dem großen Würfel nichts mehr übrig ist (das passiert, wenn n gerade ist), oder bis noch genau 1 Klotz von ihm übrig bleibt (wenn n ungerade ist).
Schreibt man n in der Form $n = 2m$ bzw. $n = 2m + 1$, so braucht man dafür m Wiederholungen.
Am Schluss hat man dann noch $11n-4m = 18m = 6 \cdot 3m$ (falls $n = 2m$) bzw. $1+11n-4m = 12+18m = 6 \cdot (2 + 3m)$ (falls $n = 2m + 1$) Bauklötze übrig, die man offenbar ohne Rest verteilen kann.

Aufgabe 041032:
Eine ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl.
Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zahl n hat die Quersumme 300. Da 300 durch 3 aber nicht durch 9 teilbar ist, gilt dieses auch für n.
Daher kann n keine Quadratzahl sein.

Aufgabe 081036:
Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Wenn p und q Primzahlen sind $(p > 3, q > 3)$, dann ist $p^2 - q^2$ ein Vielfaches von 24.

Lösung von cyrix:
Beweis:
Einerseits ist p ungerade, also $p - 1$ und $p + 1$ zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, sodass eine von beiden sogar durch 4, also $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ durch 8 teilbar ist. Analog ist $q^2 - 1$ und damit auch $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$ durch 8 teilbar.
Andererseits ist, da q teilerfremd zu 3 ist, genau eine der drei im Abstand q aufeinander folgenden ganzen Zahlen $p - q$, p, $p + q$ durch 3 teilbar. Da es p nicht ist, muss es also eine der beiden anderen Zahlen, und damit auch $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ sein.
Da 8 und 3 teilerfremd sind, folgt aus der Teilbarkeit von $p^2 - q^2$ durch 8 und durch 3 auch die durch $8 \cdot 3 = 24$, $\square$.

Aufgabe 121033:
Man denke sich alle Primzahlen, beginnend mit der Primzahl 5, der Größe nach fortlaufend nummeriert; es mögen also nummeriert sein:

Primzahl	5	7	11	13	17	19	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	...

Es ist zu beweisen, dass dann jede Primzahl größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Lösung von cyrix:
Für die Primzahlen mit Nummern (in dieser Liste) 1 und 2, also 5 und 7, gilt die Aussage offenbar. Wenn sie darüber hinaus für die Primzahl mit Nummer (in dieser Liste) k für eine positive ganze Zahl k gilt, dann zeigen wir nun, dass sie auch für die mit Nummer $k + 2$ gilt, womit sie induktiv für alle Primzahlen ≥ 5 gezeigt ist.
Sei also p die Primzahl mit Nummer k und es gelte $p > 3k$. Da $p > 2$ ungerade ist, können $p + 1$, $p + 3$ und $p + 5$ keine Primzahlen sein.

Von den drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, $p+2$ und $p+4$ ist darüber hinaus eine durch drei teilbar. Da es $p>3$ nicht ist, ist neben den genannten drei geraden noch mindestens eine der zwei ungeraden Zahlen unter $p+1$ bis $p+5$ keine Primzahl. Es kann also nach p höchstens eine weitere Primzahl geben, die $\leq p+5$ ist.
Demzufolge hat die nun noch nächstgrößere Primzahl – also jene mit Nummer $k+2$ – mindestens den Wert $p+6>3k+6=3(k+2)$, was zu beweisen war.

Aufgabe 171034:
Geben Sie alle Primzahlen p an für die $3p+4=z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$$3p+4=z^2 \qquad \text{also} \qquad 3p=z^2-4=(z+2)(z-2)$$

Da $3p$ und $z+2$ positiv sind, ist auch $z-2$ eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, $3p$ in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, dass die Faktoren entweder 1 und $3p$ oder 3 und p lauten.
Ferner haben $z+2$ und $z-2$ die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiter Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form $3p$.
Also bleibt nur die Möglichkeit, dass ein Faktor 3 und folglich der andere $p=7$ lautet. Tatsächlich erfüllt $p=7$ die Bedingung $3\cdot 7+4=25=5^2$. Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

Aufgabe 241034:
Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.
Er findet z. B., dass sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, dass sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen lässt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s\cdot t$ diese Eigenschaft.

Lösung von cyrix:
a) Es ist $89=64+25=8^2+5^2$, $90=81+9=9^2+3^2$ und (nach Aufgabenteil b) $8010=57^2+69^2$. Tatsächlich $57^2=3249$ und $69^2=4761$, sodass man die behauptete Gleichung leicht nachrechnet.

b) Seien $s=s_1^2+s_2^2$ und $t=t_1^2+t_2^2$. Dann ist

$$(s_1t_1-s_2t_2)^2+(s_1t_2+s_2t_1)^2=s_1^2t_1^2-2s_1t_1s_2t_2+s_2^2t_2^2+s_1^2t_2^2+2s_1t_2s_2t_1+s_2^2t_1^2=$$
$$=s_1^2t_1^2+s_2^2t_2^2+s_1^2t_2^2+s_2^2t_1^2=(s_1^2+s_2^2)\cdot(t_1^2+t_2^2)=s\cdot t$$

IV Runde 4

Aufgabe 021042:
Beweisen Sie, dass für alle positiven geraden Zahlen n die Zahl $z=3^n+63$ stets durch 72 teilbar ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Primfaktorenzerlegung: $72=2^3\cdot 3^2$. Damit ist zu zeigen, dass z sowohl durch 8 als auch durch 9 teilbar sein muss.

(1) Teilbarkeit durch 9:

$z = 3^n + 63$ mit n gerade: $n = 2k$ mit $k \in \ltimes$, $k > 0 \Rightarrow$

$$z = 3^{2k} + 63 = \left(3^2\right)^k + 63 = 9^k + 9 \cdot 7 = 9 \cdot (9^{k-1} + 7)$$

Da k positiv ist, folgt daraus $k-1 \geq 0$, damit ist der Klammerausdruck $a := 9^{k-1}+7 \geq 90+7 = 8 > 0$ und ganzzahlig. Es gilt also $z = 9 \cdot a$ mit $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, d. h. z ist durch 9 teilbar.

(2) Teilbarkeit durch 8:

Mittels Induktionsbeweis kann diese Teilbarkeit für den Term $a := 9^{k-1} + 7$ nachgewiesen werden.

Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, für das gilt: $8|9^{k-1} + 7$

Induktionsbehauptung: $8|9^k + 7$

Induktionsschritt: Für $k = 1$ gilt: $a = 9^{k-1} + 7 = 8$ und $8|8$.

Induktionsbeweis: Es gilt

$$9^k + 7 = 9^{k-1} \cdot 9 + 7 = 9^{k-1} \cdot (8 + 1) + 7 = 8 \cdot 9^{k-1} + 9^{k-1} + 7$$

Damit ist jeder der beiden Summanden $8 \cdot 9^{k-1}$ sowie $9^{k-1} + 7$ (wegen Induktionsvoraussetzung) durch 8 teilbar, folglich auch deren Summe. 2

Aufgabe 031044:
Wieviel Endnullen hat das Produkt

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdot \ldots \cdot (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdot \ldots p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)$$

Dabei sind $p_1, p_2, p_3, ..., p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl der Endnullen hängt von der Anzahl der Faktoren $p_1 = 2$ und $p_3 = 5$ ab; denn nur das Produkt der beiden Primzahlen 2 und 5 liefert eine Null.
Im angegebenen Produkt kommt die Zahl 2 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 100)$mal, die Zahl 5 genau $(1 + 2 + 3 + ... + 98)$mal als Faktor vor.
Also hat die Zahl genau $1 + 2 + 3 + ... + 98 = 98 \cdot \frac{99}{2} = 4851$ Endnullen.

Aufgabe 041043:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösung von Kitaktus:
a, b und c seien beliebige ganze (natürliche) Zahlen. Es gilt $(a - 1)a(a + 1) = a^3 - a$.
Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $a - 1, a$ und $a + 1$ ist mindestens eine gerade und mindestens eine durch drei teilbar. Das Produkt ist also durch 6 teilbar.
a und a^3 lassen somit stets den selben Rest bei Division durch 6. Das Gleiche gilt natürlich auch für b und c.
Daher lässt $a^3 + b^3 + c^3$ bei Division durch 6 den selben Rest wie $a + b + c$.
Insbesondere ist $a^3 + b^3 + c^3$ genau dann durch 6 teilbar, wenn $a + b + c$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 051041:
Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$.
Man zeige, dass in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Gilt

$$mn + pq = r(m - p) \qquad \text{, r ganz} \tag{1}$$

so folgt wegen

$$(mn + pq) : (m - p) = n + \frac{pq + pn}{m - p} \tag{2}$$

aus (1) und (2)

$$pq + pn = s(m - p) \qquad \text{, s ganz} \tag{3}$$

Andererseits gilt

$$(pq + mn) : (-p + m) = -q + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{4}$$

und aus (1) und (4) folgt

$$mn + mq = t(m - p) \qquad \text{, t ganz} \tag{5}$$

Also gilt

$$pq + pn + mn + mq = (s + t)(m - q) \tag{6}$$

woraus wegen (1)

$$mq + np = w(m - p) \qquad \text{, w ganz} \tag{7}$$

folgt. Umgekehrt folgt aus (6) wegen

$$(mq + np) : (m - q) = q + \frac{pq + np}{m - p} \tag{8}$$

$$pq + np = u(m - p) \qquad \text{, u ganz} \tag{9}$$

sowie wegen

$$(np + mq) : (-p + m) = -n + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{10}$$

$$mn + mq = v(m - p) \qquad \text{, v ganz} \tag{11}$$

Also gilt

$$pq + np + mn + mq = (u + v)(m - q) \tag{12}$$

woraus wegen (6)

$$mn + pq = k(m - p) \qquad \text{, k ganz} \tag{13}$$

folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir betrachten die Differenz

$$(mq + np) - (mn + pq) = m(q - n) + p(n - q) = (m - p)(q - n).$$

Diese ist offensichtlich durch $m - p$ teibar, sodass der Minuend genau dann durch $m - p$ teilbar ist, wenn es der Subtrahend auch ist, $\square$.

Aufgabe 061041:
Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$

durch 30 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zu untersuchende Zahl ist

$$z = m \cdot n \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$$

(a) Behauptung: z ist durch 2 teilbar.
Beweis: Sind m, n nicht beide ungerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.

(b) Behauptung: z ist durch 3 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 3 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar. Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.

(c) Behauptung: z ist durch 5 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m,n durch 5 teilbar, so auch z.
Lassen m,n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$; also auch z, durch 5 teilbar.
Lässt eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m+n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m,n den Rest 2, die andere den Rest 3 lässt.
Lässt schließlich eine der Zahlen m,n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4 die andere den Rest 2 oder 3, so lässt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.

Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt aus (a), (b) und (c), dass z durch 30 teilbar ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Ist mindestens eine der Variablen m oder n durch 5 teilbar, so ofenbar auch das Produkt. Andernfalls gilt aufgrund des kleinen Satzes von Fermat $m^4 \equiv n^4 \equiv 1 \pmod 5$, sodass $m^4 - n^4$ und damit das gesamte Produkt durch 5 teilbar ist.
Analog ist das Produkt sofort durch 3 teilbar, wenn es mindestens eine der beiden Werte m oder n ist. Andernfalls ist $m^4 = (m^2)^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 3$ und genauso $n^4 \equiv 1 \pmod 3$, sodass wie oben die Differenz $m^4 - n^4$ und damit das gesamte Produkt durch 3 teilbar ist.
Abschließend ist das Produkt gerade, was bei geradem m oder geradem n sofort folgt und für ungerade m und n wieder die Differenz $m^4 - n^4$ als Differenz zweier ungerader Zahlen gerade ist.
Da 5, 3 und 2 paarweise teilerfremd sind, folgt mit dem Chinesischen Restsatz, dass das Produkt also durch $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ teilbar ist, w. z. b. w.

Aufgabe 111041:
a) Man beweise den folgenden Satz!
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zwei dieser Primzahlen durch 6 teilbar.
b) Man beweise, dass die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, dass jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird!

Lösung von cyrix:
Die Summe von drei natürlichen Zahlen ist genau dann durch 3 teilbar, wenn entweder alle drei Zahlen den gleichen Rest bei der Teilung durch 3 lassen, oder aber jeder der drei möglichen Reste unter den drei Zahlen vertreten ist.

Der zweite Fall kann in der in der Aufgabe gegebenen Situation nicht vorkommen, da der Rest 0 nicht vertreten ist, da keine Primzahl die größer als 3 ist, durch 3 teilbar sein kann. Also müssen alle drei Primzahlen den gleichen Rest (1 oder 2) bei der Teilung durch 3 lassen und somit jede ihrer Differenzen durch 3 teilbar sein.

Weiterhin sind alle diese Primzahlen größer als 2 und somit ungerade. Ihre Differenzen sind damit alle gerade und insgesamt (wegen ggT(2,3) = 1) durch 6 teilbar, was a) zeigt.

Für den Aufgabenteil b) betrachte man die drei Primzahlen 3, 5 und 7, deren Summe 15 durch 3 teilbar ist, die Differenz 7-5=2, aber nicht durch 6.

Aufgabe 111042:
Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:
a) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82944000000.
b) Ihr größter gemeinsamer Teiler(ggT) ist gleich 24.
c) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120000.
d) Der größter gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.
e) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30000.

Lösung von cyrix:
Es ist $82944000000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$, sodass nur die Primzahlen 2, 3 und 5 in der Primfaktorzerlegung der x_i vorkommen. Wir können also schreiben $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i}$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen a_i, b_i, c_i für $i \in \{1,2,3,4\}$.
Dann ist nach a) $a_1 + \cdots + a_i = 16$, $b_1 + \cdots + b_4 = 4$ und $c_1 + \cdots + c_4 = 6$.

Es ist $24 = 2^3 \cdot 3^1$, sodass nach b) alle $a_i \geq 3$ und alle $b_i \geq 1$ sind. Aus letzterem folgt mit der Summenbedingung an die b_i sofort $b_1 = \cdots = b_4 = 1$. weiterhin ist mindestens eines der c_i gleich 0, da sonst der ggT auch durch 5 teilbar wäre. Analog ist auch mindestens eines der a_i genau gleich 3.

Es ist $120000 = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach c) alle $a_i \leq 6$ und alle $c_i \leq 4$ sind, wobei diese Maximalwerte auch jeweils mindestens einmal angenommen werden. Aus der Summenbedingung an die a_i, diese obere und die zuvor gezeigte untere Schranke für deren Größe folgt, dass genau eines der a_i den Wert 6, ein zweites den Wert 4 und die beiden übrigen den Wert 3 annehmen müssen.

Es ist $1200 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, sodass nach d) $a_1 \geq 4$, $a_2 \geq 4$, $c_1 \geq 2$ und $c_2 \geq 2$ folgt. Insbesondere folgt damit $a_3 = a_4 = 3$. Da mindestens eines der c_i den Wert 4 hat, ist die Summenbedingung an die c_i nur zu erfüllen, wenn $c_3 = c_4 = 0$, einer der beiden Werte c_1 und c_2 gleich 4 und der andere gleich 2 ist.

Es ist $30000 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$, sodass nach e) $a_2 \leq 4$, $a_3 \leq 4$, $c_2 \leq 4$ und $c_3 \leq 4$ folgt, wobei jeweils mindestens einer der a- bzw. c-Werte die Schranke auch annimmt. Aufgrund der zuvor gewonnenen Abschätzung an a_2 gilt $a_2 = 4$ und analog wegen $c_3 = 0$ auch $c_2 = 4$. Es folgt $c_1 = 2$ und abschließend $a_1 = 6$.
Zusammen erhalten wir
$x_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1} = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, $\quad x_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2} = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^4$
$x_3 = 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{c_3} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$, $\quad x_4 = 2^{a_4} \cdot 3^{b_4} \cdot 5^{c_4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$.

Aufgabe 201043B:
Beweisen Sie, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $625 + 4(9^{2n})$ eine Primzahl sein kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Versuch, eine Produktdarstellung mit Hilfe binomischer Formeln zu erreichen, führt auf folgendes:

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot 3^{4n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n})^2 - 4 \cdot 5^2 \cdot 3^{2n} \\ &= (5^2 + 2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 3^n)(5^2 + 2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= [(5 + 3^n)^2 + 3^{2n}] - [(5 - 3^n)^2 + 3^{2n}] \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass beide Faktoren größer als 1 sind. Es gilt jedoch

$$(5 + 3^n)^2 + 3^{2n} \geq (5 + 3^0)^2 > 1$$

und $5 \neq 3^n$, also $(5 - 3^n)^2 > 0$, $(5 - 3^n)^2 + 3^{2n} > 0 + 3^0 = 1$, womit auch dieser Teil der Lösung erbracht ist: Die Zahl $625 + 4 \cdot (9^{2n})$ ist in zwei ganzzahlige Faktoren, die beide größer als 1 sind, zerlegbar und ist somit keine Primzahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Sophie-Germain-Identität liefert direkt

$$\begin{aligned} 625 + 4 \cdot (9^{2n}) &= 5^4 + 4 \cdot (3^n)^4 \\ &= (5^2 + 2 \cdot (3^n)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \cdot (5^2 + 2 \cdot (3^n)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3^n) \\ &= (25 + 2 \cdot 9^n + 10 \cdot 3^n) \cdot (25 + 2 \cdot 9^n - 10 \cdot 3^n), \end{aligned}$$

was nur dann eine Primzahl sein kann, wenn der kleinere zweite Faktor den Wert 1 annimmt. Jedoch lässt dieser für $n \geq 2$ bei der Division durch 9 den Rest $25 \equiv -2 \pmod 9$, kann also nicht 1 werden. Im Falle $n = 0$ bzw. $n = 1$ erhält man die Werte 17 bzw. 13, sodass die Faktorisierung also in allen Fällen nichttrivial ist und der zu betrachtende Ausdruck nie eine Primzahl werden kann.

Aufgabe 211041:
Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ aus positiven ganzen Zahlen a, b, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden vier Aussagen (1), (2), (3), (4) genau drei wahr sind und eine falsch ist!
Die Aussagen lauten:

$$\begin{array}{llcll} b|(a+1), & (1) & ; & a = 2b + 5, & (2) \\ 3|(a+b), & (3) & ; & a + 7b \text{ ist eine Primzahl.} & (4) \end{array}$$

Lösung von Nuramon:
Angenommen (2) wäre falsch. Dann müsste einerseits nach (4) gelten, dass $a+7b \geq 8$ prim ist, andererseits müsste wegen (3) aber auch $a + 7b = (a + b) + 6b$ durch 3 teilbar sein. Also ist (2) wahr.
Dann ist $a + b = 3b + 5$ nicht durch drei teilbar, also ist (3) falsch. Demnach müssen (1) und (4) wahr sein.
Aus (2) folgt $a + 1 = 2b + 6$ und mit (1) ist daher genau dann erfüllt, wenn $b \mid 6$, also $b \in \{1,2,3,6\}$.
Wegen (2) ist $a + 7b = 9b + 5$. Also kann $a + 7b$ höchstens dann prim sein, wenn b gerade ist. Für $b = 2$ ist dies der Fall, denn $9 \cdot 2 + 5 = 23$ ist prim. Für $b = 6$ ebenso: $9 \cdot 6 + 5 = 59$ ist prim.
Also sind $(a,b) = (9,2)$ und $(a,b) = (17,6)$ alle gesuchten Paare.

Aufgabe 251041:
Beweisen Sie, dass

$$\frac{1281^3 + 1282^3 + 1283^3 + 1284^3 + 1285^3 + 1286^3 + 1287^3}{639 \cdot 640 + 641 \cdot 642 + 642 \cdot 643 + 644 \cdot 645}$$

eine durch 7 teilbare natürliche Zahl ist!

Lösung von cyrix:
Mit $u := 642$ wird die in der Aufgabenstellung beschrieben Zahl z zu

$$z = \frac{(2u-3)^2 + (2u-2)^3 + (2u-1)^3 + (2u)^3 + (2u+1)^3 + (2u+2)^3 + (2u+3)^3}{(u-3)(u-2) + (u-1)u + u(u+1) + (u+2)(u+3)} =$$

$$= \frac{7\cdot 8u^3+3\cdot(2u)^2\cdot(-3-2-1+1+2+3)+3\cdot(2u)\cdot(3^2+2^2+1^2+1^2+2^2+3^2)+(-3^3-2^3-1^3+1^3+2^3+3^3)}{4u^2+u\cdot(-3-2-1+1+2+3)+6+6}$$

$$= \frac{56u^3+168u}{4u^2+12} = \frac{14\cdot u\cdot(u^2+3)}{u^2+3} = 7\cdot 2u = 7\cdot 1284 \in 7\mathbb{N}, \square$$

Aufgabe 261042:
Man ermittle die kleinste positive natürliche Zahl n, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Es gibt genau 144 natürliche Zahlen, die Teiler von n sind.
(2) Unter den Teilern von n befinden sich 10 unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Lösung von cyrix:
E habe n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$.
Dann hat n genau $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$ verschiedene Teiler, da man aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung unabhängig für jede Primzahl p_i einen Exponenten $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ auswählen kann, um so die Primfaktorzerlegung $t = p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$ eines beliebigen Teilers t von n zu erhalten.

Also gilt $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1) = 144 = 2^4\cdot 3^2$. Damit kann n höchstens sechs verschiedene Primteiler besitzen, sodass $k\leq 6$ gilt.

Von 10 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer mindestens je eine der Zahlen durch $2^3=8$, $3^2=9$, 5 bzw. 7 teilbar. Also ist n durch $f := 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ teilbar. O. B. d. A. seien also $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$ und $p_4=7$ sowie $\alpha_1\geq 3$, $\alpha_2\geq 2$, $\alpha_3\geq 1$ und $\alpha_4\geq 1$.

Jede natürliche Zahl, die f als Teiler besitzt, ist damit insbesondere durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 teilbar, sodass Bedingung (2) für diese Zahlen immer erfüllt ist.

Weiterhin hat jedes Vielfache von f immer mindestens $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot(\alpha_4+1)\geq 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 48$ Teiler.

Hätte n noch zwei verschiedene Primfaktoren p_5 und p_6, die beide verschieden von den bisherigen p_1 bis p_4 sind, so hätte n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1)\cdot(\alpha_6+1)\geq 48\cdot 2\cdot 2 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht zutreffen kann.

Hat n noch einen weiteren Primfaktor $p_5\notin\{p_1,\ldots,p_4\}$, der in einer Vielfachheit $\alpha_5\geq 3$ in n enthalten ist, so hätte n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1)\geq 48\cdot 4 = 192 > 144$ Teiler, sodass dies nicht vorkommen kann.

Ist dieser Primfaktor jedoch in der Vielfachheit $\alpha_5 = 2$ in n enthalten, so hat n mindestens $48\cdot(\alpha_5+1) = 48\cdot 3 = 144$ Teiler, sodass jede Zahl der Form $f\cdot p_5^2$ auch Bedingung (1) erfüllt. (Dabei dürfen die Primfaktoren $p_1^{\alpha_1}$ bis $p_4^{\alpha_4}$ keine höheren Exponenten als die oben angegebenen unteren Schranken besitzen, da sonst das Produkt echt mehr als $48\cdot 3 = 144$ Teiler hätte.) Die kleinste unter den natürlichen Zahlen dieser Form ist $n_1 = f\cdot 11^2$, da $p_5 = 11$ die kleinste noch nicht verwendete Primzahl ist.

Ist der fünfte Primfaktor p_5 jedoch nur in der ersten Potenz in n enthalten, so hätte es, wenn alle Exponenten α_1 bis α_4 ihren minimal möglichen Wert annehmen, nur $48\cdot(\alpha_5+1) = 48\cdot 2 = 96 = \frac{2}{3}\cdot 144$ verschiedene Teiler. Also muss mindestens einer der Exponenten von p_1 bis p_4 erhöht werden, um genau 144 Teiler zu erreichen. Erhöht man α_4 von 1 auf den nächstmöglichen Wert 2, so steigt die Teileranzahl um den Faktor $\frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$, sodass dann schon die 144 Teiler erreicht wären, also alle anderen Exponenten unverändert bleiben müssen.
Damit erfüllt jede Zahl der Form $f\cdot 7\cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_2 = f\cdot 7\cdot 11$ die kleinste ist. Ein analoges Vorgehen zeigt auch, dass eine Erhöhung von α_3 nur möglich ist, wenn diese um den kleinstmöglichen Wert geschieht, und alle anderen Exponenten unverändert bleiben, sodass jede Zahl der

Form $f \cdot 5 \cdot p_5$ beide Bedingungen erfüllt, wovon $n_3 = f \cdot 5 \cdot 11$ der kleinste ist.

Eine Erhöhung von $\alpha_2 = 2$ auf den nächsthöheren Wert 3 würde dagegen die Teileranzahl nur um den Faktor $\frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ steigern, sodass eine weitere Erhöhung (von α_2 oder α_1 notwendig wäre. Dann jedoch hätte jede Zahl dieser Form mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 3 \cdot p_5 \geq f \cdot 6 \cdot 11 > n_3$, muss also nicht weiter betrachtet werden.

Eine Erhöhung von ausschließlich α_1 vom bisherigen Wert 3 müsste also bis 5 geschehen, sodass sich die Teileranzahl um den gewünschten Faktor $\frac{5+1}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ erhöht. Damit erfüllt auch jede Zahl der Form $f \cdot 2^2 \cdot p_5$ beide Bedingungen, wovon $n_4 = f \cdot 4 \cdot 11$ die kleinste ist.

Von den bisher gefundenen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen, ist $n_4 = 44 \cdot f$ die kleinste.
Es verbleibt noch der Fall, dass n keine weiteren außer den vier Primteilern p_1 bis p_4 besitzt.

Eine gemeinsame Erhöhung von α_4 und α_3 könnte jeweils höchstens um den Wert 1 erfolgen, da man sonst schon Zahlen konstruieren würde, die mindestens die Größe $f \cdot 5^2 \cdot 7 = f \cdot 245$ besitzen, also größer als n_4 sind und damit nicht mehr betrachtet werden müssen.
Erhöht man jedoch beide um genau 1, so steigt die Teileranzahl nur auf $48 \cdot \frac{2+1}{1+1} \cdot \frac{2+1}{1+1} = 48 \cdot \frac{9}{4} < 48 \cdot 3 = 144$, sodass noch mindestens ein weiterer Exponent erhöht werden müsste.
Dann jedoch hätte die Zahl mindestens die Größe $f \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 \cdot f > n_4$, sodass dieser Fall auch nicht weiter betrachtet werden muss. Demnach wird nur höchstens einer der beiden Werte α_4 und α_3 erhöht, sodass zur Konstruktion einer möglichst kleinen Zahl also α_4 konstant bleibt und höchstens α_3 erhöht wird.

Eine Erhöhung von α_3 von derzeit 1 auf 3 würde würde die Teileranzahl um den Faktor $\frac{3+1}{1+1} = 2 < 3$ erhöhen, sodass noch nicht genügend Teiler vorhanden wären, also eine weitere Erhöhung mindestens eines Exponenten α_1 bis α_3 nötig wäre. Dann jedoch würden Zahlen entstehen, die mindestens den Wert $f \cdot 2 \cdot 5^2 = 50 \cdot f > n_4$ besitzen, sodass dieser Fall nicht weiter betrachtet werden muss. Damit ist $1 \leq \alpha_3 \leq 2$.

Ist $\alpha_3 = 1$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{4} = 36$$

gelten. Nach der Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel ist damit

$$6 = \sqrt{36} = \sqrt{(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1)} \leq \frac{(\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1)}{2}$$

also $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 10$, wobei Gleichheit nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ eintritt. Im Gleichheitsfall entsteht die Zahl $n_6 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot f = 108 \cdot f > n_5$. Sonst gilt $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 11$, sodass α_1 und α_2 von ihren bisherigen Werten 3 und 2 in Summe um mindestens 6 erhöht werden müssen, was dann Zahlen ergibt, die mindestens die Größe $2^6 \cdot f = 64 \cdot f > n_4$ besitzen, also nicht weiter beachtet werden brauchen.

Ist dagegen $\alpha_3 = 2$, so muss

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = \frac{144}{(\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)} = \frac{144}{6} = 24$$

gelten. Wegen $p_2^2 \cdot p_3 = 3^2 \cdot 5 = 45 > 44$ würde eine Erhöhung von α_2 um 2 schon Zahlen liefern, die größer sind als n_4. Also ist $\alpha_2 \leq 2 + 1 = 3$. Ist $\alpha_2 = 2$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{\alpha_2+1} = \frac{24}{3} = 8$, sodass wir die Zahl $n_7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot f = 80 \cdot f > n_4$ erhalten. Ist dagegen $\alpha_2 = 3$, so folgt $\alpha_1 + 1 = \frac{24}{4} = 6$, sodass wir die Zahl $n_8 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot f = 120 \cdot f > n_4$ erhalten.

Da diese Fallunterscheidung vollständig ist, ist damit sicher $n_4 = 44 \cdot f = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ die kleinste natürliche Zahl, die beide Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe 281043A:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 50 & \rightarrow & 51 & \rightarrow & 52 & \rightarrow & 53 \\
 & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 & & 49 & & 42 & \rightarrow & 43 & & 54 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & 48 & & 41 & & 44 & & 55 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
62 & & 47 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 45 & & 56 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
61 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 59 & \leftarrow & 58 & \leftarrow & 57
\end{array}$$

Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:
Beweisen Sie, dass (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abbildung die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um die Zahlen in der genannten Diagonalen zu erreichen, hat man von 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten Wege der Schrittlänge 1, 2, 3, 4, ... zu gehen. Mit der Formel

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

folgt daraus, dass jede in der Diagonale stehende Zahl z ausgedrückt werden kann durch

$$z = x^2 - x + 41 \qquad (x = 1, 2, 3, ...)$$

Bezugnehmend auf die Aufgabe 281011, in der das Ergebnis von Euler zu überprüfen war, dass z für alle Zahlen $x = 1, 2, 3, ..., 40$ prim ist, ergibt sich das Gesuchte.

Aufgabe 301042:
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Zahlen, von denen jede entweder gleich 1 oder gleich -1 ist.
Ferner sei $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$; für jedes $i = 1, ..., n$ sei

$$p_i = x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \cdot x_{i+3}$$

und es werde $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ vorausgesetzt.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: n ist durch 4 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist auch jede der Zahlen p_1, p_2,...,p_n entweder gleich 1 oder gleich -1. Wegen $p_1 + p_2 + ... + p_n = 0$ ist die Anzahl m der $p_j = 1$ gleich der Anzahl der $p_k = -1$. Also gilt $n = 2m$.
Mit dieser Anzahl m gilt einerseits $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = (-1)^m$. Andererseits enthält dieses Produkt

$$p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = x_1x_2x_3x_4 \cdot x_2x_3x_4x_5 \cdot ... \cdot x_nx_1x_2x_3$$

jeden Faktor x_i genau 4 mal (nämlich innerhalb der Teilprodukte $x_1x_2x_3x_4, ..., x_nx_1x_2x_3$ genau einmal an erster, genau einmal an zweiter, genau einmal an dritter und genau einmal an vierter Stelle); also ist $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Daher ist m gerade und folglich $n = 2m$ durch 4 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 341041:
Zeigen Sie, dass die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Lösung von cyrix:
Es ist $z = 7 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + 7^6 + \cdots + 7^{94})$ offensichtlich durch 7 teilbar und

$$\frac{z}{7} = 49^0 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + \cdots + 49^{47} \equiv 1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{47} = 48 \equiv 0 \pmod{48}$$

durch 48 teilbar, also z durch $7 \cdot 48 = 336$ teilbar, $\square$.

Aufgabe 341043:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = (1 + k + k^2 + ... + k^n)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Für $k = 1$ gilt $z = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$. Sei im folgenden $k \geq 2$. Nach der dritten binomischen Formel gilt $R_{k,n} := \frac{k^n-1}{k-1} = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} > 1$. Wir erhalten für z:

$$z = (R_{k,n} + k^n)^2 - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^{2n} - k^n = R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k^n - 1) =$$

$$= R_{k,n}^2 + 2R_{k,n}k^n + k^n(k-1)R_{k,n} = R_{k,n}(R_{k,n} + 2k^n + k^n(k-1)).$$

Beide Faktoren sind größer als 1 und somit ist z keine Primzahl.

IV.II (Dezimal-) Zahldarstellung, (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V01001:
Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 9. Multipliziert man die Zahl mit 5 und subtrahiert man von dem Produkt 9, so erhält man eine zweistellige Zahl mit denselben Ziffern in umgekehrter Folge. Wie heißt die zweistellige Zahl?

Lösung von svrc:
Wir bezeichnen die zweistellige Zahl mit a. Wegen der zweiten Bedingung, dass $5a - 9 < 100$ sein muss, muss $a < 22$ gelten. Daher ist der gesuchte Kandidat 18, da

$$5 \cdot 18 - 9 = 90 - 9 = 81$$

ist, somit die zweite Bedingung erfüllt ist und 18 als Quersumme 9 besitzt.

Aufgabe V01005:
Ein Mathematiker, nach seiner Autonummer gefragt, antwortet:

'„Sie heißt III Z ...“ Die Zahl können Sie gleich selbst ausrechnen. Von den vier Ziffern sind die letzten 3 gleich. Die Quersumme beträgt 22.
Setzt man die erste Ziffer an das Ende, so entsteht eine Zahl, die 1998 kleiner ist als die tatsächliche.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Die erste Ziffer sei y, die drei letzten Ziffern: $3x$. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$y + 3x = 22$$
$$(1000y + 100x + 10x + x) - 1998 = 1000x + 100x + 10x + y$$

Dieses System hat die Lösung $x = 5$ und $y = 7$. Die Autonummer heißt folglich III Z 7555.

Aufgabe V01006:
Welches ist die kleinste Zahl mit der linken Anfangsziffer 7, die in ihren dritten Teil übergeht, wenn man diese 7 vorn streicht und an die verbleibende Zahl als rechte Endziffer ansetzt?

Lösung von ochen:
x sei die Zahl ohne die Anfangsziffer 7. Dann wird

$$7 \cdot 10^n + x = 3(10x + 7) = 30x + 21$$
$$7 \cdot 10^n - 21 = 7(10^n - 3) = 29x$$

Da x eine natürliche Zahl ist, muss $10^n - 3$ die Zahl 29 als Teiler besitzen.

Setze $r_0 = -2$ und $r_{n+1} = 10r_n - 2 \bmod 29$, so gilt $r_n \equiv 10^n - 3 \pmod{29}$.
Durch systematisches Berechnen der Folgenglieder erhält man für $n = 1,2,...$
-22, -19, -18, -8, -24, -10, -15, -7, -14, -26, -1, -12, -6, -4, -13, -16, -17, -27, -11, -25, -20, -28 -21, -9, -5, -23, 0
Damit ist $10^{27} - 3$ ein Vielfaches von 29. Die gesuchte Zahl ist somit

$$7 \cdot 10^{27} + \frac{7 \cdot 10^{27} - 3}{29} = \frac{3}{29}(7 \cdot 10^{28} - 1)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir bestimmen zuerst die kleinste positive ganze Zahl o, für die $10^o \equiv 1 \pmod{29}$ ist. Da 29 eine Primzahl ist, muss o ein Teiler von $29 - 1 = 28 = 2^2 \cdot 7$ sein. Da weder $2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$ noch $2^{2\cdot 7} - 1 = (2^7 - 1) \cdot (2^7 + 1) = 127 \cdot 129 = 3 \cdot 43 \cdot 127$ durch die Primzahl 29 teilbar sind, muss $o = 28$ gelten.
Weiterhin ist $3 \cdot 10^1 \equiv 1 \equiv 10^o \pmod{29}$, also $3 \equiv 10^{o-1} \pmod{29}$. Damit ist $n = 28$ die kleinste positive ganze Zahl, für die $10^n - 3$ durch 29 teilbar ist. Daraus erhält man, wie oben, die gesuchte Zahl.

Aufgabe V01007:
Eine sechsstellige ganze Zahl endet an der niedrigsten Stelle (E) mit 1. Streicht man diese letzte Ziffer und setzt sie vorn wieder an, so erhält man den dritten Teil der ursprünglichen Zahl.
a) Wie lauten die beiden Zahlen?
b) Erläutern Sie, durch welche Überlegung sie zur Lösung kamen.

Lösung von Steffen Polster:
Die gesuchte Zahl z hat die Form $z = 10x + 1$, wobei x die Restzahl nach dem Streichen der 1 am Ende ist. Dann wird

$$z = 10x + 1 = 3 \cdot (100000 + x) \quad \Rightarrow \quad x = 42857$$

Die gesuchten Zahlen sind somit 428571 und 142857. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 011016:
Eine sechsstellige Zahl beginnt an der höchsten Stelle mit der Ziffer 1. Streicht man diese Ziffer und hängt sie hinten an die Zahl an, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Lösung von Manuela Kugel:
a) Teilt man diese sechsstellige Zahlx in ihre 1. Ziffer 1 und die restliche 5-stellige Zahl a, so lässt sich dies wie folgt ausdrücken: $x = 100000 + a$.
Gleichzeitig gilt für die zweite sechsstellige Zahl y, dass sie aus x durch Streichen der 1. Ziffer und Anfügen dieser Ziffer am Ende der Zahl entsteht, also: $y = 10 \cdot a + 1$.
Ferner wird gesagt, dass gelte: $y = 3x$ und somit $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100000 + a)$. Nach Umformen erhält man $7a = 3 \cdot 100000 - 1$, was ergibt: $a = 42857$. Für x und y ergibt sich damit: $x = 142857, y = 428571$.

b) Es gelten folgende Aussagen:
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten beiden Ziffern 14 und hängt sie an die verbleibende vierstellige Zahl, so entsteht eine doppelt so große wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzten beiden Ziffern 57 und stellt sie der verbleibenden vierstelligen Zahl voran, so entsteht eine viermal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre letzte Ziffer 7 und stellt sie der verbleibenden fünfstelligen Zahl voran, so entsteht eine fünfmal so große Zahl wie die ursprüngliche Zahl.
Streicht man einer sechsstelligen Zahl ihre ersten drei Ziffern 142 und hängt sie an die verbleibende dreistellige Zahl, so entsteht eine sechsmal so große wie die ursprüngliche Zahl.

c) Die Aufgabe kann aus der Antwort zu Teil a) entnommen werden:

$$x = 100000 + a = 100000 + \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} \qquad \text{sowie} \qquad y = 10 \cdot a + 1 = 10 \cdot \frac{3 \cdot 100000 - 1}{7} + 1$$

Aufgabe 021015:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Lösung von André Lanka:
Seien n und m diese Zahlen. Damit ihre Summe durch 10 teilbar ist, muss gelten:

$$n = 10a + b \qquad , \qquad m = 10c - b$$

Daraus folgt $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ und $m^2 = 100c^2 - 20cb + b^2$. Für die letzte Ziffer beider Quadrate ist ausschließlich der Summand b^2 zuständig, der bei beiden Quadraten gleich ist.

Aufgabe 021016:
Es ist die kleinste natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:
a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;
b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

Lösung von André Lanka:
Wir wissen, dass die gesuchte Zahl n auf 6 endet. Daher endet das Vierfache von n auf 4. Das ist zugleich die vorletzte Ziffer von n.
Da nun n auf 46 endet, steht 84 an den letzten beiden Stellen von $4n$. Also endet n auf 846. Wenden wir dieses Verfahren so weiter an, erhalten wir für n die Zahl 153846.

Aufgabe 041015:
Die Zahl $2^{3217} - 1$ wurde als Primzahl ermittelt.
a) Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!
b) Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Lösung von Daniel Gutekunst:
Sei $\lg x$ der Logarithmus von x zur Basis 10 und $[x]$ die Gauß-Klammer, welche die größte ganze Zahl $\leq x$ liefert.

(a) Umschreiben der Zahl 2^{3217} auf die Basis 10 ergibt:

$$2^{3217} = 10^{\lg(2^{3217})} = 10^{3217 \cdot \lg 2}$$

Da 10^n im Dezimalsystem jeweils die kleinste $(n+1)$-stellige Zahl ist, folgt für eine positive reelle Zahl r, dass die Anzahl der Stellen von 10^r gleich $[r]+1$ ist. Die Anzahl der Stellen von 2^{3217} ist also gleich

$$[3217 \cdot \lg 2] + 1 = 969.$$

Da 2^{3217} nicht den Faktor 5 enthält, kann 2^{3217} nicht von der Form 10^n sein. Insbesondere ist 2^{3217} damit nicht die kleinste 969-stellige Zahl und dem zu Folge hat $2^{3217}-1$ ebenfalls 969 Dezimalstellen.

(b) Es genügt die Betrachtung der letzten Ziffer, also alle Berechnungen modulo 10 auszuführen. Es gilt:

$$\begin{array}{lllll} 2^1 \equiv 2 \pmod{10} & ; & 2^2 \equiv 4 \pmod{10} & ; & 2^3 \equiv 8 \pmod{10} \\ 2^4 \equiv 6 \pmod{10} & ; & 2^5 \equiv 2 \pmod{10}. & & \end{array}$$

Man hat es also mit einem 4-er Zyklus zu tun. Sei $n \in \mathbb{N}$ und 2^n gegeben. Gilt $n \equiv 1 \pmod 4$, endet 2^n auf 2, bei $n \equiv 2 \pmod 4$ auf 4, bei $n \equiv 3 \pmod 4$ auf 8 und bei $n \equiv 0 \pmod 4$ auf 6. Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.
Wegen $3217 \equiv 1 \pmod 4$ endet 23217 auf 2 und $2^{3217}-1$ demzufolge auf 1.
Die Information, dass $2^{3217}-1$ eine Primzahl ist, wurde für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt.

Aufgabe 051011:
Finden Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!
Weisen Sie nach, dass es nur eine solche Zahl gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine solche Zahl $z = 10a + b$ mit natürlichen Zahlen a, b und $0 < a < 10$, $b < 10$, so gilt die Gleichung

$$10a + b = a + b^2$$

Dann muss $9a = b^2 - b$, also $a = \frac{b(b-1)}{9}$ sein.
Da a eine natürliche Zahl ist und b sowie $b-1$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muss entweder b oder $b-1$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $b-1$ nicht durch 9 teilbar sein, also muss $b = 9$ sein. a ist dann 8.
Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen. Da $89 = 8 + 92$ gilt, genügt 89 wirklich den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 061014:
Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden.

A sagte: „Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter.“ Nach kurzem Überlegen gratuliert ihm daraufhin B zum Geburtstag.

a) Woher wusste B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?

b) Wann wurde A geboren?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A kann höchstens 27 Jahre alt sein; denn die größte Quersumme, die unter den angegebenen Bedingungen möglich ist, beträgt $1+8+9+9=27$. Er ist also nach dem Jahre 1924 geboren. Sein Geburtsjahr sei $1900+10a+b$ mit a, b ganz und $2 \leq a \leq 5$; $0 \leq b \leq 9$. Sein Alter beträgt am 1.1.1953 folglich (laut Voraussetzung) $1+9+a+b$ Jahre.

Daher gilt, falls er am 1.1. geboren ist (Fall 1):

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1953-(1900+10a+b), \\ 43 &= 11a+2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird, berücksichtigt man die Bedingungen für a und b, nur von $a=3$ und $b=5$ erfüllt. A wurde daher am 1.1.1935 geboren und ist 18 Jahre alt.

Er könnte aber auch an einem anderen Tage geboren sein (Fall 2):

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 1952-(1900+10a+b), \\ 42 &= 11a+2b. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird unter den Bedingungen der Aufgabe von keinem Zahlenpaar (a, b) erfüllt. Die für den Fall 1 angegebene Lösung ist also die einzige.

Aufgabe 071011:
Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht. Die Tatsache, dass 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist.

Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: „Ich kann sogar beweisen, dass keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens lässt sich auch beweisen, dass unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist.“

Führen Sie diese Beweise durch! (Dietmar fasst dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)

Lösung von cyrix:
Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$).

Dann gilt $z = 100a + a = 101a$.
Das heißt, es gilt $101|z$. Nur für $a=1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101.

Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101|z$ auch $101^2|z$. Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müsste.

Aufgabe 151011:
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ jeweils mit folgender Eigenschaft!

a) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine zweistellige Zahl, deren beide Ziffern gleich sind.

b) Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist eine dreistellige Zahl, deren drei Ziffern einander gleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe S der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist laut Zahlentafel $s = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Angenommen, für eine natürlich Zahl n sei s eine zweistellige Zahl aus zwei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $s = n(n+1)$ durch 11 teilbar. Da 11 Primzahl ist, ist somit entweder n oder $n+1$ durch 11 teilbar. Wäre $n \geq 14$, so wäre $s \geq 7 \cdot 15 > 100$, also nicht zweistellig. Daher ist $n < 14$, $n+1 < 15$, so dass entweder $n = 11$ oder $n+1 = 11$, d. h. $n = 10$ folgt.

   Tatsächlich erhält man für $n = 11$ den Wert $s = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ und für $n = 10$ entsprechend 55; also ist für $n = 10$ und $n = 11$ die Bedingung a) erfüllt.

b) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s = n(n+1)$ durch 111 teilbar. Wäre $n \geq 45$, so wäre $s \geq 45 \cdot 23 > 1000$, also nicht dreistellig. Daher ist $n < 45$, $n+1 < 46$.

   Also muss wegen $111 = 3 \cdot 37$ und, weil 3 und 37 Primzahlen sind, einer der beiden Faktoren $n, n+1$ durch 3 teilbar und der andere gleich 37 sein. Da $n+1$ für $n = 37$ nicht durch 3 teilbar ist, verbleibt nur $n+1 = 37$. Tatsächlich erhält man dabei $s = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$, also eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern als einzige Lösung.

Aufgabe 251014:
Stellen Sie die Zahl 1985

a) im 2adischen Positionasystem (*Dualsystem*)

b) im 3adischen Positionssystem dar!

c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, dass die Zahl ungerade ist?

Anmerkung: Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern $0, 1, \ldots, m-1$ benutzt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$1985 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Damit hat die Zahl 1985 im Dualsystem die Darstellung $[11111000001]_2$.

b) Es gilt

$$1985 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Damit hat die Zahl 1985 3adischen System die Darstellung $[2201112]_3$.

c) Da alle Potenzen von 2 mit Ausnahme von $2^0 = 1$ durch 2 teilbar sind, ist eine natürliche Zahl genau dann durch 2 teilbar, wenn in ihrer 2-adischen Darstellung der Summand $1 \cdot 2^0$ auftritt, d. h., sie ist ungerade genau dann, wenn die Darstellung auf 1 endet.

Die Zahl 3 ist ungerade; alle ihre Potenzen sind folglich ebenfalls ungerade. Daher ist eine natürliche Zahl genau dann ungerade, wenn in ihrer 3-adischen Darstellung die (einzige) ungerade Ziffer 1 in ungerader Anzahl auftritt.

Gleichwertig hiermit kann man auch das Kennzeichen verwenden, dass die „Quersumme“ der Zahl in ihrer 3-adischen Darstellung ungerade ist. (Die für das Dezimalsystem bekannte „Neunerregel“ wird also im 3adischen System zur „Zweierregel“.)

Aufgabe 261011:
Auf welche Ziffer endet die Zahl
$$z = 4444^{444^{44^4}}?$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Potenzen von 4444 enden jeweils auf die gleiche Ziffer wie dieselben Potenzen von 4. Diese enden auf 6, falls der Exponent gerade ist, und sie enden auf 4, falls der Exponent ungerade ist. Der Exponent
$$n = 444^{44^4}$$
ist eine gerade Zahl, da n selbst eine Potenz ist, deren Basis gerade ist. Also endet $z = 4444^{444^{44^4}}$ auf 6.

Aufgabe 281012:
Antje will alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z ermitteln, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die erste und die zweite Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die dritte und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

(3) Die Zahl z ist eine Quadratzahl.

Antje will diese Aufgabe lösen, ohne eine Zahlentafel, einen Taschenrechner oder einen anderen Rechner zu benutzen. Wie kann sie vorgehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn z den geforderten Bedingungen genügt und a, b die erste bzw. dritte Ziffer von z sind, so folgt aus (1), (2): a und b sind natürliche Zahlen mit
$$1 \leq a \leq 9 \quad , \quad 0 \leq b \leq 9 \tag{4}$$
$$z = 1000a + 100a + 1ob + b = 11(100a + b) \tag{5}$$
Ferner gibt es nach (3) eine natürliche Zahl n mit $n^2 = z$, also $n^2 = 11(100a+b)$. Die Primzahl 11 ist also Teiler von n^2 und folglich auch Teiler von n; es gibt somit eine natürliche Zahl m mit $n = 11m$, also
$$11^2m^2 = 11(100a + b) \quad ; \quad 11m^2 = 100a + b \quad ; \quad 11(m^2 - 9a) = a + b \tag{6}$$
d. h., $a + b$ ist durch 11 teilbar. Da nach (4) aber $1 \leq a + b \leq 18$ gilt, ist dies nur mit
$$a + b = 11 \tag{7}$$
möglich. Damit führt (6) auf
$$11m^2 = 99a + 11 \quad ; \quad m^2 = 9a + 1 \tag{8}$$
Für $a = 1,...,9$ hat $9a + 1$ die Werte 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82; danon ist nur der für $a = 7$ entstehende Wert 64 eine Quadratzahl, Daher und wegen (7), (5) können die Bedingungen der Aufgabe nur mit $a = 7, b = 4, z = 7744$ erfüllt werden.

II Die Zahl z erfüllt (1), (2) und wegen $88^2 = 7744$ auch (3).

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau die Zahl $z = 7744$ den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 281014:
Wenn Frank große natürliche Zahlen auf ihre Teilbarkeit durch 7 untersucht, geht er folgendermaßen vor:

Von rechts beginnend teilt er die Zahl in Gruppen zu je drei Ziffern ein. (Damit auch die links stehende Gruppe aus drei Ziffern besteht, wird sie nötigenfalls durch Davorsetzen von einer oder zwei Ziffern 0 ergänzt.)

In jeder Gruppe addiert Frank zur rechts stehenden Ziffer das Dreifache der mittleren und das Doppelte der linken Ziffer. So erhält er *Gruppensummen*; diese versieht er (von rechts beginnend) abwechselnd mit den Vorzeichen + und −. Schließlich addiert er alle so abgewandelten *Gruppensummen* und erhält damit eine *Gesamtsumme*. Diese kann man leicht auf ihre Teilbarkeit durch 7 überprüfen.

1. Beispiel: Zu untersuchen sei die Zahl 45893127, in Gruppen 045 893 127.
Die Gruppe 127 hat die Gruppensumme $7 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$,
die Gruppe 893 hat die Gruppensumme $3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 46$,
die Gruppe 045 hat die Gruppensumme $5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 17$.

Als Gesamtsumme ergibt sich die Zahl $+15 - 46 + 17 = -14$; diese ist durch 7 teilbar.

2. Beispiel: Zu der Zahl 45693127 findet man entsprechend die Gesamtsumme $+15 - 42 + 17 = -10$; diese ist nicht durch 7 teilbar.

Frank sagt nun, bei seinem Verfahren gelte stets: Genau dann, wenn die *Gesamtsumme* durch 7 teilbar ist, ist es auch die ursprüngliche Zahl.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl sind die Ziffern der Reihe nach (von rechts nach links) zu multiplizieren mit den Zehnerpotenzen $10^0, 10^1, 10^2, \dots$ Das sind die Zahlen

$$\begin{aligned}
&10^0 && = 1 \\
&10^1 && = 7 + 3 \\
&10^2 = 70 + 30 = 7(10 + 4) + 2 && = 7a + 2 \text{ mit } a = 10 + 4 \\
&10^3 = 70a + 20 = 7(10a + 3) - 1 && = 7b - 1 \text{ mit } b = 10a + 3 \\
&10^4 = 70b - 10 = 7(10b - 1) - 3 && = 7c - 3 \text{ mit } c = 10b - 1 \\
&10^5 = 70c - 30 = 7(10c - 4) - 2 && = 7d - 2 \text{ mit } d = 10c - 4 \\
&10^6 = 70d - 20 = 7(10d - 3) + 1 && = 7e - 1 \text{ mit } e = 10d - 3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Anschließend wiederholen sich in der gleichen Reihenfolge die Darstellungen der Zehnerpotenzen als Sonne aus einem Vielfachen von 7 und einer (jeweils der nächsten) der Zahlen 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Die zu untersuchende Zahl ist damit gleich der Summe aus einem Vielfachen von 7

und den Produkt der (von rechts gezählt) 1. Ziffer mit 1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 2. Ziffer mit 3 (*)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 3. Ziffer mit 2
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 4. Ziffer mit -1
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 5. Ziffer mit -3 (**)
und dem Produkt der (von rechts gezählt) 6. Ziffer mit -2 ...

Die Summe der hier genannten Produkte ist aber gerade die „Gesamtsumme", wie man an der Gliederung in Dreiergruppen und dem dabei auftretenden Vorzeichenwechsel in (*), (**),... feststellt.

Da sich somit die zu untersuchende zahl von ihrer „Gesamtsumme" nur um ein Vielfaches von 7 unterscheidet, erhält man, wie verlangt, die Aussage, dass die zu untersuchende Zahl genau dann durch 7 teilbar ist, wenn die „Gesamtsumme" es ist.

Aufgabe 331016:
Bekanntlich gilt $2^{10} = 1024$.

Formulieren Sie ein Computerprogramm, mit dessen Hilfe man den kleinsten natürlichen Exponent $p > 10$ ermitteln kann, für den die Zahl $2p$ ebenfalls auf die Ziffern $\dots 024$ endet! Begründen Sie, dass das von Ihnen formulierte Programm diese Aufgabe löst!

Hinweis: Es ist zu beachten, dass für die im Rechenweg vorkommenden Zahlen bei weithin üblicher Computernutzung Einschränkungen der Stellenzahl auftreten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein BASIC-Programm der geforderten Art ist zum Beispiel: 10 P = 10

```
20 Z = 24
30 P = P+1
40 Z = Z*2
50 IF Z > 999 THEN Z = Z-1000
60 IF Z <> 24 THEN GOTO 30
70 PRINT P
```

Zu Werten des Exponenten p werden die letzten drei Ziffern der Potenz 2^p in Gestalt einer ganzen Zahl z mit $0 \leq z \leq 999$ gebildet. Ausgehend nämlich von den Anfangswerten $p = 10, z = 024$ (Zeilen 10, 20) werden die nächsten Werte schrittweise gefunden:

In jedem Schritt wird p um 1 erhöht (Zeile 30) und z verdoppelt (Zeile 40) sowie, falls dabei zunächst ein nicht mehr dreistelliger Wert entstand, nur dessen drei Endziffern beibehalten. Hierzu genügt es, 1000 zu subtrahieren (Zeile 50); denn wenn für den Vorgängerwert z schon $0 \leq z < 1000$ galt, so ist der in Zeile 40 zunächst entstandene Wert $2 \cdot z < 2000$, und galt für ihn außerdem $1000 \leq 2 \cdot z$, so erfüllt der durch Subtraktion von 1000 entstehende Wert nun wieder $0 \leq 2 \cdot -1000 < 1000$.

Durch das schrittweise Reduzieren werden die vielstelligen Zahlen 2^p vermieden, wie es nach dem„Hinweis" erforderlich ist.

Diese Schritte werden wiederholt, solange die Ziffernfolge $z = 024$ nicht nicht wieder erreicht wurde (Zeile 60). Andernfalls endet der Ablauf mit der Ausgabe des gesuchten Exponenten p (Zeile 70).

Das Ende muss erreicht werden (es tritt keine „Endlos-Schleife" auf). Man kann diese Feststellung als Ergebnis eines „Probelaufs mit Risiko" erhalten (und damit zugleich den gesuchten Exponenten $p = 110$ finden); man kann auch beweisen, dass für jedes $p \geq 3$ die Ziffernfolge der drei Endziffern von 2^p bei einem größeren p wiederkehren muss.

II Runde 2

Aufgabe 011025:
Gegeben ist die Zahl $9^{(9^9)}$.
a) Wieviel Ziffern hat diese Zahl etwa? (Auf vier geltende Ziffern runden.)
b) Wie lang müsste der Streifen sein, auf den man diese Zahl drucken wollte, wenn die Ziffernbreite 2 mm betragen würde?
c) Mit welcher Ziffer endet die gesuchte Zahl?

Lösung von Christiane Czech:
a) Die Anzahl der Ziffern ist gleich der kleinsten ganzen Zahl, die größer ist als

$$\log_{10} 9^{(9^9)} = 9^9 \cdot \log_{10} 9$$

Wegen $9^9 = 387420489$ und $\log_{10} 9 \approx 0{,}954243$ hat $9^{(9^9)}$ somit rund 369700000 Stellen.

b) So ein Streifen müsste ungefähr $369700000 \cdot 2$ mm $= 739400000$ mm $= 739{,}4$ km lang sein.

c) Da 9^9 eine ungerade Zahl ist, endet die Zahl wegen

$$9^{(9^9)} \equiv (-1)^{(9^9)} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$$

auf die Ziffer 9.

Aufgabe 071023:
Beweisen Sie, dass für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl $2^{2^n} + 1$ mit der Ziffer 7 endet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für $n \geq 2$ gilt

$$2^{2^n} = 2^{4 \cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}$$

Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Fall $n \geq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

Aufgabe 101021:
Beweisen Sie, dass jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

Lösung von cyrix:
Sei n eine k-stellige Zahl ($k > 1$) mit führender Ziffer $z > 0$.
Dann ist einerseits $n \geq z \cdot 10^{k-1}$ und andererseits das Produkt ihrer Ziffern $\leq z \cdot 9^{k-1}$, also echt kleiner als n selbst, $\Box$.

Aufgabe 121021:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Bildet man aus irgendeiner im dekadischen System geschriebenen natürlichen Zahl z_1 durch beliebiges Vertauschen ihrer Ziffern untereinander eine neue Zahl z_2, dann ist $|z_1 - z_2|$ stets durch 9 teilbar.

Lösung von Steffen Polster:
Es sei $z_1 = [a_1 a_2 ... a_n]$ eine o. B. d. A. n-stellige natürliche Zahl, wobei $[a_1 a_2 ... a_n]$ die Ziffernfolge im dekadischen System darstelle.

Mit $z_2 = [b_1 b_2 ... b_n]$ sei die Ziffernfolge von z_2 bezeichnet, wobei die b_i $(i = 1,2,...,n)$ eine beliebige Permutation der a_i $(i = 1,2,...,n)$ sind, d. h. für jedes a_i aus z_1 existiert ein b_j in z_2 $(i,j = 1,2,...,n)$.
Für die Differenz $z_1 - z_2$ sei die Ziffernfolge $[c_1 c_2 ... c_n]$, wobei auch $c_1 = 0$ auftreten kann.

Bei der ziffernweisen Subtraktion von z_1 und z_2 können zwei Möglichkeiten auftreten:

1. Für ein a_i und das entsprechende b_i aus z_2 gilt $a_i \geq b_i$. Das c_i in $z_1 - z_2$ ist dann gleich $c_i = a_i - b_i$.
2. Für ein a_i und das entsprechende b_i in z_2 gilt $a_i < b_i$. Bei der Subtraktion tritt damit ein Überlauf auf, d. h. das a_{i-1} wird um 1 gesenkt. Ist in diesem Fall $i = 1$ wird das Ergebnis insgesamt negativ. Für die Ziffer c_i ergibt sich $c_i = 10 - (b_i - a_i)$.

Die Zahl $|z_1 - z_2|$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Quersumme ist

$$Q = |c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n|$$

Nun wird sowohl in z_1 als auch die z_2 die Nummerierung der Ziffern geändert, ohne ihre tatsächliche Position zu verschieben.

Es seien dann genau $m \leq n$ Ziffern a_i die größer oder gleich den b_i sind. Für die $\{a_{m+1}, ..., a_n\}$ sei a_i kleiner als b_i. Für die Quersumme wird

$$Q = |(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_m - b_m) + (10 - (b_{m+1} - a_{m+1}) + ... + (10 - (b_n - a_n)) - (n - m)|$$

wobei der letzte Summand die Gesamtzahl der Überträge charakterisiert. Durch Umformen wird

$$= |(a_1 + ... + a_m) - (b_1 + ... + b_m) - (b_{m+1} + ... + b_n) + (a_{m+1} + ... + a_n) + 10(m - n) - (n - m)|$$
$$= |(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (b_1 + b_2 + ... + n) + 9(m - n)|$$

Da es für jedes a_i $(i = 1,2,...,n)$ ein entsprechende Ziffer b_i in z_2 gibt, heben sich die Summen der a_i und b_i gegenseitig auf und die Quersumme wird zu $Q = |9(m - n)|$.
Diese ist offensichtlich durch 9 teilbar, so dass $|z_1 - z_2|$ durch 9 teilbar ist. w. z. b. w.

Aufgabe 131021:
Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.
(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

Lösung von weird:
Da eine mehrstellige Primzahl nur auf 3 oder 7 enden kann, muss wegen (1) die Endziffer und wegen (2) auch die mittlere Ziffer in $\{3,7\}$ liegen. Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl muss daher 37 oder 73 sein, da die beiden anderen Möglichkeiten 33 und 77 durch 11 teilbar sind, was der Bedingung (2) widerspricht.
Damit kommt aber auch für die erste Ziffer, die nach (1) in $\{2,3,5,7\}$ liegen muss nur mehr 3 oder 7 in Frage, da sonst die Ziffernsumme und damit auch die Zahl selbst durch 3 teilbar wäre.

Nach dem bisher Bewiesenen müssen also sämtliche Ziffern der Zahl in $\{3,7\}$ liegen, wobei niemals zwei aufeinanderfolgende Ziffern gleich sein können, da dies der Bedingung (2) widersprechen würde. Von den beiden dann nur noch verbleibenden Möglichkeiten 373 und 737 ist aber die 737 durch 11 teilbar und damit nicht prim, während 373 dann tatsächlich als einzige Zahl sämtliche Bedingungen hier erfüllt.

Aufgabe 141021:
Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Russisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass $z_1 > z_2$ ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.
Man ermittle z_1 und z_2!

Lösung von weird:
Bei der Addition der beiden Zahlen z_1 und z_2 kann bei ihrer Addition an keiner Stelle ein Übertrag stattgefunden haben, sonst wären etwa die Einer- und Zehnerstelle ihrer Summe 2555 nicht gleich.

Aus der Tatsache, dass genau die letzten 3 Stellen von 2555 gleich sind, können wir ferner schließen, dass z_1 vierstellig und z_2 dreistellig sein muss. Ist also die Dezimaldarstellung von z_1 von der Bauart $xyxy$, wobei x und y die beiden fraglichen alternierenden Ziffern sind, so muss die Dezimaldarstellung von z_2 dann von der Form xyx sein, wobei $x = 2$ und $x + y = 5$, also dann $y = 3$ gelten muss. Und tatsächlich erfüllen die beiden Zahlen $z_1 = 2323$ und $z_2 = 232$ alle Bedingungen der Angabe.

Aufgabe 171024:
Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i = 0, ..., n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe

$$Q(Z) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0$$

und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt

$$P(Z) = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$$

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0 < Z < 1000$, für die $Q(Z) + P(Z) = Z$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Wenn eine zweistellige Zahl die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 a_0 = 9a_1$$

wegen $a_1 \neq 0$ also $a_0 = 9$.
Daher kann ein zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingungen (1) erfüllen, wenn sie mir der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl in der Tat

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = a_1 + 0 - 9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_0$$

also ist die Bedingung (1) erfüllt.

3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte

$$a_2 + a_1 + a_0 + a_2 a_1 a_0 = 100a_2 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_2 a_1 a_0 = 99a_2 + 9a_1$$

wegen $9 \geq a_0$ mithin $9a_1 a_2 \geq 99a_2 + 9a_1 \geq 99a_2$. Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geq 11$.

Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).

Aufgabe 181023:
Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere $a+1$, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s = a^2 + (a+1)^2 = 2a^2 + 2a + 1 = 2a(a+1) + 1$$

Jede natürliche Zahl lässt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 Oder 2.

Fall 1: a ist durch 3 teilbar.
Dann ist auch $2a(a+1)$ durch 3 teilbar, und s lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 2: a lässt bei Division durch 3 den Rest 2.
Dann ist $a+1$ durch 3 teilbar; damit auch $2a(a+1)$, und somit lässt s bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 3: a lässt bei Division durch 3 den Rest 1.
Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form $3n+1$ darstellbar. Man erhält mithin

$$s = 2(3n+1) \cdot (3n+2) + 1 = 2(9n^2 + 9n + 2) + 1 = 18n^2 + 18n + 5$$

und $18n^2 + 18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 lässt.
Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Da Quadrate nur die Reste 0 oder 1 bei der Division durch 3 lassen können, ist die Summe zweier Quadratzahlen nur genau dann durch 3 teilbar, wenn es die beiden Basen auch schon waren. Dann können sie aber nicht aufeinander folgende natürliche Zahlen gewesen sein.

Aufgabe 191022:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, dann sind entweder alle drei Quadratzahlen durch 9 teilbar, oder genau zwei der Quadratzahlen ergeben bei Division durch 9 den gleichen Rest.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ergibt eine natürliche Zahl bei Division durch 9 den Rest $0,1,2,3,4,5,6,7$ bzw. 8, so ergibt ihr Quadrat jeweils den Rest $0,1,4,0,7,7,0,4$ bzw. 1; d. h., für jede Quadratzahl ist der Rest, den sie bei Division durch 9 ergibt, eine der Zahlen 0, 1, 4, 7.
Wenn die Summe dreier Quadratzahlen durch 9 teilbar ist, so gilt das auch für die Summe der Reste, die diese Quadratzahlen jeweils bei Division durch 9 ergeben.

1. Fall: Einer der Reste ist 0.
Dann ist die Summe der beiden anderen Reste durch 9 teilbar. Alle Summen aus zwei Summanden, von denen jeder eine der Zahlen 0, 1, 4, 7 ist, sind aber

$$0+0=0; 0+1=1; 0+4=4; 0+7=7; 1+4=5; 1+7=8; 4+7=11$$

Daher verbleibt nur die Möglichkeit, dass auch die beiden anderen Reste 0 sind; d. h., es folgt: Alle drei Quadratzahlen sind durch 9 teilbar.

2., 3. und 4. Fall: Einer der Reste ist $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}\right\}$

Dann ergibt die Summe der beiden anderen Rest bei Division durch 9 den Rest $\left\{\begin{matrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}\right\}$. Hierfür verbleibt unter den Summen (1) nur die Möglichkeit, dass die beiden anderen Reste $\left\{\begin{matrix} 1 \text{ und } 7 \\ 1 \text{ und } 4 \\ 4 \text{ und } 7 \end{matrix}\right\}$ lauten. In jedem dieser Fälle ergeben also genau zwei der drei Quadratzahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest. Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 241023:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:
Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

Lösung von Steffen Polster:
Entsprechend der Aufgabenstellung muss z mindestens zweistellig sein. Dann kann z dargestellt werden durch $z = 10a + b$, wobei $0 \leq b \leq 9$ und $a = \left[\frac{z}{10}\right]$ ist. Nach dem Streichen verbleibt als Zahl a.
D. h., damit a Teiler von z ist, muss

$$\frac{10a+b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$$

ganzzahlig sein. Die ist genau dann möglich, wenn entweder $b = 0$ oder b ein Vielfaches von a ist. Da im Fall $b \neq 0$ b maximal 9 werden kann, gibt es nur für $1 \leq a \leq 9$ folgende Möglichkeiten

a	b	a	b	a	b	a	b
1	1,2,...,9	2	2,4,6,8	3	3,6,9	4	4, 8
5...9	jeweils $b = 2a$						

Damit sind folgende Zahlen z Lösung der Aufgabe:

1. alle auf 0 endenden natürlichen Zahl mit $z > 0$ und
2. $z \in \{11,12,13,14,15,16,17,18,19,22,24,26,28,33,36,39,44,48,55,66,77,88,99\}$

Aufgabe 261023:
Zahlen stellen wir gewöhnlich im dekadischen Positionssystem (unter Verwendung der Basis 10 und der Ziffern 0, 1, ..., 9) dar.
Man kann die Zahlen auch im dyadischen Positionssystem (oder Dualsystem) unter Verwendung der Basis 2 und der Ziffern 0 und 1 darstellen. Zur Unterscheidung sei diese dyadische Darstellung einer Zahl durch eckige Klammern und eine klein angehängte 2 gekennzeichnet.

a) Geben Sie für die Zahl 47 die dyadische Darstellung an!
Ermitteln Sie für die Zahl, deren Darstellung im dyadischen System $[110001]_2$ lautet, die Darstellung im dekadischen Positionssystem!

b) Eine natürliche Zahl heiße dekadische Spiegelzahl, wenn ihre dekadische Darstellung von rechts nach links gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt wie von links nach rechts gelesen.

Ermitteln Sie mindestens zwei natürliche Zahlen, die größer als 9 sind und die Eigenschaft haben, sowohl dekadische als auch dyadische Spiegelzahl zu sein!

Lösung von Steffen Polster:
a) Es ist

$$47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = [101111]_2$$

Für $[110001]_2$ wird

$$[110001]_2 = 2^0 + 2^4 + 2^5 = 48$$

b) Systematisches Probieren der zweistelligen Spiegelzahlen 11, 22, ... liefert Zahlen, die gleichzeitig dekadische als auch dyadische Spiegelzahl sind:

$$33 = [100001]_2 \qquad ; \qquad 99 = [1100011]_2$$

Aufgabe 331021:
Untersuchen Sie, ob es eine vierstellige Quadratzahl q mit den nachstehenden Eigenschaften (1), (2) gibt! Wenn es sie gibt, ermitteln Sie alle derartigen Quadratzahlen!
(1) Alle vier Ziffern von q sind kleiner als 7.
(2) Vergrößert man jede Ziffer von q um 3, so ist die entstehende vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Lösung von cyrix:
Sei die in (2) entstehende Quadratzahl m^2 genannt und es gelte $n^2 = q$, wobei m und n positive ganze Zahlen seien.
Dann gilt $m^2 = n^2 + 3333$ bzw. $(m-n)(m+n) = m^2 - n^2 = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101$. Da m^2 und n^2 vierstellig sind, gilt $30 < n < m < 100$, also $60 < m + n < 200$, sodass $m + n$ als Teiler von $3 \cdot 11 \cdot 101$ nur die Werte $3 \cdot 11 = 33$ und 101 annehmen kann.
Im ersten Fall wäre aber $m - n = 101 > m + n$, was ein Widerspruch zu $n > 0$ darstellt. Also ist $m + n = 101$ und $m - n = 33$, sodass $m = 67$ und $n = 34$ folgt.
Tatsächlich ist $q^2 = 34^2 = 1156$ und $m^2 = 67^2 = 4489 = 1156 + 3333$ und es werden auch alle Ziffernvorgaben erfüllt, sodass 1156 die einzige vierstellige Quadratzahl q ist, die (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe 341023:
Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Zifferndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht.
Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von $9^2, 99^2, 999^2$ die Vermutung, dass in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten.
Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes einzelne Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, welche Ziffern darin vorkommen und an welchen Stellen sie dort stehen.
Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie ihre Antwort!

Lösung von Steffen Polster:
Eine im Dezimalsystem ausschließlich aus Ziffern 9 bestehende n-stellige Zahl ($n \geq 3$) hat die Darstellung $10^n - 1$. Es wird

$$(10^n - 1) \cdot (10^n - 1) = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1$$

Das Ergebnis ist damit eine $2n$-stellige Zahl, deren erste $(n-1)$ Ziffern '9' sind, gefolgt von einer '8', gefolgt von $(n-1)$ Ziffern '0' und einer '1'.
Ausnahmen ist $9^2 = 81$.

III Runde 3

Aufgabe V11033:
Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Wie heißt die Aufgabe? Wie haben Sie das Ergebnis gefunden?

Lösung von StrgAltEntf:
Die Divisionsaufgabe die Fritz gestellt wird, möge $\frac{a}{b}$ lauten. Fritz rechnet $a = 57 \cdot b + 52$, macht die Probe und erhält dabei $57 \cdot b' + 52 = 17380$ wobei sich der Faktor b' irrtümlich in der Zehnerstelle vom korrekten Wert b unterscheidet.

Es folgt dann $b' = \frac{17380-52}{57} = 304$. Laut Aufgabenstellung ergibt sich der wirkliche Wert b, indem die Zehnerstelle 0 von b' durch 6 ersetzt wird. Folglich ist $b = 364$, $a = 57 \cdot 364 + 52 = 20800$ und die Divisionsaufgabe, die Fritz gestellt wurde, lautet $\frac{20800}{364}$.

Aufgabe 011035:
Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung von Christiane Czech:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
&11^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \pmod{10},\\
&12^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{10},\\
&13^6 \equiv 3^6 \equiv 27 \cdot 27 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10},\\
&14^6 \equiv 4^6 \equiv 16^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}\text{),}\\
&15^6 \equiv 5^6 \equiv 5 \pmod{10} \text{ (denn } 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}\text{)),}\\
&16^6 \equiv 6^6 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}\text{)).}
\end{aligned}$$

Damit ist $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 \equiv 1 \pmod{10}$.

Alternativ-Lösung von weird:
Es gilt

$$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1^6 + 2^6 + (-2)^6 + (-1)^6 + 0^6 + 1^6 = 131 \equiv 1 \pmod{5}$$

Von den beiden dann nur mehr möglichen Endziffern 1 bzw. 6 kommt aber nur die 1 in Frage, da die fragliche Summe eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden enthält und somit selbst ungerade ist.

Aufgabe 041035:
Ist die folgende Aussage richtig? Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn a nicht durch 3 teilbar ist, hat a die Gestalt $3n + 1$ oder $3n + 2$.
Durch Quadrieren der Gleichungen sehen wir, dass a^2 dann in beiden Fällen die Gestalt $3m + 1$ hat ($m = 9n^2 + 6n$ oder $m = 9n^2 + 12n$).

Wenn a und b beide nicht durch 3 teilbar sind, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 2$. Wenn a durch 3 teilbar und b nicht durch 3 teilbar ist, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 1$.
In beiden Fällen ist $a^2 + b^2$ nicht durch 3 teilbar. Also folgt aus „$a^2 + b^2$ durch 3 teilbar“ bereits, dass a und b durch 3 teilbar sind.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Quadratzahlen lassen bei der Division durch 3 nur die Reste 0 – wenn die Basis selbst durch 3 teilbar ist – bzw. 1 – sonst.
Wären aso nicht sowohl a als auch b durch 3 teilbar, so könnte die Summe $a^2 + b^2$ nur die Reste $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ bzw. $1 + 1 = 2$ bei Division durch 3 annehmen, nicht aber durch 3 teilbar sein. Dementsprechend ist die Aussage aus der Aufgabenstelung korrekt.

Aufgabe 051031:
Weisen Sie nach, dass alle Zahlen

$$1331; 1030301; 1003003001; ...; 1\,\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}\,3\,\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}\,3\,\underbrace{00...00}_{\text{k Nullen}}\,1$$

Kubikzahlen sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$1331 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = (10 + 1)^3$$
$$1030301 = 1 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2 + 1)^3$$
$$1003003001 = 1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 = (103 + 1)^3$$

Folgen bei einer Zahl in der angegebenen Weise jeweils k Nullen direkt aufeinander, so erhält man

$$1 \cdot 10^{3(k+1)} + 3 \cdot 10^{2(k+1)} + 3 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1} + 1)^3$$

Also ist die angegebene Zahl eine Kubikzahl.

Aufgabe 091031:
Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei der Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

Lösung von cyrix:
Sei n eine solche Zahl. Dann ist mit n auch $n - 66 = n - 11 \cdot 6$ durch 11 teilbar. Wenn n den Rest 1 bei der Division durch 5 lässt, dann ist $n - 66 = (n - 1) - 5 \cdot 13$ auch durch 5 teilbar. Und schließlich: Wenn n bei der Division durch 7 den Rest 3 lässt, ist $n - 66 = (n - 3) - 7 \cdot 9$ auch durch 7 teilbar.

Da 5, 7 und 11 paarweise teilerfremd sind, ist $n - 66$ also sogar durch das Produkt $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ teilbar, sodass man für n die Darstellung $n = 385 \cdot k + 66$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl k erhält.
Offenbar ist für $k \geq 3$ auch $n > 1000$, also nicht mehr dreistellig (und für $k = 0$ nur zweistellig), sodass man genau folgende beiden Lösungen erhält:
$n_1 = 385 \cdot 1 + 66 = 451$ und $n_2 = 385 \cdot 2 + 66 = 836$.

Aufgabe 111032:
Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(x; y)$ jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:
a) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.
b) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x, y), das den Bedingungen a) und b) genügt. Setzt man $x = 10a+b$ (mit a, b natürlich und $1 \leq a \leq 9$, $1 \leq b \leq 9$), denn folgt $y = 10b + a$, und wegen $x > y$ auch $a > b$.
Wegen $a \neq 0, b \neq 0$ und $a > b$ ist $2 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 8$.
Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen x^2 dreistellig ist. Wegen $40^2 > 1000$ ist dann $a \leq 3$.
Da auch $32^2 = 1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen erfüllen. Tatsächlich gilt

$$21^2 = 441 \quad \text{und} \quad 12^2 = 144 \qquad \text{sowie} \qquad 21^2 = 961 \quad \text{und} \quad 13^2 = 169$$

Also erfüllen die Paare $(21, 12)$ und $(31, 13)$ die Bedingungen a) und b).
Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a,b dieser Zahl

$$(3) \quad (10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f \qquad \text{sowie} \qquad (4) \quad (10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c$$

(mit c, d, e, f natürlich und $0 \leq c,d,e,f \leq 9$; $c, f \neq 0$). Aus (3) und (4) folgt

$$100a^2 + 20ab + b^2 = 1000c + 100d + 10e + f \qquad ; \qquad a^2 + 20ab + b^2 = c + 10d + 100e + 1000f$$

Durch Subtraktion erhält man

$$99a^2 - 99b^2 = 999c + 90d - 90e - 999f \qquad \text{also}$$

$$(5) \quad 11(a^2 - b^2) = 111c + 10d - 10e - 111f$$

Da die linke Seite von (5) durch 11 teilbar ist, muss es auch die rechte Seite sein.
Addiert man zu $111c+10d-10e-111f$ die durch 11 teilbar Zahle $1111f+110e-110c$, dann erhält man $1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2$, und auch diese Zahl muss durch 11 teilbar sein.
Daher muss schließlich $11|(10b+a)$ gelten, was wegen $a \neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, dass es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x, x) gibt.

Aufgabe 131034:
Man beweise: Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

Lösung von cyrix:
Wegen $(\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$, $(\pm 2)^3 \equiv \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ und $(\pm 3)^3 \equiv \pm 27 \equiv \pm 1 \pmod 7$ lassen die Kuben von nicht durch 7 teilbaren Zahlen bei der Teilung durch 7 nur die Reste 1 oder -1.

Bildet man nun von drei solchen Zahlen die Summe, so kann diese nur die Reste ± 1 oder ± 3 bei der Teilung durch 7, nicht aber 0 annehmen, sodass umgekehrt gelten muss, dass, wenn die Summe dreier Kuben durch 7 teilbar ist, nicht alle Basen (und damit auch nicht alle Kuben) nicht durch 7 teilbar sein können.
Es muss demnach dann mindestens eine Basis (und damit auch ihre zugehörige Kubikzahl) durch 7 teilbar sein.

Bemerkung: Man kann diese Lösung auch ohne Verwendung von Kongruenzbetrachtungen formulieren, indem man die Zahlen $(7k \pm 1)^3$, $(7k \pm 2)^3$ und $(7k \pm 3)^3$ per binomischen Satz explizit ausrechnet und an diesen Termen die Reste, die sie bei der Teilung durch 7 lassen, direkt abliest.

Aufgabe 141035:
Man gebe alle natürlichen Zahlen n mit $n < 40$ an, für die die Zahl $n^2 + 6n - 187$ ohne Rest durch 19 teilbar ist!

Lösung von weird:
Wegen $-187 \equiv 3 \pmod{19}$ geht es hier als um die Auflösung der quadratischen Kongruenz

$$n^2 + 6n + 3 \equiv 0$$

oder nach der einfachen Umformung

$$(n+3)^2 \equiv 6 \pmod{19} \tag{*}$$

dann im Folgenden eigentlich nur mehr um die Frage, ob 6 ein quadratischer Rest mod 19 oder nicht, und falls ja, wie man die beiden Wurzeln aus 6 mod 19 bestimmt.

Aus der Theorie der quadratischen Reste weiß man nun, dass die Lösungen einer Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ für eine Primzahl $p \equiv 3 \pmod{4}$ die Gestalt $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \pmod{p}$ haben müssen, falls a quadratischer Rest modulo p ist.
In unserem Fall hier ist $6^5 \equiv 5 \pmod{19}$, und ja, $x \equiv \pm 5 \pmod{19}$ sind tatsächlich Lösungen von $x^2 \equiv 6 \pmod{19}$, was dann auch sofort auf die beiden Lösungen $n \equiv 2 \pmod{19}$ und $n \equiv 11 \pmod{19}$ der Kongruenz (*) führt. Auf die ursprüngliche Frage bezogen heißt das, dass genau die Zahlen $n \in \{2{,}11{,}21{,}30\}$ die Aufgabe hier lösen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $n^2+6n-187$ ist auch $n^2+6n-187+9\cdot 19 = n^2+6n-16 = (n-2)(n+8)$ durch 19 teilbar. Da 19 eine Primzahl ist, muss einer der beiden Faktoren durch 19 teilbar sein. Also kommen im zu betrachtenden Intervall für n nur die natürlichen Zahlen 2 und 21 (im ersten Fall) sowie 11 und 30 (im zweiten) in Frage. Die Probe bestätigt, dass dies auch alles Lösungen sind.

Aufgabe 151035:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle diejenigen natürlichen Zahlen $x > 0$, für die folgendes gilt!
Im Ziffernsystem mit der Basis n ist x eine zweistellige Zahl, und durch Vertauschen ihrer Ziffern erhält man das Doppelte von x.
(Dabei sollen wie üblich für positive Zahlen nur solche Zifferndarstellungen zugelassen sein, die nicht mit 0 beginnen.)

Lösung von Nuramon:
x habe die Zifferndarstellung $x = ab$; $1 \leq a,b < n$ zur Basis n. Dann gilt

$$b \cdot n + a = 2(a \cdot n + b) \iff b(n-2) = a(2n-1) \iff b = 2a + \frac{3a}{n-2}\ .$$

Damit $\frac{3a}{n-2}$ ganz ist, muss es ein $l \in \mathbb{Z}$ geben mit $3a = l(n-2)$. Da $a > 0$ ist, folgern wir $l \geq 1$ (und $n \neq 2$). Dann ist $b = l + \frac{2l(n-2)}{3}$. Da $b \leq n-1$, folgt

$$l = \frac{b}{1+\frac{2(n-2)}{3}} \leq \frac{n-1}{1+\frac{2(n-2)}{3}} = \frac{3n-3}{2n-1} < \frac{3n-3}{2n-2} = \frac{3}{2} < 2.$$

Also ist $1 \leq l < 2$ und somit folgt $l = 1$.
Folglich ist $a = \frac{n-2}{3}$; $n-2$ durch 3 teilbar und $b = 2a + \frac{3a}{n-2} = 2a+1$. Daher erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$; $k > 0$ mit $n = 3k+2$, $a = k$, $b = 2k+1$ und $x = an+b = 3k^2+4k+1$ genau eine Lösung.

Aufgabe 251034:
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllt:
(1) Die Zahl x hat, im Zweiersystem (System mit der Basis 2) geschrieben, genau zehn Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.

(3) Schreibt man x im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.
(4) Die Zahl x hat, im Fünfersystem geschrieben, genau vier Stellen.
(5) Schreibt man x im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und ermitteln Sie diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine natürliche Zahl x die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Wegen (1) und 84) ist $2^9 \leq x$ und $x < 5^4$, d. h.

$$512 \leq x \leq 625 \tag{6}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 3^5 = 586$ und $3^6 = 729$ ergibt sich aus (6), dass x im Dreiersystem genau sechs Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (2) ist somit $x \geq 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4$, d. h.

$$567 \leq x \tag{7}$$

Unter Beachtung von $2 \cdot 4^4 = 512$ und $3 \cdot 4^4 = 768$ ergibt sich aus (6), dass x im Vierersystem genau fünf Stellen hat, wobei an der ersten Stelle die Ziffer 2 steht. Wegen (3) ist somit $x < 2 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3$, d. h.

$$x < 576 \tag{8}$$

Die Bedingungen (7), (8) und (5) werden nur von $x = 572$ erfüllt. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen (1) bis (5) genügen.

II. Sie genügt diesen Bedingungen; denn sie hat folgende Darstellungen:
Zweiersystem: 1000111100 (10 Stellen)
Dreiersystem: 210012 (Ziffer 1 an der zweiten Stelle)
Vierersystem: 20330 (Ziffer 0 an der zweiten Stelle)
Fünfersystem: 4242 (4 Stellen)
Zehnersystem: 572 (Ziffer 2 an der letzten Stelle)

Mit I. und II. ist der geforderte Beweis erbracht; die zu ermittelnde Zahl ist $x = 572$.

Aufgabe 261031:
Von einer natürlichen Zahl x sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
(1) Im Zweiersystem geschrieben hat x genau sieben Stellen.
(2) Schreibt man x im Dreiersystem, so tritt keine Ziffer mehr als zweimal auf.
(3) Im Fünfersystem geschrieben hat x genau vier Stellen.
Beweisen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl x gibt, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie diese Zahl an!

Lösung von Steffen Polster:
Eine Zahl, die im Zweiersystem siebenstellig ist, ist mindestens $[1000000]_2 = 64$ und höchstens $[1111111]_2 = 127$.
Eine Zahl, die im Fünfersystem vierstellig ist, ist mindestens $[1000]_5 = 5^3 = 125$ und höchstens $[1111]_5 = 5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0 = 624$.
Da (1) und (3) gleichzeitig gelten sollen, kann die gesuchte Zahl nur 125, 126 oder 127 sein. Für diese 3 Zahlen ermittelt man die Darstellung im Dreiersystem

$$125 = [11122]_3 \quad ; \quad 126 = [11200]_3 \quad ; \quad 127 = [11201]_3$$

Entsprechend (2) ist die gesuchte Zahl 126.

Aufgabe 271031:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x; y)$, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!
(1) x und y sind dreistellige natürliche Zahlen.
(2) Die drei Ziffern von x sind sämtlich voneinander verschieden.
(3) Die drei Ziffern von x sind auch die drei Ziffern von y, nur in anderer Reihenfolge.
(4) Es gilt $x - y = 45$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Bedingungen (1) bis (4) sind genau dann erfüllt, wenn als Ziffern von x drei natürliche Zahlen a,b,c auftreten, für die folgendes gilt: Es ist

$$1 \leq a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c \tag{5}$$

und die Bedingung (4) wird erfüllt durch die Zahl $x = 100a + 10b + c$ und diejenige Zahl y, für die genau einer der folgenden Fälle I bis V vorliegt:

(I) Es gilt $y = 100a + 10c + b$

(II) Es gilt $y = 100b + 10a + c$ und außer (5) auch $b \neq 0$. (6)

(III) Es gilt $y = 100b + 10c + a$ und außer (5) auch (6).

(IV) Es gilt $y = 100c + 10a + b$ und außer (5) auch $c \neq 0$. (7)

(V) Es gilt $y = 100c + 10b + a$ und außer (5) auch (7).

Im Fall I ist (4) wegen $x - y = 9(b - c9$ äquivalent mit $b - c = 5$, was unter den Bedingungen (5) genau durch

$$(b; c) = (5; 0), (6; 1), (7,2), (8; 3), (9; 4)$$

erfüllt wird, jeweils zusammen mit denjenigen der Zahlen $a = 1,...,9$, die auch $a \neq b$ und *aneqc* erfüllen. Für jede der 9 Zahlen $a = 1,...,9$ verbleiben damit genau 4 Paare $(b; c)$.

Im Fall II ist (4) wegen $x - y = 90(a - b)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 90 ist.

Im Fall III ist (4) wegen $x - y = 9(11a - 10b - c)$ äquivalent mit $11a - 10b - c = 5$ und dies mit $11a - 5 = 10b + c$.

Wegen (5), (6) scheiden hierfür die Werte $a \geq 5$ aus; denn für diese Werte würde sich bei Berechnung von $11a - 5$ eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer a und damit der Widerspruch $a = b$ ergeben. Ferner scheidet $a = 1$ aus, denn hierfür würde $11a - 5$ eine einstellige Zahl.
Die verbleibenden Werte $a = 2,3,4$ erfüllen wegen $11a - 5 = 17, 28, 39$ jeweils zusammen genau mit

$$(b; c) = (1; 7), (2; 8), (3; 9)$$

alle Bedingungen (5), (6). Also werden (1) bis (4) im Fall III durch genau 3 Paare $(x; y)$ erfüllt.

Im Fall IV ist (4) wegen $x - y = 9(10a + b - 11c)$ äquivalent mit $10a + b - 11c = 5$ und dies mit $11c + 5 = 10a + b$.
Wegen (5), (7) scheiden hierfür die Werte $c \leq 4$ und der Wert $c = 9$ aus, den $c = 0$ erfüllt nicht (7), und für $1 \leq c \leq 4$ bzw. $c = 9$ würde sich $11c + 5$ als zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer $a = c$ bzw. als dreistellige Zahl ergeben.
Die verbleibenden Werte $c = 5,6,7,8$ erfüllen wegen $11c + 5 = 60, 71, 82, 93$ jeweils zusammen genau mit

$$(a; b) = (6; 0), (7; 1), (8; 2), (9; 3)$$

alle Bedingungen (5), (7). Also werden (1) bis (4) im Fall IV durch genau 4 Paare $(x; y)$ erfüllt.

Im Fall V ist (4) wegen $x - y = 99(a - c)$ nicht erfüllbar, da 45 kein Vielfaches von 99 ist.
Als gesuchte Anzahl aller Paare $(x; y)$, die (1) bis (4) erfüllen, ergibt sich somit $36 + 3 + 4 = 43$.

Aufgabe 281031:
Für jede natürliche Zahl n werde ihre Zifferndarstellung mit der Basis 2 (Darstellung als Dualzahl), ferner ihre Zifferndarstellung mit der Basis 3 usw. ..., schließlich ihre Zifferndarstellung mit der Basis 10 (Darstellung als Dezimalzahl) betrachtet.
Wenn es natürliche Zahlen $n > 1$ gibt, bei denen in jeder dieser Zifferndarstellungen (mit den Basen 2, 3, 4, ..., 10) die letzte Ziffer (Einerziffer) eine 1 ist, so ermittle man die kleinste derartige natürliche Zahl n.

Lösung von Steffen Polster:
Damit die gesuchte Zahl n in jedem Stellenwertsystem zu den Basen 2 bis 10 an letzter Stelle eine Ziffer 1 hat, muss n bei Division durch 2, 3, 4, ..., 10 stets den Rest 1 lassen.
Es muss $n - 1 > 0$ durch $2,3,4,\ldots,10$ teilbar sein. Per Definition ist also $n - 1$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $2,3,\ldots,10$, also ist $n - 1 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Die gesuchte Zahl ist $n = 2521$.

Aufgabe 281036:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine $(n+2)$-stellige natürliche Zahl, die mit genau n Ziffern 3, genau einer Ziffer 4 und genau einer Ziffer 6 in geeigneter Reihenfolge geschrieben wird und durch 7 teilbar ist.
Hinweis:
Die Verwendung eines - nicht programmierbaren - Taschenrechners ist gestattet.

Lösung von Steffen Polster:
Durch Kontrolldivisionen mit dem Taschenrechner findet man schnell, dass die kleinste nur aus Ziffern 3 bestehende natürliche Zahl, die durch 7 teilbar ist, die $333333 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ist.
Für $1 \leq n \leq 6$ kann man durch schrittweises Permutieren der $(n-2)$ Ziffern 3 und der einen 4 sowie der einen 6 durch Testdivisionen die gesuchte Zahl z_n ermitteln:

n	z_n	n	z_n
1	$364 = 2^2 \cdot 6 \cdot 13$	2	$3346 = 2 \cdot 7 \cdot 239$
3	$34363 = 7 \cdot 4909$	4	$343336 = 2^3 \cdot 7 \cdot 6131$
5	$3333463 = 7 \cdot 29 \cdot 16421$	6	$33334336 = 2^6 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 2011$

Für $n > 6$ ergibt sich das gesuchte z_n durch gegebenenfalls wiederholtes Anfügen der Ziffern „333333“ an die Ziffernfolge von $z_{n \pmod 7}$, bis die gesuchte Länge der Zahl z_n erreicht wird; wobei hier unter z_0 die leere Ziffernfolge verstanden wird.

Aufgabe 301031:
Beim Umrechnen natürlicher Zahlen aus dem Dezimalsystem in Systeme mit anderer Basis kann man feststellen, dass es Zahlen gibt, deren Darstellung sowohl im System mit der Basis 2 als auch im System mit der Basis 4 auf die Ziffernfolge ...01 endet; z. B. hat $17 = [10001]_2 = [101]_4$ diese Eigenschaft.
Gibt es auch natürliche Zahlen, deren Darstellung in beiden Systemen (sowohl mit der Basis 2 als auch mit der Basis 4) auf die Ziffernfolge ...10 endet?

Lösung von cyrix:
Nein, gibt es nicht: Eine Zahl, die im Zweiersystem auf die Ziffern 10 endet, ist durch 2 teilbar (da letzte

Ziffer 0), nicht aber durch $2^2 = 4$ (da die vorletzte Ziffer nicht auch 0 ist); eine Zahl, die im Vierersystem auf 0 endet, ist aber durch 4 teilbar, sodass nicht beide Darstellungen für die gleiche Zahl möglich sind.

Aufgabe 321035:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl k mit $k > 1$ die folgende Aussage gilt:
Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl 11...1 eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

Lösung von cyrix:
Es sei z die aus n Ziffern 1 bestehende Zahl. Dann ist $z = \frac{k^n-1}{k-1}$. Wir nehmen nun indirekt an, dass z eine Primzahl, aber n keine ist und führen dies zum Widerspruch:

Da z eine Primzahl ist, ist insbesondere $z > 1$, also $n > 1$. Da n keine Primzahl ist, existieren dann zwei natürliche Zahlen $a,b > 1$ mit $n = a \cdot b$. Insbesondere ist dann $k^a - 1$ ein Teiler von $(k^a)^b - 1 = k^{ab} - 1 = k^n - 1$, wie man leicht durch Berechnen der geometrischen Summe

$$\sum_{i=0}^{b-1} (k^a)^i = \frac{k^{ab} - 1}{k^a - 1}$$

oder Polynomdivision bestätigt. Damit existiert eine natürliche Zahl q mit $k^n - 1 = q \cdot (k^a - 1)$. Wegen $1 < a < n$ ist auch $k - 1 < k^a - 1 < k^n - 1$, also auch $1 < q < k^n - 1$.

Es ist analog $k - 1 | k^a - 1$, sodass eine natürliche Zahl $r > 1$ (wegen $k^a - 1 > k - 1$) mit $k^a - 1 = r \cdot (k - 1)$ gibt.

Zusammen ist also

$$z = \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{(k^a - 1) \cdot q}{k - 1} = \frac{(r \cdot (k - 1)) \cdot q}{k - 1} = r \cdot q$$

wobei q und r beides natürliche Zahlen größer als 1 sind. Damit ist aber z entgegen der Annahme keine Primzahl, sodass wir den gewünschten Widerspruch erhalten und n also auch eine Primzahl gewesen sein muss, $\square$.

Aufgabe 331032:
Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:
Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und statt dessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.
(Bei dieser Zifferndarstellung von n' wird auch die Möglichkeit einer Anfangsziffer Null zugelassen, wenn nämlich die zweite Ziffer von n eine Null war.)
Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!
Ermitteln Sie, wenn es solche Zahlen gibt, die kleinste unter ihnen!

Lösung von ochen:
Es gibt solche Zahlen n, die kleinste unter ihnen ist

$$n = 10^{21} + \frac{10^{21} - 7}{69}.$$

Sei $1 \leq a < 10$ die erste Ziffer von n und $0 \leq b < 10^k$ die ganze Zahl, die aus den restlichen Ziffern von n gebildete Zahl. Weiter sei $k + 1$ die Anzahl der Ziffern von n, so sind $n = 10^k a + b$ und $n' = 10b + a$. Aus $n' = n : 7$ folgt

$$10^k a + b = 7(10b + a)$$

Wenn wir alle Terme mit a auf die linke Seite und alle Terme mit b auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$(10^k - 7)a = 69b$$

Da die rechte Seite der Gleichung durch 23 teilbar ist, muss dies auch für die linke gelten. Da 23 eine Primzahl ist und $a < 10$ ist, muss $10^k - 7$ durch 23 teilbar sein. Tatsächlich ist $10^k - 7$ für $k = 21$ durch 23 teilbar und für $0 < k < 21$ nicht durch 23 teilbar. Somit ist gezeigt, dass $k \geq 21$ gelten muss. Mehr noch ist $10^{21} - 7$ sogar durch 69 teilbar.

Die Wahl von $a = 1$, $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ und $k = 21$ erfüllt unsere Eigenschaften, insbesondere $a \geq 1$ und $b < 10^{21}$. Weiterhin wird n für diese Wahl minimal, da $k \geq 21$ und $a \geq 1$ gelten muss und $b = \frac{10^{21}-7}{69}$ für $k = 21$ und $a = 1$ gilt.

Sei r_k der Rest von 10^k bei der Division durch 23, so gilt

$$r_{k+1} = 10r_k \bmod 23, \quad r_0 = 1.$$

Wir ermitteln die Reste also rekursiv. Falls wir ein k mit $r_k = 7$ gefunden haben, hören wir auf. Falls wir kein solches k gefunden hätten, hören wir bei $k = 22$ auf, da dann auch keines mehr vorkommen kann.

Aufgabe 341031:
Beweisen Sie, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Lösung von cyrix:
Würde $9^n + 1$ auf mindestens zwei Nullen Enden, so wäre es durch 4 teilbar. Es ist aber $9^n - 1 = 9^n - 1^n$ durch $9 - 1 = 8$, also insbesondere durch 4 teilbar, sodass $9^n + 1 = (9^n - 1) + 2$ nie durch 4 teilbar sein kann, $\square$.

IV Runde 4

Aufgabe 071041:
Welchen Rest lässt eine natürliche Zahl a bei der Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn a eine solche natürliche Zahl ist, dass $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101} - 2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit $a^{101} - 2a = 73r$ und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit $a^{101} - 69 = 73s$.
Daraus folgt $2a - 69 = 73(s - r)$, also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a = 69 + 73t \to 2a = 69 + 73 + 73(t - 1) \to 2a = 142 + 73(t - 1)$$

Da $2a - 69$ ungerade ist, muss auch t eine ungerade Zahl sein. Dann ist $t - 1$ gerade, also von der Form $t - 1 = 2n$, n ganz, und es gilt

$$2a = 142 + 2n \cdot 73 \qquad \text{also} \qquad a = 71 + 73n$$

Als Rest, den a bei Division durch 73 lässt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.

Zusätzlich wird noch gezeigt, dass 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d. h., dass mindestens eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen. Es ist:

$$\begin{aligned} 71 &\equiv -2 \pmod{73} \\ 71^9 \equiv (-2)^9 = -512^2 = -7\cdot 73 - 1 &\equiv -1 \pmod{73} \\ 71^{99} &\equiv 2 \pmod{73} \\ 71^{100} \equiv -4 &\equiv 69 \pmod{73} \end{aligned}$$

Wenn allgemeiner $a \equiv 71 \pmod{73}$ ist, also $a \equiv -2 \pmod{73}$ ist, gilt

$$a^{100} \equiv 2 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} \equiv -4 \pmod{73}.$$

Folglich ist

$$a^{100} - 2 \equiv 2 - 2 = 0 \pmod{73} \quad ; \quad a^{101} - 69 \equiv -4 - (-4) = 0 \pmod{73}.$$

Also genügen genau alle natürlichen Zahlen $a \equiv -2 \pmod{73}$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Mit $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ ist auch $a^{101} - 69 - a \cdot (a^{100} - 2) + 73 = 2a + 4$ und damit auch $a + 2$ durch 73 teilbar, d. h., es ist $a \equiv -2 \equiv 71 \pmod{73}$.

Aufgabe 121045:
Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe!
Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, dass sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt und dass man zweitens bei deren Subtraktion von der ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?

Lösung von cyrix:
Sei $g > 2$ eine fest gewählte natürliche Zahl. ($g > 2$, damit die Zahl 12 überhaupt g-adisch aufgefasst werden kann.) Für eine zweistellige Zahl darf die führende (= Nicht-Einer-) Stelle nicht 0 sein. Damit dies für die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl genauso gilt, müssen also beide Ziffern verschieden von 0 sein. Seien a und b diese Ziffern. Dann gilt demnach $1 \leq a,b < g$ und es ergibt sich die zu lösende Gleichung $(a \cdot g + b) - (b \cdot g + a) = g + 2$ bzw. $(a - b) \cdot (g - 1) = g + 2$.

Wenn diese Gleichung eine Lösung hat, dann muss $g - 1 \geq 2$ ein Teiler von $g + 2$ sein, also auch einer von $(g + 2) - (g - 1) = 3$. Demnach ist $g - 1 = 3$ und man erhält nach Einsetzen $a - b = 2$, also (aufgrund der Größenbeschränkungen für a und b) $a = 3$ und $b = 1$. Tatsächlich ist auch $31_4 - 13_4 = 12_4$, wobei z_4 dafür stehen soll, dass die Ziffernfolge z im System zur Basis 4 zu lesen ist.

Zusammenfassung: Die zu betrachtende Gleichung ist ausschließlich im Vierersystem lösbar und besitzt dann dafür die einzige Lösung 31_4.

Aufgabe 151044:
Man ermittle alle ungeordneten Paare (x, y) aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die folgendes gilt!
Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von x und y (das ist die Zahl $\sqrt{xy}$).

Lösung von Nuramon:
Es sei $\frac{x+y}{2} = u$ und $\sqrt{xy} = v$. Nach Voraussetzungen gibt es $a,b \in \{0,1,\dots,9\}$ mit $u = 10a + b$ und $v = 10b + a$.

Aus $x + y = 2u$ und $xy = v^2$ folgt nach Vieta, dass x,y die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2uz + v^2 = 0$ sind. Diese sind gegeben durch $z = u \pm \sqrt{u^2 - v^2}$.
Somit muss $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 11(a + b) \cdot 9(a - b)$ eine Quadratzahl sein.

Da $a - b$ wegen $a \neq b$ (da $x \neq y$) nicht durch 11 teilbar ist, muss also $a + b$ durch 11 teilbar sein. Das ist nur möglich, wenn $a + b = 11$ gilt. Es folgt, dass $a - b$ ebenfalls eine Quadratzahl sein muss, also $a - b \in \{1,4,9\}$. Da $a + b = 11$ ungerade ist, muss auch $a - b$ ungerade sein, also ist $a - b \neq 4$. Wäre $a - b = 9$, so müsste $a = 9$ und $b = 0$ gelten, im Widerspruch zu $a + b = 11$. Also ist $a - b = 1$.
Damit erhalten wir jetzt $a = 6$ und $b = 5$, also $u = 65$ und $v = 56$, woraus wir letztendlich erhalten, dass

$$\{x,y\} = \{u \pm \sqrt{u^2 - v^2}\} = \{65 \pm 11 \cdot 3\} = \{32,98\}.$$

Aufgabe 171043A:
Sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 3$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ und gilt

$$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 4 + a_0$$

so sagt man, z sei im 4-adischen System durch die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ dargestellt, und schreibt kurz $z = [a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0]_4$.
Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4-adischen System) $(n + 1)$-stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl

$$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_1^2 + a_0^2$$

Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'' usw.

Beispiel: $z = 54$: Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 = [312]_4$, d. h., die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4^1 + 2 = [32]_4$, $z'' = 3^2 + 2^2 = 13 = 3 \cdot 4^1 + 1 = [31]_4$ usw.

Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und lässt bei Darstellungen im 4-adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben: $312 \to 32 \to 31$ usw.
a) Beweisen Sie, dass für jede natürliche, im 4-adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, dass man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei z eine im 4-adischen Zahlensystem mindestens dreistellige Zahl. Dann ist

$$z = \sum_{i=0}^{n} a_i 4^i \qquad \text{und} \qquad z' = \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

mit $n \geq 2$, $0 \leq a \leq 3$ für $i = 0, 1, \dots, n$ und $a_n \neq 0$, woraus

$$z - z' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (4^i - a_i) \right) - a_0(a_0 - 1)$$

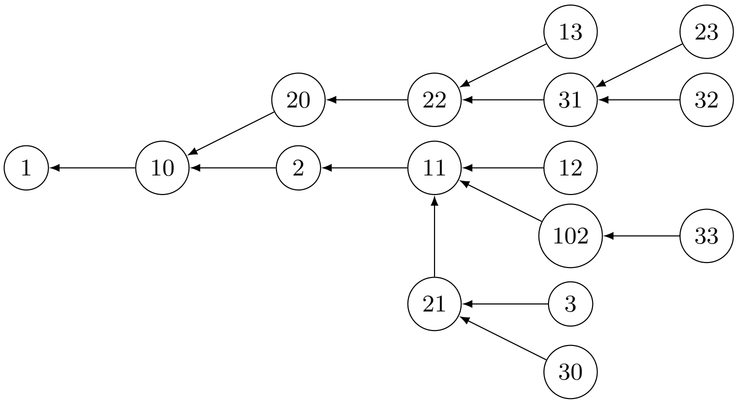
folgt. Da $a_0(a_0 - 1) \leq 6$, $a_i(4^i - a_i) \geq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n - 1$ und $a_n(4^n - a_n) \geq 4^2 - a_n \geq 16 - 3 = 13$ ist, gilt $z - z' > 0$.
Somit entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Glieder, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Somit muss schließlich eine ein- oder

zweistellige Zahl auftreten. (Damit ist auch die Teilbehauptung a) bewiesen.)

Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistellige Zahlen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$), wobei jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortgelassen sei:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33 \qquad (1)$$

Nun gilt, wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z \to z'$ dargestellt wird:



Hier treten alle Zahlen aus (1) auf, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Aufgabe 181041:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern (bei üblicher dekadischer Ziffernschreibweise) derjenigen Zahl x, die die Gleichung

$$\log_{13}[\log_{12}(\log_{11} x)] = 1$$

erfüllt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die genannte Zahl x gilt $\log_{12}(\log_{11} x) = 13$, also $\log_{11} x = 12^{13}$ und daher

$$x = 11^{12^{13}}$$

Wir ermitteln von den Potenzen von 11^s $(s = l, 2, \dots)$ jeweils die letzten beiden Ziffern:

letzte Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
von 11^s	11	21	31	41	51	61	71	81	91	01	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine mindestens zweistellige natürliche Zahl t mit 11^{10}, so hat die entstehende Zahl dieselben letzten beiden Ziffern wie die Zahl t.
Hieraus ergibt sich weiter: Hat eine natürliche Zahl n die letzte Ziffer w, so hat 11^u dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^w; denn mit einer natürlichen Zahl v ist $u = 10v + w$, also entstehe $11^u = (11^{10}) \cdot 11^w$ aus 11^w durch v-maliges Multiplizieren mit 11^{10}.

Wir ermitteln nun von den Potenzen 12^y $(y = 1, 2, \dots)$ jeweils die letzte Ziffer:

y	1	2	3	4	...
letzte Ziffer von 12^y	2	4	8	6	...

Daraus folgt: Multipliziert man eine natürliche Zahl z, die die letzte Ziffer 2 hat, mit 12^4, so hat auch die entstehende Zahl die letzte Ziffer 2.
Hieraus ergibt sich weiter: Die Zahl $u = 12^{13}$ hat die letzte Ziffer $w = 2$; denn $12^{13} = (12^4)^3$. 12 entsteht aus 12 durch dreimaliges Multiplizieren mit 12^4.
Somit hat $x = 11^{12^{13}}$ dieselben letzten beiden Ziffern wie 11^2, also die Ziffern 2, 1 (in dieser Reihenfolge).

Aufgabe 261044:
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ die Anzahl aller Lösungen (x, y, z, t) der Gleichung $\overline{xy} + \overline{zt} = \overline{yz}$, worin für x, y, z, t nur natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x \leq k-1, \qquad 1 \leq y \leq k-1 \qquad 1 \leq z \leq k-1 \qquad 1 \leq t \leq k-1$$

zugelassen sind!
Dabei bezeichnet jeweils $\overline{pq}$ diejenige Zahl, die im Positionssystem der Basis k mit den Ziffern p, q (in dieser Reihenfolge) geschrieben wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn k, x, y, z, t natürliche Zahlen sind, für die $k \geq 2$ sowie $1 \leq x$,y,$z \leq k-1$ und $0 \leq t \leq k-1$ sowie die geforderte Gleichung, d. h.

$$k \cdot x + +k \cdot z + t = k \cdot y + z \tag{1}$$

gilt, so folgt: Es gilt

$$k \cdot x + t = (k-1) \cdot (y-z) \tag{2}$$

wegen $x \geq 1$ und $t \geq 0$ also

$$y - z \geq \frac{k \cdot 1 + 0}{k-1} > 1 \qquad \text{und daher} \qquad y - 1 > z \tag{3}$$

Wegen $z \geq 1$ gilt folglich $y > 2$ (4) und wegen $k - 1 \geq y$ demnach $k > 3$. Gemäß (4) ist also y eine der Zahlen 3,4,...,$k-1$ (5)
Gemäß (3) ist z eine der Zahlen 1,2,...,$y-2$ (6).

II. Umgekehrt folgt, wenn $k > 3$ ist, und (5), (6) sowie (2) gelten: y und Z erfüllen erst recht die Bedingungen $1 \leq y$,$z \leq k-1$; daher gilt einerseits

$$(k-1) \cdot (y-z) < (k-1) \cdot (k-0) < k^2$$

Andererseits gilt wegen (6), also (3) auch

$$(k-1) \cdot (y-z) > k-1$$

also ist $(k-1) \cdot (y-z)$ eine im Positionssystem der Basis k zweistellige Zahl. Durch (2) sind folglich zu y,z jeweils natürliche Zahlen x,t mit $1 \leq x \leq k-1$m $0 \leq t \leq k-1$ eindeutig bestimmt, und für diese y,z,x,t ist mit (2) auch die geforderte Gleichung (1) erfüllt.

III. Nach I. und II. ergibt sich: Für $k = 2$ und für $k = 3$ ist die gesuchte Lösungsanzahl 0; im Fall $k \geq 4$ ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der Anzahl aller derjenigen Paare (y,z), die gemäß (5) und (6) zu bilden sind. Dabei durchläuft z jeweils

für $y = 3$ den Wert $z = 1$,
für $y = 4$ den Wert $z = 1, 2$
...
für $y = k-1$ den Wert $z = 1, 2, ..., k-3$ (9)

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1 + 2 + ... + (k-3) = \frac{1}{2}(k-3)(k-2)$.

Aufgabe 311044:
Für jede natürliche Zahl n sei $\overline{n}$ diejenige Zahl, die im Ziffernsystem mit der Basis 10 durch dieselbe Ziffernfolge dargestellt wird wie n im Ziffernsystem mit der Basis 9.

Man zeige, dass es eine natürliche Zahl k gibt, so dass für jedes Paar $(m;n)$ natürlicher Zahlen mit $m > 100$ und $n - m > k$ die Ungleichung

$$n - m < \overline{n} - \overline{m}$$

gilt. Man ermittle auch die kleinste derartige natürliche Zahl k.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen zuerst folgendes

Lemma: Endet die natürliche Zahl n bei ihrer Darstellung im Ziffernsystem zur Basis 9 auf genau $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ Achten, so gilt $\overline{n+1} - \overline{n} = \frac{10^k-1}{9} + 1$.

Beweis: In der Darstellung der Zahl $n+1$ im System zur Basis 9 sind dann die letzten k Ziffern gleich Null, während sich die letzte davor befindliche Ziffer gegenüber n um genau 1 erhöht hat. Dementsprechend ist $\overline{n+1} = \overline{n} - 8 \ldots 8 + 10^k = \overline{n} - 8 \cdot \frac{10^k-1}{9} + 10^k$, woraus direkt die Aussage des Lemmas folgt.

Nun zur Aufgabe: Aus dem Lemma folgt $\overline{n+1} = \overline{n} + 1$ für alle natürlichen Zahlen n, die in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 nicht auf eine Acht enden. Insbesondere gilt dies für die natürlichen Zahlen $108 = 130_9$ bis $115 = 137_9$.
Also folgt für alle natürlichen Zahlen ℓ zwischen inklusive 108 und 115, dass $\overline{\ell+1} = \overline{\ell} + 1$ gilt. Setzen wir dies zusammen, wählen $m = 108$ und $n = 116$, so gilt also $\overline{m} = \overline{n} + 8$ bzw. $\overline{n} - \overline{m} = 8 = n - m$, sodass man k nicht als $n - m - 1 = 8 - 1 = 7$, oder kleiner, wählen kann, damit in jedem der vorgegebenen Fälle $n - m < \overline{n} - \overline{m}$ gilt.

Ist dagegen $k \geq 8$, so endet wegen $n > m + k \geq m + 8$ wenigstens eine der natürlichen Zahlen m, $m+1$, $\ldots$, $n-1$ in ihrer Darstellung im System zur Basis 9 auf die Ziffer Acht.
Für diese Zahl a ist dann $\overline{a+1} > \overline{a} + 1$. Da für alle natürlichen Zahlen b die Ungleichung $\overline{b+1} \geq \overline{b} + 1$ gilt, folgt durch Zusammensetzen aller dieser Ungleichungen nun $\overline{n} > \overline{m} + (n - m)$ bzw. die zu zeigende Ungleichung $n - m < \overline{n} - \overline{m}$.

Damit ist die Aussage für alle $k \geq 8$ gezeigt, während sie für $k \leq 7$, wie oben gezeigt, nicht für alle entsprechenden m und n gilt. Es ist also $k = 8$ das kleinste solche k.

Aufgabe 321044:
Jemand stellt durch Ausrechnen genügend vieler Ziffern der Zahl 2^n für alle natürlichen Zahlen n aus $\{10, 11, 12, \ldots, 108, 109\}$ fest:
(*) Als Zifferngruppe der letzten drei Ziffern (Hunderter-, Zehner- und Einerziffer) tritt bei keiner der Zahlen 2^n mit $n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\}$ die Zifferngruppe 024 auf, die bei $2^10 = 1024$ auftritt.
Danach hat er die einzelnen Ziffern von Zahlen 2^n aus seinen Aufzeichnungen (und, soweit er sie sich gemerkt hatte, auch aus seinem Gedächtnis) verloren. Nur die Feststellung (*) ist ihm noch bekannt.
Nun wird folgende Frage gestellt:
(**) Gibt es unter den Zahlen 2^n $(n \in \{11, 12, \ldots, 108, 109\})$ zwei, die in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen?
Beweisen Sie, dass die Frage (**) mit „Nein“ zu beantworten ist, wenn man die Feststellung (*) zur Verfügung hat, jedoch ohne dass man zur Begründung doch noch die Zifferngruppe der letzten drei Ziffern aller einzelnen Zahlen 2^n $(n \in \{11, 12, ..., 108, 109\})$ wieder berechnen müsste!

Lösung von cyrix:
Angenommen, es gäbe zwei Zahlen $m > n$ mit $m,n \in \{11,11,12, \ldots ,108,109\}$, für die die beiden Zweierpotenzen 2^m und 2^n in den letzten drei Stellen übereinstimmen würden.

Dann wäre $2^m - 2^n = 2^n \cdot (2^{m-n} - 1)$ durch $1000 = 2^3 \cdot 125$ teilbar.
Da 2^n und 125 teilerfremd sind, wäre damit $2^{m-n}-1$ durch 125 teilbar, also $2^{10}\cdot(2^{m-n}-1) = 2^{m-n+10}-2^{10}$ durch 1000 teilbar, sodass die beiden Zweierpotenzen 2^{10} und 2^{m-n+10} die gleichen letzten drei Stellen 024 besitzen.

Wegen $10 < n < m \leq 109$ ist $11 \leq m-n+10 \leq 109$, sodass also doch eine der betrachteten Zweierpotenzen auf die Stellen 024 hätte enden müssen, im Widerspruch zu (*). Also gibt es in diesem Bereich keine zwei Zweierpotenzen mit gleichen letzten drei Stellen, □.

Aufgabe 331044:
Jemand findet die Angabe

$$23! = 2585201673 * 8849 * 6640000$$

Darin sind auch die zwei durch $*$ angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen.
Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie diese! Dabei darf verwendet werden, dass die angegebenen Ziffer korrekt sind.
Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Lösung von Steffen Polster:
Die beiden unbekannten Ziffern seien x und y $(0 \leq x,y \leq 9)$, d. h. die Zifferndarstellung

$$23! = 2585201673x8849y6640000$$

23! ist auf Grund ihrer Konstruktion garantiert durch 3, 9 und 11 teilbar. Eine Zahl, die durch 3 teilbar ist, hat eine durch 3 teilbare Quersumme. Eine Zahl lässt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Außerdem ist eine Zahl durch 11 teilbar, wenn ihre alternative Quersumme durch 11 teilbar ist.
Die Quersumme ist $Q = 2 + 5 + ... + 3 + x + 8 + ... + 8 + y + 6 + ... + 0 = 84 + x + y$. Die alternierende Quersumme ist $A = 2 - 5 + 6 - 5 \pm ... + x - 8 \pm ...y + 6 \mp ...0 = 47 + x - 37 - y = 10 + x - y$.
Aus $84 \equiv 0 \pmod 3$ folgt dass $x + y$ durch 3 teilbar sein müssen. Damit verbleiben noch folgende Möglichkeiten

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0,3,6,9	1	2,5,8	2	1,4,7	3	0,3,6,9	4	2,5,8
5	1,4,7	6	0,3,6,9	7	2,5,8	8	1,4,7	9	0,3,6,9

Aus $84 \equiv 3 \pmod 9$ ergibt sich das $a + b \equiv 6 \pmod 9$ sein müssen. Von den in der Tabelle genannten Möglichkeiten verbleiben nur noch

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	6	1	5	2	4	3	3	4	2
5	1	6	0,6	7	5	8	4	9	3

Für die Teilbarkeit durch 11 muss $10+a-b \equiv 0 \pmod 1)1$ gelten. Testet man die verbliebenen Ziffernpaare (x,y), so erfüllt nur $x = 8$, $y = 7$ die letzte Forderung. Die unleserlichen Ziffern sind 8 und 7, es gilt

$$23! = 25852016738884976640000$$

wie ein Kontrollmultiplikation zeigt.

IV.III Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 071013:
Ein Mathematiker hat den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wusste er allerdings noch, dass sie eine durch 13 teilbare dreiziffrige Zahl war und dass sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.

Geben Sie alle diese Zahlen an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt:

$$100a + 10b + c = 13n \quad (a,\, b,\, c,\, n \text{ ganz}) \tag{1}$$

$$0 < a \leq 9; \quad 0 < b = \frac{a+c}{2} \leq 9; \quad 0 \leq c \leq 9; \quad n > 0. \tag{2}$$

Daraus folgt:

$$c = 2b - a \tag{3}$$

sowie $99a + 12b = 13n$

$$b = \frac{13n - 99a}{12} = n - 8a + \frac{n - 3a}{12}. \tag{4}$$

Mithin muss $n - 3a = 12m$ (m ganz) gelten, woraus man

$$n = 12m + 3a \tag{5}$$

erhält. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$b = 13m - 5a. \tag{6}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$c = 26m - 11a \tag{7}$$

und aus (5) und (6) $16a + b + c = 39m$, woraus man unter Berücksichtigung von (1) $17 \leq 39m \leq 162$ erhält. Daraus folgt

$$1 \leq m \leq 4. \tag{8}$$

Da $m > 0$ und ganzzahlig sein muss, ergibt sich aus (6) und (1)

$$11a \leq 26m \leq 11a + 9. \tag{9}$$

Mit Hilfe von (7) und (8) ermittelt man aus (5) und (2) als einzig mögliche Zahlen 234, 468, 741 und 975, da jeder Wert von m in (7) genau einen Wert für a in (8) liefert. Da jede dieser vier Zahlen allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie auch Lösung.

Aufgabe 111011:
Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 W ergibt. Es stehen je ausreichend viele Glühlampen von 40 W, 60 W und 75 W, aber keine anderen, zur Verfügung.

Geben Sie alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der Glühlampen von 40, 60 bzw. 75 Watt der Reihe nach mit x, y, z, so erfüllt eine Ausstattung genau dann die Voraussetzungen der Aufgaben, wenn x, y, z natürliche Zahlen mit

$$x + y + z = 32 \quad (1) \qquad ; \qquad 40x + 60y + 75z = 1800 \quad (2)$$

sind. Angenommen x,y,z seien drei solche natürliche Zahlen. Aus (1) und (2) folgt dann

$$4y + 7z = 104 \quad (3) \qquad \text{also} \qquad z = \frac{104 - 4y}{7} \leq \frac{104}{7} = 14 + \frac{6}{7}$$

woraus sich $0 \leq z \leq 14 \quad (4)$ ergibt. Nach (3) ist ferner

$$y = 26 - \frac{7z}{4} \tag{5}$$

Da y eine natürliche Zahl ist, muss also $7z$ und somit auch z durch 4 teilbar sein.

Hiernach ergibt sich aus (4), dass für z nur die Werte 0, 4, 8, 12 möglich sind. Aus (5) erhält man als zugehörige Werte für y der Reihe nach die Zahlen 26, 19, 12, 5 und aus (1) als zugehörige Werte für x die Zahlen 6, 9, 12, 15. Daher können höchstens die Ausstattungen mit folgenden Anzahlen der drei Glühlampensorten die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
6	26	0	9	19	4	12	12	8	15	5	12

Durch Einsetzen zeigt man, dass in allen vier Fällen die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind.

Aufgabe 131013:
Jemand möchte als Rechenaufgabe stellen, aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer angegebenen natürlichen Zahl n genau eine angegebene natürliche Zahl x wegzulassen und die übrigen $n-1$ Zahlen zu addieren. Er möchte die Zahlen n und x so angeben, dass als Ergebnis dieser Rechenaufgabe die Summe 448 entsteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, x und n in dieser Weise anzugeben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{n(n+1)}{2}$. Daher sind für natürliche Zahlen n, x genau dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, wenn

$$\frac{n(n+1)}{2} = 448 + x \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 0 \leq x \leq n \quad (2)$$

ist. Gelten (1), (2), so folgt $448 < \frac{n^2+n}{2} \leq 448 + n$, also

$$896 < n^2 + n \leq 896 + 2n$$

Aus $896 < n^2 + n$ ergibt sich $n > 29$; denn wäre $0 < n \leq 29$, so wäre $n(n+1) \leq 29 \cdot 30 = 870 < 896$. Aus $n^2 + n \leq 896 + 2n$ ergibt sich $n(n-1) \leq 896$ und hieraus $n < 31$; denn wäre $n \geq 31$, so wäre

$$n(n-1) \geq 31 \cdot 30 = 930 > 896$$

Aus beiden Bedingungen für n folgt $n = 30$, hieraus und aus (1)

$$x = \frac{30 \cdot 31}{2} - 448 = 17$$

Daher können nur $n = 30$, $x = 17$ den Forderungen der Aufgabe genügen. Wegen $\frac{30 \cdot 31}{2} = 448 + 17$ und $0 < 17 \leq 30$ erfüllen sie sie tatsächlich.

Aufgabe 141011:
Jemand wählt eine natürliche Zahl n, addiert die natürlichen Zahlen von 1 bis n zueinander und erhält als Summe $1 + 2 + ... + n$ eine dreistellige Zahl, die (wie z. B. 777) aus lauter gleichen Ziffern besteht.

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine Zahl n zu wählen, für die das zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, n sei eine natürliche Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt einerseits

$$1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

andererseits lässt sich die laut Aufgabe entstehende Summe in der Form $111x$ schreiben, wobei x eine natürliche Zahl ist, für die $1 \leq x \leq 9$ gilt. Daher ist

$$n(n+1)=2\cdot 111x=2\cdot 3\cdot 37x$$

Da 37 Primzahl ist, folgt, dass entweder n oder $n+1$ durch 37 teilbar ist; Ferner gilt, da die Summe $1+2+...+n$ dreistellig sein soll, $n(n+1)<2000$, also erst recht $n^2<2000$ und daher $n<45$. Folglich kann n nur eine der Zahlen 36, 37 sein.

Wegen $\frac{36\cdot 37}{2}$ und $\frac{37\cdot 38}{2}=703$ erhält man somit genau dann eine dreistellige Zahl mit drei gleichen Ziffern als Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, wenn $n=36$ ist.

Aufgabe 191012:
Es seien b und c von Null verschiedene natürliche Zahlen und a eine Primzahl. Ferner gelte für sie die Gleichung $a^2+b^2=c^2$.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $a<b$ und $b+1=c$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegbar, von denen der erste wegen $b>0$ kleiner als der zweite und dieser, also auch der erste, positiv ist.

Da a Primzahl ist, ist dies nur möglich mit $c-b=1$ und $c+b=a^2$.

Mit (1) ist bereits die Behauptung $b+1=c$ bewiesen. Aus $a^2=c^2-b^2$ und $b>0$ folgt ferner $a^2<c^2$; hieraus folgt wegen $c>0$ auch $a<c$, also $a\leq c-1=b$. Wäre nun $a=b$, so ergäbe sich $c^2=a^2+a^2=2a^2$, also wäre die Quadratzahl c^2 das Produkt der drei Primfaktoren $2,a,a$. Da dies unmöglich ist, folgt auch $a<b$.

Aufgabe 291011:
Geben Sie mindestens ein Beispiel für 1989 natürliche Zahlen an, deren Summe gleich ihrem Produkt ist! Bestätigen Sie durch Berechnung der Summe und des Produktes die geforderte Gleichung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Einige Beispiele und die zugehörigen Bestätigungen lauten:

$$\begin{aligned}
1989{,}2,\underbrace{1,\dots,1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 1989+2+1987\cdot 1=3978=1989\cdot 2\cdot 1^{1987}\\
995{,}3,\underbrace{1,\dots,1}_{1987} &\quad \text{wegen} \quad 995+3+1987\cdot 1=2985=995\cdot 3\cdot 1^{1987}\\
105{,}5{,}4,\underbrace{1,\dots,1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 105+5+4+1986\cdot 1=2100=105\cdot 5\cdot 4\cdot 1^{1986}\\
15{,}15{,}9,\underbrace{1,\dots,1}_{1986} &\quad \text{wegen} \quad 15+15+9+1986\cdot 1=2025=15\cdot 15\cdot 9\cdot 1^{1986}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Zum Auffinden der ersten beiden Beispiele führt z. B. der Ansatz $a+b+1987=ab$, mit $b=2$ also $a+1989=2a$ und mit $b=3$ also $a+1990=3a$.

Zum Auffinden der letzten beiden Beispiele führt nach dem Ansatz $a+b+c+1986=abc$ die Suche nach zwei Zahlen b,c, für die $b+c+1986$ durch $bc-1$ teilbar ist.

Durch Probieren (z. B. mit einem Rechner) findet man mit $b=5, c=4$ dann a als Lösung der Gleichung $a+1995=20a$, mit $b=15, c=9$ dann a als Lösung der Gleichung $a+2010=135a$.

Aufgabe 301011:

a) Beweisen Sie, dass es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!

b) Beweisen Sie, dass es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!

Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a,b,c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2+b^2=c^2$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ein Beispiel für unendliche viele pythagoreische Zahlentripel bilden die Tripel $(3n,4n,5n)$ für $n=$ 1,2,3,...; denn für sie gilt

$$(3n)^2+(4n)^2=9n^2+16n^2=25n^2=(5n)^2$$

b) Ein Beispiel für zwei pythagoreische Zahlentripel (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) mit $a_1<b_1<c_1$, $a_2<b_2<c_2$ und $\frac{c_1}{a_1}\neq\frac{c_2}{a_2}$ bilden (3,4,5) und (5,12,13).

Aufgabe 321012:
Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0<a\leq b<c$, für die die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ gilt, nennt man ein pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muss $a\neq 2$ sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem pythagoreischen Zahlentripel gilt

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)\cdot(c+b) \tag{1}$$

Wäre $a=2$, so wäre (1) für die ganzen Zahlen $c-b$ und $c+b$, die wegen $0<b<c$ positiv sind und $c-b<c+b$ erfüllen, nur mit $c-b=1$ und $c+b=4$ möglich. Daraus folgte $c=\frac{5}{2}$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von c. Also muss $a\neq 2$ sein.

Aufgabe 331013:
Für welche ganzen, nicht negativen Zahlen t ist $z=\sqrt{t+\sqrt{t}}$ eine rationale Zahl, für welche nicht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Für $t=0$ ist $z=\sqrt{0+\sqrt{0}}=0$, also eine rationale Zahl.

II Angenommen, für eine ganze Zahl $t>0$ wäre z rational. Aus dieser Annahme folgt, dass auch die Zahlen $z^2=t+\sqrt{t}$ und somit $\sqrt{t}=z^2-t$ rationale wären.

Also wäre $t=m^2$ mit einer positiven ganzen Zahl m. Mit dieser wäre demnach $z=\sqrt{m^2+m}$, woraus ebenso folgt, dass auch m^2+m eine Quadratzahl sein müsste.

Wegen $m^2 < m^2+m < (m+1)^2$ liegt aber m^2+m zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und ist somit selbst keine Quadratzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, z wäre rational, falsch war; d. h., es ist bewiesen: Für alle ganzen Zahlen $t > 0$ ist z keine rationale Zahl.

II Runde 2

Aufgabe 051024:
Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen für Fahrgäste so verteilt werden, dass kein Platz leer bleibt.
Wieviel Autobusse, jeder Art sind zu bestellen?

Lösung von Kitaktus:
Es gilt

$$20 \cdot 41 + 6 \cdot 29 + 1 \cdot 13 = 820 + 174 + 13 = 1007$$

Es gibt daher eine Lösung, die $20 + 6 + 1 = 27$ Busse benutzt.
Angenommen, es gäbe eine (nichtnegative ganzzahlige) Lösung mit a Bussen mit je 41 Plätzen, b Bussen mit je 29 Plätzen und c Bussen mit je 13 Plätzen für die

$$a + b + c = n \quad \text{(mit ganzzahligem } n \leq 26) \tag{1}$$

$$41a + 29b + 13c = 1007 \tag{2}$$

gilt.
$41 \cdot (1) - (2)$ ergibt die Gleichung $12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \quad (3)$.
Für $n = 26$ vereinfacht sich (3) zu:

$$12b + 28c = 41 \cdot 26 - 1007 = 59 \tag{4}$$

Dabei ist die linke Seite gerade, die rechte aber nicht. Eine solche Lösung kann es also nicht geben.

Für $n \leq 24$ ergibt sich aus (3) die Ungleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot n - 1007 \leq 41 \cdot 24 - 1007 = -23 \tag{5}$$

Hier gibt es offenbar keine nichtnegativen Lösungen.
Es bleibt also nur noch der Fall $n = 25$. Hier ergibt sich aus (3) die Gleichung

$$12b + 28c = 41 \cdot 25 - 1007 = 18 \tag{6}$$

Da a, b und c nichtnegative ganze Zahlen sind, muss $c = 0$ sein, da sonst die linke Seite von (6) bereits zu groß wäre.
Es bleibt also die Gleichung $12b = 18$, die aber keine ganzzahlige Lösung hat.
In allen Fällen führte die obige Annahme zum Widerspruch. Es gibt also keine Lösung, die mit weniger als 27 Bussen auskommt.
Die oben angegebene Lösung mit 27 Bussen benutzt also die kleinstmöglich Anzahl an Bussen.

Aufgabe 141022:
Geben Sie alle (geordneten) Tripel (x, y, z) an, die die folgenden Bedingungen erfüllen!
(1) $x - y = 96$,
(2) $y - z = 96$,
(3) x, y und z sind Quadrate natürlicher Zahlen.

Lösung von weird:
Wir bestimmen zunächst alle Paare $(u,v) \in \mathbb{N}^2$, für welche $u^2 - v^2 = 96$ ist. Wegen $(u+v)(u-v) = 96$ müssen wir dazu einfach alle Zerlegungen $96 = a \cdot b$ von 96 mit $a > b > 0$ durchgehen, wobei die beiden komplementären Teiler a,b von 96 auch noch die gleiche Parität haben müssen. Damit ist dann garantiert, dass

$$u := \frac{a+b}{2},\ v := \frac{a-b}{2}$$

ein Paar $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ mit obigen Eigenschaften ist. Dies führt auf die folgenden 4 Fälle:

- $(a,b) = (48,2) \mapsto (u,v) = (25,23)$; • $(a,b) = (24,4) \mapsto (u,v) = (14,10)$
- $(a,b) = (16,6) \mapsto (u,v) = (11,5)$; • $(a,b) = (12,8) \mapsto (u,v) = (10,2)$

Die einzige Möglichkeit, die Gleichungen (1)-(3) in der Aufgabenstellung für $x,y,z \in \mathbb{N}$ zu erfüllen, besteht somit darin $x = 14^2 = 196$, $y = 10^2 = 100$, $z = 2^2 = 4$ zu setzen.

Aufgabe 201023:
Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen so existiert, dass gilt:

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

Lösung von Nuramon:
Sei (a,b,c) ein Tripel natürlicher Zahlen, so dass für das gesuchte maximale n gilt

$$(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$$

Dann muss $\min\{a,b,c\} = 0$ sein, denn sonst gäbe es zu $n' := n+1$ das Tripel $(a',b',c') = (a-1,b-1,c-1) \in \mathbb{N}^3$ mit $(a'+n')(b'+n')(c'+n') = 1980$.

Also ist n ein Teiler von $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Es gilt $n \geq 11$, denn $(0+11)(1+11)(4+11) = 1980$.
Angenommen es wäre $n \geq 12$. Da 12^2 kein Teiler von 1980 ist, wäre dann

$$1980 = (a+n)(b+n)(c+n) \geq 12 \cdot 13 \cdot 13 = 2028$$

Somit muss $n = 11$ gelten.
Sei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$. Insbesondere ist dann $a = 0$, also $(b+11)(c+11) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. Da 11 kein Teiler von 180 ist, müssen $b,c \geq 1$ sein.
Die einzigen Teiler t von 180 mit der Eigenschaft, dass $t \geq 12$ und $\frac{180}{t} \geq 12$ ist, sind 12 und 15 (13 und 14 sind keine Teiler von 180 und für $t > 15$ ist $\frac{180}{t} < 12$).
Also muss $b + 11 = 12$ und $c + 11 = 15$ gelten.

Demnach ist (a,b,c) genau dann ein Tripel mit $(a+n)(b+n)(c+n) = 1980$, wenn (a,b,c) eine der sechs Permutationen von $(0,1,4)$ ist.

Aufgabe 211023:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x,y, für die $x^2 - y^2 = 1981$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen hat genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn es $(x-y)(x+y) = l98l$ (1) erfüllt.

Wegen der Primzerlegung $1981 = 7 \cdot 283$ gibt es für (1) in ganzen Zahlen $x-y$ und $x+y$ genau die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten. Durch Addieren bzw. Subtrahieren und jeweils anschließendes Halbieren erhält man, dass nur die anschließend angegebenen Werte von x und y die genannten Zahlen $x-y$ bzw. $x+y$ ergeben können; eine Probe zeigt jeweils, dass sie in der Tat diese Ergebnisse liefern.

$x-y$	$x+y$	x	y
1	1981	991	990
-1	-1981	-991	-990
1981	1	991	-990
-1981	-1	-991	990
7	283	145	138
-7	-283	-145	-138
283	7	145	-138
-283	-7	-145	138

Daher haben genau die Paare $(991; 990)$, $(-991; -990)$, $(991; -990)$, $(-991; 990)$, $(145; 138)$, $(-145; -138)$, $(-145; 138)$, $(145; -138)$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 221021:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(x; y)$ ganzer Zahlen die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllt, so gilt $x(2x^2 + y) = 7$. Da x und $2x^2 + y$ ganze Zahlen sind und 7 eine Primzahl ist, folgt daraus

(1) entweder $x = 1$ und $2x^2 + y = 7$
(2) oder $x = 7$ und $2x^2 + y = 1$
(3) oder $x = -1$ und $2x^2 + y = -7$
(4) oder $x = -7$ und $2x^2 + y = -1$

Aus (1) folgt $y = 5$; aus 82) folgt $y = -97$; aus (3) folgt $y = -9$; aus (4) folgt $y = -99$.
Also können höchstens $(1; 5)$, $(7; -97)$, $(-1; -9)$, $(-7; -99)$ Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen sein, die die Gleichung erfüllen.
Die Probe bestätigt, dass genau diese vier Paare die geforderten Eigenschaften haben.

Aufgabe 261021:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x und y, für die

$$3x^2 + 3y^2 - 18x + 12y + 27 = 0 \qquad (1)$$

gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Mittel quadratischer Ergänzung wird aus (1)

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \qquad (2)$$

Da x, y ganze Zahlen sind, müssen $(x-3)$, $(y+2)$ ebenfalls ganzzahlig sein. Außerdem sind bei Summanden von (2) garantiert > 0. 4 lässt sich als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen durch $4 = 0+4 = 4+0$ darstellen. Daraus ergeben sich zwei Fälle.

1. Fall: $(x-3)^2 = 0$ und $(y+2)^2 = 4$
Das ergibt $x = 3$ und $y + 2 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(3; 0)$ und $(3; -4)$.

2. Fall: $(x-3)^2 = 4$ und $(y+2)^2 = 0$

Das ergibt $y = -2$ und $x - 3 = \pm 2$ und somit für (x, y) die Lösungspaare $(1; -2)$ und $(5; -2)$.

Ein Probe bestätigt die vier gefundenen Paare als Lösungen.

Aufgabe 301022:
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!
Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.

Lösung von cyrix:
Es sei eine natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist. Wegen $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ ist $n > 1$. Damit hat es eine eindeutige Primfaktorzerlegung mit mindestens einem Primteiler.
Auch mindestens eine Primzahl p besitzt in der Primfaktorzerlegung von n einen ungeraden Exponenten u (sonst könnte man die Zahl, deren Primfaktorzerlegung aus der von n dadurch entsteht, indem man jeden Exponenten halbiert, k nennen und es würde $n = k^2$ gelten, sodass n im Widerspruch zur Aufgabe eine Quadratzahl wäre). Also gilt $p^u \mid n$, aber $p^{u+1} \not| n$.

Wäre $\sqrt{n} > 0$ rational, so gäbe es teilerfremde positive ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ bzw. $n^2 = \frac{a^2}{b^2}$ und damit $a^2 = n \cdot b^2$.

Es ist $p \mid n$, also auch $p \mid n \cdot b^2$ und damit $p \mid a^2$. Da p eine Primzahl ist, muss es dann auch Teiler von a sein, sodass es (wie jede Primzahl) mit geradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von a^2, also auch der von b^2 vorkommt.
In der Primfaktorzerlegung von n ist es aber nur mit ungeradem Exponenten enthalten, sodass es auch mit ungeradem Exponenten in der Primfaktorzerlegung von b^2 enthalten sein muss, was ein Widerspruch ist, da auch dort alle Primfaktoren einen geraden Exponenten besitzen, $\square$.

Aufgabe 311024:
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen t, für die $\sqrt{t + 24\sqrt{t}}$ rational ist!

Lösung von cyrix:
Es sei $r^2 = t + 24\sqrt{t}$ mit einer rationalen Zahl r. Dann ist auch $\sqrt{t} = \frac{r^2 - t}{24}$ eine rationale Zahl, da t eine natürliche Zahl ist. Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl t ist aber nur genau dann rational, wenn diese eine Quadratzahl ist, also eine natürliche Zahl n mit $t = n^2$ existiert.

Dann ist $r^2 = n^2 + 24n$ sogar eine natürliche Zahl und damit auch r. Es ist damit $r^2 + 144 = n^2 + 2 \cdot n \cdot 12 + 12^2 = (n + 12)^2$, also mit $m := n + 12 > 0$ schließlich $144 = m^2 - r^2 = (m + r)(m - r)$. Damit sind (wegen $m > 0$ und $r > 0$, also $m + r > 0$ und damit auch $m - r > 0$) $m + r$ und $m - r$ positiver Teiler und Gegenteiler von 144.

Wegen $r > 0$ ist dabei $m + r$ der größere und $m - r$ der kleinere Teiler und wegen $(m + r) - (m - r) = 2r$ unterscheiden sich die beiden Teiler um ein Vielfaches von 2, sodass, da 144 durch 2 teilbar ist, also beide Faktoren durch 2 teilbar sein müssen. Da 144 genau die Zahlen 2, 4, 6 und 8 als gerade Teiler besitzt, die kleiner als $\sqrt{144} = 12$ sind, ergeben sich also folgende Lösungen:

- Für $m - r = 2$ ist $m + r = 72$, also $r = 35$, $m = 37$, $n = m - 12 = 25$ und $t = n^2 = 625$. Tatsächlich ist $\sqrt{625 + 24 \cdot \sqrt{625}} = \sqrt{625 + 24 \cdot 25} = \sqrt{1225} = 35$ rational.
- Für $m - r = 4$ ist $m + r = 36$, also $r = 16$, $m = 20$, $n = m - 12 = 8$ und $t = n^2 = 64$. Tatsächlich ist $\sqrt{64 + 24 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{64 + 24 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$ rational.

- Für $m-r=6$ ist $m+r=24$, also $r=9$, $m=15$, $n=m-12=3$ und $t=n^2=9$. Tatsächlich ist $\sqrt{9+24\sqrt{9}}=\sqrt{9+24\cdot 3}=\sqrt{81}=9$ rational.
- Und für $m-r=8$ ist $m+r=18$, also $r=5$, $m=13$ und $n=t=1$. Tatsächlich ist $\sqrt{1+24\cdot\sqrt{1}}=\sqrt{25}=5$.

Damit ergeben sich genau vier Lösungen $t\in\{1,9,64,625\}$.

Aufgabe 331022:
Man beweise, dass es keine natürliche Zahl n gibt, für die $121\cdot n-3$ das Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wäre.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen an, es gäbe eine natürliche Zahl m, sodass $121\cdot n-3=m\cdot(m+1)=m^2+m$ gilt.
Dann wäre $4\cdot(121\cdot n-3)+1=4\cdot(m^2+m)+1=4m^2+4m+1=(2m+1)^2$ eine Quadratzahl. Es ist jedoch $4\cdot(121\cdot n-3)+1=4\cdot 11^2\cdot n-11$ durch 11, aber nicht 11^2 teilbar, also keine Quadratzahl. Damit war die Annahme der Existenz einer solchen Zahl m falsch und die Behauptung ist bewiesen, $\square$.

III Runde 3

Aufgabe 051034:
Beweisen Sie, das $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $\log_2 6$ wäre eine rationale Zahl. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q>0$, so dass

$$\log_2 6=\frac{p}{q}$$

gilt. Hieraus folgt nach der Definition des Logarithmus $2^{\frac{p}{q}}=6$. Diese Aussage ist äquivalent mit

$$2^p=6^q=(2\cdot 3)^q$$

Also müsste $2^{p-q}=3^q$ gelten. Es sei $p-q=n$. Dann ist n ganz, und es müsste $2^n=3^q$ gelten, woraus wegen $q>0$ folgt, dass $n>0$ sein muss. Daraus ergäbe sich $2|3^q$, was nicht wahr ist.
Also ist $\log_2 6$ keine rationale Zahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist $\log_2 6>0$, da $6>2$ gilt. Wäre es eine rationale Zahl, gäbe es also positive ganze Zahlen p, q mit $\log_2 6=\frac{p}{q}$ bzw. $2^{\frac{p}{q}}=6$ und damit

$$2^p=6^q=2^q\cdot 3^q.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung müssen aber auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens alle Primfaktoren jeweils gleichhäufig vorkommen, woraus $q=0$ folgt; im Widerspruch zur Annahme $q>0$. Also muss $\log_2 6$ irrational sein.

Aufgabe 071034:
Gesucht sind alle diejenigen Tripel natürlicher Zahlen a_i $(i=1,2,3)$, die die Gleichung

$$\sqrt{2a_1^2-2a_2^2}=a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1\leq a_i\leq 10$ gilt!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist offenbar äquivalent zu $2(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = a_3^2$.
Da 2 eine Primzahl ist, folgt aus $2|a_3^2$ direkt $2|a_3$, sodass die rechte Seite der Gleichung durch 4 teilbar ist. Also muss auch $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)$ gerade sein, und damit mindestens einer dieser beiden Faktoren. Da nur beide zugleich (oder keiner von beiden) gerade sein können, ist die rechte Seite der Gleichung also sogar durch 8 teilbar, sodass aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung a_3 zumindest durch 4 teilbar sein muss.
Es verbleiben also zwei Fälle: $a_3 = 4$ und $a_3 = 8$.

1. Fall: $a_3 = 4$.
Dann ist also $(a_1-a_2)(a_1+a_2) = 8$ und, da beide Faktoren gerade sind, wegen $a_1+a_2 > 0$ auch $a_1-a_2 > 0$ und schließlich $a_1 + a_2 > a_1 - a_2$, also $a_1 + a_2 = 4$ sowie $a_1 - a_2 = 2$. Es ergibt sich als Lösungstripel $(a_1,a_2,a_3) = (3,1,4)$, was durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auch bestätigt wird.

2. Fall: $a_3 = 8$.
Dann ist $(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 32$. Nun ergeben sich folgende mögliche Zerlegungen in zwei positive und gerade Faktoren:
*) $a_1 + a_2 = 16$ und $a_1 - a_2 = 2$, was auf $a_1 = 9$ und $a_2 = 7$ führt.
*) $a_1 + a_2 = 8$ und $a_1 - a_2 = 4$, was dan auf $a_1 = 6$ und $a_2 = 2$ führt.
Beide mögliche Lösungen werden durch die Probe bestätigt.

Zusammenfassung: Im zu betrachtenden Bereich gibt es genau drei Lösungstripel, nämlich (3,1,4), (6,2,8) und (9,7,8).

Aufgabe 081032:
Die fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 10, 11, 12, 13 und 14 haben die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dieser Zahlen gleich der Summe der beiden letzten Zahlen ist. Es gilt also

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

a) Gibt es noch andere fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft?
b) Gegeben sei eine positive ganze Zahl n.
Ermitteln Sie alle Zusammenstellungen von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist:
1) für $n = 3$.
2) für beliebiges positives ganzes n.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
b) Angenommen, es gäbe $2n + 1$ Zahlen der gesuchten Art. Bezeichnen wir die $(n + 1)$-te dieser Zahlen mit x, so lauten sie $x - n, x - n + 1, ..., x, ..., x + n$ und erfüllen die Gleichung

$$(x - n)^2 + ... + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + ... + (x + n)^2 \tag{1}$$

Wegen $(x + k)^2 - (x - k)^2 = 4kx$ $(k = 1, ..., n)$ folgt aus Gleichung (1)

$$x^2 = 4(1 + ... + n)x = 4\frac{n(n + 1)}{2}x \qquad \text{also} \qquad x(x - 2n(n + 1)) = 0 \tag{2}$$

Daher muss $x = 0$ oder $x = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$ sein, d. h., es kommen nur die Zusammenstellungen

$$-n, - n + 1, ...0, ..., n \tag{3}$$

$$2n^2 + n, 2n^2 + n + 1, ..., 2n^2 + 2n, ...2n^2 + 3n \tag{4}$$

als Lösungen in Frage.

In der Tat erfüllen (3) und (4) die Bedingungen der Aufgabe; denn sowohl für $x = 0$ als auch für $x = 2n(n+1)$ ist (2) erfüllt, woraus man umgekehrt wie oben auf (1) schließen kann.

a) Setzt man in b) speziell $n = 2$, so entsteht a). Man erhält hierfür aus (4) die bereits genannten Zahlen $10, ..., 14$, aus (3) die somit einzige weitere Lösung $-2, ..., 2$.

Aufgabe 101031:
a) Beweisen Sie folgenden Satz!
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.
b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!

Anmerkung: Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$.
Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, dass man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder dass man x mit y vertauscht oder dass man beides durchführt.

Lösung von cyrix:
a) Sei k eine ganze Zahl. Dann ist

$$k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + (k-1)^2}{4} = \frac{k^2 - 2k + 1 + 4k}{2^2} = \frac{k^2 + 2k + 1}{2^2} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$

b) Ist $k = n^2$ eine Quadratzahl, so erhalten wir

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

bzw. nach Multiplikation mit 4 die Gleichung

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

sodass man mit $(x,y,z) = (2n,n^2 - 1,n^2 + 1)$ ein pythagoräisches Zahlentripel erhält.
Setzt man hierin für n die Zahlen 3; 4; 5 und 6 ein, erhält man die paarweise voneinander verschiedenen pythagoräischen Tripel $(6; 8; 10)$, $(8; 15; 17)$, $(10; 24; 26)$ und $(12; 35; 37)$.

Bemerkung: Die Definition der Verschiedenheit ist mit seiner Einschränkung auf natürliche „Streckungsfaktoren" ungünstig, da dann z. B. auch die Tripel $(6; 8; 10)$ und $(9; 12; 15)$ nach dieser Definition voneinander verschieden wären, obwohl beide nicht vom Tripel $(3; 4; 5)$ verschieden sind.

Aufgabe 131032:
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $x \cdot (2x^2 + y) = 7$, sodass x ein ganzzahliger Teiler von 7 ist und damit nur die folgenden vier Fälle zu möglich sind:

1. Fall: $x = 1$. Dann folgt $y = \frac{7}{1} - 2 \cdot 1^2 = 5$.
2. Fall: $x = -1$. Dann folgt $y = \frac{7}{-1} - 2 \cdot (-1)^2 = -9$.
3. Fall: $x = 7$. Dann folgt $y = \frac{7}{7} - 2 \cdot 7^2 = -97$.
4. Fall: $x = -7$. Dann folgt $y = \frac{7}{-7} - 2 \cdot (-7)^2 = -99$.

Die Proben bestätigen jeweils die Ergebnisse, sodass wir vier Lösungspaare erhalten, nämlich $(x,y) \in \{(-7,-99),(-1,-9),(1,5),(7,-97)\}$.

Aufgabe 201034:
Ermitteln Sie alle Tripel (a,h,x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!
Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

Lösung von MontyPythagoras:
Das Volumen ist

$$x = \frac{1}{3}a^2h$$

Die Oberfläche ist

$$x = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}\right) = a^2 + a\sqrt{a^2+4h^2}$$

Somit muss gelten:

$$\frac{1}{3}a^2h = a^2 + a\sqrt{a^2+4h^2}$$

Dabei müssen beide Seiten der Gleichung ganzzahlig sein. Man kann durch a teilen, und auch dann noch müssen beide Seiten ganzzahlig sein:

$$\frac{1}{3}ah = a + \sqrt{a^2+4h^2}$$

(Begründung: a^2h muss durch 3 teilbar sein. Entweder a ist ein Vielfaches von 3, dann ist auch $\frac{1}{3}ah$ immer noch ganzzahlig, oder h ist durch drei teilbar, dann ist $\frac{1}{3}ah$ auf jeden Fall auch ganzzahlig). Wir lösen zunächst die Gleichung nach a auf:

$$\left(\frac{1}{3}h - 1\right)a = \sqrt{a^2+4h^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{9}h^2a^2 - \frac{2}{3}ha^2 + a^2 = a^2 + 4h^2$$

$$a^2 = \frac{4h}{\frac{1}{9}h - \frac{2}{3}} = \frac{36h}{h-6} \qquad \rightarrow \qquad a = 6\sqrt{\frac{h}{h-6}}$$

Somit muss $\frac{h}{h-6}$ eine Quadratzahl sein. Offensichtlich muss $h > 6$ gelten, aber andererseits auch

$$\frac{h}{h-6} \geq 4$$

denn $\frac{h}{h-6} = 1$ ist nicht möglich. Daraus folgt: $h \geq 4h - 24$ und $h \leq 8$.
Daher kommen für h nur die Zahlen 7 und 8 in Frage, wobei für $h = 7$ keine Quadratzahl vorliegt. Somit gilt $h = 8$, und durch Einsetzen erhält man $a = 12$ und $x = 384$. Das einzige Tripel, was die Bedingungen erfüllt, lautet also $(a;h;x) = (12;8;384)$.

Aufgabe 211031:
Ermitteln Sie alle Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften!
(1) Es gilt $0 < a \leq b \leq c$.
(2) In einem Quader mit der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm beträgt die Summe aller Kantenlängen ebenso viele Zentimeter, wie das Volumen Kubikzentimeter beträgt.

Lösung von cyrix:
(2) bedeutet, dass die Gleichung $4(a+b+c) = abc$ zu lösen ist. Wegen (1) ist $abc = 4(a+b+c) \leq 12c$, also $ab \leq 12$ und damit $a \leq 3$.

Fall 1: $a = 1$. Dann ist die Gleichung $bc = 4(1+b+c)$ mit $b \leq 12$ zu lösen.
Fall 1.1: $b = 4$. Dann erhält man $4c = 4(5+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 1.2: $b \neq 4$. Es gilt $c = \frac{4(b+1)}{b-4}$. Wegen $\{ggT(b+1,b-4) = \text{ggT}(b-4,5) \in \{1,5\}$ kann c höchstens dann eine natürliche Zahl sein, wenn $b-4$ ein Teiler von $4 \cdot 5 = 20$ ist. Tatsächlich liefern die verbleibenden Möglichkeiten $8 = 12-4 \geq b-4 = 1,2,4,5$ die Lösungen $(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9)$ und $(1,9,8)$, wobei die letzte wegen $c < b$ entfällt.

Fall 2: $a = 2$. Dann ist die Gleichung $2bc = 4(2+b+c)$ bzw. $bc = 2(2+b+c)$ mit $2 \leq b \leq 6$ zu lösen.
Fall 2.1: $b = 2$. Dann ist $2c = 2(4+c)$, was keine Lösung besitzt.
Fall 2.2: $b \neq 2$. Man erhält $c = \frac{2(b+2)}{b-2} = 2 + \frac{8}{b-2}$, was nur für $b-2|8$ natürliche Zahlen ergibt. Wegen $4 = 6-2 \geq b-2$ erhält man für $b-2 = 1,2,4$ die Lösungen $(2,3,10), (2,4,6)$ und $(2,6,4)$, wobei die letzte wieder wegen $c < b$ entfällt.

Fall 3: $a = 3$. Dann ist die Gleichung $3bc = 4(3+b+c)$ mit $3 \leq b \leq 4$ zu lösen.
Fall 3.1: $b = 3$. Dann ist $9c = 4(6+c)$ bzw. $5c = 24$, was keine Lösung in natürlichen Zahlen besitzt.
Fall 3.2: $b = 4$. Dann ist $12c = 4(7+c)$ bzw. $3c = 7+c$, also $c = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.
Insgesamt erhalten wir also die folgenden fünf Lösungstripel:

$$L = \{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\} \ .$$

Aufgabe 221031:
Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x,y,z,u,v) aus natürlichen Zahlen, für die

$$0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v \qquad \text{und} \qquad x+y+z+u+v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Lösung von Nuramon:
Es gibt offenbar keine Lösung, in der $x = y = z = u = v$ gilt. Daher ist $5v > x+y+z+u+v = xyzuv$, also $xyzu < 5$. Es bleiben vier Fälle:

1. Fall: $xyzu = 1$.
Das ist nur möglich, wenn $x = y = z = u = 1$. Also müsste $1+1+1+1+v = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot v$ gelten, was unmöglich ist.

2. Fall: $xyzu = 2$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,2)$ und daher $1+1+1+2+v = 2v$, also $v = 5$.

3. Fall: $xyzu = 3$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,1,3)$ und daher $1+1+1+3+v = 3v$, also $v = 3$.

4. Fall: $xyzu = 4$.
Dann ist $(x,y,z,u) = (1,1,2,2)$ oder $(x,y,z,u) = (1,1,1,4)$.

Im ersten Fall folgt aus $1+1+2+2+v = 4v$, dass $v = 2$. Im anderen Fall steht $1+1+1+4+v = 4v$ im Widerspruch zu $v \in \mathbb{N}$.

Insgesamt erhalten wir also, dass (1,1,1,2,5), (1,1,1,3,3) und (1,1,2,2,2) alle gesuchten Quintupel sind.

Aufgabe 221033:
Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Sei

$$r=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

Dann folgt:

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}=r-\sqrt{2}$$

Quadrieren:

$$12+2\sqrt{35}=r^2+2-2r\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{35}=(r^2-10)-2r\sqrt{2}$$

Noch einmal quadrieren:

$$140=r^4-20r^2+100+8r^2-4r(r^2-10)\sqrt{2}$$
$$4r(r^2-10)\sqrt{2}=r^4-12r^2-40$$
$$\sqrt{2}=\frac{r^4-12r^2-40}{4r(r^2-10)}$$

Wenn r eine rationale Zahl wäre, dann wäre die rechte Seite dieser Gleichung eine rationale Zahl. Dann müsste aber auch $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein, was nicht der Fall ist. Aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$, die als bekannt vorausgesetzt wird, folgt somit die Irrationalität von $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

Aufgabe 231034:
Jürgen überlegt: Im Jahre 1983 begann die 23. OJM. Für mich persönlich wird es der 5. Start sein. Unter Verwendung dieser Zahlen bildet Jürgen die Gleichung

$$1983+23\cdot x^2=5\cdot y^2 \qquad (1)$$

Gibt es ganze Zahlen x und y, für die diese Gleichung (1) gilt?

Lösung von cyrix:
Gäbe es solche ganze Zahlen, so müsste die Gleichung auch bei der Betrachtung modulo 8 erfüllt sein.
Da Quadratzahlen bei der Teilung durch 8 nur die Reste 0, 1 oder 4 lassen können, ist die linke Seite der Gleichung $1983+23\cdot x^2\equiv 7+7\cdot x^2 \pmod 8$ in einer der Restklassen 7, 6 oder 3 modulo 8, während die rechte in einer der Restklassen 0, 5 oder 4 modulo 8 liegt.
Es kann also keine Gleichheit modulo 8 und damit auch nicht in den ganzen Zahlen gelten, sodass diese Gleichung keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Aufgabe 251031:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(a;b)$ von ganzen Zahlen a und b, die die Gleichung $a+b=(a-b)^2$ erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (a,v) sei ein Paar von ganzen Zahlen, die die genannte Gleichung erfüllen. Da a und b ganze Zahlen sind, ist auch ihre Differenz eine ganze Zahl g.

Damit gilt $a - b = g$ sowie $a + b = g^2$ und damit

$$a = \frac{1}{2}(g^2 + g) = \frac{1}{2}g(g+1) \qquad ; \qquad b = \frac{1}{2}(g^2 - g) = \frac{1}{2}g(g-1)$$

Also erfüllen höchstens alle Paar

$$\left(\frac{1}{2}g(g+1); \frac{1}{2}g(g-1)\right)$$

mit ganzzahligem m die in der Aufgabe genannte Gleichung. Sie erfüllen diese Gleichung tatsächlich, denn es ist

$$\frac{1}{2}g(g+1) + \frac{1}{2}g(g-1) = g^2 = \left(\frac{1}{2}g(g+1-g+1)\right)^2$$

und sowohl $\frac{1}{2}g(g+1)$ als auch $\frac{1}{2}g(g-1)$ sind ganze Zahlen.

Aufgabe 261034:
Ermitteln Sie unter allen denjenigen Werten, die

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 \qquad (1)$$

für ganzzahlige x und y annehmen kann, den kleinsten Wert z, der eine natürliche Zahl ist!
Geben Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen an, bei denen sich in (1) dieser Wert z ergibt!

Lösung von Steffen Polster:
Umformen von (1) ergibt

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 22 = (x+1)^2 + y^2 - 23$$

Damit z eine natürliche Zahl wird, muss $(x+1)^2 + y^2 - 23 \geq 0$ sein. Die kleinste natürliche Zahl ist 0, d. h. es müsste $(x+1)^2 + y^2 = 23$ sein.
Eine Darstellung der 23 als Summe zweier Quadratzahlen existiert aber nicht, ebenso nicht für 24. Erst die 25 kann als Summe zweier ganzzahliger Quadratzahlen dargestellt werden, d. h. $z = 2$ ist der kleinste Wert, der eine natürliche Zahl ist.
Zur Bestimmung der entsprechenden Paare (x, y) wird die 25 zerlegt

$$(x+1)^2 + y^2 = 25 = 0 + 25 = 25 + 0 = 9 + 16 = 16 + 9$$

Damit sind folgende Möglichkeiten und die daraus resultierenden Paare möglich:

$(x+1)^2$	$x+1$	x_i	y^2	y_i	Paare (x, y)
0	0	-1	25	± 5	$(-1{,}5); (-1, -5)$
25	± 5	$-6; 4$	0	0	$(-6{,}0); (4{,}0)$
9	± 3	$-4; 2$	16	± 4	$(-4, -4); (-4, 4); (2, -4); (2, 4)$
16	± 4	$-5; 3$	9	± 3	$(-5, -3); (-5, 3); (3, -3); (3, 3)$

Damit existieren 12 Paare (x, y) für die z den kleinstmöglichen Wert 2 annehmen kann.

Aufgabe 271034:
Ermitteln Sie alle diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die $x^{2x} = \frac{1}{2}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede positive rationale Zahl x hat seine Darstellung

$$x = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

mit natürlichen Zahlen $p, q > 0$, die zueinander teilerfremd sind. Hierfür ist die geforderte Gleichung der Reihe nach äquivalent mit

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\left(\frac{2p}{q}\right)} = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{q}$$
$$2^q \cdot p^{2p} = q^{2p} \qquad (2)$$

Wegen der Teilerfremdheit von p, q folgt aus (2), dass in der Primfaktorzerlegung von q nur der Primfaktor 2 auftreten kann und in der von p überhaupt kein Primfaktor, d. h., es muss

$$q = 2^m \qquad (3)$$

mit einer natürlichen Zahl m und $p = 1$ (4) gelten. Für diese p,q ist (2) äquivalent mit

$$2^{2^m} = 2^{2m} \quad \text{mit} \qquad 2^m = 2m \qquad (5)$$

Unter den natürlichen Zahlen $m = 0{,}1{,}2$ gilt (5) genau für $m = 1$ und $m = 2$, Vergrößert man m für $m \geq 2$ jeweils um 1, so wird die rechte Seite von (5) um 2 vergrößert, die linke Seite aber verdoppelt, d. h. um 2^m und damit um mindestens 4 vergrößert. Für alle $m \geq 3$ ist somit (5) nicht erfüllt. Demnach ist $m = 1$ oder $m = 2$.

Folglich sind nach (1), (3), (4) diejenigen positiven rationalen Zahlen x, für die die geforderte Gleichung gilt, genau die Zahlen

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 291031:
Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Lösung von Nuramon:
Es sei festgestellt, dass x eine reelle Zahl ist und somit rational oder irrational ist.
Tatsächlich können wir sogar zeigen, dass x irrational ist: Wäre x nämlich rational, so wäre auch

$$((\dots(((x^2-1)^2-2)^2-3)^2-\dots)^2-1988)^2-1989=\sqrt{1990}$$

rational. Da 1990 durch 10 aber nicht durch 100 teilbar ist, ist 1990 keine Quadratzahl und somit ist $\sqrt{1990}$ irrational.

Aufgabe 291036:
a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder −) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm ... \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.
b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (1) gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Man bestätigt durch Nachrechnen

$$\begin{aligned} 1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2 &= 0 \qquad (0)\\ 1^2 &= 1 \qquad (1)\\ -1^2-2^2-3^2+4^2 &= 2 \qquad (2)\\ -1^2+2^2 &= 3 \qquad (3) \end{aligned}$$

sowie für jede natürliche Zahl n

$$(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2 = 2n-4n-6n+8n+1^2-2^2-3^2+4^2 = 4 \qquad (4)$$

Für jede natürliche Zahl k gibt es natürliche Zahlen q,r mit $k=r+4q$ und $r\leq 3$.
Setzt man $m_0=7$, $m_1=1$, $m_2=4$, $m_3=2$, so kann man nach (0), (1), (2) oder (3) die Zahl r in der Form

$$r=\pm 1^2\pm ...\pm m_r^2$$

darstellen. Ist $q=0$, so ist damit k in der geforderten Form (*) dargestellt.
Ist $q>0$, so kann man $n_1=m_r$, $n_2=m_r+4$, ..., $n_q=m_r+4(q-1)$ setzen und dann nach (4), angewandt auf $n=n_1$, $n=n_2$, ..., $n=n_{q-1}$, die Zahl k in der geforderten Form (*) nämlich

$$\begin{aligned} k=r+4q=&\pm 1^2\pm ...\pm m_r^2\\ &+(n_1+1)^2-(n_1+2)^2-(n-1+3)^2+(n_1+4)^2\\ &...\\ &+n_q+1)^2-(n_q+2)^2-(n_q+3)^2+(n_q+4)^2 \end{aligned}$$

darstellen, w. z. b. w.

b) Für jede natürliche Zahl m folgt aus (4), angewandt mit $n=m$ und $n=m+4$

$$(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2-(m+5)^2+(m+6)^2+(m+7)^2-(m+8)^2=4-4=0$$

Zu jeder; nach a) existierenden; Darstellung

$$k=\pm 1^2\pm ...\pm m^2$$

gibt es daher auch die Darstellung

$$k=\pm 1^2\pm ...\pm m^2+(m+1)^2-(m+2)^2-...+(m+7)^2-(m+8)^2$$

Dieses Bilden weiterer Darstellungen der Zahl k kann man beliebig oft fortsetzen. Damit ist auch der in b) verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 311034:
a) Untersuchen Sie, wie viele rationale Zahlen t es insgesamt gibt, die den folgenden drei Bedingungen (1), (2), (3) genügen
(1) Es gilt $t>1$.
(2) Die Zahl $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ ist rational.
(3) In der Darstellung $t=\frac{n}{m}$ als vollständig gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen n,m ist $n=1000$.
b) Lösen Sie dieselbe Aufgabe, wenn in der Bedingung (3) die Gleichung $n=10000$ anstelle von $n=1000$ steht!

Lösung von cyrix:
a) Falls $t,s\in\mathbb{Q}$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{t+\sqrt{t}}=s$ ist, gilt $\sqrt{t}=s^2-t\in\mathbb{Q}$. Also ist t das Quadrat eine rationalen Zahl und in der gekürzten Darstellung $t=\frac{n}{m}$ müssen n,m Quadrate in $\mathbb{N}$ sein. Dieses ist

für $n = 1000$ nicht der Fall. Daher gibt es keine Lösung.

b) Setze $r := \sqrt{t} = \frac{100}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = m$. Aus (1) folgt $q < 100$.
Die Gleichung $\sqrt{t + \sqrt{t}} = s$ ist äquivalent zu $r(r+1) = s^2 \iff 100(100+q) = (qs)^2 \in \mathbb{N}$. Die Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $100+q$ ein Quadrat in $\mathbb{N}$ ist. Daher gilt wegen (1): $q \in \{21,44,69,96\}$. Da eine vollständig gekürzte Lösung gesucht ist, fällt $q = 44$ weg und somit gibt es für t die drei Lösungen $\frac{10000}{21^2}, \frac{10000}{69^2}, \frac{10000}{96^2}$.

Bemerkung:
Ohne die Bedingung (1) gibt es in b) unendlich viele Lösungen $t = \frac{10000}{(a^2-100)^2}$ mit $a \in \mathbb{N}, a > 10$ und $\mathrm{ggT}(a,10) = 1$. Diese ergeben eine alternative Lösung zu Aufgabe 331042.

Aufgabe 321034:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y, z, für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. gelte $0 < x \leq y \leq z$. Dann ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$ und damit $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} > \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, also $x < 4$. Es ist auch $x > 1$, da sonst $x = 1$, also $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x} = 1$ im Widerspruch zur Gleichung aus der Aufgabenstellung gelten würde. Es verbleiben zwei Möglichkeiten für x.

Fall 1: Es ist $x = 2$. Dann ist die folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Wegen $y \leq z$ ist $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, also $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} > \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, sodass $y \leq 6$ folgt. Wegen $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ ist auch $y \geq 4$, da sonst $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$ mit analogem Widerspruch wie oben folgen würde.

Fall 1.1: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$, also $z = 20$.

Fall 1.2: Es ist $y = 5$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, also $z = 10$.

Fall 1.3: Es ist $y = 6$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{9-5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2: Es ist $x = 3$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$. Dann ist wegen $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ auch $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{30} > \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, also $y \leq 4$. Wegen $y \geq x$ ist auch $y \geq 3$.

Fall 2.1: Es ist $y = 3$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7-5}{15} = \frac{2}{15}$, sodass es hier keine Lösung gibt.

Fall 2.2.: Es ist $y = 4$. Dann folgt $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{28-15}{60} = \frac{13}{60}$, sodass es auch hier keine Lösung gibt.

Zusammenfassend erfüllen also genau die Tripel
$(3,4,20), (3,20,4), (4,3,20), (4,20,3), (20,3,4), (20,4,3), (3,5,10), (3,10,5), (5,3,10), (5,10,3), (10,3,5), (10,5,3)$
positiver ganzer Zahlen die Gleichung.

IV Runde 4

Aufgabe 021041:
Bestimmen Sie alle Paare $(x;y)$ der positiven ganzen Zahlen x und y, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$ ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Abschätzung nach unten: $x>0$ und $y>0$; Abschätzung nach oben: $\sqrt{x}=\sqrt{50}-\sqrt{y}<\sqrt{50}$, also $x<50$; analog für y.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50},\ \text{also}\\ x&=50+y-2\sqrt{50y}\\ &=50+y-10\sqrt{2y}.\end{aligned}$$

Damit muss $\sqrt{2y}$ ganzzahlig sein. Dies wird durch $y=2\sqrt{a}^2$ mit $a\in\mathbb{N}$ erreicht. In den obigen Grenzen bedeutet dies:

$$\begin{aligned} y_1&=2\cdot 1^2=\ \ 2\Rightarrow x_1=32; &\qquad y_2&=2\cdot 2^2=\ \ 8\Rightarrow x_2=18;\\ y_3&=2\cdot 3^2=18\Rightarrow x_3=\ \ 8; & y_4&=2\cdot 4^2=32\Rightarrow x_4=\ \ 2.\end{aligned}$$

Die Probe bestätigt alle Lösungen.

Aufgabe 091041:
Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Lösung von Nuramon:
Gesucht sind natürliche Zahlen $a{,}b\in\mathbb{N}$ und $p{,}q{,}r{,}s\in\mathbb{N}$, so dass die Gleichungen

$$a+b+41=p^2 a+b=q^2 a+41=r^2 b+41=s^2$$

erfüllt sind. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt $41=p^2-q^2=(p+q)(p-q)$. Da $p{,}q$ natürliche Zahlen sind, ist die einzige Lösung $p+q=41{,}p-q=1 \iff p=21{,}q=20$ und somit $a+b=400$.
Die beiden letzten Gleichungen ergeben direkt die Abschätzung $r{,}s\geq 7$. Durch Addition dieser erhalten wir $r^2+s^2=a+b+82=482$, woraus $r{,}s\leq 20$ folgt. Die Endziffer einer Quadratzahl kann nur die Werte 0,1,4,5,6,9 annehmen.
Damit die Summe zweier Quadratzahlen die Endziffer 2 hat, sind für $r^2{,}s^2$ nur die Endziffern 1,6 und somit für $r{,}s$ nur die Endziffern 1,4,6,9 möglich. Daher gilt $r{,}s\in\{9{,}11{,}14{,}16{,}19\}$ und man findet, dass $(r{,}s)=(11{,}19)$ oder $(r{,}s)=(19{,}11)$ gelten muss. Dadurch ergeben sich $(a{,}b)=(80{,}320)$ und $(a{,}b)=(320{,}80)$ als einzige Lösungen.

Aufgabe 091046:
Man beweise folgenden Satz!
Wenn in einer quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ die Koeffizienten a,b,c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung keine rationale Lösung.

Lösung von cyrix:
Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Lösung $\frac{p}{q}$ mit ganzzahligen und teilerfremden p und q der quadratischen Gleichung. Einsetzen und multiplizieren mit q^2 liefert dann

$$ap^2+bpq+cq^2=0$$

Wären p und q beide ungerade, dann auch ap^2, bpq und cq^2, da alle drei Koeffizienten nach Aufgabenstellung selbst ungerade sind. Also ist es auch die Summe dieser drei Produkte, was ein Widerspruch darstellt, da natürlich 0 gerade ist.

Wäre dagegen p gerade und q ungerade, so ist wieder cq^2 ungerade, aber ap^2 und bpq beide gerade, sodass die Summe wieder eine ungerade Zahl und damit nicht 0 ergibt. Widerspruch. Der analoge Widerspruch ergibt sich auch, wenn q gerade und p ungerade ist.
Und wären p und q beide gerade, so wären sie nicht mehr teilerfremd.
Also ergibt sich in jedem Fall ein Widerspruch zur Annahme der Existenz einer rationalen Lösung, sodass es keine rationale Lösung geben kann, $\Box$.

Aufgabe 131043B:
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x;y)$, die die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllen!

Lösung von cyrix:
Ist $y = 0$, dann $(x+2)^4 = x^4$, also $|x+2| = |x|$. Da $x+2 \neq x$ gilt, muss dann $x+2 = -x$ und also $x = -1$ sein. Tatsächlich bestätigt die Probe das Lösungspaar $(-1{,}0)$.
Sei ab nun $y \neq 0$.
Es ist

$$y^3 = (x+2)^4 - x^4 = ((x+2)^2 + x^2) \cdot ((x+2)^2 - x^2) = (2x^2 + 4x + 4) \cdot (4x+4) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot 4 \cdot (x+1)$$

Also ist y^3 durch 8 und damit y durch 2 teilbar. Sei $t \neq 0$ die ganze Zahl mit $y = 2t$. Dann geht die Gleichung über in $t^3 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x+1)$. Insbesondere sind mit $t \neq 0$ auch beide Faktoren ungleich Null. Damit besitzen diese Zahlen alle bis auf die Reihenfolge eindeutige Primfaktorzerlegungen. (Für negative Zahlen sei dies die Primfaktorzerlegung ihres Betrags multipliziert mit (-1).)

Wegen $x^2 + 2x + 2 = (x+1) \cdot (x+1) + 1$ sind die beiden Faktoren teilerfremd. Sei nun p ein Primteiler von t. Dann ist diese auch Teiler von genau einem der beiden Faktoren $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$. Wenn p in der Primfaktorzerlegung von $t \neq 0$ mit der Vielfachheit a vorkommt (d. h. $p^a | t$, aber $p^{a+1} \nmid t$), dann in t^3 mit der Vielfachheit $3a$. Da nur einer der beiden Faktoren $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$ durch p teilbar ist, muss also in der Primfaktorzerlegung dieses Faktors dann p auch in der gleichen Vielfachheit $3a$ enthalten sein.

Da dies für jeden Primteiler von t und damit $t^3 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x+1)$ gilt, müssen also aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegungen alle in den Primfaktorzerlegungen von $x^2 + 2x + 2$ bzw. $x + 1$ auftauchenden Primzahlen eine durch drei teilbare Vielfachheit besitzen. Damit sind aber $x^2 + 2x + 2$ und $x + 1$ Kubikzahlen. Mit $x + 1$ ist auch $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ eine Kubikzahl, sodass $x^2 + 2x + 1$ und $x^2 + 2x + 2$ zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, die beide Kubikzahlen sind.

Dafür gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich -1 und 0 bzw. 0 und 1. Die erste fällt wegen $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ weg, sodass nur $x^2 + 2x + 1 = 0$ und $x^2 + 2x + 2 = 1$ verbleibt. Beide Gleichungen führen auf $(x+1)^2 = 0$, d. h. $x = -1$, was zu $t = y = 0$ führt, also schon oben betrachtet wurde.
Es gibt also genau eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung, nämlich $(x{,}y) = (-1{,}0)$.

Aufgabe 161044:
Man ermittle alle ganzzahligen Zahlenpaare $(x;y)$, die die folgende Gleichung erfüllen!

$$xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Lösung von Nuramon:
Es kann keine Lösung geben, in der $x = 2$ gilt, denn sonst wäre $0 = 2y + 6 - 2y - 3 = 3$.
Also können wir äquivalent umformen zu $y = \frac{3-3x}{x-2} = -3 - \frac{3}{x-2}$.
Damit y ganz ist, muss also $x - 2$ ein Teiler von 3 sein. Somit ist $x \in \{2 \pm 1, 2 \pm 3\} = \{-1,1,3,5\}$.
Folglich ist (x,y) genau dann ein ganzzahliges Lösungspaar, wenn $(x,y) \in \{(-1, -2), (1,0), (3, -6), (5,-4)\}$ gilt.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen in

$$-3 = xy + 3x - 2y - 6 = (x - 2)(y + 3).$$

Da x, y ganze Zahlen sind, gilt dies für $x-2$ und $y+3$ auch. Da sich -3 nur auf die (unter Beachtung der Reihenfolge) folgenden vier verschiedenen Weisen als Produkt von zwei ganzen Zahlen schreiben lässt, ergeben sich daraus entsprechend die zugehörigen Lösungspaare $(x; y)$:
Es ist

$$\begin{aligned}
-3 =&(-3) \cdot 1, \text{ also } (x; y) = (-1; -2), && \text{oder}\\
-3 =&(-1) \cdot 3, \text{ also } (x; y) = (1; 0), && \text{oder}\\
-3 =& \quad 1 \cdot (-3), \text{ also } (x; y) = (3; -6), && \text{oder}\\
-3 =& \quad 3 \cdot (-1), \text{ also } (x; y) = (5; -4).
\end{aligned}$$

Aufgabe 171042:
Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl $z = x^2 + x + 6$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze zueinander teilerfremde Zahlen p, q mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$$

Daraus folgt $p^2 = q(-p - 6q + n^2q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müsste diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q. Daher ist $q = 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
p^2 + p + 6 &= n^2\\
\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 &= n^2 - \frac{23}{4}\\
23 &= 4n^2 - (2p + 1)^2 = (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1)
\end{aligned}$$

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich $4n$, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23 = 1 \cdot 23 = (-l) \cdot (-23)$ die zweite aus, und es gilt entweder

$$2n - 2p - 1 = 1, \qquad 2n + 2p + 1 = 23 \qquad \text{oder} \qquad 2n - 2p - 1 = 23, \qquad 2n + 2p + 1 = 1$$

Im ersten Fall folgt $n - p = 1$, $n + p = 11$ und daraus $p = 5$, im zweiten folgt $n - p = 12$, $n + p = 0$ und daraus $p = -6$.
Folglich können nur die Zahlen $x = 5$ und $x = -6$ die geforderten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist sowohl $25 + 5 + 6 = 36$ als auch $36 - 6 + 6 = 36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es gelte $n^2 = x^2 + x + 6$ mit einer natürlichen Zahl n. Da das quadratische Polynom $x^2 + x + 6 - n^2$

nur ganzzahlige Koeffizienten hat und normiert ist, ist jede seiner rationalen Nullstellen auch ganzzahlig, sodass wir $x \in \mathbb{Z}$ annehmen können.
Die Nullstellen lauten

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (6 - n^2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{4n^2 - 23}}{2}.$$

Damit x ganzzahlig ist, muss also $4n^2 - 23$ eine ungerade Quadratzahl sein. Da dieser Radikand kleiner ist als $4n^2 = (2n)^2$, muss $4n^2 - 23 \geq (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$ und damit $n \leq 6$ gelten. Andererseits muss der Radikand auch positiv sein, sodass $4n^2 - 23 \geq 1$ und damit $n \geq 3$ folgt.
Einsetzen der Werte von 3 bis 6 liefert nur im Fall $n = 6$ eine ungerade Quadratzahl für $4n^2 - 23$, nämlich 11^2, sodass wir daraus $x = \frac{-1 \pm 11}{2}$, aso $x = -5$ oder $x = 6$ erhalten. Proben bestätigen diese Werte auch als Lösungen.

Aufgabe 181045:
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen $(n; z)$, für die $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$z^2 - 2^n = 153 \qquad (1)$$

(I) Angenommen, für ein Paar natürlicher Zahlen $(n; z)$ sei (1) erfüllt.
1. Fall: n ist gerade, d. h., es gilt $n = 2m$ mit natürlichem m. Aus (1) folgt dann

$$(z - 2^m)(z + 2^m) = 153 \qquad (2)$$

Da $153 = 3^2 \cdot 17$ als Zerlegungen in zwei ganzzahlige Faktoren, von denen der erste kleiner als der zweite und dieser (also auch der erste) größer als 0 ist, nur $1 \cdot 153$, $3 \cdot 51$ und $9 \cdot 17$ besitzt, gibt es für (2) höchstens die Möglichkeiten

$$\begin{aligned} z - 2^m &= 1 \quad , \quad z + 2^m = 153 \qquad (3) \\ z - 2^m &= 3 \quad , \quad z + 2^m = 51 \qquad (4) \\ z - 2^m &= 9 \quad , \quad z + 2^m = 17 \qquad (5) \end{aligned}$$

Hiervon führt (3) auf den Widerspruch $2^m = 76$ und (4) auf den Widerspruch $2^m = 24$; (5) führt auf $z = 13$, $2^m = 4$, also $m = 2$, $n = 4$.

2. Fall: n ist ungerade, Es gilt $2 \equiv 1 \pmod 3$, also $2^n \equiv -1 \pmod 3$. Ist nun $z \equiv 0 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 0 + 1 \pmod 3 \qquad (6)$$

ist aber $z \equiv -1 \pmod 3$, so folgt

$$z^2 - 2^n \equiv 1 + 1 \pmod 3 \qquad (7)$$

Wegen $153 \equiv 0 \pmod 3$ ergibt sowohl (6) als auch (7) einen Widerspruch gegen (1). Daher kann (1) nur durch $(4; 13)$ erfüllt werden.
(II) In der Tat erfüllen diesen Zahlen (1), denn er gilt $2^4 + 12^2 = 160 = 169 - 9$. Also ist genau dieses Zahlenpaar das gesuchte.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Gleichung ist äquivalent zu $z^2 - 2^n = 153$. Da 2^n nicht durch 3 teilbar ist, 153 aber schon, ist auch z^2 nicht durch 3 teilbar. Es folgt $z^2 \equiv 1 \pmod 3$, also auch $2^n \equiv 1 \pmod 3$, was genau für gerade Zahlen $n = 2m$ mit nichtnegativem ganzen m erfüllt ist. Dann jedoch folgt $153 = (z - 2^m)(z + 2^m)$, wobei sich die beiden Faktoren um die Zweierpotenz $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ unterscheiden und beide positiv sind (da es 153 und der zweite Fator sicher sind). Es ist $153 = 3^2 \cdot 17$, sodass sich als ganzzahlige Faktorisierungen nur $1 \cdot 153$; $3 \cdot 51$ und $9 \cdot 17$ ergeben, von denen ausschließlich in der letzten die Differenz der beiden Faktoren eine Zweierpotenz ist. Es folgt $m = 2$ und mithin $n = 4$ sowie $z = 13$. Einsetzen bestätigt, dass das Paar $(n; z) = (6; 13)$ tatsächlich (die also einzige existierende) Lösung der gegebenen Gleichung ist.

Aufgabe 191043B:
Beweisen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen z gibt, für die sich die Gleichung $a^{2m} + b^{2n} + c^{2k} = z$ nicht durch natürliche Zahlen a, b, c, m, n, k erfüllen lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da z die Summe dreier Quadratzahlen, nämlich $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$, sein soll, bietet es sich an, Teilbarkeitsbetrachtungen für solche Zahlen anzustellen. Dabei gelangt man zur Untersuchung der Restklassen von Quadratzahlen bezüglich 8 und erhält:
Falls $x \equiv 0 \pmod 8$ oder $x \equiv 4 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 0 \pmod 8$.
Falls $x \equiv 1 \pmod 8$ oder $x \equiv 3 \pmod 8$ oder $x \equiv 5 \pmod 8$ oder $x \equiv 7 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 1 \pmod 8$.
Falls $x \equiv 2 \pmod 8$ oder $x \equiv 6 \pmod 8$, so $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.

Also können die drei Summanden jeweils nur einen der Rest 0, 1 oder 4 lassen, wenn sie durch 8 dividiert werden. Dann kann systematisch probiert werden:

$$\begin{array}{cccc} 0+0+0=0 & 0+0+1=1 & 0+1+1=2 & 1+1+1=3 \\ & 0+0+4=4 & 0+1+4=5 & 1+1+4=6 \end{array}$$

Damit ist bewiesen, dass Summe $(a^m)^2 + (b^n)^2 + (c^k)^2$ in keinem Fall bei Division durch 8 den Rest 7 lassen kann.
Hiermit haben wir bereits unendlich viele Zahlen z, nämlich all jene, für die eine natürliche Zahl z' existiert, sodass $z = 8z' + 7$ ist, gefunden.

Aufgabe 201041:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ und b für die gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b^2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis kann die Methode der vollständigen Induktion herangezogen werden.
Für $n = 2$ gilt wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ die Aussage mit $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $b = 5$. Sei nun k eine natürliche Zahl, so dass die Aussage für $n = k$ gilt, d. h., es gebe von Null verschiedene natürliche Zahlen c_1, c_2, ..., c_k, d mit $d > l$ und

$$c_1^2 + c_2^2 + ... + c_k^2 = d^2 \tag{1}$$

Wir können jedenfalls $k = 2$ setzen. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Multiplikation mit 2^2 die Beziehung

$$(2c_1)^2 + (2c_2)^2 + ... + (2c_k)^2 = (2d)^2 = (d^2 + 1)^2 - (d^2 - 1)^2$$

Setzt man $a_1 = 2c_1$, ..., $a_k = 2c_k$, $a_{k+1} = d^2 - 1$ und $b = d^2 + 1$ so erhält man von Null verschiedene Zahlen $a_1, ..., a_{k+1}, b$ mit $b > 1$ und der Eigenschaft $a_1^2 + ... + a_{k+1}^2 = b^2$, d. h., die Aussage gilt auch für $n = k + 1$.
Durch den Beweis für $n = 2$ und den Schluss von $n = k$ auf $n = k + 1$ ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen n, die ≥ 2 sind, bewiesen.

Aufgabe 211045:
Ermitteln Sie alle Mengen a, b, c aus positiven ganzen Zahlen a, b, c, die jeweils zusammen mit der Zahl $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ die Gleichung erfüllen

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 2s$$

Lösung von Nuramon:
Anmerkung: Sind a,b,c die Seitenlängen eines Dreiecks, dann ist $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ sein Flächeninhalt. Andererseits ist der Flächeninhalt des Dreiecks auch gleich dem Produkt aus Inkreisradius und halbem Umfang. In der Aufgabe geht es also darum alle Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu finden, die den Inkreisradius 2 haben.

Es seien $p := s-a$, $q := s-b$ und $r := s-c$. Die zu lösende Gleichung ist dann

$$\sqrt{spqr} = 2s.$$

Wir zeigen zunächst, dass p,q,r positiv sein müssen:
Sei dazu o. B. d. A. $c \geq b \geq a$. Dann ist $b+c > a$ und $a+c > b$. Somit ist auch $p = s-a = \frac{1}{2}(b+c-a) > 0$ und $q = s-b = \frac{1}{2}(a+c-b) > 0$. Wäre $r = s-c < 0$, dann wäre wegen $s > 0$ der Term unter der Wurzel negativ und somit könnte die Gleichung nicht erfüllt sein. Es kann aber auch nicht $s-c = 0$ gelten, denn sonst erhielten wir den Widerspruch $0 = 2s > 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass p,q,r ganz sind:
Es ist klar, dass $2p, 2q, 2r, 2s \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $2s-2p = 2a, 2s-2q = 2b, 2s-2r = 2c$ und a,b,$c \in \mathbb{N}$, müssen $2p, 2q, 2r, 2s$ alle die gleiche Parität haben.
Durch quadrieren und multiplizieren mit 2^4 erhalten wir:

$$(2s)(2p)(2q)(2r) = 16(2s)^2.$$

Rechts steht eine gerade Zahl. Also muss auch links eine gerade Zahl stehen, und folglich müssen $2s, 2p, 2q$,$2r$ alle gerade sein. Insbesondere folgt, dass p,q,$r \in \mathbb{N}$.

Nach obigen Bemerkungen und wegen $s = p+q+r$, erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$pqr = 4(p+q+r).$$

Auflösen nach p liefert

$$p = \frac{4(q+r)}{qr-4}.$$

(Es ist $qr-4 \neq 0$, denn sonst wäre $0 = p(qr-4) = 4(q+r) > 0$.) Wegen $p > 0$, stellen wir fest, dass $qr-4 > 0$ gelten muss. Also gilt $qr \geq 5$.

Als nächstes finden wir alle Lösungen dieser Gleichung, in der mindestens eine der Variablen p,q,r den Wert 1,2 oder 3 hat. O. B. d. A. sei q diese Variable.

1. Fall: $q = 1$.
Dann ist

$$p = \frac{4(1+r)}{r-4} = 4 + \frac{20}{r-4}.$$

Es muss also $r-4$ ein Teiler von 20 sein. Wegen $r = qr \geq 5$, ist das genau dann erfüllt, wenn $r \in \{5, 6,8,9,14,24\}$. Demnach ist $(p$,q,$r)$ ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(24, 1, 5), (14,1,6), (9,1,8), (8,1,9), (6,1,14), (5,1,24)\}.$$

2. Fall: $q = 2$.
Dann ist

$$p = \frac{4(2+r)}{2r-4} = 2 + \frac{8}{r-2}.$$

Also muss $r-2$ ein Teiler von 8 sein. Da außerdem $2r = qr \geq 5$ ist, muss $r \geq 3$ gelten. Somit ist $r \in \{3,4,6,10\}$. Daher ist $(p$,q,$r)$ ein Lösungstripel, genau dann wenn

$$(p,q,r) \in \{(10,2,3), (6,2,4), (4,2,6), (3,2,10)\}.$$

3. Fall: $q = 3$.

Dann ist
$$p = \frac{4(3+r)}{3r-4} = 1 + \frac{r+16}{3r-4}.$$
Insbesondere ist $p \geq 2$. Wegen $3r = qr \geq 5$ ist auch $r \geq 2$. Lösungen, in denen $p = 2$ oder $r = 2$ gilt, haben wir oben bereits erfasst. Damit $p \geq 3$ gilt, muss $r + 16 \geq 2(3r - 4)$, also $5r \leq 24$ und somit $r \leq 4$ gelten. Durch explizites Einsetzen, sehen wir, dass weder $r = 3$ noch $r = 4$ zu einem ganzzahligem p führen.
Für $q = 3$ finden wir also keine weiteren Lösungen, die wir nicht bereits in einem der oberen beiden Fällen erfasst haben.

Gäbe es eine Lösung von $pqr = 4(p + q + r)$, in der $p,q,r \geq 4$ sind, dann wäre
$$1 = \frac{4(p+q+r)}{pqr} = 4\left(\frac{1}{qr} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{pq}\right) \leq 4 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4}\right) = \frac{3}{4},$$
was offenbar falsch ist.
Damit sind alle positiv ganzzahligen Lösungen (p,q,r) von $pqr = 4(p + q + r)$, in denen $p \leq q \leq r$ gilt, gegeben durch
$$(p,q,r) \in \{(1,5,24), (1,6,14), (1,8,9), (2,3,10), (2,4,6)\}.$$
Mit $s = p + q + r = \frac{1}{2}(a + b + c)$ und $(a,b,c) = (s - p, s - q, s - r)$ erhalten wir daher, dass alle positiven, ganzzahligen Lösungen (a,b,c) mit $a \geq b \geq c$ von
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2s$$
gegeben sind durch
$$(a,b,c) \in \{(29,25,6), (17,10,9), (20,15,7), (13,12,5), (10,8,6)\}.$$
Alle anderen Lösungstripel (a,b,c) erhält man durch Permutation dieser Tripel.

Aufgabe 221041:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$, für die
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$
gilt.

Lösung von Kornkreis:
Für $n = 2$ wähle $a_1 = a_2 = 2$. Für $n \geq 3$ wähle $a_1 = ... = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = n$, dann wird
$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-2 \text{ Summanden}} + 2 + n = n - 2 + 2 + n = 2n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{n-2 \text{ Faktoren}} \cdot 2 \cdot n$$

Aufgabe 221042:
In einem Mathematikzirkel wird diskutiert, für welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ die Zahl $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$ irrational ist.
Rolf meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z rational.
Eva meint: Für unendlich viele der genannten Paare $(x; y)$ ist z irrational.
Untersuchen Sie sowohl für Rolfs als auch für Evas Meinung, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist
$$z-\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$
Quadrieren:
$$z^2+x+y-2z\sqrt{x+y}=x+y+2\sqrt{xy}$$
$$z^2-2z\sqrt{x+y}=2\sqrt{xy}$$
Erneut quadrieren:
$$z^4+4z^2(x+y)-4z^3\sqrt{x+y}=4xy$$
$$\sqrt{x+y}=\frac{z^4+4z^2(x+y)-4xy}{4z^3}=\frac{1}{4}z+\frac{x+y}{z}-\frac{xy}{z^3}$$
Eva hat recht: wenn z rational wäre, dann müsste immer $\sqrt{x+y}$ rational sein, was offenkundig nicht sein kann, denn wann immer $x+y$ keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x+y}$ irrational und damit auch z. Es gibt aber unendlich viele Zahlenpaare (x,y), für die $x+y$ keine Quadratzahl ist.
Was Rolfs Meinung betrifft, so setzt man $x=(n^2-1)^2$ und $y=4n^2$ mit $n\in\mathbb{N}$. Dann ist
$$z=(n^2-1)+2n+\sqrt{n^4-2n^2+1+4n^2}=n^2-1+2n+n^2+1=2n^2+2n=2n(n+1)$$
z ist in diesem Fall also immer ganzzahlig und damit rational. Damit gibt es auch unendlich viele Zahlenpaare (x,y), für die z rational ist.

Aufgabe 231041:
Stellen Sie fest, ob es Quadratzahlen z gibt, die sich in der Form
$$z=n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$$
mit einer natürlichen Zahl n darstellen lassen!

Lösung von cyrix:
Nein, die gibt es nicht.
Die Quadratzahl z lässt bei der Teilung durch 4 den Rest 0 oder 1, während für gerade n der Term $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n=z-3$ offenbar durch 4 teilbar ist, also z den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lassen würde, und für ungerade n wegen $n^2\equiv 1 \pmod 4$, genauso auch
$$z=n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3\equiv 1+3n-5-15n+4+12n+3=3 \pmod 4$$
den Rest 3 bei der Teilung durch 4 lässt.
Demnach gibt es kein n, sodass $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 241041:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985}$ gilt!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich sind (0,1985) und (1985,0) Lösungen aus $\mathbb{Z}$. Dieses sind auch die einzigen Lösungen, wie wir nun zeigen.
Sei $x\neq 0$. Äquivalentes Quadrieren liefert: $x+y+2\sqrt{xy}=1985 \quad (*)$.
Sei nun $y=xt^2$ mit $t\in\mathbb{Q}$. Einsetzen in $(*)$ liefert:
$$x+xt^2+2xt=1985 \iff x=\frac{1985}{(t+1)^2}$$
Teiler von 1985 sind $\{1;5;397;1985\}$. Nur $(t+1)^2=1$ liefert jedoch für rationales t eine Lösung. Die haben wir oben jedoch schon notiert.

Aufgabe 241044:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a!+b!=(a+b)!$ gilt!
Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n\geq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1\leq k\leq n$ gilt; ferner ist $0!=1$ definiert.

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgrund der Symmetrie gilt allgemein, dass $(b;a)$ eine Lösung ist, wenn $(a;b)$ eine Lösung ist. Wir betrachten nachfolgend daher nur Fälle, für die $a\leq b$ ist. Da $0!=1$ ist, ist offensichtlich, dass $a>0$ sein muss, denn sonst müsste $1+b!=b!$ gelten, was nicht möglich ist. Man kann die Fakultät-Funktion darstellen als

$$n!=\prod_{k=1}^{n} k$$

Allgemein soll gelten: $a!+b!=(a+b)!$

$$\prod_{k=1}^{a} k+\prod_{k=1}^{b} k=\prod_{k=1}^{a+b} k$$

Wir teilen durch $b!$:

$$\frac{\prod_{k=1}^{a} k}{\prod_{k=1}^{b} k}+1=\frac{\prod_{k=1}^{a+b} k}{\prod_{k=1}^{b} k}$$

Da $b\geq a$ und $(a+b)>b$, kann man kürzen:

$$\frac{1}{\prod_{k=a+1}^{b} k}+1=\prod_{k=b+1}^{a+b} k$$

Rechts steht eine natürliche Zahl, so dass der Bruch links auch eine natürliche Zahl ergeben muss. Das ist für $b>a$ nicht möglich. Es bleiben also nur noch die Fälle $a=b>0$ zu untersuchen. Dann muss gelten

$$2\prod_{k=1}^{a} k=\prod_{k=1}^{2a} k \qquad \rightarrow \qquad 2=\frac{\prod_{k=1}^{2a} k}{\prod_{k=1}^{a} k} \qquad \rightarrow \qquad 2=\prod_{k=a+1}^{2a} k$$

Das ist nur für $a=1$ erfüllt, für größere a gilt immer

$$2\cdot a!<(2a)!$$

Daher ist das Paar $(1;1)$ die einzige Lösung.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Aufgrund der Definition der Fakultät gilt für beliebige nichtnegative ganze Zahlen $m\leq n$, dass $m!\mid n!$ und damit natürlich auch $m!\leq n!$ gilt.
Insbesondere ist also wegen $a+b\geq a$ auch $(a+b)!$ und damit auch $b!=(a+b)!-a!$ durch $a!$ teilbar. Genauso folgt analog umgekehrt auch $a!\mid b!$, sodass $a!=b!$ und also $2a!=2b!=(a+b)!$ folgt.
Wäre $b\geq 2$, so würde

$$2=\frac{(a+b)!}{a!}\geq (a+1)\cdot(a+2)$$

folgen, woraus $a=0$ und damit der Widerspruch $2b!=(0+b)!=b!$, also $b!=0$, folgen würde. Also muss $b\leq 1$ sein, wobei man analog eben auch $b=0$ ausschließen kann. Es folgt $b=1$ und durch Vertauschung der Variablen analog auch $a=1$. Einsetzen bestätigt:

$$1!+1!=2=(1+1)!,$$

sodass $(1;1)$ das einzige Lösungspaar dieser Gleichung ist.

Aufgabe 281041:
Zeigen Sie, dass es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$$
$$2^n = k^2 - (1+8)\cdot 2^8 = k^2 - (3\cdot 2^4)^2 = (k-48)(k+48) \qquad (1)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung muss

$$k - 48 = 2^i \qquad ; \qquad k + 48 = 2^j \qquad (2)$$

mit natürlichen Zahlen i, j sein. Daraus folgt $i < j$ sowie

$$2^j - 2^i = 96 \qquad ; \qquad 2^i \cdot (2^{j-i} - 1) = 2^s \cdot 3$$

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt $i = 5$, nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $j = 7$, woraus nach (1) $2n = 2^5 \cdot 2^7$ und $n = 12$ folgt.

II. In der Tat ist $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1+8+16)\cdot 2^8 = (5\cdot 2^4)^2$ eine Quadratzahl.

Aufgabe 301043A:
Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven natürlichen Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k\cdot\sqrt{t}}$ rational ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine derartige Zahl m gibt es nicht; im Gegenteil gilt:
Für jede natürliche Zahl m gibt es eine natürliche Zahl $k > 0$ und zu ihr mehr als m natürliche Zahlen t, mit denen $\sqrt{t + k\cdot\sqrt{t}}$ rational ist.

Zum Beweis genügt es, für jede natürliche Zahl $m > 0$ ein Beispiel einer natürlichen Zahl $k > 0$ und paarweise voneinander verschiedener Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ anzugeben und mit ihnen die Zahlen $\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}}$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ als rational nachzuweisen.
Ein solches Beispiel bilden die Zahlen

$$k = (2^2 - 1)\cdot(3^2 - 1)\cdot\ldots\cdot((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2-1)^2} \qquad (i = 2, \ldots, m+1)$$

Sie sind nämlich sämtlich natürliche Zahlen; k ist positiv; es gilt $t_2 > t_3 > \cdots > t_{m+1} > 0$, also sind $\sqrt{t_1 + k\cdot\sqrt{t_1}} = 0$, $t_1, \ldots, t_{m+1}$ paarweise voneinander verschieden, und die Zahlen

$$\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}} = \sqrt{\frac{k^2}{(i^2-1)^2} + k\cdot\frac{k}{i^2-1}} = \frac{k}{i^2-1}\sqrt{1 + (i^2-1)}$$
$$= \frac{k}{i^2-1}\cdot i \quad (i = 2, \ldots, m+1)$$

sind (natürliche, also) rationale Zahlen.
Ein anderes Beispiel bilden die Zahlen $k = 2^{2m+1}$ und $t_i = (2^{2m-1} - 2^i)^4$ $(i = 0, \ldots, m)$, wie aus $t_0 > \cdots > t_m$ und

$$\sqrt{t_i + k\cdot\sqrt{t_i}} = \sqrt[4]{t_i}\sqrt{\sqrt{t_i} + k} = (2^{2m-1} - 2^i)(2^{2m-1} + 2^i)$$

folgt. Zu solchen Beispielen gelangt man z. B., indem man

$$x = \sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$$

als $x^2 + \frac{k^2}{4} = (\sqrt{t} + \frac{k}{2})^2$ schreibt und mit dem Ansatz $x = p^2 - q^2$, $\frac{k}{2} = 2pq$, $\sqrt{t} + \frac{k}{2} = p^2 +^2$ pythagoreischer Tripel bei passender Wahl von k dann m ganzzahlige $t = (p - \frac{k}{4p})^4$ erhält.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Ist der Ausdruck $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ für natürliches k und t rational, so auch sein Quadrat $t + k \cdot \sqrt{t}$ und also auch $\sqrt{t}$, woraus folgt, dass $t = n^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl n ist.
Der Ausdruck vereinfacht sich damit zu $\sqrt{n^2 + kn}$. Dieser ist genau dann rational, wenn $n^2 + kn = \ell^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ℓ ist. Ist k gerade, also $k = 2i$ mit einer natürlichen Zahl i, so geht die Gleichung über in $(n + i)^2 - i^2 = \ell^2$ bzw. $i^2 = (n + i)^2 - \ell^2 = (n + i + \ell) \cdot (n + i - \ell)$.
Ist nun $i^2 = p \cdot q$ mit zwei natürlichen Zahlen $p \geq q$ gleicher Parität, so liefert $n + i := \frac{p+q}{2}$ und $\ell := \frac{p-q}{2}$ eine Lösung der vorgenannten Gleichung.
Sei nun z. B. $i = 2^m$ mit einer natürlichen Zahl m. (Dann ist $k = 2^{m+1}$.) Dann können wir als Zerlegungen von i^2 alle Produkte der Form $2^{2m-j} \cdot 2^j$ mit $1 \leq j \leq m$ wählen, was m verschiedene Lösungen mit $n + i = \frac{2^{2m-j} + 2^j}{2}$, also $n = 2^{2m-j-1} + 2^{j-1} - 2^m$ und $\ell = \frac{2^{2m-j} - 2^j}{2} = 2^{2m-j-1} - 2^{j-1}$ liefert.
Da m hierbei beliebig groß gewählt werden kann, finden wir also für jedes m ein k, sodass der zu untersuchende Ausdruck mindestens für m natürliche Zahlen t einen rationalen Wert annimmt.

Aufgabe 321041:
Gibt es in einer Ebene mit einem x,y-Koordinatensystem eine Kreislinie, die keinen Punkt hat, für den beide Koordinaten rationale Zahlen sind?

Lösung von cyrix:
Der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 3 ist ein solcher. Die Koordinaten aller Punkte auf diesem erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 3$. Ist x rational, so gibt es teilerfremde ganze Zahlen p und $q \neq 0$ mit $x = \frac{p}{q}$.
Also gilt $y^2 = 3 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{3q^2 - p^2}{q^2}$ bzw. $y = \pm \frac{\sqrt{3q^2 - p^2}}{q}$.
Wäre $y \in \mathbb{Q}$, so also auch $\sqrt{3q^2 - p^2}$. Da $3q^2 - p^2$ eine ganze Zahl ist, müsste dann auch $\sqrt{3q^2 - p^2}$ eine ganze Zahl n sein, also $3q^2 - p^2 = n^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ gelten.
Quadratzahlen lassen bei der Teilung durch 4 entweder den Rest 1 (bei ungerader Basis) oder 0 (bei gerader Basis). Damit lässt $3q^2 - p^2$ bei der Teilung durch 4 den Rest 0 (wenn p und q beide gerade sind), 3 ((q ungerade, p gerade) oder (q gerade, p ungerade)) oder 2 (beide ungerade).

Da aber auch n eine Quadratzahl ist und den Rest 0 oder 1 bei der Teilung durch 4 lässt, müsste der erste Fall eintreten, was $\{ggT(p,q) \geq 2$ im Gegensatz zur geforderten Teilerfremdheit nach sich zieht, also einen Widerspruch, sodass es keinen rationalen Punkt auf dem Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung gibt, $\square$.

Aufgabe 331042:
Man beweise, dass es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösung von cyrix:
Mit dem Ansatz $t = r^2$, reicht es zu zeigen, dass es unendlich viele Zahlen r,$s \in \mathbb{Q}$ mit $r(r + 1) = s^2$ gibt.
Falls r und $r + 1$ Quadrate in $\mathbb{Q}$ sind, gibt es eine Lösung für die Gleichung.
Für $0 < q < p \in \mathbb{N}$ definiere das pythagoreisches Zahlentripel $a := 2pq, b := p^2 - q^2, c =: p^2 + q^2$ und $r := \frac{a^2}{b^2}$. Dann gilt $r + 1 = \frac{c^2}{b^2}$.

Somit ist für $t = \frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}$ der Ausdruck $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational. Einsetzen ergibt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4}}} = \sqrt{\frac{16p^4q^4}{(p^2-q^2)^4} + \frac{4p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}} = \frac{2pq(p^2+q^2)}{(p^2-q^2)^2} \in \mathbb{Q}$$