Aufgaben und Lösungen der I. bis IV. Runde der Klassenstufe 11/12 der Mathematik-Olympiaden von 1960 bis 1994

OJM

Zentrales Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`https://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Algebra & Analysis

I.I Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01106:
Gibt es einen Winkel ε, für den die Gleichung gilt:

$$\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon = 1 \tag{1}$$

Lösung von Steffen Polster:
Mit dem Additionstheorem $2\sin x\cos x = \sin 2x$ wird aus (1)

$$\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon = \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon = 1$$
$$\sin 2\varepsilon = 2$$

Da der Funktionswertebereich der Sinusfunktion $[-1; 1]$ hat diese Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt keinen Winkel ε, der (1) erfüllt.

Aufgabe 021214:
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

für $0° \leq x \leq 360°$ zu bestimmen!

Lösung von Eckard Specht:
Die gegebene Gleichung wird zunächst mittels $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ umgeformt, wobei wir zur Abkürzung $c_1 \equiv \cos(x), c_2 \equiv \cos(2x), c_3 \equiv \cos(3x)$ schreiben:

$$c_1^2 x_2^2 c_3^2 + (1-c_1^2)(1-c_2^2)(1-c_3^2) = c_1^2c_2^2 + c_1^2c_3^2 + c_3^2c_2^2$$
$$c_1^2c_2^2c_3^2 + 1 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2c_2^2 + c_2^2c_3^2 + c_3^2c_1^2) - c_1^2c_2^2c_3^2 = c_1^2c_2^2 + c_1^2c_3^2 + c_3^2c_2^2$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir: $c^2 = 2c_1^2 - 1$ und $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$. Dies eingesetzt in (1) ergibt:

$$c_1^2 + (2c_1^2 - 1)^2 + (4c_1^3 - 3c_1)^2 = 1$$
$$16c_1^6 - 20c_1^4 + 6c_1^2 = 2c_1^2(8c_1^4 - 10c_1^2 + 3) = 0$$

Aus $c_1^2 = 0$ folgen die ersten beiden Lösungen: $x_1 = 90°, x_2 = 270°$.

Für weitere Lösungen muss der Klammerausdruck in (2) verschwinden, was auf eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $c_1^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}$ führt.

Aus $c_1^2 = \frac{3}{4}$ 4 folgen die vier Lösungen: $x_3 = 30°, x_4 = 150°, x_5 = 210°$ und $x_6 = 330°$, sowie aus $c_1^2 = \frac{1}{2}$ vier weitere Lösungen: $x_7 = 45°, x8 = 135°, x9 = 225°, x10 = 315°$.

Aufgabe 031214:
Man beweise:

Bezeichnen α, β, γ die Winkel eines Dreiecks, so gelten

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 \qquad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Lösung von Henning Thielemann:
Herleitung der ersten Gleichung mit Hilfe des Additionstheorems

$$\begin{aligned}
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))\\
4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= 2(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\cos\gamma\\
&= \cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\
&= \cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)
\end{aligned}$$

Die Innenwinkelsumme beträgt $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= \cos(\pi-2\alpha)+\cos(\pi-2\beta)+\cos(\pi-2\gamma)+\cos\pi\\
&= -\cos(2\alpha)-\cos(2\beta)-\cos(2\gamma)-1
\end{aligned}$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ und analoges für β und γ.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$$

Die zweite Gleichung lässt sich aus dem Kosinussatz $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$ ableiten, wobei die Seiten a, b und c den Winkeln α, β bzw. γ gegenüberliegen.

Wegen $\alpha\neq 0$, gibt es ein $x\neq 0$ mit $a=x\cdot\sin\alpha$ und nach dem Sinussatz gilt dann $b=x\cdot\sin\beta$ und $c=x\cdot\sin\gamma$, womit aus dem Kosinussatz folgt:

$$\begin{aligned}
x^2\sin^2\alpha &= x^2\sin^2\beta+x^2\sin^2\gamma-x^2\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma \text{und wegen} x\neq 0\\
\sin^2\alpha &= \sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma
\end{aligned}$$

Aufgabe 031116:
Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage 1000050.
Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

Lösung von Steffen Weber:
Sei a die kleinste der 100 Zahlen, dann ist $a+99$ die größte der Zahlen. Die Summe der 100 Zahlen beträgt

$$a+(a+1)+...+(a+98)+(a+99)=(a+(a+99))+((a+1)+(a+98))+...+((a+49)+(a+50))=$$
$$=\underbrace{(2a+99)+...+(2a+99)}_{\text{50 Summanden}}=100a+4950$$

d. h. $100a=995100$ bzw. $a=9951$ und $a+99=10050$. Also ist 9951 die kleinste und 10050 die größte der 100 Zahlen.

Aufgabe 031216:
Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}.$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen“. Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen“ irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine Ziffer des Nenners gestattet, ohne dass sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

Lösung von Henning Thielemann:
Fallunterscheidung:

1) $$\frac{10a+c}{10b+c} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad bc = ac$$

Das bedeutet $c = 0$ oder $a = b$. Erstes bedeutet, dass sich bei allen Brüchen mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner bezüglich der Null „ kürzen“ lassen, und zweites bedeutet, dass Nenner und Zähler gleich sind.

2) $$\frac{10c+a}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad bc = ac$$

c kann nicht Null sein, denn dann wären die dargestellten Zahlen nicht zweistellig. Also ist $a = b$, das führt zu identischem Zähler und Nenner.

3) $$\frac{10a+c}{10c+b} = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{bc}{10c-9b}$$

Die möglichen Belegungen für a, b und c sollen nun durch Ausprobieren herausgefunden werden. Dabei gibt es folgende Vereinfachungen:

a) Der Fall, dass alle Variablen gleich sind, wurde bereits behandelt.

b) Ist $a = x, b = y, c = z$ eine Lösung, so ist für alle natürlichen Zahlen k auch $a = kx, b = ky, c = kz$ eine Lösung, sofern jeder Wert kleiner als 10 ist.

c) Für festes c kann man den zulässigen Wertebereich weiter einschränken:

$$1 \leq a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10c}{c+9} \leq b$$

$$9 \geq a = \frac{bc}{10c-9b} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{10}{9}c \geq b$$

c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?	c	b	$\frac{bc}{10c-9b}$	Lösung?
5	4	$20/14$		6	4	$24/24 = 1$	ja
6	5	$30/15 = 2$	ja	7	5	$35/25$	
7	6	$42/16$		8	5	$40/35$	
8	6	$48/26$		8	7	$56/17$	
9	5	$45/45 = 1$	ja	9	6	$54/36$	
9	7	$63/27$		9	8	$72/18 = 4$	ja

4) $$\frac{10c+b}{10a+c} = \frac{b}{a}$$

Dieser Fall führt zum gleichen Zusammenhang wie der vorige Fall nur mit vertauschtem Zähler und Nenner.

Die gesuchten Brüche sind

$$\frac{16}{64}, \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{49}{98}, \frac{64}{16}, \frac{65}{26}, \frac{95}{19}, \frac{98}{49}$$

und darüber hinaus alle Brüche mit gleichem Zähler und Nenner, sowie sämtliche Brüche mit Vielfachen von 10 in Zähler und Nenner.

Aufgabe 041116:
Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12 \cdot \sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12 \cdot \sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

Lösung von Rainer Müller:
Mit den Abkürzungen $a = 1620$, $b = 12\sqrt{17457}$ ist $z = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, also

$$z^3 = a + b + 3(a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} + a - b = 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - b^2} \cdot z =$$

$$= 3240 + 3\sqrt[3]{110592} \cdot z = 3240 + 144z$$

(wegen $110592 = 2^{12} \cdot 3^3 = (2^4 \cdot 3)^3$ braucht man für 110592 keinen Taschenrechner.
Demnach ist z eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$p := x^3 - 144x - 3240 = (x-18)(x^2 + 18x + 180) = (x-18)(x + 9 + \sqrt{-99})(x + 9 - \sqrt{-99})$$

Da 18 die einzige reelle Nullstelle von p ist, muss z gleich 18 sein.

Aufgabe 041214:
Ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes ist das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

zu berechnen.

Lösung von Peter Hieber:
Mit der Gesetzmäßigkeit $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ und dem Wissen, dass $\cos 60° = \frac{1}{2}$ sowie $\cos 90° = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{2} \cdot (\cos 20° + \cos 60°) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 80° \\ &= \frac{1}{4} \cdot \cos 20° \cdot \cos 80° + \frac{1}{8} \cdot \cos 80° = \frac{1}{8} \cdot (\cos 60° + \cos 100° + \cos 80°) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \cos 10° \cdot \cos 90° \right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für $x = \frac{1}{16}$.

Aufgabe 091212:

a) Es sind alle reellen Lösungen der Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{9}{16}$ zu ermitteln.

b) Ferner sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+2)(x+3) = a$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei, genau vier bzw. mehr als vier verschiedene reelle Lösungen in x hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es wird sogleich der allgemeine Fall b) gelöst:

b) Setzt man $z = x + \frac{3}{2}$, dann ist x eine Lösung der Gleichung

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = a \tag{1}$$

genau dann, wenn z eine Lösung der Gleichung

$$\left(z - \frac{3}{2}\right)\left(z + \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) = a \qquad \text{bzw.} \tag{2}$$

$$\left(z^2 - \frac{9}{4}\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) = a$$

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} - a = 0 \tag{3}$$

ist. Nun ist die Gleichung (3) erfüllt genau dann, wenn

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16} + a} = \frac{5}{4} + \sqrt{1+a} \qquad \text{oder} \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1+a} \tag{4,5}$$

gilt. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: (zugleich Antwort zu Aufgabe a):

Für $a = \frac{9}{16}$ folgt aus (4) und (5)

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{10}{4} \qquad ; \qquad z^2 = \frac{5}{4} - \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 0$$

Daher hat die Gleichung (3) in diesem Fall genau drei Lösungen, nämlich

$$z_1 = 0; \qquad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Die Gleichung (1) hat daher in diesem Fall ebenfalls genau drei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

2. Fall: Für $a < -1$ hat die Gleichung (3) und damit auch Gleichung (1) keine Lösung, weil $1 + a < 0$ ist.

3. Fall: Für $a = -1$ hat die Gleichung (3) genau zwei Lösungen, nämlich $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

4. Fall: Für $a > -1$ und $\sqrt{1+a} < \frac{5}{4}$, d. h. $1 + a < \frac{25}{16}$, also $a < \frac{9}{16}$, d. h. für $-1 < a < \frac{9}{16}$ hat die Gleichung (4) genau vier Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_3 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}; \qquad z_1 = -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{1+a}}$$

5. Fall: Für $a > \frac{9}{16}$ wird $\frac{5}{4} - \sqrt{1+a} < \frac{5}{4} - \frac{5}{4}$; die Gleichung hat also genau zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}; \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{1+a}}$$

Zusammenfassung:

Daher hat die Gleichung (1), wenn man nur reelle Lösungen zulässt, keine Lösung, falls $a < -1$, genau eine Lösung in keinem Falle, genau zwei Lösungen falls $a = -1$, oder $a > \frac{9}{16}$, genau drei Lösungen, falls $a = \frac{9}{16}$, genau vier Lösungen, falls $-1 < a < \frac{9}{16}$, mehr als vier Lösungen in keinem Falle.

Aufgabe 301212:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung

$$3x^2 + ax - 2 = 0 \tag{1}$$

zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung

$$6x_1 + x_2 = 0 \tag{2}$$

genügen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl a gilt $\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3} > 0$. Deshalb hat (1) für jede reelle Zahl a zwei reelle Lösungen, nämlich die beiden Zahlen

$$-\frac{a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{6}(-a \pm \sqrt{a^2+24})$$

I. Wenn diese beiden Zahlen der Bedingung (2) genügen, so gilt entweder

$$(-a + \sqrt{a^2+24}) + \frac{1}{6}(-a - \sqrt{a^2+24}) = 0 \qquad \text{oder} \tag{3}$$

$$(-a - \sqrt{a^2+24}) + \frac{1}{6}(-a + \sqrt{a^2+24}) = 0 \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$-6a + 6\sqrt{a^2+24} - a - \sqrt{a^2+24} = 0$$
$$5\sqrt{a^2+24} = 7a$$
$$25a^2 + 600 = 49a^2 \tag{5}$$

aus (4) folgt ebenfalls (5). Daher folgt in beiden Fällen $24a^2 = 600$, $a = 5$ oder $a = -5$.

II. Für $a = 5$ lautet (1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(-5 \pm 7)$, d. h. die Zahlen $\frac{1}{3}$ und -2. Beide erfüllen auch (2).

Für $a = -5$ lautet (1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ und hat als Lösungen die beiden Zahlen $\frac{1}{6}(5 \pm 7)$, d. h. die Zahlen $-\frac{1}{3}$ und 2. Beide erfüllen ebenfalls auch (2).

Somit sind die beiden Zahlen $a = 5$ und $a = -t5$ die gesuchten.

II Runde 2

Aufgabe 031122:
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2$$

Lösung von Henning Thielemann:
Wende das Additionstheorem

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

auf $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x$ und $\beta = \frac{3}{2}x$ an und erhalte:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\
&= 2\cos\frac{\pi+6x}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi+6x}{4} \\
\left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2 &= 2\cos^2\frac{\pi+6x}{4} = 1 + \cos\frac{\pi+6x}{2} \\
&= 1 - \sin 3x
\end{aligned}$$

Damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x \Rightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

Die linke Seite wird genau dann null, wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ ist und die rechte Seite, genau dann wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{3}$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{3}$ ist π, folglich ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn x Vielfaches von π ist.

Aufgabe 051224:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, y, für die die Gleichung

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist.

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende trigonometrische Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha && (1) \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} && (2) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} && (3)
\end{aligned}$$

Damit gilt für die gegebene Gleichung mit (1) und (2):

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x + \sin y \\
2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} && (4)
\end{aligned}$$

Fall 1: $\sin\frac{x+y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi \Rightarrow x + y = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$
Fall 2: $\sin\frac{x+y}{2} \neq 0$ in (4) und mit (3):

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} &= 0 \\
-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2} &= 0
\end{aligned}$$

Dieses Produkt ist dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:
Fall 2a: $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Fall 2b: $\sin\frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 051225:
Man ermittle sämtliche reellen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

a) seinen kleinsten Wert annimmt (Wie groß ist dieser?) und
b) seinen größten Wert annimmt, wenn x auf das Intervall $1 \leq x \leq 4$ beschränkt wird (Wie groß ist dieser?).

Lösung von Caban:
Verschiebt man die Funktion um zwei Einheiten nach links ergibt sich:

$$f(x) = (x+1{,}5)\cdot(x+0{,}5)\cdot(x-0{,}5)\cdot(x-1{,}5) = (x^2-2{,}25)\cdot(x^2-0{,}25)$$

Man setze $f(x) = k$. Dadurch ergibt sich:

$$x^4 - 2{,}5x^2 + 0{,}5625 - k = 0$$

Bei lokalen Extremas müssen sich Mehrfachlösungen ergeben.

$$(x^2 - 1{,}25)^2 = 1 + k$$

Fall 1: $(x^2-1{,}25)^2 = 0$: $k = -1$ Minimum Mehrfachlösung,
Fall 2: $x^2 = 0$: k=0,5625 Maximum

Im Intervall [1,4] gibt es vier Nullstellen, also 3 Intervalle an denen lokale Extremas liegen können. Es kann aus Symmetriegründen nur noch einmal das Maximum 0,5625 auftreten oder keins. Größere Werte kann es also im Bereich [1,4] nicht geben, da es nur drei lokale Extrempunkte geben kann.

Aufgabe 061221:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha\cdot\cot\beta + \cot\beta\cdot\cot\gamma + \cot\gamma\cdot\cot\alpha = 1$$

Lösung von Manuela Kugel:
Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:
1. $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)
2. $\sin(180° - x) = \sin x$
3. $\cos(180° - x) = -\cos x$
4. $\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos(180°-\alpha-\beta)}{\sin(180°-\alpha-\beta)} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (mit (1), (2) und (3))
5. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)
6. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)
Damit ergibt sich für die Ausgangsgleichung mit (4), (5) und (6):

$$\cot\alpha\cdot\cot\beta + \cot\beta\cdot\cot\gamma + \cot\gamma\cdot\cot\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}\right) + \left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

...

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = 1$$

Das Kürzen ist problemlos möglich, da $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Winkel in einem nicht-entarteten Dreieck sind.

Aufgabe 081223:
Man gebe zwölf reelle Zahlen $a_1, ..., a_6, b_1, ..., b_6$ so an, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung gilt:

$$x^{12}+1 = (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)\cdot(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)$$

Lösung von cyrix:
Wähle

$$b_1 = \cdots = b_6 = 1, \quad a_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$
$$a_4 = -a_3, \quad a_5 = -a_2 \text{ und } a_6 = -a_1$$

Dann ist

$$(x^2+a_ix+b_i)(x^2+a_{7-i}x+b_{7-i}) = (x^2+1+a_ix)(x^2+1-a_ix) = x^4+(2-a_i^2)x^2+1$$

also

$$\begin{aligned}
T &:= (x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)(x^2+a_3x+b_3)(x^2+a_4x+b_4)(x^2+a_5x+b_5)(x^2+a_6x+b_6)\\
&= \left(x^4+\left(2-(2+\sqrt{3})\right)x^2+1\right)\cdot\left(x^4+(2-2)\,x^2+1\right)\cdot\left(x^4+\left(2-(2-\sqrt{3})\right)x^2+1\right)\\
&= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^4+1-\sqrt{3}x^2\right)\cdot\left(x^4+1+\sqrt{3}x^2\right)\\
&= \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8+2x^4+1-3x^4\right) = \left(x^4+1\right)\cdot\left(x^8-x^4+1\right)\\
&= x^{12}+x^8-x^8-x^4+x^4+1 = x^{12}+1
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Es ist $x^{24}-1 = (x^{12}-1)(x^{12}+1)$. Also sind die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ genau diejenigen von $x^{24}-1$, die keine Nullstellen von $x^{12}-1$ sind.
Die komplexen Nullstellen von x^n-1 lauten $\zeta_n^k = \cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$, wobei i die ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft.

Damit erhalten wir die komplexen Nullstellen des Polynoms $x^{12}+1$ als

$$x_k = \zeta_{24}^{2k-1} = \cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)+i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$

(Die vierundzwanzigsten Einheitswurzeln mit geradem k sind gleichzeitig auch zwölfte Einheitswurzeln, also Nullstellen von $x^{12}-1$, die hier ausgeschlossen sein sollen.)

Wir erhalten als Zerlegung des Polynoms $x^{12}+1$ in seine Linearfaktoren die Darstellung

$$x^{12}+1 = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{12})$$

Wegen $\cos(2\pi-\phi) = \cos(-\phi) = \cos(\phi)$ und $\sin(2\pi-\phi) = \sin(-\phi) = -\sin(\phi)$ können wir nun den ersten und letzten dieser komplexen Linearfaktoren, den zweiten und vorletzten, usw., zusammenfassen: Für ein k aus $\{7;8;\ldots;12\}$ gilt

$$(x-x_k)(x-x_{13-k}) = \left(x-\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)-i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot \left(x - \cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right) + i\cdot\sin\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)\right) =$$
$$= x^2 - 2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right) + \cos^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right) + \sin^2\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$$
$$= x^2 - 2x\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right) + 1$$

was nun ein rein reelles quadratisches Polynom ist. Setzt man $a_k := -2\cos\left((2k-1)\cdot\frac{2\pi}{24}\right)$, erhält man genau die oben genannten Werte.

Aufgabe 081224:
Es sind, alle reellen Zahlen x anzugeben, für die die Gleichung

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4| = |x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4|$$

erfüllt ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Für die linke Seite der Gleichung gilt:

$$|x+1|\cdot|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x-4| = \pm(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$$

Und für die rechte Seite:

$$|x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3|\cdot|x+4| = \pm(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$$

Somit folgt aus der Ausgangsgleichung

Fall 1: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ oder
Fall 2: $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = -(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Wir ermitteln nun, für welche (nicht ganzzahligen) Werte x die Terme

$$a = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4) \qquad \text{und} \qquad b = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

das gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben, also für welche Werte x Fall 1 oder Fall 2 zu betrachten ist.

	$x<-4$	$-4<x<-3$	$-3<x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$
a	>0	>0	<0	<0	>0	>0
b	>0	<0	<0	>0	>0	>0
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 1

	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$x>4$
a	>0	<0	<0	>0
b	<0	<0	>0	>0
	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1

Ausmultiplizieren liefert

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \quad \text{und}$$
$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

Fall 1: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \iff 4x^3 - 28x = 0$$
$$\iff x^3 - 7x = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = \sqrt{7} \text{ oder } x = -\sqrt{7}$$

$x_0 = 0$ ist offenbar eine Lösung der Ausgangsgleichung. Für $x_1 = \sqrt{7}$ gilt $2 < x_1 < 3$. x_1 liegt somit in einem Bereich, für den Fall 1 zuständig ist (siehe Tabelle) und ist somit eine Lösung. Auch $x_2 = -\sqrt{7}$ ist wegen $-3 < x_2 < -2$ eine Lösung.

Fall 2: Zu lösen ist

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = -x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 14x - 24 \quad \iff \quad 2x^4 - 26x^2 + 48 = 0$$

$$\iff \quad x^4 - 13x^2 + 24 = 0 \quad \iff x = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$$

$$\text{oder } x = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$$

Für $x_3 = \sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$ gilt $x_3 < \sqrt{\frac{13+\sqrt{81}}{2}} = \sqrt{11} < 4$ und $x_3 > \sqrt{\frac{13+\sqrt{64}}{2}} = \sqrt{10{,}5} > 3$. Somit liegt x_3 im Fall-2-Bereich und ist daher eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Analog folgt mit $x_4 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{73}}{2}}$, $x_5 = \sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$ und $x_6 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{73}}{2}}$, dass $-4 < x_4 < -3$, $1 < x_5 < 2$ und $-2 < x_6 < -1$ und daher x_4, x_5 und x_6 Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Insgesamt haben wir also sieben Lösungen x_0,...,x_6.

Aufgabe 301221:
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \quad (1)$ gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \tag{2}$$

Lösung von weird:
Der Beweis ergibt sich einfach aus folgenden Äquivalenzumformungen (man beachte, dass a,b,$c > 0$ vorausgesetzt war!), welche (2) schrittweise in (1) überführen, sodass diese Schlusskette dann auch umkehrbar ist:

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$
$$\frac{b-a}{(a+c)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)}$$
$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$
$$b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (c-b)(b+c) = c^2 - b^2$$

III Runde 3

Aufgabe 021134:
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ zu bestimmen.

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst beobachtet man folgende Eigenschaft reeller Zahlen:

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ mit } t < 1, t \neq 0 : t^3 < t^2$$

Damit kann man zeigen, dass $1-\cos^3 x > 1-\cos^2 x$ gilt, außer wenn $\cos x = 0$ oder $\cos x = 1$, dann gilt Gleichheit. Ebenso gilt $\sin^2 x > \sin^3 x$ überall dort, wo $\sin x$ von 0 und 1 verschieden ist. Unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras in der Form $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ folgt $1-\cos^3 x > \sin^3 x$, was in der Form $\sin^3 x + \cos^3 x < 1$ ein direkter Widerspruch zu der Gleichung ist, deren Lösungen wir suchen.
Also kann sie nur dort Lösungen besitzen, wo die Ungleichung nicht gilt.
Dies ist gerade dort der Fall, wo sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ einen der Werte 0 oder 1 annehmen, also bei $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{\pi}{2}$. Tatsächlich erfüllen diese beiden Werte die Gleichung, womit die vollständige Lösung (unter Berücksichtigung der Periodizität) aus allen Werten

$$x_{2k} = 2k\pi \qquad x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

besteht.

Aufgabe 041234:
Für welche reellen Zahlen x ist die Gleichung $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ erfüllt?

Lösung von Rainer Müller:
Wegen $\tan(x+\pi) = -\cot x$ und $\cot(x+\pi) = -\tan x$ ist

$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \tan^2 x + \cot^2 x$$

und wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right)$ ist

$$\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cot^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

d. h. $\tan^2 x + \cot^2 x$ ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch und symmetrisch zu $x = \frac{\pi}{4}$. Wir müssen daher Lösungen von $\tan^2 x + \cot^2 x = 6$ nur im Intervall $I = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ suchen (0 ausgeschlossen wegen Definitionslücke). Die gegebene Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &= 6 \\
\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x &= 6\sin^2 x\cos^2 x \\
\Leftrightarrow (1-\cos^2 x)^2 + \cos^4 x &= 6(1-cos^2 x)\cos^2 x \\
\Leftrightarrow 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 &= 6\cos^2 x - 6\cos^4 x \\
\Leftrightarrow \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{8} &= 0 \\
\Leftrightarrow \cos^2 x &= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\
\Leftrightarrow \cos x &= \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt, da cos auf I positiv ist.
$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ hat keine Lösung in I, weil cos auf I streng monoton fällt und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ gilt. Also hat die Ausgangsgleichung in I nur eine Lösung, nämlich

$$x = \arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

Wegen der anfangs genannten Symmetrie und Periodizität ist die Menge aller reellen Lösungen

$$\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\} + \frac{\pi}{2}Z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}Z = \left\{\pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \pm\frac{5\pi}{8}, ...\right\}$$

Alternativ-Lösung von weird:
Die Ausgangsgleichung lässt sich auch schreiben als

$$(\tan x + \cot x)^2 = 8$$

woraus sofort

$$\frac{2}{\sin(2x)} = \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x \cos x} = \tan x + \cot x = \pm 2\sqrt{2}$$

und weiter

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt. Diese letzte Gleichung ist aber offensichtlich genau für

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{8} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

erfüllt.

Aufgabe 051236:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$(1) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x \neq 0$$

$$(2) \qquad \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = 0 \qquad \text{für alle reellen x mit } \sin x = 0$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
1) Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Daher reicht es im Induktionsschritt

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin x} + \sin(2n+1)x = \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin x}$$

bzw.

$$\sin^2 nx + \sin(2n+1)x \cdot \sin x = \sin^2(n+1)x$$

zu zeigen. Mit $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$ gilt:

$$\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx = \sin((2n+1)x) \cdot \sin x.$$

2) Aus $\sin x = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere habe alle nx dieselbe Gestalt.
Daher sind alle Summanden auf der linken Seite der Gleichung 0.

Aufgabe 061234:
Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$$

genügen.
Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z. B. ist $\left[\frac{13}{2}\right] = 6$, $[-6{,}5] = -7$ und $[6] = 6$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0 derart, dass

$$\left[\frac{5+6x_0}{8}\right] = \frac{15x_0-7}{5}$$

gilt. Dann ist

$$\frac{15x_0-7}{5} \le \frac{5+6x_0}{8} < \frac{15x_0-7}{5} + 1$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x_0 - \frac{28}{5} \le \frac{5}{2} + 3x_0 < 12x_0 - \frac{8}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{41}{10} < 9x_0 \le \frac{81}{10}$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x_0-7}{5} \le \frac{13}{10}$$

Da $\frac{15x_0-7}{5}$ ganz ist, folgt weiter, dass entweder $\frac{15x_0-7}{5} = 0$ oder $\frac{15x_0-7}{5} = 1$ gilt. Hieraus ergibt sich $x_0 = \frac{7}{15}$ bzw. $x_0 = \frac{4}{5}$.
Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt man, dass diese beiden Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind. Also hat die Gleichung die beiden Lösungen $x = \frac{7}{15}$ und $x = \frac{4}{5}$ und keine weiteren.

Aufgabe 061236:
Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.

Lösung von cyrix:
Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Mit $x = 10°$, $X_1 = \sin(x)$ und $\sin(3x) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$ folgt, dass $X_1 = \sin(10°)$ Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2} = 3X - 4X^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 8X^3 - 6X + 1 = 0$$

ist.
Da $\sin(30°) = \sin(390°) = \sin(750°)$ ist, erfüllen auch $X_2 = \sin(x_2)$ und $X_3 = \sin(x_3)$ mit $x_2 = \frac{390°}{3} = 130°$ und $x_3 = \frac{750°}{3} = 250°$ diese Gleichung.
Offensichtlich sind $X_1 = \sin(10°)$, $X_2 = \sin(130°) = \sin(50°)$ und $X_3 = \sin(250°) = \sin(-70°)$ paarweise verschieden, da die Sinus-Funktion streng monoton steigend im Intervall $[-90°, 90°]$ ist. Also stellen X_2 und X_3 die gesuchten weiteren Lösungen der angegebenen Gleichung dar.

Aufgabe 071232:
Es ist das Produkt

$$\sin 5° \sin 15° \sin 25° \sin 35° \sin 45° \sin 55° \sin 65° \sin 75° \sin 85°$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
Beispiel: $\sin 30° \sin 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Ich verwende

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

und

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Mit der Doppelwinkelfunktion des Sinus und den bekannten Sinuswerten für 30° und 45° lässt sich das Produkt zunächst schreiben als $\frac{1}{64}\sqrt{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$. Das verbleibende Produkt der Sinuswerte lässt sich vereinfachen zu:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ\right)\sin 70^\circ = \frac{1}{4}\left(2\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin 30^\circ + \sin 110^\circ - \sin 70^\circ\right) = \frac{1}{8}$$

Somit ist der Produktwert $\frac{1}{512}\sqrt{2}$.

Aufgabe 081231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{2x}{a(x+a)} + \frac{1}{x-2a} = \frac{4x+6-a}{a(x+a)(x-2a)}$$

erfüllen! Dabei sei a eine reelle Zahl. (Fallunterscheidung!)

Lösung von cyrix:
Damit die Brüche definiert sind, müssen die Nenner verschieden von Null sein. Also gilt $a \neq 0$, $x \neq -a$ und $x \neq 2a$. Unter diesen Bedingungen geht die Gleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner über in
$2x(x-2a) + a(x+a) = 4x + 6 - a$ bzw.

$$0 = 2x^2 - 4ax + ax + a^2 - 4x - 6 + a = 2x^2 - (3a+4)x + (a^2 + a - 6)$$

Diese quadratische Gleichung in x hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{3a+4}{4} \pm \sqrt{\frac{(3a+4)^2}{16} - \frac{8\cdot(a^2+a-6)}{16}} = \frac{3a+4 \pm \sqrt{9a^2+24a+16-8a^2-8a+48}}{4} =$$

$$= \frac{3a+4 \pm \sqrt{a^2+16a+64}}{4} = \frac{3a+4 \pm (a+8)}{4}$$

Es ergibt sich

$$x_1 = \frac{3a+4-(a+8)}{4} = \frac{2a-4}{4} = \frac{a}{2} - 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3a+4+a+8}{4} = a+3$$

Es sind hierbei noch die auftretenden Scheinlösungen auszuschließen, die eine der drei Bedingungen $a \neq 0$, $x \neq -a$ bzw. $x \neq 2a$ nicht erfüllen.
1. Fall: $x_1 = -a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = -a$ bzw. $a - 2 = -2a$, also $a = \frac{2}{3}$.
2. Fall: $x_2 = -a$. Dann ist $a + 3 = -a$, also $a = -\frac{3}{2}$.
3. Fall: $x_1 = 2a$. Dann ist $\frac{a}{2} - 1 = 2a$ bzw. $a - 2 = 4a$, also $a = -\frac{2}{3}$.
4. Fall: $x_2 = 2a$. Dann ist $a + 3 = 2a$, also $a = 3$.
Für alle anderen reellen Werte von a sind genau die beiden Werte $x_1 = \frac{a}{2} - 1$ und $x_2 = a + 3$ Lösungen der Ausgangsgleichung, die genau für $a = -8$ zusammenfallen und sonst voneinander verschieden sind.

Aufgabe 081236:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

mindestens eine reelle Lösung hat. Ferner sind sämtliche Lösungen für $a = \frac{5}{6}$ anzugeben.

Lösung von weird:
Unter Verwendung von

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$$

sowie

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$$

wird die Ausgangsgleichung zu

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x) = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)\right)$$

woraus sich unmittelbar

$$\sin^2(2x) = \frac{4(a-1)}{2a-3} \quad (*)$$

und wegen $0 \leq \sin^2(2x) \leq 1$ die Bedingung $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ für a ergibt. Speziell für $a = \frac{5}{6}$ ist (*) dann äquivalent zu

$$\sin(2x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mit den offensichtlichen Lösungen

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 121231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung

$$\tan x + \cot x = 4$$

erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

Lösung von weird:
Unter Benutzung der Umformung

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}$$

lässt sich die Ausgangsgleichung auch einfach schreiben als

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$

mit den beiden Lösungen

$$x = \frac{\pi}{12} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{5\pi}{12}$$

im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 171232:
Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = 0$$

Lösung von Annika Heckel:
Die Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$x^4 + x^3 + a^2x^2 + x + 1 = x^3 \cdot (x+1) + a^2x^2 + (x+1) = (x^3+1) \cdot (x+1) + a^2x^2$$

$(x+1)$ ist genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist ($x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$)
(x^3+1) ist ebenfalls genau dann negativ, wenn x kleiner als -1 ist ($x^3+1<0 \Leftrightarrow x^3<-1 \Leftrightarrow x<-1$).

Folglich sind $(x+1)$ und (x^3+1) stets beide negativ oder beide größer oder gleich 0. Also ist ihr Produkt $(x+1)\cdot(x^3+1)$ stets größer gleich 0.
a^2x^2 ist als Quadratzahl stets größer oder gleich 0.
Es gilt also $(x^3+1)\cdot(x+1)+a^2x^2 \geq 0$, wobei der Gleichheitsfall nur eintritt, wenn sowohl $(x^3+1)\cdot(x+1)$ als auch a^2x^2 gleich 0 ist.
Also muss gelten:
(1) $(x^3+1)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x=-1$ sowie
(2) $a^2x^2 = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $x=0$ aus $x=-1$ (s.o.) folgt also $a=0$.
Folglich gibt es nur für $a=0$ eine Lösung, nämlich $x=-1$.

Aufgabe 171236B:
Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt $[\frac{7}{2}]=3$; $[5]=5$; $[-\pi]=-4$.
Man beweise:
Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + ... + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

Lösung von cyrix:
Es ist $0 \leq x-[x] < 1$. Also existiert eine eindeutig bestimmte, positive ganze Zahl $k \leq n$ mit

$$\frac{k-1}{n} \leq x-[x] < \frac{k}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad [x]+\frac{k-1}{n} \leq x < [x]+\frac{k}{n}$$

sowie für alle ganzen Zahlen i:

$$[x]+\frac{k-1+i}{n} \leq x+\frac{i}{n} < [x]+\frac{k+i}{n}.$$

Da $[x]$ eine ganze Zahl ist, ist für $0 \leq i \leq n-k$ wegen

$$[x] \leq [x]+\frac{k-1+i}{n} \leq x+\frac{i}{n} < [x]+\frac{k+i}{n} \leq [x]+\frac{k+n-k}{n} = [x]+1$$

also $\left[x+\frac{i}{n}\right] = [x]$.

Analog ist für $n-k+1 = n-(k-1) \leq i \leq n-1$ wegen

$$[x]+1 = [x]+\frac{k-1+n-k+1}{n} \leq [x]+\frac{k-1+i}{n} \leq x+\frac{i}{n} < [x]+\frac{k+i}{n} \leq [x]+\frac{k+n-1}{n} < [x]+\frac{n+n}{n} = [x]+2$$

diesmal $\left[x + \frac{i}{n}\right] = [x] + 1$.
Also ist

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = n \cdot [x] + k - 1,$$

da genau die $k-1$ Summanden für $i = n-1$ bis $i = n-(k-1)$ den Wert $[x]+1$ und die übrigen $n-k+1$ Summanden den Wert $[x]$ besitzen.

Weiterhin ist $n[x] + (k-1) \leq nx < n[x] + k$, also $[nx] = n[x] + k - 1$, woraus direkt das Gewünschte folgt, $\square$.

Aufgabe 241233B:
Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) = (x+n) \cdot (x+n+1) \cdot (x+n+2) \cdot \ldots \cdot (x+2n-1)$$

Lösung von cyrix:
Mit der Substitution $y := x + n - \frac{1}{2} = x + \frac{2n-1}{2}$ geht die zu betrachtende Gleichung äquivalent über in

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \frac{2n-1}{2}\right) = \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y + \frac{2n-1}{2}\right)$$

Multipliziert man die Produkte auf beiden Seiten aus, erhält man positive rationale Zahlen a_0 bis a_n mit

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y - \frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n - a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} \pm \cdots + (-1)^n \cdot a_0 \cdot y^0$$

und

$$\left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(y + \frac{2n-1}{2}\right) = a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-2} \cdot y^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot y^0$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen kommen daher, dass in allen Faktoren auf der linken Seite der Gleichung jeweils Differenzen stehen, d. h., für Potenzen der Form y^{n-k} mit geradem k jeweils genau k solche negativen Faktoren ausgewählt und miteinander multipliziert (und deren Ergebnisse addiert) werden, was ein positives Vorzeichen im entstehenden Koeffizienten erzeugt, während bei ungeradem k nun ungeradzahlig viele negative Zahlen multipliziert (und dann die Produkte addiert) werden, sodass dies negative Vorzeichen erzeugt. Die a_i sind als Summe der Produkte von positiven Brüchen selbst offensichtlich positiv.

Setzt man diese beiden Terme gleich, so finden sich auf beiden Seiten der Gleichung für gerade k die gleichen Werte; für ungerade k jedoch verschiedene Vorzeichen. Durch Subtraktion der linken Seite erhält man die äquivalente Gleichung

$$0 = (-2) \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-1} + a_{n-3} \cdot y^{n-3} + \cdots + a_1 \cdot y^1)$$

wobei $n-1$ ungerade ist, da n nach Aufgabenstellung gerade ist (sodass a_1 der letzte hier auftretende Koeffizient ist). Dies ist äquivalent zu

$$0 = y \cdot (a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \cdots + a_1)$$

Diese Gleichung hat die eine offensichtliche Lösung $y = 0$ bzw. $x = \frac{2n-1}{2}$. Andernfalls ist aber auch wegen n gerade auch $n - 2k$ gerade und also $y^{n-2k} > 0$ für alle $0 < k \leq \frac{n}{2}$, sodass aufgrund der Positivität aller a_i auch $a_{n-1} \cdot y^{n-2} + a_{n-3} \cdot y^{n-4} + \cdots + a_1 > 0$ folgt, es also keine weitere Lösung gibt.
Damit hat die Gleichung der Aufgabenstellung nur genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{2n-1}{2}$, was die Probe auch schnell bestätigt.

Aufgabe 251235:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die folgende Gleichung (1) gilt:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} = 6\cdot\sqrt{x} \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Es ist $6\cdot\sqrt{x} = \frac{(x+2)^2+8x}{x+2}$ bzw. $(x+2)^2+8x = 6\sqrt{x}\cdot(x+2)$. Nach Quadrieren und der Substitution $y := (x+2)^2$ erhält man $y^2+16xy+64x^2 = 36xy$, also $y^2-20xy+64x^2 = 0$ und damit $(y-10x)^2 = 36x^2$, mithin $y = (10\pm 6)x$, d. h. $y_1 = 4x$ und $y_2 = 16x$.

Setzt man dies ein, erhält man einerseits $4x = (x+2)^2 = x^2+4x+4$, also $x^2 = -4$, was auf keine reellen Lösungen führt, bzw. andererseits $16x = x^2+4x+4$, also $x^2-12x+4 = 0$ bzw. $x = 6\pm\sqrt{36-4} = 6\pm 4\sqrt{2}$.

Da beide Werte wegen $6 > 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} > 2$ positiv sind, waren sowohl das Multiplizieren mit $x+2>2>0$ als auch das Quadrieren Äquivalenzumformungen, sodass dies auch beides Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

IV Runde 4

Aufgabe 031242:
Man bestimme alle reellen Werte x, die die folgende Gleichung befriedigen:

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-7x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+m} = 0$$

Dabei ist m eine gegebene reelle Zahl.

Lösung von Henning Thielemann:
Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler gleich null ist und der Nenner verschieden von null ist.

$$\sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+1 = 0 \qquad ; \qquad \sin 3x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = -1$$

Da der Betrag der Werte von Sinus und Kosinus immer kleiner oder gleich 1 ist, müssen für eine Lösung beide einen Wert vom Betrag 1 annehmen:

$$\sin 3x = 1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = -1 \qquad \text{oder} \qquad \sin 3x = -1; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right) = 1$$

Wann nehmen Sinus und Kosinus Werte mit Betrag 1 an?

$$\begin{aligned}
\sin y = 1 &\Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k+\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{N}\right\}\\
\sin y = -1 &\Leftrightarrow y \in \left\{2\pi k-\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{N}\right\}\\
\cos z = 1 &\Leftrightarrow z \in \{2\pi j : j\in\mathbb{N}\}\\
\cos z = -1 &\Leftrightarrow z \in \{2\pi j+\pi : j\in\mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Das bedeutet für $y = 3x$ bzw. $z = \frac{\pi}{3} - 4x$:

$$\begin{aligned}
\sin 3x = 1 &\Leftrightarrow 3x \in \left\{\frac{\pi}{2}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
\sin 3x = -1 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k-1) : k \in \mathbb{N}\right\} \\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - 4x \in \{2\pi j : j \in \mathbb{N}\} \\
&\Leftrightarrow 4x \in \left\{\frac{\pi}{3} - 2\pi j : j \in \mathbb{N}\right\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(1-6j) : j \in \mathbb{N}\right\} \\
\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) = -1 &\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}(-2-6j) : j \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

Gesucht sind also Paare (k, j) ganzer Zahlen mit folgenden Bedingungen:

1. Fall: $\sin y = -1 \wedge \cos z = 1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k-1) = \frac{\pi}{12}(1-6j) \Rightarrow 2(4k+3j) = 3$$

Das führt offensichtlich nicht zu einer Lösung, denn die linke Seite der Gleichung ist stets durch 2 teilbar, die rechte Seite hingegen nie.

2. Fall: $\sin y = 1 \wedge \cos z = -1$:

$$\frac{\pi}{6}(4k+1) = \frac{\pi}{12}(-2-6j) \Rightarrow 4k + 3j = -2 \Rightarrow$$

Diese Gleichung ist für $(k, j) = (1, -2)$ erfüllt und ansonsten nur, wenn man zu dem Term $4k$ ein Vielfaches von $\text{kgV}(4, 3) = 12$ addiert und denselben Wert von $3j$ abzieht.

$$(k, j) \in \{(1 + 3l, -2 - 4l) : l \in \mathbb{Z}\}$$

Aus den oben gefundenen Werten für k ergeben sich folgende Werte für x:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}(4k+1) : k \in \{1 + 3l : l \in \mathbb{Z}\}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6}(12l+5) : l \in \mathbb{Z}\right\}$$

Zuletzt muss noch sichergestellt werden, dass der Nenner des Bruches in der Aufgabenstellung verschieden von null ist, wenn der Zähler null wird.

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + m = \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\frac{\pi}{6}(12l+5)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}(12l+5)\right) + m = \\
&= \sin -\frac{11\pi}{2} - \cos\pi + m = 1 - (-1) + = 2 + m
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Nenner den Wert $2+m$ besitzt, wann immer der Zähler null wird. Ist $m = -2$ wird der Bruch niemals null, ist dagegen $m \neq -2$ wird der Bruch genau dann null, wenn es ein ganzzahliges l gibt mit $x = \frac{\pi}{6}(12l + 5)$.

Aufgabe 041241:
Geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

an, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die reelle Zahl x sei eine Lösung der Gleichung. Da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, und $\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x} \geq 0$ ist, gilt $0 \leq x \leq p$. Durch zweimaliges Quadrieren der Ausgangsgleichung erhält man $x^4 + 4x^2(1-p) = 0$.

(1) $0 < p \leq 1$

Für $p \leq 1$ ist also notwendig $x = 0$. Für $p \leq 1$ kann es also außer $x = 0$ keine Lösung geben.

Probe : $\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = 2\sqrt{p} > 0 = x$, weil p positiv. Damit gibt es bei $p \leq 1$ keine Lösung!

(2) $1 < p$

Für $p > 1$ könnten $x = 0$ und $x = 2\sqrt{p-1}$ Lösungen sein.

Probe : $x = 0$ ist ebenso wie im 1. Fall keine Lösung.

Teste nun $x = 2\sqrt{p-1}$:

$$s = \sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = \sqrt{p + 2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p - 2\sqrt{p-1}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{p-1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{p-1}-1\right)^2} = |\sqrt{p-1}+1| + |\sqrt{p-1}-1|$$

Der Betrag des ersten Terms ist gleich dem Term selbst; der Betrag des zweiten Terms ist gleich dem Term selbst für $2 \leq p$ und dem Negativen dessen für $1 < p < 2$. Wir erhalten also für $1 < p < 2$:

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + 1 - \sqrt{p-1} = 2 \neq 2\sqrt{p-1}$$

Für $2 \leq p$ ist

$$s = \sqrt{p-1} + 1 + \sqrt{p-1} - 1 = 2\sqrt{p-1} = x$$

und damit die einzige Lösung.

Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = 2\sqrt{p-1}$ für den Fall, dass $p \geq 2$ gilt.

Aufgabe 051241:
Man ermittle alle reellen Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die $(a+b)^n = a^n + b^n$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gegebene Gleichung gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

I. 1) $a = 0$, b beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
2) $b = 0$, a beliebig reell; n beliebig ganz ≥ 1,
II. $a) - b$, n ungerade,
III. $n = 1$, a,b beliebig reell.

Beweis: Dass die gegebene Gleichung in den genannten Fällen eine wahre Aussage wird, prüft man durch Einsetzen nach.
Jetzt wird gezeigt, dass die Gleichung in keinem anderen Fall erfüllt ist.
Angenommen, die gegebene Gleichung sei erfüllt und es liege keiner der angegebenen Fälle vor. Dann kann man aus Symmetriegründen o. B. d. A. annehmen, dass $|a| \geq |b|$, insbesondere also $a \neq 0$ ist.
Dividiert man beide Seiten der gegebenen Gleichung durch a^n, so erkennt man, dass

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

oder mit $x = \frac{b}{a}$

$$0 < |x| = \frac{|b|}{|a|} \leq 1 \qquad ; \qquad (1+x)^n = 1 + x^n$$

gelten müsste. Ist nun $x > 0$, so gilt

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + ... + x^n > 1 + x^n$$

denn da nicht der Fall III vorliegt, ist $n \geq 2$. Ist aber $n < 0$ und n gerade, so ist $(1+x)^n < 1$ und $1 + x^n > 1$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu (1).
Wir betrachten nun noch den letzten möglichen Fall $n = 2k+1 \geq 3$ (k natürliche Zahl), $x = -t$, $0 < t < 1$. Dann ist

$$(1+x)^n = (1-t)^n < 1 - t < 1 - t^n = 1 + x^n$$

im Widerspruch zu (1).

Aufgabe 051245:
Man beweise, dass $\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$ gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Zur Lösung werden die Sinus- und Kosinuswerte für $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ benutzt, welche sich als $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ schreiben lassen, wobei k beim Sinus die Werte von 0 bis 4 und beim Kosinus vom 4 bis 0 durchläuft. Zudem kann man wieder

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{und} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

nutzen sowie die Additionstheoreme

$$\sin(x-y) = \sin x \cos x - \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Damit:

$$\tan(7°30') = \frac{\sin(7°30')}{\cos(7°30')} = \frac{2\sin(7°30')\sin(7°30')}{2\sin(7°30')\cos(7°30')} = \frac{1-\cos(15°)}{\sin(15°)} = \frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)}$$

Und somit:

$$\frac{1-\cos(45°-30°)}{\sin(45°-30°)} = \frac{1-\cos(45°)\cos(30°)-\sin(45°)\sin(30°)}{\sin(45°)\cos(30°)-\cos(45°)\sin(30°)} =$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$$

Aufgabe 081245:
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$\sin 5x = 16 \sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist

$$\sin 5x = 5 \sin x \cos^{5-1} x - \binom{5}{3} \sin^3 x \cos^{5-3} x + \binom{5}{5} \sin^5 x \cos^{5-5} x = 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x$$

$$= \sin x (5\cos^4 x - 10(1-\cos^2 x)\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2)$$

$$= \sin x(5\cos^4 x - 10\cos^2 x + 10\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$$
$$= 16 \sin x \left(\cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}\right)$$

Es bleibt also zu zeigen:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos^4 x - \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{16}$$

Für die linke Seite nutzen wir nun (zweimal) die Produktformel:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) - \cos(2x)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(-2\cos^2 x + 1 + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$
$$= \cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x\left(2 + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Direkte Berechnung der Summe und des Produkts:
Das Produkt ist einfach und braucht nur die Doppelwinkelfunktion des Sinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}{2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)}{2\cdot 2\cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = -\frac{1}{4}$$

Für die Summe braucht man zudem noch die Produktformel des Kosinus:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Alternativ lassen sich Produkt und Summe auch über die Einzelwerte berechnen, welche Rainer Müller in 041244 verwendet. Im Gegensatz zu seiner Methode könnte man diese Werte wie folgt berechnen:
Es ist

$$\cos(72°) = 2\cos^2(36°) - 1 = 2\cos^2(144°) - 1 = 2(2\cos^2(72°) - 1)^2 - 1 = 8\cos^4(72°) - 8\cos^2(72°) + 1$$

Damit ist $t = \cos(72°)$ Nullstelle von $8t^4 + 8t^2 - t + 1$.
Offensichtlich ist $t = 1$ Nullstelle. Es folgt damit $8t^4 + 8t^2 - t + 1 = (t-1)(8t^3 + 8t^2 - 1)$
Der zweite Faktor ist offensichtlich

$$8t^3 + 4t^2 + 4t^2 - 1 = 4t^2(2t+1) + (2t-1)(2t+1) = (2t+1)(4t^2 + 2t - 1)$$

Die Kosinuswerte für $t = 1$ und $t = -\frac{1}{2}$ sind bekannt. Damit muss $4t^2 + 2t - 1$ der Faktor werden, welcher Null ergibt. Vom Verlauf der Kosinusfunktion weiß man, welche Nullstelle zu wählen ist.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Es sei $z := \cos x + i \sin x$ und es sei $\omega := e^{\frac{i\pi}{5}}$. Dann ist ω^2 eine primitive fünfte Einheitswurzel und somit gilt $u^5 - 1 = (u-1)(u-\omega^2)(u-\omega^4)(u-\omega^{-2})(u-\omega^{-4})$ für alle $u \in \mathbb{C}$. Außerdem haben z und ω beide Betrag 1, also gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$ und $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$.
Somit ist

$$\sin(5x) = \operatorname{Im} z^5 = \frac{1}{2i}(z^5 - z^{-5})$$
$$= \frac{1}{2iz^5}(z^{10} - 1) = \frac{1}{2iz^5}((z^2)^5 - 1)$$
$$= \frac{1}{2iz^5}(z^2 - 1)(z^2 - \omega^2)(z^2 - \omega^4)(z^2 - \omega^{-2})(z^2 - \omega^{-4}).$$

Wegen

$$z^2-\omega^{2k}=z\omega^k(z\omega^{-k}-z^{-1}\omega^k)=z\omega^k\cdot 2i\,\mathrm{Im}(z\omega^{-k})=2iz\cdot\omega^k\cdot\sin\left(x-\frac{k\pi}{5}\right),$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}\sin(5x)&=\frac{1}{2iz^5}(z^2-1)(z^2-\omega^2)(z^2-\omega^4)(z^2-\omega^{-2})(z^2-\omega^{-4})\\&=\frac{1}{2iz^5}\cdot(2iz)^5\cdot\omega^{0+1+2-1-2}\cdot\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\\&=16\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 091245:
Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\lambda(\tan^4 x-\cot^4 x)$$

a) keine, b) genau eine, c) genau zwei, d) mehr als zwei reelle Lösungen im Intervall $0<x<\frac{\pi}{2}$ hat.

Lösung von weird:
Zunächst ist klar, dass die Ausgangsgleichung

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\lambda(\tan^4 x-\cot^4 x)\quad(*)$$

für ein beliebiges $\lambda\in\mathbb{R}$ stets die Lösung $x=\frac{\pi}{4}$ besitzt.

Weiterhin ist jeder Lösung $\tilde{x}\in(0,\frac{\pi}{4})$ in umkehrbar eindeutiger Weise die Lösung $\frac{\pi}{2}-\tilde{x}$ zugeordnet, da (*) gegenüber einer Vertauschung $x\leftrightarrow\frac{\pi}{2}-x$ offensichtlich invariant ist.

Aus dieser Vorbemerkung folgt bereits, dass die Fälle a) und c) in der Aufgabenstellung für ein gegebenes $\lambda\in\mathbb{R}$ gar nicht auftreten können. Ferner dürfen wir uns bei der Suche nach weiteren Lösungen außer $x=\frac{\pi}{4}$ zu einem gegebenem $\lambda\in\mathbb{R}$ nun auf das Intervall $(0,\frac{\pi}{4})$ beschränken, was die Fälle b) und d) betrifft.
Wir betrachten dazu die Funktion $\tilde{\lambda}:(0,\frac{\pi}{4})\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\lambda}(x)=\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\tan^4 x-\cot^4 x}$$

was man Kürzen durch $\sin^4 x-\cos^4 x\neq 0$ auch einfacher schreiben kann als

$$\tilde{\lambda}(x)=\frac{\sin^4 x\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\sin^4(2x)}{8(2-\sin^2(2x))}$$

Aus der zweiten Darstellung folgt insbesondere sofort, dass $\tilde{\lambda}(x)$ auf $(0,\frac{\pi}{4})$ streng monoton steigend ist und dort jeden Wert in $(0,\frac{1}{8})$ genau einmal annimmt.

Der Fall d) (mit dann genau 3 Lösungen) tritt also genau für $\lambda\in(0,\frac{1}{8})$ ein, für die anderen $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(0,\frac{1}{8})$ bleibt es bei der einen Lösung $x=\frac{\pi}{4}$, was also dann dem Fall b) entspricht.

Aufgabe 111244:
a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die die Gleichung $x^3z+x^2y+xz+y=x^5+x^3$ erfüllen.
b) Man gebe unter den in a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x,y,z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Die Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu $(x^2+1)(xz+y-x^3)=0$. Der erste Faktor ist für alle reelle Zahlen positiv. Daher reicht es den zweiten zu betrachten. Für $x=0$ ist $y=0$ und $z\in\mathbb{R}$ beliebig, also haben wir die Tripel $(0,0,z)$. Für $x\neq 0$ können wir die Gleichung nach z auflösen $z=x^2-\frac{y}{x}$ und erhalten für beliebige $x,y\in\mathbb{R}$ das Lösungstripel $(x,y,x^2-\frac{y}{x})$.

b) Aus $x=0$ folgt $y=0$. Aus $z=0$ folgt $y=x^3$. Also haben die beiden anderen Koordinaten dasselbe Vorzeichen. Daher bleibt nur $y=0$ übrig. In diesem Fall gilt $z=x^2$. Nur für $x<0$ haben wir unterschiedliche Vorzeichen und somit sind die gesuchten Triple $\{(x,0,x^2)|x<0\}$.

Aufgabe 181244:
Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen m,n mit $m>n$ die durch

$$s(m,n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$$

definierte Summe $s(m,n)$ den Wert hat:

$$s(m,n)=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}mn(m-n)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
(I) Es wird bewiesen, dass die Behauptung für den kleinstmöglichen Wert 2 von m und alle zugehörigen Werte von n zutrifft: Als zugehörigen Wert gibt es genau $n=1$, und in der Tat gilt einerseits

$$s(2,1)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{1}|i-j|=\sum_{i=1}^{2}|i-1]=0+1=1$$

und andererseits

$$\frac{1}{3}(1-1)\cdot 1\cdot(1+1)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot(2-1)=1$$

(II) Für jede natürliche Zahl $k\geq 2$ wird gezeigt, dass aus der Richtigkeit der Behauptung für $m=k$ und alle zugehörigen Werte von n die Richtigkeit der Behauptung für $m=k+1$ und alle zugehörigen Werte von n folgt:
Für die zu $m=k+1$ gehörigen Werte von n gilt $k+1>n$, also $k\geq n$.

Fallunterscheidung:
1. Fall $k>n$. Es gilt

$$s(k+1,n)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{n}|i-j|=s(k,n)+\sum_{j=1}^{n}|k+1-j|=s(k,n)+\sum_{j=1}^{n}(k+1-j)0$$

$$=s(k,n)+\frac{k+(k+1-n)}{2}\cdot n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}kn(k-n)+\frac{1}{2}(2k+1-n)n=$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}n(k+1)(k+1-n)$$

wie behauptet.
2. Fall $n=k$. Es gilt einerseits

$$s(k+1,k)=\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k}|i-j|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|i-j|+\sum_{j=1}^{k}|k+1-j|=$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|i-j|+|i-k|\right)+\sum_{j=1}^{k}|k+1-j| = s(k,k-1)+\sum_{i=1}^{k}(k-j)+\sum_{j=1}^{k}|k+1-j| =$$

$$= \frac{1}{3}(k-2)(k-1)k+\frac{1}{2}k(k-1)\cdot 1+\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}k(k+1) =$$

$$= \frac{1}{6}k(2k^2+3k+1) = \frac{1}{6}k(2k+1)(k+1)$$

andererseits erhält man für $m = k+1$ und $n = k$ auch

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}mn(m-n) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\cdot 1 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 201243:
Gegeben sei eine reelle Zahl $a \neq 0$ mit $|a| \neq 1$.
Man ermittle alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2}$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Eine reelle Zahl x ist genau dann Lösung der Gleichung

$$\frac{(x^4+1)(x^4+6x^2+1)}{x^2(x^2-1)^2} = A \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{(a^4+1)(a^4+6a^2+1)}{a^2(a^2-1)^2} \qquad (1)$$

wenn $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ und

$$(x^4+1)(x^4+6x^2+1) = Ax^2(x^2-1)^2 \qquad \text{also}$$

$$x^8+(6-A)x^6+(2+2A)x^4+(6-A)x^2+1 = 0 \qquad (2)$$

gelten. Diese Gleichung ist wegen $x \neq 0$ äquivalent mit

$$x^4+\frac{1}{x^4} = (6-A)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2+2A = 0 \qquad (3)$$

Setzt man $x^2+\frac{1}{x^2} = t$, so ist $x^4-tx^2+1=0$ (4) und $x^4+\frac{1}{x^4} = t^2-2$.
x ist also genau dann Lösung von (1), wenn gilt:

$$t^2+(6-A)t+2A = 0 \qquad (5)$$

Nun ist aus der Gleichung (1) ersichtlich, dass $x = a$ und $x = -a$ (6) Lösungen sind. Setzt man ferner $x = \frac{1}{a}$ oder $x = -\frac{1}{a}$ auf der linken Seite von (1) ein, so erhält man einen Term, der gleich A ist. Daher sind auch

$$x = \frac{1}{a} \qquad \text{und} \qquad x = -\frac{1}{a} \qquad (7)$$

Lösungen von (1). Daraus folgt, dass die quadratische Gleichung (5) die Lösung $t_1 = a^2+\frac{1}{a^2}$ hat. Nach dem Vietaschen Wurzelsatz ist also ihre zweite Lösung gleich

$$t_2 = \frac{2A}{a^2+\frac{1}{a^2}} = \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}$$

Da die Gleichung (5) höchstens zwei Lösungen t_1 und t_2 hat und die Gleichung (4) für $t = t_1$ die vier Lösungen $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$ und daher als Gleichung vierten Grades keine weiteren hat (auf Grund der

Voraussetzungen sind die vier Lösungen paarweise voneinander verschieden), erhält man alle weiteren reellen Lösungen x der Gleichung (1) wegen (4) aus der Gleichung

$$x^4 - \frac{2(a^4+6a^2+1)}{(a^2-1)^2}x^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

Diese Gleichung hat die Diskriminante

$$D = \left(\frac{a^4+6a^2+1}{a^4-2a^2+1}\right)^2 - 1 = \frac{16a^2(a^2+1)^2}{(x^2-1)^4} > 0$$

Daher hat die Gleichung (8) genau diejenigen x als Lösung, für die eine der Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^4+6a^2+1}{(a^2-1)^2} \pm \frac{4a(a^2+1)}{(a^2-1)^2} \qquad \text{d. h.} \qquad x^2 = \frac{(a+1)^4}{(a^2-1)^2} \quad ; \quad x^2 = \frac{(a-1)^4}{(a^2-1)^2}$$

gilt. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen positiv sind, sind das genau die Zahlen

$$x = \frac{a+1}{a-1}; \qquad x = -\frac{a+1}{a-1}; \qquad x = \frac{a-1}{a+1}; \qquad x = -\frac{a-1}{a+1} \qquad (9)$$

Wegen $|a| \neq 1$ gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 0$. Ferner ist $a+1 \neq a-1$ und wegen $a \neq 0$ auch $a+1 \neq -a+1$, also gilt für jede dieser vier Zahlen $x \neq 1$ und $x \neq -1$.
Damit ist bewiesen, dass die gegebene Gleichung genau die in (6), (7) und (9) angegebenen Zahlen als Lösungen besitzt, nämlich die Zahlen:

$$a; \qquad -a; \qquad \frac{1}{a}; \qquad -\frac{1}{a}; \qquad \frac{a+1}{a-1}; \qquad -\frac{a+1}{a-1}; \qquad \frac{a-1}{a+1}; \qquad -\frac{a-1}{a+1}$$

Aufgabe 291241:
Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
a) Zurückführen von (1) auf eine einfachere Gleichung:
I. Wenn (1) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x \qquad (2)$$

Beweis: Wäre $a + \sqrt{x} > x$, so folgte

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > ... > a + \sqrt{x} > x$$

im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1). Im wesentlichen läuft der Beweis analog für $a + \sqrt{x} < x$.

II. Wenn (2) für ein reelles a (einschließlich Probe und Rückschluss):
Für $a < -0{,}25$ hat (2) und damit (1) keine reelle Lösung x.
Für $a = -0{,}25$ ist $x = 0{,}25$ einzige Lösung von (2) und damit (1).
Für $-0{,}25 < a \leq 0$ sind genau die zwei Zahlen

$$x_{1,2} = 0{,}5 \cdot (2a + \pm\sqrt{4a+1})$$

Für $a > 0$ genau die Zahl

$$x = 0{,}5 \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a+1})$$

Lösung von (2), also von (1).

I.II Ungleichungen

I Runde 1

Aufgabe V01101:
Man beweise, dass es kein Zahlentripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^2 + z^3 = 2xyz$$

Lösung von Steffen Polster:
Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass das arithmetische Mittel A dreier nicht negativer reeller Zahlen a, b, c nie kleiner als das geometrische Mittel G dieser Zahlen ist, d. h. es ist

$$A = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = G \tag{1}$$

Setzt man: $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$, so folgt aus (1), dass

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \qquad \text{d. h.} \quad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

ist. Da weiter wegen $x > 0, y > 0, z > 0$

$$3xyz > 2xyz$$

ist, gilt stets

$$x^3 + y^3 + z^3 > 2xyz$$

und daher gibt es kein Tripel $(x; y; z)$ positiver reeller Zahlen, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe V01208:
Ein Trugschluss „Zwei ist größer als vier!“
Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{16} \qquad \text{oder} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Wir logarithmieren und erhalten:

$$2\lg\left(\frac{1}{2}\right) > 4\lg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wie dividieren durch $\lg\left(\frac{1}{2}\right)$ und erhalten $2 > 4$.
Wo steckt der Fehler?

Lösung von OlgaBarati:

$$2\lg(\frac{1}{2}) > 4\lg(\frac{1}{2})$$
$$2\lg(1) - 2\lg(2) > 4\lg(1) - 4\lg(2)$$
$$-2\lg(2) > -4\lg(2) \;\equiv\; -2 > -4 \;\equiv\; 2 < 4$$

Die Division durch $\lg(\frac{1}{2})$ war in der Weise falsch. Da $\lg(\frac{1}{2}) < 0$ ist, hätte bei der Division das Relationszeichen gedreht werden müssen.

Aufgabe 021114:
Es ist zu beweisen, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2\sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}$$

Lösung von Steffen Weber:
Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(2x)$ nicht negativ, also gilt $(1-\sqrt{\sin(2x)})^2 \geq 0$ bzw. $1+\sin(2x) \geq 2\sqrt{\sin(2x)}$.
Nach Additionstheoremen ist das äquivalent zu

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x \geq 2\sqrt{2}\sin x\cos x \qquad (1)$$

Da $2\sqrt{2}\sin x\cos x \geq 0$ und $2\sin x\cos x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ folgt aus (1) die Behauptung.

Aufgabe 021116:
Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

Lösung von Korinna Grabski:
Zunächst kann man bereits aus den Wurzeln folgende Bedingung ableiten: $-1 \leq x \leq 3$. Als nächstes sind die Stellen zu berechnen, an denen die Ungleichung ihren Wahrheitswert wechselt, also wo $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} &= \frac{1}{2} \\
\sqrt{3-x} &= \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \\
3-x &= \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1} \\
\frac{7}{4} - 2x &= \sqrt{x+1} \\
\frac{49}{16} + 4x^2 - 7x &= x+1 \\
4x^2 - 8x + \frac{33}{16} &= 0 \\
x^2 - 2x + \frac{33}{64} &= 0 \\
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{33}{64}} \\
x_1 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8} \quad ; \quad x_2 &= 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}
\end{aligned}$$

Da quadriert wurde, kann es Scheinlösungen geben. Es muss also noch eingesetzt werden.
$\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = -\frac{1}{2} \to$ Scheinlösung $\sqrt{3-x_2} - \sqrt{x_2+1} = \frac{1}{2} \to$ Lösung x_2 ist also die gesuchte Grenze.
Die Ungleichung wird wahr für alle x, für die gilt: $-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Aufgabe 031114:
Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Lösung von Steffen Weber:
Nach Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}
\sin^2 3x &= (\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x)^2 \\
&= \sin^2 x\cos^2 2x + \cos^2 x\sin^2 2x + 2\sin x\cos x\sin 2x\cos 2x \\
&= \sin^2 x(1-\sin^2 2x) + (1-\sin^2 x)\sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x \\
&= \sin^2 x + \sin^2 2x - 2\sin^2 x\sin^2 2x + \sin^2 2x(1-2\sin^2 x)
\end{aligned}$$

Also erfüllen genau die reellen x die Ungleichung $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$, die auch die Ungleichung $2\sin^2 x \sin^2 2x > \sin^2 2x(1 - 2\sin^2 x)$ erfüllen. Ist x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so wird diese Ungleichung nie erfüllt, sonst folgt nach Division durch $\sin^2 x$

$$2\sin^2 x > 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2}$$

Da x kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, erfüllen alle

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$$

die Ungleichung.

Aufgabe 041211:
Aus einer vierstelligen Tafel entnehmen wir die folgenden Näherungswerte:

$$\sqrt[3]{636000} \approx 86{,}00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389000} \approx 73{,}00$$

Daher ist $z = \sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 13$.

Ohne Benutzung einer weiteren Tafel soll entschieden werden, ob z größer, kleiner oder gleich 13 ist.

Lösung von Rainer Müller:

Wir behandeln die drei Möglichkeiten $z > 13$, $z = 13$ und $z < 13$, indem wir die Relation $z \gtreqless 13$ umformen, bis wir eine Aussage erhalten, in der direkt erkennbar ist, für welches Relationszeichen sie gilt. Mit der Abkürzung $a = \sqrt[3]{389}$ gilt

$$z \gtreqless 13 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[3]{636000} \gtreqless 13 + 10a$$

$$\Leftrightarrow\; 636000 \gtreqless 13^3 + 3 \cdot 13^2 \cdot 10a + 3 \cdot 13 \cdot 10^2 a^2 + 1000a^3$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900a^2 + 5070a - 244803 \;\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless 3900\left(a^2 + \frac{13}{10}a - \frac{6277}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow\; 0 \gtreqless \left(a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20}\right) \cdot \left(a - \frac{-13 - \sqrt{25277}}{20}\right)$$

Wegen $a > 0 > (-13 - \sqrt{25277})/20$ ist der zweite Faktor der letzten Zeile positiv, so dass die Relation äquivalent ist zu

$$0 \gtreqless a - \frac{-13 + \sqrt{25277}}{20} \;\Leftrightarrow\; -13 + \sqrt{25277} \gtreqless 20a$$

$$\Leftrightarrow\; -13^3 + 3 \cdot 13^2\sqrt{25277} - 3 \cdot 13 \cdot 25277 + 25277\sqrt{25277} \gtreqless 20^3 \cdot 389$$

$$\Leftrightarrow\; -988000 + 25784\sqrt{25277} \gtreqless 3112000 \;\Leftrightarrow\; 25784\sqrt{25277} \gtreqless 4100000$$

$$\Leftrightarrow\; 3223\sqrt{25277} \gtreqless 512500$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren, und die Relation ist äquivalent zu

$$262570625933 \gtreqless 262656250000$$

Diese Aussage gilt nur für „<“, also ist $z < 13$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist heutzutage ohne Bedeutung, denn niemand würde heute Kubikwurzeln in einer vierstelligen Tafel nachschlagen, sondern einen Taschenrechner benutzen, der deutlich genauer und zudem platzsparender ist. Schon mit nur sechs Stellen Genauigkeit ist $\sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 85.9975 - 72.9989 = 12.9986 < 13$. Interessant sind solche Aufgaben, wenn beide Seiten gleich sind (wie

z. B. in Aufgabe 041116), denn exakte Gleichheit lässt sich auch durch beliebig genaue Gleitkommarechnung nicht zeigen.

Aufgabe 081214:
Quadratwurzeln berechnet man häufig mit der folgenden Näherungsformel:

$$\sqrt{a^2+b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

a) Es ist zu beweisen, dass für den Fehler $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2+b}$ dieses Näherungswertes stets $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$ gilt.

b) Stellen Sie eine analoge Näherungsformel für $\sqrt[3]{a^3+b}$ auf, und geben Sie eine Abschätzung für den Fehler!

Bei der praktischen Anwendung wird b relativ klein gewählt. Wie lässt sich die Abschätzung vereinfachen, wenn man etwa a, b ganzzahlig voraussetzt, und zwar so, dass a^3+b zwischen den Kubikzahlen a^3 und $(a+1)^3$ liegt?

c) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Formeln Näherungswerte für $\sqrt{56}$ und $\sqrt[3]{80}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es gilt:

$$\delta \quad = \quad \frac{\left(x+\frac{y}{2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y}\right)^2}{x+\frac{y}{2x}+\sqrt{x^2+y}} = \frac{y^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{y}{2x}+x\sqrt{1+\frac{y}{x^2}}},$$

also $0 < \delta < \frac{y^2}{8x^3}$.

b) Entsprechend ergibt sich, wenn man $\sqrt[3]{x^2+y}$ durch $x + \frac{y}{3x^2}$ ersetzt, für den Fehler

$$\delta = x + \frac{y}{3x^2} - \sqrt[3]{x^3+y}$$

die Eingabelung

$$0 < \delta < \frac{x^2(9x^3+y)}{81x^8},$$

denn es gilt

$$\delta = \frac{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^3 - (x^3+y)}{\left(x+\frac{y}{3x^2}\right)^2 + \left(x+\frac{y}{3x^2}\right)\sqrt[3]{x^3+y} + \left(\sqrt[3]{x^3+y}\right)^2} < \frac{(9x^3+y)y^2}{3x^2(3x^2)^3}.$$

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49+7} = 7 + \frac{7}{2\cdot 7} - \delta = 7{,}5 - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{49}{8\cdot 7^3} = \frac{1}{56}$, also $0 < \delta < 0{,}0179$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $0 < \delta < 0{,}0167$ ist.)

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64+16} = 4 + \frac{16}{3\cdot 16} - \delta = \frac{13}{3} - \delta$ mit $0 < \delta < \frac{16^2(9\cdot 64+16)}{81\cdot 4^8} = \frac{37}{16\cdot 81} < 0{,}029$. (Eine genauere Rechnung zeigt, dass $\delta < 0{,}025$ ist.)

Aufgabe 101213:
Beweisen Sie!
Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt

$$\begin{aligned} 2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= 2a^2+2b^2+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+8 \\ &= (a+b)^2+(a-b)^2+\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(ab)^2}+8 \end{aligned}$$

Wegen $a+b=1$ ist also

$$2\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=(a-b)^2+\frac{(a-b)^2+1}{(ab)^2}+9 \tag{2}$$

Der Term (2) erreicht für positive a,b mit $a+b=1$ sein Minimum genau dann, wenn $a=b$ ist.

Beweis: Es gilt $(a-b)^2 \geq 0$ für alle positiven reellen Zahlen a und b, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a=b$ ist. In diesem Fall wird der erste Summand von (2) gleich 0, und beim zweiten Summanden erreicht der Zähler sein Minimum. Nun gilt

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} \leq \frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

und das Gleichheitszeichen tritt wieder genau ein, wenn $a=b$ ist. In diesem Fall erhält man daher für den Nenner des zweiten Summanden ein Maximum. Deshalb erreicht auch der zweite Summand und somit die Summe für $a=b$, d. h. wegen $a+b=1$ für $a=b=\frac{1}{2}$, ihr Minimum.

Folglich ist der kleinste Wert, den der Term (1) unter Berücksichtigung von $a+b=1$ annimmt,

$$2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}+2\right)^2=25$$

Daher gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

Aufgabe 131214:
Gegeben seien k reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k natürliche Zahl, $k \geq 1$), für die

(1) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ und

(2) $a_1+a_2+\ldots+a_k=1$ gilt.

Man beweise, dass dann für alle natürlichen Zahlen n mit $0<n \leq k$ die Ungleichung

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \frac{1}{k} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir setzen $x_1 = a_1$ und $x_m = a_m - a_{m-1}$, für $m = 2,3,...,k$. Dann gilt $x_m \geq 0$ für $m = 1,2,...,k$ sowie

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 \\ a_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &...... \\ a_n &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \\ &...... \\ a_k &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + ... + x_k \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $-\frac{k}{n} \leq -1$ und (2)

$$k\left(x_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x_3 + ... + \left(1 - \frac{n-1}{n}x_n\right)\right) \leq$$
$$\leq kx_1 + (k-1)x_2 + (k-2)x_3 + ... + (k-(n-1))x_n + ... + x_k = a_1 + ... + a_k = 1$$

Daraus folgt
$$\frac{1}{n}(a_1 + .. + a_n) = \frac{1}{n}(nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + ... + x_n) \leq \frac{1}{k}$$
w. z. b. w.

Aufgabe 261212:
Man beweise:

a) Für jedes Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen, für das $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, gibt es ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a, b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Sind a, b und c beliebige positive reelle Zahlen, für die $c^4 = a^4 + b^4$ gilt, dann gilt:
$$c > a \qquad ; \qquad c > b \qquad ; \qquad a + b > c \tag{1,2,3}$$
denn es gilt
$$(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 > a^4 + b^4 = c^4$$
also $(a + b)^4 > c^4$, und wegen $a + b > 0$ folglich $a + b > c$. Aus (1), (2), (3) folgt:

Ist (a,b,c) ein Tripel positiver reeller Zahlen mit $c^4 = a^4 + b^4$, so erfüllen a,b,c die Bedingungen der Dreiecksungleichung (dass jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden anderen), also gibt es dann stets ein Dreieck mit a, b und c als Zahlenwerte seiner Seitenlängen.

b) Wenn für die Zahlenwerte a,b und c der Seitenlängen eines Dreiecks $a^4 + b^4 = c^4$ gilt, dann ist c der Zahlenwert der größten Seitenlänge der Dreiecks.

Angenommen, dieses Dreieck wäre nicht spitzwinklig, dann läge der genannten Seite ein rechter oder stumpfer Winkel gegenüber, und es würde nach dem Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ oder nach dem Kosinussatz $c^2 > a^2 + b^2$, folglich in beiden Fällen $c^2 \geq a^2 + b^2$ gelten, also
$$c^4 \geq (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 > a^4 + b^4$$

mithin also $c^4 > a^4 + b^4$, im Widerspruch zu $c^4 = a^4 + b^4$.

Die Annahme ist also falsch. Das Dreieck ist daher spitzwinklig.

Aufgabe 271213:
Es seien wie üblich a, b, c die Seitenlängen eines beliebigen Dreiecks.

Man untersuche, ob für jedes Dreieck die Ungleichung $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Kosinussatz gilt für jedes Dreieck (mit den üblichen Bezeichnungen α, β, γ für die Winkelgrößen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Daraus erhält man durch Addition

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2(a^2 + b^2 + c2) - 2(ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha) \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2(ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha) \qquad (1) \end{aligned}$$

Wegen $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$, also $\cos \gamma < 1$, $\cos \beta < 1$, $\cos \alpha < 1$ (und $ab > 0$) folgt aus (1)

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

Die genannte Ungleichung gilt also für jedes Dreieck.

Hinweis: Statt des Kosinussatzes genügt es, aus der Dreiecksungleichung der Beziehungen $a^2 > (b - c)^2$, $b^2 > (c - a)^2$, $c^2 > (a - b)^2$ herzuleiten und zu addieren.

Aufgabe 321212:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $a \geq 3$ die Ungleichung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a + 1}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für alle reellen Zahlen a gilt

$$\begin{aligned} a^4 - (a + 1)^3 &= a^4 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1 \\ &= a^3(a - 3) + 2a^2(a - 3) + 3a(a - 3) + 6(a - 3) + 17 \end{aligned}$$

Ist $a \geq 3$, so folgt hieraus $a^4 > (a + 1)^3$ und damit wegen $a > 0$ die Behauptung $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a + 1}$.

Aufgabe 341214:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, welche die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} < \frac{1}{x - 1} \quad \text{erfüllen.}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Für $x \leq 1$ ist (mindestens) der Term $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ nicht definiert, x also nicht Lösung.

II. Für $x > 1$ gilt: Die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad (1)$$

ist äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \qquad (2)$$

Wegen $x+1 > x-1 > 0$ gilt $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, also ist $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ positiv. Auch $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist positiv. Daher ist (2) äquivalent zu

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+1}$$

dies zu

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$$

und dies wegen $x > 0$ und $x^2 - 1 > 0$ zu

$$2x \cdot \sqrt{x^2-1} < x^2 + 1 \qquad (3)$$

Da auch hier beide Seiten der Ungleichung positiv sind, ist (3) der Reihe nach äquivalent zu

$$\begin{aligned}
4x^2(x^2-1) &< (x^2+1)^2 \\
3(x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}) &< 0 \\
(x^2-1)^2 - \frac{4}{3} &< 0 \\
(x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}})(x^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}) &< 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Mit $x > 1$ ist auch $x^2 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ und daher (4) äquivalent zu

$$x^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$$

wegen $x > 0$ und $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x < \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Ungleichung (1) gilt genau für alle x mit $1 < x < \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

II Runde 2

Aufgabe 011221:
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm,
	größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm;
Mindestmaße	Länge 10 cm, Breite 7 cm.

1) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe?
2) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung !)

Lösung von Korinna Grabski:
a) Bezeichnen wir die drei Abmessungen des Quaders mit x, y und z, so gilt es, das Produkt xyz nach oben durch die feste Summe $x + y + z = 90$ cm abzuschätzen. Dafür ist die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel bestens geeignet:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}; \qquad (x, y, z \leq 0)$$

Gleichheit nur für $x = y = z$,

$$\Rightarrow V = xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = 27000 cm^3 = 27 l$$

Wir erkennen, dass das Volumen höchstens 27 l betragen kann, und zwar genau dann, wenn alle Abmessungen untereinander gleich sind: $x = y = z = 30$ cm (Würfel).

b) Diese Frage stellt nur eine Art „Sophismus“ dar. Denn da für die Höhe keine Vorschriften gemacht werden, kann theoretisch $z = 0$ sein, d. h. das Mindestvolumen ist gleich null.

Aufgabe 021122:
Beweisen Sie, dass stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1{,}5$ ist!

Lösung von Eckard Specht:
Nach der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel gilt:

$$\frac{|\sin\alpha| + |\cos\alpha|}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

Die letzte Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $2 = \frac{8}{4} < \frac{9}{4}$.
Schließlich bemühen wir noch die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ und erhalten

$$|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq |\sin\alpha| + |\cos\alpha| < \frac{3}{2}$$

also das gewünschte Ergebnis $\sin\alpha + \cos\alpha \neq \frac{3}{2}$.

Aufgabe 021223:
a) Beweisen Sie, dass für jedes ebene Dreieck gilt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$$

b) In welchem Falle tritt Gleichheit ein?

Lösung von Nuramon:
Es seien a,b,c die Längen der Dreiecksseiten, die den Winkeln α,β,γ gegenüberliegen. Nach Kosinussatz ist die zu beweisende Ungleichung dann äquivalent zu

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen zeigt, dass dies äquivalent ist zu

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4$$

Mit $x := a^2, y := b^2, z := c^2$ ist das gerade die Ungleichung von Schur:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x).$$

Da $x,y,z > 0$ sind, tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $x = y = z$, also $a = b = c$ ein, also genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Aufgabe 021225:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist! Anmerkung: Achten Sie auf die richtige Reihenfolge der Beweisschritte!

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Aus der bekannten Tatsache, dass das Quadrat einer beliebigen reellen Zahl (hier die Zahl $a - b$) stets nichtnegativ ist, folgt der Reihe nach

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\
a^2 + b^2 &\geq 2ab \\
\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2
\end{aligned}$$

Dabei bleibt bei der Division durch $ab > 0$ das Relationszeichen erhalten.

Aufgabe 041223:
Es ist zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a und c die Ungleichung

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 \geq 0$$

richtig ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$a^4 - 4ac^3 + 3c^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4 + 2a^2c^2 - 4ac^3 + 2c^4 =$$
$$= (a^2 - c^2)2 + 2c^2(a^2 - 2ac + c^2) = (a^2 - c^2)^2 + 2c^2(a-c)^2 \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = c$ ist.

Aufgabe 061225:
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r + s\sqrt{p})^n + (r - s\sqrt{p})^n}{2}, \quad v = \frac{(r + s\sqrt{p})^n - (r - s\sqrt{p})^n}{2\sqrt{p}}, \quad t = r^2 - s^2p, \quad z = u^2 - t^n$$

a) u und v sind natürliche Zahlen.
b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

Lösung von cyrix:
zu a) Nach dem binomischen Satz ist

$$(r + s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

und analog

$$(r - s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

Addiert man nun die beiden Summen, so ergänzen sich die jeweiligen Summanden mit ungeradem $n-k$ zu 0, während die mit geradem $n-k$ in beiden Summen erhalten bleiben und identisch sind. In diesen Fällen erhält man also jeden Summanden doppelt, wobei diese aufgrund des geraden Exponenten von $s\sqrt{p}$ selbst natürliche Zahlen sind. Damit ist der Zähler eine gerade natürliche Zahl und auch nach der Division durch Zwei damit v eine natürliche Zahl.

Analog heben sich bei der Subtraktion die jeweiligen Summanden mit geradem $n-k$ weg, während für diejenigen mit ungeradem $n-k$ sich der doppelte Wert ergibt. In jedem solchem Summanden ist $\sqrt{p}$ in ungerader Potenz enthalten, lässt sich also als geradzahliges, natürliches Vielfaches von $\sqrt{p}$ darstellen, sodass nach der Division durch $2\sqrt{p}$ eine natürliche Zahl v verbleibt.

zu b) Es ist

$$u^2 = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n} + 2 \cdot ((r+s\sqrt{p})(r-s\sqrt{p}))^n}{4} = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n}}{4} + \frac{t^n}{2}$$

und analog

$$v^2 = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n}}{4} - \frac{t^n}{2}$$

also $z = u^2 - t^n = v^2$, was natürlich direkt $v^2|z$ beweist.

Aufgabe 071223:
Beweisen Sie, dass für alle nicht negativen reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

Lösung von Nuramon:
Die Umordnungsungleichung besagt insbesondere, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ und $y_1 \geq y_2 \geq y_3$ gilt:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$$

und

$$x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \geq x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1.$$

Falls eine der Zahlen a,b,c Null ist, dann ist

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

erfüllt, denn es steht auf der linken Seite eine nichtnegative Zahl und auf der rechten Seite 0.
Seien also a,b,c positiv. Da die zu beweisende Ungleichung symmetrisch in a,b,c ist, können wir o. B. d. A. annehmen, dass $a \geq b \geq c$. Nach Division durch $\sqrt{abc}$ auf beiden Seiten bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} \geq a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5}$$

gilt. Wegen $a^{2.5} \geq b^{2.5} \geq c^{2.5}$ und $\frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{ac}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ gilt also nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^{2,5}}{\sqrt{bc}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ac}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{ab}} &\geq \frac{a^{2,5}}{\sqrt{ac}} + \frac{b^{2.5}}{\sqrt{ab}} + \frac{c^{2.5}}{\sqrt{bc}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}}\end{aligned}$$

Wegen $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ und $\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{\sqrt{c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a}} + \frac{c^2}{\sqrt{b}} &\geq \frac{a^2}{\sqrt{a}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}} \\ &= a^{1.5} + b^{1.5} + c^{1.5},\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 081225:
Man beweise $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösung von cyrix:
Für alle reellen Zahlen x, y ist $x^3 - y^3 = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$, also $x - y = \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$. Mit $x = \sqrt[3]{4}$ und $y = \sqrt[3]{3}$ für die linke und $x = \sqrt[3]{3}$ sowie $y = \sqrt[3]{2}$ für die rechte Seite der zu zeigenden Ungleichung geht diese äquivalent über in

$$\frac{4-3}{\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2} < \frac{3-2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

also

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

was aufgrund der strengen Monotonie der dritten Wurzel und $16 > 9$; $12 > 6$ und $9 > 4$ eine wahre Aussage ist. Damit ist die Ungleichung aus der Aufgabenstellung gezeigt.

Aufgabe 161224:
Es seien x und y
a) nichtnegative reelle Zahlen,
b) nichtnegative ganze Zahlen,
für die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 8x + 3y &\leq 25 \qquad (1) \\ -2x + 3y &\leq 10 \qquad (2) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Man weise nach, dass für die Summe

$$z = 2x + y \qquad (3)$$

in den Fällen a) bzw. b) jeweils ein größter Wert existiert, und gebe diesen für jeden der Fälle an.

Lösung von Kitaktus:
a) Multipliziert man dir Ungleichung (1) mit 4/15 und Ungleichung (2) mit 1/15 und addiert beide, so

ergibt sich:

$\frac{32}{15}x + \frac{12}{15}y - \frac{2}{15}x + \frac{3}{15}y \leq \frac{100}{15} + \frac{10}{15}$ bzw. zusammengefasst $2x + y \leq \frac{22}{3}$.(4) z ist also höchstens $\frac{22}{3}$.

Für $x = \frac{3}{2}$ und $y = \frac{13}{3}$ sind (1) und (2) erfüllt: $12 + 13 \leq 25$ und $-3 + 13 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 3 + \frac{13}{3} = \frac{22}{3}$.

z ist also nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist $\frac{22}{3}$.

b) Die hier zugelassenen Paare $(x; y)$ bilden eine Teilmenge der in a) zugelassenen Paare. z kann in diesem Fall also keinen größeren Wert annehmen als in a). Es gilt daher ebenfalls $z \leq \frac{22}{3}$ (5).
Da x und y ganzzahlig sind, ist auch $z = 2x + y$ ganzzahlig. Damit kann (5) verschärft werden zu $z \leq 7$.

Für $x = 2$ und $y = 3$ sind (1) und (2) erfüllt: $16 + 9 \leq 25$ und $-4 + 9 \leq 10$. Außerdem gilt $z = 2x + y = 4 + 3 = 7$.

z ist also auch hier nach oben beschränkt und der größtmögliche Wert ist 7.

Aufgabe 211222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{2x^2 - 1} < \frac{1}{x}$ gilt.

Lösung von weird:
Da der linksstehende Wurzelausdruck jedenfalls nichtnegativ und $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist, können wir im Folgenden o. B. d. A. $x > 0$ voraussetzen. Des weiteren muss sogar

$$2x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gelten, damit der linksstehende Wurzelausdruck überhaupt definiert ist. Durch Quadrieren der gegebenen Ungleichung erhält man dann

$$2x^2 - 1 < \frac{1}{x^2}$$

und durch Multiplizieren mit x^2 nach einer einfachen Umformung

$$2x^4 - x^2 - 1 = (2x^2 + 1)(x^2 - 1) < 0$$

Hier dürfen wir gewissermaßen durch $2x^2 + 1 > 0$ „kürzen“ und erhalten so $x^2 < 1$, wegen $x > 0$ also dann schließlich $x < 1$. Tatsächlich erfüllen alle

$$x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

auch wirklich die angegebene Ungleichung.

Aufgabe 221223:
Man beweise:
Sind a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen, d ihr größter gemeinsamer Teiler und v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, so gilt $a + b \leq d + v$. (1)
Man untersuche, für welches a, b in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von weird:
Beweis: Ausgehend von der offensichtlich gültigen Ungleichung

$$(a-d)(b-d) \geq 0 \quad (*)$$

gelangt man unter Verwendung von $d > 0$ durch einfache Äquivalenzumformungen zu

$$a+b \leq d + \frac{ab}{d} \quad (**)$$

was wegen $v = \frac{ab}{d}$ genau die zu beweisende Ungleichung darstellt.
Da ferner für die ursprüngliche Ungleichung (*) das Gleichheitszeichen genau für $a = d$ oder $b = d$, also $a|b$ bzw. $b|a$ gilt, ist dies dann auch die entsprechende Bedingung für Gleichheit in (**).

Aufgabe 291222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen m, die die Bedingung erfüllen, dass für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m+2)x + 8m + 1 > 0 \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Per quadratischer Ergänzung kann man die Ungleichung wie folgt darstellen:

$$\left(x + \frac{m+2}{2}\right)^2 + 8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

Diese Ungleichung ist für alle reellen x immer erfüllt, wenn

$$8m + 1 - \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 > 0$$

$$32m + 4 - m^2 - 4m - 4 > 0$$

$$m^2 - 28m < 0$$

Die Ungleichung ist erfüllt für $0 < m < 28$.

Aufgabe 291223:
Über fünf Streckenlängen a, b, c, d, e werde vorausgesetzt, dass je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muss.

Lösung von Nuramon:
Aus dem Kosinussatz und der Tatsache, dass in einem Dreieck der größte Winkel der größten Seite gegenüberliegt, folgt, dass ein Dreieck mit Seitenlängen $x \leq y \leq z$ genau dann spitzwinklig ist, wenn $x^2 + y^2 > z^2$ gilt.
Sei O. B. d. A. $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Angenommen die Dreiecke c,d,e bzw. a,b,c bzw. a,b,d wären nicht spitzwinklig, dann wäre nach obiger Bemerkung

$$e \geq \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Aus der Dreiecksungleichung im Dreieck a,b,e und der Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel folgt andererseits

$$e < a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Somit erhalten wir widersprüchlicherweise, dass sowohl $e \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ als auch $e < \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ gelten muss. Also muss eines der genannten Dreiecke spitzwinklig sein.

Aufgabe 301222:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \quad (1)$$
$$4x + 2y > 5 \quad (2)$$

Lösung von weird:
Mittels quadratischer Ergänzung kann man (1) auch in der Form

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 < \frac{3}{2}$$

schreiben, woraus sofort

$$(x,y) \in \{(3,-6),(2,-5),(3,-5),(4,-5),(3,-4)\}$$

für die ganzzahligen Lösungen (x,y) folgt. Von diesen Paaren erfüllt aber dann nur $(x,y) = (4,-5)$ auch die zweite Bedingung, welches somit auch die einzige Lösung hier ist.

Aufgabe 311224:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0$$

gilt.

Lösung von weird:
Beweis: Indem man

$$f(x) := x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1$$

setzt, rechnet man leicht nach, dass gilt

$$f(1) = f'(1) = 0$$

d. h., $x = 1$ ist (mindestens) eine doppelte Nullstelle von $f(x)$. Es reicht somit

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x-1)^2} = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

zu zeigen. Wegen $g(0) = 1 > 0$ genügt dafür der Nachweis, dass $g(x)$ keine reellen Nullstellen hat. Dies folgt jedoch sofort aus

$$\frac{g(x)}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = \left(x + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei

$$f(x) := x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1.$$

Dann ist offenbar $x = 1$ eine Nullstelle dieser Funktion, sodass sie sich auch schreiben lässt als

$$f(x) = (x-1) \cdot (x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 1).$$

Weiterhin ist $x = 1$ auch Nullstelle des zweiten Faktors, sodass ein weiteres mal der Faktor $(x-1)$ ausgelammert werden kann:

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 1).$$

Der erste Faktor $(x-1)^2$ ist in jedem Fall nicht-negativ, sodass nur zu zeigen bleibt, dass auch für alle reellen Zahlen x der Ausdruck $(x^4+3x^3+9x^2+3x+1)$ stets nicht-negativ ist, was man aber wegen

$$\begin{aligned} 0 &< (x^2+\frac{3}{2}x+1)^2+\frac{19}{4}x^2 \\ &= x^4+\frac{9}{4}x^2+1+2\cdot x^2\cdot\frac{3}{2}x+2\cdot x^2\cdot 1+2\cdot\frac{3}{2}x\cdot 1+\frac{19}{4}x^2 \\ &= x^4+3x^3+\left(\frac{9}{4}+2+\frac{19}{4}\right)x^2+3x+1 \\ &= x^4+3x^3+9x^2+3x+1 \end{aligned}$$

leicht einsieht, sodass das Gewünschte folgt.

Aufgabe 321222:
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung gilt:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Lösung von cyrix:
Mit

$$x:=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 2n}$$

und $(k-1)(k+1)=k^2-1<k^2$ für alle natürlichen Zahlen k ist

$$x^2=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ldots\cdot(2n)^2}<\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdot(5\cdot 7)\ldots\cdot((2n-1)\cdot(2n+1))}=\frac{1}{2n+1}$$

also $x^2<\frac{1}{2n+1}$ bzw. $x<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\square$.

Aufgabe 331222:
a) Beweisen, Sie, dass für jede natürliche Zahl $n\geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2-9}{4^2-4}\cdot\frac{5^2-9}{5^2-4}\cdot ...\cdot\frac{n^2-9}{n^2-4}>\frac{1}{6}$$

gilt!
b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne dass damit aus der in a) zu beweisenden Aussage eine falsche Aussage entsteht?

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgabenteil a)

$$\frac{(4-3)(5-3)(6-3)...(n-3)}{(4-2)(5-2)(6-2)...(n-2)}\cdot\frac{(4+3)(5+3)(6+3)...(n+3)}{(4+2)(5+2)(6+2)...(n+2)}=$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3...(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4...(n-2)}\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 9...(n+3)}{6\cdot 7\cdot 8...(n+2)}=\frac{n+3}{6(n-2)}>\frac{1}{6}$$

Aufgabenteil b)

$$\frac{n+3}{6(n-2)}>0{,}1667$$
$$n+3>1{,}0002(n-2)$$
$$0{,}9996>0{,}0002\cdot n$$
$$n<4998$$

Für die Zahl 0,1667 anstatt $\frac{1}{6}$ ist die Ungleichung nur erfüllt für $n < 4998$, weshalb die Ungleichung dann nicht mehr für alle n erfüllt ist.

Aufgabe 341221:
Man beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen gelten:

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst die linke Ungleichung:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \\
\frac{x+y}{2} &\leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \\
\frac{x^2+2xy+y^2}{4} &\leq \frac{x^2+y^2}{2} \\
x^2+2xy+y^2 &\leq 2x^2+2y^2 \\
0 &\leq x^2-2xy+y^2 \\
0 &\leq (x-y)^2
\end{aligned}$$

Das ist immer erfüllt. Rechte Ungleichung: es ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} &\leq \frac{|x-y|}{2} \\
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &\leq \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x,y) \\
\frac{x^2+y^2}{2} &\leq (\max(x,y))^2 = \max(x^2,y^2)
\end{aligned}$$

Auch das ist immer erfüllt, da $x^2 \leq \max(x^2,y^2)$ und $y^2 \leq \max(x^2,y^2)$ ist. q. e. d.

III Runde 3

Aufgabe 011235:
Es ist zu beweisen, dass $x+y \leq a\sqrt{2}$, wenn $x^2+y^2=a^2$ und $a \geq 0$ ist!

Lösung von Eckard Specht:
Die kürzeste Variante ist diejenige mit der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel, falls x,y positive Zahlen sind:

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2}a$$

Wegen $a \geq 0$ gilt die Behauptung erst recht für nichtpositive x, y. Die Ungleichung selbst kann einfach wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0 \\
x^2+y^2 &\geq 2xy \\
2(s^2+y^2) &\geq x^2+2xy+y^2=(x+y)^2 \\
\frac{x^2+y^2}{2} &\geq \frac{(x+y)^2}{4}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\
\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} &\geq \frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 021131:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}$$

Lösung von Eckard Specht:
Angewandt wird die Ungleichung zum Arithmetischen und Harmonischen Mittel: Arithmetisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel.
Genutzt werden dabei die $x_1=a+b$, $x_2=b+c$, $x_3=a+c$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}}$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}=\frac{9}{2(a+b+c)}>\frac{3}{a+b+c}$$

Aufgabe 021231:
Für welche Werte von x gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq 1$$

Lösung von Korinna Grabski:
Als erstes ist festzuhalten, dass der Wertebereich von x durch die Formel bereits wie folgt eingeschränkt ist: $-1<x<1$. Nun sucht man die Grenzstellen der Ungleichung, d. h. man berechnet zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 \\
\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 \\
\frac{1-x+1+x+2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} &= 1 \\
2-2\sqrt{1-x^2} &= 1-x^2 \\
0 &= 1-x^2-2+2\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Jetzt wird substituiert mit $z=\sqrt{1-x^2}$.

$$0=z^2+2z-2 \Rightarrow z_{1,2}=-1 \pm \sqrt{3}$$

Über die Substitution kann x bestimmt werden: $x = \sqrt{1-z^2}$.
Für $z_2 = -1-\sqrt{3}$ lässt sich kein x berechnen. Für $z_1 = -1+\sqrt{3}$ ergibt sich $x \approx \pm 0{,}6813$. Um zu klären, wo jetzt tatsächlich eine Grenze liegt (durch das Quadrieren können Scheinlösungen entstehen) und wie sich die Kurve verhält, setzt man Werte aus jedem Intervall in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned} x = -0{,}7: &\quad 1{,}059 \geq 1 \quad \text{w.A.} \\ x = 0: &\quad 0 \geq 1 \quad \text{(f.A.)} \\ x = 0{,}7: &\quad -1{,}059 \geq 1 \quad \text{(f.A.)} \end{aligned}$$

Damit gilt die Gleichung für $-1 < x \leq -0{,}6813$.

Aufgabe 021234:
Geben Sie (für alle positiven Winkel x) für

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

alle Lösungen an!

Lösung von Carsten Balleier:
Da $\sin^2 x > 0$ und $\cos^2 x > 0$ wegen der Formulierung der Ungleichung angenommen werden darf (Gleichheit ist nicht zulässig), kann die Ungleichung durch Multiplikation zu

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq \frac{8}{3} \sin^2 x \cos^2 x$$

umgeformt werden, was mittels Additionstheoremen gleichbedeutend ist mit

$$\cos 2x \geq \frac{2}{3} \sin^2 2x = \frac{2}{3}(1 - \cos^2 2x)$$

Substituiert man nun $z = \cos 2x$, reduziert sich das Problem auf die quadratische Ungleichung $2z^2+3z-2 \geq 0$. Ihre Lösungsmenge ist $z \leq -2 \cup z \geq \frac{1}{2}$, wobei nur für $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ die Rücksubstitution möglich ist. Diese ergibt, dass

$$x \in (0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$$

gelten muss; nur für diese x (und deren Wiederholung mit der Periode π) ist die gegebene Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 031234:
Für welche reellen Zahlen x ist

a) $\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$ b) $\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$ c) $\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst wählen wir die Bezeichnungen $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ und $g(x) = \frac{2}{x+\frac{1}{2}}$. Dann betrachten wir den Fall b), da sich Gleichungen leichter handhaben lassen und Schlüsse auf die Ungleichungen zulassen. Folgende Umformungen führen zur Lösung:

$$f(x) = \frac{x+1+x+}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}$$

und $g(x) = \frac{4}{2x+1}$. Die Gleichung lautet nunmehr:

$$(2x+1)^2 = 4\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Das führt auf die falsche Aussage $0 = 1$.
Nun waren aber alle Umformungen äquivalent, also kann die gestellte Gleichung keine Lösungen besitzen.
Das bedeutet aber auch, dass sich die Funktionen f und g nicht schneiden.
Daraus könnte man den voreiligen Schluss ziehen, dass entweder überall a) oder überall c) gilt.
Wir bemerken aber, dass f und g Polstellen haben, und zwar bei $x = -1$, $x = 0$ bzw. $x = -\frac{1}{2}$. Es müssen also die vier Intervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ und $(0,\infty)$ getrennt untersucht werden.
Es würde genügen, f und g nur an einer Stelle aus jedem Intervall zu betrachten. Trotzdem wird hier die Lösung einer Ungleichung ausführlich vorgeführt. Mit obigen Umformungen erhält man (aus a):

$$\frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} > \frac{4}{2x+1}$$

Bei einer Multiplikation mit $(2x+1)$ muss man die Fälle $x > \frac{1}{2}$ und $x < \frac{1}{2}$ unterscheiden, bei letzterem würde das Relationszeichen umgekehrt. Im ersteren folgt:

$$\frac{2x+1}{(2x+1)^2 - 1} > 1 \qquad | \cdot [(2x+1)^2 - 1]$$

Die eckigen Klammern sind für $x < 0$ negativ, im Intervall $(-\frac{1}{2}, 0)$ ergibt sich $0 < -1$, also eine falsche Aussage. Dort gilt daher nicht a), sondern c).
Für die anderen Intervalle geht man analog vor. Dabei erhält man: c) gilt außerdem für $x < -1$, a) gilt für $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ und $x > 0$.

Aufgabe 061233:
Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist.
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

Lösung von cyrix:
Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sind sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$, und damit auch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

allesamt positiv, also auch $f(x)$.
Für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist zwar weiterhin $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ und damit auch $\tan x$ und $\cot x$ negativ. Wegen $0 > \cos x > -1$ ist $\frac{1}{\cos x} < -1$, also $\tan x < -\sin x$ und damit

$$f(x) < \sin x + \cos x - \sin x + \cot x = \cos x + \cot x < 0$$

Positive Werte nimmt f also nur auf dem ersten Intervall an. Dort betrachten wir nun die zwei Funktionen

$$f_1(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \tan x + \cot x = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

Damit ist wegen $\tan x > 0$ direkt $f_2(x) \geq 2$, wobei Gleichheit nur für $\tan x = 1$, also $x = \frac{\pi}{4}$ als einzigem Wert im betrachteten Intervall, angenommen wird.
Für die Analyse von f_1 betrachten wir deren Ableitungsfunktion $f_1'(x) = \cos x - \sin x$, welche im betrachteten Intervall wieder nur genau für $x = \frac{\pi}{4}$ verschwindet. Da in diesem Intervall die Kosinus-Funktion streng monoton fallend und die Sinus-Funktion streng monoton steigend ist, ist auch f_1' streng monoton

fallend und nimmt demnach für Argumente x kleiner als $\frac{\pi}{4}$ positive, und für größere Argumente negative Werte an.
Demzufolge ist die Funktion f_1 im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{4}$ streng monoton wachsend und im Intervall $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton fallend. Also ist

$$f_1(x) \geq f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

wobei Gleichheit nur für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird.
Zusammen ergibt sich also

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \sqrt{2} + 2$$

wobei Gleichheit genau für $x = \frac{\pi}{4}$ angenommen wird. Es ist also $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte, kleinste positive Wert, den f im betrachteten Intervall annimmt.

Aufgabe 091234:
Beweisen Sie, dass das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot ... \cdot \frac{2499}{2500}$$

(n natürliche Zahl) kleiner als 0,02 ist!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach der dritten binomischen Formel gilt $(2n+1)(2n-1) = (2n)^2 - 1^2 < (2n)^2$. Setzen wir ein paar Werte für n ein:

$$n = 1: \quad 3 \cdot 1 < 2^2 \qquad n = 2: \quad 5 \cdot 3 < 4^2$$

$$n = 3: \quad 7 \cdot 5 < 6^2 \qquad ... \qquad n = 1250: \quad 2501 \cdot 2499 < 2500^2$$

Multiplizieren wir die Ungleichungen:

$$1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2 \cdot 2501 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2$$

$$\frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 2499^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot ... \cdot 2500^2} < \frac{1}{2501}$$

Ziehen wir noch die Wurzel:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2499}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2500} < \frac{1}{\sqrt{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es ist wegen $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$:

$$2501 \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2497 \cdot 2499}{2498^2} \cdot \frac{2499 \cdot 2501}{2500^2} < 1 \quad \text{also}$$

$$p < \sqrt{\frac{1}{2501}} < \frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Aufgabe 101231:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2 \gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, also

$$\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sin^2\gamma &= \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta\\ &= (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\\ &= \sin^2(\alpha-\beta) + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta \geq \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\end{aligned}$$

$\square$.

Aufgabe 111235:
Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{1-\sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x,y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, dass in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

Lösung von weird:
Eine zentrale Rolle in den folgenden Überlegungen wird die Funktion

$$f : (0,\frac{\pi}{2}) \to (1,\infty), \quad t \mapsto \frac{1}{1-\sin t}$$

spielen. Ihre Ableitungen

$$f'(t) = \frac{\cos t}{(1-\sin t)^2}$$

sowie

$$f''(t) = \frac{-\sin t(1-\sin t)^2 + 2(1-\sin t)(1-\sin^2 t)}{(1-\sin t)^4} = \frac{2+\sin t}{(1-\sin t)^2}$$

zeigen, dass sowohl f, als auch f' auf dem betrachteten Intervall $(0,\frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend sind.

Um dies zu verwenden, formen wir (1) zunächst um zu

$$f(2y) - f(x+y) \geq f(x+y) - f(2x)$$

woraus wir in Verbindung mit der Monotonie von f sofort ersehen können, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau für $x = y$ gilt. Insbesondere können wir daher im Folgenden o. B. d. A. $x < y$ voraussetzen. Damit wird dann (1) für diesen Fall zu

$$\frac{f(2y) - f(x+y)}{2y-(x+y)} > \frac{f(x+y) - f(2x)}{(x+y)-2x} \qquad (*)$$

Dass dies gilt, ist aber nach dem schon Bewiesenen klar, denn nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gilt

$$\exists u \in (x+y,2y) : \ \frac{f(2y)-f(x+y)}{2y-(x+y)} = f'(u) \quad \text{bzw.} \quad \exists v \in (2x,x+y) : \ \frac{f(x+y)-f(2x)}{(x+y)-2x} = f'(v)$$

und aus der simplen Tatsache

$$u > v \Rightarrow f'(u) > f'(v)$$

folgt also dann auch sofort (*) und damit unsere Behauptung hier.

Aufgabe 131232:
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[m]{a^m + b^m}$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen m, n mit $n > m$ gilt.

Lösung von cyrix:
Es sei o. B. d. A. $a \leq b$. Mit Division durch b und der Substitution $0 < x := \frac{a}{b} \leq 1$ geht die zu zeigende Ungleichung in die folgende äquivalente Ungleichung über $\sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[m]{1 + x^m}$ bzw. nach Potenzieren mit nm in $(1 + x^n)^m < (1 + x^m)^n$. Da $0 < x \leq 1$ ist, gilt auch $0 < x^{n-m} \leq 1$ und damit

$$1 + x^n = 1 + x^m \cdot x^{n-m} \leq 1 + x^m \qquad \text{sowie} \qquad (1 + x^n)^m \leq (1 + x^m)^m < (1 + x^m)^n, \square$$

Aufgabe 141232:
Gegeben sei eine rationale Zahl c. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Paare (a, b) aus rationalen Zahlen a, b, für die $a + b = c$ gilt.
Beweisen Sie, dass unter allen Produkten $a \cdot b$ mit $(a, b) \in M$ dasjenige am größten ist, das aus dem Paar (a, b) mit $a = b$ gebildet wurde!

Lösung von weird:
Wegen

$$a \cdot b = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

für $(a,b) \in M$ wird der Maximalwert für $a \cdot b$, nämlich $a \cdot b = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, genau für $a = b$, also dann für

$$(a,b) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) \in M$$

erreicht.

Aufgabe 171234:
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Lösung von weird:
Beweis: Ausgehend von

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

erhält man durch Einsetzen von $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$ und Kürzen durch 2 die weitere Ungleichung

$$bc + ac - ab \leq \frac{5}{6} < 1$$

und daraus nach Division durch $abc > 0$ schließlich

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$$

wie behauptet.

Aufgabe 181235:
Es sei $n \geq 2$ eine gegebene ganze Zahl. Man untersuche, ob sich unter allen denjenigen reellen Zahlen $x_1, ..., x_n \geq 0$, für die $x_1 + ... + x_n = 1$ gilt, auch solche befinden, für die der Wert von $x_1^3 + ... + x_n^3$ a) möglichst groß, b) möglichst klein ist.
Ist dies der Fall, so ermittle man diesen größten bzw. kleinsten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgabenteil a)
Wir behaupten, dass die Summe $s = \sum_{k=1}^n x_i^3$ genau dann maximal ist, wenn von den n Summanden $n-1$ Summanden gleich null und ein Summand gleich 1 ist. Die Summe wäre dann $s_{max} = 1$, was den Maximalwert darstellt.

Beweis:
Wir betrachten zwei Summenglieder x_i und x_j. Im Rahmen der Randbedingung $\sum_{k=1}^n x_i = 1$ ist zulässig, zwei Summanden zu addieren als einen neuen Summanden, und den anderen null zu setzen. Sei $x_i' = x_i+x_j$ und $x_j' = 0$. Dann ist

$$x_i'^3 + x_j'^3 = (x_i + x_j)^3 = x_i^3 + 3x_i^2x_j + 3x_ix_j^2 + x_j^3 = x_i^3 + x_j^3 + 3x_ix_j(x_i + x_j)$$

Da $x_{i,j} \geq 0$, folgt daraus, dass

$$x_i'^3 + x_j'^3 \geq x_i^3 + x_j^3$$

(Gleichheit tritt nur ein, wenn mindestens einer der Summanden ohnehin schon null ist). Die Summe der dritten Potenzen wird also größer, wenn man aus zwei Summanden einen macht und den anderen null setzt. Das wiederholt man so oft, bis nur noch ein Summand übrig ist, der voraussetzungsgemäß gleich eins ist.
Aufgabenteil b)
Es sei $x_i = \frac{1}{n} + z_i$. Damit die genannte Bedingung erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{k=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + z_i\right) = 1 + \sum_{k=1}^n z_i = 1$$

so dass

$$\sum_{k=1}^n z_i = 0$$

sein muss. Die zu minimierende Summe ist

$$s = \sum_{k=1}^n x_i^3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + z_i\right)^3$$

$$s = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^2}z_i + \frac{3}{n}z_i^2 + z_i^3\right)$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2}\sum_{k=1}^n z_i + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{n} + z_i\right) z_i^2$$

$$s = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} + x_i\right) z_i^2$$

Da $\left(\frac{2}{n}+x_i\right)>0$ und $z_i^2>0$, sind alle Summanden positiv, so dass gilt

$$s\geq \frac{1}{n^2}=s_{min}$$

Das ist der gesuchte minimale Wert, der genau dann eintritt, wenn alle $z_i=0$ bzw. alle $x_i=\frac{1}{n}$ sind.

Aufgabe 191233B:
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n gibt, für die

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n^2}>1000 \qquad (1)$$

gilt.
Wenn dies der Fall ist, so untersuche man, ob es eine natürliche Zahl p derart gibt, dass jede (im Dezimalsystem) p-stellige Zahl n die Eigenschaft (1) hat. Trifft auch das zu, so ermittle man eine derartige Zahl p.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nutzen eine bekannte Ungleichung des natürlichen Logarithmus, und zwar:

$$x>\ln(1+x)\quad \forall \quad x>0$$

Daher ist

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$$

Die Summe in der Aufgabenstellung ist dann

$$s=\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}$$

Mit obiger Ungleichung gilt:

$$s>\sum_{k=n}^{n^2}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n^2+1)-\ln n$$

(Die Summe ist eine Teleskopsumme). Somit gilt

$$s>\ln\frac{n^2+1}{n}$$

Wenn dieser Term größer als 1000 ist, ist auch $s>1000$. Daher ist eine hinreichende Bedingung:

$$\frac{n^2+1}{n}>e^{1000}$$

Offensichtlich ist n sehr groß, so dass man (n^2+1) durch n annähern kann. Dann gilt

$$n>e^{1000}\approx 1{,}97\times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0\times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p\geq 436$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Es ist

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\frac{1}{n}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

da $\frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist. Damit ergibt sich als Abgrenzung für die Summe:

$$s = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=n}^{n^2} \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \sum_{k=n}^{n^2} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Die Integrale reihen sich in den Summen nun „nahtlos“ aneinander, so dass man folgern kann:

$$\int\limits_{n}^{n^2+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < s < \int\limits_{n-1}^{n^2} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

Daraus folgt:

$$\ln(n^2+1) - \ln n < s < \ln(n^2) - \ln(n-1)$$

$$\ln \frac{n^2+1}{n} < s < \ln \frac{n^2}{n-1}$$

Die Ungleichung der Aufgabenstellung ist erfüllt, wenn gilt

$$\ln \frac{n^2+1}{n} > 1000$$

$$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} > e^{1000}$$

Daraus folgt:

$$n = \lceil e^{1000} \rceil \approx 1{,}97 \times 10^{434}$$

Das ist eine 435-stellige Zahl. $1{,}0 \times 10^{434}$ ist auch 435-stellig, aber deutlich kleiner als die genannte Untergrenze. Erst wenn die Zahl der Dezimalstellen mindestens 436 beträgt, ist die Ungleichung immer erfüllt. Somit gilt $p \geq 436$.

Anmerkung: Man kann durch Verwendung der sogenannten „erzeugenden Funktion“ die Summe auch exakt berechnen: Sei

$$s(x) = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{x^k}{k}$$

wobei s(1) die gesuchte Summe darstellt. Einmal ableiten:

$$s'(x) = \sum_{k=n}^{n^2} x^{k-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^{n^2-1}$$

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{n^2-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-2} x^k$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2}-1}{x-1} - \frac{x^{n-1}-1}{x-1}$$

$$s'(x) = \frac{x^{n^2} - x^{n-1}}{x-1}$$

$$s(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{t^{n^2} - t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

da $s(0) = 0$. Daher gilt:

$$\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = \int\limits_{0}^{1} \frac{t^{n^2} - t^{n-1}}{t-1} \mathrm{d}t$$

Das hilft in Bezug auf die obige Abschätzung nicht weiter, da dieses Integral nicht elementar lösbar ist außer durch eine Summenbildung, die uns zum Startpunkt zurückbringt.

Aufgabe 201232:
Es sei f die durch

$$f(x) = x^4 - (x+1)^4 - (x+2)^4 + (x+3)^4$$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f
a) die Menge aller ganzen Zahlen,
b) die Menge aller reellen Zahlen ist.
Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
An der Darstellung

$$f(x) = \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{3}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}\right)^4 - \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\right)^4 + \left((x+\frac{3}{2}) + \frac{3}{2}\right)^4$$

sehen wir, dass f achsensymmetrisch bezüglich $x = -\frac{3}{2}$ und höchstens ein quadratisches Polynom ist. Insbesondere hat f ihr globales Minimum oder Maximum bei $x = -\frac{3}{2}$.
Aus $f(-1) = f(-2) = 16$ und $f(-\frac{3}{2}) = 10$ folgt, dass f eine nach oben geöffnete Parabel ist und somit bei $x = -\frac{3}{2}$ ihr reelles Minimum und bei $x = -1$, $x = -2$ ihr Minimum über den ganzen Zahlen annimmt.

Aufgabe 201233A:
Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen a und b mit $0 < a < b$ gilt

$$a + \frac{1}{1+a^n} < b + \frac{1}{1+b^n}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Aufgabe ist äquivalent zu der Frage, ob $f_n(x) := x + \frac{1}{1+x^n}$ für $x > 0$ streng monoton steigend ist. Es gilt

$$f_n'(x) := 1 - \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}; \qquad f_n'(1) := \frac{4-n}{4}$$

Daher ist für $n > 4$ die Funktion bei $x = 1$ streng monoton fallend. Für $n = 4$ folgt aus $f_4''(1) > 0$, dass diese dort ein lokales Minimum hat.
Wir zeigen nun, dass f_n für $n \leq 3$ und $x > 0$ streng monoton steigend ist.

$$f_n'(x) = \frac{(1+x^n)^2 - nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{(1-x^n)^2 + x^{n-1}(4x-n)}{(1+x^n)^2}$$

Der erste Summand im Zähler und der Nenner sind stets nicht negativ. Der zweite Summand ist für $x \geq 1 > \frac{n}{4}$ positiv. Also ist f_n für $x \geq 1$ streng monoton steigend. Für $0 < x < 1$ können wir den Zähler der Ableitung wie folgt darstellen:

$$(1+x^n)^2 - nx^{n-1} = 1 + 2x^n + x^{2n} - nx^{n-1} \geq 1 + 2x^n + x^{2n} - 3x^{n-1} = (1 - x^{n-1}) + 2x^{n-1}(1-x) + x^{2n}$$

Die drei Summanden sind wegen $0 < x < 1$ positiv und somit ist für $n \leq 3$ die Ableitung für alle $x > 0$ positiv.

Aufgabe 221235:
a) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ sind, dann gilt für alle reellen x, y, die nicht beide 0 sind, $ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$.
b) Man beweise:
Wenn a, b, c reelle Zahlen mit $a > 0$ und $ac - b^2 < 0$ sind, dann gibt es in der x, y-Ebene im Innern jedes Kreises um den Koordinatenursprung $(0; 0)$ zwei Punkte P_1 und P_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für die Koordinaten $(x_1; y_1)$ von P_1 gilt die Ungleichung $ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 > 0$;
für die Koordinaten $(x_2; y_2)$ von P_2 gilt die Ungleichung $ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 < 0$.

Lösung von weird:
Mit der Umformung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \qquad (*)$$

sieht man sofort, dass unter den gegebenen Voraussetzungen jedenfalls

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$$

also a) gelten muss. Insbesondere genügt es für den ersten Punkt (x_1,y_1) in b) einfach nur $x_1 > 0$ ausreichend klein und $y_1 = 0$ zu wählen, womit dann tatsächlich

$$x_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_1^2 > 0$$

ist.
Für den zweiten Punkt (x_2,y_2) in b) benutzen wir (*) nochmals, aber nun in der Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}\,y\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a}y^2 \qquad (**)$$

ist. Indem wir nun einfach $y_2 > 0$ ausreichend klein wählen, sodass mit $x_2 = -\frac{b}{a}\,y_2$ dann (x_2,y_2) dem Ursprung beliebig nahe kommt, gilt dann außerdem

$$x_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 = -\frac{b^2 - ac}{a}\,y_2^2 < 0$$

wie verlangt.

Aufgabe 231232:
Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.
Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3} \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da a, b, c und $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung (1) gezeigt, wenn man

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2 \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

bewiesen hat. Hierfür genügt es,

$$a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \qquad (3)$$

zu zeigen, und diese Ungleichung gilt, da sie sich aus der wahren Ungleichung

$$(a^2b^2 - a^2c^2)^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)^2 - (a^2b^2 - b^2c^2)^2 \geq 0 \qquad (4)$$

ergibt.
Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) ist der Reihe nach äquivalent mit der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2), (3), (4), diese mit $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$, was wegen $a, b, c > 0$ genau für $a = b = c$ gilt.
Also gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn der Quader ein Würfel ist.

Aufgabe 241236:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die gilt:

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

Lösung von weird:
Indem wir beide Seiten der Ungleichung (1) durch 100^n dividieren, lässt sie sich auch schreiben in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n > \frac{51}{25} = 2.04 \quad (*)$$

Nun gilt

$$\forall n \geq 21: \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 100^{-2k} > 2\left(1 + \binom{21}{2}\frac{1}{100^2}\right) = 2.042 > 2.04$$

d. h., (1) ist jedenfalls für alle $n \geq 21$ gültig, während für $n = 20$ diese einfache Abschätzung noch nicht ausreicht.
Dass sie andererseits für $n \leq 19$ falsch ist, ist ebenfalls klar und folgt unmittelbar aus

$$\forall n \leq 19: \quad \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n < 2\cosh(\frac{n}{100}) \leq 2\cosh(\frac{19}{100}) \approx 2.0362$$

während der Fall $n = 20$ wegen $2\cosh(0.2) \approx 2.0401$ auch hier unentschieden ist. Um zu sehen, dass (1) für $n = 20$ nicht gilt, bleibt also nur die direkte Auswertung von (*) für diesen Wert von n, was dann

$$0.99^{20} + 1.01^{20} \approx 2.038$$

ergibt, d. h., es bleibt dabei, dass (1) genau für $n \geq 21$ gilt.

Aufgabe 251233B:
Beweisen Sie, dass es unter allen Zerlegungen $100 = z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ der Zahl 100 in reelle Faktoren $z_i \geq 2$ ($i = 1, 2, ..., n$; n positiv ganzzahlig) eine Zerlegung gibt, für die die Summe $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen kleinstmöglichen Wert hat!
Ermitteln Sie eine solche Zerlegung!

Lösung von cyrix:
Für fixiertes n gilt aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der z_i die Ungleichung

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \geq \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n}$$

also $s \geq n \cdot \sqrt[n]{100}$, wobei Gleichheit genau für $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \sqrt[n]{100}$ angenommen wird. Wir bezeichnen die minimal mögliche Summe für dieses n mit s_n, also $s_n := n \cdot \sqrt[n]{100}$.

Da alle $z_i \geq 2$ sind und $2^7 = 128 > 100$ ist, muss $n \leq 6$ gelten. Es ist $s_1 = 100$, $s_2 = 20$, $s_3 = 3 \cdot \sqrt[3]{100}$, $s_4 = 4 \cdot \sqrt{10}$, $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und $s_6 \cdot \sqrt[6]{100} = 6 \cdot \sqrt[3]{10}$.

Es ist $s_3 < 3 \cdot \sqrt[3]{125} = 15 < s_2$ und $s_4 < s_3 \Leftrightarrow s_4^2 < s_3^2$, also äquivalent zu $160 < 9 \cdot \sqrt[3]{100^2} = 90 \cdot \sqrt[3]{10}$, was wegen $90 \cdot \sqrt[3]{10} > 90 \cdot \sqrt[3]{8} = 180$ wahr ist.

Wegen $s_4 > s_5 \Leftrightarrow s_4^2 > s_5^2 \Leftrightarrow 160 > 25 \cdot \sqrt[5]{100^2} \Leftrightarrow \frac{64}{10} > \sqrt[5]{10^4} \Leftrightarrow \frac{2^{6\cdot 5}}{10^5} > 10^4 \Leftrightarrow 2^{30} > 10^9 \Leftrightarrow 2^{10} > 1000$, was wegen $2^{10} = 1024$ wahr ist.
Schließlich ist $s_5 < s_6 \Leftrightarrow s_5^3 < s_6^3 \Leftrightarrow 1250 \cdot \sqrt[5]{10} < 2160 \Leftrightarrow \sqrt[5]{10} < \frac{216}{125} = \frac{1696}{1000}$. Dies ist wegen $\frac{1696}{1000} > \frac{1667}{1000} > \frac{5}{3}$ einerseits und $\left(\frac{5}{3}\right)^5 = \frac{5^5}{3^5} = \frac{3125}{243} > 10$, also $\sqrt[5]{\frac{5}{3}} > \sqrt[5]{10}$, andererseits eine wahre Aussage.

Damit ist s_5 der kleinste der Werte, die gesuchte minimale Summe ist $s_5 = 5 \cdot \sqrt[5]{100}$ und die zugehörigen Werte, die diese liefern, lauten $z_1 = \dots = z_5 = \sqrt[5]{10}$.

Aufgabe 271231:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, die das folgende Ungleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x^4 - 6x^2 + 8 \leq 0 \qquad (1)$$
$$2x^2 - 3x > 0 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Mit Einführung der reellen Polynomfunktionen f und g definiert durch

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2-2)(x^2-4) = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$$

bzw.

$$g(x) = 2x^2 - 3x = x(2x-3)$$

können wir die Lösungen der beiden Ungleichungen - also zunächst jede für sich - leicht durch den Vorzeichenwechsel von f bzw. g an deren einfachen Nullstellen beschreiben, und zwar jeweils für wachsendes x. Beide Funktionen starten dabei aufgrund des positiven Leitkoeffizienten im positiven Bereich.
Dieser Vorzeichenwechsel erfolgt für f bei
- $x = -2$ von + zu -,
- $x = -\sqrt{2}$ von - zu +,
- $x = \sqrt{2}$ von + zu -,
- $x = 2$ von - zu +

und für g bei
- $x = 0$ von + zu -,
- $x = \frac{3}{2}$ von - zu +.

Insgesamt gilt also (1) genau für $x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$ und (2) genau für $x < 0$ und $x > \frac{3}{2}$.
Beide Ungleichungen (1) und (2) zusammen sind somit genau dann erfüllt, wenn

$$x \in [-2, \sqrt{2}] \cup (\frac{3}{2}, 2]$$

Aufgabe 281235:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3$$

Lösung von MontyPythagoras:
Es gilt für alle $n \geq 1$, dass

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq 0$$

ist. Es sei

$$S_n = \frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + ... + \frac{x_{n^2}}{n} = \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

wobei $S_n \leq 1$ gilt. Es reicht, zu beweisen, dass

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} \leq 3$$

gilt, denn da alle Summanden positiv sind, gilt

$$\sum_{k=1}^{k<n^2} \frac{x_k}{k} < T_n \leq 3$$

dann erst recht. Den Beweis für $T_n \leq 3$ können wir führen, indem wir die fragliche Summe nach oben abgrenzen:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{x_k}{k} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} \frac{x_l}{l} \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Da sowohl $x_l \leq x_{m^2}$ als auch $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{m^2}$ für $l \geq m^2$, gilt:

$$\frac{x_l}{l} \leq \frac{x_{m^2}}{m^2}$$

und daher

$$T_n \leq \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} \sum_{l=m^2}^{(m+1)^2-1} 1 \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} = \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2}$$

Als letzten Schritt zeigen wir, dass $T_n \leq 3S_n$ ist:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{x_{m^2}}{m^2} (2m+1) \right) + \frac{x_{n^2}}{n^2} \leq 3 \sum_{m=1}^{n} \frac{x_{m^2}}{m}$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn sie für jeden Summanden einzeln gilt. Für den letzten Summanden ist das offenkundig der Fall, da $\frac{1}{n^2} < \frac{3}{n}$ ist. Für alle anderen Summanden muss gelten, dass

$$\frac{2m+1}{m^2} \leq \frac{3}{m}$$

ist. Wir multiplizieren mit m^2:

$$2m + 1 \leq 3m$$

was für alle $m \geq 1$ erfüllt ist. Damit ist erwiesen, dass

$$T_n < 3S_n$$

ist, und damit nach Voraussetzung auch $T_n \leq 3$.

Aufgabe 291233B:
Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geq \frac{1}{n^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert
b) einen größten Wert
annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Behauptung: s ist genau dann minimal, wenn für alle $i = 1...n$ gilt:

$$x_i = \frac{1}{n}$$

Beweis: Die Bedingungen $x \geq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ sind erfüllt. Die minimale Summe nennen wir s_0. Für eine beliebige andere Summe substituieren wir

$$x_i = \frac{1}{n}(1 + z_i)$$

Um die erste Nebenbedingungen einzuhalten, muss gelten:

$$(1) \qquad 1 + z_i \geq \frac{1}{n} > 0$$

Außerdem gilt wegen der zweiten Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}(1 + z_i) = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} z_i = 1$$

so dass

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} z_i = 0$$

gelten muss. Die beliebige Summe der Kehrwerte ist demnach

$$(3) \qquad s = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{n}(1 + z_i)} = n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1 + z_i}$$

Wir verwenden nun die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + z_i} \geq 1 - z_i$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung kann man mithilfe von (1) leicht zeigen, indem man mit $1 + z_i$ multipliziert. Diese Ungleichung eingesetzt in (3) ergibt:

$$s \geq n \sum_{i=0}^{n} (1 - z_i) = n^2 - n \sum_{i=0}^{n} z_i = n^2 = s_0$$

so dass also auf jeden Fall $s \geq s_0$ gilt. q. e. d.

b) Behauptung: Die Summe s der Kehrwerte von x_i ist genau dann maximal, wenn von den n Summanden genau $(n - 1)$ den minimal zulässigen Wert $x_i = \frac{1}{n^2}$ annehmen. Beweis: Es gelte für $i = 1...(n - 1)$:

$$(4) \qquad x_i = \frac{1}{n^2}$$

Da dies der minimal zulässige Wert ist, ergibt sein Kehrwert natürlich den größtmöglichen Summanden. Nur der letzte Summand muss wegen der zweiten Nebenbedingung einen anderen Wert haben, denn es muss gelten:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} + x_n = \frac{n-1}{n^2} + x_n$$

$$(5) \qquad x_n = 1 - \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$$

Die Summe der Kehrwerte ist dann

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n-1} n^2 + \frac{1}{x_n} = (n-1)n^2 + \frac{n^2}{n^2-n+1} = n^2\left(n-1+\frac{1}{n^2-n+1}\right) = n^2\left(n-1+\frac{n+1}{n^3+1}\right)$$

$$s_1 = n^2 \cdot \frac{n^4-n^3+2n}{n^3+1} = \frac{n^3(n^3-n^2+2)}{n^3+1}$$

Da wie oben schon festgestellt die ersten $n-1$ Summanden schon maximal sind, könnte eine Vergrößerung des letzten Summanden x_n nur zu Lasten mindestens eines anderen Summanden erfolgen. Das heißt, wenn $\frac{1}{x_n}$ größer werden soll, muss ich ein $\varepsilon > 0$ von x_n abziehen, aber dieses gleichzeitig zu einem der anderen x_i, z. B. x_1, hinzuaddieren, damit die zweite Nebenbedingung gültig bleibt. Für die neue Summe gilt dann:

$$s = \sum_{i=1}^{n-2} n^2 + \frac{1}{x_1+\varepsilon} + \frac{1}{x_n-\varepsilon}$$

$$s - s_1 = \frac{1}{x_1+\varepsilon} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_n-\varepsilon} - \frac{1}{x_n}$$

$$s - s_1 = \frac{x_1-x_1-\varepsilon}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{x_n-x_n+\varepsilon}{x_n(x_n-\varepsilon)} = \frac{-\varepsilon}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{x_n(x_n-\varepsilon)}$$

$$s - s_1 = \varepsilon\left(\frac{-1}{x_1(x_1+\varepsilon)} + \frac{1}{x_n(x_n-\varepsilon)}\right) = \varepsilon\,\frac{x_1^2+x_1\varepsilon-x_n^2+x_n\varepsilon}{x_1x_n(x_1+\varepsilon)(x_n-\varepsilon)}$$

$$s - s_1 = \varepsilon\,\frac{(x_1+x_n)(x_1-x_n+\varepsilon)}{x_1x_n(x_1+\varepsilon)(x_n-\varepsilon)}$$

Das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks wird bestimmt durch die zweite Klammer im Zähler, denn alle anderen Terme sind auf Anhieb als größer null zu erkennen. Wegen (4) und (5) gilt:

$$x_n - x_1 = \frac{n^2-n+1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{n-1}{n} \gg 0$$

Für ein kleines ε gilt daher auch, dass $(x_1 - x_n + \varepsilon) < 0$ ist, woraus $s - s_1 < 0$ bzw. $s < s_1$ folgt. q. e. d.

Alternativ-Lösung von cyrix:

a) Das arithmetische Mittel der x_i beträgt offenbar $A := \frac{1}{n}$, ihr harmonisches

$$H := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{s}$$

Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel gilt (wegen $x_i > 0$ für alle $1 \le i \le n$) $A \ge H$, also $\frac{n}{s} \le \frac{1}{n}$ bzw. $s \ge n^2$, wobei Gleichheit genau für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A = \frac{1}{n}$$

eintritt.

b) Lemma: Für beliebige reelle Zahlen a,b,c mit $a \ge b > c > 0$ gilt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b-c},$$

denn nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ist diese Ungleichung äquivalent zu $(a+c)(b-c)(b+a) \le ab(b-c+a+c)$ bzw. $ab - c(c+a-b) \le ab$, was offensichtlich wahr ist.

Wir zeigen im Folgenden nun, dass für jedes n-Tupel der Term s höchstens einen kleineren Wert annimmt, wenn es nicht (in irgendeiner Reihenfolge) die Form $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2}\right)$ besitzt:

Sei also ein beliebiges n-Tupel $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ gegeben, was nicht diese Form besitzt, wobei o. B. d. A. $x_n \geq x_i$ für alle i gelte. (Dies dürfen wir annehmen, da die zu beweisende Aussage symmetrisch in den x_i ist.) Es sei nun i der kleinste Index mit $x_i > \frac{1}{n^2}$. Es muss dann $i < n$ gelten, denn sonst hätte es die genannte Form. Wenden wir nun das Lemma mit $a := x_n$, $b := x_i \leq a$ und $0 < c := x_i - \frac{1}{n^2} < b$, an, so erhalten wir

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{x_n + x_i - \frac{1}{n^2}}$$

Das neue Tupel, in welchem wir $x_i' := \frac{1}{n^2}$ und $x_n' := x_n + x_i - \frac{1}{n^2} > x_n$ setzen erfüllt weiterhin wegen $x_i' + x_n' = x_n + x_i$ die Bedingung, dass die Summe aller Komponenten gleich 1 und jede Komponente $\geq \frac{1}{n^2}$ ist, ist also wieder ein zulässiges n-Tupel, welches aber zumindest keinen kleineren Wert für s liefert als das Ausgangstupel.

Jedoch besitzt es nun eine Komponente mehr als dieses, welche den Wert $\frac{1}{n^2}$ besitzt.

Führt man diesen Prozess wiederholt durch, so lässt sich die Anzahl der von $\frac{1}{n^2}$ verschiedenen Komponenten bis auf den Minimalwert 1 reduzieren, ohne den Wert für s zu senken. Also wird der Maximalwert für s von einem Tupel angenommen, bei welchem $n-1$ Komponenten (o. B. d. A. x_1 bis x_{n-1}) den Wert $\frac{1}{n^2}$ und die übrige den Wert $1-(n-1)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$ annimmt. Für dieses hat s dann den Wert

$$s = (n-1)\cdot n^2 + \frac{n^2}{n^2-n+1} = n^3 - n^2 + 1 + \frac{n-1}{n^2-n+1}$$

was also den größtmöglichen Wert für s darstellt.

Aufgabe 301231:

a) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets $\sqrt{ac}+\sqrt{bd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.

b) Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c,d stets $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d}$ gilt.

Lösung von weird:

Die Behauptung in a) ist korrekt, wie man dies ausgehend von

$$0 \leq (ad-bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + (bc)^2$$

durch folgende offensichtlichen und wegen $a,b,c,d > 0$ auch erlaubten Umformungen

$$\begin{aligned} 4abcd &\leq (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = (ad+bc)^2 \\ 2\sqrt{abcd} &\leq ad+bc \\ (\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2 = ac+bd+2\sqrt{abcd} &\leq ac+bd+ad+bc = (a+b)(c+d) \\ \sqrt{ac}+\sqrt{bd} &\leq \sqrt{a+b}\cdot\sqrt{c+d} \end{aligned}$$

sofort sehen kann.

Dagegen ist b) i.A. falsch, z. B. führt etwa

$$a = b = 1,\ c = d = 4$$

durch Einsetzen auf den Widerspruch

$$1 + 4 \leq \sqrt{2}\sqrt{8} = 4$$

Aufgabe 311234:

Für jede natürliche Zahl $a > 0$ ermittle man alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > a$$

erfüllen.

Lösung von MontyPythagoras:
Es gilt allgemein

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

wie man sich aufgrund der Tatsache, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist, leicht klar macht. Sei

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k}$$

Dann gilt mit obiger Relation:

$$\sum_{k=n+1}^{3n+1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < s_n < \sum_{k=n+1}^{3n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Da sich die Integrale in den Summen „nahtlos“ aneinander reihen, folgt:

$$\int_{n+1}^{3n+2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < s_n < \int_{n}^{3n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{3n+2}{n+1} < s_n < \ln\frac{3n+1}{n}$$

$$\ln\left(3 - \frac{1}{n+1}\right) < s_n < \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$$

Für kleine n lässt sich s_n noch recht mühelos direkt berechnen, es ist $s_1 = 1\frac{1}{12}$ und $s_2 = 1\frac{13}{140}$. Für $n \geq 3$ folgt mit obiger Eingrenzung, dass $s_n > \ln(2{,}75) > 1$ ist, aber es wird auch nie größer als 2, da es durch $s_n < \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ auf Werte zwischen 1 und 2 eingeschränkt wird. Man kann also weiter eingrenzen, dass $1 < s_n < 2$ ist. Daher erfüllen alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung für $a = 1$, für $a > 1$ ist die Ungleichung mit keinem n erfüllbar.

Aufgabe 311233A:
Man beweise, dass es unter allen Werten, die der Term

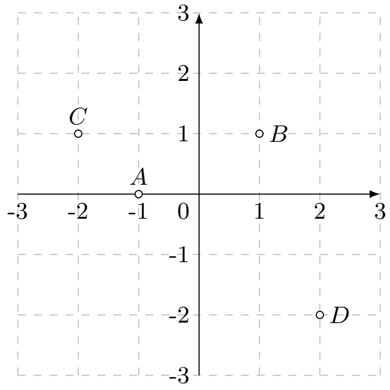
$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} + \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2-4x+4y+8}$$

für reelle Zahlen x, y annehmen kann, einen kleinsten Wert gibt, und man ermittle diesen kleinsten Wert.

Lösung von MontyPythagoras:
Nennen wir die Summe s. Dann ist:

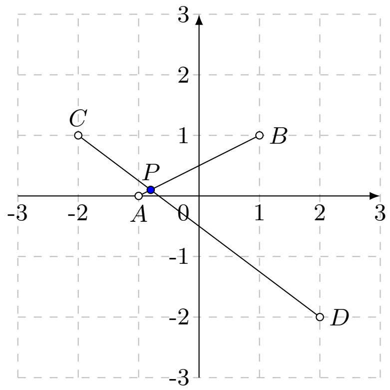
$$s = \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$$

Das bedeutet, man kann s als die Summe der Abstände eines gesuchten Punktes $(x; y)$ zu vier gegebenen Punkten auffassen. Die vier Punkte lauten $(-1; 0)$, $(1; 1)$, $(-2; 1)$ und $(2; -2)$. Hier graphisch dargestellt:



Es ist offensichtlich, dass es einen Punkt P geben muss, der in Summe einen minimalen Abstand zu den vier gegebenen Punkten haben muss, denn die Summe der Abstände ist „nach oben offen“, aber nach unten beschränkt (es gibt keinen Punkt mit negativen Abständen). Folglich muss es auch ein Minimum geben.

Betrachtet man nun die Punkte A und B isoliert, dann hat ein Punkt genau dann die minimale Abstandssumme zu A und B, wenn er sich auf der Strecke AB befindet. Die Abstandssumme ist auf der ganzen Strecke AB konstant, nämlich gleich der Länge der Strecke AB. Jeder Punkt außerhalb dieser Strecke hat zwangsläufig eine größere Abstandssumme.
Das gleiche gilt sinngemäß auch für die Punkte C und D. Der Punkt mit der gesuchten minimalen Abstandssumme zu allen vier Punkten muss daher der Schnittpunkt der Strecken AB und CD sein:



s ist dann die Summe der Längen von AB und CD:

$$s = \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 + \sqrt{5}$$

Aufgabe 321235:
Man beweise, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so dass für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + ... + a^{2n} \leq c \cdot \left(1 + a^{2n+1}\right)$$

gilt.
Man beweise auch, dass es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

Lösung von Nuramon:
Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq 2n$. Wenn $a \geq 1$ ist, dann gilt $a^k \leq a^{2n+1}$ und $1 \geq a^{-k}$. Wenn $a \leq 1$ ist, dann

gilt $a^k \geq a^{2n+1}$ und $1 \leq a^{-k}$.

In jedem Fall sind die Folgen a^k, a^{2n+1} bzw. $1, a^{-k}$ also unterschiedlich geordnet. Demnach gilt nach Umordnungsungleichung

$$\begin{aligned} a^k + a^{2n+1-k} &= a^k \cdot 1 + a^{2n+1} \cdot a^{-k} \\ &\leq a^k \cdot a^{-k} + a^{2n+1} \cdot 1 \\ &= 1 + a^{2n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a + a^2 + \ldots + a^{2n} &= (a + a^{2n}) + (a^2 + a^{2n-1}) + \ldots + (a^n + a^{n+1}) \\ &\leq n \cdot (1 + a^{2n+1}). \end{aligned}$$

Wir können also $c = n$ wählen. Für $a = 1$ gilt sogar Gleichheit. Daher ist $c = n$ auch das gesuchte Minimum.

Aufgabe 331231:
Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}} \qquad (1)$$

Lösung von MontyPythagoras:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$(abc + abd + acd + bcd)(a+b+c+d) \leq (a+b)(a+c)(b+d)(c+d)$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)(a+b+c+d) \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{d}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + 1 \leq \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{d}{b} + \frac{c}{d} + \frac{c}{b}\right)$$

$$4 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \leq 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{b} + \frac{d}{a} + \frac{ad}{bc} + \frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{bc}{ad} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$2 \leq \frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad}$$

$$0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

$$0 \leq (ad - bc)^2$$

q. e. d.

Aufgabe 341231:
Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{1 + x + \frac{1}{y}} + \frac{1}{1 + y + \frac{1}{z}} + \frac{1}{1 + z + \frac{1}{x}} \leq 1$$

Lösung von Kornkreis:
Bezeichnen wir die Nenner jeweils mit A, B, C und multiplizieren die Ungleichung mit ABC, so erhalten wir äquivalent (beachte, dass ABC positiv ist) zur zu zeigenden Ungleichung

$$ABC \geq AB + BC + CA$$

$$\iff (A-1)(B-1)(C-1) \geq A + B + C - 1$$

$$\iff \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) \geq x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + 2$$

$$\iff xyz + x + y + z + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + 2$$

$$\iff xyz + \frac{1}{xyz} \geq 2$$

$$\iff \left(\sqrt{xyz} - \frac{1}{\sqrt{xyz}}\right)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr (beachte, dass die Wurzeln wegen $xyz > 0$ wohldefiniert sind). Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 341236:
Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right]$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g = [z]$, für die $g \leq z < g + 1$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir erweitern zunächst jeden Bruch wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Dann sei die eingeklammerte Summe

$$s = -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - +... - \sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2-1}$$

$$s = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}\right) \tag{1}$$

Wir nutzen nun folgende Ungleichung:

$$\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \tag{2}$$

Beweis:

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{k - \frac{1}{2}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

$$\sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k - \frac{1}{2}}$$

$$k + k - 1 + 2\sqrt{k(k-1)} < 4k - 2$$
$$2\sqrt{k^2 - k} < 2k - 1$$
$$4k^2 - k < 4k^2 - 4k + 1$$

Das ist offensichtlich immer erfüllt. Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-1)} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$s < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(n^2-1)}$$
$$s < \frac{1}{2}\sqrt{n^2-1} < \frac{1}{2}n$$
$$s < \frac{1}{2}n \tag{3}$$

Wir stellen nun die Summe anders dar, indem wir die Summanden anders gruppieren:

$$s = -1 - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{4}) - \ldots - (\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2-3}) + \sqrt{n^2-1}$$
$$s = \sqrt{n^2-1} - 1 - \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}\right) \tag{4}$$

Wir modifizieren (2), indem wir dort k durch $k + \frac{1}{2}$ ersetzen:

$$\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} < \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right) \tag{2a}$$

Wir setzen in (4) ein und erhalten:

$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n^2-3)} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} - \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)$$

Auch das ist wieder eine Teleskopsumme, und daher:

$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(n^2-3) + \frac{1}{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right)$$
$$s > \sqrt{n^2-1} - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2-2} - 1\right)$$
$$s > \sqrt{n^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{n^2-2} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\sqrt{n^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{n^2-2} > \frac{1}{2}n$$
$$2\sqrt{n^2-1} > n + \sqrt{n^2-2}$$
$$4n^2 - 4 > n^2 + n^2 - 2 + 2n\sqrt{n^2-2}$$
$$n^2 - 1 > n\sqrt{n^2-2}$$
$$n^4 - 2n^2 + 1 > n^4 - 2n^2$$

Auch das ist immer erfüllt, so dass wir in (5) setzen können:

$$s > \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n-1)$$

Dies zusammen mit Gleichung (3) ergibt

$$\frac{1}{2}(n-1) < s < \frac{1}{2}n$$

Da n eine ungerade Zahl sein soll, gilt offensichtlich

$$g = \frac{n-1}{2}$$

IV Runde 4

Aufgabe 011244:
Gegeben sei ein konvexes ebenes Viereck.
Es ist zu beweisen, dass für den Quotienten q aus dem größten und dem kleinsten aller Abstände zweier beliebiger Eckpunkte voneinander stets gilt: $q \geq \sqrt{2}$.

Lösung von Carsten Balleier:
Für ein Quadrat ist offensichtlich, dass das Gleichheitszeichen gilt. Alle anderen Vierecke haben mindestens einen Innenwinkel, der größer als 90° ist; dieser sei o. B. d. A. α.
In einem konvexen Viereck kann man den Kosinussatz für die Diagonalen benutzen:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

Nun ist aber $-\cos\alpha > 0$ und daher gilt: $f^2 > a^2 + d^2$.
Folgende Kette gilt wegen der Monotonie von min und wegen $a, d > 0$:

$$a^2 + d^2 \geq 2min\{a^2, d^2\} = 2[min\{a, d\}]^2 \geq 2[min\{a, b, c, d, e, f\}]^2$$

Außerdem ist $max\{a, b, c, d, e, f\} \geq f$. Wir erhalten:

$$max\{a, b, c, d, e, f\} > \sqrt{2}min\{a, b, c, d, e, f\}$$

Aufgabe 011242:
Es seien u, v und w beliebig gewählte positive Zahlen, kleiner als 1.
Man soll zeigen, dass unter den Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ stets mindestens ein Wert nicht größer als $\frac{1}{4}$ vorkommt.

Lösung von Eckard Specht:
Indirekter Beweis: Angenommen, keine der Zahlen $u(1-v)$, $v(1-w)$, $w(1-u)$ ist nicht größer als $\frac{1}{4}$, d. h., alle drei Zahlen sind größer als $\frac{1}{4}$. Deren Multiplikation liefert

$$uvw(1-u)(1-v)(1-w) > \frac{1}{64} \qquad (1)$$

Andererseits ist jedoch $u(1-u) = \frac{1}{4} - (u - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$; analoge Ungleichungen gelten für v und w.
Multipliziert man diese drei Ungleichungen, zeigt sich, dass (1) nicht gilt. Somit war die obige Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 021242:
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1$$

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Zuerst kann man mit $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ und $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ die Ungleichung umformen zu

$$0 \leq 1 - \frac{2}{1-\tan^2 x} + 2\frac{1-\tan^2 x}{2} = f(x)$$

($f(x)$ dient als Abkürzung des Ausdrucks).
Zuerst betrachtet man die zugehörige Gleichung, um alle Nulldurchgänge zu finden. Durch die Substitution $z = 1 - \tan^2 x$ erhält man die quadratische Gleichung $zf(x) = z^2 + z - 2 = 0$, die die Lösungen -2 und 1 besitzt.
Daraus folgt, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung bei $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{2\pi}{3}$ gilt (es gilt auch bei $x = 0$ und $x = \pi$, was aber nicht im gewünschten Intervall liegt).
Weiterhin stellt man fest, dass die Ungleichung bei $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ nicht definiert ist. Da $f(x)$ auf dem Rest des Intervalls $(0, \pi)$ stetig ist, wechselt das Vorzeichen der Funktion nur an Nullstellen und an Stellen, wo sie nicht definiert ist. Es reicht also, aus jedem Teilintervall einen Punkt zu überprüfen.
Zum Beispiel ist im Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$ der Wert $f(\frac{\pi}{6}) = -\frac{4}{3}$ und f somit überall negativ; die Ungleichung ist hier nicht erfüllt.
Auf $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ (mit der obigen Substitution: $z \in (-2, 0)$) nutzt man $zf(x) < 0$, um daraus $f(x) > 0$ zu folgern.
Ähnlich geht man auch mit den anderen Intervallen vor und findet, dass die Ungleichung auf der Menge gilt:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 021243:
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Lösung von Eckard Specht:
Angenommen, alle drei Zahlen a, b, c sind von null verschieden. Dann sind die drei Nenner auf der linken Seite der vorgelegten Ungleichung positiv und wir können die Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel hinschreiben:

$$\left[(b^2+c^2) + (c^2+a^2) + (a^2+b^2)\right] \left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq 9$$

Multiplizieren wir das Produkt auf der linken Seite der Ungleichung aus, bleibt gerade unser Term und ein Summand $1 + 1 + 1 = 3$ übrig:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{3}{2}$$

Ist dagegen eine Zahl gleich null (etwa a), vereinfacht sich die Ungleichung auf

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \leq 2 > \frac{3}{2}$$

welche wegen

$$\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} - 2 \geq 0$$

ebenfalls eine wahre Aussage ist.

Gleichheit tritt in der Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel genau dann ein, wenn alle Größen untereinander gleich sind: $b^2 + c^2 = c^2 + a^2 = a^2 + b^2$. Diese Bedingungen sind äquivalent mit $a = b = c$.

Aufgabe 031241:
Beweisen Sie, dass für alle positiven ganzrationalen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von Eckard Specht:
Beweis:
Schreiben wir die rechte Seite der gegebenen Ungleichung um, erhalten wir den Ausdruck

$$a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}}$$

der uns sofort an die gewichtete AM-GM-Ungleichung erinnern sollte:
Sind $a_1, ..., a_n$ positive reelle Zahlen und $\delta_1, ..., \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + ... + \delta_n = 1$, so gilt stets

$$\delta_1 a_1 + ... + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n}$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind. Diese bekannte Ungleichung für $n = 2$, $\delta_1 = \frac{b}{a+b}$ und $\delta_2 = \frac{a}{a+b}$ hingeschrieben, führt auf

$$\frac{2ab}{a+b} \geq a^{\frac{b}{a+b}} \cdot b^{\frac{a}{a+b}} = \sqrt[a+b]{a^b \cdot b^a}$$

Aus

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

folgt mit (1) die Behauptung.

Aufgabe 041246:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, dann gilt:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von Daniel Gutekunst:
Ich eliminiere zunächst die Winkel über den Kosinussatz und bringe die Gleichung in geeignete Form.

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &\leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2abc\cos\alpha + 2abc\cos\beta + 2abc\cos\gamma &\leq 3abc \\ \Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) &\leq 3abc \\ \Leftrightarrow ab^2 + ac^2 - a^3 + ba^2 + bc^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3 &\leq 3abc \\ \Leftrightarrow 0 \leq 2 \cdot (3abc + a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - ac^2 - ba^2 - bc^2 - ca^2 - cb^2) \\ \Leftrightarrow 0 \leq (a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (a+c-b)(a-c)^2 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist offensichtlich wahr, da im Dreieck

$$a+b-c>0, \quad b+c-a>0, \quad a+c-b>0$$

gilt.
Gleichheit tritt dann ein, wenn $(a-b)^2=0, (b-c)^2=0$ und $(a-c)^2=0$, also $a=b=c$ gilt. Und tatsächlich gilt im gleichseitigen Dreieck: $\cos 60° + \cos 60° + \cos 60° = \frac{3}{2}$

Aufgabe 061243:
Man beweise folgenden Satz:
Ist $n>2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, ..., a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i_1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

Lösung von cyrix:
Beweis:
Zuerst normieren wir via $b_i := \frac{a_i}{s}$ die zu zeigende Ungleichung, denn sie geht durch Kürzen der Brüche mit s äquivalent über in $\sum_{i=1} \frac{b_i}{1-b_i} \geq \frac{n}{n-1}$, wobei die b_i weiterhin positive reelle Zahlen sind, die aber nun zusätzlich $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ erfüllen.

Setzen wir $\lambda_i := b_i$ und $f(x) := \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, so können wir die linke Seite der Ungleichung auch schreiben als $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i)$, wobei natürlich weiterhin alle λ_i positiv sind und ihre Summe 1 ergibt. Da

$$f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2} > 0 \qquad \text{und}$$

$$f''(x) = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3} > 0$$

für alle $0<x<1$ ist, und da alle b_i aus diesem Intervall $(0;1)$ stammen, können wir die Jensensche-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Es ist das quadratische Mittel q der b_i definiert als

$$q := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{n}}$$

und ihr arithmetisches Mittel a als

$$a := \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n} = \frac{1}{n}$$

Nach der Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischem Mittel ist $q \geq a = \frac{1}{n}$, also

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{n} = q^2 \cdot n \geq \frac{1}{n}$$

Da f monoton wachsend ist, folgt damit

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

und insgesamt das zu zeigende. q. e. d.

Bemerkung: Aufgrund der strengen Monotonie und da die Ungleichung zwischen quadratischem und arithmetischen Mittel nur für Gleichheit aller b_i und damit aller a_i untereinander Gleichheit liefert, wird auch nur dann in der zu zeigenden Ungleichung der Gleichheitsfall angenommen.

Aufgabe 071245:
Es ist zu beweisen, dass für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$

erfüllt ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad , \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{und}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) =$$

$$= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Damit lässt sich die linke Seite schreiben als:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin x + \sin x\cos x + \frac{1}{3}\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) =$$

$$= \sin x\left(1 + \cos x + 1 - \frac{4}{3}\left(1 - \cos^2 x\right)\right)$$

Und damit geht in die Ungleichung über in:

$$\sin x\left(\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3}\right) > 0$$

$\sin x$ ist im gegebenen Intervall stets positiv.
$\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} = 0$ hat keine Nullstelle, da nach Substitution $u = \cos^2 x$ die quadratische Gleichung $\frac{4}{3}u^2 x + u + \frac{2}{3}$ keine reelle Lösung hat. Damit ist der Term $\frac{4}{3}\cos^2 x + \cos x + \frac{2}{3} > 0$ und das Produkt ebenfalls > 0.

Aufgabe 091246:
Es ist zu beweisen, dass für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

Lösung von Sonnhard Graubner:
Wir beweisen den folgenden Satz:
Gegeben seien n nichtnegative reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$. Wir betrachten die n symmetrischen Funktionen

$$s_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + ... + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}}$$

$$...$$

$$s_i = \sqrt[i]{\frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_i \leq n} x_{j_1}x_{j_2} \cdot ... \cdot x_{j_i}}$$

$$s_n = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

Dann gilt für alle $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichungskette $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n$.
Offenbar ist $s_1 \geq s_n$ die Ungleichung zwischen dem arithmetischem und geometrischem Mittel.
Für $x_1 = x_2 = ... = x_n$ gilt: $s_1 = s_2 = ... = s_n = x_1$. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel folgt: $s_{n-1} >= s_n$ und $s_i \geq s_n, i = 1,...,n-1$.

Wir betrachten das Polynom
$$P(x) = (x - x_1(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$
$P(x)$ hat genau n nichtnegative Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$ und ist ausmultipliziert:
$$P(x) = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} s_1 + \binom{n}{2} s_2^2 * x^{n-2} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} s_n^n.$$
Es sei $i \in \{2,3,..,n-1\}$. Wir betrachten die $n-i$-te Ableitung von $P(x)$:
$$P^{(n-i)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (i+1) \left(x^i - \binom{i}{1} s_1 x^{i-1} + \binom{i}{2} s_2^2 x^{i-2} \mp ... + (-1)^i \binom{i}{i} s_i^i \right)$$
Nach dem Satz von Rolle hat $P'(x)$ genau $n-1$ nichtnegative reelle Nullstellen. Per Induktion folgt sofort,dass $P^{(n-i)}(x)$ genau i nichtnegative reelle Nullstellen $(x_1)^*, (x_2)^*, ..., (x_i)^*$ hat. Dabei ist
$$(x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i} s_i^i \quad \text{und}$$
$$(x_1)^* \cdot (x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-1})^* + (x_1)^*(x_2)^* \cdot ... \cdot (x_{i-2})^*(x_i)^* + ... + (x_2)^*(x_3)^* \cdot ... \cdot (x_i)^* = \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1}$$
Nach der AGM folgt:
$$\frac{1}{i} \binom{i}{i-1} S_{i-1}^{i-1} \geq \sqrt[i]{x_1^{i-1} x_2^{i-1} \cdot ... \cdot x_i^{i-1}} = \sqrt[i]{(s_i^i)^{i-1}}$$
und $s_{i-1}^{i-1} \geq s_i^{i-1}$, also $s_{i-1} \geq s_i$. Insbesondere ist $s_2 \geq s_3$.

Aufgabe 101241:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, zu denen es reelle Zahlen x gibt, so dass $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{a-x}$ reell sind und die Ungleichung $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$ erfüllt ist.
Wie lauten die Werte von x in Abhängigkeit von a?

Lösung von StrgAltEntf:
Mit (*) bezeichnen wir im folgenden die Ungleichung $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass $a = 0$. In diesem Fall sind die beiden Wurzeln nur für $x = 0$ reell, (*) ist dann aber nicht erfüllt.
Für $a < 0$ können für keinen Wert x beide Wurzeln reell sein, da ansonsten $x \geq -a$ und $x \leq a$ gelten müsste.

Sei von nun an $a > 0$. Dann sind genau für alle $x \in [-a,a]$ beide Wurzeln reell.
Quadrieren von (*) ist eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv sind; (*) ist also äquivalent zu
$$a + x + 2\sqrt{a^2 - x^2} + a - x > a^2 \iff (**)\ 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a$$
Für $0 < a < 2$ ist $a^2 - 2a < 0$, (**) also für alle $x \in [-a,a]$ erfüllt.

Es verbleibt der Fall $a \geq 2$.
Quadrieren von (**) ist wieder eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten ≥ 0 sind; (**) ist also äquivalent zu
$$4(a^2 - x^2) > a^4 - 4a^3 + 4a^2 \iff (***)\ 4x^2 < 4a^3 - a^4 = a^2 a(4-a)$$

Falls $a \geq 4$, ist die rechte Seite von (***) ≤ 0, (***) kann also von keinem x erfüllt werden.

Schließlich sei nun $2 \leq a < 4$.
Dann ist (***) äquivalent zu $|x| < \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}$. Da $\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)} \leq a \iff a(4-a) \leq 4$ und letzteres für alle $a \in [2,4)$ erfüllt ist, ist das Intervall $I = \left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}, \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$ im intervall $[-a,a]$ enthalten und somit erfüllen alle $x \in I$ die Ungleichung (***).

Zusammenfassend:

- $a < 0$: Für kein x sind beide Wurzeln reell und somit ist (*) für kein x erfüllt.
- $a = 0$: Genau für $x = 0$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.
- $0 < a < 2$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell und ist (*) erfüllt.
- $2 \leq a < 4$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, und genau für

$$x \in \left(-\frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}, \frac{1}{2}a\sqrt{a(4-a)}\right)$$

  ist zusätzlich (*) erfüllt.
- $a \geq 4$: Genau für $x \in [-a,a]$ sind beide Wurzeln reell, aber für kein x ist (*) erfüllt.

Aufgabe 111241:
Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \qquad (1)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die folgende Ungleichung (2) erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \qquad (2)$$

Lösung von StrgAltEntf:
In (1) dürfen alle x eingesetzt werden, für die keiner der beiden Nenner 0 wird, also alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,8\}$.
Wir unterscheiden die Fälle $x \geq 3$ und $x < 3$.

Fall 1: $x \geq 3$
Dann ist der Ausdruck (1) gleich

$$\frac{2x}{x-3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2+5x-8}{(x-8)(x+2)}$$

Fall 1.1: Für $x > 8$ (oder $x < -2$, was in Fall 1 aber nicht möglich ist) ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu

$$2x^2+5x-8 \geq (x-8)(x+2) \iff x^2+11x+8 \geq 0 \iff (x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$$

Letzteres ist immer erfüllt. Dieser Fall liefert also alle $x > 8$ als Lösung von (2).
Fall 1.2: Für $-2 < x < 8$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Die Rechnung bleibt aber identisch, und (2) ist dann äquivalent zu $(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \leq 0$. Dies ist nie erfüllt.

Fall 2: $x < 3$

Dann ist der Ausdruck (1) gleich

$$\frac{2x}{-x+3-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1-2x}{x+2}$$

Fall 2.1: Für $x>-2$ ist der Nenner positiv und die Ungleichung (2) dann äquivalent zu

$$1-2x\geq x+2\iff x\leq -\frac{1}{3}$$

Dieser Fall liefert also alle x mit $-2<x\leq -\frac{1}{3}$ als Lösung von (2).
Fall 2.2: Für $x<-2$ ist der Nenner negativ und das Ungleichheitszeichen dreht sich. Ungleichung (2) ist dann äquivalent zu $1-2x\leq x+2 \iff x\geq -\frac{1}{3}$, was in diesem Fall nicht möglich ist.

Zusammenfassend: Genau alle $x\in(-2,-\frac{1}{3}]\cup(8,\infty)$ sind Lösung von (2).

Aufgabe 121241:
Man untersuche, ob unter allen Paaren (a,b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b)=\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wegen der Symmetrie der Funktion können wir statt $f(a,b)$ auch $g(x)=x^4+\frac{1}{x^4}-x^2-\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}$ mit $x:=\frac{a}{b}>0$ betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x)-x-\frac{1}{x} &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}\right)\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

Die Faktoren in der letzten Zeile sind alle nicht negativ. Nur $(x-1)^2$ wird für $x=1$ null. Somit erhalten wir $g(x)\geq x+\frac{1}{x}\geq 2$, wobei Gleichheit nur für $x=1$ gilt. Daher nimmt f ihr Minimum bei $f(a,a)=2$ an.

Aufgabe 121246A:
Man zeige , dass der Term

$$\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$

im Intervall $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, dass für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenzen beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.
Anmerkung: Es gilt $\pi=3{,}14159+\delta$ mit $0<\delta<10^{-5}$ und $\sqrt{2}=1{,}41421+\varepsilon$ mit $0<\varepsilon<10^{-5}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Man betrachte die Funktion

$$f(x)=x-\frac{(14+\cos x)\cdot\sin x}{9+6\cdot\cos x}$$

Dann ist zu zeigen, $|f(x)| < 10^{-4}$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Für die 1.Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{(14\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(9 + 6\cos x) + (14 + \cos x)6\sin^2 x}{(9 + 6\cos x)^2} \\ &= 1 - \frac{42\cos x + 6\cos^2 x + 2\cos^3 x + 25}{3(3 + 2\cos x)^2} \\ &= \frac{2(1 - \cos x)^3}{3(3 + 2\cos x)^2} \end{aligned}$$

Wegen $1 - \cos x \geq 0$ gilt für alle x des zu untersuchenden Intervall $f'(x) \geq 0$. Damit ist $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ monoton wachsend, und es gilt für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Offenbar ist $f(0) = 0$. Um die Behauptung nachzuweisen, genügt es also $\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{\left(14 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{2}}{9 + 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\left(7\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)(3 - \sqrt{2})}{3(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{41}{2}\sqrt{2} - \frac{25}{2}}{21} = \frac{1}{84}(21\pi - 82\sqrt{2} + 50) \end{aligned}$$

Es ist $21\pi = 21(3{,}14159 + \delta) = 65{,}97339 + 21\delta$ und $82\sqrt{2} = 82(1{,}41421 + \varepsilon) = 115{,}96522 + 82\varepsilon$.
Damit ist

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{84}(0{,}00817 + 21\delta + 82\varepsilon) < \frac{81{,}7 + 2{,}1}{84} \cdot 10^{-4} = \frac{83{,}8}{84} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

und somit gilt für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$0 = f(0) \leq f(x) = |f(x)| \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 10^{-4}$$

Aufgabe 141241:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Ungleichung (1) ist wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ äquivalent mit

$$\begin{aligned} \frac{a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc}{abcd} &\geq \frac{b^2cd + c^2ad + d^2ab + a^2bc}{abcd} \\ a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc &\geq a^2bc + b^2cd + c^2ad + d^2ab \\ a^2c(d-b) + b^2d(a-c) + c^2a(b-d) + d^2b(c-a) &\geq 0 \\ (d-b)(a^2c - ac^2) + (c-a)(bd^2 + b^2d) &\geq 0 \\ (d-b)(a-c)ac + (c-a)(d-b)bd &\geq 0 \\ (d-b)(c-a)(bd - ac) &\geq 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Wegen $0 < a \leq b \leq c \leq d$ gilt $d - b \geq 0$, $c - a \geq 0$ und $bd - ac \geq 0$.
Daher gilt die Ungleichung (2) und wegen Äquivalenz aller Ungleichungen auch die Ungleichung (1) für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $0 < a \leq b \leq c \leq d$.

b) Aus (2) ergibt sich, dass das Gleichheitszeichen (1) genau dann gilt, wenn $a - c = 0$, d. h. $a = c$, oder $d - b = 0$, d. h. $d = b$, oder $bd - ac = 0$, d. h. $ac = bd$ ist.
Wegen $a \leq b \leq c$ ist $a = c$ gleichbedeutend mit $a = b = c$. Wegen $b \leq c \leq d$ ist $b = d$ gleichbedeutend mit $b = c = d$. Aus $ac = bd$ folgt $a = b$. Wäre $a < b$, so wäre wegen $c \leq d$ auch $ac < bd$.
Ebenso folgt, dass $c = d$ gelten muss. Daher ist $ac = bd$ gleichbedeutend mit $a = b$ und $c = d$.
Notwendig und hinreichend dafür, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt, ist die Bedingung, dass in mindestens zwei der drei Ungleichungen $a \leq b \leq c \leq d$ das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 141242:
Von einem Dreieck seien die Innenwinkel gemessen worden. Die Summe der dabei (als Näherungswerte der wahren Innenwinkelgrößen) erhaltenen Messwerte u, v, w sei $180° + \delta$ mit $\delta \neq 0°$.
Durch drei Korrekturwerte x, y, z sollen die Messwerte so verändert werden, dass die Summe der dann entstehenden Werte $u + x$, $v + y$, $w + z$ gleich $180°$ ist.
Es ist zu beweisen, dass für alle unter diesen Bedingungen möglichen Korrekturwerte x, y, z der Wert $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten ist, wenn $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $u + v + w = 180° + \delta$ und $(u + x) + (v + y) + (w + z) = 180°$ gilt $x + y + z = -\delta$.
Für $x = y = z = -\frac{\delta}{3}$ ist $S = x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{\delta^2}{3}$.
Sind aber x,y,z beliebige den gegebenen Bedingungen entsprechende Korrekturwerte mit $a = x + \frac{\delta}{3}$, $b = y + \frac{\delta}{3}$, $c = z + \frac{\delta}{3}$ so gilt $a + b + c = 0$ und

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(a - \frac{\delta}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{\delta}{3}\right)^2 + \left(c - \frac{\delta}{3}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{2}{3}(a + b + c) + \frac{\delta^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{\delta^2}{3}$$

Da a,b,c reelle Zahlen sind, ist $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ und $c^2 \geq 0$ und wir erhalten

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{\delta^2}{3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau da, wenn $a^2 = 0$, $b^2 = 0$ und $c^2 00$, also $a = b = c = 0$ gilt. Damit ist $S = x^2 + y^2 + z^2$ genau dann am kleinsten, wenn $x = -\frac{\delta}{3}$, $y = -\frac{\delta}{3}$ und $z = -\frac{\delta}{3}$ ist.

Aufgabe 161244:
Man beweise, dass für alle reellen Zahlen a und b gilt:

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ungleichung (1) ist wegen $1 + |a + b| > 0$, $1 + |a| > 0$, $1 + |b| > 0$ für alle reellen a, b erfüllt, wenn jede der folgenden Ungleichungen erfüllt ist:

$$|a + b|(1 + |a|)(1 + |b|) \leq |a|(1 + |a + b|)(1 + |b|) + |b|(1 + |a + b|)(1 + |a|) \qquad (2)$$

$$|a+b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \leq |a|+|b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+2|a|\cdot|b|+2|a|\cdot|b|\cdot|a+b| \qquad (3)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| + |a| \cdot |b| \cdot |a + b| \qquad (4)$$

Nun ist für alle reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b| \leq |a| + |b| + |a| \cdot |b| \cdot |a + b| \qquad (5)$$

erfüllt, also sind auch die Ungleichung (4) und daher die Ungleichungen (3), (2) und (1) erfüllt. w. z. b. w.

Aufgabe 171246A:
Es sei n eine positive Zahl, $(a_1, ..., a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leq a2 \leq ... \leq a_n$.
Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, ..., a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, dass die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.
Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den dazugehörigen minimalen Wert von z an.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Funktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

ist auf $(-\infty, \infty)$ definiert und als Summe endlich vieler stetiger Funktionen stetig. In der Aufgabe ist nach der Existenz des Minimums - und falls eines existiert - der Menge der Minimalpunkte gefragt.
Für $x - a_1 \leq 0$ folgt $x - a_i \leq 0$ für $i = 1,...,n$, d. h.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} -(x - a_i) = -nx + c_0 \qquad \text{mit} \qquad c_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Der Graph der Funktion in $(-\infty, a_1)$ ist ein Strahl mit dem Anstieg $-n$, also für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
Für $x - a_n \geq 0$ folgt analog $f(x) = nx - c_0$; der Graph von $f(x)$ in (a_n, ∞) ist ein Strahl mit dem Anstieg n, und es gilt für $x \to \infty \quad f(x) \to \infty$.
Es existiert also eine reelle Zahl $R > 0$, so dass für ein $x \in [-R, R]$ gilt $f(x) < f(y)$ für alle y mit $|y| > R$.
Nach einem Satz von Weierstrass existiert dann in dem abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$ ein x^*, in dem die stetige Funktion $f(x)$ bzgl. $(-\infty, \infty)$ ihr Minimum erreicht.
Damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Für $(a_1, a_2, ..., a_n)$ unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:
Falls $a_i = a_1$ für $i = 1,...,n$, so ist offenbar $f(a_1) = \min f(x)$; es ist dann der Wert des Minimums $f(a_1) = 0$ und die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_1\}$.

Andernfalls existieren $i, k \in \{1,...,n\}$ mit $i < k$, wobei k der kleinste Index mit $a_i \neq a_k$ ist. Für $x \in (a_i, a_k)$ gilt nun

$$x - a_1 \geq ... \geq x - a_i \geq 0 \qquad ; \qquad 0 \geq x - a_{i+1} \geq ... \geq x - a_n \qquad \text{, so dass}$$

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{i} x - a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} -(x - a_\mu) = ix - (n - i)x - \sum_{\mu=1}^{i} a_\mu + \sum_{\mu=i+1}^{n} a_\mu = (2i - n)x + c_i$$

Der Graph von $f(x)$ ist somit in jedem solchen Intervall eine Strecke; das Minimum bez. eines jeden solchen Intervalls $[a_i, a_k]$ wird in a_i erreicht, falls der Anstieg $(2i - n)$ der Strecke nicht negativ, und in a_k, falls der Anstieg nicht positiv ist.

Zusammenfassend lässt sich (unter Verwendung dessen, dass $2i - n \geq 0$ genau dann, wenn $i \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist) dies in folgender Weise sagen:
Es ist $f(x)$ über $(-\infty, \infty)$ für $x \in (-\infty, a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]})$ stückweise linear mit nichtpositivem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ erreicht.
Für $x \in (a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}, \infty)$ ist $f(x)$ eine stückweise lineare Funktion mit nichtnegativem Anstieg; das Minimum wird auf Grund der Stetigkeit in $a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$ erreicht.

Ist nun n eine ungerade Zahl, so ist $a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$, und es gilt

$$\min f(x) = f(a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}) = \sum_{\mu=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{n-\mu+1} - a_\mu$$

die Menge der Minimalpunkte ist $\{a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\}$.
Ist n eine gerade Zahl, so gilt für $x \in [a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$, da der Anstieg der Geraden in diesem Intervall gleich 0 ist, dass

$$f(x) = \text{const} = \min f(x) = -\sum_{\mu=1}^{\frac{n}{2}} a_\mu + \sum_{\mu=\frac{n}{2}+1}^{n} a_\mu$$

ist; die Menge der Minimalpunkte ist $[a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, a_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}]$ (wobei dieses Intervall gegebenenfalls aus nur einem einzigen Punkt bestehen kann).

Aufgabe 181246B:
a) Es sei M die Menge aller Tripel (x, y, z) von reellen Zahlen, für die die folgenden Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind:

$$55x + z \leq 54 \qquad (1)$$
$$55y + z \leq 54 \qquad (2)$$
$$55x - 4z \geq 4 \qquad (3)$$
$$55y - 4z \geq 4 \qquad (4)$$
$$z \geq -1 \qquad (5)$$

Man untersuche, ob für den Ausdruck

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (6)$$

ein Tripel $(x_0, y_0, z_0) \in M$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M$ die Ungleichung

$$f(x_0, y_0, z_0) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_0, y_0, z_0)$.
b) Es sei M' die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind.
Man untersuche, ob für den Ausdruck (6) ein Tripel $(x_1, y_1, z_1) \in M'$ mit der Eigenschaft existiert, dass für alle Tripel $(x, y, z) \in M'$ die Ungleichung

$$f(x_1, y_1, z_1) \geq f(x, y, z)$$

gilt. Ist dies der Fall, so ermittle man hierzu $f(x_1, y_1, z_1)$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Es seien x, y, z reelle Zahlen, für die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gilt wegen (3) und (1)

$$4z - 55x \leq -4; \qquad z + 55x \leq 54 \qquad \text{also} \qquad 5z \leq 40 \to z \leq 10$$

Wegen (5) gilt daher $-1 \leq z \leq 10$ (7). Nun folgt aus (1) und (3)

$$\frac{4 + 4z}{55} \leq x \leq \frac{54 - z}{55} \qquad (8)$$

aus (2) und (4)

$$\frac{4 + 4z}{55} \leq y \leq \frac{54 - z}{55} \qquad (9)$$

Wegen (7) ist $\frac{4 \cdot 4z}{55} \geq 0$, $0 < \frac{44}{45} \leq \frac{54-z}{55} \leq 1$, also $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 1$ (10). Daraus folgt:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\left(\frac{54 - z}{55}\right)^2 + z^2 \qquad (11)$$

Nun gilt für die quadratische Fuktion

$$g(z) = 2\left(\frac{54-z}{55}\right)^2 + z^2 \quad \text{mit} \quad -1 \leq z \leq 10$$

$$g(z) > 0; \qquad g(-1) = 3; \qquad g(10) = 101{,}28$$

also nimmt diese Funktion in ihrem Definitionsbereich ein Maximum für $z = 10$ an. Daher gilt: $f8x,y,z) \leq 101{,}28$ (12). Für $z_0 = 10$, $x_0 = y_0 = \frac{54-z_0}{55} = 0{,}8$ (13) wird nun $f(x_0, y_0, z_0) = 101{,}28$ (14), d. h. das Tripel $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}8; 0{,}8; 10)$ hat die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

b) Es seien nun x, y, z ganze Zahlen, für die die Ungleichungen (1) bis (5) erfüllt sind. Dann gelten wieder die Ungleichungen (7), (8), (9) und (10), also kann nur entweder $x = 0$ oder $x = 1$ sein. Ferner gilt entweder $y = 0$ oder $y = 1$.
Ist $x = 0$, so folgt aus (3) $z \leq -1$, und daher wegen $z \geq -1$: $z = -1$.
Ist $x = 1$, so folgt aus (1) $z \leq -1$, also erneut $z = -1$.

Daher gibt es höchstens die folgenden ganzzahligen Tripel für die die Ungleichungen (1) bis 85) erfüllt sind:

$$(0; 0; -1), \qquad (0; 1; -1), \qquad (1; 0; -1), \qquad (1; 1; -1)$$

Sie erfüllen in der Tat diese Ungleichungen, ferner gilt:

$$f(0; 0; -1) = 1, \qquad f(0; 1; -1) = f(1; 0; -1) = 2, \qquad f(1; 1; -1) = 3$$

Also hat das Tripel $(x_1, y_1, z_1) = (1; 1; -1)$ die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft mit $f(x_1, y_1, z_1) = 3$.

Aufgabe 191245:
Man beweise:
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ und jede ganze Zahl $k \geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^k - 1} + \frac{1}{n^k} > k \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}}$ ist die folgende Darstellung möglich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \qquad (1)$$

$$\text{mit} \qquad S_k = \sum_{j=1}^{n^i} \frac{1}{kn^i + j} \qquad (2)$$

Weiterhin gilt

$$S_k > \frac{n^i}{(k+1)n^i} = \frac{1}{k+1} \qquad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \qquad (4)$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten von (4) den Ausdruck $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n^i}$, so folgt nach dem Monotoniegesetz der Addition (Subtraktion) bei Ungleichungen:

$$\frac{1}{n^i + 1} + \frac{1}{n^i + 2} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Diese Ungleichung besteht für alle natürliche Zahlen $i \geq 1$. Ist $i - j \geq 1$, so gilt auch:

$$\frac{1}{n^{i-j}+1} + \frac{1}{n^{i-j}+2} + ... + \frac{1}{n^{i-j+1}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Notiert man die Ungleichung (6) nacheinander für $j = 0,1,...,i-1$, so erhält man i Ungleichungen, deren rechte Seiten untereinander gleich sind. Nach bekannten Sätzen über das Rechnen mit Ungleichungen dürfen gleichgerichtete Ungleichungen addiert werden. Addiert man außerdem auf beiden Seiten die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n^{i+1}} > (i+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) \qquad (7)$$

Setzt man in Ungleichung (7) $i + 1 = k$, so folgt die zu beweisende Ungleichung in der vorgelegten Form.

Aufgabe 221243:
Man untersuche, ob es nichtnegative
a) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4,
b) ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4
mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ und $x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$ gibt, so dass die Summe

$$s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

einen kleinsten Wert annimmt. Ist das der Fall, so ermittle man jeweils zu a) bzw. b) solche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 sowie den zugehörigen Wert s.

Lösung von Kitaktus:
a) Löst man die beiden Gleichungsnebenbedingungen nach x_2 und x_1 auf, so erhält man:

$$x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 \qquad (1)$$
$$x_1 = x_3 + 2x_4 \qquad (2)$$

Eingesetzt in die Gleichung $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} s &= (x_3 + 2x_4)^2 + (4 - 2x_3 - 3x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= x_3^2 + 4x_3x_4 + 4x_4^2 + 16 - 16x_3 - 24x_4 + 4x_3^2 + 12x_3x_4 + 9x_4^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ &= 6x_3^2 + 16x_3x_4 + 14x_4^2 - 16x_3 - 24x_4 + 16 \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (14 - 32/3)x_4^2 - (24 - 64/3)x_4 + (16 - 32/3) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4^2 - (4/5)x_4 + (8/5)) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + (10/3)(8/5 - 4/25)) \\ &= 6(x_3 + (4/3)(x_4 - 1))^2 + (10/3)(x_4 - 2/5)^2 + 24/5 \geq 24/5 \end{aligned}$$

s ist also durch 24/5 nach unten beschränkt.

Für $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da $(8{+}6{+}4{+}2)/5 = 20/5 = 4$ und $(6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2)/5 = 20/5 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist

$$s = (8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2)/5^2 = 120/25 = 24/5$$

Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 24/5 an, wenn $x_1 = 8/5; x_2 = 6/5; x_3 = 4/5; x_4 = 2/5$ ist.

b) Sind die Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 ganzzahlig, so ist auch $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ganzzahlig. Eine Zahl x_i und ihr Quadrat x_i^2 haben die gleiche Parität (d. h. den gleichen Rest bei Division durch 2). Daher hat

s die gleiche Parität wie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$. s ist also in jedem Fall gerade.

Genauso wie in a) gilt die Ungleichung $s \geq 24/5 > 20/5 = 4$. Da s ganzzahlig und gerade ist, kann das verschärft werden zu $s \geq 6$.

Für $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ sind die beiden Nebenbedingungen erfüllt, da $1 + 2 + 1 + 0 = 4$ und $2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$ gilt. Für diese Variablenbelegung ist $s = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 6$. Die untere Schranke wird also angenommen.

Fazit: Die Summe s nimmt den kleinsten Wert 6 an, wenn $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ ist.

Aufgabe 221245:
Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Bei einem ungestörten technischen Prozess sei

$$x_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (1)$$

die Maßzahl einer von $a_1, a_2, ..., a_n$ abhängigen Größe. Bei einem gestörten technischen Prozess betrage die Maßzahl dieser Größe dagegen

$$x_2 = \frac{a_1}{1+\varepsilon_1} + \frac{a_2}{1+\varepsilon_2} + ... + \frac{a_n}{1+\varepsilon_n} \qquad (2)$$

Dabei seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ reelle Zahlen, zu denen es eine natürliche Zahl $m \geq 1$ derart gibt, dass für alle $\mu = 1, 2, ..., n$ die Ungleichung $|\varepsilon_\mu| \leq 10^{-m}$ (3) gilt.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1), (2), (3) stets die Ungleichung

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{10^m - 1}(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)$$

folgt!

Lösung von cyrix:
Es gilt für alle $\mu = 1,2,\ldots,n$ die Ungleichung

$$\left|1 - \frac{1}{1+\varepsilon_\mu}\right| = \left|\frac{1+\varepsilon_\mu - 1}{1+\varepsilon_\mu}\right| = \frac{|\varepsilon_\mu|}{|1+\varepsilon_\mu|} \leq \frac{|\varepsilon_\mu|}{1-|\varepsilon_\mu|} \leq \frac{10^{-m}}{1-10^{-m}} = \frac{1}{10^m - 1}$$

Also ist auch für alle $\mu = 1,2,\ldots,n$

$$\left|\frac{a_\mu}{1+\varepsilon_\mu} - a_\mu\right| = |a_\mu| \cdot \left|1 - \frac{1}{1+\varepsilon_\mu}\right| \leq |a_\mu| \cdot \frac{1}{10^m - 1}$$

Die behauptete Ungleichung folgt nun durch Addition der gerade gezeigten für $\mu = 1,2,\ldots,n$, $\square$.

Aufgabe 251242:
Es seien $q_1, q_2, ..., q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen. Man beweise, dass aus dieser Voraussetzung stets folgt

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdot \frac{q_2^3+1}{q_2^3-1} \cdot ... \cdot \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{36}{25}$$

Lösung von weird:
Seien im Folgenden die reellen Funktion f und g definiert durch

$$f(x) := \frac{2}{(2x+1)^3 - (2x+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{2x+2}$$

und

$$g(x) := \frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + \frac{2}{x^3-1}$$

Unter Benutzung von

$$\forall x > 1: \quad g(x) = 1 + \frac{2}{x^3-1} < \exp\left(\frac{2}{x^3-1}\right) < \exp\left(\frac{2}{x^3-x}\right)$$

gilt dann zunächst

$$\prod_{k=1}^{n} g(q_k) < \prod_{p\in\mathbb{P}} g(p) < g(2)g(3)\prod_{k=2}^{\infty} g(2k+1) < g(2)g(3)\exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} f(k)\right)$$

und unter Verwendung der Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) < f(2) + \int_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln(\frac{25}{24})$$

erhalten wir schließlich als obere Schranke für unser Produkt

$$\frac{18}{13}\exp\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{25}{24}\right)\right) \approx 1.4369$$

was also dann tatsächlich noch knapp unter der „angepeilten“ Marke von

$$\frac{36}{25} \approx 1.44$$

hier liegt.

Alternativ-Lösung von ochen:
Lemma: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für $n = 6$ gilt

$$\prod_{k=6}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{6^3+1}{6^3-1} = \frac{217}{215} = \frac{31}{30}\frac{6(6+1)}{6^2+6+1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die obige Aussage für eine natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt, folgt auch die Aussage für $n+1$, denn wir erhalten

$$\prod_{k=5}^{n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3-1} = \frac{31}{30}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{(n+1)^2+(n+1)+1}$$

$$= \frac{31}{30}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}\frac{n+2}{n}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} = \frac{31}{30}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2+(n+1)+1}.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Seien nun die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) gegeben durch

$$a_n = \prod_{k=6}^{2n+1} \frac{k^3+1}{k^3-1},\ b_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1} \quad \text{und} \quad c_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1}.$$

Aus

$$\frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} = 1 + \frac{2}{(2k+1)^3-1} < 1 + \frac{2}{(2k)^3+1} = \frac{(2k)^3+1}{(2k)^3-1}.$$

folgt $c_n < b_n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$. Weiter erhalten wir mit obigem Lemma

$$c_n^2 < b_n \cdot c_n = a_n < \frac{31}{30}.$$

Für m paarweise verschiedene Primzahlen $q_1, \ldots, q_m$, gibt es eine natürlich Zahl n, sodass gilt

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{q_k^3+1}{q_k^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1} \frac{3^3+1}{3^3-1} \frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \prod_{k=3}^{n} \frac{(2k+1)^3+1}{(2k+1)^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1} \frac{3^3+1}{3^3-1} \frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \sqrt{\frac{31}{30}} < \frac{36}{25}.$$

Aufgabe gelöst von ochen

Anmerkung:
Das unendliche Produkt (erstmal ohne Einschränkung auf Primzahlen) ist ein Teleskopprodukt ist, welches eine Lösung über Induktion motiviert. Wir haben nämlich

$$\frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)} = \frac{k+1}{k-1} \frac{k(k-1)+1}{k(k+1)+1}$$

und wenn man das Produkt aufeinanderfolgender Faktoren (beginnend mit irgendeinem $k \geq 2$) hinschreibt,

$$\frac{k+1}{\boldsymbol{k-1}} \frac{\boldsymbol{k(k-1)+1}}{k(k+1)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+2}}{\boldsymbol{k}} \frac{(k+1)k+1}{(k+1)(k+2)+1} \cdot \frac{\boldsymbol{k+3}}{k+1} \frac{(k+2)(k+1)+1}{\boldsymbol{(k+2)(k+3)+1}},$$

so sieht man, dass nach Wegkürzen „links“ nur der blau markierte Teil übrig bleibt und „rechts“ nur der orange Teil. Das Produkt von einem Index $k \geq 2$ zu einem $n > k$ ist also gleich

$$\left(\boldsymbol{1 + \frac{1}{k(k-1)}}\right)\left(\boldsymbol{1 - \frac{1}{n(n+1)+1}}\right)$$

und da der rechte Faktor für $n \to \infty$ gegen 1 geht, ist der Wert des unendlichen Produktes gleich $1 + \frac{1}{k(k-1)}$.
Und tatsächlich lässt sich nun die Aufgabe schnell lösen, indem man ausrechnet, dass

$$\frac{q_1^3+1}{q_1^3-1} \cdots \frac{q_n^3+1}{q_n^3-1} < \frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{5^3+1}{5^3-1} \cdot \frac{7^3+1}{7^3-1} \cdot \left(\boldsymbol{1 + \frac{1}{11 \cdot 10}}\right) < \frac{36}{25}$$

gilt (beachte, dass das Produkt durch Hinzunehmen von Faktoren größer wird, da jeder Faktor größer als 1 ist).

Anmerkung von Kornkreis

Aufgabe 261246B:
Es seien $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ nichtnegative reelle Zahlen, für die die Summe der Quadrate gleich 10 und die Summe der dritten Potenzen größer als 1 ist.
Untersuchen Sie, ob es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl
a) von 9 dieser Zahlen
b) von 10 dieser Zahlen
so zu treffen, dass die Summe der ausgewählten Zahlen größer als 1 ist!
(Kommt eine Zahl mehrmals unter den $x_1, x_2, ..., x_{1987}$ vor, so darf sie auch höchstens ebenso oft unter die ausgewählten Zahlen aufgenommen werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Eine solche Auswahl ist nicht stets möglich, z. B. nicht für

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{50}}, \quad x_2 = ... = x_{999} = \frac{1}{10}, \quad x_{1000} = ... = x_{1987} = 0$$

Für die Zahlen ist nämlich

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = \frac{1}{50} + \frac{998}{100} = 10 \qquad \text{und}$$

$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{998}{1000} > \frac{1}{50 \cdot 10} + \frac{499}{500} = 1$$

Die Voraussetzungen sind also erfüllt, aber für jede Auswahl von neun dieser Zahlen ist (wegen $0 < \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{50}}$) deren Summe

$$s \leq \frac{1}{\sqrt{50}} + \frac{8}{10} < \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

b) Eine solche Auswahl ist unter den genannten Voraussetzungen stets möglich. Zum Beweis sei für nichtnegative $x_1, ..., x_{1987}$

$$x_1^2 + ... + x_{1987}^2 = 10 \qquad (1)$$

$$x_1^3 + ... + x_{1987}^3 > 1 \qquad (2)$$

und o. B. d. A.

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{1987} \qquad (3)$$

vorausgesetzt.
Wählt man dann die zehn Zahlen $x_1, x_2, ..., x_{10}$ aus, so gilt:
Falls $x_1 > 1$, ist erst recht $x_1 + ... + x_{10} > 1$.
Falls aber $1 \geq x_1$ ist, folgt hieraus und aus (3)

$$1 \geq x_i^2 \quad (i = 1,...,10)$$

Nochmals wegen (3), also $x_i - x_{10} \geq 0$ $(i = 1,...,10)$, folgt hieraus

$$x_i - x_{10} \geq x_i^3 - x_{10} \cdot x_i^2 \qquad (i = 1,...,10)$$

Summiert man dies und wendet (1), (3) und (2) an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{10} \geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \left(10 - \sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + x_{10} \cdot \sum_{i=11}^{1987} x_i^2$$
$$\geq \sum_{i=1}^{10} x_i^3 + \sum_{i=11}^{1987} x_i^3 > 1$$

Aufgabe 281246A:
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n + 2$ reelle Zahlen p, q, a_1, a_2, ..., a_n, die

$$0 < p \leq ai \leq q \qquad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \qquad (2)$$

Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g + 1$.
Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)
a) zwischen der ersten und zweiten Zahl,
b) zwischen der zweiten und dritten Zahl
das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Bezeichnen wir für $0 < x \leq y$ mit $f(x,y)$ die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = n + \sum_{1 \leq i < k \leq n} f(a_i, a_k) \qquad (3)$$

Für jedes positive z gilt bekanntlich $z + \frac{1}{z} \geq 2$ mit Gleichheit genau für $z = 1$. Damit gilt stets $f(x,y) \geq 2$, da die rechte Summe in (3) aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden besteht, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$$

Damit ist die linke Ungleichung von (2) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Wir betrachten nun den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{aligned}
1 + f(a_1,a_2) + f(a_1, a3)\\
+... + f(a_1,a_{n-1}) + f(a_1,a_n)\\
+1 + f(a_2,a_3)\\
+... + f(a_2,a_{n-1}) + f(a_2,a_n)\\
+........\\
+1 + f(a_{n-1},a_n)\\
+1
\end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zwei Hilfsungleichungen (hier ohne Beweis):
1. Für $0 < w \leq x \leq y \leq z$ gilt $f(w,z) \leq f(x,y)$. Gleichheit gilt genau für den Fall $w = x$, $y = z$.
2. Für $0 < x \leq y \leq z$ gilt $f(x,y) + f8y,z) \leq 2 + f(x,z)$. Gleichheit gilt genau für die zwei Fälle $y = x$ und $y = z$.

Betrachten wir nun zwei Zahlen i,k mit $1 \leq i < k \leq n$ und $i + k \leq n + 1$ in unserem Schema die Summanden in der k-ten Spalte der i-ten Zeile und er $(n + 1 - i)$-ten Spalte der k-ten Zeile, so gilt für deren Summen nach der zweiten Hilfsungleichung

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(a_1, a_{n+1-i})$$

Nach der ersten Hilfsungleichung folgt daraus wegen (1)

$$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leq 2 + f(p,q)$$

Damit können wir unsere Summe verkleinern, wenn wir für alle möglichen Werte von i und k die Summanden $f(a_i,a_k)$ und $f(a_k, a_{n+1-i})$ jeweils durch $\left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)$ ersetzen.
Die einzigen Summanden in unserem Schema, die noch nicht ersetzt sind, sind die Summanden auf der Diagonalen (a_1,a_n), $f(a_2, a_{n-1})$, ... Nach der ersten Hilfsungleichung können wir jeden durch $f(p,q)$ ersetzen. Unser Schema hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned}
1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\
+... + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right) + f(p,q)\\
+1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\
+... + f(p,q) + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\
+........\\
+1 + \left(1 + \frac{1}{2}f(p,q)\right)\\
+1
\end{aligned}$$

Durch Abzählen der Summanden erhält man: ist n ungerade, so hat das neue Schema die Summe

$$\frac{n^2+1}{2} + f(p,q)\frac{n^2-1}{4}$$

ist n gerade

$$\frac{n^2}{2} + f(p,q)\frac{n^2}{4}$$

Berücksichtigt man noch, dass

$$f(p,q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 + 2$$

so folgt daraus die Behauptung der Aufgabe.
Gleichheit gilt, falls in unseren Hilfsungleichungen stets Gleichheit galt, d. h. für $p = x_1 = ... = x_m$, $x_{m+1} = ... = x_n = q$ mit $m = \frac{n}{2}$ für n gerade und $m = \frac{n-1}{2}$ und $m = \frac{n+1}{2}$ für n ungerade.

Aufgabe 311241:
Es sei

$$x = e^{0,000009} - e^{0,000007} + e^{0,000002} - e^{0,000001}; \qquad y = e^{0,000008} - e^{0,000005}$$

Man untersuche, ob $x = y$ oder $x > y$ oder $x < y$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir setzen

$$z = e^{0,000001} \approx 1{,}000001 > 1$$

Dann ist

$$x - y = z^9 - z^8 - z^7 + z^5 + z^2 - z$$
$$x - y = z(z^8 - z^7 - z^6 + z^4 + z - 1)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^4(z+1) + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)\left(z^7 - z^5 - z^4 + 1\right)$$
$$x - y = z(z-1)(z^2-1)\left(z^5 - z^2 - 1\right)$$

Da $z > 1$ ist, sind die Faktoren z, $(z-1)$ und (z^2-1) jeweils größer als null. Da $(z^5 - z^2 - 1) \approx -1 < 0$ ist, ist auch $x - y < 0$ bzw. $x < y$.

Aufgabe 311246A:
Man untersuche, ob es eine Anzahl $n \geq 2$ sowie eine positive reelle Zahl c und n positive reelle Zahlen a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ derart gibt, dass die Summe der a_i gleich $n \cdot c$, die Summe der Quadrate der a_i gleich $2n \cdot c^2$ und mindestens eine der Zahlen a_i größer als $(1 + \sqrt{n-1}) \cdot c$ ist.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir setzen zunächst

$$a_n = (1 + \sqrt{n-1})c + \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n > 0$, und

$$a_i = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c + \varepsilon_i$$

Dann ist die Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c+\varepsilon_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \varepsilon_n + (n-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c+\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (1+\sqrt{n-1})c + \left(n-1-\sqrt{n-1}\right)c+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = nc+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$$

Damit die Vorgabe der Summe erfüllt ist, muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 0 \tag{1}$$

Für die Summe der Quadrate gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left((1+\sqrt{n-1})c+\varepsilon_n\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c+\varepsilon_i\right]^2 =$$

$$= (1+\sqrt{n-1})^2c^2 + 2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2c^2 + 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c\varepsilon_i+\varepsilon_i^2\right] =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2+2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n+\varepsilon_n^2+(n-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^2c^2+2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i^2 =$$

$$= (n+2\sqrt{n-1})c^2+2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n+\left(n-1-2\sqrt{n-1}+1\right)c^2+2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2+2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n+2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

Wegen (1) gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i = -\varepsilon_n$$

und daher:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2+2(1+\sqrt{n-1})c\varepsilon_n+2c\left(1-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)(-\varepsilon_n)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2nc^2+2\left(\sqrt{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)c\varepsilon_n+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 > 2nc^2$$

Daher ist es nicht möglich, alle Vorgaben zu erfüllen, bei Vorgabe der Summen gilt stattdessen $a_i \leq (1+\sqrt{n-1})c$.

I.III Gleichungssysteme

I Runde 1

Aufgabe 031213:
Man bestimme alle reellen Werte von x_1, x_2, x_3, die den Gleichungen

$$x_2 + x_3 = px_1, \qquad (1)$$
$$x_1 + x_3 = px_2, \qquad (2)$$
$$x_1 + x_2 = px_3 \qquad (3)$$

genügen, und ihre Abhängigkeit von der reellen Zahl p (Parameter)!

Lösung von Steffen Weber:
Angenommen es gibt eine Lösung (x_1,x_2,x_3), die den Gleichungen (1), (2), (3) genügt, so genügt diese Lösung auch den äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= (p+1)x_3. \end{aligned}$$

Ist $p \neq -1$, so ist $(x_1 + x_2 + x_3)(p+1)^{-1} = x_1 = x_2 = x_3 = x$. Aus (1) bis (3) folgt nun $2x = px$, also ist $(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)$ die einzige Lösung für $p \notin \{-1,2\}$. Für $p = 2$ genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x,x,x)$, x reell, den Gleichungen.

Ist $p = -1$, so sind die Gleichungen (1) bis (3) äquivalent zu $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Somit genügen alle $(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,-x_1 - x_2)$, x_1,x_2 reell, den Gleichungen.

Aufgabe 041115:
Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Lösung von Rainer Müller:
Wir definieren Polynome

$$p_1(x) := 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17^x + 7$$
$$p_2(x) := 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7$$

Sei x eine Lösung der gegebenen Gleichungen, $p_1(x) = p_2(x) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = p_1(x) - p_2(x) &= 12x^3 + 28x^2 + 6x + 14 =: p_3(x) \\ 0 = 4p_2(x) - (x-2)p_3(x) &= 18x^2 + 42x =: p_4(x) \\ 0 = 3p_3(x) - 2xp_4(x) &= 18x + 42 =: p_5(x) \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt wegen $p_4(x) = xp_5(x)$ aus $p_5(x) = 0$, dass auch $p_3(x) = 0$ ist (denn $p_3(x) = \frac{1}{3}(p_5(x) + 2xp_4(x))$) und ebenso, dass auch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Null sind.

Die gesuchten gemeinsamen Lösungen der Gleichungen sind also genau die Nullstellen von p_5, also $\{-\frac{7}{3}\}$.

Aufgabe 141214:
Für alle reellen Wertetripel (a, b, c) ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$xy^2z^3 = a, \qquad ; \qquad x^2y^3z = b, \qquad ; \qquad x^3yz^2 = c \qquad (*,**,***)$$

1) keine,
2) genau eine,
3) genau zwei,
4) mehr als zwei, jedoch endlich viele,
5) unendlich viele

reelle Lösungen (x, y, z) hat. Ferner sind sämtliche vorhandenen Lösungen anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist (x, y, z) eine reelle Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*), (**), (***) durch Multiplikation, dass

$$x^6y^6z^6 = abc \qquad (1)$$

gelten muss. Daher hat das gegebene Gleichungssystem im Fall $abc < 0$ keine reelle Lösung. Im Fall $abc = 0$ kann es nur dann eine Lösung haben, wenn $a = b = c = 0$ ist; denn aus (1) ergibt sich, dass wenigstens eine der Zahlen x,y,z gleich null sein muss. Tatsächlich sind im Fall $a = b = c = 0$ die Tripel $(0, y, z), (x, 0, z), (x, y, 0)$ für alle reellen x, y, z Lösungen.

Im Fall $abc > 0$ setzen wir

$$g = \sqrt[6]{abc} \qquad (2)$$

Dann ergibt sich aus (*), (**), (***)

$$yz^2 = \frac{a}{g} \qquad ; \qquad xy^2 = \frac{b}{g} \qquad ; \qquad zx^2 = \frac{c}{g} \qquad (3,4,5)$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation von (3) und (4) bzw. von (3) und (5) bzw. von (4) und (5)

$$xy^3z^2 = \frac{ab}{g2} \qquad ; \qquad x^2yz^3 = \frac{ac}{g2} \qquad ; \qquad x^3y^2z = \frac{bc}{g2} \qquad (6,7,8)$$

Aus (7) und (***) bzw. (8) und (**) ergibt sich

$$\frac{z}{x} = \frac{a}{g^2} \qquad \text{also} \qquad z = \frac{a}{g^2}x \qquad \text{bzw.} \qquad (9)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{g^2}{c} \qquad \text{also} \qquad y = \frac{g^2}{c}x \qquad (10)$$

Aus (*), (9) und (10) folgt schließlich

$$x^6\frac{g^4}{c^2}\frac{a^3}{g^6} = a \qquad \text{also} \qquad x^6 = \frac{c^2}{a^2}g^2$$

so dass als Lösungen nur die beiden Tripel

$$\left(\pm\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}, \pm\frac{g^2}{c}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}, \pm\frac{a}{g^2}\sqrt[3]{\left|\frac{c}{a}\right|g}\right)$$

in Betracht kommen, die wegen $abc \neq 0$ voneinander verschieden sind. Wie man durch Einsetzen in (*),(**),(***) nachprüft, sind beide Tripel auch wirklich Lösungen.

Damit ergibt sich:
a) Im Fall $abc < 0$ und im Fall $abc = 0, |a| + |b| + |c| > 0$ hat das System keine Lösung.
b) und d) Diese Fälle kommen nicht vor.

c) In Fall $abc > 0$ hat das System genau zwei Lösungen.
e) Im Fall $a = b = c = 0$ hat das System unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 151213:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} &= \frac{7}{12} && \text{(I.1)} \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} &= \frac{8}{15} && \text{(I.2)} \\ \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} &= \frac{9}{20} \quad \text{gilt.} && \text{(I.3)} \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen (x,y,z) ist Lösung des Gleichungssystems. Dann erhält man aus (1), (2), (3) durch Addition und Halbierung

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{47}{60} \tag{4}$$

Subtrahiert man (1) bzw. (2) bzw. (3) von (4), so erhält man

$$\frac{1}{y+z} = \frac{1}{5} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+z} = \frac{1}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}$$

woraus $x + y = 3$, $y + z = 5$, $x + z = 4$ folgt. Die Addition dieser drei Gleichungen ergibt nach Division durch 2

$$x + y + z = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$$

woraus sich analog zum oben dargelegten Vorgehen

$$x = (x + y + z) - (y + z) = 1 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 3$$

ergibt. Daher kann höchstens das Tripel (1,2,3) Lösung sein. Tatsächlich ist

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad ; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \quad ; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

Aufgabe 161211:
Man ermittle alle Tripel reeller Zahlen $(x,\ y,\ z)$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} x + yz &= 7 && (1) \\ xy + z &= 5 && (2) \\ x + y + z &= 6 && (3) \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3). Nach (3) gilt dann

$$x = 6 - y - z \tag{4}$$

Setzt man dies in (1), (2) ein, so folgt

$$6 - y - z + yz = 7 \qquad ; 6y - y^2 - yz + z = 5 \tag{5,6}$$

Addiert man (5), (6), so ergibt sich

$$6 + 5y - y^2 = 12 \qquad ; \qquad y^2 - 5y + 6 = 0$$

Daher kann nur $y = 2$ oder $y = 3$ sein.
Aus $y = 2$ und (5);(4) folgt $4 - z + 2z = 7$; $z = 3, x = 1$
Aus $y = 3$ und (5);(4) folgt $3 - z + 3z = 7$; $z = 2, x = 1$

Das gegebene System kann somit nur die Lösungen (1,2,3) und (1,3,2) haben. Die Probe bestätigt, dass beide Tripel tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 171212:
Man ermittle alle reellen Lösungen $(x,\, y)$ des Gleichungssystems

$$2 \cdot \sqrt{x+y} + x + y = 8 \qquad (1)$$
$$x^3 + y^3 = 40. \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es sei (x,y) eine reelle Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt $x + y \geq 0$. Setzt man $z = \sqrt{x+y}$, so gilt $z \geq 0$ und wegen (1)

$$z^2 + 2z - 8 = 0 \qquad (3)$$

Die quadratische Gleichung (3) hat genau eine nichtnegative reelle Lösung, nämlich $z = 2$. Daraus folgt

$$x + y = 4 \qquad ; \qquad y = 4 - x \qquad (4)$$

also wegen (2)

$$x^3 + (4-x)^3 = 40$$
$$x^3 + (64 - 48x + 12x^2 - x^3 - 40 = 0$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad (5)$$

Die quadratische Gleichung (5) hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 2\sqrt{2}$; dann ist wegen (4) $y_1 = 2 - \sqrt{2}$, und $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, dann ist $y_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Wenn also das Gleichungssystem (1), (2) überhaupt reelle Lösungen hat, so können es nur die Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sein.

Für $(x,y) = (2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ sowie für $(x,y) = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ gilt nun

$$2\sqrt{x+y} + x + y = 2\sqrt{4} + 4 = 8$$
$$x^3 + y^2 = (2+\sqrt{2})^3 + (2-\sqrt{2})^3 = 2(8+12) = 40$$

d. h., die Gleichungen (1) und (2) sind erfüllt. Daher hat das Gleichungssystem (1), (2) genau zwei reelle Lösungen, nämlich $(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ und $(x,y) = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.

Aufgabe 181213:
Man ermittle alle Paare $(x,\, y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} = 3, \qquad y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 3.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (x,y) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems. Dann ist $x \neq 0$ (und $y \neq 0$), und es gilt

$$\begin{aligned} x^2y + x + y^2 &= 3xy \qquad (1)\\ xy^2 + y + x^2 &= 3xy \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhält man daraus

$$(x-y)(xy+1-x-y) = 0 \qquad \text{also} \qquad (x-y)(x-1)(y-1) = 0$$

hieraus folgt, dass (mindestens) eine der Gleichungen $x = y$, $x = 1$, $y = 1$ gilt.
Aus $x = y$ und (1) folgt $x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x-1)^2 = 0$, wegen $x = y$ also $x = 1$ $y = 1$.
Aus $x = 1$ und (1) folgt $y^2 - 2y + 1 = 0, (y-1)^2 = 0$, also $y = 1$.
Aus $y = 1$ und (1) folgt $x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$, also $x = 1$.
Also kann nur das Paar $(1,1)$ Lösung des Gleichungssysteme sein. In der Tat erfüllt es wegen $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$ beide Gleichungen des Systems.

Aufgabe 191214:
a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 100y &= 0 \qquad (1)\\ 0{,}069x + y &= 0{,}3 \qquad (2) \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $(x_0,\, y_0)$ hat, und ermitteln Sie diese!
Im folgenden werde in Gleichung (2) des Systems (1), (2) der Koeffizient von x *innerhalb einer gegebenen -Umgebung von 0,069 verändert*, d. h., für gegebenes reelles $\delta > 0$ sei eine reelle Zahl h auf das Intervall

$$-\delta \leq h \leq \delta$$

eingeschränkt, und für jedes solche h sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x + 100y &= 0 \qquad (3)\\ (0{,}069 + h)x + y &= 0{,}3 \qquad (4) \end{aligned}$$

betrachtet. Man möchte erreichen, dass sich x_0 durch diese Veränderung des Koeffizienten 0,069 *um höchstens 1% ändern kann*. Damit ist die folgende Aufgabenstellung b), c) gemeint.

Zunächst wird definiert:

Besitzt für irgendein h das Gleichungssystem (1), (4) eine eindeutige Lösung, so sei diese mit $(x_h; y_h)$ bezeichnet. Ist dies (bei gegebenem $\delta > 0$) für alle in (3) genannten h der Fall und gibt es unter diesen Werten h einen, für den die Zahl

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|}$$

möglichst groß ist, so werde dieser möglichst große Wert von η mit $\eta_{\max}$ (*bezüglich (3) maximaler relativer Fehler* von x) bezeichnet.

b) Ermitteln Sie alle diejenigen $\delta > 0$, für die ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler $\eta_{\max}$ existiert!
c) Ermitteln Sie unter den in b) gefundenen Werten von δ alle diejenigen, für die sogar $\eta_{\max} \leq 0{,}01$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $(x; y)$ sei eine Lösung (1), (4). Dann folgt

$$7x + 100y = 0$$
$$(6{,}9 + 100h)x + 100y = 30$$
$$(0{,}1 - 100h)x = -30$$

Ist $h = 0{,}001$, so bedeutet dies einen Widerspruch.
Ist $h \neq 0{,}001$, so folgt $x = -\frac{30}{0{,}1-100h}$; hieraus und aus (1) erhält man

$$y = -\frac{7}{100}x = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

Daher kann das System (1), (4) nur im Fall $h \neq 0{,}001$ eine Lösung haben, und zwar nur die angegebenen x, y. Diese erfüllen in der Tat (1) und (4).

Also gibt es genau dann für alle h aus (3) eine eindeutig bestimmte Lösung des Systems (1), (4), wenn $\delta < 0{,}001$ ist, und für alle diese h ist

$$x_h = -\frac{30}{0{,}1 - 100h} \qquad , \qquad y_h = \frac{2{,}1}{0{,}1 - 100h}$$

a) Insbesondere ergibt sich $x_0 = -300, y_0 = 21$.

b) Hieraus folgt weiter

$$x_0 - x_h = \frac{-30 + 30000h + 30}{0{,}1 - 100h} = \frac{30000h}{0{,}1 - 100h}$$

unter Berücksichtigung von $h < 0{,}001$ also

$$\eta = \frac{|x_0 - x_h|}{|x_0|} = \frac{100|h|}{0{,}1 - 100h}$$

Aus (3) folgt nun einerseits $|h| \leq \delta$, andererseits $0{,}1 - 100h \geq 0{,}1 - 100\delta$ (> 0), also

$$\eta \leq \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

und für $h = \delta$ gilt hierin das Gleichheitszeichen. Damit ist für jedes $\delta < 0{,}001$ die Existenz des bezüglich (3) maximalen relativen Fehlers von x nachgewiesen, und zwar ist

$$\eta_{\max} = \frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta}$$

Ist dagegen $\delta \geq 0{,}001$, so kann ein bezüglich (3) maximaler relativer Fehler von x schon deswegen nicht existieren, weil nun in (3) auch der Wert $h = 0{,}001$ zugelassen ist, für den nicht einmal eine Lösung $(x_h; y_h)$ existiert.

Also sind die in b) gesuchten δ alle diejenigen, für die $0 < \delta < 0{,}001$ gilt.

c) Die Forderung

$$\frac{100\delta}{0{,}1 - 100\delta} \leq 0{,}01$$

ist für $0 < \delta < 0{,}001$ äquivalent mit $100\delta \leq 0{,}001 - \delta$, also $\delta \leq \frac{0{,}001}{101} = \frac{1}{10100}$.

Daher sind die in c) gesuchten δ alle diejenigen, für die gilt

$$0 < \delta \leq \frac{1}{10100} \quad (= 0{,}000\overline{0099})$$

Aufgabe 211212:
Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}(x+y)^2+3(x+y) &= 4,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Die Zahl

$$z = x + y \tag{3}$$

erfüllt nach (1) die Gleichung

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

Daraus ergibt sich

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $z = 1$ oder $z = -4$.

Aus (2) folgt ferner durch Multiplikation mit $6xy$, dass

$$6(x+y) = -xy \qquad \text{also} \qquad xy = -6z \tag{4}$$

gilt. Im Fall $z = 1$ besagen (3) und (4)

$$x + y = 1 \qquad ; \qquad xy = -6 \tag{5,6}$$

Im Fall $z = -4$ besagen (3) und (4)

$$x + y = -4 \qquad ; \qquad xy = 24 \tag{5',6'}$$

Setzt man y aus (5) bzw. (5') in (6) bzw. (6') ein, so folgt

$$x(1-x) = -6 \qquad \text{bzw.} \qquad x(-4-x) = 24 \tag{7,7'}$$

Aus (7) folgt

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad ; \qquad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

also entweder $x = 3$ und dann nach (5) weiter $y = -2$ oder $x = -2$ und dann nach (5) weiter $y = 3$.

Aus (7') dagegen folgt $x^2+4x+24 = 0$, und diese Gleichung hat wegen $2^2-24 < 0$ keine reellen Lösungen x. Daher können nur die Paare $(3; -2)$ und $(-2; 3)$ das Gleichungssystem erfüllen.

Aufgabe 221211:
Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \tag{1}$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \tag{2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Zahlenpaar $(x;y)$ mit $x \neq 0, y \neq 0$ das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (2) gilt

$$y = \frac{5x+2}{2x} \tag{3}$$

Wegen $y \neq 0$ ist $5x+2 \neq 0$, und aus (1) folgt durch Einsetzen von (3)

$$x + \frac{2x^2}{5x+2} = \frac{8}{3}$$
$$3x(5x+2) + 6x^2 = 8(5x+2)$$
$$x^2 - \frac{34}{21}x - \frac{16}{21} = 0$$

Wegen $\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21} = \frac{625}{21^2} = \left(\frac{25}{21}\right)^2 > 0$, also

$$x = \frac{17}{21} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{21}\right)^2 + \frac{16}{21}} = \frac{17}{21} \pm \frac{25}{21}$$

d.z. $x = 2$ oder $x = -\frac{8}{21}$ und damit nach (3) $y = 3$ bzw. $y = -\frac{1}{8}$.

Daher können nur die Paare $(2;3)$ und $\left(-\frac{8}{21}; -\frac{1}{8}\right)$ das Gleichungssystem erfüllen. Die Probe bestätigt dies.

Aufgabe 231212:
Man ermittle alle Tripel $(x;y;z)$ von Null verschiedener reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + \frac{1}{y} = -2 \tag{1}$$
$$y + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} \tag{2}$$
$$\frac{1}{x} + z = 1. \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $(x;y;z)$ ein Tripel mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt: Wegen (1) gilt

$$xb = -2 - \frac{1}{y} = -\frac{2y+1}{y}$$

Hieraus und aus $x \neq 0$ folgt

$$\frac{1}{x} = -\frac{y}{2y+1} \tag{4}$$

Wegen (2) gilt $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - y = -\frac{2y+1}{2}$, also

$$z = -\frac{2}{2y+1} \tag{5}$$

Setzt man (4) und (5) in (3) ein, so folgt

$$-\frac{y}{2y+1} - \frac{2}{2y+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

und damit weiter

$$x = -1 \qquad ; \qquad z = 2$$

Also kann nur das Tripel $(x;y;z) = (-1;-1;2)$ die geforderten Eigenschaften haben. Es hat diese Eigenschaften, wie ein Probe zeigt.

Aufgabe 241212:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2y - \frac{6}{xy} &= 13 \\ xy + x^2y &= 6 \quad \text{erfüllen.} \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien x und y reelle Zahlen mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$, die das geforderte Gleichungssystem erfüllen. Dann folgt:

Die Zahlen $a = xy$ und $b = x^2y$ erfüllen das Gleichungssystem

$$b - \frac{6}{a} = 13 \qquad (1)$$

$$a + b = 6 \qquad (2)$$

Subtrahiert man (1) von (2), so folgt $a + \frac{6}{a} = -7$, also

$$a^2 + 7a + 6 = 0$$

Diese Gleichung hat nur $a_1 = -1$ und $a_2 = -6$ als Lösungen. Nach (2) gehören hierzu die Werte $b_1 = 7$ bzw. $b_2 = 12$. Aus $a = xy$ und $b = x^2y$ folgt $b = ax$, also, da man durch x ($\neq 0$) und durch a ($= xy \neq 0$) dividieren kann

$$x = \frac{b}{a} \qquad ; \qquad y = \frac{a}{x}$$

Damit kommen als Lösungen des geforderten Gleichungssystems nur $x_1 = -7$, $y_1 = \frac{1}{7}$ sowie $x_2 = -2$, $y_2 = 3$ in Betracht, was die Probe bestätigt. Die angegebenen x_1, y_1 und x_2, y_2 sind die Lösungen des Gleichungssystems.

Aufgabe 251211:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1, \qquad (1)$$

$$x + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Paar $(x; y)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) gilt

$$y = 1 - x^2 \qquad (3)$$

Setzt man dies in (2) ein, so folgt

$$x + (1 - x^2) = 1$$

$$x(x^3 - 2x + 1) = 0 \qquad (4,5)$$

Da die Gleichung $x^3 - 2x + 1 = 0$ offenbar die Zahl 1 als eine Lösung hat, führt die Division

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1$$

auf die Zerlegung $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, wonach (4) in $x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ oder $x^2 + x - 1 = 0$. Da diese quadratische Gleichung die Lösungen

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

hat, ist somit x einer der Zahlen

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Nach (3) und wegen

$$\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(1 \mp 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$$

gehören hierzu für y die Werte

$$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Also können nur die Paare

$$(0;1) \quad ; \quad (1;0) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right) \tag{6}$$

das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen, wie die Probe zeigt. Daher wird (1), (2) genau von den Paaren (6) erfüllt.

Aufgabe 271211:
Man ermittle alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + xy + y = -1 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 = 5! \tag{2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein Paar (x,y) sei Lösung von (1) und (2). Dann folgt aus (1)

$$(x+1)(y+1) = 0$$

d. h., wenigstens eine der Zahlen x oder y muss gleich -1 sein.

Für $x = -1$ erhält man aus (2) $y = \pm 2$, und für $y = -1$ folgt aus (2) $x = \pm 2$. Somit können nur die Paare $(-1,-2)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,-1)$ Lösungen des Systems (1), (2) sein. Tatsächlich erfüllen diese vier Paare, wie eine Probe zeigt, die Gleichungen (1), (2).

Aufgabe 281213:

a) Man gebe zwei Quadrupel $(x,\ y,\ z,\ u)$ reeller Zahlen an, die das folgende Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllen.

b) Man ermittle ein Quadrupel $(x,\ y,\ z,\ u)$ ganzer Zahlen so, dass eine der Variablen x, y, z, u den Wert 1988 besitzt und das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt wird.

$$1x + 9y + 8z + 8u = 1 \tag{1}$$
$$9x + 9y + 24z + 24u = 9 \tag{2}$$
$$8x - 13y + 8z + 7u = 8 \tag{3}$$
$$8x - 21y - 10z + 8u = 8 \tag{4}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gibt ein Quadrupel (x,y,z,u) reeller Zahlen, das das Gleichungssystem (1) bis (4) erfüllt. Dann ist nach (1)

$$x = 1 - 9y - 8z - 8u$$

Wird dies in (2) bis (4) eingesetzt, so folgt

$$3y + 2z + 2u = 0 \qquad (5)$$
$$85y + 56z + 57u = 0 \qquad (6)$$
$$93y + 74z + 56u = 0 \qquad (7)$$

Nach (5) ist $z = -\frac{3}{2}y - u$. Wird dies in (6) und (7) eingesetzt, so ergibt sich $y + u = 0$ (8) in beiden Fällen.

Nun sei $y = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Nach (8), (5) und (1) ergibt sich $u = -t$, $z = -\frac{1}{2}t$ und $x = 1 + 3t$. Die Probe bestätigt, dass für beliebiges t das Quadrupel

$$(1 + 3t,\ t,\ -\frac{1}{2}t,\ -t) \qquad (9)$$

Lösung ist. Damit ist die Lösung des Gleichungssystems (1) bis (4) durch (9) gegeben, wobei der Parameter t die Menge aller reellen Zahlen durchläuft.

b) Nachfolgend wird eine Auswahl von Quadrupeln angegeben.

t	x	y	z	u
0	1	0	0	0
1988	5965	1988	-994	-1988
-1988	-5963	-1988	994	1988

$x = 1998$ liefert wegen $t = \frac{x-1}{3}$ für y keine ganze Zahl.

Aufgabe 291212:
Man ermittle alle Paare $(x,\ y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^3 + y^3 = 7 \qquad (1)$$
$$x + xy + y = -1 \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien x,y reelle Zahlen, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen. Dann gilt nach Umformung der Gleichung (2)

$$(x + 1)(y + 1) = 0 \qquad (3)$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn $x = -1$ oder $y = -1$ gilt.

Es sei $x = -1$. Aus (1) folgt dann $y^3 = 8$, also $y = 2$.
Es sei $y = -1$. Dann folgt aus (1) analog $y = 2$.
Mithin können höchstens die Paare $(-1{,}2), (2, -1)$ die Gleichungen (1), (2) erfüllen. Wie die Probe zeigt, sind diese beiden Paare tatsächlich Lösungen.

Aufgabe 301213:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:

$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \qquad (1)$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(1) und (2) sind äquivalent mit

$$(x+1)(3x^2-1)(x^2+1)=0$$
$$(x-1)(3x^2-1)(x^2+1)=0$$

Da stets $x^2+1>0$ gilt und für kein reelles x beide Gleichungen $x\text{ß}1=0$ und $x-1=0$ gelten, werden (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn $3x^2-1=0$ ist.

Dies ist genau für $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ der Fall.

Aufgabe 311214:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x,\ y,\ z)$ reeller Zahlen mit $x\leq y\leq z$, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$x+y+z=5, \tag{1}$$
$$x^2+y^2+z^2=15, \tag{2}$$
$$xyz=-3. \tag{3}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn reelle Zahlen x,y,z mit $x\leq y\leq z$ das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen, so folgt: Nach (1),(2) ist

$$x+y=5-z \tag{4}$$
$$x^2+y^2=15-z \tag{5}$$

aus (3) folgt $z\neq 0$ und dann

$$xy=-\frac{3}{2} \tag{6}$$

Nun gilt $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$; nach (4),(5),(6) besagt dies:

$$\begin{aligned}(5-z)^2&=15-z^2+2\cdot\left(-\frac{3}{z}\right)\\ z(25-10z+z^2)&=15z-z^3-6\\ 2(z^3-5z^2+5z+3)&=0\\ (z-3)(x^2-2z-1)&=0\end{aligned}$$

und daher $z=3$ oder $z=1+\sqrt{2}$ oder $z=1-\sqrt{2}$.

Ist $z=3$, so folgt aus (4) und (6) das Gleichungssystem

$$x+y=2 \qquad ; \qquad xy=-1$$

Es führt vermittels $x(2-x)=-1$, $x^2-2x-1=0$ auf $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ oder $x=1-\sqrt{2}$, $y=1+\sqrt{2}$.

Ist $z=1+\sqrt{2}$, so folgt entsprechend

$$\begin{aligned}x+y&=4-\sqrt{2}\\ xy&=-\frac{3}{1+\sqrt{2}}=3-3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$x^2-(4-\sqrt{2})x+3-3\sqrt{2}=0$$

mit den Lösungen

$$x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 3 + 3\sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 3$$

und $y = 1 - \sqrt{2}$ oder $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 3$.

Ist $z = 1 - \sqrt{2}$, so folgt ebenso mit $-\sqrt{2}$ statt $\sqrt{2}$: $x = 3$, $y = 1 + \sqrt{2}$ oder $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 3$.

Da $1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} < 3$ gilt, kann nur das Tripel

$$(x,y,z) = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 3)$$

sowohl die Bedingungen (1),(2),(3) als auch $x \leq y \leq z$ erfüllen. Die Probe bestätigt das Ergebnis. Damit erfüllt genau dieses Tripel die Bedingungen der Aufgabe.

II Runde 2

Aufgabe 031223:
Bestimmen Sie die Menge aller Paare (x, y) von reellen Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$$

erhält man das folgende, dem gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem:

$$\cos x + \cos y = 1 \qquad ; \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$(1 - \cos y) \cdot \cos y = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

d. h. $\cos x = \frac{1}{2}$ und $\cos y = \frac{1}{2}$. Dies ist die einzige Lösung des Gleichungssystems (1). Daraus folgt:

$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad ; \qquad y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

Aufgabe 041224:
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$
$$x + y = 90°$$

Es soll eine Näherungslösung mit ganzzahligen Gradzahlen angegeben werden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}} = \cot\frac{x-y}{2}$$

da wegen $x+y=90°$ hier $\sin\frac{x+y}{2} = \cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.
Ferner ist $\frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - (45° - \frac{x}{2}) = x - 45°$.
Also ist das Gleichheitszeichen für alle x und y erfüllt, für die $\cot(x-45°) = \frac{5}{3}$ und $y = 90° - x$ ist.
Man erhält dann $x - 45° \approx 31° + k\cdot 180°$ (k ganzzahlig).

$$x \approx 76° + k\cdot 180° \qquad ; \qquad y \approx 14° - k\cdot 180°$$

Aufgabe 061226:

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x,y,z) an, die das Gleichungssystem (1)

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=1\\ 4x-y+2z&=2\\ 8x+5y+3z&=4 \end{aligned}$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
Als „Koeffizienten“ seien hier sowohl die auf der „linken Seiten“ stehenden „Vorzahlen“ der Variablen als auch die „absoluten Glieder“ auf den „rechten Seiten“ bezeichnet.
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

Lösung von cyrix:
a) Addition des doppelten der ersten zur zweiten Gleichung liefert $8x+5y+4z=4$, woraus mit der dritten Gleichung $z=0$ folgt. setzt man dies ein und zieht vom Doppelten der ersten Gleichung die zweite ab, erhält man $y=0$ und schließlich $x=\frac{1}{2}$. Damit ist $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ das einzige Lösungstripel, was auch durch die Probe bestätigt wird.

b) Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem nur dann, wenn es eine Kombination der Gleichungen gibt, die sich zu $0=0$ reduziert. (Die Gleichungen sind linear abhängig.) Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Es gibt eine reelle Zahl k, sodass das k-fache der ersten Gleichung, die zweite ergibt. Daraus ergibt sich folgende Beziehung: $2k=4$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde, oder $k=2$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.
Da mindestens eine dieser beiden Fälle eintreten muss, ist $k=2$. Damit muss aber das Doppelte des Koeffizienten von y in der ersten Gleichung dem Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung entsprechen, sodass entweder der Koeffizient von y in der ersten Gleichung auf $-\frac{1}{2}$, oder der von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ abgeändert werden muss.
In der ersten Variante hat das Gleichungssystem nun die Form

$$\begin{aligned} 2x-\frac{1}{2}y+z&=1\\ 4x-y+2z&=2\\ 8x+5y+3z&=4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion des Doppelten der zweiten von der dritten Gleichung) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der zweiten Variante hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion der dritten Gleichung vom doppelten der zweiten) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall: Es gibt reelle Zahlen k und ℓ, sodass die Summe des k-fachen der ersten und ℓ-fachen der zweiten Gleichung die dritte ergibt. Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$2k + 4\ell = 8$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde,
$3k - \ell = 5$, falls kein y-Koeffizient geändert wurde,
$k + 2\ell = 4$, falls keine rechte Seite verändert wurde und schließlich
$k + 2\ell = 3$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.

Da nicht sowohl einer der x-Koeffizienten als auch eine der rechten Seiten modifiziert worden sind, gilt in jedem Fall $k + 2\ell = 4$. Dies widerspricht aber der Bedingung, die eintreten würde, wenn kein z-Koeffizient verändert werden würde. Also kann nur durch die Änderung eines dieser Koeffizienten der Variablen z ein Gleichungssystem konstruiert werden, welches unendlich viele Lösungen hat.

Insbesondere bleiben neben den x-Koeffizienten auch die y-Koeffizienten unangetastet und es ergibt sich zusammen $k = 2$ und $\ell = 1$. Die summe aus dem doppelten der ersten Gleichung und der zweiten Gleichung muss also die dritte ergeben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten, den Koeffizient von z in je einer der drei Gleichungen anzupassen:
In der ersten Variante setzt man in der ersten Gleichung den Koeffizienten von z auf $\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.
In der zweiten Variante ändert man den Koeffizienten von z in der zweiten Gleichung auf $3 - 2 \cdot 1 = 1$ ab und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.
Und schließlich in der dritten Variante wird der Koeffizient von z in der dritten Gleichung auf $2 \cdot 1 + 2 = 4$ gesetzt, sodass man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

erhält, welches die Lösungen $\left\{ (t, 0, 1 - 2 \cdot t) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.

Insgesamt hat man also fünf verschiedene Möglichkeiten je einen der Koeffizienten des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems anzupassen, so dass das jeweilige neue Gleichungssystem dann unendlich viele Lösungen hat.

c) Man ändere den Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung auf +6 und die rechte Seite der zweiten Gleichung auf 0 ab. Dann erhält man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 0 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

wobei aus der ersten Gleichung $4x+6y+2z = 2 \neq 0$ folgt, was der zweiten Gleichung widerspricht. Damit hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Aufgabe 071225:
Es sind alle geordneten Paare reeller Zahlen (x, y) anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \cdot (ax^2 + by^2 - a) &= 0 \qquad (1) \\ y \cdot (ax^2 + by^2 - b) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ und $a \neq b$.

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x = 0$.

   Dann geht die zweite Gleichung über in $y \cdot b \cdot (y^2 - 1) = 0$, was wegen $b \neq 0$ auf $y = 0$ oder $y = \pm 1$ führt. Für alle drei Elemente $(x,y) \in \{(0,-1),(0,0),(0,1)\}$ bestätigt die Probe, dass es sich tatsächlich um Lösungen des Gleichungssystems handelt.

2. Fall: $x \neq 0$.

   Dann folgt aus der ersten Gleichung $ax^2+by^2-a = 0$, also aufgrund $a \neq b$ damit $ax^2+by^2-b \neq 0$, sodass aus aus der zweiten Gleichung direkt $y = 0$ folgt. Dies in die eben erhaltene Gleichung eingesetzt, liefert $ax^2 - a = 0$ bzw. $x = \pm 1$. Auch hier sind wieder alle Elemente der Menge $\{(-1,0),(1,0)\}$ Lösungen des Gleichungssystems, wie die Probe bestätigt.

Damit hat das angegebene Gleichungssystem insgesamt fünf Lösungen, die in den beiden Fällen notiert wurden.

Alternativ-Lösung von weird:
Es muss $xy = 0$ sein, da andernfalls die Klammerausdrücke in den zwei gegebenen Gleichungen 0 wären, was dann sofort auf den Widerspruch $a = b$ führen würde.
Durch Ausmultiplizieren der Gleichungen, Einsetzen von $xy = 0$ und Kürzen durch a bzw. b ergibt sich dann, dass das gegebene Gleichungssystem äquivalent ist zu einem anderen, in dem a und b dann gar nicht mehr vorkommen, nämlich

$$xy = 0,\ x^3 = x,\ y^3 = y$$

mit den 5 offensichtlichen Lösungen $(x,y) \in \{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$.

Aufgabe 091223:
Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \qquad (1) \qquad ; \qquad x - y = bz \qquad (2) \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = cz \qquad (3)$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

Lösung von Manuela Kugel:
Aus (1) und (2) folgt:

$$x = az - y = bz + y \Rightarrow az - bz = 2y \Rightarrow y = \frac{a-b}{2}z \qquad (4) \text{ und}$$

$$x = \frac{2a-(a-b)}{2} = \frac{a+b}{2}z \qquad (5)$$

Hieraus ergibt sich für (3):

$$cz = x^2 + y^2 = [(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2]z^2$$

und weiter:

$$cz = \frac{z^2}{4}(a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{z^2}{2}(a^2 + b^2) \qquad (6)$$

1. Fall: $z = 0 \Rightarrow$ mit (4) und (5) $x = 0, y = 0$
2. Fall: $z \neq 0 \Rightarrow$ mit (6) $z = \frac{2c}{a^2+b^2}c$ und weiter mit (4) und (5): $x = \frac{a+b}{a^2+b^2}c$ und $y = \frac{a-b}{a^2+b^2}c$.
Die Probe bestätigt die Richtigkeit beider Lösungen.

Aufgabe 101221:
Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

Lösung von weird:
Aus

$$3x^2y^2 = 3x^2y^2(x^2+y^2) + (x^6+y^6-\frac{7}{16}) = (x^2+y^2)^3 - \frac{7}{16} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

erhält man sofort

$$x^2y^2 = \frac{3}{16} \qquad (3)$$

und durch Einsetzen in (1) weiter

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \qquad (4)$$

mit den Lösungen

$$x \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

was dann in Verbindung mit (3) die 8 endgültigen Lösungen

$$(x,y) \in \left\{\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ergibt.

Aufgabe 131224:
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems sind:

$$x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$
$$y^3 + x^2 + y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Multipliziert man Gleichung (2) mit x und zieht davon (1) ab, so erhält man

$$xy(y^2+1)-(y^2+1)=0$$

Hier dürfen wir wegen $y^2+1>0$ durch y^2+1 kürzen, was auf die einfache Beziehung

$$xy=1$$

führt. Multipliziert man nun (1) mit x^2 und führt dann hierin die Ersetzung $xy=1$ durch, so erhält man als neue Gleichung

$$x^5+x^3+x^2+1=0$$

in der Variablen x allein.

Eine offensichtliche Lösung davon ist $x=-1$ und nach Kürzen durch den Linearfaktor $x+1$ ergibt sich daraus weiter

$$x^4-x^3+2x^2-x+1=0$$

Diese dividieren wir nun durch $x^2\neq 0$ und erhalten so mit der Substitution $z:=x+\frac{1}{x}$ die einfache Gleichung

$$z^2-z=0$$

in z mit den beiden Lösungen $z\in\{0,1\}$. Für beide Werte von z ist aber

$$x+\frac{1}{x}=z \quad \text{bzw.} \quad x^2-zx+1=0$$

in reellen Zahlen unlösbar, wie man leicht nachprüft.

Zusammenfassend bleibt es also bei der einen Lösung $x=-1$ für x und wegen $xy=1$ gilt dann auch $y=-1$. Tatsächlich erfüllt $(x,y)=(-1,-1)$ beide Gleichungen (1) und (2) und ist somit die einzige reelle Lösung hier.

Aufgabe 141224:
Es sind alle reellen Zahlen a anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \qquad (1)\\ x^2+y^2+z^2&=1 \qquad (2)\\ x^4+y^4+z^4&=a \qquad (3) \end{aligned}$$

a) keine reellen Lösungen (x,y,z)
b) genau eine reelle Lösung,
c) mehr als eine reelle Lösung hat.

Lösung von weird:
Es gilt zunächst

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=z^2-(1-z^2)=2z^2-1$$

und analog natürlich auch

$$2xz=2y^2-1, \quad 2yz=2x^2-1$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} a=x^4+y^4+z^4&=(x^2+y^2+z^2)^2-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=\\ &=1-\frac{1}{2}((2z^2-1)^2+(2y^2-1)^2+(2x^2-1)^2)=\\ &=1-\frac{1}{2}(4(x^4+y^4+z^4)-4(x^2+y^2+z^2)+3)=1-\frac{1}{2}(4a-4+3)=-2a+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

also dann $a = \frac{1}{2}$.
Zusammenfassend ist also a) genau für $a \neq \frac{1}{2}$, b) nie und c) genau für $a = \frac{1}{2}$ erfüllt, in welchem Fall die unendlich vielen Lösungen von (1) und (2) ((3) ist ja dann automatisch erfüllt!) geometrisch gesprochen alle auf einem speziellen Großkreis der Einheitskugel um den Ursprung liegen.

Aufgabe 151224:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \qquad &(1)\\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \qquad &(2)\\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3 \qquad &(3) \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei a eine reelle Zahl ist.

Lösung von weird:
Zunächst gilt

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{1}{2}(a^2 - a^2) = 0$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} a^3 &= (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x(xy + xz) + 3y(xy + yz) + 3z(xz + yz) + 6xyz = \\ &= a^3 + 3x(-yz) + 3y(-xz) + 3z(-xy) + 6xy = a^3 - 3xyz \end{aligned}$$

und damit weiter $xyz = 0$, d. h., mindestens eine der 3 Variablen x,y,z muss 0 sein.
Sei nun o. B. d. A. $z = 0$. Aus

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = a^2 - a^2 = 0$$

folgt aber weiter, dass dann auch x oder y den Wert 0 haben muss. Ist etwas $y = 0$, so ist dann $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ tatsächlich eine Lösung und alle insgesamt 3 Lösungen erhält man daraus durch eine einfache Vertauschung der Variablen x,y,z.

Aufgabe 191221:
Man ermittle alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= 1\\ y - \frac{1}{z} &= 1\\ z - \frac{1}{x} &= 1 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Lösung von weird:
Mittels paarweiser Subtraktion von je zwei der drei Gleichungen erhält man sofort das neue Gleichungssystem

$$x - y = \frac{z - y}{yz}, \quad x - z = \frac{x - y}{xy}, \quad y - z = \frac{x - z}{xz} \qquad (*)$$

und daraus durch Multiplizieren wiederum die neue Gleichung

$$(x - y)(x - z)(y - z) = \frac{(x - y)(x - z)(z - y)}{(xyz)^2}$$

Ware hier $(x-y)(x-z)(y-z) \neq 0$, so könnte hier durch diesen Ausdruck kürzen, was sofort auf den Widerspruch $(xyz)^2 = -1$ führen würde. Es muss also

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0$$

gelten, d. h., mindestens eine der Differenzen $x-y$,$x-z$,$y-z$ hat den Wert 0. Durch Einsetzen in (*) sieht man aber sofort, dass dann auch die beiden anderen Differenzen verschwinden, d. h., dass $x = y = z$ gelten muss.
Der Rest ist sehr einfach: Unter Benutzung von $x = y$ wird etwa die erste Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems zu

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

woraus sich dann sofort auch dessen insgesamt zwei Lösungen zu

$$x = y = z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ergeben.

Aufgabe 201222:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}, \qquad b = \frac{k+1}{2}, \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Für jedes positive reelle k gilt $(k+1)^2 = (k-1)^2 + 4k \geq 4k$, also $\frac{k+1}{2} \geq \frac{2k}{k+1}$ und $\frac{k+1}{2} \geq \sqrt{k}$.
Wenn nun k eine positive reelle Zahl ist, für die die Zahlen

$$a = \frac{2k}{k+1}; \qquad b = \frac{k+1}{2}; \qquad c = \sqrt{k}$$

die Maßzahlen der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so folgt:
Es gilt $b \geq a$ und $b \geq c$, also ist b die Maßzahl der Hypotenusenlänge und nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^2}{4} &= \frac{4k^2}{(k+1)^2} + k \\
(k+1)^4 &= 16k^2 + 4k(k+1)^2 \\
(k+1)^2\left((k+1)^2 - 4k\right) &= 16k^2 \\
(k+1)^2(k^2 + 2k + 1 - 4k) &= 16k^2 \\
(k+1)^2(k-1)^2 - 16k^2 &= 0 \\
(k^2 - 4k - 1)(k^2 + 4k - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Eine von beiden Klammern muss null sein, woraus sich folgende Lösungen ergeben:

$$k = \pm 2 \pm \sqrt{5}$$

Da $\sqrt{5} > 2$ ist, aber $k > 0$ sein soll, muss das Vorzeichen vor der $\sqrt{5}$ auf jeden Fall + sein, und damit folgt

$$k = \sqrt{5} \pm 2 \tag{1}$$

Umgekehrt erfüllen diese beiden Werte die angegebene Gleichungen; daher haben sie nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras die geforderte Eigenschaft.
Somit sind genau die beiden in (1) angegebenen Zahlen die gesuchten.

Aufgabe 221221:
Man ermittle alle Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x\cdot(y+z)=5$$
$$y\cdot(x+z)=8$$
$$z\cdot(x+y)=9$$

erfüllen!

Lösung von weird:
Setzt man

$$u:=xy,\ v:=xz,\ w:=yz$$

so erhält man das lineare(!) Gleichungssystem

$$u+v=5u+w=8v+w=9$$

in u,v,w mit den offensichtlichen Lösungen

$$u=xy=2,\ v=xz=3,\ w=yz=6 \quad (*)$$

Insbesondere gilt also dann

$$(xyz)^2=uvw=36\Rightarrow xyz=\pm 6$$

und damit

$$x=\frac{xyz}{yz}=\pm 1,\ y=\frac{xyz}{xz}=\pm 2,\ z=\frac{xyz}{xy}=\pm 3$$

Da wegen (*) alle Variablen jedenfalls das gleiche Vorzeichen haben müssen, gibt es also dann hier genau die 2 Lösungen

$$(x,y,z)\in\{(1,2,3),(-1,-2,-3)\}$$

Aufgabe 241222:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2+x^2+y^2-6=9xy \qquad (1)$$
$$(x+y)^2=36 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren $x+y=a$ und $xy=b$:

$$b^2+a^2-2b-6=9b$$

und

$$a^2=36$$

Die zweite in die erste Gleichung eingesetzt:

$$b^2-11b+30=0$$

Mithilfe des Satzes von Vieta erraten wir $b_1=5$ und $b_2=6$, sowie von oben $a_1=6$ und $a_2=-6$. Allgemein folgt für x und y:

$$y=\frac{b}{x}$$
$$x+\frac{b}{x}=a$$
$$x^2-ax+b=0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Wir müssen nun jedes a_i mit jedem b_i kombinieren, um alle Lösungen zu finden. a_1 und b_1:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$$

Lösungspaare: (5,1) und (1,5). a_1 und b_2:

$$x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ und $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. a_2 und b_1:

$$x_{5,6} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2$$

Lösungspaare: $(-5,-1)$ und $(-1,-5)$. a_2 und b_2:

$$x_{7,8} = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}$$

Lösungspaare: $(-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3})$ und $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3})$. Es gibt somit 8 Lösungspaare.

Aufgabe 251221:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (1)$$
$$x^2 + xy = 2 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Addiert man das Doppelte von Gleichung (2) zu Gleichung (1) erhält man

$$9 = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x+y)^2$$

Aus der zweiten Gleichung folgt einerseits $x \neq 0$, da man sonst den Widerspruch $0 = 2$ erhalten würde, und andererseits damit dann $x + y = \frac{2}{x}$. Setzt man dies in die eben erhaltene Gleichung ein und multipliziert mit x^2, erhält man

$$9x^2 = 2x^4 + 4 \qquad \text{bzw.} \qquad 2z^2 - 9z + 4 = 0$$

mit $z := x^2$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung in z lauten $\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$, also $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$.

Damit ergeben sich für $z_1 = \frac{1}{2}$ die Werte $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ und damit nach Gleichung (2) $y_{1/2} = \pm\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$, wobei jeweils das gleiche Vorzeichen zu wählen ist. Dass diese Lösungen auch die erste Gleichung erfüllen, rechnet man leicht nach.
Andererseits ergäbe sich aus $x^2 = z_2 = 2$ mit der zweiten Gleichung $y = 0$, was jedoch im Widerspruch zur ersten Gleichung steht.
Es ergeben sich also genau zwei Lösungen, nämlich $(x,y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right); \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \right\}$.

Aufgabe 261221:
Man ermittle alle diejenigen Tripel reeller Zahlen $(x;y;z)$, die Lösung des folgenden Gleichungssystems (1), (2), (3) sind:

$$x \cdot y = 2 \qquad (1)$$
$$x \cdot z = 3 \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 5 \qquad (3)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3) ist, so folgt:
Nach (1) ist $y \neq 0$, also folgt aus (1) $x = \frac{2}{y}$. Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$, also

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \tag{4}$$

Somit erfüllt die Zahl $u = x^2 \quad (5)$ die Gleichung $u^2 - 5u + 4 = 0 \quad (6)$.
Aus (6) folgt: u ist eine der Zahlen

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25 - 16}) \quad \Rightarrow u_1 = 4, \quad u_2 = 1$$

Somit ist x nach (5) eine der Zahlen

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -1 \tag{7}$$

Nach (1) gehört hierzu als Wert für y jeweils die Zahl

$$y_1 = 1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = 2; \quad y_4 = -2 \tag{8}$$

und nach (2) als Wert für z jeweils

$$z_1 = \frac{3}{2}; \quad z_2 = -\frac{3}{2}; \quad z_3 = 3; \quad z_4 = -3 \tag{9}$$

Daher können nur die Tripel

$$\left(2; 1; \frac{3}{2}\right); \quad \left(-2; -1; -\frac{3}{2}\right); \quad (1; 2; 3); \quad (-1; -2; -3)$$

das Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen. Sie erfüllen es wie es aus der Probe ersichtlich wird.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Betrachtet man die Gleichung „$(3) + 2 \cdot (1)$“, so erhält man $9 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, also $x + y = \pm 3$.
Analog erhält man aus „$(3) + 2 \cdot (1)$“ die Gleichung $1 = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$, also $x - y = \pm 1$.

Wir führen eine vollständige Fallunterscheidung nach den Vorzeichen von $x + y$ und $x - y$ durch:

Fall 1: Es ist $x + y = 3$.
Fall 1.1: Es ist $x - y = 1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(2,1,\frac{3}{2}\right)$.
Fall 1.2: Es ist $x - y = -1$. Es folgt $(x,y,z) = (1,2,3)$.

Fall 2: Es ist $x + y = -3$.
Fall 2.1: Es ist $x - y = 1$. Es folgt $(x,y,z) = (-1, -2, -3)$.
Fall 2.2: Es ist $x - y = -1$. Es folgt $(x,y,z) = \left(-2, -1, -\frac{3}{2}\right)$.

Damit lösen genau die vier genannten Tripel das Gleichungssystem, was die Probe bestätigt.

Aufgabe 271221:
Man ermittle alle Paare (x, y) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) = 6 \qquad (1)$$
$$y \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 3 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Der Term $x + y$ berechnet sich aus (1) und (2) zu

$$x + y = \frac{6y}{x} \quad \text{bzw.} \quad x + y = \frac{3x}{y}$$

woraus sich durch Gleichsetzung dann sofort die Gleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad x = \pm\sqrt{2}\,y \quad (*)$$

ergibt. Durch Einsetzen von (*) etwa in (1) erhält man daraus zunächst x zu

$$x = \frac{6}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{6}{1 \pm \sqrt{2}} = 6(\pm\sqrt{2} - 1)$$

und damit dann auch y zu

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}} = 3(2 \mp \sqrt{2})$$

d. h., jede der beiden Vorzeichenwahlen in (*) liefert eine Lösung.

Aufgabe 281221:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z \qquad (1)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -x \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = y \qquad (3)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen es gibt ein Tripel (x, y, z) von Null verschiedener reeller Zahlen, für das (1), (2) und (3) gilt. Aus (1), (2), (3) folgt dann

$$x + y = xyz \qquad (1')$$

$$y + z = -xyz \qquad (2')$$

$$x + z = xyz \qquad (3')$$

Aus (1') und (3') folgt $y = z$ (4). Damit folgt aus (1') und (2') durch Addition $x + 3z = 0$, also $x = -3z$ (5). Mit (4) und (5) ergibt (2'): $2z = 3z^3$.
Wegen $z \neq 0$ folgt hieraus $z = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$.
Hiernach ergibt sich aus (4) und (5) $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$ und $x = \mp\sqrt{6}$.
Als Lösungen des Gleichungssystems (1), (2), (3) kommen also nur die Tripel

$$\left(-\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$$

in Frage. Tatsächlich erfüllen die Tripel die Probe mit (1), (2) und (3).

Aufgabe 291221:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21 \qquad (1)$$
$$y + xy + x^2y = 14 \qquad (2)$$
$$x + y = -1 \qquad (3)$$

Lösung von weird:
Addition von (1) und (2) führt auf die neue Gleichung

$$(x + y) + 2xy + xy(x + y) = -7$$

aus der man mittels (3) sofort $xy = -6$ erhält.
Indem man dies etwa in (1) einsetzt, erhält man daraus die weitere lineare Gleichung

$$x - 6y = -15$$

welche in Verbindung mit (3) schließlich auf die eindeutige Lösung $x = -3$, $y = 2$ hier führt.

Aufgabe 311221:
Ist c eine reelle Zahl, so werde das Gleichungssystem

$$x + y = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = c \qquad (2)$$

gebildet.
a) Man ermittle für $c = 2$ alle Paare $(x; y)$, die das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.
Man ermittle ferner jeweils alle diejenigen reellen Zahlen c, für die das Gleichungssystem (1), (2)
b) keine Lösung $(x; y)$ aus reellen Zahlen x, y hat,
c) genau eine Lösung $(x; y)$ hat,
d) zwei verschiedene Lösungen $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ aus reellen Zahlen hat.

Lösung von Steffen Polster:
Umstellen von (1) nach y und Einsetzen in (2) ergibt die quadratische Gleichung

$$x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = c \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2c - 1}}{2}$$

mit den zwei Paaren (x,y):

$$\left(\frac{1 - \sqrt{2c-1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2}\right) \qquad ; \qquad \left(\frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2}; \frac{1 - \sqrt{2c-1}}{2}\right) \qquad (3)$$

Für $c = 2$ wird damit $(x; y) \in \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.
Über die Anzahl verschiedener Lösung entscheidet der Radikand von $\sqrt{2c - 1}$.
Keine Lösung existiert für $2c - 1 < 0 \Rightarrow c < \frac{1}{2}$, genau eine Lösung für $c = \frac{1}{2}$ und stets zwei Lösungen der Form (3) für $c > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 321221:
Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllen:

$$x^2 + k \cdot y^2 = 4 \qquad (1)$$
$$k \cdot x^2 - y^2 = 2 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Multipliziert man (1) mit k und subtrahiert (2), dann erhält man

$$(k^2 + 1)y^2 = 4k - 2$$
$$y^2 = \frac{4k - 2}{k^2 + 1}$$

Es muss $k \geq 1$ sein, weil sonst y nicht reell wäre. Außerdem kann y nicht gleich null sein. Daher muss gelten:

$$y^2 = \frac{4k - 2}{k^2 + 1} \geq 1$$
$$4k - 2 \geq k^2 + 1$$
$$k^2 - 4k + 3 \leq 0$$

Daraus folgt $1 \leq k \leq 3$. Die in Frage kommenden Lösungen kann man daher schnell durchprobieren und man findet heraus, dass nur für $k = 3$ ganzzahlige Lösungen herauskommen, und zwar $x^2 = y^2 = 1$. Die Lösungspaare sind also $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$ und $(-1; -1)$.

Aufgabe 331221:
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$2 - x + y = \sqrt{18 + x - y} \qquad (1)$$
$$\sqrt{1 + x + y} + \sqrt{2 + x - y} = 5 \qquad (2)$$

Lösung von weird:
Durch Quadrieren von (1) erhält man zunächst

$$(x - y)^2 - 4(x - y) + 4 = 18 + x - y$$

und durch eine einfache Umformung daraus weiter

$$(x - y)^2 - 5(x - y) - 14 = (x - y + 2)(x - y - 7) = 0$$

Von den beiden Möglichkeiten

$$x - y = -2 \quad \text{bzw.} \quad x - y = 7$$

ist aber nur

$$x - y = -2 \quad (3)$$

auch wirklich eine Lösung von (1), wie man durch Einsetzen sofort feststellt, die zweite ist dagegen eine durch das Quadrieren entstandene Scheinlösung, denn sie würde auf den Widerspruch $-5 = \sqrt{25}$ führen. Durch Einsetzen von $x - y = -2$ vereinfacht sich (2) nun sofort zu

$$\sqrt{1 + x + y} = 5 \quad \text{bzw.} \quad x + y = 24 \quad (4)$$

woraus man in Verbindung mit (3) dann unmittelbar

$$x = 11,\ y = 13$$

erhält, was auch tatsächlich das Gleichungssystem (1) und (2) hier löst.

III Runde 3

Aufgabe 031233:
Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von der reellen Zahl p – alle reellen Werte x, y, die die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2)$$

Lösung von Korinna Grabski:

$$xy - \frac{x}{y} = p(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{xy - \frac{x}{y}}{p} \quad ; \quad xy + \frac{x}{y} = 3p(x^2 + y^2) = 3p\frac{xy - \frac{x}{y}}{p} = 3xy - 3\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 4\frac{x}{y} = 2xy \Rightarrow 2x = xy^2$$

1. Fall: $x = 0$
Einsetzen in die 2. Gleichung: $0 = py \to y$ müsste 0 sein. Dies ist aber nicht möglich, da durch y geteilt wird. Also gibt es nur eine Lösung für den Spezialfall, dass $p = 0$ ist. In diesem Fall kann y beliebig ($\neq 0$) sein.

2. Fall: $x \neq 0$ mit $2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$
Fall 2.1: $y = \sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2 + 2)$$

$$0 = px^2 + 2p - \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Um festzustellen, ob wirklich eine Lösung gefunden wurde, wird noch in die 1. Gleichung eingesetzt:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 3p\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)^2 + 2\right)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}\right)\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4p} \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_1 = \sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_2 = \sqrt{2}$$

Fall 2.2: $y = -\sqrt{2}$
Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$-\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x = p(x^2 + 2)$$

$$0 = px^2 + 2p + \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow 0 = x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}p}x + 2$$

$$x_{3,4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} \pm \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}$$

Damit gilt als Nebenbedingung $\frac{1}{8p^2} - 2 \geq 0$, also $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$. Einsetzen in die 1. Gleichung zeigt wieder, dass eine Lösung vorliegt.

Damit gibt es unter der Nebenbedingung $-\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{4}$ in diesem Fall die Lösungen

$$x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} + \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_3 = -\sqrt{2} \qquad \text{sowie} \qquad x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}p} - \sqrt{\frac{1}{8p^2} - 2}; \quad y_4 = -\sqrt{2}$$

Aufgabe 131231:
Die in vollen Lebensjahren gerechneten Altersangaben einer Familie sollen folgende Bedingungen erfüllen:
Vor zehn Jahren war der Vater so alt wie seine beiden Kinder zusammen. Vor einigen vollen Jahrzehnten war er achtmal so alt wie sein Sohn, während gleichzeitig seine Tochter dreimal so alt war wie ihr Bruder.
Der Altersunterschied zwischen Vater und Tochter beträgt mehr als 20 Jahre und zwischen Vater und Sohn weniger als 40 Jahre.
Man ermittle für das jetzige Alter von Vater, Sohn und Tochter alle Angaben, die diesen Bedingungen entsprechen.

Lösung von OlgaBarati:
Es seien jeweils v das Alter des Vaters, t das Alter der Tochter und s das Alter des Sohnes in vollen Jahren. Die Anzahl voller Jahrzehnte sei mit n ausgedrückt. Mit $v,s,t,n \in \mathbb{N}$.
Dem Aufgabentext ist zu entnehmen:

$$n > 1 \quad (i)$$
$$v - t > 20 \quad (ii)$$
$$v - s < 40 \quad (iii)$$
$$v - 10 = t - 10 + s - 10 \qquad ; \qquad t = v + 10 - s \quad (1)$$
$$v - 10n = 8(s - 10n) \qquad ; \qquad v = 8s - 70n \quad (2)$$
$$t - 10n = 3(s - 10n) \qquad ; \qquad t - 10n = 3s - 30n \quad (3)$$

Wir setzen (1) in (3) ein und erhalten

$$v + 10 - s - 10n = 3s - 30n \qquad ; \qquad v = 4s - 20n - 10 \quad (4)$$

Durch Gleichsetzen von(2) und (4) ergibt sich nach Umformung

$$s = 12{,}5n - 2{,}5 \quad (5)$$

woraus folgt dass n für ganzzahlige Werte ungerade - und mit (i) größer als 1 sein muss. Mit dem Wert 3 in (5) eingesetzt berechnet sich zunächst das Alter des Sohnes

$$s = 12{,}5 \cdot 3 - 2{,}5 = 35$$

Wir setzen weiter ein und erhalten

$$v = 8 \cdot 35 - 70 \cdot 3 = 70$$
$$t = 70 + 10 - 35 = 45$$

Mit der Überprüfung von (ii) und (iii)

$$70 - 45 = 25 > 20 \quad (ii)$$

$$70 - 35 = 35 < 40 \quad (iii)$$

sind auch diese Kriterien erfüllt.
Der Vater ist 70, die Tochter ist 45 und der Sohn ist 35 Jahre alt.

Aufgabe 161231:
Man gebe alle Paare (x, y) reeller Zahlen an, für die gilt:

$$x^2 + y = 2 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad y^2 + x = 2 \quad (2)$$

Lösung von weird:
Indem man die beiden Gleichungen voneinander abzieht, erhält man die neue Gleichung

$$x^2 - y^2 = x - y \quad (*)$$

Wir machen hier folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x = y$
Einsetzen in (1) ergibt dann

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0$$

was auf die Lösungen

$$(x,y) \in \{(1,1),(-2, -2)\}$$

führt.
2. Fall: $x \neq y$.
Indem man (*) durch $x - y$ kürzt, ergibt sich daraus

$$x + y = 1 \quad \text{bzw.} \quad y = 1 - x$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man damit weiter

$$x^2 - x - 1 = 0$$

was auf die weiteren zwei Lösungen

$$(x,y) \in \{(1 \pm \sqrt{5})/2,(1 \mp \sqrt{5})/2)\}$$

führt.

Aufgabe 161234:
a) Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ die Ungleichung gilt:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2z \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

b) Es sind diejenigen Werte von x, y, z zu ermitteln, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren z:

$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2\pi - 2x - 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos(2x + 2y) \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y - \cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$1 - (1 - \cos 2x)(1 - \cos 2y) + \sin 2x \sin 2y \leq \tfrac{3}{2}$$
$$-(2\sin^2 x)(2\sin^2 y) + (2\sin x \cos x)(2\sin y \cos y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$-4\sin^2 x \sin^2 y + 4\sin x \sin y \cos x \cos y \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \leq \tfrac{1}{2}$$
$$4\sin x \sin y \cos(x + y) \leq \tfrac{1}{2}$$

Wir setzen noch $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ ein:

$$2\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\cos(x+y) \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)\cos(x+y) \leq \tfrac{1}{4} \tag{2}$$

Wir substituieren nun

$$x + y = u \tag{3}$$

und

$$x - y = w \tag{4}$$

und betrachten die linke Seite der Ungleichung (2) als Funktion $f(u,w)$, deren absolutes Maximum wir suchen:

$$f(u,w) = (\cos w - \cos u)\cos u = \cos u \cos w - \cos^2 u \tag{5}$$

Bei gegebenem u nimmt f offensichtlich extremale Werte an, wenn $\cos w$ extremal ist, also bei Vielfachen von π:

$$w = k\pi \tag{6}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Leiten wir dagegen nach u ab, erhalten wir Extremstellen oder Sattelpunkte bei:

$$\frac{\partial f(u,w)}{\partial u} = -\cos w \sin u + 2\sin u \cos u = 0$$

$$\sin u(2\cos u - \cos w) = 0$$

$\sin u = 0$ kommt als Maximum nicht in Frage, da dann $\cos u = \pm 1$ ist, und laut (5) die Funktion f je nach dem gewählten w die Werte -2 oder 0 annimmt, was nicht maximal sein kann. Also muss stattdessen gelten:

$$2\cos u = \cos w$$

$$\cos u = \tfrac{1}{2}\cos w \tag{7}$$

Setzt man das in (5) ein, erhält man für diese speziellen Werte:

$$f_u(w) = \tfrac{1}{2}\cos w \cos w - (\tfrac{1}{2}\cos w)^2 = \tfrac{1}{4}\cos^2 w \leq \tfrac{1}{4}$$

Damit sind Ungleichungen (2) und letztlich auch (1) erfüllt. Die Gleichheit tritt ein, wenn $\cos^2 w = 1$ ist, was laut (6) bei Vielfachen von π der Fall ist. Wegen (4) gilt:

$$x - y = k\pi$$

$$x = y + k\pi \tag{8}$$

Setzt man (3) in (7) ein, erhält man:

$$\cos(x+y) = \cos(2y + k\pi) = \tfrac{1}{2}\cos(k\pi)$$

$$(-1)^k \cos 2y = \tfrac{1}{2}(-1)^k$$

$$\cos 2y = \tfrac{1}{2} \tag{9}$$

Dann gilt wegen (8):

$$\cos 2x = \cos(2y + 2k\pi) = \cos(2y) = \tfrac{1}{2}$$

was wegen der Symmetrie bezüglich x und y zu erwarten war. Da in Ungleichung (1) nur $2x$, $2y$ und $2z$ vorkommen, können aufgrund der Periodizität der Kosinus-Funktion Vielfache von π beliebig zu jeder Variablen addiert werden. Wir betrachten nachfolgend daher nur die Hauptwerte $-\frac{\pi}{2} \leq x,y \leq \frac{\pi}{2}$. (9) ist erfüllt, wenn

$$2y = \pm\tfrac{\pi}{3}$$

$$y = \pm\tfrac{\pi}{6}$$

Desgleichen gilt für x, wobei allerdings x und y nicht unterschiedliche Vorzeichen haben dürfen, denn dann wäre $z = \pi$ und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Zusammenfassend muss also gelten:

$$x = \pm\tfrac{\pi}{6} + n\pi$$

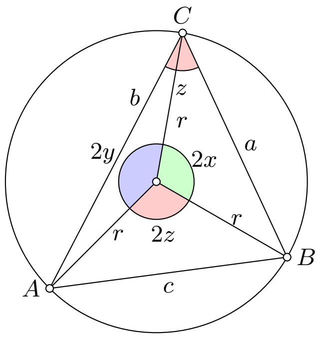
$$y = x - k\pi$$

und

$$z = \pi - (x + y) = \pi - 2x + k\pi$$
$$z = -2x + (k + 1)\pi$$

mit $k{,}n \in \mathbb{Z}$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:



Laut Kosinussatz gilt z. B.

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2x$$
$$2r^2 \cos 2x = 2r^2 - a^2$$
$$\cos 2x = 1 - \frac{a^2}{2r^2}$$

Sinngemäß genauso für y und z. Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} + 1 - \frac{b^2}{2r^2} - 1 + \frac{c^2}{2r^2} \leq \tfrac{3}{2}$$
$$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2r^2} \leq \tfrac{1}{2}$$
$$c^2 - a^2 - b^2 \leq r^2$$
$$c^2 \leq r^2 + a^2 + b^2$$

Man kann weiter schlussfolgern (wiederum per Kosinussatz):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos z$$

Setzt man das in die vorige Gleichung ein, erhält man:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos z \leq r^2 + a^2 + b^2$$
$$-2ab \cos z \leq r^2$$

Außerdem ist

$$c = 2r \sin z$$

Wir multiplizieren die vorige Gleichung daher mit $4 \sin^2 z$. Es muss also gelten:

$$-8ab \sin^2 z \cos z \leq c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos z$$

Und daher:

$$0 \leq (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos z) + 8ab \sin^2 z \cos z$$

Da $(a - b)^2$ durchaus gleich null sein kann, muss man verschärfend fordern:

$$0 \leq 2ab(1 - \cos z) + 8ab \sin^2 z \cos z$$

Wir teilen durch $2ab$:

$$0 \leq 1 - \cos z + 4\sin^2 z \cos z$$
$$0 \leq 1 + 3\cos z - 4\cos^3 z$$
$$0 \leq 1 - \cos 3z$$

Diese Ungleichung ist tatsächlich immer erfüllt, womit die Ungleichung der Aufgabenstellung bewiesen ist. Gleichheit tritt ein, wenn einerseits $a = b$ ist, und andererseits $\cos 3z = 1$.
Allerdings erfüllt $z = 0$ die Ungleichung der Aufgabenstellung tatsächlich nicht, weil wir oben die Ungleichung mit $\sin^2 z$ multipliziert und dadurch die Phantomlösung $z = 0$ erzeugt haben. Es muss stattdessen gelten, dass

$$3z = 2\pi$$
$$z = \tfrac{2}{3}\pi = 120°$$

ist. Da außerdem $a = b$ sein muss, ist $x = y$ und aufgrund der Innenwinkelsumme gilt dann $x = y = \frac{1}{6}\pi = 30°$. Über die rein geometrischen Überlegungen hinaus kann man festhalten, dass die Kosinus-Funktion gerade und periodisch ist. Daher ist $x = y = -30°$ in Kombination mit $z = -120°$ ebenfalls eine gültige Lösung. Außerdem können wegen der Periodizität beliebige Vielfache von $\pi = 180°$ zu allen drei Variablen addiert werden.

Aufgabe 191236:
Gegeben sei eine positive reelle Zahl a.
Man ermittle (zu jedem Wert dieser gegebenen Zahl a jeweils) alle reellen Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$x^5 + y^5 = 1 \qquad , \qquad x + y = a$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nutzen die Symmetrie, indem wir $x = \frac{a}{2} + z$ und $y = \frac{a}{2} - z$ substituieren. Die zweite Bedingung ist dadurch automatisch erfüllt. Aus der ersten Bedingung folgt:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)^5 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^5 = 1$$
$$2\left(\frac{a}{2}\right)^5 + 2 \cdot 10\left(\frac{a}{2}\right)^3 z^2 + 2 \cdot 5\left(\frac{a}{2}\right) z^4 = 1$$

Das ist eine biquadratische Gleichung, die leicht zu lösen ist:

$$\frac{a^5}{16} + \frac{5a^3}{2} z^2 + 5az^4 = 1$$
$$z^4 + \frac{1}{2}a^2 z^2 + \frac{a^4}{80} - \frac{1}{5a} = 0$$
$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{80}a^4 + \frac{1}{5a}}$$

(Da $z^2 \geq 0$ gelten muss, kommt nur diese Lösung in Frage).

$$z^2 = -\frac{1}{4}a^2 + \sqrt{\frac{1}{20}a^4 + \frac{1}{5a}} = -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}}$$

Damit gilt:

$$z = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}}}$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{a^5+4}{5a}} - a^2}$$

Die Lösungen lauten dann aufgrund der Symmetrie $(x,y) = (x_1,x_2)$ und $(x,y) = (x_2,x_1)$.

Aufgabe 201231:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x^4+x^2-2x &\geq 0 \qquad (1)\\ 2x^3+x-1 &< 0 \qquad (2)\\ x^3-x &> 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von x durch:

1. Fall: $x \geq 0$. Dann ist nach (3) $0 < x^3-x = x\cdot(x^2-1)$ also $x>0$ und $0<x^2-1$, d. h. $x^2>1$ und damit auch $x>1$. Dann jedoch ist $2x^3+x-1 > 2x^3 > 0$ im Widerspruch zu (2), sodass es hier keine Lösung gibt.

2. Fall: $x<0$. Dann ist $-2x>0$ und wegen $x^4>0$ sowie $x^2>0$ (1) erfüllt. Offensichtlich ist auch $2x^3<0$ und $x-1<0$, also auch (2) erfüllt. Wegen $0<x^3-x=x\cdot(x^2-1)$ wird (3) genau dann erfüllt, wenn x^2-1 negativ ist, also $0<x^2<1$ und damit $-1<x<0$ gilt.

Das Ungleichungssystem wird also genau für diejenigen reellen Zahlen x mit $-1<x<0$ erfüllt.

Aufgabe 221231:
Es sind alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1+11x_2+21x_3+31x_4+41x_5&=55\\ 2x_1+12x_2+22x_3+32x_4+42x_5&=60\\ 3x_1+13x_2+23x_3+33x_4+43x_5&=65\\ 4x_1+14x_2+24x_3+34x_4+44x_5&=70\\ 5x_1+15x_2+25x_3+35x_4+45x_5&=75\end{aligned}$$

zu ermitteln.

Lösung von weird:
Das obige Gleichungssystem ist offensichtlich äquivalent zu dem einfacheren

$$x_1+11x_2+21x_3+31x_4+41x_5=55 \qquad (1)$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5 \qquad (2)$$

da sich (2) durch einfache Differenzbildung aus den beiden ersten Gleichungen ergibt und sich auch umgekehrt durch Addition eines geeigneten Vielfachen von (2) zu (1) alle Gleichungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben. Subtrahiert man (2) von (1) und kürzt durch 10, erhält man so sofort die weitere Gleichung

$$x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5 \qquad (3)$$

Wir unterscheiden nun die folgenden einander ausschließenden 3 Fälle:
1.Fall: $x_5=1$.
Wegen (3) muss dann auch sofort

$$x_2=1,\ x_3=x_4=0$$

gelten, womit sich aus (2) dann auch $x_1=3$ ergibt, was tatsächlich eine Lösung unseres Gleichungssystems hier ist.

2.Fall: $x_5 = 0$, $x_4 = 1$
Hier ergeben sich aus (3) die beiden Unterfälle:
a) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 3$ aus (2)
b) $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
welche beide ebenfalls hier zusätzlich (1) lösen, also dann Lösungen sind.

3.Fall: $x_4 = x_5 = 0$
Hier ergeben sich wieder unter Verwendung von (3) dann sogar drei Unterfälle, nämlich
a) $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, sowie $x_1 = 2$ aus (2)
b) $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, sowie $x_1 = 1$ aus (2)
c) $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, sowie $x_1 = 0$ aus (2)

welche ebenfalls alle auch (1) lösen und somit Lösungen sind.
Zusammenfassend haben sich somit die folgenden 6 Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \{(0,5,0,0,0),(1,3,1,0,0),(2,1,2,0,0),(2,2,0,1,0),(3,0,1,1,0),(3,1,0,0,1)\}$$

des gegebenen Gleichungssystems ergeben.

Aufgabe 231234:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen mit $0 \leq x < 2\pi$ und $0 \leq y < 2\pi$, die das Gleichungssystem erfüllen:

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \tag{1}$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \tag{2}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Aus (2) folgt: $\sin^2 y = \cos^2 x$ bzw.

$$\sin y = \pm \cos x \tag{3}$$

aber auch

$$\cos y = \pm \sin x \tag{4}$$

wobei die beiden $\pm$-Symbole nicht notwendigerweise miteinander korrespondieren. Das in (1) eingesetzt:

$$\pm 3 \sin x \sin x = \pm \cos x \cos x$$

Die beiden $\pm$-Symbole können gleich oder entgegengesetzt sein, so dass allgemein gelten muss:

$$\pm 3 \sin^2 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$(1 \pm 3) \sin^2 x = 1$$

Hier kommt allerdings nur das + in Frage, weil sonst $\sin x$ imaginär würde. Daher gilt:

$$4 \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2}$$

Aus (4) folgt außerdem

$$\cos y = \pm \frac{1}{2}$$

Die Lösungsmenge für x lautet $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$, die für y lautet $\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$. Teilt man Gleichung (1) durch die Kosinus-Terme, so gilt

$$3 \tan x = \tan y$$

Der Tangens von x und der Tangens von y müssen also das gleiche Vorzeichen haben, so dass nicht jedes Element der Lösungsmenge von x mit jedem aus der Menge für y kombinierbar ist. Die Lösungspaare lauten daher: $(\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{1}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{11}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi)$.

Aufgabe 261231:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + y - z = 1 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \qquad (2)$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1 \qquad (3)$$

Lösung von weird:
Indem man $z = x + y - 1$ aus Gleichung (1) in (2) einsetzt, erhält man

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = x^2 - y^2 + (x + y)^2 - 2(x + y) = 2(x + y)(x - 1) = 0$$

Es bietet sich daher folgende Fallunterscheidung an:
1. Fall: $x + y = 0$ bzw. $y = -x$.
Wegen (1) folgt daraus sofort $z = -1$ und aus (3) dann $2x^3 = 0$, also dann weiter $x = y = 0$.

2. Fall: $x = 1$.
Einsetzen in (1) führt dann auf $y = z$ und aus (3) folgt dann wieder $2y^3 = 0$, also dann $y = z = 0$.
Insgesamt muss also

$$(x,y,z) \in \{(0,0,-1),(1,0,0)\}$$

gelten, und das sind auch tatsächlich Lösungen, wie man sofort nachrechnet.

Aufgabe 321233B:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (x_1 + x_2)$$
$$x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot (x_2 + x_3)$$
$$\dots$$
$$x_{n-1} \cdot x_n = 3 \cdot (x_{n-1} + x_n)$$
$$x_n \cdot x_1 = 3 \cdot (x_n + x_1)$$

Lösung von weird:
Obiges Gleichungssystem lässt sich auch einfach umschreiben zu

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 9 \qquad (x_2 - 3)(x_3 - 3) = 9$$
$$...$$
$$(x_{n-1} - 3)(x_n - 3) = 9 \qquad (x_n - 3)(x_1 - 3) = 9$$

Sehen wir uns also etwa die Lösung der ersten Gleichung

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 9$$

an, so ist sofort klar, dass hier nur die Lösungspaare

$$(x_1,x_2) \in \{(4,12),(6,6),(12,4)\}$$

bestehend aus positiven ganzen Zahlen in Frage kommen. Gleiches gilt für die andere Gleichungen, wobei die Lösungen aber in der folgenden Weise „gekoppelt“ sind:

Wählt man für (x_1,x_2) ein Paar (a,b) wie oben, so muss dann für die 2. Gleichung das Lösungspaar $(x_2,x_3) = (b,a)$, für die dritte Gleichung wieder $(x_3,x_4) = (a,b)$ usw. genommen werden. Speziell für ungerades n muss dann aber $a = b = 6$ sein, da sich sonst für x_1 verschiedene Lösungen aus der ersten und der letzte Gleichung ergeben würden.

Zusammenfassend gilt somit, dass es für jedes $n \geq 2$ auf jeden Fall die Lösung

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = (6,6,6,\dots,6)$$

gibt, für ein gerades $n \geq 2$ aber dann noch jeweils die zwei weiteren Lösungen

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \in \{(4,12,4,12,\dots,4,12),(12,4,12,4,\dots,12,4)\}$$

Aufgabe 341233A:
Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen x,y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:

$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 \qquad (1)$$
$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1 \qquad (2)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir substituieren:

$$y^2 + x^2 = a \qquad y^2 - x^2 = b$$

bzw.

$$x^2 = \frac{1}{2}(a-b) \qquad y^2 = \frac{1}{2}(a+b)$$

Dann folgt aus (1):

$$\sin^4 x = \frac{1}{2}(a+b)(a-4) + 4 \qquad (3)$$

und aus (2):

$$\cos^4 x = \frac{1}{2}(a-b)(a-4) + 1 \qquad (4)$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) ziehen wir voneinander ab und nutzen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = b(a-4) + 3$$
$$2\sin^2 x = b(a-4) + 4 \qquad (5a)$$
$$2\cos^2 x = -b(a-4) - 2 \qquad (5b)$$

Wir setzen (5a) in (3) ein:

$$4\left(\frac{1}{2}(a+b)(a-4) + 4\right) = (b(a-4)+4)^2$$

$$2(a+b)(a-4) + 16 = b^2(a-4)^2 + 8b(a-4) + 16$$
$$2(a+b) = b^2(a-4) + 8b \qquad (6)$$

In gleicher Art und Weise erhalten wir, wenn wir (5b) in (4) einsetzen:

$$4\left(\frac{1}{2}(a-b)(a-4) + 1\right) = (b(a-4)+2)^2$$

$$2(a-b) = b^2(a-4) + 4b \tag{7}$$

Wir addieren (6) und (7):

$$4a = 2b^2(a-4) + 12b$$
$$2a = b^2 a - 4b^2 + 6b$$
$$(2-b^2)a = b(6-4b)$$
$$a = \frac{b(6-4b)}{2-b^2} \tag{8}$$

(8) in (6) eingesetzt:

$$2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2} + b\right) = b^2\left(\frac{b(6-4b)}{2-b^2} - 4\right) + 8b$$

Durch $2b$ teilen:

$$\frac{6-4b}{2-b^2} + 1 = b\left(\frac{b(3-2b)}{2-b^2} - 2\right) + 4$$
$$6 - 4b + 2 - b^2 = b^2(3-2b) + (4-2b)(3-2b)$$
$$8 - 4b - b^2 = 3b^2 - 2b^3 + 12 - 6b - 8b + 4b^2$$
$$0 = b^3 - 4b^2 + 5b - 2$$

Eine Lösung, die man leicht errät, ist $b = 1$. Polynomdivision durch $(b-1)$ liefert

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

mit den Lösungen $b = 1$ (doppelte Nullstelle) und $b = 2$, so dass wir insgesamt unter Nutzung von (8) die folgenden Lösungen haben:

$$b_1 = 1 \qquad a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad b_2 = 2 \qquad a_2 = 2$$

Lösung a): Setzt man in die Substitution ein, folgt

$$y^2 = \frac{3}{2} \qquad x^2 = \frac{1}{2}$$

Laut (5a) muss aber auch gelten

$$2\sin^2 x = 2$$

was mit

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

unvereinbar ist. Dies ist also nur eine Scheinlösung.

Lösung b): Aus der Substitution erhält man

$$x^2 = 0 \qquad y^2 = 2$$

$x = 0$ ist auch mit (5a) und (5b) vereinbar.
Wir haben daher als einzige Lösungen $(x;y) \in \{(0;\sqrt{2}),(0;-\sqrt{2})\}$.

Alternativ-Lösung von weird:

Aus

$$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4(x^2+y^2) + 5 = (x^2+y^2-2)^2 + 1$$

folgt zunächst

$$2(x^2+y^2-2)^2 = -\sin^2(2x)$$

und da für eine reelle Lösung jedenfalls beide Seiten dieser Gleichung 0 sein müssen und wegen $x^2+y^2 = 2$ auch noch die Beschränkung $x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ gilt, bleibt hier dann wirklich nur die einzige Möglichkeit

$$x = 0,\ y = \pm\sqrt{2}$$

über, welche aber dann auch tatsächlich das Gleichungssystem löst, wie man durch Einsetzen sofort feststellt.

IV Runde 4

Aufgabe 051244:
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
(*) \qquad & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2\\
(**) \qquad & x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2\\
& x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2\\
& x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2
\end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*) und (**) durch Subtraktion

$$x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_4 - x_3 = 0 \qquad \text{also} \qquad (x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0$$

Da das Gleichungssystem bei jeder zyklischen Vertauschung der Indizes in sich übergeht, ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (1)\\
(x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (2)\\
(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) = 0 \qquad & (3)\\
(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) = 0 \qquad & (4)\\
(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) = 0 \qquad & (5)\\
(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \qquad & (6)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn in jeder der Gleichungen wenigstens ein Faktor gleich Null ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ 2) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$
3) $x_1 = x_2 \neq x_3; x_1 \neq x_4$ 4) $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zyklische Vertauschung des Indizes, da jedes Quadrupel, das aus einer Lösung durch zyklische Vertauschung der Indizes entsteht, ebenfalls Lösung ist und man jedes Quadrupel durch zyklische Vertauschung in einen der Fälle 1) bis 4) überführen kann.

1. In diesem Fall erhält man aus (*):
$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 + x_1 = 2 \Rightarrow x_1^2 + \frac{x_1}{3} - \frac{2}{3} = 0$$
Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn
$$x_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad x_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$$
ist. Man überzeugt sich leicht, dass für
$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$
das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.
2. In diesem Fall erhält man wegen $x_3 \neq x_4$ aus (6):
$$x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad 2x_1 = 1 \qquad ; \qquad x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$$
$$\text{Ferner folgt aus (*):} \qquad 3x_1^2 + x_4 = 2 \qquad ; \qquad x_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
Man überzeugt sich leicht, dass für $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{5}{4}$ das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

3. In diesem Fall müsste wegen (2), (3), (4), (5)

$$x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + x_4 = x_1 + x_3 = 1 \qquad \text{also} \qquad x_3 = x_4$$

und wegen der aus (*) folgenden Beziehung $x_3 = 1 - x_1$

$$x_1^2 + 2x_1(1 - x_1) + 1 - x_1 = 2 \qquad ; \qquad x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$

gelten. Das ist aber auf Grund von

$$x_1^2 - x_1 + 1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

nicht möglich. In diesem Fall existiert also keine Lösung.

4. In diesem Fall folgt aus (1) und (2): $x_3 + x_4 = x_2 + x_4 = 1$, das ist aber wegen $x_1 \neq x_2$ unmöglich.

Das gegebene Gleichungssystem ist also für die Quadrupel

$$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right); \quad (-1,-1,-1,-1); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right); \quad \left(\frac{5}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 071241:
Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= b \qquad (1)\\ x_2 + ax_3 + x_4 &= b \qquad (2)\\ x_3 + ax_4 + x_1 &= b \qquad (3)\\ x_4 + ax_1 + x_2 &= b \qquad (4) \end{aligned}$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).

Lösung von cyrix:
Fall 1: $a = 0$. Dann ist das Gleichungssystem äquivalent zu $x_1 + x_3 = b = x_2 + x_4$, sodass alle Lösungsquadrupel die Form $(s,t,b-s,b-t)$ mit zwei reellen Parametern s und t besitzen. Einsetzen bestätigt, dass das alles auch Lösungen sind.

Fall 2: $a \neq 0$. Dann führt das Gleichsetzen von Gleichung (1) mit (3) auf $ax_2 = ax_4$ bzw. $x_2 = x_4$. Analog erhält man mit Gleichungen (2) und (4) die Identität $x_1 = x_3$. Einsetzen liefert nun $2x_1 + ax_2 = b = 2x_2 + ax_1$, also $(2-a)x_1 = (2-a)x_2$.

Fall 2.1: $a \neq 2$. Dann folgt $x_1 = x_2$, also sind alle vier Variablen gleich und man erhält $(2+a)x_1 = b$.
Fall 2.1.1: $a \neq -2$. Dann sind genau die Quadrupel $\left(\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a},\frac{b}{2+a}\right)$ Lösungen des Gleichungssystems, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt.
Fall 2.1.2: $a = -2$ und $b = 0$. Dann sind die Lösungsquadrupel gegeben durch (t,t,t,t), wobei t die reellen Zahlen durchläuft. Auch hier bestätigt die Probe das Ergebnis.
Fall 2.1.3: $a = -2$ und $b \neq 0$. Dann gibt es wegen $(2+a)x_1 = (2-2)x_1 = 0 \neq b$ keine Lösung.

Fall 2.2: $a = 2$. Dann ist $2x_1+2x_2 = b$, sodass man genau alle Lösungstripel erhält durch $\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right)$, wobei auch hier der Parameter t die reellen Zahlen durchläuft, und man durch Einsetzen bestätigt, dass dies alles Lösungen sind.

Aufgabe 081244:
Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| &= 3 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

Lösung von cyrix:
Aufgrund der zweiten Gleichung haben beide Variablen das gleiche Vorzeichen. Wären beide negativ, so auch $x+y$. Dann wäre aber $\log_2(x+y)$ nicht definiert. Demnach sind sowohl x als auch y positiv. Damit $\log_2(x-y)$ definiert ist, muss $x > y$ gelten, also aufgrund der zweiten Gleichung dann $x+y > x > \sqrt{3}$. Damit ist $\log_2(x+y)$ stehts positiv und die Betragsstriche können entfallen.
Es verbleiben zwei Fälle:
1. Fall: $x - y \geq 1$.
Dann ist auch $\log_2(x-y) \geq 0$ und die erste Gleichung wird zu

$$3 = \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = \log_2(x^2 - y^2)$$

also $x^2 - y^2 = 8$ bzw. $x^4 - (xy)^2 = x^4 - 9 = 8x^2$, was mit der Substitution $t = x^2$ übergeht in die quadratische Gleichung $t^2 - 8t - 9 = 0$, die die Lösungen $4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5$ hat. Da $t = x^2 \geq 0$ ist, entfällt die negative Lösung -1 und es verbleibt $t = x^2 = 9$, also $x = 3$ und $y = 1$. Die Probe bestätigt, dass diese Variablenbelegung auch das Ausgangsgleichungssystem löst.
2. Fall: $x - y < 1$.
Dann ist $\log_2(x-y) < 0$, sodass die erste Gleichung übergeht in

$$3 = \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = \log_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

also $8 = \frac{x+y}{x-y}$ bzw. $x + y = 8(x-y)$, also $9y = 7x$ bzw. $y = \frac{7}{9}x$ und damit $3 = xy = \frac{7}{9}x^2$, welches auf $x^2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ und (wegen $x > 0$) auf $x = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}$ sowie $y = \frac{7}{9}x = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Zur Probe: Es ist $x \cdot y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{1}{7} \cdot 21 = 3$, sodass die zweite Gleichung erfüllt ist. Weiterhin ist

$$x + y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9+7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

sodass man $\log_2(x+y) = \log_2(16) - \log_2(\sqrt{21}) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ erhält. Da $21 < 256$ ist, folgt $\frac{1}{2}\log_2(21) < \frac{1}{2}\log_2(256) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, sodass $|\log_2(x+y)| = \log_2(x+y) = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21)$ gilt.
Darüber hinaus ist $x - y = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{21} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{9-7}{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, sodass man

$$\log_2(x-y) = \log_2(2) - \log_2(\sqrt{21}) = 1 - \frac{1}{2}\log_2(21)$$

erhält. Wegen $21 > 4$ ist $\frac{1}{2}\log_2(21) > \frac{1}{2}\log_2(4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, sodass $|\log_2(x-y)| = -\log_2(x-y) = \frac{1}{2}\log_2(21) - 1$ ist. Zusammen mit dem zuvor berechneten ist dann $|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 4 - \frac{1}{2}\log_2(21) - \frac{1}{2}\log_2(21) - 1 = 4 - 1 = 3$, sodass auch die zweite Gleichung von diesem Paar erfüllt wird.
Zusammen ergeben sich also genau zwei Lösungspaare, nämlich $(x,y) = (3,1)$ oder $(x,y) = \left(\frac{3}{7} \cdot \sqrt{21}, \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21}\right)$

Aufgabe 141244:
Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, für die die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} 24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 &= 0 \qquad (1) \quad \text{und} \\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar $(x;y)$ gelten (1) und (2). dann setzen wir $u = x-1$ und $v = y+1$, so dass (1) äquivalent mit

$$24(u+1)^2 - 25(u+1)(v-1) - 73(u+1) + 25(v+1) - 35 = 0$$
$$24u^2 - 84 - 25uv = 0 \qquad (3)$$

ist, während (2) mit

$$u^2 - v^2 = 7 \qquad (7)$$

äquivalent ist, Nun setzen wie $a = u+v$, $b = u-v$ und damit $u = \frac{a+b}{2}$, $v = \frac{a-b}{2}$. Dann geht (4) über in die äquivalente Gleichung $a \cdot b = 7 \quad (5)$, während aus 83) die Gleichung

$$6a^2 + 12ab + 6b^2 - 84 - \frac{25}{4}a^2 + \frac{25}{4}b^2 = 0$$

folgt. Hieraus erhält man in Verbindung mit (5)

$$-\frac{1}{4}a^2 + 84 + \frac{49}{4}b^2 - 84 = 0 \qquad ; \qquad a^2 = 49b^2 \qquad (6)$$

Nun haben nach (5) a und b dasselbe Vorzeichen, und darum folgt aus (6) $a = 7b$ und hieraus $a^2 = 7ab = 49 \quad (7)$. Es kommen also höchstens $(a;b) = (7;1)$ und $(a;b) = (-7;-1)$ als Lösungen von (7) und (5) in Frage.
Wegen $x = u+1 = \frac{a+b}{2}+1$, $y = v-1 = \frac{a-b}{2}-1$ können daher höchstens mit $(x;y) = (5;2)$ und $(x;y) = (-3;-4)$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt werden. Die Probe bestätigt die gefundenen Lösungen.

Aufgabe 191243:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, für die

$$2x + x^2y = y \qquad ; \qquad 2y + y^2z = z \qquad ; \qquad 2z + z^2x = x$$

gilt. Dabei sind x, y und z durch Ausdrücke anzugeben, die aus gegebenen reellen Zahlen durch wiederholte Anwendung von Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, von reellwertigen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen oder von deren reellwertigen Umkehrfunktionen gebildet sind.

Lösung von weird:
Betrachten wir etwa die letzte Gleichung $2z + z^2x = x$, so kann man auch in der Form $2z = x(1-z^2)$ schreiben, wobei hier $1 - z^2 \neq 0$ ist, da $1 - z^2 = 0$ sofort auf den Widerspruch $\pm 2 = 0$ führen würde. Nach zyklischer Vertauschung der Variablen x,y,z, gegen welche unser Gleichungssystem ja ersichtlich invariant ist, ergeben sich daraus sofort die drei weiteren Gleichungen

$$x = \frac{2z}{1-z^2}, \quad y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad z = \frac{2y}{1-y^2} \quad (*)$$

welche von ihrer Form her sofort an die Formel

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

aus der Trigonometrie erinnern. Es ist daher der Ansatz

$$x = \tan\alpha, \quad y = \tan\beta, \quad z = \tan\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$$

sehr naheliegend, womit sich dann (*) auch einfach schreiben lässt als

$$\alpha \equiv 2\gamma \pmod{\pi}, \quad \beta \equiv 2\alpha \pmod{\pi}, \quad \gamma \equiv 2\beta \pmod{\pi} \quad (**)$$

Einsetzen führt dann auf

$$7\alpha = 8\alpha - \alpha \equiv 4\beta - \alpha \equiv 2\gamma - \alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$$

d. h., im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hat α die insgesamt 7 Lösungen

$$\alpha \in \{0, \pm \frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\}$$

womit wir in Verbindung mit (**) nun auch die vollständige Lösung des gegebenen Gleichungssystems leicht angeben können:

$$x = \tan\alpha, \quad y = \tan(2\alpha), \quad z = \tan(4\alpha) \quad (\alpha \in \{0, \pm \frac{\pi}{7}, \pm 2\frac{\pi}{7}, \pm 3\frac{\pi}{7}\})$$

Aufgabe 221242:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, zu denen es nichtnegative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 gibt, die die folgenden Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \qquad (1)\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= a \qquad (2)\\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 &= a^2 \qquad (3)\\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 &= a^3 \qquad (4) \end{aligned}$$

Lösung von weird:
Zunächst geht es darum, das obige lineare Gleichungssystem in x_1,x_2,x_3,x_4 zu lösen. Dafür gibt es hier aufgrund seiner besonderen Form einen netten Trick, den ich am Beispiel der Berechnung von x_1 hier einmal explizit vorführe:

$$\begin{aligned} f_1(a) := (a-2)(a-3)(a-4) = a^3 - 9a^2 + 26a - 24 =\\ = (x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4) - 9(x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4) + 26(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) -\\ -24(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = f_1(1)x_1 + f_1(2)x_2 + f_1(3)x_3 + f_1(4)x_4 = f_1(1)x_1 \end{aligned}$$

und damit also

$$x_1 = \frac{1}{f_1(1)}(a-2)(a-3)(a-4) = -\frac{1}{6}(a-2)(a-3)(a-4)$$

In analoger Weise ergeben sich unter Verwendung der polynomialen Ausdrücke

$$f_2(a) := (a-1)(a-3)(a-4),\; f_3(a) := (a-1)(a-2)(a-4),\; f_4(a) := (a-1)(a-2)(a-3)$$

in a die Werte der anderen Variablen zu

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{f_2(2)}(a-1)(a-3)(a-4) = \frac{1}{2}(a-1)(a-3)(a-4)\\ x_3 &= \frac{1}{f_3(3)}(a-1)(a-2)(a-4) = -\frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-4)\\ x_4 &= \frac{1}{f_4(4)}(a-1)(a-2)(a-3) = \frac{1}{6}(a-1)(a-2)(a-3) \end{aligned}$$

Daraus kann man aber durch Einsetzen sofort ersehen, dass für $a \notin \{1,2,3,4\}$ mindestens eine der 4 Variablen negativ ist, während für $a \in \{1,2,3,4\}$ jeweils 3 der Variablen x_1,x_2,x_3,x_4 den Wert 0 annehmen, die vierte aber dann positiv ist, d. h., genau diese vier Werte von a stellen die Lösung der Aufgabe hier dar.

Aufgabe 241244:
Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$. Man beweise, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}&=1 \qquad (1)\\ \sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}&=1 \qquad (2)\\ \sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}&=1 \qquad (3) \end{aligned}$$

genau eine Lösung (x, y, z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man wähle in einer Ebene einen Punkt P sowie Punkte K, L, M derart, dass $PK=\sqrt{a}$, $PL=\sqrt{b}$ und $PM=\sqrt{c}$ gilt und dass benachbarte Strecken einen Winkel von 120° bilden.
Legt man durch die Punkte K, L, M Geraden senkrecht zu PK, PL bzw. PM, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Es sei mit ABC bezeichnet, wobei $K\in BC$, $L\in AC$, $M\in AB$ gelte. Sein Flächeninhalt $J(ABC)$ ist

$$J(ABC)=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AB^2\cdot 60^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot AB^2$$

Andererseits ist der Flächeninhalt

$$\begin{aligned} J(ABC)&=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot BC+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot AC+\frac{1}{2}\sqrt{c}\cdot AB\\ &=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot AB \end{aligned}$$

Also ist $AB=1$. Jetzt erkennt man sofort durch Anwendung des Satzes des Pythagoras, dass $x=PA^2$, $y=PB^2$ und $z=PC^2$ dem Gleichungssystem genügen.

Also gibt es mindestens eine Lösung (x,y,z). Sei (x',y',z') ein andere Lösung.
Sei etwa $x'\neq x$ und dabei $x'>x$. Nach Gleichung (2) ist dann $z'<z$ und nach Gleichung (3) $y'<y$. Dann ist jedoch

$$\sqrt{y'-a}+\sqrt{z'-a}<\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1$$

und (x',y',z') erfüllt nicht das Gleichungssystem.

Aufgabe 271242:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{aligned} 1\cdot x^3+9\cdot y^2+8\cdot y+8&=1988 \qquad (1)\\ 1\cdot y^3+9\cdot z^2+8\cdot z+8&=1988 \qquad (2)\\ 1\cdot z^3+9\cdot x^2+8\cdot x+8&=1988 \qquad (3) \end{aligned}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist offensichtlich, dass die drei Gleichungen durch zyklische Vertauschung von x, y und z ineinander übergehen. Daher wäre ein Tripel mit $x=y=z$ automatisch eine Lösung, wenn x die Gleichung

$$x^3+9x^2+8x=1980 \tag{4}$$

erfüllt. Eine ebenso offensichtliche Lösung ist $x=10$, so dass schon einmal das Tripel $(x,y,z)=(10,10,10)$ eine Lösung darstellt. Wir werden nun zeigen, dass es weitere Lösungen in $\mathbb{R}$ nicht geben kann. Wir führen eine Polynomdivision von Gleichung (4) durch $x-10$ durch, und erhalten

$$x^2+19x+198=0$$

Diese quadratische Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösungen. Weitere Lösungstripel erfordern somit, dass die drei Variablen paarweise verschieden sind. Wir betrachten nun die zwei Funktionen

$$f(x) = x^3 \tag{5}$$

und

$$g(y) = 9y^2 + 8y + 8 \tag{6}$$

Letztere ist eine nach oben offene Parabel, das Minimum liegt bei $y = -\frac{4}{9}$. (Jede Schlussfolgerung bezüglich der Eigenschaft einer Variablen gilt aufgrund der zyklischen Vertauschbarkeit immer für alle drei Variablen gleichermaßen.) Sowohl (6) für $y \geq -\frac{4}{9}$ als auch (5) generell sind monoton steigend.

Wir nehmen nun zunächst an, dass alle drei Variablen $x,y,z \geq -\frac{4}{9}$ sind. In Gleichung (1) bedeutet das wegen der Monotonie ausgehend vom Tripel (10,10,10), wenn man x größer als 10 ansetzt, dass y kleiner als 10 sein muss. Wenn y aber kleiner als 10 ist, dann hat das in Gleichung (2) zur Folge, dass z größer als 10 werden muss. Damit sind sowohl x als auch z jeweils größer als 10, was Gleichung (3) unerfüllbar macht und somit zu einem Widerspruch führt. Gleiches gilt für die entgegengesetzte Richtung. Wir untersuchen daher als letztes, ob eine Lösung möglich ist, wenn (mindestens) eine der Variablen kleiner als $-\frac{4}{9}$ wäre. Es ist durch Nullsetzen der ersten Ableitung von (6) und Einsetzen sehr einfach, zu zeigen, dass

$$9y^2 + 8y + 8 \geq \frac{56}{9}$$

ist. Verwendet man das in Gleichung (1), so folgt:

$$9y^2 + 8y + 8 = 1988 - x^3 \geq \frac{56}{9}$$

$$x \leq \sqrt[3]{1988 - \frac{56}{9}} = a$$

Es gibt also eine obere Schranke

$$(7) \qquad x,y,z \leq a$$

mit $a = \sqrt[3]{1981\frac{7}{9}} \approx 12{,}56$. Nehmen wir nun an, dass $x \leq -\frac{4}{9}$ sei. Aus Gleichung (1) folgt:

$$(8) \qquad 9y^2 + 8y = 1980 - x^3 \geq 1980 + \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

Da $y = a$ diese Ungleichung nicht erfüllt, müsste entweder im Widerspruch zu (7) $y > a$ gelten, oder es muss kleiner sein als die andere, negative Lösung der quadratischen Gleichung. Das heißt:

$$y \leq -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Wir behaupten, dass

$$(9) \qquad -\frac{4}{9} - \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}} < x \quad \forall \quad x \leq -\frac{4}{9}$$

gilt. Mit dieser Behauptung können wir folgern, dass

$$y < x$$

ist, woraus aber wegen Gleichung (2) $z < y$ folgt, und das wiederum führt wegen Gleichung (3) zu $x < z$, was einen widersprüchlichen Zirkelschluss $x < x$ darstellt. Es genügt daher, zu zeigen, dass (9) gilt, um zu beweisen, dass es keine weitere Lösungen geben kann:

$$-\left(x + \frac{4}{9}\right) < \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}}$$

Beide Seiten sind größer als null, daher dürfen wir quadrieren:

$$\left(x + \frac{4}{9}\right)^2 < \frac{16}{81} + \frac{1980 - x^3}{9}$$

$$x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{x^3}{9} < \frac{1980}{9}$$
$$x^3 + 9x^2 + 8x - 1980 < 0$$
$$(x-10)(x^2 + 19x + 198) < 0$$

Da $(x-10) < 0$, bleibt zu zeigen, dass

$$x^2 + 19x + 198 > 0$$

was tatsächlich der Fall ist für alle x, wie schon oben gezeigt. q. e. d. Das einzige Lösungstripel ist somit $(x,y,z) = (10,10,10)$.

Aufgabe 281241:
Man ermittle alle reellen Lösungen (x,y,z) des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x + 2y + 3z = \sqrt{14}$$

Lösung von Kornkreis:
Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist

$$x + 2y + 3z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{14},$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn beide Vektoren parallel sind. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tritt in der Tat Gleichheit ein, sodass ein $a > 0$ existiert mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt $a + 4a + 9a = \sqrt{14}$, insgesamt muss also $x = a$, $y = 2a$, $z = 3a$ mit $a = \sqrt{14}/14$ gelten. Eine Probe (Einsetzen ins Gleichungssystem) ergibt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

Aufgabe 301241:
Man ermittle zu jedem Tripel (a,b,c) positiver reeller Zahlen a,b,c alle diejenigen Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x^2 - (y-z)^2 = a \\ &(2) \qquad y^2 - (z-x)^2 = b \\ &(3) \qquad z^2 - (x-y)^2 = c \end{aligned}$$

Lösung von weird:
Aus

$$(x{+}y{-}z)^2(x{-}y{+}z)^2(-x{+}y{+}z)^2 = \; = ((x{+}y{-}z)(x{-}y{+}z))((y{+}z{-}x)(y{-}z{+}x))((z{+}x{-}y)(z{-}x{+}y)) = abc$$

erhält man zunächst

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) = \pm\sqrt{abc}$$

und indem man darin

$$a=(x+y-z)(x-y+z),\ b=(y+z-x)(y-z+x),\ c=(z+x-y)(z-x+y)$$

jeweils substituiert das neue Gleichungssystem

$$(4)\qquad -x+y+z=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

$$(5)\quad x-y+z=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$$

$$(6)\quad x+y-z=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Unter der Prämisse, dass auf der rechten Seite von (4),(5),(6) jeweils das gleiche Vorzeichen gewählt wird, was wir nun voraussetzen wollen, kann man daraus das ursprüngliche Gleichungssystem ersichtlich sofort wieder zurückgewinnen, d. h., es ist zu diesem äquivalent.

Das Gleichungssystem (4),(5),(6) ist aber nun linear und damit problemlos lösbar, z. B. indem man hier je zwei der drei Gleichungen addiert. Damit erhält man dann die 2 Lösungen

$$x=\pm\sqrt{\frac{a}{bc}}\,\frac{b+c}{2},\ y=\pm\sqrt{\frac{b}{ac}}\,\frac{a+c}{2},\ x=\pm\sqrt{\frac{c}{ab}}\,\frac{a+b}{2}$$

Aufgabe 321244:
Man beweise: Wenn reelle Zahlen a,b,c das Gleichungssystem

$$a+b+c=2 \qquad ; \qquad ab+ac+bc=1$$

erfüllen, so gilt

$$0\le a\le\frac{4}{3};\qquad 0\le b\le\frac{4}{3};\qquad 0\le c\le\frac{4}{3}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Aufgrund der Symmetrie zwischen a, b und c reicht es, die Extremwerte nur für eine der drei Variablen zu berechnen. Sie gelten dann für die anderen beiden Variablen in gleicher Weise. Es ist

$$c=2-(a+b)$$

Also:

$$ab+(a+b)\,(2-(a+b))=1$$

$$ab+2a+2b-a^2-2ab-b^2=1$$

$$(1)\qquad 2a+2b-a^2-ab-b^2=1$$

(Dies ist eine Kegelschnittgleichung, konkret eine Ellipse, wenn man a und b als zwei voneinander abhängige Größen betrachtet und in einem Koordinatensystem darstellt). Die Extremwerte für a erhält man, indem man die Gleichung (1) implizit nach b ableitet und gleich null setzt:

$$2-a-2b=0$$

$$b=1-\tfrac{1}{2}a$$

Dies wieder in (1) eingesetzt:

$$2a+2-a-a^2-a(1-\tfrac{1}{2}a)-1+a-\tfrac{1}{4}a^2=1$$

$$a-\tfrac{3}{4}a^2=0$$

Daraus folgt offenkundig, dass die beiden Extremwerte $a = 0$ und $a = \frac{4}{3}$ sind, so dass gilt:

$$0 \leq a,b,c \leq \tfrac{4}{3}$$

q. e. d.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Nach Voraussetzung ist

$$b + c = 2 - a$$

und

$$bc = 1 - a(b + c) = 1 - a(2 - a) = 1 - 2a + a^2 = (a - 1)^2.$$

Nach Vieta hat das quadratische Polynom $x^2 - (b + c)x + bc$ die Nullstellen $b,c \in \mathbb{R}$. Daher ist die Diskriminante dieses Polynom nichtnegativ, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (b + c)^2 - 4bc \\ &= (2 - a)^2 - 4(a - 1)^2 \\ &= (2 - a - 2(a - 1))(2 - a + 2(a - 1)) \\ &= a(4 - 3a) \\ &= -\frac{1}{3}a\left(a - \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Also folgt, dass $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. Die Abschätzungen für b und c folgen analog.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Zunächst folgt aus den gegebenen Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 4 - 2 = 2$$

sowie

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (2 - c)^2 - (2 - c^2) = 2(c^2 - 2c + 1) = 2(c - 1)^2$$

insgesamt also

$$ab = (c - 1)^2 \quad \text{und analog} \quad ac = (b - 1)^2,\ bc = (a - 1)^2$$

Da damit a,b,c nicht ein unterschiedliches Vorzeichen haben können und andererseits auch $a+b+c = 2 > 0$ gilt, folgt daraus zunächst einmal die Abschätzung

$$a,b,c \geq 0$$

von a,b,c nach unten. Die entsprechende Abschätzung nach oben ergibt sich schließlich aus

$$0 \leq (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (2 - c)^2 - 4(c - 1)^2 = -3c^2 + 4c = c(4 - 3c)$$

Da wir nun schon wissen, dass $c \geq 0$ ist, gilt damit auch $4 - 3c \geq 0$, also $c \leq \frac{4}{3}$, und somit insgesamt und zusammen mit den anlogen Beziehungen für a und b tatsächlich

$$a,b,c \in \left[0,\frac{4}{3}\right]$$

wie behauptet.

I.IV Gruppen

I Runde 3

Aufgabe 111236A:
Eine Menge M von Elementen $u, v, w, \ldots$ heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun K die Menge aller geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in K eine Operation A wie folgt definiert:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Man beweise, dass K eine Gruppe bezüglich A ist.

Lösung von weird:
Für die Lösung dieser Aufgabe erweist es sich als zweckmäßig, die Elemente von K in der Form

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \quad (\varphi \in [0{,}2\pi))$$

anzuschreiben, wobei hier für jedes $(a{,}b) \in K$ in der umkehrbar eindeutigen Zuordnung $(a{,}b) \leftrightarrow \varphi$ der Winkel $\varphi \in [0{,}2\pi)$ jeweils eindeutig bestimmt ist. Die Verknüpfung $\circ$ ist für $\varphi{,}\psi \in [0{,}2\pi)$ gegeben durch

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)$$

wofür man bekanntlich auch einfacher

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \circ (\cos\psi, \sin\psi) = (\cos(\varphi + \psi), \sin(\varphi + \psi)))$$

schreiben kann. Insbesondere gilt somit für $\alpha{,}\beta{,}\gamma \in [0{,}2\pi)$

$$((\cos\alpha, \sin\alpha) \circ (\cos\beta, \sin\beta)) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma) = (\cos((\alpha + \beta) + \gamma), \sin((\alpha + \beta) + \gamma))$$

was also dann ident ist mit

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \circ ((\cos\beta, \sin\beta) \circ (\cos\gamma, \sin\gamma)) = (\cos(\alpha + (\beta + \gamma)), \sin(\alpha + (\beta + \gamma)))$$

und somit die Assoziativität von $\circ$ beweist.
Für den Punkt c) genügt es wegen der Kommutativät von $\circ$ nur die Lösbarkeit der ersten Gleichung zu zeigen. Diese folgt aber für $\mu, \nu \in [0{,}2\pi)$ sofort aus

$$(\cos\mu, \sin\mu) \circ (\cos(\nu - \mu), \sin(\nu - \mu)) = (\cos\nu, \sin\nu)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir identifizieren dass Paar $(a{,}b)$ reeller Zahlen mit der komplexen Zahl $a + ib$. Dann ist die beschriebene Verknüpfung $\circ$ zweier Paare reeller Zahlen genau die Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen und K genau die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Diese bilden mit der Multiplikation eine Gruppe:

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ gilt $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| = 1 \cdot 1 = 1$.

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist assoziativ und kommutativ.

Für zwei komplexe Zahlen u und v mit $|u| = |v| = 1$ seien die komplexen Zahlen x und y definiert durch $x := y := v \cdot \bar{u}$, wobei $\bar{u}$ die zu u komplex konjugierte Zahl sei. Dann gilt wegen $|\bar{u}| = |u| = 1$ sowie $\bar{u} \cdot u = 1^2$ auch $|x| = |y| = 1$ und $u \cdot x = y \cdot u = v \cdot \bar{u} \cdot u = v \cdot 1^2 = v$.

Also bildet auch K bezüglich der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe, $\square$.

Aufgabe 131236A:
Eine Menge G von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
(1) In G ist eine Operation definiert, d. h., jedem Paar (u,v) von Elementen u und v aus G ist eindeutig ein Element w aus G zugeordnet, wofür man $u \circ v = w$ schreibt.
(2) Diese Operation ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus G gilt $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
(3) Zu jedem Paar von Elementen u und v aus G existiert mindestens ein Element x aus G, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus G, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei P die Menge aller reeller Zahlen. Für je zwei Elemente a, b aus P ist durch $a \circ b = a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}$ eine Operation definiert.
Man beweise, dass die Menge P mit dieser Operation eine Gruppe ist.

Lösung von weird:
Da die oben definierte Operation $\circ$ offenbar die Gruppeneigenschaft erfüllt, wenden wir uns nun dem Nachweis von (2) zu, indem wir $(u \circ v) \circ w$ für drei beliebige Elemente $u,v,w \in P$ explizit berechnen. Zunächst ist

$$(u \circ v) \circ w = (u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})\sqrt{w^2+1} + w\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1}$$

und indem man hier die Identität

$$\sqrt{(u\sqrt{v^2+1} + v\sqrt{u^2+1})^2+1} = \sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uv$$

verwendet, welche man etwa durch Quadrieren und Ausmultiplizieren leicht bestätigen kann, folgt daraus weiter

$$(u \circ v) \circ w = u\sqrt{(v^2+1)(w^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)(w^2+1)} + w\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + uvw \qquad (*)$$

Hier fällt sofort auf, dass der rechtsstehende Ausdruck in (*) gegenüber einer beliebigen Vertauschung von u,v,w invariant ist, sodass wir also auch für $(v \circ w) \circ u$ das gleiche Ergebnis erhalten würden. Da aber $\circ$ offensichtlich kommutativ ist, folgt daraus schließlich

$$(u \circ v) \circ w = (v \circ w) \circ u = u \circ (v \circ w)$$

also die zu beweisende Assoziativität.
Für den Nachweis von (3) zeigen wir schließlich wegen der Kommutativität von $\circ$ nur die Lösbarkeit der Gleichung $u \circ x = v$, indem wir einfach eine Lösung, nämlich

$$x = (-u) \circ v$$

explizit angeben, was äquivalent ist zum Bestehen der Gleichung

$$u \circ (-u) \circ v = v$$

ist, welche man mithilfe von (*) sofort wie folgt nachrechnen kann

$$u\sqrt{((-u)^2+1)(v^2+1)} + (-u)\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} + v\sqrt{(u^2+1)^2} + u(-u)v = v$$

womit dann auch (3) bewiesen ist.

Aufgabe 151232:
Ist M eine Menge von reellen Zahlen, so soll eine reelle Zahl $e \neq 0$ aus dieser Menge als eine „Einheit von M“ bezeichnet werden, wenn für jedes Element x aus M die Beziehung $\frac{x}{e} \in M$ gilt.
(So besitzt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen nur die Einheiten +1 und -1, während z. B. in der Menge aller rationalen Zahlen jedes von 0 verschiedene Element eine Einheit ist.)
Es sei nun M die Menge aller Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. In dieser Menge sind z. B. +1 und -1 Einheiten.
a) Man gebe noch 5 weitere Einheiten von M an.
b) Man beweise, dass M unendlich viele verschiedene Einheiten enthält.

Lösung von Nuramon:
Man sieht per Induktion leicht: Ist e eine Einheit von M, dann sind auch alle Potenzen e^n für $n \in \mathbb{N}$ Einheiten von M. Daher genügt es eine einzige Einheit $e \neq \pm 1$ anzugeben um zu zeigen, dass es unendlich viele verschiedene gibt.
Wir zeigen, dass $3 + 2\sqrt{2}$ eine Einheit von M ist. Für $a + b\sqrt{2} \in M$ gilt nämlich:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = (3a - 4b) + (3b - 2a)\sqrt{2} \in M.$$

Aufgabe 161236B:
Es sei M eine Menge, für die folgendes gilt:
(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei.
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es genau ein $x \in M$ so, dass $x \circ b = c$ gilt; dieses Element x werde mit $x = \frac{c}{b}$ bezeichnet.

Unter diesen Voraussetzungen beweise man folgende Aussage:
Wenn für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ die Beziehung $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$ g ilt, dann gilt für alle $p \in M, q \in M, r \in M, s \in M$ die Beziehung

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{r} : \frac{q}{s}$$

Lösung von svrc:
Zunächst sammeln wir nochmal alle unsere Voraussetzungen:

(1) Jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus M ist genau ein Element aus M zugeordnet, das mit $a \circ b$ bezeichnet sei;
(2) Zu jedem $b \in M$ und jedem $c \in M$ gibt es ein genau ein $x \in M$ derart, dass $x \circ b = c$ gilt. Dieses Element x werde mit $x = \dfrac{c}{b}$ bezeichnet;
(3) Für alle $a \in M, b \in M, c \in M, d \in M$ gilt die Beziehung

$$(a \circ b) \cdot (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)\,.$$

Es gilt für beliebige $p \in M$, $q \in M$, $r \in M$, $s \in M$

$$p \overset{(2)}{=} \left(\frac{p}{q}\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ q \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{r}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{q}{s}\right) \circ s\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ \left(\left(\frac{r}{s}\right) \circ s\right) \overset{(2)}{=} \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right) \circ r.$$

Nach Voraussetzung (2) folgt somit

$$\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} \circ \left(\frac{q}{s}\right)\right).$$

Ein letztes Mal folgt mit Voraussetzung (2) somit

$$\frac{\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{q}{s}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)}$$

und die Behauptung.

Aufgabe 081243:
Eine Menge M von Elementen u, v, w heißt eine Halbgruppe, wenn in ihr eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (u, v) von Elementen aus M eindeutig ein Element w aus M zuordnet (man schreibt $u \otimes v = w$) und wenn diese algebraische Operation assoziativ ist, d. h. wenn für alle Elemente u, v,w aus M gilt:

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

Es sei nun c eine positive reelle Zahl, und es sei M die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, die kleiner als c sind. Für je zwei Zahlen u, v aus M werde definiert:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Man untersuche
a) ob M eine Halbgruppe ist;
b) ob diese Halbgruppe regulär ist, d. h. ob aus $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$ stets $v_1 = v_2$ und aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ ebenfalls $v_1 = v_2$ folgt.

Lösung von cyrix:
a) Zum Beweis der Abgeschlossenheit seien u,$v \in M$, also $0 \leq u < c$ und $0 \leq v < c$. Dann ist offensichtlich auch $u \otimes v$ als Quotient einer nichtnegativen reellen Zahl $u+v$ und einer positiven reellen Zahl $1+\frac{uv}{c^2} \geq 1+\frac{0\cdot 0}{c^2} = 1 > 0$ selbst nichtnegativ. Weiterhin ist

$$u \otimes v < c \Leftrightarrow \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} < c \Leftrightarrow cu + cv < c^2 + uv \Leftrightarrow 0 < c^2 - cu - cv + uv = (c-u)(c-v)$$

was offensichtlich wegen $u < c$ und $v < c$ wahr ist.
Für den Beweis der Assoziativität berechnen wir beide Terme:

$$(u \otimes v) \otimes w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c}^2} \otimes w = \left(c^2 \cdot \frac{u+v}{c^2+uv}\right) \otimes w =$$

$$= c^2 \cdot \frac{c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} + w}{c^2 + c^2 \frac{u+v}{c^2+uv} \cdot w} = \frac{\frac{c^2(u+v)+c^2w+uvw}{c^2+uv}}{1+\frac{(u+v)w}{c^2+uv}} == \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+uv+uw+vw}$$

und

$$u \otimes (v \otimes w) = u \otimes \left(c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}\right) =$$

$$= c^2 \cdot \frac{u + c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}}{c^2 + u \cdot c^2 \cdot \frac{v+w}{c^2+vw}} = \frac{\frac{c^2\cdot u+uvw+c^2\cdot(v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u(v+w)}{c^2+vw}} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+vw+uv+uw}$$

sodass offenbar $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ gilt. Damit ist M bezüglich der Verknüpfung $\otimes$ eine Halbgruppe.

b) Es ist

$$u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} = c^2 \cdot \frac{u+v_1}{c^2+uv_1} \Leftrightarrow (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1)$$

$$\Leftrightarrow uc^2 + u^2v_2 + v_1c^2 + uv_1v_2 = uc^2 + u^2v_1 + v_2c^2 + uv_1v_2$$

$$\Leftrightarrow u^2(v_2-v_1) - (v_2-v_1)c^2 = (v_2-v_1)(u^2-c^2) = 0$$

Da aber $u < c$ gilt, ist $u^2 - c^2 \neq 0$, also $u \otimes v_1 = u \otimes v_2 \Leftrightarrow v_2 - v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$.
Weiterhin ist $\otimes$ kommutativ, da für alle $uv \in M$ die Beziehung

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = v \otimes u$$

gilt.
Insbesondere folgt also aus $v_1 \otimes u = v_2 \otimes u$ sofort durch Ausnutzung der Kommutativität auf beiden Seiten der Gleichung $u \otimes v_1 = u \otimes v_2$, und daraus – wie eben gezeigt – wieder $v_1 = v_2$.
Damit ist die (kommutative) Halbgruppe $(M,\otimes)$ regulär.

Aufgabe 101246A:
Definition: Eine Menge M von Elementen $u, v, w, ...$ heißt genau dann eine Gruppe, bezüglich der algebraischen Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:
a) Jedem geordneten Paar $[u, v]$ von Elementen aus M ist vermöge der Operation A ein Element w aus M zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).
b) Die algebraische Operation A ist assoziativ, d. h., für alle Elemente u, v, w aus M gilt: $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
c) Zu je zwei Elementen u und v aus M existiert mindestens ein Element x aus M, so dass $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus M, so dass $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun P die Menge aller Polynome ersten Grades $f(x) = a_0 + a_1x$, wobei a_0, a_1 rationale Zahlen sind und $a_1 \neq 0$ gilt.
Ferner sei in P eine algebraische Operation A wie folgt definiert:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ Polynome aus P, so ist $f(x) \circ g(x) = g[f(x)]$.
Es ist zu entscheiden, ob P eine Gruppe bezüglich A ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Bei P mit der Operation A handelt es sich um eine Gruppe. Zu zeigen sind die Eigenschaften a, b und c.

a) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente von P. Dann ist

$$f(x) \circ g(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1a_0 + b_1a_1x = c_0 + c_1x$$

mit $c_0 = b_0 + b_1a_0$ und $c_1 = b_1a_1$. Da a_1,$b_1 \neq 0$, ist auch $c_1 \neq 0$ und somit $f(x) \circ g(x) = c_0 + c_1x$ ein Element von P.

b) Seien $f(x), g(x), h(x) \in P$. Dann ist

$$(f(x) \circ g(x)) \circ h(x) = g(f(x)) \circ h(x) = h(g(f(x))) = f(x) \circ h(g(x)) = f(x) \circ (g(x) \circ h(x))$$

c) Seien $f(x) = a_0 + a_1x$ und $g(x) = b_0 + b_1x$ Elemente aus P. Definiere dann

$$h(x) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$$

Da $a_1 \neq 0$, ist $h(x)$ ein Element aus P, und es ist

$$f(x) \circ h(x) = h(f(x)) = b_0 - \frac{a_0b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}(a_0 + a_1x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Sei weiterhin $k(x) = \frac{b_0-a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x$. $k(x)$ ist ebenfalls ein Element aus P, und es ist

$$k(x) \circ f(x) = f(k(x)) = a_0 + a_1(\frac{b_0 - a_0}{a_1} + \frac{b_1}{a_1}x) = b_0 + b_1x = g(x)$$

Aufgabe 131246A:
Erklärungen: Auf einem Schaltbrett sei eine Anzahl n von Knöpfen $K_1, \ldots, K_n$ zum Ein- und Ausschalten von Stromkreisen $S_1, \ldots, S_n$ angebracht.

Für jeden Knopf K_i werde durch einmaliges Drücken der Stromkreis S_i vom ausgeschalteten Zustand in den eingeschalteten Zustand bzw. umgekehrt vom eingeschalteten in den ausgeschalteten Zustand überführt, unabhängig von den anderen Stromkreisen.
Unter einem „Schaltbild“ B sei die gleichzeitige Angabe der Zustände aller Stromkreise S_i verstanden; z. B. stellt die Ausgangsstellung, bei der alle Stromkreise S_i ausgeschaltet sind, ein Schaltbild dar, das mit B_0 bezeichnet sei.
Sind B und B' Schaltbilder, so werde unter der „Summe“ $B \oplus B'$ dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:

Es sei B dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{n_1}, \dots, S_{n_p}$ eingeschaltet sind; es sei B' dadurch gekennzeichnet, dass genau die Stromkreise $S_{k_1}, \dots, S_{k_p}$ eingeschaltet sind.
Dann beginne man mit dem Schaltbild B_0 und
(a) drücke die Knöpfe $K_{n_1}, \dots, K_{n_p}$, jeden genau einmal. Anschließend (ohne nach B_0 zurückzugehen!)
(b) drücke man genau die Knöpfe $K_{k_1}, \dots, K_{k_q}$, jeden genau einmal.

Unter dem „Produkt“ $B \otimes B'$ werde dasjenige Schaltbild verstanden, das nach folgender Vorschrift entsteht:
Man beginne mit dem Schaltbild B_0, verfahre nach den Vorschriften (a), (b) und anschließend
(c) drücke man genau diejenigen Knöpfe, die bei mindestens einem der beiden Teilprozesse (a), (b) bereits gedrückt worden waren, jedoch noch genau einmal.
Man beweise die folgenden beiden Aussagen:
(1) Sind B, B', B'' Schaltbilder, so gilt

$$(B \oplus B') \otimes B'' = (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'')$$

(2) Sind B, B' Schaltbilder, so gibt es genau ein Schaltbild B^* mit der Eigenschaft $B^* \oplus B' = B$, nämlich $B^* = B \oplus B'$.

Lösung von cyrix:
zu (1): Offenbar sind die Schaltvorgänge für alle Stromkreise jeweils unabhängig voneinander, sodass es genügt, sich auf einen einzelnen Stromkreis zu konzentrieren: Gilt für diesen die Aussage, dann gilt sie für alle Stromkreise, also auch die gesamten Schaltbilder.

Enthält ein Schaltbild B einen Knopf, der den Stromkreis S schaltet, so weisen wir B den Wert 1 zu, sonst 0. Dann gilt offenbar $B \oplus B' \equiv B + B' \pmod 2$, denn zweimaliges Schalten verändert den Zustand des Stromkreises nicht. Analog folgt $B \otimes B' \equiv B \cdot B' \pmod 2$, wie man leicht für alle vier möglichen Fälle nachrechnet.
Dann ist aber

$$B \oplus B') \otimes B'' \equiv (B + B') \cdot B'' = (B \cdot B'') + (B' \cdot B'') \equiv (B \otimes B'') \oplus (B' \otimes B'') \pmod 2$$

sodass (1) folgt.

zu (2): Wieder betrachten wir nur genau einen Stromkreis, da die Behauptung für alle Stromkreise unabhängig ist. Für einen Schaltplan B^* mit $B^* \oplus B' = B$ muss also für jeden Stromkreis S die Kongruenz $B^* + B' \equiv B \pmod 2$ bzw. $B^* \equiv B - B' \equiv B + B' \pmod 2$ erfüllen:
Ist diese Restklasse 0, so darf in B^* kein Knopf für den zugehörigen Stromkreis S enthalten sein; ist sie 1, dann muss der entsprechende Knopf in B^* enthalten sein. Umgekehrt gilt dann aber auch die gewünschte Gleichung $B^* \oplus B' = B$. Damit ist B^* eindeutig bestimmt und hat die Form $B \oplus B'$, □.

Aufgabe 151246A:
Mit R^n wird die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen bezeichnet. In R^n ist durch

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

eine Addition und durch

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

die Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl λ definiert.
Es sei M eine Teilmenge von R^n, für die gilt:
Mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ gilt für jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n) \in M \qquad (1)$$

Ein n-Tupel $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ heißt x-Element von M, wenn aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{1}{2}(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

und damit $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt.

Man zeige: $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ist $*$-Element genau dann, wenn für beliebiges λ mit $0 < \lambda < 1$ aus

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1 - \lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)$$

mit $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ stets

$$s_1 = x_1 = y_1, \quad s_2 = x_2 = y_2, \quad ..., \quad s_n = x_n = y_n$$

also

$$(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

folgt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Wenn für beliebiges r mit $0 < r < 1$ aus der Darstellung

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

stets $(s_1, s_2, ..., s_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ folgt, so gilt das insbesondere für $r = \frac{1}{2}$. Also ist $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element.

b) Es sei $(s_1, s_2, ..., s_n) \in M$ ein $*$-Element, und es seien $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in M$ und eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ derart gegeben, das

$$(s_1,s_2,...,s_n) = r(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - r)(y_1,y_2,...,y_n)$$

ist. Dann existiert eine reelle Zahl $t > 0$ derart, dass für $p = r + t$ und $q = r - t$ gilt: $0 < p,q < 1$ (Jedes $0 < t < \min(r,1 - r)$ leistet das Verlangte). Es wird

$$p(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - p)(y_1,y_2,...,y_n) = (a_1,a_2,...,a_n) \qquad \text{und}$$

$$q(x_1,x_2,...,x_n) + (1 - q)(y_1,y_2,...,y_n) = (b_1,b_2,...,b_n)$$

gesetzt. Wegen (1) ist dann $(a_1,a_2,...,a_n), (b_1,b_2,...,b_n) \in M$ und es gilt:

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = \left(\frac{p+q}{2}x_1, \frac{p+q}{2}x_2, ..., \frac{p+q}{2}x_n\right) + \left(\frac{2-p-q}{2}y_1, ..., \frac{2-p-q}{2}y_n\right)$$

Wegen $\frac{p+q}{2} = r$ und $\frac{2-p-q}{2} = 1 - r$ folgt

$$\frac{1}{2}(a_1,a_2,...,a_n) + \frac{1}{2}(b_1,b_2,...,b_n) = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

Da $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ein $*$-Element ist, folgt hieraus $a_i = b_i$ für $i = 1,2,...,n$, also

$$a_i - b_i = px_i + (1-p)y_i - qx_i - (1-q)y_i = (p-q)(x_i - y_i) = 0$$

Wegen $p - q = 2t > 0$ folgt hieraus $x_i = y_i$ für $i = 1,2,...,n$ und damit gilt

$$s_i = rx_i + (1-r)x_i = x_i = y_i$$

I.V Funktionalgleichungen; Funktion gesucht; Polynome; Kurvendiskussion

I Runde 1

Aufgabe V01102:
Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^6 \sin 3x - \sin 3x}{3x^2}$$

Lösung von Steffen Polster:
Für $x = 0$ entsteht ein unbestimmter Term $\frac{0}{0}$. Nach der Regel von l'Hospital ist der Grenzwert in diesem Fall von

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Zweimaliges Ableiten von Nenner und Zähler (keine Quotientenregel !) ergibt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)\cos 3x - \\ &\quad - 3(3x^6 - 18x^5 + 35x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 22x - 10)\sin 3x \\ g''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Wert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -6$$

als Grenzwert des anfänglichen Ausdrucks.

Aufgabe V01105:
Differenzieren Sie folgende Funktion

$$y = x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Lösung von Steffen Polster:
Zuerst werden beide Summanden einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden wird

$$x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}} = x \cdot \sqrt[5]{x^{\frac{6}{5}}} = x^{\frac{31}{25}}$$

mit der Ableitung

$$(x \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[5]{x}})' = \frac{31}{25} x^{\frac{6}{25}} = \frac{31}{25} \sqrt[25]{x^6}$$

Die innere Ableitung der zweiten Summanden ist $\frac{2}{(1-x)^2}$. Es wird

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2}$$

Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} &= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)^4}\frac{1}{(1-x)^{10}}} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)^6}} \\
&= \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{1}{(1+x)^4(1-x)}} = \frac{2}{5(1-x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1+x)^5(1-x)}} \\
&= \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}
\end{aligned}$$

Der gesuchte Ableitungsterm ist damit

$$y' = \frac{31}{25}\sqrt[25]{x^6} + \frac{2}{5(1-x)(1+x)}\sqrt[5]{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Aufgabe V01107:
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3) \qquad (1)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Lösung von Steffen Polster:
Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D. h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe V01215:
Für welche Werte von a schneidet die Kurve

$$y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$$

die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

Lösung von Steffen Polster:
Die x-Achse wird unter einem Winkel von 45° geschnitten, wenn der Anstieg m der Tangente in den Nullstellen von (1) gleich $\tan 45° = 1$ oder $\tan 135° = -1$ ist. D. h., der Funktionswert der 1.Ableitung von (1) muss in den Nullstellen gleich ± 1 sein.

1. Ableitungsfunktion: $y' = f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3x^2)$
Nullstellen von $f(x)$: $x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = 0$
Funktionswert von $f'(x)$ an den Nullstellen:

$$f'(x_1) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{-a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_2) = \frac{1}{4}(a - 3\sqrt{a}^2) = -\frac{a}{2}; \qquad f'(x_3) = \frac{1}{4}(a - 3 \cdot 0^2) = \frac{a}{4}$$

Aus $-\frac{a}{2} = \pm 1$ ergeben sich die Werte für $a = -2$ und $a = 2$. Allerdings existieren die Nullstellen x_1 und x_2 für $a < 0$ nicht, so dass nur $a = 2$ als Lösung verbleibt. Aus $\frac{a}{4} = \pm 1$ folgen die Werte für $a = -4$ und $a = 4$ (die Nullstelle x_3 existiert für alle a), mit der Lösungsmenge der Aufgabe

$$a \in \{-4, 2, 4\}$$

Aufgabe 021213:
Beweisen Sie, dass die Funktion

$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

a) sie ist für alle reellen Zahlen definiert,
b) sie ist für alle $x \geq 1$ wachsend,
c) sie hat den Wertevorrat $0 \leq y < 1$,
d) ihr Bild ist achsensymmetrisch!
Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Lösung von Carsten Balleier:
Beweis:

a) Damit sie für alle reellen x definiert ist, darf der Nenner nicht Null und der Radikand nicht negativ sein. Das ist erfüllt, wenn $\forall x : x^2 - 2x + 2 > 0$.
Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen hat die zugehörige Gleichung die Lösungen $x = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$, der quadratische Ausdruck hat also keine reellen Nullstellen.

Da er stetig ist, reicht es zu wissen, dass er an einem Punkt größer Null ist (z. B. $x = 0$ und $x^2 - 2x + 2 = 2 > 0$), um zu folgern, dass er überall größer Null ist. Damit ist die Funktion auf der gesamten reellen Achse definiert.

b) Wir untersuchen die erste Ableitung für $x \geq 1$ (also $|x - 1| = x - 1$):

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \frac{(x-1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der quadratische Ausdruck ist wie in a) gezeigt positiv und daher gilt $y' > 0 \forall x \geq 1$. Da in y ein Betrag vorkommt, haben wir bei $x = 1$ die rechtsseitige Ableitung genommen.

c) Per Definition haben wir $y \geq 0$. Außerdem sind folgende Aussagen einander äquivalent:

$$y < 1 \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 1 < 2 \qquad \text{wahre Aussage}$$

Die zweite Äquivalenz ist wahr, weil wir nur positive Ausdrücke betrachten.

d) Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 1$, d. h. sie geht unter $1 + x \to 1 - x$ in sich selbst über. Für den Zähler gilt:

$$|(1-x) - 1| = |-x| = |x| = |(1+x) - 1|$$

Im Nenner haben wir:

$$(1-x)^2 - 2(1-x) + 2 = (1 - 2x + x^2) + (-2 + 2x) + 2 =$$

$$= (1 + 2x + x^2) + (-2 - 2x) + 2 = (1+x)^2 - 2(1+x) + 2$$

Damit sind die Eigenschaften a) bis d) bewiesen.

Aufgabe 031212:
Beim Eichen eines Dynamometers wurden die Größen der Belastung P gemessen, die erforderlich waren, um den Zeiger bis zu bestimmten Teilstrichen der Skala ausschlagen zu lassen. Man erhielt die folgenden Werte:

Zahl der Teilstriche N	Belastung in kp P
0	0
5	4,87
10	10,52
15	17,24
20	25,34

Die Belastung P kann durch die folgende ganze rationale Funktion von N dargestellt werden:

$$P(N) = a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3 + a_4 N^4.$$

a) Es sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 zu berechnen!

b) Welchen Wert hat die Funktion für $N = 25$? Vergleichen Sie mit dem durch Messung gefundenen Wert $P = 35{,}16 km$!

*) Ein Dynamometer ist ein Gerät zur Messung von Kräften, bei dem die elastische Deformation einer Feder über ein Hebelwerk auf einer (meist kreisförmigen) Skala angezeigt wird (Federwaage).

Lösung von Henning Thielemann:

a) Man kann beobachten, dass sich der angesetzte polynomielle Zusammenhang zwischen der Anzahl der Teilstriche N und der Belastung $P(N)$ vereinfacht, wenn man zu Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Werten in der Wertetabelle übergeht. Genaugenommen reduziert sich der Polynomgrad und damit die Anzahl der unbestimmten Parameter um eins.

Die Differenzen zwischen diesen Differenzen verringern den Polynomgrad erneut um eins. Diese Differenzenbildung kann man so lange fortsetzen, bis nur noch ein Koeffizient bleibt.

Zum einfacheren Rechnen werden die Werte so normiert, dass man nur Dezimalbrüchen ohne Perioden erhält.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= \frac{3}{5x}\cdot P(5x) = 3\cdot(a_1+5a_2x+25a_3x^2+125a_4x^3) =: b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3\\
f_1(x) &:= f_0(x+1)-f_0(x) = b_1+b_2(2x+1)+b_3(3x^2+3x+1)\\
&= b_1+b_2+b_3+(2b_2+3b_3)x+3b_3x^2 =: c_0+c_1x+c_2x^2\\
f_2(x) &:= f_1(x+1)-f_1(x) = c_1+c_2(2x+1) = c_1+c_2+2c_2x =: d_0+d_1x\\
f_3(x) &:= f_2(x+1)-f_2(x) =: d_1
\end{aligned}$$

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	2.922	0.234	0.058	0.003
2	3.156	0.292	0.061	
3	3.448	0.353		
4	3.801			

Daraus erhält man Schritt für Schritt die Koeffizienten aller Polynome zurück:

$$\begin{aligned}
d_1 &= f_3(1) & &= 0.003\\
d_0 &= f_2(1)-1\cdot d_1 & &= 0.055\\
c_2 &= d_1/2 & &= 0.0015\\
c_1 &= d_0-c_2 & &= 0.0535\\
c_0 &= f_1(1)-1\cdot c_1-1^2\cdot c_2 &= f_1(1)-d_0 &= 0.179\\
b_3 &= c_2/3 & &= 0.0005\\
b_2 &= (c_1-3b_3)/2 &= (c_1-c_2)/2 &= 0.026\\
b_1 &= c_0-b_2-b_3 & &= 0.1525\\
b_0 &= f_0(1)-1\cdot b_1-1^2\cdot b_2-1^3\cdot b_3 &= f_1(1)-c_0 &= 2.743
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3a_4 &= b_3/125\\
3a_3 &= b_2/25\\
3a_2 &= b_1/5\\
3a_1 &= b_0
\end{aligned}$$

i	a_i	$3a_i$	b_i	c_i	d_i
0			2.7430	0.1790	0.055
1	0.914333333	2.743	0.1525	0.0535	0.003
2	0.010166667	0.0305	0.0260	0.0015	
3	0.000346667	0.00104	0.0005		
4	0.000001333	0.000004			

b)

$$\begin{aligned}
P(25) &= \frac{25}{3}\cdot f_0(5) = \frac{25}{3}\cdot(((0.0005\cdot 5+0.026)\cdot 5+0.1525)\cdot 5+2.743)\\
&= \frac{25}{3}\cdot((0.0285\cdot 5+0.1525)\cdot 5+2.743) = \frac{25}{3}\cdot(0.295\cdot 5+2.743) = \frac{25}{3}\cdot 4.218\\
&= 25\cdot 1.406 = 35.15
\end{aligned}$$

Aufgabe 071212:
Die Rentabilität des Einsatzes von Rohbraunkohle oder Braunkohlenbriketts wird auch durch die Transportkosten beeinflusst. Die folgende Tabelle zeigt die Kosten (in M je Mill. kcal) einschließlich der Transportkosten für Rohbraunkohle bzw. Braunkohlenbriketts, und zwar für Transportentfernungen von 0 km, 100 km und 200 km.

Transportentfernung	Kosten in M je Mill. kcal	
in km	Rohbraunkohle	Braunkohlenbriketts
x	y	z
0	4,0	8,0
100	8,6	9,2
200	12,1	10,0

Allgemein lassen sich die Kosten für die Entfernungen bis etwa 400 km durch eine Funktion vom Typ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ darstellen.

Ermitteln Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 in beiden Fällen! Entscheiden Sie, für welche Transportentfernungen bis 400 km der Einsatz von Rohbraunkohle billiger ist!

Lösung von Daniel Gutekunst:

(a) Ermittelt werden sollen die Kostenfunktionen $f_1(x)$ für Rohbraunkohle und $f_2(x)$ für Braunkohlenbriketts. Für Rohbraunkohle gelten die Beziehungen:

$$f_1(0) = 4$$
$$f_1(100) = \frac{43}{5}$$
$$f_1(200) = \frac{121}{10}$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_1(x) = 4 + \frac{103}{2000}x - \frac{11}{200000}x^2$$

Für Braunkohlebriketts gelten die Beziehungen:

$$f_2(0) = 8$$
$$f_2(100) = \frac{46}{5}$$
$$f_2(200) = 10$$

Dadurch ist das Polynom zweiten Grades vollständig bestimmt, und es gilt:

$$f_2(x) = 8 + \frac{7}{500}x - \frac{1}{50000}x^2$$

(b) Gesucht sind die Entfernungen, in denen Rohbraunkohle günstiger ist und umgekehrt. Die markanten Entfernungen sind die, für die $f_1(x) = f_2(x)$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat die positiven Lösungen

$$x_1 = \frac{3750 - 50\sqrt{3385}}{7} \approx 120 \quad \text{und}$$
$$x_2 = \frac{3750 + 50\sqrt{3385}}{7} \approx 951$$

Bei rund 120 km sind beide Preise gleich (der zweite Wert entfällt, da er außerhalb der zu betrachtenden 400 km Entfernung liegt). In der Tabelle steht, dass bei 0 km die Rohbraunkohle billiger sei, also ist bis zu einer Entfernung von etwa 120 km Rohbraunkohle vorzuziehen, während danach Braunkohlebriketts billiger werden.

Aufgabe 101214:
Es seien a, b, c reelle Zahlen; für jede reelle Zahl x sei ferner $f(x) = ax^2 + bx + c$ gesetzt.

a) Man beweise, dass folgender Schluss richtig ist:

Voraussetzung:	$f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$ sind ganze Zahlen.
Behauptung:	Für jede ganze Zahl x ist $f(x)$ ebenfalls eine ganze Zahl.

b) Man untersuche, ob ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(0), f(2)$ und $f(-1)$ seien ganze Zahlen.

c) Man gebe mindestens drei weitere Tripel $(p,\, q,\, r)$ ganzer Zahlen mit der Eigenschaft an, dass ein richtiger Schluss entsteht, wenn die Voraussetzung des in a) genannten Schlusses durch die Voraussetzung ersetzt wird, $f(p)$, $f(q)$ und $f(r)$ seien ganze Zahlen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Auf Grund der Voraussetzung sind $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$ und $f(-1) = a + b + c$ ganzzahlig, also auch $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a$ und $f(1) - f(-1) = 2b$. Daher gilt $a = \frac{m}{2}$ und $b = \frac{n}{2}$ mit ganzen Zahlen m und n.

Ferner ist $f(1) - f(0) = a + b = \frac{m+n}{2}$ ganzzahlig, also sind m und n entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Nun gilt

$$f(x) = \frac{mx^2 + nx}{2} + c$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für alle geraden x ganzzahlig ist.
Sind nun x sowie m und n ungerade, so sind auch mx^2 und nx ungerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig. Ist x ungerade und sind m und n gerade, so sind auch mx^2 und nx gerade, also ist $f(x)$ ganzzahlig.
Damit ist bewiesen, dass $f(x)$ für alle ganzen Zahlen x ganzzahlig ist.

b) Unter der nun zugrunde gelegten Voraussetzung kann nicht auf die angegebene Behauptung geschlossen werden; denn z. B. für $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0$ ist zwar $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(-1) = 0$ jedoch $f(1) = \frac{2}{3}$.

c) Weitere Tripel ganzer Zahlen, die die geforderte Eigenschaft haben, bestehen z. B. aus

$$p = n - 1 \qquad , \qquad q = n \qquad , \qquad r = n + 1$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Sind nämlich

$$\begin{aligned} f(n-1) &= (n-1)^2 a + (n-1)b + c \\ f(n) &= n^2 a + nb + c \\ f(n+l) &= (n+1)^2 a + (n+1)b + c \end{aligned}$$

ganzzahlig, so sind auch die paarweise gebildeten Differenzen $(2n-1)a+b$ und $(2n+1)a+b$ sowie $4na+2b$ ganzzahlig. Daraus folgt, dass auch $2a$, also auch $4na$ und mithin $2b$ ganzzahlig sind, woraus wiederum eie unter a) die Ganzzahligkeit von $a + b$ abgeleitet werden kann.
Da von den Zahlen $n - 1, n, n + 1$ mindestens eine gerade ist, folgt unter Berücksichtigung der Ganzzahligkeit von $2a$ und $2b$, dass c ebenfalls ganzzahlig ist.
Wie unter a) lässt sich dann zeigen, dass $f(x)$ für alle ganzzahligen x ganzzahlig ist.

Aufgabe 111213:
Es sind alle nichtnegativen reellen Zahlen k anzugeben, für die das Polynom $f(x) = (x + 1)^4 - (kx)^2$

a) genau eine,
b) genau zwei voneinander verschiedene,
c) genau drei paarweise verschiedene
d) genau vier paarweise verschiedene,
e) keine

reelle(n) Nullstelle(n) hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $k = 0$. Dann gilt $f(x) = (x+1)^4$; die Funktion $f(x)$ hat also genau eine reelle Nullstelle, nämlich $x = -1$.

Es sei $k > 0$. Dann können wir folgende Umformung vornehmen: $f(x) = g(x)h(x)$ mit

$$\begin{aligned} g(x) = (x+1)^2 + kx &= \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4} + k\right) \\ &= \left(x + 1 + \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}\right)\left(x + 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} + k}\right) \\ h(x) = (x+1)^2 - kx &= \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{4} - k\right) \end{aligned}$$

Zur weiteren Umrechnung von $h(x)$ unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: $\frac{k^2}{4} - k > 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k > 4$. Dann gilt:

$$h(x) = \left(x + 1 + \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right)\left(x + 1 + \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - k}\right)$$

und $h(x)$ hat daher genau zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen.

Fall 2: $\frac{k^2}{4} - k = 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k = 4$. Dann gilt: $h(x) = \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2$ und $h(x)$ hat daher genau eine Nullstelle.

Fall 3: $\frac{k^2}{4} - k < 0$ oder, wegen $k > 0$ hiermit äquivalent, $k < 4$. Dann gilt:

$$h(x) > \left(x + 1 + \frac{k}{2}\right)^2 \geq 0$$

und $h(x)$ hat daher keine Nullstelle.

In alle drei Fällen hat $g(x)$ wegen $k > 0$ genau zwei voneinander verschiedene Nullstellen. Weiterhin ist keine der Nullstellen von $g(x)$ gleich einer der Nullstellen von $h(x)$ (falls solche existieren); denn wäre eine Zahl x_0 sowohl Nullstelle von $g(x)$ als auch Nullstelle von $h(x)$, so wäre für sie:

$$(x_0 + 1)^2 + kx_0 = (x_0 + 1)^2 - kx_0 \qquad (1)$$

$$(x_0 + 1)^2 + kx_0 = 0 \qquad (2)$$

Aus (1) folgte dann wegen $k > 0$ aber $x_0 = 0$, und dies steht im Widerspruch zu (2).

Also erhalten wir für $k = 0$ die Antwort a), für $k > 0$ im Fall 1 die Antwort d), im Fall 2 die Antwort c), im Fall 3 die Antwort b) und niemals die Antwort e).

Aufgabe 121213:
Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (*)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \qquad (**)$$

ermittelt werden, so dass der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht.

Man zeige, dass dies immer möglich ist und dass die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Verschiebung werde durch die Transformation $x \to x - h$ charakterisiert. Da

$$(x-h)^3 = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \qquad \text{und} \qquad a(x-h)^2 = ax^2 - 2axh + ah^2$$

ist und $b(x-h)+c$ kein quadratisches Glied mehr enthält, hat die aus der Funktion (*) entstehende Funktion (**) genau die gewünschte Gestalt, wenn $h = \frac{a}{3}$ gilt. Für die Funktion (**) erhält man in diesem Fall

$$y = x^2 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c \qquad \text{also}$$

$$m = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{und} \qquad n = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$$

Aufgabe 191211:
Es sei (bezüglich eines kartesischen x,y-Koordinatensystems) p die Parabel mit $y = x^2$ als Gleichung.

a) Man beweise: Durch den Punkt (0; 1) gibt es genau eine Sehne von p mit der Länge 2.

b) Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen $c \geq 0$, für die folgende Aussage gilt: Durch den Punkt $(0; c)$ gibt es genau zwei Sehnen von p mit der Länge 2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede reelle Zahl $c \geq 50$ gilt:
Jede Sehne von p durch den Punkt $(0; c)$ liegt auf einer Geraden, die

$$y = mx + c \tag{1}$$

(mit einer reellen Zahl m) als Gleichung hat. Ein Punkt $(x; y)$ ist genau dann Schnittpunkt dieser Geraden mit p wenn x und y das Gleichungssystem

$$y = mx + c \qquad , \qquad y = x^2$$

erfüllen. Daher schneidet p die Gerade (1) genau in den Punkten $(x_l; y_1)$, $(x_2; y_2)$, wobei

$$x_{1;2} = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 4c}) \qquad , \qquad y_{1;2} = \frac{1}{2}(m^2 + 2c \pm m\sqrt{m^2 + 4c})$$

ist. Die Sehne, die diese beiden Punkte verbindet, hat wegen

$$x_1 - x_2 = \sqrt{m^2 + 4c} \qquad , \qquad y_1 - y_2 = m\sqrt{m2 + 3c}$$

die Länge

$$s = \sqrt{m^2 + 4c + m2(m2 + 4c)} = \sqrt{m^4 + (4c+1)m^2 + 4c}$$

Daher gilt genau dann $s = 2$, wenn

$$m^4 + (4c+1)m^2 + 4c - 4 = 0 \tag{2}$$

ist. Diese Gleichung wird (bei gegebenem $c \geq 0$) genau dann von einer reellen Zahl m erfüllt, wenn m und eine reelle Zahl r die Gleichungen

$$r = m^2 \qquad ; \qquad r^2 + (4c+1)r + 4c - 4 = 0 \tag{3,4}$$

erfüllen. Wegen $(4c-1)^2 - 4(4c-4) = (4c-1)^2 + 26 > 0$ ist (4) gleichbedeutend damit, dass entweder

$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c+1) + \sqrt{(4c-1)^2+16}\right) \qquad \text{oder} \qquad (5)$$

$$r = \frac{1}{2}\left(-(4c+1) - \sqrt{(4c-1)^2+16}\right) \qquad (6)$$

gilt. Hiervon führt (6) auf $r < 0$ im Widerspruch zu (3). Ferner ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann positiv, wenn

$$\sqrt{(4c-1)^2+16} > 4c+1$$

oder, wegen $4c+1 > 0$, der Reige nach äquivalent hiermit

$$4c^2 - 8c + 17 > 4c^2 + 8c + 1 \Rightarrow c < 1$$

gilt; entsprechend ist die in (5) angegebene Zahl r genau dann gleich 0, wenn $c = 1$ gilt. Daraus folgt:

a) Für $c = 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau die Lösung $r = 0$, $m = 0$. Also hat genau für $m = 0$ die durch (1) gegebene Gerade die Eigenschaft, dass die auf ihr gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Damit ist der in a) verlangte Beweis geführt.

b) Für $c > 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) keine Lösung, also gibt es keine Sehne von p, die durch den Punkt $(0; c)$ geht und die Länge 2 hat.

   Für $0 \leq c < 1$ hat das Gleichungssystem (3), (4) genau diejenigen Lösungen, in denen r die in (5) angegebene Zahl und $m = \sqrt{r}$ oder $m = -\sqrt{r}$ ist. Daher haben genau für diese beiden Werte von m die durch (1) gegebenen Geraden die Eigenschaft, dass die auf der betreffenden Geraden gelegene Sehne von p die Länge 2 besitzt. Wegen $r > 0$ sind diese beiden Geraden, also auch dje auf ihnen gelegenen Sehnen, voneinander verschieden.

   Die in b) gesuchten Zahlen c sind folglich genau die Zahlen mit $<\leq c < 1$.

Aufgabe 291214:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei f_n diejenige Funktion, die für alle reellen $x \neq 0$ durch

$$f_n(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{2^2-2x}{x} + \frac{3^2-3x}{x} + ... + \frac{n^2-nx}{x}$$

definiert ist.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4!

b) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Funktion f_n genau eine Nullstelle! Geben Sie diese Nullstelle in Abhängigkeit von n an!

c) Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n gibt, mit der die Nullstelle der Funktion f_n größer als 100 ist! Ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Genau dann gilt $f_1(x) = 0$, wenn $1 - x = 0$ gilt. Also hat f_1 genau die Nullstelle $x = 1$.

   Für alle $x \neq 0$ ist $f_2(x) = \frac{1}{x}(5 - 3x)$. Also hat f_2 genau die Nullstelle $x = \frac{5}{3}$.

   Für alle $x \neq 0$ ist $f_3(x) = \frac{1}{x}(14 - 6x)$. Also hat f_3 genau die Nullstelle $x = \frac{7}{3}$.

   Für alle $x \neq 0$ ist $f_4(x) = \frac{1}{x}(30 - 10x)$. Also hat f_4 genau die Nullstelle $x = 3$.

b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jedes reelle $x \neq 0$ ist

$$f_n(x) = \frac{1}{x}(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - (1 + 2 + 3 + ... + n)$$

Nach den Formeln für die hier auftretenden Summen folgt

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{6x} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - \frac{1}{2} n \cdot (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6x} \cdot (2n - 1 - 3x) \end{aligned}$$

Also hat f_n genau die Nullstelle $x = \frac{2n+1}{3}$.

c) Es gilt genau dann $\frac{2n+1}{3} > 100$ wenn $2n + 1 > 100$, d. h. $n > 149{,}5$ gilt.

Natürliche Zahlen, für die das gilt, gibt es: die kleinste von ihnen ist $n = 150$.

II Runde 2

Aufgabe 051223:
Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x+a$ und $x-a$ definiert.

(2) Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

a) Es ist zu beweisen, dass die Funktion f periodisch ist, d. h., dass es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so dass $f(x) = f(x+kb)$ für alle x, für die die Funktion f definiert ist, und für alle ganzen Zahlen k gilt.
b) Geben Sie eine Funktion an, die die obigen Eigenschaften hat!

Lösung von StrgAltEntf:
Sei y beliebig und $x = y + a$. Dann ist

$$f(y+2a) = f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+f(y+b)}{1-f(y+b)} = \frac{1+\frac{1+f(y)}{1-f(y)}}{1-\frac{1+f(y)}{1-f(y)}} = \cdots = -\frac{1}{f(y)}$$

(„...“ steht für eine einfache algebraische Umformung.) Sei nun z beliebig und $y = z + 2a$. Dann ist

$$f(z+4a) = f(y+2a) = -\frac{1}{f(y)} = -\frac{1}{f(z+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(z)}} = f(z)$$

Folglich ist die Funktion 4a-periodisch.

b) $f(x) = \tan(x)$ mit $a = \frac{\pi}{4}$ erfüllt beide Bedingungen, wobei aus dem Definitionsbereich des Tangens zusätzlich $\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$ entfernt werden muss.

2. Möglichkeit: Sei $f(x) = 2$ für $0 \leq x < 1$, , $f(x) = -3$ für $1 \leq x < 2$,$f(x) = -1/2$ für $2 \leq x < 3$, $f(x) = 1/3$ für $3 \leq x < 4$.
Setze diese Funktion 4-periodisch auf R fort. Für $a = 1$ ist die Funktionalgleichung erfüllt.

Aufgabe 121222:
Es sind alle geordneten Paare (a,b) reeller Zahlen a,b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynom $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.
Definition: Ein Polynom $f(x)$ heißt genau dann Teiler eines Polynom $g(x)$, wenn es ein Polynom $h(x)$ gibt, so dass $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

Lösung von weird:
Gemäß Angabe muss für gewisse $c,d \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + ax^2 + b$$

gelten. Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhält man daraus das folgende nichtlineare Gleichungssystem für die Variablen a,b,c,d:
(1) $a + c = 0$. (2) $b + ac + d = a$. (3) $ad + bc = 0$. (4) $bd = b$.
Zu seiner Lösung führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $b = 0$.
(3) wird dann zu $ad = 0$. Gilt hier $a = 0$, so folgt daraus sofort auch $c = d = 0$, ansonsten können wir hierin durch a kürzen, woraus dann $d = 0$, $c = 1$, $a = -1$, $b = 0$ in dieser Reihenfolge folgt. Insgesamt entsprechen diese beiden Fälle den Zerlegungen

$$x^2\,x^2 = x^4 \quad \text{bzw.} \quad (x^2 - x)(x^2 + x) = x^4 - x^2$$

2.Fall: $b \neq 0$.
Damit muss wegen (4) dann jedenfalls $d = 1$ gelten und (3) kann man wegen $c = -a$ auch schreiben in der Form $a = ab$. Hier gilt nun entweder $b = 1$, wonach aus (2) dann $a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) = 0$ folgt, was die Lösungen

$$(a,bc,d) = (1,1,-1,1) \quad \text{bzw.} \quad (a,b,c,d) = (-2,1,2,1)$$

impliziert, oder es ist $a = 0$, was auf die Lösung

$$(a,b,c,d) = (0,-1,0,1)$$

führt. Diese weiteren Lösungen entsprechen damit folgenden Zerlegungen

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$
$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$$

welche offensichtlich wieder die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 181222:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k = \frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

Lösung von weird:
Die Aufgabe wird im wesentlichen gelöst durch eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 5x + 7}$$

welche auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, da der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt. Mithilfe der beiden Ableitungen

$$f'(x) = \frac{7 - x^2}{x^2 - 5x + 7)^2} \quad \text{bzw.} \quad f''(x) = \frac{2(x^3 - 21x + 35)}{(x^2 - 5x + 7)^3}$$

sowie

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

sieht man sofort, dass die Funktion bei $x = -\sqrt{7}$ ein absolutes Minimum und bei $x = \sqrt{7}$ ein absolutes Maximum hat, sodass also dann

$$[f(-\sqrt{7}),f(\sqrt{7})] \approx [-0.097,3.43]$$

der Wertebereich der Funktion ist, der also insbesondere als einzige ganze Zahlen k nur die Werte $k = 0,1,2,3$ enthält. Dabei liefert dann

- $f(x) = 0$ die Lösung $x_1 = 0$,
- $f(x) = 1$, also $x^2 - 6x + 7 = 0$, die beiden Lösungen $x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}$
- $f(x) = 2$, also $2x^2 - 11x + 14 = (2x - 7)(x - 2) = 0$, die beiden Lösungen $x_4 = \frac{7}{2}$, $x_5 = 2$
- $f(x) = 3$, also $3x^2 - 16x + 21 = (3x - 7)(x - 3) = 0$, die beiden Lösungen $x_6 = \frac{7}{3}$, $x_7 = 3$

was somit die in der Aufgabe gestellte Frage beantwortet.

Aufgabe 191224:
a) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_1(x) = \frac{\sin(x\sqrt{2})}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_1 periodisch ist.
b) Man untersuche, ob die für alle reellen Zahlen x durch

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

definierte Funktion f_2 periodisch ist.

Lösung von Nuramon:
Was a) betrifft, hat der Zähler von $f_1(x)$ die Periode $\pi\sqrt{2}$ und sein Nenner die Periode $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$. f_1 hat daher insgesamt die Periode $\pi\sqrt{2}$.

Nur leicht komplizierter liegen die Dinge bei b). Hier hat die Funktion f_2 Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt. Wäre f_2 aber wirklich periodisch, so hätte die (stetig ergänzte) Funktion

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sin x} = \frac{1}{1+\sin^2(x\sqrt{2})}$$

aufgrund dieser zwei Darstellungen einerseits eine Periode $p \geq 2\pi$, anderseits aber die Periode $p = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} < 2\pi$, Widerspruch! f_2 ist daher nicht periodisch.

b) Die Funktion f_2 hat Nullstellen bei $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sodass als ev. Periode nur ein Vielfaches von π in Frage kommt.

Angenommen es gäbe $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, so dass f_2 die Periode $k\pi$ hat. Da dann auch $2k\pi$ eine Periode von f_2 wäre, können wir o. B. d. A. annehmen, dass k gerade ist.
Aus $f_2(\frac{\pi}{2}) = f_2(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ würde somit

$$\sin^2\left((\frac{\pi}{2} + k\pi)\sqrt{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)$$

folgen.

Wegen $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - 2\cos(2x))$ und $\cos(y) = \cos(z) \iff y + z \in 2\pi\mathbb{Z} \vee y - z \in 2\pi\mathbb{Z}$ wäre dann

$$2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} + 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \vee \qquad 2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sqrt{2} - 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

also

$$(1+k)\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \qquad \vee \qquad k\sqrt{2} \in \mathbb{Z}.$$

Das ist aber unmöglich, da $\sqrt{2}$ irrational ist und $k \neq 0 \neq 1 + k$ gilt.

Also ist f_2 nicht periodisch.

Aufgabe 201224:
Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, das
a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;
b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.
Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Polynom $p(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und m ($m = 3$ oder $m = 4$) paarweise verschiedene ganze Zahlen $x_1, x_2, ..., x_m$, so dass

$$p(x_1) = p(x_2) = ... = p(x_m) = 1$$

und eine weitere ganze Zahl x_0, so dass $p(x_0) = 30$ ist.
Dann gilt, wenn man $f(x) = p(x) - 1$ setzt,

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_m) = 0$$

also ist das Polynom $f(x)$ durch die Polynome $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_m$ teilbar, und wenn man die Division ausführt, entsteht

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)g(x) \qquad (1)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Ferner gilt dann

$$p(x_0) = 30 \qquad \text{also} \qquad f(x_0) = p(x_0) - 1 = 29 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_m)g(x_0) = 29 \qquad (3)$$

Dabei sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$, $g(x)$ sämtlich ganzzahlig, sie können also, weil 29 eine Primzahl ist, nur gleich 1, -1, 29, -29 sein. Ferner sind die Faktoren $x_0 - x_1$, $x_0 - x_2$, ... , $x_0 - x_m$ paarweise verschieden, und es kann nur einer dieser Faktoren den Betrag 29 haben, weil sonst die linke Seite von (3) durch 29^2 teilbar wäre.

Daher können insgesamt höchstens drei solche Faktoren auftreten; d. h., es folgt $m \leq 3$ und somit zu b) das Ergebnis: Es gibt kein Polynom mit diesen Eigenschaften.
Umgekehrt kann man (3) für $m = 3$ z. B. dadurch erfüllen, dass man

$$x_0 - x_1 = 1, \qquad x_0 - x_2 = -1, \qquad x_0 - x_3 = -29$$

erreicht, für x_0 eine beliebige ganze Zahl, etwas $x_0 = 0$, setzt und für $g(x)$ ein beliebiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten wählt, das die Bedingung $g(x_0) = 1$ erfüllt, etwa das konstante Polynom $g(x) = 1$. Hiermit, d. h. mit $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 29$, wird das in (1) angegebene Polynom

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-29) = x^3 - 29x^2 - x + 29$$

also

$$p(x) = f(x) + 1 = x^3 - 29x^2 - x + 30 \qquad (4)$$

Für dieses Polynom gilt in der Tat

$$p(-1) = p(1) = p(29) = 1 \qquad ; \qquad p(0) = 30$$

Damit ist a) gezeigt: Es gibt ein Polynom mit den genannten Eigenschaften, z. B. das in (4) genannte Polynom.

Aufgabe 271223:
a) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion f (mit dem Definitionsbereich aller reellen $x \neq 0$) durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-2) \cdot x^k$$

definiert. Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die so erklärte Funktion f die Gleichung $f(-1) = -f(1)$ erfüllt.
b) Für jede natürliche Zahl n werde eine Funktion g (mit demselben Definitionsbereich) durch

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3k-2} \cdot x^k$$

definiert. Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die die so erklärte Funktion g die Gleichung $g(-1) = -g(1)$ erfüllt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Es gilt genau dann $f(-1) = -f(1)$, wenn $f(1) + f(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist nun

$$f(1) = (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + (n-2)$$
$$f(-1) = (-2) - (-1) + 0 - 1 + 2 - +... + (-1)^{n-2}(n-2)$$

Daraus folgt: Ist n gerade, etwa $n = 2m$ mit natürlichem m, so gilt

$$f(1) + f(-1) = 2((-2) + 0 + 2 + ... + (2m-2)) \qquad (1)$$

ist n ungerade, etwa $n = 2m+1$ mit natürlichem m, so gilt (für dieses m) ebenfalls die Gleichung (1).
Für $m = 0,1,2$ nimmt die rechte Seite von (1) die Werte $2(-2)$, $2(-2)$, $2 \cdot 0$ an. Für größere m kommen nur noch positive Summanden hinzu. Also gilt $f(1) + f(-1) = 0$ genau für $m = 2$; damit ist gezeigt: $f(-1) = -f(1)$ gilt genau für $n = 4$ und $n = 5$.

(b) Es gilt genau dann $g(-1) = -g(1)$, wenn $g(1) + g(-1) = 0$ gilt. Für jede natürliche Zahl n ist

$$g(1) = \frac{1}{-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{3n-2}$$
$$g(-1) = \frac{1}{-2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + -... + (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{3n-2}$$

Daraus folgt: Ist mit natürlichem m entweder $n = 2m$ oder $n = 2m+1$ so ist

$$g(1) + g(-1) = 2\left(\frac{1}{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{6m-2}\right) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{3m-1}$$

Für $m \leq 5$ ist nun

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3m-1} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14} < \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{2}{21}+\frac{1}{14} = 1$$

also $g(1)+g(-1) < 0$.
Für $m \geq 6$ ist nun

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3m-1} \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17} > \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20} = 1$$

also $g(1)+g(-1) > 0$.
Daher gibt es keine natürliche Zahl m mit $g(1)+g(-1) = 0$ und folglich auch keine natürliche Zahl n mit $g(-1) = -g(1)$.

Aufgabe 311223:
Man ermittle alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, mit denen durch

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+b}$$

eine Funktion f definiert wird, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen x definiert.
(2) Es gilt $1 < f(2) < f(1) < 2$.
(3) Die Funktion f besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Funktion kann mittels quadratischer Ergänzung auch wie folgt dargestellt werden:

$$f(x) = \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}}{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + b - \frac{c^2}{4}}$$

Wegen (1) darf der Nenner keine Nullstelle haben, was genau dann der Fall ist, wenn

$$b > \frac{c^2}{4} > 0 \qquad (I)$$

Der Nenner ist somit immer positiv. Wegen (3) muss außerdem gelten:

$$b < \frac{a^2}{4} \qquad (II)$$

Aus (2) folgen drei Ungleichungen:

$$1 < \frac{4+2a+b}{4+2c+b} \qquad (III)$$

$$\frac{4+2a+b}{4+2c+b} < \frac{1+a+b}{1+c+b} \qquad (IV)$$

$$\frac{1+a+b}{1+c+b} < 2 \qquad (V)$$

Aus (III):

$$4+2a+b > 4+2c+b$$

Also:

$$a > c$$

Mithilfe von (IV) erhält man:

$$(4+2a+b)(1+c+b) < (4+2c+b)(1+a+b)$$

$$4 + 4c + 4b + 2a + 2ac + 2ab + b + bc + b^2 < 4 + 4a + 4b + 2c + 2ac + 2bc + b + ab + b^2$$
$$2c + ab < 2a + bc$$
$$0 < (2 - b)(a - c)$$

Da $(a - c) > 0$ ist, muss auch
$$b < 2$$
sein. Deswegen und wegen (I) muss schon einmal $b = 1$ sein. Wegen (I) muss aber auch
$$0 < c^2 < 4$$
sein. Daraus folgt $c = 1$. Aus Gleichung (II) folgt
$$a > 2$$
und aus (V) erhält man:
$$\frac{2 + a}{3} < 2$$
$$2 + a < 6$$
$$a < 4$$
Daher muss $a = 3$ sein. Das Lösungstripel lautet deshalb $(a; b; c) = (3; 1; 1)$, alle Ungleichungen sind erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 041232:
Es sei
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
mit reellen Zahlen a, b, c, d als Koeffizienten ($c \neq 0$).
Für welche reellen Zahlen x wird durch die Zuordnung $x \to y = f(x)$ eine Funktion definiert?
Ohne Anwendung der Differentialrechnung ist anzugeben, welchen Bedingungen die Koeffizienten a, b, c, d genügen müssen, damit diese Funktion in jedem ihrer Definitionsbereiche streng monoton abnehmend ist.

Lösung von Kitaktus:
Die erste Frage ist etwas eigenwillig formuliert. Gefragt ist vermutlich nach dem maximalen Definitionsbereich innerhalb der reellen Zahlen.
Der Nenner darf nicht 0 sein, es muss also $cx \neq -d$ bzw. $x \neq -\frac{d}{c}$ gelten ($c \neq 0!$).
Für alle anderen reellen x ist der Zähler definiert und der Nenner ungleich 0, so dass der Quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$ definiert ist.
Der maximale Definitionsbereich ist demnach $D = R \setminus \left(\{-\frac{d}{c}\}\right.$.
Es gilt
$$ax + b = \frac{a}{c} \cdot (cx + d) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)$$
$f(x)$ lässt sich daher umschreiben zu
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot (cx + d)}{cx + d} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d}$$
Es seien x_1 und x_2 beliebige reelle Zahlen mit $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$ oder $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$
$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_1 + d} > \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_2 + d} \Leftrightarrow \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_1 + d} > \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx_2 + d}$$

Multiplikation mit $(cx_1+d)(cx_2+d)$, was in beiden Fällen positiv ist, ergibt:

$$f(x_1) > f(x_2) <=> \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_2+d) > \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot (cx_1+d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(b - \frac{ad}{c}\right) \cdot c \cdot (x_2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow (bc - ad) > 0 \quad (\text{da } x_2 - x_1 > 0).$$

Die Funktion f ist also genau dann in den beiden Intervallen $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ und $\left(-\frac{d}{c}, \infty\right)$ streng monoton fallend, wenn $bc > ad$ gilt.

Aufgabe 051233:
a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.
b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.

Lösung von Nuramon:
Die Substitution $z := x - 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung dann erfüllt ist, wenn $af(z) + bf(-z) = c(z+1)$ (*) für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt.
Daher gilt auch $af(-z) + bf(z) = c(1-z)$ (**).
Multipliziert man (*) mit a und addiert das $-b$-fache von (**), erhält man

$$(a^2 - b^2)f(z) = ((a+b)z + a - b)c \qquad (***)$$

Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $a^2 - b^2 \neq 0$ und es folgt $f(z) = c(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b})$. Eine Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung der Funktionalgleichung ist:

$$ac(\frac{z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) + bc(\frac{-z}{a-b} + \frac{1}{a+b}) = c(\frac{z(a-b)}{a-b} + \frac{a+b}{a+b}) = c(z+1)$$

Falls $a = b$, so ist (***) äquivalent zu $0 = acz$. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass die Funktionalgleichung nur dann eine Lösung haben kann, wenn $ac = 0$, also $a = 0 \vee c = 0$ ist.
Ist $a = 0$, so ist die Funktionalgleichung äquivalent zu $0 = cx$ ist. Einsetzen von $x = 1$ zeigt, dass $c = 0$ gelten muss.
Ist $a \neq 0$, aber $c = 0$, so ist (*) äquivalent zu $f(y) + f(-y) = 0$. In diesem Fall ist also jede ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $a = -b$ und $a \neq b$ (insbesondere also $a \neq 0$), dann zeigt (***), dass $0 = c$ gelten muss.
Damit ist (*) äquivalent zu $f(z) - f(-z) = 0$, was genau dann erfüllt ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Zusammenfassend gilt also:
Falls $|a| \neq |b|$, dann ist $f(x) = c(\frac{x}{a-b} + \frac{1}{a+b})$ die einzige Lösung der Funktionalgleichung.
Falls $|a| = |b|$ und $c \neq 0$, dann hat die Funktionalgleichung keine Lösung.
Falls $a = b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine ungerade Funktion ist.
Falls $a = -b \neq 0$ und $c = 0$, dann ist f eine Lösung genau dann, wenn f eine gerade Funktion ist.
Falls $a = b = c = 0$ ist, dann erfüllen alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung.

Aufgabe 071234:
Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \qquad (1)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie!
Die Funktion $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$\phi(x+1) = (x+1)\phi(x) \qquad (2)$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist.

Lösung von cyrix:
Zuerst nehmen wir an, dass g 1-periodisch ist, für alle reellen x also $g(x+1) = g(x)$ gilt. Dann ist

$$\phi(x+1) = f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \phi(x)$$

erfüllt also die gewünschte Funktionalgleichung.

Anders herum sei nun für jedes x die Gleichung $\phi(x+1) = (x+1) \cdot \phi(x)$ erfüllt, was nach Einsetzen der Definition von ϕ äquivalent ist zu

$$f(x+1) \cdot g(x+1) = (x+1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x+1) \cdot g(x)$$

Da $f(x+1) \neq 0$, kann man diese zweite Gleichheit durch Division durch $f(x+1)$ zum Gewünschten $g(x+1) = g(x)$ äquivalent umformen.

Bemerkung: Die Annahme aus der Aufgabenstellung, dass $f(x)$ für alle reellen Zahlen ungleich 0 wäre, steht im Widerspruch zur Funktionalgleichung, die f erfüllen soll, denn es ist sonst $f(0) = 0 \cdot f(-1) = 0$. Man kann die Aufgabe aber leicht retten, indem man sich nur auf positive Argumente x einschränkt.

Aufgabe 091236:
a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d. h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!
b) Zeigen Sie, dass es eine ganzrationale Funktion $g(y)$ mit folgender Eigenschaft gibt!
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

Lösung von cyrix:
a) Mit $\sin x$ und $\cos x$ ist auch die Funktion $y = \sin x + \cos x$ 2π-periodisch stetig und differenzierbar. Also nimmt sie ihre globalen Extremwerte an Stellen an, für die die Ableitungsfunktion $y' = \cos x - \sin x$ verschwindet, für die also $\cos x = \sin x$ gilt.

Dies ist im Intervall $[0; 360°)$ genau für $x = 45°$ und $x = 225°$ der Fall. Dann nimmt y die Werte $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ bzw. $y = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$ an, welche dann Maximum und Minimum der Funktion sind. Aufgrund der Stetigkeit werden auch alle Werte dazwischen angenommen (Zwischenwertsatz), sodass sich $W = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ergibt.

b) Wir zeigen allgemeiner, dass für jedes nicht-negative ganze n ein Polynom $g_n(y)$ mit $\sin^n x + \cos^n x = g_n(y) = g_n(\sin x + \cos x)$ existiert:

Für $n = 0$ wähle man $g_0(y) := 2$, da $\sin^0 x + \cos^0 x = 1 + 1 = 2$ gilt.
Für $n = 1$ wähle man $g_1(y) := y$, da $\sin^1 x + \cos^1 x = \sin x + \cos x = y$ gilt.
Für $n = 2$ wähle man $g_1(y) := 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Insbesondere ist auch

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot ((\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)) = \frac{1}{2} \cdot (y^2 - 1) =: h(y)$$

ein Polynom in y.
Sei ab nun die Aussage schon für alle Werte $k \leq n$ bewiesen. Dann ist

$$y^{n+1} = (\sin x + \cos x)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x =$$

$$= \sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

also

$$\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x = y^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \sin^i \cos^{n+1-i}$$

Wegen $\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{n+1-i}$ können wir nun je zwei solche Summanden zusammenfassen und erhalten für ein solches Paar mit $i < \frac{n+1}{2}$:

$$\binom{n+1}{i} \cdot (\sin^i x \cos^{n+1-i} x + \sin^{n+1-i} x \cos^i x) = \binom{n+1}{i} \cdot \sin^i x \cos^i x \cdot (\cos^{n+1-2i} x + \sin^{n+1-2i} x) =$$

$$= \binom{n+1}{i} \cdot h(y)^i \cdot g_{n+1-2i}(y)$$

Existiert ein „mittlerer Summand“, also eine ganze Zahl i mit $i = \frac{n+1}{2}$, so lässt sich der zugehörige Summand $\binom{n+1}{i} \sin^i x \cos^{n+1-i} x$ mit keinem anderen zusammenfassen. Er ist aber wegen $i = n + 1 - i$ gleich dem Wert $\binom{n+1}{i} h(y)^i$.
Damit ist auch $\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x$ darstellbar als Differenz eines Polynoms mit einer Summe von Produkten von Polynomen, also insgesamt einem Polynom, in der Variablen $y = \sin x + \cos x$, $\Box$.
Einsetzen von $n = 7$ liefert dann die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe 101233:
Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Da $x^2 \geq 0$ ist, ist die Frage äquivalent zur Untersuchung der Funktion $g(z) := \frac{1-z}{z^3+4}$, wobei man nur diejenigen z mit $z \geq 0$ betrachtet, denn es ist $g(x^2) = f(x)$.

Wegen $z \geq 0$ ist $1 - z \leq 1$ und $z^3 + 4 \geq 4 > 0$, also $g(z) \leq \frac{1}{4}$. Tatsächlich ist $g(0) = f(0) = \frac{1}{4}$, sodass dies der größte Funktionswert ist, den g bzw. f in ihren jeweiligen betrachteten Definitionsbereichen annehmen.
Wir betrachten nun die Funktion

$$g'(z) = \frac{-(z^3+4) - (1-z) \cdot 3z^2}{(z^3+4)^2} = -\frac{1}{(z^3+4)^2} \cdot (z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3)$$

Es ist

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 2z^3 - 3z^2 - 4 = (z-2) \cdot (2z^2 + z + 2)$$

Da

$$2z^2 + z + 2 = (z^2 + 2z + 1) + z^2 + 1 = (z+1)^2 + z^2 + 1 \geq 1 > 0$$

gilt, verschwindet also $g'(z)$ genau für $z = 2$.
Im Intervall $[0; \infty)$ nimmt g, wie schon gesehen, an der Stelle 0 sein globales Maximum von $\frac{1}{4} > 0$ an. Für $z > 1$ ist $g(z)$ sogar negativ, aber aufgrund des größeren Grades des Polynoms im Nenner im Vergleich zu dem des Zählers ist $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Also kann nicht g monoton fallend sein, sodass, da es stetig differenzierbar ist, seine Ableitungsfunktion mindestens eine Nullstelle haben muss, an welcher

die Funktion g von monoton fallend auf monoton steigend wechselt. Diese Stelle ist, wie oben berechnet, eindeutig bestimmt mit $z = 2$.

Also ist $g(z)$ für alle z im Intervall $[0, 2]$ monoton fallend und für alle z im Intervall $[2, \infty)$ monoton steigend, sodass an der Stelle $z = 2$ die Funktion g ihr globales Minimum mit $g(2) = \frac{1-2}{2^3+4} = -\frac{1}{12}$ annimmt.
Damit ist auch das globale Minimum von f gleich diesem Wert $-\frac{1}{12}$ und wird an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 101234:
Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

Lösung von cyrix:
Ist $t = 1$, so erfüllen offenbar alle ganzrationalen Funktionen f die Eigenschaft $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
Ist $t = 0$, so folgt $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ für beliebige reelle x. Dies wird offenbar von allen ganzrationalen Funktionen mit Absolutglied 0 erfüllt.
Sei ab nun $t \notin 0; 1$. Dann sind die Potenzen $t, t^2, t^3, \dots$ alle paarweise verschieden. Dann folgt induktiv für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichheit

$$f(t^k) = f(t \cdot t^{k-1}) = t \cdot f(t^{k-1}) = \dots = t^k \cdot f(1)$$

Wir betrachten die ganzrationale Funktion $g(x) := f(x) - x \cdot f(1)$.
Dann gilt mit der eben gezeigten Eigenschaft für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichung $g(t^k) = f(t^k) - t^k \cdot f(1) = 0$, sodass g die unendlich vielen paarweise verschiedenen Nullstellen t^k, $k \in \mathbb{N}$ besitzt.
Da aber nur eine einzige ganzrationale Funktion, nämlich die Nullfunktion, unendlich viele Nullstellen besitzt, ist $g(x) = 0$ für alle x, womit $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle reellen Zahlen x folgt.
Die einzigen Funktionen, die dies erfüllen, sind die linearen Funktionen ohne Absolutglied, also $f(x) = a \cdot x$ mit einer reellen Zahl a. (Dann ist $f(1) = a$.) Die Probe bestätigt, dass diese Funktionen tatsächlich die Funktionalgleichung erfüllen: $f(t \cdot x) = a \cdot (t \cdot x) = t \cdot (a \cdot x) = t \cdot f(x)$.

Aufgabe 121236A:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = x \cdot f(x+1)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.
b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.
c) Man gebe eine spezielle Funktion f_0 an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

Lösung von cyrix:
a) Induktiv zeigt man leicht für alle positiven ganzen Zahlen n die Gleichung $f(n) = \frac{1}{(n-1)!} \neq 0$: Sicherlich stimmt diese Aussage für $n = 1$, denn $f(1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{(1-1)!}$. Und gilt die Aussage für ein $n > 0$ so wegen $f(n+1) = \frac{1}{n} \cdot f(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1-1)!}$ auch für $n+1$, also für alle positiven ganzen Zahlen.

Dagegen ist $f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$ und somit folgt für alle negativen ganzen Zahlen n wegen $f(n) = n \cdot f(n+1) = n \cdot 0 = 0$ auch $f(n) = 0$. Es ist also $f(n)$ für ganzzahlige n genau dann gleich Null, wenn n eine nichtpositive ganze Zahl ist.

b) Ist x eine ganze Zahl, so auch $n+x$. Dann ist $f(n+x)=0$, falls $n+x \leq 0$ gilt, und sonst $f(n+x)=\frac{1}{(n+x-1)!}$. Sei ab nun $x \notin \mathbb{Z}$.

Ist $m=n$, so gilt $f(n+x)=f(m+x)$.

Ist $n>m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden der Bedingung (1) $f(n+x)=\frac{1}{n-1+x}\cdot\frac{1}{n-2+x}\cdot \ldots \cdot \frac{1}{m+x}\cdot f(m+x)$.

Und ist $n<m$, so erhält man durch wiederholtes Anwenden von (1) $f(n+x)=(m-1+x)\cdot(m-2+x)\cdot \ldots \cdot (n+x)\cdot f(m+x)$.

c) Die folgende Funktion f_0 erfüllt alle genannten Eigenschaften: $f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x-1)!} & \text{, wenn } x \in \mathbb{Z}_{>0} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$.

Offenbar erfüllt f_0 die Bedingung (2), da $f_0(1)=\frac{1}{0!}=1$ gilt und, wie in Aufgabenteil a) nachgerechnet, auch die Bedingung (1) für alle ganzen Zahlen x. Ist dagegen $x \notin \mathbb{Z}$, so gilt erst recht $0=f(x)=x\cdot 0=x\cdot f(x+1)$, sodass f_0 eine solche Funktion ist.

Aufgabe 141234:
Es ist zu untersuchen, ob es eine Funktion $y=\log_a(bx+c)$ mit a,b,c reell; $a>1$ gibt, deren Graph in einem x,y-Koordinatensystem durch die Punkte $(2;2)$, $(-1;0)$ und $(0;1)$ verläuft.
Man gebe, falls es eine solche Funktion gibt, alle reellen geordneten Zahlentripel (a,b,c) an, für die das zutrifft.

Lösung von cyrix:
Wegen $1=y(0)=\log_a(c)$ ist $c=a$. Wegen

$$0=y(-1)=\log_a((1-)\cdot b+c)=\log_a(c-b)$$

ist $c-b=1$, also $b=c-1=a-1$. Und wegen

$$2=y(2)=\log_a(2b+c)=\log_a(3a-2)$$

ist $a^2=3a-2$, also $a^2-3a+2=0$ bzw.

$$a=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

wobei die Lösung der quadratischen Gleichung mit negativem Vorzeichen der Wurzel entfällt, da sie auf $a=1$ führt, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also muss $a=c=2$ und $b=1$ gelten. Einsetzen dieser Werte bestätigt, dass die entsprechende Funktion durch die drei Punkte verläuft, sodass es genau eine solche Funktion gibt, nämlich die mit den Parametern $(a,b,c) = (2,1,2)$.

Aufgabe 141236B:
Es sei p eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x+p)=\frac{f(x)}{3f(x)-1}$$

für alle reellen x. (1)
a) Man beweise, dass jede derartige Funktion f (sofern es solche gibt) periodisch ist, d. h., dass es zu ihr eine von Null verschiedene reelle Zahl q gibt, so dass $f(x+q)=f(x)$ für alle reellen x gilt. (2)

b) Man gebe für einen speziellen Wert von p eine solche nicht konstante Funktion f an.
Hinweis: Man kann insbesondere untersuchen, ob eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{a + b \cdot \sin^2 x}{c + d \cdot \sin^2 x}$$

bei geeigneten Werten der Konstanten a, b, c, d für alle reellen x definiert ist, die Eigenschaft (1) hat und nicht konstant ist.

Lösung von ochen:
a) Für eine beliebige reelle Zahl x berechnen wir $f(x + 2p)$.

$$f(x+2p) = \frac{f(x+p)}{3f(x+p)-1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)}{3f(x)-1} - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)-(3f(x)-1)}{3f(x)-1}} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{1}{3f(x)-1}} = f(x).$$

Die Funktion f ist also $2p$-periodisch. Es erfüllt also $q = 2p$ die gewünschte Eigenschaft.

b) Sei p beliebig. Wir wählen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } [\frac{x}{p}] \text{ ungerade ist} \end{cases}.$$

So gilt für alle x mit geradem $[\frac{x}{p}]$

$$\frac{f(x)}{3f(x)-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-1} = 1 = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ ungerade ist.

Für alle x mit ungeradem $[\frac{x}{p}]$ gilt

$$\frac{f(x)}{3f(x)-1} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = f(x+p),$$

da $[\frac{x+p}{p}] = [\frac{x}{p}] + 1$ gerade ist.

Aufgabe 151234:
Definition: Eine gebrochene rationale Funktion f heißt echt gebrochen, wenn sie sich in ihrem Definitionsbereich in der Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad a_m \neq 0$$
$$v(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0; \quad b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad m < n$$

darstellen lässt.
Es ist zu untersuchen, ob die Summe zweier echt gebrochener rationaler Funktionen wieder eine echt gebrochene rationale Funktion ist, wenn die Summe von der Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{mit}$$
$$u(x) = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0; \quad \text{alle} \quad a_m = ... = a_0 = 0$$

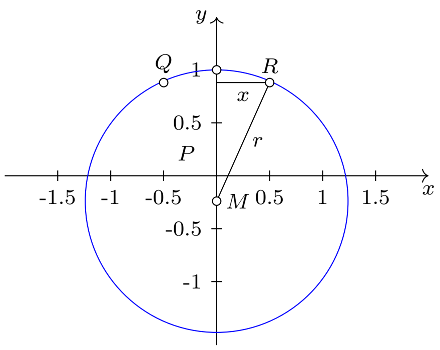
verschieden ist.

Lösung von cyrix:
Es seien $f_1(x) = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$ und $f_2(x) = \frac{u_2(x)}{v_2(x)}$ echt gebrochen rationale Funktionen, wobei für $i = 1{,}2$ die Polynome u_i den jeweiligen Grad z_i und die Polynome v_i den jeweiligen Grad n_i haben, wobei jeweils $z_i < n_i$ gilt.

Dann ist
$$f_1(x) + f_2(x) = \frac{u_1(x) \cdot v_2(x) + u_2(x) \cdot v_1(x)}{v_1(x) \cdot v_2(x)}$$
Das Nenner-Polynom besitzt den Grad $n_1 + n_2$, während das Zähler-Polynom höchstens den Grad $max(z_1 + n_2, z_2 + n_1) < n_1 + n_2$ besitzt, sodass auch die Summe $f_1(x) + f_2(x)$ in jedem Fall echt gebrochen ist.

Aufgabe 161236A:
Für jede reelle Zahl x mit $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ werde in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem der Kreis durch die Punkte $P(0;1)$, $Q(x;\cos x)$ und $R(-x;\cos(-x))$ gelegt.
a) Man gebe eine Funktion f so an, dass für jede dieser Zahlen x der genannte Kreis den Radius $r = f(x)$ hat.
b) Man berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.
c) Man ermittle den Wertebereich der Funktion f mit der Menge aller Zahlen x, für die $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, als Definitionsbereich.

Lösung von MontyPythagoras:
Mit $\cos(-x) = \cos(x)$ ergibt sich folgende Skizze:



Es gilt
$$(r - (1 - \cos x))^2 + x^2 = r^2$$
$$r^2 - 2r(1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + x^2 = r^2$$
$$2r(1 - \cos x) = (1 - \cos x)^2 + x^2$$
$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$
Also lautet die in Aufgabenteil a) gesuchte Funktion
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos x + \frac{x^2}{1 - \cos x}\right)$$

Aufgabenteil b): Während x gegen unendlich geht, wird der Nenner im letzten Term periodisch gleich null. Es existiert daher kein Grenzwert.

Aufgabenteil c): Wir benutzen $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Dann ist
$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \frac{x^2}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2} + \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$$

Da im Definitionsbereich $\frac{x}{2} > \sin \frac{x}{2} > 0$, gilt $f(x) > 1$. Außerdem ist $\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)$ streng monoton steigend. Der größte Funktionswert liegt daher bei $x = \frac{\pi}{2}$ vor, und es ist

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \sin^2 \tfrac{\pi}{4} + \left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^2 = \frac{1}{2} + (\frac{\pi}{2\sqrt{2}})^2 = \frac{\pi^2+4}{8}$$

Der Wertebereich ist somit $\left]1; \frac{\pi^2+4}{8}\right]$.

Aufgabe 151236B:
Es seien $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und p, q, r, s reelle Zahlen, für die $p \neq q$ gelte.
Bei der Division dieses Polynoms durch $(x - p)$ ergebe sich als Rest die Zahl r, bei der Division des gleichen Polynoms durch $(x - q)$ als Rest die Zahl s.
Welcher Rest ergibt sich unter diesen Voraussetzungen bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x - p)(x - q)$?

Lösung von ochen:
Sei $R(x)$ das Polynom, dass bei der Division des Polynoms $P(x)$ durch $(x - p)(x - q)$ entsteht. Da $(x - p)(x - q)$ den Grad 2 hat, kann R maximal den Grad 1 haben. Es gibt weiter Polynome P_1,P_2,P_3 mit

$$P(x) = (x - p)P_1(x) + r = (x - q)P_2(x) + s = (x - p)(x - q)P_3(x) + R(x).$$

Somit folgt

$$P(p) = r = R(p) \quad \text{und} \quad P(q) = s = R(q).$$

Da R höchstens den Grad 1 hat, ist es damit eindeutig bestimmt und es gilt

$$R(x) = \frac{s-r}{q-p}(x - p) + r.$$

Aufgabe 171236A:
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in $\mathbb{R}$ stetig sind und die Eigenschaft haben, dass für jede reelle Zahl x die Gleichung $f(x^n) = f(x)$ (1) gilt.
b) Man gebe eine in $\mathbb{R}$ definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

Lösung von ochen:
Es sei f eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x^n)$ für alle reellen Zahlen x. Weiter sei $c := f(1)$. Sei eine beliebige reelle Zahl $x > 0$. Wir betrachten die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = x^{1/n^k}$ für alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n^k}\ln(x)\right) = 1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl $k > 0$ gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(x^{n\cdot 1/n^k}) = f(x^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(1) = c$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = \frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = c$ aus $y_k > 0$ für alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = c.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x \geq 0$.
Wir untersuchen nun, wie sich f für negative reelle Zahlen verhält.
Wenn n gerade ist, erhalten wir

$$f(x) = f(x^n) = c$$

für jede reelle Zahl $x < 0$, da $x^n > 0$ ist.
Wenn n ungerade ist, betrachten wir eine beliebige reelle Zahl $x < 0$ und definieren die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = -|x|^{1/n^k}$ ur alle natürlichen Zahlen k. Weiter gilt $x_0 = x$. Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} -\exp\left(\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -\exp\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^k}\ln|x|\right) = -1.$$

Anderseits ist die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ konstant, da für natürlichen Zahl k gilt

$$f(x_k) = f(x_k^n) = f(x_k^n) = f(-|x|^{n\cdot 1/n^k}) = f(-|x|^{1/n^{k-1}}) = f(x_{k-1}) = \ldots = f(x_0) = f(x).$$

Mit der Stetigkeit von f folgt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(-1) = d$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen $x > 0$. Wir betrachten nun die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = -\frac{1}{k}$ für alle natürlichen Zahlen k. So folgt $f(y_k) = d$ aus $y_k < 0$ fuer alle natürlichen Zahlen k. Wir erhalten mit der Stetigkeit von f

$$c = f(0) = f(\lim_{k\to\infty} y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = d.$$

Es gilt also sogar $f(x) = c$ für alle reellen Zahlen x.

b) Wir betrachten

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

so gilt

$$\begin{aligned} f(x^n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|n\ln|x||\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}(\ln(n) + \ln|\ln|x||)\right) \\ &= \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ln(n)}\ln|\ln|x||\right) = f(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 181231:
Man ermittle alle diejenigen Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten, die für alle reellen x die Gleichung $f(x+1) - f(x) = x + 1$ erfüllen.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir wählen den Ansatz

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dann ist

$$f(x+1) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + c$$

Durch Einsetzen in die Aufgabenstellung erhält man:

$$2ax + a + b = x + 1$$

woraus $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ folgt. Somit erfüllen alle Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) + c$$

die Gleichung.

Aufgabe 181234:
Man beweise: Ist $n \geq 2$ eine ganze Zahl, so ist die für alle reellen x durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x\sqrt{k})$$

definierte Funktion f nicht periodisch.

Lösung von weird:
Es genügt dafür offenbar zu zeigen, dass die Gleichung $f(x) = n$ genau eine Lösung, nämlich $x = 0$ besitzt, da dies mit einer Periodizität von f klarerweise nicht vereinbar ist.
Aus $f(x) = n$ folgt nämlich, dass alle Summanden in obiger Summe den Wert 1 haben müssten, d. h., es müsste insbesondere

$$\cos(x) = \cos(x\sqrt{2}) = 1$$

gelten. Daraus folgen aber insbesondere die Gleichungen $x = 2j\pi$ für ein $j \in \mathbb{Z}$, sowie $x\sqrt{2} = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und die daraus resultierende Gleichung

$$j\sqrt{2} = k$$

führt nur dann nicht auf einen Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, wenn $j = k = 0$, also $x = 0$ ist, q. e. d.

Aufgabe 191233A:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Für alle Paare $(x_1; x_2)$ reeller Zahlen gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$.

Lösung von Kornkreis:
Aus (1) folgt $f(0+0) = f(0) + f(0)$, also $f(0) = 2f(0)$ und damit, nach Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten, $f(0) = 0$. Weiterhin gilt $f(x - x) = f(x) + f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. $0 = f(x) + f(-x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$. Wegen $f(1) = 1$ haben wir insbesondere $f(-1) = -1$ und $f(x+1) = f(x) + 1$.
Für alle $x \notin \{0, -1\}$ haben wir nun

$$\frac{f(x)}{x^2} + 1 = f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\frac{1+x}{x}\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^2$$

und

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{f(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1+f(x)}{(1+x)^2}$$

was kombiniert dann

$$\frac{f(x)}{x^2}+1=\left(1-\frac{1+f(x)}{(1+x)^2}\right)\left(\frac{1+x}{x}\right)^2=\left(\frac{1+x}{x}\right)^2-\frac{1+f(x)}{x^2}$$

also

$$2\frac{f(x)}{x^2}=\frac{2}{x}$$

und damit, zusammen mit $f(0)=0$ und $f(-1)=-1$ (aus den Vorüberlegungen bzw. (1) und (2)), gilt $f(x)=x$ für alle x.

Aufgabe 201233B:
Ist f eine im Intervall $0\le x\le 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:
(1) Für jedes reelle x mit $0\le x\le 1$ gilt $f(x)\ge 0$.
(2) Es gilt $f(1)=1$.
(3) Für jedes reelle x_1 mit $0\le x_1\le 1$ und jedes reelle x_2 mit $0\le x_2\le 1$ und $x_1+x_2\le 1$ gilt $f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)$.
a) Man beweise:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)<2x$ für jedes reelle x mit $0<x\le 1$.
b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)\le 1{,}99\cdot x$ für jedes reelle x mit $0<x\le 1$.

Lösung von cyrix:
a) Mit $x_1:=1$ und $x_2:=0$ folgt aus den Eigenschaften $1=f(1)=f(1+0)\ge f(1)+f(0)=1+f(0)$, also $f(0)\le 0$ und wegen (1) dann $f(0)=0$.

Sei nun n eine beliebige positive ganze Zahl. Dann ist für jedes reelle x mit $0\le x\le\frac{1}{n}$ mit $x_1:=(n-1)x$ und $x_2:=x$ die Ungleichung $f(nx)\ge f((n-1)x)+f(x)$ erfüllt, woraus induktiv $f(nx)\ge n\cdot f(x)$ folgt. Insbesondere ist mit $x=\frac{1}{n}$ dann $1=f\left(\frac{n}{n}\right)\ge n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$, also $f\left(\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$.

Weiterhin ist die Funktion f monoton steigend, denn gilt $0\le x<y\le 1$, so gilt mit $x_1:=x$ und $0<x_2:=y-x$ die Ungleichung $f(y)=f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)\ge f(x)+0=f(x)$.

Damit gilt also für jede positive ganze Zahl k und jedes reelle x mit $\frac{1}{2^k}<x\le\frac{1}{2^{k-1}}$ die Ungleichung $f(x)\le\frac{1}{2^{k-1}}=2\cdot\frac{1}{2^k}\le 2\cdot x$. Da jedes $0<x\le 1$ in einem dieser Intervalle liegt, ist diese Ungleichung damit für alle solchen x gezeigt, $\square$.

b) Wir zeigen zuerst, dass die Funktion $f(x):=\begin{cases}0 & \text{, wenn } x\le\frac{1}{2}\\ 1 & \text{, wenn } x>\frac{1}{2}\end{cases}$ alle drei Bedingungen erfüllt: Offensichtlich ist für alle $0\le x\le 1$ der Funktionswert $f(x)\ge 0$ und auch ist $f(1)=1$, sodass (1) und (2) erfüllt sind. Weiterhin ist f auch monoton steigend. Seien nun $0\le x_1\le 1$ und $0\le x_2\le 1$ mit $x_1+x_2\le 1$. Wäre $x_1>\frac{1}{2}$ und auch $x_2\frac{1}{2}$, so, im Widerspruch zur Voraussetzung $x_1+x_2>1$. Also muss mindestens einer der beiden Werte kleiner als oder höchstens gleich $\frac{1}{2}$ sein. Sei o. B. d. A. $x_1\le\frac{1}{2}$, so ist $f(x_1+x_2)\ge f(x_2)=0+f(x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. Also erfüllt diese Funktion f auch Bedingung (3).

Sei nun $x=\frac{1}{1{,}995}>\frac{1}{2}$. Dann ist $f(x)=1=1{,}995\cdot x>1{,}99\cdot x$, sodass die in der Aufgabenstellung formulierte Bedingung nicht für alle $0<x\le 1$ und alle Funktionen f, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, wahr ist.

Aufgabe 211231:
Es sei $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3.
Man beweise:
Wenn $P(x)$ eine Nullstelle der Form $x_0 = b + \sqrt{c}$ mit rationalen Zahlen b, c besitzt, für die $\sqrt{c}$ irrational ist, so ist auch $x_1 = b - \sqrt{c}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung gilt: $P(x_0) = 0$, d. h.

$$a_3(b+\sqrt{c})^3 + a^2(b+\sqrt{c})^2 + a_1(b+\sqrt{c}) + a_0 = 0 \qquad \text{also}$$
$$a_3b^3 + 3a_3bc + a_2b^2 + a_2c + a_1b + a_0 + \sqrt{c}(3a_3b2 + a_3c + 2a_2b + a_1) = 0$$

Für die Zahlen

$$A_1 = a_3b^2 + 3a_3bc + a_2b^2a_2c + a_1b + a_0 \qquad (1)$$
$$A_2 = 3a_3b^2 + a_3c + 2a_2b + a_1 \qquad (2)$$

gilt also $A_1 + A_2\sqrt{c} = 0$ (3).
Wäre nun $A_2 \neq 0$, so folgte $\sqrt{c} = -\frac{A_1}{A_2}$ und daraus der Widerspruch, dass $\sqrt{c}$ rational wäre; denn nach Voraussetzung (1) und (2) sind A_1 und A_2 rational. Also ist $A_2 = 0$ (4). Aus (3) und (4) folgt $A_1 = 0$ (5).
Weiterhin errechnet man (unter Verwendung von (1) und (2)), dass

$$P(x_1) = P(b-\sqrt{c}) = a_3(b-\sqrt{c})^3 + a_2(b-\sqrt{c})^2 + a_1(b-\sqrt{c}) + a_0 = A_1 - A_2\sqrt{c} \qquad (6)$$

gilt. Aus (4), (5), (6) folgt $P(x_1) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 211233:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, für die folgendes gilt:
Die für alle reellen Zahlen $x \neq -c$ durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f genügt den folgenden Bedingungen:
(1) Es gibt reelle Zahlen x, für die $f(x)$, $f(f(x))$ und $f(f(f(x)))$ definiert ist.
(2) Für jede solche Zahl x mit $x \neq -1$ gilt $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Tripel (a,b,c) besitzt die verlangten Eigenschaften. Dann folgt:

Die durch $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ definierte Funktion f ist nicht konstant; denn im Falle $f(x) = d \neq -c$ für alle $x \neq -c$ wäre auch $f(f(fx))) = d$ für alle $x \neq -c$, also (2) nicht erfüllt, da $\frac{x-1}{x+1} = d$ für höchstens ein x gelten kann; im Falle $f(x) = -c$ für alle $x \neq -c$ aber gäbe es kein x, für das $f(x)$ und $f(f(x))$ definiert sind, im Widerspruch zu (1).

Für jedes d hat folglich die Gleichung $ax + b = xd + cd$ nicht alle $x \neq -c$ als Lösung. Somit hat sie als lineare Gleichung höchstens eine Lösung.
Daher gibt es höchstens jeweils ein x mit $f(x) = -c$ bzw. mit $f(f(x)) = -c$. Hiernach und wegen (2) gibt es unendlich viele Zahlen $x \neq 1$, für die $f(x)$ sowie

$$f(f(x)) = \frac{(a^2+b)x + (a+c)b}{(a+c)x + (b+c^2)} \qquad \text{und}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{(a^3+2ab+bc)x + (a^2+ac+b+c^2)b}{(a^2+ac+b+c^2)x + (ab+2bc+c^3)} \qquad (3)$$

existieren und für die

$$((a^3+2ab+bc)x+(a^2+ac+b+c^2)b)(x+1)=((a^2+ac+b+c^2)x+(ab+2bc+c^3))(x-1)$$

gilt. Aus dieser Gleichheit zweier Polynome für unendlich viele x folgen die Koeffizientengleichheiten

$$a^3+2ab+bc=a^2+ac+b+c^2 \qquad (4)$$

$$a^3+2ab+bc+(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)+ab+2bc+c^3 \qquad (5)$$

$$(a^2+ac+b+c^2)b=-(ab+2bc+c^3) \qquad (6)$$

Aus (4), (5), (6) folgt durch Addition, dass beide Seiten von (5) gleich 0 sind; hieraus und aus (4) erhält man

$$a^3+2ab+bc=ab+2bc+c^3 \qquad \text{also} \qquad a(a^2+b)=c(b+c^2)$$

und durch Addition von $ac(a+c)$

$$a(a^2+ac+b+c^2)=c(a^2+ac+b+c^2) \qquad (7)$$

Wäre $a^2+ac+b+c^2=0$, so folgte aus (6), dass (3) für kein x definiert wäre. Also ist

$$a^2+ac+b+c^2\neq 0 \qquad (8)$$

und aus (7) ergibt sich $a=c$. Hiernach und nach (4), (2) ist

$$(a^2+ac+b+c^2)b=-(a^2+ac+b+c^2)$$

wegen (8) also $b=-1$. Damit geht (4) über in

$$a^3-3a^2-3a+1=0$$

Da eine Lösung hiervon $a=-1$ lautet (bzw. nach der bekannten Abspaltung des Faktors $a+1$ von a^3+1 und von $3a^2+3a$) folgt $(a+1)(a^2-4a+1)=0$ und daraus

$$a=-1 \qquad \text{oder} \qquad a=2\pm\sqrt{3}$$

Also können nur die Funktionen f mit

$$f(x)=\frac{-x-1}{x-1} \qquad \text{für alle } x\neq 1$$

$$f(x)=\frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3}} \qquad \text{für alle } x\neq -(2\pm\sqrt{3})$$

(jeweils stets mit dem oberen oder stets mit dem unteren Vorzeichen) die die Bedingungen (1), (2) erfüllen, d. h., es können nur die Tripel

$$(-1,-1,-1) \quad ; \quad (2+\sqrt{3},-1,2+\sqrt{3}) \quad ; \quad (2-\sqrt{3},-1,2-\sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften haben.

II. Für das Tripel $(-1,-1,-1)$ existieren

$$f(f(x))=\frac{-x-1}{x-1}=-\frac{1}{x}$$

für alle x mit $x\neq 1, x\neq 0$ und

$$f(f(f(x)))=f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}$$

für alle x mit $x\neq 1, x\neq 0, x\neq -1$. Für die beiden anderen Tripel existieren

$$f(f(x))=f\left(\frac{(2\pm\sqrt{3})x-1}{x+(2\pm\sqrt{3}}\right)=\frac{(3\pm 2\sqrt{3})x-(2\pm\sqrt{3})}{(2\pm\sqrt{3})x+(3\pm 2\sqrt{3})}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$ und

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{(3 \pm 2\sqrt{3})x - (2 \pm \sqrt{3})}{(2 \pm \sqrt{3})x + (3 \pm 2\sqrt{3})}\right) = \frac{(5 \pm 3\sqrt{3})(x-1)}{(5 \pm 3\sqrt{3})(x+1)}$$

für alle x mit $x \neq -(2 \pm \sqrt{3})$, $x \neq \mp\sqrt{3}$, $x \neq -1$.
Daher und wegen $5 \pm 3\sqrt{3} \neq 0$ erfüllen diese Funktionen die Bedingungen (1), (2). Folglich haben genau die Tripel

$$(-1, -1, -1) \quad ; \quad (2+\sqrt{3}, -1, 2+\sqrt{3}) \quad ; \quad (2-\sqrt{3}, -1, 2-\sqrt{3})$$

die verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 221234:
Ist c eine positive reelle Zahl, so bezeichnet f die für alle reellen $x \neq 0$ durch $f(x) = \sin\frac{c}{x}$ definierte Funktion.
Gegeben sei nun eine beliebige natürliche Zahl $m > 1$.
a) Man ermittle (in Abhängigkeit von m) alle diejenigen positiven reellen Zahlen c, für die die Funktion f im Intervall $10 \leq x \leq 20$ genau m Nullstellen hat, unter denen sich auch die Zahlen 10 und 20 selbst befinden.
b) Für jede in a) gefundene Zahl c beweise man, dass f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen hat.
Ferner ermittle man (in Abhängigkeit von m und für jede zu dem betreffenden m gefundene Zahl c) die größte Nullstelle von f.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes positive reelle c gilt: Eine positive Zahl x ist genau dann Nullstelle von f, wenn eine ganze Zahl k mit

$$\frac{c}{x} = k\pi \qquad (1)$$

existiert. Nun ist (1) äquivalent mit

$$x = \frac{c}{k\pi} \qquad (2)$$

Daher führt eine ganze Zahl k genau dann auf eine Nullstelle x mit $10 \leq x \leq 20$, wenn sie $10 \leq \frac{c}{k\pi} \leq 20$ erfüllt. Dies ist äquivalent mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi}$$

Insbesondere führt eine ganze Zahl k_1 bzw. k_2 genau dann vermöge (2) auf 10 bzw. 20 als Nullstelle, wenn

$$k_1 = \frac{c}{10\pi} \qquad ; \qquad k_2 = \frac{c}{20\pi}$$

gilt. Sie für ein positives reelles c diese beiden Zahlen ganz, so befinden sich im Intervall $10 \leq xleq 20$ genau dann m Nullstellen, wenn es genau m ganze Zahlen k mit

$$\frac{c}{20\pi} \leq k \leq \frac{c}{10\pi} \qquad (3)$$

gibt. Das trifft genau dann zu, wenn erstens $\frac{c}{20\pi}$ eine ganze Zahl (4) ist, und zweitens

$$\frac{c}{10\pi} = \frac{c}{20\pi} + m - 1 \qquad (5)$$

gilt. Angenommen, für ein positives reelles c seien (4) und (5) erfüllt. Dann folgt $2c = c + 20(m-1)\pi$, also $c = 20(m-1)\pi$.
Umgekehrt ist für dieses c in der Tat $\frac{c}{20\pi} = m - 1$ eine ganze Zahl, also (4) erfüllt, und es gilt (5). Daher hat genau die Zahl $c = 20(m-1)\pi$ die in a) verlangte Eigenschaft.

b) Für sie gilt weiter: Eine ganze Zahl k führt genau dann vermöge (2) auf eine Nullstelle $x \geq 20$, wenn sie $\frac{c}{k\pi} \geq 20$ erfüllt. Das ist äquivalent mit

$$0 < k \leq \frac{c}{20\pi} = m - 1 \qquad (6)$$

Da es nur endlich viele solche ganzen Zahlen gibt, hat f im Intervall $20 \leq x < \infty$ nur endlich viele Nullstellen, wie behauptet.

Für die jeweils zu zwei ganzen Zahlen $k, k' > 0$ gehörenden Nullstellen $x = \frac{c}{k\pi}$, $x' = \frac{c}{k'\pi}$ gilt genau dann $x < x'$, wenn $k > k'$ gilt. Also gehört die größte Nullstelle von f zum kleinsten Wert von k mit (6), d. h. zum Wert $k = 1$. Somit ist die in b) gesuchte größte Nullstelle

$$x = \frac{c}{\pi} = 20(m-1)$$

Aufgabe 241233A:
Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:
(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

Lösung von cyrix:
Es ist $f(0) = f(0+0) = 2 \cdot f(0) + 0$, also $f(0) = 0$ und für alle rationale Zahlen x damit

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + x \cdot (-x) \cdot (x - x) = f(x) + f(-x)$$

und damit $f(-x) = -f(x)$.
Weiterhin gilt für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$f(n+1) = f(n) + f(1) + n \cdot 1 \cdot (n+1) = f(n) + n^2 + n + 1$$

sodass sich für alle natürlichen Zahlen n direkt

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k + 1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6} + n =$$

$$= n \cdot \left(\frac{(n-1)(n+1)}{3} + 1 \right) = \frac{n^3 + 2n}{3}$$

Damit gilt sogar für alle ganzen Zahlen p die Gleichung $f(p) = \frac{p^3+2p}{3}$.

Darüber hinaus ist für alle rationalen Zahlen x und alle natürlichen Zahlen n

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) + n \cdot (n+1) \cdot x^3$$

sodass induktiv

$$\frac{f(nx) - nf(x)}{x^3} = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n-1+3}{6} \cdot n \cdot (n-1) =$$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n^3 - n}{3}$$

also $f(nx) = nf(x) + \frac{n^3-n}{3} \cdot x^3$.

Damit gilt für jede rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligem p und natürlichem $q > 0$:

$$\frac{p^3 + 2p}{3} = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{q^3 - q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3}$$

bzw.

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3 + 2p}{3} - \frac{q^3 - q}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3} \right) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{p^3 + 2p}{3} - \frac{p^3}{3} + \frac{p^3}{3q^2} \right) = \frac{2pq^2 + p^3}{3q^3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{q^3} = \frac{2x + x^3}{3}$$

Damit kann höchstens die für alle rationalen Zahlen x definierte Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ alle genannten Bedingungen erfüllen. Tatsächlich ist auch $f(1) = \frac{2+1}{3} = 1$ und für beliebige rationale Zahlen x und y dann

$$f(x) + f(y) + xy(x+y) = \frac{2x + x^3 + 2y + y^3 + 3xy(x+y)}{3} = \frac{2(x+y) + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3} =$$

$$= \frac{2(x+y) + (x+y)^3}{3} = f(x+y)$$

sodass die Funktion $f(x) = \frac{2x+x^3}{3}$ die einzige ist, die die Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgabe 241234:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leq z \leq 5$, die die Bedingung erfüllen, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man - für die betreffende Gerade und die Parabel - die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

Lösung von cyrix:
Sei x die Abszisse eines Schnittpunkts der beiden Kurven. Dann gilt $2x^2 = \frac{1}{3}x + z$ bzw. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}z = 0$, also

$$x = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{z}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 72z}}{12}$$

Fall 1: Es ist $x = \frac{1+\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 < \frac{1 + \sqrt{1 + 72z}}{12} \leq \frac{1 + \sqrt{72 \cdot 5}}{12} = \frac{1 + \sqrt{361}}{12} = \frac{1 + 19}{12} < \frac{24}{12} = 2$$

also $x = 1$ und $y = 2x^2 = 2$, woraus schließlich $z = y - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ folgt.

Fall 2: Es ist $x = \frac{1-\sqrt{1+72z}}{12} \in \mathbb{Z}$. Dann ist wegen

$$0 = \frac{1 - 1}{12} > \frac{1 - \sqrt{1 + 72 \cdot 1}}{12} \geq x = \frac{1 - \sqrt{1 + 72z}}{12} \geq \frac{1 - \sqrt{1 + 72 \cdot 5}}{12} = \frac{1 - 19}{12} > \frac{-24}{12} = -2$$

also $x = -1$. Dann ist $y = 2x^2 = 2$ und damit $z = y - \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}$.

Es gibt also genau in den beiden Fällen $z = \frac{5}{3}$ und $z = \frac{7}{3}$ im zu betrachtenden Intervall für z Schnittpunkte mit ganzzahligen Abszissen, nämlich im ersten Fall den Punkt $(1|2)$ und im zweiten den Punkt $(-1|2)$. (Die jeweils anderen Schnittpunkte, sofern sie existieren, haben dagegen keine ganzzahligen Abszissen, da sie sonst als Lösungen in den entsprechenden Fällen hätten erscheinen müssen.)

Aufgabe 271233B:
Es sei f diejenige für alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y definierte Funktion, die für alle natürlichen Zahlen x, y die folgenden Gleichungen (1), (2), (3) erfüllt:

$$f(0, y) = y + 1 \qquad (1)$$
$$f(x + 1, 0) = f(x, 1) \qquad (2)$$
$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)) \qquad (3)$$

Man ermittle a) den Funktionswert $f(3,3)$, b) den Funktionswert $f(4,2)$.
Hinweis: Gegebenenfalls kann die Angabe eines gesuchten Funktionswertes durch einen rechnerischen Ausdruck mit konkret angegebenen Rechenoperationen erfolgen, wenn deren zahlenmäßige Ausführung ohne Rechenhilfsmittel eine zu lange Rechenzeit erfordern würde.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Behauptung: Für alle $y = 0{,}1{,}2{,}...$ gilt
$$f(1{,}y) = y + 2 \tag{4}$$
Beweis durch vollständige Induktion:
I. Nach (2) und (1) gilt $f(1{,}0) = f(0{,}1) = 2$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (4), sowie aus (1)
$$f(1{,}y+1) = f(0{,}f(1{,}y)) = f(0{,}y+2) = y+3 = (y+1)+2$$
also (4) mit $y+1$ statt y.

2. Behauptung: Für alle $y = 0{,}1{,}2{,}...$ gilt
$$f(2{,}y) = 2y + 3 \tag{5}$$
Beweis:
I. Nach (2) und (4) gilt $f(2{,}0) = f(1{,}1) = 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsannahme, für ein y gelte (5), sowie aus (4)
$$f(2{,}y+1) = f(1{,}f(2{,}y)) = f(1{,}2y+3) = 2y+5 = 2(y+1)+3$$
3. Behauptung: Für alle $y = 0{,}1{,}2{,}...$ gilt
$$f(3{,}y) = 2^{y+3} - 3 \tag{6}$$
Beweis:
I. Nach (2) und (5) gilt $f(3{,}0) = f(2{,}1) = 5 = 2^3 - 3$.
II. Nach (3) folgt aus der Induktionsvoraussetzung, für ein y gelte (6), sowie aus (5)
$$f(3{,}y+1) = f(2{,}f(3{,}y)) = f(2{,}2^{y+3}-3) = 2(2^{y+3}-3)+3 = 2^{(y+1)+3} - 3$$
a) Aus (6) ergibt sich $f(3{,}3) = 2^6 - 3 = 61$.
b) Aus (2), (3) und (6) ergibt sich
$$\begin{aligned} f(4{,}0) &= f(3{,}1) = 2^4 - 3 = 13 \\ f(4{,}1) &= f(3{,}f(4{,}0)) = f(3{,}13) = 2^{16} - 3 = 65533 \\ f(4{,}2) &= f(3{,}f(4{,}1)) = f(3{,}65533) = 2^{65533} - 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 311231:
Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist; ferner sei folgende Voraussetzung erfüllt:
Mit zwei voneinander verschiedenen reellen Zahlen a, b gelten für jedes reelle x die Gleichungen $f(a-x) = f(a+x)$ und $f(b-x) = f(b+x)$.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Die Funktion f ist periodisch.
Hinweis: Eine Funktion f heißt genau dann periodisch, wenn eine positive reelle Zahl p existiert, mit der für jedes reelle x die Gleichung $f(x+p) = f(x)$ gilt.

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. sei $a < b$. Dann ist $p := 2(b-a) > 0$ und es gilt für jedes relle x die Gleichung

$$f(x+p) = f(x+2b-2a) = f(b+(x+b-2a)) = f(b-(x+b-2a)) = f(2a-x) = f(a-(x-a)) =$$

$$= f(a+(x-a)) = f(x), \square$$

Aufgabe 321232:
Man beweise:
Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$, die durch

$$a_1 = c, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + c \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.
Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$ heißt genau dann periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle $k = 1,2,3,\ldots$ die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt.
Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine Periodenlänge der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$.

Lösung von weird:
Wir ergänzen zunächst die Folge durch das Folgenglied $a_0 = 0$, da dies mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist und einige der folgenden Überlegungen etwas einfacher macht. Rechnet man nun für ein fest vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ die ersten paar Folgenglieder a_n für $n > 0$ als Funktionen von c einmal konkret aus, nämlich

$$a_1(c) = c$$
$$a_2(c) = c^2 + c$$
$$a_3(c) = c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$a_4(c) = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c$$
$$\ldots$$

so führt dies als unmittelbare Konsequenz aus der obigen Rekursionsvorschrift dann auf eine Folge von Polynomfunktionen in c vom jeweiligen Grad 2^{n-1}, wobei der konstante Term stets fehlt. Damit eine Folge die Periodenlänge $p \in \mathbb{N}^*$ hat, reicht es offenbar

$$a_p(c) = 0$$

zu fordern, weil damit dann auch

$$a_p = a_0,\ a_{p+1} = a_1,\ a_{p+2} = a_2, \ldots$$

gilt.

Soll p sogar die minimale, also dann kleinstmögliche Periodenlänge sein, wie dies in der Aufgabe gefordert wird, so darf c dann jedenfalls nicht auch Nullstelle der Polynomfunktionen $a_k(c)$ sein, wobei k ein „echter“ (also von n verschiedener) Teiler von n ist. Ist daher p sogar eine Primzahl, wie dies hier in der Aufgabe noch vorausgesetzt wird, so müssen wir also dann nur den einzigen Fall ausschließen, dass c auch Nullstelle von $a_1(c) = c$ ist, was somit auf die Bedingung $c \neq 0$ hinausläuft.
Und ja, so eine reelle und von Null verschieden Nullstelle von $a_p(c)$ muss es hier immer geben, da nach Abspaltung des Linearfaktors c aus $a_p(c)$ ja eine Polynomfunktion von ungeradem Grad mit konstantem Term $\neq 0$ verbleibt, für welche das bekanntermaßen sicher zutrifft, womit auch diese letzte Frage dann hier noch geklärt ist.

Aufgabe 321233A:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2-x-1 \neq 0$ und $x^2+x-1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

Lösung von weird:
Gelten die Voraussetzungen der Aufgabe für ein $x \in \mathbb{R}$, dann offensichtlich auch für $-x$ und durch Einsetzen in

$$2f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) = 5\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (1)$$

erhält man

$$2f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right) - 3f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = -5\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (2)$$

also insgesamt ein lineares Gleichungssystem in $f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)$ und $f\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}\right)$, aus dem sich insbesondere

$$f\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right) = x - \frac{1}{x} \qquad (3)$$

ergibt. Nun kann man (3) unter Zuhilfenahme der Abbildungen

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \qquad (4)$$

bzw.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - \frac{1}{x} \qquad (5)$$

auch in der Form

$$f(\tilde{f}(g(x))) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \qquad (6)$$

schreiben, wie man leicht nachrechnet. Da aber $g(x)$ für $x \neq 0$ alle reellen Zahlen durchläuft, muss also für alle reelle Zahlen $x \neq 1$ auch $f(\tilde{f}(x)) = x$ gelten. Andererseits gilt aber auch $\tilde{f}(\tilde{f}(x)) = x$ für alle $x \neq 1$, wie man sofort nachrechnet, womit sich wegen $f(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(\tilde{f}(x))$ ähnlich wie vorher schlussendlich

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \qquad (7)$$

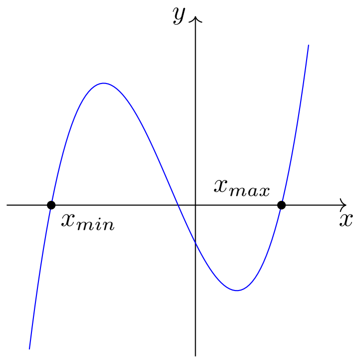
ergibt. Durch Einsetzen in (1) kann man sich schließlich noch davon überzeugen, dass dies auch tatsächlich eine Lösung unserer Funktionalgleichung hier ist.

Aufgabe 331233B:
Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3) \cdot x^2 + 2n \cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen n mit $n \geq 0$, für die gilt:
Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Funktion $f(x)$ verläuft prinzipiell so:



Das heißt, bei den „äußeren“ Nullstellen x_{min} als auch bei x_{max} ist die Steigung positiv. Für $n = 0$ sieht man sofort, dass die Nullstellen $x_{min} = -3$ und $x_{max} = 0$ sind (in diesem Fall ist $x = 0$ doppelte Nullstelle). Das Intervall zwischen kleinster und größter Nullstelle (mit „klein“ und „groß“ ist natürlich der x-Wert gemeint) hat hier also genau eine Länge von 3.
Betrachtet man sehr große n, wird die Funktion näherungsweise zu

$$g(x) = x^3 + (n+3)x^2 + 2nx$$

Eine Lösung ist wieder $x = 0$. Die anderen lauten:

$$x^2 + (n+3)x + 2n = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}(n+3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(n+3)^2 - 8n} = -\frac{1}{2}(n+3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - 2n + 9}$$

Wiederum für große n kann man überschlägig berechnen:

$$x_1 \approx -\frac{1}{2}(n+3) - \frac{1}{2}(n-1) = -n - 1$$

$$x_2 \approx -\frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{2}(n-1) = -2$$

Es ist klar, dass die approximative Lösung $x \approx -2$ zwischen den beiden anderen Nullstellen liegt, denn die größte Nullstelle muss auf jeden Fall $x_{max} > 0$ sein, weil $f(0) = -\frac{n}{n+1} < 0$ ist. Setzen wir $x = -n - 1$ ein, so erhalten wir

$$f(-n-1) = -(n+1)^3 + (n+1+2)(n+1)^2 - 2n(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$f(-n-1) = 2(n+1)^2 - 2n(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1} = 2(n+1) - 1 + \frac{1}{n+1} = 2n + 1 + \frac{1}{n+1} > 0$$

Daraus kann man schließen, dass auf jeden Fall

$$x_{min} < -n - 1$$

ist. Da außerdem $x_{max} > 0$, ist die Intervallbreite d auf jeden Fall

$$d = x_{max} - x_{min} > n + 1$$

Damit ist für $n \geq 2$ die zulässige Intervallbreite überschritten. Bleibt noch zu untersuchen, ob für $n = 1$ die Intervallbreite eingehalten wird. Das tun wir, indem wir einfach $n = 1$ und $x = -3$ einsetzen. Es zeigt sich, dass $f_1(-3) = \frac{5}{2} > 0$ ist. Daraus folgt, dass für $n = 1$ die kleinste Nullstelle $x_{min} < -3$ ist, so dass auch für $n = 1$ die Intervallbreite von 3 nicht eingehalten wird. Daher ist $n = 0$ die einzige Lösung.

Aufgabe 341233B:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 \qquad (1)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \qquad (2)$$

$$f(1) = 2 \qquad (3)$$

Lösung von MontyPythagoras:
Mit $x = y = 0$ folgt wegen (2):

$$f(0) = 2f(0) - 1 \qquad ; \qquad f(0) = 1$$

Mit $x = 1$ und $y = -1$ erhält man wegen (2):

$$f(0) = f(1) + f(-1) - 3 \qquad ; \qquad f(-1) = 1 - 2 + 3$$

$$f(-1) = 2 \qquad ; \qquad y = -1$$

liefert in (1):

$$f(-x) = f(x) \cdot f(-1) - f(x) - f(-1) + 2$$
$$f(-x) = 2f(x) - f(x) - 2 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade. Setzen wir nun $y = -x$ in (2):

$$f(0) = f(x) + f(x) + 2x(-x) - 1$$

$$1 = 2f(x) - 2x^2 - 1$$

Dann folgt letztlich

$$f(x) = x^2 + 1$$

IV Runde 4

Aufgabe 011241:
Bei 27000 Düngungsversuchen mit Phosphordüngemitteln stellte man die folgenden mittleren Ernteerträge für Kartoffeln fest:

Düngergabe bezogen auf P2O5 (dt/ha)	Ernteertrag (dt/ha)
0,0	237
0,3	251
0,9	269

Die zwischen der Düngergabe x (in dt/ha) und dem Ernteertrag y (in dt/ha) bestehende Beziehung kann durch die folgende Relation angenähert wiedergegeben werden:

$$y = a - b \cdot 10^{-kx}$$

wobei a, b und k Konstanten sind.
a) Berechnen Sie mit Hilfe der oben angegebenen Werte diese Konstanten!
b) Berechnen Sie den Ernteertrag für eine Düngergabe von 0,6 dt/ha und 1,2 dt/ha!
c) Stellen Sie die prozentuale Abweichung der errechneten Werte von den im Versuch ermittelten Werten 261 dt/ha bzw. 275 dt/ha fest!

Lösung von Korinna Grabski:
a) Es gilt:

$$237 = a - b$$
$$251 = a - b \cdot 10^{-0,3k}$$
$$269 = a - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Gleichung (1) kann man leicht nach a umstellen und in die anderen beiden Gleichungen einsetzten. Man erhält:

$$14 = b - b \cdot 10^{-0,3k} \qquad ; \qquad 32 = b - b \cdot 10^{-0,9k}$$

Dies kann man umstellen zu:

$$10^{-0,3k} = \frac{b-14}{b} \qquad ; \qquad 10^{-0,9k} = \frac{b-32}{b} = (10^{-0,3k})^3$$

Setzt man beide Gleichungen ineinander ein, erhält man:

$$\begin{aligned} (\frac{b-14}{b})^3 &= \frac{b-32}{b} \\ \frac{b^3-42b^2+588b-2744}{b^3} &= \frac{b-32}{b} \\ b^4-42b^3+588b^2-2744b &= b^4-32b^3 \\ 0 &= 10b^3-588b^2+2744b \\ 0 &= 10b\cdot(b^2-\frac{588}{10}b+\frac{2744}{10}) \end{aligned}$$

Durch Anschauen der Ausgangsgleichungen kann man leicht sehen, dass die Lösung $b=0$ entfällt. Damit gilt:

$$b_{1,2} = \frac{294}{10} \pm \sqrt{\frac{86436}{100} - \frac{2744}{10}}$$

$$b_1 = 53{,}69 \quad ; \quad a_1 = 290{,}69 \quad ; \quad k_1 = 0{,}44 \quad \text{und} \quad b_2 = 5{,}11 \quad ; a_2 = 242{,}11$$

Für die zweiten Werte lässt sich kein k berechnen. Damit entfällt diese Lösung.
Die Konstanten haben damit folgende Werte: $b=53{,}69, a=290{,}69$ und $k=0{,}44$.
b) $x=0{,}6$ dt/ha $\rightarrow y=261{,}46$ dt/ha ; $x=1{,}2$ dt/ha $\rightarrow y=274{,}77$ dt/ha
c) $x=261{,}46/261=1{,}0018 \rightarrow$ Für den ersten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,18%.
$x=274{,}77/275=0{,}9992 \rightarrow$ Für den zweiten Versuch gibt es eine prozentuale Abweichung von 0,08%.

Aufgabe 071243:
Geben Sie alle Funktionen $y=f(x)$ an, die jeweils in größtmöglichem Definitionsbereich (innerhalb des Bereichs der reellen Zahlen) der Gleichung

$$a\cdot f(x^n)+f(-x^n)=bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a|\neq 1$ ist!

Lösung von cyrix:
Da n ungerade ist, gilt für alle reellen x die Identität $(-x)^n=-x^n$. Insbesondere erhält man also durch Einsetzen von $-x$ in die Funktionalgleichung eine zweite:

$$a\cdot f(-x^n)+f(x^n)=-bx$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $(a+1)\cdot(f(x^n)+f(-x^n))=0$, also wegen $a\neq -1$ schließlich $f(-x^n)=-f(x^n)$. Setzt man dies wiederum in die Ausgangs-Funktionalgleichung ein, erhält man $(a-1)\cdot f(x^n)=bx$ bzw. nach Division durch $a-1\neq 0$ und der passenden Substitution

$$f(x)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{x}$$

Man überprüft schnell, dass diese Funktion tatsächlich auch die Funktionalgleichung erfüllt, da

$$f(x^n)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{x^n}=\frac{b}{a-1}\cdot x \qquad \text{und}$$

$$f(-x^n)=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{-x^n}=\frac{b}{a-1}\cdot\sqrt[n]{(-x)^n}=\frac{b}{a-1}\cdot(-x)$$

also gilt:

$$a\cdot f(x^n)+f(-x^n)=a\cdot\frac{b}{a-1}\cdot x-\frac{b}{a-1}\cdot x=(a-1)\cdot\frac{b}{a-1}\cdot x=bx$$

Bemerkung: Damit diese Funktionen wohldefiniert sind, muss man für negative reelle Zahlen x und ungerade Wurzelexponenten n die Wurzel-Funktion in ihrem Definitionsbereich auf die gesamten reellen Zahlen erweitern via $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, sodass sie auf dem Bereich der gesamten reellen Zahlen die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $p : x \mapsto x^n$ ist.
Dies ist möglich, da p eine eineindeutige Abbildung von den reellen Zahlen auf die reellen Zahlen ist.

Aufgabe 081246:
Es seien n eine positive ganze Zahl, h eine reelle Zahl und $f(x)$ ein Polynom (ganze rationale Funktion) mit reellen Koeffizienten vom Grade n, das keine reellen Nullstellen besitzt.
Man beweise, dass dann auch das Polynom

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

keine reellen Nullstellen hat!

Lösung von Nuramon:
Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in mathbbR : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O. B. d. A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d. h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Aufgabe 091243:
Es ist zu beweisen, dass für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ die Funktion f mit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

Lösung von cyrix:
Wir definieren für alle nicht-negativen ganzzahligen n die Funktion

$$f_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(Insbesondere ist f_0 die Funktion, die konstant 1 ist.) Dann gilt für alle $n \geq 1$ offenbar $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.
Wir zeigen nun im Folgenden induktiv für alle nicht-negativen ganzzahligen n die schärfere Aussage: „Ist n gerade, so ist $f_n(x)$ stets positiv. Und ist n ungerade, so hat f_n genau eine Nullstelle.“

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt (wegen $f_1(x) = 1 + x$) diese Behauptung offenbar. Sei ab nun $n \geq 2$ und es gelte diese Behauptung für $n - 1$. Wir betrachten nun die Funktion f_n mit ihrer Ableitungsfunktion f_{n-1}.
Ist n ungerade, so ist f_{n-1} nach Annahme stets positiv, also f_n streng monoton steigend. Da die höchste Potenz von x einen ungeraden Exponenten (und positiven Koeffizienten) besitzt, ist $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) =$

$-\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Da die Funktion f_n also negative wie positive Funktionswerte annimmt, stetig und streng monoton steigend ist, gibt es genau eine Stelle, an der sie den Funktionswert 0 annimmt.

Ist n dagegen gerade, so besitzt nach Annahme f_{n-1} genau eine Nullstelle x_0. Für kleinere Argumente ist f_{n-1}, wie gerade gesehen, negativ, und für größere positiv. Also ist f_n im Intervall $(-\infty, x_0)$ streng monoton fallend und im Intervall (x_0, ∞) streng monoton steigend. Damit nimmt sie an der Stelle x_0 ihr globales Maximum an. Jedoch ist $f_n(x_0) = f_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = 0 + \frac{1}{n!} \cdot x_0^n > 0$. Letzteres gilt, da der Exponent n eine gerade Zahl ist und wegen $f_{n-1}(0) = 1 \neq 0$ auch $x_0 \neq 0$ ist.
Die Behauptung der Aufgabenstellung folgt aus dieser strengeren sofort, $\square$.

Aufgabe 101242:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn h eine reelle Zahl ist und wenn eine ganzrationale Funktion f vom Grade n mit reellen Koeffizienten keine reellen Nullstellen besitzt, so gilt dasselbe von der ganzrationalen Funktion F, die durch

$$F(x) = f(x) + h \cdot f'(x) + h^2 \cdot f''(x) + ... + h^n \cdot f^{(n)}(x)$$

definiert ist.

Lösung von Nuramon:
Es ist unmittelbar klar, dass F ebenfalls ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist.
Da f keine reellen Nullstellen hat, muss n gerade sein und es muss entweder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$ oder $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$ gelten. O. B. d. A. gelte $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
Da F den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizienten wie f hat, hat F ein globales Minimum, d. h. es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \geq F(x_0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $F(x_0) > 0$ gilt.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = F(x) - hF'(x)$. Das kann man leicht nachrechnen oder es sich abstrakt mit der geometrischen Reihe herleiten (beachte, dass die Ableitung auf der Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ ein nilpotenter Operator ist):

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \left(1 - h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} f.$$

Wegen $F'(x_0) = 0$ folgt somit

$$F(x_0) = f(x_0) + hF'(x_0) = f(x_0) > 0.$$

Aufgabe 111242:
Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt } (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Man beweise, dass die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
f ist periodisch mit der Periode π. Falls $a = \frac{m}{n}$ rational ist, gilt

$$F(x + n\pi) = f(x + n\pi) + f(\frac{m}{n}x + m\pi) = F(x)$$

$f(x)$ ist nicht negativ und $f(x) \leq \frac{1}{2}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x = n\pi$.
Sei nun F periodisch mit der Periode p. Dann gilt: $1 = F(0) = F(p) = f(p) + f(ap)$.

Diese Gleichung ist nur für $f(p) = \frac{1}{2} \wedge f(ap) = \frac{1}{2}$ erfüllt. Also gibt es ganze Zahlen $m,n \in \mathbb{Z}$, so dass $p = n\pi$ und $ap = m\pi$ gilt. Hieraus folgt $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 111246B:
Als „Abstand“ zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.
Es seien die im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben.
Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der „Abstand“ von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

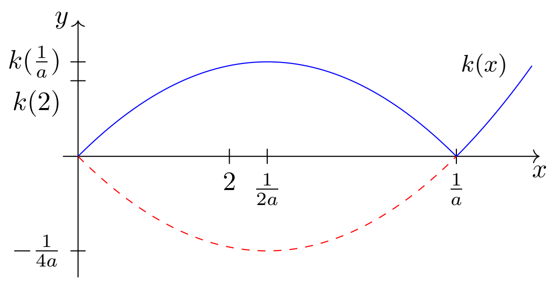
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da für alle $x \in (-2, 2)$: $f(x) = f(-x)$ und $g(x) = g(-x)$ richtig ist, braucht man die Funktion k

$$k(x,a) = |h(x,a)| \qquad \text{mit} \qquad h(x,a) = f(x) - g8x)$$

(a ist ein Parameter, der allen reellen Zahlen größer als Null annehmen darf) nur im Intervall (0,2) zu betrachten. Es ist

$$h(x,a) = ax^2 - x = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}$$

Das Bild von h ist für jedes zugelassene a eine Parabel, die nach oben geöffnet ist, die die x-Achse bei 0 und $\frac{1}{a}$ schneidet und die den Scheitelpunkt $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{4a}\right)$ besitzt.



Um die Funktion l

$$l(a) = \max_{x \in (0,2)} k(x,a) \qquad , \quad a > 0$$

auf absolutes Minimum zu untersuchen, werden drei Fälle unterschieden:

1. Fall: $2 \leq \frac{1}{2a} \leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ (Abbildung)

$$l(a) = k(2,a) = -h(2,a) = -4a + 2$$

2. Fall: $\frac{1}{2a} \leq 2 \leq \frac{1}{a} \leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$

$$l(a) = k\left(\frac{1}{2a},a\right) = -h\left(\frac{1}{2a},a\right) = \frac{1}{4a}$$

3. Fall: $\frac{1}{a} \leq 2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a$; das Intervall $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ wird wegen die hier möglichen Fälle

$$(3') : \quad l(a) = k\left(\frac{1}{2a}, a\right) = \frac{1}{4a} \qquad ; \qquad (3'') : \quad l(a) = k(2,a) = 4a - 2$$

noch zerlegt. Zur Ungleichung $\frac{1}{4a} \geq 4a - 2$ gehört der Fall 3'. Es ist

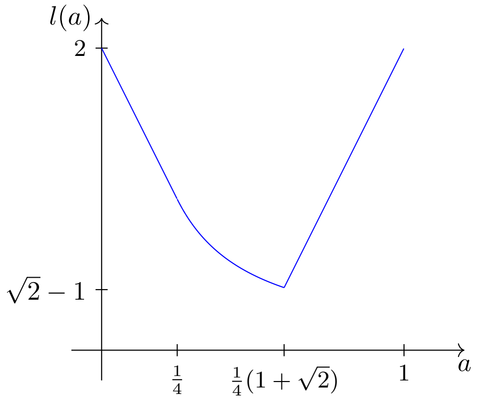
$$\frac{1}{4a} \geq 4a - 2 \leftrightarrow 0 \geq 16a^2 - 8a - 1 \leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{2}), \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})\right]$$

Wegen $a \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ und $\left[\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \left[\frac{1}{4}(1 - \sqrt{2}), \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})\right]$ ist also $l(a) = \frac{1}{4a}$ für $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})\right]$ und $l(a) = 4a - 2$ für $a \in \left[\frac{1}{4}(1 + \sqrt{2}), \infty\right)$.

Damit ist insgesamt

$$l(a) = \begin{cases} -4a+2 & \text{für } a \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{4a} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right] \\ \frac{1}{4a-2} & \text{für } a \in \left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right). \end{cases}$$

Da l im Intervall $\left(0, \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]$ streng monoton fallend ist und in $\left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}), \infty\right)$ streng monoton wachsend ist, besitzt l an der Stellen $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$ und nur an dieser Stelle das absolute Minimum.



Aufgabe 131244:
Man ermittle alle Paare (f, g) von Funktionen, die für alle von $-1; 0$ und 1 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und für alle diese x die Gleichungen erfüllen:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot f(x) = x^2 \cdot g(x) \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
Gleichung (2) ist äquivalent zu $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 \cdot g(x)$.
Führt man in der ersten Gleichung die Substitution $x \leftarrow \frac{1}{x}$ durch, erhält man $\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot g(x)$, zusammen also

$$1 + (x - x^3) \cdot g(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

und

$$\frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{x^3 - x} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

also $x \cdot f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ und damit

$$f(x) = \frac{1}{x - x^3} = -g(x)$$

Aufgabe 131246B:
a) Man beweise folgende Behauptung:
Es gibt keine ganzrationale Funktion f, bei der für jedes x die beiden Ungleichungen gelten:

$$f(x) > f''(x) \qquad (1)$$

$$f'(x) > f''(x) \qquad (2)$$

b) Entsteht eine richtige Behauptung, wenn man in der bei a) gemachten Behauptung die Ungleichung (2) durch $f(x) > f'(x) \quad (3)$ ersetzt?

Lösung von cyrix:
a) Wir nehmen an, es gäbe eine ganzrationale Funktion f, die beiden angegebenen Bedingungen (1) und (2) genügt.

Es kann f keine konstante Funktion sein, da wegen $f'(x) = f''(x) = 0$ die Bedingung (2) nicht erfüllt ist. Auch kann f keine lineare (und nicht konstante) Funktion sein, da diese eine Nullstelle x besitzt, für die dann wegen $f(x) = 0 = f''(x)$ die Bedingung (1) nicht erfüllt ist.

Habe also ab nun f mindestens den Grad $n \geq 2$. Dann hat f' den Grad $n-1$ sowie f'' den Grad $n-2$, sodass die ganzrationalen Funktionen $g := f - f'$ und $h := f' - f''$ den Grad n bzw. $n-1$ besitzen.
Eine der beiden natürlichen Zahlen n und $n-1$ ist ungerade. Ist dies n, dann hat g ungeraden Grad, besitzt also eine Nullstelle x, für die $f(x) = f'(x)$ gilt, was ein Widerspruch zu (1) ist. Ist dagegen $n-1$ ungerade, so folgt analog, dass h eine Nullstelle x besitzt, was dann zu $f'(x) = f''(x)$, also einem Widerspruch zu (2) führt.

Damit kann es also keine solche Funktion f geben, was die Behauptung beweist, $\square$.

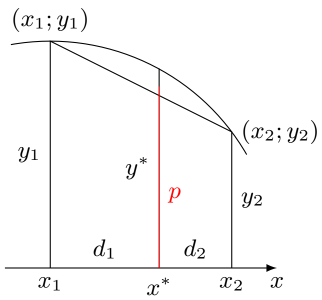
b) Ersetzt man die Bedingung (2) durch (3), so erhält man keine wahre Aussage mehr, wie die Funktion $f(x) = 1$, die für alle reellen x konstant den Funktionswert 1 besitzt, zeigt, denn es ist für diese Funktion und alle reellen Zahlen x

$$f(x) = 1 > 0 = f'(x) = f''$$

sodass sie beide Bedingungen (1) und (3) erfüllt.

Aufgabe 141243:
In einem Mathematikzirkel, in dem Eigenschaften von Funktionen f bei Kehrwertbildung untersucht werden, vermutet ein Zirkelteilnehmer, allgemein gelte für Funktionen f, die in einem Intervall J definiert sind und nur positive Funktionswerte haben, der folgende Satz:
(a) Ist f in J streng konkav, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konvex.
Ein anderer Zirkelteilnehmer meint, es gelte auch der folgende Satz:
(b) Ist f in J streng konvex, so ist $\frac{1}{f}$ in J streng konkav.
Man untersuche jeden dieser Sätze auf seine Richtigkeit.
Hinweise:
(1) Genau dann heißt $f(x)$ in J streng konvex bzw. konkav, wenn für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $x_1 < x^* < x_2$ der auf der von den Punkten $[x_1; f(x_1)]$ und $[x_2; f(x_2)]$ begrenzten Sehne gelegenen Punkt, dessen Abszisse x^* ist, eine Ordinate hat, die größer bzw. kleiner als $f(x^*)$ ist.
(2) Mit $\frac{1}{f}$ ist die durch die Festsetzung $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ für alle Zahlen x des Intervalls J definierte Funktion g bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(A) ist richtig.
Zum Beweis nehmen wir an, dass f in J streng konkav ist und dass x_1, x^*, x_2 mit $x_1 < x^* < x_2$ drei Abszissenwerte in J seien.
Wir setzen $y_1 = f(x_1)$, $y^* = f(x^*)$, $y_2 = f(x_2)$ und bezeichnen mit p bzw. q die Ordinate des auf der Sehne mit den Endpunkten $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ bzw. des auf der Sehne mit den Endpunkten $\left(x_1, \frac{1}{y_1}\right)$, $\left(x_2, \frac{1}{y_2}\right)$ gelegenen Punktes, dessen Abszisse x^* ist. (siehe Abbildung)



Ferner setzen wir $d_1 = x^* - x_1$, $d_2 = x_2 - x^*$. Dann gilt

$$p - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \qquad (1)$$

$$q - \frac{1}{y_1} = \frac{\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) \quad \text{also} \qquad (2)$$

$$p = \frac{y_2 - y_1}{d_1 + d_2}d_1 + y_1 = \frac{d_1 y_2 + d_2 y_1}{d_1 + d_2} \qquad (3)$$

$$q = \frac{d_1 \cdot \frac{1}{y_1} + d_2 \cdot \frac{1}{y_2}}{d_1 + d_2} - \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \qquad (4)$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad y_1 > 0 \quad y_2 > 0 \quad \text{also} \qquad (5)$$

$$p > 0 \qquad (6)$$

$$p < y^* \qquad (7)$$

Ferner gilt $d_1 d_2 (y_1 - y_2)^2 \geq 0$, also

$$d_1^2 y_1 y_2 + d_1 d_2 y_1^2 + d_1 d_2 y_2^2 + d_2^2 y_1 y_2 \geq d_1^2 y_1 y_2 + 2 d_1 d_2 y_1 y_2 + d_2^2 y_1 y_2$$

$$(d_1 y_2 + d_2 y_1)(d_1 y_1 + d_2 y_2) \geq (d_1 + d_2)^2 y_1 y_2$$

also wegen (3), (4), (5), (6) und (7)

$$q = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2}{(d_1 + d_2) y_1 y_2} \geq \frac{d_1 + d_2}{d_1 y_2 + d_2 y_1} = \frac{1}{p} > \frac{1}{y^*}$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also in J streng konvex, w. z. b. w.

(B) ist falsch.
Zum Beweis genügt die Angabe eines Beispiels, nämlich einer Funktion f, die in einem Intervall J nur positive Funktionswerte annimmt und dort streng konvex ist, während die Funktion $\frac{1}{f}$ in diesem Intervall streng konkav ist.
Eine solche Funktion ist z. B. die im Intervall $J = (0, +\infty)$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Diese Funktion nimmt wegen $\frac{1}{x} > 0$ im Intervall J nur positive Funktionswerte an.
b) Diese Funktion ist in J streng konvex. Für je drei Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$ gilt nämlich

$$(x^* - x_1)(x_2 - x^*) > 0, \quad \text{also}$$

$$-x^{*2} + x_1 x^* + x_2 x^* > x_1 x_2, \quad \text{d. h.} \quad -x^* + x_1 + x_2 > \frac{x_1 x_2}{x^*}$$

Daher gilt für die Ordinate p eines auf der Sehne durch $\left(x_1; \frac{1}{x_1}\right)$, $\left(x_2; \frac{1}{x_2}\right)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x^*:

$$p = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1}(x^* - x_1) + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{-x^* + x_1 + x_2}{x_1 x_2} > \frac{1}{x^*}$$

Daraus folgt, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ in J streng konvex ist.

c) Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist aber wegen $\frac{1}{f(x)} = x$ nicht streng konkav. Es gilt nämlich sogar für drei beliebige Zahlen x_1, x^*, x_2 aus J mit $0 < x_1 < x^* < x_2$, dass die Ordinate q eines auf der Sehne durch $(x_1; x_1)$, $(x_2; x_2)$ gelegenen Punktes mit der Abszisse x gleich x ist, so dass also insbesondere $\frac{1}{f}$ nicht streng konkav ist.

Aufgabe 151241:
Man untersuche, ob es ein Polynom $P(x)$ dritten Grades gibt, so dass $P(0) = 74$, $P(1) = 19$, $P(2) = 65$ und $P(3) = 92$ gilt.
Ist dies der Fall, so ermittle man $P(4)$ und $P(5)$.

Lösung von cyrix:
Eine Folge $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$ wird genau dann durch ein Polynom k-ten Grades mit $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ beschrieben, wenn ihre Differenzenfolge $P'(0) := P(1) - P(2)$, $P'(1) := P(2) - P(1)$, $\ldots$ durch ein Polynom $(k-1)$-sten Grades beschrieben wird.

Angewendet auf die Zahlenwerte der Aufgabe erhält man:

$$P'(0) = -55, \quad P'(1) = 46, \quad P'(2) = 27, \quad P''(0) = 101, \quad P''(1) = -19$$

also genügt kein Polynom zweiten Grades $P'''(0) = -120$.
Setzt man also nun P''' mit dem Wert von $P'''(0)$ identisch fort, erhält man entsprechend ein kubisches Polynom für P mit den geforderten Anfangswerten.
Insbesondere ergibt sich

$$P'''(1) = -120, \quad P'''(2) = -120; \quad P''(2) = -139, \quad P''(3) = -259;$$

$$P'(3) = -112, \quad P'(4) = -371; \quad P(4) = -20 \quad \text{und} \quad P(5) = -391$$

Bemerkung: Die Funktion P' ist die „diskrete Ableitung“ der Funktion P.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Das Polynom hat die Form $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mit den angegebenen Bedingungen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 &= 74 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 19 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 65 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 92 \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht a_0,a_1,a_2,a_3 bestimmen und erhält $P(x) = -20x^3 + 110{,}5x^2 - 145{,}5x + 74$. Damit errechnet man $P(4) = -20$ und $P(5) = -391$.

Aufgabe 151242:
Man ermittle die Menge aller derjenigen positiven reellen Zahlen r, für die folgende Aussage wahr ist:
Für jede positive reelle Zahl a hat die für alle reellen x durch $f(x) = 4 - x^2 - ax^3$ definierte Funktion f zwischen den Zahlen $2 - ar$ und 2 eine Nullstelle.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Da $f(0) = 4 > 0$ und wegen $a > 0$, $f(2) = -8a < 0$ gilt und die Funktion f stetig ist, besitzt f im Intervall $0 < x < 2$ wenigstens eine reelle Nullstelle.
Da für alle $x > 0$ sicher $f(x) = -2x - 3ax^2 < 0$ ist, folgt, dass f für alle positive x streng monoton fallend ist. Somit liegt im Intervall $0 < x < 2$ genau eine Nullstelle von f. Es genügt daher, $2 - ar > 0$ zu betrachten.

Im Intervall $2-ar < x < 2$ liegt genau dann eine Nullstelle von f, wenn für alle positiven a: $f(2-ar) > 0$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} f(2-ar) &= 4 - (2-ar)^2 - a(2-ar)^3 \\ &= a[a^3r^2 + ar(12-r) - 6a^2r^2 - 4(2-r)] \end{aligned}$$

für alle positiven a genau dann größer als null, wenn für alle positiven a

$$g(a) = a^3r^3 + ar(12-r) - 6a^2r^2 - 4(2-r) > 0$$

ausfällt. Ist nun $r > 0$ eine reelle Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so gilt:

$$\lim_{a\to 0} g(a) = 4r - 8 \geq 0$$

Das bedeutet $r \geq 2$.
Umgekehrt hat auch jedes $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft. Für $r = 2$ ist nämlich wegen

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} &> 0 \\ a^2 - 3a + \frac{5}{2} &> 0 \qquad \text{also} \\ 8a^3 + 20a - 24a^2 = f(2-2a) &> 0 \end{aligned}$$

für alle positiven reellen s.
Ist aber $r > 2$, so folgt wegen des monotonen Fallens von f und der soeben bewiesenen Ungleichung $f(2-2a) > 0$ aus $0 < 2-ar < 2-2a$, dass $f(2-ar) > 0$ ist. Damit haben genau alle $r \geq 2$ die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 151244:
Es sei f diejenige Funktion, die als Definitionsbereich die Menge aller Tripel (x, y, z) von nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = \pi$ hat und die jedem solcher Tripel jeweils die Zahl

$$f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$$

zuordnet. Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f und weisen Sie nach, dass jeder Wert in diesem Bereich angenommen wird!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es gilt für alle x,y,z:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \geq 0 \qquad (1)$$

Für $x = y = 0$, $z = \pi$ folgt $f(x,y,z) = 0$, d. h., die untere Grenze wird in Gleichung (1) angenommen.
Weiterhin gilt:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 3 \qquad (2)$$

Für $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ folgt: $f(x,y,z) = \frac{9}{4}$ (3).
Behauptung: $W_f = \left\{a|0 \leq a \leq \frac{9}{4}\right\}$.
Beweis: Für alle r ($r \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\left(|r| - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \text{d. h.} \quad |r|^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \text{oder} \quad r^2 - |r| + \frac{1}{4} \geq 0$$

Sei $s \in \mathbb{R}$ und $|s| \leq 1$. Dann gilt erst recht

$$r^2 - |rs| + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad \text{und somit} \qquad r^2 + rs + \frac{1}{4} \geq 0 \qquad (4)$$

Sei nun $r := \cos(x+y)$ und $:= \cos(x-y)$. Dann erhält aus (4):

$$\cos^2(x+y) + \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) \geq -\frac{1}{4} \quad \text{bzw.}$$

$$[2\cos^2(x+y) - 1] + [2\cos(x+y) \cdot \cos(x-y)] \geq -\frac{3}{2}$$

Da $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$ und $2\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta$ gilt, erhält man

$$\cos(2x+2y) + \cos 2x + \cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$\cos 2(x+y) + \cos 2x + \cos 2y \geq -\frac{3}{2}$$
$$3 - \cos 2x - \cos 2y - \cos 2(x+y) \leq \frac{9}{4}$$

Diese Ausdruck kann wir folgt zerlegt werden:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x+y)\right) \leq \frac{9}{4}$$

Da $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, ergibt sich:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) \leq \frac{9}{4}$$

Mit $x + y = \pi - z$ erhält man schließlich

$$0 \leq \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \leq \frac{9}{4}$$

Da $f(x,y,z)$ eine stetige Funktion von (x,y,z) ist und ihr Definitionsbereich der gesamte dreidimensionale euklidische Raum zusammenhängend ist, sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Zwischenwertsatzes für Funktionen von mehreren Variablen erfüllt. Daher nimmt f jeden Wert aus $\left[0; \frac{9}{4}\right]$ an.
Somit ist der Wertebereich von f die Mengen der reellen Zahlen

$$W_f = \left\{ a | 0 \leq a \leq \frac{9}{4} \right\}$$

Aufgabe 161241:
Es seien a, b, x_0 drei reelle Zahlen mit $a < x_0 < b$; das Intervall aller reeller Zahlen x mit $a < x < b$ sei I genannt.
Eine in I definierte Funktion f, sei an der Stelle x_0 differenzierbar. Ferner sei g die in I durch $g(x) = |f(x)|$ definierte Funktion.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist g genau dann an der Stelle x_0 nicht differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der geforderte Beweis ist erbracht, wenn die folgenden drei Aussagen als richtig nachgewiesen sind:

(1) Ist $f(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.
(2) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$, so ist g an der Stelle x_0 differenzierbar.

(3) Ist $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Zu (1): Ist $f(x_0) > 0$, so existiert wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) Stetigkeit von f an der Stelle x_0 eine Umgebung von $_0$, in der $f(x_0) > 0$ ist. In dieser Umgebung (einschließlich x_0) gilt somit $g(x) = f(x)$, also ist g ebenso wie f an der Stelle x_0 differenzierbar.
Ist $f(x_0) < 0$, so existiert entsprechend eine Umgebung von x_0, in der $g(x) = -f(x)$ gilt, woraus die Behauptung in analoger Weise folgt.

Zu (2): Wegen $f'(x_0) = 0$, also $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = 0$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von x_0, in der (für $x \neq x_0$) $\frac{|f(x)|}{x-x_0} < \varepsilon$ gilt.
Daher und wegen $\frac{|g(x)|}{x-x_0} = \frac{|f(x)|}{x-x_0}$ hat auch g an der Stelle x_0 die Ableitung 0.

Zu (3) beweise wir die äquivalente Aussage:
(3'): Ist $f(x_0) = 0$ und g an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.
Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0}$. Da für alle $x > x_0$ aus I nun $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$; da für alle $x < x_0$ aus I aber $\frac{g(x)}{x-x_0} \geq 0$ gilt, folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} \leq 0$.
Hieraus ergibt sich entsprechend wie in (2) wegen $|\frac{f(x)}{x-x_0}| = |\frac{g(x)}{x-x_0}|$ auch $f'(x_0)$.

Aufgabe 161246A:
Es sind alle Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ anzugeben, die die folgende Eigenschaft haben:
Für alle reellen Zahlen x gilt $x \cdot f(x-1) = (x-2) \cdot f(x)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für $x = 2$ folgt: $2 \cdot f(1) = 0$, d. h., $x = 1$ ist Nullstelle von $f(x)$.
Für $x = 1$ folgt daraus: $1 \cdot f(0) = 0$, d. h., $x = 0$ ist Nullstellen von $f8x)$.
Somit kann $f(x)$ dargestellt werden, als

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot g(x)$$

mit einem Polynom $g(x)$. Setzt man diesen Ansatz in die Funktionalgleichung ein, so ergibt sich:

$$x \cdot [(x-1)(x-2)g(x-1)] = (x-2) \cdot [x \cdot (x-1)g(x)]$$

Hieraus folgt für alle $x \neq 0, 1, 2$ die Beziehung $g(x-1) = g(x)$, d. h., $g(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1. Daraus folgt, da $g(x)$ ein Polynom ist:

$$g(x) = c = \text{const.}$$

Somit erhält man, dass alle Polynome der geforderten Art in der Form

$$f(x) = c \cdot x \cdot (x-1) \qquad (2)$$

mit reellem c darstellbar sind. Setzt man die gefundene Darstellung in die Funktionalgleichung ein, so entsteht die Identität

$$x \cdot c \cdot (x-1)(x-2) = (x-2) \cdot c \cdot x \cdot (x-1)$$

so dass auch tatsächlich jedes Polynom der Form (1) den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 171241:
Sind f und g im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetige Funktionen, so seien $d_1(f,g)$ und $d_2(f,g)$ wie folgt definiert:

$$d_1(f,g) = \max |f(x) - g(x)|$$

$d_2(f,g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie zwei Strecken auf den Geraden $x = -1$ bzw. $x = 1$ begrenzt wird.
(Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefasst.)
Es seien nun f_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ und h die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ durch

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1} \quad \text{und} \quad h(x) = 1$$

definierte Funktionen.
a) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Funktionen f_n und h im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ stetig. Mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Partialsummen ergibt sich, sofern $x \neq 1$ ist:

$$f_n(x) = (1-x)\frac{x^n - 1}{x - 1} \qquad \text{also} \qquad f_n(x) = 1 - x^n \qquad (1)$$

Wegen $f_n(1) = 0$ gilt die Beziehung (1) auch für $x = 1$. Daher gilt $|f_n(x) - (x)| = |1 - x^n - 1| = |x^n|$, also $d_1(f_n,h) = \max |x^n| = 1$. Ferner ist die Definition von $d_2(f,g)$ gleichwertig mit

$$d_2(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx \qquad \text{somit gilt} \qquad d_2(f_n,h) = \int_{-1}^{1} |x^n| dx$$

Da das Bild von $y = |x^n|$ für $-1 \leq x \leq 0$ durch Spiegelung an der y-Achse in das Bild von $y = x^n (= |x^n|)$ für $0 \leq x \leq 1$ übergeht, ist demnach

$$d_2(f_n,h) = 2 \cdot \int_0^1 x^n dx = 2 \cdot \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

Somit ergibt sich

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} d_1(f_n,h) = 1 \qquad ; \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} d_2(f_n,h) = 0$$

Aufgabe 171242:
Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch

$$g(1) = 1, \quad g(-1) = -1 \qquad (1)$$
$$h(1) = -1, \quad h(-1) = 1 \qquad (2)$$

definierten Funktionen. Ferner seien f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind. Für diese Funktionen gelten:

$$f_1(1) = -1, \quad f_6(1) = f_7(1) = 1 \qquad (3)$$
$$f_3(f_4(1)) = -1 \qquad (4)$$
$$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1 \qquad (5)$$

Man beweise, dass in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst stellen wir fest, dass jede der gegebenen Funktionen bereits festgelegt sind, wenn man ihren Funktionswert in genau einem Argument kennt. Daher folgt sofort $f_6 \equiv f_7 \equiv g$ und $f_1 \equiv h$, womit Gleichung (5) äquivalent ist zu

$$(f_2 \circ \cdots \circ f_5)(1) = 1. \quad (6)$$

Aus $f_3(f_4(1)) = -1$ folgt, dass $f_3 \equiv g$ und $f_4 \equiv h$, oder $f_3 \equiv h$ und $f_4 \equiv g$ gilt. Insbesondere ist

$$f_3(f_4(-1)) = 1. \quad (7)$$

Wenn nun $f_5 \equiv g$ gilt, so folgt aus Gleichung (6) $f_2(-1) = 1$, also $f_2 \equiv h$. Aus $f_5 \equiv h$ würde zusammen mit Gleichung (7) hingegen $f_2 \equiv g$ folgen.
Da also genau eine Funktion von f_2, f_5 gleich g ist und genau eine Funktion von f_3, f_4 gleich g ist, ergibt sich die gesuchte Anzahl zu 4.

Aufgabe 181241:
Man ermittle alle ganzen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass zu den Polynomen

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30$$
$$g(x) = x^3 + 2x + a$$

ein Polynom $h(x)$ so existiert, dass für alle reellen x die Gleichung $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zu den gegebenen Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ gibt es genau zwei eindeutig bestimmte Polynome $h(x)$ und $q(x)$ derart, dass $f(x) = g(x) \cdot h(x) + q(x)$ für alle reellen x gilt und $q(x)$ das Nullpolynom ist oder kleineren Grad als $g(x)$ hat.
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = g(x)[x^9 - x^8 + x^7 + (-a+2)x^6 + (a-2)x^5 + (a-4)a^4 + (a^2 - 4a + 4)x^3 + (-a^2 + 8)x^2 +$$

$$+(-3a^2+12a-8)x+(-a^3+6a^2+4a+5)]+(a^3+6a^2+32a+15)x^2+(5a^3-24a^2+16a+33)x+a^4-6a^3+4a^2+5a+30$$

Eine ganze Zahl a hat daher genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn für sie alle reellen x

$$q(x) = (a^3 + 6a^2 + 32a + 15)x^2 + (5a^3 - 24a^2 + 16a + 33)x + a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 = 0$$

ist, d. h., wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} a^3 + 6a^2 - 32a + 15 &= 0 \qquad (1)\\ 5a^3 - 24a^2 + 16 + 33 &= 0 \qquad (2)\\ a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 5a + 30 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

gelten.
Angenommen, eine ganze Zahl a erfüllt (1), (2), (3). Dann folgt $a|33$ und $a|30$, also $a|3$, d. h. a ist eine der Zahlen 1, -1, 3, -3.
Wegen

$$\begin{aligned} 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 15 &= -10\\ (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 32 \cdot (-1) + 15 &= 52\\ (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 32 \cdot (-3) + 15 &= 138 \end{aligned}$$

verbleibt nur die Möglichkeit $a = 3$. In der Tat erfüllt $a = 3$ die Gleichungen (1), (2), (3). Daher hat genau die Zahl $a = 3$ die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 191241:
Man ermittle alle Paare $(f(x); g(x))$ von Polynomen 3. Grades

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ reelle Zahlen sind und für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder der Werte, die $f(x)$ und $g(x)$ für $x = 1, 2, 3$ und 4 annehmen, ist eine der Zahlen 0 und 1.
(2) Wenn $f(1) = 0$ oder $f(2) = 1$ ist, so ist $g(3) = 0$ und $g(4) = 1$.
(3) Wenn $f(1) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$.
(4) Wenn $f(2) = 0$ oder $f(4) = 0$ ist, so ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$.
(5) Wenn $f(3) = 1$ oder $f(4) = 1$ ist, so ist $g(1) = 0$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Angenommen, für zwei Polynome $f(x), g(x)$ seien die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.
1. Zunächst wird gezeigt, dass durch die Bedingungen (1) bis (5) die Funktionswerte $f(k), g(k)$ für $k =$ 1,2,3,4 eindeutig bestimmt sind. Wäre $f(4) = 1$, so führten (3) und (5) auf den Widerspruch $g(1) = 1$, $g(1) = 0$. Also ist nach (1) $f(4) = 0$. Nach (4) folgt hieraus $g(2) = 0, g(4) = 0$.
Aus (2) ergibt sich daher, dass weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$ sein kann, somit ist nach (1) $f(1) = 1, f(2) = 0$. Hiernach erhält man aus (3) $g(1) = 1, g(3) = 1$.
Somit ergibt (5), dass nicht $f(3) = 1$ gelten kann; nach (1) ist also $f(3) = 0$. Wir erhalten also

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 0; \quad f(3) = 0; \quad f(4) = 0; \quad g(1) = 1; \quad g(2) = 0; \quad g(3) = 1; \quad g(4) = 0 \qquad (6)$$

2. Die Gleichungen (6) lauten ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 0 \\ 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 &= 0 \qquad \text{und} \\ b_3 + b_2 + b_1 + b_0 &= 1 \\ 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 &= 0 \\ 27b_3 + 9b_2 + 3b_1 + b_0 &= 1 \\ 64b_3 + 16b_2 + 4b_1 + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dies sind zwei lineare Gleichungssysteme für die Koeffizienten, die man z. B. durch schrittweise Elimination einer Unbekannten auflösen kann. Man erhält so:

$$a_0 = 4; \quad a_1 = -\frac{13}{3}; \quad a_2 = \frac{3}{2}; \quad a_3 = -\frac{1}{6} \qquad \text{und}$$
$$b_0 = 8; \quad b_1 = -\frac{34}{3}; \quad b_2 = 5; \quad b_3 = -\frac{2}{3}$$

Es können daher nur die Polynome

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4 \qquad \text{und} \qquad g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{34}{3}x + 8$$

die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllten. Dass (1) erfüllt ist, kann man mit einer Probe leicht nachprüfen. (2) ist erfüllt, denn es ist weder $f(1) = 0$ noch $f(2) = 1$. (3) ist erfüllt, denn es ist $g(1) = 1$ und $g(3) = 1$. (4) ist erfüllt, denn es ist $g(2) = 0$ und $g(4) = 0$ und (5) ist erfüllt, denn es ist weder $f(3) = 1$ noch $f(4) = 1$.
Daher erfüllt genau das Paar $(f(x), g(x))$ mit $f(x), g(x)$ aus (7) alle Bedingungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 211244:
Es sei $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ gelte.
Man setze

$$r = \frac{|a_0| + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|}$$

und beweise:
a) Ist $r \geq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-r \leq x \leq r$.
b) Ist $r \leq 1$, so liegt jede reelle Nullstelle von $f(x)$ (falls eine solche existiert) im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zunächst wird folgender Hilfssatz bewiesen:
c) Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_0 mit $|x_0| > 1$ besitzt, so gilt $|x_0| \leq r$.
Beweis von c):
Wenn $f(x)$ eine Nullstelle x_o mit $|x_0| > 1$ besitzt, dann folgt mittels Dreiecksungleichung (für beliebige reelle Zahlen s und t gilt $|s + t| \leq |s| + |tY)$

$$\begin{aligned} |a_n||x_0|^n &= | - a_0 - a_1x_0 - ... - a_{n-1}x_0^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1||x_0| + ... + |a_{n-1}||x_0|^{n-1} \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|)|x_0|^{n-1} \qquad \text{(wegen } |x_0| > 1) \\ \text{also} \quad |x_0| &\leq \frac{|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|}{a_n} = r \end{aligned}$$

da $|a_n| \neq 0$ und $|x_0| \neq 0$ ist. Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage a).

Beweis: Jede Nullstelle x_0 mit $|x_0| \leq 1$ liegt wegen der Voraussetzung $r \geq 1$ im Intervall $-r \leq x_0 \leq r$. Gilt aber $|x_0| > 1$, so folgt mit c): $-r \leq x_0 \leq r$.

Aus der Richtigkeit der Aussage c) folgt die Richtigkeit der Aussage b).
Beweis: Angenommen, es gibt eine Nullstelle x_0, die nicht im Intervall $-1 \leq x_0 \leq 1$ liegt, so folgt mit c) $r \leq |x_0| > 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $r \leq 1$.

Aufgabe 211246B:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f und g, die für alle nichtnegativen reellen Zahlen x definiert sind, reelle Funktionswerte haben und folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $f(x) \geq 1$ und $g(x) \geq 0$.
(2) Für alle $x \geq 0$ gilt $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$.
(3) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$$

(4) Für alle $x \geq 0$ und alle $y \geq 0$ gilt

$$g(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y)$$

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
I. Angenommen f und g seien Funktionen, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Dann werden durch

$$u(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad v(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{für alle } x \geq 0$$

Funktionen u,v definiert, die nach (1) und (2) $u(x) \geq 1$, $u(x) \cdot v(x) = 1$ für alle $x \geq 0$ und nach (3) und (4)

$$u(\sqrt{s^2 + t^2}) = [f(s) + g(s)] \cdot [f(t) + g(t)] = u(s) \cdot u(t)$$

für alle $s,t \geq 0$ und somit

$$u(\sqrt{x + y}) = u(\sqrt{x}) \cdot u(\sqrt{y})$$

für alle $x,y \geq 0$ erfüllen.
Somit wird durch $F(x) := \ln[u(\sqrt{x})]$ für alle $x \geq 0$ eine Funktion F definiert, die den Bedingungen $F(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $F(x - y) = F(x) + F(y)$ für alle $x,y \geq 0$ genügt.

Hieraus folgt: Es gibt eine reelle Zahl k mit $k \geq 0$, so dass $F(x) = kx$ für alle $x \geq 0$ gilt. Mit den eingeführten Funktionen u, v, F gilt somit für alle $x \geq 0$

$$u(x) = e^{kx^2} \qquad ; \qquad v(x) = e^{-kx^2};$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \qquad ; \qquad g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \qquad (1)$$

Daher gilt: Ein Funktionspaar (f,g) kann nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn sich f und g beide mit einem und demselben reellen $k \geq 0$ durch (1) für alle $x \geq 0$ darstellen lassen.

II. Nachweis dieser Eigenschaften
zu (1): Für alle $x \geq 0$ gilt: Wegen $kx^2 \geq 0$ ist $e^{kx^2} \geq 1 \geq e^{-kx^2} > 0$. Daraus ergibt sich einerseits

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} - e^{-kx^2}\right) \geq 0$$

und andererseits aus $\left(e^{kx^2} - 1\right)^2 \geq 0$ über $e^{kx^2} + 1 \geq 2e^{kx^2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{kx^2} + e^{-kx^2}\right) \geq 1$$

zu (2): Für alle $x \geq 0$ ist

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2kx^2} + 2 + e^{kx^2} - e^{2kx^2} + 2 - e^{-2kx^2}\right) = 1$$

zu (3): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} + e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = f(\sqrt{x^2 + y + 2})$$

zu (4): Für alle $x,y \geq 0$ ist

$$f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot f(y) = \frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} + e^{k(-x^2+y^2)} - e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{k(-x^2+y^2)} + e^{k(x^2-y^2)} - e^{k(-x^2-y^2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{k(x^2+y^2)} - e^{-k(x^2+y^2)}\right) = g(\sqrt{x^2 + y + 2})$$

Somit entsprechen die in (1) genannten Funktionen f und g genau den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 221241:
a) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen $a \neq 0$, b und c so gibt, dass die für alle reellen x durch

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \qquad (1)$$

definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(2) = 1$ hat und bei $x = 1$ einen lokalen Extremwert besitzt!
b) Gegeben seien zwei beliebige reelle Zahlen x_1 und x_2 mit $0 < x_1 < x_2$.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von x_1 und x_2) alle diejenigen reellen $a \neq 0$, b, c mit der Eigenschaft, dass die durch (1) definierte Funktion f die Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(x_2) = 1$ hat und bei $x = x_1$ einen lokalen Extremwert besitzt!

Lösung von weird:
Für den Aufgabenteil a) erhält man aus $f(0) = 1$ sofort den Wert $c = 1$ und die weiteren Gleichungen $f(2) = 16a + 4b + 1 = 1$ und $f'(1) = 4a + 2b = 0$ ergeben dann $a = b = 0$, im Widerspruch dazu, dass $a \neq 0$ vorausgesetzt war. Es gibt somit hier keine Lösung.

Auch für b) ergibt sich aus f(0)=1 sofort wieder $c = 1$. Die weiteren zwei Gleichungen für a und b sehen hier dann allgemeiner so aus:

$$f(x_2) = ax_2^4 + bx_2^2 + 1 = 1$$

$$f'(x_1) = 4ax_1^3 + 2bx_1 \; = 0$$

wofür wir wegen der Voraussetzung $0 < x_1 < x_2$ auch einfacher

$$ax_2^2 + b = 0$$

$$2ax_1^2 + b = 0$$

schreiben können. Insbesondere sieht man, dass wegen $a \neq 0$ sich für $x_2^2 \neq 2x_1^2$ ein Widerspruch ergibt, wie schon im Aufgabenteil a). Ist aber die Bedingung $x_2^2 = 2x_1^2$, also hier dann $x_2 = \sqrt{2}\, x_1 > 0$ erfüllt, so kann dann $a \neq 0$ sogar beliebig sein und für $b = -ax_2^2$ sind dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 221246B:
Bei der Untersuchung von Häufigkeitsverteilungen in der mathematischen Statistik treten Funktionen auf, die für endlich viele natürliche Zahlen definiert sind und für die gefordert wird, dass sie sogenannte Funktionalgleichungen (Gleichungen zwischen verschiedenen Funktionswerten) erfüllen.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende:
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 2$ und eine reelle Zahl p mit $0 < p < 1$.
Man ermittle (in Abhängigkeit von n und p) diejenigen Funktionen f mit der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ als Definitionsbereich, die für $k = 1, 2, ..., n$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-k+1) \cdot f(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot p^k \qquad (1)$$

Hinweis: Für $k = 1$ ist die Gleichung (1) sinngemäß als

$$\sum_{x=0}^{n} x \cdot f(x) = n \cdot p$$

aufzufassen.

Lösung von MontyPythagoras:
Etwas vereinfachend kann man schreiben:

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{x!}{(x-k)!} f(x) = \frac{n!}{(n-k)!} p^k$$

Wir teilen auf beiden Seiten durch $k!$:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k$$

Da $\binom{a}{b} = 0$ für $a < b$ ist, kann man den Index x auch bei k beginnen lassen, denn die Summanden für $x < k$ wären alle null:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k} f(x) = \binom{n}{k} p^k \qquad (2)$$

Das bedeutet, dass ein lineares Gleichungssystem für die $f(x)$ vorliegt, welches eine Dreiecksform aufweist. Bei $k = n$ lautet die Gleichung nämlich nur

$$f(n) = p^n$$

Man kann dann rekursiv die Werte für $f(k)$ aus $f(k+1)...f(n)$ berechnen. Führt man das von Hand für ein kleines n aus, z. B. $n = 3$, erkennt man ein Muster. Es scheint zu gelten:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{3}$$

Wir versuchen, die Gültigkeit dieser Formel zu beweisen, indem wir sie in (2) einsetzen:

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{x}{k}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{x!}{k!(x-k)!} \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \frac{n!}{k!(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Terme, in denen nicht x vorkommt, können vor die Summe gezogen werden:

$$\frac{n!}{k!} \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{k} p^k$$

Wir teilen durch $\binom{n}{k}$:

$$(n-k)! \sum_{x=k}^{n} \frac{1}{(n-x)!(x-k)!} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

$$\sum_{x=k}^{n} \binom{n-k}{x-k} p^x (1-p)^{n-x} = p^k$$

Wir substituieren $x = k + m$ mit $m = 0...(n-k)$:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{k+m} (1-p)^{n-k-m} = p^k$$

Wir teilen noch einmal durch p^k:

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = 1$$

Die linke Seite entspricht dem binomischen Lehrsatz, denn es ist

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} p^{m} (1-p)^{n-k-m} = (p + (1-p))^{n-k} = 1^{n-k} = 1$$

Daher ist die Gleichung (2) tatsächlich erfüllt, und die gesuchte Funktionsvorschrift entspricht der in (3) angegebenen Formel.

Aufgabe 231245:
Man ermittle alle Funktionen f, die für alle von 0 verschiedenen reellen Zahlen x definiert sind und die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $f(\frac{1}{x_1+x_2}) = f(\frac{1}{x_1}) + f(\frac{1}{x_2})$.
(2) Für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 + x_2 \neq 0$ ist $(x_1 + x_2) \cdot f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2)$.
(3) Es gilt $f(1) = 1$.

Lösung von cyrix:
Es sei $r \neq 0$ eine beliebige von Null verschiedene reelle Zahl. Setzen wir $x_1 = x_2 = \frac{1}{r}$, so sind x_1 und x_2 wohldefiniert und (sowie auch $x_1 + x_2$ von Null verschieden, sodass wir aus (1) die Beziehung

$$f\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{r}}\right) = 2f(r)$$

erhalten. Setzen wir dagegen $x_1 = x_2 = \frac{r}{2}$, so sind wieder die Voraussetzungen für (2) erfüllt, womit wir

$$r \cdot f(r) = \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) \cdot f\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot f\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} \cdot (2f(r))^2 = (r \cdot f(r))^2$$

erhalten, woraus $r \cdot f(r) \in \{0; 1\}$ folgt, da dies die einzigen reellen Zahlen sind, die gleich ihrem Quadrat sind.

Wäre für ein $r \neq 0$ das Produkt $r \cdot f(r)$ gleich 0, so also auch $f(r)$. Dann kann aber r wegen (3) einerseits nicht 1 sein, sodass wir $x_1 = r$ und $x_2 = 1 - r$ wählen und dies in (2) einsetzen können. Wegen $f(x_1) = f(r) = 0$ folgt damit dann aber auch

$$f(1) = f(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$$

was ein Widerspruch zu (3) ist.

Also muss für alle $r \neq 0$ die Gleichung $r \cdot f(r) = 1$ bzw. $f(r) = \frac{1}{r}$ gelten. Tatsächlich erfüllt diese Funktion auch alle drei geforderten Eigenschaften, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.

Aufgabe 241241:
a) Man beweise, dass durch

$$f(x) = \frac{(x^2 - x) \cdot (x^2 - x + 5) + 6}{(x^2 - x) \cdot (x^2 - x + 6) + 9}$$

eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist:

$$\frac{(x^2 - x)(x^2 - x + 5) + 6}{(x^2 - x)(x^2 - x + 6) + 9} = \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - x^3 + x^2 - 5x + 6}{x^4 - x^3 + 6x^2 - x^3 + x^2 - 6x + 9} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 6}{x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9} = 1 - \frac{x^2 - x + 3}{x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9}$$

Der Zähler hat offensichtlich keine (reelle) Nullstelle - lässt sich also nicht weiter faktorisieren. Wir könnten also nur noch prüfen, ob er als Faktor selbst im Nenner steckt. Wir prüfen also:

$$(x^2 - x + 3)(x^2 + ax + 3) \stackrel{?}{=} x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$$

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (6 - a)x^2 + (-3 + 3a)x + 9 = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$$

Das gilt offensichtlich für $a = -1$. Wir erhalten somit:

$$f(x) = \frac{(x^2 - x)(x^2 - x + 5) + 6}{(x^2 - x)(x^2 - x + 6) + 9} = 1 - \frac{1}{x^2 - x + 3}$$

Der Rest ist dann einfache Analysis.

Aufgabe 241243:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) = x \cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x + y \neq 0$ gilt $f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) = 1 + f(\frac{1}{x+y})$.
(3) Es gilt $f(1) = 2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine für alle $x \neq 0$ definierte Funktion f den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so folgt: Für alle $x \neq 0$ gilt nach (2)

$$2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2x}\right) \tag{4}$$

Setzt man hierin $\frac{1}{2x} = u$, so folgt: Für alle $u \neq 0$ gilt

$$2 \cdot f(2u) = 1 + f(u) \tag{5}$$

Aus (5), (1), (4) folgt für alle $x \neq 0$

$$x(1 + f(x)) = 2xf(2x) = f\left(\frac{1}{2x}\right) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 2xf(x) - 1$$

also $1 + f(x) = 2f(x) - \frac{1}{x}$. Daher kann nur die für alle $x \neq 0$ durch

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \tag{6}$$

definierte Funktion f die verlangten Eigenschaften haben.

II. Sie hat diese Eigenschaften; denn es gilt für alle x, y mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + x = x\left(1 + \frac{1}{x}\right) = xf(x)$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 + x + 1 + y = 1 + (1 + x + y) = 1 + f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$
$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Daher hat genau die in (6) angegebene Funktion die verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 251243:
Gibt es eine Funktion f, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?
(1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x + y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

Lösung von cyrix:
Die Funktion $f(x) := 1 - \frac{2}{1+3^x}$ erfüllt alle Eigenschaften. Wegen $3^x > 0$ für alle reellen Zahlen x ist die Funktion für alle solchen auch definiert und nimmt reelle Funktionswerte an. Genauer ist sogar $f(1) = 1 - \frac{2}{1+3} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, also Eigenschaft (2) erfüllt. Zum Nachweis von Eigenschaft (1) seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt einerseits

$$f(x + y) = 1 - \frac{2}{1 + 3^{x+y}}$$

und andererseits

$$1 + f(x)f(y) = 1 + \left(1 - \frac{2}{1+3^x}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{1+3^y}\right) = 2 - \frac{2}{1+3^x} - \frac{2}{1+3^y} + \frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}$$

sowie

$$f(x) + f(y) = 2 - \frac{2}{1+3^x} - \frac{2}{1+3^y}$$

also

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = 1 - \frac{\frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}}{2 - \frac{2}{1+3^x} - \frac{2}{1+3^y} + \frac{4}{(1+3^x)(1+3^y)}} = 1 - \frac{2}{(1+3^x)(1+3^y) - (1+3^y) - (1+3^x) + 2}$$

sodass es nun noch genügt zu zeigen, dass

$$1 + 3^{x+y} = (1+3^x)(1+3^y) - (1+3^y) - (1+3^x) + 2$$

ist, was man aber leicht durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nachrechnet.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Wegen (1) gilt

$$1 + f(x+y) = 1 + \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

$$1 + f(x+y) = \frac{(1+f(x))(1+f(y))}{1+f(x)f(y)} \qquad (3)$$

In der gleichen Art und Weise erhält man:

$$1 - f(x+y) = \frac{(1-f(x))(1-f(y))}{1+f(x)f(y)} \qquad (4)$$

Teilt man (3) durch (4), folgt:

$$\frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \cdot \frac{1+f(y)}{1-f(y)}$$

Das erinnert stark an das Potenzgesetz $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, so dass wir setzen können:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = a^x$$

Mithilfe von Gleichung (2) haben wir

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 = a^1$$

also $a = 3$, so dass gilt:

$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = 3^x$$

Nun noch nach $f(x)$ auflösen:

$$f(x)(3^x+1) = (3^x-1)$$

$$f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1}$$

Damit wäre die Lösung prinzipiell gefunden. Man kann noch Zähler und Nenner durch $3^{\frac{x}{2}}$ teilen:

$$f(x) = \frac{3^{\frac{x}{2}} - 3^{-\frac{x}{2}}}{3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}}}$$

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\ln 3\right)$$

Aufgabe 271246B:
Man beweise:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und für je n im Intervall $0 \leq x \leq 1$ definierte Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ gibt es reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 1$ $(i = 1, ..., n)$, für die gilt:

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\begin{aligned}
A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} &= 1 - f_1(1) - f_2(1) - ... - f_{n-1}(1) - f_n(1) \\
A_n &= -f_1(0) - f_2(0) - ... - f_{n-1}(0) - f_n(0) \\
A_{n+1} &= f_1(0) + f_2(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1) \\
A_{n+2} &= f_1(1) + f_2(0) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(1) \\
&... \\
A_{2n} &= f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + ... + f_{n-1}(1) + f_n(0)
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$A_1 + A_2 + ... + A_{2n} = n - 1 \qquad \text{also} \qquad |A_1| + |A_2| + ... + |A_{2n}| \geq n - 1$$

Daher muss für mindestens einen der $2n$ Summanden

$$|A_i| \geq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

gelten; d. h.: Es gibt unter den Systemen

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,a_3,...,a_{n-1},a_n) &= (1,1,1,...,1,1), \\
&= (0,0,0,...,0,0), \\
&= (0,1,1,...,1,1), \\
&= (1,0,1,...,1,1), ... \\
&= (1,1,1,...,1,0)
\end{aligned}$$

mindestens eines, für das

$$\left| a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i) \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt. Die Existenz solcher a_i war zu beweisen.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Wir definieren eine Funktion $e : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ durch

$$e(a_1,a_2,\ldots,a_n) := a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{k=1}^{n} f_k(a_k)$$

Außerdem sei

$$E := \max_{a \in \{0,1\}^n} |e(a)|.$$

Die zu zeigende Behauptung folgt aus $E \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Wir betrachten die folgenden Ungleichungen:

$$(n-1)E \geq (n-1)e(1{,}1{,}1\dots,1{,}1) = n-1-(n-1)\sum_{k=1}^{n} f_k(1)$$

$$E \geq e(0{,}0{,}0,\dots,0,0) = -\sum_{k=1}^{n} f_k(0)$$

$$E \geq -e(0{,}1{,}1,\dots,1,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_1(1) + f_1(0)$$

$$E \geq -e(1{,}0{,}1,\dots,1,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_2(1) + f_2(0)\vdots$$

$$E \geq -e(1{,}1{,}1,\dots,0,1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_{n-1}(1) + f_{n-1}(0)$$

$$E \geq -e(1{,}1{,}1,\dots,1,0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) - f_n(1) + f_n(0)$$

Durch Aufsummieren dieser Ungleichungen erhalten wir $2nE \geq n-1$, also die Behauptung.

Aufgabe 281242:
Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.
(3) Wenn man Funktionen $f_1, f_2, ..., f_{n+1}$ durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{sowie} \quad f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, ..., n$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_{n+1}(x)$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 1$ machen wir den Ansatz $f(x) = ax$ mit einer Konstanten a. Nach (3) ist dann $f_k(x) = a^k x$ für $k = 1{,}2{,}...{,}n+1$ und es soll gelten $ax + a^2x + ... + a^n x = a^{n+1}x$.
Wegen (2) ist $a \neq 0$ und es folgt

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + ... + \frac{1}{a} = 1 \qquad (4)$$

Zum Nachweis, dass es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, die die Gleichung (4) erfüllt, betrachten wir die für $t > 0$ stetige Funktion

$$g(t) = \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} + ... + \frac{1}{t}$$

Wegen $\lim\limits_{t\to 0} = \infty$ und $g(1) = \frac{1}{n}$ folgt unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Existenz einer Zahl a mit $0 < a \leq 1$ und $g(a) = 1$. Die Funktion $f(x) = ax$ mit dieser Zahl a erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2), (3).

Aufgabe 291246B:
Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen.
Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu $c = f(x_0) - g(x_0)$. Dann folgt aus (3), mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right)\right)$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natürliche

$$k \geq 1 : \qquad n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right)$$

Wegen (2) existieren mit $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = [f(0)] \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = [g(0)]$$

also existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty}(n^k \cdot c)$. das ist aber nur für $c = 0$ möglich.

Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x. Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.
II. Die oben definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg).

Aufgabe 301243:
Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig.
(2) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) - 4f(x^2) = x - 16x^4$.

Lösung von weird:
Wir versuchen zunächst mit dem Ansatz

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R})$$

eine Polynomfunktion f mit den geforderten Eigenschaften zu finden. Einsetzen in (2) führt dann auf

$$-4a_2x^4 + (a_2 - 4a_1)x^2 + a_1x - 3a_0 = x - 16x^4$$

und ein einfacher Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_2 = 4,\ a_1 = 1,\ a_0 = 0$$

d. h.,

$$f(x) = 4x^2 + x$$

erfüllt tatsächlich unsere Bedingungen hier und ist somit eine Lösung. Wir zeigen im Folgenden, dass sie auch die einzige ist. Setzt man nämlich

$$g(x) := f(x) - 4x^2 - x$$

so ist natürlich auch g für alle reellen Zahlen definiert und stetig, erfüllt aber nun die wesentlich einfachere Funktionalgleichung

$$g(x) = 4g(x^2)$$

Aus ihr folgt durch Einsetzen sofort

$$g(0) = g(1) = 0$$

sowie

$$g(-x) = g(x)$$

d. h., g ist jedenfalls eine gerade Funktion. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass sie unter diesen Bedingungen nur identisch 0 sein kann, d. h., $f(x) = 4x^2 + x$ ist tatsächlich die einzige Lösung hier.
Angenommen nämlich, es gäbe ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0 \neq 0$, wobei wir o. B. d. A. $x_0 > 0$ voraussetzen dürfen, so gibt es dann wegen der Stetigkeit von g für $x = 1$ ein $\delta > 0$, sodass $|g(x)| < |y_0|$ für alle x mit $|x - 1| < \delta$. Nun gilt aber auch

$$g(x_0) = \frac{1}{4}\, g(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{4^2}\, g(\sqrt[4]{x_0}) = \ldots = \frac{1}{4^k}\, g(\sqrt[2^k]{x_0}) = \ldots \quad (k \in \mathbb{N})$$

und indem wir hier nur k genügend groß wählen, dann weiter

$$|\sqrt[2^k]{x_0} - 1| < \delta \Rightarrow \left|g(\sqrt[2^k]{x_0})\right| < |y_0| \Rightarrow |g(x_0)| < |y_0|$$

ein klarer Widerspruch, der somit die Behauptung beweist.

Aufgabe 301245:
Man ermittle ein Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n reell; a_n \neq 0) \qquad (1)$$

das die Bedingungen

$$f(-4) = 0, f(-3) = 1, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = -1, f(4) = 0 (2)$$

erfüllt und dabei möglichst niedrigen Grad n hat.

Lösung von cyrix:
Wegen $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = f(4) = 0$ ist $f(x)$ durch

$$g(x) := (x + 4)(x + 2)x(x - 2)(x - 4) = (x^2 - 16)(x^2 - 4)x = x^5 - 20x^3 + 64x$$

teilbar, sodass ein Polynom $h(x)$ mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ existiert. Es ist $g(-3) = 105$, $g(-1) = -45$, $g(1) = 45$ und $g(3) = -105$, sodass nun ein Polynom $h(x)$ möglichst geringen Grades mit $h(\pm 3) = \frac{1}{105}$ und $h(\pm 1) = \frac{1}{45}$ gesucht wird.

Betrachten wir das Polynom $h_2(x) := 315 \cdot h(x) - 3$, welches den gleichen Grad wie h besitzt. Dann gilt $h_2(\pm 3) = 3 - 3 = 0$ und $h_2(\pm 1) = 7 - 3 = 4$.
Offensichtlich kann h_2 nicht vom Grad 0 oder 1 sein, da es sonst wegen $h_2(\pm 3) = 0$ konstant Null sein müsste, was der zweiten Bedingung an h_2 widerspricht. Jedoch erfüllt offenbar

$$h_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 9) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

alle Bedingungen, kann also als Polynom kleinsten Grades gewählt werden. Damit ist

$$h(x) = \frac{h_2(x) + 3}{315} = -\frac{1}{630}x^2 + \frac{1}{42}$$

und

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = -\frac{1}{630}x^7 + \left(\frac{2}{63} + \frac{1}{42}\right)x^5 - \left(\frac{32}{315} + \frac{10}{21}\right)x^3 + \frac{32}{21} = -\frac{1}{630}x^7 + \frac{1}{18}x^5 - \frac{26}{45}x^3 + \frac{32}{21}x$$

Aufgabe 311245:
Es sei a eine beliebige reelle Zahl mit $a \geq 2$. Man ermittle zu a alle Funktionen, die den nachstehenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Funktion f ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x definiert; alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen.
(2) Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen x, y mit x, y mit $x \geq y$ gilt:

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

(3) Es gilt $f(1) = a$.
Bemerkung: f soll als elementare Funktion in geschlossenem Ausdruck angegeben werden, d. h.:
Die formelmäßige Angabe der Funktionswerte $f(x)$ soll dadurch erfolgen, dass auf x sowie auf Konstanten, Potenz-, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen von x oder auf Umkehrfunktionen solcher Funktionen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) angewandt werden, und zwar in einer von x unabhängigen Anzahl der Anwendungsschritte.

Lösung von MontyPythagoras:
Setzt man $y = 0$ ein, erhält man:

$$f(x) \cdot f(0) = 2f(x)$$

so dass $f(0) = 2$ ist. Setzt man nun $y = 1$ ein, erhält man eine rekursive Definition:

$$af(x) = f(x+1) + f(x-1)$$

$$f(x+1) = af(x) - f(x-1)$$

mit $f(0) = 2$ und $f(1) = a$. Dies ist eine lineare Rekursion, so dass $f(x)$ als Summe aller Funktionen $f(x) = c^x$ dargestellt werden kann, die die Rekursion erfüllen:

$$c^{x+1} = ac^x - c^{x-1}$$

$$c \cdot c^x = ac^x - \frac{1}{c}c^x$$

$$c = a - \frac{1}{c}$$

$$c^2 - ac + 1 = 0$$

$$c_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$$

Die Funktion lautet also

$$f(x) = k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Für $x = 0$ muss gelten:

$$k_1 + k_2 = 2$$

und für $x = 1$ gilt:

$$k_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) + k_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right) = a$$

$$(k_1 + k_2)\frac{a}{2} + (k_1 - k_2)\sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} = a$$

Setzt man $k_1 + k_2 = 2$ in diese letzte Gleichung ein, kann man direkt schlussfolgern, dass $k_1 = k_2 = 1$ sein muss. Daher lautet die Funktion:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x$$

Anmerkung: Da in der quadratischen Gleichung, wegen des Satzes von Vieta, $c_1 = \frac{1}{c_2}$ gilt, kann man die Funktion auch schreiben als:

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^x + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^{-x}$$

Dies lässt sich durch die Hyperbelcosinus-Funktion darstellen:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Im vorliegenden Fall folgt daraus:

$$f(x) = 2\cosh\left(x \cdot \operatorname{arcosh}\frac{a}{2}\right)$$

Aufgabe 321246B:
Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen:
f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte $f(x)$ sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x))) = x$.
Man beweise:
Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x) = x$ definiert ist.

Lösung von Nuramon:
Wenn x,y reelle Zahlen sind mit $f(x) = f(y)$, dann folgt $x = f(f(f(x))) = f(f(f(y))) = y$. Also ist f injektiv.
Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die injektiv ist, muss nach Zwischenwertsatz notwendig streng monoton sein.

Angenommen f wäre streng monoton fallend. Aus $0 < 1$ folgte dann $f(0) > f(1)$ und somit $f(f(0)) < f(f(1))$ und schließlich $0 = f(f(f(0))) > f(f(f(1))) = 1$, was offenbar falsch ist.

Daher muss f streng monoton wachsend sein. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wäre $x < f(x)$, so wäre auch $f(x) < f(f(x))$ und damit $f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$. Das führt zum Widerspruch $x < f(x) < f(f(x)) < x$. Analog kann auch nicht $x > f(x)$ gelten.
Damit folgt $f(x) = x$, also die Behauptung.

Aufgabe 331246A:
Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die
a) $f(n) = 1$, b) $f(n) = 0$
gilt.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Lösung von MontyPythagoras:
Wir nennen

$$a_n = 2\sqrt{n} \qquad b_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$$

Wir zeigen zunächst, dass $a_n > b_n$ gilt, und dass die Differenz sehr schnell fallend ist:

$$a_n - b_n = 2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})$$

$$a_n - b_n = \frac{\left(2\sqrt{n} - (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)\left(2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})\right)}{2\sqrt{n} + (\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}$$

$$a_n - b_n = \frac{4n - \left(n-1+n+1+2\sqrt{(n-1)(n+1)}\right)}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2n - 2\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}$$

$$a_n - b_n = \frac{2\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$a_n - b_n = \frac{2\left(n^2 - (n^2-1)\right)}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$a_n - b_n = \frac{2}{\left(2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

Da im Nenner nur positive Terme stehen, ist damit einerseits der Nachweis erbracht, dass $a_n - b_n > 0$ ist, aber andererseits ist auch

$$a_n - b_n < \frac{2}{4\sqrt{n-1} \cdot 2\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{4\sqrt{n-1}\sqrt{n^2-1}}$$

Wie man sieht, fällt die Differenz mit wachsendem n schnell. Schon bei $n = 2$ ist die Differenz kleiner als $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Es wird also überwiegend der Fall sein, dass a_n und b_n auf die gleiche ganze Zahl abgerundet werden, und daher $f(n) = 0$ ist. In seltenen Fällen könnte es aber passieren, dass a_n schon die nächste ganze Zahl erreicht hat, während b_n noch darunter liegt, also dass $[a_n] = [b_n] + 1$ und daher $f(n) = 1$ ist. Ein solcher Sprung passiert ganz sicher, wenn $n = k^2$ ist, denn dann ist $a_n = 2\sqrt{n} = 2k$ ganzzahlig. Da $b_n < a_n$ ist, aber auch $b_n > a_n - 1$, ist $[b_n] = 2k - 1$ und somit $f(k^2) = 1$. Wir zeigen nun, dass für alle anderen Fälle $f(n) = 0$ ist:

1. Für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$ gilt

$$[a_n] = 2k$$

Beweis: Selbst für das größte Element in der Menge, nämlich $k^2 + k$, gilt:

$$2k < 2\sqrt{k^2+k} < 2k+1$$

Die linke Ungleichung ist offensichtlich. Für die zweite muss gelten:

$$4k^2 + 4k < 4k^2 + 4k + 1$$

Diese Ungleichung ist ebenfalls erfüllt. Wenn es aber für das größte Element der Menge gilt, gilt es für die kleineren Elemente erst recht. Es gilt aber auch

$$[b_n] = 2k$$

Hier führen wir den Beweis für das kleinste Element der Menge:

$$\sqrt{k^2+1-1} + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$

$$k + \sqrt{k^2+1+1} > 2k$$

$$\sqrt{k^2+1+1} > k$$

Wenn schon für das kleinste n aus der Menge die Behauptung gilt, dann auch für die größeren. Daher gilt für $n \in \{k^2+1, k^2+2, ..., k^2+k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k$ ist, und daher $f(n) = 0$.

2. Für $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$ gilt

$$[a_n] = 2k+1$$

Beweis: (kleinstes Element)

$$2k+1 < 2\sqrt{k^2+k+1}$$
$$4k^2+4k+1 < 4k^2+4k+4$$

(größtes Element)

$$2\sqrt{k^2+2k} < 2k+2$$
$$4k^2+8k < 4k^2+8k+4$$

Daher gilt $[a_n] = 2k+1$. Es gilt aber auch für alle $[b_n] = 2k+1$. Beweis für das kleinste Element ist ausreichend:

$$\sqrt{k^2+k+1-1} + \sqrt{k^2+k+1+1} > 2k+1$$
$$\sqrt{k^2+k} + \sqrt{k^2+k+2} > 2k+1$$
$$k^2+k+k^2+k+2+2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 4k^2+4k+1$$
$$2\sqrt{(k^2+k)(k^2+2k+2)} > 2k^2+2k-1$$
$$4(k^2+k)^2+8(k^2+k) > 4(k^2+k)^2-4(k^2+k)+1$$
$$12(k^2+k) > 1$$

Aufgrund dessen gilt für diese Menge $n \in \{k^2+k+1, k^2+k+2, ..., k^2+2k\}$, dass $[a_n] = [b_n] = 2k+1$, und daher ebenfalls $f(n) = 0$. Das nächstgrößere n wäre nun $k^2+2k+1 = (k+1)^2$, was wieder eine Quadratzahl ist. Zusammenfassend kann man also festhalten, dass nur dann $f(n) = 1$ ist, wenn n eine Quadratzahl ist.

Alternativ-Lösung von Nuramon:
Es ist $f(1) = 1$. Von nun an sei $n \geq 2$.
Es gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} \rfloor$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$k \leq 2\sqrt{n} < k+1 \quad \text{und} \quad k \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < k+1.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n < (k+1)^2 \quad \text{und} \quad k^2 \leq 2n + 2\sqrt{n^2-1} < (k+1)^2.$$

Da $2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2n = 4n$ ist, ist somit $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n + 2\sqrt{n^2-1} \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 2n + \lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

Da wir $n \geq 2$ annehmen, gilt

$$2n-1 = \sqrt{4n^2-4n+1} \leq \sqrt{4n^2-4} = 2\sqrt{n^2-1} < 2n$$

und somit

$$\lfloor 2\sqrt{n^2-1} \rfloor = 2n-1.$$

Also ist $f(n) = 0$ genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 \leq 4n-1 \quad \text{und} \quad 4n < (k+1)^2,$$

d. h. genau dann, wenn

$$\exists k \in \mathbb{N}: \quad k^2 < 4n < (k+1)^2.$$

Dies ist offenbar genau dann erfüllt, wenn $4n$ keine Quadratzahl ist. Also gilt $f(n) = 0$ genau dann, wenn n keine Quadratzahl ist.

Ist umgekehrt $n = m^2$ eine Quadratzahl, so gilt wegen

$$\begin{aligned} 2m - 1 &= \sqrt{(m-1)^2} + \sqrt{m^2} \\ &\leq \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{2m^2 + 2\sqrt{m^4 - 1}} \\ &< \sqrt{2m^2 + 2m^2} = 2m, \end{aligned}$$

dass

$$f(n) = f(m^2) = 2m - \lfloor \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{m^2 + 1} \rfloor = 2m - (2m - 1) = 1.$$

Zusammenfassend gilt also für alle $n > 0$, dass

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ Quadratzahl ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

I.VI Folgen

I Runde 1

Aufgabe V01204:
Gegeben ist die Folge

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad ..., \quad \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \quad ...$$

Welchem Grenzwert streben die Summen von n Gliedern dieser Folge für $n \to \infty$ zu?

Lösung von svrc:
Wir bezeichnen mit $a_n := \frac{1}{n \cdot n + 1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ die Glieder der Folge. Es handelt sich bei der Summe der Glieder um eine Teleskopsumme, d. h.:

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Somit gilt $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$.

Aufgabe 261214:
Für jede reelle Zahl b sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, die durch

$$a_n = \frac{3n + b}{2n - 1} \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

definiert ist.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen b, für die die durch (1) definierte Zahlenfolge genau drei Glieder besitzt, die die Ungleichungen

$$1{,}45 < a_n < 1{,}47 \tag{2}$$

erfüllen. Zu jeder so ermittelten Zahl b (falls es eine solche gibt) gebe man die drei Glieder a_n an, die (2) erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für jede reelle Zahl b gilt: Ein Glied a_n der durch (1) definierten Zahlenfolge erfüllt genau dann (2), wenn sowohl

$$1{,}45 < \frac{3n+b}{2n-1} \qquad (3) \qquad \text{als auch} \qquad \frac{3n+b}{2n-1} < 1{,}47 \qquad (4)$$

gilt. Da n nur Werte mit $n \geq 1$, also $2n - 1 > 0$ durchläuft, ist (3) äquivalent mit $2{,}9n - 1{,}45 < 3n + b$ und dies mit

$$n > -14{,}5 - 10b \qquad (5)$$

ferner ist (4) äquivalent mit $3n + b < 2{,}94n - 1{,}47$ und dies mit

$$n < -24{,}5 - \frac{50}{3}b \qquad (6)$$

II. Wenn nun eine Zahl b die Eigenschaft hat, dass die Folge (a_n) genau drei Glieder besitzt, die (2) und folglich sowohl (5) als auch (6) erfüllen, so ist die Zahl $z_1 = (-14{,}5 - 10b)$ kleiner als die Zahl $z_2 = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b)$, und zwischen diesen beiden Zahlen liegen genau drei natürliche Zahlen n. Daraus folgt:

Die Differenz

$$d = (-24{,}5 - \frac{50}{3}b) - (-14{,}5 - 10b)$$

zwischen diesen beiden Zahlen erfüllt die Ungleichung $2 < d < 4$, also gilt dann

$$2 < -24{,}5 - \frac{50}{3}b + 14{,}5 + 10b < 4$$
$$12 < -\frac{20}{3}b < 14$$
$$-\frac{9}{5} > b > -\frac{42}{20}$$

Die einzige ganze Zahl b, die diese Ungleichung erfüllt, ist $b = -2$. Daher kann nur diese Zahl den Bedingungen der Aufgabe genügen.

III. Umgekehrt gilt für diese Zahl $b = -2$ nach I., dass genau diejenigen Glieder a_n (der durch (1) definierten Zahlenfolge) die Ungleichungen (2) erfüllen, deren Index n sowohl (5) als auch (6), d. h.

$$-14{,}5 + 20 < n < -24{,}5 + \frac{100}{3} \quad \rightarrow \quad 5\frac{1}{2} < n < 8\frac{5}{6}$$

erfüllt, d. h. genau die drei Glieder a_n mit $n = 6{,}7{,}8$. (7)

Aus II., III. folgt, dass genau eine ganze Zahl $b = -2$ den Bedingungen genügt und dass die zugehörigen drei Glieder a_n die (2) erfüllen, sich aus (1) mit (7) ergeben:

$$a_6 = \frac{16}{11} \quad ; \quad a_7 = \frac{19}{13} \quad ; \quad a_8 = \frac{22}{15}$$

II Runde 2

Aufgabe 091221:
Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ durch die (independente) Darstellung

$$a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c0 \qquad (1)$$

wobei c_0, c_1, c_2 reelle Zahlen sind. Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D(1)_n = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.
a) Es seien $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D(1)_n$, $D(2)_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 zu berechnen.
b) Es ist allgemein zu beweisen, dass für (1) die Folge $D(2)_n$ konstant ist.

Lösung von cyrix:
a)

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	3	7	13	21	31	43
$D(1)_n$	2	4	6	8	10	12	
$D(2)_n$	2	2	2	2	2		

b) Es ist für alle nicht-negativen ganzen Zahlen n

$$D(1)_n = a_{n+1} - a_n = c_2((n+1)^2 - n^2) + c_1((n+1) - n) + c_0 - c_0 = 2c_2 n + c_2 + c_1 \quad \text{und}$$

$$D(2)_n = D(1)_{n+1} - D(1)_n = 2c_2((n+1) - n) + (c_2 + c_1) - (c_2 + c_1) = 2c_2$$

was die Behauptung zeigt, $\square$.

Aufgabe 101223:
Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
...	

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:
Die einzige Zahl in der Zeile 0 sei die Zahl 1. Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.
Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, dass in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

Lösung von cyrix:
Für die Zeile 0 stimmt die Aussage offenbar.
Summieren wir nun alle Elemente der Zeile $n+1$, und stellen uns jede einzelne Zahl in dieser Zeile $n+1$ ersetzt vor durch die Summe der drei Zahlen aus Zeile n, aus der sie entsteht, dann erhalten wir eine Summe, deren Summanden ausschließlich Zahlen aus der n-ten Zeile sind (sowie Rand-Nullen).
Jede Zahl aus Zeile n taucht dabei in der Summe s_{n+1} genau drei mal auf: Sie ist nämlich beteiligt an der Bildung der Zahl direkt unter sich, sowie jeweils rechts bzw. links daneben. Damit gilt $s_{n+1} = 3 \cdot s_n$, was dann induktiv die Behauptung zeigt.

Aufgabe 131221:
Es seien a_0 und q reelle Zahlen mit $a_0 \neq 0; q \neq 0; q \neq 1$. Ferner sei $\{a_i\}$ eine geometrische Folge, für die $a_i = a_0 \cdot q^i$ $(i = 0, 1, 2, 3, ...)$ gilt.
a) Man beweise, dass die Folgen

$$\{b_i\} \text{ mit } b_i = a_{i+1} - a_i \quad \text{und} \quad \{c_i\} \text{ mit } c_i = b_{i+1} - b_i$$

ebenfalls geometrische Folgen sind.
b) Es sind alle Werte von a_0 und q (mit $a_0 \neq 0; q \neq 0$) anzugeben, für die die in a) definierten Folgen $\{a_i\}$ und $\{c_i\}$ die Eigenschaft haben, dass $a_i = c_i$ für alle natürlichen Zahlen i gilt.

Lösung von cyrix:
a) Es sind $b_i = a_0 \cdot q^{i+1} - a_0 \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i$ und analog $c_i = (b_0 \cdot (q-1)) \cdot q^i = (a_0 \cdot (q-1)^2) \cdot q^i$

geometrische Folgen.

b) Aus $a_i = c_i$ folgt mit der eben hergeleiteten Form von c_i wegen $a_0 \neq 0$ direkt $(q-1)^2 = 1$, also $q = 1 \pm 1$, wobei $q = 1-1 = 0$ als Lösung entfällt, sodass nur $q = 1+1 = 2$ für beliebige $a_0 \neq 0$ verbleibt. Einsetzen dieser Werte zeigt $b_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i$ und damit auch $c_i = a_0 \cdot 2^{i+1} - a_0 \cdot 2^i = a_0 \cdot 2^i = a_i$.

Aufgabe 141221:
Es sei x_n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ diejenige Zahlenfolge, für die $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.
Man gebe die Glieder x_1, x_2 und x_3 dieser Zahlenfolge an. Man gebe einen Term $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(n) = x_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ an.

Lösung von weird:
Es gilt

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4}$$

was die Vermutung nahelegt, dass allgemein die Formel

$$x_n = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gelten könnte. Tatsächlich trifft sie für $n = 0$ offenbar zu, und falls sie für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist, so gilt sie wegen

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{1}{(n+1)+1}$$

dann auch für $n+1$, was also dann induktiv ihre Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$ beweist.

Aufgabe 161222:
Einer Kugel K_1 mit gegebenem Radius r sei ein Zylinder Z_1 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Diesem Zylinder Z_1 sei eine Kugel K_2 und dieser wieder ein Zylinder Z_2 mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Dieses Verfahren sei weiter fortgesetzt, d. h., liegen für eine natürliche Zahl n bereits eine Kugel K_n und ein Zylinder Z_n mit quadratischem Achsenschnitt vor, so sei dem Zylinder Z_n eine Kugel K_{n+1} und dieser wieder ein Zylinder Z_{n+1} mit quadratischem Achsenschnitt einbeschrieben.
Für jedes $n = 1, 2, ...$ sei V_n das Volumen der Kugel K_n, und es sei $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$.
a) Man ermittle das Volumen V_{10}.
b) Man ermittle S_{10}.
c) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, falls dieser Grenzwert existiert.
Hinweis:
Ein Zylinder heißt einer Kugel einbeschrieben, wenn die Kreislinien, die seine beiden Grundflächen beranden, auf der Kugel liegen. Eine Kugel in einem Zylinder mit quadratischem Achsenschnitt heißt diesem Zylinder einbeschrieben, wenn sie seine beiden Grundflächen berührt.

Lösung von cyrix:
Sei K eine Kugel mit Radius R, Z ein ihr einbeschriebener Zylinder mit quadratischem Achsenabschnitt und k eine diesem Zylinder einbeschriebene Kugel mit Radius r.

Ein ebener Schnitt, der den Achsenabschnitt des Zylinders enthält, erzeugt als Schnittfigur einen Kreis mit Radius R, dem ein Quadrat einbeschrieben ist, welchem ein Kreis mit Radius r einbeschrieben ist. Also ist $2R$ die Länge der Diagonalen des Quadrats und $2r$ dessen Kantenlänge, sodass $R = \sqrt{2}r$ bzw. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ gilt. Ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Kugel K, so beträgt also das Volumen v von k genau $v = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = V \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Damit ergibt sich für die Aufgabe

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n-1} \cdot r^3$$

und

$$S_n = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^k\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^n - \sqrt{2}^n}{4^n - \sqrt{2} \cdot 4^{n-1}}$$

Insbesondere ist also

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^9 \cdot r^3 = \frac{2^2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2^4 \cdot \sqrt{2}}{2^{18}} \cdot r^3 = \frac{\sqrt{2}}{2^{12} \cdot 3} \cdot \pi \cdot r^3$$

und

$$S_{10} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4^{10} - \sqrt{2}^{10}}{4^{10} - \sqrt{2} \cdot 4^9} = \frac{2^2}{3}\pi \cdot \frac{2^{20} - 2^5}{2^{20} - \sqrt{2} \cdot 2^{18}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2^{15} - 1}{2^{13} - \sqrt{2} \cdot 2^{11}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{32767}{8192 - 2048\sqrt{2}}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4}{4 - \sqrt{2}} = \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{16}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{4^2 - 2^2} = \frac{16 + 4\sqrt{2}}{9}\pi \cdot r^3$$

Aufgabe 171221:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt:
Wenn
(1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn
(2) b_1 ($\neq 0$) das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1 = -3b_1$,
(4) $a_2 = 2b_2$,
(5) $a_3 = b_3$,
(6) d ist eine ganze Zahl.

Lösung von OlgaBarati:
Für die arithmetische Folge gilt: $a_{i+1} = a_i + d$.
Für die geometrische Folge gilt: $b_{i+1} = b_i \cdot q$ mit $q = \frac{b_{i+1}}{b_i}$. Mit (3),(4),(5) lassen sich sich zunächst die Gleichungen für d: (i) und für q: (ii) ermitteln.

$$\frac{b_2}{b_1} = q = \frac{\frac{a_2}{2}}{\frac{a_1}{-3}} = -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} \quad ; \quad \frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{b_3}{b_2} = q = \frac{a_3}{\frac{a_2}{2}} = 2\frac{a_3}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}\frac{a_2}{a_1} = \frac{2a_3}{a_2}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{a_2}{(a_2 - d)} = 2\frac{(a_2 + d)}{a_2} \quad ; \quad -\frac{3}{2}a_2^2 = 2(a_2 + d)(a_2 - d)$$

$$-\frac{3}{2}a_2^2 = 2a_2^2 - 2d^2 \quad ; \quad d = \pm\sqrt{7}\cdot\frac{a_2}{2} \quad (i)$$

$$q = 2\frac{a_3}{a_2} = 2\frac{a_2+d}{a_2} = a_2\frac{(2+\sqrt{7})}{a_2} = \pm\sqrt{7}+2 \quad (ii)$$

Aus der Summe der Glieder $\sum_{i=1}^{3} a_i$ berechnet sich b_2 und daraus mit (4) auch sofort a_2.

$$a_1+a_2+a_3 = a_2-d+a_2+a_2+d = 3a_2 = -\frac{3b_2}{2+\sqrt{7}} + 2b_2 + 2b_2 + \sqrt{7}b_2$$

$$3a_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 2b_2(2+\sqrt{7}) + b_2\sqrt{7}(2+\sqrt{7})$$
$$6b_2(2+\sqrt{7}) = 3b_2 + 4b_2 + 2b_2\sqrt{7} + 2\sqrt{7}b_2 + 7b_2$$
$$b_2 = \sqrt{7} \quad ; \quad a_2 = 2\sqrt{7}$$

Mit (i) und (ii) existieren jeweils zwei Lösungen für $d = \pm 7$ und $q = \pm\sqrt{7}+2$, woraus sich die nachstehenden Werte ergeben.

d	a_1	a_2	a_3	q	b_1	b_2	b_3	a_1/b_1	a_2/b_2	a_3/b_3
7	$2\sqrt{7}-7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}+7$	$2+\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2+\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2+\sqrt{7})$	-3	2	1
7	-1,71	5,28	12,29	4,64	0,57	2,64	12,29	-3	2	1
-7	$2\sqrt{7}+7$	$2\sqrt{7}$	$2\sqrt{7}-7$	$2-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}/(2-\sqrt{7})$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}\cdot(2-\sqrt{7})$	-3	2	1
-7	12,29	5,28	-1,71	-0,64	-4,097	2,64	-1,71	-3	2	1

Aufgabe 181221:
Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, dass durch $a_n = \frac{n+b}{cn+d}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ gilt.
Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

Lösung von ochen:
Eine solche Folge kann es nicht geben. Aus

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{c}$$

folgt $c = 2$. Weiter folgt $2 + 2b = c + d = 2 + d$ aus

$$\frac{1}{2} = a_1 = \frac{1+b}{c+d} = \frac{1+b}{2+d}.$$

Wir erhalten also $2b = d$. Setzen wir dies ein, bekommen wir

$$a_n = \frac{n+b}{cn+d} = \frac{n+b}{2n+2b} = \frac{1}{2}$$

Aus $a_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ folgt also bereits, dass die Folge konstant 2 ist. Somit kann insbesondere nicht mehr $a_2 = \frac{3}{8}$ gelten.

Aufgabe 201221:
Für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$$I_1 = [1; 2], \quad I_2 = [0{,}53; 0{,}531], \quad I_3 = [0{,}509; 0.51], \quad I_4 = [0{,}4; 0{,}5]$$

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge $\{a_n\}$ liegen.
Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes $n = 1{,}2{,}3{,}...$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \text{also} \qquad a_n = \frac{1}{2n^2})n^2 + n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Somit ist $a_n \in I_1$, $a_n \in I_2$, $a_n \in I_3$ bzw. $a_n \in I_4$ jeweils der Reihe gleichbedeutend mit den anschließend gegebenen Ungleichungen:

- $a_n \in I_1$
$$1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 2 \quad ; \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}$$
$$2 \geq 2n \geq \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3} \leq n \leq 1$$

- $a_n \in I_2$
$$0{,}53 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}531 \quad ; \quad \frac{3}{100} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{31}{1000}$$
$$\frac{100}{3} \geq 2n \geq \frac{1000}{31} \quad ; \quad \frac{500}{31} \leq n \leq \frac{50}{3}$$

- $a_n \in I_3$
$$0{,}509 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}51 \quad ; \quad \frac{9}{100ß} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{100}$$
$$\frac{1000}{9} \geq 2n \geq 100 \quad ; \quad 50 \leq n \leq \frac{500}{9}$$

- $a_n \in I_4$
$$0{,}4 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 0{,}5 \quad ; \quad -0{,}1 \leq \frac{1}{2n} \leq 0$$

Wegen $16 < \frac{500}{31}, \frac{50}{3} < 17; 55 < \frac{500}{9} < 56$ sowie wegen $\frac{1}{2n} > 0$ für alle $n = 1{,}2{,}3{,}...$ ergibt sich damit: Es gilt
$a_n \in I_1$ genau für $n = 1$,
$a_n \in I_2$ für kein n,
$a_n \in I_3$ genau für $n = 50, 51, 52, 53, 54, 55$,
$a_n \in I_4$ für kein n.

Aufgabe 211221:
Sind a_1 und d gegebene reelle Zahlen, so sei (a_n) die arithmetische Zahlenfolge mit $a_n = a_1 + (n-1)d$ für $n = 1, 2, 3, ...$ Ferner werde für $n = 1, 2, 3, ...$ definiert:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad ; \quad z_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$$

a) Man ermittle a_1 und d so, dass $s_4 = 4$ und $z_4 = 15$ gilt.
b) Man beweise, dass für beliebige reelle a_1, d und alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$z_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right)$$

Lösung von cyrix:
b) Es ist $z_1 = s_1 = a_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{1-1}{3} \cdot d\right)$, sodass die Aussage für $n = 1$ wahr ist. Weiter folgt induktiv

$$z_{n+1} = z_n + s_{n+1} = z_n + (n+1) \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d = \frac{n}{n+1}2\left(a_1 + \frac{n-1}{3}d\right) + (n+1) \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2}d =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot a_1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{3} + 1\right) d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left(a_1 + \frac{n}{3} d\right)$$

sodass die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, $\Box$.

a) Mit b) folgt $15 = z_4 = 10 \cdot (a_1 + d)$ und $4 = s_4 = 4 \cdot a_1 + 6 \cdot d$, also $a_1 = \frac{5}{2}$ und $d = -1$. Die Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 231221:
Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so bezeichne s_n ihre n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Man ermittle
a) von jeder arithmetischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
b) von jeder geometrischen Folge (a_n), für die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ gilt,
die ersten fünf Glieder $a_1, a_2, ..., a_5$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn (a_n) eine arithmetische Folge mit dem Anfangsglied a_1 und der konstanten Differenz d ist, so gilt

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Daher erfüllt die Folge genau dann $s_4 = 14$ und $s_8 = 255$, wenn

$$15 = 2(2a_1 + 3d) \qquad ; \qquad 255 = 4(2a_1 + 7d)$$

gilt. Dieses Gleichungssystem hat genau die Lösungen $a_1 = -\frac{555}{32}$ und $d = \frac{225}{16}$. Also hat genau die arithmetische Folge mit diesen a_1 die verlangten s_4 und s_8. Ihre ersten fünf Glieder sind

$$-\frac{555}{32}; \quad -\frac{105}{32}; \quad \frac{345}{32}; \quad \frac{795}{32}; \quad \frac{1245}{32}$$

b) (I) Es sei (a_n) eine geometrische Folge, die $s_4 = 15$ und $s_8 = 255$ erfüllt. Für ihr Anfangsglied und ihren konstanten Quotienten q folgt dann:
Es gilt $q \neq 1$; denn aus $q = 1$ würde $s_8 = 8a_1 = s_4$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Für geometrische Folgen mit $q \neq 1$ ist $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$; daher ergibt sich

$$15 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1} \qquad ; \qquad 255 = a_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1}$$

also $a_1 \neq 0$, $q^4 - 1 \neq 0$ und

$$17 = \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = q^4 + 1 \quad \rightarrow \quad q = 2 \quad \text{oder} \quad q = -2$$

und hierzu

$$a_1 = 15 \frac{q - 1}{q^4 - 1} \quad \rightarrow \quad a_1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad a_1 = -3$$

Daher könne nur die beiden geometrischen Folgen mit $a_1 = 1, q = 2$ bzw. mit $a_1 = -3, q = -2$ die verlangten s_4, s_8 haben. Sie haben diese Partialsummen, wie die Proben bestätigen. Ihre ersten fünf Glieder sind $1, 2, 4, 8, 16$ bzw. $-3, 6, -12, 24, -48$.

Aufgabe 241221:
Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt.
a) Berechnen Sie a_2 und a_3, und beweisen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt!
b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es gilt

$$a_2 = \frac{a_1^2 + 1}{a_1 + 1} = \frac{5}{3} \qquad ; \qquad a_3 = \frac{a_2^2 + 1}{a_2 + 1} = \frac{17}{12}$$

Ferner gilt:
(I) Es ist $a_1 = 2 > 1$.
(II) Wenn für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung $a : n > 1$ gilt, so folgt

$$a_n^2 > a_n \qquad ; \qquad a_n^2 + 1 > a_n + 1$$

und daraus, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ gilt

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} > 1 \qquad \text{d. h.} \qquad a_{n+1} > 1$$

Mit (I) und (II) ist durch vollständige Induktion bewiesen, dass $a_n >$ für alle $n =$ 1,2,3,... gilt.

b) Für jedes $n =$ 1,2,3... gilt nach a) $1 < a_n$, also $a_n^2 + 1 < a_n^2 + a_n = a_n(a_n + 1)$. Hieraus folgt, da wegen $a_n > 1$ erst recht $a_n + 1 > 0$ ist

$$\frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1} < a_n \qquad \text{d. h.} \qquad a_{n+1} < a_n \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aufgabe 251223:
a) Es seien (a_n) und (b_n) die durch $a_n = 3n - 2, b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierten Zahlenfolgen.
Beweisen Sie, dass dann die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ eine arithmetische Zahlenfolge ist!
b) Eine Verallgemeinerung der in a) zu beweisenden Aussage lautet:
Wenn (a_n) eine beliebige arithmetische Folge und (b_n) die durch $b_n = a_n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Folge ist, dann ist die Folge der Differenzen $b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ebenfalls eine arithmetische Folge.
Beweisen Sie auch diese Verallgemeinerung!

Lösung von cyrix:
Wir beweisen die Aussage aus Aufgabenteil b), womit direkt auch der Spezialfall in Aufgabenteil a) gezeigt ist.

Sei dazu die Folge (a_n) definiert durch $a_n = c \cdot n + d$ mit reellen Zahlen c und d und

$$b_n := a_n^2 = c^2 \cdot n^2 + 2cd \cdot n + d^2$$

Dann ist

$$\Delta_n := b_{n+1} - b_n = c^2 \cdot ((n+1)^2 - n^2) + 2cd \cdot ((n+1) - n) + d^2 - d^2 = 2c^2 \cdot n + (c^2 + 2cd) = p \cdot n + q$$

mit $p := 2c^2$ und $q := c^2 + 2cd$.
Damit ist (Δ_n) eine arithmetische Folge, $\Box$.

Aufgabe 281222:
Für jede natürliche Zahl $n > 0$ sei f_n die durch

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)^2 \\ f_2(x) &= (x-1)^2 + (2x-1)^2 \\ \text{allgemein}\quad f_n(x) &= (x-1)^2 + (2x-1)^2 + ... + (nx-1)^2 \end{aligned}$$

für alle reellen x definierte Funktion. Der Graph dieser Funktion, jeweils eine Parabel, habe den Scheitel S_n.
a) Man berechne die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3.
b) Hat jeweils S_n die Koordinaten (x_n, y_n), so beweise man, dass die Folge (x_n) streng monoton fällt und die Folge (y_n) streng monoton steigt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Definition von f_n ist mit bekannten Summenformeln

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^2(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 2x(1 + 2 + ... + n) + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)x^2 - n(n+1)x + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 - \frac{3}{2}n(n+1)\frac{1}{2n+1} + n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\left(x - \frac{3}{2n+1}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Scheitel S_n dieser Parabel die Koordinaten

$$x_n = \frac{3}{2n+1} \qquad ; \qquad y_n = \frac{n(n-1)}{2(2n+1)}$$

hat.
a) Insbesondere sind die Koordinaten von S_1, S_2 und S_3

$$x_1 = 1, y_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{1}{5}; \qquad x_3 = \frac{3}{7}, y_3 = \frac{3}{7}$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist $2n + 1 < 2n + 3$. Wegen $2n + 1 > 0$ folgt daraus $\frac{3}{2n+3} < \frac{3}{2n+1}$, d. h. $x_{n+1} < x_n$. Also ist die Folge (x_n) streng monoton fallend.
Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist

$$\begin{gathered} 2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + n - 3 \\ (n+1)(2n+1) > (n-1)(2n+3) \\ \frac{(n+1)n}{2(2n+3)} > \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} \end{gathered}$$

d. h., $y_{n+1} > y_n$. Also ist die Folge (y_n) streng monoton steigend.

Aufgabe 281224:
Die ganzen Zahlen x_n und y_n seien durch $x_1 = y_1 = 1988$ und die Vorschriften
(1) $x_{n+1} = 2x_n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
(2) $y_{n+1} = 2y_n - 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$
festgelegt. Man untersuche, ob a) alle Zahlen x_n, b) alle Zahlen y_n positiv sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch Rechnung ergibt sich

$$x_2 = 2x_1 - 1 = 2(x_1 - 1) + 1$$
$$x_3 = 2x_2 - 1 = 2(2x_1 - 1) - 1 = 2^2(x_1 - 1) + 1$$
$$x_4 = 2x_3 - 1 = 2(2^2(x_1 - 1) + 1) - 1 = 2^3(x_1 - 1) + 1$$

Hierdurch wird die Vermutung nahegelegt, dass

$$x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1) + 1 \qquad , \qquad (n = 1,2,3,...) \tag{3}$$

gilt. Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Für alle n gilt folglich $x_n > 0$.

b) Durch vollständige Induktion beweist man

$$y_n = (995 - n) \cdot 2^n \tag{4}$$

Für $n = 1$ gilt $y_1 = 1988 = (995 - 1) \cdot 2$.
Wenn (4) für $n = k$ richtig ist, folgt für $n = k + 1$:

$$y_{k+1} = 2y_k - 2^{k+1} = 2(995 - k)2^k - 2^{k+1} = (995 - (k + 1)) \cdot 2^{k+1}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (4) somit für alle $n = 1,2,3,...$. Folglich ist y_n für alle $n \geq 996$ negativ.

III Runde 3

Aufgabe 051234:
Die Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 1,$$
$$y_0 = 0,$$
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n,$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

für $n \geq 0$. Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung gilt:

$$x^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

Lösung von ZePhoCa:
Für $n = 0$ gilt die Aussage offenbar. Gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (x_n + 2y_n)^2 - 2(x_n + y_n)^2 = 2y_n^2 - x_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Mit Induktion folgt die Aussage also für alle n.

Aufgabe 081232:
a) Man untersuche, ob die Zahlenfolge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$, streng monoton fallend ist.
b) Beweisen Sie, dass alle Glieder a_n dieser Folge größer als 0,7 sind.

Lösung von cyrix:
Die Folge a_n ist streng monoton fallend genau dann, wenn es auch die Folge $b_n = a_n - \frac{7}{10}$ auch ist. Dabei ist

$$b_n = \sqrt{25n^2+7n+1} - \left(5n + \frac{7}{10}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{25n^2+7n+1} - \left(5n+\frac{7}{10}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{25n^2+7n+1}+5n+\frac{7}{10}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1}+5n+\frac{7}{10}} = \frac{(25n^2+7n+1) - \left(5n+\frac{7}{10}\right)^2}{\sqrt{25n^2+7n+1}+5n+\frac{7}{10}}$$

$$= \frac{(25n^2+7n+1) - \left(25n^2+7n+\frac{49}{100}\right)}{\sqrt{25n^2+7n+1}+5n+\frac{7}{10}}$$

$$= \frac{\frac{51}{100}}{\sqrt{25n^2+7n+1}+5n+\frac{7}{10}}$$

Da der Zähler dieses Bruchs konstant, der Nenner aber eine in n streng monoton wachsende Funktion ist, ist die Folge b_n – und mit ihr auch die Folge a_n streng monoton fallend. Darüber hinaus sind für alle n Zähler und Nenner von b_n offensichtlich positiv, sodass für alle n $b_n > 0$ und $a_n = b_n + \frac{7}{10} > \frac{7}{10}$ folgt.

Aufgabe 081234:
Durch die Verbesserung der Lebensbedingungen und des Gesundheitsschutzes konnte in der DDR die Tuberkulose mit großem Erfolg bekämpft werden.
Während im Jahre 1950 noch 92760 Erkrankungen an aktiver Tuberkulose auftraten, ging diese Zahl in den folgenden 16 Jahren auf 13777 im Jahre 1966 zurück.

a) Um wie viel Prozent nahm jährlich die Anzahl der Erkrankungen ab, wenn man eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt (was, abgesehen von geringen Schwankungen, der Wirklichkeit entspricht)?
b) Wieviel Jahre betrug in dem Zeitraum 1950 bis 1966 die sogenannte Halbwertzeit, d. h. diejenige Zeit, in der die Anzahl der Fälle auf die Hälfte gesenkt wurde (Angabe in Jahren mit einer Stelle nach dem Komma)?
c) Mit wie viel Erkrankungsfällen ist im Jahre 1970 zu rechnen, wenn man weiter eine gleichbleibende jährliche prozentuale Abnahme voraussetzt?

Lösung von cyrix:
a) Es sei q der (als konstant angenommene) Quotient der Anzahl der Krankheitsfälle in einem Jahr bezogen auf die des Vorjahres.
Dann gilt aufgrund der Aufgabenstellung $92760 \cdot q^{16} = 13777$ bzw. $q = \sqrt[16]{\frac{13777}{92760}}$. Mit einem Taschenrechner erhält man $q \approx 0.8876$, sodass die Anzahl der Krankheitsfälle im Schnitt pro Jahr um ca. 11.24% zurückgegangen ist.

Bemerkung: Als diese Aufgabe gestellt wurde, waren Taschenrechner noch nicht verfügbar, wohl aber Logarithmentafeln.
An diesen liest man leicht $\lg(1.3777) \approx 0.139$ und $\lg(9.2670) \approx 0.967$ ab, woraus man $\lg\left(\frac{13777}{92760}\right) \approx 0.139 - 0.967 = -0.828$ und damit $\lg(q) \approx -\frac{0.828}{16} \approx -0.052$ erhält. Wieder kann man an einer solchen Tafel den Wert $10^{1-0.052} = 10^{0.948} \approx 8.872$ ablesen, was auf $q \approx 0.8872$ führt. Die Rechnung wird natürlich genauer, wenn man nicht nur drei-stellige Mantissen, wie hier angenommen, zur Verfügung hat. Es stellt sich auch die Frage, für welche Werte die Tabellen vorlagen...

b) Für die Halbwertszeit t, gemessen in Jahren, gilt $q^t = \frac{1}{2}$, also $t \cdot \lg(q) = -\lg(2)$ bzw. $t = -\frac{\lg(2)}{\lg(q)} \approx 5.8$, sodass knapp alle Jahre eine Halbierung der Anzahl der Krankheitsfälle eintritt.

c) Nimmt man weiter eine gleichbleibende prozentuale Verringerung der Krankheitsfälle pro Jahr an, so sinkt deren Anzahl von 1966 bis 1970 um den Faktor q^4, sodass man dann etwa noch ca. $13777 \cdot 0.8876^4 \approx$

8500 Krankheitsfälle erwartet.

Aufgabe 111234:
a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Man zeige, dass die so definierte Folge a_n eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge a_n. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n > 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass a_n eine geometrische Folge ist!

Lösung von Kitaktus:
Wir zeigen induktiv, dass $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 0$ und $n = 1$:

$$-4(-\frac{1}{2})^0 = -4 = a_0$$
$$-4(-\frac{1}{2})^1 = -4(-\frac{1}{2}) = 2 = a_1$$

Induktionsschritt:
Die Gleichung $a_n = -4(-\frac{1}{2})^n$ gelte für alle $n \leq k$ (mit $k \geq 1$). Nun ist

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2} = \frac{-4(-\frac{1}{2})^k + -4(-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} = -4 \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^k + (-\frac{1}{2})^{k-1}}{2} =$$
$$= -4 \cdot \frac{-2(-\frac{1}{2})^{k+1} + (-2)^2(-\frac{1}{2})^{k+1}}{2} = -4 \cdot \frac{-2 + (-2)^2}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} =$$
$$= -4 \cdot \frac{-2+4}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1} = -4 \cdot (-\frac{1}{2})^{k+1}$$

a_n ist also tatsächlich eine geometrische Folge mit dem Startglied -4 und dem Faktor $-\frac{1}{2}$.

Für die Summe der a_n gilt nach der Summenformel geometrischer Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -4 \cdot (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = -4 \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = -4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$$

Zu b) Ist $a_0 = a_1 = 0$, so sind alle weiteren Folgenglieder ebenfalls 0 und es liegt eine geometrische Reihe vor.
Ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es keinen Faktor f mit $a_1 = f \cdot a_0$ gibt.
Ist $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$, so liegt keine geometrische Reihe vor, da es wegen $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \neq 0$ keinen Faktor f mit $a_2 = f \cdot a_1$ gibt.

Seien im Folgenden also a_0 und a_1 von 0 verschieden.
Notwendigerweise müssen zumindest die ersten drei Glieder eine geometrische Reihe bilden. Es muss also $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$ gelten. Daraus folgt $a_1^2 = a_0 \cdot a_2 = a_0 \cdot \frac{a_0+a_1}{2}$ bzw. $2a_1^2 = a_0^2 + a_0 a_1$.

a_0 ist also Lösung der Gleichung: $a_0^2 + a_0 a_1 - 2a_1^2 = 0$.
Diese Gleichung hat zwei Lösungen $-a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 + 2a_1^2} = -a_1/2 \pm 3|a_1|/2$. Es gilt also $a_0 = -a_1/2 + 3a_1/2 = a_1$ oder $a_0 = -a_1/2 - 3a_1/2 = -2a_1$. Die Betragsstriche dürfen im letzten Schritt weggelassen werden, da ja sowieso beide Fälle - mit negativem und mit positivem Vorzeichen - erfasst werden.

Dieses Kriterium deckt auch die Fälle, in denen eines der beiden Anfangsglieder gleich 0 ist mit ab, so dass sich folgendes notwendige Kriterium ergibt: Entweder ist $a_0 = a_1$ oder $a_0 = -2a_1$.

Dieses Kriterium ist gleichzeitig hinreichend.
Ist $a_0 = a_1$ so sind alle Folgenglieder identisch und es ergibt sich eine geometrische Reihe mit dem Faktor 1.
Gilt $a_0 = -2a_1$, so lässt sich der Induktionsbeweis aus a) direkt übertragen, es muss lediglich der Faktor -4 durch a_0 ersetzt werden. Beim Nachweis des Induktionsanfangs kommt die Bedingung $a_0 = -2a_1$ zum Tragen.

Aufgabe 171231:
Gegeben sei die Folge (a_n) durch

$$a_n = \frac{4n}{4n^2 + 121} \tag{1}$$

für $n = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

Lösung von Annika Heckel:
1. Untere Grenze:
$\frac{4n}{4n^2+121}$ ist, da n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Lässt man n gegen Unendlich laufen, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4n^2 + 121} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{4 + \frac{121}{n^2}} = \frac{0}{0 + 4} = 0$$

(a_n) ist also eine Nullfolge. Da alle ihre Folgenglieder positiv sind, ist 0 die untere Grenze (die aber niemals in der Folge vorkommt).
2. Obere Grenze:
Man subtrahiere a_{n+1} von a_n:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4n}{4n^2 + 121} - \frac{4(n+1)}{4(n+1)^2 + 121} = \frac{4n \cdot (4n^2 + 8n + 125) - (4n+4) \cdot (4n^2 + 121)}{(4n^2 + 121) \cdot (4(n+1)^2 + 121)} =$$

$$= \frac{16n^2 + 16n - 484}{(4n^2 + 121) \cdot ((2n+2)^2 + 121)}$$

Der Nenner ist, weil n eine natürliche Zahl ist, immer positiv. Der Zähler wird mit größer werdendem n auch immer größer. Die einzige zutreffende Nullstelle des Zählers liegt zwischen $n = 5$ und $n = 6$:

$$n = 5: \quad 16n^2 + 16n - 484 = -4 < 0$$
$$n = 6: \quad 16n^2 + 16n - 484 = 188 > 0$$

Für alle $n \leq 5$ ist also $16n^2 + 16n - 484$ und damit $a_n - a_{n+1} < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ für $n < 6$.
(a_n) steigt also bis zu a_6 streng monoton. Für alle $n > 5$ ist $16n^2 + 16n - 484$ und damit an $-a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$. (a_n) fällt also bis a_6 streng monoton.
Folglich nimmt die Folge bei a_6 ihren größten Wert an. $a_6 = \frac{24}{265}$ ist die obere Grenze der Folge.

Aufgabe 181236A:
Es sei (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ eine Folge reeller Zahlen, für die $a_0 = 0$ sowie $a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1$ für alle $n = 1, 2, ...$ gelte.
Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl $q < 1$ gibt, so dass für alle $n = 1, 2, ...$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, und gebe eine derartige reelle Zahl q an.

Lösung von svrc:
Zum Beweis benötigen wir zwei Aussagen.

Lemma 1:

Für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Beweis - Lemma 1:

Der Beweis erfolgt durch Ausmultiplizieren:

$$(a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Lemma 2:

Die Folge (a_n) ist beschränkt und es gilt

$$-1 \leq a_n \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Beweis - Lemma 2:

Diese Aussage wird mittels vollständiger Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1^3 = \dfrac{1}{2} \cdot a_0^2 - 1 = -1$ und somit $-1 \leq a_1 \leq -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $-1 \leq a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Es gilt nach der Induktionsvoraussetzung

$$-1 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 - 1 \leq \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1 = a_{n+1}^3 = \frac{1}{2} \cdot a_n^2 - 1 \leq -\frac{1}{2}$$

und somit

$$-1 \leq a_{n+1} \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Lösung:

Mit Lemma 1 und der Definition der Folge (a_n) sehen wir, dass

$$\left|a_{n+1}^3 - a_n^3\right| = |a_{n+1} - a_n| \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|a_n^2 - a_{n-1}^2\right| = \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}|$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Somit ergibt sich

$$|a_{n+1} - a_n| \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right| = \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}| \cdot |a_n + a_{n-1}|$$

und daher wegen Lemma 2

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|a_{n+1} + a_n|}{2 \cdot \left|a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2\right|}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$, da der Bruch auf der rechten Seite definiert ist. Mit Lemma 2 kann die rechte Seite durch

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|a_{n+1} + a_n|}{2 \cdot |a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n + a_n^2|} \leq |a_n - a_{n-1}| \cdot \frac{|2|}{2 \cdot \left|3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right|} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3} \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

nach oben abgeschätzt werden. Wähle folglich $q = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3} < 0{,}53$.

Aufgabe 211234:
Man ermittle alle diejenigen von 0 verschiedenen reellen Zahlen q, die die folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine von 0 verschiedene Zahl a_1 und eine natürliche Zahl $k \geq 3$ so, dass in der durch $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ definierte Zahlenfolge (a_n) das Glied a_k gleich dem arithmetischen Mittel der beiden vorangehenden Glieder a_{k-1} und a_{k-2} ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Nach Voraussetzung gibt es a_1,k,q, so dass

$$a_1 q^{k-1} = a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}) = \frac{1}{2}(a_1 q^{k-2} + a_1 q^{k-3})$$

Kürzen mit a_1,q^{k-3} ergibt $q^2 = \frac{1}{2}(q+1)$ und somit $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$.

Aufgabe 231233A:
Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
a) von positiven rationalen Zahlen a_i,
b) von positiven ganzen Zahlen a_i
mit folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt:
(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.
(2) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

d. h. an ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.
Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Folge positiver rationaler Zahlen a_i erfüllt genau dann (1) und (2), wenn die Folge der Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ eine arithmetische Folge positiver rationaler Zahlen mit einer von 0 verschiedenen Differenz ist.
Nachweis:
Die Folge ist genau arithmetische Folge, wenn für jedes $n \geq 2$ die Differenz $b_n - b_{n-1}$ gleich der Differenz $b_{n-1} - b_n$ ist. Diese Gleichheit ist äquivalent mit

$$b_n = \frac{1}{2}(b_{b-1} + b_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_n}$$

Aus dieser Feststellung ergibt sich:
a) Da es arithmetische Folgen positiver rationaler Zahlen b_i mit einer von 0 verschiedenen Differenz gibt, z. B. $b_n = n$ $(n = 1,2,3,...)$, gibt es auch Folgen positiver rationaler Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und 82), z. B. $a_n = \frac{1}{n}$.

b) Gäbe es eine arithmetische Folge von Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ mit von 0 verschiedener Differenz d, für die alle a_i positive ganze Zahlen wären, so folgte $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ ($n = 1,2,3,...$). Im Fall $d > 0$ ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 + \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)$$

wäre $(n-1)d > 1 - \frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} > 1$, was für positive ganze Zahlen a_n nicht möglich ist.

Im Fall $d < 0$, ergäbe sich: Für alle

$$n > 1 - \frac{1}{d \cdot a_1}$$

wäre $(n-1)d < -\frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} < 0$, was ebenfalls für positive (ganze) Zahlen a_n nicht möglich ist.
Also gibt es keine Folge positiver ganzer Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2).

Aufgabe 241231:
Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, ..., a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:
(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

Lösung von cyrix:
Nach (3) gibt es eine reelle Zahl d mit $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ und $a_4 = a_1 + 3d = 3d - \frac{5}{2}$. Insbesondere ist

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot (-\frac{5}{2}) + 6d = 6d - 10$$

Nach (4) gibt es eine reelle Zahl q mit $a_5 = a_4 \cdot q$ und $a_6 = a_5 \cdot q$. Wegen (2) ist $a_5 = 3$, also $a_6 = 3q$ und $a_4 = 3d - \frac{5}{2} = \frac{3}{q}$. (Dabei ist wegen $0 \neq 3 = a_5 = q \cdot a_4$ auch $q \neq 0$.)
Daraus folgt $d = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{q} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{q} + \frac{5}{6}$.
Weiterhin ist $a_5 + a_6 = 3 + 3q$, also nach (6)

$$\frac{13}{2} = a_1 + \cdots + a_6 = 6d - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} + 5 - 10 + 3 + 3q = \frac{6}{q} - 2 + 3q$$

bzw. $3q^2 - \left(2 + \frac{13}{2}\right)q + 6 = 0$, also $q^2 - \frac{17}{6}q + 2 = 0$, was auf $q_{1/2} = \frac{17}{12} \pm \sqrt{\frac{289}{144} - \frac{288}{144}} = \frac{17 \pm 1}{12}$, also $q_1 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ und $q_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ führt.

Im Fall $q = q_1 = \frac{4}{3}$ ist $a_6 = 3q = 4$, $a_5 = 3$, $a_4 = \frac{3}{q} = \frac{9}{4}$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{19}{12}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = d - \frac{5}{2} = \frac{19-30}{12} = -\frac{11}{12}$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{19-11}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
(Tatsächlich ist dann

$$a_3 + d = \frac{8+19}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = a_4 \qquad \text{und} \qquad a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-30 - 11 + 8 + 27 + 36 + 48}{12} = \frac{78}{12} = \frac{13}{2}.)$$

Und im Fall $q = q_2 = \frac{3}{2}$ ist $a_6 = 3q = \frac{9}{2}$, $a_5 = 3$, $a_4 = 2$ und $d = \frac{1}{q} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$, also $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_2 = a_1 + d = -1$ und $a_3 = a_2 + d = \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist dann $a_3 + d = 2 = a_4$ und

$$a_1 + \cdots + a_6 = \frac{-5 - 2 + 1 + 4 + 6 + 9}{2} = \frac{13}{2}$$

Aufgabe 261236:
Es sei (x_n) diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$x_1 = \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (2)$$

gilt. Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ sei ferner (y_n) die durch

$$y_n = \frac{x_n}{a^n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3}$$

definierte Zahlenfolge.
Man ermittle alle diejenigen $a \neq 0$, für die die Folge (y_n) konvergent ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus (1) und (2) folgt durch vollständige Induktion $x_n > 0$ für alle n = 1,2,3,... und dann

$$9x_n^2 < x_{n+1}^2 < 9x_n^2 + 12x_n + 4 = (3x_n + 2)^3$$
$$3x_n < x_{n+1} < 3x_n + 2 \tag{4}$$

Das ergibt zunächst (durch vollständige Induktion) $x_n > \frac{3^n}{2}$ für alle n = 1,2,3,... und dann

$$3 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 3 + \frac{2}{x_n} < 3 + \frac{4}{3^n}$$

Nach (3) folgt damit

$$\frac{3}{|a|} < \frac{|y_{n+1}|}{|y_n|} < \frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \tag{5}$$

1. Ist nun $|a| < 3$ (und $a \neq 0$), so gilt für die Zahl $q = \frac{3}{|a|}$ einerseits $q > 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$; andererseits folgt aus (5) durch vollständige Induktion (n = 1,2,3,...)

$$|y_{n+1}| > q \cdot |y_n| \qquad ; \qquad |y_{n+1}| > q^n \cdot |y_1|$$

und wegen $|y_1| > 0$ damit $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty$. Also ist die Folge (y_n) in diesem Fall divergent.

2. Ist $|a| > 3$, so existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} \right) = \frac{3}{|a|} < 1 \tag{6}$$

eine Zahl q mit $\frac{3}{|a|} < q < 1$. Für diese Zahl gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$; andererseits gibt es wegen (6) eine Zahl N so, dass für alle $n \geq N$

$$\frac{3}{|a|} + \frac{4}{|a| \cdot 3^n} < q$$

nach (5) also (durch vollständige Induktion)

$$|y_{n+1}| < q \cdot |y_n| \qquad , \qquad |y_{N+k}| < q^k \cdot |y_N|$$

(k = 1,2,3,...) ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, also ist die Folge (y_n) in diesem Fall konvergent.

3. Ist $a = 3$, so folgt aus (4) nach Division durch 3^{n+1}

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{2}{3^{n+1}} \tag{7}$$

Daraus folgt einerseits: Die Folge (y_n) ist monoton steigend. (8)
Andererseits ergibt sich durch vollständige Induktion für alle n = 2,3,4...

$$y_n < y_{n-1} + \frac{2}{3^n} < y_{n-2} + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} < ...$$
$$< y_1 + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$$

wegen der Konvergenz der unendlichen Reihe $\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ...$ gilt somit: Die Folge (y_n) ist nach oben beschränkt. (9)
Aus (8) und (9) ergibt sich: Die Folge (y_n) ist konvergent.

4. Ist $a = -3$, so gilt: Ist n gerade, so hat y_n denselben Wert wie für $a = 3$. Ist n ungerade, so hat y_n entgegengesetzt gleichen Wert wie für $a = 3$.
Bezeichnet g den Grenzwert der für $a = 3$ gebildeten Folge (y_n), so hat also für $a = -3$ die Teilfolge mit geradem n den Grenzwert g und die Teilfolge der y_n mit ungeradem n den Grenzwert $-g$.
Nach (7) gilt $g \geq y_1$, also $g > 0$ und damit $g \neq -g$. Also ist die gesamte Folge (y_n) im Fall $a = -3$ divergent.

Damit ist gezeigt: Die Folge (y_n) ist genau für alle diejenigen a konvergent, für die $a < -3$ oder $a \geq 3$ gilt.

Aufgabe 281231:
Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3), die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie mit $q = 5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}$, $a_2 = \frac{2}{q}$, $a_3 = \frac{1}{r}$.
(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}$, $b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.
(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.
(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn die Folgen arithmetisch sein sollen, muss gelten $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ bzw. $2a_2 = a_1 + a_3$. Das ergibt als erste Bedingung:

$$\frac{4}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

$$4pr = qr + pq \tag{1}$$

Ebenso gilt $2b_2 = b_1 + b_3$, beziehungsweise

$$pq = p + \frac{1}{2}qr$$

$$(q-1)p = \frac{1}{2}qr$$

$$r = 2\frac{q-1}{q}p \tag{2}$$

Das setzen wir in (1) ein:

$$8\frac{q-1}{q}p^2 = 2(q-1)p + qp$$

Eine Lösung dieser Gleichung wäre $p = 0$, die aber in der Folge a_i zur Division durch null führen würde. Daher ist die Lösung nur:

$$8\frac{q-1}{q}p = 3q - 2$$

$$p = \frac{q(3q-2)}{8(q-1)}$$

und

$$r = \frac{3q-2}{4}$$

Mit $q = 5$ ergibt sich $p = \frac{65}{32}$ und $r = \frac{13}{4}$.

Aufgabe 291234:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, ...)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

Lösung von MontyPythagoras:
Wir zeigen zunächst per vollständiger Induktion, dass $x_{n+1} > x_n$ für alle $n > 1$ gilt:
Induktionsanfang: es ist $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$.
Induktionsschritt: damit $x_{n+1} > x_n$ ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} > x_n$$

Da beide Seiten positiv sind, kann man quadrieren:

$$a + x_n > x_n^2$$

bzw.

$$x_n^2 - x_n - a < 0$$

Das ist der Fall für

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a} < x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass immer $x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ erfüllt ist:
Induktionsanfang: es ist $x_1 = \sqrt{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.
Induktionsschritt: Damit $x_{n+1} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ gültig ist, muss gelten:

$$\sqrt{a + x_n} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

Quadrieren:

$$a + x_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + a + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

$$x_n < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$$

q. e. d. x_n ist somit streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, so dass ein Grenzwert

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

existiert für alle $a > -\frac{1}{4}$. Da per Aufgabenstellung sowieso $a > 0$ vorgegeben ist, besteht keine weitere Einschränkung hinsichtlich a. Den Grenzwert erhält man durch lösen der Gleichung $x = \sqrt{x + a}$, und es ist dann die einzige positive Lösung

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \quad \forall \quad a > 0$$

Aufgabe 301235:
Man untersuche, ob die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3,$$

...)definierte Folge (x_n) konvergent ist, und ermittle, wenn das der Fall ist, ihren Grenzwert.

Lösung von weird:
Zunächst werden die Rechnungen hier alle etwas einfacher, wenn wir auch noch das Folgenglied $x_0 = 0$ dazunehmen, was mit obiger Rekursionsvorschrift offensichtlich kompatibel ist. Da x_0 und mit jedem x_n ($n \in \mathbb{N}$) dann auch x_{n+1} rational ist, können wir hier auch mit dem Ansatz

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

arbeiten, wobei (a_n) und (b_n) hier zwei Folgen natürlicher Zahlen mit $\operatorname{ggT}(a_n, b_n) = 1$ sind und die folgenden Gleichungen gelten

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n} + 1} = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

aus denen wir sofort die einfache Rekursionsbeziehung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = b_{n+1} = b_n + a_n = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{*}$$

herleiten können. Die Folge (b_n) ist dann wegen

$$b_n = a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{**}$$

der Folge (a_n) sehr ähnlich und gegenüber ihr einfach nur um eine Position nach hinten verschoben.
Als nächstes bestimmen wir aus der Rekursion (*) eine explizite Formel für die Folge (a_n) mit dem üblichen Ansatz

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

wobei q_1 und q_2 die zwei Lösungen der Gleichung $q^2 - q - 1 = 0$, also dann

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

sind und sich die Werte von c_1 und c_2 aus

$$c_1 q_1^0 + c_2 q_2^0 = a_0 = 0, \quad c_1 q_1 + c_2 q_2 = a_1 = 1$$

zu

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ergeben, womit also dann letztendlich

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n), \quad b_n = a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}) \Rightarrow x_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Insbesondere folgt daraus wegen $q_2 \approx -0.61$, dass (q_2^n) eine Nullfolge ist und somit die Folge (x_n) konvergiert und zwar mit dem Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{q_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

was also dann alle Fragen hier beantwortet.

Aufgabe 331236:
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4 + \sqrt{18})^n\right]$ ist.
Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g + 1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

Lösung von weird:
Wir halten zunächst fest, dass der nachstehende Ausdruck

$$A_n := (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} 2^{2n-3k+1} 3^{2k} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

stets ganz ist, und zwar wegen

$$4-\sqrt{18} \approx -0.24$$

genauer jene ganze Zahl g, welche aus $(4+\sqrt{18})^n$ durch Runden hervorgeht, wobei für gerades n stets aufgerundet, für ungerades n aber stets abgerundet wird. Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$B_n := [(4+\sqrt{18})^n] \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt somit folgender Zusammenhang

$$B_n := \begin{cases} A_n - 1, & \text{falls n gerade} \\ A_n, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Da aber die A_n aufgrund ihrer Bauart für gerades n stets gerade sind, sind die B_n dann automatisch ungerade, d. h., die größte Zweierpotenz, welche B_n für ein gerades n teilt ist somit nur 1.

Setzt man also nun im Folgenden n als ungerade voraus, so ist die Beobachtung von besonderer Bedeutung, dass wir in Formel (*) nur jeweils den letzten Summanden für $k = [\frac{n}{2}] = \frac{n-1}{2}$ betrachten müssen, da die anderen Summanden ersichtlich durch eine höhere Zweierpotenz teilbar sind. Die höchste Zweierpotenz, durch welche dieser letzte Summand aber teilbar ist, ist jedoch

$$2^{\frac{n+5}{2}}$$

wie man durch Einsetzen von $k = \frac{n-1}{2}$ sofort sieht, was obige Frage somit auch für ungerade n beantwortet.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei $s_n := (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n$. Dann erfüllt die Folge (s_n) die Rekursion $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$, wie man leicht nachrechnet:

$$8s_{n+1} + 2s_n = 8\cdot(4+\sqrt{18})\cdot(4+\sqrt{18})^n + 8\cdot(4-\sqrt{18})\cdot(4-\sqrt{18})^n + 2\cdot(4+\sqrt{18})^n + 2\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (32+8\sqrt{18}+2)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (32-8\sqrt{18}+2)\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (16+2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4+\sqrt{18})^n + (16-2\cdot4\cdot\sqrt{18}+18)\cdot(4-\sqrt{18})^n =$$
$$= (4+\sqrt{18})^{n+2} + (4-\sqrt{18})^{n+2} = s_{n+2}$$

Zusammen mit $s_0 = 2$ und $s_1 = 8$ folgt für gerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1}$, und für ungerade n, dass s_n durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar ist:

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies offenbar der Fall. Sei nun $n \geq 2$ und es gelte die Aussage für $n-1$ und $n-2$. Ist n gerade, dann ist also s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2}{2}+1} = 2^{\frac{n}{2}}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1+5}{2}} = 2^{\frac{n}{2}+2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, sodass $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n}{2}+1}$ und keine größere Zweierpotenz teilbar ist. Ist dagegen n ungerade, dann ist s_{n-2} durch $2^{\frac{n-2+5}{2}} = 2^{\frac{n+5}{2}-1}$ und s_{n-1} durch $2^{\frac{n-1}{2}+1} = 2^{\frac{n+5}{2}-2}$, aber keine größere Zweierpotenz teilbar, also ist $s_n = 8\cdot s_{n-1} + 2\cdot s_{n-2}$ durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ aber keine größere Zweierpotenz teilbar.

Damit haben wir für jedes n bestimmt, durch welche höchste Zweierpotenz s_n teilbar ist.
Es ist $4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$, also $-1 < 4-\sqrt{18} < 0$ und damit gilt für $n = 0$ die Gleichung $(4-\sqrt{18})^n = 1$, für ungerade n die Ungleichung $-1 < (4-\sqrt{18})^n < 0$ und für gerade $n \geq 2$ die Ungleichung $0 < (4-\sqrt{18})^n < 1$. Also ist

- für $n = 0$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [1] = 1$ genau durch 2^0,

- für ungerades n der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n$ genau durch $2^{\frac{n+5}{2}}$ und
- für gerades $n \geq 2$ der Term $[(4+\sqrt{18})^n] = [s_n - (4-\sqrt{18})^n] = s_n - 1$ genau durch 2^0,

aber keine größere Zweierpotenz teilbar. Im letzten Fall gilt dies, da dann s_n durch $2^{\frac{n}{2}+1} \geq 2^2$ teilbar, also $s_n - 1$ ungerade ist.

Bemerkung: Auf die Rekursionsbedingung gelangt man, indem man die beiden Basen $4 \pm \sqrt{18}$ als Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer rekursiv definierten Folge auffasst. Das Polynom mit diesen Nullstellen hat die Form $x^2 - 8x - 2$, sodass sich die Rekursionsbedingung $s_{n+2} - 8s_{n+1} - 2s_n = 0$ bzw. eben $s_{n+2} = 8s_{n+1} + 2s_n$ ergibt.

IV Runde 4

Aufgabe 061242:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge „F_n“ genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ existieren, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, z_2, \dots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.

(3) Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.

(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.
Bemerkung: Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ oder $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots, x_{m_t}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

Beantworten Sie folgende Fragen:
a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n?
b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist:
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine Folge F_n haben kann?

Lösung von Kornkreis:
a) Nein, denn
b) Mit vollständiger Induktion beweisen wir im Folgenden, dass für $n \geq 1$ immer eine Folge F_n der Länge $2n-1$ existiert und diese Länge maximal ist. Für $n = 1$ ist dies klar. Sei nun $n > 1$ beliebig und die Behauptung für $F_1, \dots, F_{n-1}$ bewiesen.
Betrachte die Folge

$$F = z_1, S_1, z_1, S_2, \dots, z_1, S_r, z_1$$

wobei S_i $(i \in \{1,\dots,r\}, 1 \leq r < n)$ die Folgeglieder einer Folge von Zahlen aus $\{z_2, \dots, z_n\}$ bezeichne, welche die Bedingungen (3) und (4) der Aufgabenstellung erfüllt.
Wie man leicht sieht, erfüllt die obige Folge F genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die S_i paarweise disjunkt sind und die Gesamtheit der S_i alle Zahlen außer z_1 beinhaltet.

Es ist klar, dass die Länge von F maximal ist, wenn jedes S_i maximale Länge hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann die Länge von F gleich $(r+1) + 2(s_1 + \dots + s_r) - r$, wobei s_i die Anzahl der verschiedenen Zahlen in S_i bezeichnet und $r+1$ die Anzahl der z_1 in F ist.
Es ist $s_1 + \dots + s_r = n-1$ und folglich ist die Länge von F gleich $2n-1$.

Die Folge F ist optimal: Eine beliebige Folge F_n startet o.B.d.A. mit z_1. Falls danach nicht noch mal z_1 auftritt, können nach z_1 nur noch $2(n-1)-1$ Zahlen folgen (nach Induktionsvoraussetzung), die Länge wäre also nur $1 + 2(n-1) - 1 = 2n-2$.

In einer Folge maximaler Länge kommen also mindestens zwei z_1 vor. Keine der Zahlen z_i, die zwischen zwei nächstgelegenen z_1 stehen, dürfen später noch einmal vorkommen, da man sonst eine Teilfolge $\{z_1,z_i,z_1,z_i\}$ hätte. Diese Bedingungen werden von der Folge F aber allgemein erfüllt, sodass die Länge $2n-1$ optimal ist und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 131241:
Es seien in einer Ebene zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren ψ und ζ gegeben. Dann wird durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| \qquad \text{für } n = 1,2,3,... \qquad (1)$$

eine Folge reeller Zahlen definiert. Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass die Folge (1)
a) streng monoton steigend,
b) streng monoton fallend ist.
c) Für den Fall, dass die Folge (1) nicht streng monoton ist, ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass die Folge (1) die Monotonieintervalle $1 \leq n \leq n_0$ und $n_0 < n$ besitzt.

Lösung von svrc:
Da die beiden Vektoren ψ und ζ in einer Ebene liegen sollen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Ebene von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Dies kann durch Drehung der Ebene erreicht werden. Deshalb können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $\zeta = \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ gelten. Mit $|\psi - n\zeta|$ wird die Länge des Vektors $\psi - n\zeta$ bezeichnet. Deshalb kann die Folge durch

$$c_n = |\psi - n\zeta| = \left|\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} - n\cdot\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2}$$

für alle $n = 1,2,3,\dots$ beschrieben werden. Ferner bezeichne

$$\langle\psi,\zeta\rangle = \langle\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}\rangle \;= \psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2$$

das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren ψ und ζ.

a) Eine Folge (c_n) heißt nach Definition streng monoton wachsend, falls

$$c_n < c_{n+1}$$

für alle $n = 1,2,3,\dots$ gilt. Offensichtlich gilt $c_n \geq 0$ für alle $n = 1,2,3,\dots$. Somit erhalten wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
&c_n < c_{n+1}\\
\iff& \sqrt{(\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2} < \sqrt{(\psi_1 - (n+1)\,\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\,\zeta_2)^2}\\
\iff& (\psi_1 - n\zeta_1)^2 + (\psi_2 - n\zeta_2)^2 < (\psi_1 - (n+1)\,\zeta_1)^2 + (\psi_2 - (n+1)\,\zeta_2)^2\\
\iff& \psi_1^2 - 2n\psi_1\zeta_1 + n^2\zeta_1^2 + \psi_2^2 - 2n\psi_2\zeta_2 + n^2\zeta_2^2 < \psi_1^2 - 2\,(n+1)\,\psi_1\zeta_1 + (n+1)^2\,\zeta_1^2 + \psi_2^2\\
&\qquad - 2\,(n+1)\,\psi_2\zeta_2 + (n+1)^2\,\zeta_2^2\\
\iff& 2\,(\psi_1\zeta_1 + \psi_2\zeta_2) < (2n+1)\cdot\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right)\\
\iff& \frac{2\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2} < 2n+1\\
\iff& \frac{\langle\psi,\zeta\rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} < n.
\end{aligned}$$

Damit die Folge streng monoton wachsend ist, muss

$$\frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} < 1$$

sein. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} < \frac{3}{2}$$

und dies entspricht unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung für strenges, monotones Wachsen der Folge (c_n).

b) Da sich in der Definition der Definition das Relationszeichen umkehrt, folgt somit die Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &> c_{n+1} \\ \iff \frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} &> n \end{aligned}$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dies ist allerdings nicht für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ möglich, da die Vektoren ψ und ζ fixiert sind. Somit gibt es keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Folge (c_n) streng monoton fallend ist.

c) Dies ist möglich. Aufgrund der Äquivalenz

$$\begin{aligned} c_n &< c_{n+1} \\ \iff \frac{\langle \psi, \zeta \rangle}{|\zeta|^2} - \frac{1}{2} &< n. \end{aligned}$$

aus a) sehen wir, dass eine natürliche Zahl n_0 derart existiert, dass die Folge (c_n) für alle $n > n_0$ monoton wachsend ist. Dementsprechend ist sie vorher monoton fallend.

Aufgabe 131242:
Ist x eine reelle Zahl, so bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. (So ist z. B. $[\pi] = 3$; $[0{,}7] = 0$; $[-0{,}7] = -1$.)
a) Man zeige, dass es zwei rationale Zahlen a, b derart gibt, dass die Zahlen

$$c_n = a \cdot n + b - [a \cdot n + b], \qquad (n = 1, 2, ...)$$

eine nicht-konstante Zahlenfolge bilden und dass dabei alle $c_n \neq 0$ sind.
b) Man beweise, dass für je zwei rationale Zahlen a, b die in a) definierte Zahlenfolge ein Minimum besitzt.

Lösung von ochen:
a) Seien $a = 1/2$ und $b = 1/3$, so folgt

$$c_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2) + \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2}(n+2) + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1 - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1\right] == \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} + 1 - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}\right] - 1 = c_n$$

Die Folge ist also periodisch mit Periode 2. Rechnen wir die ersten beiden Folgeglieder aus, gilt

$$c_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}\right] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 2 \mid n \\ \frac{5}{6}, & 2 \nmid n \end{cases}.$$

Somit erfüllt c_n die gewünschten Anforderungen.

b) Wir zeigen sogar, dass die Folge nur endlich viele Werte annimmt. Da a rational ist, gibt es teilerfremde ganze Zahlen p,q mit $q > 0$ und $a = p/q$. Somit folgt

$$c_{n+q} = \frac{p}{q}(n+q) + b - \left[\frac{p}{q}(n+q) + b\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b + p\right] = \frac{p}{q}n + b + p - \left[\frac{p}{q}n + b\right] - p = c_n.$$

Es werden also höchstens q paarweise verschiedene Werte angenommen. Somit gibt es unter diesem einen minimalen.

Aufgabe 171245:
Es seien $f_1, f_2, ...$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)}$$

für $k = 1, 2, 3, ...$
Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, ...$ alle reellen Zahlen x, die Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 2x$ sind.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir werden mittels vollständiger Induktion nach n zeigen:
Für $x > 4$ gilt $f_n(x) < 2x$ (1).
Zunächst folgt aus $x > 4$: $16 < x^2$ bzw. $x^2 + 48 < x^2 + 3x^2 = 4x^2$. Hieraus erhält man unter Beachtung von $x > 4$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 48} < 2x$$

d. h., die Behauptung (1) ist für $n = 1$ richtig. Es sei (1) für ein festes b richtig. Dann gilt

$$f_n(x) < 2x \qquad \text{und damit} \qquad 6f_n(x) < 12x < 3x^2 \quad (x > 4)$$

Hieraus erhalten wir

$$(f_{n+1}(x))^2 = x^3 + 6f_n x < 4x^2$$

und damit die Behauptung (1).
Völlig analog lässt sich zeigen: Für $0 \leq x < 4$ gilt $f_n(x) > 2x$ (2).
Wegen $f_n(x) \geq 0$ kommen für die Gleichung $f_n(x) = 2x$ nur nichtnegative x in Betracht. Aus (1) und (2) folgt unter der Beachtung der Stetigkeit der Funktionen $f_n(x)$, dass $x = 4$ die einzige reelle Lösung der Gleichung $f_n(x) = 2x$ ist.

Aufgabe 191246A:
Eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zahlen heiße genau dann C-konvergent gegen eine reelle Zahl z, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = z$$

gilt.
Eine Funktion f heiße genau dann C-stetig an der Stelle a ihres Definitionsbereiches, wenn für jede Folge $\{x_k\}$, die C-konvergent gegen a ist und deren sämtliche Glieder x_k im Definitionsbereich von f liegen, die Folge $\{f(x_k)\}$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist.
Man zeige:
a) Sind A, B und a beliebige reelle Zahlen, so gilt:
Die durch $f(x) = Ax + B$ für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f ist C-stetig an der Stelle a.
b) Wenn eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle C-stetig ist, so gilt für beliebige reelle p, q die Gleichung $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) Für jede Folge (x_k), die C-konvergent gegen a ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Ax_k+B)\right)$$
$$= A\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + B = Aa+B = f(a)$$

da nach Voraussetzung gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = a$$

Damit ist bewiesen, dass für jede solche Folge (x_k) die Folge $(f(x_k))$ stets C-konvergent gegen $f(a)$ ist, w. z. b. w.

b) Für den Beweis dieses Teils der Behauptung wird die C-Konvergenz einer spezielle ausgewählten Folge benutzt.
Für beliebige reelle Zahlen p,q wird die Folge

$$(x_k) = (p,q,-(p+q)mp,q,-(p+q),...)$$

betrachtet. Für sie gilt offenbar

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = p \quad;\quad \sum_{k=1}^{2} x_k = p+q \quad;\quad \sum_{k=1}^{3} x_k = 0 \quad;\quad \sum_{k=1}^{4} x_k = p \quad;\quad \sum_{k=1}^{5} x_k = p+q \quad;\quad \sum_{k=1}^{6} x_k = 0$$

und allgemein für $m = 0,1,2,...$:

$$\text{im Falle } n = 3m+1: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p}{n}$$
$$\text{im Falle } n = 3m+2: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{p+q}{n}$$
$$\text{im Falle } n = 3m+3: \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

Da die Folgen $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{p+q}{n}\right)$ gegen Null konvergieren, konvergiert auch die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ gegen Null. Die Folge (x_k) ist daher C-konvergent gegen Null.

Sei f eine für alle reelle Zahlen x definierte Funktion, die an der Stelle $a = 0$ den Funktionswert $f(0) = 0$ hat und an dieser Stelle $C-stetig$ ist.
Dann ist nach Voraussetzung die Folge $(f(x_k))$ C-konvergent gegen $f(0) = 0$, d. h. die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$ konvergiert gegen Null. Das gilt dann auch für ihre Teilfolge $\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right)$, d. h. es ist

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = 0$$

Da für beliebiges m

$$\left(\frac{1}{3m}\sum_{k=1}^{3m} f(x_k)\right) = \frac{1}{3}[(f(p)+f(q)+(f-(p+q))]$$

gilt, ist diese Teilfolge eine Folge mit konstanten Gliedern. Folglich gilt für beliebige p, q:

$$f(p) + f(q) + f(-(p+q)) = 0 \qquad (1)$$

Aus (1) folgt für $p = 0$ und beliebiges reelles q' wegen $f(0) = 0$:

$$f(0) + f(q') = f(q') = -f(-q') \qquad (2)$$

Für $q' = p + q$ folgt somit $f(p+q) = -f(-(p+q))$. Damit ergibt sich aus (1) und 82) die zu beweisende Behauptung $f(p) + f(q) = f(p+q)$.

Aufgabe 201244:
Es sei $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

gilt. Man ermittle alle diejenigen Glieder dieser Folge, die ganzzahlig sind.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die ersten Werte der Folge sind $a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 15; a_4 = 56; a_5 = 209$. Daher beweisen wir die Gleichung $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ für $n \geq 1$.
Daraus folgt dann, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind. Die Folge ist streng monoton steigend. Insbesondere gilt $2a_{n+1} > a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1} \\ \Rightarrow (a_{n+1} - 2a_n)^2 &= 3a_n^2 + 1 \\ \Rightarrow a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 1 \\ \Rightarrow (2a_{n+1} - a_n)^2 = 4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 3a_{n+1}^2 + 1 \\ \Rightarrow 2a_{n+1} - a_n &= \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wenden wir nun auf a_{n+2} an.

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \sqrt{3a_{n+1}^2 + 1} = 2a_{n+1} + 2a_{n+1} - a_n = 4a_{n+1} - a_n$$

q. e. d.

Aufgabe 201245:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \qquad (1)$$

Man ermittle einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ (d. h. einen Ausdruck, der $f(n)$ in Abhängigkeit von n so darstellt, dass zu seiner Bildung nicht wie in (1) eine von n abhängende Anzahl von Rechenoperationen verlangt wird).
Hinweis:
Ist x eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnet $[x]$ diejenige ganze Zahl, für die $[x] \leq x < [x] + 1$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Jeder der in (1) gegebenen Summanden wird mit dem passenden Faktor $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ erweitert, wodurch im Nenner die Zahl 1 entsteht. Durch teilweises Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke für die Summanden ergibt sich:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} (n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

Die Summe lässt sich wie folgt zerlegen:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - \sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \qquad (2)$$

Nach den Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen wird die erste Summe in (2) umgeformt, und man erhält:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2} n(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} [\sqrt{k-1}](\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} m \sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} m \left(\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2} \sqrt{k} - \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \sqrt{k} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} m(m+1-m) = \sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ergebnisse für beide Summen in (2) ergibt sich schließlich

$$f(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

also ein Ausdruck der gewünschten Art.

Aufgabe 201246A:
Eine Strecke AB von 10 m Länge soll auf folgende Weise durch wiederholtes Halbieren in 10 näherungsweise gleichlange Strecken zerlegt werden:
(1) Zunächst wählt man beliebige Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf der Strecke AB und definiert $P_0^{(0)} = A$ und $P_{10}^{(0)} = B$.
(2) Liegen nun für eine natürliche Zahl n bereits als n-te Näherung Punkte $P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots, P_{10}^{(n)}$ vor, so definiert man $P_0^{(n+1)} = A$, $P_{10}^{(n+1)} = B$ sowie für $j = 1, 2, \dots, 9$ jeweils $P_j^{(n+1)}$ als Mittelpunkt der Strecke $P_{j-1}^{(n+1)} P_{j+1}^{(n)}$.

Es seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_9$ die Punkte auf AB, die AB in 10 genau gleich lange Teilstrecken zerlegen, für die also $AQ_1 = Q_1Q_2 = \dots = Q_8Q_9 = Q_9B = 1$ m gilt.
Beweisen Sie, dass eine natürliche Zahl N so existiert, dass für jede Wahl der Punkte $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, \dots, P_9^{(0)}$ auf AB gilt:
Bei der n-ten Näherung weicht jeder der Punkte $P_j^{(N)}$ $(j = 1, 2, \dots, 9)$ um weniger als 1 mm von der Lage des Punktes Q_j ab, d. h., es gilt $P_J^{(N)} Q_j < 1$ mm.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Lösung wird hier für de allgemeinen Fall einer Strecke AB der ganzzahligen Länge $M \geq 2$ (in Metern), die in M Teilstrecken zerlegt wird, formuliert. Im Falle $M = 10$ ergibt sich eine Lösung der gestellten Aufgabe.
Für die Maßzahlen $x_j^{(n)} = AP_j^{(n)}$ der Strecken erhält man aus der Aufgabenstellung:

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x_{j-1}^{(n+1)} + x_{j+1}^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (1)1$$

$$x_j^{(n+1)} = j \qquad (j = 0, M) \qquad (2)$$

Die Aufgabe ist nun äquivalent mit dem Nachweis, dass ein N ist

$$\left|x_j^{(N)} - j\right| < 0{,}001 \qquad (0 \leq j \leq M) \qquad (3)$$

existiert. Mit der Bezeichnung $e_j^{(n)} = x_j^{(n)} - j$ gehen die Formeln (1), (2) über in:

$$e_j^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(e_{j-1}^{(n+1)} + e_{j+1}^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1) \qquad (4)$$

$$e_j^{(n+1)} = 0 \qquad (j = 0, M) \qquad (5)$$

Für die „größten Abweichungen“ $m^{(n)} = \max\limits_{0\leq j\leq N} \left|e_j^{(n)}\right|$ erhält man aus (4), (5) über die Beziehungen

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|e_{j-1}^{(n=1)}\right| + m^{(n)}\right) \qquad (1 \leq j \leq M-1)$$

$$\left|e_j^{(n+1)}\right| \leq \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{1}{2}\right) m^{(n)}$$

$$\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^j} \leq 1 - \frac{1}{2^{M-1}} = q < 1$$

die Abschätzung

$$m^{(n+1)} \leq q m^{(n)} \leq q^{n+1} m^{(0)}$$

Nach Definition der Größen $x_j^{(0)}$ gilt (wegen $P_j^{(0)} \in AB$) $m^{(0)} \leq M-1$, so dass für alle $n \geq 0$ die Abschätzung

$$\left|x_j^{(n)} - j\right| \leq (M-1)q^n \qquad (6)$$

bewiesen ist. Da für $0 < q < 1$ bekanntlich $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ gilt, existiert sicherlich ein N mit

$$q^N < \frac{1}{M-1} 0{,}001 \qquad (7)$$

Für jedes solches N folgt dann (3) aus (6).

Aufgabe 231241:
Es sei (x_n) diejenige Folge von reellen Zahlen, für die $x_1 = 1$ und gilt:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls das zutrifft, ihren Grenzwert.

Lösung von Kitaktus:
Sei g die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$, also $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (Das ist das Reziprok des goldenen Schnittes $g = 1/\phi = \phi - 1$).

Wir werden zeigen, dass die Folge (x_n) monoton fallend und durch g nach unten beschränkt, also konvergent ist. Danach werden wir zeigen, dass g der Grenzwert dieser Folge ist.

Lemma 1. Für $x > g$ gilt $x^2 + x - 1 > 0$.

Beweis: g ist positiv, die zweite Nullstelle der Gleichung ist dagegen negativ $(\frac{-\sqrt{5}-1}{2})$, daher ist g die größere der beiden Nullstellen und rechts der größeren Nullstelle nimmt eine quadratische Funktion mit positivem Vorfaktor vor x^2 nur positive Werte an.

Lemma 2. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} > g$.

Beweis: Sei $d := x - g > 0$. Dann gilt $3gd + 4d^2 > 0$ äquivalente Umformungen ergeben

$$4g^2 + 8gd + 4d^2 + 1 > 4g^2 + 5gd + 1 = 4g^2 + 5gd + (g^2 + g)$$

(nach Def. von g) und weiter

$$4(g+d)^2 + 1 > 5g^2 + 5gd + g = g(5g + 5d + 1)$$

bzw. $4x^2 + 1 > g(5x + 1)$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Lemma 3. Für $x > g > 0$ gilt $\frac{4x^2+1}{5x+1} < x$.

Beweis: Nach Lemma 1 gilt $x^2 + x > 1$. Addition von $4x^2$ ergibt $5x^2 + x = x(5x + 1) > 4x^2 + 1$. Division durch $5x + 1 > 0$ liefert die Behauptung.

Mit Lemma 2 und 3 können wir nun induktiv beweisen, dass $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$ für alle natürlichen $n \geq 1$ gilt.

Induktionsanfang: $x_1 = 1 = \frac{3-1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = g$.

Induktionsschritt: Es gelte $x_n > g$. Nach Lemma 2 und 3 gilt nun $g < x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1} < x_n$.

Damit ist gezeigt, dass (x_n) streng monoton fällt und durch $g > 0$ nach unten beschränkt ist. (x_n) ist daher konvergent. Sei $x > 0$ der Grenzwert von (x_n), dann muss für x die Gleichung $x = \frac{4x^2+1}{5x+1}$ gelten(*). Multiplikation mit $5x + 1$ ergibt nach Zusammenfassung: $x^2 + x - 1 = 0$. x ist also die positive Nullstelle von $x^2 + x - 1$ und das ist gerade g.

(*) Wenn $x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n+1}$ für alle n gilt und (x_n) gegen x konvergiert, dann gilt auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n + 1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 4x_n^2 + 1}{\lim_{n\to\infty} 5x_n + 1} = \frac{4(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + 1}{5 \lim_{n\to\infty} x_n + 1} = \frac{4x^2 + 1}{5x + 1}$$

Alternativ-Lösung von weird:
Wir benutzen hier ganz wesentlich die einfache Umformung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + x_n - 1}{5x_n + 1}$$

aus der man zunächst sieht, dass wenn die Folge (x_n) konvergiert, ihr Grenzwert dann nur die positive Nullstelle $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ von $x^2 + x - 1 =$ sein kann. Von daher liegt es nahe, das Verhalten der Differenzfolge

$$d_n = x_n - g \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

zu betrachten, für welche dann die Rekursion

$$d_1 = 1 - g \approx 0.38, \quad d_{n+1} = d_n - \frac{(x_n^2 - g^2) + (x_n - g)}{5(x_n - g) + 5g + 1} = d_n \left(1 - \frac{d_n + 2g + 1}{5d_n + 5g + 1}\right)$$

gelten muss. Daraus kann man aber induktiv sofort ersehen, dass die Folge (d_n) nur positive Glieder enthält und sie daher mithilfe der Grobabschätzung

$$0 < \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{4d_n + 3g}{5d_n + 5g + 1} < \frac{4d_n + 4g}{5d_n + 5g} = \frac{4}{5}$$

eine Nullfolge sein muss, womit also dann auch die ursprüngliche Folge (x_n) tatsächlich gegen g konvergiert.

Aufgabe 241246B:
Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist.
Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

Lösung von cyrix:
Für $k = 1$ ist $x_{n+1}^2 = x_n^2 + x_n \geq x_n^2 + 1 \geq n + 1$, wie man leicht induktiv beweist. Insbesondere divergiert also die Folge (x_n^2) bestimmt gegen $+\infty$ und damit auch die Folge (x_n).
Für größere Werte von k vergrößern sich aufgrund der Monotonie der Rekursionsbedingung zur Berechnung von x_{n+1} aus k und x_n nur die Folgenglieder weiter, was sich wieder simpel per Induktion zeigen lässt, sodass auch dann die Folgen gegen $+\infty$ divergieren.
Für $0 < k < 1$ ist $0 < g := \frac{k}{1-k}$ und

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{\sqrt{k(x_n^2 + x_n)} + g}$$

Weiterhin ist

$$g^2 \cdot (k-1) + kg = -g^2 \cdot (1-k) + kg = \frac{-k^2}{(1-k)^2} \cdot (1-k) + k \cdot \frac{k}{1-k} = \frac{-k^2}{1-k} + \frac{k^2}{1-k} = 0$$

Damit ist $g^2 = k(g^2 + g)$, also

$$k(x_n^2 + x_n) - g^2 = k(x_n^2 - g^2 + x_n - g) = k(x_n - g)(x_n + g + 1)$$

Setzt man dies ein, erhält man

$$x_{n+1} - g = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - g = \frac{k(x_n^2 + x_n) - g^2}{x_{n+1} + g} = (x_n - g) \cdot k \cdot \frac{x_n + 1 + g}{x_{n+1} + g}$$

Ist also $g = x_1 = 1$, was im Fall $k = \frac{1}{2}$ eintritt, so ist die Folge x_n damit konstant gleich g, da aus $x_n - g = 0$ sofort auch $x_{n+1} - g = 0$ folgt. Ist dagegen $g < x_1$, was für $0 < k < \frac{1}{2}$ eintritt, dann gilt auch für alle weiteren Folgenglieder $g < x_n$, da $x_{n+1} - g$ und $x_n - g$ das gleiche Vorzeichen besitzen müssen, da alle weiteren Faktoren positiv sind. Analog ist in den verbleibenden Fällen mit $\frac{1}{2} < k < 1$ schließlich $x_1 < g$ und damit für alle Folgenglieder $x_n < g$.

Analog erhält man

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{k(x_n^2 + x_n)} - x_n = \frac{k(x_n^2 + x_n) - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1} + x_n} \cdot ((k-1)x_n + k)$$

sodass die Differenz $x_{n+1} - x_n$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie $(k-1)x_n + k$.
Da $(k-1) \cdot g + k = -(1-k) \cdot \frac{k}{1-k} + k = -k + k = 0$ ist, lässt sich die zuvor erhaltene Summe auch schreiben als $(k-1)x_n + k = (k-1) \cdot (x_n - g) = (1-k) \cdot (g - x_n)$, sodass wegen $k < 1$ also $x_{n+1} - x_n$ genau das gleiche Vorzeichen besitzt wie $x_n - g$.

Damit ergibt sich, dass im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ der Wert g eine untere Schranke an die Folgenglieder ist, während die Folge wegen $g - x_n < 0$ und damit $x_{n+1} - x_n < 0$ monoton fallend ist. Also muss die Folge konvergieren. Analog ist im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ der Wert g eine obere Schranke an die Folgenglieder, während die Folge wegen $g - x_n \geq 0$ und damit $x_{n+1} - x_n \geq 0$ monoton steigend ist, also auch in diesem Fall konvergiert.

Ein möglicher Grenzwert x muss aber die Rekursionsbedingung erfüllen, sodass $x = \sqrt{k(x^2 + x)}$ bzw. $x^2 = k(x^2 + x)$, also $x^2 \cdot (1-k) = x$ und wegen $1 - k \neq 0$ auch $x^2 = x \cdot \frac{1}{1-k}$ sowie schließlich $x = 0$ oder $x = g$ folgt. Es kann aber nie $x = 0$ der Grenzwert sein, da im Fall $0 < k < \frac{1}{2}$ die Folge nach unten durch $g > 0$ beschränkt ist und im Fall $\frac{1}{2} \leq k < 1$ aufgrund des monotonen Wachstums nach unten durch $x_1 = 1 > 0$ beschränkt ist. Also muss g der gesuchte Grenzwert sein.

Zusammenfassend ergibt sich, dass die Folge für $k \geq 1$ (gegen $+\infty$) divergiert und für $0 < k < 1$ gegen $g = \frac{k}{1-k}$ konvergiert.

Aufgabe 261242:
Man ermittle alle diejenigen Zahlenfolgen (a_n) mit $n = 1, 2, 3, ...$, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) Für alle ganzen Zahlen m, n mit $n > m > 0$ gilt $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_n^2 - a_m^2$.
(2) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{5}{2}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn eine Zahlenfolge (a_n) die Bedingungen erfüllt, so folgt durch vollständige Induktion, dass

$$a_n = \frac{2}{3}(2^n - 2^{-n})$$

for $n =$ 1,2,3,... gilt:
(a) Es gilt $a_1 = 1 = \frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{5}{2} = \frac{2}{3}(4 - \frac{1}{4}$ also die Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$.

(b) Wenn $k \geq 2$ ist und die Behauptung für $n = k$ und $n = k - 1$ gilt, d. h. wenn

$$a_k = \frac{2}{3}(2^k - 2^{-k}) \qquad , \qquad a_{k-1} = \frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})$$

ist, so folgt: Wegen $k \geq 2$ ist $a_{k-1} \neq 0$, also ergibt sich aus (1) und (2)

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{a_k^2 - a_1^2}{a_{k-1}} = \frac{\frac{4}{9}((2^k - 2^{-k})^2 - \frac{9}{4})}{\frac{2}{3}(2^{k-1} - 2^{-k+1})} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2^{2k} - 4 - (\frac{1}{4} - 2^{-2k})}{2^{k-1} - 2^{-k+1}} = \frac{2}{3}(2^{k+1} - 2^{-k-1}) \end{aligned}$$

d. h. die Behauptung für $n = k + 1$. Daher kann nur die durch (3) gegebene Folge die Bedingungen (1), (2) erfüllen.

II. Sie erfüllte sich auch, denn (2) und in I(a) bestätigt, und für alle ganzen $n > m > 0$ folgt auch (3)

$$\begin{aligned} a_{n+m} \cdot a_{n-m} &= \frac{2}{3}(2^{n+m} - 2^{-n-m}) \cdot \frac{2}{3}(2^{n-m} - 2^{-n+m}) \\ &= \frac{4}{9}(2^{2n} + 2^{-2n} - 2 + 2 - 2^{2m} - 2^{-2m}) = a_n^2 - a_m^2 \end{aligned}$$

Somit erfüllt genau die Folge (3) die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 271245:
Es sei (x_n) die durch

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1} + 4}$$

$(n = 2, 3, 4, ...)$ definierte Zahlenfolge.
Man untersuche, ob diese Folge konvergent ist, und ermittle, falls dies zutrifft, ihren Grenzwert.

Lösung von Kornkreis:
Wenn die Folge gegen einen Grenzwert a konvergiert, muss

$$a = \frac{a+1}{a+4}$$

und damit $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ gelten (die negative Lösung für a kann ausgeschlossen werden, da alle Folgeglieder positiv sind).

Nun ist die Konvergenz der Folge nicht ganz einfach nachzuweisen, da sie nicht monoton ist, sondern um a oszilliert.
Man könnte den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden und nachweisen, dass die der Bildungsvorschrift der Zahlenfolge entsprechende zweidimensionale Funktion eine Kontraktion ist, was aber aufwändig ist und eben einen recht starken Satz voraussetzen würde.

Stattdessen wollen wir für hinreichend große n die plausible Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit geeigneten Konstanten $c > 0$ und $0 < \lambda < 1$ zeigen (dass eine Abschätzung dieser Form existiert, folgt aus dem Beweis des Banach'schen Fixpunktsatzes).
Wir wählen $c = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$ und $n \geq 2$.

Beweis mit vollständiger Induktion: Wegen $\frac{1}{4} < a$ sind für $n = 2$ und $n = 3$ die Ungleichungen

$$|x_2 - a| = 1 - a < c \cdot \lambda^2 = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad |x_3 - a| = \frac{2}{5} - a < c \cdot \lambda^3 = \frac{3}{8}$$

erfüllt. Sei nun ein $n \geq 4$ gegeben und die Behauptung für a_2,...,a_{n-1} bewiesen. Dann haben wir im Falle $x_n > a$

$$|x_n - a| = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}+4} - a < \frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a,$$

und falls $x_n \leq a$

$$|x_n - a| = a - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}+4} < a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4}.$$

Betrachten wir zunächst den Fall $x_n > a$. Wir gehen von der zu zeigenden Ungleichung

$$\frac{a + c\lambda^{n-1} + 1}{a - c\lambda^{n-2} + 4} - a \overset{?}{<} c\lambda^n$$

aus und formen äquivalent um (beachte $a - c\lambda^{n-2} + 4 > 0$) zu

$$0 < c\lambda^n(a+4) - c^2\lambda^{2n-2} + a(a+4) - ca\lambda^{n-2} - (a + c\lambda^{n-1} + 1)$$

Wegen $a(a+4) - (a+1) = 0$ (siehe die Bestimmungsgleichung für a) ist dies äquivalent zu

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a+4) - c\lambda^n - a - \lambda)$$

und tatsächlich ist wegen $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{8}$ und mit Einsetzen der Werte von c und λ

$$\lambda^2(a+4) - c\lambda^n - a - \lambda > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + 4\right) - \frac{3}{2^n} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} > \frac{1}{16} + 1 - \frac{3}{16} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.
Für $x_n \leq a$ analog:

$$a - \frac{a - c\lambda^{n-1} + 1}{a + c\lambda^{n-2} + 4} \overset{?}{<} c\lambda^n$$

äquivalent zu

$$0 < c\lambda^n(a+4) + c^2\lambda^{2n-2} - a(a+4) - ca\lambda^{n-2} + (a - c\lambda^{n-1} + 1)$$

bzw.

$$0 < \lambda^{n-2}(\lambda^2(a+4) + c\lambda^n - a - \lambda)$$

und es ist

$$\lambda^2(a+4) + c\lambda^n - a - \lambda > 0$$

für $n \geq 4$, womit die behauptete Ungleichung verifiziert ist.

Insgesamt haben wir also für jedes $n \geq 2$ die Abschätzung $|x_n - a| < c\lambda^n$ mit $\lambda = \frac{1}{2}$ und $c = 3$, was wegen $c\lambda^n \to 0$ ($n \to \infty$) die Konvergenz zeigt. Damit ist bewiesen, dass x_n gegen $a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ konvergiert.

Bemerkung: Interessanterweise kann man nicht ohne Weiteres $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ per Induktion zeigen, obwohl dies schwächer ist als die in diesem Beweis gezeigte Fehlerabschätzung (schwächer, da Polynome langsamer fallen als Exponentialfunktionen). Das ist ein bekanntes Phänomen, das sich damit erklären lässt, dass man zwar etwas Schwächeres zeigen will, aber daher in der Induktionsvoraussetzung auch nur etwas Schwächeres voraussetzen kann.

Aufgabe 331242:
Für $n = 1, 2, 3, ...$ sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \frac{1}{1 \cdot s_1^2} + \frac{1}{2 \cdot s_2^2} + ... + \frac{1}{n \cdot s_n^2}$$

Man beweise für alle $n = 1, 2, 3, ...$ die Ungleichung $t_n < 2$.

Lösung von MontyPythagoras:
Es ist

$$\frac{1}{k} = s_k - s_{k-1}$$

Daher kann man die Summe t_n auch wie folgt darstellen:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot s_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{k}}{s_k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k^2}$$

Da $s_n > s_{n-1}$ für alle n ist, s_n also streng monoton steigend ist, gilt:

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k \cdot s_{k-1}}$$

$$t_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right)$$

Das ist eine Teleskopsumme, so dass folgt:

$$t_n < 1 + \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_n}$$

Mit $s_1 = 1$ erhält man:

$$t_n < 2 - \frac{1}{s_n} < 2$$

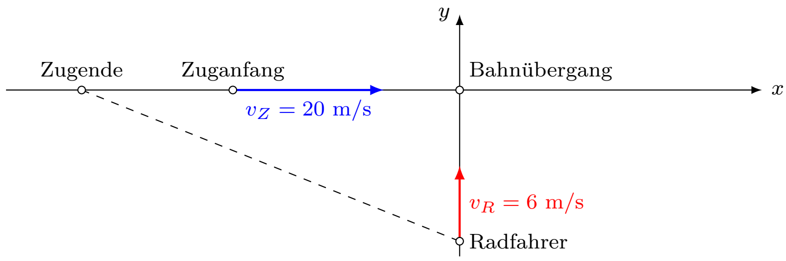
q. e. d.

I.VII Weitere Aufgaben

I Runde 1

Aufgabe V01104:
Ein 90 m langer D-Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $km \cdot h^{-1}$. Er ist 150 m vom Bahnübergang entfernt, als ein Radfahrer ihn bemerkt, der, 100 m vom Bahnübergang entfernt, sich mit einer Geschwindigkeit von 6 $m \cdot s^{-1}$ in der Richtung zum Bahnübergang bewegt.
Nach wie viel Sekunden hat der Radfahrer vom Zugende den geringsten Abstand?

Lösung von Steffen Polster:
Unter der Annahme, dass der Bahnübergang senkrecht zur Bahnstrecke erfolgt, betrachten wir ein Koordinatensystem, bei dem sich der Bahnübergang im Koordinatenursprung befindet und der Zug sich längs der x-Achse bewegt, der Radfahrer längs der y-Achse.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ s ist der Radfahrer 100 m vom Übergang entfernt, das Zugende (= Zugentfernung + Zuglänge) 240 m. Der Ort des Zugendes wird mit den Koordinaten $(240 + 20 \cdot t)$ beschrieben, wobei t in Sekunden gemessen wird. Die Geschwindigkeit des Zuges ist 72 km/h = 20 m/s.
Der Ort des Radfahrers ist analog $(0, 6 \cdot t - 100)$.

Die Entfernung des Radfahrers zum Zugende ist

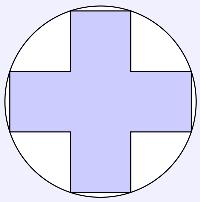
$$d = \sqrt{(240 + 20 \cdot t)^2 + (6 \cdot t - 100)^2}$$

Die Entfernung d wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Der Radikand wird durch

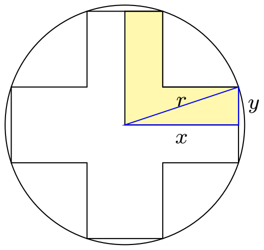
$$f(t) = 4(109t^2 - 2700t + 16900)$$

beschrieben. Die 1. Ableitung ist $f'(t) = 8(109t - 1350)$ mit der Nullstelle bei $t_1 = \frac{1350}{109} \approx 12{,}39$. Da der Radikand eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor des quadratischen Gliedes ist, ist t_1 der Zeitpunkt des kürzesten Abstandes zwischen Zugende und Fahrradfahrer. Nach 12,39 s ist der Abstand minimal.

Aufgabe V01113:
Der zylinderförmige Hohlraum (Radius r) einer Rundspule soll mit einem kreuzförmigen Eisenkern ausgefüllt werden.
Wie ist der Kern zu dimensionieren, damit sein Querschnitt maximal wird?
Den wievielten Teil des Spuleninneren kann man im günstigsten Fall in dieser Weise mit Eisen ausfüllen?
(Auf die Untersuchung mit der 2. Ableitung dürfen Sie verzichten!)



Lösung von Steffen Polster:



Das Spuleninnere setzt sich auf 4 Flächen der Form in der Abbildung zusammen. Eine solche Fläche hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{F_I}{4} = 2x \cdot y - y \cdot y$$

wobei $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gilt (siehe Abbildung). Die Zielfunktion der Fläche des Spuleninneren ist somit

$$F(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2) \qquad (1)$$

Die 1. Ableitung der Flächenfunktion wird dann

$$F'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x$$

Für die Suche nach dem Maximum der inneren Fläche wird $F'(x)$ gleich 0 gesetzt und die Gleichung gelöst.

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 2x \\ 0 &= 2(r^2 - x^2) - 2x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \\ x\sqrt{r^2 - x^2} &= 2x^2 - r^2 \\ 0 &= 5x^4 - 5r^2x^2 + r^4 \end{aligned}$$

Mit $u = x^2$ hat die quadratische Gleichung $0 = 5i^2 - 5r^2u + r^4$ die Lösungen

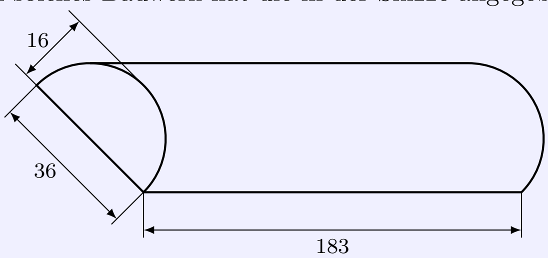
$$u_1 \approx 0{,}7236r^2 \qquad ; \qquad u_2 \approx 0{,}2764r^2$$

und folglich, da die negativen Lösungen entfallen:

$$x_1 \approx 0{,}8506r; \quad y_1 \approx 0{,}5257r \qquad ; \qquad x_2 \approx 0{,}5257r; \quad y_2 \approx 0{,}8506r$$

Setzt man x_1 in (1) ein, so ergibt sich für die Gesamtfläche des Spuleninneren $F_I \approx 2{,}4721r^2$. Dies entspricht 78,69 % der Kreisfläche πr^2.

Aufgabe V01115:
Beim Bau großer Hallen verwendet man neuerdings parabolische Bogenkonstruktionen aus Beton. Ein solches Bauwerk hat die in der Skizze angegebenen Maße: (Maßangaben in m)



a) Berechnen Sie die Fläche des Querschnitts der Halle!
b) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Halle!
c) Wie verhält sich die Fläche des Querschnitts zu der Fläche des Rechtecks von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe?

Lösung von Steffen Polster:
a) Durch die Punkte $P_1\,(-18;0)$, $P_2\,(0;16)$ und $P_3\,(18;0)$ wird eine Parabel gelegt, deren Funktionsgleichung mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ angesetzt wird. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 324a - 18b + c &= 0, \\ c &= 16, \\ 324a + 18b + c &= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $c = 16$. Gleichsetzen der ersten und dritten Gleichung liefert $b = 0$. Es folgt $a = -\frac{4}{81}$. Die Funktionsgleichung der Parabel lautet

$$f(x) = -\frac{4}{81}x^2 + 16.$$

Um die Querschnittsfläche zu berechnen, muss das Integral $\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{-18}^{18} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-18}^{18} \left\{-\frac{4}{81}x^2+16\right\}\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{243}x^3+16x\right]_{-18}^{18}\\ &= -\frac{4}{243}\cdot(18)^3+16\cdot 18-\left(-\frac{4}{243}\cdot(-18)^3-16\cdot 18\right) = 576-\frac{8}{243}\cdot(18)^3 = 384.\end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Halle beträgt $384\,\mathrm{m}^2$.

b) Für den Rauminhalt der Halle gilt

$$V = 384\,\mathrm{m}^2\cdot 183\,\mathrm{m} = 70272\,\mathrm{m}^3$$

und somit 70272 Kubikmeter.

c) Für das Verhältnis gilt

$$\frac{A_{\text{Parabel}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{384\,\mathrm{m}^2}{36\cdot 16\,\mathrm{m}^2} = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe V01116:
Ein Graben mit parabolischem Querschnitt soll ausgeschachtet werden. Seine Breite beträgt 3 Meter, seine Tiefe b Meter.
Berechnen Sie den Querschnitt des Grabens!

Lösung von Steffen Polster:
Um die Querschnittsfläche des Grabens zu berechnen, müssen wir zuerst eine Funktionsgleichung einer Parabel ermitteln, welche durch die Punkte $P_1(-1{,}5; 0)$, $P_2(0, b)$ und $P_3(1{,}5; 0)$ verläuft. Wir setzen mit der quadratischen Funktionsgleichung $f(x) = \widetilde{a}x^2+\widetilde{b}+\widetilde{c}$ an. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2{,}25\cdot\widetilde{a}-1{,}5\widetilde{b}+\widetilde{c} &= 0,\\ \widetilde{c} &= b,\\ 2{,}25\cdot\widetilde{a}+1{,}5\widetilde{b}+\widetilde{c} &= 0.\end{aligned}$$

Es gilt $\widetilde{c} = b$ und setzen wir die beiden übrigen Gleichungen gleich, so folgt $\widetilde{b} = 0$. Es bleibt $\widetilde{a} = -\frac{4}{9}b$.
Somit lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{4b}{9}x^2+b.$$

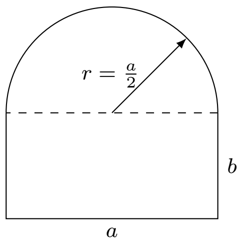
Um die Querschnittsfläche zu bestimmen, muss das Integral $\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$ gelöst werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5}\left(-\frac{4b}{9}x^2+b\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{4b}{27}x^3+bx\right]_{-1{,}5}^{1{,}5}\\ &= -\frac{4b}{27}\cdot(1{,}5)^3+1{,}5b+\frac{4b}{27}\cdot(-1{,}5)^3+1{,}5b = 3b-\frac{8b}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3b-b = 2b.\end{aligned}$$

Damit entspricht die Querschnittsfläche gerade dem Doppelten der Tiefe.

Aufgabe V01117:
Ein Entwässerungskanal hat als inneren Querschnitt ein Rechteck mit darübergesetztem Halbkreis.
Welche Abmessungen muss der Kanal haben, wenn bei konstantem Umfang U der Querschnitt möglichst groß sein soll?
Wie groß ist der größte Querschnitt?

Lösung von Steffen Polster:



a sei die Breite des Kanals, b die Höhe des rechteckigen Teils und $r = \frac{a}{2}$ der Radius des aufgesetzten Halbkreises. Für den Umfang des Kanals wird dann

$$u = a + 2b + \pi a \quad \rightarrow \quad b = \frac{u - a - \pi a}{2} \tag{1}$$

Der Flächeninhalts des Querschnitts setzt sich aus dem Rechteck und dem Halbkreis zusammen:

$$A = a \cdot b + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) und vereinfachen ergibt als Zielfunktion des Flächeninhaltes

$$A(a) = \frac{a \cdot u}{2} - \frac{a^2(3\pi + 4}{8}$$

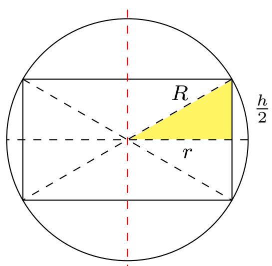
mit den Ableitungen

$$A'(a) = \frac{u}{2} - \frac{a(3\pi + 4)}{4} \qquad ; \qquad A''(a) = -\frac{3\pi + 4}{4} < 0$$

Die Nullstelle der 1. Ableitung ist $a = \frac{2u}{3\pi+4}$. Da die zweite Ableitung stets negativ ist, liegt ein lokales Maximum vor.
Für b wird $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$.
Der Kanal muss eine Breite von $a = \frac{2u}{3\pi+4}$ und eine rechteckige Höhe $b = \frac{u(\pi+2)}{6\pi+8}$ erhalten, um einen maximalen Flächeninhalt des Querschnitts von $A = \frac{u^2}{6\pi+8}$ zu erreichen.

Aufgabe V01118:
Einer gegebenen Kugel soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden.
Wie groß muss man das Verhältnis der Höhe h zum Durchmesser d des Zylinders wählen, damit
a) der Rauminhalt,
b) die Mantelfläche,
c) die gesamte Oberfläche des Zylinders möglichst groß werden?

Lösung von Steffen Polster:
Es sei R der Radius der Kugel, r der Radius des Zylinders und h die Höhe des Zylinders. Um ihren Zusammenhang zu finden legen wir eine Schnittebene durch Kugel und Zylinder, die normal auf die Deck- und Bodenfläche des Zylinder steht und durch den Kugelmittelpunkt geht.



In der Abbildung ist die Drehachse des Zylinders rot dargestellt. Für das rechtwinklige Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \tag{1}$$

a) Das Volumen des Zylinders berechnet sich zu

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

Umstellen von (1) nach r^2 und einsetzen ergibt

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

Die Nullstellen der 1. Ableitung $V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$ sind

$$h_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

Die negative Lösung entfällt. Die 2. Ableitung $V'' = -\frac{3}{2}\pi h$ ist für alle positive h negativ. Damit liegt ein lokales Maximum vor.

Der Zylinder hat bei maximalem Volumen den Radius $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ und die Höhe $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$. Das Verhältnis ist $h : r = \sqrt{2} : 1$.

b) Die Mantelfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$M = 2\pi\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}h$$

mit der 1. Ableitung

$$M' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}}$$

Die Nullstellen ergeben sich mit etwas Umstellen zu $h_{1,2} = \sqrt{2}R$. $h = \sqrt{2}R$ erweist sich mit etwas Rechenaufwand wieder als das gesuchte lokale Maximum.

Der Zylinder hat bei maximaler Mantelfläche den Radius $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ und die Höhe $h = \sqrt{2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = 2 : 1$.

c) Die Oberfläche des Zylinders berechnet sich zu

$$O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Erneutes Einsetzen von (1) ergibt die Zielfunktion

$$O = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi(h^2 - 4R^2)}{2}$$

mit der 1. Ableitung

$$O' = \pi\sqrt{4R^2 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{4R^2 - h^2}} - \pi h$$

Eine Nullstelle, die auch das lokale Maximum ergibt, ist $h = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. (Der rechnerische Nachweis ist sehr aufwendig). Der Zylinder hat bei maximaler Oberfläche den Radius $r = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}R$ und die Höhe $\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{5} + 2}R$. Das Verhältnis ist $h : r = (1 + \sqrt{5}) : 1$.

Aufgabe V01203:
Eine Uhr, mit Synchronmotor ausgerüstet, habe ideal gleichförmig bewegte Zeiger.
Bestimmen Sie genau die Uhrzeiten, bei denen die Zeiger so stehen, dass eine Stunde später der zwischen den Zeigern befindliche Winkel dieselbe Größe hat!
(Hinweis: Die betreffenden Winkel sind kleiner als 180°.)

Lösung von MontyPythagoras:
Sei der Winkel im Uhrzeigersinn von der 12 aus gerechnet $\sigma(t)$ für den Stundenzeiger und $\mu(t)$ für den

Minutenzeiger. Zu einem gegebenen Startzeitpunkt $t = 0$ sei die Stellung der Zeiger σ_0 und μ_0. Dann lauten die Winkelgleichungen der Zeiger

$$\sigma(t) = \sigma_0 + 30^\circ \cdot t \qquad ; \qquad \mu(t) = \mu_0 + 360^\circ \cdot t$$

Dabei werde t in Stunden angegeben. Allgemein kann man formulieren:

$$|\mu(t) - \sigma(t)| \equiv |\mu_0 - \sigma_0| \pmod{360^\circ}.$$

Es soll nach Aufgabenstellung genau eine Stunde später wieder der gleiche Winkel zwischen den Zeigern liegen. Das heißt:

$$\frac{12}{11}\left(z - \frac{\mu_0 - \sigma_0}{180^\circ}\right) = 1$$

Nach $\mu_0 - \sigma_0$ aufgelöst:

$$\mu_0 - \sigma_0 = 180^\circ(z - \tfrac{11}{12})$$
$$\mu_0 - \sigma_0 = 180^\circ \cdot z - 165^\circ$$

Da $z = 2$ im Grunde das gleiche ergibt wie $z = 0$, gilt also entweder:

$$\mu_0 = \sigma_0 - 165^\circ \qquad \text{oder} \qquad \mu_0 = \sigma_0 + 15^\circ$$

Der Minutenzeiger muss also ursprünglich entweder 165° hinter dem Stundenzeiger sein, oder 15° weiter. Dies geschieht aller $\frac{12}{11}$. Ersteres wäre zum Beispiel um 11:30:00 Uhr der Fall, aber nicht nur, denn wie oben gezeigt, wäre es auch bei Startzeit 12:35:27 Uhr der Fall, usw.. 15° ist der Minutenzeiger dem Stundenzeiger voraus um 05:30:00 Uhr.
Sinngemäß gilt das gleiche, d. h. weitere Startuhrzeiten wären zum Beispiel 06:35:27, 07:40:55 und so weiter.

Aufgabe V01205:

Es ist der folgende Ausdruck zu berechnen:

$$(\sqrt{2})^{1{,}5 + \sqrt[-4]{11 + \frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0.8}}}}$$

Lösung von OlgaBarati:

$$(\sqrt{2})^{1{,}5 + \sqrt[-4]{11 + \frac{\sqrt[5]{5}}{5^{-0{,}8}}}} = (\sqrt{2})^{1{,}5 + \sqrt[-4]{11 + 5^{0{,}2} \cdot 5^{0{,}8}}}$$
$$(\sqrt{2})^{1{,}5 + \sqrt[-4]{11+5}} = (\sqrt{2})^{1{,}5 + \sqrt[-4]{16}} = (2^{0{,}5})^{1{,}5+0.5} = 2^{0{,}5\cdot 2} = 2^1 = 2$$

Aufgabe V01207:
Zur Zeit t_0 verlässt ein PKW, der mit der Geschwindigkeit v_1 fährt, den Berliner Autobahnring in Richtung Dresden. Dieser PKW begegnet eine halbe Stunde später (zur Zeit t_1) einem PKW, der mit der gleichen Geschwindigkeit entgegenkommt, und 5 Minuten danach (zur Zeit t_2) einem LKW, dessen Geschwindigkeit v_2 ($v_2 < v_1$) beträgt.
Wenn und wo (bezogen auf Ort und Zeit der Ausfahrt alle dem Berliner Ring) überholten der entgegenkommende PKW den LKW?
Zu welchem speziellen Ergebnis gelangt man für den Fall $t_0 = 10$ Uhr, $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = 80$ km/h?

Lösung von OlgaBarati:
Seien die beiden mit der Geschwindigkeit v_1 fahrenden PKW als PKW_1 und PKW_2 bezeichnet. Dann berechnet sich der Treffpunkt P_1 der beiden PKW mit

$$P_1 = v_1 t_1.$$

Für Treffpunkt P_2 von PKW_1 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 gilt:

$$P_2 = P_1 + v_1 t_2 = v_1 t_1 + v_1 t_2 = v_1(t_1 + t_2).$$

Und für Treffpunkt P_3 von PKW_2 und LKW in Fahrtrichtung von PKW_1 muss damit gelten:

$$P_3 = P_2 + v_2 t_2 = v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2.$$

Und für den Zeitpunkt von P_3: $t_3 = t_1 - t_2 - \frac{P_3 - P_2}{v_1}$

$$t_3 = t_1 - t_2 - \frac{v_1(t_1 + t_2) + v_2 t_2 - v_1(t_1 + t_2)}{v_1} = t_1 - t_2 - \frac{v_2 t_2}{v_1}.$$

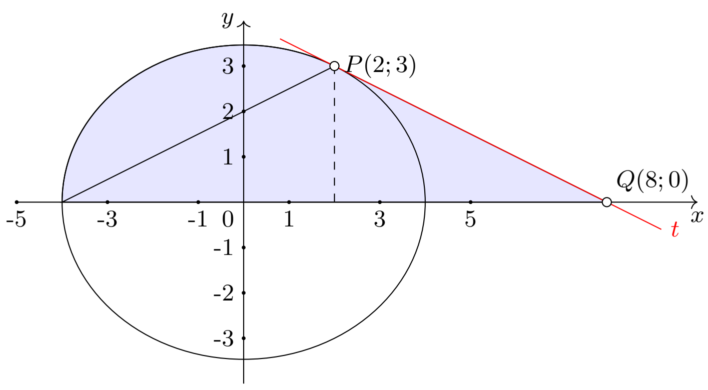
Im speziellen Fall wird P_1 um 10:30 Uhr und 50 km vom Startpunkt Berliner Ring entfernt, P_2 um 10:35 Uhr und 58,33 km entfernt und P_3 um 10:21 Uhr und 65 km entfernt, erreicht.

Aufgabe V01211:
Der links von $P_1(2;3)$ liegende Bogen einer Ellipse (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und deren Tangente in P_1 begrenzen mit der x-Achse ein Flächenstück, durch dessen Rotation um die x-Achse ein tropfenförmiger Körper mit dem größten Querschnitt $q = 12\pi$ Flächeneinheiten entsteht.
Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers?

Lösung von Steffen Polster:
In der Abbildung ist die um die x-Achse rotierende Fläche farbig hervorgehoben. Ihr größter Querschnitt ist ein Kreis und tritt bei $x = 0$ auf, womit aus $\pi b^2 = 12\pi$ sofort $b = \sqrt{12}$ folgt.
Aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt sich mit $b^2 = 12$ bei Einsetzen des Punktes $P(2;3)$, dass die große Halbachse $a = 4$ ist, d. h. $a^2 = 16$. Mit der Tangentengleichung $\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1$ wird für die Tangente

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \rightarrow y = 4 - \frac{x}{2}$$

mit der Nullstelle $x = 8$.



Damit setzt sich die rotierende Fläche aus einem rechtwinkligen Dreieck (Kathetenlängen 3 cm und 6 cm) und einem Ellipsensegment von $x = -4$ bis $x = 2$ der Ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Es wird

$$V = V_{\text{Dreieck}} + V_{\text{Segment}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 + \int_{-4}^{2} \left[\frac{1}{4}\sqrt{192 - 12x^2}\right]^2 dx$$

$$= 54\pi + \left[\frac{x}{4}(48 - x^2)\right]_{-4}^{2} = 54\pi + 54$$

Der Rotationskörper hat ein Volumen von $54(\pi + 1) \approx 223{,}6$ cm^3.

Aufgabe V01218:
Ein Porzellantiegel (äußere Höhe $h = 10$ cm, Dichte des Porzellans: 2,5 g/cm^3), dessen äußere und innere Begrenzung durch Umdrehung der Parabeln

$$y = \frac{1}{40}x^2 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$$

entsteht, schwimmt aufrecht in einem Wasserbecken.
Wie tief taucht der Tiegel ein, wenn er 1 cm hoch mit Quecksilber gefüllt ist? (Dichte des Quecksilbers 13,5 g/cm^3)

Lösung von cyrix:
Da die zweite Parabel für alle Werte von x oberhalb der ersten verläuft, aber die innere Begrenzung des Porzellantiegels beschreibt, muss die Rotation dieser Parabeln zur Beschreibung der Begrenzung des Porzellantiegels um die y- (und nicht die x)-Achse erfolgen.

Die beiden Parabeln schneiden sich nie. Zur Lösung der Aufgabe wird angenommen, dass die Größen in cm angegeben sind, sodass also die y-Koordinate des Tiegels das Intervall $[0; 10]$ durchläuft.

Das Volumen V_1 des Rotationskörpers, der durch die äußere Parabel bis zur maximalen Höhe von $y = 10$ entsteht, erhält man durch die Integration über die Kreisscheiben mit Radius $x(y)$, wobei y von 0 bis 10 läuft. Dabei ist $x(y)$ die zugehörige Umkehrfunktion, die man mit $x(y) = \sqrt{40y}$ erhält. Die zugehörige Kreisscheibe in der Höhe y hat also eine Fläche von $\pi \cdot x(y)^2 = \pi \cdot 40y$. Es ist also

$$V_1 = \int_{y=0}^{10} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^{10} = \pi \cdot 2000.$$

Analog berechnet man das Volumen V_2 des durch die Rotation der zweiten Parabel entstehenden Rotationskörpers, der den nicht aus Porzellan bestehenden Teil im Innern des ersten Rotationskörpers ausschneidet, sodass dann nur noch der Porzellantiegel verbleibt mit

$$V_2 = \int_{y=1}^{10} \pi \cdot (10y - 10)\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^{10} = \pi \cdot (500 - 100 - 5 + 10) = \pi \cdot 405.$$

Damit hat der Porzellantiegel ein Volumen von $V_P = V_1 - V_2 = \pi \cdot 1595$.

Das Quecksilber-Volumen V_Q erhält man analog zu V_2, indem man den gleichen Integranden (sprich: Fläche der jeweiligen Kreisscheibe bis zum inneren Rand des Porzellantiegels) vom inneren Grund des Tiegels bei $y = 1$ bis eben zur Höhe $1 + 1 = 2$ integriert. Dabei kommt der Unterschied dadurch zu Stande, dass das Quecksilber genau die Höhe von einem Zentimeter einnimmt. Es gilt also

$$V_Q = \pi \cdot \left[5y^2 - 10y\right]_1^2 = \pi \cdot (20 - 20 - 5 + 10) = \pi \cdot 5.$$

Der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel hat eine in Gramm gemessene Masse von

$$m_P = 2{,}5 \cdot V_P + 13{,}5 \cdot V_Q = \pi \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot 1595 + \frac{27}{2} \cdot 5\right) = \pi \cdot \frac{7975 + 135}{2} = \pi \cdot \frac{8110}{2} = \pi \cdot 4055.$$

Hat der mit Quecksilber befüllte Porzellantiegel einen Tiefgang von $t > 0$, so verdrängt er Wasser mit einem Volumen von

$$V_W = \int_{y=0}^{t} \pi \cdot 40y \mathrm{d}y = \left[\pi \cdot 20y^2\right]_0^t = \pi \cdot 20t^2,$$

was eine Masse m_W von $\pi \cdot 20t^2$ g besitzt. Da bei einem schwimmendem Körper dessen Masse genau der des verdrängten Wassers entspricht, gilt $m_P = m_W$, also $20t^2 = 4055$ bzw. $t = \frac{\sqrt{811}}{2} \approx 14{,}24$ cm, was mehr ist als die Höhe des Tiegels, sodass dieser vollständig untergeht.

Aufgabe 011112:
Ein Dampfer fährt auf einem Fluss von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden. Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Lösung von Korinna Grabski:
In beiden Fahrtrichtungen auf dem Fluss können wir das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung $s = vt$ annehmen. Für die Fahrt in Strömungsrichtung gilt damit $v = v_D + v_S$, für die Fahrt entgegen der Strömung gilt $v = v_D - v_S$, wobei v_D die Eigengeschwindigkeit des Dampfers und v_S die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Es ist also

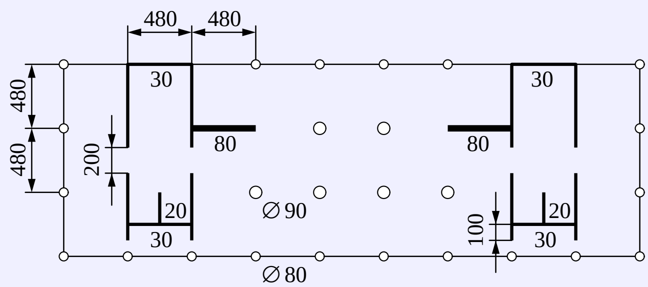
$$s = (v_D + v_S) \cdot (3h) = (v_D - v_S) \cdot (4{,}5h)$$
$$v_D = \frac{4{,}5h + 3h}{4{,}5h - 3h} v_S = 5v_S$$

und damit $s = (v_D + v_S) \cdot (3h) = 6v_S \cdot (3h)$. Für ein Boot, das nur mit der Strömung treibt, gilt $s = v_S t$; mit obiger Gleichung also

$$s = 6v_S \cdot (3h) = v_S t$$

Daraus folgt die Fahrzeit für ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug von $t = 18$ h.

Aufgabe 021211:
Das „Haus des Lehrers“ in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile.



Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m. Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoss! Dabei bleibt die Bewehrung unberücksichtigt.

Lösung von Eckard Specht:
Die Grundfläche für eine Höhe von 6 m beträgt:
20 Säulen mit 0,9 m Durchmesser, 6 Säulen mit 0,8 m Durchmesser, 9,6 m Wände der Stärke 0,8 m, 31,6 m Wände der Stärke 0,3 m und 4,8 m Wände der Stärke 0,2 m, insgesamt ein Volumen von 248,8 m^3. Hinzu kommen noch 8 m der Wandstärke 0,3 m und der Höhe 3,85 m über den Zugängen zum Treppenhaus, also 9,2 m^3.
Somit werden ca. 258 m^3 Beton benötigt.

Aufgabe 031112:
Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.
a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)
b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Lösung von Korinna Grabski:
a) Zu Beginn enthält die erste Tasse a Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee. Ein Löffel enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit, wobei $0 < x < 1$ gilt.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 1 nach Tasse 2 gegeben. Dann enthält die erste Tasse $a - x \cdot a$ Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee und $x \cdot a$ Einheiten Milch.
Jetzt wird ein Löffel von Tasse 2 nach Tasse 1 gegeben. Dieser enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit.
Wichtig ist jetzt die Zusammensetzung der Flüssigkeit. In der 2. Tasse gibt es $\frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{1}{1+x}$ Anteile Kaffee und $x \cdot \frac{a}{a+x\cdot a} = \frac{x}{1+x}$ Anteile Milch.
Damit enthält der Löffel

$$\frac{1}{1+x} \cdot x \cdot a = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Kaffee und

$$\frac{x}{1+x} \cdot x \cdot a = x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Somit enthält die erste Tasse jetzt $a - x \cdot a + x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch und $x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee, und die zweite Tasse $a - x \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Kaffee und $x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x}$ Einheiten Milch.
Jetzt soll der Kaffee in der ersten Tasse mit der Milch in der zweiten Tasse verglichen werden. In der zweiten Tasse befinden sich

$$x \cdot a - x^2 \cdot \frac{a}{1+x} = \frac{x \cdot a + x^2 \cdot a - x^2 \cdot a}{1+x} = x \cdot \frac{a}{1+x}$$

Einheiten Milch. Das ist genauso viel, wie Kaffee in der ersten Tasse.
Es befindet sich also gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

b) Analog zur ersten Teilaufgabe kann hier das Ergebnis bestimmt werden. Die Tasseninhalte sehen wie folgt aus:

Anfangszustand:	Tasse 1:	a Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee
Nach dem 1. Umgießen:	Tasse 1:	$a - xa$ Einheiten Milch
	Tasse 2:	$2a$ Einheiten Kaffee, xa Einheiten Milch

Nach dem 2. Umgießen: Löffel: $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $\frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch

Tasse 1:	$a - xa + \frac{x2a}{2+x}$ Einheiten Milch, $\frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee
Tasse 2:	$2a - \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Kaffee, $xa - \frac{x^2 a}{2+x} = \frac{2xa}{2+x}$ Einheiten Milch

Auch hier befindet sich gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

Aufgabe 041111:
Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muss jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1,2; j = 1,2$). Es gilt dann:

$$x_{11} + 4x_{21} \geq 600 \geq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \qquad (1)$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geq 400 \geq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \qquad (2)$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 300 \qquad (3)$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200 \qquad (4)$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{und ganzzahlig} \qquad (5)$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22} \qquad (6)$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden. Aus (1) folgt:

$$600 - 4x_{21} \leq x_{11} \leq 603 - 4x_{21} \qquad (7)$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leq x_{12} \leq 403 - 4x_{22} \qquad (8)$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22} \qquad (9)$$

Aus (8) folgt $x_{22} \leq \frac{403-x_{12}}{4}$ und daraus wegen (5) $x_{22} \leq 100 \quad (10)$.
Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher $x_{12} = 0$. Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müsste wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000, \qquad \text{also} \qquad x_{11} + 2x_{21} = 400 \qquad (11)$$

sein. Aus (1) und (11) folgt dann weiter $x_{21} \leq 100$ und aus (4) wegen $x_{22} = 100 : x_{21} \leq 100$. Daher müsste $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

II Runde 2

Aufgabe V01220:
Berechnen Sie die innere Maße einer zylindrischen Roheisenpfanne von 20 t Fassungsvermögen, die durch geeignete Formgebung möglichst geringe Wärmeverluste aufweisen soll!
Auf Grund von Erfahrungen nimmt man an, dass die Wärmeverluste der Oberfläche des flüssigen Roheisens (auf die Flächeneinheit bezogen) das Doppelte der Wärmeverluste durch Wand- und Bodenfläche betragen. (Wichte des flüssigen Roheisens: 7,2 Mp/m^3)

Lösung von cyrix:
Mit der Dichte von $7{,}2\frac{t}{m^3}$ des Roheisens nimmt dieses einen Zylinder mit Volumen $V = \frac{20}{7{,}2}m^3$ ein. Sei $r > 0$ der in Metern gemessene Innenradius der Roheisenpfanne und $h > 0$ entsprechend die Höhe des eingefüllten flüssigen Roheisens, so gilt also $\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{20}{7{,}2}$ bzw. $h = \frac{20}{7{,}2\cdot\pi\cdot r^2}$. Zu minimieren ist nun der Wärmeverlust, der proportional zur Oberfläche des vom Roheisen gebildeten Zylinders ist, wobei die Deckfläche als Oberfläche doppelt zu werten ist. Also ist der Term $\pi \cdot (2rh + 3r^2)$ bzw. äquivalent der Term $3r^2 + 2rh$ zu minimieren. Setzt man die zuvor erhaltene Bedingung an r ein, erhält man als zu minimierenden Term also

$$f(r) = 3 \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-1}.$$

Diese Funktion in Abhängigkeit von r besitzt als Ableitung die Funktion

$$f'(r) = 6r - 2 \cdot \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \cdot r^{-2},$$

welche genau für diejenigen $r > 0$ verschwindet, für die die Gleichung

$$3r^3 = \frac{20}{7{,}2 \cdot \pi} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \left(\frac{20}{3 \cdot 7{,}2 \cdot \pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}6655$$

gilt. Eine Grenzbetrachtung mit $r \to 0$ bzw. $r \to \infty$ zeigt, dass $f(r)$ dann jeweils gegen unendlich geht, also an der einzigen kritischen Stelle ein globales Minimum besitzen muss.
Also hat die Roheisenpfanne einen Innenradius von $r \approx 0{,}6655$ m und eine Innenhöhe von $h = \frac{20}{7{,}2\cdot\pi\cdot r^2} \approx 6{,}272$ m.

Aufgabe V01221:
Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten.
Welche Höhe und Breite wird man ihm geben, wenn der Flächeninhalt des Querschnitts 1 m^2 beträgt und die Herstellungskosten möglichst gering werden sollen?
Es soll dabei berücksichtigt werden, dass das Baugelände nur eine Höhe von höchstens 0,9 m zulässt.

Lösung von cyrix:
Es sei $h > 0$ die in Metern gemessene Höhe und $b > 0$ analog die Breite des Rechtecks. Dann beträgt seine in Quadratmetern gemessene Querschnittsfläche also $1 = h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2$ und damit $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b$. Weiterhin besitzt der Kanal eine in Metern gemessene Höhe von $0{,}9 \geq h + \frac{b}{2}$.

Die Produktionskosten hängen monoton vom Umfang der Querschnittsfläche des Kanals ab, sodass diese und mit ihr der Term $2h + b + \frac{\pi}{2} \cdot b$ unter den genannten Nebenbedingungen zu minimieren ist. Setzen wir die zuvor aus der Größe der Querschnittsfläche erhaltene Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir den Term

$$f(b) = 2b^{-1} - \frac{\pi}{4} \cdot b + b + \frac{\pi}{2} \cdot b = 2b^{-1} + \frac{\pi + 4}{4} \cdot b,$$

welcher die Ableitung $f'(b) = \frac{\pi+4}{4} - 2b^{-2}$ besitzt, die genau für $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}}$ verschwindet. Eine kurze Betrachtung für $b \to 0$ bzw. $b \to \infty$ zeigt, dass $f(b)$ in beiden Fällen gegen unendlich geht, also bis zur einzigen kritischen Stelle monoton fallend und ab dann monoton steigend ist; an der kritischen Stelle also ein globales Minimum vorliegt.

Die Produktionskosten werden also – ohne Beachtung der Höhenbedingung – minimal, wenn $b = \sqrt{\frac{\pi+4}{8}} \approx 0{,}945$ m und $h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \approx 0{,}687$ m betragen würde. Dann jedoch hätte der Kanal eine Gesamthöhe von mehr als 0,9 m. Also muss die Breite b des Kanals soweit verändert werden, dass diese Höhenbedingung eingehalten wird.
Da jede Vergrößerung von b über den kritischen Wert hinaus bzw. jede Verkleinerung unter diesen den Umfang der Querschnittsfläche und damit die Produktionskosten weiter erhöht, werden sie unter Beachtung der Höhenbedingung dann minimal, wenn in der Höhenbedingung der Gleichheitsfall vorherrscht.

Also können wir nun zusätzlich $0{,}9 = h + \frac{b}{2}$ annehmen. Setzen wir dies in die aus der Querschnittsfläche erhaltenen Beziehung zwischen h und b ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0{,}9 - \frac{b}{2} = h = b^{-1} - \frac{\pi}{8} \cdot b \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{4-\pi}{8} \cdot b^2 - 0{,}9b + 1 = 0$$

was die beiden Lösungen

$$b_1 = \frac{3{,}6}{4-\pi} + \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 7 \qquad \text{und} \qquad b_2 = \frac{3{,}6}{4-\pi} - \sqrt{\frac{3{,}6^2}{(4-\pi)^2} - \frac{8}{4-\pi}} \approx 1{,}318$$

besitzt. Die erste Lösung entfällt, da nur ein negatives h dann die Höhenbedingung erfüllen könnte, was ausgeschlossen ist. Also muss $b = b_2$ gelten und wir erhalten $h = 0{,}9 - \frac{b}{2} \approx 0{,}241$.
Damit muss das Rechteck, welches dem Kanal zu Grunde liegt, eine Breite von ca. 1,318 m und eine Höhe von ca. 0,241 m besitzen.

Aufgabe V11121:
Bei Bodenuntersuchungen in der Agrochemie wendet man die sogenannte stufenweise Verdünnung an. Man schwemmt 1 cm^3 einer Bodenprobe (x) mit 10 cm^3 chemisch reinem Wasser (y) auf. Von der so erhaltenen Mischung nimmt man wieder 1 cm^3 und schwemmt es ebenfalls mit 10 c^3 reinem Wasser auf!
a) Wie oft muss man diese Aufschwemmung vornehmen, um ein Mischverhältnis von etwa 1 : 2000000 zu erreichen?
b) Wieviel Bakterien sind dabei in 1 cm^3 der Aufschwemmung durchschnittlich vorhanden, wenn 1 cm^3 der unverdünnten Bodenprobe etwa 10 Millionen Bakterien enthält ?

Lösung von OlgaBarati:
a) Mit $x = 1$ cm^3, $y = 10$ cm^3, $x + y = 11$ cm^3 ist das Verhältnis 1:10 und für das Mischungsverhältnis 1:2000000 ergibt sich damit:

$$\left(\frac{1}{11}\right)^n = \frac{1}{2000000} \qquad ; \qquad n = \frac{\log(2000000)}{\log(11)} \approx 6$$

b)

$$n_{Bak} = \frac{10000000}{2000000} = 5$$

Aufgabe V11122:
Der Octavia-Touring-Sportwagen der Skoda-Automobilwerke Prag erreicht in 14 Sekunden nach dem Start eine Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$.
a) Wieviel Kilometer hat er in dieser Zeit zurückgelegt (gleichmäßige Beschleunigung vorausgesetzt)?
b) In welcher Zeit hat er, vom Zeitpunkt des Startes ab gerechnet, 1 km zurückgelegt? (Es sei angenommen, dass der Wagen nach dem Erreichen der Geschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mit dieser Geschwindigkeit weiterfährt.)

Lösung von svrc:
a) Wir suchen zuerst die konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0$$

für alle $0\text{s} \le t \le 14\text{s}$. Es gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = a_0 t$$

für alle $0\text{s} \le t \le 14\text{s}$ wegen $v(0\text{s}) = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da

$$v(14\text{s}) = a_0 \cdot (14\text{s}) = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{80000}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ist, folgt

$$a_0 = \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \frac{1}{14\text{s}} = \frac{100}{63}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

und somit für die zurückgelegte Wegstrecke nach 14 Sekunden

$$w(14\text{s}) = \frac{a_0}{2} \cdot (14\text{s})^2 = \frac{19600}{126}\text{m} = \frac{1400}{9}\text{m} \approx 0{,}156\text{km}.$$

Also legt das Fahrzeug in der Beschleunigungsphase eine Strecke von ungefähr 0,156km zurück.

b) Für die Gesamtstrecke von 1km gilt

$$w_{\text{gesamt}} = \frac{1400}{9}\text{m} + \left(\frac{200}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot t_2 = \frac{9000}{9}\text{m}.$$

Somit folgt

$$\left(\frac{200}{9}\frac{m}{s}\right) \cdot t_2 = \frac{7600}{9}\text{m}$$

und daher $t_2 = 38\text{s}$. Damit ist 1km entsprechend nach

$$t_{\text{gesamt}} = 14\text{s} + 38\text{s} = 52\text{s}$$

zurückgelegt.

Aufgabe V11131:
Bei der volkswirtschaftlichen Planung werden auch mathematische Methoden angewandt. Im folgenden ein stark vereinfachtes Beispiel aus unserer sozialistischen Bauwirtschaft:
In einer Stadt sollen im Jahre 1962 Wohnungen gebaut werden, und zwar vom Typ A (Ziegelbauweise) und vom Typ B (Montagebauweise). Es werden je Wohnungseinheit benötigt:

	Zement	Wandfertigteile
Typ A	5,23 t	-
Typ B	4,19 t	22,1 t

Insgesamt stehen zur Verfügung 8000 t Zement und 24000 t Wandfertigteile. Nimmt man an, dass x Wohnungen vom Typ A und y Wohnungen vom Typ B gebaut werden, so müssen die folgenden Ungleichungen erfüllt sein:

$$5{,}23x + 4{,}19y \le 8000 \qquad ; \qquad 22y \le 24000$$

Dabei soll die Gesamtzahl der Wohnungen $(x + y)$ möglichst groß sein.
Wie groß ist die Zahl x der Wohnungen vom Typ A und die Zahl y der Wohnungen vom Typ B?

Lösung von svrc:
Vom Materialverbrauch ist es am günstigsten, zunächst das Baumaterial für die Wohnungen vom Typ B zu verwenden. Es ist

$$y \leq \frac{24000}{22} \approx 1090{,}9$$

und somit werden 1090 Wohnungen vom Typ B gebaut. Damit muss

$$\begin{aligned} 5{,}23x + 4{,}19y &\leq 8000; \\ 5{,}23x &\leq 3432{,}9; \\ x &\leq \frac{3432{,}9}{5{,}23} \approx 656{,}386 \end{aligned}$$

sein, also werden 656 Wohnungen vom Typ A gebaut. Es muss also $x = 656$ und $y = 1090$ gelten.

Wollte man nur Wohnungen vom Typ A bauen, wäre $x < 1600$ und damit ist oben der günstigste Fall beschrieben, um die Gesamtanzahl zu maximieren.

Aufgabe V11223:
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } |x| > 1 \\ x^3 & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Bildkurve der Funktion, der Abszissenachse und den Geraden $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird!

Lösung von svrc:
1) Wir diskutieren die Funktion. Es gilt

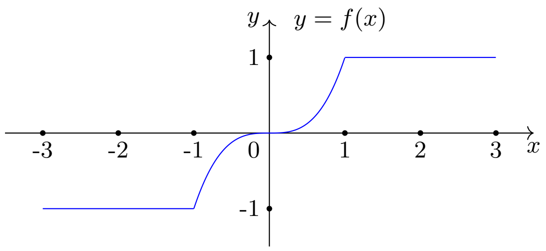
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für}\, x < -1, \\ x^3 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für}\, x > 1 \end{cases}$$

für die Funktion. Damit ist die Funktion f für $x < -1$ konstant mit Funktionswert -1. An der Stelle $x = -1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt die Vorschrift $f(x) = x^3$ und somit liegt an $x = 0$ ein Wendepunkt vor, da $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = 6 > 0$ gilt. An der Stelle $x = 1$ ist der Übergang stetig, aber nicht differenzierbar. Ferner ist die Funktion f für $x > 1$ konstant mit Funktionswert 1.

Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da

$$-f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



2) Wegen der Punktsymmetrie kann der betrachtete Flächeninhalt nach

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left\{ \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 1\,\mathrm{d}x \right\}$$

berechnet werden. Daher gilt

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 1 \right\} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

Aufgabe 021121:
Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, dass mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10000fache gesteigert werden kann.
a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)
Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Lösung von Carsten Balleier:

a) Wenn die Energieerzeugung E ein konstantes prozentuales Jahreswachstum x hat, erhält man die Gleichung $10000E = E \cdot (1+x)^{100}$.
Die Lösung ist $x = \sqrt[100]{10000} - 1 = 9{,}65\%$.

b) Die Gleichung lautet: $327 = 170 \cdot (1+y)^6$.
Die Lösung ist $y = \sqrt[6]{\frac{327}{170}} - 1 = 11{,}53\%$.

Vergleich:
$y > x$, das tatsächliche Wachstum ist größer als das angenommene.

III Runde 3

Aufgabe V11231:
In einem volkseigenen Großbetrieb der Elektroindustrie werden jährlich 12000 Stück eines bestimmten Halbfabrikats von einem Zulieferbetrieb zum Preise von 1,00 DM je Stück bezogen. Die Bestellung erfolgte bisher zweimal im Jahr, und zwar am 1. Januar und am 1. Juli.
Die Verwaltungskosten für jede Bestellung (Ausschreiben und Versenden der Bestellung, Überwachung des Liefertermins, Rechnungsprüfung, Verbuchung usw.) betragen 30,00 DM. Die Kosten der Lagerhaltung (Raumkosten, Verwaltung, „Schwund“ durch Verderben und Beschädigung usw.) betragen jährlich 20 % des Wertes des durchschnittlich am Lager befindlichen Materials. Die Kosten für Bestellung und Lagerhaltung betrugen also jährlich

2 Bestellungen ... 60,00 DM
Kosten der Lagerhaltung 20 % vom durchschnittlichen Lagerbestand (3000 Stück), also 20 % von 3000,00 DM, das sind 600,00 DM
Zusammen 660,00 DM

In einer Produktionsberatung wird vorgeschlagen, die Kosten dadurch zu senken, dass viermal im Jahr die für jeweils ein Quartal benötigte Menge (3000 Stück) bestellt wird.
a) Wie hoch sind nach diesem Vorschlag die Kosten?
b) Bei welcher Zahl von Bestellungen entstehen die geringsten Kosten? Wie hoch sind in diesem Fall die Kosten?

Hinweis: Erst im Jahr 1964 wurde in der DDR die Bezeichnung „Deutsche Mark“ in „Mark der Deutschen Notenbank“ (MDN) und anschließend 1968 in „Mark“ geändert.

Lösung von OlgaBarati:
Seien x die Bestellungen pro Jahr und die jährlichen Gesamtkosten, bestehend aus den Bestellkosten und den Lagerkosten für dieses Halbfabrikat,

$$K_G = K_B + K_L = 30x + \frac{1200}{x}$$

so ergeben sich die Kosten für a)

$$K_G = K_B + K_L = 30 \cdot 4 + \frac{1200}{4} = 420.$$

und die geringsten Gesamtkosten für b)

$$K'_G = 30 - \frac{1200}{x^2}$$
$$30x^2 - 1200 = 0$$
$$x = [\sqrt{40}] = 6$$

Für $x = 6$ eingesetzt erhält man tatsächlich der geringsten Wert von 380. Mit $x = 5$, $x = 7$ steigen die Kosten bereits wieder an.

Aufgabe V11232:
Vom Fenster (Breite 100 cm, Höhe 85 cm) eines fahrenden Zuges aus scheinen Regentropfen; bei völliger Windstille; in Richtung der Fensterdiagonalen zu fallen.
Wie groß ist die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (in $\frac{m}{s}$), wenn der Zug in 3 Minuten 3 km zurücklegt?

Lösung von MontyPythagoras:
Da der Zug 3000m in 180s zurücklegt, beträgt seine Geschwindigkeit $v_Z = \frac{3000\text{m}}{180\text{s}}$. Das Verhältnis der Tropfen-Fallgeschwindigkeit v_T zur Zuggeschwindigkeit muss gleich dem Verhältnis der Fensterhöhe zur -breite sein. Daher ist die Fallgeschwindigkeit:

$$v_T = \frac{85}{100} \cdot \frac{3000\text{m}}{180\text{s}} = 14{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 011131:
Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 $\frac{km}{h}$ fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.
Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 $\frac{m}{s^2}$ eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Lösung von Steffen Weber:
Nach den bekannten Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\Delta s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ und $\Delta v = at$ folgt

$$\Delta s = \frac{-v_0}{2}t + v_0 t \Rightarrow t = \frac{2\Delta s}{v_0} \Rightarrow a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s}$$

Mit den gegebenen Werte $v_0 = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$ und $\Delta s = 70$ m ist die Bremsverzögerung $-a \approx 4{,}464\frac{m}{s^2}$, d. h. die vorgeschriebene Bremsverzögerung wurde eingehalten.

Aufgabe 011133:
In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator.
Eine Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so dass die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen.
Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13500,- M aufgewandt werden.
Wieviel Ventilatoren müssten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird?
Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Lösung von Korinna Grabski:
$\text{Preis}_{\text{alt}} = 19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}}$; $\text{Preis}_{\text{neu}} = 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}}$; Gesamtkosten = 13500 M;

$$\text{Jahreskosten} = \frac{13500M}{3} = 4500M$$

$$19{,}20\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x = 4500M + 13{,}15\frac{M}{\text{Ventilator}} \cdot x \Rightarrow x = 743{,}8 \text{ Ventilatoren}$$

Aufgabe 101236:
Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

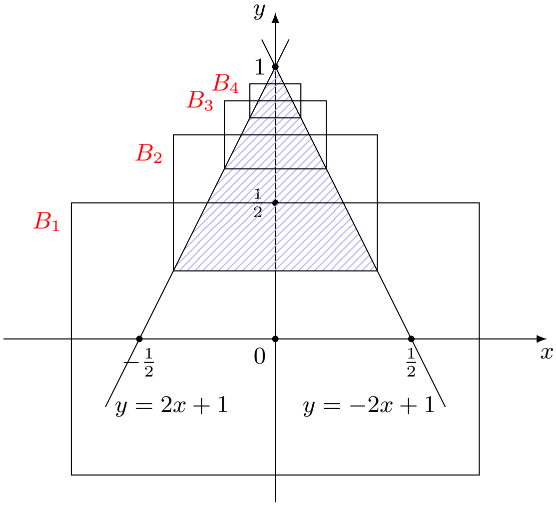
$$y \geq 0 \qquad (1)$$
$$y - 2x \leq 1 \qquad (2)$$
$$y + 2x \leq 1 \qquad (3)$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \qquad (4)$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \qquad (5)$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.
b) Es ist zu beweisen, dass es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.
c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und $y \leq 1 - \frac{1}{1000}$ gilt.
Es ist zu beweisen, dass es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_{n_1}$ ist.
Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Menge M_1 besteht aus allen Punkten der schraffiert gezeichneten Dreiecksfläche, einschließlich der Randpunkte. Die Mengen B_1, B_2, B_3, B_4 bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkte (also ohne die jeweiligen Randpunkte).



b) Wegen (1), (2), (3) gilt $P_1(0;1) \in M_1$. Die Abstände der oberen Seiten der B_n enthaltenden Rechtecke von der x-Achse sind

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Für alle $n = 1,2,...$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin B_n$ $(n = 1,2,3,...)$. Der Punkt $(0;1)$ gehört zu M_1, da der die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt, wie man aus $1 \geq 0$, $1 - 2 \cdot 0 \leq 1$, $1 + 2 \cdot 0 \leq 1$, ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,2,...$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,2,...$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c) 1. Wir zeigen: Ist eine positive ganze Zahl $n_0 \leq 9$, so hat sie nicht die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Zu M_2 gehört auch der Punkt $(0; \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6) erfüllt. Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,...,n_0$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1,...,n_0$, die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

2. Wir zeigen: Ist eine ganze Zahl $n_1 \geq 10$, so hat sie die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:
Sei (x,y) irgendein Punkt aus M_2. Dann erfüllt er die Ungleichungen (1), (29, (3), (6). Aus (1), (6) folgt

$$\frac{1}{1000} \leq 1 - y \leq 1 \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leq 1$$

Wegen

$$1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > ... > \frac{1}{2^{n_1}}$$

gibt es somit unter den Zahlen $n = 1,2,...,n : 1$ eine, für die $\frac{1}{2^n} < 1 - y \leq \frac{1}{2^{n_1}}$ gilt. Für diese gilt dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \qquad \text{also} \qquad 1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n}$$

ferner wegen (2), (3) auch $y - 1 \leq 2x \leq 1 - y$, also

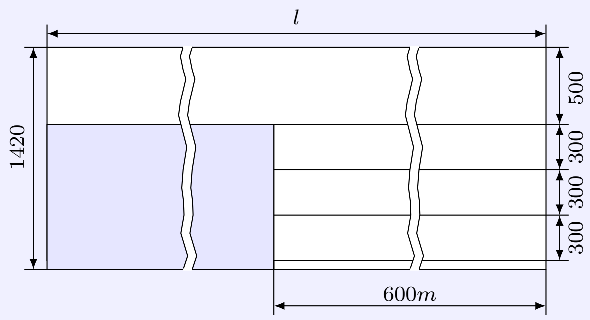
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

und somit insgesamt $(x,y) \in B_n$, womit die Behauptung gezeigt ist.

3. Aus 2. folgt die zu beweisende Existenz einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus 1. und 2. folgt, dass die gesuchte kleinste Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

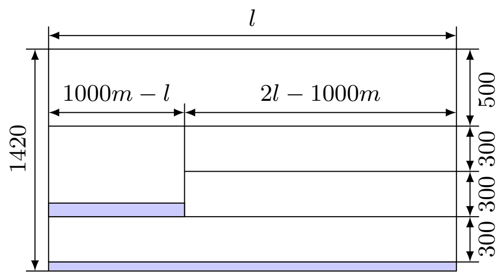
IV Runde 4

Aufgabe 011243:



Mit einer Rollenschere sollen aus Blechen von 1420 mm Breite rechteckige Bleche, und zwar mit einer Breite von 500 mm und einer Gesamtlänge von 1000 m sowie mit einer Breite von 300 mm und einer Gesamtlänge von 1800 m geschnitten werden. Bisher wurde nach der beigefügten Zeichnung geschnitten, in der die graue Fläche den Abfall darstellt, der ziemlich groß ist.
Eine sozialistische Brigade macht den Vorschlag, so zu schneiden, dass der Abfall erheblich geringer wird.
a) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn wie bisher geschnitten wird?
b) Wie muss die Brigade schneiden, damit der Abfall möglichst gering wird, und welche Gesamtlänge der Ausgangsbleche ist in diesem Fall erforderlich?
c) Wieviel Prozent beträgt jetzt der Abfall?

Lösung von Eckard Specht:



a) Der bisherige Abfall besteht aus zwei rechteckigen Flächen, wobei die größere 1000 m - 600 m = 400 m lang und 1,42 m - 0,5 m = 0,92 m breit ist und somit eine Fläche von 368 m^2 hat.
Die kleinere Fläche ist 600 m lang und 0,02 m breit, entsprechend 12 m^2.
Der Abfall beträgt also insgesamt 380 m^2, gemessen an der Gesamtfläche von 1420 m^2 sind das 26,8%.

b) Da die Gesamtbreite vorgegeben ist, kann zur Optimierung nur die Gesamtlänge l variiert werden. Dazu werden die Bleche mit einer Breite von 500 mm wie im Bild gezeigt auf zwei Bahnen aufgeteilt, wobei das kürzere Stück eine Länge von $1000m - l$ hat (eine Aufteilung auf drei Bahnen kommt wegen $3 \cdot 500mm > 1420$ mm nicht in Betracht).
Gleichzeitig wird der verbleibende Platz für zwei Bahnen der schmaleren Bleche genutzt, die dann jeweils eine Länge von $2l - 1000$ m haben.

Aus der gegebenen Gesamtlänge der schmaleren Bleche folgt nun $2(2l-1000m)+l = 5l-2000m = 1800m$ und daraus $l = 760$ m.

c) Der Abfall beträgt jetzt $240m \cdot 0{,}1m = 24m^2$ plus $760m \cdot 0{,}02m = 15{,}2m^2$, also insgesamt 39,2 m^2. Das sind nur noch 2,8% der Gesamtfläche.

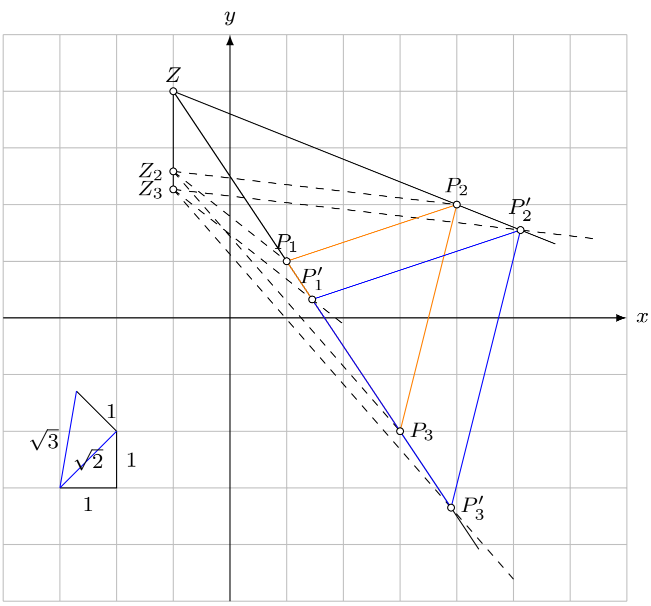
II Geometrie

II.I Dreiecke

I Runde 1

Aufgabe V01114:
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses 2 : 3.

Lösung von Steffen Polster:



Wenn die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ im Verhältnis 2:3 stehen sollen, so müssen die Seitenlängen im Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ zueinander stehen.

1. In einer Nebenkonstruktion (siehe Abbildung) ermittelt man durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras zwei Strecken der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
2. Von Z trägt man diese Strecken auf einer beliebigen Geraden ab und erhält die Punkte Z_2 und Z_3.
3. Von Z aus werden Strahlen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gezeichnet.
4. P_1, P_2, P_3 werden mittels Geraden mit Z_1 verbunden.
5. Die Parallelverschiebungen dieser Geraden durch Z_2 schneiden die entsprechenden Strahlen durch Z in den gesuchten Punkten P_1', P_2' und P_3'.

Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$\frac{ZZ_1}{ZZ_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{ZP_1}{ZP_1'} = \frac{ZP_2}{ZP_2'} = \frac{ZP_3}{ZP_3'}$$

und erneut nach einem Strahlensatz

$$\frac{P_1P_2}{P_1'P_2'} = \frac{P_1P_3}{P_1'P_3'} = \frac{P_2P_2}{P_2'P_3'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}'$$

so dass das Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ das gesuchte Dreieck ist.

Aufgabe V01212:
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Lösung von Steffen Polster:
Für ein beliebiges Dreieck ABC gilt für den Flächeninhalt F zum einen die Heronsche Dreiecksformel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

mit dem halben Dreiecksumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ und hier konkret $s = \frac{1}{2}$ cm, und zum anderen die Beziehung Flächeninhalt - Umkreisradius R

$$F = \frac{1}{4}\frac{a \cdot b \cdot c}{R} \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) und Umstellen nach R ergibt

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \tag{3}$$

Nach der Aufgabenstellung genügt es ein beliebiges Dreieck anzugeben, für das der Umkreisradius R größer als 1000 m wird. Daher betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ und $c = 1$ cm $-a-b$. Setzt man diese Werte in (3) ein, wird (alle Maße in cm)

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{ab(1-a-b)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-1+a+b)}} \\ &= \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{s(s-a)^2(s-1+2a)}} \end{aligned}$$

und mit $s = \frac{1}{2}$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)^2(2a-\frac{1}{2})}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{16 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-a+a^2)(2a-\frac{1}{2})}}$$

$$R = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-4a+4a^2)(4a-1)}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-2a)^2(4a-1)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(4a-1)}}$$

Ist a nur wenig größer als 0,25 cm, d. h. zum Beispiel $a = 0{,}25 + \varepsilon$ mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ergibt sich

$$R = \frac{0{,}25+\varepsilon)^2}{\sqrt{4 \cdot \varepsilon}} = \frac{(0{,}25+\varepsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}}$$

Dieser Term wächst für $\varepsilon \to 0$ über alle Grenzen, d. h.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(0{,}25+\varepsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}} = \infty$$

Der Umkreisradius R kann damit jeden hinreichend großen positiven Wert annehmen, d. h. auch größer als 1000 m sein.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Konstruiert man ein Dreieck ABC, bei welchem die Innenwinkel α und β beliebig kleine Werte annehmen, dann sind die beiden Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC „beinahe“ parallel zueinander, sodass die Entfernung R ihres Schnittpunkts U von den Eckpunkten beliebig groß wird, wenn man α und β nur genügend klein wählt. Da U der Mittelpunkt des Umkreises von ABC ist und R sein Radius, kann dieser also beliebig groß werden und damit auch sein Umfang.

Aufgabe V01213:
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Lösung von svrc:
Da α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks bilden, gilt nach Innenwinkelsummensatz

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \iff \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

und somit

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Da $\cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ für beliebige Winkel γ gilt, folgt

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Nach dem Additionstheorem gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y, sodass

$$\sin(\gamma) = 2\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

gilt. Da $\gamma\in(0^\circ,180^\circ)$ gelten muss, folgt

$$2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}$$

und somit

$$\gamma = 2\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90^\circ.$$

Deshalb handelt es sich bei γ um einen rechten Winkel.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Die Rechnung kann verkürzt werden. Man muss nicht den komplizierten Weg über die Fläche gehen, sondern kann beim gleichschenkligen Dreieck den Umkreisradius durch Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.

Sei a einer von den zwei gleichen Schenkeln und c die dritte Seite, dann ist

$$R^2 = \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + \left(R - \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2}\right)^2$$

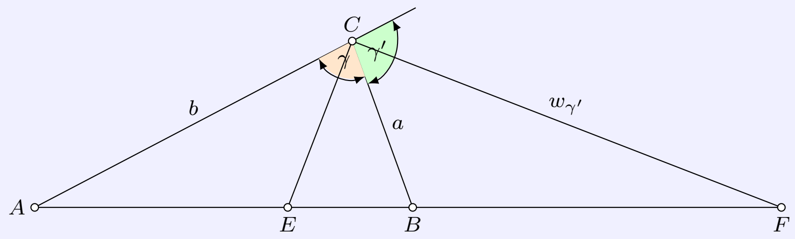
$$R^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + R^2 - 2R\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2} + a^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$R\sqrt{4a^2 - c^2} = a^2$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{2a+c}\cdot\sqrt{2a-c}} = \frac{a^2}{\sqrt{U}\sqrt{4a-U}}$$

Der weitere Lösungsweg entspricht dem von oben.

Aufgabe V01214:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

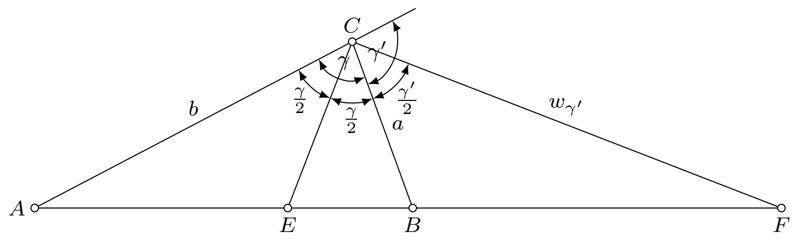
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Lösung von Steffen Polster:
Nach dem Sinussatz ist im Dreieck EBC (siehe nachfolgende Abbildung)

$$\frac{\sin(180° - \angle AEC)}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{EB}$$

und im Dreieck AEC

$$\frac{\sin \angle AEC}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{EA}$$



Wegen $\sin(180° - \frac{\gamma}{2}) = \sin \frac{\gamma}{2}$ folgt

$$\frac{EA}{EB} = \frac{b}{a}$$

Für den Außenwinkel γ' läuft der Beweis analog:

$$\frac{\sin \angle BFC}{\sin(180° - \frac{\gamma'}{2})} = \frac{b}{FA} \quad ; \quad \frac{\sin \angle BFC}{\sin \frac{\gamma'}{2}} = \frac{a}{FB}$$

und somit

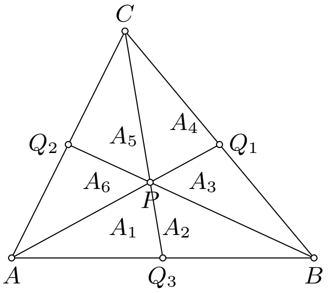
$$\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 011114:
Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.
Es ist zu beweisen, dass unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Nennen wir die Teilflächen, in die das Dreieck $P_1P_2P_3$ durch P zerlegt wird, $A_1, A_2, ...; A_6$, die gesamte Fläche sei A. Dann gilt, da sich die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten:



$$x = \frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_4} = \frac{A - A_3 - A_4}{A_3 + A_4}$$
$$x = \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{A_3 + A_4}{A_5} = \frac{A_1 + A_2}{A_6} = \frac{A - A_5 - A_6}{A_5 + A_6}$$
$$x = \frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_1} = \frac{A_3 + A_4}{A_2} = \frac{A - A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

Betrachten wir nun die Teildreiecke $P_1P_2P, P_2P_3P, P_3P_1P$, deren Flächeninhalte $A_1 + A_2, A_3 + A_4$ bzw. $A_5 + A_6$ betragen und deren Summe A ist, so ist nach den obigen Gleichungen offensichtlich, dass wenigstens eines der Verhältnisse

$$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{1}{1+z} \qquad \frac{A_3 + A_4}{A} = \frac{1}{1+x} \qquad \frac{A_5 + A_6}{A} = \frac{1}{1+y} \tag{1}$$

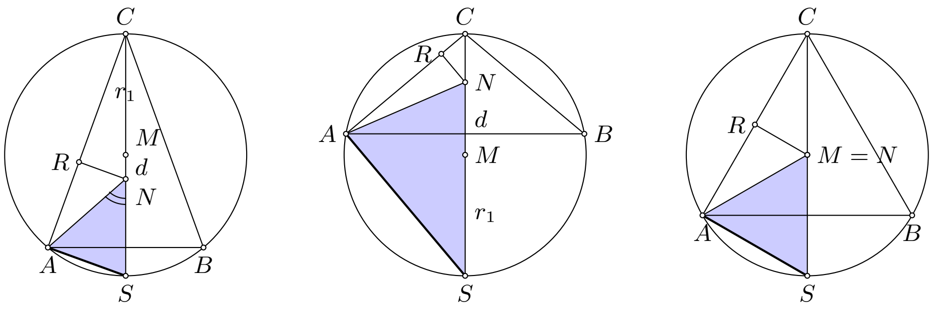
(deren Summe 1 ergibt) nicht größer und eines nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Dabei ist der Fall, dass alle Verhältnisse gleich $\frac{1}{3}$ sind, eingeschlossen.
Diese Aussage ist nach elementarer Umformung der Gleichungen (1) äquivalent damit, dass wenigstens eine der Größen x, y, z nicht größer als 2 und wenigstens eine nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 021113:
Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, dass für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Lösung von Eckard Specht:



Die Behauptung kann leicht in

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1r_2 \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{r_1 - d}$$

umgeformt werden, was auf eine Anwendung des Strahlensatzes schließen lässt. Wir gelangen so zu folgendem Beweis:

(Bild links) Seien M und N Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt des gleichschenkligen Dreiecks ABC (wobei M zunächst zwischen C und N liegen soll, welches für $\angle ACB \equiv \gamma < 60°$ stets der Fall ist), S der

Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis und R der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC.
Dann sind $\triangle CRN$ und $\triangle CAS$ rechtwinklige Dreiecke – Ersteres, da der Berührungsradius NR stets senkrecht auf der Seite steht und Zweites wegen $\angle CAS = 90°$ (Thales-Kreis).
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

Um nun von (2) zu (1) zu gelangen genügt es, die Gleichheit der Strecken AS und $NS = r_1 - d$ zu zeigen. Diesen Nachweis führen wir über die Gleichheit der Basiswinkel $\angle ANS$ und $\angle NAS$ des Dreiecks ANS. Es gilt einerseits $\angle ANS = \angle ACN + \angle CAN$ (Außenwinkel) $= \frac{\gamma}{2} + \angle NAB$ (Winkelhalbierende), andererseits $\angle NAS = \angle NAB + \angle BAS$ (Winkelsumme) $= \angle NAB + \frac{\gamma}{2}$ (gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $SB = SA$). Damit ist (1) bewiesen.

(mittleres Bild b) Im Fall $\gamma > 60°$ liegt M zwischen S und N und es folgt

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 - d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

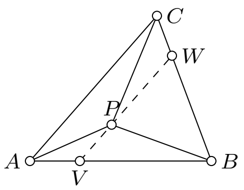
Auch hier ist das Dreieck ANS gleichschenklig, nun jedoch mit $AS = NS = r_1 + d$. Die beiden letzten Gleichungen liefern ebenfalls die Behauptung (1).

(rechtes Bild) Im Fall $\gamma = 60°$ ist das Dreieck ABC gleichseitig, beide Mittelpunkte fallen übereinander und die Behauptung (1) gilt auch hier mit $d = 0$.

Aufgabe 111214:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$ sei P ein im Inneren des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, dass dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Parallele zu AC durch P schneide die Seite AB in V und die Seite CB in W. Dann ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle VBW \sim \triangle ABC$, also $|VB| \geq |BW| \geq |VW|$.

Weiter gilt nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck $\triangle BPW$ die Ungleichung $|\angle VPB| > |\angle VWB|$. Weil in jedem Dreieck, also auch im $\triangle VBW$, dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, ist zunächst $|\angle VWB| \geq |\angle BVN|$ und damit auch $|PB| < |VB|$. Daraus folgt

$$|VW| + |PB| < |VB| + |BW| \qquad (1)$$

Aus den Dreiecken $\triangle AVP$ und $\triangle CPW$ erhält man

$$|PA| < |AV| + |VP| \quad (2) \qquad \text{bzw.} \qquad |PC| < |CW| + |WP| \quad (3)$$

Durch Addition folgt schließlich aus (1), (2) und (3)

$$|PA| + |PB| + |PC| + |VW| < (|AV| + |VB|) + (|CW| + |BW|) + (|VP| + |WP|)$$

also
$$|PA| + |PB| + |PC| + < |AB| + |BC|$$

Aufgabe 121212:
Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a,b,c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $1 < c < \sqrt{2}, 1 < a, 1 < b$ folgt $c^2 < 2 = 1 + 1 < a^2 + b^2$. Also ist
$$a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Auf Grund des Kosinussatzes gilt nun
$$\cos\angle(a,b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

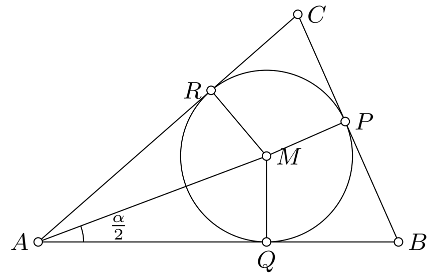
Wegen (1) und $2ab > 0$ folgt daraus $\cos\angle(a,b) > 0$; also ist $\angle(a,b) < 90°$.
Entsprechend folgt auch $\angle(a,c) < 90°$ und $\angle(b,c) < 90°$. Daher ist das betrachtete Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 161212:
Man beweise, dass für jedes Dreieck ABC die Gleichung
$$\overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma = 2F$$
gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten BC, CA bzw. AB seine P, Q bzw. R. Dann ist das Dreieck AMR bei R rechtwinklig, also gilt
$$AR = MA \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad MR = MA \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

demzufolge ist der Flächeninhalt F_1 von $\triangle AMR$
$$F_1 = \frac{1}{2}AR \cdot MR = \frac{1}{2}MA^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}MA^2 \sin\alpha$$

Denselben Flächeninhalt hat auch $\triangle AMQ$.



Entsprechend erhält man den Flächeninhalt F_2 von $\triangle BMP$ und $\triangle BMR$ sowie den Flächeninhalt F_3 von $\triangle CMQ$ und $\triangle CMP$:

$$F_2 = \frac{1}{4}MB^2 \sin\beta \qquad ; \qquad F_3 = \frac{1}{4}MC^2 \sin\gamma$$

Hieraus ergibt sich:

$$2F = 2(2F_1 + 2F_2 + 2F_3) = 4(F1 + F_2 + F_3) = \overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma$$

Aufgabe 191213:
Von einem Dreieck werde gefordert, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, dass diese Forderung erfüllbar ist und dass durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. die den Seiten mit den Längen a bzw. b gegenüberliegenden Winkel mögen die Größen α bzw. β, und der dritte Dreieckswinkel möge die Größe γ haben.

Dann hat das Dreieck den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

Hieraus ergibt sich

$$(a-b)^2 + 2ab(1 - \sin\gamma) = 0 \qquad (1)$$

Da $(a-b)^2 \geq 0$, $a < 0$, $b > 0$, $\sin\gamma \leq 1$ gilt, ist (1) nur erfüllbar, wenn $a - b = 0$ und $1 - \sin\gamma = 0$ also $a = b$ und $\gamma = 90°$ und somit $\alpha = \beta = 45°$ ist.

Damit ist gezeigt, dass die Winkelgrößen durch die genannte Forderung eindeutig bestimmt sind.

Umgekehrt hat für diese Werte der Winkelgrößen, d. h. für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $a = b$, der Flächeninhalt des Dreiecks den Wert $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$, womit die Forderung als erfüllbar nachgewiesen ist.

Aufgabe 281212:
Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel bei C gibt, in denen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge

a) eine geometrische Folge,

b) eine arithmetische Folge

bilden.

Falle es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von a alle diejenigen Seitenlängen b, c für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Seitenlängen a, b, c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine geometrische Folge, wenn es eine reelle Zahl q mit $b = aq$, $c = aq^2$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$a^2 + a^2q^2 = a^2q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 - q^2 - 1 = 0$$

gilt, d. h., wenn die Zahl $t = q^2$ die Gleichung $t^2 - t - 1 = 0$ erfüllt.

Diese hat genau die Lösungen $t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, von denen genau $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ nicht negativ und damit das Quadrat von einer reellen Zahl q ist, und zwar von genau einer positiven Zahl, nämlich

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$$

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreiecke der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

$$a \qquad ; \qquad b = a\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} \qquad ; \qquad c = a \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

betragen.

b) Die Seitenlängen a,b,c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge, wenn es ein d mit $b = a + d$, $c = a + 2d$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $c > a$, also $d > 0$ und $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad + 4d^2$$
$$d^2 + \frac{2}{3}ad - \frac{1}{3}a^2 = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $d = \frac{a}{3}(-1 \pm 2)$, von denen genau $d = \frac{a}{3}$ positiv ist.

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreieck der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

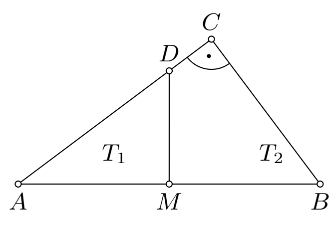
$$a \qquad ; \qquad b = \frac{4}{3}a \qquad ; \qquad c = \frac{5}{3}a$$

betragen.

Aufgabe 291213:
In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, dass A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.

Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In jedem Dreieck ABC mit $\angle ACB = 90°$ bezeichne M den Mittelpunkt von AB und D den von M verschiedenen Schnittpunkt des Dreiecksrandes mit der Mittelsenkrechten. Wegen $\triangle AMD \cong \triangle BMD$ und da die Bedingung der Ganzzahligkeit von k nur mit $k \geq 1$, also $F_2 \geq F_1$ erfüllbar ist, kann C nicht auf der Verlängerung von BD über D hinaus liegen, also muss D auf AC liegen (siehe Abbildung).

Nun gilt mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seitenlängen

$$F_1 = \frac{c}{4} \cdot MD \qquad ; \qquad F_2 = \frac{ab}{2} - F_1$$

Da wegen das Hauptähnlichkeitssatzes $\triangle AMD \sim \triangle ACB$ ist, gilt

$$\frac{c}{2} : MD = b : a \qquad ; \qquad MD = \frac{ac}{2b} \qquad \text{also}$$

$$F_1 = \frac{ac^2}{8b} \qquad ; \qquad F_2 = \frac{ab}{2} - \frac{ac^2}{8} = \frac{a}{8b}(4b^2 - c^2)$$

Somit wird

$$k = F_2 : F_1 = \frac{4b^2 - c^2}{c^2}$$

genau dann mit ganzzahligem k erfüllt, wenn dies für

$$(k+1) \cdot c^2 = 4b^2 \qquad ; \qquad \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{k+1} \tag{1}$$

zutrifft. Da die Kathetenlänge b kleiner als die Hypotenusenlänge c ist, folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad k < 3$$

Hiernach und wegen $0 < F_2 : F_1 = k$ ist (1) genau mit $k = 1$ und $k = 2$ zu erfüllen.

Die so charakterisierten Dreiecke lassen sich auch unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen für die Innenwinkelgrößen folgendermaßen beschreiben:

Im Fall k_1 gilt (1), d. h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = \beta = 45°$.

Im Fall $k = 2$ gilt (1), d. h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

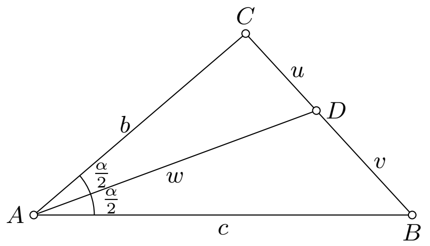
Somit sind genau diese Dreiecke alle gesuchten.

Aufgabe 301214:
In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\angle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.

Man beweise, dass in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:

$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bekanntlich teilt in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende die jeweils gegenüberliegende Seite in Verhältnis der anliegenden Seiten. Für $u = CD$, $V)BD$ gilt somit

$$u : v = b : c \qquad ; \qquad u + v = a$$

Daraus folgt

$$u = \frac{ab}{b+c} \qquad ; \qquad v = \frac{ac}{b+c}$$

Nach den Kosinussatz für die Dreiecke ACD bzw. ABD folgt mit $\alpha = \angle BAC$ somit

$$b^2 + w^2 - 2bw\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} \tag{1}$$

$$c^2 + w^2 - 2cw\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit c, (2) mit b und subtrahiert, so folgt

$$bc(b-c) + w^2(c-b) = \frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2} \tag{3}$$

1. Fall: Ist $b \neq c$, so folgt aus (3)

$$w^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2)$$

wegen $w > 0$ und $b > 0$, $c > 0$ (woraus auch $(b+c)^2 - a^2 > 0$ folgt) ergibt sich damit die behauptete Formel.

2. Fall: Ist $b = c$, so ist diese Herleitung über (3) nicht möglich. In diesen Fall ist AD auch Seitenhalbierende und Höhe; daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$w = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

Die behauptete Formel lautet im Fall $b = c$ aber

$$w = \frac{\sqrt{b^2}}{2b} + \sqrt{(2b)^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

und ist diesem damit ebenfalls bewiesen.

Aufgabe 321213:
Dora und Karla berechnen für verschiedene Flächen jeweils den Quotienten aus Flächeninhalt und Umfang. Sie vermuten: Wählt Dora ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck D und Karla den einbeschriebenen Kreis K dieses Dreiecks D, so müssen sich stets einander gleichgroße Quotientenwerte ergeben.

Trifft diese Vermutung zu?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei $BC = AC = a$, $AB = c$; mit dem Fußpunkt F der auf AB senkrechten Höhe sei $CF = h$.

Diese Höhe ist zugleich Seitenhalbierende und Winkelhalbierende; auf ihr liegt somit der Mittelpunkt M des einbeschriebenen Kreises k. Das Lot von M auf BC habe den Fußpunkt G; der Radius von k ist damit $r = MF = MG$.

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ch$ und den Umfang $2a + c$; der Quotient aus diesen Größen ist

$$\frac{ch}{2 \cdot (2a + c)} \tag{1}$$

Wegen $\angle BCF = \angle MCG$ und $\angle BFC = \angle MGC = 90°$ ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BFC \sim \triangle MGC$; daher gilt

$$\frac{c}{2} : a = r : (h - r) \Rightarrow r = \frac{ch}{2a + c} \tag{2}$$

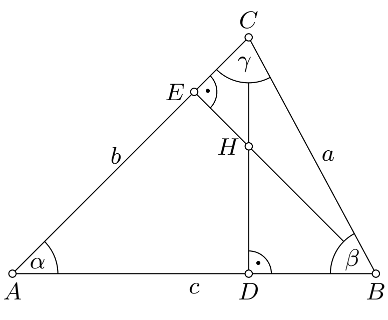
Der Quotient aus Flächeninhalt πr^2 und Umfang $2\pi r$ von k beträgt $\frac{r}{2}$; nach (2) hat er somit ebenfalls den Wert (1). Damit ist die Vermutung als zutreffend nachgewiesen.

Aufgabe 331214:
Man beweise, dass für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:

Sind a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkelgrößen, ist F der Flächeninhalt, ist D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe und ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so gilt für die Streckenlängen $\overline{CH}$ und $\overline{HD}$ die Gleichung

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe sei E. Da das Dreieck spitzwinklig ist, liegen D, E, H im Innern der Strecken AB, AC bzw. CD (siehe Abbildung). Es gilt

$$EC = a \cdot \cos\gamma \tag{1}$$
$$AD = b \cdot \cos\alpha \tag{2}$$
$$BD = a \cdot \cos\beta \tag{3}$$
$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

Da der Winkel $\angle DHE$ die Größe $180° - \alpha$ und mithin der Winkel $\angle CHE$ die Größe α hat, sowie wegen (1) und (4) folgt

$$CH = \frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma}{2F} \tag{5}$$

Die Dreiecke HDB und ADC sind einander ähnlich, da sie in den Winkelgrößen α und 90° übereinstimmen. Daher gilt $HD : BD = AC : CD$, also

$$HD = \frac{AD \cdot BD}{CD}$$

Wegen $F = \frac{1}{2} c \cdot CD$, also $CD = \frac{2F}{c}$, folgt hieraus und aus (2),(3)

$$HD = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{2F} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt, wie behauptet,

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

II Runde 2

Aufgabe V01121:
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,; 0{,}00), B(87{,}00; 54{,}40), C(153{,}60; 44{,}00), D(206{,}40; 25{,}00), E(303{,}50; 33{,}80), F(352{,}00; 0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

Lösung von Steffen Polster:
a) Mit dem Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= \sqrt{(87-0)^2 + (54{,}4-0)^2} \approx 102{,}61,\\
|\overline{BC}| &= \sqrt{(153{,}6-87)^2 + (44-54{,}4)^2} \approx 67{,}41,\\
|\overline{CD}| &= \sqrt{(206{,}4-153{,}6)^2 + (25-44)^2} \approx 56{,}11,\\
|\overline{DE}| &= \sqrt{(303{,}5-206{,}4)^2 + (33{,}8-25)^2} \approx 97{,}50,\\
|\overline{EF}| &= \sqrt{(352-303{,}5)^2 + (0-33{,}8)^2} \approx 59{,}12.
\end{aligned}$$

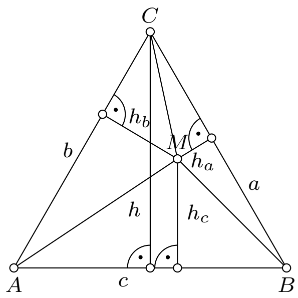
Die Länge l der Landstraße beträgt $l \approx 382{,}75\,\mathrm{m}$. b) Für die zu asphaltierende Fläche gilt

$$A = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot l = 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 382{,}75\,\mathrm{m} \approx 2105{,}13\,\mathrm{m}^2$$

und somit müssen ungefähr 2105,13 Quadratmeter Straße asphaltiert werden.

Aufgabe V11123:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

Lösung von svrc:



Wir bezeichnen mit $\triangle ABC$ das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Da das Dreieck gleichseitig ist, gilt für die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten $a = \left|\overline{BC}\right|$, $b = \left|\overline{AC}\right|$ und $c = \left|\overline{AB}\right|$, dass $a = b = c$ ist. Diese Seiten möchten wir alle als Grundseite $g = a = b = c$ bezeichnen.

Liegt im Inneren des Dreiecks ein Punkt M, so entstehen die drei Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ und $\triangle CAM$. Diese Dreiecke besitzen ebenfalls die Grundseite g.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit Grundseite g und Höhe h ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei kleineren Dreiecke. Die Höhen in $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ und $\triangle CAM$ nennen wir h_1, h_2 und h_3. Dies sind auch die Abstände von M zur entsprechenden Grundseite.

Es gilt somit

$$\frac{gh}{2} = \frac{gh_1}{2} + \frac{gh_2}{2} + \frac{gh_3}{2} = \frac{g}{2} \cdot \{h_1 + h_2 + h_3\}$$

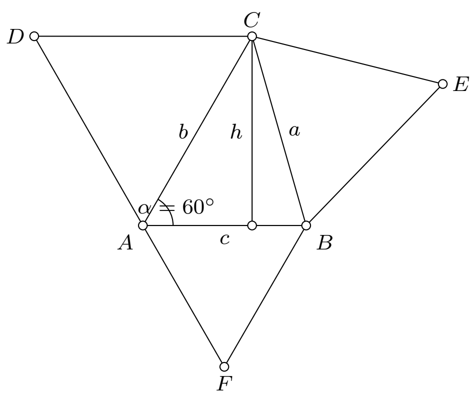
und daher folgt

$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgabe V11224:
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60∘ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von MontyPythagoras:



Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks BEC ist

$$A_{BEC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Die anderen Flächen der gleichseitigen Dreiecke berechnen sich in gleicher Weise. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC lautet

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

Daher soll gelten:

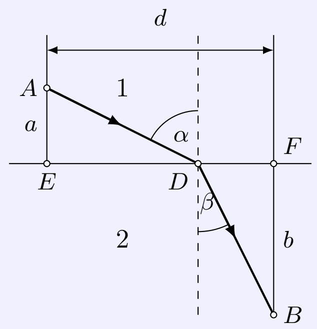
$$\frac{\sqrt{3}}{4}bc + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Laut dem Kosinussatz gilt außerdem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, ist die obige Gleichung tatsächlich erfüllt. q. e. d.

Aufgabe 021222:



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium 1 die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium 2 die Geschwindigkeit c_2.
Beweisen Sie, dass die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst muss die Zeit als Funktion der Veränderlichen ausgedrückt werden, deren Minimum dann gesucht werden muss. Diese Funktion ist die Summe aus der Zeit für die Durchquerung von Medium 1 und der für Medium 2:

$$t(\alpha,\beta) = \frac{1}{c_1}\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{1}{c_2}\frac{b}{\cos\beta}$$

Dabei gilt die Nebenbedingung $a\tan\alpha + b\tan\beta = d$. Diese wird wie folgt verwendet:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}}$$

Einsetzen liefert:

$$\bar{t}(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{b}{c_2}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\overline{t'}(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{-1}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) + \frac{b}{c_2}\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot 2(d-a\tan\alpha)\cdot(-a)\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

An Extremstellen wird diese Null:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\frac{a}{c_1}\sin\alpha - \frac{a}{c_2}\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\right]\\ 0 &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\\ &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{b\tan\beta}{1+\tan^2\beta}\\ &= c_2\sin\alpha - c_1\sin\beta\end{aligned}$$

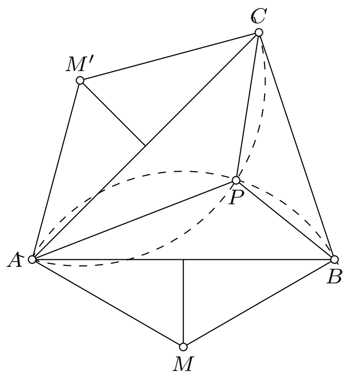
Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Anmerkung: Die Kontrolle der Lösung in der 2.Ableitung zeigt, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

Aufgabe 041225:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d. h. $\angle BPA \cong \angle CPB \cong \angle CPA$).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wir nehmen an, dass P der gesuchte Punkt im Innern des Dreiecks ABC sei (also $\angle APB \cong \angle BFC \cong \angle CPA \cong \frac{4}{3}R$, R: rechter Winkel).
Den Kreis durch A, P, B bezeichnen wir mit K. den Kreis durch A, P, C mit K'. M sei der Mittelpunkt von K, M' der Mittelpunkt von K'. Nach dem Satz vom Peripheriewinkel gilt $\angle AMB \cong \frac{4}{3}R$ und daher $\angle MAB \cong \frac{R}{3}$.

Man zeichnet also in dem Dreieck ABC die Mittelsenkrechte von AB und trägt in A an AB nach außen einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die Mittelsenkrechte in M schneidet (siehe Abbildung).

Analog konstruiert man M'. Die Kreise um M bzw. M' mit den Radien MA bzw. $M'A$ schneiden einander außer in A in einem weiteren Punkt P (Berührung kann nicht eintreten, da hierbei $\angle BAC \cong \frac{4}{3}R$ sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht). Der Schnittpunkt P liegt entweder

a) Im Innern des Winkels BAC oder
b) im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels.

a) Angenommen, P läge im Innern des Winkels BAC, aber nicht im Innern des Dreiecks ABC. Dann wäre die Summe der Innenwinkel des Vierecks $ABPC$ größer als $4R$, im Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Viereck.

b) Angenommen, P läge im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels. Dann gälte nach dem Satz vom Peripheriewinkel $\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{2}{3}R$, also $\angle BFC \cong \frac{4}{3}R$.
Da das Dreieck BAC im Innern des Dreiecks BFC liegt, gälte

$$\angle ABC + \angle BCA < \angle PBC + \angle PCB \cong \frac{2}{3}R$$

also $\angle BAC > \frac{4}{3}R$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt also nur der Fall, dass P im Innern des Dreiecks ABC liegt. Nach der Konstruktion ist

$$\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{4}{3}R \quad \text{und} \quad \angle BPC \cong 4R - \frac{8}{3}R \cong \frac{4}{3}R$$

Aufgabe 221222:
Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen $a \leq 1cm \leq b \leq 2cm \leq c \leq 3cm$ gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt.
Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

Lösung von weird:
Gemäß der trigonometrischen Flächenformel

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

für ein Dreieck mit den Seitenlänge a und b, sowie dem eingeschlossenen Winkel γ nimmt A unter Berücksichtigung jetzt nur der Nebenbedingungen

$$a \in (0{,}1],\ b \in [1{,}2],\ \gamma \in (0{,}\pi)$$

sein Maximum offensichtlich für

$$a = 1,\ b = 2, \gamma = \frac{\pi}{2}$$

an. Allerdings haben wir hier noch eine weitere Nebenbedingung, nämlich $c \in [2{,}3]$ für die dritte Seite c, welche aber dann wegen

$$c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

ebenfalls erfüllt ist, sodass dieses rechtwinklige Dreieck mit Flächeninhalt $A = 1$ dann tatsächlich die Lösung der Aufgabe darstellt.

Aufgabe 241224:
a) Beweisen Sie, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \qquad (1)$$

gilt!
b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!
Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Hat die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge c und wird sie durch die zugehörige Höhe in Abschnitte der Längen p und q zerlegt, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad , \qquad h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

Ferner gilt $h_a = b$ und $h_b = a$. Damit gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 4h_a^2 - 4h_b^2 - 4h_c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3a^2 + 3b^2 - 4b^2 - 4a^2 - 2a^2 + 2p^2 - 2b^2 + 2q^2$$
$$= 2p^2 + 2q^2 > 0$$

Ungleichung (1) ist hiermit für alle rechtwinkligen Dreiecke bewiesen. Zugleich ist gezeigt, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, für das in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

b) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c liegen dann auf den Seiten BC, CA bzw. AB, und für die Längen $BH_a = a_1$, $H_aC = a_2$, $CH_b = b_1$, $H_bA = b_2$, $AH_c = c_1$, $H_cB = c_2$ gilt

$$a_1 + a_2 = a, \qquad b_1 + b_2 = b, \qquad c_1 + c_2 = c \qquad (2)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner

$$\begin{aligned} c^2 &= h_a^2 + a_1^2, & b^2 &= h_a^2 + a_2^2, & a^2 &= h_b^2 + b_1^2 \\ c^2 &= h_b^2 + b_2^2, & b^2 &= h_c^2 + c_1^2, & a^2 &= h_c^2 + c_2^2 \end{aligned}$$

Addiert man diese sechs Gleichungen, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2

$$4(a^2 + b^2 + c^2) = 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) + 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) + 2(c_1^2 + c_2^2) \qquad (3)$$

Nun gilt wegen $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ die Ungleichung $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a - 2$, also

$$2(a_1^2 + a_2^2) \geq (a_1 + a_2)^2 = a^2 \qquad (4)$$

und analog

$$2(b_1^2 + b_2^2) \geq b^2 \quad (5) \qquad ; \qquad 2(c_1^2 + c_2^2) \geq c^2 \quad (6)$$

Daraus folgt aus (3)

$$48a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

d. h., (1) gilt auch für jedes spitzwinklige Dreieck.
Es gibt spitzwinklige Dreiecke, für die das Gleichheitszeichen in (1) gilt. Im gleichseitigen Dreieck gilt nämlich $a = b = c$ und $h_a = h_b = h_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, woraus (1) mit dem Gleichheitszeichen folgt.

Aufgabe 251222:
Beweisen Sie, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung gilt:

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Lösung von cyrix:
Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, also $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle MAC$ ist

$$s_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

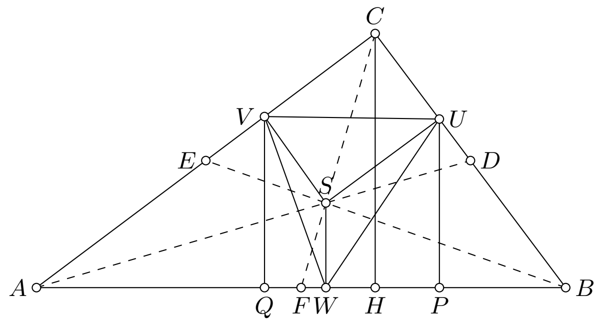
$$= b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b^2 - a^2 + 2c^2}{4}$$

also

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \square$$

Aufgabe 301224:
Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, dass das Verhältnis $r = J(UVW) : J(ABC)$ in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, o. B. d. A. mit dem rechten Winkel bei C. Wie üblich sei $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Ferner seien CH, UP, VQ die Lote von C, U, V auf AB, und es sei $h = CH$, $p = HB$, $q = HA$. Für jedes Dreieck XYZ bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

Für den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden AD, BE und CF gilt bekanntlich

$$SD = \frac{1}{3}AD; \qquad SE = \frac{1}{3}BE; \qquad SF = \frac{1}{3}CF$$

Da nach Voraussetzung $SU \parallel AC$, $SV \parallel BC$, $SW \parallel CH$ ist, folgt aus dem Strahlensatz

$$SU = \frac{b}{3}; \qquad SV = \frac{a}{3}; \qquad SH = \frac{h}{3}$$

Nach Voraussetzung ist ferner $CVSU$ ein Rechteck, also ist auch

$$CV = \frac{b}{3}; \qquad CU = \frac{a}{3}$$

wegen $UP \parallel CH$ und $VQ \parallel CH$ folgt somit nach dem Strahlensatz

$$HP = \frac{p}{3}; \qquad HQ = \frac{q}{3}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} J(SUV) &= \frac{1}{2}SU \cdot SV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}ab = \frac{1}{9}J(ABC) \\ J(SWU) &= \frac{1}{2}SW \cdot WP \\ J(SWV) &= \frac{1}{2}SW \cdot WQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(SWU) + J(SWV) &= \frac{1}{2}SW \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3}(HP + HQ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{p+q}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}hc \\ &= \frac{1}{9}J(ABC) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt schließlich

$$J(UVW) = J(SUV) + J(SWU) + J(SWV) = \frac{2}{9}J(ABC)$$

Damit ist bewiesen, dass sich für alle rechtwinkligen Dreiecke der Wert $r = 2 : 9$ ergibt.

Aufgabe 311222:
Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

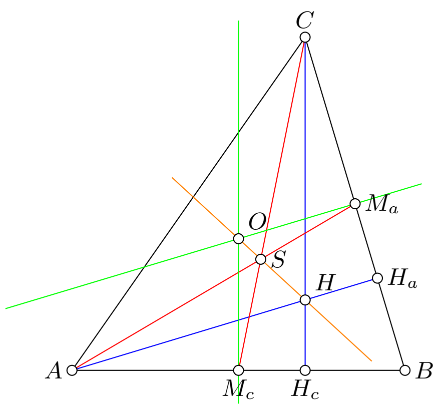
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Ein solches Dreieck gibt es nicht, da der Flächeninhalt sonst nach dem Satz von Pick rational wäre.

Erklärung:
Wenn die Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, dann liegen sie im Koordinatensystem auf der Gitterlinie. Ich kann den Flächeninhalt des Dreiecks dann per Ergänzungsverfahren bestimmen. Das Rechteck hat sicherlich rationalen Flächeninhalt, da seine Linien auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Vom Rechteck muss ich dann 3 (oder nach Lage auch 2) rechtwinklige Dreiecke abziehen, wobei die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen wieder auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Die Dreiecke haben also auch rationalen Flächeninhalt. Damit folgt dann, dass das Dreieck auch rationalen Flächeninhalt hat.
Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks beträgt jedoch $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Nun ist $\frac{a^2}{4} \in \mathbb{Q}$, sodass das Problem sich also auf die Frage, ob $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ reduziert. Dass dies nicht der Fall ist, ist bekannt. Damit ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, ein gleichseitiges Dreieck hätte ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabe 321223:
Man beweise:
In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

Lösung von Nuramon:
Wenn man als bekannt voraussetzen darf, dass der Umkreismittelpunkt O, der Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S auf einer Gerade (der Eulerschen Gerade) liegen, dann folgt die Aussage aus dem Strahlensatz:

Sei D der Mittelpunkt der Seite BC. Für die Ecke A sind dann die Mittelsenkrechte von BC und die Höhe von A auf BC parallel. S teilt die Seitenhalbierende DA von BC im Verhältnis $2:1$, also gilt nach Strahlensatz auch $AH : OD = 2 : 1$.



Hier ein kurzer Beweis dafür, dass der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen:

Man erhält das Dreieck $M_aM_bM_c$ der Seitenmitten durch zentrische Streckung von ABC am Schwerpunkt S (der Streckfaktor ist $\frac{1}{2}$).

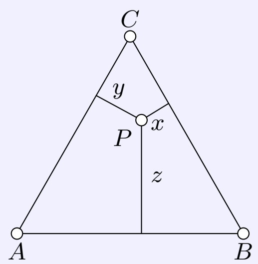
Daher liegen der Höhenschnittpunkt H von ABC, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H' von $M_aM_bM_c$ auf einer Geraden. Es ist aber offenbar H' auch gleich der Umkreismittelpunkt von ABC. Daraus folgt die Behauptung und es folgt sogar die Aussage, dass der Schwerpunkt die Verbindungslinie vom Höhenschnittpunkt zum Umkreismittelpunkt im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Aufgabe 331224:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, C' sei der Bildpunkt von C bei der Spiegelung an AB.
Für jeden Punkt P, der auf AB zwischen A und B liegt, seien Q auf BC und R auf CA so gelegen, dass $PQCR$ ein Parallelogramm ist.
Dann sei X der von P verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke APR und BPQ.
Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X stimmt überein mit dem im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Bogen den Umkreises des Dreiecks ABC'.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Dreiecke APR und BPQ sind nach Konstruktion wieder gleichseitig. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt $60° = \angle ARP = AXP = 60° = \angle PQB = PXB$ und somit $\angle AXB = 120°$. Aus $\angle AXB + \angle BC'A = 180°$ folgt dann, dass $AXBC'$ ein Sehnenviereck ist und X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC' liegt.

Für einen gegeben Punkt X auf dem Bogen erhalten wir P als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle AXB$ mit AB. Wegen $\angle AXB = 120°$ erhalten wir wieder mit dem Peripheriewinkelsatz, dass X der Schnittpunkt der beiden Umkreise ist.

Aufgabe 341222:



Man beweise für jeden Punkt P, der im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F = 1$ liegt:
Die Längen x, y, z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abbildung) erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = \sqrt[4]{3}$$

Lösung von cyrix:
Nach dem Satz von Viviani gilt $x + y + z = h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Mit $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 1 \iff a^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ folgt

$$x + y + z = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{3}}}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$$

qed.

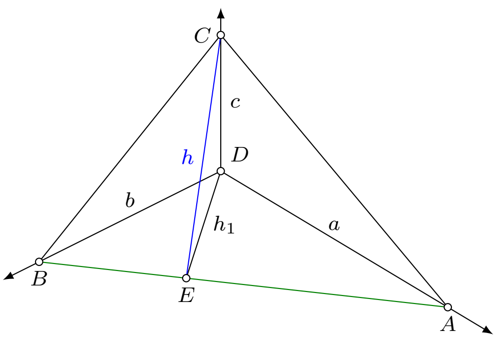
Zum Satz von Viviani:

Die Strecken AP, BP und CP zerlegen das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ in drei Teildreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ und $\triangle ACP$, deren Flächeninhalte sich jeweils aus dem halben Produkt der Grundseite $|AB| = |BC| = |AC|$ mit der entsprechenden Höhe x, y bzw. z ergibt. Da diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ zerlegen, addieren sich ihre Flächeninhalte zu dem des Dreiecks $\triangle ABC$, also zu $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$, sodass sich $x + y + z = h$ ergibt.

III Runde 3

Aufgabe V11134:
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke. Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von MontyPythagoras:



Die gesuchte Fläche des Dreiecks ABC ist

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}dh = \sqrt{\frac{1}{4}d^2c^2 + (\frac{1}{2}dh_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + A_{ABD}^2} = \sqrt{A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2}$$

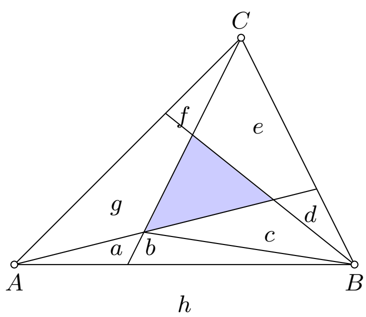
Daher gilt

$$A_{ABC}^2 = A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2$$

q. e. d.

Aufgabe 011134:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A_0, B_0 bzw. C_0, so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist.

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Bezeichnen wir die durch die Teilung entstandenen Teilflächen mit $a, b, ..., h$ (s. Bild).
Wir zeigen zunächst, dass $f + g = 6a$ gilt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke bei gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten. Damit lassen sich folgende Gleichungen ablesen:

$$f + g = (f + g + e + h) - (e + h) = 2(a + b + c + d) - 2(c + d) = 2(a + b) = 2a + 4a = 6a$$

Auf analoge Weise erhalten wir die Gleichungen $a + b + c = 6d$ und $d + e = 6f$, deren Addition

$$(f + g) + (a + b + c) + (d + e) = A - h = 6(a + d + f) \qquad (1)$$

ergibt, wobei A der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist. Außerdem gilt:

$$2(a + b + c + d) = e + f + g + h \qquad ; \qquad 2(d + e + f) = g + a + b + c + h$$

$$2(f + g + a) = b + c + d + e + h$$

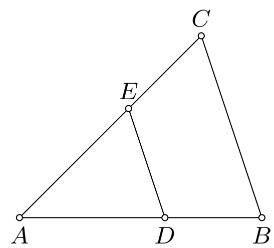
deren Addition auf

$$3(a + d + f) = 3h \Rightarrow a + d + f = h \qquad (2)$$

führt. (1) und (2) ergeben dann die Behauptung $h = \frac{1}{7}A$.

Aufgabe 021132:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.
In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Sei $k \equiv \frac{AD}{AB}$. Dann gilt ebenso $k = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, da es sich bei $ABCDE$ wegen $DE \parallel BC$ um eine Strahlensatzfigur handelt. Mit den üblichen Abkürzungen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ soll nun laut Voraussetzung

$$\frac{DE + EA + AD}{a + b + c} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k = \frac{[ADE]}{[DBCE]}$$

sein, wobei $[XYZ]$ den Flächeninhalt von XYZ bezeichnet.
Da jedoch $[DBCE] = [ABC] - [ADE]$ gilt und Dreieck ADE aus Dreieck ABC durch eine zentrische Stauchung um den Faktor k hervorgeht, ist $[ADE] = k^2[ABC]$. Daraus folgt die Gleichung

$$k = \frac{[ADE]}{[ABC] - [ADE]} = \frac{k^2}{1 - k^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 1 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung kommt wegen $0 < k < 1$ nur $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618$, die Verhältniszahl des goldenen Schnitts, in Frage. Punkt D teilt demzufolge die Seite AB im Verhältnis

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}{1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Aufgabe 031232:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Die Lösungsidee bei derartigen Aufgaben besteht darin, die gegebene Gleichung in ein Produkt von Faktoren umzuformen, das null ist. Die gestellte Bedingung (hier die Rechtwinkligkeit des Dreiecks) muss sich dann darin wiederfinden, dass die Faktoren einzeln null werden.
Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ist klar, dass die Gleichung

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \qquad (1)$$

genau das Gewünschte liefert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass (1) äquivalent zur gegebenen Gleichung

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

ist. Dieser Lösungsansatz gestattet es gleichzeitig, beide Beweisrichtungen elegant zu erledigen:

i) Ist das Dreieck rechtwinklig, verschwindet genau einer der Faktoren in (1) und (2) ist erfüllt;
ii) Ist (2) und damit (1) erfüllt, so muss mindestens einer der Faktoren in (1) verschwinden, und das bedeutet Rechtwinkligkeit des Dreiecks.

Wie kommt man nun von (2) auf (1)? Wir benutzen ein Additionstheorem und den Kosinussatz:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 2a^2b^2c^2}{2a^2b^2c^2}$$

Zusammen mit den zyklischen Vertauschungen dieser Gleichung für $\cos 2\beta$ und $\cos 2\gamma$ führt das auf die Gleichung

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 + b^2(c^2 + a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2c^2 = 0$$

Ein Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke, Zusammenfassen und anschließende Faktorisierung führt in der Tat auf (1).

Aufgabe 091235:
Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, dass die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.
Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien M_A,M_B,M_C und r_A,r_B,r_C die Mittelpunkte bzw. die Radien der Kugeln. Das Viereck ABM_BM_A hat in A und B zwei rechte Winkel und die Seiten AM_A und BM_B sind parallel. Da die Kugel sich berühren hat M_AM_B die Länge r_A+r_B. Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung $|AB|^2+(|AM_A|-|BM_B|)^2 = |M_AM_B|^2$.
Einsetzen und kürzen liefert die Gleichung $c^2 = 4r_Ar_B$. Zusammen mit den Gleichungen zu den beiden anderen Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$c^2 = 4r_Ar_Bb^2 = 4r_Ar_Ca^2 = 4r_Br_C \ .$$

Dieses hat die Lösung $r_A = \frac{bc}{2a}$,$r_B = \frac{ac}{2b}$, $r_C = \frac{ab}{2c}$

Aufgabe 131235:
Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Lösung von cyrix:
Im Dreieck $\triangle ABC$ sei die Länge der Seite, die dem Winkel mit Größe α gegenüberliegt, mit $a = \sqrt{2}$ bezeichnet, analog $b = \sqrt{3}$ und $c = \sqrt{4} = 2$. Dann gilt nach dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, also

$$bc \sin\alpha = ac \sin\beta = ab \sin\gamma =: T$$

Die zu betrachtende Gleichung $x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$ geht durch Multiplikation mit abc und Division durch T dann äquivalent über in $0 = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 2z$ bzw. $-2z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$. Quadrieren liefert

$$4z^2 = 2x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{6} \qquad \text{bzw.} 2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Q}$$

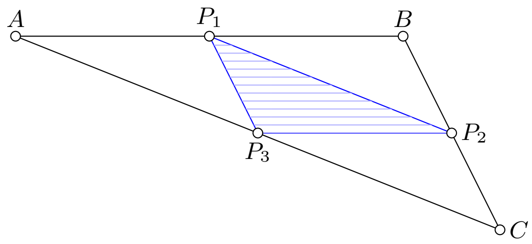
Da $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ gilt, aber $2xy$ als ganze Zahl rational ist, muss $2xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$ gelten.
Ist $x = 0$, so folgt aus $\sqrt{3}y = -2z \in \mathbb{Q}$ auch $y = z = 0$ und analog aus $y = 0$ aus $\sqrt{2}x = -2z \in \mathbb{Q}$ genauso nun $x = z = 0$, sodass es nur höchstens diese eine Lösung $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ gibt.
Einsetzen dieser Werte bestätigt aber schnell, dass dies auch wirklich eine, also die einzige, Lösung der zu betrachtenden Gleichung ist, $\Box$.

Aufgabe 161235:
In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Man beweise, dass für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Lösung von Kornkreis:
Nach der Voraussetzung, dass nicht alle Punkte der Menge auf derselben Gerade liegen, gibt es mindestens drei Punkte, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden. Betrachte von allen Dreiecken, deren Eckpunkte aus der betrachteten Menge sind, eines mit dem größten Flächeninhalt (so ein Dreieck existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Dreiecke).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Dreiecks mit P_1, P_2, P_3. Da dessen Flächeninhalt maximal ist, müssen alle anderen Punkte in einem Gebiet (oder auf dessen Rand) liegen, welches begrenzt wird durch die Parallelen zur Seite P_iP_j durch die Punkte P_k sowie P_k' (für alle $i,j,k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden), wobei P_k' den Spiegelpunkt von P_k bezüglich der Seite P_iP_j bezeichnet. Das folgt einfach daraus, dass die Fläche eines Dreiecks gleich „Grundseite mal Höhe durch 2“ ist.

Die Parallelen zu P_iP_j durch die jeweiligen Punkte P_k ergeben ein Dreieck ABC, welches bereits ein geschlossenes Gebiet ist, sodass die Parallelen durch die Spiegelpunkte P_k' nicht mehr betrachtet werden müssen. Man überlegt sich leicht, dass die Seitenlängen von $\triangle ABC$ dem Doppelten der jeweiligen Seitenlängen von $\triangle P_1P_2P_3$ entsprechen.



Damit gilt für die Dreiecksfläche $A_{\triangle ABC} = 4 \cdot A_{\triangle P_1P_2P_3} \leq 4$, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 171235:
Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt

$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$$

Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Lösung von cyrix:
Es sei U der Umkreismittelpunkt, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ und F seine Fläche. Dann zerlegen die Strecken AI, BI und CI das Dreieck in drei Teildreiecke, die jeweils die Grundseiten AB, AC bzw. BC und eine dazu zugehörige Höhe der Länge r besitzen. Also ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|AB| + |AC| + |BC|) = \frac{1}{2} \cdot ur$$

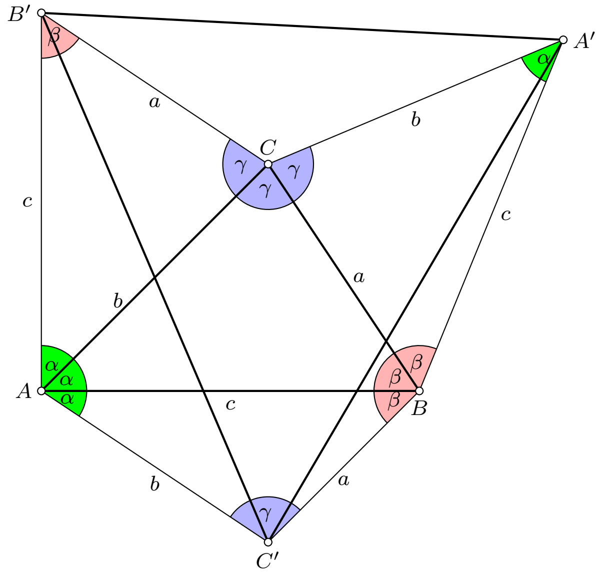
und damit $ur = 2F$.
Die drei (ggf. auch zu einer Strecke entarteten) Dreiecke $\triangle ABU$, $\triangle ACU$ und $\triangle BCU$ sind jeweils gleichschenklig mit Schenkellänge R, besitzen also jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \angle x$, wobei x der Innenwinkel des betreffenden Dreiecks bei U ist.

Da der Sinus nur Werte ≤ 1 annimmt und nicht alle drei hier betrachteten Dreiecke rechtwinklig bei U sein können (liegt U im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks $\triangle ABC$, so ergänzen sich diese drei Innenwinkel der Teildreiecke bei U zu 360°, sonst bildet die Summe von zwei dieser drei Innenwinkel den dritten), aber diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ vollständig überdecken, gilt $F < 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot R^2$ bzw. $R^2 > \frac{2}{3}F = \frac{1}{3} \cdot ur$, also $R > \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$.

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C, so ist U nach der Umkehrung des Satzes von Thales der Mittelpunkt von AB. Damit gilt $|AB| = 2R$. Ist h die Höhe von C auf AB, so ist offenbar $h \leq |CU| = R$, also $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$. Damit ergibt sich nun $R^2 \geq F = \frac{1}{2} \cdot ur$ bzw. $R \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$, $\square$.

Aufgabe 181236B:
Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C, B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A, C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man:
Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck - mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechende Ecken -, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Lösung von moudi:



Wir zeigen die Kontraposition. Ist $\triangle ABC$ nicht gleichseitig, so sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ nicht ähnlich.

Sei also Dreieck $\triangle ABC$ nicht gleichseitig. O.b.d.A. nehme ich $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ an. Dann ist der Winkel $\alpha < 60°$ und $\gamma > 60°$. Jetzt unterscheide ich die Fälle $\beta \leq 60°$ und $\beta \geq 60°$.

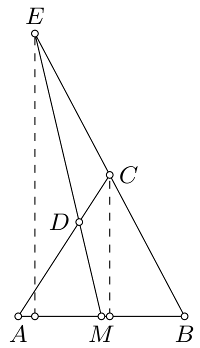
Fall 1: $\beta \leq 60°$.
Da Winkel $\angle C'AB' = 3\alpha < 180°$ und $\angle A'BC' = 3\beta \leq 180°$, liegt A' innerhalb und B innerhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle BC'A = \gamma$. Deshalb ist Winkel $|\angle A'C'B'| < \angle BC'A = \gamma$. (Beachte, dass die Orientierung im Fall $\gamma > 90°$ des Dreieck $\triangle A'B'C'$ ändern kann und deshalb Winkel $A'C'B'$ negativ werden kann.)

Fall 2: $\beta \geq 60°$.
In diesem Fall ist $\gamma < 120°$. Da Winkel $\angle B'CA' = 3\gamma > 180°$ und Winkel $\angle A'BC' = 3\beta \geq 180°$, liegt B' ausserhalb und C' ausserhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle CA'B = \alpha$.

Deshalb ist Winkel $\angle B'A'C' > \angle CA'B = \alpha$.

Aufgabe 231231:
In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, dass sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und dass dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzung das Verhältnis $AD : DC$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus der Voraussetzung über die Flächeninhalte der Dreiecke AMD und CED folgt durch Addition des Flächeninhalts des Vierecks $MBCD$ zu diesen Dreiecksflächen, dass die Dreiecke ABC und MBE gleichen Flächeninhalt haben.
Wegen $AB = 2MB$ hat folglich C halb so großen Abstand von AB wie E. Nach dem Strahlensatz (angewandt auf die Geraden durch B und A bzw. durch B und E sowie die zueinander parallelen Lote von E, C auf AB) folgt $BC = \frac{1}{2}BE$.
Also sind AC und EM Seitenhalbierende im Dreieck ABE, und für ihren Schnittpunkt D folgt

$$AD : DC = 2 : 1$$

Aufgabe 231236:
Es sei $\angle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$.
Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedes mal, wenn er auf einen der Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen.
Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, ...$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren).
Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).
Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen,

- ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, ...$ gibt,
- ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, ...$ einen Punkt P_k derart gibt, dass $SP_k \leq SP_i$ für alle $i = 1, 2, 3, ...$ gilt und
- durch wie viele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, dass der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $SP_{m-1} = SP_m$ durchläuft, so dass also das Wegstück $P_0...P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m...P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle P_0SQ$.

Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfasst:
I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α
(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$ erreicht.
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, ..., m-1$ die Ungleichung $SP_k < SP_{k-1}$ erfüllen, dass dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $SP_m \geq SP_{m-1}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, ..., n$ sogar $SP_k > SP_{k-1}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es
(C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n
Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, dass für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $SP_m = SP_{m-1}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

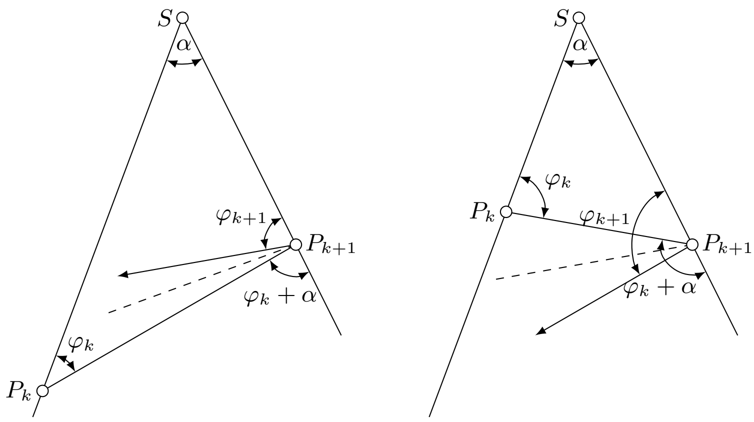
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Die Größe des Winkels, den der von P_k ausgehende Lichtstrahl mit der von $P - k$ nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_k genannt.
Dieser von P_k ausgehende Lichtstrahl erreicht genau dann den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$, wenn $\varphi_k < 180° - \alpha$ gilt. Ist dies der Fall, so hat derjenige Strahl, den die von P_{k+1} nach P_k führende Halbgerade mit der Verlängerung von SP_{k+1} über P_{k+1} hinaus bildet, nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\varphi_k + \alpha$. (Abbildung)

Nach dem Reflexionsgesetz ist also auch $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \alpha$.
Für alle diejenigen k, für die P_k existiert, folgt somit durch vollständige Induktion $\varphi_k = \varphi_0 + k\alpha$.

Wenn daher zu gegebenem (α und) φ_0 eine Zahl k die Eigenschaft $\varphi_0 + k \cdot \alpha < 180°$ hat, dann gilt (entweder $k = 0$ oder, falls $k \geq 1$ ist)

$$\varphi_{k-1} = \varphi_0 + (k-1) \cdot \alpha < 180° - \alpha$$

d. h., dann existiert ein Punkt P_k. Wenn aber $\varphi_0 + k \cdot \alpha \geq 180°$ ist, dann gilt ($k \geq 1$ und) $\varphi_{k-1} \geq 180° - \alpha$; d. h., dann existiert kein Punkt P_k mit diesem k.
Für jedes φ_0 gibt es nun genau eine natürliche Zahl n so, dass $\varphi_0 + n \cdot \alpha < 180°$, aber $\varphi_0 + (n+1) \cdot \alpha \geq 180°$ gilt. Genau diese Zahl hat folglich die in (A) behauptete Eigenschaft.



Für jedes φ_0 und jede natürliche Zahl $k \geq 1$, für die P_k existiert, sowie für jede der drei Relationen in

$$SP_k \gtreqless SP_{k-1}$$

gilt weiter, dass die betreffende Relation infolge des Satzes über Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel äquivalent ist mit der entsprechenden Relation in

$$\varphi_{k-1} \gtreqless 180° - (\varphi_{k-1} + \alpha \quad ; \quad \varphi_{k-1} \gtreqless 90° - \frac{\alpha}{2}$$
$$\varphi_0 + (k+1) \cdot \alpha \gtreqless 90° - \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \varphi_0 + k \cdot \alpha \gtreqless 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Zu jedem φ_0 gibt es sodann genau eine ganze Zahl g so, dass

$$\varphi_0 + (g-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} \qquad \text{aber} \qquad \varphi_0 + g \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2}$$

gilt. Genau die Zahl $m \max(1; g)$ hat dann die in (B) behauptete Eigenschaft (insbesondere folgt für $m > 1$ die Existenz von $P_0, ..., P_{m-1}$ wegen $\alpha < 180°$ aus $\varphi_0 + (m-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} < 180°$ und (A)).

II. Eine Winkelgröße φ_0 mit $0° < \varphi 0 < 180°$ hat genau dann die in II. zu untersuchende Eigenschaft, wenn diejenige; durch α und φ_0 eindeutig bestimmte, Zahl m, die die Gleichung

$$\varphi_0 + m \cdot \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt, eine natürliche Zahl $m \geq 1$ ist. Zu gegebenem α existieren daher genau so viele derartige Winkelgrößen φ_0, wir es natürliche Zahlen $m \geq 1$ mit

$$0° < 90° + \frac{\alpha}{2} - m \cdot \alpha < 180°$$

gibt. Diese Bedingung für m ist äquivalent mit

$$\frac{\alpha}{2} - 90° < m \cdot \alpha < \frac{\alpha}{2} + 90°$$

also, da die linke Ungleichung wegen $\alpha < 180°$ für alle natürlichen Zahlen gilt, mit

$$m < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha}$$

Wegen $\alpha < 180°$ ist stets $\frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} > 1$, also gibt es stets mindestens eine natürlichen Zahl $m \geq 1$, die diese Bedingung erfüllt.

(C) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $\frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq 2$ gilt. Das trifft genau für alle $\alpha \geq 60°$ zu.

(D) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und $m = 2$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $2 < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq 3$ gilt. Das trifft genau für alle α mit $36° \leq \alpha < 60°$ zu.

(E) Die Bedingung wird genau dann von den N Zahlen $m = 1, m = 2, ..., m = N$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $N < \frac{1}{2} + \frac{90°}{\alpha} \leq N + 1$ gilt.
Das trifft genau für alle α mit

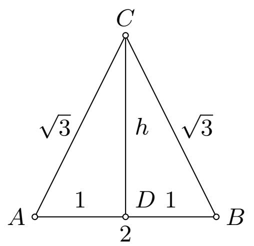
$$\frac{180°}{2N+1} \leq \alpha < \frac{180°}{2N-1}$$

zu.

Aufgabe 241232:
Man beweise:
Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Lösung von MontyPythagoras:
Variante 1:

Der größte der Innenwinkel liegt gegenüber der längsten Dreiecksseite, und die kürzeste Höhe gehört ebenfalls zur längsten Seite (letzterer Zusammenhang ergibt sich ganz einfach daraus, dass Dreiecksseite mal dazugehörige Höhe ja der doppelten Fläche des Dreiecks entspricht, also konstant ist). Wir setzen daher einfach zwei Seiten zu $\sqrt{3}$ (der kleinstmögliche Wert) und die längste Seite zu 2 (der größtmögliche Wert):



Die Höhe dieses Dreiecks ist laut Satz des Pythagoras

$$h^2 = \sqrt{3}^2 - 1 = 2$$
$$h = \sqrt{2}$$

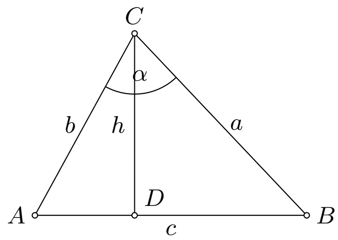
Es sei immer $\overline{AB} > \overline{AC}$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$. Wenn man nun die Seiten AC oder BC verlängert oder AB verkürzt, wird h größer, so dass tatsächlich $h \geq \sqrt{2}$ gilt, was Aufgabenteil b) beweist.

Der Winkel in C wäre nur dann ein stumpfer Winkel, wenn der Winkel $\angle ACD > 45°$ wäre. Es ist jedoch

$$\angle ACD = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

womit auch Aufgabenteil a) bewiesen wäre.

Variante 2 (allgemeiner):



O. B. d. A. sei $c > a{,}b$. Laut Kosinussatz gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab + (a-b)^2 - c^2}{2ab}$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

α wird möglichst groß, wenn $\cos\alpha$ möglichst klein wird. Das ist der Fall, wenn c möglichst groß, a und b möglichst klein und am besten $a = b$ wird. Wie in Variante 1 ist der Winkel also möglichst groß, wenn $a = b = \sqrt{3}$ und $c = 2$ ist. Dann ist

$$\cos\alpha = \frac{3 + 3 - 4}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} > 0$$
$$\alpha < \frac{\pi}{2}$$

Damit wäre Aufgabenteil a) bewiesen. Für die Dreiecksfläche gilt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ch$$

Und daher:

$$h = \frac{ab}{c}\sin\alpha$$

Bei gegebenem Flächeninhalt wird h umso kleiner, je größer c wird. Wir setzen also maximal $c = 2$. Bei gegebenem c wird der Flächeninhalt und damit auch h umso kleiner, je kleiner a und b werden. Deshalb setzen wir $a = b = \sqrt{3}$ und können daher das Ergebnis für α direkt verwenden. Es ist

$$h_{min} = \frac{\sqrt{3}^2}{2}\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{8}}{3} = \sqrt{2}$$

und daher

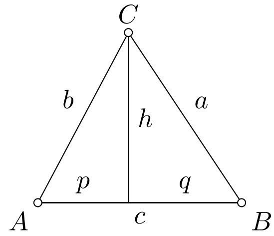
$$h \geq \sqrt{2}$$

Alternativ-Lösung von Nuramon:

a) Seien a,b,c die Seitenlängen des Dreiecks, wobei o. B. d. A. $a \leq b \leq c$ sei. Nach Kosinussatz ist das Dreieck spitzwinklig, genau dann wenn $a^2 + b^2 > c^2$ gilt. Diese Bedingung ist erfüllt, denn

$$a^2 + b^2 \geq 3 + 3 > 4 \geq c^2.$$

b) Wegen a) verlaufen die Höhen innerhalb des Dreiecks. Seien wieder a,b,c die Seitenlängen, wobei diesmal nicht zwingend $a \leq b \leq c$ gelten soll. Wir betrachten o. B. d. A. die Höhe h von C auf AB.



Seien p,q die Längen der Abschnitte, in die c durch h zerlegt wird. Wegen $p + q = c \leq 2$ muss $p \leq 1$ oder $q \leq 1$ gelten. O. B. d. A. sei $p \leq 1$. Dann folgt

$$h^2 = b^2 - p^2 \geq 3 - 1 = 2,$$

also $h \geq \sqrt{2}$.

Aufgabe 261233B:
Man beweise, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlänge $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\angle CAB; \angle ABC; \angle BCA$ sowie für den Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt F die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{27\rho}{8F} \qquad (1)$$

Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Formel $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ und dem Kosinussatz gilt

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4abc}$$

Entsprechend ist

$$\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac}{4abc} \qquad ; \qquad \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4abc}$$

Bezeichnet T die linke Seite der Ungleichung (1), so gilt

$$T = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{4abc}$$

Mit der Abkürzung $s = \frac{1}{2}(a + b + c+)$ also

$$T = \frac{s^2}{abc}$$

Ferner ist $F = \rho \cdot s$ (nach Heron) also

$$T = \frac{s^3}{abc}\frac{\rho}{F} \qquad (2)$$

Nun gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{1}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

und darin das Gleichheitszeichen genau im Fall $a = b = c$.
Äquivalent zu (3) ist

$$s^3 \geq \frac{27}{8} abc \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen in (3) ist äquivalent zu dem in (4). Damit folgt aus (2), (4)

$$T \geq \frac{27}{8} \cdot \frac{\rho}{F}$$

d. h. die zu beweisende Ungleichung (1), und es folgt, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau im Fall $a = b = c$, d. h. genau für alle gleichseitigen Dreiecke gilt.

Aufgabe 271234:
Man beweise für jedes Dreieck ABC:
Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\angle BAC$, so gilt

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist somit gleich $\frac{1}{2} a h_a$ (mit $a = BC$) als auch gleich $\frac{1}{2} bc \sin \alpha$. Hiernach und nach der Formel $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ gilt

$$h_a = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a} \tag{2}$$

Nach dem Kosinussatz sowie nach der Formel $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ gilt ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = (b - c)^2 + 4bc \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq 4bc \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich wegen

$$a, b, c, \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{4}$$

die Behauptung

$$h_a \leq \frac{2bc \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{bc} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{bc} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Wegen (4) gilt darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (3) gilt, d. h. genau für alle diejenigen Dreiecke ABC, in denen $b = c$ ist.

Aufgabe 291233A:
Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 $\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\frac{m}{s}$.
Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B, P_3 in C.
Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufsinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.
Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefasst werde).

Lösung von MontyPythagoras:
Die Strecke, die ein Punkt P_i zum Zeitpunkt t insgesamt zurückgelegt hat, ist $v_i \cdot t$, wobei v_i die jeweilige Geschwindigkeit ist. Man bestimmt die Position eines Punktes, indem die gesamte zurückgelegte Strecke um das Dreieck „herumgewickelt“ wird. Da der Umfang des Dreiecks $U = 3$ ist, kann man Vielfache von 3 abziehen. Die Zählung beginne jeweils beim Eckpunkt A: ein Wert von 7,3 bedeute zum Beispiel, dass der Punkt P sich auf der Strecke BC befindet, und zwar 0,3 m vom Punkt B entfernt.
In dieser Weise gilt für die drei Punkte P_i:

$$(1) \qquad x_1 = t$$

$$(2) \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2}t$$

$$(3) \qquad x_3 = 2 + \sqrt{3}t$$

Der Summand „1“ in Gleichung (2) ist dem Startpunkt B geschuldet, ebenso der Summand „2“ in Gleichung (3) aufgrund des Startpunktes C.
Wir untersuchen zunächst, ob es möglich ist, dass sich alle drei Punkte gleichzeitig in Eckpunkten des Dreiecks befinden. Der Punkt 1 befindet sich genau dann in einem Eckpunkt, wenn x_1 eine ganze Zahl ist. Dann muss, da $x_1 = t$ gilt, auch t ganzzahlig sein. Aber schon der Punkt 2 wird sich nie zur gleichen Zeit in einem Eckpunkt befinden können, weil er sich von seinem Startpunkt aus um $\sqrt{2}t$ weiterbewegt haben wird. Da bekanntermaßen $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, ist $\sqrt{2} \cdot t$ niemals eine ganze Zahl. Die Punkte P_1 und P_2 befinden sich also niemals gleichzeitig in Eckpunkten, weder im gleichen noch in verschiedenen. Sinngemäß das gleiche gilt auch für den Punkt P_3.

Wir untersuchen nun, ob die drei Punkte zumindest irgendwann ein gleichseitiges Dreieck bilden können, während sie sich jeweils auf den Strecken zwischen zwei Eckpunkten befinden. Wäre der Punkt P_1 zum Beispiel (modulo 3) beim Wert 0,7, dann müssten die Punkte P_2 bei 1,7 und der Punkt P_3 bei 2,7 liegen, wobei allerdings P_2 und P_3 auch die Plätze tauschen dürften. Die Punkte 1 bis 3 könnten also im mathematisch positiven oder negativen Sinne angeordnet sein. Ein gleichseitiges Dreieck läge daher vor, wenn entweder

$$(x_2 - x_1) \equiv 1 \pmod 3 \quad \wedge \quad (x_3 - x_1) \equiv 2 \pmod 3$$

oder

$$(x_3 - x_1) \equiv 1 \pmod 3 \quad \wedge \quad (x_2 - x_1) \equiv 2 \pmod 3$$

gälte. Wir untersuchen zunächst die erste Möglichkeit. Die beiden Bedingungen lassen sich auch wie folgt formulieren:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 1$$

und

$$x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 2$$

mit $k,n \in \mathbb{N}$. Wir eliminieren t, indem wir diese Gleichungen vereinfachen und zusammenführen. Es folgt als Bedingung

$$\frac{3k}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3n}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\frac{n}{k} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$\frac{n}{k}$ ist als Quotient aus zwei natürlichen Zahlen eine rationale Zahl. Die Bedingung wäre daher nur erfüllbar, wenn $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$ eine rationale Zahl wäre. Für die zweite Konstellation ergibt sich analog:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 2 \qquad \text{und} \qquad x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 1$$

Daraus folgt:

$$\frac{3k + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3n - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\frac{3n - 1}{3k + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

Auch $\frac{3n-1}{3k+1}$ ist eine rationale Zahl. Daher kann man zusammenfassend festhalten, dass die Punkte P_1 bis P_3 nur dann zu einem bestimmten Zeitpunkt $t > 0$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

eine rationale Zahl wäre.
r ist irrational, was bedeutet, dass die Punkte eben nie wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Nachweis: Es ist

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{2}r - (r-1) = \sqrt{3}$$

Quadrieren:

$$2r^2 + (r-1)^2 - 2(r-1)\sqrt{2} = 3$$

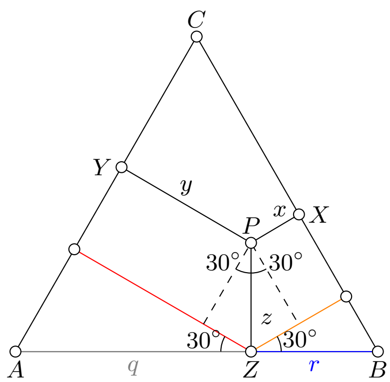
$$3r^2 - 2r - 2 = 2(r-1)\sqrt{2}$$

$$\frac{3r^2 - 2r - 2}{2(r-1)} = \sqrt{2}$$

Wenn r rational wäre, dann wäre es auch $\sqrt{2}$, was nicht der Fall ist. So folgt aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$ unmittelbar die Irrationalität von r.

Aufgabe 341232:
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Lösung von MontyPythagoras:



Zu bestimmen ist die Summe $x + y + z$. Es ist

$$y = q\cos 30° - z\sin 30°$$

und

$$x = r\cos 30° - z\sin 30°$$

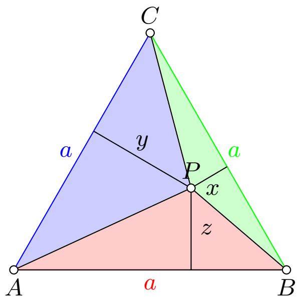
Bekanntermaßen ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Das ergibt:

$$x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}q - \frac{1}{2}z + z = \frac{\sqrt{3}}{2}(q + r) = h$$

wobei h die Höhe des Dreiecks sei. q. e. d.

Man kann es sich auch durch einfache geometrische Überlegungen klarmachen, wenn man sieht, dass $x + y + z$ gleich der Summe der roten und orangefarbenen Strecke entspricht. Spiegelt man das ganze Dreieck an der Strecke AB, wird auch klar, dass die Summe der roten und orangefarbenen Strecke gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:



Offensichtlich ist die Summe der Flächen der drei Teildreiecke gleich dem Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ABC. Also gilt:

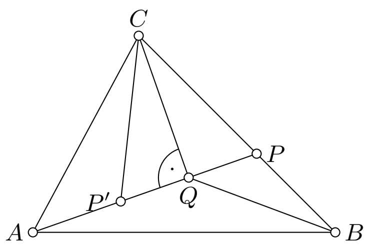
$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah$$
$$x + y + z = h$$

q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 031245:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite BC liege ein Punkt P, wobei $BP : PC = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\angle APC = 60°$ sind.
Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.

Lösung von Henning Thielemann:



Auf der Strecke AP sei Q der Punkt, welcher von P den gleichen Abstand hat, wie B von P. Dann ist das Dreieck QPB gleichschenklig und weil $\angle CPQ = 60°$ sein soll, ist der Nebenwinkel $\angle QPB = 120°$ und die Basiswinkel des Dreiecks QPB sind $30°$ groß.
Die Größe des Winkels $\angle PBA$ wird als $45°$ vorausgesetzt, daher muss $\angle QBA = 15°$. Der Winkel $\angle AQB$ muss als Nebenwinkel von $\angle BQP 150°$ groß sein. Damit ist auch $\angle BAP = 15°$, wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck BAP. Auch BAP ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck.

Nun soll das Dreieck PQC genauer betrachtet werden: Da PC doppelt so lang wie PB und mithin doppelt so lang wie PQ ist, und der Winkel $\angle CPQ 60°$ groß ist, ist $\angle PQC$ ein rechter Winkel. Davon überzeugt man sich am besten, indem man noch einen Punkt P' auf der Gerade durch A und P hinzunimmt.

Dann ist $P'PC$ ein gleichseitiges Dreieck, weil $PC = PP'$ und $\angle CPQ = 60°$ und Q ist als Mittelpunkt von $P'P$ gleichzeitig Lotfußpunkt vom Lot von C auf $P'P$. Weil $\angle CPQ = 60°$ und $\angle PQC = 90°$ ergibt sich wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PQC dass $\angle QCP = 30°$. Damit ist dieser Winkel genauso groß wie $\angle PBQ$ und auch BQP ist gleichschenklig.

Der Punkt Q gehört also zu zwei gleichschenkligen Dreiecken, die sich die Seite QB teilen. Es ergibt sich, dass die Strecken QA, QB und QC gleich lang sind. Also ist Q Umkreismittelpunkt von ABC.

Das Dreieck CQA ist deshalb ebenfalls gleichschenklig und außerdem, wie oben gezeigt, rechtwinklig. Der Winkel $\angle ACQ$ ist damit $45°$ groß.

Die gesuchte Größe von $\angle ACB$ ist $\angle ACQ + \angle QCP = 45° + 30° = 75°$.

Aufgabe 051243:
Unter allen Strecken MN, die das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten zunächst eine Strecke MN, deren Endpunkt M auf dem Strahl aus A durch B und deren Endpunkt N auf dem Strahl aus A durch C liegt und für die der Inhalt des Dreiecks AMN halb so groß ist, wie der Inhalt des Dreiecks ABC.
Die Strecke MN darf auch teilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks verlaufen. Setzt man $AM = x$ und $AN = y$, so ist nach einer bekannten Inhaltsformel der Flächeninhalt des Dreiecks AMN genau dann halb so groß wie der des Dreiecks ABC, wenn

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

also $2xy = bc$ gilt.
Bedeutet $d_a = MN$, so ergibt sich nach dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle AMN$

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\alpha) \\ &= (x-y)^2 + bc(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) \quad \text{also}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

Folglich ist

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}[a^2 - (b-c)^2] = (x-y)^2 + 2(s-b)(s-c)$$

mit $2s = a + b + c$. Unter Verwendung der Dreiecksformel $I_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ergibt sich somit

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{2I^2}{s(s-a)} \qquad (2)$$

Durch zyklische Vertauschung von (2) ergeben sich

$$d_b^2 = (x'-y')^2 + \frac{2I^2}{s(s-b)}; \quad d_c^2 = (x''-y'')^2 + \frac{2I^2}{s(s-c)} \qquad (3)$$

wenn x', y', x'', y'' die entsprechenden Abschnitte bei einer Strecke bedeuten, deren Endpunkte auf den von B bzw. C ausgehenden Strahlen liegen und d_b bzw. d_c die Längen dieser Strecken sind.

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $a \leq b \leq c$ ist. Dann gilt

$$\frac{2I^2}{s(s-a)} \leq \frac{2I^2}{s(s-b)} \leq \frac{2I^2}{s(s-c)}$$

und das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ bzw. $b = c$ ist. Hieraus und aus (2) und (3) ergibt sich, dass jede der Längen d_a, d_b, d_c nicht kleiner als

$$\frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}}$$

ist. Um zu zeigen dass

$$d = \frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

das gesuchte Minimum ist, genügt es zu zeigen, dass die für $x = y$ entstehende Strecke MN, deren Länge $d_a = d$ ist, nicht in das Äußere des Dreiecks eintritt.
Im Fall $x = y$ ergibt sich aus (1)

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

Da $a \leq b \leq c$ vorausgesetzt ist, gilt wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b \leq 2b$ und daher

$$\sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leq c$$

so dass jeder der Punkte M und N auf einer der Dreiecksseiten liegt.

Ist $a < b$, so gibt es genau eine kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$.
Ist $a = b < c$, so gibt es genau zwei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$ und $x' = y'$.
Ist $a = b = c$, so gibt es entsprechend drei kürzeste unter diesen Strecken, die für $x = y$, $x' = y'$ und $x'' = y''$.

Aufgabe 071246:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Beweis des Satzes erfordert zwei Schritte; es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

1. Ist ein Dreieck gleichschenklig, so sind mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang.
2. Sind in einem Dreieck mindestens zwei Winkelhalbierende gleichlang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Beweis zu 1.:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Winkelhalbierenden $AE = w_\alpha$ und $BF = w_\beta$. Ferner sei dieses Dreieck gleichschenklig mit $AC = BC$, also $\angle CAB = \alpha = \angle ABC = \beta$. Dann folgt aus

$$\angle EAB = \angle ABF = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABE = \angle FAB \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$$

Somit gilt $AE = BF$, d. h. $w_\alpha = w_\beta$, was zu beweisen war.

Beweis zu 2.:
Es sei in dem wie oben bezeichneten Dreieck $\triangle ABC$ $w_\alpha = w_\beta$, d. h., $AE = BF$.

Den Beweis, dass dann $\alpha = \beta$ gilt, führen wir indirekt. Angenommen diese Behauptung sei falsch; dann können wir o. B. d. A. annehmen, dass $\alpha > \beta$ gilt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.
Der Punkt G sei so gelegen, dass $FG \parallel AE$ und $FG = AE = w_\alpha$ gilt. Dann liegt G außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Kosinussatz gilt nun

$$BE^2 = c^2 + w_\alpha^2 - 2w_\alpha c \cos\frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad AF^2 = c^2 + w_\beta^2 - 2w_\beta c \cos\frac{\beta}{2}$$

Nach Voraussetzung ist $w_\alpha = w_\beta$ und $\frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2} < 90°$, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Daraus folgt

$$BE > AF \qquad (1)$$

Da $AEGF$ auf Grund der obigen Voraussetzung ein Parallelogramm ist, gilt $AF = EG$. In dem Dreieck $\triangle BGE$ gilt daher wegen (1) $BE > EG$, also

$$\angle BGE > \angle EBG \qquad (2)$$

Ferner gilt wegen $\angle FAE = \angle EGF$

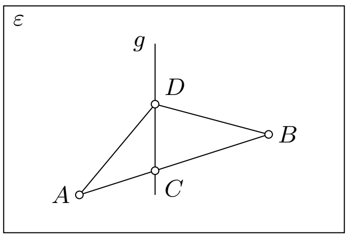
$$\frac{\alpha}{2} = \angle EGF > \angle FBE = \frac{\beta}{2} \qquad (3)$$

Durch Addition erhält man aus (2) und (3): $\angle BGF > \angle FGB$.

Das ist ein Widerspruch, weil das Dreieck $\triangle FGB$ gleichschenklig mit $AE = BF = FG$. Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

Aufgabe 091242:
Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ möglichst klein ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



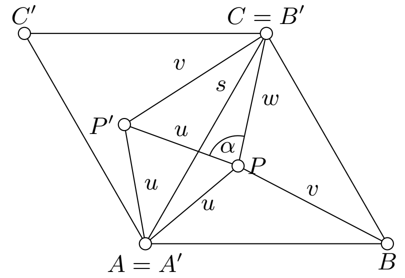
Man betrachtet die Ebene ε, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g, dass das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ε liegt, und zwar so, dass B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen (Abbildung).
Der Schnittpunkt C der Strecke AB' mit der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art und der einzige.
Beweis:
Sei D ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt: $DB = DB'$. Daher gilt auch

$$AD + DB = AD + DB'$$

Nun ist stets $AD + DB' \geq AC + CB'$ (Dreiecksgleichung), wobei das Gleichheitszeichen genau für $D = C$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 151243:
P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände $PA = u$, $PB = v$, $PC = w$ hat.
Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zunächst wird das in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Dreieck ABC samt dem im Innern dieses Dreiecks liegenden Punkt P mit einem Winkel der Größe $\varphi = 60°$ um den Punkt A gedreht. Damit entsteht die in der Abbildung wiedergegebene Figur.



Nach Voraussetzung und Konstruktion gilt $C = B'$ und

$$\angle PAP' = 60° \qquad (1)$$
$$u = AP = AP' \qquad (2)$$
$$v = PB = P'C \qquad (3)$$

Dabei ist B' der Bildpunkt von B, P' der Bildpunkt von P. Aus (2) folgt, dass das Dreieck PAP' gleichschenklig ist. Aus (1) folgt mit 82) nach dem Basiswinkelsatz:

$$\angle APP' = \angle AP'P \qquad (4)$$

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck gilt:

$$\angle PAP' + \angle AP'P + \angle P'PA = 180° \qquad (5)$$

Aus (5) folgt mit (1) und (4): $\angle APP' = 60°$ (6). Damit ist gezeigt, dass das Dreieck APP' gleichseitig ist. Es gilt also $PP' = u$ (7).
Weiterhin setzt man $\angle P'PC = \alpha$ und wendet den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie unter Beachtung von (3) und (7) auf das Dreieck $P'PC$ an:

$$\cos\alpha = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw} \qquad (8)$$

Weil P ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, gilt $\angle ABC < 180°$. Daraus folgt $\alpha < 180°$ und weiterhin $\sin\alpha > 0$. Unter Verwendung der Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw}\right)^2} \qquad (9)$$

Hieraus ergibt sich durch algebraische Umformung:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2uw}\sqrt{(u^2 + v^3 + w^2)^2 - 2u^4 - 2v^4 - 2w^4} \qquad (10)$$

Mit (8) und (10) ist jetzt unter Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck APC möglich, die Länge s der Dreiecksseite AC durch u, v und w auszudrücken. Man erhält:

$$s^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\alpha + 60°) \qquad (11)$$

Wegen $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha\cos 60° - \sin\alpha\sin 60°$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt mit (8), (10) und (11):

$$s^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)} \qquad (12)$$

Da die Länge s der Strecke AC positiv ist, ergibt sich aus (12):

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{(u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+w^4)}}$$

Aufgabe 171243:
a) Man gebe alle Möglichkeiten an, eine gegebene Dreiecksfläche D in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
b) Man beweise:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig.

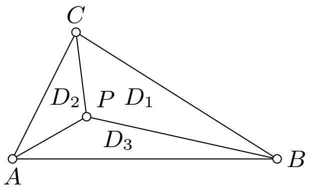
Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Liegt eine Zerlegung der Dreiecksfläche $D(ABC)$ in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 vor, so muss in der Figur zusätzlich zu den Eckpunkten der Dreiecksfläche D wenigstens noch ein vierter Punkt $P \in D$ existieren, der Eckpunkt einer Dreiecksfläche D ist. Dieser Punkt P kann ein innerer Punkt von D oder ein von den Eckpunkten A, B, C verschiedener Randpunkt von D sein.

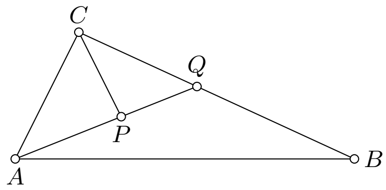
1. Es werde angenommen, dass P ein innerer Punkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit den Eckpunkten A bzw. B bzw. C durch je eine Strecke zu verbinden. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist einem der Eckpunkte (etwa A) durch eine Gerade zu verbinden. Die Verbindungsgerade schneidet die Gegenseite (hier a) in Q. Soll P ein Eckpunkt von wenigstens einer der Dreiecksflächen D_i sein, ist P mit einem der noch freien Eckpunkte (hier B oder C) zu verbinden.

Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksflächen werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D ausgeschöpft, wenn P ein innerer Punkt von D ist (siehe Abbildung 1 und 2).



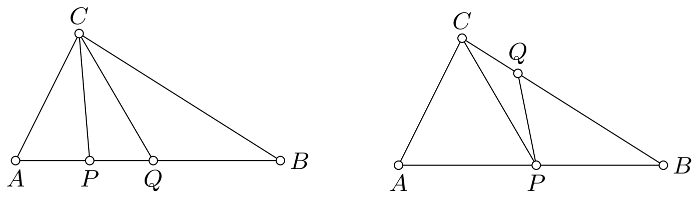


2. Es werde angenommen, dass P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D durch eine Strecke (hier PC) zu verbinden. Durch diesen Eckpunkt (hier C) ist eine weitere, von PC verschiedene Dreieckstransversale zu legen, die die Gegenseite in Q schneidet. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist mit einem von den Eckpunkten verschiedenen Randpunkt Q von D zu verbinden. Dabei muss Q auf einer vom gegenüberliegenden Eckpunkt von P (hier C) ausgehenden Seite liegen.

Durch die Strecke PQ wird D in einer Vierecks- und Dreiecksfläche zerlegt. Die geforderte Zerlegung von D wird durch Einzeichnen einer Diagonalen in die Vierecksfläche herbeigeführt. Dabei ist es unwesentlich, ob die Diagonale durch P oder Q geht.
Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksfläche werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D erschöpft, wenn P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. (siehe Abbildung 3 und 4)



3. Lässt sich für die Zerlegung der Dreiecksfläche D in die Dreiecksflächen D_i nach einer der vier möglichen Arten zeigen, dass wenigstens vier der entstehenden Innenwinkel von D_i der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind, so ist dies hinreichend dafür, dass diese Dreiecksflächen nicht ähnlich zueinander sind.

Wird eine der DreiecksflächenD_i als gleichschenklig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass wenigstens drei der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind. Wird eine der Dreiecksflächen D_i als gleichseitig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass die Größe eines der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkels von $60°$ verschieden ist.

Folgende Hilfssätze werden zur Beweisführung herangezogen, ohne dabei zitiert zu werden:

α): Die Summe der Innenwinkelgrößen im Dreieck beträgt $180°$.
β): Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größengleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.
γ): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind zueinander größengleich.

4.1. In der Zerlegung 1a) seien die Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zueinander ähnlich. Da die Innenwinkelgrößen der D_i bei P die Summe von $360°$ haben, müssen wenigstens zwei dieser Innenwinkel stumpf sein.
O. B. d. A. kann angenommen werden, D_1 und D_2 haben in P stumpfe Winkel. Da ein Dreieck höchstens einen stumpfen Winkel haben kann und D_1 und D_2 ähnliche Dreiecksflächen sind, müssen diese stumpfen Winkel größengleich sein.
Nun werde angenommen, in D_3 sei der Winkel $\angle PBA$ stumpf. Dann müsste

$$\angle APC = \angle CPB = \angle PBA$$

gelten. Wegen des eingangs zitierten Satzes γ) gilt $CP \parallel BA$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass P ein innerer Punkt von D ist.
Analog lässt sich der Widerspruch herbeiführen, wenn $\angle PAB$ als stumpf vorausgesetzt wird. Folglich ist $\angle APB$ stumpf, und es gilt:

$$\angle CPA = \angle BPC = \angle APB = 120°$$

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $BP = h \cdot CP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = k^2 \cdot CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $CP = h \cdot BP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.
Die Ähnlichkeitsforderung an die Dreiecksflächen D_i ist daher nur für $k = 1$ erfüllbar. Die Dreiecksflächen D_i sind in diesem Fall gleichschenklig. Die Dreiecksfläche D ist gleichseitig.

4.2. In der Zerlegung 1b) (siehe Abbildung 2) sei die Dreiecksfläche PQC nicht gleichschenklig, und außerdem gelte $\angle PQC \neq 90°$.
Dann sind die vier Winkel $\angle CPQ, \angle PQC, \angle QCP, \angle PQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Hat die Dreiecksfläche PQC unter sonst gleichen Voraussetzungen einen rechten Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQ$, $\angle QCP$, $\angle APC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und nicht rechtwinklig bei Q, so sind der Außenwinkel $\angle PQB$ und zwei geeignet gewählte Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig mit rechtem Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle APC$, $\angle CPQ$, $\angle PQC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 1b) (Abbildung 2) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_i führen kann.

4.3 In der Zerlegung 2a) (siehe Abbildung 3) gelte $CP \neq CQ$. Ferner liege weder bei P noch bei Q ein rechter Winkel. Dann sind die vier Winkel $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$, $\angle CQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Hat die Dreiecksfläche PQC bei Q einen rechten Winkel (P liegt zwischen A und Q), so sind die Winkel $\angle CAP$, $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Analoges gilt, wenn ein rechter Winkel bei P liegt.
Gilt $CP = CQ$, so sind die drei Winkel $\angle CAP, \angle CPA, \angle CPQ$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle APC = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 2a) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen führen kann.

4.4 Ist die Dreiecksfläche PQC in Abbildung 4 nicht gleichschenklig und besitzt sie bei Q keinen rechten Winkel, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQC$, $\angle QCP$, $\angle PQB$ ihrer Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und gilt $\angle PQC \neq 90°$, so ist der Nebenwinkel $\angle PQB$ größenmäßig verschieden von dem Scheitel- und Basiswinkel dieser Dreiecksfläche.
Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.

Ist die Dreiecksfläche PQC bei Q rechtwinklig und sonst beliebig, so kann die Ähnlichkeitsforderung im Fall 2b) für die Dreiecksflächen D_i in zweifacher Weise erfüllt werden:

1. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle CAP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt $\angle APC = 90°$. Hieraus resultiert $\angle ACP = \angle CPQ = \angle QBP$. Die Dreiecksflächen D_i sind untereinander und auch zur Dreiecksfläche D ähnlich.

2. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle ACP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt weiter $\angle APC = 90°$.
Hieraus resultiert $\angle CAP = \angle CPQ = \angle QBP$.
Daher ist die Dreiecksfläche $D(ABC)$ gleichschenklig und die Dreiecksflächen Di sind zueinander ähnlich.
Die Dreiecksfläche D ist genau dann ähnlich zu den Dreiecksflächen D_i, wenn $\angle ACB$ ein rechter Winkel ist.
Diese Zerlegung kann auch dem Fall 1 zugeordnet werden.

Damit ist gezeigt:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig. Die erste zerlegende Strecke ist das Lot vom Scheitel der gleichschenkligen Dreiecksfläche bzw. Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite.
Die zweite zerlegende Strecke ist das Lot vom Lotfußpunkt der ersten zerlegenden Strecke auf eine vom Scheitelpunkt ausgehende Dreiecksseite. Für gleichseitige Dreiecksflächen ist auch eine Zerlegung nach 1a) in kongruente Dreiecksflächen möglich.

Aufgabe 201241:
In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.

Man beweise:
Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke AFE, BDF, CED entsprechend mit I_2, I_3, I_4, so gilt, wenn jeweils A und D, B und E sowie C und F voneinander verschiedene Punkte auf derselben Winkelhalbierenden sind:

$$I_1 = I - I_2 - I_3 - I_4$$

Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten BC, CA AB entsprechend mit a, b, c und die Größe des Winkels $\angle ACB$ mit α, so gilt:

$$I = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \quad (2) \qquad \text{und} \qquad I_2 = \frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \sin\alpha \quad (3)$$

Da bekanntlich in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Dreiecksseite innen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten teilt, teilt der Punkt E die Seite AC im Verhältnis $c : a$. Also gilt:

$$AE = \frac{bc}{a+c} \qquad (4)$$

Entsprechend gilt:

$$AF = \frac{bc}{a+b} \qquad (5)$$

Wegen (3), (4), (5) gilt daher

$$I_2 = \frac{b^2c^2 \cdot \sin\alpha}{2(a+c)(a+b)} \qquad \left(= \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \right)$$

und hieraus ergibt sich wegen (2):

$$I_2 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \qquad (6)$$

Entsprechend gilt:

$$I_3 = I \cdot \frac{bc}{(a+b)(b+c)} \qquad ; \qquad I_4 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(b+c)} \qquad (7)$$

Aus (1), (6), (7) folgt:

$$I_1 = I \cdot \left(1 - \frac{bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)}{(b+c)(a+c)(a+b)} \right) = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}$$

Nun gilt auf Grund der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab} = abc \qquad \text{also} \qquad (b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$$

Daher gilt:

$$I_1 = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)} \leq \frac{I}{4}$$

Aufgabe 251246B:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels des Dreiecks ABC.
a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so dass für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \sin\varepsilon} \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen alle Längen und Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ mit ihren kanonischen Bezeichnungen und setzen o. B. d. A. $c = |AB| \geq |AC| = b \geq |BC| = a$ voraus, woraus direkt $\gamma = \angle ACB \geq \beta = \angle CBA \geq \alpha = \angle BAC$ und mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung $c = g$ sowie $\alpha = \varepsilon$ folgt. Schließlich sei A der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Dann gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} = d$$

Die zu zeigende Ungleichung ist damit äquivalent zu

$$\frac{2A \cdot \sin\alpha}{ab} < K$$

Setzt man hierin noch $2A = ab\sin\gamma$ ein, erhält man die äquivalente Ungleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\gamma < K$$

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ mit stumpfem Winkel γ nimmt für ein Dreieck mit gleichem (oder größerem) kleinsten Innenwinkel α und rechtem Innenwinkel γ das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ einen größeren Wert an, sodass wir o. B. d. A. $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 90°$ fordern können.
Für festes γ wird das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ maximal, wenn α als kleinster Innenwinkel maximal wird, also $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cdot (180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ gilt. Dann ist

$$\sin\alpha \cdot \sin\gamma = \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

genau dann maximal, wenn es $(1+x)\cdot(1-x^2)$ mit $x := \cos\gamma$ und $60° \leq \gamma$ (wegen $90° - \frac{\gamma}{2} = \alpha \leq \gamma$), also $\frac{1}{2} \geq x \geq 0$, auch ist.

Es ist für die Funktion

$$f(x) := (1+x)\cdot(1-x^2) = -x^3 - x^2 + x + 1$$

die Ableitungsfunktion

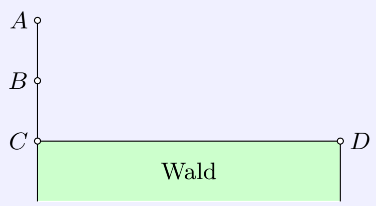
$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = (x+1)(-3x+1)$$

welche im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ genau die eine Nullstelle $\frac{1}{3}$ besitzt. Für kleinere Werte im Intervall ist f' positiv, für größere negativ, sodass f an dieser Stelle im Intervall sein globales Maximum von $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{27}$ annimmt.
Es ergibt sich für $\gamma = \arccos\frac{1}{3}$ und $\alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$, dass das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ den Wert

$$\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9} \cdot \sqrt{3} =: K'$$

annimmt; und für alle anderen Innenwinkel-Belegungen einen kleineren.
Damit erfüllt jede reelle Zahl $K > K'$ die Ungleichung der Aufgabenstellung, während es kein kleinstes solches K gibt, da im Fall $K = K'$ bei den angegebenen Winkeln der Gleichheitsfall eintritt.

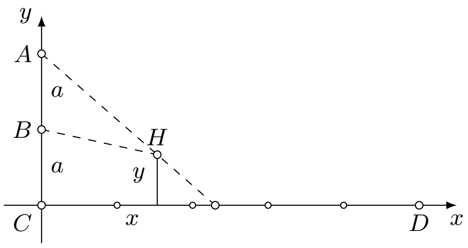
Aufgabe 291242:



Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abbildung).
In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befindet sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C.
Dabei sei $AB = BC = a$ und $CD = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase.

Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefasst, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, dass er nicht unterwegs vom Wolf gefasst wird.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Man lege ein Koordinatensystem so, dass C, B, A, D die Koordinaten $0; 0)$, $(0; a)$, $(0; 2a)$ bzw. $(5a; 0)$ haben.
Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten $(x; y)$ und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also $2v$ die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{AH}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{BH}{v}$.

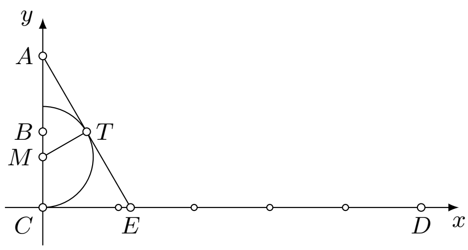


Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit $AH < 2 \cdot BH$:

$$\sqrt{x^2 + (y - 2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \qquad ; \qquad 3x^2 + 3y^2 + 4ay > 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \qquad (1)$$

Damit ist gezeigt, dass der Hase durch Wahl seines Zielpunktes x genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefasst zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen.
Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (nachfolgende Abbildung)



Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x-Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt $TM = \frac{2}{3}a$, $MA = \frac{4}{3}a$ und $\angle MTA = 90°$, also $\triangle CEA \sim \triangle TMA$,

$$CE : EA = TM : MA = 1 : 2 \qquad ; \qquad EA = 2 \cdot CE \qquad ; \qquad CA = CE\sqrt{3}$$

$$CE = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

Insbesondere liegt daher wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt auf der Strecke CD und es ist bewiesen:
Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD, d. h. genau die Punkte X auf CD mit $CX > \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Aufgabe 301246A:
Man beweise:
In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$$xyz \geq (v + w)(w + u)(u + v)$$

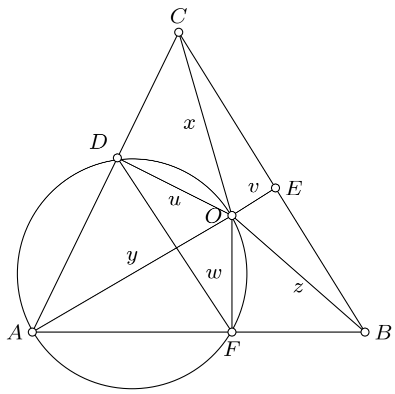
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei ABC ein Dreieck und O ein Punkt innerhalb des Dreiecks. Sei u das Lot von O auf die Seite AC und w das Lot von O auf die Seite AB. Die Lotfußpunkte seien D und F.

Das Viereck $AFOD$ ist dann offensichtlich ein Sehnenviereck und besitzt einen Umkreis. Die Strecke $y := OA$ ist offensichtlich Durchmesser, da die beiden Halbkreise Thaleskreise über der Strecke sind. Der Umkreis ist zudem Umkreis vom Dreieck AFD. Für den Radius des Umkreises gilt somit:

$$\frac{DF}{\sin A} = 2y \iff y \sin A = \frac{DF}{2}$$

Quadrieren liefert:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{DF^2}{4} \quad (*)$$



Im Dreieck FOD gilt nach Kosinussatz nun:

$$DF^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cos(\pi - A) = u^2 + w^2 + 2uw \cos A$$

Setzen wir in $*$ ein:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{u^2 + w^2 + 2uw \cos A}{4}$$
$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw \cos A$$

Nun ist $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ womit $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ folgt. Damit:

$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw \left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right) = (u + w)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (u - w)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \geq (u + w)^2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

Ziehen wir die Wurzel folgt somit:

$$2y \sin A \geq (u + w) \cos \frac{A}{2}$$

Mit $\frac{\sin x}{\cos \frac{x}{2}} = \sin \frac{x}{2}$ folgt dann:

$$2y \sin \frac{A}{2} \geq (u+w)$$

Analoges Vorgehen für die anderen beiden Sehnenvierecke liefert mit Multiplikation der drei Ungleichungen:

$$8xyz \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq (u+w)(v+w)(u+v)$$

mit Gleichheit für $u = v = w$.
Es ist sehr bekannt und einfach zu beweisen, dass $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, mit Gleichheit für $A = B = C$, womit dann die Behauptung folgt. Dieses kann man z. B. so zeigen:

Wir setzen $l = \frac{A}{2}$ und $m = \sin \frac{B}{2}$, dann folgt:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin l \sin m \cos(l+m)$$

mit $0 \leq l,m \leq \frac{\pi}{2}$

Damit folgt:

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin l(\sin(l+m) - \sin l) \leq \frac{1}{4}$$

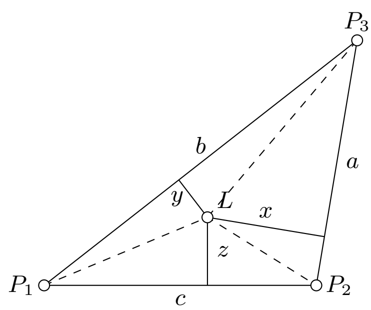
da das Maximum für $l + m = \frac{\pi}{2}$, $\sin l = \frac{1}{2}$ angenommen wird.

Aufgabe 311244:
Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sei Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.
a) Man beweise, dass eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1, P_2, P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.
b) Man beweise, dass dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt

$$F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

beträgt.

Lösung von MontyPythagoras:



In dieser Skizze blicken wir senkrecht auf die Grundfläche der Pyramide, und L sei der beliebige Lotfußpunkt der Pyramidenspitze auf die Dreiecksebene. x, y und z seien die Abstände des Lotfußpunktes zu den Seitenflächen des Dreiecks. Die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist dann

$$F = \frac{1}{2}(ax + by + cz) \tag{1}$$

Die Mantelfläche M der Pyramide setzt sich aus drei Dreiecksflächen zusammen. Die Grundseiten dieser drei Flächen sind die Seiten a, b und c, die Höhe dieser Dreiecke ergibt sich per Satz des Pythagoras aus den Abständen x, y und z mit der Höhe der Pyramide h:

$$M = \tfrac{1}{2}\left(a\sqrt{x^2+h^2} + b\sqrt{y^2+h^2} + c\sqrt{z^2+h^2}\right) \tag{2}$$

x, y und z hängen über die Gleichung (1) zusammen, so dass man eine Größe als Funktion der anderen beiden Größen betrachten kann:

$$z(x,y) = \frac{1}{c}(2F - ax - by) \tag{3}$$

Da M maximal sein soll, muss die partielle Ableitung von M nach x und y jeweils null sein:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Aus Gleichung (3) erhalten wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c}$$

Dies eingesetzt ergibt

$$a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\left(-\frac{a}{c}\right) = 0$$

Daraus folgt einfach:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \qquad (4)$$

$$x^2(z^2+h^2) = z^2(x^2+h^2)$$

$$x^2h^2 = z^2h^2$$

$$x = z$$

(Theoretisch wäre hier auch $x = -z$ möglich, wodurch aber Gleichung (4) verletzt würde). In gleicher Art und Weise erhält man mit der Ableitung nach y auch $y = z$, so dass letztlich $x = y = z$ gelten muss. Das ist genau am Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Fall, was dem Inkreismittelpunkt entspricht und Aufgabenteil a) beweist. Mit $x = y = z = r$ haben wir

$$F = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$

Das Volumen der Pyramide ist

$$V = \tfrac{1}{3}Fh$$

Die Mantelfläche der Pyramide ist

$$M = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\sqrt{r^2+h^2} = \frac{F}{r}\sqrt{r^2+\left(\frac{3V}{F}\right)^2}$$

$$M = \sqrt{F^2+\left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

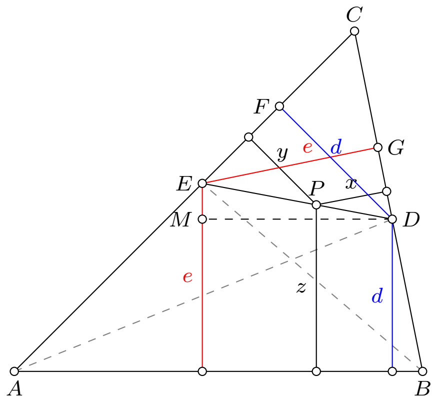
Die gesamte Oberfläche der Pyramide ist somit

$$O = F + M = F + \sqrt{F^2+\left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

Damit wäre auch Aufgabenteil b) gezeigt.

Aufgabe 331244:
Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.
Man beweise:
Unter dieser Voraussetzung ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B,C bzw. durch A,C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A,B.

Lösung von MontyPythagoras:



Gemäß Aufgabenstellung muss gelten:

$$z = x + y$$

Da es sich bei D und E um die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten handelt, sind die blau dargestellten Strecken d gleichlang, und ebenso die rot dargestellten Strecken mit der Bezeichnung e. Sei nun q das Verhältnis der Strecke EP zur Strecke ED, also

$$q = \frac{\overline{EP}}{\overline{ED}}$$

Offensichtlich gilt $0 \leq q \leq 1$. Wir betrachten zunächst das Dreieck EMD. Laut Strahlensatz gilt:

$$\frac{z-d}{e-d} = 1 - q$$

$$z = d + (e-d)(1-q) = dq + e(1-q) \tag{1}$$

Im Dreieck EDF gilt auch wegen des Strahlensatzes:

$$\frac{y}{d} = q$$

$$y = dq \tag{2}$$

Und letztlich im Dreieck EDG:

$$\frac{x}{e} = 1 - q$$

$$x = e(1-q) \tag{3}$$

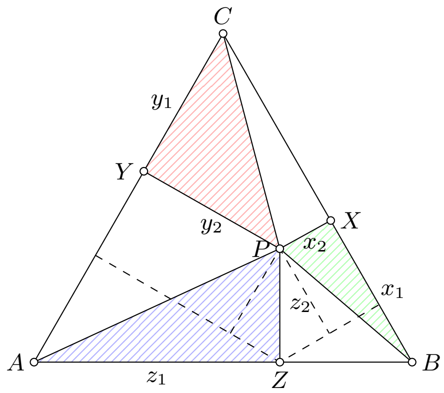
Addiert man nun (2) und (3), dann folgt:

$$x + y = dq + e(1-q) = z$$

q. e. d.

Aufgabe 341242:
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BXP, CYP, AZP nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Lösung von MontyPythagoras:



Die Summe der drei Flächeninhalte ist

$$F = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2$$

Bekanntermaßen sind $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mithilfe der gestrichelten Hilflinien erkennt man folgende Zusammenhänge:

$$a - y_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(a - z_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \frac{1}{2}z_2$$

Das setzen wir alles in die Flächenformel ein:

$$2F = \left(\frac{1}{2}(a - z_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \frac{1}{2}z_2\right) + \left(a - \frac{1}{2}z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2\right) + z_1z_2$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - z_1)^2 + \frac{1}{2}(a - z_1)z_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}az_1 - \frac{1}{2}az_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}z_1^2 - \frac{1}{2}z_1z_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + z_1z_2$$

$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)z_1 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\right)z_2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)z_1z_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_2^2$$

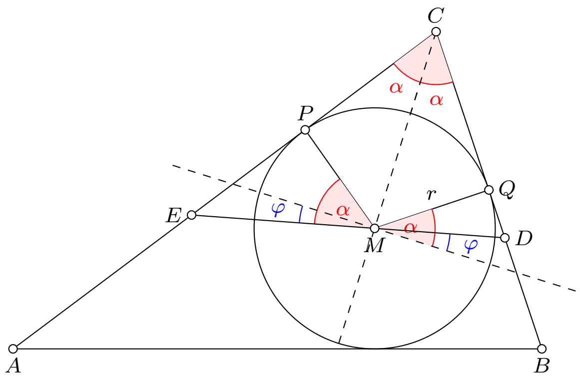
$$2F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$F = \frac{1}{2}F_{ABC}$$

Die Summe der drei Teildreiecke ist also immer die Hälfte des Flächeninhalts des Gesamtdreiecks ABC.

Aufgabe 341244:
Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E werde vorausgesetzt:
D liegt auf der Strecke BC und ist von C verschieden, E liegt auf der Strecke AC und ist von C verschieden.
Die Strecke DE geht durch den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC. Der Inkreisradius des Dreiecks ABC sei r, der Flächeninhalt des Dreiecks CDE sei F.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Fläche des Dreiecks CDE setzt sich zusammen aus den vier rechtwinkligen Teildreiecken MDQ, MQC, MCP und MPE. Der Inkreisradius r ist eine Kathete jedes dieser vier Teildreiecke. Der Flächeninhalt des erst- und letztgenannten Dreiecks sind abhängig von dem Winkel φ, der die Lage der Strecke DE festlegt und der der Winkel zwischen dieser Strecke und der Senkrechten auf die Winkelhalbierende MC ist.



Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte des Produktes aus den beiden Katheten. Als Gesamtfläche ergibt sich:

$$F(\varphi) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} r \cdot \frac{r}{\tan\alpha}\right) + \tfrac{1}{2} r \cdot r \tan(\alpha - \varphi) + \tfrac{1}{2} r \cdot r \tan(\alpha + \varphi)$$

$$F(\varphi) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + \tfrac{1}{2} r^2 \tan(\alpha - \varphi) + \tfrac{1}{2} r^2 \tan(\alpha + \varphi)$$

Man erkennt, dass $F(\varphi)$ eine gerade Funktion ist, da $F(-\varphi) = F(\varphi)$ ist. Gerade, stetige und differenzierbare Funktionen haben immer ein lokales Extremum bei null. In diesem Fall ist es klarerweise ein Minimum, wie man sich schon aus anschaulichen geometrischen Gründen leicht klar machen kann. Die minimale Fläche ist daher

$$F_{min} = F(0) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + r^2 \tan\alpha = r^2 \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right)$$

$$F_{min} = r^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$F_{min} = \frac{2r^2}{\sin 2\alpha} \geq 2r^2 \quad \forall \quad 0 < 2\alpha < \pi$$

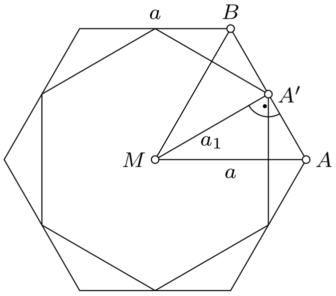
q. e. d.

II.II Vierecke; $n > 3$-Ecke

I Runde 1

Aufgabe V01112:
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 mm liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

Lösung von Steffen Polster:



Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = a_0$ hat einen Flächeninhalt von $F = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$. Damit hat erste sechsseitige Prisma, mit einer Seitenlänge von $a = 10$ cm und einer Höhe von $h = 0{,}1$ mm, das Volumen

$$V_0 = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 \cdot h = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

Das erste aufgeklebte Sechseck hat eine Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 10$ cm (Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a). Das Volumen des Prismas wird

$$V_1 = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4}V_0$$

Jedes weitere aufgesetzte Prisma hat $\frac{3}{4}$ des Volumens des vorhergehenden Prismas. Für n auf das unterste Prisma aufgesetzte Prismen ergibt sich als Gesamtvolumen mittels Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge

$$V = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i V_0 = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3 \right\} = 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ cm}^3 \tag{1}$$

a) Das oberste Prisma soll noch mindestens 2 mm Seitenlänge haben. Für das n-te Prisma wird die Seitenlänge

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10\text{ cm}$$

und damit

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10\text{ cm} > 0{,}2\text{ cm}$$
$$n \lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) > \lg 0{,}02 \qquad n < 27{,}1968...$$

Auf das Grundsechseck können weitere 27 Sechsecke aufgesetzt werden. Der Körper wird damit $28\dot{0}{,}1$ mm $= 2{,}8$ cm hoch.

b) Einsetzen von $n = 27$ in (1) ergibt ein Volumen des Körpers von $\approx 10{,}389$ cm^3.

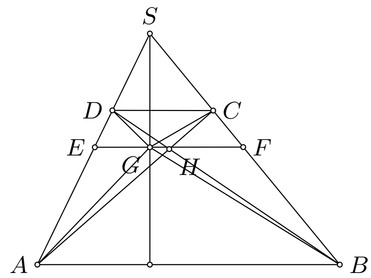
c) Für den Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich bei (1)

$$\lim_{n\to\infty} 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 6\sqrt{3}$$

Wäre dem Ausschneiden keine Grenze gesetzt, so wäre der Sechseckturm unendlich hoch und hätte ein Volumen von $V = 6\sqrt{3} \approx 10{,}3923$ cm^3.

Aufgabe 031115:
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.
Beweisen Sie, dass die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Da $g_{SG} \neq g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \neq g_{AB}$ und $g_{SG} \neq g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$. Aus den Strahlensätzen folgt dann:

$$\frac{KG}{GL} = \frac{CE}{EB} = \frac{CH}{HA} = \frac{CD}{AD} \quad \text{und} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SB} = \frac{KC}{LB} = \frac{CD}{AB}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{KG}{GL} = \frac{KC}{LB} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{KG}{KC} = \frac{GL}{LB}$$

Da außerdem die Winkel $\angle CKG$ und $\angle GLB$ rechte sind, sind alle Dreiecke KGC und GLB ähnlich. Daher gilt: $\angle BGL \cong \angle KGC$.
Da weiter die Winkel $\angle SGE$ und $\angle EGL$ rechte sind, folgt $\angle BGE \cong \angle EGC$.

Aufgabe 041212:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

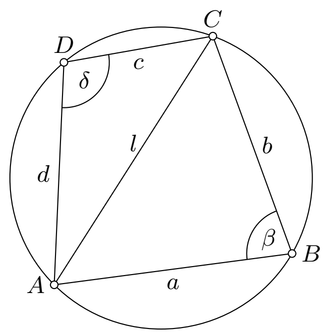
Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ gesetzt wird.

Lösung von Rainer Müller:

Vorbemerkung: mit „Sehnenviereck“ muss in der Aufgabenstellung „nicht-überschlagenes Sehnenviereck“ gemeint sein, da die Aussage sonst nicht korrekt ist.



F ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CDA, die gleich $\frac{1}{2}ab\sin\beta$ bzw. $\frac{1}{2}cd\sin\delta$ sind (Bezeichnungen wie in der Abbildung). Da $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\beta + \delta = 180°$, so dass $\sin\beta = \sin\delta$ und

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta. \qquad (1)$$

l sei die Länge der Diagonalen AC. Nach dem Kosinussatz für ABC gilt $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$, und nach dem gleichen Satz für CDA gilt $l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$. Daraus können wir l^2 eliminieren, und wegen $\beta + \delta = 180°$ gilt $\cos\delta = -\cos\beta$, so dass

$$(ab + cd)\cos\beta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2). \tag{2}$$

Indem wir (1) quadrieren, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ berücksichtigen und (2) einsetzen, erhalten wir

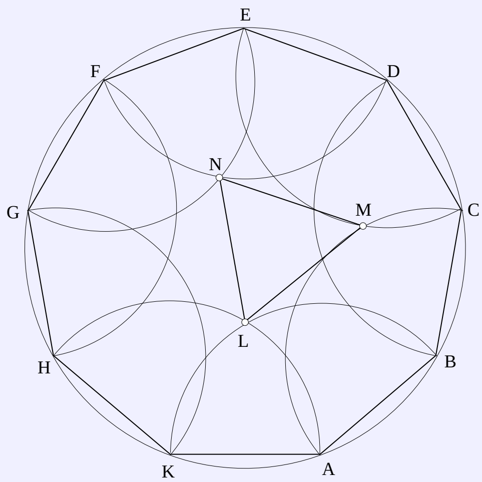
$$\begin{aligned}
F^2 &= \frac{1}{4}\Big((ab+cd)^2 - (ab+cd)^2\cos^2\beta\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\cdot\Big(2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2\Big)\Big(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(-(a-b)+(c+d)\Big)\Big((a-b)+(c+d)\Big)\cdot\Big((a+b)-(c-d)\Big)\Big((a+b)+(c-d)\Big) \\
&= \frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2} \\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).
\end{aligned}$$

Wurzel ziehen und die Aufgabe ist gelöst.

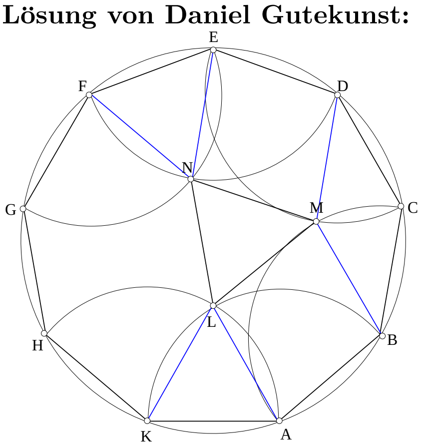
Aufgabe 071213:

Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit seinem Umkreis.
Um die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H und K dieses Neunecks sind in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise Kreisbögen gezeichnet, deren Radien ebenso lang wie die Neuneckseiten sind.

Untersuchen Sie, ob die in der Figur mit L, M und N bezeichneten Schnittpunkte dieser Kreisbögen Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind!



Lösung von Daniel Gutekunst:



Sei $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots$ die Kantenlänge des regelmäßigen Neunecks, und sei S_{XY} der Schnittpunkt der Kreisbogen um X und Y mit dem Radius a. Ferner beträgt jeder Innenwinkel $\frac{7}{9}\cdot 180° = 140°$.

Es ist $M = S_{BD}$, also $a = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{BC} = \overline{DC}$. Damit ist $BCDM$ ein Rhombus und $\angle BMD = \angle BCD = 140°$.

Es ist $N = S_{FE}$ und $L = S_{KA}$, woraus die gleichseitigen Dreiecke $\triangle NFE$ und $\triangle LKA$ entstehen. Insbesondere ist $a = \overline{AL} = \overline{EN}$.

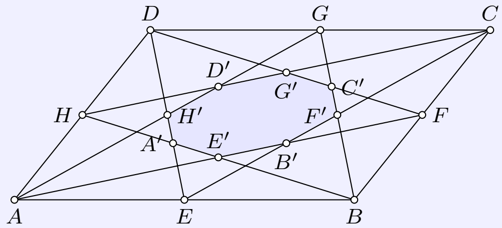
Im Rhombus gilt $\angle MBC = \angle MDC = (360° - 2\cdot 140°)/2 = 40°$. Damit ist $\angle MDE = \angle MBA = 100°$. Außerdem ist $\angle LAB = \angle NED = 140° - 60° = 80°$.

Die Strecken $\overline{AL}$ und $\overline{BM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch A und B haben. Die Strecken $\overline{EN}$ und $\overline{DM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch E und D haben.

Es folgt, dass $EDMN$ und $ABML$ kongruente Rhomben sind, insbesondere ist $\overline{ML} = \overline{MN}$. Ebenfalls folgt $\angle LMB = \angle NMD = \angle LAB = \angle NED = 80°$. Schließlich ist dann $\angle LMN = 360° - \angle LMB - \angle NMD - \angle BCD = 60°$.

Daraus folgt, dass $\triangle LMN$ gleichseitig ist (was zu zeigen war).

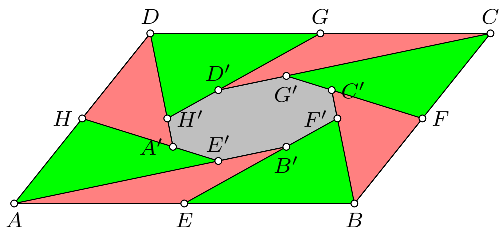
Aufgabe 141213:



In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA.
Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A',
der von HB mit AF sei E',
der von AF mit EC sei B',
der von EC mit GB sei F',
der von GB mit FD sei C',
der von FD mit CH sei G',
der von CH mit GA sei D', und
der von GA mit DE sei H' (siehe Abbildung).

Man beweise, dass der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei definiert: $a := \overline{AB} = \overline{CD}$, $b := \overline{BC} = \overline{AD}$, h_a als Höhe des Parallelogrammes bzgl. a und analog h_b bzgl. b. Dann gilt für den Flächeninhalt des Parallelogrammes: $A_{ABCD} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Das Parallelogramm lässt sich in die grünen, roten und grauen Teilfiguren gemäß Zeichnung zerlegen. Der gesuchte Flächeninhalt der grauen Figur ist somit die Differenz zwischen der Parallelogrammfläche und der Summe aller roten und grünen Dreiecksflächen.

Weiterhin gilt: $\triangle EBF' \equiv \triangle GCF'$ ($\angle EF'B = \angle GF'C$ als Wechselwinkel, $\angle EBF' = \angle F'GC$ als Scheitelwinkel an geschnittenen Parallelen, $\overline{EB} = \overline{CG} = a/2$). Die Höhen in den beiden Dreiecken sind also gleich groß und also die Höhen bzgl. $\overline{EB}$ bzw. $\overline{CG}$ auch halb so groß wie h_a. Damit ergibt sich: $A_{EBF'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{8} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$. Analog kann nachgewiesen werden, dass alle grünen Dreiecksflächen ein Achtel der Parallelogrammfläche einnehmen.

Im Dreieck ABC gilt: EB' liegt auf der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ und AB' auf der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$. Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck selbige im Verhältnis 1:2 teilt, gilt, dass der Abstand von B' zu $\overline{AB}$ ein Drittel des Abstandes von C zu $\overline{AB}$ beträgt. Damit ist die Höhe im Dreieck AEB' bzgl. AE ein Drittel von h_a. Für den Flächeninhalt in diesem Dreieck gilt folglich: $A_{AEB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{3} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD}$. Analoges gilt für die restlichen roten Dreiecke.

Zusammenfassend erhält man für den gesuchten Flächeninhalt:

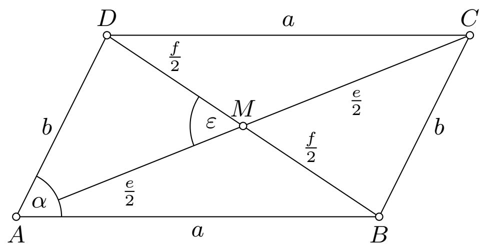
$$\begin{aligned} A &= A_{ABCD} - 4 \cdot A_{rot} - 4 \cdot A_{gruen} \\ &= A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD} \\ &= \frac{24 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{4}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABCD} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 221212:
Man beweise:

Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, mit $AB = CD = a$, $BC = DA = b$, $AC = e$, $BD = f$. Ferner sei M der Schnittpunkt von AC und BD, und es sei $\angle BMC = \varepsilon$.

Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke BMC und AMB folgt

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varepsilon \\ a^2 &= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos(180^\circ - \varepsilon) = -\cos\varepsilon$ durch Subtraktion

$$a^2 - b^2 = ef \cos\varepsilon$$

Wegen $\varepsilon > 0^\circ$ (und $\varepsilon < 360^\circ$, sogar $\varepsilon < 180^\circ$), also $\cos\varepsilon < 1$, folgt hieraus die behauptete Ungleichung.

Aufgabe 231213:
Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

(1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.

(2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.

(3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.

(4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90°.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn ein Viereck zu der gesuchten Menge gehört, so folgt:

Da (3) die Verneinung von (4) ist, ist genau eine der Aussagen (3), (4) wahr. Folglich ist auch genau eine der Aussagen (1), (2) wahr. Wäre (2) wahr, so wäre $ABCD$ ein Rhombus, im Widerspruch dazu, dass (1) falsch sein müsste. Also ist (2) falsch und (1) wahr.

Das besagt: $ABCD$ ist ein Trapez, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten.

II Wenn ein Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten, so folgt: (1) ist wahr, (2) ist falsch.

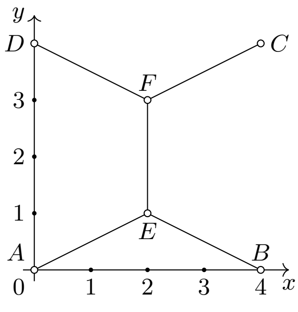
Ferner ist genau eine der Aussagen (3),(4) wahr, da (3) die Verneinung von (4) ist. Somit gehört $ABCD$ zu der gesuchten Menge.

Die gesuchte Menge ist folglich die Menge aller Trapeze, die kein Rhombus sind.

Aufgabe 311211:
Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ein solches Straßennetz ist möglich; man wähle z. B. in demjenigen Koordinatensystem, in dem die vier Dörfer A, B, C, D die Koordinaten $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 4)$, $(0; 4)$ haben, die Punkte E, F mit den Koordinaten $(2; 1)$, $(2; 3)$ und dann das Straßennetz aus den Strecken AE, BE, EF, EC, FD (siehe Abbildung).

Seine Gesamtlänge, gemessen in km, beträgt nämlich $2 + 4\sqrt{5}$, ist also wegen $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ kleiner als 11 km.

Aufgabe 311213:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, dass DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen

a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ auf AC liegt,

b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates $DPQR$

c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,

d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fällt man das Lot PM von P auf DQ und verlängert es bis zum Schnitt R' mit AC, so wird $\angle PMA = \angle R'MA = 90°$ sowie (für $\alpha = \angle BAC$), $\angle PAM = \angle R'AM = \frac{\alpha}{2}$; und mit $AM = AM$ folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) $\triangle AMP = \triangle AMR'$, also $MP = MR'$.

Für den vierten Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ gilt aber ebenfalls, dass er auf der Verlängerung des Lotes PM im Abstand $MR = MP$ von M liegt (da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren).

Also ist $R = R'$; damit (und weil R' nach seiner Definition auf AC liegt) ist bewiesen, dass R auf AC liegt.

b) Wegen der Winkelsumme in den Dreiecken APM und ADC erhält man $\angle APM = \angle ADC$ $(= 90° - \frac{\alpha}{2})$; hieraus und aus $\angle DPM = \angle PDM$ $(= 45°)$, folgt $\angle DPB = \angle PDB'$ $(= 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) - 45°)$, also nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $BD = BP$.

d) Somit ist $BPMD$ ein Drachenviereck, die Winkelhalbierende BE von $\angle ABC$ geht durch M und ist senkrecht auf PD, also parallel zu DR; daher gilt

$$\triangle DRC \sim \triangle BEC \tag{1}$$

Nach dem Satz, dass die Winkelhalbierenden die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt

$$DC = \frac{ab}{b+c} \quad ; \quad DB = \frac{ac}{b+c} \quad \text{und} \tag{2}$$

$$EC = \frac{ab}{b+c} \quad ; \quad EA = \frac{bc}{b+c} \tag{3}$$

Aus (3) folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}} = \frac{a}{a+c}\sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2} = \frac{a}{a+c}\sqrt{2ac + 2c^2} = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt $DR : DC = BE : BC = \sqrt{\frac{2c}{a+c}}$, hiernach und nach (2) ist

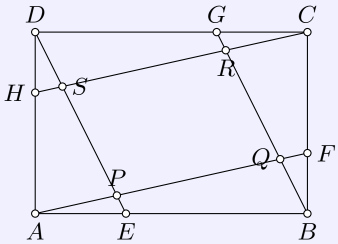
$$DR = \frac{ab}{b+c}\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{5}$$

Für $a = 49$ mm $= 7 \cdot 7$ mm, $b = 168$ mm $= 7 \cdot 24$ mm erhält man $c = 7 \cdot \sqrt{z^2 + 24^2}$ mm $= 7 \cdot 25$ mm und damit

$$DR = \frac{7 \cdot 7 \cdot 24}{24 + 25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{7 + 25}} \text{ mm } = 24 \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \text{ mm } = 30 \text{ mm}$$

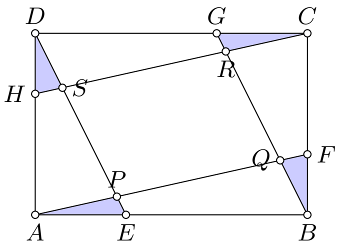
II Runde 2

Aufgabe 021123:



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H.
Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abbildung).
a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?
b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Lösung von Carsten Balleier:
a) Offensichtlich gelten wegen $AB = CD$, $BC = DA$, $AE = CG$ und $BF = DH$ folgende Kongruenzen: $\triangle ABF \cong \triangle CDH$ bzw. $\triangle BCG \cong \triangle DAE$ (Kongruenzsatz SWS), also $AF = CH$.
Darüber hinaus gilt auch $\triangle AEP \cong \triangle CGR$ und $\triangle BFQ \cong \triangle DHS$ (Kongruenzsatz WSW), somit $AP = CR$, $PE = RG$, $BQ = DS$ und $QF = SH$. Daraus folgt $PQ = RS$ und $QR = SP$. Das Viereck hat mithin gegenüberliegende Seiten, die gleich lang sind, ist damit ein Parallelogramm.



b) Zuerst ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen. Sei A_0 die Fläche des Rechtecks A_{BCD} und A_{PQRS} die Fläche des Parallelogramms $PQRS$ – aus diesen beiden suchen wir das Verhältnis A_{PQRS}/A_0. Weiterhin seien die Flächeninhalte der Dreiecke AEP, ABQ, BFQ und BCR mit A_1, A_2, A_3 und A_4 bezeichnet. Aus Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $A_2 = 9A_1$ und $A_4 = 9A_3$. Außerdem hat man

$$A_0 = AB \cdot BC = 3 \cdot AB \cdot BF = 6A_{\triangle ABF} = 6(A_2 + A_3)$$

und analog $A_0 = 6(A_4 + A_1)$. Daraus bekommen wir die Gleichung

$$A_2 + \frac{1}{9}A_4 = A_4 + \frac{1}{9}A_2$$

aus der $A_2 = A_4$ und $A_1 = A_3$ folgen. Einsetzen führt auf $\frac{1}{6}A_0 = A_2 + \frac{1}{9}A_2$, es folgt $A_2 = \frac{3}{20}A_0$. Jetzt sieht man

$$A_{PQRS} = A_0 - 4A_2 = A_0 - \frac{12}{20}A_0 = \frac{2}{5}A_0$$

Aufgabe 061222:
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS) gegeben. Es ist zu zeigen, dass man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, dass ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Lösung von cyrix:
Es wird ein reiner Existenzbeweis gegeben, dass es solche Geraden gibt, keine explizite Konstruktion dieser.

Es sei $0 \leq \alpha < 180°$ ein Winkel. Wir betrachten nun diejenige Gerade p, die mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt (bzw. im Fall $\alpha = 0$ parallel zu dieser ist) und durch P verläuft, sowie die dazu parallele Gerade q durch Q. Dann variiert in Abhängigkeit von α der Abstand $d_p(\alpha)$ dieser beiden Parallelen zwischen 0 (falls $PQ = p = q$ gilt) und $|PQ| > 0$ (falls p und q senkrecht auf PQ stehen).

Zu p werden nun die Orthogonalen r durch R und s durch S betrachtet. Wieder gilt, dass der Abstand $d_r(\alpha)$ dieser beiden Parallelen r und s in Abhängigkeit von α zwischen 0 (falls $RS = r = s$ gilt) und $|RS| > 0$ (falls r und s senkrecht auf RS stehen) variiert.

Ändert man stetig den Winkel α, so verändern sich auch stetig die Abstände $d_p(\alpha)$ von p und q sowie $d_r(\alpha)$ von r und s. Diese Abstände können nicht gleichzeitig Null werden, da in diesem Fall wegen $p \perp r$ auch $PQ = p$ und $RS = r$ senkrecht aufeinander stünden, was nach Aufgabenstellung nicht der Fall ist.

Sei o. B. d. A. der Winkel α_1, an dem $d_p(\alpha_1) = 0$ ist, kleiner als der Winkel α_2, für den der Abstand $d_r(\alpha_2) = 0$ wird. Dann gilt für die Differenz $d_p(\alpha) - d_r(\alpha)$ für $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, dass sie an der linken Intervallgrenze negativ, an der rechten positiv und dazwischen stetig ist, es also eine Stelle α_0 geben muss, an welcher diese Differenz Null wird und die beiden Paare von Parallelen den gleichen Abstand zueinander haben. Da die nicht-parallelen Geraden nach Konstruktion orthogonal zueinander sind, bilden die vier Schnittpunkte dieser Geraden die Eckpunkte eines Quadrats.

Aufgabe 081226:
Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a > b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

Lösung von cyrix:
Es sei $|AB| = a$, $|CD| = b$, $AB \parallel CD$ und S der Schnittpunkt von AD sowie BC. Weiterhin sei F_T der Flächeninhalt des Trapezes, F_{SAB} der des Dreiecks $\triangle SAB$ und F_{SCD} der des Dreiecks $\triangle SCD$. Dann gilt $F_{SAB} = F_T + F_{SCD}$.

Nach dem Strahlensatz gilt $F_{SCD} = F_{SAB} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$, also $F_T = F_{SAB} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = F_{SAB} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Es ist $F_T = d \cdot \frac{a+b}{2}$, da $\frac{a+b}{2}$ die Länge der Mittellinie des Trapezes und d der Abstand der Parallelen ist. Also ist

$$\frac{d}{2} = F_{SAB} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 \cdot (a+b)} = F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2}$$

Andererseits ist $F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{d}{2}$. Dies ergibt sich daraus, dass der Inkreis des Trapezes auch gleichzeitig einer des Dreiecks $\triangle SAB$ ist. Zeichnet man die Verbindungen des Inkreismittelpunkts zu den Eckpunkten des Dreiecks und die Berührungsradien auf die drei Seiten ein, wird das Dreieck $\triangle SAB$ in insgesamt sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren eine Katheten jeweils ein Radius des Inkreises sind, und deren andere Katheten genau den Umfang des Dreiecks zerlegen.

Setzt man hierin den zuvor erhaltenen Term für $\frac{d}{2}$ ein und kürzt durch F_{SAB}, erhält man

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{a-b}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2a^2}{a-b} = a + |AS| + |BS|$$

also

$$|AS| + |BS| = \frac{2a^2}{a-b} - a = \frac{a^2+ab}{a-b} = a \cdot \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$(|AS| + |BS|)^2 = |AS|^2 + |BS|^2 + 2 \cdot |AS| \cdot |BS| = a^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle SAB$ gilt $a^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos\alpha$. Die Differenz der letzten beiden Identitäten liefert

$$2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot (1 + \cos\alpha) = a^2 \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1 \right) = a^2 \cdot \frac{4ab}{(a-b)^2}$$

also

$$F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Damit erhält man

$$d = 2F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, lässt sich das Ergebnis auch schreiben als

$$d = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Aufgabe 101224:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und δ die Größe des Winkels $\angle BSA$.
Beweisen Sie, dass dann $ac - bd = ef \cdot \cos\delta$ gilt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei $e_1 = AS, e_2 = CS, f_1 = BS, f_2 = DS$. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned}
2e_1 f_1 \cos\delta &= e_1^2 + f_1^2 - a^2 \\
2e_2 f_2 \cos\delta &= e_2^2 + f_2^2 - c^2 \\
-2e_2 f_1 \cos\delta = 2e_2 f_1 \cos(180° - \delta) &= e_2^2 + f_1^2 - b^2 \\
-2e_1 f_2 \cos\delta = 2e_1 f_2 \cos(180° - \delta) &= e_1^2 + f_2^2 - d^2 \ .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$2ef \cos\delta = 2(e_1 + e_2)(f_1 + f_2)\cos\delta$$
$$= (e_1^2 + f_1^2 - a^2) + (e_2^2 + f_2^2 - c^2) - (e_2^2 + f_1^2 - b^2) - (e_1^2 + f_2^2 - d^2)$$

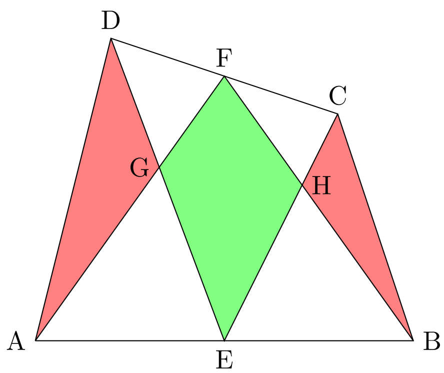
$$\begin{aligned}
&= -a^2 - c^2 + b^2 + d^2 \\
&= 2ac - 2bd - (a+c)^2 + (b+d)^2 \\
&= 2ac - 2bd + (b+d-a-c)(a+c+b+d) \ .
\end{aligned}$$

Da in einem Tangentenviereck $a+c = b+d$ gilt, ist die letze Zeile gleich $2(ac-bd)$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 131223:
In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Mit Beträgen bezeichnen wir im folgenden den Flächeninhalt eines Vielecks. Dann können wir die Behauptung (durch ergänzen der vier weißen Teildreiecke) äquivalent umformen:

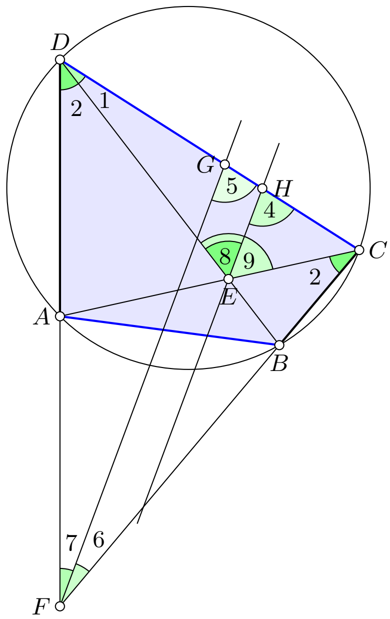
$$\begin{aligned} & |EHFG| = |AGD| + |BHC| \\ \iff & 2|EHFG| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\ & \quad = 2|AGD| + 2|BHC| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\ \iff & |ABF| + |CDE| = (|AED| + |EBC|) + (|CFB| + |FDA|) \ . \end{aligned}$$



Da F der Mittelpunkt der Strecke CD ist, ist die Höhe des Dreiecks ABF gerade das arithmetische Mittel der Höhen der Dreiecke AED und EBC. Daraus folgt $|ABF| = |AED| + |EBC|$ und analog $|CDE| = |CFB| + |FDA|$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 141223:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so dass sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden.
Die Gerade g halbiere den Winkel $\angle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\angle AFB$.
Man beweise, dass dann $g \parallel h$ ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Nach Sehnensatz zerlegen die Diagonalen das Viereck in 2 Paare ähnlicher Dreiecke, womit die Gleichheit der Winkel 2 folgt. Nun ist:

$$\angle 6 = \frac{1}{2}\angle 7 = \frac{1}{2}\left(180° - \angle D - \angle C\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 5 = \angle D + \angle 6 = \angle D + 90° - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Wir weisen nun nach, dass $\angle 5 = \angle 4$. Es ist:

$$\angle 8 = \frac{1}{2}\angle 9 = \frac{1}{2}\left(180° - \angle 1 - (\angle C - \angle 2)\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 4 = \angle 8 + \angle 1 = 90° - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C + \angle 1 = 90° + \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C =$$
$$= 90° + \frac{1}{2}\left(\angle 1 + \angle 2\right) - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Aufgabe 161221:
Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d.
Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.
Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

Lösung von Steffen Polster:
Folgende Beziehungen gelten dann

$$A = a \cdot b \quad (1) \qquad ; \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2) \qquad ; \qquad a = \frac{b+d}{2} \quad (3)$$

Umstellen von (1) und (2) und Einsetzen in (3) ergibt

$$a = \frac{A + \sqrt{a^4 + f^2}}{2a}$$
$$(2a^2 - A)^2 = a^4 + A^2$$
$$a^2(3a^2 - 4A) = 0$$

mit den Lösungen $a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{A}$ und $a_2 = 0$, wobei a_2 entfällt.

Rückwärtseinsetzen in (1), (2) ergibt $b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{A}$ und $d = \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{A}$. Ein Probe in (3) bestätigt die Korrektheit der Lösung.

Aufgabe 191222:
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\angle DAB$ mit α bezeichnet.
Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$AB \parallel CD \qquad (1)$$
$$|AB| > |CD| \qquad (2)$$
$$|BC| = |CD| = |DA| \qquad (3)$$
$$AC \perp BC \qquad (4)$$

Man beweise, dass die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und dass die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

Lösung von cyrix:
Nach (1) handelt es sich bei $ABCD$ um ein Trapez, nach (3) wegen $|BC| = |DA|$ (und $|AB| \neq |CD|$) sogar um ein symmetrisches. Also ist $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle CAB = 90° - \angle CAB$.
Weiterhin sind im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ACD$ die beiden Basiswinkel $\angle DAC$ und $\angle ACD$ gleich groß sowie auch die Wechselwinkel $\angle ACD$ und CAB an den geschnittenen Parallelen AB und CD.
Damit ist $2\angle CAB = \angle CAB + \angle DAC = \alpha = 90° - \angle CAB$, also $\angle CAB = 30°$ und $\alpha = 60°$. Damit ist α eindeutig bestimmt.

Tatsächlich ist bei einem symmetrischen Trapez $ABCD$ mit $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 60°$ und $\angle BCD = \angle CDA = 120°$ die Diagonale AC die Winkelhalbierende des Winkels $\angle DAB$, sodass sie senkrecht auf der Seite BC steht und die Seiten DA, CD und BC gleich lang sind.
Weiterhin ist AB die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$, also insbesondere länger als die Kathete BC, sodass auch $|AB| > |CD|$ folgt.

Abschließend ist nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ das Verhältnis $|BC| : |AB| = \sin\angle CAB = \sin 30° = 1 : 2$, also auch $|CD| : |AB| = 1 : 2$. Ist h der Abstand der beiden Parallelen AB und CD, so berechnet sich F_1 zu $F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$ und F_2 zu $F_2 = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h$, sodass $F_1 : F_2 = |AB| : |CD| = 2 : 1$ folgt.

Aufgabe 211223:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F.
Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Falls das Viereck konkav ist, können wird durch Spiegelung der konkaven Ecke ein zweite Viereck konstruieren welche das erste enthält und dieselben Seitenlängen besitzt. Daher reicht es aus, die Gleichung für konvexe Vierecke zu zeigen.

Seien β,δ die Winkel in B,D. Der Flächeninhalt kann getrennt in den Dreiecken ABC und ACD bestimmt werden:

$$4F = 2ab\sin\beta + 2cd\sin\delta \leq 2ab + 2cd = a^2 + b^2 - (a-b)^2 + c^2 + d^2 - (c-d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Die Gleichheit gilt nur für 1) $\beta = \delta = 90°$ und 2) $a = b$,$c = d$. Analog erhalten wir mit

$$4F = 2ad\sin\alpha + 2bc\sin\gamma$$

aus der Gleichheit ebenfalls 1') $\alpha = \gamma = 90°$ und 2') $a = d$,$b = c$. Also gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 231223:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = F$$

Man beweise, dass dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2) \qquad (1)$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2) \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist β die Größe des Winkels $\angle ABC$, dann ist wegen $AB \parallel CD$ die Größe des Winkels $\angle BCD$ gleich $180° - \beta$.
Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke ABC und BCD, gilt dann

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad \text{und} \qquad (3)$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \beta) \qquad \text{also}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt durch Multiplizieren mit c bzw. a und anschließender Addition

$$af^2 + ce^2 = a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 \qquad \text{also}$$
$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2)$$

Ist α die Größe des Winkels $\angle DAB$, so ergibt sich analog

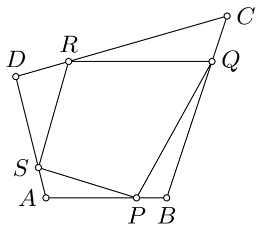
$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \qquad \text{und}$$
$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

woraus folgt

$$ae^2 + cf^2 = ac^2 + ad^2 + ca^2 + cd^2 \qquad \text{also}$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2)$$

Aufgabe 271222:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl.
Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k : 1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist $XY...Z$ ein Polygon, so bezeichne $I(XY...Z)$ seinen Flächeninhalt. Aus der Voraussetzung $AP : BP = k : 1$ folgt

$$AP = \frac{k}{k+1} \cdot AB \qquad , \qquad PB = \frac{1}{k+1} \cdot AB$$

Da die Dreiecke PBQ und ABQ die gleiche zur Seite PB bzw. AB senkrechte Höhe haben, folgt

$$I(ABQ) = \frac{k}{k+1} \cdot I(ABC) \qquad \text{und damit} \qquad I(PBQ) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(ABC)$$

Entsprechend folgt

$$I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(CDA) \qquad \text{und damit}$$

$$I(PBQ) + I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$

$$I(SAP) + I(QCR) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$

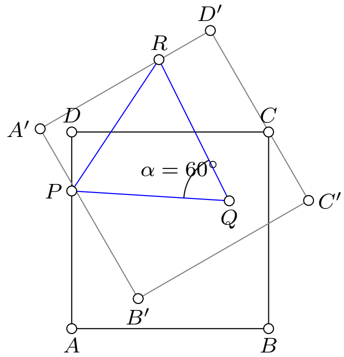
und damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} I(PQRS) &= I(ABCD) - I(SAP) - I(PBQ) - I(QCR) - I(RDS) \\ &= I(ABCD) \cdot \left(1 - \frac{2k}{(k+1)^2}\right) \\ \frac{I(PQRS)}{I(ABCD)} &= \frac{k^2+1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

III Runde 3

Aufgabe V11234:
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?

Lösung von MontyPythagoras:



Da PQR ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\overline{QR} = \overline{QP}$. R entsteht also aus P durch Drehung des Punktes P um Q um $60°$ oder $-60°$ (bildlich dargestellt ist die Drehung um $-60°$). Dadurch werden auch alle Punkte des Quadrates und das Quadrat als ganzes um $60°$ um Q gedreht. Die Kurve, die R beschreibt, ist daher das um $\pm 60°$ um den Punkt Q gedrehte Quadrat.

Aufgabe 021235:
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M.
Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate $AMDE$ und $MBGH$! Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

Lösung von Manfred Worel:
Die Strecke AB wird so in ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem gelegt, so dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $M(m,0)$, mit $0 \leq m \leq a$.
Nach den Bedingungen der Aufgabenstellung haben die Punkte D, E, G und H dann die folgenden Koordinaten: $D(m,m)$, $E(0,m)$, $G(a, a-m)$, $H(m, a-m)$.
Die Mittelpunkte R des Quadrates $MADE$ und S des Quadrates $MBGH$ haben somit die Koordinaten:

$$R\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \quad ; \quad S\left(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2}\right)$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes N der Strecke RS im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem lauten demnach

$$N\left(\frac{a+2m}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

Da der Punkt M auf der Strecke AB beliebig gewählt werden kann, d. h. es gilt $0 \leq m \leq a$, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS eine zu AB parallele Strecke KL der Länge $\frac{a}{2}$, wobei deren Endpunkte K und L folgende Koordinaten haben:

$$K\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) \quad ; \quad L\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

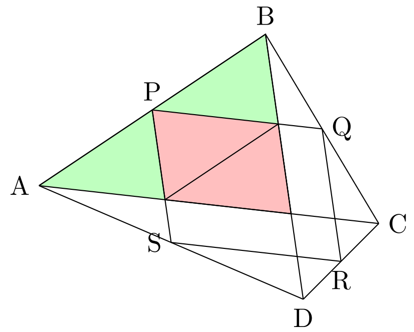
Aufgabe 051235:
Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d. Man beweise, dass stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Vorbemerkung:
Falls $ABCD$ konkav ist, so erhalten wir durch „Ausklappen„ der konkaven Ecke ein konvexes Viereck, für die die Ungleichung ebenfalls gelten soll. Daher reicht es im folgenden nur ein konvexes Viereck zu betrachten. Gleichheit kann nur im nicht konkaven Fall auftreten.

Bestimmung des Flächeninhalts:
Seien P,Q,R,S die Seitenmittelpunkte der Seiten AB,BC,CD,DA, $e = |PR|$, $f = |QS|$ die Diagonalen des Vierecks $PQRS$.
Dann lässt sich über Strahlensätze $PQ||AC||RS$ und $QR||BD||SP$ zeigen, d. h. $PQRS$ ist ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}ef\sin(\varepsilon)$, wobei ε den Winkel zwischen den Diagonalen bezeichnet.
Des Weiteren erhalten wir über Strahlensätze, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms genau halb so groß wie S ist, als $S = ef\sin(\varepsilon)$ (Konvexität!). Insbesondere gilt $S = ef$ genau dann, wenn e und f orthogonal sind.



Die Ungleichung:
Als Vektoren betrachtet gilt: $\vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, insbesondere haben wir nach Anwendung der Dreiecksungleichung $e \leq \frac{a+c}{2}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn a und c parallel sind.
Alles zusammen:

$$S = ef\sin(\varepsilon) \leq ef \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Nach den obigen Bemerkungen gilt $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ genau dann wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks parallel und orthogonal zu den benachbarten Seiten sind, d. h. wenn $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 061231:
In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n > 2$) so verteilt, dass es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Lösung von cyrix:
Die größtmögliche Anzahl ist 5.
Um dies zu zeigen, nehmen wir zuerst an, es gäbe 6 Punkte P_1 bis P_6, deren nächstgelegener Punkt jeweils der von ihnen alle verschiedene Punkt Q sei.
O. B. d. A. seien die Punkte so bezeichnet, dass die von P_i nach Q verlaufenden Vektoren bei einem in mathematisch positiver Orientierung erfolgenden Umlauf um Q in aufsteigender Reihenfolge getroffen werden.

Definieren wir für eine einfachere Notation noch zusätzlich $P_7 := P_1$, dann zerlegen nun also die 6 Winkel $\angle P_iQP_{i+1}$ den Vollwinkel bei Q. Demzufolge ist mindestens einer unter diesen höchstens 60° groß, o. B. d. A. sei dies $\angle P_1QP_2$. Dann ist einer der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle P_1QP_2$ mindestens so groß, sei dies o. B. d. A. $\angle QP_1P_2$.

Da aber dem größeren Innenwinkel in einem Dreieck immer auch die größere Seite gegenüberliegt, ist dann auf jeden Fall die Strecke $\overline{P_2Q}$ mindestens so lang wie die Strecke $\overline{P_1P_2}$, also der Punkt P_1 höchstens so weit entfernt von P_2 wie Q.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, der eindeutig bestimmte nächstgelegene Punkt zu P_2 wäre Q gewesen. Also können höchstens 5 Vektoren in einem Punkt ankommen.
Dass dies auch wirklich möglich ist, zeigt die Konstellation eines regelmäßigen Fünfecks sowie seines Mittelpunkts. Dann führt die eben durchgeführte Überlegung in jedem Fall dazu, dass die Verbindungsstrecke zweier „benachbarter“ Eckpunkte immer länger ist als die jeweiligen Radien. (Und die übrigen Diagonalen sind sowieso noch länger.)

Aufgabe 071236:
Beweisen Sie, dass es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d. h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, dass diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

Lösung von cyrix:
Gibt es unter den sechs Punkten vier, M, A, B und C so, dass M im Inneren des Dreiecks ABC liegt, dann zerlegen die Strecken MA, MB und MC den Vollwinkel bei M in drei Teilwinkel. Mindestens einer von diesen, o. B. d. A. $\angle AMB$ beträgt dann mindestens $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ und mit dem Dreieck AMB ist ein gewünschtes gefunden.

Andernfalls befindet sich keiner der Punkte im Inneren der durch die sechs Punkte aufgespannten konvexen Figur. Damit, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, muss es sich bei dieser Figur um ein konvexes Sechseck handeln. Dieses besitzt eine Innenwinkelsumme von $(6-2) \cdot 180° = 720°$, sodass mindestens einer der Innenwinkel mindestens $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$ beträgt.
Das Dreieck, dass durch den Punkt, an dem dieser Innenwinkel liegt, sowie seinen beiden Nachbarn entsteht, erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 121235:
Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.
Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n $(n \geq 4)$ an, für die das gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
O. B. d. A. sei die Kantenlänge des n-Ecks gleich 1. Die kürzeste Diagonale, die zwei Kanten umspannt, sei d_2. Dann ist

$$1 < d_2 < 2$$

Die maximale Diagonale nennen wir d_m. Laut Aufgabenstellung soll $d_m = 1 + d_2$ gelten, woraus folgt:

$$2 < d_m < 3 \tag{1}$$

Wenn $n = 6$ ist, ist $d_m = 2$, und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Für $n = 4$ und $n = 5$ ist jeweils sogar $d_m < 2$. Daher muss $n \geq 7$ sein.
Der Umfang des Umkreises bei einem n-Eck mit geradem n ist πd_m, da d_m durch den Mittelpunkt verläuft. Der Umfang des Umkreises ist größer als der Umfang des n-Ecks:

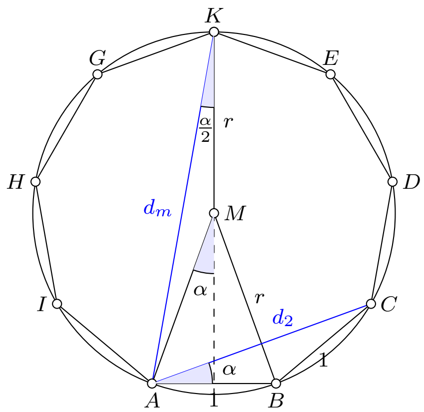
$$\pi d_m > n \qquad ; \qquad d_m > \frac{n}{\pi}$$

Wenn $n \geq 10$ ist, ist $d_m > 3$ und damit (1) nicht erfüllbar. Skizziert man ein 8-Eck, kann man mithilfe des Satzes von Pythagoras die Diagonalen recht einfach berechnen. Es ist für $n = 8$:

$$d_2 = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} \approx 1.8$$

$$d_m = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx \sqrt{6{,}8} \approx 2.6$$

Beim 8-Eck ist die Differenz zwischen maximaler Diagonale d_m und kürzester Diagonale d_2 zu klein, so dass nur ungerade $n \geq 7$ in Frage kommen.
Nachfolgend eine Zeichnung eines n-Ecks mit ungeradem n:



Es ist

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

Damit folgt:

$$d_2 = 2\cos\alpha$$

und

$$d_m = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Es muss gelten:

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 2\cos\alpha + 1$$

Mit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ erhält man

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 3 - 4\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{1}{2} = 3\sin\frac{1}{2}\alpha - 4\sin^3\frac{1}{2}\alpha$$

An dieser Stelle kann die Gleichung für den Sinus des dreifachen Winkels verwendet werden:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Dann ist nämlich

$$\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2}\alpha = 30^\circ$$
$$\alpha = 20^\circ$$

Man sieht daher, dass tatsächlich nur das 9-Eck die Voraussetzung erfüllt, da $\alpha = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$ ist. (Die weiteren Lösungen der kubischen Gleichung ergeben $\alpha = 100^\circ$ und $\alpha = 260^\circ$, woraus sich kein sinnvolles n-Eck konstruieren lässt).

Aufgabe 131233:
Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck.
Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb von V.

Lösung von cyrix:
Die Innenwinkel in V bei A, B, C und D seien wie üblich mit α, β, γ und δ bezeichnet.

Sei zuerst V ein konvexes Viereck und es sei o. B. d. A. $\alpha + \beta \geq 180°$. (Da $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ gilt, beträgt mindestens eine der beiden Summen $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ mindestens $180°$.)

Die Parallele zu DA durch B schneide die Gerade CD in P. Dann liegt P im Innern oder auf der Strecke CD, da $\angle ABP = 180° - \alpha \leq \beta$ ist, da $\angle ABP$ und α Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind. Analog ist auch mindestens eine der beiden Summen $\alpha + \delta$ und $\beta + \gamma$ mindestens $180°$, sodass wir (unter gegebenenfalls erfolgender Variablenumbenennung) o. B. d. A. $\alpha + \delta \geq 180°$ annehmen können und nun analog oben der Schnittpunkt Q der Parallelen zu AB durch D mit BC im Innern oder auf dem Rand der Strecke BC liegt, da $\angle ADQ = 180° - \alpha \leq \delta$ gilt.

Da nun die Strecken BP und DQ gegenüberliegende Seiten des konvexen Vierecks V miteinander verbinden, besitzen sie einen Schnittpunkt A' im Innern oder auf dem Rand von V. Nach Konstruktion ist das Viereck $ABA'D$ ein Parallelogramm und nicht alle der vier Punkte A', B', C' und D' liegen außerhalb von V.

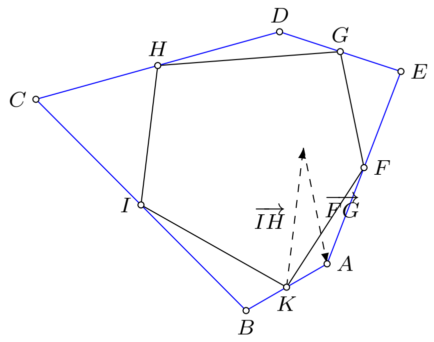
Sei nun umgekehrt V ein nichtkonvexes, nicht überschlagenes Viereck mit überstumpfen Innenwinkel α. Aufgrund der Innenwinkelsumme von V kann es nur einen überstumpfen Innenwinkel geben. Dann liegt die Diagonale BD (bis auf die Endpunkte) außerhalb von V. Damit liegen alle Punkte von V in nur einer der beiden von der Geraden BD erzeugten Halbebenen. Im Parallelogramm $ABA'D$ liegen aber A und A' in verschiedenen von der Diagonalen BD erzeugten Halbebenen, also A' außerhalb von V.

Analog liegt auch im Parallelogramm $C'BCD$ der Punkt C' in der von BD erzeugten Halbebene, in der C, und damit V, nicht liegt. Also ist auch C' ein Punkt, der außerhalb von V liegt. Weiterhin ist $\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta < 180° - \beta$ und damit $\angle B'CB = 180° - \beta > \gamma = \angle DCB$, sodass B' außerhalb von V liegt. Analog (durch Vertauschen der Rollen von B und D) folgt schließlich auch $\angle DCD' = 180° - \delta > \gamma = \angle DCB$, sodass auch D' außerhalb von V liegt.

Damit befinden sich für ein nicht überschlagenes Viereck $V = ABCD$ genau dann die vier Punkte A', B', C' und D' außerhalb von V, wenn V nichtkonvex ist, $\square$.

Aufgabe 141235:
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, dass F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.
Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist.
Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Lösung von Steffen Polster:



Setzen wir $\vec{f}, \vec{g}, \dots, \vec{k}$ für die Ortsvektoren von F, G, H, I, K und analog $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{e}$ für die gesuchten Punkte A, B, C, D, E, F des „Mittenfünfecks“.

Damit z. B. K Mittelpunkt von A und B ist, muss gelten

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \vec{k} \tag{1}$$

Für die anderen Punkte wird damit

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \vec{i} \quad ; \quad \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} = \vec{h} \quad ; \quad \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} = \vec{g} \quad ; \quad \frac{\vec{e}+\vec{a}}{2} = \vec{f} \qquad (2,3,4,5)$$

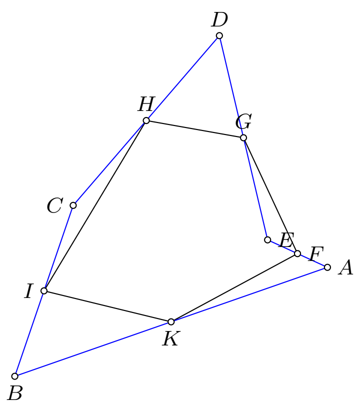
Addition und Subtraktion dieser Gleichungen in der Form (1)-(2)+(3)-(4)+(5) ergibt

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{e}}{2} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

und da die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ sich in der Summe aufheben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

Damit kann der Punkt A konstruiert werden, in dem an K die Vektoren $\overrightarrow{IH}$ und $\overrightarrow{GF}$ addiert werden. (siehe Abbildung). Die Punkte B, C, D, E ergeben sich durch anschließende Punktspiegelung an den Punkten K, I, H und G.
Beispiel 2:



Nachweis:
Für den Punkt A wird nach oben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

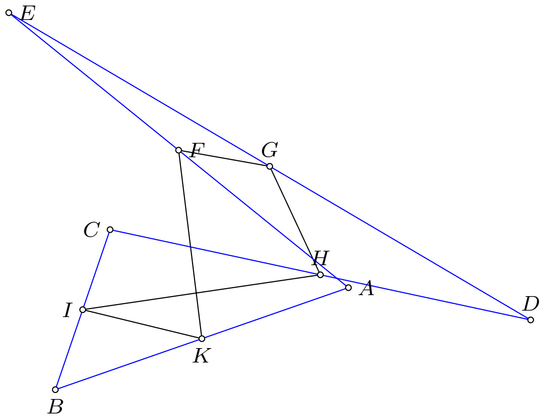
sowie für den Punkt B in analoger Weise

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}$$

und somit

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f} + \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}}{2} = \frac{2\vec{k}}{2} = \vec{k}$$

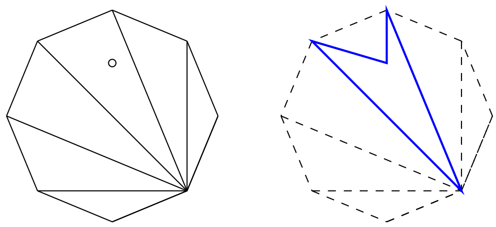
Damit ist K Mittelpunkt von A und B. Für die Punkte F, G, H und I ergibt sich dies in gleicher Weise. Damit erfüllt das Fünfeck $ABCDE$ die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen.
Da jeder Konstruktionsschritt eindeutig ist, ist $ABCDE$ das einzige Fünfeck entsprechend der Aufgabenstellung.
Beispiel 3 (nicht konvexes Ausgangsfünfeck):



Aufgabe 151235:
In der Ebene mögen n Punkte ($n \geq 4$) so gelegen sein, dass je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.
Man beweise, dass dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Lösung von ochen:
Wir betrachten die konvexe Hülle aller n Punkte. Diese bildet ein konvexes k-Eck mit $k \leq n$. Gilt $k = n$, sind die n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks und wir sind fertig.

Nehmen wir also an, es gelte $k < n$. Wir triangulieren unser k-Eck, indem wir einen der Eckpunkte des k-Ecks auswählen und ihn mit allen anderen Eckpunkten durch Strecken verbinden.



Diese Strecken befinden sich alle im k-Eck, da dieses konvex ist. Wir erhalten $k-2$ Dreiecke. Da $k < n$ ist, gibt es einen der n Punkte, welches sich im Inneren oder auf einer Seite eines der Dreiecke befindet.

Die Eckpunkte des Dreiecks und der Punkt im Inneren oder auf der Seite des Dreiecks bilden aber die Eckpunkte eines konkaven oder entarteten Vierecks. Also war unsere Annahme falsch und es muss $k = n$ gelten.

Aufgabe 191232:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, dass sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d. h. es wird vorausgesetzt:

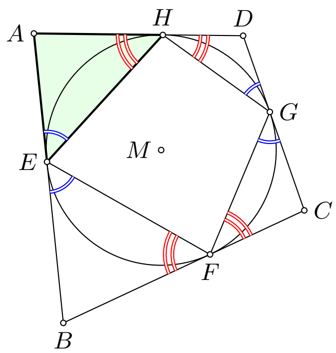
$$AE : EB = DA : BC; BF : FC = AB : CD; CG : GD = BC : DA; DH : HA = CD : AB \qquad (1)$$

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck $ABCD$ gilt $AB + CD = BC + DA$ (d. h. $ABCD$ ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck $EFGH$ für die Größe der Innenwinkel

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

gilt (d. h. wenn $EFGH$ ein Sehnenviereck ist).

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Bedingung

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

ist äquivalent zu

$$\angle AEH + \angle FEB + \angle CGF + \angle HGD = \angle BFE + \angle GFC + \angle DHG + \angle EHA \qquad (2),$$

d. h. wir gehen von den Innenwinkeln zu den Winkeln der Dreiecke AEH, BFE, CGF und DHG über. Im folgenden zeigen wir, dass aus $AB+CD = BC+DA$, $AB+CD < BC+DA$ und $AB+CD > BC+DA$ jeweils $\angle AEH = \angle EHA$, $\angle AEH > \angle EHA$ und $\angle AEH < \angle EHA$ im Dreieck AEH folgt, d. h. das Größenverhältnis der an den Seiten anliegenden Winkel ist umgekehrt zu dem Größenverhältnis der Summe der Seiten.
Dieses gilt ebenfalls für die anderen drei Dreiecke und somit ist (2) äquivalent zu $AB+CD = BC+DA$, da aus $AB + CD \neq BC + DA$ die Ungleichheit in (2) folgt.

Aus $AE + EB = AB$ und $AE : EB = DA : BC$ folgt $AE = \frac{AB \cdot DA}{BC+DA}$ und $EB = \frac{AB \cdot BC}{BC+DA}$. Anlog erhalten wir $AH = \frac{AB \cdot DA}{AB+CD}$ und somit $\frac{AE}{AH} = \frac{AB+CD}{BC+DA}$. Aus $AB + CD = BC + DA$ folgt, dass $\triangle AEH$ gleichschenklig mit $\angle AEH = \angle EHA$ ist. Entsprechend gilt

$$AB + CD < BC + DA \Rightarrow AE < AH \Rightarrow \angle EHA < \angle AEH$$

wegen der Größenbeziehung zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck AEH. Aus Symmetrie gilt ebenfalls $AB + CD > BC + DA \Rightarrow \angle EHA > \angle AEH$.

Aufgabe 221233A:
a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks

$$F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks

$$F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, F sein Flächeninhalt und $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $\beta = \angle ABC$, $\delta = \angle CDA$, so gilt

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\beta + \frac{cd}{2} \cdot \sin\delta$$

wegen $\sin\beta \leq 1$, $\sin\delta \leq 1$, $0 < ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $0 < cd \leq \frac{c^2+d^2}{2}$ also

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

II. Es gibt konvexe Vierecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (1)$$

gilt; denn es gibt Vierecke mit $a = b = c = d$ und $\beta = \delta = 90°$, diese sind (Quadrate, also) konvex, und für sie gilt $F = a^2$, also (1).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl p mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $p = \frac{1}{4}$.

b) I. Ist ABC ein Dreieck, F sein Flächeninhalt und $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a = \frac{1}{2}(a+b+c)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung

$$s - a \geq 0 \qquad ; \qquad s - b \geq 0 \qquad ; \qquad s - c \geq 0$$

Hieraus und aus der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nichtnegativer reeller Zahlen folgt

$$\begin{aligned} F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{s(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)^3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2 \\ &= \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) \\ &\leq \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

II. Es gibt Dreiecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)$$

gilt; denn für gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a $(= b = c)$ gilt $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$, also (2).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl q mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $q = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

Aufgabe 261234:
Beweisen Sie:
Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit $\alpha = \angle BAD$ ist nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck $\angle BCD = 180° - \alpha$. Nach dem Kosinussatz und wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ gilt daher

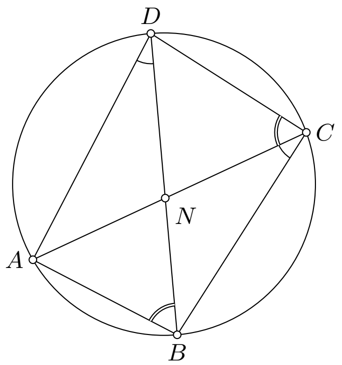
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos\alpha \qquad ; \qquad BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cos\alpha$$

also

$$2BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 2(AB \cdot AD - BC \cdot CD)\cos\alpha \qquad (2)$$

Wegen $\angle ANB = \angle DNC$, $\angle BNC = \angle AND$ (Scheitelwinkel) und $\angle ABN = \angle DCN$, $\angle BCN = \angle ADN$ (Peripheriewinkel über dem Boden $\overset{\frown}{AD}$ bzw. $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises, dem das Sehnenviereck einbeschrieben ist) gilt

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \qquad \text{und} \qquad \triangle BCN \sim \triangle ADN \qquad (3)$$



Aus (3) folgt $AB : DC = AN : DN$, wegen der Voraussetzung $AN = CN$ also
$AB : CD = CN : DN$ (5). Aus (4) folgt $BC : AD = CN : DN$ (6). Wegen (5) und (6) ist

$$AB : CD = BC : AD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot AD = BC \cdot CD$$

Damit ergibt sich aus (2) die Behauptung (1).

Aufgabe 281232:
Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene ε sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge alle derjenigen Punkte C in ε, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB = a$ und $AC : AB = BD : AD$ ist.

Lösung von MontyPythagoras:
Es liege A im Ursprung und der Punkt B auf der x-Achse bei $(a,0)$. Der Punkt C habe die Koordinaten (x,y) und der Punkt D liege bei $(x - a,y)$. Es soll gelten:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{\sqrt{(a-(x-a))^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

Wir quadrieren und multiplizieren mit den Nennern:

$$(x^2+y^2)\left((x-a)^2+y^2\right) = a^2\left((x-2a)^2+y^2\right)$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2) = a^2(x^2+y^2-4ax+4a^2)$$

Wir substituieren $r^2 = x^2 + y^2$:

$$r^2(r^2-2ax+a^2) = a^2(r^2-4ax+4a^2)$$

$$r^4 - (2ax-a^2)r^2 - a^2r^2 + (4ax-4a^2)a^2 = 0$$

$$r^4 - 2axr^2 + (4ax-4a^2)a^2 = 0$$

$$r^2 = ax \pm \sqrt{a^2x^2 - 4a^3x + 4a^4}$$
$$r^2 = ax \pm a\sqrt{x^2 - 4ax + 4a^2}$$
$$r^2 = ax \pm a(x - 2a)$$

Es gibt daher 2 mögliche Lösungen.
1. Die „Minus"-Lösung:

$$r^2 = ax - ax + 2a^2 = 2a^2$$

Das ist ein Kreis um A mit dem Radius $\sqrt{2}\,a$.
2. Die „Plus"-Lösung:

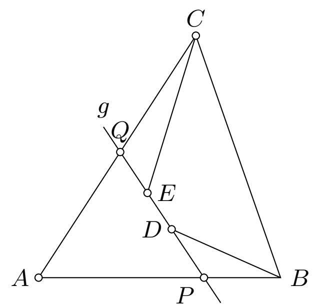
$$r^2 = x^2 + y^2 = 2ax - 2a^2$$
$$(x-a)^2 - a^2 + y^2 = -2a^2$$
$$(x-a)^2 + y^2 = -a^2$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar. Als einzige Lösung bleibt für die Ortskurve des Punktes C nur der Kreis um A mit dem Radius $r = \sqrt{2}\,a$.

Aufgabe 291235:
Man beweise:
In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.
Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für je fünf Punkte der vorausgesetzten Lage gilt:
Man kann unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei der fünf Punkte sind, eines mit möglichst großem Flächeninhalt auswählen. Dann muss nach Voraussetzung einer der folgenden Fälle vorliegen:

1. Fall:
Die beiden anderen der fünf Punkte liegen im Innern des ausgewählten Dreiecks.
Ihre Verbindungsstrecke geht nach Voraussetzung durch keine Ecke des Dreiecks, sie muss daher zwei verschiedenen Seiten des Dreiecks in je einem inneren Punkt schneiden. Das Dreieck sei etwa ABC, die Punkte im Innern D, E; die Gerade g durch D, E schneide etwa AB in P und AC in Q.
Dabei seien die Punkte P, D, E, Q auf g in dieser Reihenfolge angeordnet (siehe Abbildung).



Dann ist die Vierecksfläche $BDEC$ konvex.

2. Fall:
Mindestens eine anderer der fünf Punkte liegt außerhalb des ausgewählten Dreiecks.
Das Dreieck sei ABC, der außerhalb liegende Punkt sei D. Die Geraden, die die Dreiecksseiten enthalten, zerlegen die Ebene in die Dreiecksfläche und in weitere Flächen, die entweder von zwei Strahlen oder von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzt werden.

Nach Voraussetzung kann D auf keiner Randlinie eines dieser Gebiete liegen. Länge D im Innern eines von zwei Strahlen, etwa von den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus, begrenzten Gebietes, so ergäbe der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, vermehrt um die Flächeninhalte der Dreiecke ACD und BCD, den Flächeninhalt von ABC. Das widerspricht der Auswahl der drei Punkte A, B, C.

Also muss D im Innern eines von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzten Gebiets liegen, etwa in dem Gebiet, das von der Seite VC und den Verlängerungen der Seiten AB bzw. AC über B bzw. C hinaus, begrenzt wird. Dass ist die Vierecksfläche $ABDC$ konvex. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 301234:
Man beweise:
In jedem n-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $a \leq b < 2a$ gilt.

Lösung von cyrix:
Nehmen wir an, es gäbe ein n-Eck, welches ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage wäre und bezeichnen die in ihm auftretenden Seitenlängen der Größe nach aufsteigend mit s_1 bis s_n, sodass dann insbesondere $s_{i+1} > 2s_i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ist.
Dann jedoch ist

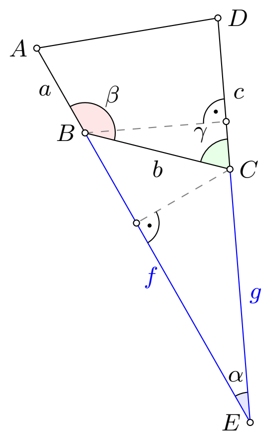
$$s_n > 2s_{n-1} = s_{n-1} + s_{n-1} > s_{n-1} + 2s_{n-2} > \cdots > s_{n-1} + s_{n-2} + \cdots + s_2 + 2s_1 > s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$$

sodass die direkte Verbindung der beiden Endpunkte der Strecke mit Länge s_n länger ist als der „Umweg“ über die übrigen Eckpunkte des n-Ecks, welcher die Länge $s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$ besitzt.
Dies ist ein Widerspruch (zur wiederholt angewandten Dreiecksungleichung), sodass es ein solches n-Eck nicht gibt, $\square$.

Aufgabe 311232:
Man beweise, dass jedes konvexe Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ betragen und die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ die Größen β bzw. γ haben, den Flächeninhalt hat:

$$F = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta + \gamma))$$

Lösung von MontyPythagoras:



Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist gleich der Fläche des Dreiecks AED minus die Fläche des Dreiecks BEC:

$$F = \frac{1}{2}(f+a)(g+c)\sin\alpha - \frac{1}{2}fg\sin\alpha$$

$$F = \frac{1}{2}ag\sin\alpha + \frac{1}{2}cf\sin\alpha + \frac{1}{2}ac\sin\alpha \qquad (1)$$

Aufgrund der Innenwinkelsumme des Dreiecks BEC gilt:

$$\alpha = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma) = \beta + \gamma - \pi$$

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma - \pi) = -\sin(\beta + \gamma) \qquad (2)$$

Außerdem ist, wenn man die gestrichelten Linien betrachtet, die senkrecht auf die Strecken AE bzw. DE stehen:

$$g\sin\alpha = b\sin(\pi - \beta) = b\sin\beta \qquad (3)$$

und

$$f\sin\alpha = b\sin\gamma \qquad (4)$$

Wir setzen nun die Gleichungen (2) bis (4) in (1) ein, und erhalten direkt:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}bc\sin\gamma - \frac{1}{2}ac\sin(\beta+\gamma)$$

q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 021244:
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, dass die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.
Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Kathetenlängen der abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecksflächen werden mit x und y und die Hypotenusenlänge, die gleich der zu berechnenden Seitenlänge des Achtecks ist, werde mit c bezeichnet. Dann gilt:

$$2x + c = 2a, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{2a - c}{2} \qquad (1)$$

$$2y + c = 2b, \quad \text{d. h.} \quad y = \frac{2b - c}{2} \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad (3)$$

also wegen (1), (2) und (3)

$$\frac{(2a-c)^2}{4} + \frac{(2b-c)^2}{4} = c^2 \Rightarrow c^2 + 2(a+b)c - 2(a^2+b^2) = 0$$

Hieraus ergibt sich, dass entweder

$$c = -(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 2(a^2+b^2)} \quad \text{oder} \qquad (4)$$

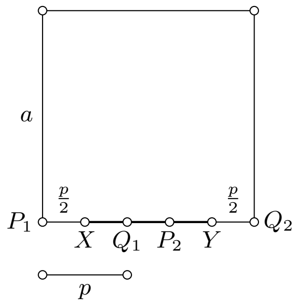
$$c = -(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 2(a^2+b^2)} \qquad (5)$$

sein muss. Da a, b und c positiv sind, kann c nicht der Relation (5) genügen. Falls die Konstruktion überhaupt möglich ist, muss c die Bedingung (4) erfüllen.

Bemerkung: Die Konstruktion ist genau dann möglich, wenn $c < 2\min(a,b)$ ist, d. h. wenn $\max(a,b) < 3\min(a,b)$ ausfällt.

Aufgabe 021245:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, dass ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

Lösung von Manuela Kugel:

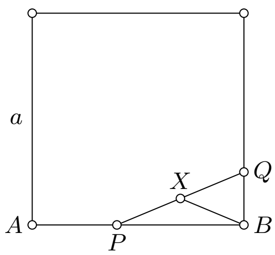


Für jede Seite gilt, dass der gesuchte geometrische Ort auf der Quadratseite liegt, wenn sich P von einer Ecke des Quadrates (im Bild mit P_1 bezeichnet) weg bewegt und Q noch nicht bei der nächsten Ecke (im Bild mit Q_2 bezeichnet) des Quadrates angekommen ist.
Dann befindet sich der erstmögliche gesuchte Punkt X auf dieser Quadratseite wie im Bild dargestellt in einer Entfernung von der Ecke P_1 von $\frac{p}{2}$.
Der letztmögliche gesuchte Punkt Y auf dieser Quadratseite befindet sich in einer Entfernung von der nächsten Ecke Q_2 von ebenfalls $\frac{p}{2}$. Eine solche Strecke XY muss existieren, da gilt:

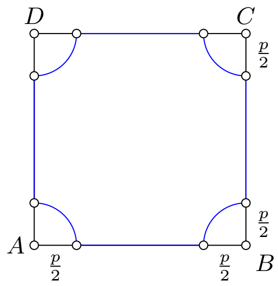
$$a = P_1Q_2 = P_1X + XY + YQ_2 = \frac{p}{2} + XY + \frac{p}{2} = p + XY$$

Da $a > p$ gilt demzufolge $XY > 0$.
Mit dieser Argumentation kann jede Quadratseite separat betrachtet werden und enthält in jedem Fall den geometrischen Ort, der sich zwischen den Abständen, der größer oder gleich $\frac{p}{2}$ zu beiden Ecken der betrachteten Quadratseite ist, befindet.

Nun wird der Fall betrachtet, der sich dann abspielt, wenn P auf einer und Q auf einer benachbarten Quadratseite entlanglaufen. Dann gelten die Bezeichnungen der zweiten Abbildung.

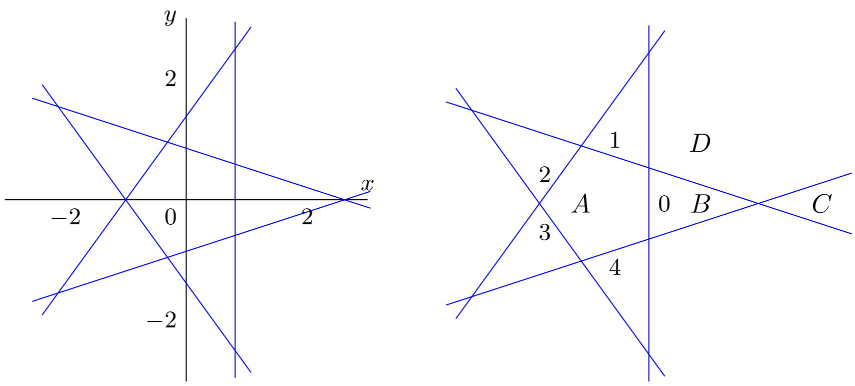


Da $p < a$ ist offensichtlich, dass P und Q nie auf gegenüberliegenden Seiten entlanglaufen können. Es sind also immer benachbarte Quadratseiten, die betrachtet werden müssen, wenn der zuerst beschriebene Fall nicht mehr zutrifft.
Benachbarte Quadratseiten umschließen einen Winkel von 90°; die Ecke zwischen P und Q sei o. B. d. A. B, somit ist $\triangle PBQ$ immer rechtwinklig.
Damit ist PQ der Durchmesser eines Thaleskreises, auf dem B liegt. Da X die Strecke PQ halbiert, ist X Mittelpunkt des Kreises und es gilt für den Radius r des Thaleskreises: $r = PX = QX = BX$.
Da stets $P_iQ_i = p$ gilt, ist für jede Lage in diesem betrachteten Fall (beide Punkte auf verschiedenen Quadratseiten) $\frac{p}{2} = r_i = P_iX_i = Q_iX_i = BX_i$.
Damit ist der Viertelkreis um B mit dem Radius $\frac{p}{2}$ innerhalb des Quadrates der gesuchte geometrische Ort. Fasst man beide Fälle zusammen, ergibt sich folgende Figur als gesuchter geometrischer Ort (blau):



Aufgabe 041244:
Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Keises ist!

Lösung von Rainer Müller:



Zur bequemeren Rechnung wählen wir das Koordinatensystem der Fünfeckebene so, dass der Mittelpunkt der Schwerpunkt des Fünfecks und die positive x-Achse eine Fünfeckseite in deren Mittelpunkt schneidet (siehe linke Abbildung).
Der nach „außen" gerichtete normierte Normalenvektor der (verlängerten) i-ten Fünfeckseite s_i ($i = 0,...,4$ gemäß rechter Abbildung) ist $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ mit $\varphi_i = \frac{2\pi i}{5}$. Mit den Funktionen

$$f_i(x,y) := x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - r$$

ist $f_i(x,y) = 0$ die implizite Gleichung von s_i und $|f_i(x,y)|$ der Abstand eines Punktes (x,y) von s_i, wobei $r > 0$ der Radius des Inkreises des Fünfecks ist (in der Abbildung ist $r = 1$, was man o. B. d. A. annehmen könnte, ohne jedoch die Rechnung merklich zu vereinfachen).
Die gesuchte Punktmenge ist damit beschreibbar durch die Gleichung

$$f(x,y) = 5r \qquad \text{mit} \qquad f = |f_0| + |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4|$$

Für die f_i verwenden wir die folgende Tabelle:

i	φ_1	$\cos\varphi_i$	$\sin\varphi_i$	$f_i(x,y)$
0	0	1	0	$x - r$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = a_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = b_1$	$a_1x + b_1y - r$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = a_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = b_2$	$-a_2x + b_2y - r$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$-a_2$	b_2	$-a_2x - b_2y - r$
4	$\frac{8}{5}\pi$	a_1	$-b_1$	$a_1x - b_1y - r$

Manche der Werte stehen in Formelsammlungen, die übrigen ergeben sich aus Additionstheoremen und Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Wegen der Betragsfunktionen ist f nicht einfach handhabbar. Wir benutzen, dass die fünf Geraden s_i die Ebene in 16 Gebiete zerlegen, in denen jeweils keine der fünf Funktionen f_i ihr Vorzeichen wechselt (wir betrachten jeweils den Rand des Gebietes als zum Gebiet gehörig).
Wegen der fünfzähligen Rotationssymmetrie müssen wir nur vier verschiedene Gebiete betrachten, z. B. die Gebiete A, B, C und D in der rechten Abbildung.

Betrachten wir zunächst den Fall $(x, y) \in A$ (das Fünfeck selbst). Hier gilt

$$f_0(x, y) \leq 0, f_1(x, y) \leq 0, f_2(x, y) \leq 0, f_3(x, y) \leq 0, f_4(x, y) \leq 0$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -f_0(x, y) - f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) = \\ &= -(x - r) - (a_1x + b_1y - r) - (-a_2x + b_2y - r) - (-a_2x - b_2y - r) - (a_1x - b_1y - r) = \\ &= 5r + (2a_2 - 2a_1 - 1)x = 5r \end{aligned}$$

Die Gleichung $f(x, y) = 5r$ ist also in A identisch erfüllt, d. h. die ganze Menge A gehört zur gesuchten Punktmenge.
Sei nun $(x, y) \in B$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \leq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \leq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x, y) = f_0(x, y) - f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) = 5r + 2f_0(x, y)$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in B genau dann, wenn $f_0(x, y) = 0$ ist, also entlang der gemeinsamen Strecke mit A, so dass wir keine zusätzlichen Lösungen erhalten.
Sei nun $(x, y) \in C$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \geq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) + f_4(x, y) = 5r + 2f_0(x, y) + 2f_1(x, y) + 2f_4(x, y)$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in C genau dann, wenn

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_4(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - r + a_1x + b_1y - r + a_1x - b_1y - r = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)r$$

Der Punkt mit dem niedrigsten x-Wert in C ist jedoch $((\sqrt{5} - 1)r, 0)$, der Schnittpunkt der Seiten $s1$ und $s4$, also hat $f(x, y) = 5r$ keine Lösungen in C.
Sei nun $(x, y) \in D$. Dann ist

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_2 \leq 0, f_3 \leq 0, f_4 \leq 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y) - f_2(x, y) - f_3(x, y) - f_4(x, y) = 5r + 2f_0(x, y) + 2f_1(x, y)$$

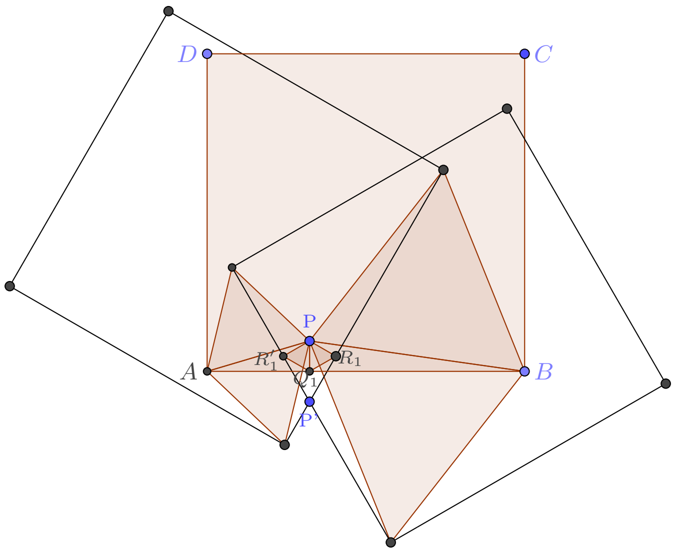
$f(x, y) = 5r$ gilt also in C genau dann, wenn

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow (a_1 + 1)x + b_1y - 2r = 0$$

Diese Gerade enthält den Eckpunkt des Fünfecks, der A und D gemeinsam ist, und verläuft senkrecht zur Symmetrieachse von D, so dass sie keine weiteren Lösungspunkte liefert.
Die gesuchte Punktmenge ist also das Fünfeck selbst (Rand und Inneres).

Aufgabe 061241:
In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε, für die das Dreieck $\triangle PQR$ gleichseitig ist!

Lösung von Kornkreis:
Die Menge der Punkte R entspricht den Rändern des Quadrates $ABCD$ nach Drehung um den Punkt P um 60° sowie −60°, was aus der folgenden Zeichnung ersichtlich wird.



Beweis (skizziert):
Da es für die zwei stets nicht-identischen Punkte P, Q in der Ebene immer genau zwei gleichseitige Dreiecke gibt (PQR und PQR'), betrachten wir im Folgenden nur den Punkt R, der sich auf einer bestimmten Seite von PQ befindet (d. h. wir schließen Sprünge von R zu R' aus).
Man begründet leicht, dass sich R genau dann auf einer Geraden bewegt, wenn sich Q auf einer Geraden bewegt, da die Änderung von Winkel und Länge von PQ identisch für PR ist. Außerdem folgt, dass sich R auf einer Strecke bewegt, die aus der Drehung von AB um den Winkel $60°$ um P hervorgeht, wenn sich Q auf AB bewegt (analog für die anderen vier Seiten).
In den Übergängen zwischen zwei Seiten, wenn Q seine Richtung um $90°$ ändert, ändert auch R seine Richtung um $90°$ (mit der gleichen Orientierung). Insgesamt folgt daraus die obige Behauptung.

Aufgabe 061244:
Gegeben ist eine natürliche Zahl $n > 3$. Es sei $V = P_1P_2...P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\triangle P_kP_lP_m$ (wobei P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.
Seien also P_k, P_l und P_m die Eckpunkte des Dreiecks im Uhrzeigersinn. Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck $P_kP_lP_m$ genau dann einen rechten Winkel in P_l hat, wenn P_l auf dem Halbkreis über der Strecke zwischen P_k und P_m liegt (Satz des Thales).

Wir fordern nun, dass der gewünschte stumpfe Winkel in P_l liegt. Dieses ist offensichtlich der Fall, wenn P_l und P_k auf einem Kreisbogen liegen, der weniger als die Hälfte des Umkreises vom regelmäßigen n-Eck einnimmt. Zunächst legen wir also einen beliebigen Punkt P_k fest. Dafür haben wir in beiden Fällen n Möglichkeiten.

1. Fall: Sei n gerade.

   Wir suchen nun die beiden fehlenden Punkte mit obiger Forderung. Zählen wir $\frac{n}{2}$ Punkte von P_k weiter und setzen den Punkt P_m, so hat jedes Dreieck in P_m einen rechten Winkel. Wir können also die fehlenden 2 Punkte für das stumpfe Dreieck aus $\frac{n}{2} - 1$ auswählen.

2. Fall: Sei n ungerade.

   Zeichnen wir den Durchmesser durch P_k, so liegen in diesem Fall genau $\frac{n-1}{2}$ Eckpunkte auf jedem Halbkreis. Davon können wir wieder 2 beliebig auswählen.

Sei $A(n)$ die Gesamtanzahl der stumpfwinkligen Dreiecke, erhalten wir somit:

$$A(n) = \begin{cases} n\binom{\frac{n}{2}-1}{2} & , n \text{ gerade} \\ n\binom{\frac{n-1}{2}}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 091244:
Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, ..., P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k $(k = 1, 2, ..., n)$ können parallel zu sich selbst so verschoben werden, dass sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes unter a)), dass folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
a) Zur Vereinfachung der Notation definieren wir $P_0 := P_n$.
Der Winkel $\angle P_{k+1}MP_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radien MP_{k+1} und MP_k ergibt sich zu $\frac{2\pi}{n}$. In einem regelmäßigen n-Eck betragen alle Innenwinkel $\frac{n-2}{n} \cdot \pi = \pi - \frac{2\pi}{n}$, was genau dem Nebenwinkel zu $\angle P_{k+1}MP_k$ der Geraden, auf denen die beiden Radien liegen, entspricht.

Startet man also mit der Strecke MP_0 und verschiebt die Strecke MP_1 parallel so, dass M auf P_0 abgebildet wird, entsteht dort der passende Innenwinkel. Diese Konstruktion kann man nun fortsetzen, indem man MP_2 parallel so verschiebt, dass M auf den Bildpunkt von P_1 abgebildet wird, sodass man einen zweiten passenden Innenwinkel angefügt hat.
So fügt man nach und nach durch Verschiebung des Radius MP_k derart, dass M auf den Bildpunkt von P_{k-1} bezüglich der Verschiebung des vorherigen Radius' abgebildet wird, alle Radien des Ausgangs-n-Ecks als neue Kanten zu dem entstehenden n-Eck hinzu, wobei je zwei aufeinanderfolgende dieser Radien dann den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks bilden. Weiterhin sind die Radien alle gleich lang, sodass sich tatsächlich ein regelmäßiges n-Eck bildet.

b) In die Ebene des Ausgangs-n-Ecks fügen wir derart Koordinatenbezeichnungen ein, dass der Umkreismittelpunkt dieses n-Ecks der Koordinatenursprung ist und $P_0 := P_n$ der Punkt $(1|0)$. Dann ergeben sich aufgrund der Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis und $\angle P_kMP_0 = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ die Koordinaten der Punkte P_k zu

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \middle| \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Verschiebt man die Radien nun parallel, so ist die (vorzeichenbehaftete) Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte eines solchen Radius genauso groß wie die der Endpunkte des Radius' selbst. Für die Verschiebung des Radius MP_k ergibt sich also eine solche Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte von $\cos\frac{2k\pi}{n}$.
Fügt man nun die Radien entsprechend Teilaufgabe a) zu einem geschlossenen Streckenzug zusammen, addieren sich also diese Differenzen der x-Koordinaten insgesamt zu Null, was genau Gleichung (1) entspricht. Analog erhält man bei der Betrachtung der Differenz der y-Koordinaten Gleichung (2), $\square$.

Aufgabe 101243:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne die gegebenen Flächen mit F_i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Betrachte die Dreier-Schnitte

$$A_i := \cap_{j\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}} F_j$$

welche nach Voraussetzung alle nicht leer sind, und wähle für jedes A_i einen Punkt $P_i \in A_i$.
Wir betrachten das Problem für allgemeine konvexe Flächen und nutzen die eine konvexe Fläche definierende Eigenschaft aus, dass mit zwei Punkten auch die Verbindungslinie der zwei Punkte in der Fläche enthalten ist.
Daraus folgt, dass die Verbindungslinie P_iP_j in $F_k \cap F_m$ enthalten ist (mit $k,m \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$ und $k \neq m$, $i \neq j$). Wenn zwei der Punkte P_i übereinstimmen, so ist dies der gesuchte Punkt, da er in allen der gegebenen Flächen enthalten ist.

Seien die P_i nun also alle verschieden. Wenn drei der P_i auf einer Linie liegen, so ist der mittlere von ihnen in allen vier Flächen enthalten (denn der linke und rechte Punkt, sowie deren Verbindungslinie [wegen Konvexität], sind in der für den mittleren Punkt noch eventuell fehlenden Fläche enthalten) und damit der gesuchte Punkt.
Wenn keine drei der P_i auf einer Linie liegen, so bilden sie ein nicht-entartetes Viereck, sodass es zwei sich schneidende Verbindungslinien P_iP_j und P_kP_m gibt, mit i,j,k,m paarweise verschieden. Der Schnittpunkt ist in allen Flächen enthalten und damit der gesuchte Punkt.

Aufgabe 101245:
Es seien $A_0A_1...A_n$ ($n > 2$) ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, ..., A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.
Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1...A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, dass also $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$ gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien s_k die Länge der Strecke $A_{k-1}A_k$ und r_k der Abstand von A_k zur Gerade g. Die Rotationsfläche wird aus Mantelflächen von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Eine einzelne Mantelfäche F_k definiert durch die Punkte $A_{k_1}A_k$ hat die Oberfläche $F_k = \pi s_k(r_{k-1} + r_k)$. Die Summe der F_k ergibt dann F.
Falls es keinen Punkt A_m, der genau auf der Mitte des Polygonzuges liegt, fügen wir diesen hinzu. Der so entstandene Polygonzug erzeugt dieselbe Oberfläche.

Behauptung: Die durch $A_0 \dots A_m$ erzeugte Fläche hat höchstens den Flächeninhalt $\pi\frac{s^2}{4}$, d. h. $F_1 + \dots + F_m \leq \pi\frac{s^2}{4}$

Beweis:
Für r_k haben wir die Abschätzung $r_k \leq |A_0A_k| \leq p_k$ mit $p_k := s_1 + \dots s_k$, da eine Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Weiterhin gilt $|r_k - r_{k-1}| \leq s_k$, da s_k die Kante eines Kegelstumpfes mit Radien r_k,r_{k-1} ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_k &= \pi s_k(r_{k-1} + r_k) \\ &= \pi s_k(2r_{k-1} + (r_k - r_{k-1}) \\ &\leq \pi s_k(2p_{k-1} + s_k) \\ &= \pi\left[(p_{k-1} + s_k)^2 - p_{k-1}^2\right] \\ &= \pi(p_k^2 - p_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch aufsummieren $F_1 + \dots + F_m \leq \pi(p_0^2 - p_m^2) = \pi\frac{s^2}{4}$, da $p_0 = 0$ und nach Wahl $p_m = \frac{s}{2}$ gilt.

Wegen Symmetrie gilt ebenso $F_{m+1} + \ldots + F_n \leq \pi \frac{s^2}{4}$. Hieraus folgt insgesamt $F \leq \pi \frac{s^2}{2}$.

Aufgabe 111246A:
Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, dass auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt. Man beweise, dass dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Angenommen es gebe 3 Punkte A,B,C, die nicht auf einer Gerade liegen.
Durch Wahl äußerer Punkte - z. B. Ecken der konvexen Hülle - können wir ebenfalls annehmen, dass weiter Punkte der Menge, die auf den Geraden AB, BC, AC liegen, sich nur auf den Seiten des Dreiecks befinden. Daher gibt es Punkte P,Q,R auf den Dreiecksseiten, die ebenfalls zu der Menge gehören, welche nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen.
Da A,B,C nicht auf den Geraden PQ,QR,PR liegen, gibt es drei weitere Punkte auf diesen Geraden, die zu der Menge gehören. Daher hat die Menge mindestens 9 Punkte. Widerspruch!

Aufgabe 131245:
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, dass $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

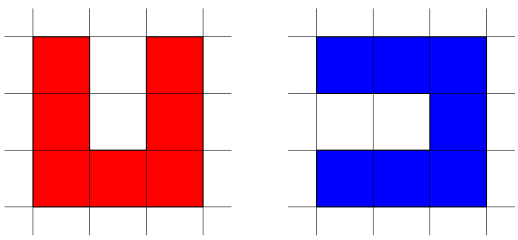
Lösung von Nuramon:
a) Sei $F := Q_1 \ldots Q_6$ und sei P_k eine beliebige Ecke von E.

Bemerkung: Im Folgenden ist mit E bzw. F jeweils die Menge aller Punkte gemeint, die im Inneren oder auf dem Rand des entsprechenden n-Ecks liegen.

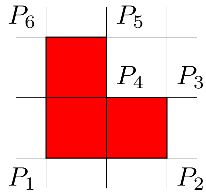
Angenommen P_k läge außerhalb von F.
Da F konvex ist, gäbe es dann eine Gerade, die die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, wobei P_k im Inneren der einen und E im Inneren der anderen Halbebene liegt. Der Schnitt von E mit der Halbebene, die P_k enthält, hätte dann einen positiven Flächeninhalt und somit wäre der Flächeninhalt von F echt kleiner als der von E. Das ist ein Widerspruch dazu, dass E und F kongruent sind.

Also liegt jede Ecke von E im Inneren oder auf dem Rand von F.
Da F und E konvex sind, muss somit E komplett in F enthalten sein.
Da andererseits nach Voraussetzung auch F komplett in E enthalten ist, folgt $F = E$. Daraus folgt, dass die Menge der Ecken von F gleich der Menge der Ecken von E sein muss, also die Behauptung.

b) Ja, gibt es:



c) Nein:



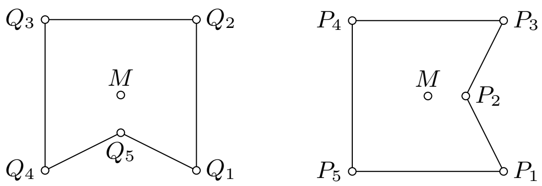
Angenommen $F := Q_1 \dots Q_6$ ist ein zu E kongruentes Sechseck, wobei $Q_1, \dots, Q_6$ im Inneren oder auf dem Rand von E liegen.
Die einzigen Punkte in E, die Abstand $2\sqrt{2}$ zu einander haben, sind P_2 und P_6. Also muss $\{P_2,P_6\} = \{Q_2,Q_6\}$ gelten.
Es ist Q_4 der Mittelpunkt von Q_2Q_6, also muss $Q_4 = P_4$ gelten.
Da die Dreiecke $P_1P_2P_6$ und $Q_1Q_2Q_6$ kongruent sind und Q_1 in E liegen soll, muss $P_1 = Q_1$ gelten.
Da Q_3 und Q_5 auf verschiedenen Seiten von Q_2Q_6 liegen müssen und die Dreiecke $Q_2Q_3Q_4$ und $P_2P_3P_4$ bzw. $Q_4Q_5Q_6$ bzw. $P_4P_5P_6$ kongruent sind, folgt, dass $\{Q_3, Q_5\} = \{P_3, P_5\}$ gilt.
Also ist jedes Q_i eine Ecke E.

Aufgabe 181243:
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, ..., Q_n$ so gelegen, dass $Q_1, ..., Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine Ecke von E. (1)
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist.
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
(a) Wegen der Konvexität von E liegt jede Seite von F und damit die ganze n-Ecksfläche von F in der n-Ecksfläche von E. Als zu E kongruente Figur hat F den gleichen Flächeninhalt wie E. Daher fällt mit F mit E zusammen. Mithin ist jede Ecke von F Ecke von E, was zu beweisen war.

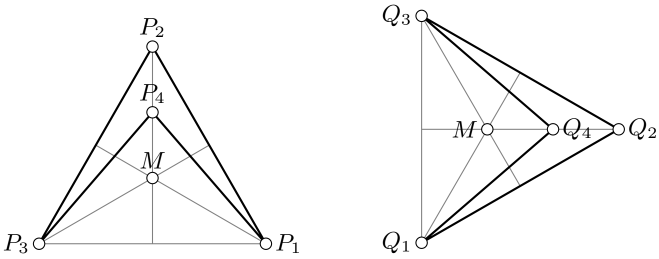
Die unter (b) aufgeworfene Frage kann durch ein Beispiel beantwortet werden.
Gesucht wird ein nicht-konvexes Polygon $F(Q_1...Q_n)$, welches dem dazu kongruenten Polygon $E(P_1...P_n)$ derart aufgepasst werden kann, dass sich die Eckpunkte von F mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken, ohne dass hierbei sämtliche Eckpunkte von F auf Eckpunkte von E zu liegen kommen.

Konstruktion:
Aus dem Quadrat $\square(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ wird ein gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck mit der Strecke Q_4Q_1 als Basis herausgeschnitten. Der Scheitel dieses Dreiecks sei Q_5.
Bringt man dieses Polygon F mit dem hierzu kongruenten Polygon $E(P_1P_2P_3P_4P_5)$ durch Parallelverschiebung in eine solche Lage, dass sich Q_1 mit P_1 deckt, so wird offensichtlich, dass das vorliegende nicht-konvexe Polygon E ein Beispiel ist, auf das die Aussage (a) nicht übertragen werden kann (siehe Abbildung)



Die unter (c) aufgeworfene Problemstellung kann wiederum durch ein Beispiel erledigt werden. Wir suchen ein nicht-konvexes n-Eck E, für das die Aussage (a) wahr ist.

Konstruktion:
Vorgelegt sei ein gleichseitiges Dreieck $\triangle(P_1P_2P_3)$ mit M als Mittelpunkt. P_4 sei der Halbierungspunkte der Strecke MP_2.
$E(P_1P_2P_3P_4)$ ist ein nicht-konvexes Viereck. Das hierzu kongruente Viereck $F(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ ist nun so auf E zu legen, dass sich die Punkte Q_i mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken.
Bei geeigneter Wahl der Punktbezeichnung ist das Dreieck $\triangle(Q_1Q_2Q_3)$ ebenfalls gleichseitig.



Für F kommen nur solche Lagebeziehungen zu E in Betracht, bei denen die Eckpunkte der kongruenten gleichseitigen Dreiecke zur Deckung gelangen. Soll außerdem Q_4 nicht außerhalb E liegen, ist zusätzlich F in eine solche Stellung zu bringen, dass sich Q_4 mit P_4 deckt.
Andernfalls fiele Q_4 in einen inneren Punkt der Strecke MP_3 oder MP_1. Diese liegen jedoch außerhalb von E.

Damit ist gezeigt, dass sich die Eckpunkte Q_i von F bezüglich E nur dann in die geforderte Lage bringen lassen, wenn die Punkte Q_i in die Eckpunkte von E fallen. Zugleich gehen, wie im Falle des konvexen Polygons, Randpunkte von F in Randpunkte von E über.
Die eingangs gestellte Frage ist also mit nein zu beantworten.

Aufgabe 181246A:
Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s.
Um jeden Punkt A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt.
Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K'_1 und K'_2 mit dem Radius $\frac{s}{2}$.
Man untersuche, ob K'_1 und K'_2 einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Lösung von cyrix:
Es sei M der Mittelpunkt des regelmäßigen Fünfecks $A_1A_2A_3A_4A_5$ und r sein Umkreisradius. Dann ist $\angle A_1MA_2 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle A_1A_2M$ ist

$$s^2 = |A_1A_2|^2 = r^2 + r^2 - 2^2 \cdot \cos 72^\circ = r^2 \cdot (2 - 2\cos 72^\circ)$$

Mit $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ folgt also $\frac{s^2}{4} = r^2 \cdot \frac{4+1-\sqrt{5}}{2}$ bzw.

$$r^2 = s^2 \cdot \frac{2}{5-\sqrt{5}} = s^2 \cdot \frac{2(5+\sqrt{5})}{25-5} = s^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Aus Symmetriegründen liegen die Mittelpunkte M_1 von K'_1 und M_2 von K'_2 auf verschiedenen Seiten der durch das Fünfeck definierten Ebene ε, wobei die Lote dieser Mittelpunkte auf ε beide den Fußpunkt M besitzen und die gleiche Länge h besitzen.

Damit sind die Dreiecke $\triangle A_1MM_1$ und $\triangle A_1MM_2$ jeweils rechtwinklig in M, wobei die einen Katheten jeweils die Länge $|A_1M| = r$, die zweiten Katheten die Länge $|MM_1| = |MM_2| = h$ und die Hypotenusen die Länge $|A_1M_1| = |A_1M_2| = s$ besitzen, wobei letzteres daraus folgt, dass die Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln genau die Entfernung der Summe ihrer beider Radien besitzen. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $r^2 + h^2 = s^2$ bzw.

$$h^2 = s^2 - r^2 = s^2 \cdot \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = s^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} = s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{20}}{20} > s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{25}}{20} = s^2 \cdot \frac{10-5}{20} = \frac{1}{4}s^2$$

also $h > \frac{1}{2}s$, sodass keine der beiden Kugeln K_1' und K_2' die Ebene ε des Fünfecks berührt oder schneidet. Also berühren oder schneiden sie sich auch gegenseitig nicht.

Bemerkung zur Berechnung von $\cos 72°$:

Es ist einerseits $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und andererseits

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Mit $x := 18°$ folgt wegen $\sin 2x = \sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos 54° = \cos 3x$ also $2\sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ bzw. nach Division durch $\cos x = \cos 18° \neq 0$ also

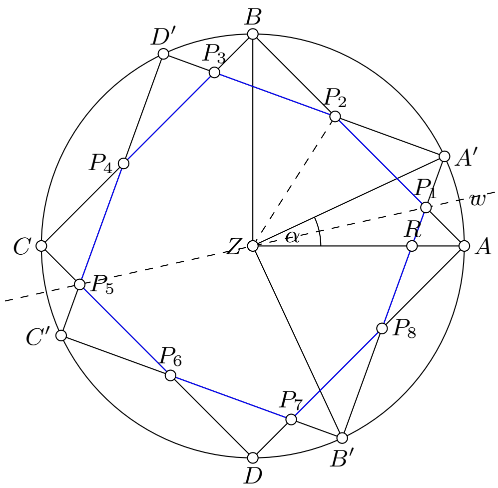
$$2\sin x = 4\cos^2 x - 3 = 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 1 - 4\sin^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in $\sin x$ hat die Lösungen $-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Da $\sin x = \sin 18°$ positiv ist, folgt

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Aufgabe 191242:
Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ε liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ε als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben.
Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cup Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt.
Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für beliebige $Q, Q' \in M$ gilt: Ist $Q = Q'$, so ist $Q \cap Q'$ die Quadratfläche Q mit dem Umfang $4a$.
Ist $Q \neq Q'$, so kann man, wenn AB eine beliebige Seite der Quadratfläche Q ist, die Ecken von Q und Q' so mit A, B, C, D bzw. A', B', C', D' bezeichnen, dass die Punkte $A, A', B, D', C, C', D, B'$ auf dem gemeinsamen Umkreis von Q und Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind (siehe Abbildung).



Hiernach hat der Winkel $\angle AZA'$ eine Größe α mit $0° < \alpha < 90°$. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w dieses Winkels geht A in A' über, also Q' in Q, folglich (wegen des Umlaufsinns) B in B', C in C', D in D' und daher der wegen $0° < \alpha < 90°$ existierende Schnittpunkt P_1 von AB mit $A'B'$ in sich über. Also liegt P_1 auf w.
Die Strecken AB und $A'B'$ schneiden einander also in demjenigen Punkt P_1 auf AB, für den $\angle AZP_1 = \frac{\alpha}{2}$ gilt. Ebenso folgt:
AB und $D'A'$ schneiden einander in demjenigen Punkt P_2 auf AB, für den $\angle BZP_2 = \frac{90°-\alpha}{2} = 45° - \frac{a}{2}$ ist.
Da also $\angle AZP_2 = \frac{\alpha}{2} + 45°$ gilt, ist wegen $0° < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + 45° < 90°$ die Strecke P_1P_2 folglich eine Seite der Polygonfläche $Q \cap Q'$.
Ebenso findet man die weiteren Schnittpunkte P_3, P_4 von BC mit $D'A'$ bzw. $C'D'$, P_5, P_6 von CD mit $C'D'$ bzw. $B'C'$, P_7, P_8 von DA mit $B'C'$ bzw. $A'B'$ und damit $Q \cap Q'$ als die Achtecksfläche $P_1P_2...P_8$.

Bei Spiegelung an w geht der Schnittpunkt P_2 von AB und $D'A'$ über in den Schnittpunkt von $A'B'$ und DA, d. h. in P_8. Also ist $P_1P_2 = P_1P_8$.
Ebenso folgt, dass je zwei benachbarte Seiten von $Q \cap Q'$ dieselbe Länge $s = P_1P_2$ haben, somit gilt $u(Q \cap Q') = 8s$.
Wegen $\angle A'Z'B' = 90°$ und $0° < \alpha < 90°$ schneiden die Strecken ZA und $A'B'$ einander in einem Punkt R, und es gilt $\angle ARP_8 = \angle A'RZ$ (Scheitelwinkel) sowie $\angle RAP_8 = 45° = \angle RA'Z$. Somit gilt $\angle P_1P_8A = \angle RP_8A = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck), wegen $\angle P_1AP_8 = 90°$ also $AP_1 = s \cdot \sin\alpha$.
Ebenso erhält man $\angle P_2P_3B = 90° - \alpha$, also $P_2B = s \cdot \cos\alpha$. Aus

$$a = AP_1 + P_1P_2 + P_2B = s(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha) \qquad \text{folgt somit}$$

$$s = \frac{a}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$$

Nun nimmt

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}(\cos\alpha \cdot \cos 45° + \sin\alpha \cdot \sin 45°) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$$

wegen $-45° < \alpha - 45° < 45°$ für genau $\alpha - 45° = 0$ seinen größten Wert an, und dieser beträgt $\sqrt{2}$. Daher existiert für alle $Q, Q' \in M$ mit $Q \neq Q'$ ein kleinstmöglicher Wert von $u(Q \cap Q') = 8s$, und dieser beträgt

$$\frac{8a}{1 + \sqrt{2}} = 8a(\sqrt{2} - 1)$$

Wegen $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$, also $8a(\sqrt{2} - 1) < 4a$ ist dies zugleich der kleinstmögliche Wert von $u(Q \cap Q')$ für alle $Q, Q' \in M$ auch bei zugelassenem $Q = Q'$.

Aufgabe 231244:
Seien $P_1, P_2, ..., P_n$ verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{ij} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{ij} P_iP_J \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

Lösung von Nuramon:
Seien $R := \max_{ij} P_iP_j$ und $r := \min_{ij} P_iP_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ der größte bzw. der kleinste Abstand der unter den n Punkten vorkommt.

Wir zeigen zunächst, dass es einen Punkt M in der Ebene gibt, so dass die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ alle im Inneren oder auf dem Rand des Kreises um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ liegen.

Dazu betrachten wir irgendeinen Kreis k, der $P_1, P_2, \ldots, P_n$ enthält und finden dann schrittweise Kreise mit kleinerem Radius, die ebenfalls alle n Punkte enthalten.

1. Wenn keiner der n Punkte auf dem Rand von k liegt, so können wir den Radius von k weiter verkleinern, indem wir k am Mittelpunkt von k zentrisch stauchen bis einer der Punkte $P_1, \dots, P_n$ auf dem Rand des gestauchten Kreises liegt.

2. Wenn genau einer der n Punkte auf dem Rand von k liegt, dann erhalten wir durch eine geeignete Drehung von k um diesen Punkt einen neuen Kreis mit gleichem Radius, der mindestens zwei der n Punkte auf dem Rand und alle anderen im Inneren enthält.

3. Angenommen P_i und P_j sind zwei verschiedene Punkte, die auf dem Rand von k liegen und alle anderen Punkte liegen im Inneren von k. Falls P_iP_j ein Durchmesser von k ist, dann ist der Radius von k höchstens $\frac{1}{2}P_iP_j \le \frac{1}{2}R < \frac{1}{\sqrt{3}}R$ und wir sind fertig.

Wenn P_iP_j kürzer ist als der Durchmesser von k, dann können wir den Mittelpunkt O von k so lange in Richtung des Mittelpunkts von P_iP_j verschieben, bis der Kreis k' um den verschobenen Mittelpunkt O' mit Radius $O'P_i = O'P_j$ einen weiteren der n Punkte auf dem Rand enthält oder aber P_iP_j ein Durchmesser von k' ist. In letzterem Fall sind wir bereits fertig.

4. Angenommen mindestens drei Punkte liegen auf dem Rand von k und die restlichen Punkte im Inneren von k.

Falls k einen Durchmesser hat, so dass alle Punkte, die auf dem Rand von k liegen, sich auf der gleichen Seite dieses Durchmessers befinden, dann können wir durch eine kleine Verschiebung von k einen Kreis erhalten, der alle Punkte $P_1, \dots, P_n$ im Inneren enthält. Diesen können wir gemäß 1. weiter verkleinern.

Falls k keinen solchen Durchmesser hat, dann gibt es drei Punkte auf dem Rand von k, die ein spitzwinkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck bilden. O. B. d. A. seien P_1,P_2,P_3 diese drei Punkte. Seien $\alpha \ge \beta \ge \gamma$ die Innenwinkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Es gilt dann $60° \le \alpha \le 90°$. Sei o. B. d. A. P_1P_2 die Seite von $P_1P_2P_3$, die dem Winkel α gegenüberliegt. Der Radius von k ist gleich dem Umkreisradius ρ von $P_1P_2P_3$ und für diesen gilt nach dem erweiterten Sinussatz

$$\rho = \frac{P_1P_2}{2\sin\alpha} \le \frac{R}{2\sin 60°} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Wir können diese vier Schritte nur endlich oft iterieren, denn bei jedem Durchlauf von Schritt 3 bzw. Schritt 4, bei dem wir noch nicht unseren gesuchten Kreis mit Radius $\le \frac{1}{\sqrt{3}}R$ gefunden haben, wird der Radius von k im Anschluss an Schritt 4 echt kleiner als der Umkreisradius von einem Dreieck $P_kP_lP_m$ $(1 \le k \le l \le m \le n)$ und es gibt nur endlich viele solcher Dreiecke.

Sei jetzt also M ein Punkt in der Ebene, so dass $P_1, \dots, P_n$ alle im Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ um M liegen. Wir zeichnen um jeden Punkt P_i einen kleinen Kreis mit Radius $\frac{r}{2}$. Per Definition von r können sich je zwei dieser n Kreise nicht im Inneren schneiden. Die Gesamtfläche, die diese Kreise einnehmen ist daher genau $\frac{1}{4}n\pi r^2$.
Der Kreis um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}$ enthält jeden dieser n kleinen Kreise. Daher gilt für dessen Flächeninhalt

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n\pi r^2$$

(Da $n \ge 2$ gilt, muss dies eine strikte Ungleichung sein, sonst könnte man nämlich den großen Kreis vollständig in n kleinere Kreise zerlegen.) Aus obiger Ungleichung folgt, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n,$$

also

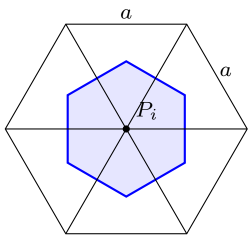
$$\frac{R}{r} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1),$$

was offenbar äquivalent ist zur Behauptung.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Man kann die Ungleichung wie folgt umformen:

$$\frac{\max_{ij} P_iP_j}{\min_{ij} P_iP_j} \geq c_n$$

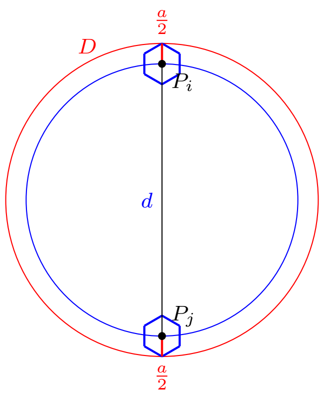
wobei c_n ein von n abhängiger Schwellenwert ist. Es ist also das kleinstmögliche Verhältnis zwischen maximalem und minimalem Abstand zu finden. Nach oben ist das Verhältnis natürlich offen, da der minimale Abstand beliebig klein oder der maximale Abstand bei (mindestens) einem sehr weit entfernten Punkt beliebig groß werden kann. Gibt man also den minimalen Abstand vor, so besteht die Aufgabe quasi darin, alle Punkte möglichst dicht zu scharen, ohne den vorgegebenen Mindestabstand zu unterschreiten. Zwei Schlussfolgerungen drängen sich auf: 1. Soll ein gewisser vorgegebener Mindestabstand eingehalten werden, so entsteht zwangsläufig ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken. Dichter als das geht nicht. 2. Wenn die Punkte in einem Kreis angeordnet werden, ergibt sich mit dem Durchmesser des Kreises der geringstmögliche Maximalabstand zwischen zwei Punkten. Ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken in eine Kreisform zu pressen klingt nach Quadratur des Kreises, doch es reicht für eine sinnvolle Abschätzung.



Der Minimalabstand zweier Punkte sei a, der maximale Abstand zwischen zwei Punkten sei d_{max}. Wenn man nun Punkte mit dieser sechseckigen Mindestabstandszone (blau dargestellt in obigem Bild) so eng wie möglich schart, kommt ein Wabenmuster heraus. Die Fläche eines solchen Sechsecks ist

$$A_S = 6 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} a \tfrac{\sqrt{3}}{2} a = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Bei sehr vielen Sechsecken könnte man sie recht gut in einem Kreis unterbringen, aber es werden am Rand immer Lücken bleiben. Wir versuchen daher nur eine Abschätzung:



In dieser Grafik ist der äußere Kreis nicht der tatsächliche Kreis, der alle Punkte inklusive der blauen Sechsecke umrundet, sondern ein Kreis, der flächengleich ist zu der Anzahl n an kleinen blauen Sechsecken, also

$$A_K = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 n$$

Sein Durchmesser sei D, so dass

$$D = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} n}$$

ist. Ein Kreis, der alle Punkte tatsächlich umschließt, muss größer sein als dieser, denn selbst wenn die Sechsecke im Inneren spaltfrei liegen, müssen sich an den Rändern zum Kreis hin Lücken ergeben, wie schon gesagt. Das Maximale, um das sich der Mittelpunkt eines solchen kleinen Sechsecks vom äußeren Kreis mit dem Durchmesser D entfernt liegen könnte, ist $\frac{1}{2}a$, denn wenn er weiter entfernt wäre, gäbe es andere Punkte, die direkt am Kreis anliegen müssten. Wenn es rundum einen Abstand gäbe, wäre der Kreis nicht minimal und schon gar nicht flächengleich. Damit ist der Durchmesser des kleineren Kreises d gleich dem Abstand zwischen zwei sich gegenüber liegenden Sechsecken, die im abgebildeten Fall den Kreis wie dargestellt von innen mit einer Spitze berühren, und es ist $d \geq D - a$ (sie könnten ja auch flach anliegen). Diese Kreise sind nur hypothetisch, es wird eine doppelte Abschätzung durch bewusst unerreichbar klein gewählte Annahmen vorgenommen. Da außerdem $d_{max} \geq d$ gelten muss, folgt

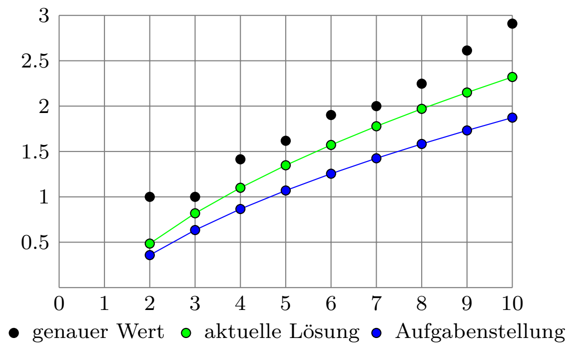
$$d_{max} \geq d \geq D - a = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}n} - a$$

$$d_{max} \geq a\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}n} - 1\right)$$

Daher gilt

$$\max_{ij} P_iP_j \geq \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,n}{\pi}} - 1\right)\min_{ij} P_iP_j$$

Dies ist eine schärfere Ungleichung als in der Aufgabenstellung gefordert. Hier ein Vergleich für die ersten n:



Aufgabe 261245:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, 2, ..., n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für jede Dreiecksfläche $F = A_1A_2A_3$ und jede konvexe Vierecksfläche $F = A_1A_2A_3A_4$ gilt die genannte Überdeckungsaussage; dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Wäre die Aussage falsch, so gäbe es einen Punkt P in F, der außerhalb jeder der drei bzw. vier genannten Kreise läge. Da diese Kreise den Rand von F überdecken, läge P im Innern von F. Da F konvex ist, ergäben sich Winkel $\angle A_iPA_{i+1}$ ($i = 1,...,n$; $A_{n+1} = A_1$, mit $n = 3$ bzw. $n = 4$) für die

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} = 360° \qquad (1)$$

gelten müsste. Andererseits wäre, da P außerhalb des Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1} läge, $\angle A_iPA_{i+1} < 90°$ ($i = 1,...,n$), also

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} < n \cdot 90°$$

was (1) wegen $n \leq 4$ widerspricht.

II. Für jedes $n > 4$ gibt es eine konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$, die von den genannten Kreisen nicht überdeckt wird; dies zeigt folgendes Beispiel:

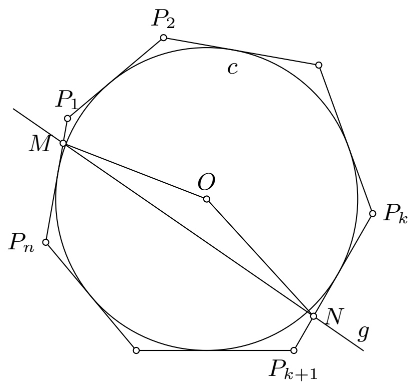
Ist $A_1A_2...A_n$ ein regelmäßiges n-Eck und P sein Mittelpunkt, so gilt (1) (jetzt mit $n > 4$) und daher $\angle A_iPA_{i+1} = \frac{1}{n} \cdot 360° < 90°$ für alle $i = 1,...,n$; $A_{n+1} = A_1$.
Also liegt P außerhalb aller Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1}.
Mit I. und II: ist bewiesen, dass die in der Aufgabe genannte Aussage genau für $n = 3$ und $n = 4$ gilt.

Aufgabe 271244:
Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2...P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.
Die Gerade g sei so gelegt, dass sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d. h., dass die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit O sei der Mittelpunkt und mit r der Radius des Inkreises bezeichnet. Da alle Seiten des n-Ecks Tangenten an den Inkreis sind und folglich in jedem Dreieck $P_iP_{i+1}O$ $(1 \leq i < n)$ der Berührungsradius Höhe auf P_iP_{i+1} ist, ergibt sich der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit

$$\frac{r}{2} \cdot P_iP_{i+1}$$

Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Dreiecke MP_1O, P_kNO, $NP_{k+1}O$ bzw. P_nMO zu $\frac{r}{2}MP_1$, $\frac{r}{2}P_kN$, $\frac{r}{2}NP_{k+1}$ bzw. $\frac{r}{2}P_nM$.



Aus Voraussetzung (1) der Aufgabe folgt

$$\frac{r}{2}(MP_1 + P_1P_2 + ... + P_kN) = \frac{r}{2}(NP_{k+1} + P_{k+1}P_{k+2} + ... + P_nM) \quad \text{also}$$

$$\frac{r}{2}MP_1 + \frac{r}{2}P_1P_2 + ... + \frac{r}{2}P_kN = \frac{r}{2}NP_{k+1} + \frac{r}{2}P_{k+1}P_{k+2} + ... + \frac{r}{2}P_nM$$

d. h., die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kNO$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ sind einander gleich.
Ginge die Gerade g nicht durch O, so läge O im Innern von einem der beiden in (2) genannten Vielecke, o. B. d. A. etwa von $MP_1P_2...P_kN$ (siehe Abbildung).
Dessen Flächeninhalt wäre somit die Summe der Flächeninhalte des Vielecks $MP_1P_2...P_kNO$ und Dreiecks MNO, das nicht zur Strecke MN entartet wäre. Zugleich wäre der Flächeninhalt von $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$

die Differenz der Flächeninhalte des Vielecks $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ und des Dreiecks MNO.

Damit ergäbe sich zwischen den in (2) genannten Flächeninhalten eine Differenz, die gleich dem doppelten Flächeninhalt von MNO, also nicht Null wäre.
Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme, g ginge nicht durch O widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 281243:
Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
X sei innerer Punkt des konvexen n-Ecks $P_1P_2...P_n$. Dann gilt für den Flächeninhalt F_i des Teildreiecks P_iXP_{i+1} $(i = 1,2,...,n;\ P_{n+1} = P_1)$

$$2F_i = P_iX \cdot P_{i+1}X \cdot \sin\angle P_iXP_{i+1} \leq P_X \cdot P_{i+1}X \qquad (1)$$

Für beliebige reelle Zahlen a,b gilt wegen $(a-b)^2 \geq 0$: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Damit folgt aus (1)

$$2F_i \leq P_iX \cdot P_{i+1}X \leq \frac{1}{2}(P_iX^2 + P_{i+1}X^2) \qquad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn $\sin\angle P_iXP_{i+1} = 1$ ist, wegen der Lage von X also genau dann, wenn $\angle P_iXP_{i+1} = 90°$ gilt. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $P_iX = P_{i+1}X$ gilt. Aus (1) und (2) folgt für den Flächeninhalt F von $P_1P_2...P_n$

$$2F = \sum_{i=1}^{n} 2F_i \leq P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2 \qquad (3)$$

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt genau dann, wenn für jedes i $(i = 1,2,...,n)$ das Gleichheitszeichen in (1) und in (2) gilt, d. h. genau dann, wenn jedes Teildreieck P_iXP_{i+1} rechtwinklig und gleichschenklig ist.
Gibt es in $P_1P_2...P_n$ einen inneren Punkt X, für den in (3) das Gleichheitszeichen steht, so folgt wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \angle P_iXP_{i+1} = 360° \qquad \text{und} \qquad \angle P_iXP_{i+1} = 90°$$

für $i = 1,2,...,b$ notwendig $n = 4$. Es sind alle Teildreiecke P_iXP_{i+1} kongruent (sws), und es folgt

$$P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1$$

und die Gleichheit der Innenwinkel im Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Das Viereck muss aber ein Quadrat sein. Jedes Quadrat erfüllt auch die gestellten Bedingungen, denn für den Mittelpunkt X eines Quadrates mit der Kantenlänge a gilt $P_iX = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und folglich

$$P_1X^2 + P_2X^2 + P_3X^2 + P_4X^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot = 2a^2 = 2F$$

II.III Kreise, Ellipsen

I Runde 1

Aufgabe V01103:
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

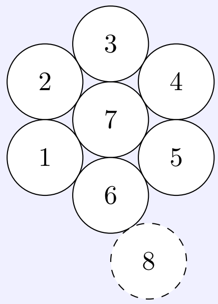
Lösung von Steffen Polster:
Die erste Lage Papier hat eine Länge πd mit $d = 150$ mm. Mit jeder Lage wächst der Durchmesser um 0,2 mm. Damit wird für die Gesamtlänge des Papiers von 500000 mm bei n Lagen Papier

$$\begin{aligned} 500000 &= \pi d + \pi(d+0{,}2) + \pi(d+2\cdot 0{,}2) + ... + \pi(d+(n-1)\cdot 0{,}2) \\ &= \pi(n\cdot d + 0{,}2 + 0{,}4 + ...(n-1)\cdot 0{,}2) \\ &= \pi\left(n\cdot d + 0{,}2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $n_1 \approx 717{,}91$ und $n_2 \approx -2216{,}91$, wobei n_2, da kleiner 0, entfällt.
Auf der Rolle befinden sich am Ende 718 Lagen Papier. Die Rolle hat dann einen Durchmesser von $150 + 717\cdot 0{,}2 = 293{,}4$ mm, also von 29,34 cm.

Aufgabe V01108:

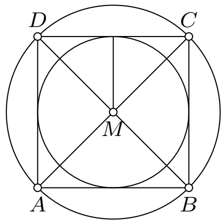
In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?



Lösung von Steffen Polster:
Der 8. Kreis rollt auf einem Kreis solange bis er mit seiner Peripherie den nächsten Kreis berührt. Die Mittelpunkte der zwei berührten Kreise und der Mittelpunkt des achten Kreises bilden dann ein gleichseitiges Dreieck, mit den Innenwinkeln von 60°.
Damit rollt der achte Kreis, z. B. auf dem sechsten, genau 120°, d. h. $\frac{2}{3}$ des Kreisumfangs.
Bei 6 Kreisen ergibt dies insgesamt $6\cdot\frac{2}{3}u = 4u$. Damit führt der 8. Kreis genau 4 Umdrehungen aus.

Aufgabe V01111:
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?

Lösung von Steffen Polster:



Der äußere Kreis habe den Radius $r_0 = r$. Das Quadrat $ABCD$ habe die Kantenlänge $a0 = a$. Seine Diagonale d_0 hat nach dem Satz Pythagoras die Länge $d_0 = a_0\sqrt{2}$. Die Diagonale ist aber auch gleich zweimal der Radius r_0:

$$d_0 = a_0\sqrt{2} = 2r_0 \to a_0 = r_0\sqrt{2}$$

Allgemein gilt:

$$a_i = r_i\sqrt{2}$$

Die Kantenlänge a_0 des Quadrats ist identisch mit dem halben Radius r_1 des inneren Kreises $a_0 = 2r_1$, bzw. allgemein:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$$

Die rekursive Formel für die Radien der Kreise lautet demnach:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1} = r_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow r_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

Für die Kantenlängen gilt das gleiche:

$$a_i = ri\sqrt{2} = a_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow a_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

a) Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise ist (eine geometrische Reihe)

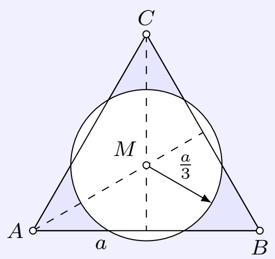
$$\sum A_K = \sum \pi r^2 = \pi\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = \pi r_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = \pi r_0^2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r^2$$

b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate

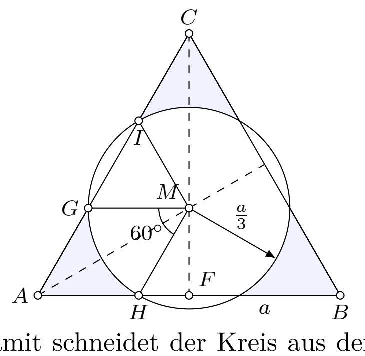
$$\sum A_Q = \sum a_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = a_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = 2a_0^2 = 4r^2$$

Aufgabe V01216:

Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?



Lösung von Steffen Polster:



Die zu A näheren Schnittpunkte des Kreises mit den Seiten AC und AB seien G und H. F sei der Fußpunkt der Höhe von C, die von M im Verhältnis 2:1 geteilt wird, da $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann wird nach einem Strahlensatz

$$2:1 = CM : MF = MG : AF \qquad \to \qquad MG = \frac{a}{3}$$

Analog ergibt sich $AG = AH = MH = \frac{a}{3}$, so dass das Viereck $AHMG$ ein Rhombus und der Winkel $\angle HMG = \alpha = 60°$ ist.

Damit schneidet der Kreis aus dem Dreieck 3 gleichseitige Dreiecke der Art GMI (Seitenlänge $\frac{a}{3}$) und drei Sektoren $\overset{\frown}{GH}M$, die, da $\angle HMG = 60°$, zu einem Halbkreis zusammengefasst werden können. Für die nicht von Kreis bedeckte Dreiecksfläche wird somit

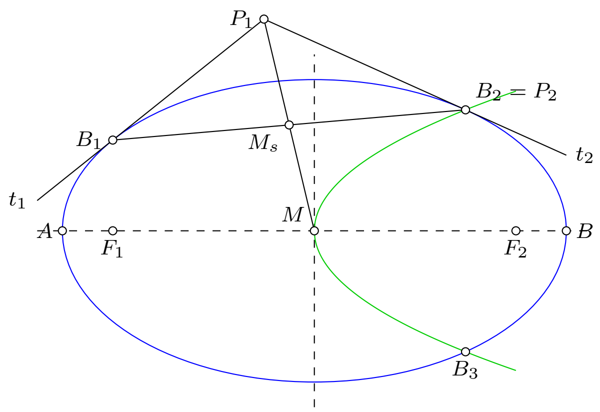
$$\begin{aligned} F &= F_{\triangle ABC} - 3 \cdot F_{\triangle GMI} - \frac{1}{2} F_{\text{Kreis}} \\ &= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}a^2 \end{aligned}$$

Aufgabe V01217:
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Lösung von Steffen Polster:
Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{1}$$

d. h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.



a) Die Tangentengleichung dieser Ellipse in einem Berührungspunkt B ist

$$\frac{x \cdot x_B}{25} + \frac{y \cdot y_B}{9} = 1$$

Setzt man den Punkt P_1, der auf den Tangenten liegt ein, wird

$$\frac{-x}{25} + \frac{\frac{21}{5}}{9} = 1 \tag{2}$$

(2) umgestellt und in (1) eingesetzt, liefert die Koordinaten der zwei Berührungspunkte

$$B_1\left(-4; \frac{9}{5}\right) \qquad ; \qquad B_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$$

mit den Tangenten

$$t_1: \quad y = \frac{4}{5}x + 5 \qquad ; \qquad t_2: \quad y = -\frac{9}{20}x + \frac{15}{4}$$

b) Der Mittelpunkt der Berührungssehne B_1B_2 ist $M_s\left(-\frac{1}{2}; \frac{21}{10}\right)$. Er ist offensichtlich auch der Mittelpunkte der Strecke MP_1 und liegt damit auf der Gerade von P_1 durch den Mittelpunkt M der Ellipse.

c) Für die Parabel ergibt sich aus dem Ansatz $y^2 = ax$ mit den Koordinaten des Punktes $P_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$

$$y^2 = \frac{48}{25}x \qquad ; \qquad f(x) = y = \pm\sqrt{\frac{48}{25}x}$$

Die Tangente in P_2 an die Parabel hat den Anstieg

$$f'(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{5} = m_2$$

Die Tangente t_2 hat den Anstieg $m_1 = -\frac{9}{20}$. Für den Schnittwinkel der zwei Geraden, d. h. auch dem Schnittwinkel von Parabel und Ellipse, folgt damit

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{85}{82} \Rightarrow \varphi = 46{,}03°$$

Ellipse und Parabel schneiden sich unter dem Winkel 46,03°.

Aufgabe V01219:
Zeichnen Sie die Ellipse

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \tag{1}$$

und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

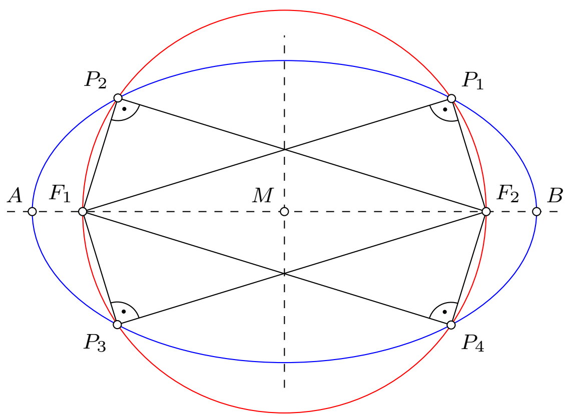
Lösung von Steffen Polster:
Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{2}$$

d. h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.

Die Konstruktion erfolgt mit Zirkel und Lineal mittels klassischem Verfahren:

> Wir wählen einen Hilfspunkt H auf AB, zeichnen um F_1 einen Kreisbogen mit Radius HA und um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius HB. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Ellipse.



Die Punkte der Ellipse, in denen sich die Brennstrahlen senkrecht schneiden, müssen auf dem Thaleskreis über der Strecke F_1F_2 liegen.
Zur Konstruktion zeichnet man den Kreis um M mit dem Radius MF_1. Die Schnittpunkte mit der Ellipse sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit der geforderten Eigenschaft.

Der beschriebene Thaleskreis hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$. Umstellen nach y^2 und Einsetzen in (1) ergibt

$$9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1;2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7} \quad ; \quad y_{1,2} = \pm\frac{9}{4}$$

Die gesuchten Punkte haben somit die Koordinaten

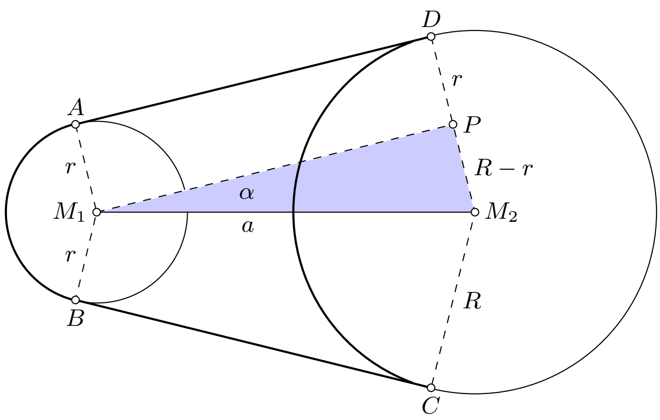
$$P_1\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \qquad ; \qquad P_2\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; \frac{9}{4}\right) \qquad ; \qquad P_3\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right) \qquad ; \qquad P_4\left(\frac{5}{4}\sqrt{7}; -\frac{9}{4}\right)$$

Aufgabe 011215:
Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi\frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist d der Durchmesser der treibenden Scheibe, D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und $M_1M_2 = a$ der Abstand der beiden Achsen.
Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.
Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?
a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,
b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.

Lösung von Eckard Specht:
Wir berechnen zunächst die genaue Länge des Treibriemens. Dazu seien A, B und C, D diejenigen Punkte, an denen sich der Riemen von der treibenden bzw. getriebenen Scheibe (Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 und Radien r bzw. R) löst.
AD und BC sind dann die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise, die wir z. B. dadurch finden, indem wir ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $M_1M_2 \equiv a$, der Kathete $PM_2 = R - r$ und $\angle M_1PM_2 = 90°$ konstruieren und die Kathete M_1P um r parallel nach außen verschieben.



Bezeichnen wir noch den Winkel $\angle PM_1M_2 \equiv \alpha$, dann gilt $\sin\alpha = \frac{R-r}{a}$, und die geradlinigen Teile des Riemens haben die Länge $AD = BC = a\cos\alpha$, die beiden Kreisbögen die Länge $AB = (\pi - 2\alpha)r$ bzw. $CD = (\pi + 2\alpha)R$ (α im Bogenmaß gemessen), insgesamt also

$$\bar{l} = 2a\cos\alpha + (\pi - 2\alpha)r + (\pi + 2\alpha)R = \pi(R+r) + 2a(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha) \qquad (1)$$

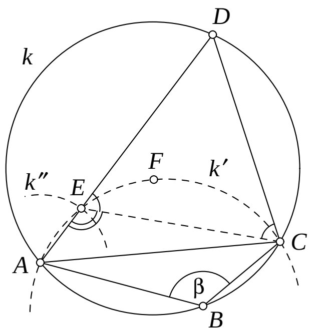
Für kleine Winkel α ergibt sich daraus mit $\frac{R-r}{a} = \sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{(R-r)^2}{2a}$ die in der Aufgabenstellung angegebene Näherungsformel

$$l \approx \pi(R+r) + 2a + \frac{(R-r)^2}{a}$$

Mit den gegebenen Werten für $d = 2r, D = 2R$ sowie a ergeben sich nun mit (1) und (2) folgende Winkel, Längen und relativen Fehler:
a) $\alpha = 4{,}59°$, $\bar{l} = 1568{,}7$ mm, $l = 1568{,}7$ mm, $\frac{|\bar{[l]}-l}{\bar{l}} = 0{,}00\%$,
b) $\alpha = 23{,}58°$, $\bar{l} = 872{,}3$ mm, $l = 871{,}8$ mm, $\frac{|\bar{[l]}-l}{\bar{l}} = 0{,}05\%$,

Aufgabe 021215:
Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben.
Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dass $ABCD$ sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist!
(Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

Lösung von Eckard Specht:



Analysis: Da D auf dem Kreis k liegt, ist die Forderung, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck sein soll, trivial. Für ein Tangentenviereck $ABCD$ muss jedoch $AB + CD = BC + DA$ oder $|AB - BC| = |DA - CD|$ gelten.

Sei o. B. d. A. $AB \geq BC$ (und damit $DA \geq CD$) sowie E derjenige Punkt auf DA mit $DE = DC$. Dann ist das Dreieck DEC gleichschenklig mit $\angle CDE = 180° - \angle ABC = 180° - \beta$ (Eigenschaft eines Sehnenvierecks) und den Basiswinkeln $\frac{1}{2}\beta$.

Folglich ist $\angle AEC = 180° - \frac{1}{2}\beta$. Außerdem ist $AE = DA - CD = AB - BC$ eine bekannte Länge. Wir gelangen dadurch zu folgender Konstruktion.

Konstruktion:

Es wird derjenige Kreisbogen k' konstruiert, der über der Sehne AC auf der B entgegengesetzten Seite den Winkel $180° - \frac{1}{2}\beta$ fasst (z. B. durch Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks AFC mit den Basiswinkeln $\frac{1}{4}\beta$).

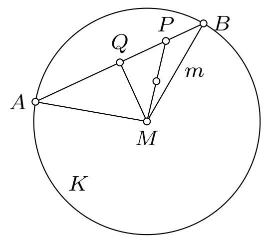
Dessen Schnittpunkt mit dem Kreis k'' (Mittelpunkt A, Radius $AE = AB - BC$) liefert den Punkt E.

Die Verlängerung von AE schneidet k dann im gesuchten Punkt D.

Aufgabe 031215:
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

Lösung von Henning Thielemann:



Behauptung: Der Ort aller gesuchten Punkte ist der Kreis k mit dem Durchmesser MP.

Beweis:
1. Teilbehauptung:
Jeder Sehnenmittelpunkt liegt auf k.

Es seien A und B die Schnittpunkte des Kreises (ab jetzt K genannt) mit einer Sehne durch den Punkt P. Die Strecken MA und MB sind Radien des Kreises und daher gleich lang und das Dreieck AMB ist gleichschenklig.

Der Lotfußpunkt Q des Lotes von M auf AB ist gleichzeitig Mittelpunkt der Sehne AB.

Das Dreieck MQP ist rechtwinklig, folglich ist der Mittelpunkt m seines Umkreises gleichzeitig Mittelpunkt von der Hypotenuse MP. Das bedeutet, dass der Umkreis vom Dreieck MQP der Kreis k ist.

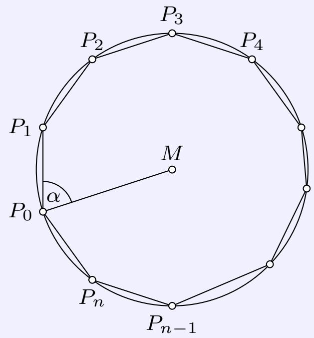
2. Teilbehauptung:
Alle Punkte von k sind Sehnenmittelpunkte

Man wähle einen Punkt Q auf dem Kreis k, der nach dem Satz des Thales das rechtwinklige Dreieck MQP aufspannt. Die Dreiecksungleichung bezogen auf das Dreieck MQP stellt sicher, dass Q von M weniger weit entfernt ist als P von M und damit genau wie P innerhalb des Kreises liegt. Daher kann man die Strecke QP auf beiden Seiten bis zum Kreis K verlängern und erhält dort die Schnittpunkte A und B.

Das Dreieck AMB ist gleichschenklig und Q ist als Lotfußpunkt von M gleichzeitig Mittelpunkt von AB.
□

Aufgabe 041112:
In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius MP_0 den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ reflektiert (siehe Abbildung).



a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!
b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?
c) Es sei $\alpha = 50°$.
Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Es gilt

$$|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = ... = r \qquad \text{und}$$
$$|\angle P_1P_0M| = |\angle MP_1P_0| = |\angle P_2P_1M| = |\angle MP_2P_1| = ... = \alpha$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\angle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke $P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3$ usw. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\overset{\frown}{P_0P_1} \simeq \overset{\frown}{P_1P_2} \simeq \overset{\frown}{P_2P_3} \simeq ... \qquad \text{und}$$
$$|\angle P_0MP_1| = |\angle P_1MP_2| = |\angle P_2MP_3| = ... = \pi - 2\alpha$$

a) Dann ist

$$|\overset{\frown}{P_0P_n}| = |\overset{\frown}{P_0P_1}| + |\overset{\frown}{P_1P_2}| + ... + |\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}| = (\pi - 2\alpha)r + (\pi - 2\alpha)r + ... + (\pi - 2\alpha)r = n(\pi - 2\alpha)r$$

b) Für n = 10 gilt in diesem Falle:

$$|\overset{\frown}{P_0P_{10}}| = 10(\pi - 2\alpha)r = 2\pi r, \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{2}{5}\pi$$

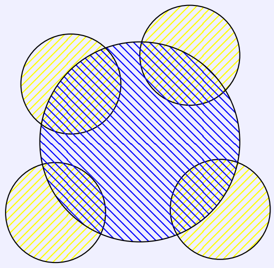
c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k2\pi r \qquad (k = 1,2,3,...) \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit $n = \frac{9}{2}k$ (2).

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt. Daher ist $n = 9k'$ ($k' = 1,2,3,...$).

Aufgabe 041113:
Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, dass diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (siehe Abbildung).



a) Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt der in der Abbildung blauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der gelb schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage lässt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

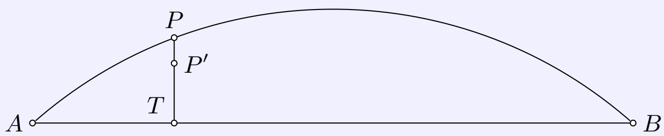
Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Der Inhalt p der blau gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen gelb gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f.
Da die genannte Summe gleich $4\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r$ ist, ergibt sich $s = \pi r^2 - f$ und damit $s = p$.

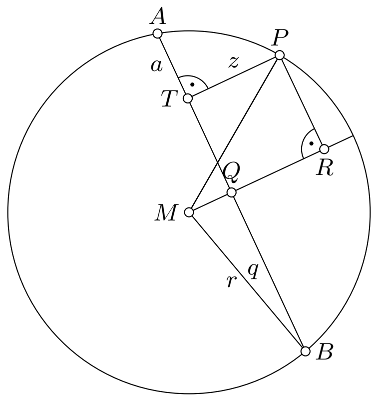
Aufgabe 091214:
In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$. Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqslant \frac{1}{5}r$.



Es ist zu beweisen, dass dann der relative Fehler $\delta = \dfrac{|z - z'|}{z}$ stets kleiner als 0,0051, d. h. 0,51 % ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, Q der Mittelpunkt der Sehne AB, PR das Lot von P auf die Gerade durch M und Q. Dann kann o. B. d. A. $0 < a \leq b$ vorausgesetzt werden, da dies gegebenenfalls durch entsprechende Wahl der Bezeichnungen stets erreicht werden kann.

Dabei gilt $PR = \frac{1}{2}(b-a)$ und $BQ = \frac{1}{2}(b+a)$. Setzt man nun $PR = p$, $BQ = q$, so erhält man

$$z = \sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2} \qquad \text{und} \qquad z' = \frac{(q-p)(q+p)}{2r} \qquad \text{also}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{q^2 - p^2}{2r(\sqrt{r^2-p^2} - \sqrt{r^2-q^2})} = \frac{\sqrt{r^2-p^2} + \sqrt{r^2-q^2}}{2r}$$

Aus $0 < a \leq b$ und $a + b \leq \frac{1}{5}r$ folgt $0 \leq p < q \leq \frac{1}{10}r$, also

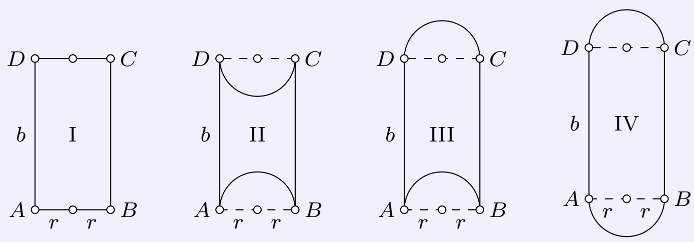
$$r\sqrt{0{,}99} \leq \sqrt{r^2-q^2} < \sqrt{r^2-p^2} \leq r$$

und hieraus $\sqrt{0{,}99} < \frac{z'}{z} < 1$, also $\delta = \left|1 - \frac{z'}{z}\right| = 1 - \frac{z'}{z} < 1 - \sqrt{0{,}99}$.

Nun ist $(1 - 0{,}0051)^2 = 1 - 0{,}0102 + 0{,}00002601 < 0{,}99$, also $1 - 0{,}0051 < \sqrt{0{,}99}$.
Daher gilt: $\delta < 1 - \sqrt{0{,}99} < 0{,}0051$. Der relative Fehler ist kleiner als 0,0051, d.s. 0,51 %.

Aufgabe 111212:

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedes Mal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:



Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartigen Streckenverhältnisse anzugeben.

Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt der Figur 1 ist gleich $F = 2br$. Daraus folgt $b = \frac{F}{2r}$. Ferner ist der Umfang dieser Figur gleich

$$u = 2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r = \frac{F}{r} - 4\sqrt{F} + 4r + 4\sqrt{F} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r}\right)^2 + 4\sqrt{F} \geq 4\sqrt{F}$$

Der Umfang wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r} = 0 \tag{1}$$

erfüllbar ist, genau dann am kleinsten, wenn (1), d. h. $F = 4r^2$, gilt. Das trifft zu, wenn

$$\frac{b}{r} = \frac{F}{2r^2} = \frac{4r^2}{2r^2} = 2$$

ist. Somit beträgt der Minimalumfang $u = 2b + 4r = 4r + 4r = 8r$. Ferner gilt für ihn

$$\frac{u}{\sqrt{F}} = \frac{8r}{2r} = 4$$

Im Fall der Figuren II, III und IV erhalten wir für F, b und u die jeweils in Spalte 2, 3 bzw. der Tabelle angegebenen Werte. Daher gilt in alle Fällen

$$u = \frac{F}{r} + kr$$

wobei k eine positive reelle Zahl ist, die im Fall I gleich 4, im Fall II gleich 3π, im Fall III gleich 2π und im Fall IV gleich π ist.

Figur	F	b	u	F	$\frac{b}{r}$	u	$\frac{u}{\sqrt{F}}$
Spalte 1	2	3	4	5	6	7	8
I	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r$	$4r^2$	2	$8r$	4
II	$2br - \pi r^2$	$\frac{F}{2r} + \frac{\pi}{2}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 3\pi r$	$3\pi r^2$	2π	$6\pi r$	$2\sqrt{3\pi} \approx 6{,}140$
III	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 2\pi r$	$2\pi r^2$	π	$4\pi r$	$2\sqrt{2\pi} \approx 5{,}013$
IV	$2br + \pi r^2$	$\frac{F}{2r} - \frac{\pi}{2}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + \pi r$	πr^2	0	$2\pi r$	$2\sqrt{\pi} \approx 3{,}545$

Die Werte in der 5. bis 8. Spalte entsprechen dem Fall, dass u ein Minimum wird.

Mithin gilt in allen Fällen analog wie im Fall I

$$u = \frac{F}{r} + kr = \frac{F}{r} - 2\sqrt{Fk} + kr + 2\sqrt{Fk} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{kr}\right)^2 + 2\sqrt{Fk} \geq 2\sqrt{Fk}$$

Der Umfang der Figur wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} = \sqrt{kr} \tag{2}$$

erfüllt ist, genau dann am kleinsten, wenn (2), d. h. $F = kr^2$ gilt.
Setzen wir nun für k die obigen Werte ein, so erhalten wir, dass u genau dann ein Minimum wird, wenn die Werte für F so lauten, wie sie in Spalte 5 angegeben sind. Ferner erhalten wir unter Benutzung der Werte der Spalten 3 und 4, dass dies genau für die in den Spalten 6, 7 und 8 angegebenen Werte von $\frac{b}{r}$,

u bzw. $\frac{u}{\sqrt{F}}$ zutrifft.

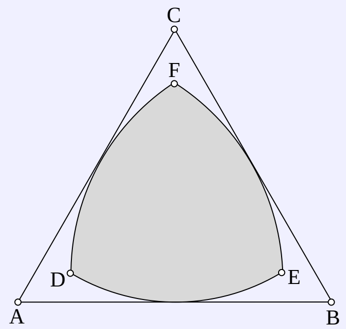
b) Aus den Zahlen der Spalte 8 ergibt sich nun die folgende Ordnung der Figuren nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt: II, III, I, IV.

Nachweis dieser Reihenfolge ohne dezimale Berechnung der Wurzeln:

Aus $2 < \pi < 4$ folgt $12\pi > 8\pi > 16 > 4\pi$, also

$$2\sqrt{3\pi} > 2\sqrt{2\pi} > 4 > 2\sqrt{\pi}$$

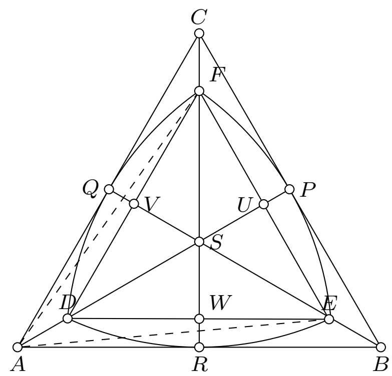
Aufgabe 181214:



Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein.

Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Dreieck sei ABC; der Kreis um A, B bzw. C der jeweils die Gegenseite berührt, sei k_A, k_B bzw. k_C. Der im Dreieck ABC gelegene Schnittpunkt D von k_B und k_C liegt auf der durch A gehenden Symmetrieachse des Dreiecks.

Die Kreise k_B, k_C haben als Radius die Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ des Dreiecks; daher hat in dem gleichschenkligen Dreieck BCD die Höhe DP die Länge

$$DP = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Entsprechendes gilt für die im Dreieck ABC gelegenen Schnittpunkte E, F von k_C und k_A bzw. von k_A und k_B sowie für ihre Lote EQ, FR auf CA bzw. AB.

Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so gilt wegen

$$SP = SQ = SR = \frac{a}{6}\sqrt{3} \qquad ; \qquad SD = SE = SF = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und wegen $SA = SB = SC = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ folgt aus dem Strahlensatz

$$EF = FD = DE = a \cdot \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{3} \cdot 3} = \frac{a}{2}\sqrt{6} - \frac{a}{2}$$

ferner schneiden EF, FD bzw. DE jeweils AP, BQ bzw. CR in U, V bzw. W, wobei

$$SU = SV = SW = \frac{EF}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{12}\sqrt{3} \qquad \text{also}$$
$$AU = BV = CW = AS + SU = \frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

ist.
Bezeichnet φ die (in Grad gemessene) Größe der zu den im Dreieck ABC verlaufenden Bögen $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}$, $\overset{\frown}{DE}$ in k_A bzw. k_B bzw. k_C gehörenden Zentriwinkel, so gilt folglich

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{6} - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt je eines der zu diesen Bögen gehörenden Kreissegmente beträgt

$$\pi \cdot AE^2 \cdot \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AU = a^2\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\right) =$$
$$= a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480°} - \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{2}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{3}\right) = a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480°} - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\right)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF beträgt

$$\frac{1}{4}EF^2\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{7}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt

$$a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{160°} - \frac{3}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{7}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{160°} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$$

Die Berechnung von $z = \frac{\pi \cdot \varphi}{160°} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ ergibt sich mit Hilfe der Zahlentafel ($[\varphi]$ bezeichnet die Maßzahl von φ)

$\sqrt{2} = 1{,}414$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	$\frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}2887$	$\sqrt{18} = 4{,}243$
$\sin\frac{\varphi}{2} = 0{,}4183$	$\frac{\varphi}{2} = 24{,}73°$	$\lg\frac{\varphi}{2} = 1{,}392$	$\lg\pi = 0{,}4971$	$\lg 80 = 1.9031$
$\frac{\pi \cdot \varphi}{160°} = 0{,}971$	$\lg\frac{\pi \cdot \varphi}{160°} = 0{,}9872 - 1$	$\frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}433$	$\frac{3}{4}\sqrt{2} = 1{,}061$	

Auf 3 Dezimalen genau ist $z = 0{,}344$.

Aufgabe 201214:
In einem rechtwinkligen kartesischen x,y-Koordinatensystem seien gegeben:

Die Punkte $M(0;0)$, $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$, $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade g mit der Gleichung $x = -8$, der Kreis k_1 um M durch A, der Kreis k_2 um M durch B.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$* versteht man die Menge E_1 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2 \cdot \overline{MA}$ gilt.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkt F_2, Leitlinie g und Exzentrizität 1/2* versteht man die Menge E_2 aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt $\overline{F_2P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ}$.

Unter der *Ellipse durch A mit Hauptscheitelkreis k_1 und Nebenscheitelkreis k_2* versteht man die Menge E_3 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von M ausgehenden Strahl. Er schneidet k_1 bzw. k_2 in je einem Punkt R_1 bzw. R_2. Die Parallele durch R_1 zur y-Achse und die Parallele durch R_2 zur x-Achse schneiden sich in P.

Beweisen Sie, dass die drei Punktmengen E_1, E_2, E_3 einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Gültigkeit von $P \in E_1$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 8 \tag{1}$$

Ist dies für einen Punkt $P(x;y)$ der Fall, so folgt

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 4 - 4x)(x^2 + y^2 + 4 + 4x)} = 64 \tag{2}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2} = 28 - (x^2 + y^2) \tag{3}$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 8(x^2 + y^2) + 16 - 16x^2 = 784 - 568x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \tag{4}$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \tag{5}$$

Umgekehrt folgt aus (5) wieder (4). Ferner folgt aus (5), dass

$$3x^2 + 3y^2 \leq 3x^2 + 4y^2 = 48 \qquad \text{also} \qquad x^2 + y^2 \leq 16 < 28$$

gilt. Hiernach und weil der Radikand in (3) das Produkt der beiden Radikanden in (1), also nichtnegativ ist, kann man von (4) weiter auf (3) schließen, und es folgt (2), woraus sich auch die Gleichung (1) ergibt, da ihre beiden Seiten nichtnegativ sind.
Also ist $P \in E_1$ mit (5) gleichbedeutend.

(II) Die Gültigkeit von $P \in E_2$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x+8|$$

dies mit

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 16x + 64)$$

und dies wieder mit (5).

(III) Der Kreis k_1 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 16$$

der Kreis k_2 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 12$$

Jeder von M ausgehende Strahl ist für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Menge aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten sich mit reellem $t \geq 0$ in der Form

$$(pt;qt) \tag{8}$$

schreiben lassen, und umgekehrt liefert diese Beschreibung für jedes Paar $(p;q) \neq (0;0)$ einen von M ausgehenden Strahl. Hiernach ergeben sich (für den jeweils betrachteten Strahl) die Koordinaten von R_1 wegen (6) durch Einsetzen desjenigen Wertes $t \geq 0$ in (8), der $p^2t^2 + q^2t^2)16$ erfüllt. Das ist der Wert $t = \frac{4}{\sqrt{p^2+q^2}}$, damit ist

$$R_1\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{4q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

gefunden. Ebenso findet man aus (7)

$$R_2\left(\frac{2p\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

Daraus ergibt sich nach Konstruktionsvorschrift

$$P\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \tag{9}$$

Also ist die Gültigkeit von $P \in E_3$ gleichbedeutend damit, dass für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Koordinatenangabe (9) auf $P(x;y)$ zutrifft.

Ist dies der Fall, so folgt

$$3x^2 + 4y^2 = \frac{3 \cdot 16p^2}{p^2+q^2} + \frac{4 \cdot 12}{p^2+^2} = 48$$

also (5).
Gilt umgekehrt (5), so sind x und y nicht beide gleich 0. Definiert man daher beispielsweise $p = x; q = \frac{2}{\sqrt{3}}y$, so gilt $(p;q) \neq (0;0)$ und

$$p^2 + q^2 = x^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{1}{3}(3x^2 + 4y^2) = 16$$

$$\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}} = p = x \qquad , \qquad \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}q = y$$

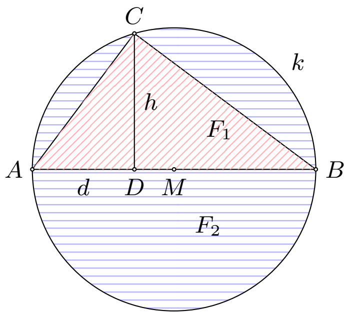
womit sich $P \in E_3$ ergeben hat.

In (I), (II), (III) ist nunmehr gezeigt, dass jede der Beziehungen $P \in E_1$, $P \in E_2$, $P \in E_3$ mit (5) gleichbedeutend ist. Daraus ergibt sich $E_1 = E_2 = E_3$, w. z. b. w.

Aufgabe 241211:
Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1.

Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach dem Satz des Thales ist die Hypotenuse des Dreiecks ABC ein Durchmesser von k. Ihre Länge sei d, die Länge der zugehörigen Dreieckshöhe sein h, der Flächeninhalt von k sei F_0. Dann gilt

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_0 - F_1}{F_1} = \frac{F_0}{F_1} - 1 = \frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\frac{dh}{2}} - 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{h} - 1$$

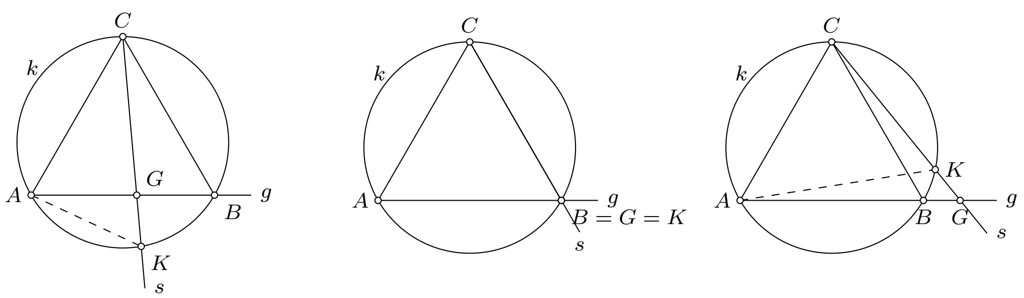
Ferner nimmt h alle positiven Werte $h \leq \frac{d}{2}$ an. Also nimmt $\frac{d}{h}$ alle Werte $\frac{d}{h} \geq 2$ an. Somit nimmt $\frac{F_2}{F_1}$ alle Werte $\frac{F_2}{F_1} \geq \frac{\pi}{2} \cdot 2 - 1 = \pi - 1$ an.

Der kleinste ganzzahlige Wert, den $F : 2 : F1$ annehmen kann, ist (wegen $2 < \pi - 1 < 3$) folglich der Wert 3.

Aufgabe 251212:
Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.

Man beweise, dass bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat, und berechne diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Gerade s kann unter den genannten Voraussetzungen durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass der Punkt K auf demjenigen Bogen $\overset{\frown}{AC}$ des Kreises k liegt, auf dem auch B liegt (siehe Abbildungen)



Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle AKC = \angle ABC = 60°$. Ferner liegt dann G auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, also ist

$$\angle GAC = \angle BAC = 60° = \angle AKC \tag{1}$$

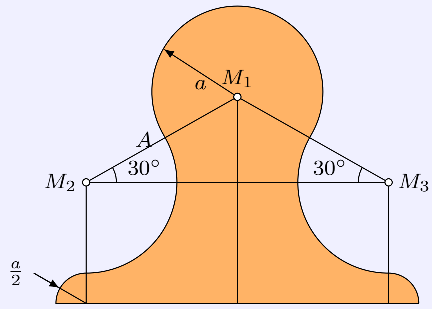
Da K auf den von C ausgehenden Strahl durch G liegt, ist $\angle AG = \angle KCA$. Aus (1) und (2) folgt $\triangle ACG \sim \triangle KCA$ und daraus $CA : CG = CK : CA$. Somit hat in der Tat

$$CG \cdot CK = CA^2$$

einen einheitlichen Wert, wie behauptet.
Zwischen der Seitenlänge $a = CA$ des k einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABC und dem Radius r von k besteht die Beziehung $a = r\sqrt{3}$.
Daher ist $CG \cdot CK = 3r^2 = 3 \cdot 1985^2$ mm^2 $= 11820675$ mm^2.

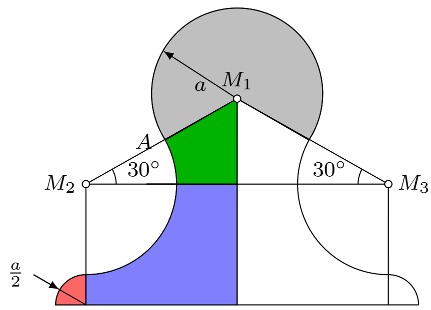
II Runde 2

Aufgabe V01120:



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = M_2A = a$ ist.

Lösung von Steffen Polster:
Die Figur setzt sich aus 4 verschiedenen Arten von Figuren zusammen:



Fläche 1 (hellgrau): Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 240°

$$A_1 = \pi a^2 \cdot \frac{240}{360}$$

Fläche 2 (grün): rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $2a$ und den Katheten a, $\sqrt{3}a$, von dem ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 30° abgezogen wird

$$A_2 = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}a - \frac{30}{360}\pi a^2$$

Fläche 3 (blau): Rechteck mit den Seitenlängen $\sqrt{3}a$ und $\frac{3}{2}a$ aus dem ein Viertelkreis (Radius a) herausgeschnitten wird

$$A_3 = a \cdot \sqrt{3}a - \frac{1}{4}\pi a^2$$

Fläche 4 (rot): Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$

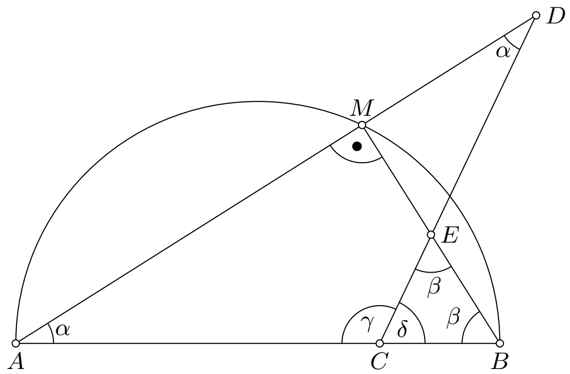
$$A_4 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die Flächen 2, 3 und 4 treten in der Gesamtfläche zweimal auf, d. h.

$$A = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 = \frac{\pi + 24\sqrt{3}}{8}a^2$$

Aufgabe 021224:
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, dass $CE = CB$ ist!
Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, dass $CA = CD$ ist!
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.
Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, dass jeder seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösung von Carsten Balleier:

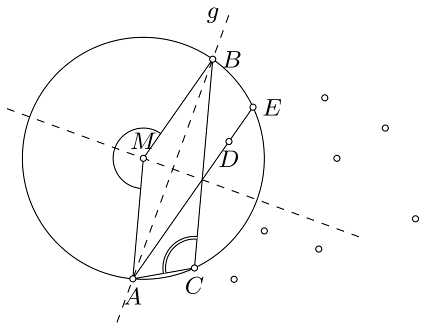


a) Der geometrische Ort aller Punkte M, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, ist der Halbkreis mit Durchmesser AB, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie der Punkt E.

b) Nach dem Satz des Thales ist es für die Wahrheit der obigen Behauptung notwendig, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter Winkel ist. Gleichbedeutend ist es zu zeigen, dass $\angle DME = 90°$ gilt.
Gemäß dem Innenwinkelsatz gilt aber $\angle DME + \angle MED + \angle EDM = 180°$.
Per Konstruktion ist das Dreieck ACD gleichschenklig, daher $\angle EDM = \alpha$. Gleiches trifft auf das Dreieck BEC zu, so dass $\beta = \angle BEC = \angle MED$ (Gegenwinkel).
Der Außenwinkelsatz führt auf $2\alpha = \delta$ und $2\beta = \gamma$, also $2(\alpha + \beta) = \gamma + \delta = 180°$ (gestreckter Winkel). Wegen $\alpha + \beta = 90° = \angle DME$ folgt die Behauptung.
Noch bewiesen werden muss, dass M nur auf einem Halbkreis liegen kann: Wegen $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$ können sich die Geraden BE und AD aber nur auf der einen Seite von AB schneiden.

Aufgabe 031123:
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Lösung von Henning Thielemann:



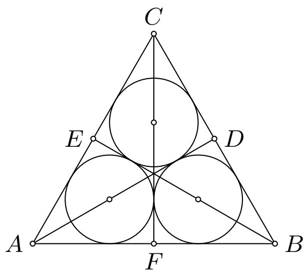
In der Punktmenge gibt es immer zwei Punkte A und B, durch die eine Gerade g verläuft, so dass alle Punkte der Menge auf derselben Seite von g liegen. Das trifft zum Beispiel für zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle zu. Diejenige Seite von g, auf der sich kein Punkt befindet betrachte als außen. Alle Kreise, die durch A und B verlaufen, haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB.

Da keine 3 Punkte der Punktmenge auf einer Geraden liegen, existiert zu jeder dreielementigen Untermenge genau ein Kreis, der durch alle Punkte der Untermenge verläuft. Von allen Punkten außer A und B nenne denjenigen Punkt C, der den größtmöglichen Winkel $\angle BCA$ aufweist.

Behauptung: Der Kreis durch A, B und C enthält keinen weiteren Punkt der Punktmenge.
Beweis: Angenommen, es gäbe noch einen Punkt D in dem Kreis.
Da sich alle Punkte der Menge auf der gleichen Seite der Geraden g befinden, muss sich D im Kreisabschnitt zwischen der Sehne AB und dem Bogen durch C befinden. Deswegen kann man die Strecke AD über D hinaus verlängern bis sie diesen Bogen im Punkt E schneidet.
Der Winkel $\angle BEA$ ist so groß wie $\angle BCA$ weil beide Peripheriewinkel über der gleichen Sehne auf derselben Seite sind. Die Dreiecke ABE und ABD haben den Winkel $\angle BAD$ gemeinsam, aber $\angle ABD$ ist kleiner als $\angle ABE$ und wegen der konstanten Innenwinkelsumme in Dreiecken ist $\angle BDA$ größer als $\angle BCA$.
Das ist aber ein Widerspruch, denn $\angle BCA$ sollte der größtmögliche Winkel sein. □

Aufgabe 031124:
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, dass jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Lösung von Henning Thielemann:



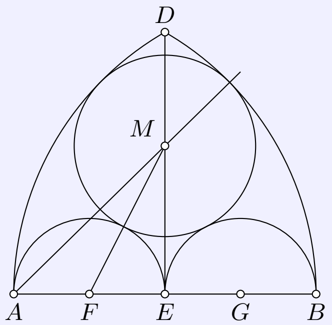
Bezeichne das Dreieck mit ABC und die Lotfußpunkte der Lote von A, B, C auf die jeweils gegenüberliegende Seite mit D, E, F. Der Inkreis vom Dreieck ACF berührt den Inkreis von BCF weil CF Symmetrieachse von ABC ist.
AD ist ebenfalls Symmetrieachse, deswegen ist der Inkreis von ACF gleichzeitig Inkreis von AEB und der Inkreis von BCE berührt den Inkreis von AEB. Analog folgt, dass sich die Inkreise von BCE und

BCF berühren. Die betrachteten Inkreise sind folglich die in der Aufgabenstellung ge- suchten.

a) $|AB| = a$ (Aufgabenstellung); $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck); $|AF| = \frac{a}{2}$.
b) Die naheliegendste Konstruktion ist wohl, einen Inkreis zum Beispiel den von ACF zu konstruieren und dessen Radius zu bestimmen.

1. Bestimme den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender
2. Bestimme den Radius des Kreises als Lot des Mittelpunktes auf eine Dreiecksseite.

Aufgabe 031222:



Gegeben sei eine Strecke AB. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit AB geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung).
E sei der Mittelpunkt von AB. Über AE und EB als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen. Berechnen Sie ME, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen $\overset{\frown}{AD}$ und $\overset{\frown}{BD}$ berührt!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Ist r der Radius des in der Aufgabe genannten Kreises um M, so gilt wegen der vorausgesetzten Berührung von innen $|AM| = a - r$, $|BM| = a - r$. Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da E auf m und auf AB liegt, sind die Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle FEM$ bei E rechtwinklig und es folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|ME|^2 = |AM|^2 - |AE|^2 = (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$|ME|^2 = |FM|^2 - |FE|^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

Wegen der vorausgesetzten Berührung von außen gilt nämlich $|FM| = \frac{a}{4} + r$. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 - 2ar + r^2 = \frac{ar}{2} + r^2$$

und weiter

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{5}{2}ar \Rightarrow r = \frac{3}{10}a$$

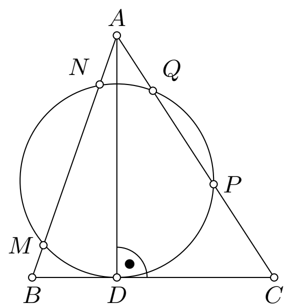
Mit Hilfe von (1) erhält man hieraus

$$|ME|^2 = \left(\frac{7}{10}a\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{24}{100}a^2 \Rightarrow |ME| = \frac{\sqrt{6}}{5}a$$

Aufgabe 031224:
Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden.
Man beweise, dass gilt

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}$$

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Da die Seite BC tangential an den genannten Kreis liegt, können wir den Sekanten-Tangentensatz ausgehend von den Punkten B und C hinschreiben:

$$BM \cdot BN = BD^2 \qquad \text{und} \qquad CP \cdot CQ = CD^2$$

Setzen wir hierin $BM = AB - AM, BN = AB - AN, CP = AC - AP, CQ = AC - AQ$ sowie $BD^2 = AB^2 - AD^2$ und $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ein, multiplizieren aus und berücksichtigen schließlich noch den Sehnensatz $AM \cdot AN = AP \cdot AQ$, erhalten wir die Gleichung

$$(AM + AN)AB = (AP + AQ)AC$$

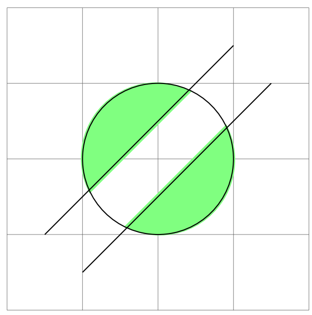
die der Behauptung äquivalent ist.

Aufgabe 041226:
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen

$$x^2 + y^2 < r^2 \qquad \text{und} \qquad |y - x| > \frac{r}{2}$$

genügen $(r > 0)$!

Lösung von Caban:



Die gesuchte Fläche sind zwei Kreissegmente des Kreises mit dem Radius r und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt M.
Die Sehne des ersten Kreissegments liegt auf der Gerade $y = x + \frac{x}{2}$ und das Segment liegt oberhalb dieser Geraden. Die Sehne des zweiten Segments liegt auf der Gerade $y = x - \frac{x}{2}$, das Segment liegt unterhalb.
Es ist $|x-y| > \frac{r}{2} \iff x-y > \frac{r}{2}$ oder $x-y < -\frac{r}{2} \iff y < x - \frac{r}{2}$ oder $y > x + \frac{r}{2}$. Folglich gehören nur solche Punkte (x,y) zur Menge, die unterhalb der Gerade $y = x - \frac{r}{2}$ oder oberhalb der Geraden $y = x + \frac{r}{2}$ liegen. Zur Berechnung der Eckpunkte:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = x + \frac{r}{2} \cdot q; q \in \{-1;+1\}$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + (x + \frac{r}{2} \cdot q)^2 &= 1 \\ x^2 + (x^2 + q \cdot r \cdot x + \frac{r^2}{4}) &= 1 \\ x^2 + \frac{q}{2} \cdot rx - \frac{3}{8} \cdot r^2 &= 1 \\ x = r \cdot (-\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}); \quad k &\in \{-1;1\} \\ y = r \cdot (\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}&) \end{aligned}$$

Aufgabe 111223:
Klaus bemerkt, dass die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

Lösung von StrgAltEntf:
In einer Minute überstreicht der Minutenzeiger einen Winkel von $\frac{360°}{60} = 6°$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $\frac{360°}{12 \cdot 60} = 0{,}5°$.

Um x Minuten nach 6 Uhr schließt der Minutenzeiger mit der 12-Uhr-Position also einen Winkel von $6x°$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $(180 + 0{,}5x)°$ ein. Für die beiden genannten Zeitpunkte a Minuten nach 6 Uhr und b Minuten nach 6 Uhr mit $a < b$ gilt daher

$$180 + 0{,}5a - 6a = 110 \qquad \text{und} \qquad 6b - (180 + 0{,}5b) = 110$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $\frac{11}{2}b - \frac{11}{2}a = 220$ bzw. $b - a = 40$. Zwischen den beiden Zeitpunkten liegen also exakt 40 Minuten.

Aufgabe 171224:
Gegeben sei in einer Ebene ε ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ε, für die $AX + BX = CX$ gilt.

Lösung von ochen:
I. Wir skalieren das Dreieck bis es den Umkreisradius 1 hat und legen es in ein Koordinatensystem, sodass $A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $C = (1,0)$ gilt. Für die gesuchten Punkte $X = (x,y)$ folgt

$$\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Quadrieren beider Seiten ergibt

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=(x-1)^2+y^2.$$

Wenn wir die Quadrate subtrahieren, ausmultiplizieren und erneut zusammenfassen, erhalten wir

$$2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=-(x+2)^2-y^2+3.$$

Nochmaliges Quadrieren ergibt

$$4((x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)((x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)=(-(x+2)^2-y^2+3)^2.$$

Multiplizieren wir dies wieder aus, erhalten wir

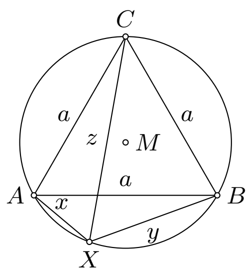
$$4x^4+8x^3+8x^2y^2+12x^2+8xy^2+8x+4y^4-4y^2+4=x^4+8x^3+2x^2y^2+18x^2+8xy^2+8x+y^4+2y^2+1.$$

Wenn wir die rechte Seite subtrahieren und anschließend zusammmenfassen, bekommen wir als Ergebnis

$$3(x^2+y^2-1)^2=0.$$

Alle Punkte X, die der Bedingung $|AX|+|BX|=|CX|$ genügen, liegen also auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

II. Liegt ein Punkt X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, so bilden das Dreieck ABC und X ein Sehnenviereck. In diesem sind die Diagonalen (X liege zuerst zwischen A und B) einmal $|AB|=a$ und einmal $|CX|=z$. Die Viereckseiten sind $|CA|=a$, $|CB|=a$, $|AX|=x$ und $|BX|=y$.

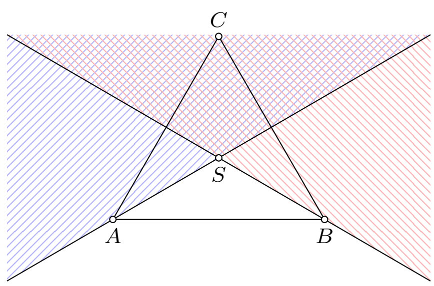


Nach dem Satz des Ptolemäus für Sehnenvierecke ist dann $x\cdot a+y\cdot a=z\cdot a$ womit sofort das Gesuchte ($a>0$) $|AX|+|BX|=|CX|$ folgt.
Für $X=A$ bzw. $X=B$ ergibt sich mit $|AX|=0$ und $|BX|=a$ bzw. mit $|BX|=0$ und $|AX|=a$, dass die Punkte A und B ebenfalls zur Lösungsmenge gehören.

Liegt X nicht zwischen A und B sondern auf den Kreisbögen $\widehat{AC}$ bzw. $\widehat{BC}$ erhält man für das Sehnenviereck nach dem Satz des Ptolemäus entweder $x\cdot a+z\cdot a=y\cdot a$ oder $y\cdot a+z\cdot a=x\cdot a$. Für derartige X ist $AX+BX=CX$ nicht erfüllt.

Die Menge alle Punkte X mit der geforderten Eigenschaft ist damit der Kreisbogen $\widehat{AB}$ inkl. seiner Randpunkte.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Schwerpunkt von $\triangle ABC$ sei S. Liegt ein Punkt X auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C, so ist $BX > CX$ (da diese Gerade die Mittelsenkrechte von BC ist), also erst recht $AX + BX > CX$. Liegt X auf derselben Seite der Geraden durch B und S wie C, so gilt entsprechend $AX > CX$, also $AX + BX > CX$.
Gehört ein Punkt X der Fläche des Dreiecks ABC an, ist aber von A und V verschieden, so gilt

- $AX + BX \geq AB$ (Dreiecksungleichung)
- $> CX$ (da alle Punkte der Dreiecksfläche außer A und B im Innern des Kreises um C durch A und B liegen).

Für $X = A$ und für $X = B$ gilt die Gleichung $AX + BX = CX$.

Die nun noch verbleibenden Punkte X liegen sämtlich in derjenigen Halbebene H, die von der Geraden durch A und B begrenzt wird und nicht C enthält. Außerdem kann durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass X nicht auf der Verlängerung von CA liegt, so dass die Punkte A, C, X ein (nicht entartetes) Dreieck bilden.

Es sei $\triangle AXY$ dasjenige gleichseitige Dreieck, für das Y und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und X liegen. Dann gilt

$$AX = AY \qquad , \qquad AB = AC \tag{1}$$

und die Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken AXY, ABX ist gleich der Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken ABC, ABX.

Nach den Angaben über X ist diese Summe entweder kleiner oder größer als 180°; in beiden Fällen folgt, dass die Dreiecke ABY und ACX bei A gleichgroße Innenwinkel haben. Hieraus und aus (1) ergibt sich $\triangle ABY \cong \triangle ACX$, also $BY = CX$.

Also gilt genau dann $AX + BX = CY$, wenn $XY + BX = BY$ gilt. Diese ist genau dann der Fall, wenn X auf der Strecke BY liegt, d. h. die Summe der Innenwinkel bei X in den Dreiecken AXY und AXB genau 180° beträgt.
Hierfür ist $\angle AXB = 120°$ notwendig und hinreichend und dies ist (für die im vorliegenden Fall betrachteten X) gleichwertig damit, dass X auf dem in H verlaufenden Kreisbogen liegt, der zu einem Zentriwinkel der Größe 240° gehört.

Wegen $\angle ASC + \angle CSB = 240°$ ist S der zugehörige Kreismittelpunkt. Die gesuchte Menge ist also derjenige Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Unkreises des Dreiecks ABC, der C nicht enthält.

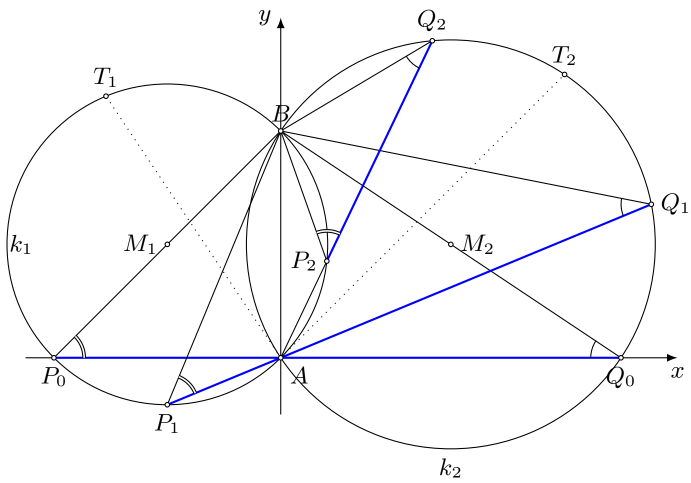
Aufgabe 261224:
Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, dass sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und dass die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt.
Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.
Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der vorausgesetzten Lage von k_1 und k_2 (siehe Abbildung) schneidet die in A an k_2 gelegte Tangente den Kreis k_1 außer in A in einem Punkt T_1, und ebenso schneidet die in A an k_1 gelegte Tangente den Kreis k_2 außer in A in einem Punkt T_2, Die sämtlichen zu betrachtenden Längen der Strecke PQ sind

dann folgendermaßen zu erhalten:

(1) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_1A}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_1, A). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AT_2}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, T_2). Die Abbildung zeigt zwei Beispiele P_0Q_0 und P_1Q_1.

(2) P durchläuft den innerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, B). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_2B}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_2, B). Die Abbildung zeigt ein Beispiel P_2Q_2.



(3) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BT_1}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, T_1). Dabei durchläuft Q den innerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BA}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, A).

Unter den zu betrachtenden Geraden durch A befindet sich diejenige, die senkrecht zu AB verläuft (oder, als gleichwertige Charakterisierung, parallel zu M_1M_2). Die von ihr erhaltene Strecke PQ hat die in der Abbildung gezeigt Lage P_0Q_0, die zu Fall (1) gehört.

Behauptung: Genau für diese Gerade ist die Strecke PQ möglichst lang.
Beweis:
Es sei PQ irgendeine der zu betrachtenden Strecken, die verschieden von P_0Q_0 ist. Ist sie eine zu Fall (1) gehörende Strecke P_1Q_1, so folgt:
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BP_1A = \angle BP_0A$ und $\angle BQ_1A = \angle BQ_0A$, nach dem Hauptähnlichkeitssatz also $\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BP_0Q_0$.
Ist PQ eine zu Fall (2) gehörende Strecke P_2Q_2, so folgt:
Nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt $\angle BP_2A = 180° - \angle BP_0A$ und $\angle BP_2Q_2 = \angle BP_0A$, nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BQ_2A = \angle BQ_0A$, so dass ebenfalls $\triangle BP_2Q_2 \sim \triangle BP_0Q_0$ folgt.
Da Fall (3) durch Vertauschung von k_1, k_2 in Fall (2) übergeht, gilt in jedem Fall

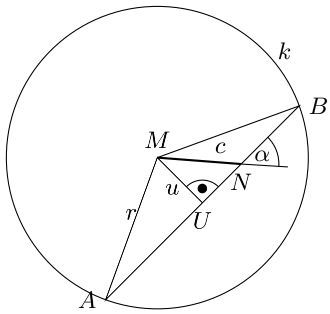
$$\triangle BPQ \sim \triangle BP_0Q_0 \qquad (*)$$

Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel folgt ferner aus $\angle BAP_0 = 90°$, dass $\angle BM_1P_0 = 180°$ gilt, d. h., dass die Sehne BP_0 ein Durchmesser von k_1 ist. Ebenso ist BQ_0 ein Durchmesser von k_2.

Da aber jede von dem Durchmesser BP_0 verschiedene Sehne BP kürzer als der Durchmesser ist, d. h. $BP < BP_0$ gilt, folgt wegen (*) schließlich $PQ < P_0Q_0$, w. z. b. w.

Aufgabe 281223:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.
Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Radius von k betrage r, ferner sei $C = MN$. Ist AB eine Sehne durch N, so bezeichne U den Fußpunkt des Lotes von M auf AB. Mit $u = MU$ gilt dann (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen A, B)

$$NA = AU + UN = \sqrt{r^2 - u^2} + \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$NB = BU - UN = \sqrt{r^2 - u^2} - \sqrt{c^2 - u^2}$$

Daher ist

$$NA^2 + NB^2 = 2(r^2 - u^2) + 2(c^2 - u^2)$$

genau dann möglichst klein, wenn u möglichst groß ist, und genau dann möglichst groß, wenn u möglichst klein ist. Damit folgt:

a) Für $u = \sqrt{x^2 - UN^2}$ gibt es einen größtmöglichen Wert, nämlich $u = c$. Er wird angenommen, wenn der Lotfußpunkt U mit N zusammenfällt, d. h., wenn AB die auf MN senkrecht (durch N) verlaufende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst klein.

b) Für u gibt es einen kleinstmöglichen Wert, nämlich $u = 0$. Er wird angenommen, wenn U mit M zusammenfällt, d. h. wenn AB die durch (N und) M gehende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst groß.

III Runde 3

Aufgabe V11133:
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

Lösung von ochen:
a) O. B. d. A. seien $A = (-\frac{e}{2},0)$ und $B = (\frac{e}{2},0)$, so sind alle Punkte $F = (x,y)$ mit

$$s = ((x + \frac{e}{2})^2 + y^2) + ((x - \frac{e}{2})^2 + y^2) = 2x^2 + 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2y^2$$

gesucht. Diese Gleichung ist äquivalent zur Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Die gesuchten Punkte F bilden also einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke AB ist und dessen Radius $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}$ ist.

b) Da Quadrate reeller Zahlen stets größer oder gleich Null sind, gibt es nur solche Punkte F, wenn $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4} \geq 0$ ist. Insbesondere gibt es nicht bei jeder Wahl von e und s solche Punkte.

Aufgabe V11233:
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Lösung von ochen:
Wir legen den Kreis mit dessen Sehnen in ein Koordinatensystem, sodass der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die Sehnen parallel zu jeweils einer der Koordinatenachsen verlaufen. Der Radius des Kreises sei mit r bezeichnet.
Der Schnittpunkt der Sehnen habe die Koordinaten (x,y), so haben die Endpunkte der einen Sehne die Koordinaten $(x, \pm\sqrt{r^2 - x^2})$ und die Endpunkte der anderen Sehne die Koordinaten $(\pm\sqrt{r^2 - y^2}, y)$.
Die Summe der vier Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser

$$\frac{\pi}{4}(y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(y + \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x + \sqrt{r^2 - y^2})^2 =$$

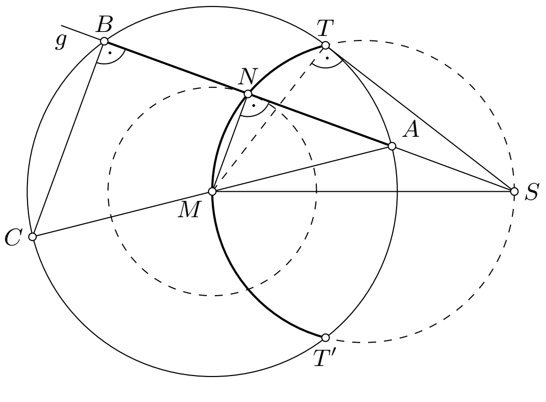
$$= \frac{\pi}{4}((y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + (y + \sqrt{r^2 - x^2})^2) + \frac{\pi}{4}((x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + (x + \sqrt{r^2 - y^2})^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(2y^2 + 2(r^2 - x^2)) + \frac{\pi}{4}(2x^2 + 2(r^2 - y^2)) = \pi r^2$$

Das ist genau der Flächeninhalt des Kreises. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 021135:
Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Lösung von Eckard Specht:



Sei AB eine der Sehnen, die die beliebige Gerade g aus dem gegebenen Kreis k herausschneidet und N deren Mittelpunkt. ST und ST' seien die beiden Tangentenabschnitte von S an k.
Ferner sei k' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, für den AN gerade ein Tangentenabschnitt ist. Dann gilt aufgrund $ST \perp MT$ und $AN \perp MN$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= MT^2 + ST^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle STM) \\ &= (MT^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{„nahrhafte Null“ } MN^2 - MN^2) \\ &= (AM^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{gleiche Radien } MT = AM) \\ &= AN^2 + ST^2 + MN^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle ANM) \quad (1) \end{aligned}$$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt weiterhin:

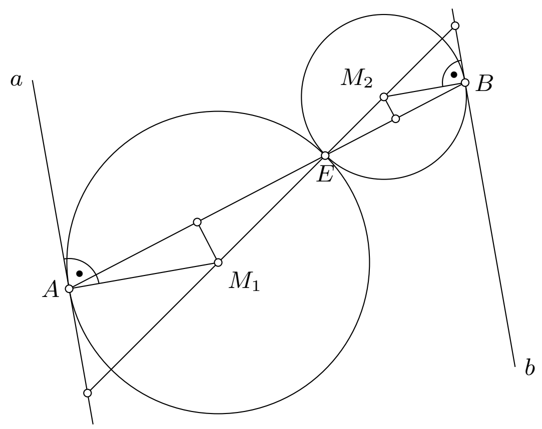
$$ST^2 = SA \cdot SB = \left(\frac{SB + SA}{2}\right)^2 - \left(\frac{SB - SA}{2}\right)^2 = SN^2 - AN^2 \quad (2)$$

wobei $SB + SA = 2SN$ und $SB - SA = 2AN$ wegen der Mittelpunktseigenschaft von N gilt.

(2) in (1) eingesetzt ergibt $SM^2 = SN^2 + MN^2$, woraus mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass N auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SM liegt.

Aufgabe 031236:
Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B.
Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.
b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.
c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
d) Es ist $r_1 = 2r_2$.

Lösung von Carsten Balleier:



Konstruktion:
In A und B werden die Senkrechten zu a bzw. b errichtet, diese seien $a^\perp$ und $b^\perp$. Die Strecke AB wird im Verhältnis $r_1 : r_2$ geteilt; der Teilpunkt sei E.
Zu AE wird die Mittelsenkrechte konstruiert, ihr Schnittpunkt mit $a^\perp$ ist der gesuchte Mittelpunkt M_1. Analog erhält man M_2 als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BE mit $b^\perp$. Die Radien sind $r_1 = M_1E$ und $r_2 = M_2E$.

Beweis:

Zu zeigen ist zuerst (Bild), dass der Punkt E der einzig mögliche Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise ist. Im weiteren wird geprüft, dass die Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt.
Die erste Überlegung ist, dass die Punkte M_1 und M_2 auf den Senkrechten zu a bzw. b in den Punkten A bzw. B liegen müssen. Genauer gesagt liegen sie auf dem Teilstrahl, der die jeweils andere Gerade schneidet. Nur so können die Bedingungen a) und b) erfüllt werden.
Um Bedingung c) zu genügen, zeigt man: Wählt man zwei Punkte M_1' auf $a^\perp$ und M_2' auf $b^\perp$ (mit $AM_1' : BM_2' = r_1 : r_2$), so ist der Punkt E, der $M_1'M_2'$ im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilt, unabhängig von der Wahl der M_i' und liegt auf AB.

Das ist der Fall, weil die Dreiecke EBM_2' und EAM_1' ähnlich sind (Wechselwinkel bei M_1' und M_2', sowie $M'1E : M'1A = M'2E : M'2B$ nach Voraussetzung).
Da der Punkt E der eindeutige Teilpunkt für alle denkbaren Mittelpunktspaare M_1', M_2' ist, muss er auch der Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise sein.

Hiermit ist nun klar, dass die obige Konstruktion korrekt ist:
Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben zu A und E, die auf dem Kreis liegen müssen, den gleichen Abstand. Daher muss M_1 auf ihr liegen. Gleichzeitig muss M_1 auf $a^\perp$ liegen, also ist M_1 der Schnittpunkt. Ebenso geht man für M_2 vor.

Aufgabe 081233:
Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.
a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.
Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Lösung von cyrix:
a) Für einen Berührungspunkt B eines Kreises k, der die Sehne P_1P_2 enthält (und für den also g eine Sekante ist, die auch den Punkt Q enthält) mit der Tangente durch Q gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz $|BQ|^2 = |QP_1| \cdot |QP_2|$. Insbesondere ist die rechte Seite dieser Gleichung konstant und nicht vom betrachteten Kreis k abhängig. Damit liegen alle diese Berührungspunkte für alle solche Kreise k auf einem Kreis um Q mit Radius $\sqrt{|QP_1| \cdot |QP_2|}$.

b) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt B, der auf beiden Kreisen nach Aufgabenteil a) um Q_1 bzw. Q_2 liegt. Dabei sind zur Lage des Punktes B zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: B liegt nicht auf g. Dann gibt es genau einen Kreis, der die drei Punkte B, P_1 und P_2 enthält. Sein Mittelpunkt sei M. Nach Aufgabenteil a) berühren aber sowohl die Gerade Q_1B als auch Q_2B den Kreis k in B und stehen somit senkrecht auf MB. Da es nur eine solche Orthogonale zu MB durch B gibt, müssen die beiden Geraden Q_1B und Q_2B identisch sein, ihre Schnittpunkte mit g aber auch. Da B nicht auf g liegt, ist dieser Schnittpunkt aber eindeutig bestimmt, sodass $Q_1 = Q_2$ entgegen der Voraussetzung folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Fall 2: B liegt auf g. Es seien $r_1 = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|}$ und $r_2 = \sqrt{|Q_2P_1| \cdot |Q_2P_2|}$ die Radien der beiden Kreise. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

Fall 2.1: Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_1P_2. O. B. d. A. gelte $|Q_1P_1| < |Q_1P_2|$. Dann ist $r_1 < \sqrt{|Q_1P_2| \cdot |Q_1P_2|} = |Q_1P_2| < |Q_1Q_2|$. Analog ist auch $r_2 < |Q_1Q_2|$. Damit muss jeder Schnittpunkt B beider Kreise auf g zwischen ihnen liegen.

Dann ist

$$|Q_1Q_2| = |Q_1B| + |Q_2B| = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|} + \sqrt{|Q21P_1| \cdot |Q_2P_2|} <$$
$$< \frac{1}{2} \cdot (|Q_1P_1| + |Q_1P_2| + |Q_2P_1| + |Q_2P_2|) = |Q_1M| + |MQ_2| = |Q_1Q_2|$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 2.2.: Q_1 und Q_2 liegen auf der gleichen Seite von P_1P_2. O. B. d. A. liegen die Punkte dann in der Reihenfolge Q_2, Q_1, P_1, P_2 auf g. Es ist dann wegen $|P_1Q_2| > |P_1Q_1|$ und $|P_2Q_2| > |P_2Q_1|$ auch $r_2 > r_1$. Insbesondere kann dann nicht B „vor“ Q_2 liegen, da dann $r_1 = |BQ_1| = |BQ_2| + |Q_1Q_2| > r_2$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist. Auch kann B nicht auf der Strecke Q_2Q_1 liegen, da sonst der Widerspruch durch $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2B| + |BQ_1| = |Q_2Q_1| < |Q_2P_1|$ folgen würde.

Also muss B auf g „nach“ Q_1 liegen. Da $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2P_2|$ gilt, liegt der einzige Schnittpunkt des Kreises um Q_2 mit g, der „nach“ Q_1 liegt, auf der Strecke P_1P_2. Dieser hat die Entfernung $r_2 - |Q_2P_1|$ von P_1. Analog hat der Schnittpunkt des Kreises um Q_1 mit g, der „nach“ Q_1 auf g liegt, die Entfernung $r_1 - |Q_1P_1|$ von P_1. Damit B als Schnittpunkt dieser beiden Kreise an der angegebenen Stelle existiert, müssen diese Werte gleich sein.

Es seien x und t positive reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion $f_t(x) := \sqrt{x \cdot (t+x)} - x$. Dann ist die Entfernung des zu betrachtenden Schnittpunktes des Kreises um Q_2 mit g von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ und analog die des Schnittpunktes des Kreises um Q_1 von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$. Es genügt also für die Nichtexistenz eines gemeinsamen Schnittpunktes B beider Kreise auf g zu zeigen, dass für konstantes $t > 0$ die Funktion $f_t(x)$ streng monoton für alle $x > 0$ ist.

Es ist dabei $f_t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} - 1$. Um die strenge Monotonie für $f_t(x)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass für die zu betrachtenden positiven Werte von x stets auch $f_t'(x) > 0$ ist. Für $x = t$ ist dies jedenfalls der Fall, denn $f_t'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{\sqrt{t \cdot 2t}} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 > 0$. Die letzte Ungleichung sieht man dadurch ein, dass man sie äquivalent zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ bzw. $3 > 2\sqrt{2}$ und schließlich der offensichtlich wahren Ungleichung $9 > 4 \cdot 2 = 8$ umformt.

Wäre $f_t(x)$ nicht streng monoton für alle $x > 0$, so müsste es also aufgrund der Stetigkeit von $f_t'(x)$ mindestens eine Nullstelle dieser Funktion geben. Es ist aber die Gleichung $f_t'(x) = 0$ äquivalent zu

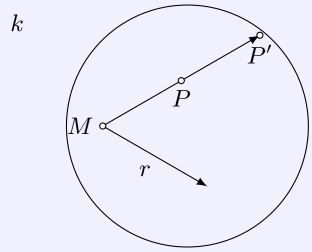
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} = 1$ bzw. $2x + t = 2\sqrt{x \cdot (t+x)}$, woraus

$$4x^2 + 4xt + t^2 = (2x+t)^2 = 4x(t+x) = 4x^2 + 4xt$$

also $t^2 = 0$ und damit $t = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Damit hat $f_t'(x)$ für alle $t > 0$ keine Nullstellen, ist $f_t(x)$ streng monoton und nimmt also für verschiedene Argumente x auch verschiedene Funktionswerte an. Insbesondere sind also wegen $P_1 \neq P_2$ und $Q_1 \neq Q_2$ auch $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$ und $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ verschieden, sodass die beiden Kreise gemäß Teilaufgabe a) um Q_1 bzw. Q_2 keinen gemeinsamen Punkt auf g, und damit auch auf ganz ε, besitzen, $\square$.

Aufgabe 091233:



Gegeben sei in einer Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $MP \cdot MP_1 = r^2$ ist.
Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d. h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.
Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Lösung von cyrix:
Es wird k_1 auf sich selbst abgebildet.
Beweis:
Seien S und T die beiden Schnittpunkte von k und k_1. Dann gilt offensichtlich $|MS| \cdot |MS| = r^2 = |MT| \cdot |MT|$, sodass die Punkte S und T ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich k sind.

Sei nun P ein Punkt auf k_1, der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von M ausgehende Strahl durch P den Kreis k_1 in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von M ausgehenden Tangenten an k_1 durch S und T verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt P_1.
Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz (bezogen auf k_1, die Sehne PP_1 und die Tangente MS) die Beziehung $|MP| \cdot |MP_1| = |MS|^2 = r^2$, sodass jeder Punkt auf k_1 wieder auf einen Punkt auf k_1 abgebildet wird.
Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar:

Wird sie zwei mal angewendet, erhält man wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf k_1 der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf k_1 sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich k von Punkten auf k_1 wieder genau k_1 selbst ist $\square$.

Aufgabe 111231:
Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90°$.
a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d. h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent).
Deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt von g und h. Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene dieser beiden Geraden, dass g auf der x-Achse, S im Koordinatenursprung und h derart zu liegen kommt, dass diese Gerade durch den ersten Quadranten (bzw. auf der y-Achse) verläuft.

Der Punkt S ist Fixpunkt beider Spiegelungen, wird also auch durch die Hintereinanderausführung beider Spiegelungen wieder auf sich selbst abgebildet.

Für einen von S verschiedenen Punkt P kann man dessen Polarkoordinaten mit dem Paar (r,ϕ) angeben, wobei $r > 0$ die Entfernung $|SP|$ und ϕ den Winkel, den ein Strahl, beginnend mit der positiven x-Achse, überstreichen muss, bis er P erreicht, darstellt. Dabei ist der Winkel ϕ modulo 360° zu lesen, da Polarkoordinaten, bei denen sich das Argument ϕ um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, den gleichen Punkt in der Ebene beschreiben.

Der Punkt P mit Koordinaten (r,ϕ) wird durch Spiegelung an g, also an der x-Achse, auf den Punkt P_g mit Koordinaten $(r,-\phi)$ abgebildet.

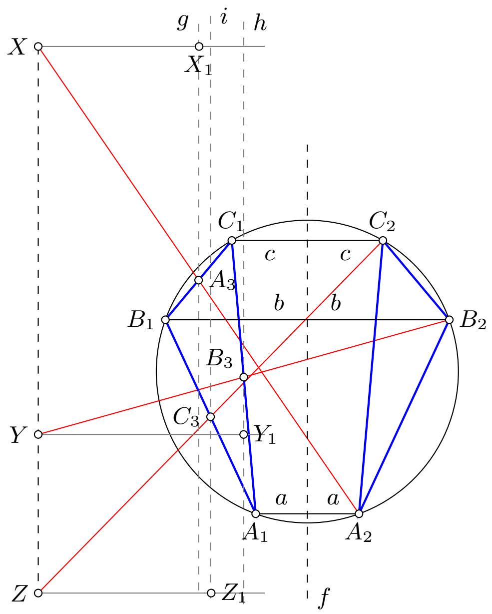
Spiegelt man dagegen den Punkt P an der Geraden h, so bleibt wieder dessen Betrag r erhalten, da Spiegelungen längentreu sind, und die Strecke SP also die gleiche Länge wie die Strecke SP_h besitzt. Um das Argument vom Spiegelpunkt P_h zu ermitteln, beachten wir, dass der von S ausgehende Strahl, der sich von P bis zum positiven Ast von h bewegt, einen Winkel von $\alpha - \phi$ überstreicht. Bis P_h muss nun der Strahl von eben jenem positiven Ast von h in der gleichen Richtung einen gleichgroßen Winkel überstreichen, bis er P_h erreicht. Also besitzt P_h das Argument $\alpha + (\alpha - \phi) = 2\alpha - \phi$ und damit die Polarkoordinaten $(r,2\alpha - \phi)$.

Auf analoge Weise können wir nun den Punkt P_g an h spiegeln und erhalten den Punkt P_{gh} mit den Polarkoordinaten $(r,2\alpha - (-\phi)) = (r,\phi + 2\alpha)$. Jeder von S verschiedene Punkt P wird also durch die Hintereinanderausführung der Spiegelungen erst an g und dann an h um den Winkel 2α in mathematisch positiver Richtung um S gedreht. Der Punkt S bleibt dabei fix und ist das Drehzentrum.

Spiegelt man dagegen P_h an g, so erhält man den Punkt P_{hg} mit den Polarkoordinaten $(r,-(2\alpha-\phi)) = (r,\phi - 2\alpha)$. Dies stellt also eine Drehung um den Winkel -2α in mathematisch positiver Richtung um das Drehzentrum S dar. Dies liefert also nur dann die gleiche Drehung wie die zuvor betrachtete, wenn $P_{gh} = P_{hg}$ gilt, also sich die Argumente $\phi \pm 2\alpha$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheiden. Wegen $0 < \alpha \leq 90°$ ist dies nur genau für $\alpha = 90°$ der Fall.

Aufgabe 151233:
Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegende Punkte.
Man beweise, dass X,Y und Z auf ein und derselben Geraden liegen.

Lösung von Felix Kaschura:



Voraussetzung: A_3 halbiert B_1C_1 und A_2X, B_3 halbiert A_1C_1 und B_2Y, C_3 halbiert A_1B_1 und C_2Z
Behauptung: X, Y und Z liegen auf derselben Gerade

Beweis: Es werden folgende zu den parallelen Sehnen senkrechte Geraden eingeführt:
f durch den Kreismittelpunkt, g durch A_3, h durch B_3, i durch C_3.
Allgemein werde der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g durch $d(gP)$ bezeichnet.
a, b bzw. c sind wie folgt definiert: $a := d(fA_2)$, $b := d(fB_2)$, $c := d(fC_2)$. Da der Durchmesser (hier durch f repräsentiert) eines Kreises senkrecht stehende Sehnen halbiert, gilt ebenfalls $d(fA_1) = a$, $d(fB_1) = b$, $d(fC_1) = c$.
Mit der Voraussetzung lässt sich nun der Abstand von A_3, B_3 und C_3 zu f ausdrücken:

$$d(fA_3) = \frac{d(fB_1) + d(fC_1)}{2} = \frac{b+c}{2}$$

und analog

$$d(fB_3) = \frac{a+c}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad d(fC_3) = \frac{a+b}{2}$$

Schließlich ergeben sich nun für die Abstände der Punkte X, Y, Z zu f folgende Gleichungen:

$$d(fX) = d(gX) + d(fA_3) = d(gA_2) + d(fA_3) = a + d(fA_3) + d(fA_3) = a + 2 \cdot \frac{b+c}{2} = a + b + c$$

$$d(fY) = d(hY) + d(hB_3) = d(hB_2) + d(fB_3) = b + d(fB_3) + d(fB_3) = b + 2 \cdot \frac{a+c}{2} = a + b + c$$

$$d(fZ) = d(iZ) + d(iC_3) = d(iC_2) + d(fC_3) = c + d(fC_3) + d(fC_3) = c + 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b + c$$

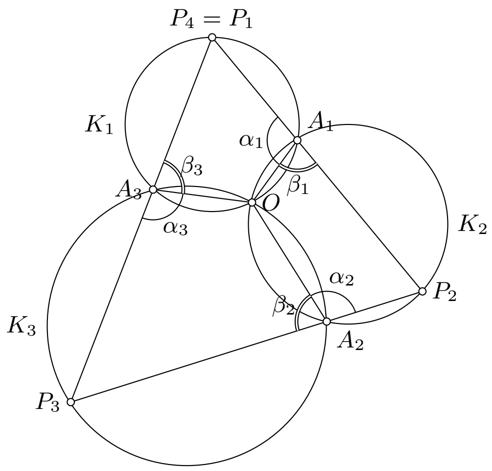
Damit liegen die drei Punkte X, Y und Z auf derselben Seite einer Geraden (f) und haben denselben Abstand zu ihr. Daraus folgt, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen (die parallel zu f verläuft).
q. e. d.

Aufgabe 251232:
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise $K_1, ..., K_n$, so in einer Ebene gelegen, dass sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen $K_1, ..., K_n$ liegt. Für $i = 1, ..., n$ gilt:
K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.

Die Punkte $A_1, ..., A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, A_1$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, ..., P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: Für $i = 1, ..., n$ gilt: P_i liegt auf Kreis K_i und ist von O und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von O aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, ..., P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Voraussetzungen über $O, A_3, P_1, A_1, P_2, A_2, P_3$ sind $OA_3P_1A_1$, $OA_1P_2A_2$ und $OA_2P_3A_3$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\alpha_2 = \angle P_2A_2O$, $\alpha_3 = \angle P_3A_3O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, $\beta_2 = \angle P_3A_2O$, $\beta_3 = \angle P_1A_3O$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_2 = 180° \quad (1)$$



Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2 und die Verlängerung von P_2A_2 über A_2 hinaus durch P_4, also gilt

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° = \alpha_2 + \beta_2 \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha_3 + \beta_3 = 180°$. Also geht die Verlängerung von P_3A_3 über A_3 hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_3 verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_3 und A_3. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_4; somit ist $P_4 = P_1$ bewiesen.

b) Nach den Voraussetzungen über $O, A_n, P_1, A_1, ..., A_{n-1}, P_n$ sind $OA_nP_1A_1$, $OA_1P_2A_2$, ..., $OA_{n-1}P_nA_n$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, ..., $\alpha_{n-1} = \angle P_{n-1}A_{n-1}O$, $\beta_{n-1} = \angle P_nA_{n-1}O$, $\alpha_n = \angle P_nA_nO$, $\beta_n = \angle P_1A_nO$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_n = \alpha_2 + \beta_1 = ... = \alpha_n + \beta_{n-1} = 180° \quad (3)$$

Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2, ... die Verlängerung von $P_{n-1}A_{n-1}$ über A_{n-1} hinaus durch P_n, also gilt

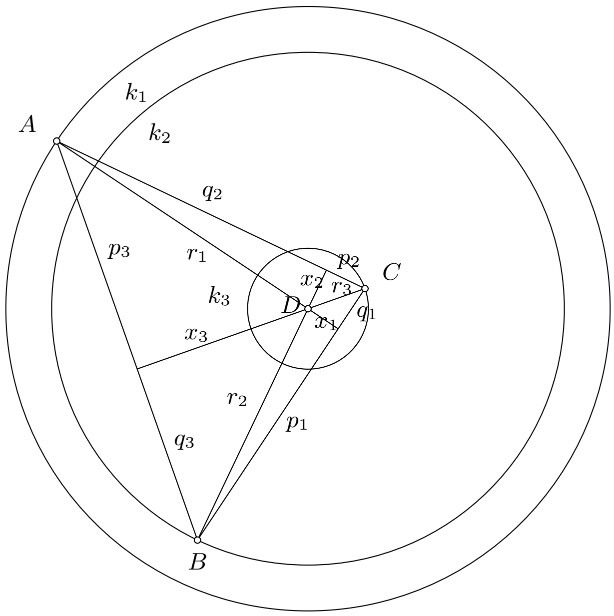
$$\alpha_1 + \beta_1 = 180° = ... = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $\alpha_n + \beta_n = 180°$. Also geht die Verlängerung von P_nA_n über A_n hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_n verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_n und A_n. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_{n+1}; somit folgt für jedes $n \geq 3$ aus den Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$.

Aufgabe 321236:
Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$.
Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, dass A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.
Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt existiert.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Punkt D sei der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Es ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Das heißt, dass wenn man Geraden durch den Mittelpunkt D und die Eckpunkte legt, diese Geraden die Dreiecksseiten unter einem rechten Winkel schneiden. Warum das so sein muss, kann man sich relativ leicht klar machen:

Betrachtet man zwei Punkte als fix, z. B. A und B, dann ist die Fläche des Dreiecks gleich die Grundseite AB mal den halben Abstand des Punktes C von der Seite AB. Wenn der Punkt C nur um D im Abstand r_3 rotieren kann, ist der Abstand des Punktes C von AB genau dann maximal (und damit auch die Fläche), wenn die Verbindungslinie CD senkrecht steht auf AB. Das gleiche gilt sinngemäß auch für die anderen Punkte.



Sei nun x_3 die Verlängerung der Strecke CD bis zur Strecke AB. Dann gilt:

$$x_3^2 + p_3^2 = r_1^2 \tag{1}$$

$$x_3^2 + q_3^2 = r_2^2 \tag{2}$$

Die zu maximierende Fläche des Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2}(x_3 + r_3)(p_3 + q_3) \tag{3}$$

Löst man (1) und (2) nach p_3 und q_3 auf und setzt in (3) ein, dann folgt:

$$A(x) = \frac{1}{2}(x_3 + r_3)\left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) \tag{4}$$

Nach x_3 ableiten und null setzen, um das Maximum zu bestimmen (den Faktor $\frac{1}{2}$ können wir gleich eliminieren durch das Nullsetzen):

$$0 = \left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) + (x_3 + r_3)\left(\frac{-x_3}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2}} + \frac{-x_3}{\sqrt{r_2^2 - x_3^2}}\right)$$

$$0=\left(\sqrt{r_1^2-x_3^2}+\sqrt{r_2^2-x_3^2}\right)-x_3(x_3+r_3)\frac{\sqrt{r_1^2-x_3^2}+\sqrt{r_2^2-x_3^2}}{\sqrt{r_1^2-x_3^2}\cdot\sqrt{r_2^2-x_3^2}}$$

$$0=1-\frac{x_3(x_3+r_3)}{\sqrt{r_1^2-x_3^2}\cdot\sqrt{r_2^2-x_3^2}}$$

$$x_3(x_3+r_3)=\sqrt{r_1^2-x_3^2}\cdot\sqrt{r_2^2-x_3^2}$$

$$x_3^4+2r_3x_3^3+r_3^2x_3^2=(r_1^2-x_3^2)(r_2^2-x_3^2)$$

$$x_3^4+2r_3x_3^3+r_3^2x_3^2=x_3^4-(r_1^2+r_2^2)x_3^2+r_1^2r_2^2$$

$$2r_3x_3^3+(r_1^2+r_2^2+r_3^2)x_3^2-r_1^2r_2^2=0$$

Damit wären wir bei einer kubischen Gleichung für x_3. Wir setzen an dieser Stelle die Zahlenwerte ein, und erhalten:

$$2x_3^3+44x_3^2-450=0$$

$$x_3^3+22x_3^2-225=0$$

Man kann und muss die Lösung $x_3=3$ erraten und kann die Gleichung dann faktorisieren:

$$(x_3-3)(x_3^2+25x_3+75)=0$$

Die weiteren Lösungen des quadratischen Terms kommen nicht in Frage, weil sie beide negativ sind. Mit $x_3=3$ erhalten wir außerdem

$$p_3=\sqrt{25-9}=4$$

und

$$q_3=\sqrt{18-9}=3$$

Damit erhalten wir als maximale Dreiecksfläche

$$A_{max}=\tfrac{1}{2}(3+1)(3+4)=14$$

Zusatz zur allgemeinen Lösung: Multipliziert man obige allgemeine kubische Gleichung mit r_3^2, erhält man:

$$2r_3^3x_3^3+(r_1^2+r_2^2+r_3^2)r_3^2x_3^2-r_1^2r_2^2r_3^2=0$$

Setzt man nun $x_3r_3=c$, dann folgt:

$$2c^3+(r_1^2+r_2^2+r_3^2)c^2-r_1^2r_2^2r_3^2=0$$

Wie man erkennt, ist diese Gleichung symmetrisch bezüglich r_1, r_2 und r_3. Daher ist c eine Invariante, und es gilt

$$x_1r_1=x_2r_2=x_3r_3=c$$

Die Lösung der kubischen Gleichung führt auf den Casus irreducibilis, so dass man c nicht als Summe von Wurzeln und dritten Wurzeln darstellen kann, sondern nur mit dem Kosinus von Winkeldritteln. Aufgrund der bekannten Tatsache, dass die Dreiteilung eines Winkels nicht mit elementaren Konstruktionsmitteln durchführbar ist, ist auch das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt nicht elementar konstruierbar. Setzt man

$$r_q=\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{3}}$$

$$r_m=(r_1r_2r_3)^{\frac{1}{3}}$$

als quadratischen und geometrischen Mittelwert der Radien, dann lautet die kubischen Gleichung für die Invariante c:

$$2c^3+3r_q^2c^2-r_m^6=0$$

Die Lösung der kubischen Gleichung lautet dann (vollständiger Rechenweg wird hier nicht gezeigt):

$$c=r_q^2\left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\arccos\left(2\left(\frac{r_m}{r_q}\right)^6-1\right)\right)-\tfrac{1}{2}\right]$$

Um eine symmetrische Formel für die Dreiecksfläche zu finden, benutzen wir folgenden Zusammenhang:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}(A_{BDCA} + A_{CDAB} + A_{ADBC})$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{4}\left(r_1(p_1+q_1) + r_2(p_2+q_2) + r_3(p_3+q_3)\right)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{4}\left(r_1\sqrt{r_2^2-x_1^2} + r_1\sqrt{r_3^2-x_1^2} + r_2\sqrt{r_1^2-x_2^2} + r_2\sqrt{r_3^2-x_2^2} + r_3\sqrt{r_1^2-x_3^2} + r_3\sqrt{r_2^2-x_3^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\left(\frac{r_m^3}{r_i}\right)^2 - c^2}$$

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise k_1, k_2, k_3 sei M für jedes Dreieck ABC mit A auf k_1, B auf k_2, C auf k_3 (*) seien AD, BE, CF die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen.

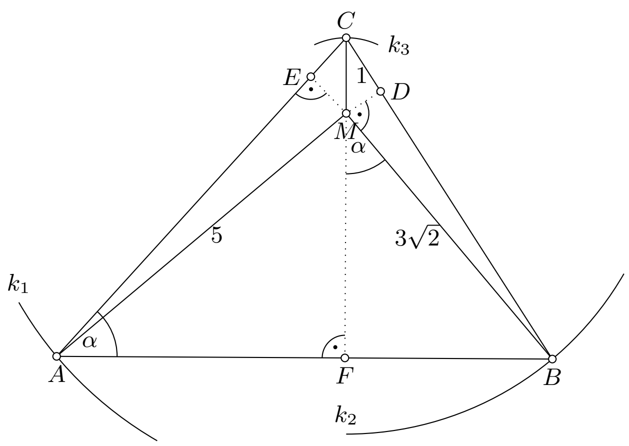
I. Liegt M nicht auf der Strecke CF, so gibt es auf k_3 einen Punkt C', für den ABC' größeren Flächeninhalt als ABC hat.

Beweis:
Die Parallele durch M zur Geraden g durch A, B schneide die Gerade h durch C, F in Q; die Parallele m durch M zu h schneide g in P. Unter den Schnittpunkten von m mit k_3 kann man C' so wählen, dass M der Strecke $C'P$ angehört; damit wird

$$C'P = C'M + MP = r_3 + MP = CM + QF$$

Falls nun M nicht auf h liegt, ist CQM ein (eventuell mit $C = Q$ entartetes) bei Q rechtwinkliges Dreieck, und es folgt $CM > CQ$, also $C'P > CQ + QF \geq CF$.
Liegt aber M auf h, d. h., ist $M = Q$, so folgt wegen der Lage von M außerhalb CF, dass $CM + MF > CF$ und damit ebenfalls $C'P > CF$ gilt. Also hat ABC' größere auf AB senkrechte Höhe und folglich größeren Flächeninhalt als ABC.

Entsprechend kann man schließen, wenn M nicht auf AC oder nicht auf BE liegt. Also gilt:
Wenn nicht alle drei Höhen AD, BE, CF durch M gehen, d. h., wenn M nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt und zugleich sein Höhenschnittpunkt ist, so gibt es ein Dreieck, dessen Ecken die zu (*) entsprechende Bedingung erfüllen und das größeren Flächeninhalt als ABC hat.



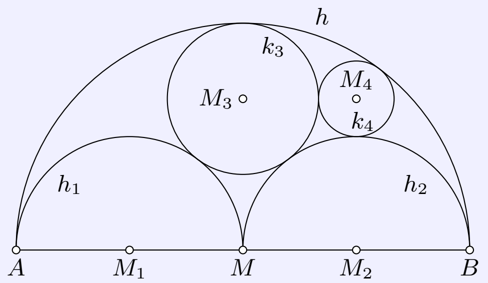
II. Nach dem im Hinweis genannten Sachverhalt existiert unter allen Dreiecken mit (*) eines mit größtmöglichen Flächeninhalt. Wegen I. folgt daher:
Wenn der Flächeninhalt eines Dreiecks mit (*), in dessen Innerem der Punkt M zugleich der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist, durch dies Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, so ist er der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt.

Wenn nun ein Dreieck ABC diese Voraussetzungen erfüllt (Abbildung), so folgt:
Die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen AD, BE bzw. CF schneiden sich in M, und es gilt $MA = 5$, $MB = 3\sqrt{2}$, $MC = 1$. Mit $MF = x$ gilt nach dem Satz des Pythagoras $AF = \sqrt{25 - x^2}$ und $BF = \sqrt{18 - x^2}$.
Mit $\triangle BAS = \alpha$ gilt ferner $\triangle FMB = \triangle CME = 90° - \angle ACF = \alpha$; damit ergibt sich $triangle AFC \sim \triangle MFB$, also

$$(1 + x) : \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{18 - x^2} : x$$
$$x^2(1 + x)^2 = (25 - x^2)(18 - x^2)$$
$$x^4 + 2x^3 + x^2 = 450 - 43x^2 + x^4$$
$$x^3 + 22x^2 - 225 = 0$$
$$(x - 3)(x^2 + 25x + 75) = 0$$

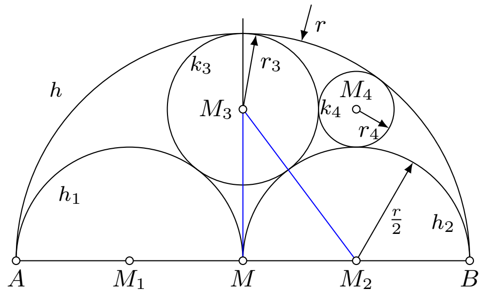
Wegen $x > 0$, also $x^2 + 25x + 75 > 0$ folgt $x = 3$ und damit weiter $AB = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{18 - x^2} = 7$, $CF = 1 + x = 4$.
Also ist durch die genannten Voraussetzungen eindeutig der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bestimmt und somit der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt; er beträgt $\frac{1}{2}AB \cdot CF = 14$.

Aufgabe 331232:



Über einer Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert.
Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.
Man beweise, dass M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Punkt M liege im Ursprung eines 2D-Koordinatensystems:



Wir bestimmen zunächst r_3 mithilfe des rechtwinkligen blauen Dreiecks MM_2M_3:

$$(r-r_3)^2+\left(\tfrac{1}{2}r\right)^2=\left(\tfrac{1}{2}r+r_3\right)^2$$
$$r^2-2rr_3+r_3^2+\tfrac{1}{4}r^2=\tfrac{1}{4}r^2+rr_3+r_3^2$$
$$r^2=3rr_3$$
$$r_3=\tfrac{1}{3}r$$

Der Punkt M_3 liegt somit bei $(0,\frac{2}{3}r)$, M_2 bei $(\frac{1}{2}r,0)$. Der Punkt M_4 habe die Koordinaten (x,y) und den unbekannten Radius r_4. Das sind drei Unbekannte, die wir aus den drei Bedingungen bestimmen, die sich daraus ergeben, dass der Punkt M_4 von drei Kreisen (h, h_2 und k_3) gleichweit entfernt liegen soll. Das führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$(1)\qquad (x-\tfrac{1}{2}r)^2+y^2=(\tfrac{1}{2}r+r_4)^2$$
$$(2)\qquad x^2+(y-\tfrac{2}{3}r)^2=(\tfrac{1}{3}r+r_4)^2$$
$$(3)\qquad x^2+y^2=(r-r_4)^2$$

Multipliziert man die Gleichungen aus und zieht dann Gleichung (1) von (3) ab, erhält man:

$$rx-\tfrac{1}{4}r^2=\tfrac{3}{4}r^2-3rr_4$$
$$(4)\qquad x=r-3r_4$$

Und wenn man Gleichung (2) von (3) abzieht:

$$\tfrac{4}{3}ry-\tfrac{4}{9}r^2=\tfrac{8}{9}r^2-\tfrac{8}{3}rr_4$$
$$(5)\qquad y=r-2r_4$$

Wir setzen (4) und (5) wieder in (3) ein:

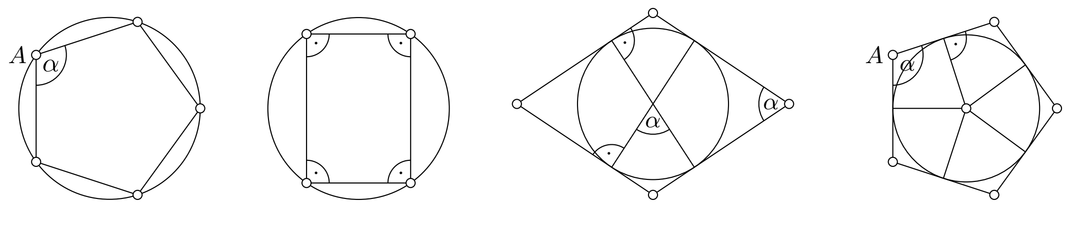
$$(r-3r_4)^2+(r-2r_4)^2=(r-r_4)^2$$
$$2r^2-10rr_4+13r_4^2=r^2-2rr_4+r_4^2$$
$$r^2-8rr_4+12r_4^2=0$$
$$(r-6r_4)(r-2r_4)=0$$

Die einzig plausible Lösung ist $r=6r_4$ bzw. $r_4=\frac{1}{6}r$. Setzt man das in (4) und (5) ein, erhält man für M_4 die Koordinaten $(x,y)=(\frac{1}{2}r,\frac{2}{3}r)$. Somit hat der Punkt M_4 dieselbe x-Koordinate wie M_2 und dieselbe y-Koordinate wie M_3, so dass das Viereck $MM_2M_4M_3$ tatsächlich ein Rechteck darstellt.

IV Runde 4

Aufgabe 031246:
Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.
c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

Lösung von Henning Thielemann:



Untersuchung der einzelnen Behauptungen:

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist richtig.

Gegeben sei ein Kreis und eine Seitenlänge, so dass sich ein Vieleck mit dieser Seitenlänge in den Kreis einbeschreiben lässt.

Betrachte einen Punkt A des Vielecks. Es gibt nur zwei Punkte auf dem Kreis, die von A den gleichen Abstand besitzen (Anzahl Schnittpunkte bei Schnitt von zwei Kreisen). Das müssen die Nachbarpunkte des Vielecks zum Eckpunkt A sein. Der Winkel zwischen den benachbarten Kanten ist daher immer gleichgroß.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Das Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 kann einem Kreis mit Durchmesser 5 einbeschrieben werden. Es hat 4 Winkel der Größe 90° aber unterschiedlich lange Seiten.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Man nehme zwei verschiedene Durchmesser des Kreises, die um den Winkel α gegeneinander verdreht sind. An den vier Schnittpunkten der Durchmesser mit dem Kreis lege man Tangenten an den Kreis. Diese Tangenten erzeugen einen Rhombus, also ein gleichseitiges Parallelogramm, mit den Winkeln α und $180° - \alpha$.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist richtig.

Den Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten des Vielecks nenne α. Die Kanten sind Tangenten an den Kreis, daher liegen Kanten und Kreisradien im rechten Winkel zueinander. Der Winkel zwischen zwei solchen benachbarten Radien ist $180° - \alpha$ groß. Die Vieleckskanten bilden mit den Kreisradien aneinandergereihte Drachenvierecke mit gleichen Winkeln.

Da ein Kreisradius Kante zweier benachbarter Drachenvierecke ist, sind die Drachenvierecke nicht nur ähnlich sondern auch kongruent. Damit sind die Vieleckskanten alle gleich lang.

Aufgabe 081242:
In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als „Spiegelung am Kreis k“ bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $MP \cdot MP' = r^2$.
a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!
b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, dass M außerhalb von k_1 liegt. Konstruieren Sie k_1' , d. h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

Lösung von cyrix:
a) Man zeichne die Gerade s durch M und P. Die Orthogonale zu s durch M schneide k in C und C'. Die Orthogonale zu CP schneide s in Q. Die Spiegelung von Q an M ist dann P'.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle QPC$ rechtwinklig in C und QM seine Höhe auf die Hypotenuse QP. Dann gilt nach dem Höhensatz $|QM| \cdot |MP| = |MQ|^2 = r^2$. Spiegelt man Q nun noch an M, so liegen dessen Spiegelpunkt P' und P auf s auf der gleichen Seite von M, also P' auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl. Weiterhin ist $|MP'|$, also $|MP| \cdot |MP'| = |MP| \cdot |MQ| = r^2$, wie gewünscht.

b) Es sei M_1 der Mittelpunkt von k_1. Ist dieser nicht gegeben, so kann man ihn sich leicht als Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks auf k_1 durch Schnitt von zwei der drei zugehörigen Mittelsenkrechten erhalten.

Da M außerhalb von k_1 liegt, kann man die durch M verlaufenden Tangenten t_1 und t_2 an k_1 konstruieren. Dazu schneide man den Kreis um den Mittelpunkt der Strecke MM_1 und dem Durchmesser MM_1 mit k_1 und erhalte die Berührungspunkte B_1 und B_2. Die Geraden MB_1 und MB_2 sind dann die gesuchten Tangenten t_1 bzw. t_2 an k_1.

Begründung zur Tangentenkonstruktion:
Nach Konstruktion und Satz von Thales sind die Dreiecke $\triangle MM_1B_1$ und $\triangle MM_1B_2$ rechtwinklig, da B_1 und B_2 auf dem Kreis mit Durchmesser MM_1 liegen. Also sind die Geraden MB_1 und B_1M_1 bzw. MB_2 und B_2M_1 jeweils senkrecht zueinander. Dabei sind B_1M_1 und B_2M_1 Radien, auf die die Geraden MB_1 bzw. MB_2 in den Punkten auf der Kreislinie senkrecht stehen. Die Geraden MB_1 und MB_2 berühren also k_1 in B_1 bzw. B_2, sind demnach Tangenten an k_1 und verlaufen durch M.

Weiter zur Konstruktion:
Man konstruiere gemäß Teilaufgabe a) die Spiegelpunkte B_1' von B_1 und B_2' von B_2, errichte auf t_1 die Senkrechte durch B_1', auf t_2 die Senkrechte durch B_2' und bezeichne deren Schnittpunkt als M'. Abschließend konstruiere man den Kreis k_1' um M' durch B_1'.

Begründung:
Da alle Punkte auf k_1 im von t_1 und t_2 aufgespannten Winkel mit Scheitelpunkt M liegen, muss dies analog für k_1' auch gelten, da ja auch alle von M ausgehenden und durch Punkte von k_1 verlaufenden Strahlen in diesem Winkel liefen.

Da t_1 sowie t_2 jeweils nur einen Punkt mit k_1 gemeinsam haben, muss das für k_1' auch gelten. Setzen wir hier voraus, dass das Bild eines Kreises k_1, der nicht durch M verläuft, wieder ein Kreis ist, erhält man dessen Mittelpunkt also dadurch, dass man die Orthogonalen durch die konstruierten Berührungspunkte an den Tangenten schneidet.

Es bleibt zu zeigen, dass k_1' tatsächlich das Bild von k_1 ist. Sei dazu P ein von B_1 und B_2 verschiedener Punkt auf k_1 und Q der zweite Schnittpunkt des von M ausgehenden Strahl s durch P mit k_1. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz bezogen auf den Kreis k_1 die Gleichung $|MP| \cdot |MQ| = |MB_1|^2$. Es seien P' und Q' die Spiegelpunkte von P bzw. Q. Dann liegen diese beiden Punkte auch auf dem Strahl s und es gilt $|MP| \cdot |MP'| = r^2 = |MQ| \cdot |MQ'|$, also

$$|MP'| \cdot |MQ'| = \frac{r^2}{|MP|} \cdot \frac{r^2}{|MQ|} = \frac{r^4}{|MP| \cdot |MQ|} = \frac{r^4}{|MB_1|^2} = \left(\frac{r^2}{|MB_1|}\right)^2 = |MB_1'|^2$$

Damit gilt nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatz, dass die drei Punkte P', Q' und B_1' auf einem Kreis liegen, für den die Gerade MB_1' eine Tangente ist. Also liegen die Bilder aller Punkte von k_1 auf k_1'.

Da die Spiegelung an k bei zweifacher Ausführung jeden Punkt wieder auf sich selbst abbildet und das Bild aller Punkte von k_1' nach der gleichen Argumentation auf k_1 liegen muss, ist tatsächlich der gesamte Kreis k_1' das Bild der Punkte des gesamten Kreises k_1.

Aufgabe 101246B:
In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, dass in beliebigen Punkten P' von t (mit $AP' = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der

Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, dass die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $P'P = y < r$.
a) Man beweise, dass dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!
b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise: Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt. Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, dass für alle positiven reellen Zahlen $x \leq \frac{1}{n}r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, dass also $\delta \leq 0{,}001$ gilt.

Lösung von cyrix:
a) Wir legen in die Ebene ein x-z-Koordinatensystem, sodass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung und der Berührungspunkt A im Punkt $(0,r)$ liegt. Die Tangente t bildet die Gerade $z = r$.

Ein Punkt P' habe die Koordinaten $(x{,}1)$ und somit den Abstand x zu A. (Da Figur ist symmetrisch zur Geraden $x = 0$, sodass man sich o. B. d. A. auf positive x beschränken kann.) Die Senkrechte zu t durch P' ist die Parallele zur z-Achse durch P', haben also x-Koordinate x. Damit hat auch P die x-Koordinate x.

Da alle Punkte auf dem Kreis $x^2 + z^2 = r^2$ erfüllen und es mit P um den „oberen“ Schnittpunkt mit dem Kreis geht, lässt sich dessen z-Koordinate erhalten als $z = \sqrt{r^2 - x^2}$. Der Abstand $|P'P|$ ist damit $y = r - z = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.
Mit diesem Wert für y rechnet man schnell nach, dass $2r - y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ und

$$\frac{x^2}{2r-y} = \frac{x^2}{r+\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x^2 \cdot (r - \sqrt{r^2-x^2})}{(r+\sqrt{r^2-x^2}) \cdot (r-\sqrt{r^2-x^2})} = \frac{x^2 \cdot y}{r^2 - (r^2 - x^2)} = y \cdot \frac{x^2}{x^2} = y$$

ist.

b) Es ist

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{r} = \left|\frac{y}{r} - \frac{y_1}{r}\right| = \left|(1 - \sqrt{1-t^2}) - \left(\frac{1}{2}t^2\right)\right|$$

mit $t := \frac{x}{r}$.
Dabei ist für alle reellen $1 > t > 0$

$$1 - \sqrt{1-t^2} = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{1} = \frac{(1-\sqrt{1-t^2}) \cdot (1+\sqrt{1-t^2})}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-(1-t^2)}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2}{1+\sqrt{1-t^2}} = t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$$

und also

$$\delta = \left|t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}t^2\right| = t^2 \cdot \left|\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}\right|$$

Dabei ist wegen $0 < t^2 < 1$ auch $0 < \sqrt{1-t^2} < 1$ und $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} < 1$, also $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Damit ist $\delta < \frac{1}{2}t^2$.

Ist $t < \frac{1}{23}$, so ist $t^2 < \frac{1}{23^2} = \frac{1}{529} < \frac{1}{500}$ und damit $\delta < \frac{1}{2}t^2 < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Also folgt für alle $n \geq 23$, dass für alle $x \leq \frac{1}{n}r$ die Abweichung δ höchstens 0,001 beträgt. Gegebenenfalls gilt dies auch für noch kleinere natürliche Zahlen n. Jedoch gibt es in jedem Fall ein kleinstes solches n.

Aufgabe 121246B:
In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben.
Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, dass B auf k_1 und C auf k_2 liegen.
a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.
b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solcher Dreiecke gibt.

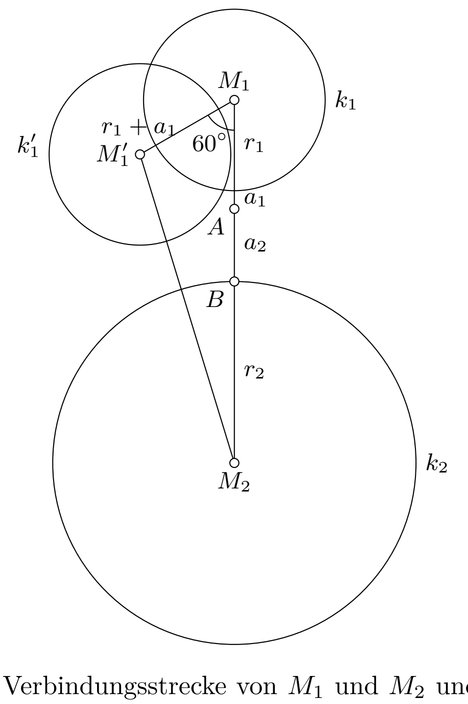
Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Angenommen, es existiert ein $B \in k_1$ und ein $C \in k_2$ mit $AB = BC = CA$, dann erhalte ich den Punkt C, falls B schon festliegt, durch Drehen der Strecke AB um A um den Winkel von 60°.
Falls ich einen beliebigen Punkt B auf k_1 wähle und AB um A um 60° drehe, ist es wahrscheinlich, dass der Endpunkt der Strecke AB nach der Drehung auf der Kreislinie k_2 liegt. Drehe ich aber den ganzen Kreis k_1 um A um 60°, und gibt es ein solches Dreieck, dann schneidet der gedrehte Kreis k_1 der Kreis k_2 sicher in einem Punkt C', der den Bedingungen der Aufgabe genügt; denn der Urpunkt B der Drehung um A um 60° von C' liegt auf k_1, und es gilt sicher

$$\angle C'AB' = 60^\circ \qquad \text{und} \qquad C'A = B'A$$

Damit ist $\triangle AB'C'$ ein gesuchtes Dreieck.

Konstruktion: Die Kreislinie k_1 wird um A einmal um 60° im mathematisch positiven Drehsinn und einmal im mathematisch negativen Drehsinn gedreht. Es entstehen die Kreislinien k_1' und k_1''.
Falls Punkte C mit $C \in k_2 \cap k_1'$ oder $C \in k_2 \cap k_1''$ existieren, so sind diese Punkte Lösungen der Aufgabe. Die entsprechenden Punkte B erhält man durch Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks über AC und der Bedingung $B \in k_1$.

Determination: Als höchste Anzahl von Lösungen können vier gleichseitige Dreiecke auftreten und zwar genau dann, wenn $k_1' \cap k_2$ und $k_1'' \cap k_2$ jeweils genau zwei Punkte enthalten.
k_1' und k_1'' können jeweils k_2 in höchstens zwei Punkten schneiden, da vorausgesetzt war, dass k_2 nicht mit k_1' oder k_1'' identisch ist.
Der Fall, dass vier gleichseitige Dreiecke auftreten, ist möglich, wie im folgenden gezeigt wird (Abbildung).



Ich wähle den Punkt A auf der Verbindungsstrecke von M_1 und M_2 und werden beweisen, dass a_1 und a_2 so gewählt werden können, dass $M_2M_1' < r_1 + r_2$ ausfällt. Es gilt nämlich nach dem Kosinussatz:

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)^2 + (r_1 + a_1)^2 - (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)(r_1 + a_1)$$

Für $a_1 = a_2 = 0$ gilt sicher

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2+r_1)^2 + r_1^2 - (r_2+r_1)r_1 = (r_2+r_1)^2 - r_1r_2 < (r_1+r_2)^2$$

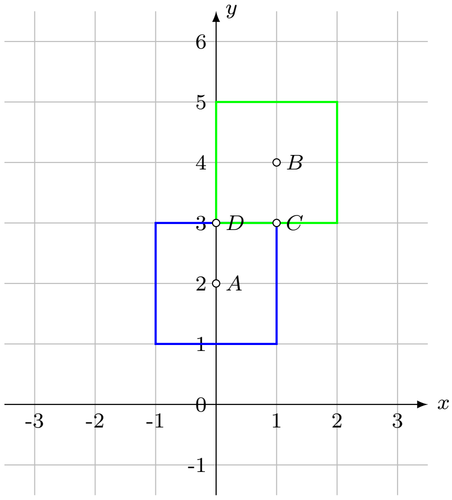
Wegen der stetigen Abhängigkeit von $M_1'M_2$ von a_1 und a_2 lassen sich $a_1, a_2 > 0$ finden, für die ebenfalls noch $(M_1M_2)^2 < (r_1+r_2)^2$ gilt. Damit schneidet dann k_1' den Kreis k_2 in zwei Punkten und wegen der Symmetrie auch k_1'' den Kreis k_2.
Damit können keine zwei der vier Punkte zusammenfallen, da sowieso $k_1' \cap k_2$ zwei Punkte enthält, ebenso $k_1'' \cap k_2$. Es könnten sich dann höchstens k_1' und k_1'' auf k_2 in B schneiden (wegen der Symmetrie).
Dies würde dann zur Folge haben, dass $\angle M_1'BM_1 > 60°$ und $\angle BM_1'M_1 > 60°$ gilt (nach dem Satz, dass der größeren Seite im Dreieck der größere Winkel gegenüberliegt).
Damit würde die Winkelsumme in diesem Dreieck größer als 180° sein, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.
Damit ist vier die maximale Lösungsanzahl, wenn nicht unendlich viele Lösungen existieren.

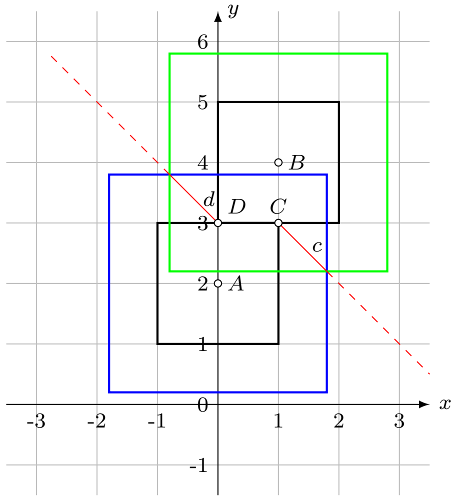
Aufgabe 141246B:
In der Ebene sei der „Abstand“ zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:
Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr „Abstand“

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0; 2)$ und $B(1; 4)$ gleich weit entfernt sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Der so definierte Abstand zwischen zwei Punkten ist das Maximum aus horizontalem und vertikalem Abstand. Das heißt doch nichts anderes, als dass die Punkte, die einen konstanten Abstand zu einem gegebenen Punkt A haben sollen, ein Quadrat darstellen, in dessen Mittelpunkt sich der Punkt A befindet. Man muss also zwei gleich große Quadrate um die zwei Punkte A und B konstruieren. Die gemeinsamen Punkte beider Quadrate sind dann die gesuchte Lösungsmenge.





Die beiden kleinstmöglichen Quadrate sind die in der linken Grafik gezeigten. Sie teilen sogar eine ganze Strecke, nämlich CD. Lässt man die Quadrate nun größer werden, haben sie nur noch zwei Schnittpunkte (rechtes Bild).

Angefangen bei den kleinstmöglichen Quadraten in der vorigen Skizze, liegen die Schnittpunkte der größeren Quadrate auf den Diagonalen c und d (rot dargestellt). Die Quadrate kann man beliebig groß werden lassen. Daher kann man die Lösungsmenge wie folgt angeben:

$$M = \begin{cases} y = 3 - x & x < 0 \\ y = 3 & 0 \leq x \leq 1 \\ y = 4 - x & x > 1 \end{cases}$$

Oder zusammengefasst in einer Gleichung:

$$y = \tfrac{7}{2} - x - \tfrac{1}{2}|x-1| + \tfrac{1}{2}|x|$$

Aufgabe 161246B:
Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.
Hinweis:
Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Strecken, die den Mittelpunkt des n-Ecks mit dessen Eckpunkten verbinden, zerlegen das n-Eck in n spitzwinklige Dreiecke. In eine kleinere Anzahl von sämtlich spitzwinkligen Dreiecken lässt sich das n-Eck nicht zerlegen.

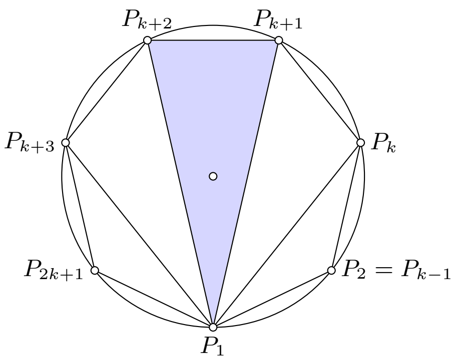
Andernfalls müssten zwei nebeneinander liegende Seiten des n-Ecks zu ein und demselben Zerlegungsdreieck gehören, das dann aber, da der Winkel zwischen diesen beiden Seiten für $n = 5$ stumpf ist, kein spitzwinkliges Dreiecke mehr ist.

b) Jedes Dreieck ABC lässt sich in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegen. Man verbinde hierzu den Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden mit den drei Eckpunkten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \angle ASB &= \pi - \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC + \angle CAB) \\ &= \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \angle ACB) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \angle ACB > \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Analog gilt $\angle BSC, \angle CSA > \frac{\pi}{2}$.
Jedes beliebige regelmäßige n-Eck $P_1P_2...P_n$ ($n \geq 5$) lässt sich in stumpfwinklige Dreiecke zerlegen.

Es sei $n = 2k+1$ (k natürliche Zahl):
Das n-Eck wird durch $(n-3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4, ..., P_{n-1}$ in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe Abbildung für $n = 7$)



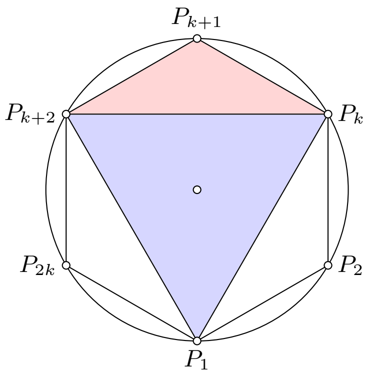
Die Winkel

$$\angle P_1P_2P_3, \angle P_1P_3P_4, ..., \angle P_1P_kP_{k+1}, \angle P_{k+2}P_{k+3}P_1, ..., \angle P_{n-1}P_nP_1$$

sind als Peripheriewinkel im umbeschriebenen Kreis über den angegebenen Diagonalen, von denen keine Durchmesser ist, größer als 90°, da der entsprechende Eckpunkt auf dem kleineren der beiden Teilbögen liegt.
Das Dreieck $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ kann, wie angegeben, in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine verlangte Zerlegung gefunden ist.

Es sei $n = 2k$:
Das n-Eck wird wieder durch $(n-3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4,..., P_{n-1}$ in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe nachfolgende Abbildung für $n = 6$)
Die Diagonale P_1P_{k+1} ist Durchmesser im umbeschriebenen Kreis von $P_1P_2...P_n$, also sind die Dreiecke $P_1P_kP_{k+1}$ und $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ nicht stumpfwinklig.

Das Viereck $P_1P_kP_{k+1}P_{k+2}$ wird nun in die Dreiecke $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ (stumpfwinklig, da zwei der Dreiecksseiten benachbarte n-Eckseiten sind) und $P_1P_kP_{k+2}$ zerlegt. Das Dreieck $P_1P_kP_{k+2}$ kann dann wieder wie angegeben in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine gesuchte Zerlegung gefunden wurde.



Es wird nun gezeigt, dass eine Zerlegung in weniger als n stumpfwinklige Dreiecke nicht existieren kann. Dazu wird zuerst nachgewiesen, dass keine Zerlegung in stumpfwinklige Dreiecke existiert, die ausschließlich durch Diagonalen entsteht, d. h., bei der die Eckpunkte sämtlicher Zerlegungsdreiecke zugleich Eckpunkte des n-Ecks sind.

Angenommen, es existiert eine solche Zerlegung. Es sei o. B. d. A. P_1P_m einer Diagonale dieser Zerlegung mit maximaler Länge. Nach Voraussetzung ist sie Seite zweier Zerlegungsdreiecke $P_1P_rP_m$ und $P_1P_mP_s$ mit $1 < r < m < s$.
Da P_1, P_r, P_m, P_s Eckpunkte des n-Ecks sind, ist das Viereck $P_1P_rP_mP_s$ Sehnenviereck und es gilt

$$\angle P_1P_rP_m + \angle P_mP_sP_1 = \pi$$

Dann ist jedoch einer der beiden Winkel, o. B. d. A. $\angle P_1P_rP_m$, nicht größer als $\frac{\pi}{2}$. Wegen der Maximalität von P_1P_m muss aber $\angle P_1P_rP_m$ als Winkel, der der größten Seite gegenüber liegt, der größte Winkel im Dreieck $P_1P_rP_m$ sein. Folglich kann das Dreieck $P_1P_rP_m$ im Widerspruch zur Annahme nicht stumpfwinklig sein.

Da nach Voraussetzung kein Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks innerer Punkt einer n-Eckseite sein kann, muss folglich ein innerer Punkt P des n-Ecks existieren, der Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks ist. Er kann dann nicht innerer Punkt eines Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks sein, ist also in allen Zerlegungsdreiecken, die ihn überhaupt enthalten, Eckpunkt.
Die Winkel, deren Scheitelpunkt P ist, haben die Winkelsumme 2π. Die Winkel, für die die Punkte $P_1, P_2, ..., P_n$ Scheitelpunkte sind, haben die Winkelsumme $(n-2)\pi$.

Folglich kann die Anzahl der Zerlegungsdreiecke nicht kleiner als $\frac{1}{\pi} \cdot [2\pi + (n-2)\pi] = n$ sein.

Aufgabe 171244:
Definition:
Es sei mit $d(X, Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge m bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von m, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus m gilt $d(X,Y) \leq d$.
(2) Es gibt Punkte P, Q aus m, für die $d(P,Q) = d$ ist.
Man beweise:
a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.
b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebenen Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für je zwei Punkte X, Y einer Teilmenge von m gilt wegen (1) $d(X, Y) \leq d$. Es genügt also, Bedingung (2) für wenigstens eine der Teilpunktmengen nachzuweisen.

a) Es sei Z ein Streckenzug gemäß Aufgabenstellung. Da die Ränder jeweils zu den entsprechenden Flächen gehört, ist M Punkt beider Teilflächen. M' sei der durch Spiegelung am Kreismittelpunkt aus M hervorgegangene Punkt.
Der Abstand $d(M, M')$ ist gleich dem Durchmesser d des Kreises; denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$d(M, M') \leq d(M, O) + d(O, M') \leq \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$$

wobei O der Mittelpunkt des Kreises ist; dabei kann nur $d(M, M') = d$ zutreffen, da M, O, M' Punkte auf einer Geraden sind und M, M' auf der Kreislinie liegen. Außerdem ist M' Element wenigstens einer der Teilflächen. Damit gibt es wenigstens eine Teilfläche, deren Durchmesser gleich d ist, nämlich eine, die M und M' enthält.

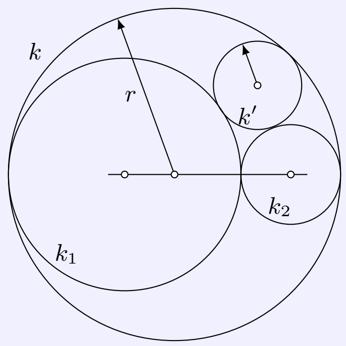
b) Die Schnittflächen ε_1 und ε_2 enthalten als ebene Figuren wenigstens je drei nichtkollineare Punkte, sie bestimmen daher je eine Ebene π_1 bzw. π_2. Mit K bezeichnen wir die Menge aller Punkte des Kugelkörpers, die entsprechenden Teilpunktmengen seien K_1, K_2, K_3, wobei o. B. d. A. $K_1 \cap \pi_1 = \varepsilon_1$ und $K_2 \cap \pi_2 = K_3 \cap \pi_2 = \varepsilon_2$.

Fall 1: Da drei Teilkörper entstehen sollen, kann $\pi_1 = \pi_2$ nicht zutreffen.
Fall 2: $\pi_2 \cap \pi_2 = \varnothing$, d. h., die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
Die Ebene π, die parallel zu π_1 (bzw. π_2) durch den Mittelpunkt O der Kugel verläuft, hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist.
Für jeden Punkt M der zugehörigen Kreislinie und den durch Spiegelung von M an O entstehenden Punkt M' gilt wie oben $d(M, M') = d$. Wegen der Parallelität der Ebenen π, π_1, π_2, gehören die Punkte M und M' zu wenigstens einem der Teile K_1, K_2, K_3.

Fall 3: π_2 und π_2 schneiden sich in einer Geraden g.
3.1. $g \cap K = \varnothing$.
Die durch g und O bestimmte Ebene π' hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist. Wie im Fall 2 besitzt die Kreisfläche den Durchmesser d und gehört ganz zu einem der drei Teilkörper von K, womit dieser den Durchmesser d besitzt.

3.2. $g \cap K \neq \emptyset$.
Es sei M ein gemeinsamer Punkt von g und der Kugeloberfläche, dann ist M Element von K_1, K_2 und K_3. Der aus M durch Spiegelung an O entstehende Punkt M' gehört zu wenigstens einem der drei Teilkörper, dieser hat den Durchmesser $d(M, M') = d$.

Aufgabe 241242:



Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt:
Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.
Man beweise:
Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r' \leq \frac{r}{3}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Radien von k_1, k_2 seien r_1 bzw. r_2; o. B. d. A. gelte $r_1 \geq r_2 \quad (1)$.
Die Mittelpunkte von k, k_1, k_2, k' seien M, M_1, M_2 bzw. M'. Auf der Geraden g, die nach Voraussetzung durch M_1, M_2 und M geht, liegen auch die Berührungspunkte, die je zwei der Kreise k, k_1, k_2 miteinander haben. Hieraus und aus den Voraussetzungen, welche Kreise sich von außen bzw. von innen berühren, folgt

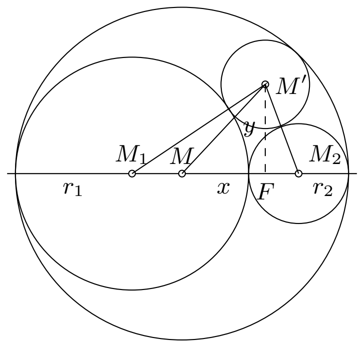
$$2r_1 + 2r_2 = 2r$$

und weiter

$$M_1M_2 = r_1 + r_2 + r; \qquad M_1M = r - r_1 = r_2; \qquad MM_2 = r - r_2 = r_1$$

sowie ferner

$$M_1M' = r_1 + r'; \qquad M_2M' = r_2 + r'; \qquad MM' = r - r'$$



Ist F der Fußpunkt des Lotes von M' auf g und $MF = x$, $FM' = y$, so liegt F wegen $M_1M' \geq M_2M'$ und $M_1M \leq M_2M$ zwischen M und M_2 oder in M; damit folgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die Dreiecke MFM', M_1FM' und M_2FM'

$$x^2 + y^2 = (r - r')^2 \tag{2}$$

$$(r_2 + x)^2 + y^2 = (r_1 + r')^2 \tag{3}$$

$$(r_1 - x)^2 + y^2 = (r_2 + r')^2 \tag{4}$$

Subtrahiert man von der mit 2 multiplizierten Gleichung (2) die Summe der Gleichungen (3) und (4), so ergibt sich

$$2(r_1 - r_2)x = 2r^2 - 4rr' - 2(r - 1 + r_2)r'$$

wegen $r_1 + r_2 = r$ also

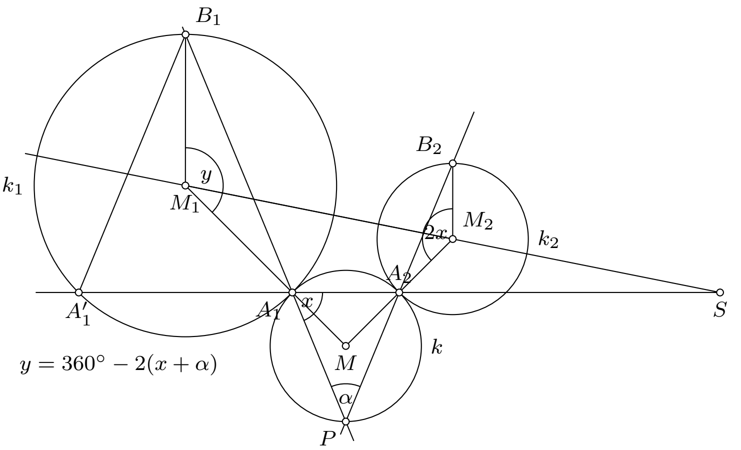
$$(r_1 - r_2)x = r(r - 3r')$$

Hieraus sowie aus (1) (und $x \geq 0$, $r > 0$) folgt $r - 3r' \geq 0$, also $r' \leq \frac{r}{3}$, w. z. b. w.

Aufgabe 311242:
Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k.
Für $i = 1; 2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

Lösung von Kornkreis:
M sei der Mittelpunkt von k. Mit XY sei im Folgenden die Strecke durch die Punkte X, Y bezeichnet und mit Gerade XY die Gerade durch X, Y. Alle Winkel hier sind orientierte Winkel.
Wir setzen voraus, dass M und P unterhalb von A_1A_2 liegen; der Beweis geht analog, wenn diese Einschränkung fallen gelassen wird.

Bezeichne den Peripheriewinkel $\measuredangle A_2PA_1$ mit α. Wegen $\measuredangle A_2MA_1 = 2\alpha$ (Zentriwinkel) und $|MA_1| = |MA_2|$, gilt $\measuredangle A_1A_2M = \measuredangle MA_1A_2 = 90° - \alpha$. Wir bezeichnen $\measuredangle PA_1A_2 = x$ und haben $\measuredangle PA_1M = x - (90° - \alpha)$ sowie $\measuredangle MA_2P = (180° - x - \alpha) - (90° - \alpha) = 90° - x$. Weiterhin ist $\measuredangle B_1A_1M_1 = \measuredangle PA_1M$ und $\measuredangle M_2A_2B_2 = \measuredangle MA_2P$. Da nun M_1B_1 und M_1A_1 sowie M_2B_2 und M_2A_2 jeweils gleich lang sind, gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - 2\measuredangle PA_1M = 360° - 2(x + \alpha)$ und $\measuredangle B_2M_2A_2 = 180° - 2\measuredangle MA_2P = 2x$.



Für $x = 90° - \alpha/2$, d. h. wenn die Gerade MP senkrecht auf A_1A_2 steht (P ist dann sozusagen unterer Scheitelpunkt von k), so gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - \alpha = \measuredangle B_2M_2A_2$, d. h. die Drehwinkel von B_1 und B_2 bezüglich der Strecken M_1A_1 bzw. M_2A_2 sind gleich; B_1 und B_2 sind hier obere Scheitelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2, siehe Skizze.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Kreise k_1 und k_2 denselben Radius haben. Für $x = 90° - \alpha/2$ folgt direkt, dass B_1B_2 parallel zu A_1A_2 ist.
Wenn sich x um Δx ändert, indem P seine Position ändert, so ändert sich der Drehwinkel von B_1 um $-2\Delta x$ und der Drehwinkel von B_2 um $+2\Delta x$, insbesondere bleibt B_1B_2 parallel zu A_1A_2.

Wenn die Radii von k_1 und k_2 gleich sind, ist aber auch A_1A_2 parallel zu M_1M_2, da MM_1 und MM_2 dieselbe Länge haben und parallel zu MA_1 bzw. MA_2 liegen, die ebenfalls gleichlang sind. Daraus folgt die Parallelität der Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2.

Seien nun die Kreise k_1 und k_2 von verschiedenem Radius r_1 bzw. r_2. Offensichtlich sind die Geraden M_1M_2 und A_1A_2 dann nicht mehr parallel und schneiden sich in einem Punkt S. Der zweite Schnittpunkt der Gerade A_1A_2 mit k_1 sei mit A_1' bezeichnet. Es gilt $\measuredangle A_1A_1'M_1 = \measuredangle SA_2M_2$, da beide Winkel gleich $\measuredangle MA_1A_2$ sind. Folglich sind die Strecken $A_1'M_1$ und A_2M_2 zueinander parallel. Des Weiteren haben wir $\measuredangle A_1A_1'B_1 = 360° - (2\cdot(90° - \alpha) + 2\cdot(x+\alpha)) = 180° - \alpha = \measuredangle SA_2B_2$, d. h. $A_1'B_1$ und A_2B_2 sind parallel zueinander.

Nach dem Strahlensatz haben wir nun $\frac{|SA_2|}{r_2} = \frac{|SA_1'|}{r_1}$. Man sieht leicht, dass die Gerade B_1B_2 nie parallel zur Gerade A_1A_2 ist, bezeichne den Schnittpunkt mit S'. Nach dem Strahlensatz ist $\frac{|S'A_2|}{\lambda r_2} = \frac{|S'A_1'|}{\lambda r_1}$, wobei $\lambda r_1 = |A_1'B_1|$, $\lambda r_2 = |A_2B_2|$ und $\lambda \neq 0$ eine Konstante ist, die vom Winkel $\measuredangle A_1A_1'B_1$ abhängt.

Kombination beider Strahlensatzgleichungen ergibt $\frac{|SA_2|}{|SA_1'|} = \frac{|S'A_2|}{|S'A_1'|} = \frac{|SA_2|+d}{|SA_1'|+d}$, wobei d den (vorzeichenrichtigen) Abstand von S und S' bezeichnet. Man sieht leicht, dass diese Gleichung nur gelten kann, wenn $d = 0$ oder $|SA_2| = |SA_1'|$ gilt. Letzteres ist nicht der Fall, weshalb $d = 0$ und damit $S = S'$ folgt, d. h. alle drei Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 schneiden sich im selben Punkt S.

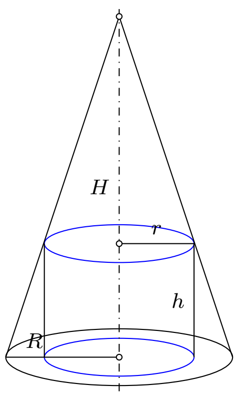
Insgesamt haben wir bewiesen, dass A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 sich entweder im selben Punkt S schneiden oder zueinander parallel liegen.

II.IV Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V01201:
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

Lösung von Steffen Polster:



(1) Für das Volumen des Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt
$$V = r^2\pi h$$

(2) Der Zusammenhang von Kegel- und Zylinderabmessungen ergibt sich aus dem Strahlensatz zu
$$h : (R - r) = H : R$$

Damit kann h durch R, H und r ausgedrückt werden, und V wird eine Funktion der einen unabhängigen Variablen r:
$$V(r) = r^2\pi\frac{H}{R}(R - r) = \pi r^2 \cdot H - \pi\frac{H}{R}r^3$$

(3,4) Für die erste Ableitung bezüglich r wird
$$V'(r) = 2\pi rH - 3\cdot r^2\pi\frac{H}{R} = r\pi\frac{H}{R}(2R - 3r)$$

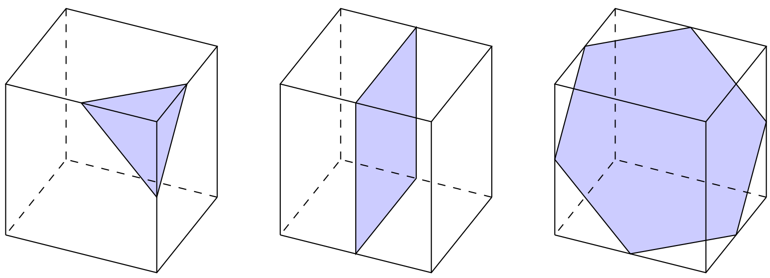
und aus $r\pi\frac{H}{R}(2R-3r)=0$ folgt $r=\frac{2}{3}R$. Da die 2. Ableitung für dieses r negativ wird, liegt ein relatives Maximum. An den Rändern gilt $V(r=0)=0$ und $V(r=R)=0$. Damit ist das relative Maximum zugleich das absolute Maximum. Als maximales Volumen für den Zylinder erhält man

$$V=V\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

mit der Höhe $h=\frac{H}{3}$. Es sollte ein eher kurzer Zylinder gedreht werden.

Aufgabe 011113:
Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, dass der erhaltene Schnitt ein a) gleichseitiges Dreieck,
b) Quadrat,
c) regelmäßiges Fünfeck,
d) regelmäßiges Sechseck
ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Lösung von Eckard Specht:
Die möglichen Schnitte sind in den folgenden Bildern dargestellt:



a) Ja. Jeder Schnitt, der entlang dreier zusammentreffender Kanten gleiche Strecken abschneidet, erzeugt ein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche. Dies ist leicht einzusehen, da alle durch den Schnitt entstehenden rechtwinkligen Dreiecke auf den Würfeloberflächen kongruent sind (SWS), mithin auch die Hypotenusen.

b) Ja. Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat, welches der Würfelfläche kongruent ist.

c) Nein. Wäre eine Schnittfläche eines Würfels bei einem ebenen Schnitt ein reguläres Fünfeck, so würden je zwei verschiedene Kanten des Fünfecks zu zwei verschiedenen Seitenflächen des Würfels gehören (denn ansonsten läge das ganze Fünfeck auf einer Seitenfläche, was nicht geht).

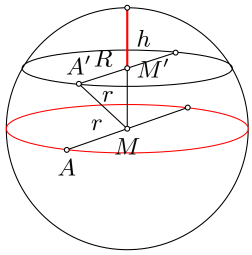
Zwei verschiedene dieser fünf Seitenflächen dürften aber nicht parallel sein, weil sich (die Verlängerungen von) je zwei verschiedenen Fünfeckskanten in einem Punkt schneiden. Da es aber im Würfel nur sechs Seitenflächen gibt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel sind, findet man keine fünf paarweise nichtparallelen Seitenflächen. Es gibt also keinen solchen ebenen Schnitt.

d) Ja. Der Schnitt trifft - wie im Bild gezeigt - die Würfelkanten in deren Mittelpunkten. Alle Seiten des sechseckigen Schnitts haben offensichtlich die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, wenn a die Länge einer Kante bezeichnet.

Der angegebene Schnitt ist auch tatsächlich eben, da alle Abstände der Eckpunkte des Sechsecks vom oberen–rechten–vorderen (oder unteren–linken–hinteren) Eckpunkt des Würfels untereinander gleich, nämlich $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ sind.

Aufgabe 021111:
Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongressgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte.
Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m.
Berechnen Sie:
a) den Radius r der Kugel,
b) die Fläche der Kugelkalotte und
c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7\frac{p}{cm^3}$.)

Lösung von Eckard Specht:

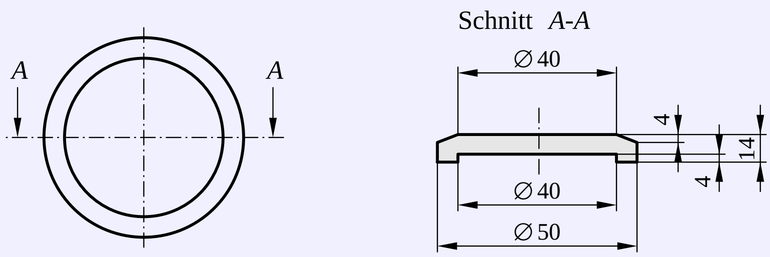


Wie im Bild dargestellt ist rot der Basiskreis mit Radius $R = \frac{1}{2} \cdot 31{,}2$ m $= 15{,}6$ m und Mittelpunkt M' und Höhe $h = 9{,}6$ m. A' sei ein Punkt auf dem Basiskreis und der Kugeloberfläche. M sei der Mittelpunkt der Kugel. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MM'A'$:

$$A'M^2 = r^2 = MM'^2 + A'M'^2 = (r-h)^2 + R^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

a) Damit erhalten wir $r = \frac{h^2+R^2}{2h} = 17{,}5$ m.
b) Die Fläche der Kugelkalotte beträgt $O = \pi(R^2 + h^2) = 1054$ m^2.
c) Das Gewicht der Aluminiumhaut beträgt $G = \gamma V = \gamma O s = 3{,}98$ Mp.

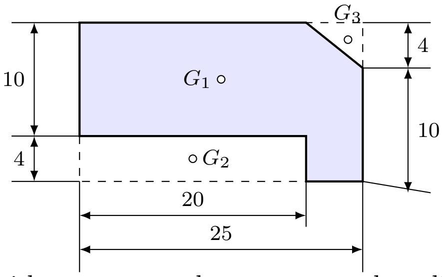
Aufgabe 021112:
Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?
b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Lösung von Eckard Specht:
Hier muss zunächst das Volumen desjenigen Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die grau abgebildete Fläche um die Symmetrieachse (d.i. die linke Kante im Bild) rotiert.
Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung eines ebenen Gebietes um eine dieses Gebiet nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F dieses Gebietes mit dem

Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.



Die graue Fläche ist dabei die Differenz aus einem großen Rechteck mit den Maßen 25 mm × 14 mm und einem kleinen Rechteck (links unten, 20 mm × 4 mm) sowie einem Dreieck (rechts oben, Fläche 10 mm^2).
Die Abstände der Schwerpunkte G_1 (großes Rechteck), G_2 (kleines Rechteck) und G_3 (Dreieck) betragen: $s_1 = 12{,}5$ mm, $s_2 = 10$ mm und $s_3 = 23{,}33$ mm.

Bei letzterem wurde ausgenutzt, dass die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks gleich dem arithmetischen Mittel der jeweiligen Eckpunktkoordinaten sind. Damit erhalten wir:

$$V = 2\pi(350mm^2 \cdot 12{,}5mm - 80mm^2 \cdot 10mm - 10mm^2 \cdot 23{,}33mm) = 20996mm^3$$

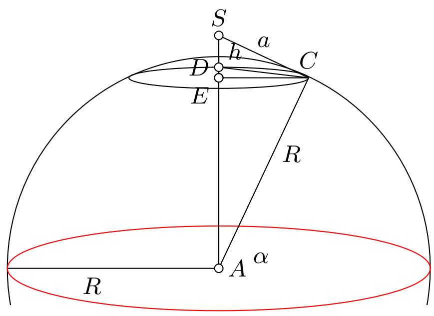
a) Gegenüber der zylindrischen Scheibe vom Volumen $V_0 = \frac{1}{4}d^2h =$1 27489 mm^3 ergibt das eine Materialeinsparung von ca. 23,6%.
b) Pro Stück werden $V_0 - V = 6493$ mm^3 eingespart, also insgesamt 194790 mm^3.
Bezogen auf V_0 entspricht das einer Menge von ca. 7 Bunsenbrennerfüßen.

Aufgabe 031111:
Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.
a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt?
Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde R = 6 370 km.)

Lösung von Rainer Sattler:
a) Um zunächst die Fläche $M = 2\pi RH$ der überschaubaren Kugelkappe zu berechnen, findet man zunächst mittels des Satzes des Pythagoras für die Sichtweite a den Ausdruck

$$a = \sqrt{/R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$$

Dies gilt, da das Dreieck $\triangle ACS$ rechtwinklig ist, denn die Sichtgerade kann als Tangente an den Kreis (die Erde) angesehen werden.



Mit E und C als Punkte auf der Grundseite der Kugelkappe sowie D als Punkt, an dem der Antennenmast die Erde berührt, sei H die Länge der Strecke DE. Dann gilt $\cos\alpha = \frac{a}{h+R} = \frac{h+H}{a}$ (die Dreiecke $\triangle ACS$ und $\triangle ECS$ sind ähnlich aufgrund eines gemeinsamen Winkels und des in beiden Dreiecken vorhandenen rechten Winkels) und damit auch

$$H = \frac{a^2}{h+R} - h = \frac{2R + h^2}{h+R} - h$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$M = 2\pi RH = 2\pi R\left(\frac{2RH+h^2}{h+R} - h\right)$$

Für das gegebene Beispiel ist also $H \approx 351{,}98$ m und damit $M \approx 1{,}4088 \cdot 10^{10} m^2$. b) h ist 100,005682 % von H, die Abweichung der Fläche ist also 0,005682%. Sie ist für $h \ll R$ deshalb so gering weil dann

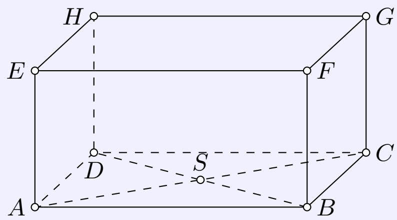
$$H = \frac{2Rh+h^2}{h+R} - h \approx \frac{2Rh}{R} - h = h$$

gilt.

Aufgabe 041213:
Gegeben sei ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$ sei S.

a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.

b) Es ist zu beweisen, dass die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.



Lösung von Rainer Müller:
Wir führen ein Koordinatensystem mit A als Ursprung, AB als x-, AD als y- und AE als z-Achse ein. Dann ist

$$A = (0{,}0{,}0),\ B = (\sqrt{3}a{,}0{,}0),\ C = (\sqrt{3}a{,}a{,}0),\ D = (0{,}a{,}0),$$
$$E = (0{,}0{,}a),\ F = (\sqrt{3}a{,}0{,}a),\ G = (\sqrt{3}a{,}a{,}a),\ H = (0{,}a{,}a),$$
$$S = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = (\sqrt{3}a/2{,}a/2{,}0).$$

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (m_x{,}m_y{,}m_z)$ und Radius $r \geq 0$ hat die Gleichung $(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2 + (z-m_z)^2 = r^2$. Setzt man die Punkte ein, die auf der Kugel liegen sollen, erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten $m_x{,}m_y{,}m_z$ und r. Dass in der Aufgabenstellung mehr Punkte genannt werden, als zur eindeutigen Festlegung der Kugel notwendig sind, ist wohl als Aufforderung zu verstehen, statt direkter Lösung des Systems erst festzustellen, dass offensichtlich $m_y = m_z = a/2$ gelten muss (der Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch $A{,}D{,}E$ und H soll diese vier Punkte enthalten). m_x und r berechnen wir daraus, dass A und S auf der Kugel liegen sollen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (0-m_x)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}a - m_x)^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ m_x^2 - \sqrt{3}am_x + a^2 &=& r^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ -\sqrt{3}am_x + \frac{1}{2}a^2 &=& 0 \end{array}\right\}$$

(subtrahiere die obere Gleichung von der unteren). Aus der zweiten Gleichung des letzten Paares folgt $m_x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ und somit

$$r = \sqrt{m_x^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}a.$$

b) Eine Ebene berührt eine Kugel genau dann, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene gleich dem Kugelradius ist. Ein Normalenvektor der Ebene durch $S{,}F$ und G ist

$$n := (G-F) \times (S-F) = (0{,}a{,}0) \times (-\sqrt{3}a/2{,}a/2{,}-a) = \frac{1}{2}a^2(-2{,}0{,}\sqrt{3}).$$

Da F in der Ebene liegt, ist der Abstand eines Punktes P von der Ebene gleich $\left|(P-F)\cdot n/|n|\right|$. Speziell für den oben berechneten Kugelmittelpunkt $M=(\frac{1}{6}\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2})a$ ist der Abstand

$$\left|\frac{(\frac{1}{6}\sqrt{3}-\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1)\cdot(-2,0,\sqrt{3})\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2}\right| = \left|\frac{\frac{7}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2}\right| = \frac{\sqrt{21}}{6}a = r.$$

Also berührt die Ebene die Kugel.

Aufgabe 051212:
Vier kongruente Kugeln berühren eine Ebene auf ein und derselben Seite. Ferner berührt jede Kugel zwei der anderen, und jede der Kugeln berührt einen und denselben geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis in der gegebenen Ebene liegt.

Es ist der Radius des Grundkreises des Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Kugeln und von der Höhe des Kegels darzustellen (Fallunterscheidung).

Lösung von Manuela Kugel:
Mit den Bezeichnungen im Bild und $x=\overline{X_1M}$, $h=\overline{MS}$, $y=\overline{AY}$, $z_1=\overline{M_1A}$, $z_2=\overline{AB}$ und dem Radius

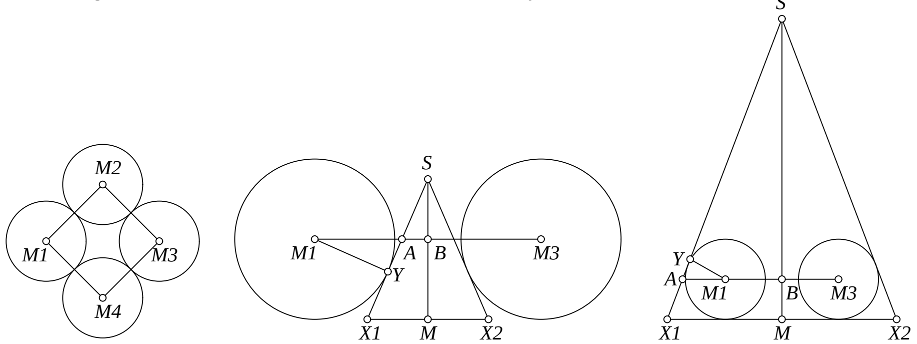


Abb. 051311a Abb. 051311b Abb. 051311c

r der Kugeln müssen folgende Beziehungen gelten:

(1) $\overline{M_1M_3}=2\cdot\sqrt{2}r$ (die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Quadrat wie in Abbildung a) dargestellt, wenn sie sämtliche denselben Kegel berühren)

(2) $\frac{x}{h}=\frac{y}{r}\Rightarrow rx=hy$ (ähnliche Dreiecke $\triangle X_1MS$ und $\triangle AYM_1$)

(3) $y=\sqrt{z_1^2-r^2}$ (Satz des Pythagoras)

(4) $z_1+z_2=\frac{\overline{M_1M_3}}{2}=\sqrt{2}r$ für Bild b) bzw. $z_2-z_1=\frac{\overline{M_1M_3}}{2}=\sqrt{2}r$ für Bild c) $\Rightarrow z_1=\pm(\sqrt{2}r-z_2)$, wobei $+$ im Fall b) und $-$ im Fall c) gilt. Dann gilt aber in beiden Fällen: $z_1^2=2r^2+z_2^2-2\sqrt{2}\cdot r\cdot z_2$

(5) $\frac{z_2}{x}=\frac{h-r}{h}\Rightarrow z_2=\frac{h-r}{h}\cdot x$ (Strahlensatz)

Nun werden die Gleichungen (1) bis (4) ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned}
rx &= h \cdot \sqrt{z_1^2 - r^2} \\
rx &= h \cdot \sqrt{2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2 - r^2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + h^2z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h^2 \cdot z_2} \\
rx &= \sqrt{h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x} \\
r^2x^2 &= h^2r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= h^2r^2 + (h^2 - 2hr) \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= x^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{r \cdot (h-r)}{h-2r} \cdot x + \frac{hr^2}{h-2r} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \sqrt{\frac{2r^2 \cdot (h-r)^2}{(h-2r)^2} - \frac{hr^2}{h-2r}} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2}r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \frac{r}{h-2r} \cdot \sqrt{2 \cdot (h-r)^2 - h \cdot (h-2r)} \\
x_{1,2} &= \frac{r}{h-2r} \cdot \left(\sqrt{2}(h-r) \pm \sqrt{h^2 + 2r^2 - 2hr}\right)
\end{aligned}$$

Der Fall mit dem Plus vor der Wurzel stellt die Lösung für den Fall des Berührens der Kugeln von außen und das Minus für innen dar.

Aufgabe 061211:
Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S liegt 140 m über dem Mittelpunkt M der Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 231 m. Wir wollen einmal annehmen, dass folgendes möglich ist:

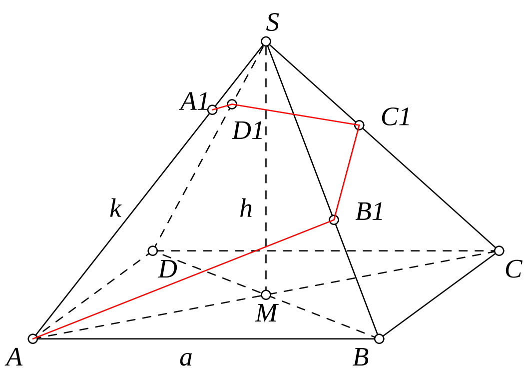
Ein Tourist besteigt die Pyramide derart, dass er von A ausgehend auf geradem Wege senkrecht zur Kante BS gelangt. Nachdem er diese Kante im Punkt B_1 erreicht hat, geht er weiter auf geradem Wege senkrecht zur Kante CS bis zu dieser Kante im Punkt C_1, von dort entsprechend weiter zum Punkt D_1 auf Kante DS und zum Punkt A_1 auf der Kante AS.

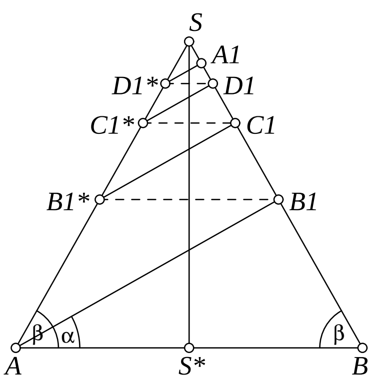
a) Wie lang wäre der von ihm von A bis zum Punkt A_1 zurückgelegte Weg?

b) In welcher Höhe über der Grundfläche befände sich der Tourist im Punkt A_1?

c) Welche Winkel würden die geraden Teilwege mit der Ebene der Grundfläche bilden?

Lösung von Gerd Wachsmuth:





- Aus der Höhe $h := \overline{MS} = 140$ m und der Länge der Grundfläche $a := \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 231m$ kann man leicht die Länge der Kanten $k := \overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ ausrechnen (die Dreiecke AMS und ABC sind rechtwinklig; dadurch kann jeweils der Satz des Pythagoras verwendet werden):

$$\begin{aligned}
k = \overline{AS} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\right)^2 + h^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) + h^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(a^2 + a^2) + h^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + h^2} = 215{,}13m
\end{aligned}$$

Gesucht ist nun die Weglänge s (wobei $\gamma = \angle ASB$):

$$\begin{aligned}
s &= \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1A_1} \\
&= \overline{AS}\sin\gamma + \overline{B_1^*S}\sin\gamma + \overline{C_1^*S}\sin\gamma + \overline{D_1^*S}\sin\gamma \\
&= \sin\gamma\cdot(k + \overline{B_1S} + \overline{C_1S} + \overline{D_1S})
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\overline{B_1S} &= k\cdot\cos\gamma, \\
\overline{C_1S} &= \overline{B_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^2\gamma, \\
\overline{D_1S} &= \overline{C_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^3\gamma. \\
\overline{A_1S} &= \overline{D_1S}\cdot\cos\gamma = k\cdot\cos^4\gamma.
\end{aligned}$$

Setzt man dies ineinander ein, erhält man:

$$s = k\cdot\sin\gamma\cdot(1 + \cos\gamma + \cos^2\gamma + \cos^3\gamma). \quad \text{(II.1)}$$

Nun stellen wir fest, dass die Dreiecke ABB_1 und AS^*S zueinander ähnlich sind (beide sind rechtwinklig und haben den Winkel β gemeinsam: $\beta = \angle BAS = \angle ABS$). Damit lässt sich $sin\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\sin\alpha = \overline{AS^*} : \overline{AS} = a : 2k$$

($\Rightarrow \alpha = 32{,}47°$). Und für $cos\alpha$ ergibt sich mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgendes:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - a^2 : 4k^2}$$

$\sin\gamma$ lässt sich aus $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ ausrechnen (mit dem Sinussatz): $\sin\gamma : sin\beta = \overline{AB} : \overline{AS} = a : k$, wobei $\sin\beta = \cos\alpha$ gilt, also:

$$\sin\gamma = \frac{a}{k}\cdot\sqrt{1 - a^2 : 4k^2} \quad \text{(II.2)}$$

Analog ergibt sich für $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2}\cdot\left(1 - \frac{a^2}{4k^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2} + \frac{a^4}{4k^4}} \quad \text{(II.3)}$$

Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein erhält man das Ergebnis, dass der Tourist 327 m zurücklegen muss. Zur Kontrolle seien die Teilstrecken auch angegeben: $\overline{AB_1} = 195m$, $\overline{B_1C_1} = 83m$, $\overline{C_1D_1} = 35m$, $\overline{D_1A_1} = 15m$.

- Für die gesuchte Höhe h_a gilt mit den Bezeichnungen aus dem 1. Bild: $h_a : h = \overline{A_1A} : \overline{AS}$. Daraus folgt nun:

$$h_a = h\cdot\frac{\overline{A_1A}}{k} = \frac{h\cdot(k - \overline{A_1S})}{k} = \frac{h\cdot(k - k\cdot\cos^4\gamma)}{k} = h\cdot(1 - \cos^4\gamma) = 135{,}50m$$

- Die geraden Teilwege bilden mit der Grundfläche alle denselben Winkel. Dazu wird die Höhe analog zur vorigen Teilaufgabe bzgl. B_1 benötigt:

$$h_b = h \cdot \frac{\overline{B_1B}}{k} = \frac{h \cdot (k - \overline{B_1S})}{k} = \frac{h \cdot (k - k \cdot \cos\gamma)}{k} = h \cdot (1 - \cos\gamma) = 80{,}70m$$

Nun kann der Sinus des gesuchten Winkels wie folgt ausgedrückt werden:

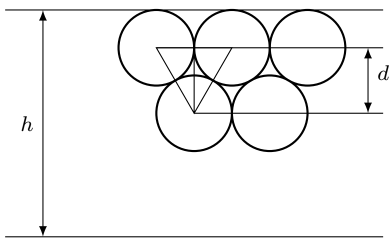
$$\varepsilon = \arcsin\left(h_b : \overline{AB_1}\right) = \arcsin\left(\frac{h \cdot (1 - \cos\gamma)}{k \cdot \sin\gamma}\right)$$

Man erhält nach Einsetzen: $\varepsilon = 65{,}5°$.

Aufgabe 061213:
In einer quaderförmigen Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln von 1 cm Durchmesser einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.

Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Neben der Möglichkeit, 100 Kugeln zu je 10 in 10 Reihen zu legen, gibt es auch die Möglichkeit, in einer Reihe 10 Kugeln, in der nächsten 9 Kugeln, dann wieder 10 Kugeln usw. unterzubringen. Dabei ist der Abstand d der Geraden durch die Mittelpunkte der ersten von der zweiten Kugelreihe $d = r \cdot \sqrt{3}$, wobei r der Kugelradius ist; denn der Abstand der Geraden durch die Mittelpunkte ist gleich der Länge einer Höhe eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte dreier benachbarter Kugeln sind (siehe Bild). Ein derartiges Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $2r$.



Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Kugelreihen, so gilt für den Abstand h der Tangentialebenen bei der oben beschriebenen Anordnung der Kugeln

$$h = 2r + (n-1)r\sqrt{3}.$$

Für $n = 11$ folgt $\left(\text{wegen } r = \frac{1}{2}\right) \quad h < 10$.

Man kann daher 11 Reihen in der Schachtel unterbringen. Die Kugeln lassen sich so anordnen, dass 6 Reihen mit je 10 und 5 Reihen mit je 9 Kugeln besetzt sind, also 105 Kugeln in der Schachtel liegen. Dabei liegen in den 'äußeren' Reihen jeweils 10 Kugeln. Ersetzt man nun eine der Reihen zu 9 Kugeln durch eine mit 10 Kugeln, so vergrößert sich der Abstand

$$h = 2r + r(11-1)\sqrt{3} = 1 + 5 \cdot \sqrt{3}$$

auf

$$h' = 6r + 8r\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} < 3 + 4 \cdot 1{,}74 = 9{,}96.$$

Da $h' < 10$ ist, lassen sich 106 Kugeln in der Schachtel unterbringen. Die Behauptung ist also richtig.

Aufgabe 081213:
In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\angle CSD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man fällt das Lot AM von A auf die Tetraederkante CD. Dann ist $AM \simeq BM$, da beide Strecken Höhen einer Seitenfläche ein und desselben regelmäßigen Tetraeders sind. Weiter ist mit $\alpha = |\angle ASB|$, wenn BQ Tetraederhöhe ist,

$$\alpha = 360° - 90° - 90° - |\angle QMB|,$$

also

$$\cos\alpha = \cos(180° - |\angle QMB|) = -\frac{QM}{MB} = -\frac{1}{3},$$

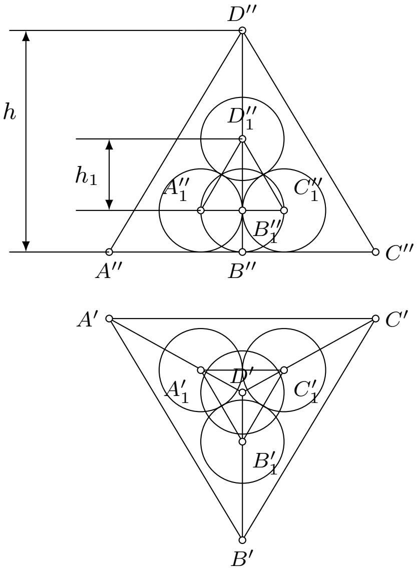
woraus $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ folgt. Zur Erinnerung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Tafel benutze man die Relation $\alpha = 180° - \arccos\frac{1}{3}$. Man findet dann $\cos(70{,}6°) < \frac{1}{3} < \cos(70{,}5°)$, so dass $180° - 70{,}5° = 109{,}5°$ ein Näherungswert der geforderten Art ist.

Aufgabe 101212:
In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, dass jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a!

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da laut Aufgabe jede der Kugeln die drei anderen von außen berührt, bilden die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte aller vier Kugeln die Kanten eines regulären Tetraeders T_1 mit der Kantenlänge $2r$.

Zu je drei der Kugeln existiert ferner genau eine Seitenfläche F des gegebenen Tetraeders T, die von diesen drei Kugeln berührt wird. Deren Mittelpunkte haben daher von F den Abstände r. Somit ist diejenige Seitenfläche F_1 des Tetraeders T_1, auf der die genannten drei Mittelpunkte liegen, parallel zu F im Abstand r.

Dreht man nun die gesamte Figur so um eine Höhe von T, dass eine andere Seitenfläche F' von T in die Lage F kommt, so kommt eine andere Seitenfläche F_1' von T_1 in die Lage F_1. Daher liegen entsprechende Höhen der beiden Tetraeder jeweils auf der gleichen Geraden. Infolgedessen fallen die Höhenschnittpunkte beider Tetraeder zusammen.

Bezeichnet man die Länge der Höhe des gegebenen Tetraeders mit h, die des in ihm liegenden Tetraeders mit h_1, so ist

$$d = \frac{h_1}{4} + r = \frac{h}{4} \tag{1}$$

der Abstand d des gemeinsamen Höhenschnittpunktes zu jeder Fläche des gegebenen Tetraeders. Nun gilt für die Länge h der Höhe eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a die Beziehung $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Analog erhält man

$$h_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{r}{6}\sqrt{6} + r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

also

$$r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

woraus man

$$r = \frac{a \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12 \cdot (6 + \sqrt{6})} = \frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$$

erhält.

Aufgabe 131212:
Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien r_1 bzw. r_2 die Radien der Grund- bzw. Deckfläche eines Kreiskegelstumpfes ($r_1 \geq r_2 > 0$) und h die Höhenlänge dieses Körpers. Dann gilt für das Volumen V, des betrachteten Körpers

$$V_1 = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Ferner gilt für das Volumen v_2 des ausgeschnittenen Kegelkörpers

$$V_2 = \frac{\pi}{3} h r_2^2 \tag{1}$$

und daher für das Volumen V des Restkörpers

$$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2) \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) entspricht $r_1 : r_2$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $6r_2^2 = r_1^2 + r_1 r_2$ und $r_1 \geq r_2 > 0$ oder, gleichbedeutend hiermit,

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1}{r_2} - 6 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{r_1}{r_2} \geq 1$$

ist. Daher kann nur

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 2 \tag{3}$$

den Bedingungen der Aufgabe genügen. Durch Einsetzen in (3) und Rückwärtsschließen ergibt sich, dass für $\frac{r_1}{r_2} = 2$ tatsächlich $V = 6V_2$ ist.

Aufgabe 151212:
Man beweise, dass es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.

Bemerkung: Eine Halbkugel(-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch den Mittelpunkt der Kugel und zwei der drei ausgewählten Punkte gibt es stets eine Ebene. Durch diese werden zwei Halbkugeln bestimmt, die die gesamte Kugeloberfläche überdecken.

Daher liegt der dritte ausgewählte Punkt in (wenigstens) einer dieser beiden Halbkugeln. Diese Halbkugel enthält aber (auf ihrer Randlinie) auch die beiden zuerst genannten Punkte.

Aufgabe 161214:
Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.

Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.

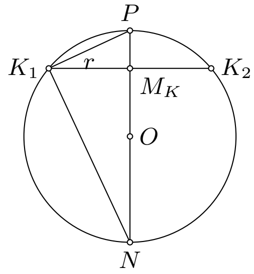
Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im ersten Schritt wird der Durchmesser $2R$ der Kugel konstruiert.

a) Man zeichnet um einen beliebigen Punkt P der Kugeloberfläche mit einem beliebig, aber genügend klein gewählten Abstand s der Zirkelspitzen einen Kreis K und ermittelt den Radius r von K. Dazu werden auf K drei beliebige, voneinander verschiedene Punkte $P_1, P_2, P3$ markiert; die Abstände P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 werden mit dem Zirkel auf der Kugel abgegriffen.

   Mit diesen Abständen wird als ebene Hilfsfigur ein zu dem in der Ebene des Kreises K gelegenen Dreieck $P_1P_2P_3$ kongruentes Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ und dessen Umkreis K' konstruiert. Sein Radius ist dann gleich r.

b) Durch P und den Kugelmittelpunkt O denke man sich eine Ebene ε gelegt.



In der in ε gelegenen Schnittfigur (siehe Abbildung), seien mit K_1, K_2 die Schnittpunkte des Kreises K mit ε, mit M_K der Mittelpunkt von K und mit N der zweite Schnittpunkt von der P_0 enthaltenden Geraden mit dem Schnittkreis bezeichnet.

Um eine Strecke der Länge R zu konstruieren, genügt es dann, wegen $PN = 2R$, als ebene Hilfskonstruktion ein zum Dreieck PK_1N kongruentes Dreieck zu konstruieren.

Man zeichnet eine Strecke mit der Länge $ST = r$. Auf ST wird in T die Senkrechte errichtet. Der Kreis mit dem Radius s um S schneidet dann wegen $s > r$ die Gerade t in zwei voneinander verschiedenen Punkten M_1, M_2. Die Senkrechte auf SM_1 in S schneidet t in einem Punkt Q. Wegen

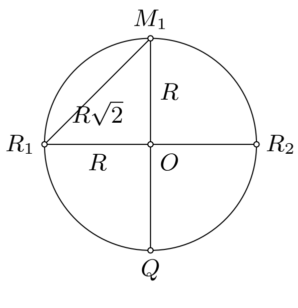
$$K_1P = SM_1 \qquad ; \qquad ST = K_1M_K \qquad ; \qquad \angle STM_1 = \angle K_1M_KP$$

gilt $\triangle K_1M_KP \cong \triangle STM_1$, also gilt $\angle SM_1T = \angle K_1PM_K$. daher und wegen $\angle M_1SQ = \angle PK_1N$ ist das Dreieck M_1SQ zum Dreieck PK_1N kongruent, und es gilt $M_1Q = 2R$.

2) Nun wird der Großkreis durch A und B konstruiert.

Da jeder Großkreis den Radius R hat, muss der Abstand der Zirkelspitzen, wenn man einen Großkreis auf der Kugel um einen beliebigen Punkt P der Kugelfläche konstruieren will, gleich $R\sqrt{2}$ sein.

Umgekehrt ist auch jeder Kreis, der mit $s = R\sqrt{2}$ um einen Punkt der Kugeloberfläche, konstruiert wird, ein Großkreis. Indem man auf der konstruierten Strecke M_1Q in der Ebene der Hilfekonstruktion die Mittelsenkrechte errichtet, und um den Halbierungspunkt von M_1Q einen Kreis mit dem Radius R beschreibt, der die Mittelsenkrechte in zwei Punkten R_1 und R_2 schneidet, erhält man die Strecke M_1R_1 mit $M_1R_1 = R\sqrt{2}$ (Abbildung), und es folgt durch Vergleich mit dem kongruenten Kreis in der oberen Abbildung, dass der um P mit dem Abstand $R\sqrt{2}$ der Zirkelspitzen auf der Kugeloberfläche konstruierte Kreis in der zu OP senkrechten Ebene durch O liegt, also der behauptete Großkreis ist.



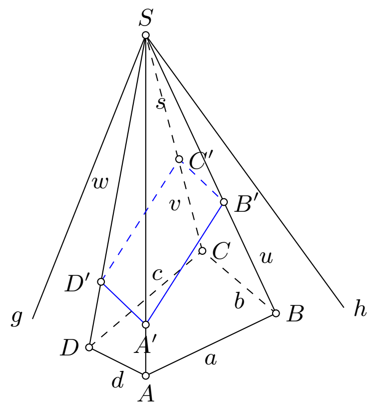
Auf der Kugel wird nun um A und B mit einem Abstand der Zirkelspitzen von $R\sqrt{2}$ je ein Großkreis konstruiert. Diese Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; denn die Ebenen, in denen sie verlaufen, haben diejenige Gerade durch O gemeinsam, die sowohl zu OA als auch zu OB senkrecht ist.

Der Kreis um einen dieser Punkte mit dem Abstand der Zirkelspitzen von $s = R\sqrt{2}$ ist dann ebenfalls Großkreis und verläuft durch A und B. Damit ist die verlangte Konstruktion beschrieben.

Aufgabe 171213:
Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, dass A, B, C, D in einer Ebene ξ liegen; dass sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und dass S nicht in ξ liegt.

Es ist zu beweisen, dass dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCDS$ eine Ebene existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $A \neq B$, und S liegt nicht auf der Geraden durch A, B. Daher gibt es genau eine Ebene α durch A, B, S. Ebenso gibt es eine Ebene β durch B, C, S, genau eine Ebene γ durch C, D, S und genau eine Ebene δ durch D, A, S. Für diese Ebenen gilt:

(1) α und ξ haben genau die Gerade a durch A, B gemeinsam,
β und ξ haben genau die Gerade b durch B, C gemeinsam,
γ und ξ haben genau die Gerade c durch C, D gemeinsam,
δ und ξ haben genau die Gerade d durch D, A gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch A und B. Wäre $\alpha = \xi$, so läge S auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(2) α und β haben genau die Gerade u durch B, S gemeinsam,
β und γ haben genau die Gerade v durch C, S gemeinsam,
γ und δ haben genau die Gerade w durch D, S gemeinsam,
δ und α haben genau die Gerade d durch A, S gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch B und S. Wäre $\alpha = \beta$, so lägen A, B, C, S auf α, also wäre $\alpha = \xi$, und S läge auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(3) α und γ haben genau eine Gerade gemeinsam,
β und δ haben genau eine Gerade gemeinsam,

Beweis: α und γ durch S. Wäre $\alpha = \gamma$, so lägen A, B, C, D, S auf α, also S auf ξ. Ebenso folgt die andere Aussage.

(4) g und h haben genau den Punkt S gemeinsam, folglich gibt es genau eine Ebene η durch g, h.

Beweis: g und h gehen durch S. Wäre $g = h$, so gingen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch g; nach (2) wäre $u = v = w = s = g$, also lägen A, B, C, D, S auf g.

(5) α und η haben genau die Gerade g gemeinsam,
β und η haben genau die Gerade h gemeinsam,
γ und η haben genau die Gerade g gemeinsam,
δ und η haben genau die Gerade h gemeinsam.

Beweis: α und η gehen durch g. Wäre $\alpha = \eta$, so ginge außer β, δ auch α durch h, nach (2) wäre $u = v = h$, also lägen A, B, S auf h. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(6) A liegt nicht η,
B liegt nicht η,
C liegt nicht η,
D liegt nicht η,

Beweis: Läge A auf η, so läge A nach (5) sowohl auf g als auch auf h; nach (4) wäre daher $A = S$. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(7) A und B liegen auf derselben Seite von η,
B und C liegen auf derselben Seite von η,
C und D liegen auf derselben Seite von η,

Beweis: Lägen A und B nicht auf derselben Seite von η, so ginge η nach (6) durch einen Punkt P zwischen A und B. Nach Voraussetzung wäre $P \neq S$; die Gerade durch P und S stimmte nach (5) mit g überein. Also läge P auf γ und folglich nach (1) auf c.

Das steht im Widerspruch dazu, dass die Geraden a und c sich wegen der Konvexität von $ABCD$ nicht zwischen A und B schneiden können. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

Verschiebt man nun η parallel zu sich nach derjenigen Seite hin, auf der A,B,C und D liegen, jedoch um ein so kleines Stück, dass auch der zu η nächstgelegene unter den vier Punkten A, B, C, D noch nicht erreicht wird, so erhält man eine Ebene ε, die alle vier Strecken AS, BC, CS, DS in inneren Punkten schneidet.

Sind A', B', C', D' die Schnittpunkte, so gilt $A' \neq B'$, $B' \neq C'$, $C' \neq D'$, $D' \neq A'$, (da ABS, BCS, CDS, DAS nicht entartete Dreiecke sind) und weiter:

(8) Die Gerade durch A', B' ist parallel zu g,
Die Gerade durch B', C' ist parallel zu h,
Die Gerade durch C', D' ist parallel zu g,
Die Gerade durch D', A' ist parallel zu h,

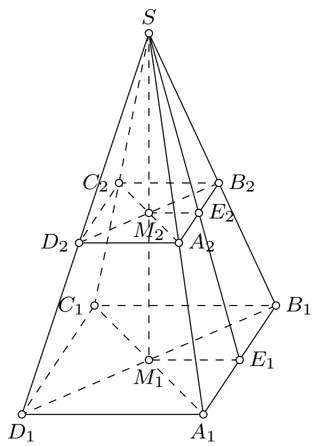
Beweis: Die Ebene α scheidet η nach (5) genau in g, also schneidet sie die zu η parallele Ebene ε genau in einer zu g parallelen Geraden. Auf dieser liegen A' und B'. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

Mit (8) ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 201213:
Eine gerade Pyramide K_1 mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide K_2 und einen Pyramidenstumpf K_3 zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von K_1 und K_2 seien a_1 bzw. a_2, die Volumina von K_2 bzw. K_3 seien V_2 bzw. V_3.

Man ermittle $a_1 : a_2$ so, dass $V_2 : V_3 = 2 : 3$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Ecken von K_1 und K_2 seien so mit $A_1, B_1, C_1, D_1,\ A_2, B_2, C_2, D_2,\ S$ bezeichnet wir die Abbildung angibt. Die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) von $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ seien M_1 bzw. M_2; die Mittelpunkte von A_1B_1 bzw. A_2B_2 seien E_1 bzw. E_2.

Dann sind $H_1 = SM_1$, $h_2 = SM_2$ die Höhenlängen von K_1 bzw. K_2M die Punkte S, M_2, M_1 liegen auf einer Geraden, ebenso S,E_2,E_1; es gilt $M_1E_1 \parallel M_2E_2$ sowie $M_1E_1 = \frac{1}{2}a_1$, $M_2E_2 = \frac{1}{2}a_2$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$h_1 : h_2 = M_1E_1 : M_2E_2 = a_1 : a_2$$

Definiert man $r = a_1 : a_2$, so gilt folglich $r = h_1 : h_2$, sowie $a_1 = ra_2, h_1 = r_2$. Ferner haben K_2, K_1 die Volumina

$$V_2 = \frac{1}{3}a_2^2h_2 \qquad \text{und} \qquad V_1 = \frac{1}{3}a_1^2h_1 = \frac{1}{3}r^3a_2^2h_2 = r^3V_2$$

Somit ist

$$V_3 = V_1 - V : 2 = (r^3 - 1)V_2 \qquad , \qquad V_2 : V_3 = 1 : (r^3 - 1)$$

Daher ist die Forderung $V_2 : V_3 = 2 : 3$ der Reihe nach gleichbedeutende mit

$$1 : (r^3 - 1) = 2 : 3 \qquad , \qquad 2r^3 - 2 = 3 \qquad , \qquad r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Somit ist die genannte Forderung genau für $a_1 : a_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ erfüllt.

Aufgabe 211211:
Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:

(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.

(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.

Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, eine Pyramide $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Ist F der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch A, B, C gelegte Ebene ε, so gilt wegen (1) nach dem Satz des Pythagoras

$$FA = FB = FC = \sqrt{s^2 - h^2}$$

Also ist F der Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC und somit in diesem Dreieck auch Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt. Die Höhenlänge im Dreieck ABC beträgt $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2, also ist $FA = FB = FC = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Daher gilt

$$s^2 - h^2 = FA^2 = \frac{1}{3}a^2 \tag{3}$$

Aus (2) folgt ferner

$$h = \frac{1}{2}(h + s) \tag{4}$$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^2 &= s^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}s^2 \\ 0 &= s^2 - \frac{2}{3}as - \frac{7}{9}a^2 \\ s_{1,2} &= \frac{a}{3}(1 \pm 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \qquad ; \qquad a + s = \frac{a}{3}(4 + 2\sqrt{2})$$

und daraus nach (4)

$$h = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

Daher kann eine Pyramide $ABCD$ nur dann die verlangten Eigenschaften haben, wenn D so auf der im Schwerpunkt F des Dreiecks ABC auf ε errichteten Senkrechten liegt, dass gilt:

$$FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

II. Für jede solche Pyramide $ABCD$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} AD = BD = CD = \sqrt{FA^2 + FD^2} &= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^2(2 + \sqrt{2})^2} \\ &= \frac{a}{3}\sqrt{3 + 4 + 4\sqrt{2} + 2} \\ &= \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

also ist (1)mit $s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2})$ erfüllt, und die Höhenlänge $FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$ ist auch gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a + s)$, also ist (2) erfüllt.

Damit ist gezeigt: Es gibt eine Pyramide $ABCD$ mit den Eigenschaften (1),(2); dabei sind h und s eindeutig bestimmt, und zwar ist $h = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$, $s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2})$.

II Runde 2

Aufgabe V11221:
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Der Ausgangspunkt war der Nordpol. Jede beliebige, geradlinige Strecke, die am Nordpol beginnt, führt Richtung Süden, und egal wie weit man in Richtung Osten oder Westen fliegt, wenn man anschließend die gleiche Streckenlänge wieder in Richtung Norden fliegt, kommt man wieder am Nordpol an. Allerdings setzt das voraus, dass man in Richtung Osten entlang eines Breitenkreises geflogen ist, und nicht geradlinig. (geradlinig heißt in diesem Zusammenhang natürlich entlang eines Großkreises).

b) Hier gilt sinngemäß das gleiche wie unter a), nämlich dass der Flug Richtung Osten entlang eines Breitenkreises erfolgt. Auf der Südhalbkugel ist die Rückkehr an den Ausgangspunkt nur möglich, wenn der Punkt, an dem von Flugrichtung Süd auf Ost gewechselt wird, derselbe ist wie der, wo die Flugrichtung von Ost auf Nord wechselt. Der Breitenkreis muss also einen Umfang von 300 km haben. Angesichts der geringen Erdkrümmung reicht eine näherungsweise Betrachtung. Der Breitenkreis muss somit $\frac{300\text{km}}{2\pi} =$ 47,75km vom Südpol entfernt sein.

Man kehrt mit obiger Route also genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn dieser 347,75km vom Südpol entfernt ist.

Alle Punkte, die auf den die Breitenkreisen liegen, die 300 km nördlich von den Breitenkreisen mit Umfang 150 km oder 100 km oder 75 km entfernt sind, haben auch die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 011122:
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform“ (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

1. Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?
2. Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Lösung von Korrina Grabski:
a) Die Bedingungen für das Höchstmaß lauten: $l + 2d \leq 100$ cm und $l \leq 80$ cm. Damit erhält man für das Volumen eines Zylinders:

$$V = \frac{\pi}{4}d^2 l \leq \frac{\pi}{4}d^2(100cm - 2d) = \frac{\pi}{4} \cdot 100cm \cdot d^2 - \frac{\pi}{2}d^3$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist $V'(d) = 0$, also

$$V'(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm \cdot d - \frac{3\pi}{2}d^2 = 0$$

somit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{100}{3}$ cm. Die erste Lösung entfällt, da das Volumen dann null wäre. Die zur zweiten Lösung gehörige maximale Länge ist $l = \frac{100}{3}$ cm, das entsprechende Volumen $V = 29089$ cm^3.
Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Lösung tatsächlich ein Maximum ist, wofür $V''(d) < 0$ hinreichend ist:

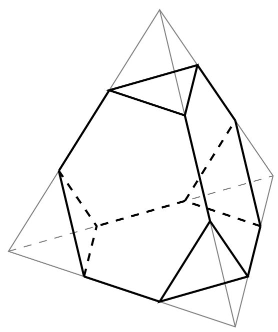
$$V''(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm - 3\pi d = -\pi \cdot 50cm < 0$$

Es handelt sich also wirklich um ein Maximum. Das Höchstvolumen der Sendung beträgt 29089 cm^3. In diesem Fall betragen Durchmesser und Länge $\frac{100}{3}$ cm.

b) Die Bedingungen für das Mindestmaß schließen einen Durchmesser von 0 cm nicht aus, was auf einen theoretischen Mindestwert des Volumens von 0 cm^3 führt.
Nach der ersten Bedingung beträgt die Länge dann mindestens 17 cm.

Aufgabe 021124:
Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, dass von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.
Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Lösung von Eckard Specht:
Regelmäßige Sechsecke auf den Seitenflächen des Tetraeders mit der Kantenlänge a entstehen nur, wenn dessen Kanten gedrittelt werden und somit vier kleine regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ abgeschnitten werden.



Jeder dieser kleinen Tetraeder hat ein Volumen von $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des ursprünglichen Tetraeders, also hat der verbleibende Körper ein Volumen von $V' = (1 - \frac{4}{27})V = \frac{23}{27}$ des ursprünglichen Volumens V. Mit der Volumenformel eines Tetraeders $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ergibt sich $V' = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$.

Auf jeder Seitenfläche fallen durch das Abschneiden drei kleine gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ weg, dafür entsteht an jeder Ecke ein neues dieser Dreiecke. Die Oberfläche des Restkörpers beträgt also

$$A' = A - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}A = \frac{7}{9}A \quad \text{bzw.} \quad A' = \frac{7}{9}\sqrt{3}a^2$$

Aufgabe 041221:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, dass aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.
Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen.
Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!
a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.
b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.
c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Lösung von cyrix:
Lässt man zu, dass durch die Schnitte kein Punkt der Kanten des Würfels im Restkörper enthalten sein muss, dann sind keine eindeutigen Ergebnisse möglich, siehe unten. Daher wird angenommen, dass die Aufgabenstellung (als erste Aufgabe einer zweiten Runde) sich darauf bezieht, dass von jeder Kante noch jeweils mindestens ein Punkt im Restkörper enthalten ist.

a) Wir betrachten zuerst eine Seitenfläche $ABCD$ des Würfels. In dieses kann ein regelmäßiges Viereck (also Quadrat) $A_1B_1C_1D_1$ mit A_1 auf AB, B_1 auf BC, C_1 auf CD und D_1 auf DA nur genau so einbeschrieben werden, indem $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1|$ gilt.
(Dass dann $A_1B_1C_1D_1$ tatsächlich ein Quadrat ergibt, zeigt die Rotationssymmetrie der Figur, sodass alle Seitenlängen und alle Innenwinkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ gleich groß sind.)
Aufgrund der Symmetrie ist $|AD_1| = |A_1B|$.

Aufgrund der Kongruenz der aus den Seitenflächen durch die Schnitte entstehenden Quadrate muss der zu $ABCD$ benachbarte Würfelseitenfläche $ABFE$ auf die gleiche Weise ein Quadrat $A_1B_2F_2E_2$ mit B_2 auf BF, F_2 auf FE und E_2 auf EA einbeschrieben werden. Insbesondere gilt dann $|AE_2| = |A_1B|$.
Analog erhält man auch auf der zu beiden bisher betrachteten Würfelseitenflächen $ABCD$ und $ABFE$ benachbarten Würfelseitenfläche $AEHD$ ein einbeschriebenes Quadrat $E_2E_3H_3D_1$ mit E_3 auf EH und H_3 auf HD, für welches $|AE_2| = |DD_1| = |AD| - |AD_1| = |AB| - |BA_1| = |AA_1|$ gilt.
Damit ist $|A_1B| = |AE_2| = |AA_1|$, sodass A_1 der Mittelpunkt von AB ist und aus Symmetriegründen also jede Kante des Würfels durch die entsprechenden Schnitte halbiert wird.

Der Teilkörper, der beim Abtrennen einer Würfelecke entsteht, ist demnach eine dreiseitige Pyramide mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche, deren Katheten die Länge $\frac{a}{2}$ haben, und Höhe $\frac{a}{2}$. Jeder dieser Teilkörper hat damit ein Volumen von $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}a^3$, und da sich die acht entstehenden, abgetrennten Teilkörper jeweils paarweise nicht in inneren Punkten überschneiden, besitzt der verbleibende Restkörper ein Volumen von $a^3 - 8 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

(Würde man die „Kantenlängen" der abzuschneidenden − sich dann überschneidenden − dreiseitigen Pyramiden auf knapp unter a erhöhen, so entstünde zwar aus jeder Würfelseitenfläche ein Quadrat mit beliebig kleiner Kantenlänge; der verbleibende Restkörper hätte aber ein Volumen, welches unter jede beliebige Schranke, die größer als $\frac{1}{3}a^3$ ist, gedrückt werden kann: Die abgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden zu zwei gegenüberliegenden Ecken im Würfel überschneiden sich nich, haben aber jeweils ein Volumen von knapp unter $\frac{1}{3}a^3$, sodass der verbleibende Restkörper höchstens ein Volumen von „etwas mehr" als $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$ besitzen kann. Der Betrag von „etwas mehr" kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kantenlänge der abzuschneidenden Pyramiden beliebig nahe an a heranführt.)

b) Da ein gerader Schnitt durch ein konvexes n-Eck die Anzahl der Ecken höchstens um 1 erhöhen kann (und dies auch nur tut, wenn er durch das Innere zweier benachbarter Seiten verläuft), müssen die die Würfelecken abtrennenden ebenen Schnitte jede Würfelkante in drei Abschnitte einteilen: Die jeweils an einer Würfelkante angrenzenden Abschnitte einer Kante gehören dann zum diese Ecke enthaltenden Teilkörper, während der jeweils mittlere Abschnitt Kante des Restkörpers ist. Insbesondere liegen also auf jeder Kante des ursprünglichen Würfels nun zwei benachbarte Eckpunkte der entstehenden Achtecke des Restkörpers.

Zeichnet man in ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck ein, dessen Eckpunkte alle auf den Seiten des Quadrats liegen, dann geht die Figur sowohl durch Drehung um 90° um den Mittelpunkt des Quadrats als auch durch Spiegelung an einer Mittelparallele zweier gegenüberliegender Seiten des Quadrats in sich selbst über, da sowohl Quadrat als auch regelmäßiges Achteck diese Symmetrien besitzen. Also sind alle entsprechenden Strecken gleich lang.

Sei die Würfelkante AB durch die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 in der Reihenfolge AS_1S_2B in drei Abschnitte geteilt, sodass regelmäßige Achtecke auf den Würfelflächen mit Kantenlänge $|S_1S_2|$ entstehen. Dann ist nach der vorherigen Überlegung $b := |AS_1| = |S_2B|$ und $|S_1S_2|$ die Länge der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten genau die Länge b besitzen. Damit ergibt sich

$$a = |AB| = 2 \cdot b + \sqrt{2} \cdot b \qquad \text{also} \qquad b = \frac{1}{2+\sqrt{2}}a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

Weiterhin überschneiden sich wegen $b \leq \frac{1}{2}a$ die abzuschneidenden dreiseitigen Pyramiden mit Kantenlängen b nicht und haben jeweils ein Volumen von

$$\frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^3}{8}a^3 = \frac{8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}}{48}a^3 = \frac{20-14\sqrt{2}}{48}a^3$$

sodass der Restkörper ein Volumen von

$$a^3 - 8 \cdot \frac{10-7\sqrt{2}}{24}a^3 = \frac{3-10+7\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{7}{3} \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot a^3$$

hat.

c) Wie schon in Teil b) gesehen, kann pro Schnitt durch eine der Würfelseiten die Anzahl der Ecken dieser Fläche nur um höchstens 1 erhöht werden. Also sind maximal Achtecke als aus den Würfelseiten entstehenden Flächen des Restkörpers möglich. Ein gleichseitiges Dreieck ist dabei nicht möglich zu erhalten, da dafür mindestens eine Kante des Würfels komplett entfernt werden müsste, da ein solches nie zugleich alle vier Seiten des Quadrats berühren kann. Neben $n = 4$ und $n = 8$ sind also noch die Fälle $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ zu betrachten. In allen Fällen müssen auf mindestens einer Kante zwei verschiedene Eckpunkte eines solchen regelmäßigen n-Ecks liegen.

Gibt es mindestens zwei Seiten eines Quadrats, auf denen je zwei der Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks liegen, sind die beiden durch diese Eckpunkte gebildeten Seiten des n-Ecks entweder parallel oder senkrecht zueinander. Derartige Seiten gibt es im regelmäßigen Siebeneck aber nicht, sodass $n = 7$ ausgeschlossen werden kann.

Im Fall des Sechsecks verläuft die gemeinsame Mittelparallele zwei gegenüberliegender Sechseckseiten durch den Diagonalenschnittpunkt. Insbesondere müsste die Figur des dem Quadrat einbeschriebenen Sechsecks spiegelsymmetrisch zu dieser Achse sein, sodass die Eckpunkte des Sechsecks, die nicht auf den beiden Quadratseiten mit je zwei Sechseck-Eckpunkten liegen, durch die Spiegelung auf den jeweils anderen abgebildet werden müssten. Damit betrüge die Länge der Diagonalen genau a und die Kantenlänge des Sechsecks $\frac{1}{2}a$.

An den Quadratecken ergäben sich aber nun aus Symmetriegründen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlänge $\frac{1}{4}a$ und Hypotenusenlänge = Sechseck-Seitenlänge $\frac{1}{2}a$, was aber dem Satz von Pythagoras widerspricht. Demzufolge kann es auch der Fall $n = 6$ ausgeschlossen werden.

Bleibt noch zu betrachten, ob regelmäßige Fünfecke möglich sind. Gäbe es ein solches, dass einem Quadrat einbeschrieben ist, so müsste die Höhe des Punktes, dass der Kante des Fünfecks, welche auf einer Quadratseite liegt, gegenüberliegt, auf eben jene gegenüberliegende Kante des Fünfecks parallel zu einer Quadratseite zwei gegenüberliegende Quadratseiten verbinden, also die Länge a haben.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an dieser Höhe überführt die Figur in sich selbst) ist aber auch die Verbindungslinie der zwei übrigen Eckpunkte des Fünfecks parallel zu zwei gegenüberliegenden Quadratseiten (nun dem anderen Paar) und verbindet auch zwei Punkte auf diesen, hat also genauso die Länge a. Im regelmäßigen Fünfeck verläuft aber die Höhe eines Punktes auf die gegenüberliegende Fünfeckseite durch keinen der beiden Eckpunkte dieser Seite, sodass die Diagonalen alle länger sind als diese Höhen. So ist auch dieser Fall auszuschließen.

Es verbleiben die in a) und b) betrachteten Fälle mit $n = 4$ bzw. $n = 8$.

Aufgabe 051221:
Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Lösung von Caban:
Mit den Standardbezeichnungen r für Radius, h für Höhe und A für Flächeninhalt bzw. V für Volumen wird:

a) $\frac{1}{3}A_{Kugel} = A_{Kappe} \rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot h_{Kappe} = 2\pi \cdot r \cdot (r-h)$
Daraus ergibt sich wegen $r \neq 0$: $r - h = \frac{2}{3}r$ also $h = \frac{1}{3}r$

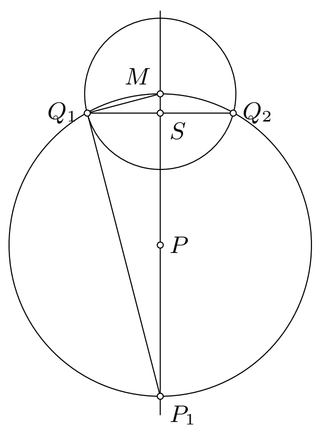
b) $\frac{1}{3}V_{Kugel} = V_{Sektor} \rightarrow \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (r-h) = \frac{4}{9}\pi \cdot r^3$
$h = \frac{1}{3}r$

Aufgabe 051226:
Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist möglich.
Wähle die Mittelpunkte zweier gegenüberliegende Kanten. Sei g die Gerade durch diese beiden Punkte. Die beiden Kanten und die Gerade g sind paarweise orthogonal zueinander.
Eine Parallelprojektion in Richtung g bildet die beiden Kanten auf ein symmetrisches Kreuz ab, welche die Diagonalen eines Quadrats bilden. Die übrigen vier Kanten werden auf die Seiten des Quadrats abgebildet.

Aufgabe 061224:
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.
Beweisen Sie, dass I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Radius von K_1 sei r. Man lege eine Ebene ε durch M und P (Abbildung). Der Schnittkreis k von K_1 und K_2 schneidet ε in zwei Punkten Q_1, Q_2. Der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt.
P_1 sei der von M verschiedene Schnittpunkt von PM und K_2. Dann ist I der Flächeninhalt der auf K_2 liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge MS hat. Da MP der Radius von K_2 ist, gilt

$$I = \pi \cdot 2 \cdot |MP| \cdot |MS|$$

Da das Dreieck MQ_1P_1 nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz:

$$MQ^2 = 2|MP| \cdot |MS|$$

Mithin erhält man

$$I = \pi \cdot |MQ_1|^2 = \pi r^2$$

womit gezeigt ist, dass I nicht von der Lage des Punktes P abhängt.

Aufgabe 071226:
Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.
Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Die Eckpunkte der Grundfläche seien in der Reihenfolge mit P_1 bis P_6 bezeichnet sowie die Spitze der Pyramide mit S und der Mittelpunkt der Grundfläche mit F. Dann ist auch F der Fußpunkt der Höhe von S auf die Grundfläche, da von einer geraden Pyramide ausgegangen wird.
(Sonst könnte man nicht vom Flächeninhalt „einer“ Seitenfläche der Pyramide sprechen, da sie unterschiedliche Flächeninhalte haben könnten, wäre die Pyramide nicht gerade.)

Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke FS, also der Mittelpunkt der Höhe der Pyramide und ε die Ebene des zu betrachtenden Schnitts.

Der Schnitt verlaufe durch die Mittelpunkte M_1 und M_3 der Seiten P_1P_2 und P_3P_4, die weder benachbart noch parallel sind. Insbesondere ist dann also die Gerade durch die Diagonale P_1P_4 des Sechsecks parallel zur Schnittebene ε.

Sei weiterhin $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ das Sechseck, welches als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durch den Mittelpunkt M der Höhe entsteht, wobei jeder Punkt Q_i auf der Gerade SP_i liege. Da ε erstens durch M, welcher gleichzeitig Mittelpunkt dieses zweiten Sechsecks ist, verläuft, zweitens parallel zu P_1P_4 ist und drittens nach dem Strahlensatz die Geraden P_1P_4 und Q_1Q_4 parallel sind, muss die Strecke Q_1Q_4, die M als eigenen Mittelpunkt enthält, in ε liegen. Somit schneidet ε also die Geraden P_1S und P_4S in Q_1 bzw. Q_4.

Analog sei das Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe von $\frac{3}{4}|SF|$ definiert, wobei wieder die Punkte R_i auf den Geraden SP_i liegen sollen. Der Schnitt von ε mit dieser zur Grundfläche parallelen Ebene liefert wieder eine Gerade, die parallel zu R_1R_4 ist.

Sei d der Abstand der parallelen Geraden P_1P_4 und P_5P_6. Dann beträgt nach dem Strahlensatz der Abstand der parallelen Geraden R_1R_4 und R_5R_6 genau $\frac{1}{4}d$.

Der Abstand des Schnitts von ε mit der Grundfläche, also der Geraden M_1M_3, hat einen Abstand $\frac{1}{2}d$ von der dazu parallelen Gerade P_1P_4. Und in der zu Grundfläche parallelen Ebene durch M (also in Höhe

$\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche) ist der Schnitt von ε mit dieser Ebene identisch mit der Geraden R_1R_4, sodass der entsprechende Abstand Null beträgt.
Daher gilt nach Strahlensatz (mit Zentrum M in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche), dass der Schnitt von ε mit der zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe $\frac{3}{4}|SF|$ genau den Abstand $\frac{1}{4}d$ zur entsprechenden parallelen Gerade R_1R_4 hat. Da weiterhin diese Schnittgerade von ε mit der gerade betrachteten Ebene in der von R_1R_4 erzeugten Halbebene liegt, in der nicht R_2 und R_3 liegen; in der im gleichen Abstand zu R_1R_4 aber der Gerade R_5R_6 verläuft, muss also der Schnitt von ε mit dieser Ebene gerade die Gerade R_5R_6 sein. Damit schneidet ε die Geraden SP_5 und SP_6 in R_5 bzw. R_6.

Die entstehende Schnittfigur beim Schnitt von ε mit der sechsseitigen Pyramide ist demnach genau das Sechseck $M_1M_3Q_4R_5R_6Q_1$. Dieses lässt sich zerlegen in die beiden Trapeze $M_1M_3Q_4Q_1$ und $Q_1Q_4R_5R_6$, deren Flächeninhalte – in Abhängigkeit der Kantenlänge a des Sechsecks der Grundfläche und der Höhe $h = |SF|$ der Pyramide – im Folgenden ermittelt werden:

Sei P_0 der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_3P_4 und es entsteht das gleichseitige Dreieck $\triangle P_2P_0P_3$. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|P_0M_1|}{|P_0P_2|} = \frac{|M_1M_3|}{|P_2P_3|}$, also $|M_1M_3| = \frac{3}{2}a$. Analog folgt auch $|P_1P_4| = 2a$. Aus letzterem folgt mittels Strahlensatz (mit Zentrum S), dass $|Q_1Q_4| = \frac{1}{2}|P_1P_4| = a$ gilt. Damit kennen wir die Längen der parallelen Strecken im Trapez $M_1M_3Q_4Q_1$.

Für den Abstand dieser beiden Parallelen betrachten wir das rechtwinklige Dreieck bestehend aus M, F und dem Mittelpunkt N der Strecke M_1M_3, wobei der rechte Winkel bei F liegt. Es ist $|MF| = \frac{1}{2}|SF| = \frac{1}{2}h$. Für die Streckenlänge $|FN|$ gilt, dass die Strecke die halbe Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_2P_3F$ ist, also $|FN| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt. Damit beträgt der Abstand der beiden Geraden M_1M_3 und Q_1Q_4 genau

$$h_1 := |NM| = \sqrt{|MF|^2 + |FN|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes $M_1M_3Q_4Q_1$ ergibt sich damit zu

$$A_1 := \frac{1}{2} \cdot (|M_1M_3| + |Q_1Q_4|) \cdot h_1 = \frac{5}{16}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Für die Bestimmung des Flächeninhalts des Trapezes $Q_1Q_4R_5R_6$ beachte man, dass aufgrund des Strahlensatzes (mit Zentrum S) $|R_5R_6| = \frac{1}{4}|P_5P_6| = \frac{1}{4}a$ und (mit Zentrum M) $h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$ gilt, wobei h_2 der Abstand der Parallelen Q_1Q_4 und R_5R_6 ist. Also ergibt sich für dieses Trapez der Flächeninhalt zu

$$A_2 := \frac{1}{2}(|Q_1Q_4| + |R_5R_6|) \cdot h_2 = \frac{5}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2} = \frac{1}{4}A_1$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt A der gesamten Schnittfigur zu

$$A := A_1 + A_2 = \frac{5}{4} \cdot A_1 = \frac{25}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Um den Flächeninhalt der Seitenfläche $\triangle P_1P_2S$ (und damit jeder Seitenfläche) der Pyramide zu bestimmen, benötigen wir die Länge ihrer Seitenhöhe h_s. Diese ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle SFM_1$ mit rechtem Winkel bei F. Es ist FM_1 die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2F$, sodass $|FM_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt. Also ist $|SF| = h$, also

$$h_s = |M_1S| = \sqrt{|SF|^2 + |FM_1|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Daraus ergibt sich nun der Flächeninhalt A_S einer Seitenfläche der Pyramide zu $A_S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$ und damit für den Flächeninhalt Schnittfigur

$$A = \frac{25}{16} \cdot A_S$$

Aufgabe 081222:
In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks. Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Der Winkel zwischen zwei Seitenflächen liegt in einer Ebene, die senkrecht auf den beiden Seitenflächen steht. Diese senkrechte Ebene schneidet die beiden Seitenflächen in zwei Seitenflächenhöhen, die senkrecht auf einer Seitenlange stehen und einen gemeinsamen Fußpunkt haben.
Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächenhöhen ist der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen. $\angle AEB$ ist ein solcher Winkel. Seine Größe sei τ. Es gilt somit nach Aufgabenstellung $\tau = 90°$. Dreieck AEB ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach Innenwinkelsummensatz gilt somit $\tau + 2\varepsilon = 180°$ und somit $\varepsilon = 45°$. Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AB:

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE|\cos\varepsilon \quad (*)$$

Da die Dreiecke ACS und BCS kongruent und gleichschenklig sind, ist $|AE| = |BE|$. Einsetzen in $(*)$ liefert zudem mit $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $|AB| = a$:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|AB||AE| \cdot \sqrt{2} = |AB|^2 \iff |AE| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Sei $\varphi = \angle BCE$. Dreieck CBE ist rechtwinklig. Es gilt: $\sin\varphi = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} \iff \varphi = 45°$.
Dreieck CBS ist gleichschenklig mit Basis CB. Sei h_s die Höhe auf der Basis und s die Länge der Seitenkante. Es gilt $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{s} \iff s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$
Dreieck ABC ist gleichseitig. Die Höhe im gleichseitigen beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und die Seitenhalbierenden (im Dreieck gleichzeitig Höhe) schneiden sich im Verhältnis 2:1 , wobei die Strecke vom Schwerpunkt zum Eckpunkt doppelt so lang ist, wie die Strecke vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Seite.
Dreieck HCS ist rechtwinklig. Nach dem Satz Satz des Pythagoras gilt:

$$\left(\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \iff h = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

Der Quotient berechnet sich also zu $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Das gleichseitige Dreieck ABC liege in der xy-Ebene, der Punkt A liege im Ursprung, B auf der x-Achse. Dann sind die Ortsvektoren von B und C:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Spitze S der Pyramide

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor auf die Seitenfläche ABS ist dann:

$$\vec{n}_{ABS} = \vec{b} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor auf ACS:

$$\vec{n}_{ACS} = \vec{c} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Sollen die beiden Flächen senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren null sein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} = 0$$

Das bedeutet:

$$\frac{1}{2}a^2h^2 - \frac{3}{36}a^4 = 0$$
$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{6}{36}$$
$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Aufgabe 091222:
In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E.
Es ist zu beweisen, dass die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird.

Lösung von cyrix:
Durch Drehung um 120° um die Raumdiagonale geht der Würfel in sich selbst über, sodass die drei Eckpunkte B, G und E zyklisch die Reihenfolge tauschen. Damit geht aber auch die Ebene ε bei dieser Drehung in sich selbst über und steht somit senkrecht zur Drehachse FD.
Das Tetraeder $BGEF$ hat das Volumen $\frac{1}{6}a^3$. Das gleichseitige Dreieck $\triangle BGE$ besitzt die Kantenlänge $\sqrt{2}a$ und damit einen Flächeninhalt von

$$F_{\triangle BGH}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Da sich das Volumen dieses Tetraeders auch als $\frac{1}{3}F_{\triangle BGH} \cdot h$ berechnen lässt, wobei h die Länge des Lots des Punktes F auf die Ebene ε ist, folgt

$$h = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

da die Raumdiagonale BD die Länge $\sqrt{3}a$ besitzt, $\square$.

Aufgabe 111221:
Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b.
Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.
a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.
b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Für das Volumen V des Prismas gilt $V = c^2h$ mit $h = a+b$. Aus $a^3+b^3 = V = c^2(a+b)$ erhalten wir

$$c^2 = \frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$$

b) Aus der Gleichung $c^2 = a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60°)$ können wir mittels Kosinussatz eine Konstruktionsvorschrift ablesen: Konstruiere aus a,b mit eingeschlossenem Winkel $\gamma = 60°$ ein Dreieck. Die dritte Seite des Dreiecks hat dann die gesuchte Länge c.

Aufgabe 151222:
Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist und deren Spitze S sei.
Die senkrecht auf der Grundfläche stehenden Seitenflächen haben eine Pyramidenkante gemeinsam, da sie sonst parallelen Ebenen angehören würden, was bei einer Pyramide nicht möglich ist. Diese zur Grundfläche senkrechte Pyramidenkante sei SD.
Daher sind für die zur Grundfläche nicht senkrechten Seitenflächen BCS und ABS die Neigungswinkel gleich den Winkeln $\angle SAD$ und $\angle SCD$. Außerdem ist die Länge von SD gleich der Länge h der Höhe der Pyramide.

O. B. d. A. gelte nun $\angle SAD = \alpha, \angle SCD = \beta$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} h = SD &= AD \cdot \tan\alpha \qquad (1) \\ &= CD \cdot \tan\beta \qquad (2) \\ Q &= AD \cdot CD \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Multiplikation und anschließendem Einsetzen von (3) und Radizieren:

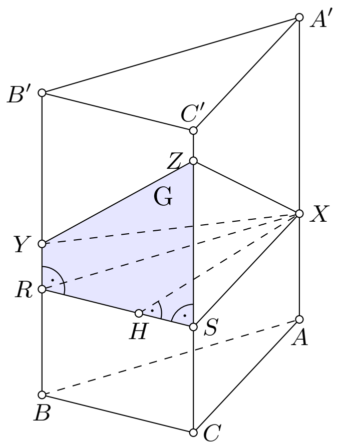
$$h^2 = AD \cdot CD \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta \qquad ; \qquad h = \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3}Qh = \frac{1}{3}Q\sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Aufgabe 231222:
Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'.
Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, dass der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen $V_K = \frac{1}{3}F(x+y+z)$ hat, wobei $x = AX$, $y = BY$, $z = CZ$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
O. B. d. A. sei $x \leq y \leq z$ angenommen. Durch X werde die zur Grundfläche ABC parallele Ebene gelegt. Sie schneidet BY in einem Punkt R, CZ in einem Punkt S und zerlegt den Körper K in das gerade Prisma $P_1 = ABCXRS$ und einen Teilkörper T (der im Fall $x = y = z$ nur noch im Sinne einer Entartung mit dem Volumen $V_T = 0$ zu betrachten ist).



In den Fällen $x < y \leq z$ und $x = y < z$ ist T eine Pyramide mit dem Trapez $YRSZ$ bzw. dem Dreieck RSZ als Grundfläche G und mit dem Punkt X als Spitze.
Die Höhenlänge dieser Pyramide ergibt sich als Länge des Lotes XH von X auf die Ebene, in der die Seitenfläche $BCSR$ des Prismas P_1 liegt. Da dieses ein gerades Prisma ist, verläuft XH in der Ebene der Deckfläche RSX von P_1, ist also zugleich die auf RS senkrechte Höhe dieses Dreiecks.
Aus $RS \perp CZ$ folgt ferner, dass die Fläche G den Inhalt

$$\frac{1}{2}(RY + SZ)RS$$

hat (beim Trapez $YRSZ$ wegen der Flächeninhaltsformel für Trapeze; beim Dreieck RSZ mit $RY = 0$ und RS als Höhe auf SZ). Daher hat T das Volumen

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(RY + SZ)RS \cdot XH$$

Darin ist $RY = y - x$, $SZ = z - x$; ferner hat das zu ABC kongruente Dreieck XRS den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}RS \cdot XH$$

Somit gilt

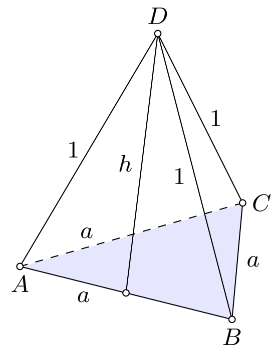
$$V_T = \frac{1}{3}F(y - x + z - x)$$

(Diese Formel erfasst auch den Fall $x = y = z$). Das Prisma P_1 hat das Volumen $V_{P_1} = F \cdot x$. Damit ergibt sich

$$V_K = V_{P_1} + V_T = \frac{1}{3}F(3x + y - x + z - x) = \frac{1}{3}F(x + y + z)$$

Aufgabe 341223:
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen $AD = BD = CD = 1$ und $AB = BC = CA$ erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Lösung von MontyPythagoras:



Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge a. Die Höhe eines Manteldreiecks sei h. Dann ist

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}$$

und die Oberfläche des Tetraeders ist:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung gelte:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{3}a\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2} < 3$$

$$3a^2(1 - \frac{1}{4}a^2) < (3 - \frac{1}{2}a^2)^2$$

$$3a^2 - \frac{3}{4}a^4 < 9 - 3a^2 + \frac{1}{4}a^4$$

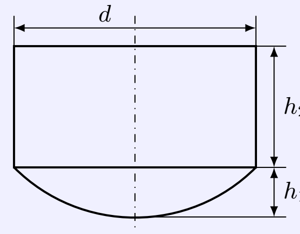
$$0 < a^4 - 6a^2 + 9$$

$$0 < (a^2 - 3)^2$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $a > \sqrt{3}$ ist. Es tritt jedoch Gleichheit ein, wenn $a = \sqrt{3}$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn der Tetraeder auf eine Höhe von null zusammenschrumpft, so dass die Oberfläche dann genau zweimal dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{3}$ entspricht.
Strenggenommen gilt die Ungleichung laut Aufgabenstellung also nur, wenn der Punkt D über dem Dreieck ABC liegt, und nicht in der gleichen Ebene.

III Runde 3

Aufgabe V11132:



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Die Gesamtfläche des Blechbehälters ist

$$A = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

Diese Fläche soll gleich der Fläche der kreisförmigen Blechscheibe sein, deren Durchmesser D sei. Daher gilt:

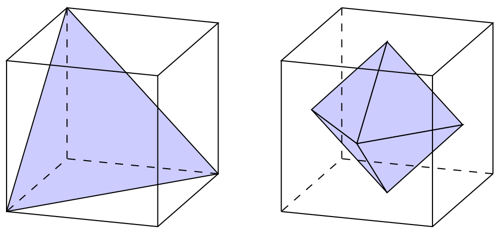
$$\frac{D^2\pi}{4} = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

$$D = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2 + d h_2}$$

b) Der Durchmesser der Blechscheibe betrug $D = 416{,}8$mm.

Aufgabe 011233:
Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben. Begründen Sie, dass diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

Lösung von Eckard Specht:
Da der Würfel sechs Quadrate als Oberfläche besitzt und das Tetraeder sechs Kanten hat, nehmen wir sechs geeignete Oberflächendiagonalen als Kanten des Tetraeders (Bild a), die selbstverständlich gleich lang sind und damit tatsächlich ein regelmäßiges Tetraeder bilden.
Das Oktaeder hat sechs Eckpunkte, so dass die Mittelpunkte der Oberflächen des Würfels als Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders gewählt werden können (Bild b).



a) Das Tetraeder schneidet vom Würfel mit dem Volumen $V_W = a^3 4$ vier dreiseitige Pyramiden ab, wobei das Volumen jede dieser Pyramiden mittels $V = \frac{1}{3}Ah$ berechnet werden kann.
Dazu wählen wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit der Kathetenlänge a als Grundfläche, also $A = \frac{1}{2}a^2$. Die Höhe beträgt ebenfalls $h = a$, so dass $V = \frac{1}{6}a^3$ folgt. Daraus ergibt sich das Volumen des Tetraeders zu

$$V_T = a^3 - 4\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Für das Oktaeder ergibt sich eine Kantenlänge von $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; es kann aus zwei vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden. Die Grundseiten dieser Pyramiden (ein Quadrat) haben einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}a^2$, somit hat das Oktaeder ein Volumen von

$$V_O = 2\frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$$

Die Volumina stehen also im Verhältnis $V_W : V_T : V_O = 6 : 2 : 1$.

b) Um den Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Umkugel des Tetraeders. Diese ist offenbar mit der Umkugel des Würfels identisch, so dass die halbe Raumdiagonale des Würfels gleich dem Umkugelradius ist: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Die Inkugel mit dem Radius r berührt dagegen die Tetraederflächen von innen, wobei jede Tetraederfläche eine Tangentialebene an die Inkugel im Berührungspunkt aufspannt. Somit liegen Würfeleckpunkt,

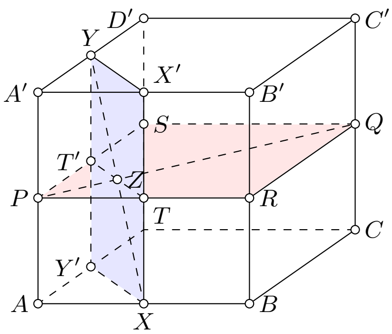
Berührungspunkt und Mittelpunkt auf einer Geraden, und es gilt $R = h+r$ bzw. $r = R-h$ mit h als Höhe der unter a) betrachteten dreiseitigen Pyramiden mit dem (jetzt gleichseitigen) Dreieck als Grundfläche. Diese Höhe berechnet sich aus der obigen Volumenformel mit

$$V = \frac{1}{6}a^3 \quad \text{zu} \quad h = \frac{3V}{A} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\sqrt{3}\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgt $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{1}{3}R$.

Aufgabe 021236:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $A'D'C'B'$ in dieser Reihenfolge.
Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Aufgrund der gegebenen Bedingungen ergibt sich die Lage des Punktes Y aus der von X folgendermaßen:
a) für $X \in AB$ liegt Y auf $A'D'$ so, dass $|AX| = |A'Y|$ ist,
b) für $X \in BC$ liegt Y auf $D'C'$ so, dass $|BX| = |D'Y|$ ist,
c) für $X \in CD$ liegt Y auf $C'B'$ so, dass $|CX| = |C'Y|$ ist,
d) für $X \in DA$ liegt Y auf $B'A'$ so, dass $|DX| = |B'Y|$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:
Satz 1: Ist P der Mittelpunkt von AA' und Q der Mittelpunkt von CC', so liegt der Mittelpunkt Z von XY auf PQ.
Satz 2: Liegt Z auf PQ, so ist Z Mittelpunkt einer der Strecken XY.

Aus beiden Sätzen folgt, dass der zu ermittelnde geometrische Ort die Strecke PQ ist.

Beweis von Satz 1:
Wird zu einem fest gedachten Zeitpunkt der Bewegung der Würfel an der Achse g_{PQ} gespiegelt, so geht dieser in sich über, und zwar so, dass A, B, C, D und X in dieser Reihenfolge mit A', B', C', D', Y vertauscht werden. Daher liegt Z auf der Symmetrieachse g_{PQ}.
Weil jeder Würfel konvex ist, ist PQ die Menge der Punkte von g_{PQ}, die im Würfelkörper liegen. Da aus demselben Grund XY und damit Z im Würfelkörper liegen, gilt $Z \in PQ$. $\square$

Beweis von Satz 2:
Es sei ε_2 die auf g_{PQ} senkrecht stehende Ebene durch $Z \in PQ$. Dann liegen P und Q nicht auf derselben Seite von ε_2. Da jede der Kanten AA', BB', CC', DD' zu ε_2 parallel ist, liegen jeweils A und A', B und

B', C und C', D und D' nicht auf verschiedenen Seiten von ε_2, während A und C bzw. A' und C' nicht auf derselben Seite von ε_2 liegen.
Die Ebene ε_2 enthält die Strecken BB' und DD' entweder beide - genau dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist - oder beide nicht. Folglich hat ε_2 mit jeder der Strecken $AB, A'B', AD, A'D'$ oder mit jeder der Strecken $BC, B'C', CD, C'D'$ einen Punkt gemeinsam. Diese Schnittpunkte vertauschen sich bei der im Beweis von Satz 1 genannten Spiegelung auf die dort beschriebene Weise.
Daher gibt es zu jedem Punkt $Z \in PQ$ ein Paar, im Falle $Z \neq P, Z \neq Q$ genau zwei Paare (X, Y) zusammengehöriger Punkte X, Y, für die Z Mittelpunkt von XY ist. □

Aufgabe 031235:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Lösung von Steffen Weber:
Der Mittelpunkt von XY werde mit M bezeichnet, der Lotfußpunkt von M auf AA' mit F. Da A, X, Y, M und F in einer Ebene liegen – die Ebene, in der auch $\triangle AXY$ liegt – gilt nun nach Strahlensatz

$$\frac{FM}{AY} = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{AF}{AX} = \frac{YM}{YX} = \frac{1}{2}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$AM^2 = AF^2 + FM^2 = \frac{1}{4}AX^2 + \frac{1}{4}AY^2$$

da $AF \perp FM$. Ferner ist $\triangle AXY$ rechtwinklig mit Kathete XY und es gilt $AX^2 + AY^2 = XY^2 = AB^2$. Also ist $AM = \frac{1}{2}AB \equiv$ konstant.
Da XY vollständig zum Würfel gehört, ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Strecken XY der Teil der Kugel um A mit Radius $\frac{1}{2}AB$, der zu $ABCDA'B'C'D'$ gehört.

Aufgabe 041236:
Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d. h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Lösung von Rainer Müller:
Vorbemerkung: Daraus, dass die drei Kreise paarweise genau einen gemeinsamen Punkt haben und die drei Berührungspunkte verschieden sind, folgt insbesondere, dass kein Kreis zu einem Punkt degeneriert ist und keine zwei Kreise identisch sind.

Die Kreise bezeichnen wir als k_1, k_2, k_3, den Punkt $k_1 \cap k_2$ als P_{12}, die gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 in P_{12} als t_{12}. Analog sind P_{23}, P_{13}, t_{23} und t_{13} definiert.

Zunächst nehmen wir an, dass zwei der Kreise in einer Ebene liegen, o. B. d. A. seien dies k_1 und k_2. In dieser Ebene müssen dann auch die Geraden t_{13} und t_{23} liegen. Sie müssen verschieden sein, denn sonst würde die Gerade $t_{13} = t_{23}$ den Kreis k_3 in den beiden verschiedenen Punkten P_{13} und P_{23} berühren, was nicht möglich ist.
Also hat die k_3 enthaltende Ebene zwei verschiedene Geraden mit der k_1 und k_2 enthaltenden Ebene gemeinsam. Das ist nur dann möglich, wenn beide Ebenen identisch sind.

Wenn also zwei der drei Kreise in einer Ebene liegen, dann liegen alle drei Kreise in dieser Ebene.

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Kreise in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zu zeigen ist, dass dann alle drei Kreise auf einer einzigen Kugel liegen. E_{12} sei die zu t_{12} senkrechte Ebene durch P_{12}, d.i. die gemeinsame Symmetrieebene von k_1 und k_2. Für $i = 1, 2, 3$ sei die „Mittelsenkrechte“ m_i des Kreises k_i die Menge aller Punkte, die von jeweils allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand haben, d.i. die Gerade senkrecht zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt.
Da k_1 und k_2 symmetrisch zu E_{12} liegen, enthält E_{12} die Geraden m_1 und m_2.
Diese Geraden sind nicht parallel (und insbesondere nicht identisch), da sonst die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 parallel und somit gleich wären, und schneiden sich daher in genau einem Punkt M_{12}.
Nach Konstruktion hat M_{12} sowohl von allen Punkten aus k_1 als auch von allen Punkten aus k_2 den gleichen Abstand. Da die Kreise k_1 und k_2 einen Punkt gemeinsam haben, hat M_{12} von allen Punkten aus $k_1 \cup k_2$ den gleichen Abstand, den wir als r_{12} bezeichnen.

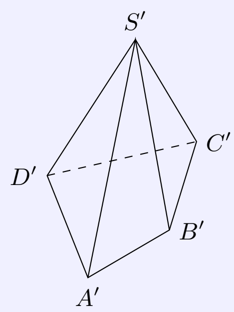
Völlig analog schneiden sich m_2 und m_3 in einem Punkt M_{23}, der von allen Punkten aus $k_2 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{23} hat, und m_1 und m_3 schneiden sich in einem Punkt M_{13}, der von allen Punkten aus $k_1 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{13} hat.

Wenn die drei Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} nicht paarweise verschieden sind, dann sind sie alle drei gleich (denn z. B. aus $M_{12} = M_{23}$ folgt, dass m_1 den Punkt $m_2 \cap m_3$ enthält), so dass $r_{12} = r_{23} = r_{13}$.
Dann liegen alle drei Kreise auf der Kugel mit Radius r_{12} um M_{12}.

Dass die Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} immer gleich sind, zeigen wir durch einen indirekten Beweis, indem wir annehmen, dass sie paarweise verschieden sind.
M_{23} und M_{13} liegen auf m_1 bzw. m_2 und damit in der von diesen Geraden aufgespannten Ebene E_{12}. m_3 hat also zwei verschiedene Punkte mit dieser Ebene gemeinsam und liegt daher in dieser Ebene, die folglich mit den analog definierten Ebenen E_{23} und $E13$ identisch ist. Damit liegen außer P_{12} auch die Punkte P_{23} und P_{13} in dieser Ebene $E = E_{12} = E_{23} = E_{13}$.

Da E mit jedem der Kreise nur zwei Punkte gemeinsam hat und von diese sechs Punkte jeweils zwei als Berührungspunkt zusammenfallen, besteht der Schnitt von E mit den Kreisen genau aus den drei verschiedenen Punkten P_{12}, P_{23} und P_{13}, und die Geraden m_1, m_2 und m_3 sind die Mittelsenkrechten des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks.
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich jedoch immer in einem einzigen Punkt. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass M_{12}, M_{23} und M_{13} paarweise verschieden sind.
Also tritt der oben genannte Fall ein, dass diese drei Punkte gleich sind und die drei Kreise auf einer Kugel liegen.

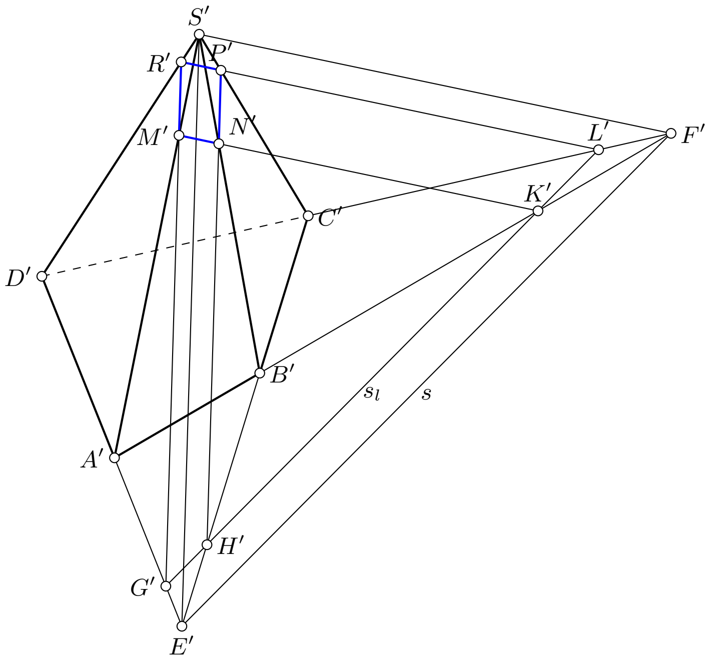
Aufgabe 051232:
Die in der Abbildung im Grundriss gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, dass die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.



a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriss die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!
b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?
c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Verlängerungen von DA und CB schneiden sich im Punkt E. Die Verlängerungen vin DC und AB schneiden sich im Punkt F. Die Spur der Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ sei s.

Jede Ebene, die parallel zur Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ verläuft und deren Spur s_l zwischen B (einschließlich B) und s liegt, schneidet aus der Pyramide ein Parallelogramm aus.
Die Seiten des Parallelogramms $MNPR$ sind paarweise parallel zu ES bzw. zu FS. LR und KM sind parallel zu FS; GR und HP sind parallel zu ES.



Der Konstruktion liegt folgender Satz zugrunde:
Wenn eine Ebene ε parallel zur Schnittgeraden zweier vorgegebener Ebenen verläuft und diese beiden Ebenen schneidet, so schneidet ε die vorgegebenen Ebenen in Geraden, die parallel zu s sind.

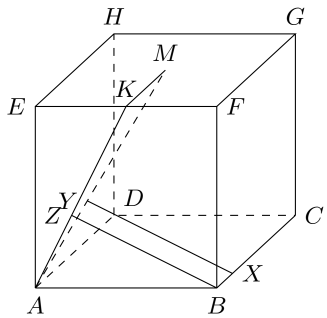
Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ADS$ und $\triangle BCS$ geht durch E uns S. Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ABS$ und $\triangle DCS$ geht durch F und S.
Da die Ebene mit der Spur s_l parallel zur Ebene ESF verläuft, sind GR und HP parallel zu ES, KM und LR parallel zu FS. Die Strecken GR, HP, KM und LR liegen in derselben Ebene und bestimmen somit das Parallelogramm $MNRP$.

b) Ist die Grundfläche ein Trapez, aber kein Parallelogramm, so liegt einer der Punkte E oder F im Unendlichen. Die Spuren s und s_l sind dann parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes. Zwei Seiten des gesuchten Parallelogramms sind dann ebenfalls parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes.

c) Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so schneidet jede zur Grundfläche parallele Ebene, die die Pyramide in mehr als einem Punkt trifft, diese in einem Parallelogramm.

Aufgabe 061232:
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand der Geraden BC und AM?
Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zunächst bemerkt man, dass AM und BC windschief zueinander sind, weil AM mit ε_{ABC} nur den Punkt A gemeinsam hat und folglich die in ε_{ABC} gelegene, A nicht enthaltende Gerade BC weder schneidet noch zu ihr parallel ist (Abbildung).
Daher gibt es genau ein Punktepaar (X,Y) mit $X \in BC, Y \in AM$, für das $|XY| = d$ gilt, wenn d den zu berechnenden Abstand von BC und AM bezeichnet. Dabei gilt außerdem

$$XY \perp AM \quad (1) \qquad ; \qquad XY \perp BC \quad (2)$$

Die Ebenen ε_{ADM} und ε_{BCY} schneiden sich in einer Y enthaltenden Geraden g. Wegen

$$BC \parallel AD \quad (3) \qquad \text{ist} \qquad BC \parallel g \quad (4)$$

Andernfalls hätte nämlich g mit BC einen Schnittpunkt, der auch gemeinsamer Punkt von ε_{ABC} und ε_{ADM} wäre und damit auf AD läge, was (3) widerspricht.
Aus (2), (3), (4) folgt $g \perp XY$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (1) wegen $g \neq AM$: $XY \perp \varepsilon_{ADM}$ (5).
Bezeichnet Z den Schnittpunkt der Parallelen zu XY durch B mit ε_{ADM}, so ist $BZ \perp \varepsilon_{ADM}$ wegen (5), insbesondere also $BZ \perp AZ$ (6) und $|XY| = |BZ|$.
Denn im Fall $X \neq B$ ist $BXYZ$ ein Parallelogramm, während in dem (übrigens nicht eintretenden) Fall $X = B$ außerdem $Y = Z$ wäre.
Wegen $BZ \parallel XY$, (2) ist $BZ \perp BC$. Somit liegt Z in der auf BC senkrechten Ebene ε durch B, die eine Seitenfläche des Würfels enthält, deren Rand das Quadrat $ABFE$ ist. Die Ebene ε_{ADM} schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Aufgrund der Bedeutung von M und K ist nämlich $MK \parallel AD$, so dass MK in ε_{ADM} liegt.
Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist dann $\angle AKE = \angle KAB$. Hieraus folgt wegen $Z \in AK$, $AE \perp EK$ und (6) nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle AEK \sim \triangle AZB$ und damit

$$AZ : BZ = KE : AE = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad AZ = \frac{1}{2} BZ \quad (7)$$

Wegen (6) ist $\triangle AZB$ rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so dass aufgrund des Lehrsatzes des Pythagoras und (7)

$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = a^2 - \frac{1}{4} BZ^2 \qquad \text{also} \qquad BZ = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

gilt. Mithin ist

$$d = XY = BZ = \frac{2}{\sqrt{5}} a = \frac{2}{5} a\sqrt{5}$$

Aufgabe 071231:
Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.
Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Lösung von cyrix:
Die Mittelpunkte der drei großen Kugeln liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Tischplatte in einem Abstand von r verläuft. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ mit Kantenlänge $2r$ und sei S der Schwerpunkt dieses Dreiecks.
Dann gilt $|M_1S| = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt und jede Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck auch eine Höhe ist, deren Länge durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras als $\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ ermittelt werden kann.

Sei M der Mittelpunkt der vierten Kugel. Da sie die drei großen berührt, muss M aus Symmetriegründen auf dem Lot von S auf die Tischebene liegen. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle M_1SM$ mit rechtem Winkel bei S.
Ist R der gesuchte Radius der vierten Kugel, so gilt einerseits $|SM| = r - R$, da die vierte Kugel auch die Tischplatte (von oben) berührt und die Berührungsradien aller Kugeln auf die Tischplatte senkrecht zu dieser stehen, also der der vierten Kugel auch auf der Gerade MS liegt. Andererseits berühren sich aber auch die vierte und die erste Kugel, sodass ihre Mittelpunkte M_1 und M den Abstand $r + R$ haben.

Setzt man dies in die durch den Satz von Pythagoras gegebenen Gleichung für das rechtwinklige Dreieck $\triangle M_1SM$ ein, erhält man

$$(r+R)^2 = |M_1M|^2 = |M_1S|^2 + |SM|^2 = \frac{4}{3}r^2 + (r-R)^2$$

bzw. $4rR = (r+R)^2 - (r-R)^2 = \frac{4}{3}r^2$, also wegen $r > 0$ schließlich $R = \frac{1}{3}r$.

Aufgabe 081235:
Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4.
(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.
(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.
(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.
(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

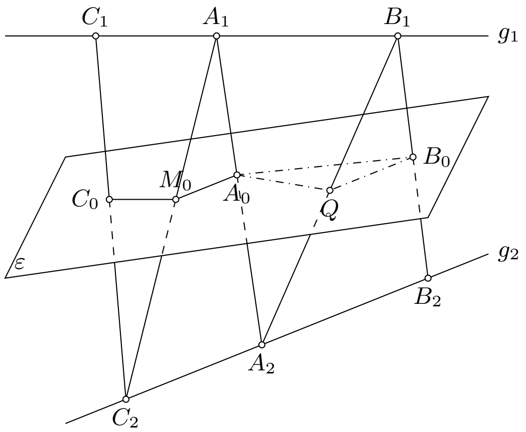
Es sei bekannt, dass von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.
Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Aussagen 1) und 4) können nicht beide gleichzeitig erfüllt sein, da es höchstens eine Kante mit Länge des Kugeldurchmessers geben kann.
Eine Pyramide mit der rechtwinkligen Grundfläche mit den Seiten $3; 4; 5$ und einer Höhe 2,5, wobei die Spitze über dem Mittelpunkt der Hypotenuse liegt, erfüllt die Bedingungen 1), 2), 5) und 6).
Diese hat das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\frac{3\cdot 4}{2} \cdot 2{,}5 = 5$. Streckung um den Faktor 2 ergibt eine Pyramide mit den Volumen 40 und den Grundkanten $6; 8; 10$. Die anderen Kanten sind gleichlang, da die Spitze direkt über dem Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche liegt und haben die Länge $5\sqrt{2}$.

Dieses lässt sich leicht an dem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck bestehend aus der Hypotenuse und der Spitze ablesen.

Aufgabe 101235:
Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, dass P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ε genau dann parallel, wenn es in ε eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. B_1A_2 in erwähnten Verhältnis von innen teilen, seien A_0, B_0 bzw. Q genannt, woraus $Q \neq A_0$ und $Q \neq B_0$ folgt.



Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_0Q \parallel g_1 \qquad \text{und} \qquad QB_0 \parallel g_2 \tag{1}$$

Aus $g_1 \nparallel g_2$ folgt jetzt $A_0Q \nparallel QB_0$ und damit $A_0 \neq B_0$. Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_0 und B_0; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.
Also bestimmen A_0, B_0 und Q eine Ebene ε, die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

II) Seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0, der von A_1C_2 sei M_0.
Analog zu (I) folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$. Daher und aus (I) folgt $M_0A_0 \parallel B_0Q$ sowie $C_0M_0 \parallel QA_0$. Also gehört mit A_0 auch M_0 und mit M_0 aus C_0 zu ε.

Daraus folgt:
Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punktr auf g_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilen, gehören zu ε.

III) C_0 sei beliebiger Punkt aus ε.
Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ε gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der M_0 genannt sei.
Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit AQ_0, also h_2 und folglich M_0. Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der C_2 genannt sei.

Ebenso (mit $C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1$ statt $A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2$) folgt dass sich die Geraden durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der C_1 genannt sei.
Dann folgt der Reihe nach, dass auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 von innen im erwähnten Verhältnis geteilt werden.

Damit gehört jeder Punkt von ε zum geometrischen Ort.
Also ist der gesuchte geometrische Ort die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ε.

Aufgabe 121232:
Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleich weit entfernt sind.

Lösung von Kitaktus:
Vorbemerkung: Wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, so können auch nicht drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. (1)

Wir unterscheiden danach, wie viele Punkte jeweils auf den beiden Seiten einer solchen Ebene E liegen.

1. Fall: Alle vier Punkte liegen auf der gleichen Seite von E. Dieser Fall ist nicht möglich, weil es sonst eine Ebene gäbe, die parallel zu E ist und alle vier Punkte enthält.

2. Fall: Drei Punkte liegen auf der einen Seite von E, der vierte auf der anderen. Die drei Punkte auf der einen Seite von E liegen in einer Ebene E', die parallel zu E ist, da sie alle den gleichen Abstand zu E haben. Diese Ebene ist wegen (1) eindeutig bestimmt.

Betrachten wir nun das Lot l des vierten Punktes auf E', so steht l auch senkrecht auf E. E muss daher l genau halbieren, damit der Abstand aller vier Punkte zu E gleichgroß ist. Damit ist E eindeutig bestimmt. E ist parallel zu E' und geht durch den Mittelpunkt von l.
Da es vier Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt derjenige ist, der alleine auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier vier verschiedene Ebenen.

3. Fall: Auf beiden Seiten liegen je zwei Punkte. Diese beiden Paare bestimmen zwei Geraden g und h. Diese Geraden schneiden sich nicht und sind nicht parallel, da sonst alle vier Punkte in einer Ebene liegen würden. Die Geraden sind also windschief zueinander.
Eine Ebene, die zu zwei auf der gleichen Seite liegenden Punkten den gleichen Abstand hat, hat auch zur gesamten Geraden durch diese zwei Punkte den gleichen Abstand.

Die Ebene E muss zu den Gerade g und h parallel sein und den Abstand beider Geraden halbiert. Damit ist E eindeutig bestimmt.
Da es drei Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt zusammen mt P_1 auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier drei verschiedene Ebenen.

Insgesamt gibt es also sieben Ebenen, die von allen vier Punkten den gleichen Abstand haben.

Aufgabe 131234:
Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, ..., 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.

Man beweise, dass die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn gilt:

$$P_1P_2 + P_3P_4 = P_1P_3 + P_2P_4 = P_1P_4 + P_2P_3$$

Lösung von cyrix:
Es sei r_i der Radius der Kugel K_i.
Wir nehmen zuerst an, dass sich die Kugeln K_i jeweils von außen berühren. Dann ist die Summe der Radien zweier dieser Kugeln genau gleich der Entfernung von deren Mittelpunkten. Also ist für $1 \leq i < j \leq 4$ die Summe $r_i + r_j = |P_iP_j|$. Insbesondere ist

$$|P_1P_2| + |P_3P_4| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = |P_1P_3| + |P_2P_4| = |P_1P_4| + |P_2P_3|$$

Sei nun umgekehrt die Gleichheit dieser Streckensummen gegeben. Wir wählen dann

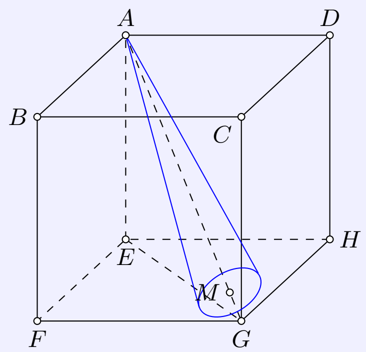
$$\begin{aligned}
r_1 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_1P_3| - |P_2P_3|), \\
r_2 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_2P_3| - |P_1P_3|), \\
r_3 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_3| + |P_2P_3| - |P_1P_2|) \quad \text{und} \\
r_4 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + |P_2P_4| - |P_1P_2|)
\end{aligned}$$

wobei r_1 bis r_3 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ und r_4 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_4$ positiv sind.
Es ist dann

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= |P_1P_2|, \\
r_1 + r_3 &= |P_1P_3|, \\
r_2 + r_3 &= |P_2P_3|, \\
r_1 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_4| + |P_1P_3|) - |P_2P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - |P_2P_3|) = |P_1P_4|, \\
r_2 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_4| + |P_2P_3|) - |P_1P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_3| + |P_2P_4|) - |P_1P_3|) = |P_2P_4|, \\
r_3 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot ((|P_1P_3| + |P_2P_4|) + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - 2|P_1P_2|) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2(|P_1P_2| + |P_3P_4|) - 2|P_1P_2|) = |P_3P_4|,
\end{aligned}$$

sodass sich die Kugeln K_i jeweils gegenseitig von außen berühren, $\square$.

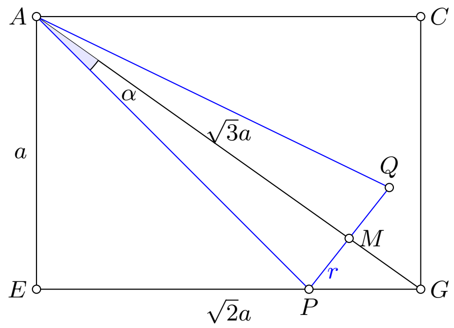
Aufgabe 141233:



Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:
a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.
Man beweise:
Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir betrachten einen Schnitt durch die Ebene $AEGC$:



Der Berührungspunkt des Kegels auf der Würfelfläche $EFGH$ ist P. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke PGM und AGE gilt:

$$\frac{r}{\overline{GM}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{2}\,r$$

In dem rechtwinkligen Dreieck APM gilt dann:

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r}{r}$$

$$\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r = r\cot\alpha$$

$$\sqrt{3}\,a = r(\cot\alpha + \sqrt{2})$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

q. e. d.

Aufgabe 161232:
In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, dass die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.
Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen

r und h.
Man weise insbesondere nach, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r_1}{h}$$

ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir packen Kreise in ein gleichschenkliges Dreieck. Es ergeben sich dann ähnliche Dreiecke und es gilt (ein Kreis im Dreieck):

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_1}{h - r_1} \iff r_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}+r} \cdot h$$

Nun packen wir den zweiten Kreis in das Dreieck. Es gilt:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_2}{h - 2r_1 - r2}$$
$$rh - 2rr_1 - rr_2 = r_2\sqrt{r^2+h^2}$$
$$r_2 = \frac{r(h-2r_1)}{r+\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_1(h-2r_1)}{h} = q \cdot r_1$$

Für den dritten Kreis:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_3}{h - 2r_1 - 2r_2 - r_3}$$
$$rh - 2rr_1 - 2rr_2 - rr_3 = r_3\sqrt{r^2+h^2}$$
$$r(h - 2r_1 - 2r_2) = r_3(r + \sqrt{r^2+h^2})$$
$$r_3 = \frac{r_1}{h}(h - 2r_1 - 2r_2) = r_2 - 2\frac{r_1 r_2}{h} = r_2\left(1 - 2\frac{r_1}{h}\right) = r_2\frac{h-2r_1}{h} = r_2 \cdot q$$

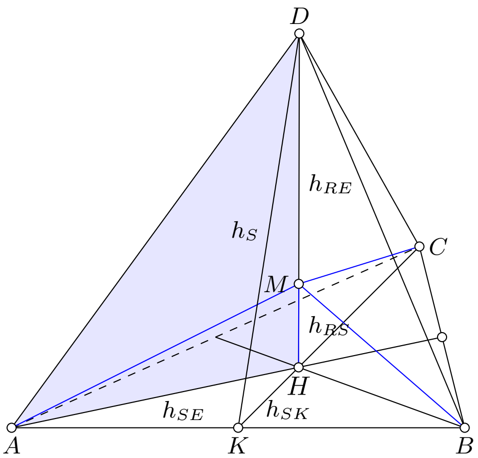
Sowie analog der n-te Kreis:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_n}{h - 2r_1 - 2r_2 - \ldots - 2r_{n-1} - r_n}$$
$$rh - 2rr_1 - 2rr_2 - \ldots - 2rr_{n-1} - rr_n = r_n\sqrt{r^2+h^2}$$
$$r(h - 2r_1 - 2r_2 - \ldots - 2r_{n-1}) = r_n(r + \sqrt{r^2+h^2})$$
$$r_n = \frac{r_1}{h}(h - 2r_1 - 2r_2 - \ldots - 2r_{n-1}) = r_{n-1} - 2\frac{r_1 r_{n-1}}{h} = r_{n-1}\left(1 - 2\frac{r_1}{h}\right) = r_{n-1}\frac{h-2r_1}{h} = r_{n-1} \cdot q$$

Aus $r_n = r_{n-1} \cdot q$ folgt sofort, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge ist.

Aufgabe 171233:
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, dass gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.
Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

Lösung von Daniel Gutekunst:



Als Mittelpunkt (z. B. H) einer Seite bezeichne ich den Punkt, in dem sich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte bzw. Höhen (was bei einem gleichseitigen Dreieck alles das Gleiche ist) schneiden.
Als Raumhöhe bezeichne ich die Strecke vom Mittelpunkt einer Seite zur gegenüberliegenden Tetraeder-Ecke. Diese Strecke tritt senkrecht aus der Seite mit dem Mittelpunkt.
Als Raummittelpunkt M bezeichne ich den Punkt, in dem sich die 4 Raumhöhen schneiden.

Die Punkte auf den Raumhöhen haben denselben Abstand von 3 Seiten, der Raummittelpunkt sogar von 4 Seiten. Die Mittelpunkte von 4 der Kugeln liegen auf jeweils einer Raumhöhe und haben denselben Abstand von der dazugehörigen Ecke/Seite. Der Mittelpunkt der fünften Kugel ist der Raummittelpunkt.

Zunächst berechne ich die Seitenmittelpunkte. Dabei berechne ich eher Abstände als Punkte. Für die Seitenhöhe h_S gilt

$$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Mittelpunkt im Verhältnis 2 zu 1. Damit folgt für den Abstand einer Ecke zum Seitenmittelpunkt (z. B. AH)

$$h_{SE} = \frac{2}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{3}s$$

und von der Kante (z. B. KH)

$$h_{SK} = \frac{1}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{6}s$$

Für die Raumhöhe h_R gilt nun:

$$h_R^2 + H_{SK}^2 = h_S^2 \Rightarrow h_R = \frac{2\sqrt{2}}{3}h_S = \frac{\sqrt{6}}{3}s$$

Um die Abstände des Raummittelpunktes M von den Ecken h_{RE} (rote Linien) bzw. Seiten h_{RS} zu berechnen, betrachte ich das rechtwinklige Dreieck (z. B. $\triangle MHA$) vom Raummittelpunkt M zu einem Seitenmittelpunkt (z. B. H) zu einer Ecke (z. B. A) dieser Seite und zurück. Es gilt

$$h_{RE}^2 = h_{RS}^2 + h_{SE}^2 \quad \text{und} \quad h_{RE} + h_{RS} = h_R$$

Es ergibt sich $h_{RS} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Der Umkugelradius h_{RE} ist gleich $\frac{\sqrt{6}}{4}s$.

Nun versucht man eine Kugel in eine Ecke zu platzieren, d. h. bei einem gegeben Radius r die Kugel auf einer Raumhöhe so weit zur Ecke hin zu schieben, bis die Kugel alle 3 Seiten berührt. Die Berührungspunke liegen dabei auf den Seitenhöhen.
Ist die Bedingung (Berührung) für eine Seite erfüllt, gilt sie auch für die anderen zwei.

Für den Winkel α, den die Raumhöhe mit einer der drei möglichen Seitenhöhen einschließt, gilt $\sin\alpha = \frac{h_{SK}}{h_S} = \frac{1}{3}$. Für den Abstand z, den der Mittelpunkt der Kugel (in 2D übertragen ein Kreis) von der Ecke haben muss, gilt $\sin\alpha = \frac{r}{z}$ (Radius und Seitenhöhe stehen senkrecht aufeinander), also $z = 3r$.
Damit alle 4 Kugeln die fünfte Kugel in der Mitte berühren, muss die Summe aus Abstand z der ersten Kugel von einer Ecke plus deren Radius plus nochmals diesem Radius (für die Kugel im Raummittelpunkt) gleich der vollen Strecke von der Ecke bis zum Mittelpunkt sein:

$$5r = h_{RE} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{20}$$

Wegen $r < h_{RS}$ befindet sich auch die fünfte Kugel im Inneren des Tetraeders, womit alle Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 181232:
Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ε eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ε ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ε alle diejenigen Punkte C auf ε, für die die Abstandssumme $AC + BC$ möglichst klein ist.

Lösung von ochen:
Falls die Strecke AB und ε gemeinsame Punkte haben, so haben alle diese gemeinsamen Punkte C die Eigenschaft, dass

$$AC + BC = AB$$

gilt. Die Abstandssumme wird also für alle Punkte C, die im Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB liegen, minimal. Für alle Punkte C', die nicht in diesem Schnitt liegen, gilt dagegen

$$AC + BC > AB.$$

Falls Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C im Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB liegt.

Falls die Strecke AB und ε keine gemeinsame Punkte haben, so liegen A und B auf der gleichen Seite von ε. Sei B' der Spiegelpunkt von B an der Ebene ε, so haben die Strecke AB' und ε einen gemeinsamen Punkt. Weiter folgt folgt für alle Punkte C

$$AC + BC = AC + B'C \geq AB'.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn C der Schnittpunkt der Strecke AB' mit der Ebene ε ist. Falls Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C der Schnittpunkt der Ebene ε und der Strecke AB' ist.

Aufgabe 191234:
Man untersuche, ob unter allen Tetraedern $ABCD$ mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\angle BDC$, $\angle CDA$, $\angle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $AB+AC+AD+BC+BD+CD$ existiert.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Lösung von cyrix:
Aufgrund der rechten Winkel gilt nach dem Satz von Pythagoras $|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |BD|^2}$, $|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2}$ und $|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2}$.

Für beliebige positive reelle Zahlen x und y gilt $\frac{x^+y^2-2xy}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$, also

$$x^2 + y^2 \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} \qquad \text{und damit} \qquad \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x+y)$$

wobei Gleichheit nur für $x = y$ gilt.

Setzt man dies ein, so erhält man

$$|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD| \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|AD| + |BD|) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|AD| + |CD|) + |AD| + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|BD| + |CD|) + |BD| + |CD| =$$

$$= (|AD| + |BD| + |CD|) \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = (|AD| + |BD| + |CD|) \cdot (1 + \sqrt{2})$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD| = |BD| = |CD|$ eintritt.

Das Volumen V des Tetraeders $ABCD$ bestimmt sich aufgrund der rechten Winkel bei D zu $V = \frac{1}{6} \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot |CD|$, sodass $\sqrt[3]{|AD| \cdot |BD| \cdot |CD|} = \sqrt[3]{6V}$ folgt.

Für beliebige positive reelle Zahlen x, y und z gilt aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, wobei Gleichheit nur genau für $x = y = z$ eintritt.

Also ist

$$|AD| + |BD| + |CD| = 3 \cdot \frac{|AD| + |BD| + |CD|}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{6V}$$

und damit

$$|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD| \geq 3 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6V}$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD| = |BD| = |CD|$ eintritt. Damit ist der dafür entstehende Term auf der rechten Seite genau die gesuchte kleinste Summe.

Aufgabe 211232:
a) Beweisen Sie, dass kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!
b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!
Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

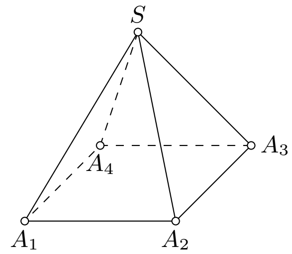
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gäbe ein Polyeder P mit genau sieben Kanten.
Aus dieser Annahme folgt,

(1) falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 hat:
Zu F gehören mindestens vier Kanten, da jedes n-Eck auch n Kanten besitzt. Von jeder der Ecken A_i geht noch mindestens eine Kante k_i aus, die nicht in der Ebene durch F verläuft.
Je zwei dieser Kanten k_i, k_j $(i \neq j)$ sind voneinander verschieden (denn da k_i jeweils A_i enthält, würde eine Kante, die $k_i = k_j$ wäre, A_i und A_j enthalten, also in der Ebene durch F verlaufen). Damit ergibt sich der Widerspruch, dass P mindestens acht Kanten besitzen müsste.

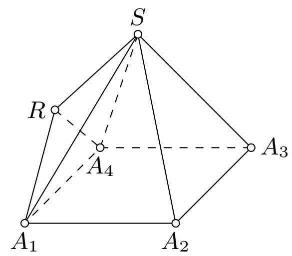
(2) falls P nur Dreiecke als Seitenflächen besitzt:
Die Anzahl dieser Dreiecke sei m. Zählt man für jedes dieser m Dreiecke seine drei Kanten auf, so hat man mit dieser Aufzählung von $3m$ Kanten jede Kante des Polyeders genau zweimal erfasst; denn an jede Kante des Polyeders grenzen genau zwei Seitenflächen an.
Also besitzt P genau $\frac{3m}{2}$ Kanten.
Damit ergibt sich der Widerspruch, dass die Anzahl m die Gleichung $\frac{3m}{2} = 7$, d. h. $3m = 14$ erfüllen müsste.

b) Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 7$.

(1) Ist n gerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 4$ mit $n = 2m$.
Dann hat z. B. jede m-seitige Pyramide genau n Kanten, nämlich, wenn $G = A_1A_2...A_m$ ihre Grundfläche und S ihre Spitze ist, die m Seitenkanten von G und die m hiervon und untereinander verschiedenen Kanten $A_1S, ..., A_mS$. (Abbildung für $m = 4$)



(2) Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 3$ mit $n = 2m + 3$.
Dann hat z. B. jedes folgendermaßen zu erhaltende Polyeder P genau n Kanten: Man wähle eine m-seitige Pyramide Q mit der Grundfläche $A_1A_2...A_m$ und der Spitze S.
Außerhalb von Q wähle man einen Punkt R, der auf keiner der Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte von Q liegt und so nahe an der Seitenfläche $F = A_1A_2S$ gelegen ist, dass das Tetraeder $T = A_1A_2SR$ mit Q nur F gemeinsam hat.
Dann wird aus Q und T ein Polyeder zusammengesetzt, das genau die $2m$ Kanten von Q sowie die hiervon und untereinander verschiedenen Strecken A_1R, A_2S, SR als Seitenkanten besitzt. (Abbildung für $m = 4$)

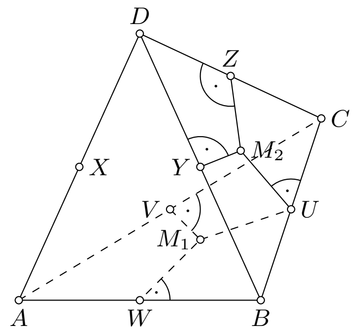


Aufgabe 221233B:
Man beweise:
a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \qquad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeder berührt.
Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn eine Kugel K die Kanten BC, CA, AB, AD, BD, CD eines Tetraeders $ABCD$ in U, V, W, X, Y, Z berührt, so folgt: (siehe Abbildung)



Die Ebene durch $A, B; C$ hat mit K die Punkte U, V, W gemeinsam, sie schneidet K also in einem Kreis. Dieser berührt die Geraden durch B, C bzw. durch $C; A$ in U bzw. V. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt daher $CV = CU$.
Entsprechend folgt

$$CZ = CV = CU \quad ; \quad AW = AV = AX \quad ; \quad BW = BY = BU \quad ; \quad DZ = DY = DX$$

und damit durch Addition (1).

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, so folgt:
Man bezeichne die Ebenen, in denen die Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD liegen, mit e_1, e_2, e_3, e_4, ferner die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecke mit M_1, M_2, M_3, M_4 sowie die Inkreisberührungspunkte (in der aus der Abbildung ersichtlichen Verteilung) mit U_1, V_1, W_1 bzw. Z_2, Y_2, U_2 bzw. X_3, Z_3, V_3 bzw. Y_4, X_4, W_4.
Dann ist $AV_1 = AW_1$, $BW_1 = BU_1$, $CU_1 = CV_1$, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(BC + AC - AB) &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CV_1 - AW_1 - BW_1)\\ &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CU_1 - AV_1 - BU_1) = CU_1\end{aligned}$$

Entsprechend ist $CU_2 = \frac{1}{2}(BC + CD - BD)$. Unter Anwendung von (1) folgt

$$CU_2 = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = CU_1$$

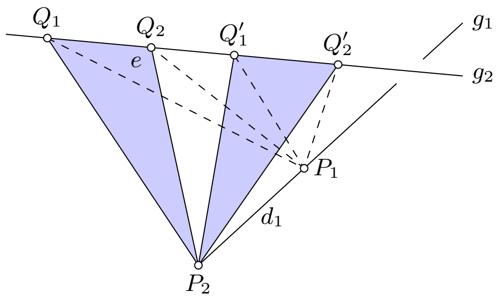
Damit ist $U_1 = U_2$ gezeigt.
Ebenso folgt $V_1 = V_3$, $W_1 = W_4$, $X_3 = X_4$, $Y_4 = Y_2$, $Z_2 = Z_3$. Für die genannten Punkte können demnach die Bezeichnungen U, V, W, X, Y, Z verwendet werden.

Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius stehen $U_M 1$ und UM_2 senkrecht auf BC, also ist die Ebene U durch U, M_1, M_2 senkrecht auf BC und damit senkrecht auf e_1. Folglich enthält u auch die in M_1 auf e_1 errichtete Senkrechte g_1. Ebenso enthält u die in M_2 auf e_2 errichtete Senkrechte g_2.
Da e_1 und e_2 nicht zueinander parallel sind, ist $g_1 \nparallel g_2$. Somit schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt M.
Da nun MM_1U, MM_1V, MM_1W rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Kathete MM_1 und gleichlangen Katheten M_1U, M_1V, M_1W sind, folgt $MU = MV = MW$. Ebenso folgt $MU = MY = MZ$.

Damit ist bewiesen: Die Kugel K durch U,V, W, X geht auch durch Z. Analog folgt, dass K auch durch X geht.
Die Schnittkreise von K mit e_1, e_2, e_3, e_4 sind folglich die Kreise durch U, V, W bzw. durch Z, Y, U bzw. durch X, Z, V bzw. durch Y, X, W, also die Inkreise der Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD. Daher berührt K alle Kanten des Tetraeders.

Aufgabe 261232:
Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $P_1P_2 = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $Q_1Q_2 = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien auf g_1 sowohl P_1, P_2 mit $P_1P_2 = d$ als auch P_1', P_2' mit $P_1'P_2' = d$ sowie auf g_2 sowohl Q_1, Q_2 mit $Q_1Q_2 = d$ als auch Q_1', Q_2' mit $Q_1'Q_2' = d$ gelegen, Zu beweisen ist, dass unter diesen Voraussetzungen stets die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und $P_1'P_2'Q_1'Q_2'$ einander volumengleich sind. Dieses Beweis kann folgendermaßen geführt werden:



Es sei e die durch P_2, g_2 verlaufende Ebene. Die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und $'_1P_2Q_1'Q_2'$ (1) (siehe Abbildung) haben jeweils eine in der Ebene liegende Seitenfläche, nämlich $P_2Q_1Q_2$ bzw. $P_2Q_1'Q_2'$ (2). Diese beiden Dreiecke sind einander flächengleich, da $Q_1Q_2 = Q_1'Q_2'$ gilt und die zu diesen Seiten gehörenden Dreieckshöhen miteinander übereinstimmen, nämlich das Lot von P_2 auf g_2 sind.

Ferner stimmen in den Tetraedern (1) die zu den Seitenflächen (2) gehörenden Tetraederhöhen miteinander überein; sie sind nämlich das Lot von P_1 auf die Ebene e.
Also sind die beiden Tetraeder (1) zueinander volumengleich. Ebenso beweist man, dass die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1'Q_2'$ und $P_1'P_2Q_1'Q_2'$ zueinander volumengleich sind.
Aus beiden Volumengleichheiten folgt die zu beweisende Aussage.

Aufgabe 271233A:
Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Quader liege mit seinen drei Kanten auf den Koordinatenachsen, wobei a längs der x-Achse, b längs der y-Achse und c längs der z-Achse liege. Die Projektionsebene werde durch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 1$ definiert. Der Inhalt einer Fläche A_i, die auf die schräg liegende Ebene projiziert wird, ist proportional zu dem Kosinus des Winkels zwischen $\vec{n}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_i$ auf der Originalfläche A_i. Es ist $\overrightarrow{n_{ab}} = \vec{e}_z$, $\overrightarrow{n_{bc}} = \vec{e}_x$ und $\overrightarrow{n_{ac}} = \vec{e}_y$. Das ergibt:

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{n}_{ab}) + bc(\vec{n}\vec{n}_{bc}) + ac(\vec{n}\vec{n}_{ac})$$

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{e}_z) + bc(\vec{n}\vec{e}_x) + ac(\vec{n}\vec{e}_y)$$

$$A_{proj} = abn_3 + bcn_1 + acn_2 = \vec{n} \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$$

$$A_{proj} = abc \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren von gegebener Länge wird genau dann maximal, wenn die beiden Vektoren parallel sind. Der Normalenvektor muss daher ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ sein. Da seine Länge außerdem gleich 1 sein muss, können wir schlussfolgern:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

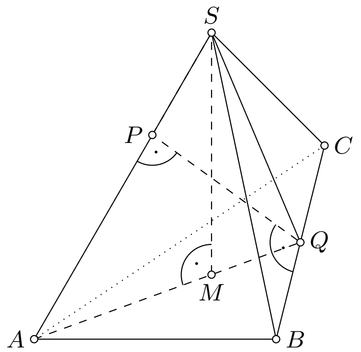
Für die maximale projizierte Fläche erhalten wir:

$$A_{proj} = \frac{abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$A_{proj} = abc\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Aufgabe 281236:
Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.
Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt!
Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!
Hinweis:
Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet.
Diese Erklärung gilt auch für den Fall, dass derartige Punkte G, H sogar den Stecken UV bzw. XY angehören.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Pyramide aus M sei $AB = BC = CA = x$ gesetzt. Das gleichseitige Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \tag{1}$$

Es sei AQ die auf BC senkrechte Höhe in diesem Dreieck, zugleich die Seitenhalbierende von BC. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein M; er teilt AQ im Verhältnis

$$AM : MQ = 2 : 1 \tag{2}$$

und ist zugleich der Umkreismittelpunkt von ABC.
Nach Voraussetzung steht SM senkrecht auf BM und CM; daraus und asu $BM = CM, SM = SM$ folgt $\triangle BMS \cong \triangle CMS$ nach dem Kongruenzsatz sws.

Also ist das Dreieck BCS gleichschenklig mit $BS = CS$, und seine Seitenhalbierende SQ ist zugleich Höhe. Somit sind AQ und SQ senkrecht auf BC, also ist BC senkrecht auf der Ebene durch A, Q, S und daher senkrecht auf allen Geraden dieser Ebene.
Fällt man das Lot QP von Q auf AS, so gibt folglich PQ den Abstand zwischen AS und BC an, das ABC und AQS spitzwinklige Dreiecke sind, also Q und P den Strecken CB bzw. AS angehören. Das heißt, es gilt

$$PQ = d \tag{3}$$

Man erhält dann

$$AQ = \frac{x}{2}\sqrt{3} \qquad \text{(Höhe im Dreieck } ABC\text{)}$$

$$AP = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2} \qquad \text{(Satz des Pythagoras für } \triangle APQ\text{)} \tag{4}$$

$$AM = \frac{2}{3}AQ = \frac{x}{3}\sqrt{3} \qquad \text{(nach (2))} \tag{5}$$

Wegen $\triangle AMS \sim \triangle APQ$ (Übereinstimmung in der rechten Winkeln und im Winkel bei A) gilt

$$MS : AM = PQ : AP \tag{6}$$

Aus (6) und (3), (4), (5) folgt

$$MS = \frac{AM \cdot PQ}{AP} = \frac{\frac{x}{3}\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2}} = \frac{2d \cdot x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2 - 4d^2}}$$

Hiernach und nach (1) hat die Pyramide das Volumen, als Funktion von x:

$$f(x) = V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot MS = \frac{d \cdot x^3}{6\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \tag{7}$$

Als Intervall für die Variable x ist $x > \frac{2d}{\sqrt{3}}$ zugrunde zu legen (wie sich wegen der Bedingung $3x^2 - 4d^2 > 0$ für den Radikanden im Nenner und geometrisch aus $AQ > PQ$ im rechtwinkligen Dreieck APQ ergibt). In diesem Intervall gilt

$$f'(x) = \frac{d}{6} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3x^2 - 4d^2} - x^3 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \cdot 6x}{3x^2 - 4d^2} = \frac{d \cdot x^2 \cdot (x^2 - 2d^2)}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}^3}$$

Daraus folgt: Im Intervall $\frac{2d}{\sqrt{3}} < x < d\sqrt{2}$ ist $f'(x) < 0$, für $x = d\sqrt{2}$ ist $f'(x) = 0$, im Intervall $x > d\sqrt{2}$ ist $f'(x) > 0$.
Also ist V kleinstmöglich (genau) für $x = d\sqrt{2}$; dieses kleinstmögliche Volumen beträgt

$$f(d\sqrt{2}) = \frac{1}{3}d^3$$

Aufgabe 291232:
Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichnet R den Radius seiner Umkugel (d. h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d. h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, dass es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung kann man zu jedem in Betracht zu ziehenden Tetraeder $ABCD$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem so wählen, dass A der Nullpunkt ist und B, C, D auf der positiven $x-, y-$ bzw. $z-$Achse liegen, also mit positiven Zahlen b, c, d die Koordinaten $(b,0,0)$, $(0,c,0)$ bzw. $(0,0,d)$ haben.
Für den Radius R und den Mittelpunkt (x,y,z) der Umkugel gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x-b)^2 + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + (y-c)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$x = \frac{b}{2}; \qquad y = \frac{c}{2}; \qquad z = \frac{d}{2}; \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+d^2} \qquad (1)$$

Für den Radius r und den Mittelpunkt der Inkugel gilt, dass dieser Mittelpunkt die Koordinaten (r,r,r) hat und dass er von der durch B, C, D gehenden Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene liegt wie der Punkt A. Eine Gleichung dieser Ebene ist

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{d} = 1$$

diejenige Hessesche Normalform, bei der der Nullpunkt positiven Abstand von der Ebene hat, ist folglich

$$\frac{-cdx - dby - bcz - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = 0$$

Daher ist die Bedingung, dass der Punkt (r,r,r) von dieser Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene wie A liegt, äquivalent mit

$$\frac{-cdr - dbr - bcr - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = r$$

Daraus folgt

$$r = \frac{bcd}{cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) ist

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2bcd}\left(cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}\right) \cdot \sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$cd + db + bc \geq 3 \cdot \sqrt[3]{cd \cdot db \cdot bc} \qquad (3)$$

$$c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{c^2d^2 \cdot d^2b^2 \cdot b^2c^2} \qquad (4)$$

$$b^2 + c^2 + d^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \qquad (5)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &\geq \frac{1}{2bcd}\left(3\sqrt[3]{b^2c^2d^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{b^4c^4d^4}\right) \cdot \sqrt{3}\sqrt[6]{b^2c^2d^2} \\ &= \frac{1}{2bcd}(3+\sqrt{3})\sqrt[3]{b^2c^2d^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{bcd} \\ &= \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) \qquad (6) \end{aligned}$$

Im Fall $b = c = d$ gilt in (3), (4), (5) und folglich in (6) das Gleichheitszeichen.
Damit ist bewiesen, dass $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; er beträgt $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

Aufgabe 301232:
Im Raum seien n Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, dass sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.
Man beweise, dass es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muss, so dass jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.
Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Lösung von Nuramon:
Es seien P_1,P_2 zwei der n Punkte, die voneinander maximalen Abstand haben. Ist dann P_3 ein weiterer Punkt, so können die Strecken P_1P_3 und P_2P_3 höchstens so lang sein wie die Strecke P_1P_2.
Andererseits ist nach Voraussetzung die kürzeste der Strecken P_1P_2, P_2P_3,P_1P_3 kürzer als 1. Damit ist gezeigt, dass P_3 in der Kugel mit Radius 1 um P_1 oder in der Kugel mit Radius 1 um P_2 enthalten ist. Da P_3 beliebig war, folgt die Behauptung.

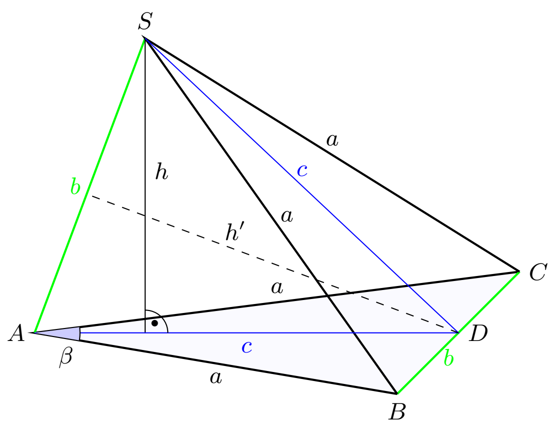
Aufgabe 311236:
Es seien alle diejenigen Pyramiden $ABCS$ betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Grundfläche ABC der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.
(2) Es gilt $AB = AC = SB = SC$.
(3) Es gilt $BC = SA$.
Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\angle BAC$.

Lösung von MontyPythagoras:
Da die Fläche F des Dreiecks ABC konstant gleich eins sein soll, gilt

$$V = \frac{1}{3}Fh = \frac{1}{3}h$$

Das Volumen ist somit maximal, wenn die Höhe h maximal ist. D sei der Mittelpunkt der Strecke BC. Dann gilt:

$$F = \frac{1}{2}bc = 1$$
$$c = \frac{2}{b}$$



Betrachten wir nun das gleichschenklige Dreieck ADS. Seine Fläche ist

$$\frac{1}{2}bh' = \frac{1}{2}ch$$

wobei

$$h' = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}b^2}$$

ist. Damit erhält man:

$$h = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

Setzt man noch c ein, folgt:

$$h = \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{4}{b^2} - \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{16}b^6}$$

Soll h und damit V maximal werden, muss der Term unter der Wurzel maximal werden. Wir setzen daher die erste Ableitung gleich null:

$$2b - \tfrac{3}{8}b^5 = 0$$

$b = 0$ stellt offenkundig kein Maximum dar, so dass die Lösung lautet:

$$b^4 = \tfrac{16}{3}$$

$$b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

Für den Winkel β gilt dann:

$$\beta = 2\arctan\frac{b}{2c} = 2\arctan\frac{b^2}{4} = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Dann ist $b = a$. Das Volumen ist also maximal, wenn die Pyramide ein regelmäßiges Tetraeder ist.

Aufgabe 341235:
Man beweise:
Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lösung von MontyPythagoras:
In einem dreidimensionalen Koordinatensystem sei O der Ursprung und die drei Punkte A,B,C liegen jeweils auf den Koordinatenachsen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor der durch die Punkte A,B,C aufgespannten Ebene berechnet man am einfachsten durch das Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Die normierte Ebenengleichung lautet dann

$$\vec{n}^0\vec{x} - \vec{n}^0\vec{a} = 0$$

Die Höhe h auf das Dreieck ABC ist der Abstand des Ursprungs von dieser Ebene, so dass

$$h = |\vec{n}^0 \vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Laut Aufgabenstellung muss gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Quadrieren und mit 3 multiplizieren:

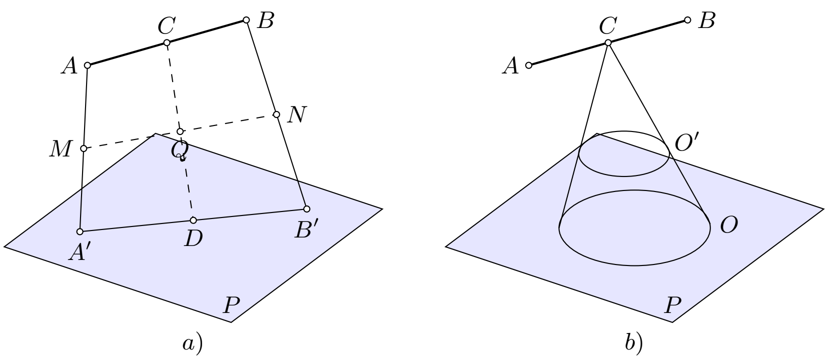
$$\frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \leq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Links steht des harmonische Mittel der drei Werte a^2,b^2,c^2, rechts das arithmetische. Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel, die als bekannt vorausgesetzt wird, ist diese Ungleichung erfüllt.

IV Runde 4

Aufgabe 011245:
Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken AA', BB'.
a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!
b) In der Ebene P wird ein Kreis O betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort L des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise O oder in dessen Innern befinden!
c) Wird A' fest auf dem Kreise O oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von O, so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so dass der oben bestimmte Ort L derselbe bleibt.
Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden:
1. A' und B' sind verschieden,
2. A' und B' fallen zusammen.

Lösung von Eckard Specht:



a) (Bild a) Beschreiben wir die Lage der Punkte A, B, A', B' usw. mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a'}$ bzw. $\vec{b'}$ usw., so sind die Mittelpunkte M und N durch $\vec{m} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a'})$ bzw. $\vec{n} \equiv \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b'})$ gegeben.
Der Mittelpunkt Q der Strecke MN ist demzufolge gleich dem arithmetischen Mittel $\vec{q} \equiv \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{a'}+\vec{b}+\vec{b'})$ der vier Vektoren.

Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes ist dieser Ausdruck auch der Mittelpunkt derjenigen Strecke, deren Endpunkte durch $\vec{c} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und $\vec{d} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a'} + \vec{b'})$ beschrieben werden.

Der erste Punkt ist der Mittelpunkt C der Strecke AB (und damit ein fester Punkt), während der zweite der Mittelpunkt D einer willkürlich gewählten Strecke in P (also selbst ein beliebiger Punkt) ist. Die Mittelpunkte Q aller Strecken CD liegen somit nach der Umkehrung des Strahlensatzes in einer Ebene P', die parallel zu P verläuft und z. B. das Lot von C auf P halbiert.

b) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass der geometrische Ort aller Punkte L ebenfalls ein Kreis bzw. dessen Inneres ist, der die Schnittfläche des (schiefen) Kreiskegels mit der Grundfläche O und der Höhe h in halber Höhe ist.

Aufgabe 021246:
Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, dass N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.
a) Beweisen Sie, dass auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!
b) Beweisen Sie, dass die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
a) Da $ABNM$ und $ACPM$ Sehnenvierecke sind, liegen A, B, N, M sowie A, C, P, M jeweils auf einem Kreis. Die durch D, M, A und D, N, B und D, P, C gehenden Geraden sind Sekanten dieser Kreise. Nach dem Sekantensatz gilt

$$\begin{aligned} |DM| \cdot |DA| &= |DN| \cdot |DB| \qquad \text{und} \\ |DM| \cdot |DA| &= |DP| \cdot |DC| \qquad \text{also} \\ |DN| \cdot |DB| &= |DP| \cdot |DC| \end{aligned}$$

Daher liegen nach Umkehr des Sekantensatzes die Punkte N, B, C, P auf ein und demselben Kreis und, da nach Aufgabenstellung $NBCP$ ein Viereck ist, ist es ein Sehnenviereck.

b) Sind M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Umkreise von $ABNM$ bzw. $ACPM$, r_1 und r_2 ihre Radien und g_1 bzw. g_2 die Senkrechten zu ε_{ABM} durch M_1 bzw. zu $\varepsilon_A CM$ durch M_2, so gilt

$$|QA| = |QB| = |QM| = |QN| = \sqrt{|QM_1|^2 + r_1^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_1 \qquad (1)$$
$$|QA| = |QC| = |QM| = |QP| = \sqrt{|QM_2|^2 + r_2^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_2 \qquad (2)$$

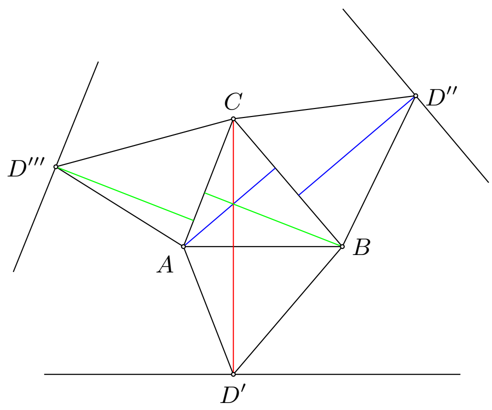
Daher liegt sowohl g_1 als auch g_2 in der zu AM senkrechten Ebene ε durch den Mittelpunkt von AM. Weil $\varepsilon_{ABM} \neq \varepsilon_{ACM}$ ist, gilt auch $g_1 \neq g_2$. Folglich haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt O. Für ihn gilt wegen (1) und (2)

$$|OA| = |OM| = |OB| = |ON| = |OC| = |OP|$$

Also liegen A, B, C, M, N, P auf der Kugel um O mit dem Radius OA.

Aufgabe 031243:
Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.
Beweisen Sie, dass dann folgende Punkte zusammenfallen:
a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,
b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!

Lösung von Manuela Kugel:



Was bedeutet es, wenn das Tetraeder flächengleiche Seiten hat? Zeichnen wir uns ein Tetraedernetz wie im Bild dargestellt auf, dann kann man folgende Überlegungen anstellen:

Ich beginne mit einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$. Dann muss wegen der Flächengleichheit der jeweils fehlende Punkt (D', D'', D''') der äußeren Dreiecke auf je einer Linie liegen, die von der jeweiligen Kante von $\triangle ABC$ denselben Abstand hat wie von dieser Kante zum dritten Punkt im $\triangle ABC$.
Mit dieser Einschränkung haben die Dreiecke $\triangle ABC$ und das betrachtete anliegende Dreieck eine gemeinsame Seite und die auf dieser Seite stehende Höhe von gleicher Länge. Mithin ist der Flächeninhalt gleich.
Es ist also sogar jede Seite des Dreiecks zu jeder anderen Seite flächengleich.

Nun zeige ich mit der folgenden Begründung, dass es nur eine Lösung gibt, Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$, $\triangle CAD'''$ zu einem vorhandenen Dreieck $\triangle ABC$ zu erzeugen:

(1) Wähle ich einen beliebigen Punkt auf einer dieser Parallelen (bspw. im Dreieck $\triangle ABD'$), dann liegt D' fest, damit auch AD' und BD'. Für das Dreieck $\triangle BCD''$ ist damit D'' bestimmt, denn es muss $BD' = BD''$ gelten, sonst entsteht aus dem Netz kein Tetraeder.
Nun liegt auch CD'' fest und damit im Dreieck $\triangle ACD'''$, denn es muss gelten $CD'' = CD'''$. Damit liegt auch AD''' fest, was wiederum genauso groß wie AD' aus dem Dreieck $\triangle ABD'$ sein muss.

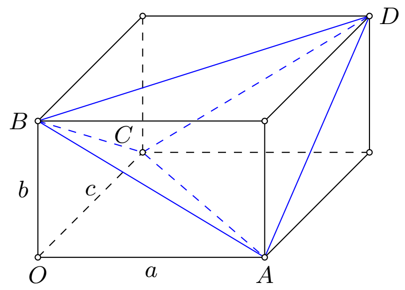
(2) I.d.R. wird es nicht auf Anhieb klappen, dass in oben beschriebener Folge $AD' = AD'''$ gilt.
Wenn nun o. B. d. A. $AD' < AD'''$, dann verlängere ich $AD' \Rightarrow BD'$ wird kürzer $\Rightarrow BD''$ wird kürzer $\Rightarrow CD''$ wird länger $\Rightarrow CD'''$ wird länger $\Rightarrow AD'''$ wird kürzer.
Auf diesem Weg kann man mit genügend kleinen Schritten $AD' = AD'''$ erzeugen - und zwar genau eine Lösung.

Jetzt zeige ich, dass dies genau dann gilt, wenn die Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$ und $\triangle ACD'''$ dadurch entstehen, dass das Dreieck $\triangle ABC$ um einen Kantenmittelpunkt um 180° gedreht wird.
Dann sind die Dreiecke kongruent und es gilt:

$$AB = CD'' = CD''' \qquad BC = AD' = AD''' \qquad AC = BD' = BD''$$

Damit ist insbesondere gezeigt, dass die Seiten, die gleich lang sein müssen, dies auch tatsächlich sind. Es ergibt sich also tatsächlich das Netz eines Tetraeders.

Allgemein gilt, dass Tetraeder aus einem Parallelepiped entstehen, wenn jede 2. Ecke abgeschnitten wird. Für Tetraeder mit kongruenten Seiten gilt sogar, dass sie analog aus einem Quader entstehen.



Die Punkte A, B, C, D lassen sich wie im Bild angegeben in einem Quader mit den Kantenlängen a, b, c in Vektorschreibweise darstellen als:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ein Punkt P, der der Diagonalenschnittpunkt des Quaders ist, hat offensichtlich zu allen Ecken den gleichen Abstand und ist daher der Umkugelmittelpunkt. P hat dabei die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Nun wird untersucht, wie groß der Abstand d_i von P zu den Tetraederseitenflächen ist. Dabei wird die Hessesche Normalform verwendet. Es entstehen folgende vier Gleichungen:

$$d_1 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})]}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} = \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ -ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

und analog Gleichungen für d_2, d_3 und d_4.

Damit sind bis auf das Vorzeichen alle Abstände identisch. Das Vorzeichen bestimmt nur die Richtung des Vektors, der den Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene darstellt.
Insofern sind alle Abstände von gleicher betragsmäßiger Länge und es ist gezeigt, dass die Inkugel des Tetraeders ihren Mittelpunkt in P, also in dem Umkugelmittelpunkt hat.

Aufgabe 041243:
Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d. h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen.
Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.
Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'', B'', C'', D''.
Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'', B'', C'', D'' gebildete Figur machen?

Lösung von Rainer Müller:
Die vier Punkte A,B,C,D bilden genau dann ein Parallelogramm (bzgl. dieser Reihenfolge entlang des Vierecksrandes), wenn $B - A = C - D$ und $C - B = D - A$ gilt, d. h. wenn es zwei Vektoren s_1, s_2 gibt, so dass

$$B = A + s_1, C = A + s_1 + s_2, D = A + s_2 \qquad (1)$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es zwei solche Vektoren sowie analog Vektoren s'_1, s'_2, so dass

$$B' = A' + s'_1, C' = A' + s'_1 + s'_2, D' = A' + s'_2 \qquad (2)$$

Dass die Parallelogramme nach Voraussetzung nicht entartet sind, bedeutet, dass s_1 und s_2 sowie s'_1 und s'_2 jeweils linear unabhängig sind (das ist hier allerdings irrelevant).
Dass A'' auf der Strecke AA' liegt, ist äquivalent zur Existenz eines $\lambda in\,[0,1]$, so dass $A'' = (1-\lambda)A+\lambda A'$.
Dass A'', B'', C'' und D'' den gleichen Teilungsparameter haben, bedeutet

$$\exists\lambda : A'' = (1-\lambda)A + \lambda A', B'' = (1-\lambda)B + \lambda B'$$

$$C'' = (1-\lambda)C + \lambda C', D'' = (1-\lambda)D + \lambda D' \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3) liefert

$$B'' = A'' + s''_1, C'' = A'' + s''_1 + s''_2, D'' = A'' + s''_2$$

mit

$$s''_1 = (1-\lambda)s_1 + \lambda s'_1, s''_2 = (1-\lambda)s_2 + \lambda s'_2$$

d. h. $A''B''C''D''$ ist immer ein Parallelogramm, unabhängig vom Teilungsverhältnis und der relativen Lage und Form der gegebenen Parallelogramme.
Ansonsten kann man keine allgemeinen Aussagen machen. Z. B. kann das neue Parallelogramm entartet sein (z. B. wenn die beiden gegebenen Parallelogramme in einer Ebene liegen, spiegelsymmetrisch zueinander sind und die Teilungspunkte jeweils die Mittelpunkte sind), oder es können Sonderfälle wie Rechtecke und Quadrate entstehen, obwohl die Ausgangsparallelogramme keine Rechtecke sind.

Aber es muss i.A. keinen Teilungsparameter λ geben, für den $A''B''C''D''$ entartet oder ein Rechteck ist (gehen z. B. die beiden Ausgangsparallelogramme durch eine Translation ineinander über, dann sind alle entstehenden Parallelogramme ihnen ähnlich, d. h. nie entartet und i.A. kein Rechteck).

Aufgabe 051246:
Man beweise den folgenden Satz:
Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).

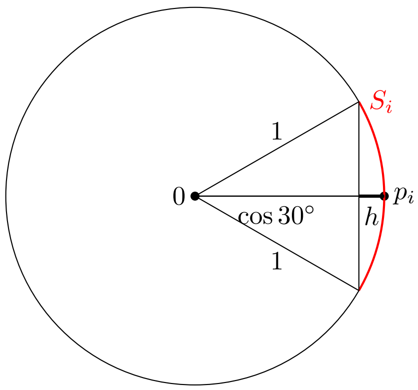
Lösung von Kornkreis:
Wähle einen Schnittkreis k einer Ebene mit der Fläche F (Schnittkreise existieren, weil F eine Fläche ist und somit mehr als einen Punkt enthält).
Nun betrachte die Ebenenschar E_t bestehend aus allen Ebenen e', die durch den Mittelpunkt von k gehen und senkrecht auf der Ebene von k stehen. Eine beliebige solche Ebene e' schneidet k in zwei (auf k gegenüberliegenden) Punkten.

Insbesondere schneidet e' also die Fläche F in zwei Punkten, sodass die Schnittfigur einen Kreis k' darstellt. Alle anderen Ebenen der Schar E_t schneiden nun k' in denselben zwei Punkten und sie schneiden k.
Man sieht leicht, dass die entsprechenden Schnittkreise alle denselben Mittelpunkt und Radius haben, sodass sie insgesamt eine Kugelfläche bilden.
Dies zeigt, dass eine Kugelfläche in F enthalten ist. Da die Ebenenschar E_t aber den ganzen Raum überdeckt und somit jeden möglichen Schnittpunkt mit der Fläche F enthalten muss, folgt, dass F in der Kugelfläche enthalten ist. Beides zusammen impliziert, dass F eine Kugelfläche ist.

Aufgabe 061246:
Man beweise folgenden Satz:
Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, ..., n$; $n > 2$, so im dreidimensionalen Raum, dass jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

Lösung von Nuramon:
Wir legen alle Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei o. B. d. A. $Q = 0$ sei.
Nach Annahme ist in jedem der Dreiecke P_iP_jQ die Seite P_iP_j am längsten. Insbesondere schließen also die Vektoren P_i und P_j einen Winkel von mindestens 60° ein.
Daher genügt es zu zeigen: Wenn n paarweise verschiedene Vektoren $p_1,p_2,\dots,p_n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ paarweise miteinander Winkel von jeweils mindestens 60° einschließen, dann gilt $n < 15$.
Da der Winkel zwischen zwei Vektoren nicht von der Länge der Vektoren sondern nur von deren Orientierung abhängt, können wir für den Beweis dieser neuen Behauptung sogar o. B. d. A. annehmen, dass $p_1,p_2,\dots,p_n$ auf der Einheitskugel liegen.

Es sei für $i = 1,\dots,n$ die Menge $S_i \subset \mathbb{R}^3$ definiert als die Menge derjenigen Punkte auf der Einheitskugel, deren Ortsvektor mit p_i einen Winkel kleiner als 30° einschließen.



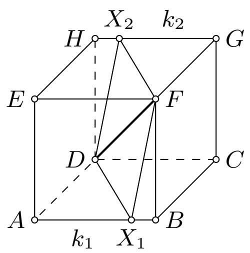
Die S_i sind Kugelsegmente der Höhe $h = 1 - \cos(30°) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und haben somit eine Mantelfläche von $2\pi h = (2 - \sqrt{3})\pi$.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass diese Kugelsegmente paarweise disjunkt sind, also $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Da die Oberfläche der Einheitskugel 4π ist muss somit gelten $(2 - \sqrt{3})\pi n \leq 4\pi$, also

$$n \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + \sqrt{48} < 8 + 7 = 15.$$

Aufgabe 071242:
Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir alle Ebenen, die die Körperdiagonale enthalten (siehe Abbildung).



Sei ε einer dieser Ebenen. ε enthält außer D und F noch (mindestens einer auf einer Würfelkante k_1 gelegenen von D und F verschiedenen Punkt X_1.

Geht k_1 von F aus, dann verläuft ε sowohl durch diese Würfelkante als auch durch die den Punkt D enthaltende zu k_1 parallele Kante k_2. Entsprechend den drei von F ausgehenden Kanten gibt es drei derartige Lagen der Ebene ε und die dabei entstehenden Schnittflächen F_ε sind kongruente Rechtecke mit dem Flächeninhalt

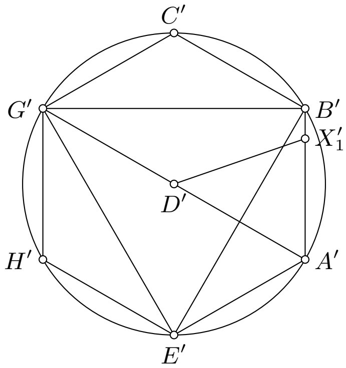
$$|F_\varepsilon| = a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$$

Geht k_1 nicht von D oder F aus, d. h. bezeichnet k_1 einer der sechs Kanten AB, BC, CG, GH, HE oder EA, dann gibt es unter diesen sechs Kanten eine zu k_1 parallele Kante k_2. Da ε k_1 schneidet, so schneidet die Ebene ε auch k_2 in einem Punkt X_2, wobei X_1FX_2D ein Parallelogramm mit der Diagonalen DF ist.

X_1FX_2D ist die Schnittfläche von ε mit einem Würfel. Durch entsprechende Wahl von X_1 (und damit auch von X_2) auf einem der beiden anderen Paare paralleler Kanten entsteht eine zu X_1FX_2D kongruente Schnittfläche.

Da die Diagonale DF die Schnittfläche in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, wird der Flächeninhalt der Schnittfläche genau dann ein Minimum, wenn die Höhe l zur Grundseite DF der zugehörigen Dreiecke eine minimale Länge hat.

Sei X_1 aus AB gelegen. Projiziert man den Würfel parallel zu FD auf eine zu FD senkrechte Ebenem so verzerren sich die Strecken l, AC, CH, HA, BG, GE und EB nicht, und werden die Bilder der Originalpunkte durch einen Strich gekennzeichnet, so bilden A', B', C', G', H', E' die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit dem Mittelpunkt D'.



Wegen $l = X_1'D'$ hat l offenbar genau dann den kleinsten Wert, wenn der Punkt X_1' der Strecke $A'B'$ diese Strecke halbiert, also $X_1'D'$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle A'B'D'$ ist. Dann gilt $|l| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ und für die Maßzahl der entsprechenden Schnittfläche

$$|F_e| = a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

Wegen $2a^2 > \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ ist diese Schnittfläche tatsächlich minimal.
Entsprechend der Lage von X_1, X_2 auf einem der drei ober betrachteten Paare paralleler Kanten gibt es drei Lagen von ε, in denen diese minimale Schnittfläche ausgeschnitten wird.

Aufgabe 111243:
Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei der Punkte P_i, P_j $(i, j = 1, 2, 3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen $0°$ und $180°$ liegt.
Man beweise, dass für diese Größen die Ungleichung $\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wir schneiden die von Q ausgehenden und durch die P_i verlaufenden Strahlen mit einer Kugeloberfläche

mit Radius 1 um Q. Dann erhalten wir auf dieser Kugeloberfläche als Schnitt die Punkte Q_i, wobei P_i auf dem von Q ausgehenden Strahl durch Q_i liegt. Damit ist $\alpha_{ij} = \angle P_iQP_j = \angle Q_iQQ_j$ und die Großkreis-Bögen zwischen je zwei dieser Punkte P_i und P_j besitzen genau die Länge α_{ij}, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.

Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche der (kürzere) Bogen des Großkreises ist, auf dem die beiden Punkte liegen, (welche eindeutig ist, sofern sich die beiden Punkte nicht diametral auf der Kugel gegenüberliegen), folgt, da alle Winkel α_{ij} echt zwischen 0 und $\pi = 180°$ liegen, dass der direkte Weg von Q_1 nach Q_2 entlang des kürzeren Großkreis-Bogens durch diese beide Punkte kürzer ist als der Weg von Q_1 über Q_3 nach Q_2 entlang der entsprechenden Großkreis-Bögen, also $\alpha_{12} < \alpha_{31} + \alpha_{23}$, $\Box$.

Aufgabe 121243:
Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
1. Ein auf der Kugeloberfläche κ gezeichneter Kreis k kann durch einen Schnitt von κ mit der Ebene ε erzeugt werden.
Im Folgenden soll der auf κ liegende Kreis k_i als Schnittkurve von κ mit der Ebene ε_i interpretiert werden. Entsprechend werden zwei auf κ liegende und voneinander verschiedene Kreise k_i und k_j als Schnitte von κ mit den Ebenen ε_i und ε_j angesehen. Für die Lage der Schnittebenen ε_i und ε_j sind vier Fälle zu unterscheiden:

a) ε_i und ε_j sind parallel zueinander,
b) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ meidet,
c) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ berührt,
d) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ in zwei voneinander verschiedenen Punkten schneidet.

In den Fällen a), b), c) wird die Kugeloberfläche durch k_i und k_j in drei paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt. Im Falle d) wird κ in vier paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt.

2. Auf κ seine $p-1$ paarweise voneinander verschiedene Kreise k_i vorgegeben. p_{p-1} sei die Höchstzahl der durch $p-1$ Kreise auf κ erzeugbaren, paarweise verschieden Gebiete.
s_p sei die Anzahl der getrennt liegenden Punkte, die die p-te Kreis k_p mit den $p-1$ auf κ vorgelegten Kreisen gemeinsam hat.
Für $s_p \geq 2$ teilt der je zwei benachbarte Punkte von k_p verbindende Kreisbogenabschnitt das zugehörige Gebiet von κ in genau zwei Gebiete.
Für $s_p = 0$ und $s_p = 1$ wächst die Anzahl der Gebiete infolge der Zufügung von k_p um eins. Aus der Zugabe des Kreises k_p resultiert also eine Vergrößerung der Anzahl der Gebiete um $x_p \geq 1$.
Nach diesen Überlegungen gilt die Rekursionsformel

$$n_p = n_{p-1} + x_p \qquad (1)$$

für $p \geq 1$.

3. Da nach der größten Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten auf κ gefragt ist, muss man die Schnittebenen ε_i so legen, dass jeder neu hinzukommende Kreis k_i einen möglichst großen Summanden x_p in die Rekursionsformel (1) einbringt.
Nach 1. und 2. kann x_p nicht größer sein als in dem Fall, dass k_p jeden der $p-1$ vorliegenden Kreise in zwei Punkten schneidet und sämtliche auf κ existierenden Schnittpunkte durch den Schnitt von genau zwei Kreisen erzeugt werden. In (1) muss daher gelten:

$$x_p \leq 2(p-1) \qquad (2)$$

4. Mit (2) nimmt die Rekursionsformel (1) die Form

$$n_p \leq n_{p-1} + 2(p-1) \qquad (3)$$

an. Der Anschauung ist zu entnehmen, dass $n_1 = 2$ gilt. Daraus folgt weiter mit (3):

$$\begin{aligned} n_2 &\leq 2 + 2 \cdot 1 \\ n_3 &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ n_4 &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ &\ldots \\ n_p &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2(p-1) \qquad (4) \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Summationsformel für die arithmetische Reihe ergibt sich für (4) die Darstellung

$$n_p \leq 2 + p(p-1) \qquad (5)$$

5. Jetzt wird gezeigt, dass auf κ tatsächlich ein p-Tupel von Kreisen existiert, bei welchem jeder der paarweise voneinander verschiedenen Kreise mit jeden anderen genau zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam hat und auch durch keinen der Kreisschnittpunkte mehr als zwei Kreise hindurchgehen.

Im Mittelpunkt der Kugel liege der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Von der x- und y-Achse wird die zu κ gehörige Äquatorebene aufgespannt. Die z-Achse werde mit der Achse des Drehkegels Φ zur Deckung gebracht, dessen Öffnungswinkel 45° beträgt und dessen Spitze im Ursprung liegt.
Die Tangentialebenen an die Kegelfläche berühren diese längs einer Erzeugenden. Daher gehen die Tangentialebenen von Φ durch den Kugelmittelpunkt und schneiden κ in Großkreisen.

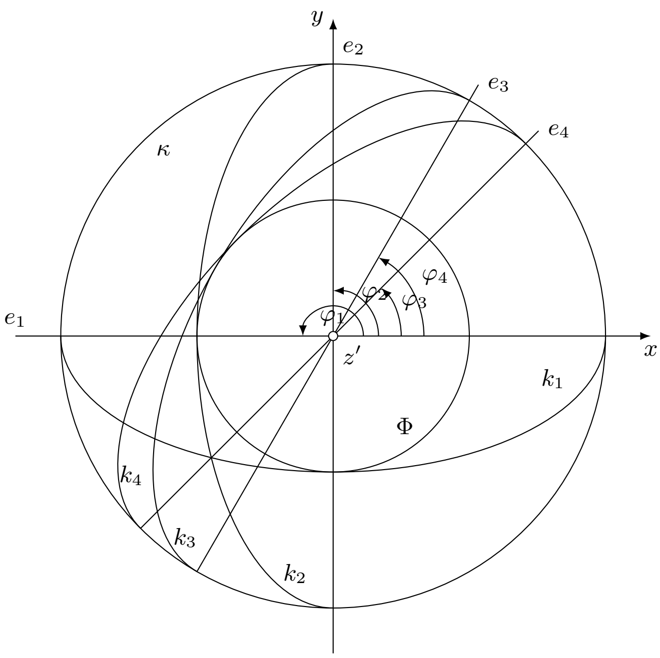


Abbildung: Normalprojektion von κ mit den Kreisen k_1, k_2, k_3 und k_4 auf die Äquatorebene von κ

Zwei voneinander verschiedene Tangentialebenen ε_i und ε_j schneiden sich in dem Kugeldurchmesser g_{ij}. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind mit den Schnittpunkten der Großkreise k_i und k_j identisch.
Die Tangentialebene ε_i von Φ schneidet die Äquatorebene von κ in der Spur e_i. Die in e_i liegende Streichrichtung von ε_i ist so orientiert, dass die Ebene ε_i beim Blick in diese Richtung von links nach rechts fallend erscheint. Die positive x-Achse schließt mit dem in Streichrichtung der Ebene ε_i zeigenden Strahl r_i^+ den Winkel φ_i ein.

Trifft man die Vereinbarung $\varphi_i = \frac{\pi}{i}$ ($i = 1,2,3,...,p$), so hat man p Tangentialebenen an Φ, die κ nach einem p-Tupel von Großkreisen k_i mit den geforderten Eigenschaften schneiden. In diesem Fall ergibt sich als Zahl für die Gebietseinteilung auf κ der Wert $2 + p(p-1)$, so dass wegen (5)

$$n_p = 2 + p(p-1) \qquad (6)$$

gilt. (siehe Abbildung)

Aufgabe 121244:
Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3;4;0)$ bzw. $(10;8;4)$.
Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so dass das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Punkt P_1: Das bedeutet Übergang von den Koordinaten (X,Y,Z) zu (x,y,z) gemäß der Vorschrift

$$(x;y;z) = (X;Y;Z) - (3;4;0) \qquad (1)$$

Durch diese Koordinatentransformation gehen offensichtlich Punkte mit ganzrationalen Koordinaten genau in Punkte der gleichen Art über; insbesondere erhält der Punkt P_2 die Koordinaten $(7;4;4)$. Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten sind genau dann Lösung wenn

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}; \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_1P_2}; \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \overrightarrow{P_1P_4} = 0$$

gilt. Sind die Koordinaten von $P_4(x;y;z)$, so bedeuten diese Bedingungen für sie wegen $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 9$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad (2) \qquad ; \qquad 7x + 4y + 4z = 0 \quad (3)$$

Aus (3) folgt

$$z = -\left(y + \frac{7}{4}x\right) \qquad (4)$$

und nach Einsetzen in (2)

$$y^2 + \frac{7}{4}xy + \frac{65}{32}x^2 - \frac{81}{2} = 0$$

Hieraus ergibt sich

$$y_{1;2} = \frac{1}{8}(-7x \pm 9\sqrt{32 - x^2})$$

Da x und y ganzrationale Zahlen sind, muss $\sqrt{32 - x^2}$ rational und daher $32 - x^2$ eine Quadratzahl sein. Dafür kommt nur $x_{1,2} = \pm 4$ in Frage. Man erhält daraus, und mit (4)

$$\begin{array}{ccccccc} y_{11} = 1 & ; & y_{21} = -8 & ; & y_{12} = 8 & ; & y_{22} - 1 \\ z_{11} = -8 & ; & z_{21} = 1 & ; & z_{12} = -1 & ; & z_{22} = 8 \end{array}$$

Durch Einsetzen bestätigt man, dass diese Werte Lösungen des System (2), (3) sind. Es ergeben sich vier Quadrate, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Mit (1) finden man für die Koordinaten der Eckpunkte

$$\begin{array}{ccccccc} P_{31} = (14,9,-4) & ; & P_{41} = (7,5,-8) & ; & P_{32} = (14,0,5) & ; & P_{42} = (7,-4,1) \\ P_{33} = (6,16,3) & ; & P_{43} = (-1,12,-1) & ; & P_{34} = (6,7,12) & ; & P_{44} = (-1,3,8) \end{array}$$

Aufgabe 141245:
Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet.
Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.
a) Man zeige, dass es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.
b) Man beweise, dass für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^* zusammenfällt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Dieses Tetraeder ist die Vereinigung der vier (durchschnittsfremden) Tetraeder $A_1A_2A_3P$, $A_1A_2A_4P$, $A_1A_3A_4P$, $A_2A_3A_4P$. Für die Volumina gilt:

$$\frac{1}{3}Gh = V_{A_1A_2A_3A_4} = V_{A_1A_2A_3P} + V_{A_1A_2A_4P} + V_{A_1A_3A_4P} + V_{A_2A_3A_4P} =$$

$$= \frac{1}{3}G_1x_1 + \frac{1}{3}G_2x_2 + \frac{1}{3}G_3x_3 + \frac{1}{3}G_4x_4$$

wobei G das Maß der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_4$, $G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecke $A_1A_3A_4$, $G_4 = G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_2A_3A_4$ ist (die Gleichheit gilt, da es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt) und x_1, x_2, x_3, x_4 die Abstände des Punktes P von den Tetraederseiten in der entsprechenden Reihenfolge sind.

Wegen der Inhaltsgleichheit der Seitenflächen folgt hieraus

$$h = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad (*)$$

Angenommen, es existiert ein Punkt P^+ mit den geforderten Eigenschaften. Dann liegt P^+ auf der zu $A_1A_2A_3$ im Abstand $\frac{h}{4}$ liegenden parallelen Ebene ε_1, deren Durchschnitt mit dem Tetraeder nicht leer ist, analog auf der zu $A_1A_2A_4$ liegenden Ebene ε_2 und da diese Ebenen nicht zueinander parallel sind, auf der Schnittgeraden g von ε_1 und ε_2, die ihrerseits parallel zu A_1A_2 ist.

Die in analoger Weise zu $A_1A_3A_4$ parallele Ebene ε_3 schneidet demzufolge g in genau einem Punkt P_s. Jeder Punkt P, der den Bedingungen der Aufgabe genügt, muss notwendig aus ε_1, ε_2, ε_3 liegen, d. h. aber, er muss mit P_s zusammenfallen.

Der Punkt P_s hat von $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ und $A_1A_3A_4$ die Abstände $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{h}{4}$; wegen (*) ist dann jedoch $x_4 = \frac{h}{4}$ und P_s ist der gesuchte Punkt P^+.

b) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des Tetraeders, x_1, x_2, x_3, x_4 seien wie in a) die Abstände zu den Tetraederseiten.

Da x_1, x_2, x_3, x_4 nichtnegative Zahlen sind, gilt die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Wegen (*) ist die rechte Seite der Ungleichung gleich $\frac{1}{4}$.

Das Gleichheitszeichen wird bekanntlich genau dann angenommen, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, d. h., wenn $x_i = \frac{h}{4}$, $i = 1,2,3,4$ ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $P \equiv P^+$ ist.

Aufgabe 161243:
Ist $P_1P_2P_3P_4$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch den Index 4 ersetzt).
Man beweise:
Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da P_1, P_2, P_3, P_4 auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels mit der Spitze S liegen, haben die Strahlen SP_i ($i = 1,...,4$) mit einer (in demselben Halbraum wie die Pyramide liegenden) geeigneten zur Kegelachse senkrechten Ebene ε Schnittpunkte Q_i. Der Schnittpunkt von ε mit der Kegelachse sei mit M bezeichnet. Da für jedes $i = 1,..,4$ die Punkte S_i, P_i, Q_i auf einer Geraden liegen, fallen die durch S_i, Q_i, Q_{i+1} bestimmten Ebenen mit der Ebene ε_i zusammen.
Es gilt $SQ_i = SQ_j$ ($i, j = 1,...4$), da $\varepsilon \perp SM$ und die Q_i dem Schnittkreis k des Kegels mit ε angehören.

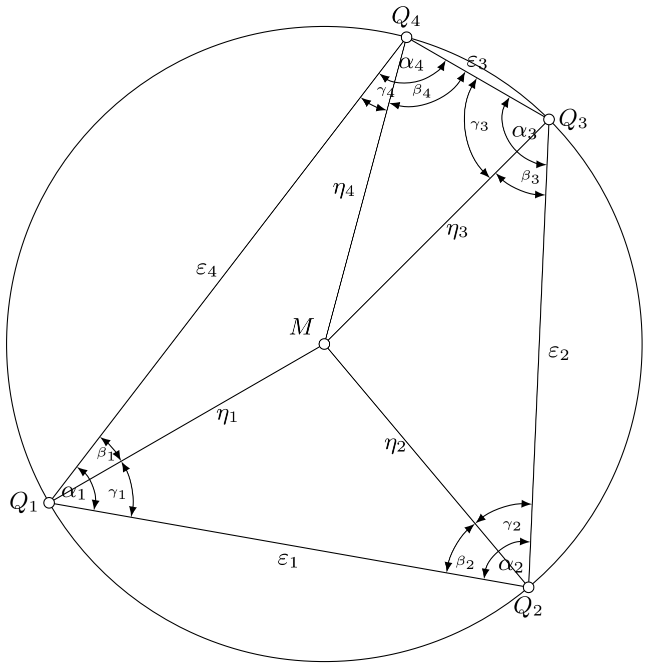


Abbildung: Von den Flächen ε_i, η_i ($i = 1,...,4$) wurden nur die in k liegenden Strecken gezeichnet; die eingezeichneten Winkelangaben $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ geben nicht die wahre Größe an.

Aus demselben Grunde gilt $MQ_i = MQ_j$ ($i, j = 1,...,4$), d. h. die Grundflächen der Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ mit der Spitze S sind für $i = 1,...,4$ gleichschenklige Dreiecke, so dass wegen $\varepsilon \perp SM$ die durch S, M und die Mittelpunkte M_i ($i = 1,...,4$) von Q_iQ_{i+1} gehenden Ebenen für die entsprechenden Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ Symmetrieebenen darstellen, d. h., $MQ_iQ_{i+1}S$ in die bez. der entsprechenden Ebenen MQ_iQ_{i+1} zueinander symmetrischen Tetraeder SMM_iQ_i und SMM_iQ_{i+1} zerlegen.

Mit η_i seien die durch S, M und Q_i bestimmten Ebenen bezeichnet; die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ε_{i-1} und η_i sei mit β_i, die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ε_i und η_i sei mit γ_i bezeichnet. Dann gilt auf Grund der Symmetrie stets

$$\beta_{i+1} = \gamma_i \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (1)$$

Da das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ konvex ist, sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) M liegt innerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$ bzw. auf einer seiner Seiten. Dann ist $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ ($i = 1,...,4$) (siehe Abbildung).
Folglich gilt nach (1)

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 + \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = \beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

b) M liegt außerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$.
Dann gibt es einen Index i_0 so, dass M in Außenwinkeln bei Q_{i_0} und Q_{i_0+1} liegt. Durch zyklische Vertauschung der Indizes, die weder die Voraussetzungen, noch die Behauptung der Aufgabe ändert, kann $i_0 = 1$ erreicht werden. Dann liegt ε_1 in dem Winkel zwischen ε_4 und η_1, also ist

$$\alpha_1 = \beta_1 - \gamma_1 \qquad (2)$$

Ferner liegt ε_1 in dem Winkel zwischen ε_2 und η_2, also gilt

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \beta_2 \qquad (3)$$

Für $i = 3{,}4$ liegt η_i in dem Winkel zwischen ε_{i-1} und ε_i, also ist

$$\alpha_i = \beta_i + \gamma_i \qquad (4)$$

Also gilt

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 - \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = -\beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

Aufgabe 201246B:
Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T.
Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben.
Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt.
Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s.
Die geforderten Eigenschaften sind:
(1) $\angle BDC = \angle CDA = \angle ADB = 90°$.
(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.
(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir betrachten die Menge alle Tetraeder, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen. Setzen wir $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, so gilt nach (1) unter Beachtung des Satzes von Pythagoras für die zu untersuchende Summe s:

$$s = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \qquad (4)$$

Wegen (1) ist das Volumen $\frac{1}{6}xyz$, so dass nach (3) gilt: $xyz = 1$.
Für ein festes $z \geq \frac{1}{6}$ (siehe (2)) untersuchen wir nun die Summe s als Funktion des Quotienten $k = \frac{x}{y}$, wobei wir o. B. d. A. $k \geq 1$ annehmen können.

Aus $xy = \frac{1}{z}$ und $\frac{x}{y} = k$ folgt $x^2 = \frac{z}{k}$ und $y^2 = \frac{1}{k \cdot z}$, Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} s(k) &= \sqrt{\frac{k}{z}} + \sqrt{\frac{1}{k \cdot z}} + z + \sqrt{\frac{k}{z} + \frac{1}{kz}} + \sqrt{\frac{1}{kz} + z^2} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{\left(\sqrt{z^2 + \frac{1}{kz}} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}}\right)^2} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{2z^2 + \frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right) + 2\sqrt{z^4 + \frac{1}{z^2} + z\left(k + \frac{1}{k}\right)}} \end{aligned}$$

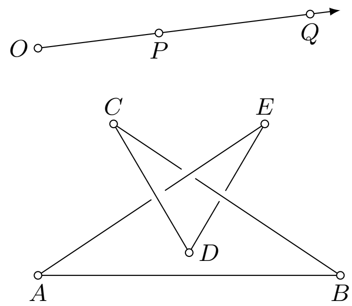
Nun sind die Funktionen $\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $f(t) = t + \frac{1}{t}$ für $t \geq 1$ monoton wachsend $[f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0]$, so dass $s(k)$ monoton wachsend ist.
Bei festem z wird aber wegen (2) das größte Verhältnis von $k = \frac{1}{y^2 z}$ für $y = \frac{1}{6}$ erreicht. $s(k9$ nimmt also für jedes beliebige fest z sein Maximum für $y = \frac{1}{6}$ und $x = \frac{6}{x}$ an. Zu untersuchen ist also nur noch, ob und, wenn ja, bei welchem z die Summe s maximal wird.

Halten wir $y = \frac{1}{6}$ fest und nehmen wir o. B. d. A. $x \geq z$ an, so folgt mit Hilfe derselben Schlussweise, dass es ein Tetraeder gibt, für das s ein Maximum annimmt, und zwar für $z = \frac{1}{6}$ und $x = 36$. Das maximale Wert von s wird also für $x = 36$, $y = z = \frac{1}{6}$ angenommen und ist

$$s = 36 + \frac{2+\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{36}{1}}$$

Aufgabe 211243:
Man beweise, dass sich aus fünf geraden Stäben kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden lässt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:
(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt: Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen;
ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.
Hinweis:
Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
In der Abbildung ist das beim Sehen mit einem Auge O entstehende Bild eines räumlichen Streckenzuges unter Einarbeitung der bei Überdeckungen vorliegenden Sichtbarkeitsverhältnisse wiedergegeben.



Von dem als zentralperspektives Bild dargestellten hypothetischen Streckenzug $ABCDEA$ ist nachzuweisen, dass dieser im Raum nicht existieren kann.
Zunächst sei vorangestellt: Trifft ein von O ausgehender Sehstrahl s erst den Punkt P und dann den Punkt Q, so wollen wir sagen:

„P liegt vor Q“ oder „Q liegt hinter P“

Gemäß der Abbildung treffen drei von O ausgehende Sehstrahlen je zwei windschief zueinander liegende Strecken des Streckenzuges $ABCDEA$ in je einem Punkt. Wir stellen fest:

1. Ein von O ausgehender Sehstrahl trifft AE in T_{AE1} und CD in $_{CD}$. T_{CD} liegt vor T_{AE1}.
2. Ein Sehstrahl trifft BC in T_{BC1} und DE in T_{DE}. T_{BC1} liegt vor T_{DE}.
3. Ein Sehstrahl trifft AE in T_{AE2} und BC in T_{BC2}. T_{AE2} liegt vor T_{BC2}.

Jetzt führen wir eine Hilfsebene γ ein, die von den drei (nichtkollinearen) Punkten ABC aufgespannt wird. Offenbar liegt jeder Punkt der Strecken AB und BC in γ.

Nach Feststellung 3. liegt T_{AE2} vor T_{BC2} und damit vor γ. Da A in γ und T_{AE2} vor γ liegen, muss auch der Punkt E vor γ liegen.
Nach Feststellung 1. liegt T_{CD} vor T_{AE1}. Da A in γ und E vor γ liegen, muss auch der dazwischenliegende Punkt T_{AE1} vor γ liegen. Daraus folgt, dass auch T_{CD} vor γ liegt. Da C in und T_{CD} vor γ liegen, muss auch D vor γ liegen.
Folglich liegt auch jeder innere Punkt der Strecke DE vor γ.
Nach Feststellung 2. wird T_{DE} von T_{BC1} verdeckt. T_{DE} liegt als innerer Punkt von DE hinter T_{BC1} und damit auch hinter γ.
Dies ist ein Widerspruch zu oben genannter Feststellung. Die Punkte D, E und T_{DE} können auf Grund der durch die Abbildung wiedergegebenen Lagebeziehungen nicht in einer Geraden liegen.

Aufgabe 211245:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $PA^2 + PB^2 = PC^2$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
O. B. d. A. sei das gegebene Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$ so in einem räumlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem gelegen, dass die Eckpunkte A, B und C die Koordinaten $(b; 0; 0)$, $(0; a; 0)$ bzw. $(0; 0; 0)$ haben, wobei a und b beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen sind.
Ferner sei P ein beliebiger Punkt des Raumes; er habe die Koordinaten $(x; y; z)$. Dann gilt:

$$PA^2 = (x-b)^2 + y^2 + z^2$$
$$PB^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2$$
$$PC^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Daher hat ein Punkt P genau dann die Eigenschaft $PA^2 + PB^2 = PC^2$, wenn für ihn

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 0 \qquad (1)$$

Wegen $(x-b)^2 \geq 0$, $(y-a)^2 \geq 0$, $z^2 \geq 0$ trifft (1) genau dann zu, wenn $x - b = y - a = z = 0$ ist.
Daher ist die gesuchte Menge diejenige, die genau den Punkt mit den Koordinaten $(b; a; 0)$ enthält. (Dieser Punkt P ist derjenige Punkt, für den $ACBP$ ein Rechteck ist.)

Aufgabe 211246A:
a) Man beweise: Wenn

$$a = BC, b = AC, c = AB, d = AD, e = BD, f = CD \qquad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_O dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen lässt:
Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so dass für den Oberflächeninhalt A_O jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_O \leq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (3)$$

gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für den Flächeninhalt A des gleichseitigen Dreiecks mit dem Unfang u gilt:

$$A = \left(\frac{u}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Von allen Dreiecken gleichen Umfangs besitzt das gleichseitige Dreieck einen maximalen Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt $A_\triangle$ eines Dreiecks mit den Seitenlängen x, y, z gilt folglich

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

und wegen der Beziehungen zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \qquad (1)$$

Die Ungleichung (1) gilt für alle Seitenflächen jedes Tetraeders $ABCD$. Somit folgt für die Oberfläche A_O des Tetraeders $ABCD$

$$\begin{aligned} A_O &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+e^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2+d^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(c^2+d^2+e^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+2f^2) \qquad (2) \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2) \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{6}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{12}} < \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ gilt, ergibt sich aus (2) die Aussage a)

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

Aus (2) folgt weiterhin, dass mit $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ eine reelle Zahl $\lambda < \frac{1}{3}$ existiert, so dass für den Flächeninhalt A_O

$$A_O < \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

$\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ ist auch die kleinste reelle Zahl λ dieser Art; denn für ein reguläres Tetraeder folgt aus $a = b = c = d = e = f$

$$A_O = a^2\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

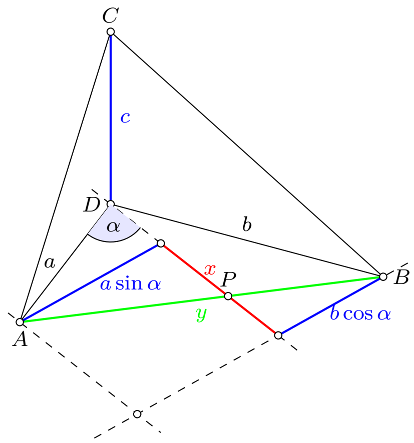
Folglich ist $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ die in b) gesuchte reelle Zahl.

Aufgabe 221246A:
Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinanderstehen.
Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b, bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.
a) Man beweise, dass dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets gilt:

$$s \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

Lösung von MontyPythagoras:
O. B. d. A. liege der Punkt P auf der Kante AB. Siehe folgende Skizze:



Dann ist s die Summe der „blauen“ Strecken:

$$s = a \sin\alpha + b\cos\alpha + c$$

Außerdem ist zu Zwecken der Abkürzung:

$$y^2 = a^2 + b^2$$

und

$$x = b\sin\alpha - a\cos\alpha$$

Offensichtlich gilt:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{y^2 - x^2}$$

und somit:

$$s = \sqrt{y^2 - x^2} + c$$

Es soll gelten:

$$s^2 = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + c\right)^2 \leq 2(y^2 + c^2)$$

$$y^2 - x^2 + c^2 + 2c\sqrt{y^2 - x^2} \leq 2y^2 + 2c^2$$

$$0 \leq y^2 - x^2 + c^2 - 2c\sqrt{y^2 - x^2} + 2x^2$$

$$0 \leq \left(\sqrt{y^2 - x^2} - c\right)^2 + 2x^2$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich immer erfüllt, was die Ungleichung (1) beweist.

Für Aufgabenteil b) soll Gleichheit eintreten, was nur dann der Fall ist, wenn einerseits

$$x = 0$$

und andererseits (mit $x = 0$)

$$\sqrt{y^2} - c = 0$$

also

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist. x ist genau dann gleich null, wenn die Gerade g durch D und P die Strecke AB rechtwinklig kreuzt, P also den Lotfußpunkt von D auf AB darstellt.

Aufgabe 231246A:
Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, dass jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecken hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.
Man beweise aus dieser Voraussetzung, dass es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Inneren oder auf seinem Rand enthält.
Anmerkung:
In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfahre man ebenso.

Lösung von Kornkreis:
Für $0 \leq n \leq 3$ ist die Aussage trivial, da dann alle Punkte in einer Ebene und somit in einer Dreiecksfläche liegen (entarteter Tetraeder mit Volumen 0). Sei nun $n \geq 4$. Nach Voraussetzung gibt es einen nicht-entarteten Tetraeder mit Eckpunkten aus der gegebenen Punktmenge.

Betrachten wir nun von allen solchen Tetraedern einen mit dem größten Volumen (so ein maximaler Tetraeder existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Tetraeder).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Tetraeders mit P_1, P_2, P_3, P_4. Da dessen Volumen maximal ist, müssen alle anderen Punkte P_i $(i > 4)$ so liegen, dass die Volumina der Tetraeder mit den Eckpunkten P_a,P_b,P_c und P_i (für alle a,b,$c \in \{1,2,3,4\}$ paarweise verschieden und alle $i > 4$) nicht größer sind als das Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$.

Da das Volumen eines Tetraeders gleich „Grundfläche mal Höhe durch 3“ ist, liegen also alle Punkte in einem Gebiet T (oder auf dessen Rand), welches begrenzt wird durch die Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ liegen und den der jeweiligen Seitenfläche gegenüberliegenden Eckpunkt enthalten.
Beachte, dass man die Ebenen durch den Spiegelpunkt dieses Eckpunktes an der jeweiligen Fläche nicht zu betrachten braucht, da das soeben beschriebene Gebiet T bereits geschlossen ist. T stellt nämlich einen nicht-entarteten Tetraeder dar. Dessen Seitenflächen sind parallel zu denen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$, und überdies ähnlich zu ihnen mit drei mal so großen Seitenlängen, was wir im Folgenden zeigen wollen.

Betrachten wir als Beispiel (die anderen Seiten sind dann analog) die Schnittlinie g, die durch den Schnitt der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 mit der Ebene parallel zu $P_1P_2P_4$ durch P_3 entsteht. Die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ schneiden g in den Punkten A bzw. B.
Nun kann man sehen, dass das Parallelverschieben der Strecke P_1P_4 entlang der Strecke P_1P_3 einen dieser Schnittpunkte A oder B auf g ergibt; der andere Schnittpunkt dann entsprechend durch Parallelverschieben der Strecke P_2P_4 entlang der Strecke P_2P_3. Die Strecken P_1P_4 und P_2P_4 schneiden sich im Punkt P_4 und nach dem Verschieben im Punkt P_3. Da A und B in der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 liegen und P_1, P_2 in der Ebene $P_1P_2P_3$, folgt, dass der Abstand zwischen A und B genau der Abstand zwischen P_1 und P_2 ist.

Nun müssen die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ noch zusätzlich zum Punkt P_2 bzw. P_1 parallelverschoben werden, was in der Ebene $P_1P_2P_3$ (und allen dazu parallelen Ebenen, insbesondere der durch P_4) einer Verschiebung um jeweils $|P_1P_2|$ entspricht. Die entsprechenden Schnittpunkte A', B' auf g haben dann also den Abstand $3\,|P_1P_2|$ voneinander.

Dies zeigt das oben behauptete, sodass das Volumen des Tetraeders T gleich $3^3 = 27$ mal dem Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ entspricht. Letzterer hat maximal das Volumen 1, womit dann die Behauptung der Aufgabenstellung folgt.

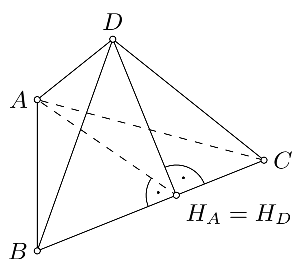
Aufgabe 241245:
Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst gilt allgemein:
Die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen jedes Tetraeders liegen zwischen 0° und 180°. In einem Tetraeder $ABCD$ sei nun für die Kantenlängen

$$\sqrt{3} \leq AB, BC, AC, AD, BD, CD \leq 2$$

vorausgesetzt. Es genügt, o. B. d. A., zu zeigen, dass der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD nicht größer als 90° ist.
Es seien H_A bzw. H_D die Fußpunkte der von A bzw. D auf die Gerade durch B und C gefällten Lote. Nach Aufgabe 241232 sind die Dreiecke ABC und BCD spitzwinklig. H_A und H_D liegen zwischen B und C und es gilt $AH_A, DH_D \geq \sqrt{2}$.

1. Fall: $H_A = H_D$

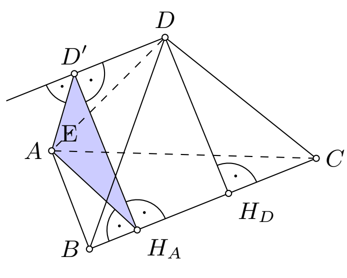


In diesem Fall steht die Ebene durch A, H_A und D senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, in denen die Seitenflächen ABC und BCD liegen. Folglich ist der Innenwinkel $\angle AH_AD$ im Dreieck AH_AD zugleich auch der Innenwinkel zwischen diesen Seitenflächen des Tetraeders. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos\angle AH_AD = \frac{AH_A^2 + DH_A^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_A} \qquad \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_A} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD < 180°$ als $\angle AH_AD = 90°$. w. z. b. w.

2. Fall: $H_A \neq H_D$



In diesem Fall sei E die durch H_A gehende Ebene senkrecht zur Geraden durch B und C. Der Fußpunktes des Lotes von D auf E sei D'.
Dann liegt die Höhe AH_A in E, und die Strecke $D'H_A$, die folglich ebenfalls in E liegt, steht somit auch auf BC senkrecht. Der Innenwinkel $\angle AH_AD'$ im Dreieck AH_AD' ist daher zugleich auch der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD im Tetraeder.

Die Höhe DH_D ist zu E parallel. Wegen $DD' \perp E$, $H_AH_D \perp E$ gilt $DD' \parallel H_AH_D$ und wegen $DH_D \perp BC$ auch $DH_D \parallel D'H_A$. Folglich ist $DD'H_AH_D$ ein ebenes Rechteck, und es gilt $D'H_A = DH_D$.

Das Dreieck $AD'D$ ist rechtwinklig, also ist seine Hypotenuse AD länger als AD'. Damit folgt nach dem Kosinussatz

$$\cos\angle AH_AD' = \frac{AH_A^2 + D'H_A^2 - AD'^2}{2AH_A \cdot D'H_A} > \frac{AH_A^2 + DH_D^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_D} \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_D} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD' < 180°$ als $\angle AH_AD' < 90°$. w. z. b. w.

Aufgabe 251244:
Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$, $A_2A_3 = d$, $A_2A_4 = e$, $A_3A_4 = f$.
Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so dass die Summe s der Quadrate des Abstandes des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt.
Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

Lösung von Nuramon:
Der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 |P-A_i|^2 &= \sum_{i=1}^4 \left(|P|^2 - 2\langle P,A_i\rangle + |A_i|^2\right)\\
&= 4|P|^2 - 2\left\langle P, \sum_{i=1}^4 A_i\right\rangle + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= |2P|^2 - 2\left\langle 2P, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right\rangle + \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= \left|2P - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2
\end{aligned}$$

wird offenbar genau dann minimal, wenn $P = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 A_i$ der Schwerpunkt des Tetraeders ist. Der gesuchte minimale Wert s ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
s &= -\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= -\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 4} \langle A_i, A_j\rangle\right) + \sum_{i=1}^4 |A_i|^2\\
&= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 4} \langle A_i, A_j\rangle\\
&= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^4 |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le 4} \frac{1}{2}\left(|A_i|^2 + |A_j|^2 - |A_i - A_j|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le 4} |A_i - A_j|^2\\
&= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 261243:
Es seien $k_1, ..., k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien

beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, dass sie einander durchdringen oder berühren.
Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, dass je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und dass die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27}V$ hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Kugel k_i habe den Mittelpunkt $M-i$, den Radius r_i und das Volumen V_i $(i = 1,...,n)$. Man definiere z. B. folgendermaßen eine Auswahl aus den k_i:
Unter den Kugeln k_i gibt es eine mit maximalem Radius. In einem ersten Auswahlschritt sei eine solche Kugel gewählt: o. B. d. A. sei sie k_1. Man bilde die Kugel K_1 um M_1 mit dem Radius $3r_1$. Sind alle k_i in K_1 enthalten, so sei die Auswahl beendet.

Andernfalls gibt es unter allen denjenigen Kugeln k_j, die nicht in K_1 enthalten sind, eine mit maximalem Radius. In zweiten Auswahlschritt sei eine solche gewählt: o. B. d. A. sei sie k_2. Man bilde die Kugel K_2 um M_2 mit dem Radius $3r_2$. Sind alle k_i in der Vereinigungsmenge $K_1 \cup K_2$ enthalten, so sei die Auswahl beendet.

In dieser Weise wird fortgesetzt: Im m-ten Auswahlschritt wird unter allen denjenigen Kugeln k_i, die nicht in der zuvor gebildeten Menge $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ enthalten sind, eine mit maximalem Radius gewählt; o. B. d. A. sei sie k_m. Man bilde die Kugel K_m um M_m mit dem Radius $3r_m$. Sind alle k_i in $K_1 \cup ... \cup K_{m-1} \cup K_m$ enthalten, so sei die Auswahl beendet. Dieses Ende des Auswahlverfahrens muss einmal eintreten (o. B. d. A. mit dem m-ten Auswahlschritt), denn wegen

$$k_i \subset K_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

ist nach jedem Auswahlschritt mindestens eine Kugel mehr als beim vorangehenden Auswahlschritt in der betreffenden Menge K_1 bzw. ... bzw. $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ bzw. $K_1 \cup ... \cup K_m$ enthalten, steht also nicht mehr für einen nächsten Auswahlschritt zur Verfügung.

Dass eine so definierte Auswahl die geforderten Bedingungen erfüllt, kann folgendermaßen bewiesen werden:
Für alle i mit $1 \leq i, i+1 \leq m$ gilt wegen der Maximalität von r_i, die bei der Auswahl von k_i zu beachten war, $r_i \geq r_{i+1}$. Folglich ist $r_i \geq r_j \quad (2)$ für alle $1 \leq i < j \leq m$.
Ferner ist für $1 \leq i < j \leq m$ stets k_1 nicht in $K_1 \cup ... \cup K_{j-1}$, also erst recht nicht in K_i enthalten. Somit gibt es einen Punkt P in k_j mit $M_iP > 3r_1$.
Nach der Dreiecksungleichung folgt hieraus und aus (2), dass

$$M_iM_j \geq M_iP - M_jP > 3r_i - r_j \geq r_i + r_j$$

gilt. Damit ist gezeigt, dass k_i und k_j keinen gemeinsamen Punkt haben; denn wäre X ein solcher, so folge wieder aus der Dreiecksungleichung

$$M_iM_j \leq M_iX + M_jX \leq r_i + r_j$$

Für das Volumen U von $k_1 \cup ... \cup k_m$ gilt somit

$$V_1 + ... + V_m = U \tag{3}$$

Für das Volumen Q_i von K_i gilt wegen des Radius $3r_i$ von K_i einerseits $Q_i = 27V_i$, also

$$V_i = \frac{1}{27}Q_i \tag{4}$$

$(i = 1,...,m)$, andererseits wegen (1) und nach Definition der Auswahlbedingung bei k_m

$$K_1 \cup ... \cup K_m \geq k_1 \cup ... \cup k_m \tag{5}$$

Ist nun Q das Volumen von $K_1 \cup ... \cup K_m$, so gilt einerseits

$$Q_1 + ... + Q_m \geq Q \qquad (6)$$

andererseits wegen (5) $Q \geq V$ (7). Aus (3), (4), (6), (7) erhält man die nachzuweisende Ungleichung $U \geq \frac{1}{27}V$.

Aufgabe 281245:
Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, das der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt.
Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'.
Der Radius der Umkugel sei r.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{3}r$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder $ABCD$, $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ mit V, V_1, V_2, V_3 bzw. V_4, so gilt

$$V_i > 0 \quad (i = 1,2,3,4) \qquad \text{und} \qquad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V \qquad (1)$$

Sind h_1, h_2, h_3 bzw. h_4 die Längen der Höhen des Tetraeders $ABCD$ bezüglich der Grundflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC und h'_1, h'_2, h'_3 bzw. h'_4 die Längen der Höhen der Tetraeder $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h'_1}{h_i} \quad (i = 1,2,3,4) \qquad (2)$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B, C, D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A, M, A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{h'_1}{h_1}, \quad ..., \quad \frac{MD'}{DD'} = \frac{h'_4}{h_4} \qquad (3)$$

die übrigen ergeben sich analog für B, C bzw. D statt A. Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$$

wegen $MA = MB = MC = MD = r$ also

$$\frac{AA' - r}{AA'} + \frac{BB' - r}{BB'} + \frac{CC' - r}{CC'} + \frac{DD' - r}{DD'} = 1$$

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'} = \frac{3}{r} \qquad (4)$$

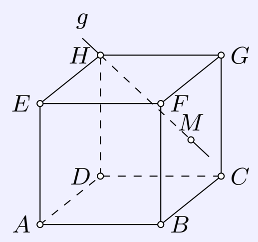
Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $AA', ..., DD'$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} \leq \frac{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}}{4}$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} = \frac{16}{3}r$$

Aufgabe 291245:



Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in der Abbildung mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet.
Die Ebene, in der A, B, C, D liegen sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.
Man beweise, dass es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt.
Man ermittle diese kleinste Länge.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $B(0{,}0{,}0)$, $C(a{,}0{,}0,)$, $A(0{,}a{,}0)$, $F(0{,}0{,}a)$.
Dann haben M, H die Koordinaten $(\frac{a}{2}{,}0{,}\frac{a}{2})$ bzw. $(a{,}a{,}a)$ und g ist die Menge aller Punkte

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{at}{2}; at; \frac{a}{2} + \frac{at}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Mit $s = \frac{1+t}{2}$ besteht g aus der Menge aller Punkte $(as, a(2s-1), as)$, $s \in \mathbb{R}$. Jeder Punkt aus ε_1 kann durch $(x{,}y{,}0)$ und jeder Punkt aus ε_2 durch $(v{,}0{,}w)$ beschrieben werden. Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten

$$\left(\frac{x+v}{2}; \frac{y}{2}; \frac{w}{2}\right)$$

und liegt genau dann auf g, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{x+v}{2} = as; \qquad \frac{y}{2} = a(2s-1); \qquad \frac{w}{2} = as$$

Dies gilt genau dann, wenn $x+v = w$, $y = 2w-2a$ ist. Das Quadrat q der zu betrachtenden Streckenlänge ist

$$q = (x-v)^2 + y^2 + w^2 = (w-2v)^2 + (2w-wa)^2 + w^2 = (w-2v)^2 + \frac{(5w-4a)^2 \cdot 4a^2}{5}$$

Es nimmt seinen kleinsten Wert genau dann an, wenn $w - 2v = 0$ und $5w - 4a = 0$ ist, also wenn gilt

$$w = \frac{4a}{5}; \qquad v = x = \frac{2a}{5}; \qquad y = \frac{-2a}{5}; \qquad s = \frac{2}{5}$$

Der kleinste Wert von q ist damit gleich $\frac{4a^2}{5}$, die gesuchte kleinste Länge beträgt mithin $2a\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Aufgabe 331243:
Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Ferner seien A', B', C', D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.
Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Die Punkte A', B', C', D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Die Größe der Pyramide ist für diese Aufgabe belanglos. Wir können die vier Kanten der Pyramide auch durch 4 Geraden darstellen, die durch den Ursprung gehen, wenn man die Spitze der Pyramide in selbigen legt. Denkt man sich die Grundfläche der Pyramide als senkrecht zur z-Achse, dann lauten die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D':

$$\vec{a} = \frac{a}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{b}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \frac{c}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \frac{d}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

q und h sind Größen der gedachten Pyramide (h die Höhe und q eine halbe Grundflächenseite), aber sie sind für die Berechnung ohne Belang. Die Punkte liegen in einer Ebene, wenn das Spatprodukt dreier Differenzen dieser Vektoren null ergibt, also z. B.:

$$(\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a},\vec{d}-\vec{a}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} q(b-a) & -q(c+a) & -q(d+a) \\ -q(b+a) & -q(c+a) & q(d-a) \\ h(b-a) & h(c-a) & h(d-a) \end{vmatrix} = 0$$

Nun folgt eine reine Fleißaufgabe:

$$-(b-a)(c+a)(d-a)-(c+a)(d-a)(b-a)+(d+a)(b+a)(c-a)-(d+a)(c+a)(b-a)$$
$$-(b-a)(d-a)(c-a)-(c+a)(b+a)(d-a)=0$$

$$(b-a)(-cd+ac-ad+a^2-cd-ad+ac+a^2)+(d+a)(ac+bc-ab-a^2-bc-ab+ac+a^2)$$
$$+(d-a)(-bc+ac+ab-a^2-bc-ab-ac-a^2)=0$$

$$(b-a)(-2cd+2ac-2ad+2a^2)+(d+a)(2ac-2ab)+(d-a)(-2bc-2a^2)=0$$

$$-bcd+abc-abd+a^2b+acd-a^2c+a^2d-a^3+acd-abd+a^2c-a^2b-bcd-a^2d+abc+a^3=0$$

$$-2bcd+2abc-2abd+2acd=0$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=0$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$$

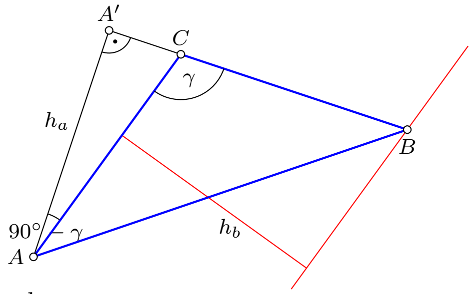
q. e. d.

II.V Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V01110:
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\gamma = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

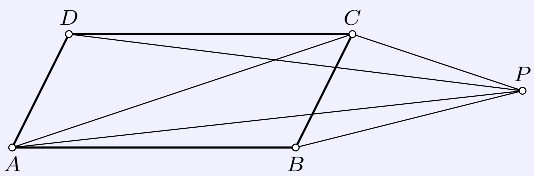
Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion:
1. Zeichne ein Dreieck $AA'C$ mit $AA' = h_a$, $\angle CAA' = 90° - \gamma$ und $\angle AA'C = 90°$.
2. Verlängere die Strecke $A'C$ über C hinaus.
3. Führe eine Parallelverschiebung von AC um die Länge h_b durch.
4. Der Schnittpunkt der verschobenen Geraden und der Verlängerung von $A'C$ ist der Punkt B.

Analyse:
1. Das Dreieck ABC ist ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\gamma > 90°$. Damit liegt der Höhenfußpunkt A' der Höhe h_a außerhalb der Strecke BC.
Das Dreieck ACA' ist nach Kongruenzsatz sww direkt konstruierbar, wobei der Winkel bei A nach dem Außenwinkelsatz gleich $\gamma - 90°$ ist. (siehe Abbildung)
2. Der Punkt B liegt auf der Verlängerung von CA' und einer Parallelen zu AC mit dem Abstand h_b zu AC.

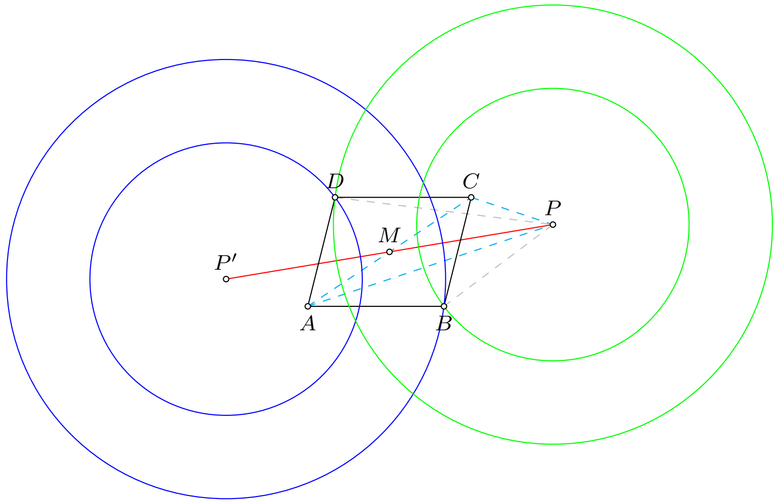
Aufgabe V01119:
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Lösung von Steffen Polster:
Das Dreieck ACP ist mit den bekannten Strecken AC, AP und CP unmittelbar konstruierbar (blaue gestrichelte Linien). Um das Parallelogramm zu konstruieren, spiegelt man zunächst den Punkt P am Mittelpunkt M der Geraden AC und erhält so den Punkt P'.
Nun schlägt man Kreise mit den Radien PB und PC um den Punkt P (grüne Kreise), und tut dasselbe um den Punkt P' (blaue Kreise).
Die Schnittpunkte des großen blauen Kreises mit dem kleinen grünen Kreis ergeben Kandidaten für den Eckpunkt B des Parallelogramms, während die Schnittpunkte des kleinen blauen Kreises mit dem großen grünen Kreis Kandidaten für den Eckunkt D darstellen.

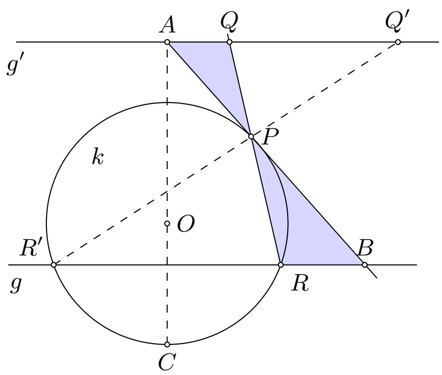
In der Darstellung sind die Kandidaten ausgewählt, die eine Nummerierung der Ecken entgegen des Uhrzeigersinns erlauben.
Zu zeigen bleibt, dass $ABCD$ tatsächlich ein Parallelogramm ist.



Die Punkte B und D sind punktsymmetrisch zu M, da sie als Schnittpunkte von Kreisen mit gleichen Radien und punktsymmetrischen Mittelpunkten konstruiert wurden. Damit sind die Längen MD und MB gleich.
Wegen der Punktsymmetrie von B und D geht deren Verbindungslinie durch M.
Die Diagonalen AC und BD treffen sich also in M und M halbiert beide Diagonalen. Damit ist nach einem bekannten Kriterium $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 021115:
Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.
a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, dass $PR = PQ$ ist!
b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Lösung von Eckard Specht:



Sei k der gegebene Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sowie A auf g derjenige Punkt mit kürzestem Abstand zu O.
a) Konstruktion: Durch Verdoppelung der Strecke AP entsteht Punkt B. Die Parallele $g' \parallel g$ durch B schneide k in den Punkten R bzw. R'. Die Geraden PR und PR' schneiden g in den Punkten Q bzw. Q'. Die gesuchten Sekanten sind dann RPQ bzw. $R'PQ'$.

Beweis: Nach obiger Konstruktion und Kongruenzsatz WSW ($\angle QAP = \angle RBP$ Wechselwinkel, $AP = PB$ sowie $\angle APQ = \angle BPR$ Scheitelwinkel) gilt $\triangle APQ \cong \triangle BPR$, woraus die Forderung $PR = PQ$ sofort folgt.
Ebenso folgern wir aus $\triangle APQ' \cong \triangle BPR'$ die Gleichheit $PR' = PQ'$. $\square$

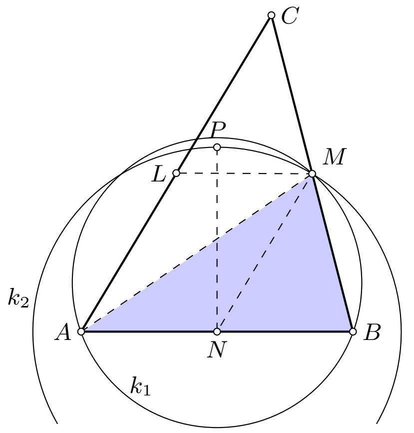
b) Offensichtlich schlägt die Konstruktion fehl, wenn g' keine Schnittpunkte mit k hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der senkrechte Abstand von P zu g größer als die Hälfte des Abstandes $AC = a+r = 8$ cm, also größer als 4 cm ist. Dabei ist C der Schnittpunkt der Geraden AO mit k, der den größeren Abstand zu g hat.

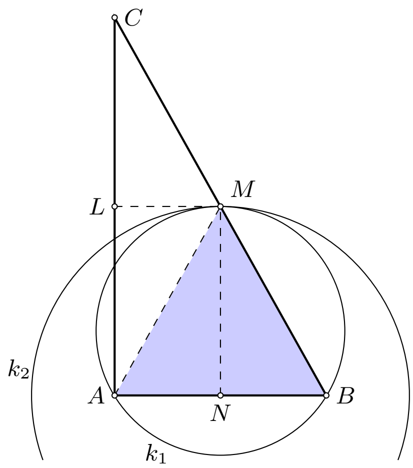
Aufgabe 011214:
Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\angle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.
Man beweise, dass die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b$$

ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

Lösung von Eckard Specht:





I. Konstruktion:
(linkes Bild) Das Hilfsdreieck AMB kann aus den gegebenen Stücken konstruiert werden, denn Punkt M liegt auf dem Kreis k_1, der über der Sehne $AB = c$ derjenige geometrische Ort aller Punkte ist, für die $\angle BMA = \omega$ gilt.
Sei ferner LMN das Seitenmittendreieck von $\triangle ABC$. Dann ist $ALMN$ nach den Strahlensätzen ein Parallelogramm und somit $AL = MN = \frac{b}{2}$, d. h., ein zweiter geometrischer Ort für M ist der Kreis k_2 mit dem Radius $\frac{b}{2}$ um N.

II. Beweis:
Wegen $\omega < 90°$ muss $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$, also $c < b$ gelten, da in den Dreiecken AMC und AMB dem größeren Winkel (hier $\angle CMA > \angle BMA$) auch die größere Seite gegenüberliegt.
Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn beide Kreise Punkte gemeinsam haben.
Gewöhnlich sind dies zwei Lösungen, die auch zu zwei nichtkongruenten Dreiecken ABC führen. Berühren sich beide Kreise von innen, gibt es nur eine Lösung (Bild rechts).
Hier wird ω vom Radius MN halbiert und wegen $MN \parallel AC$ sowie $MN \perp AB$ ist

$$\tan\omega = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{c}{b}$$

und mithin $c = b\tan\frac{\omega}{2}$. In allen anderen Fällen kann man in N eine Senkrechte auf AB errichten, die k_1 in P schneidet. Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\omega = \angle BMA = \angle BPA$ und

$$MN = \frac{b}{2} < x \equiv PN = \frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2}$$

Also ist hier $b \tan \frac{\omega}{2} < c$ und somit allgemein

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

Umgekehrt folgt aus (1), dass k_1 und k_2 Schnittpunkte haben und die Aufgabe lösbar ist.

Aufgabe 031211:
Von den Punkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man misst folgende Winkel:

$$\angle \mathrm{DAB} = 80°, \quad \angle \mathrm{CAB} = 30°, \quad \angle \mathrm{ABC} = 60°, \quad \angle \mathrm{ABD} = 20°.$$

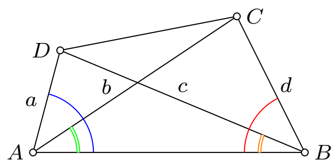
Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmaßige Berechnung wird nicht verlangt.)

Lösung von Henning Thielemann:
Konstruktion:

1. Zeichne beliebige Strecke AB
2. Trage zur gleichen Seite von AB folgende Winkel ab: Am Punkt A die Winkel der Größen 80° und 30° und am Punkt B die Winkel der Größen 20° und 60°. Bezeichne die entstehenden Schenkel der Reihe nach mit a, b, c, d.



3. Den Schnittpunkt von a und c nenne D und den von b und d nenne C.
4. Die gesuchte Länge ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cdot 2km$. Diese Größe kann man auch mit Lineal und Dreieck unter Verwendung des Strahlensatzes konstruieren.

Berechnung:
Sinussatz im Dreieck ABD:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 80°}{\sin 80°} = 1$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{1}{2}$$

Kosinussatz im Dreieck BCD bezüglich $\angle CBD$.

$$\begin{aligned}
\overline{DC}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{DB} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \angle \mathrm{CBD} \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \cos 40° = \overline{AB}^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \cos 40°\right) \\
\overline{DC} &= \overline{AB} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°} \\
\overline{AB} &= \frac{\overline{DC}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°}} = \frac{4km}{\sqrt{5 - 4\cos 40°}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 071214:
Zur Verfügung stehen eine Holzkugel, ein Zirkel, mit dem man sowohl auf einer (genügend groß gedachten) ebenen Fläche als auch auf der Kugeloberfläche zeichnen kann, Bleistift, ein starr geradliniges (ohne Längenskale) Lineal und (ebenes) Zeichenpapier.

Man konstruiere den Radius der Holzkugel!

Lösung von Felix Kaschura:
Man kann die Kugel zunächst auf einem Blatt (auf dem der Radius zu konstruieren ist) positionieren.

Danach kann man das Lineal senkrecht zum Boden an die Kugel heranstellen (ein Lineal hat rechte Winkel) und am unteren Ende des Lineals mit dem Bleistift eine Markierung machen. Das wiederholt man noch 2 mal mit anderen Punkten an der Kugel.

Nun hat man auf dem Papier 3 Punkte, die auf dem größten in die Kugel passenden Kreis liegen. Verbindet man die 3 Punkte, erhält man ein Dreieck, bei dem man wiederum den Umkreis (selber Radius wie Kugel) konstruieren kann.

Man verbindet also die 3 Punkte mit dem Lineal und konstruiert mit dem Zirkel die 3 Mittelsenkrechten, deren Schnittpunkt der Umkreismittelpunkt ist. Man nimmt nun diesen Mittelpunkt und einen Eckpunkt des Dreiecks in die Zirkelspanne und kann sie auf eine Gerade abtragen und erhält so den Radius.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, den Zirkel an einen beliebigen Punkt der Kugel zu halten und mit dem anderen Zirkelende so lange auf der Kugel entlangwandert, bis dieses gerade noch so an der Kugel anliegt und bei weiterem „Wandern“ in beliebiger Richtung die Kugeloberfläche verlassen würde. Dann hat man den Kugeldurchmesser in der Zirkelspanne.

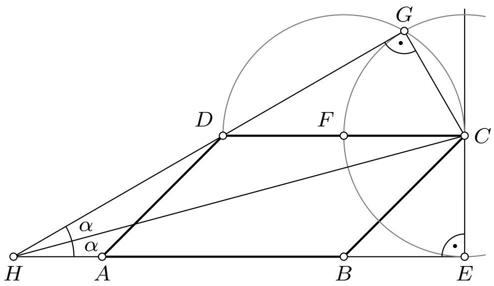
Diese beiden Verfahren sind recht ungenau. Man kann auch mit folgendem Verfahren vorankommen, indem die Kugel als Kreis auf die Papierfläche projiziert werden soll:

1. Man wählt einen beliebigen Punkt B auf der Kugeloberfläche
2. Es wird ein Kreis k um B auf der Kugeloberfläche gezeichnet. Die Zirkelspanne sei dabei r_1. Achtung: der gezeichnete Kreis hat nicht den Radius r_1!
3. Auf dem Blatt wird eine waagerechte Linie w gezeichnet, auf der ein Punkt B^* festgelegt wird. Um B^* wird ein Kreis mit dem Radius r_1 gezeichnet.
4. Nun wird auf dem Kreis k auf der Kugel ein beliebiger Punkt A gewählt. Den Durchmesser d_k dieses Kreises kann man mit dem Zirkel ermitteln, indem man ihn in A sticht und den maximalen Abstand sucht.
5. Mittels einer Grundkonstruktion auf dem Papier kann d_k halbiert werden.
6. Auf w wird eine Senkrechte konstruiert und von dem Schnittpunkt $\frac{d_k}{2}$ jeweils nach unten und nach oben abgetragen. Es entsteht eine Strecke, die so lange auf w parallelverschoben wird, bis sie den Kreis mit dem Radius r_1 trifft. Einer dieser Schnittpunkte sei A^* genannt.
7. Abschließend wird die Mittelsenkrechte von A^* und B^* konstruiert. Ihr Schnittpunkt mit w heiße M^*. Die Strecke $\overline{B^*M^*}$ bzw. $\overline{A^*M^*}$ entspricht nun dem Radius der Kugel.

II Runde 2

Aufgabe V11124:
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

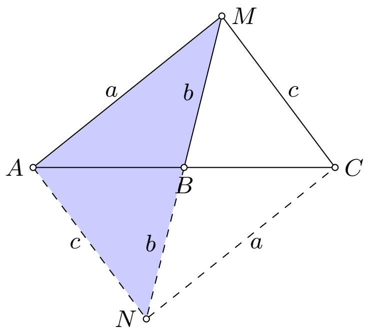
Lösung von MontyPythagoras:
Den gesuchten Punkt H konstruiert man wie folgt:
1. Zeichne eine Senkrechte von C auf die Gerade AB. Der Schnittpunkt ist E.
2. Zeichne einen Kreis um den Mittelpunkt C durch den Punkt E.
3. Konstruiere den Mittelpunkt F der Strecke CD.
4. Zeichne einen Halbkreis um den Punkt F vom Punkt C zum Punkt D. Der Schnittpunkt der Kreise ist G.
5. Zeichne eine Gerade durch die Punkte D und G. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Gerade AB ist der gesuchte Punkt H.



Begründung:
Die Gerade HC muss die Winkelhalbierende der Geraden HE und HG sein. Das ist der Fall, weil die Dreiecke HEC und HCG kongruent sind, da sie in G und E einen rechten Winkel aufweisen, die Seite HC gemeinsam haben und eine weitere Seite (CG bzw. CE) gleich lang ist (SSW). Damit der Winkel $\angle DGC$ rechtwinklig ist, wurde wegen des Satzes von Thales der Kreis um den Mittelpunkt F mit dem Kreis um C geschnitten.

Aufgabe 011124:
Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, dass ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $AB = BC$ ist.
Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!
Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

Lösung von Eckard Specht:
I. Analyse:
Betrachten wir das Dreieck AMC, so ist MB wegen $AB = BC$ eine der Seitenhalbierenden. Es gilt also, ein Dreieck aus zwei Seiten und der eingeschlossenen Seitenhalbierenden zu konstruieren. Dazu ergänzen wir AMC zu einem Parallelogramm $AMCN$, in welchem sich die Diagonalen AC und MN bekanntermaßen stets halbieren.
Das Teildreieck AMN kann somit aus den gegebenen Stücken hergestellt werden.



II. Konstruktionsbeschreibung:
Wir konstruieren das Dreieck AMN aus den Seitenlängen a, c und $2b$ nach Kongruenzsatz SSS. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist dann B und AB verdoppelt liefert Punkt C.

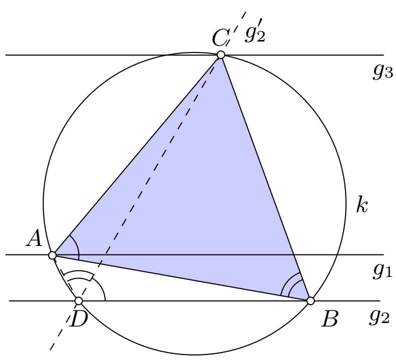
III. Beweis:
Nach obiger Konstruktion ist AMN ein Dreieck, in dem $AM = a, AN = c$ und $MB = BN = b$ gilt sowie AB eine Seitenhalbierende ist. Da C durch Verdopplung von AB entsteht, gilt die Kongruenz $\triangle ABN \cong \triangle CBM$ (SWS), d. h. $AN = MC = c$. Die Punkte A, B und C haben damit die geforderten Abstände von M.

IV. Konstruktion:
Das Dreieck AMN existiert genau dann, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: $a + c > 2b$ und $c + 2b > a$. Das führt auf die gesuchten Bedingungen für die Länge b:

$$\frac{1}{2}(a-c) < b < \frac{1}{2}(a+c)$$

Aufgabe 011224:
Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen! Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Eckard Specht:



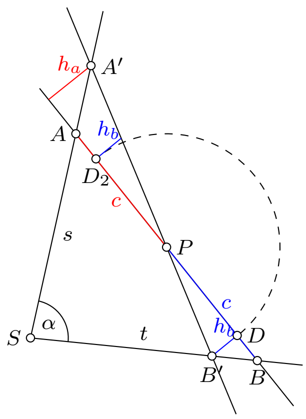
Analysis und Konstruktion:
ABC sei das gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten auf den parallelen Geraden g_1, g_2 und g_3. Da $\triangle ABC$ längs der Parallelen beliebig verschoben werden kann, dürfen wir eine Ecke, etwa A auf g_1, nach Gutdünken auswählen.
Drehen wir nun $\triangle ABC$ um A um $60°$ und nimmt bei dieser Drehung Ecke B die Gerade g_2 mit, so gelangt AB in die Lage AC und g_2 nach $g'2$. Eckpunkt C wird demnach durch g_3 und die um $60°$ gedrehte Gerade $g'2$ bestimmt. Den dritten Eckpunkt B finden wir als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A und

Radius AC mit der Geraden g_2.

Alternative Konstruktion:
Wir wählen einen beliebigen Punkt D auf einer der äußeren Geraden, etwa g_2, und tragen hieran die Winkel 60° und 120° ab. Die Schnittpunkte der freien Schenkel mit g_3 und g_1 seien C bzw. A. Der zweite Schnittpunkt des Umkreises k von $\triangle DCA$ mit g_2 sei B. Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte gleichseitige Dreieck.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $\angle BDC = \angle CDA = 60°$ im Sehnenviereck $BCAD$. Ferner ist aufgrund des Peripheriewinkelsatzes $\angle BDC = \angle BAC = 60°$ und $\angle CDA = \angle CBA = 60°$.
Das Dreieck ABC hat somit zwei Innenwinkel von 60°, also hat auch der dritte Innenwinkel diese Größe. Mithin ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe 181223:
Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0° < \alpha < 180°$ gilt.
Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels.
Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t. Man beweise, dass es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

Lösung von cyrix:



Damit das Dreieck SAB einen minimalen Flächeninhalt hat, ist die Gerade g so zu legen, dass der Punkt P den Mittelpunkt der Strecke AB darstellt.

Beweis:
In obiger Zeichnung liegen A und B so, dass P der Mittelpunkt der Strecke AB ist. A' und B' seien beliebige Punkte, wobei natürlich voraussetzungsgemäß P auch auf der Strecke $A'B'$ liegen muss.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $SA'B'$ lässt sich aus dem Flächeninhalt des Dreiecks SAB berechnen, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks APA' addiert und den von BPB' subtrahiert. Der Flächeninhalt von SAB ist dann minimal, wenn der Flächeninhalt von APA' größer ist als der von BPB'.

Das ist auch tatsächlich der Fall. Da $AP = PB = c$ ist, haben die beiden Dreiecke APA' und BPB' eine gleichlange Grundseite, aber es gilt $h_A > h_B$, wie man der Zeichnung leicht entnehmen kann.

Konstruktion der Geraden:

Man trage auf dem Strahl SP von S die Streckenlänge $2|SP|$ ab und erhalte den Verdopplungspunkt V von SP. Nun zeichne man die Parallelen zu s bzw. t durch V und erhalte die Schnittpunkte B bzw. A mit t bzw. s. Nach Konstruktion ist nun das Viereck $SAVB$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen SV und AB sich gegenseitig halbieren. Da der Mittelpunkt von SV nach Konstruktion P ist, ist P auch Mittelpunkt der so erhaltenen Strecke AB.

III Runde 3

Aufgabe 011135:
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Steffen Weber:
I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

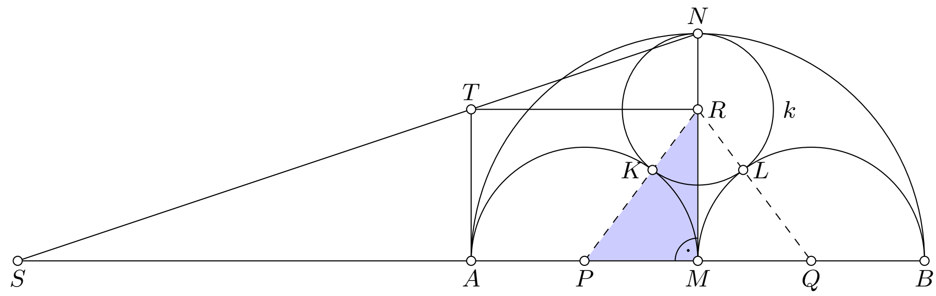
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d. h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



Aufgabe 011234:
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Steffen Weber:
I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

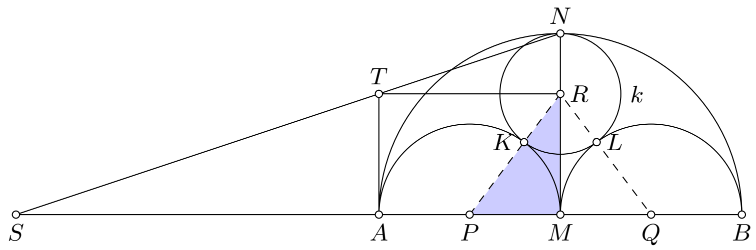
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d. h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:

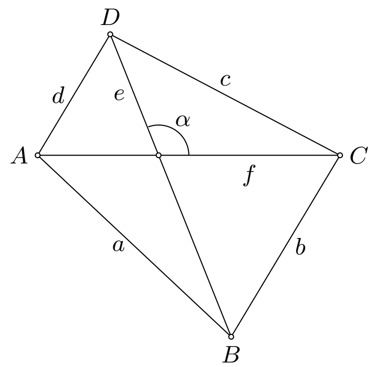


Aufgabe 021232:
Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Lösung von Manuela Kugel:
Grundsätzlich sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.

Alle weiteren Fälle lassen sich auf diese beiden zurückführen. Seien also a und b die gegebenen Seiten und e und f die gegebenen Diagonalen sowie α der gegebene Winkel zwischen den Diagonalen.
Wenn nun in der folgenden Beschreibung die Lage von α angegeben ist, so müssen die Konstruktionsbeschreibungen ebenfalls für den Gegenwinkel $\beta = 180° - \alpha$ gelten, da nicht angegeben ist, welcher Winkel der Schnittwinkel zwischen e und f sei.
Ebenso müssen e und f gedanklich austauschbar sein genau so wie a und b.



I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:

a) Konstruktion des Dreiecks ABC aus a, b, f.
b) Konstruktion des Winkels α an f in einem beliebigen Punkt, es entsteht eine Gerade e^*.
c) Parallelverschiebung von e^* so, dass die Gerade durch B verläuft, es entsteht eine Gerade e^{**}.
d) Abtragen der Strecke e in B auf der Geraden e^{**} so, dass der entstehende Punkt D in der bzgl. AC anderen Halbebene als B liegt.
Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

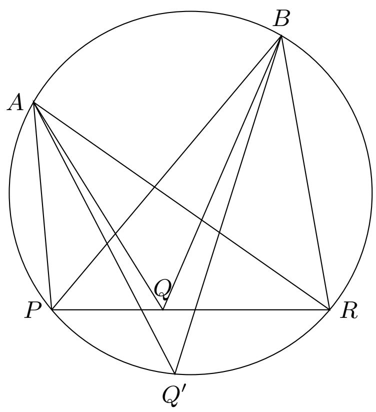
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:
a) Konstruktion eines Dreiecks BED aus $BD = e$, $DE = f$ und dem Winkel α zwischen den beiden Seiten.

b) Konstruktion des Dreiecks BCE aus $BC = b, CE = a$ und der vorhin konstruierten Strecke BE.
c) Wie im 1. Fall wird nun auf e der Winkel α abgetragen und die entstehende Gerade so parallel verschoben, dass sie durch C geht. Auf der neu entstandenen Gerade wird f abgetragen, es entsteht A.
Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

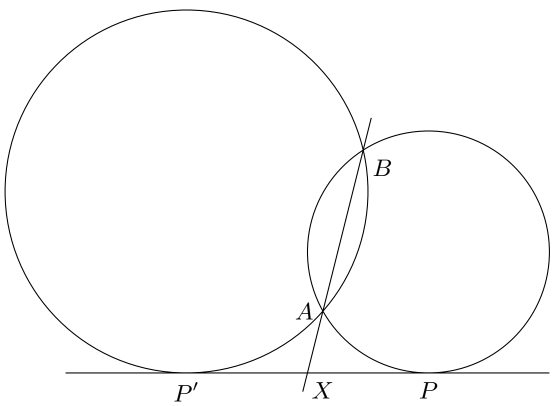
Aufgabe 041233:
Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.
Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d. h. für den $\angle APB \geq \angle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Lösung von Rainer Müller:
Auch wenn es in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wird, können wir annehmen, dass A und B verschieden sind, denn sonst ist $\angle APB = 0$ für alle $P \in g$ und die Aufgabe sinnlos.
Wenn P auf der Geraden AB liegt, dann ist $\angle APB = 0$, was nicht maximal ist. Also liegt der gesuchte Punkt nicht auf AB, so dass es einen eindeutigen Kreis k durch A, B und P gibt.

Angenommen, k schneidet g in einem weiteren Punkt R wie in der obigen Abbildung. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\angle APB = \angle ARB = \angle AQ'B$, und wegen $\angle BAQ < \angle BAQ'$ und $\angle ABQ < \angle ABQ'$ ist $\angle AQB > \angle AQ'B = \angle APB$, also erfüllt P nicht die verlangte Bedingung.



Der gesuchte Punkt P ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass der Kreis k durch A, B und P die Gerade g in P berührt. Dieser Sonderfall des Apollonischen Kreisproblems hat i.A. zwei Lösungen. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel.



Speziell zu behandeln ist der Fall, dass AB parallel zu g ist.

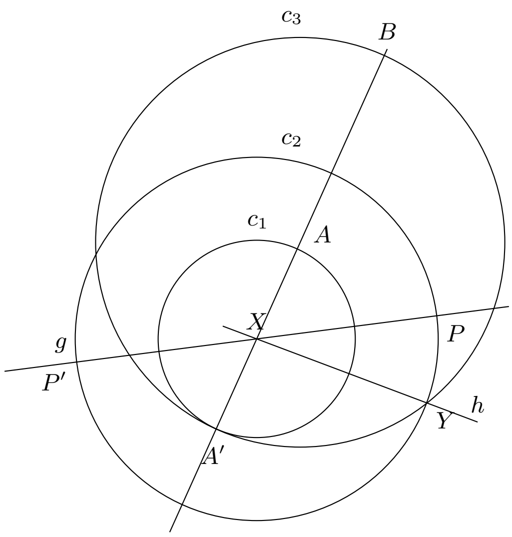
Dann kann nur ein A und B enthaltender Kreis g berühren, der Berührungspunkt P ist wegen der Symmetrie der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit g.
Im folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, dass AB nicht parallel zu g ist, so dass ein eindeutiger Schnittpunkt X von AB und g existiert. Da A und B nach Voraussetzung auf der gleichen Seite von g liegen, liegt X außerhalb jedes A und B enthaltenden Kreises k (wie in obiger Abbildung).
Da g eine Tangente an k im gesuchten Punkt P sein soll und X enthält, muss $XA \cdot XB = XP^2$ gelten (allgemeiner Satz über Sehnen und Tangenten).
Der gesuchte Punkt P liegt demnach im berechenbaren Abstand $\sqrt{XA \cdot XB}$ von X auf g.

Es gibt zwei solche Punkte P und P', die lokale Maxima des Winkels sind, unter dem AB erscheint. Das globale Maximum liegt in dem Punkt P, für den der Kreis k kleiner ist, also so, dass $\angle PXA < \angle P'XA$.
Im symmetrischen Sonderfall, dass AB senkrecht zu g ist, ist der Winkel in beiden Punkten gleich groß, d. h. es gibt zwei verschiedene Lösungen.
Da wir nun wissen, wie der Punkt P berechnet wird, können wir ihn auch wie folgt konstruieren. Die Abbildung zeigt die wesentlichen Konstruktionsschritte, ein paar Hilfskonstruktionen wurden zur Übersichtlichkeit weggelassen.

1. Schneide die Gerade AB mit g, der Schnittpunkt sei X (der Fall, dass AB parallel zu g ist, wurde oben behandelt und hier ausgeschlossen). In der Abbildung liegt A zwischen X und B, was o. B. d. A. angenommen werden kann, aber auch keinen Unterschied macht.

2. Schlage um X einen Kreis c_1 durch A, der von A verschiedene Schnittpunkt mit AB sei A'.

3. Konstruiere den Thaleskreis c_2 durch A' und B. Dazu lege man einen Kreis um A' durch B und einen Kreis um B durch A' und verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Der Schnitt der Verbindungsgeraden mit $A'B$ ist der Kreismittelpunkt (diese beiden Hilfskreise und die Verbindungsgerade sind in der Abbildung nicht gezeichnet).

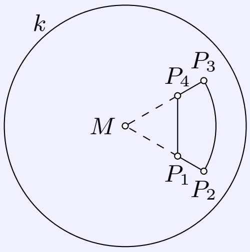


4. Konstruiere die Gerade h, die X enthält und senkrecht zu AB ist. Da $XA = XA'$, ist h die Mittelsenkrechte von A und A', also gehe man vor wie bei der Konstruktion von c_2 (die beiden Hilfskreise sind wieder in der Abbildung weggelassen).

5. Y sei ein Schnittpunkt von h und c_2 (es ist egal, welchen von beiden man verwendet). Da Y auf dem Thaleskreis von A' und B liegt, hat das Dreieck $A'BY$ in Y einen rechten Winkel. Ferner ist h die Höhe des Dreiecks durch Y und X der Fußpunkt dieser Höhe. Nach dem Höhensatz von Euklid gilt
$$XY^2 = XA' \cdot XB = XA \cdot XB \qquad \text{wegen} \quad XA = XA'$$

6. Schlage um X einen Kreis c_3 durch Y. Die Schnittpunkte des Kreises mit g sind die Punkte P und P', denn $XP = XP' = XY = \sqrt{XA \cdot XB}$.

Aufgabe 101232:
In einer Ebene ε liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $MP \cdot MP' = r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:



P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $MP_1 = MP_4 < MP_2 = MP_3$. Der Winkel $\angle P_2MP_3$ sei kleiner als $180°$.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.
Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Lösung von cyrix:
Den Bildpunkt P' eines beliebigen von M verschiedenen Punktes P im Inneren von k erhält man konstruktiv wie folgt:

(a) Zeichne den von M ausgehenden Strahl s durch P.
(b) Errichte in P die Orthogonale auf s und erhalte als einen der beiden Schnittpunkte von dieser mit k den Punkt C, sodass $\angle CPM = 90°$ und $|CM| = r$ gilt.
(c) Man errichte auf der Geraden MC in C die Orthogonale und schneide diese mit s. Der Schnittpunkt heiße P'.

Begründung: Es liegt P' auch auf s und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MP'C$ mit Fußpunkt P der Höhe von C auf die Hypotenuse MP' ist $|MP| \cdot |MP'| = |MC|^2 = r^2$.

Da P_1 bis P_4 alle im Innern des Kreises k liegen, kann man mit der vorgenannten Konstruktion ihre Spiegelpunkte P_1' bis P_4' erhalten. Da alle Punkte P auf dem von M ausgehenden Strahl, die zwischen P_1 und P_2 liegen, auch auf solche P' abgebildet werden, die zwischen P_2' und P_1' auf dem gleichen Strahl liegen, wird die Strecke P_1P_2 auf die Strecke $P_1'P_2'$ abgebildet. Analoges gilt für die Strecke P_3P_4, die auf $P3'P_4'$ abgebildet wird.

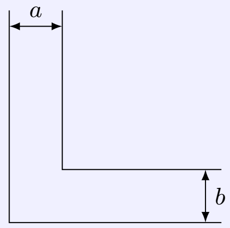
Für alle Punkte P auf dem Kreis um M durch P_2 gilt, dass die Bildpunkte auf einem Kreis um M mit Radius $\frac{r^2}{|MP_2|}$ liegen. Damit geht der Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ in den Bogen $\overset{\frown}{P_2'P_3'}$ im gleichen Winkel über.
Schließlich wird die Gerade durch P_4 und P_1 auf einen Kreis durch P_4', P_1' und M abgebildet; die Strecke P_4P_1 also auf den Bogen $\overset{\frown}{P_4P_1}$ dieses Kreises, der M nicht enthält.

II.VI Weitere Aufgaben

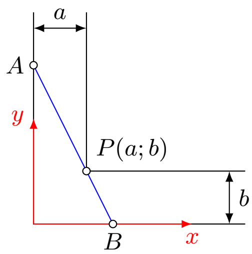
I Runde 1

Aufgabe V01109:

Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden.
Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)



Lösung von Steffen Polster:



Wir führen ein Koordinatensystem derart ein, dass die äußere Ecke im Ursprung liegt und die x- und y-Achse längs der Gänge ausgerichtet sind. (siehe Abbildung)
Durch den Punkt $P(a; b)$ legen wir dann eine lineare Funktion so, dass diese sowohl die positive x-Achse in B, also auch die positive y-Achse in A schneidet. Die minimale Strecke AB ist dann die gesuchte größte Länge der Stange.

Für die Funktion durch A und B ergibt sich (mit $m > 0$)

$$y = -m(x - a) + b$$

Die Punkte haben damit die Koordinaten $A(0; am+b)$ und $B\left(\frac{b}{m} + a\right)$. Die Länge der Stange von A nach B ist dann

$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{m} + a\right)^2 + (am + b)^2} \tag{1}$$

Diese Länge wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Die 1.Ableitung des Radikanden ist

$$d'(m) = \frac{2}{m^2}(am + b)(am^3 - b)$$

Diese Ableitung hat eine Nullstelle für $m = -\frac{b}{a}$, die entfällt da dann A und B zusammenfallen. Die zweite Nullstelle für

$$m = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} \tag{2}$$

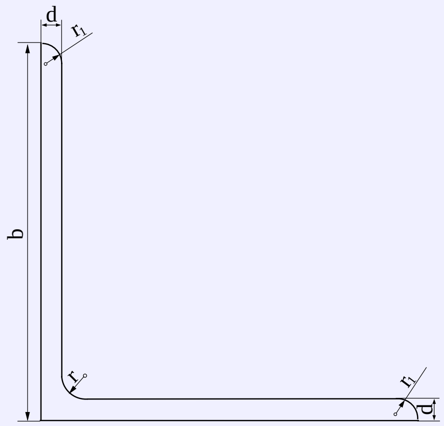
ergibt das gesuchte Minimum, wie die Kontrolle über die 2.Ableitung zeigt. Für die größtmögliche Länge der Stange ergibt sich durch Einsetzen von (2) in (1)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$$

Aufgabe 051211:
Ein Winkelstahl (gleichschenkliger L-Stahl) hat den in der Abbildung angegebenen Querschnitt. Dabei ist $b = 50$ mm , $d = 5$ mm, $r = 2r_1 = 7$ mm.

a) Wie groß ist seine Masse bei einer Länge von 5 m? (Dichte des Stahls $\rho = 7{,}85\frac{g}{cm^3}$)?

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die Rundungen vernachlässigt und annimmt, dass die Querschnittsfläche aus zwei rechteckigen Flächen besteht?

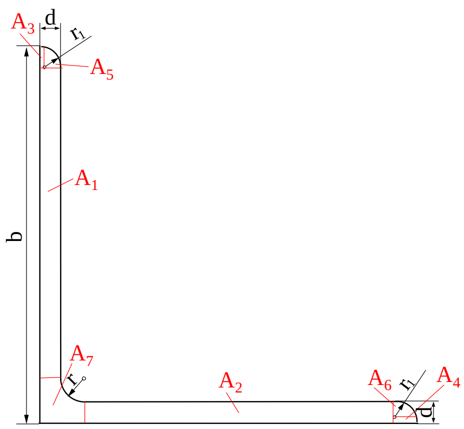


c) Wie groß ist der maximale prozentuale Fehler, der bei der zu b) durchgeführten Näherungsrechnung entsteht, wenn $b = 50$ mm und $r = 7$ mm konstant sind und d zwischen 5 mm und 9 mm liegt?

Lösung von Felix Kaschura:

a) Für die Masse des Körpers benötigt man zuerst das Volumen und dafür den Flächeninhalt vom Querschnitt (da die Länge 5 m bekannt ist). Die Querschnittsfläche setzt sich wie in der Zeichnung ersichtlich aus den Flächeninhalten A_1 bis A_7 zusammen, wobei $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$ und $A_5 = A_6$ gilt. Die Teilflächen ergeben sich wie folgt:

$$A_1 = d \cdot (b - r - r_1 - d) = d \cdot (b - 3r_1 - d) = bd - 3r_1 d - d^2$$
$$A_2 = (d - r_1) \cdot r_1 = r_1 d - r_1^2$$
$$A_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2$$
$$A_7 = (d + r)^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$$



$$A = 2 \cdot (bd - 3r_1 d - d^2) + 2 \cdot (r_1 d - r_1^2) + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2) + d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$$
$$= 2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 = 480{,}258\text{mm}^2 = 4{,}80258\text{cm}^2$$
$$\Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l = 7{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 4{,}80258\text{cm}^2 \cdot 500\text{cm} = 18850\text{g} = 18{,}85\text{kg}$$

b) Den prozentualen Fehler erhält man, indem man den vereinfachten Wert durch den genauen Wert dividiert, 100% multipliziert und die Differenz zu 100% bildet.

Da Länge und Dichte gleich sind und die sich kürzen würden, reicht es aus, mit den Flächeninhalten zu rechnen:

Der vereinfachte Flächeninhalt ergibt sich als $A^* = bd + (b-d)d = 2bd - d^2$. Daraus folgt der Fehler:

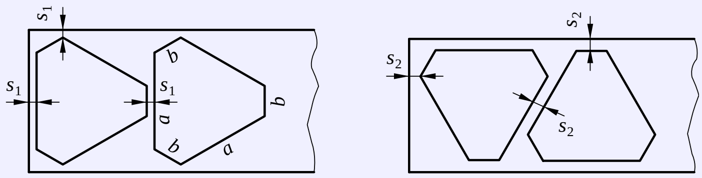
$$\Delta = (1 - \frac{2bd - d^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = (\frac{2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = 1{,}09\%$$

c) In der unter b) gefundenen Formel bleibt der Zähler unabhängig von d. Es muss also lediglich der Nenner untersucht werden. Da b viel größer als d ist, wird der Term $2bd - d^2$ mit größer werdendem d auch größer. Damit wird der Nenner größer und bei konstantem Zähler wird der Bruch kleiner.

Der prozentuale Fehler wird also ebenfalls kleiner. Für Werte von d aus dem Bereich 5 bis 9 mm ist der prozentuale Fehler also bei d= 5 mm am größten mit einem Wert von 1,09%.

II Runde 3

Aufgabe 011232:
Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß, $a = 34$ mm, $b = 8$ mm.)



a) Wie lang und wie breit muss der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, dass die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) $s_1 = 2$ mm betragen muss. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muss nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier $s_2 = 3$ mm.)

Lösung von Eckard Specht:
Da das Werkstück ein Sechseck mit gleich großen Innenwinkeln ist, beträgt jeder Innenwinkel $\frac{1}{6}(6-2) \cdot 180° = 120°$.
Wir berechnen nachfolgend die Länge (in Längsrichtung des Blechstreifens) und Breite (in Querrichtung) eines Werkstücks und daraus die erforderlichen Abmessungen. a) (Bild a) Die Länge beträgt

$$b \cdot \cos(30°) + a \cdot \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = 36{,}373mm$$

für 10000 Werkstücke also 363,730 m zuzüglich 20,002 m für 10001 Abstände s_1. Der Blechstreifen muss somit insgesamt 383,732 m lang sein. Die Breite des Werkstücks ist

$$a + 2b\sin(30°) = a + b = 42mm$$

zusammen mit zwei Abständen s_1 muss der Blechstreifen 46 mm breit sein. Seine Fläche beträgt $383{,}732m \cdot 0{,}046m = 17{,}652m^2$.
Die Fläche eines Werkstücks ist gleich der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a + 2b$ abzüglich der Fläche dreier gleichseitiger Dreiecke der Seitenlänge b, also

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2b)^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 999{,}4mm^2$$

Die 10000 Werkstücke beanspruchen somit eine Fläche von 9,994 m^2, woraus sich der Abfall zu 7,658 m^2 berechnet.

b) (Bild b) Da die Werkstücke jetzt um 90° gedreht werden, ist die Breite gleich der Länge aus a), zusammen mit der doppelten Stegbreite s_2 ergibt sich eine Breite des Blechstreifens von 42,4 mm.

Zur Berechnung der Länge wird zunächst $s_2 = 0$ angenommen. Die Schwerpunkte zweier Werkstücke sind dann

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a + 3b) = 29{,}0mm$$

entfernt. Die gesamte Länge des Blechstreifens ist hier

$$9999 \cdot (29{,}0mm + s_2 \cos(30°)) + 2 \cdot 21{,}0mm + 2s_2 = 315{,}997m$$

der Verbrauch 13,398 m^2 sowie der Abfall 3,404 m^2. Die Materialersparnis beträgt gegenüber a) 24,1 %.

III Runde 4

Aufgabe 131243:
Es seien n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, dass es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, dass dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst wählen wir eine Gerade, die zu keiner der Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 parallel ist und die alle Punkte von M_1 auf der rechten Seite hat. Hierbei sind 'linke Seite' und 'rechte Seite' vereinfachte Bezeichnungen für die beiden Halbebenen, in welche die Gerade die Ebene teilt, und für stetige Bewegungen der Gerade (wie stetige Verschiebungen und Rotationen) soll sich diese Einteilung stetig ändern, d. h. wir springen in unserer Bezeichnung nicht zwischen links und rechts.

Wenn diese Gerade nun nach rechts verschoben wird, so kann die Anzahl der Punkte aus M_1, die sich auf der rechten Seite befinden, nur in diskreten Einerschritten abnehmen (nach Voraussetzung der Aufgabenstellung und Konstruktion der Gerade). Zudem ist, wenn man die Gerade hinreichend weit nach rechts verschoben hat, jeder Punkt von M_1 auf der linken Seite der verschobenen Gerade (so eine Verschiebung existiert aufgrund der Endlichkeit von M_1).

Da M_1 eine gerade Anzahl von Punkten hat, gibt es somit eine Verschiebung der Gerade, für die M_1 halbiert wird, d. h. auf beiden Seiten der Gerade sind jeweils n_1 Punkte aus M_1. Bezeichne diese verschobene Gerade mit g.

Betrachte nun die Verbindungsstrecke eines Punktes P_l der linken und eines Punktes P_r der rechten Seite von g ($P_l, P_r \in M_1$), die mit g von allen derartigen Verbindungsstrecken den kleinsten Winkel α einschließt, wobei der eingeschlossene Winkel als orientierter Winkel zu verstehen ist, der auf der linken Seite von g betrachtet und entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv definiert wird. Drehe g nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Schnittpunkt von P_lP_r mit g.

Wegen der Minimalität von α wird bei dieser Drehung kein weiterer Punkt von M_1 überstrichen, bis schließlich erstmalig die Punkte P_l und P_r auf der gedrehten Gerade g' liegen; nach Voraussetzung der

Aufgabenstellung liegt dann auch kein weiterer Punkt auf g'. Wird g' (um beliebige hinreichend kleine Winkel größer 0) weiter gedreht zu g'', so liegt P_l auf der rechten und P_r auf der linken Seite von g'' (und kein weiterer Punkt von M_1 wird dabei überstrichen), sodass g'' weiterhin M_1 halbiert.

Mit dem oben beschriebenen Rotationsschema lassen sich also Geraden konstruieren, die M_1 halbieren und eine beliebige Orientierung haben, aber nicht parallel zu den (endlich vielen) Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 sind. Insbesondere kann man eine Gerade g''' konstruieren, die M_1 halbiert, zu g parallel ist und alle Punkte aus M_1, die auf der linken Seite von g waren, auf der rechten Seite hat. (g''' entsteht also gewissermaßen aus einer Rotation von g um insgesamt 180°, allerdings um im Allgemeinen wechselnde Drehpunkte)

O. B. d. A. seien nun weniger als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g (falls es genau n_2 Punkte wären, wären wir fertig). Damit sind also mehr als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g'''. Bei dem Rotationsvorgang von g nach g''' nach obigem Schema kann sich die Anzahl der Punkte von M_2, die auf der linken Seite der rotierenden Gerade liegen, nur in diskreten Schritten um 0 oder ± 1 oder ± 2 ändern (betragsmäßig mehr als zwei geht nach Voraussetzung der Aufgabenstellung nicht).

Die Änderung um ± 1 oder ± 2 geschieht nur dann, wenn gerade kein Punkt von M_1 überstrichen wird (da bei der Rotation immer entweder keiner oder genau zwei Punkte von M_1 überstrichen werden, und nach Voraussetzung der Aufgabenstellung keine drei Punkte aus $M_1 \cup M_2$ auf einer Geraden liegen).

Weil auf der linken Seite von g und g''' weniger bzw. mehr als n_2 Punkte von M_2 liegen, wird also irgendwann während des Rotationsvorganges die Anzahl der Punkte aus M_2 auf der linken Seite der rotierenden Gerade von $n_2 - 1$ auf n_2 oder von $n_2 - 2$ auf n_2 wachsen (dann wären wir fertig) oder von $n_2 - 1$ auf $n_2 + 1$ wachsen, indem zwei Punkte P_1, P_2 von M_2 überstrichen werden, die auf der rechten Seite der Geraden liegen.

Betrachte also den letzteren Fall, wenn P_1 und P_2 auf der rotierenden Gerade liegen. Drehe die Gerade nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt zwischen P_1 und P_2 um einen hinreichend kleinen Winkel größer 0, sodass die Gerade h entsteht. Da der Drehwinkel hinreichend klein ist, wird kein Punkt aus M_1 überstrichen, sodass h immer noch M_1 halbiert.

Weiterhin halbiert h die Menge M_2, da einer der Punkte P_1, P_2 rechts von h und der andere links von h liegt, und kein weiterer Punkt aus M_2 überstrichen wurde.
h ist also so eine gesuchte Gerade, die M_1 und M_2 halbiert.

III Kombinatorik

III.I Mengen; Logik; Optimierung; Graphentheorie

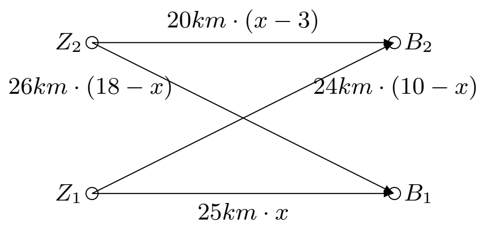
I Runde 1

Aufgabe 011212:
Bei der Planung unserer Volkswirtschaft werden in zunehmendem Maße mathematische Methoden angewandt. Das gilt ganz besonders für das Transportwesen, bei dem es darauf ankommt, mit möglichst geringen Kosten eine optimale Leistung zu erreichen. Man nennt die angewandte Methode, die erstmalig 1939 von Prof. L. W. Kantorowitsch in Leningrad vorgeschlagen wurde, die Methode der linearen Programmierung.
Das folgende Beispiel, das sehr stark vereinfacht wurde, da in Wirklichkeit die Verhältnisse viel komplizierter sind, zeigt das Prinzip der Methode:
Zwei Ziegeleien produzieren 10 Millionen bzw. 15 Millionen Ziegel. Sie sollen zwei Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 18 Millionen bzw. 7 Millionen Ziegel haben. Die Entfernungen betragen:

- 1. Ziegelei zur 1. Baustelle 25 km,
- 1. Ziegelei zur 2. Baustelle 24 km,
- 2. Ziegelei zur 1. Baustelle 26 km,
- 2. Ziegelei zur 2. Baustelle 20 km.

Zu welchen Baustellen müssen die von der 1. bzw. 2. Ziegelei produzierten Ziegel transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Dabei wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind.

Lösung von Eckard Specht:



Die von der i. Ziegelei Z_i zur j. Baustelle B_j $(i,j=1,2)$ zu transportierenden Mengen an Ziegeln seien z_{ij}, insbesondere sei $z_{11}=x$ (alle Mengenangaben in Millionen Stück).
Dann gilt gemäß Aufgabenstellung:

$$z_{12}=10-x; \qquad z_{21}=18-x; \qquad z_{22}=x-3$$

Dabei müssen alle $z_{ij}\geq 0$ sein; diese Bedingungen führen auf die Ungleichungen

$$3\leq x\leq 10 \tag{1}$$

Nun stellen wir die Kostenfunktion auf, die die Summe aller Produkte aus Anzahl zu transportierender Ziegel mal jeweilige Entfernung (alles in km) ist:

$$f(x)=25\cdot x+24\cdot(10-x)+26\cdot(18-x)+20\cdot(x-3)=-5\cdot x+648\to \text{ Minimum}$$

Dies ist eine lineare Funktion mit negativem Anstieg, die ihren Minimalwert wegen (1) folglich an der rechten Intervallgrenze $x = 10$ annimmt.
Daraus ergibt sich: $z_{11} = 10, z_{12} = 0, z_{21} = 8$ und $z_{22} = 7$.

Aufgabe 041215:
In einer IL 18 der Interflug, die nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Ihre Berufe sind: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur. Sie gehören den folgenden Nationen an: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind verschieden alt (21, 24, 32, 40 und 52 Jahre). Die Fluggäste treiben verschiedene Sportarten (Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball). Ihre Reiseziele sind: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock.

Aus Gesprächen entnehmen wir folgende Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.

(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.

(3) Der Pole ist Journalist.

(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.

(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.

(6) Der Kapitän reist nach Rostock.

(7) Der Handballspieler stammt aus der DDR.

(8) Der Reisende aus der Sowjetunion fliegt nach Leipzig.

(9) Der nach Berlin fliegende Reisende ist 32 Jahre alt.

(10) Der Leichtathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.

(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem Fluggast aus Ungarn.

(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.

(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.

(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Wie alt ist der Kapitän?

b) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?

Weisen Sie nach, dass die Angaben ausreichen, um beide Fragen eindeutig zu beantworten!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Sitzplätze werden, von links beginnend, der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 und 5 nummeriert.

Behauptung:

(1) Auf Platz 1 sitzt der Ingenieur.

(15) Auf Platz 2 sitzt der Zypriot wegen (1) und (14).

(16) Auf Platz 1 sitzt der Reisende aus der UdSSR, er ist Ingenieur, fliegt nach Leipzig und ist Fußballspieler.

Beweis: Auf Platz 1 sitzt nicht der Reisende aus Polen wegen (1) und (3), nicht der Reisende aus der DDR und der aus Ungarn wegen (11) und (15) und nicht der Reisende aus Zypern wegen (15). Wegen (8) fliegt er nach Leipzig und ist wegen (10) nicht Leichtathlet, wegen (1) und (5) nicht Schwimmer, wegen (7) nicht Handballspieler und wegen (2) nicht Volleyballspieler. Damit ergibt sich die Antwort auf a): Der Fußballspieler ist Bürger der UdSSR.

Behauptung:

(17) Der Zypriot ist 24 Jahre alt wegen (13), (16) und (14).

(18) Der Kapitän spielt Volleyball oder Handball.

Beweis: Der Kapitän spielt nicht Fußball wegen (16). Er ist nicht Leichtathlet wegen (6) und (10) und nicht Schwimmer wegen (5).

Behauptung:

(19) Der Kapitän ist Ungar oder Deutscher.

Beweis: Der Kapitän ist nicht aus der UdSSR wegen (16), nicht aus Polen wegen (3) und nicht aus Zypern wegen (18), (2) und (15) bzw. (18) und (7).

Behauptung:

(20) Der Kapitän sitzt auf Platz 3, 4 oder 5 wegen (1), (15) und (19).

(21) Der Kapitän ist 40 oder 52 Jahre alt.

Beweis: Er ist nicht 21 Jahre wegen (4), nicht 24 Jahre wegen (17) und (19) und nicht 32 Jahre wegen (6) und (9).

Behauptung:

(22) Der Zypriot auf Platz 2 reist nach Dresden.

Beweis: Er reist nicht nach Berlin wegen (9) und (17), nicht nach Rostock wegen (19) und (6), nicht nach Leipzig wegen (16) und nicht nach Karl-Marx-Stadt, denn dann wäre er wegen (10) Leichtathlet, daher wegen (18) nicht Kapitän, wegen (5) nicht Lehrer, wegen (16) nicht Ingenieur und wegen (3) nicht Journalist, also Feinmechaniker. Dann wäre er 21 Jahre alt wegen (4) im Widerspruch zu (17).

Behauptung:

(23) Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann wäre er wegen (21) 52 Jahre alt und säße wegen (12), (22) und (16) auf Platz 3. Er wäre also wegen (2) Volleyballspieler und wegen (7) und (19) Ungar. Dann säße wegen (11) und (15) der Deutsche auf Platz 4, wäre nicht Ingenieur wegen (16), nicht Lehrer wegen (7) und (5), nicht Journalist wegen (3), sondern Feinmechaniker und daher 21 Jahre wegen (4). Daher hätte der Reisende aus der DDR nicht das Reiseziel Berlin wegen (9) und nicht die Reiseziele Leipzig wegen (16), Dresden wegen (22), Rostock wegen (6) und Karl-Marx-Stadt wegen (7) und (10) im Widerspruch zur Voraussetzung, dass eine der fünf Städte sein Reiseziel ist. Damit ergibt sich die Antwort b): Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Aufgabe 061212:
In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, dass keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:

(1.) Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.

(2.) Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller (voneinander verschiedenen) Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da man in der Aufgabenstellung die Worte „rot“ und „blau“ miteinander vertauschen kann, ohne die Aufgabe zu ändern, genügt es, alle Behauptungen für die roten Strecken zu beweisen.

a) 1. Die gegebenen Punkte seien A, B, C, D, E. Nimmt man an, dass von Punkt A drei rote Strecken, z. B. B, AC, AD ausgehen, so müssten die Strecken BC, DB, CD blau sein, da sonst ein „rotes“ Dreieck entstehen würde (Bild 1).

Dann entstünde aber ein „blaues“ Dreieck, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also können von jedem Punkt höchstens zwei rote und daher auch höchstens zwei blaue Strecken ausgehen. Da von jedem Punkt genau vier Strecken ausgehen müssen, gehen von jedem Punkt genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus, falls die Bedingungen überhaupt realisierbar sind.

2. Es seien z. B. die Strecken AB und AC rot, die Strecken AD und AE blau. Dann ist BC blau und DE rot (Bild 2).

Da vom Punkt D zwei rote Strecken ausgehen, ist DC entweder rot oder blau. Ist DC rot, dann ist CE blau, BE rot, BD blau. In diesem Falle ergeben sich die geschlossenen gleichfarbigen Streckenzüge $ACDEBA$ (rot) und $AECBDA$ (blau), vgl. Bild 2. Ist CD jedoch blau, so erhält man die folgenden gleichfarbigen Streckenzüge $ACEDBA$ (rot) und $ADCBEA$ (blau), vgl. Bild 3.

b) Betrachten wir nun o. B. d. A. die vier von A ausgehenden Strecken! Es gibt für sie genau $\binom{4}{2} = 6$ verschiedene Möglichkeiten, genau zwei von ihnen rot zu färben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es auf Grund der Überlegungen unter a) 2. genau zwei paarweise voneinander verschiedene Verbindungsschemata. Daher gibt es genau 12 verschiedene Realisierungen der Aufgabe.

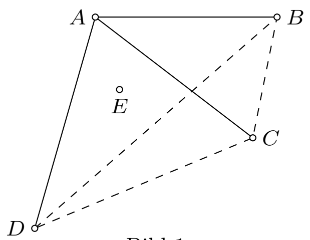


Bild 1

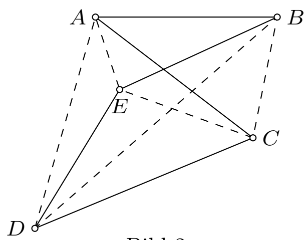


Bild 2

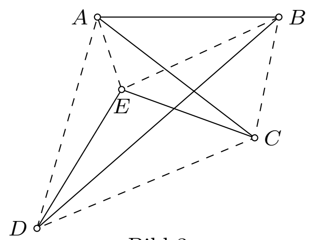


Bild 3

Aufgabe 071211:
Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jeder der vier gibt über diese Zahl die folgenden drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11-fache der Zahl ist kleiner als 1000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12-fache der Zahl ist größer als 1000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5-fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung bezeichnen wir die gegebenen Auskünfte mit A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 usw. Wir untersuchen zunächst die Auskünfte C_1, C_2, C_3. Von ihnen ist mindestens eine wahr und mindestens eine falsch. Es ergeben sich also die in der folgenden Tafel aufgeführten sechs Fälle, wobei jeweils zur Abkürzung eine wahre Aussage mit W und eine falsche mit F bezeichnet wird:

	1	2	3	4	5	6
C_1	W	W	W	F	F	F
C_2	W	F	F	W	W	F
C_3	F	W	F	W	F	W

1. Sind C_1 und C_2 wahr, so ist die gedachte Zahl z eine durch 7 teilbare Primzahl, also $z = 7$. Dann ist auch C_3 wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Sind C_1 und C_3 wahr und ist C_2 falsch, so ist z eine nicht durch 7 teilbare Primzahl und $z > 20$. Dann sind die Auskünfte B_1, B_2 und B_3 sämtlich falsch, was der Voraussetzung widerspricht, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

3. Ist C_1 wahr und sind C_2 und C_3 falsch, so ist z Primzahl und $z \geq 20$. Dann sind A_1 und A_2 falsch, also A_3 wahr, d. h. $11z < 1000$, $z \leq 90$. Daher sind ferner B_1 und B_2 falsch, also B_3 wahr, d. h. $12z > 1000$, $z \geq 84$.

   Nun ist unter den Zahlen 84, 85, ..., 90 nur die Zahl 89 eine Primzahl, es ist also $z = 89$. Man überzeugt sich zum Abschluss davon, dass dann D_1 wahr und D_2 und D_3 falsch sind, dass also alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Sind C_2 und C_3 wahr und ist C_1 falsch, so ist $z = 14$. Dann sind D_1, D_2 und D_3 falsch, so dass dieser Fall nicht eintreten kann.

5. Ist C_2 wahr und sind C_1 und C_3 falsch, so ist $z \geq 20$ und z durch 7 teilbar. Dann sind aber D_1, D_2, D_3 falsch, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

6. Sind C_1 und C_2 falsch und ist C_3 wahr, so ist $z < 20$, z nicht Primzahl und nicht durch 7 teilbar. Dann sind B_2, B_3 falsch und B_1 wahr, also $z = 10$.

   Dann sind D_1, D_2, D_3 wahr, so dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

Daher entspricht nur der 3. Fall allen gestellten Bedingungen. Die zu ermittelnde Zahl ist 89.

Aufgabe 081211:
Bei den Europameisterschaften der Ruderinnen im August 1966 erhielten in der Länderwertung die DDR als erfolgreichstes Land, 37 Punkte und die UdSSR 36,5 Punkte. Beide Länder erhielten in jeder der 5 Disziplinen Einer, Doppelzweier, „Vierer mit“, Doppelvierer und Achter genau je eine der drei pro Disziplin vergebenen Medaillen.

Wieviel Goldmedaillen, wie viel Silbermedaillen und wieviel Bronzemedaillen erhielt jedes der beiden Länder?

Die Punktbewertung ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	Goldmedaille	Silbermedaille	Bronzemedaille
Einer bzw. Doppelzweier	6	5	4
„Vierer mit“ bzw. Doppelvierer	9	7,5	6
Achter	12	10	8

Es ist ferner bekannt, dass die DDR beim Doppelzweier besser als beim Einer und beim Doppelvierer besser als beim „Vierer mit“ abschloss. Die UdSSR schnitt beim Einer besser als beim Doppelzweier ab.

Lösung von Annika Heckel:
Die UdSSR hat 36,5 Punkte; sie muss also bei mindestens einer Disziplin eine Medaille erhalten haben, deren Punktzahl nicht ganzzahlig ist. Dies ist nur der Fall bei den Silbermedaillen im „Vierer mit“ und im „Doppelvierer“.

Da es nur zwei solcher Medaillen gibt, kann die DDR nun nur noch maximal eine davon erhalten haben. Das würde jedoch zu einer nicht-ganzzahligen Gesamtpunktzahl führen, die DDR hat aber 36 Punkte. In den Disziplinen „Vierer mit“ und „Doppelvierer“ ist für sie nur noch möglich, eine Gold- oder eine Bronzemedaille zu erhalten. Da bekannt ist, dass die DDR beim „Doppelvierer“ besser als beim „Vierer mit“ abschnitt, erhielt sie folglich beim ”Vierer mit” die Bronze- und beim Doppelvierer die Goldmedaille.

Hier erhielt die DDR also $9 + 6 = 15$ Punkte. Sie erhielt also in den restlichen drei Disziplinen insgesamt $37 - 15 = 22$ Punkte. Die maximale mögliche Punktzahl liegt hier mit drei Goldmedaillen bei $12 + 6 + 6 = 24$. Da die DDR im „Doppelzweier“ besser war als beim „Einer“, kann sie im „Einer“ keine Goldmedaille, sondern maximal eine Silbermedaille erhalten haben, als Maximalpunktzahl ergibt sich folglich: $12 + 6 + 5 = 23$.

Da die DDR in den drei Disziplinen jedoch nur 22 Punkte hat, muss sie in (mindestens) einer Disziplin schlechter abgeschnitten haben als „Achter“ Gold, „Doppelzweier“ Gold, „Einer“ Bronze. Bei „Achter“ sind die Punktabstufungen zwei Punkte, hier kann also nicht genau ein Punkt verloren werden. Es muss also „Doppelzweier“ oder „Einer“ genau eine Medaille schlechter sein. Wenn im „Doppelzweier“ eine Silbermedaille erzielt würde, so wäre die DDR hier genauso gut gewesen wie im „Einer“, da dies nicht der Fall ist, muss im „Einer“ eine Bronzemedaille erzielt worden sein.

Es ergibt sich also für die DDR:
Einer: Bronze 4
Doppelzweier: Gold 6
Vierer mit: Bronze 6
Doppelvierer: Gold 9
Achter: Gold 12
Insgesamt: 3 Goldmedaillen, 2 Bronzemedaillen, 37 Punkte

Für die UdSSR sind nun noch, wenn man die Unmöglichkeit einer Goldmedaille in den Disziplinen, in denen die DDR diese bereits hat, berücksichtigt, maximal $6 + 5 + 9 + 7{,}5 + 10 = 37{,}5$ Punkte möglich.

Da sie nur 36,5 Punkte hat und nur in den Disziplinen „Einer“ und „Doppelzweier“ die Punktabstufung 1 vorhanden ist, muss sie entweder im „Einer“ oder im „Doppelzweier“ genau eine Medaille schlechter gewesen sein.
Hätte sie im „Einer“ nur die Silbermedaille, so wäre sie hier genauso gut wie im „Doppelzweier“, das ist aber nicht der Fall. Folglich hat die UdSSR im „Doppelzweier“ die Bronzemedaille erhalten.

Es ergibt sich also für die UdSSR:
Einer: Gold 6
Doppelzweier: Bronze 4
Vierer mit: Gold 9
Doppelvierer: Silber 7,5
Achter: Silber 10
Insgesamt: 2 Goldmedaillen, 2 Silbermedaillen, 1 Bronzemedaille, 36,5 Punkte

Aufgabe 101211:
In einer Klassenelternversammlung waren genau 18 Väter und genau 24 Mütter anwesend, von jedem Schüler und jeder Schülerin dieser Klasse wenigstens ein Elternteil.

Von genau 10 Jungen und genau 8 Mädchen waren jeweils beide Eltern da, von genau 4 Jungen und genau 3 Mädchen jeweils nur die Mutter, während von genau einem Jungen und genau einem Mädchen jeweils nur der Vater anwesend war.

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Kinder in dieser Klasse, die in derselben Klasse Geschwister haben! (Es gibt in dieser Klasse keine Kinder, die Stiefeltern oder Stiefgeschwister haben.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach 3. folgt, dass 1 oder 2 Einzelväter anwesend waren, also sind 16 oder 17 Väter (von den anwesenden 18) mit der Mutter da (4).
Nach 2. folgt, dass höchstens 7 Mütter alleine da waren, von den insgesamt 24 Müttern sind also mindestens 17 Mütter mit dem Vater da (5).
Nach diesen beiden Aussagen (4) und (5) folgt, dass genau 17 Elternpaare da sind, somit also noch ein Einzelvater und 7 Einzelmütter (6).
Nach 1. sind von 18 Schülern beide Eltern da, d.h 17 Elternpaare (6) gehören zu 18 Kindern, also befindet sich darunter ein Geschwisterpaar (7). Jetzt bleibt noch ein Einzelvater für 2 Kinder nach 3. und (4), also sind die Kinder auch Geschwister. Also gibt es in der Klasse 2 Geschwisterpaare, also 4 Kinder, die Geschwister in der Klasse haben.

Aufgabe 111211:
Fünf Soldaten A, B, C, D, E aus fünf sozialistischen Staaten treffen sich auf einem Meeting bei einem gemeinsamen Manöver der befreundeten Armeen. An dem Manöver nehmen nur Angehörige der bulgarischen, polnischen, ungarischen, sowjetischen Streitkräfte und der Nationalen Volksarmee der DDR teil. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Jeder der Soldaten A, B, C und D beherrscht außer der Sprache seines Staates als „Zweitsprache“ noch genau eine der folgenden Sprachen: Bulgarisch, Polnisch, Ungarisch, Russisch, Deutsch.

(1a) Diese vier Zweitsprachen sind paarweise voneinander verschieden.

(2) E beherrscht keine Fremdsprache.

(3) A beherrscht eine Sprache, die außer ihm auch der Sowjetsoldat beherrscht.

(4) B beherrscht keine slawische Sprache, also weder Bulgarisch noch Polnisch noch Russisch.

(5) Der NVA-Angehörige kann sich genau dann mit E verständigen, wenn einer der drei anderen Soldaten, nämlich C, als Übersetzer fungiert.

(6) Der Bulgare kann sich mit dem Ungarn nur über zwei der anderen Soldaten, und zwar D und B, verständigen.

Es ist für jeden dieser Soldaten festzustellen, welchem Staat er angehört und welche Zweitsprache er - wenn überhaupt - beherrscht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ausgangssituation:
Zweitsprache: B=Bulgarisch, P=Polnisch, U=Ungarisch, R=Russisch, D=Deutsch
Nationalität: b=Bulgare, p=Pole, u=Ungar, r=Russe, d=Deutscher)
A: B P U R D b p u r d
B: B P U R D b p u r d
C: B P U R D b p u r d
D: B P U R D b p u r d
E: b p u r d

B spricht keine slawischen Sprachen, also kein B, P und R und ist auch kein b, p, r. ⇒ B: U D u d

Mit (6) ist klar, daß D und B weder der Bulgare noch der Ungar sind. Wenn B nicht der Ungar ist, dann ist er der Deutsche (d) und spricht als Zweitsprache ungarisch (U). ⇒ B: U d ⇒ D: B P U R D p r d

D und B sprechen beide eine Sprache, also D entweder Deutsch als Zweitsprache, da er der Deutsche nicht mehr sein kann oder Ungarisch als Zweitsprache, da er auch der Ungar nicht ist. ⇒ D: U D p r

Nach (5) muss C der Ungar sein, da er neben Ungarisch auch die Sprache von E spricht und nicht der Deutsche ist.
Somit spricht D als Fremdsprache Deutsch. A, C und E sprechen also kein Deutsch. A, D und E sprechen als Zweitsprache kein Ungarisch (nach (1a)).
⇒ A: B P R b p r ; ⇒ C: B P R u ; ⇒ D: D p r ; ⇒ E: b p r

Der Ungar, also C, spricht nach (6) kein Bulgarisch. ⇒ C: P R u

Die Fremdsprache von C ist nach (5) die Muttersprache von E, also ist E nicht der Bulgare. Damit steht A als Bulgare fest. ⇒ A: P R b ; ⇒ E: p r

Nach (6) ist die Fremdsprache des Bulgaren somit die Muttersprache von D und damit Polnisch oder Russisch. Mit (3) und (1a) muss A damit auch Russisch sprechen. Russisch als Zweitsprache ist somit für C ausgeschlossen. ⇒ A: R b ; ⇒ C: P u

Da C als Fremdsprache Polnisch spricht und sich nach (5) mit E verständigen kann, steht E als Pole fest. Die Muttersprache für D ist damit Russisch.

Lösung:
A ist Bulgare und spricht Russisch. B ist Deutscher und spricht Ungarisch. C ist Ungar und spricht Polnisch. D ist Russe und spricht Deutsch. E ist Pole.

Aufgabe 121211:
Eine „utopische Aufgabe„:

Als im dritten Jahrtausend u. Z. innerhalb von zwei Tagen nacheinander vier Kosmonauten von Planeten anderer Sonnensysteme auf einem Kosmodrom der Erde landeten, war die Verständigung der Erdbewohner mit ihnen, aber auch die der Kosmonauten untereinander zunächst schwierig. Zwar waren diese durch die Farben Rot, Gelb, Schwarz und Blau ihrer Raumanzüge leicht zu unterscheiden, über ihre Herkunft aber war nichts bekannt. Erst nach einiger Zeit konnte festgestellt werden, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D zur Erde kamen.

Folgende Informationen konnte man erhalten:

Der rote und der schwarze Kosmonaut waren schon einmal auf einer kosmischen Reise zusammengetroffen und kannten sich daher. Der von A kommende Kosmonaut war dagegen nicht mit dem von B und der von C stammende Kosmonaut nicht mit dem von D bekannt. Der rote und der schwarze Kosmonaut konnten sich gut verständigen, und bald konnten das auch der gelbe und der blaue Kosmonaut, während sich die Kosmonauten von A und D nach wie vor nur schlecht verständigen konnten.

Nach langwierigen Berechnungen konnte festgestellt werden, dass der gelbe Kosmonaut älter war als der blaue. Ferner war der von D kommende Kosmonaut älter als der von B kommende und der von A stammende älter als der von C stammende.

Beim Versuch festzustellen, welcher Kosmonaut von welchem Planeten kam, zeigte sich, dass die obigen Angaben dazu noch nicht ausreichen. Immerhin konnte man ermitteln, dass für eine der vier Anzugfarben nur noch der Kosmonaut von A oder der von D in Frage kam.

Auf Grund weiterer Informationen ergab sich, dass der von D stammende Kosmonaut diese Farbe trug. Damit war zwar auch die Anzugfarbe des von B kommenden Kosmonauten ermittelt, aber bei den beiden übrigen noch keine Klarheit darüber vorhanden, welche Anzugfarbe zu welchem Planeten gehörte. Erst durch die zusätzliche Information, dass der Anfangsbuchstabe der (in deutscher Sprache bezeichneten) Farbe des Raumanzugs des von A kommenden Kosmonauten im Alphabet hinter dem Anfangsbuchstaben der Farbe des Raumanzugs des von C kommenden Kosmonauten steht, konnte die Herkunft der Kosmonauten schließlich geklärt werden.

Von welchem Planeten stammte der rote, von welchem der gelbe, von welchem der schwarze und von welchem der blaue Kosmonaut?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Kosmonauten nach der Farbe ihrer Raumanzüge - rot, gelb, schwarz und blau - in dieser Reihenfolge mit I, II, III und IV, so sind am Anfang, wenn nur die Information vorliegt, dass sie von vier verschiedenen Planeten A, B, C und D gekommen sind, folgende $4^3 = 24$ Möglichkeiten ihrer Herkunft vorhanden:

	I	II	III	IV		I	II	III	IV		I	II	III	IV
1.	A	B	C	D	9.	B	C	A	D	17.	C	D	A	B
2.	A	B	D	C	10.	B	C	D	A	18.	C	D	B	A
3.	A	C	B	D	11.	B	D	A	C	19.	D	A	B	C
4.	A	C	D	B	12.	B	D	C	A	20.	D	A	C	B
5.	A	D	B	C	13.	C	A	B	D	21.	D	B	A	C
6.	A	D	C	B	14.	C	A	D	B	22.	D	B	C	A
7.	B	A	C	D	15.	C	B	A	D	23.	D	C	A	B
8.	B	A	D	C	16.	C	B	D	A	24.	D	C	B	A

Nach der ersten Angabe sind I und III miteinander bekannt, aber sowohl die Bewohner von A und B als auch die von $Cund$D kannten sich nicht. Dies bedeutet, dass keines der nicht geordneten Paare (A, B) und (C, D) mit dem nicht geordneten Paar (I, III) übereinstimmt. Somit ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 3, 5, 9, 11 sowie die Fälle 14, 16, 20 und 22 ausscheiden.

Nach der zweiten Information konnten sich die nicht geordneten Paare (I, III) und (II, IV) gut verständigen, während dies für das nicht geordnete Paar (A, D) nicht zutraf.

Hiernach kann das Paar (A, D) mit keinem der Paare (I,III), (II, IV) übereinstimmen. Deshalb ist diese Information gleichwertig damit, dass genau die Fälle 2, 4, 21 und 23 sowie die Fälle 7, 12, 13 und 18 ausscheiden.

Die dritte Bedingung besagt, dass keines der beiden geordneten Paare (B, D) und (C, A) mit dem Paar (II, IV) übereinstimmen kann. Gleichbedeutend hiermit ist das Ausscheiden der Fälle 1, 15, 10, 24.

Die Berücksichtigung aller drei Angaben ist somit gleichwertig mit der Möglichkeit genau der nachstehenden Fälle:

	I II	III	IV	
6.	A	D	C	B
8.	B	A	D	C
17.	C	D	A	B
19.	D	A	B	C

Diese Zusammenstellung zeigt, dass der Kosmonaut II derjenige ist, der nur noch vom Planeten A oder vom Planeten D stammen kann.

Indem dann festgestellt wird, dass er von D gekommen ist, sind genau die Fälle 8 und 19 zu streichen. Aus den verbleibenden Fällen 6 und 17 geht hervor, dass IV vom Planeten B gekommen ist. Die beiden Kosmonauten von A und C haben demnach die Raumanzugfarben rot und schwarz. Die Aussage über die Anfangsbuchstaben der Farbe ist somit äquivalent damit, dass genau der Fall 17 zutrifft, d. h., man erhält folgendes Ergebnis:

Farbe	rot	gelb	schwarz	blau
Planet	C	D	A	B

Aufgabe 151211:
An einer Schule wird häufig Tischtennis gespielt. Man zeige, dass es stets unter sechs beliebigen Schülern dieser Schule entweder drei gibt, die bereits jeder gegen jeden gespielt haben, oder drei gibt, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen worden ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei S einer von sechs beliebig herausgegriffenen Schülern S, A, B, C, D, E der genannten Schule. Wir nehmen zunächst an, dass S bereits gegen wenigstens drei der restlichen fünf Schüler, etwa gegen A, B, C, spielte.

Entweder gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S bereits spielte, zwei, die ebenfalls bereits gegeneinander antraten (etwa A, B), oder zwischen diesen drei Schülern wurde noch kein Spiel ausgetragen.

Im ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, von denen bereits jeder gegen jeden gespielt hat, im zweiten Fall hat zwischen den drei Schülern A, B, C noch kein Spiel stattgefunden. In jedem dieser Fälle ist damit die behauptete Aussage bewiesen. Hat andererseits S gegen keine drei, der Schüler A, B, C, D, E gespielt, dann gibt es unter ihnen drei, etwa A, B, C, gegen die er noch nicht antrat.

Analog gibt es nun unter den drei Schülern A, B, C, gegen die S nicht antrat, entweder zwei, die ebenfalls noch nicht gegeneinander antraten (etwa A, B), oder von diesen drei Schülern spielte bereits jeder gegen jeden. In ersten Fall sind dann S, A, B drei Schüler, zwischen denen noch kein Spiel ausgetragen wurde, im zweiten Fall hat von den drei Schülern A, B, C bereits jeder gegen jeden gespielt. Da keine weiteren Fälle möglich sind, ist die behauptete Aussage damit in jedem Falle bewiesen.

Aufgabe 191212:
Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei folgendes vorausgesetzt:

(1) Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.

(2) Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Dieselbe Aussage trifft für Spiegelland zu.

(3) Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B, aber keine zwischen A' und B', oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B', aber keine zwischen A und B.

(4) In Normalland gibt es zwei Städte P, Q, die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen (1) bis (4) folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien U' und V' zwei beliebige Städte in Spiegelland, nach (1) also Partnerstädte von Städten U bzw. V in Normalland. Nach Voraussetzung ist U mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden.

Beweis:
Wegen $P = Q$, was aus (4) folgt, ist U nicht mit beiden Städten P, Q identisch. Mit einer von ihnen identisch und mit der anderen verbunden kann U nicht sein; denn dann wären P und Q unmittelbar miteinander verbunden, im Widerspruch zu (4). Mit beiden Städten P, Q verbunden, kann U auch nicht sein; denn dann wäre Q von P aus durch einmaliges Umsteigen in U zu erreichen, ebenfalls im Widerspruch zu (4).

O. B. d. A. sei U mit P weder identisch noch verbunden; dann existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen U' und der Partnerstadt P' von P.

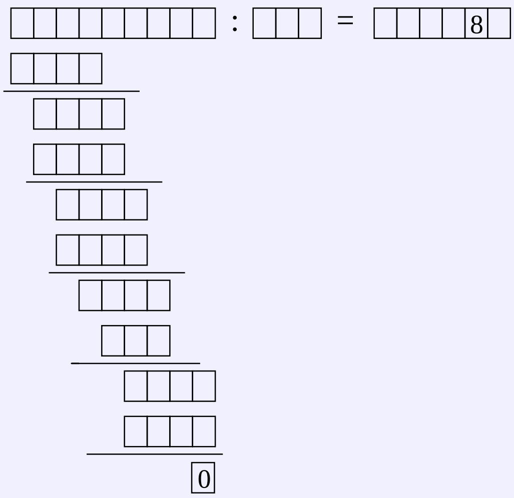
Ferner existiert nach (3) eine unmittelbare Verbindung zwischen P' und der Partnerstadt Q' von Q, da P und Q nach (4) miteinander weder identisch noch verbunden sind.

Schließlich ist auch V mit mindestens einer der Städte P, Q weder identisch noch (direkt) verbunden (Beweis wie oben). Trifft dies für P zu, so kommt man (da wie oben V' und P' verbunden sind) von U' über P' nach V'. Trifft es aber für Q zu, so kommt man (da nun, V' und Q' verbunden sind) von U' über P' und Q' nach V'.

Damit ist die behauptete Möglichkeit, ohne mehr als zweimaliges Umsteigen von U' nach V' zu gelangen, in jedem Fall nachgewiesen.

Aufgabe 201211:

In dem folgenden Schema ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas die erste Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, so folgt:
Die fünfte Ziffer des Quotienten lautet 0, da in der 9. Zeile des Schemas gleich zwei neue Ziffern des Dividenden auftreten.

Ist x der Divisor, so steht in der 8. Zeile die Zahl $8x$, da sie dreistellig ist, während die Zahlen in der 2., 4., 6. und 10. Zeile vierstellig, also größer als $8x$ sind, lauten sie $9x$; d.h., die erste, zweite, dritte und sechste Ziffer des Quotienten lautet 9; dieser beträgt somit 999809.

Da $8x$ dreistellig ist, gilt $8x < 1000$, als $x < 125$ (1)

In der 9. und 10. Zeile steht (wegen der Differenz 0 in der 11. Zeile) die Zahl $9x$. Wegen (1) gilt für sie demnach $9x < 1125$.
Führt man die im Schema vorgesehene Subtraktion der Zahl in der 8. von der Zahl in der 7. Zeile durch, so erhält man ein zweistelliges Ergebnis. gebildet aus den ersten beiden Ziffern der 9. Zeile. Dieses ist folglich kleiner als 12. Somit ist die Summe aus 12 und der Zahl in der 8. Zeile größer als die Zahl in der 7. Zeile und daher (da diese vierstellig ist) größer als 999; d. h., es gilt

$$12 + 8x > 999 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{987}{8} \quad (= 123\frac{3}{8})$$

Aus (1), (2) und der Ganzzahligkeit von x folgt $x = 124$. Somit beträgt der Dividend $999809 \cdot 124 = 123976316$, und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1&2&3&9&7&6&3&1&6&:&1&2&4&=&9&9&9&8&0&9\\
1&1&1&6&&&&&&&&&&&&&&&&\\ \cline{1-4}
&1&2&3&7&&&&&&&&&&&&&&&\\
&1&1&1&6&&&&&&&&&&&&&&&\\ \cline{2-5}
&&1&2&1&6&&&&&&&&&&&&&&\\
&&1&1&1&6&&&&&&&&&&&&&&\\ \cline{3-6}
&&&1&0&0&3&&&&&&&&&&&&&\\
&&&&9&9&2&&&&&&&&&&&&&\\ \cline{4-7}
&&&&&1&1&1&6&&&&&&&&&&&\\
&&&&&1&1&1&6&&&&&&&&&&&\\ \cline{5-9}
&&&&&&&&0&&&&&&&&&&&
\end{array}$$

handeln. Diese stellt in der Tat eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe dar; insbesondere ist keine ihrer mehrstelligen Zahlen mit einer ersten Ziffer 0 geschrieben.
Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Aufgabe 201212:
Vier Personen A, B, C, D machen je zwei Aussagen über eine im dekadischen Positionssystem geschriebene nichtnegative ganze Zahl x. Es ist bekannt, dass

(1) von A, B, C genau einer zwei falsche Aussagen macht, während bei jedem der beiden anderen genau eine Aussage falsch ist,

(2) D zwei wahre Aussagen macht.

Die von A, B, C, D gemachten Aussagen lauten:

(A1) Die letzte Ziffer der dekadischen Darstellung von x ist gerade.

(A2) x ist Quadratzahl.

(B1) Die Ziffer 9 ist in der dekadischen Darstellung von x mindestens einmal vorhanden.

(B2) x ist vierstellig.

(C1) x ist durch 10 teilbar.

(C2) x lässt bei Division durch 3 den Rest 1 .

(D1) In der dekadischen Darstellung von x ist, falls x aus mehr als einer Ziffer besteht, von links beginnend, jede Ziffer um 1 kleiner als die jeweils rechts nachfolgende Ziffer.

(D2) Die Anzahl der geraden Ziffern in der dekadischen Darstellung von x ist nicht größer als 2.

Man ermittle alle Zahlen x, die dieses System von Bedingungen erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine Zahl x die Aussagen (D1) und (D2) wahr sind, so folgt; dass die Ziffern von x abwechselnd gerade und ungerade sind.

Weiter folgt, dass höchstens zwei gerade Ziffern und - abwechselnd mit ihnen - höchstens drei ungerade Ziffern vorkommen. Somit ist die Zahl x höchstens fünfstellig, und wenn sie fünfstellig ist, beginnt sie mit einer ungeraden Ziffer. Hiernach können (D1) und (D2) nur für die Zahlen x in der folgenden Tabelle wahr sein.

Umgekehrt bestätigt man (D1) und (D2) für alle diese Zahlen. Sie sind also genau diejenigen Zahlen, die die Bedingung (2) erfüllen- Für jede von ihnen ist in der Tabelle angegeben, ob die Aussagen (A1) bis (c2) wahr oder falsch sind. So erhält man die anschließend genannten Anzahlen der falschen Aussagen von A, B und C.

							falsche	Aussagen	von
x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	A	B	C
0	W	W	F	F	W	F	0	2	1
1	F	W	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
2	W	F	F	F	F	F	1	2	2
3	F	F	F	F	F	F	2	2	2
4	W	W	F	F	F	W	0	2	1
5	F	F	F	F	F	F	2	2	2
6	W	F	F	F	F	F	1	2	2
7	F	F	F	F	F	W	2	2	1
8	W	F	F	F	F	F	1	2	2
9	F	W	W	F	F	F	**1**	**1**	**2**
12	W	F	F	F	F	F	1	2	2
23	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34	W	F	F	F	F	W	**1**	**2**	**1**
45	F	F	F	F	F	F	2	2	2
56	W	F	F	F	F	F	1	2	2
67	F	F	F	F	F	W	2	2	1
78	W	F	F	F	F	F	1	2	2
89	F	F	W	F	F	F	2	2	2
123	F	F	F	F	F	F	2	2	2
234	W	F	F	F	F	F	1	2	2
345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
456	W	F	F	F	F	F	1	2	2
567	F	F	F	F	F	F	2	2	2
678	W	F	F	F	F	F	1	2	2
789	F	F	w	F	F	F	2	1	2

							falsche	Aussagen	von
x	(A1)	(A2)	(B1)	(B2)	(C1)	(C2)	A	B	C
1234	W	F	F	W	F	W	1	1	1
2345	F	F	F	W	F	F	2	1	2
3456	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
4567	F	F	F	W	F	W	**2**	**1**	**1**
5678	W	F	F	W	F	F	**1**	**1**	**2**
6789	F	F	W	W	F	F	2	0	2
12345	F	F	F	F	F	F	2	2	2
34567	F	F	F	F	F	W	2	2	1
56789	F	F	W	F	F	F	2	1	2

Daraus ist ersichtlich, dass unter allen Zahlen, die (2) erfüllen, genau die Zahlen 1, 9, 34, 3456, 4567, 5678 auch die Bedingung (1) erfüllen. Somit sind genau diese Zahlen die gesuchten.

Aufgabe 221214:
Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Eigenschaft haben, dass von den folgenden Aussagen (A), bis (F) vier wahr und zwei falsch sind!

(A) x ist eine positive rationale Zahl.

(B) x ist eine natürliche Zahl, oder x ist mit einer ganzen Zahl $g \neq 0$ in der Form $x = \frac{1}{g}$ darstellbar.

(C) x^2 ist eine ganze Zahl, x ist aber selbst nicht ganzzahlig.

(D) Es gilt $7 < x^2 < 9$.

(E) x ist eine positive reelle Zahl, aber keine natürliche Zahl.

(F) Wenn x rational ist, so ist x ganzzahlig.

Hinweis: Eine Aussage der Form „Wenn p, so q“ ist genau dann wahr, wenn die Aussage „(nicht p) oder q“ wahr ist. Eine Aussage der Form „u oder v“ ist genau dann wahr, wenn von den beiden Teilaussagen u und v mindestens eine wahr ist.

Lösung von ochen:
Wir starten mit (C) und (D).

Es können nicht beide falsch sein, da sonst alle anderen wahr sein müssten. Dies geht nicht, da aus (A) und (F) folgt, dass x eine natürliche Zahl ist, was (E) widerspricht.

Wenn beide wahr sind, ist $x = 2\sqrt{2}$ oder $x = -2\sqrt{2}$. Für $x = 2\sqrt{2}$ sind (A) und (B) falsch, (E) und (F) sind wahr. Für $x = -2\sqrt{2}$ sind (A), (B) und (E) falsch. Es genügt also $x = 2\sqrt{2}$ unseren Bedingungen.

Wenn (C) wahr ist, aber (D) nicht, so sind (A), (B) und (D) falsch.

Wenn (C) falsch und (D) wahr ist, kann x keine natürliche Zahl sein. Also ist eine der beiden Aussagen (A) oder (F) falsch. Da genau 2 Aussagen falsch sein sollen, müssen (B) und (E) wahr sein.
Wenn (A) wahr ist und (F) falsch ist, so folgt mit (B), dass x eine positive rationale Zahl der Form $1/g$ mit $g \in \mathbb{Z}$ ist, also insbesondere betragsmäßig kleiner/gleich Eins ist. Das ist aber mit (D) nicht möglich.

Es sind (B),(D),(E),(F) wahr und (A),(C) falsch, oder es muss $x = 2\sqrt{2}$ gelten.

Aus (B) folgt, dass x rational ist und mit (F) folgt, dass x natürlich ist. Das widerspricht (D).
Es ist also $x = 2\sqrt{2}$ die einzige Lösung.

Alternativ-Lösung von Kitaktus:
Angenommen es gibt eine solche Zahl x.

Fall 1: Ist x eine ganze Zahl, so sind die Aussagen C, D und E falsch. Im Widerspruch dazu, dass nur zwei Aussagen falsch sind.

Fall 2: Ist x nicht ganzzahlig, aber rational, so sind C und F falsch. B und D müssten also wahr sein. Wegen B müsste x das Reziprok einer ganzen Zahl, betragsmäßig also kleiner als 1 sein. Wegen D müsste aber x betragsmäßig größer als 2 sein. Widerspruch.

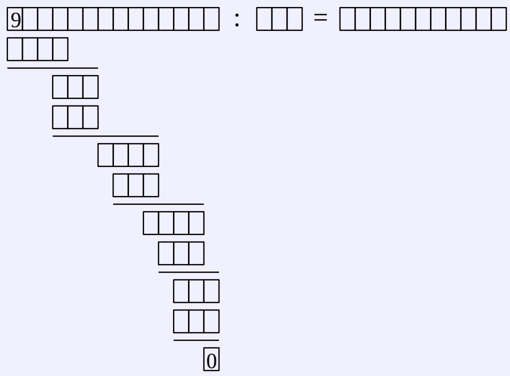
Fall 3: Ist x irrational. A und B sind dann falsch und alle anderen Aussagen daher wahr. Wegen D und C folgt $x^2 = 8$. Wegen E ist x positiv, es kommt also nur $x = \sqrt{8}$ in Frage.

Andere Fälle sind nicht möglich. Die einzige mögliche Lösung ist also $x = \sqrt{8}$.

Dies ist tatsächlich eine Lösung, denn $x = \sqrt{8}$ ist positiv, aber nicht rational und es gilt $x^2 = 8$. Daher sind A und B falsch, während C, D, E und F richtig sind.
$x = \sqrt{8}$ ist also die einzige Lösung.

Aufgabe 231211:

In dem folgenden Schema (siehe Abbildung) ist in jedes leere Feld jeweils eine Ziffer so einzutragen, dass eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht. Insbesondere darf keine der mehrstelligen Zahlen des ausgefüllten Schemas an erster Stelle die Ziffer 0 erhalten.



Beweisen Sie, dass es genau eine Eintragung von Ziffern in die leeren Felder gibt, die diesen Anforderungen genügt! Ermitteln Sie diese Eintragung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn eine Eintragung von Ziffern den Anforderungen genügt, und wenn man den Dividenden mit x, den Divisor mit y und den Quotienten mit z bezeichnet, so gilt:

$$x : y = z, \tag{1}$$
$$100 \leq y \leq 999 \tag{2}$$

Bezeichnet man ferner die aus den ersten vier Ziffern des Dividenden gebildete Zahl mit t, so gilt: $9000 \leq t \leq 9999$.

Bezeichnet man die in der zweiten Zeile des Schemas stehende Zahl, die ein Vielfaches von y ist, mit ny, wobei $1 \leq n \leq 9$ ist, so gilt:

$$t - ny \leq 9 \qquad , \qquad n \geq t - 9 \geq 9000 - 9 = 8991 \qquad \text{also} \tag{3}$$
$$y \geq \frac{8991}{n} \geq \frac{8991}{9} = 999 \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt daher $y = 999$. Aus (3) folgt weiter

$$n \geq \frac{8991}{y} = \frac{8991}{999} = 9$$

also $n = 9$. Daher steht in der zweiten Zeile des Schemas die Zahl $9y = 8991$, während in der 4., 6., 8. und 10. Zeile des Schemas die Zahl $y = 999$ steht, weil das einzige von Null verschiedene ganzzahlige dreistellige Vielfache von 999 die Zahl 999 selbst ist. Daraus folgt

$$z = 90100010011$$

und es kann sich nur um die Eintragung

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 9 & : & 999 & = & 90100010011 \\
8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-6}
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-10}
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & \\ \cline{8-13}
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 9 & 8 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & \\ \cline{11-14}
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 9 & 9 & 9 & & & & \\ \cline{12-14}
 & & & & & & & & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

handeln.
Diese stellt in der Tat eine richtig gelöste Divisionsaufgabe dar. Damit ist bewiesen, dass genau diese Eintragung den gestellten Anforderungen genügt.

Aufgabe 261213:
An einer internationalen Tagung nahmen jeweils genau zwei Vertreter der Ungarischen Volksrepublik, der ČSSR, der VR Polen und der DDR teil. Über diese acht Teilnehmer ist bekannt:

(1) Jeder dieser Teilnehmer spricht neben seiner Muttersprache wenigstens eine Sprache aus den anderen drei genannten Teilnehmerländern. (Die Sprachen aus den vier Ländern waren ungarisch, tschechisch, polnisch, deutsch; andere Sprechen aus diesen Ländern wie etwa slowakisch oder sorbisch kamen nicht vor.)

(2) Jede der vier Sprachen wird von Teilnehmern aus genau drei der genannten Länder gesprochen.

(3) Jeder der Teilnehmer, der polnisch spricht, spricht auch ungarisch, jedoch nicht deutsch.

(4) Die Sprachkenntnisse der beiden polnischen Teilnehmer unterscheiden sich in bezug auf die vier genannten Sprachen voneinander.

a) Man ermittle, wie viele der genannten Teilnehmer insgesamt deutsch sprechen und aus welchen Ländern diese Teilnehmer kamen.

b) Man ermittle, welche Sprachen die beiden Teilnehmer aus der UVR sprachen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Länder seien durch die Anfangsbuchstaben ihrer Namen mit U, T, P, D bezeichnet, die Sprachen entsprechend mit u, t, p, d.
In der folgenden Tabelle wird die Tatsache, dass ein Teilnehmer eine bestimmte Sprache beherrscht, durch „+“ gekennzeichnet, Nichtbeherrschung wird durch „-“ markiert. Aus (1), (3) und (4) folgt bei geeigneter Wahl der Reihenfolge der beiden polnischen Teilnehmer

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+			+	+		
t			+	+	+	-		
p					+	+		
d					-	-	+	+

Aus (3) erhält man weiter, dass die Teilnehmer, welche deutsch sprechen, nicht polnisch sprechen, insbesondere beherrschen die Vertreter der DDR nicht polnisch. Weil polnisch nach (2) von Vertretern dreier Länder gesprochen wird, muss jeweils mindestens ein Teilnehmer aus der Ungarischen VR und der ČSSR polnisch sprechen, dies sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit der erste Vertreter dieser Länder.

Wegen (3) sprechen diese nicht deutsch, aber ungarisch. Dasselbe Argument zeigt für die deutsche Sprache, dass die zweiten Vertreter Ungarns und der ČSSR deutsch sprechen, woraus nach (3) folgt, dass diese nicht polnisch sprechen.

Das bisherige Ergebnis wird durch die nachstehende Tabelle veranschaulicht:

	U		T		P		D	
	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
u	+	+	+		+	+		
t			+	+	+	-		
p	+	-	+	-	+	+	-	-
d	-	+	-	+	-	-	+	+

Damit folgt als Ergebnis zu a): Genau vier der Teilnehmer sprechen deutsch: zwei Vertreter der DDR und jeweils einer aus der Ungarischen VR und der ČSSR.

Weiter folgt zu b): Wegen (2) wird ungarisch von Vertretern aus genau drei Ländern gesprochen, also beherrschen die Teilnehmer der DDR kein Ungarisch. Aus (1) folgt, dass sie tschechisch sprechen (denn sie sprechen auch nicht polnisch). Wegen (2) ist es deshalb unmöglich, dass ein Teilnehmer aus Ungarn tschechisch spricht. Der erste Teilnehmer aus der Ungarischen VR spricht deshalb genau ungarisch und polnisch, der zweite genau ungarisch und deutsch.

Aufgabe 281211:
Ein Arbeitskollektiv will sich gemeinsam am Tele-Lotto *5 aus 35* beteiligen. Die Kollegen A, B, C werden mit der Auswahl der Zahlen auf den abzugebenden Tipscheinen beauftragt. Bei ihrer Beratung, welche Tips sie zusammenstellen wollen, stellt jeder der drei Kollegen bestimmte Forderungen.

So verlangt A, dass jeder Tip drei Primzahlen enthält, deren Summe 42 ist. B fordert, dass jeder Tip drei Zahlen enthält, deren Produkt das 33fache ihrer Summe ist. C erwartet, dass jeder Tip zwei Zahlen enthält, die keine Primzahlen sind.

Man ermittle alle diejenigen Tips, die die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Tip die Forderungen aller drei Kollegen erfüllt, so folgt:

a) Nach den Forderungen von A und C enthält der Tip genau drei Primzahlen und genau zwei Zahlen, die keine Primzahlen sind. Weil außer 2 alle Primzahlen ungerade sind, folgt aus der Forderung von A, dass der Tip die Zahl 2 enthält.

b) Von den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ergeben nur die Paare (17, 23) und (11, 29) die Summe 40. Damit enthält der Tip eines der Zahlentripel $(2; 17; 23)$ (1) oder $(2; 11; 29)$ (2).

c) Bezeichnet man die Zahlen der Forderung von B mit x,y und z, so gilt $33(x + y + z) = xyz$.

Folglich ist einer dieser Zahlen durch 11 teilbar. O. B. d. A. sei dies x. Wegen $1 \leq x \leq 35$ kann x nur einen der Werte 11, 22, 33 annehmen.

1. Fall: Es sei $x = 11$.

Dann gilt $3(11 + y + z) = yz$, also $(y - 3)(z - 3 = 42$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-2 \leq y - 3 \leq 32$ und $-2 \leq z - 3 \leq 32$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten

$$(y - 3; z - 3) = (2; 21), (3; 14), (6; 7)$$

also nur

$$(x; y; z) = (11; 5; 24) \quad (3), \qquad (11; 6; 17) \quad (4), \qquad (11; 9; 10) \qquad (5)$$

Nun muss sich unter den fünf Zahlen des Tips eines der Tripel (1), (2) und zugleich eines der Tripel (3), (4), (5) befinden. Das ist nur möglich mit den Zusammenstellungen

$$\text{(1) mit (4)} \qquad (2; 17; 23; 11; 6) \tag{6}$$
$$\text{(2) mit (3)} \qquad (2; 11; 29; 5; 24) \tag{7}$$
$$\text{(2) mit (4)} \qquad (2; 11; 29; 6; 17) \tag{8}$$
$$\text{(2) mit (5)} \qquad (2; 11; 29; 9; 10) \tag{9}$$

Davon scheiden (6), (7), (8) aus, da sie die Forderung von C nicht erfüllen.

2. Fall: Es sei $x = 22$.

Dann gilt $3(22 + z + y) = 2yz$, also $(2y - 3)(2z - 3) = 141$. Wegen $1 \leq y \leq 35$ und $1 \leq z \leq 35$, also $-1 \leq 2y - 3 \leq 67$ und $-1 \leq 2z - 3 \leq 67$ verbleibt hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeit $(2y - 3; 2z - 3) = (3; 47)$, also nur $(x; y; z) = (22; 3; 25)$.

Diese lässt sich aber weder mit (1) noch mit (2) zu fünf Zahlen eines geforderten Tips zusammenstellen; daher scheidet der 2. Fall aus.

3. Fall: Es sei $x = 33$.

Dann gilt $33 + z + y = yz$, also $(y-1)(z-1) = 34$. Wegen $0 \leq y-1 \leq 34$ und $0 \leq z-1 \leq 34$ verbleiben hierfür bis auf die Reihenfolge nur die Möglichkeiten $(y-1; z-1) = (1; 34), (2; 17)$, also nur $(x; y; z) = (33; 2; 35) \quad (10), (33; 3; 18) \quad (11)$.

Diese lässt sich mit (1) oder (2) nur (10) zusammenstellen:

$$\text{(1) mit (10)} \qquad (2; 17; 23; 33; 35) \tag{12}$$

$$\text{(2) mit (10)} \qquad (2; 11; 29; 33; 35) \tag{13}$$

d) Somit können nur (in anderer Reihenfolge) die Tips

$$(2; 9; 10; 11; 29), (2; 11; 29; 33; 35), (2; 17; 23; 33; 35) \tag{14}$$

den Forderungen aller drei Kollegen genügen.

II. Diese Tips erfüllen die Forderungen von A und C, denn sie enthalten die Primzahlen 2, 11, 29 bzw, 2, 17, 23 mit der Summe 42 und die Nichtprimzahlen 9, 10 bzw. 33, 35.

Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (14) angegebenen Tips die Forderungen aller drei Kollegen erfüllen.

Aufgabe 281214:
Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, dass die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.

(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung.
Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht. Dabei sei angenommen, dass sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fünf LKW reichen für jede solche Sendung aus; wegen $5 \cdot 2 = 10$ z. B., indem jeder LKW mit so vielen Stücken beladen wird, bis seine Ladung erstmals 2 t erreicht oder überschreitet (sofern noch Stückgut vorhanden ist, das nicht schon von den zuvor beladenen LKW abtransportiert wurde).

Ein derartiges Beladen ist möglich; denn solange die Ladung noch nicht 2 t erreicht oder überschritten hat, kann ein weiteres Stück hinzugefügt werden, da dieses nicht mehr als 1 t Masse hat. mit ihm also die Ladefähigkeit von 3 t nicht überschritten wird.

b) Vier LKW genügen dagegen nicht für jede Sendung, z. B. nicht für eine Sendung; die genau 13 Stücke mit einer Masse von je genau $\frac{10}{13}$ t enthält. Von einer solchen Sendung könnten nämlich auf jedem LKW wegen $4 \cdot \frac{10}{13} > 3$ höchstens 3 Stücke, auf alle vier LKW also höchstens 12 Stücke geladen werden.

c) Drei LKW reichen nicht für jede solche Sendung aus (sie reichen sogar für keine solche Sendung aus), weil mit ihnen höchstens 9 t auf einmal transportiert werden können.

Aufgabe 331211:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Die Zahl n ist zehnstellig. Für die Ziffern ihrer Dezimaldarstellung, von links nach rechts mit a_0, a_1, ..., a_9 bezeichnet, gilt: a_0 stimmt mit der Anzahl der Nullen, a_1 mit der Anzahl der Einsen, ..., a_9 mit der Anzahl der Neunen in der Dezimaldarstellung von n überein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine natürliche Zahl n mit Ziffern $a_0, ..., a_9$ die Bedingungen erfüllt sind, so folgt:

Addiert man die einzelnen Anzahlen $a_0, ..., a_9$, so ergibt sich die Anzahl 10 aller Ziffern von n; d. h., es gilt

$$a_0 + ... + a_9 = 10 \qquad (1)$$

Da n zehnstellig ist, ist die Anfangsziffer, die auch mit k bezeichnet sei, nicht 0:

$$a_0 = k \geq 1 \qquad (2)$$

Die k Ziffern, die 0 lauten, befinden sich also unter den Ziffern $a_1, ..., a_9$; im einzelnen gilt:
Genau k der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind gleich 0,
genau $9 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ sind positiv. (3)

Aus (1) und (2) folgt: Die Summe der Ziffern $a_1, ..., a_9$ ist $10 - k$ (4)

Wenn, wie hier in (3),(4) gefunden, die Summe positiver ganzer Zahlen genau um 1 größer ist als ihre Anzahl, so folgt für sie:
Genau $8 - k$ der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lauten 1,
genau eine der Ziffern $a_1, ..., a_9$ lautet 2. (5)

Wäre $a_0 = 1$ oder $a_0 = 2$, so gäbe es hiernach unter allen a_ν entweder eine Null, $9 - k = 8$ Einsen und eine Zwei oder zwei Nullen, $8 - k = 6$ Einsen und zwei Zweien. (6)

In beiden Fällen wären mehr als die drei Ziffern a_0, a_1, a_2 Einsen, also auch eine weitere Ziffer a_p mit $p \geq 3$. Das aber würde besagen: Es käme auch die Ziffer p mit der Anzahl 1 vor. Da jedoch nach (6) alle 10 Ziffern von n bereits Null, Eins oder Zwei lauten, ist das ein Widerspruch.

Daher und wegen (2) muss $a_0 \geq 3$ sein, und die in (5) genannten Anzahlen $8 - k$ bzw. 1 von Ziffern 1 bzw. 2 unter den $a_1, ..., a_9$ sind bereits diese Anzahlen unter allen a_ν. Zusammen mit der Anzahl k der Ziffern 0 ergibt das die Anzahl 9 für Ziffern 0, 1 und 2. Also kommt noch genau eine Ziffer größer als 2 unter den a_ν vor; das muss folglich eben die Ziffer $a_0 = k$ sein. Diese Angabe wiederum besagt: Es gilt $a_k = 1$.

Da, wie eben zu (5) bemerkt, genau eine der Ziffern 2 lautet, also $a_2 = 1$ gilt, ist die Anzahl a_1 der Einsen positiv. Damit sind bereits vier positive a_ν nachgewiesen; ihre Summe ist $a_0 + a_1 + a_2 + ak = k + (8 - k) + 1 + 1 = 10$.

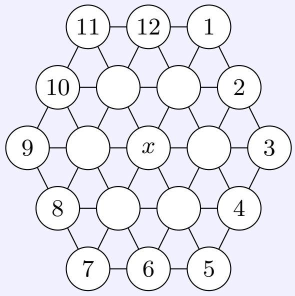
Wegen (1) müssen die übrigen sechs $a_\nu = 0$ sein; damit ist als Anzahl der Nullen $a_0 = 6$ ermittelt, und insgesamt hat sich ergeben: n muss die Zahl 6210001000 sein.

In der Tat hat die Dezimaldarstellung dieser Zahl jeweils genau 6 Nullen, 2 Einsen, eine Zwei, eine Sechs und keine der Ziffern Drei, Vier, Fünf, Sieben, Acht, Neun. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

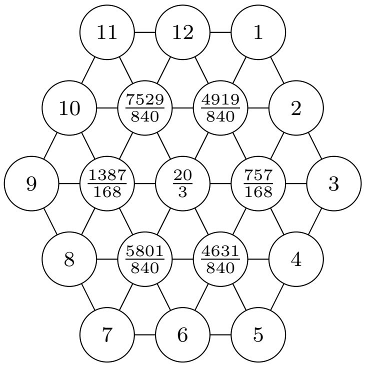
Aufgabe 341213:

In die Kreise der Abbildung lassen sich reelle Zahlen so eintragen, dass an die Randkreise die angegebenen Zahlen kommen und dass in jedem der sieben inneren Kreise jeweils das arithmetische Mittel der sechs benachbarten Kreise steht.

Man untersuche, welche Zahl x dabei im mittleren Kreis steht.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für x und die benachbarten Zahlen a, b, c, d, e, f (bezeichnet in gleichem Umlaufssinn wie die Zahlen 1, 2, ..., 12 , beginnend mit der Zahl zwischen x und 1) folgt:

$$\frac{1}{6}(15 + b + f + x) = a \tag{1}$$
$$\frac{1}{6}(9 + c + a + x) = b \tag{2}$$
$$\frac{1}{6}(15 + d + b + x) = c \tag{3}$$
$$\frac{1}{6}(21 + e + c + x) = d \tag{4}$$
$$\frac{1}{6}(27 + f + d + x) = e \tag{5}$$
$$\frac{1}{6}(33 + a + e + x) = f \tag{6}$$
$$\frac{1}{6}(a + b + c + d + e + f) = x \tag{7}$$

Addition von (1) bis (6) ergibt

$$20 + \frac{1}{3}(a + b + c + d + e + f) + x = a + b + c + d + e + f$$

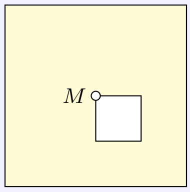
Hieraus und aus (7) folgt

$$20 + 2x + x = 6x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{3}$$

2. Eine Probe ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer Belegung der beschriebenen Art aus dem Aufgabentext hervorgeht.

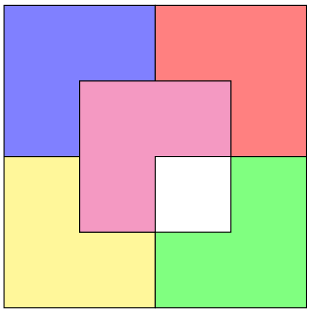
II Runde 2

Aufgabe V01222:



Teilen Sie das Stanzteil (vgl. Abbildung) in fünf Teile ein!
Jeder dieser Teile soll dem anderen in Form und Gestalt gleichen ($M =$ ist der Mittelpunkt des Stanzteiles).

Lösung von ochen:



Aufgabe V11125:

$$\frac{169}{30} \quad ? \quad \frac{13}{15} = \frac{13}{2}$$

a) Welche der Rechenzeichen $(+, -, \cdot, :)$ können anstelle des Fragezeichens stehen?
b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, gleichartige Aufgaben zu bilden!
Es sollen die gleichen Rechenzeichen anstelle des Fragezeichens eingesetzt werden wie bei der Lösung a.
c) Bilden Sie nach diesem Verfahren zwei Aufgaben!
d) Können die Glieder der Aufgabe auch sämtlich positive ganze Zahlen sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von StrgAltEntf:
a) Das Additions- und das Divisionszeichen.

b) Gesucht sind (rationale) Zahlen a,b,c mit $b \neq 0$ und (1) $a + b = c$ (2) $a : b = c$
Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $a + b = a : b$ und daraus

$$a = \frac{b^2}{1-b}$$

Dies in (1) eingesetzt ergibt $\frac{b^2}{1-b} + b = c$ und daraus

$$c = \frac{b}{1-b}$$

Für jedes $b \neq 0{,}1$ ergibt sich damit eine Aufgabe

$$\frac{b^2}{1-b} + b = \frac{b}{1-b}$$

Wählt man $0 < b < 1$, so sind alle Werte a,b,c zudem positiv.

c) Mit $b = \frac{1}{3}$ ergibt sich $a = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{1}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Mit $b = \frac{3}{5}$ ergibt sich $a = \frac{9}{10}$ und $c = \frac{3}{2}$ und damit die Aufgabe

$$\frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

d) a,b,c können nicht alle positive ganze Zahlen sein, da für eine ganze Zahl $b > 1$ die Zahl $c = \frac{b}{1-b}$ negativ ist. (Zudem ist $1 - b$ kein Teiler von b; c ist also noch nicht einmal ganz.)

Aufgabe 011123:
Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann. Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?
Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Lösung von Eckard Specht:
Bezeichnen wir die Anzahl der gekauften Tiere mit a_1, a_2, a_3, a_4 (für Herrn Meier, Krause, Schulze und Franke) bzw. mit b_1, b_2, b_3, b_4 (für die Frauen in dieser Reihenfolge), wobei $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ ist.
Dann gibt jeder der Männer a_i^2 und jede der Frauen b_i^2 DM aus und es gilt:

$$a_i^2 - b_i^2 = (a_i + b_i)(a_i - b_i) = 96 = 2^5 \cdot 3 = \{48 \cdot 2, 32 \cdot 3, 24 \cdot 4, 16 \cdot 6, 12 \cdot 8\}$$

Damit kommen folgende Paare (a_i, b_i) in Betracht: $(25, 23)$, $(14, 10)$, $(11, 5)$, $(10, 2)$.
Die Aussage „Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen“ kann also nur bedeuten, dass die Meiers das Paar $(25, 23)$ sind und die Männer der Paare $(14, 10)$ und $(11, 5)$ seine Schwäger.
Die Zahl 10 taucht zweimal auf, also ist das Paar $(10, 2)$ den Krauses zuzuordnen und die Frau des Paars $(14, 10)$ ist seine Schwägerin.
Aus „Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses“ folgt, dass das Paar $(14, 10)$ die Schulzes sind, und schließlich $(11, 5)$ die Frankes.
Herr Meier ist also sowohl mit Herrn Schulze als auch mit Herrn Franke verschwägert.
Das bedeutet im ersten Fall, dass entweder Frau Meier eine geborene Schulze oder Frau Schulze eine geborene Meier ist. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da Frau Schulze eine geborene Lehmann ist, daher: Frau Meier ist eine geborene Schulze.
Frau Franke ist eine geborene Meier. Frau Krause ist eine geborene Schulze.

Aufgabe 011223:
Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Waagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

Lösung von Eckard Specht:
Man entnimmt aus dem

1. Gefäß 20 = 1 Kugel,
2. Gefäß 21 = 2 Kugeln,
3. Gefäß 22 = 4 Kugeln,
4. Gefäß 23 = 8 Kugeln sowie 5. Gefäß 24 = 16 Kugeln.

Nun ermittelt man mit einer einzigen Wägung die Gesamtmasse dieser $2^5 - 1 = 31$ Kugeln. Subtrahiert man davon $31 \cdot 10g = 310g$, so erhält man die (Maß-)Zahl a. Aus der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 = a \qquad (1)$$

kann man eindeutig auf die Unbekannten $x_i \in \{0, 1\}$ schließen, die angeben, ob im i-ten Gefäß Kugeln von 10 g ($x_i = 0$) oder 11 g ($x_i = 1$) liegen.

Beweis: (1) ist nichts anderes als die Binärdarstellung $x_5x_4x_3x_2x_1$ der Dezimalzahl a, wobei die Umrechnung von einem Zahlensystem in das andere eineindeutig ist.

Beispiel: Es sei $a = 22$. Man erhält: $0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 22$. Also liegen in dem 1. und 4. Gefäß Kugeln von 10 g, während im 2., 3. und 5. Gefäß Kugeln von 11 g liegen.

Aufgabe 021221:
Der Begründer des Verfahrens der Linearoptimierung, Prof. Dr. L.W. Kantorowitsch führt folgendes Beispiel an:
In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:
a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.
Es sollen in gleicher Anzahl zwei Sorten Werkstücke angefertigt werden. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinen je Maschine:
a) 10 Stück Sorte 1 oder 20 Stück Sorte 2,
b) 20 Stück Sorte 1 oder 30 Stück Sorte 2,
c) 30 Stück Sorte 1 oder 80 Stück Sorte 2.
Wieviel Werkstücke können mit diesen Maschinen unter den aufgeführten Bedingungen maximal gefertigt werden?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Bezeichne a die Anzahl der Fräsmaschinen zur Produktion von Stücken der Sorte 1, b die Anzahl der Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung zur Produktion von Stücken der Sorte 1 und c die Anzahl der Automaten zur Produktion von Stücken der Sorte 1.
Dann werden pro Tag $u = 10a + 20b + 30c$ Werkstücke der Sorte 1 und
$v = 20(3 - a) + 30(3 - b) + 80(1 - c)$ Werkstücke der Sorte 2 gefertigt.
Offensichtlich ist $u \leq 120$, wobei $v = 0$ für $u = 120$ folgt.
Für $u = 110$, wäre $(a, b, c) = (2, 3, 1)$, d. h. $v = 20$.
Für $u = 100$, wäre $(a, b, c) \in \{(1, 3, 1), (3, 2, 1)\}$, d. h. $v \in \{40, 30\}$.
Für $u = 90$, wäre $(a, b, c) \in \{(0, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 3, 0)\}$, d. h. $v \in \{60, 50, 80\}$.
Also werden maximal 80 Paare von Werkstücken der beiden Sorten gefertigt.

Aufgabe 031125:
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & T & O & M & \cdot & A & T & O & M \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & A & T & O & M
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 ($A \neq= O$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.
Wie lautet die Aufgabe?

Lösung von Henning Thielemann:
Die Aufgabe lässt sich formulieren als die Suche nach zwei natürlichen Zahlen n und k mit $n \cdot n = 10000k + n$ oder auch $n \cdot (n-1) = 10000k$. Das wiederum entspricht der Suche nach einem ganzen n mit $10000|n(n-1)$.
Es gilt $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 6254$.
Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n kann nur eine durch 2 teilbar sein, folglich muss entweder $2^4|(n-1)$ oder $2^4|n$ gelten. Analog kann von $n-1$ und n nur eine Zahl durch 5 teilbar sein, mithin entweder $5^4|(n-1)$ oder $5^4|n$.

Fallunterscheidung:
1. $625|n$ und $16|n$
das bedeutet $10000|n$ und $n \geq 10000$, damit ist n aber nicht mehr vierstellig
2. $625|(n-1)$ und $16|(n-1)$
das bedeutet $10000|(n-1)$, daraus folgt $n = 1$ oder $n \geq 10001$ und n ist wiederum nicht vierstellig
3. $625|n$ und $16|(n-1)$
Die durch 625 teilbaren Zahlen lassen sich als $625m$ mit $m \in \mathbb{N}$ darstellen.

$$\begin{aligned} n - 1 &\equiv 625m - 1 \mod 16 \\ &\equiv m - 1 \mod 16 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Falls n durch 625 teilbar ist, ist $n-1$ genau dann durch 16 teilbar, falls m beim Teilen durch 16 den Rest 1 lässt, also $m \in \{1, 17, 33, \dots\}$. Für $m = 1$ ist $n = 625$ zu klein ($A = 0$) und für $m \geq 17$ ist $n \geq 17 \cdot 625 = 16 \cdot 625 + 625 = 10625$ zu groß.
4. $625|(n-1)$ und $16|n$ Setze $n = 625m + 1$

$$\begin{aligned} n &\equiv 625m + 1 \mod 16 \\ &\equiv m + 1 \mod 16 \\ &\equiv m - 15 \mod 16 \end{aligned}$$

Daraus folgt $m \in \{15, 31, \dots\}$, wobei sich für $m = 15$ ergibt, dass $n = 15 \cdot 625 + 1 = 16 \cdot 625 - 625 + 1 = 10000 - 624 = 9376$ und für $m \geq 31$, dass $n \geq 19376$, was nicht vierstellig ist.
Lösung: ATOM = 9376

Aufgabe 071222:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat.
Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.

Lösung von Kornkreis:
Anmerkung: In dieser Lösung wird angenommen, dass die Menge der Gegenstände endlich sei, was in der Olympiade Punktabzug bringen könnte. In der zweiten Lösung wurde so eine Annahme nicht getroffen.

Seien die verschiedenen Formen beliebig als Form 1, Form 2, ... und die verschiedenen Farben beliebig mit Farbe 1, Farbe 2, .. bezeichnet. Aussage bezeichne im Folgenden die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Angenommen, es gäbe alle Formen in allen Farben. Dann zeigen Form 1 mit Farbe 1 und Form 2 mit Farbe 2 (beide existieren nach Voraussetzung) die zu zeigende Aussage. Angenommen, es gäbe die Form

i in allen Farben und Form j nicht in Farbe k (welche zur Menge der vorkommenden Farben gehöre). Dann zeigen Form i in Farbe k und Form j in einer anderen Farbe die Aussage.
Analog wäre die Aussage gezeigt, wenn es eine Farbe gibt, sodass alle Formen diese Farbe haben.

Nun nehmen wir an, dass es keine Form gibt, die in jeder Farbe vorkommt, und keine Farbe, welche alle Formen haben.
Betrachte eine Form i, welche eine minimale Anzahl von Farben (größer gleich 1) aufweist, eine dieser Farben sei Farbe k. Betrachte die Form j, welche nicht in Farbe k vorkommt. Wegen der Minimalität (bezüglich der Anzahl der Farben) von Form i muss Form j nun in einer Farbe l vorkommen, in welcher Form i nicht vorkommt. Form i mit Farbe k und Form j in Farbe l zeigen die Aussage.

Alternativ-Lösung von StrgAltEntf:
Es bezeichne $f(x)$ die Farbe und $g(x)$ die Form eines Gegenstands x. Nach Voraussetzung gibt es a und b mit $f(a) \neq f(b)$. Ist $g(a) \neq g(b)$, so haben wir die gesuchten Gegenstände gefunden, und wir sind fertig. Anderenfalls gilt $g(a) = g(b)$, und wir betrachten zwei Gegenstände c und d mit $g(c) \neq g(d)$. Ist $f(c) \neq f(d)$, sind wir wieder fertig, da zwei Gegenstände mit den gesuchten Eigenschaften gefunden sind, nämlich c und d. Andernfalls gilt $f(c) = f(d)$. Da $f(a) \neq f(b)$, kann nicht gleichzeitig $f(c) = f(d) = f(a)$ und $f(c) = f(d) = f(b)$ gelten.

Sei also etwa $f(c) = f(d) \neq f(a)$. Ebenso kann nicht gleichzeitig $g(a) = g(c)$ und $g(a) = g(d)$ gelten. Sei also etwa $g(a) \neq g(c)$. Dann ist also $f(a) \neq f(c)$ und $g(a) \neq g(c)$, und die beiden Gegenstände sind gefunden.

Aufgabe 141222:
Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder stehe die Zahl 0.
Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle übrigen Felder mit Hilfe der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 derart auszufüllen, dass
(1) jede in der Tabelle vorkommende Zahl dort höchstens zweimal auftritt,
(2) die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen gleich groß sind,
(3) die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten gleich groß sind, wobei diese (somit viermal auftretende) Summe größer als 15 ist.

Lösung von weird:
Sei s_1 die nach (2) jeweils gleiche Zeilensumme und $s_2 > 15$ die nach (3) jeweils gleiche Spaltensumme. Für die Summe s sämtlicher Tabellenelemente gilt demnach

$$s = 3s_1 = 4s_2 \Rightarrow s > 60 \ \wedge \ 12 \mid s$$

Das kleinste s, welches daher in Frage kommt, ist somit $s = 72$. Des weiteren gilt für s, da auch die 0 in der Tabelle vorkommen muss und jeder Eintrag höchstens zweimal vorkommen darf, die Abschätzung nach oben

$$s \leq 0 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 = 74$$

Daraus folgen unmittelbar die Werte

$$s = 72, \; s_1 = \frac{72}{3} = 24, \;\; s_2 = \frac{72}{4} = 18$$

Dieser Wert $s_2 = 18$ ist aber für die Spalte, in der 0 vorkommt, nur erreichbar, wenn die beiden anderen Elemente der Spalte jeweils 9 sind. Damit ist Zeilensumme $s_1 = 24$ für die Zeile, in der 0 vorkommt nicht mehr erreichbar, da die 9 nun nicht mehr verwendet werden darf und auch die 8 höchstens zweimal vorkommen darf, aber $8 + 8 + 7 + 0 < 24$ ist. Es gibt somit unter den angegebenen Bedingungen keine Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 161223:
In einem Quadrat der Seitenlänge 1 mögen sich 51 Punkte befinden.
Man beweise, dass es zu jeder Anordnung solcher 51 Punkte einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$ gibt, der wenigstens drei dieser Punkte in seinem Innern enthält.

Lösung von OlgaBarati:
Sei der Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ der Umkreis eines Quadrates, so ist die Diagonale von diesem Quadrat $d = 2r = \frac{2}{7}$ und dessen Seitenlänge

$$s = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{(\frac{2}{7})^2}{2}} = \sqrt{\frac{4}{98}} > \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0{,}20$$

Die Gesamtfläche von dem Quadrat mit der Seitenlänge 1 kann nun mit der Anzahl 25 der Quadrate der Seitenlänge $s = 0{,}20$ vollständig ausgefüllt werden. Mit der Anordnung von jeweils 2 Punkten in jedem der 25 Quadrate befinden sich 50 Punkte im Quadrat mit der Seitenlänge 1. Fügen wir nun Punkt Nr. 51 hinzu so erhalten wir bei beliebiger Anordnung aller 51 Punkte stets ein Quadrat bzw. einen Kreis mit $r = \frac{1}{7}$ in dem sich mindestens 3 Punkte befinden. □

Aufgabe 171222:
Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen x, die diesen Bedingungen genügen:

(A1) x ist dreistellig.
(A2) Es gilt: $500 < x < 600$.
(A3) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
(B1) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der der Einer.
(B2) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
(B3) x ist durch 5 teilbar.
(C1) x ist eine Quadratzahl.
(C2) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
(C3) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
(D1) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
(D2) x ist Primzahl.
(D3) x ist ungerade.

Lösung von Kitaktus:
Angenommen, eine Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Es gilt also
(1) A macht genau zwei wahre Aussagen.
(2) B, C und D machen jeweils genau eine oder genau zwei wahre Aussagen.

Wäre A1 falsch, dann wäre auch A2 falsch, im Widerspruch zu (1). Also ist A1 richtig. (3)
Im folgenden sei h die Hunderterziffer der Zahl, z die Zehnerziffer und e die Einerziffer.

Fall 1)

Angenommen A3 wäre richtig, dann ist die Zahl dreistellig und ihre Quersumme müsste zweistellig sein.

Da die Quersumme eine dreistelligen Zahl höchstens 27 ist, muss wegen A3 die erste Ziffer der Quersumme gleich 1 sein.
Sei r die Einerziffer der Quersumme, so gilt wegen A3:

$$h + z + e = 10 + r \Leftrightarrow h + z + e + r = 10 + 2r$$

h, z, e und r sind dabei gerade die vier Ziffern 3, 5, 7, 9. Es gilt also $10 + 2r = h + z + e + r = 24$. Daraus folgt $r = 7$. h, z und e sind also 3, 5 und 9.
Da A2 wegen (1) nicht erfüllt ist, kommen die vier Kombinationen 359, 395, 935 und 953 in Frage.

Für keine der Zahlen 359, 395, 935 und 953 ist B1 erfüllt. Für 359 und 953 (beides sind Primzahlen) ist weder B2 noch B3 erfüllt. Das steht im Widerspruch zu (2).
Die Primfaktorzerlegungen der beiden übrigen Zahlen lauten: $395 = 5 \cdot 79$ und $935 = 5 \cdot 11 \cdot 174$. B2 ist also nur für 935 erfüllt und B3 für 395 und 935.

C1 und C3 gelten weder für 395 noch für 935. Wegen (2) muss also C2 gelten.
Führt man die in C2 beschriebene Prozedur durch, so erhält man die Zahlen 953 und 359. Beides sind (wie oben bereits erwähnt) Primzahlen C2 ist also erfüllt.
Sowohl für 395 als auch für 935 ist D3 wahr und D2 falsch. Unabhängig von D1 ist also die Bedingung aus (2) erfüllt.
Im Fall 1) kommen also nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.

Fall 2)

Angenommen A3 wäre falsch, dann liegt die Zahl wegen (1) und A2 zwischen 500 und 600.
C2 ist dann nicht erfüllt, weil die neu gebildete Zahl am Ende eine 5 hätte und damit durch 5 teilbar wäre. Es muss wegen (2) also entweder C1 oder C3 gelten.
C1 gilt wegen $22^2 = 484 < 500 < 600 < 625 = 25^2$ nur für $23^2 = 529$ und $24^2 = 576$. C3 gilt nur für 555.

Für die drei Zahlen 529, 576 und 555 gilt nun:
B1 ist nur für 555 erfüllt.
B2 ist nur für 555 erfüllt – $529 = 23 \cdot 23$, $576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $555 = 3 \cdot 5 \cdot 37$.
B3 ist nur für 555 erfüllt.
Alle drei Zahlen widersprechen also der Bedingung (2).

Fazit: Es kommen insgesamt nur die Zahlen 395 und 935 in Frage.
Für beide Zahlen sind (1) und (2) erfüllt. Die wahren Aussagen sind:
395: A1, A3, B3, C2, D3
935: A1, A3, B3, C2, D1, D3

Aufgabe 181224:
Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:
(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.
(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.
(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.
(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.
(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.
(6) Die Anzahl der Fußballer ist größer als die Anzahl der Schwimmer, diese wiederum ist größer als die Anzahl der Turner und diese größer als die Anzahl der Leichtathleten.
(7) Die Anzahl der Fußballer ist gleich der Summe der Anzahl der Turner und der Leichtathleten.

In (6) und (7) bezeichnet Fußballer, Schwimmer u. s. w. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.
Gib die Anzahl der Fußballer, der Schwimmer, der Turner und der Leichtathleten in meiner Klasse an!
Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, dass diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei. Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Lösung von weird:
Für eine einfachere Sprechweise verwenden wir im Folgenden die Kurzbezeichnungen F,S,T,L für die 4 Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen und Leichtathletik und auch für ev. Kombinationen derselben. Ferner seien f,s,t,l die Anzahlen der Schüler, welche eine der Sportarten F,S,T,L (ev. in Kombination mit einer anderen) gewählt haben.

Wir denken uns dann der Einfachheit halber die 15 Schüler so durchnummeriert, dass die Schüler mit den Nummern $1-5$ alle S in der Kombination SF bzw. SL gewählt haben, womit diese Kombinationsmöglichkeiten von S lt. Angabe dann „ausgeschöpft“ sind und für die restlichen 10 Schüler dann nur mehr die 5 Möglichkeiten F,T,FL,ST,TL zur Auswahl stehen.
Insbesondere muss als dann von diesen 10 Schülern entweder F oder T (aber nicht beide!) auf jeden Fall gewählt werden, was als dann schon mal auf die wichtige Beziehung

$$(f-3)+t=10$$

zwischen f und t hier führt. Eingesetzt in $t+l=f$, was ja laut (7) gelten soll, ergibt sich daraus weiter die Gleichung

$$2t+l=13 \quad (*)$$

welche gewissermaßen den „Dreh- und Angelpunkt“ für diese Aufgabe hier darstellt. Da nämlich nach jedenfalls (5) $l \geq 2$ gilt, $l \geq 5$ sofort auf den Widerspruch $t \leq 4 < l$ zu (6) führen würde und l außerdem nach (*) ungerade sein muss, bleibt als dann nur mehr als einzige Möglichkeit

$$l=3,\ t=5,\ f=t+l=8 \quad (**)$$

Von den restlichen 10 Schülern muss also genau einmal L (jeweils in Kombination mit F oder T) gewählt werden, und ein- oder zweimal S (jeweils in Kombination mit T), was unter Berücksichtigung von (**) dann alle Bedingungen der Aufgabe hier erfüllt. Insgesamt gilt somit

$$f=8,\ s \in \{6{,}7\},\ t=5,\ l=3$$

mit der einzigen Mehrdeutigkeit, was s betrifft.

Aufgabe 191223:
100 Touristen sind in 100 verschiedenen Städten beheimatet, in jeder dieser Städte genau einer der Touristen.
Keine zwei von ihnen sind miteinander bekannt. Sie unternehmen durch genau diese Städte Rundreisen, und zwar
a) als Touristengruppe (alle 100 Touristen machen gemeinsam ein und dieselben Reisen),
b) als Einzelreisende (jeder legt die Reihenfolge und die jeweilige Aufenthaltsdauer für die einzelnen Städte selbst fest, die Reisen erfolgen unabhängig voneinander).

Ferner treffen sie die folgende sonderbare Vereinbarung:
Je zwei dieser Touristen machen sich genau dann miteinander bekannt, wenn sie sich zum ersten Mal gemeinsam in einer Stadt befinden, in der keiner dieser beiden Touristen beheimatet ist.
Ermitteln Sie im Fall a) und im Fall b) jeweils die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die die folgende Aussage (*) wahr ist!
(*) Die Reisewege und -termine lassen sich so festlegen, dass jeder Tourist spätestens dann mit jedem anderen bekannt geworden ist, wenn er in n Städten gewesen ist.

Lösung von Kitaktus:
Die Städte seien mit 1 bis 100 durchnummeriert. Die gleiche Nummer trägt der Tourist aus der betreffenden Stadt.

Im Fall a) ist n=3.

Dies ist so möglich: Am ersten Tag besuchen alle Touristen Stadt 1, am zweiten Tag Stadt 2 und am dritten Tag Stadt 3.
Seien i und j beliebige Touristen, so ist mindestens eine der drei Zahlen 1, 2 und 3 von i und j verschieden. Diese Zahl sei $x \leq 3$.
Spätestens in der x-ten Stadt machen sich i und j miteinander bekannt, da sie sich zusammen in einer Stadt aufhalten, die von i und j verschieden ist. Mit weniger als 3 besuchten Städten ist das nicht möglich, da die beiden Bewohner der ersten beiden von der Gruppe besuchten Städte sich in beiden Städten nicht miteinander bekannt machen.

Im Fall b) ist n=2.

Die Touristen 2 bis 100 starten in Stadt 1, Tourist 1 startet in Stadt 3.
Als erstes wechselt Tourist 2 die Stadt und fährt nach 3. (a)
Dann fahren die Touristen 3 bis 99 nach Stadt 2. (b)
Anschließend wechselt Tourist 1 nach Stadt 2. (c)
Zu diesem Zeitpunkt hat jeder Tourist genau 2 Städte besucht.

Tourist 1 hat Tourist 2 in Stadt 3 kennengelernt (zwischen (a) und (c)).
Tourist 1 hat die Touristen 3 bis 99 in Stadt 2 kennengelernt (nach (c)).
Die Touristen 2 bis 99 haben sich paarweise in Stadt 1 kennengelernt (vor (a)).
Mit n=1 sind die Bedingungen nicht erfüllbar. Dazu müssten sich alle Touristen in der selben Stadt kennenlernen, weil sie die Stadt nicht wechseln, bevor sich alle kennen. Der Tourist, der aber aus genau dieser Stadt kommt, hat noch keinen kennengelernt.

Aufgabe 261223:
In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem zehn Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft spielt in einer Hin- und einer Rückrunde jeweils genau einmal gegen alle anderen.
Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, dass im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem haben sich folgende Bedingungen als notwendig herausgestellt:
(1) An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
(2) In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens fünf Mannschaften anwesend.
(3) Jede Mannschaft kann die Rückrunde erst beginnen, wenn sie alle Spiele der Hinrunde abgeschlossen hat.
Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in 10 Tagen durchgeführt werden kann.
Man untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch möglich ist, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede Mannschaft hat gegen genau neun andere Mannschaften je genau zwei Spiele auszutragen, insgesamt also genau 18 Spiele.
Wenn es möglich wäre, das Turnier in 9 Tagen durchzuführen, folgt aus (1), dass jede Mannschaft an jedem Spieltag genau zwei Spiele zu bestreiten hätte. Hiernach folgte aus (3), dass jede Mannschaft an den ersten vier Tagen acht ihrer Hinspiele, an den letzten vier Tagen acht ihrer Rückspiel und am mittleren, fünften Spieltag genau ein Hinspiel und ein Rückspiel auszutragen hätte.

Da jede Mannschaft an jedem Spieltag zu ihren beiden Spielen anwesend sein müsste, so müssten in jeder der beiden Schwimmhallen wegen (2) stets 5 Mannschaften zu ihren beiden Spielen anwesende sein; nach Voraussetzung bliebe an jedem Tag die Verteilung der Mannschaften auf die beiden Hallen unverändert. Das würde auch für den fünften Spieltag gelten.

Von den fünf Mannschaften in einer Halle hätte an diesem Tag also jede genau ein Hinspiel (und genau ein Rückspiel) auszutragen. Da in jedem Spiel je zwei Mannschaften gegeneinander antreten, hätte man folglich die fünf Mannschaften für die Hinspiele so in Paare aufzuteilen, dass jede Mannschaft in genau einem dieser Paare vorkommt. Das ist wegen der ungeraden Anzahl 5 der Mannschaften nicht möglich.

Die Annahme, dass das Turnier in 9 Tagen durchführbar wäre, führt somit auf einen Widerspruch; das Turnier kann unter Einhaltung der genannten Bedingungen nicht in 9 Tagen durchgeführt werden.

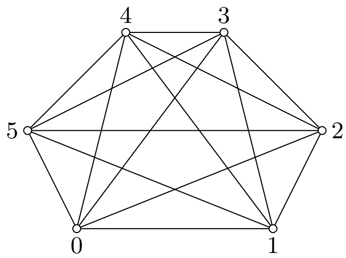
Aufgabe 271224:
a) Über eine Menge M, die aus genau 1987 Personen besteht, wird vorausgesetzt, dass jede Person aus M mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Es gibt eine aus mindestens 332 Personen bestehende Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.
b) Man gebe ein Beispiel für eine Menge M aus genau 1988 Personen, für die folgende Aussagen zutreffen:
Jede Person aus M ist mit genau 5 Personen aus M bekannt; jede Untermenge U von M mit der Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist, besteht aus höchstens 333 Personen.
In diesen Aufgaben werde stets angenommen, dass eine Person X genau dann mit einer Person Y bekannt ist, wenn Y mit X bekannt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Nach Voraussetzung lassen sich die Personen aus M folgendermaßen mit $P_0, P_1, ..., P_{1986}$ bezeichnen:

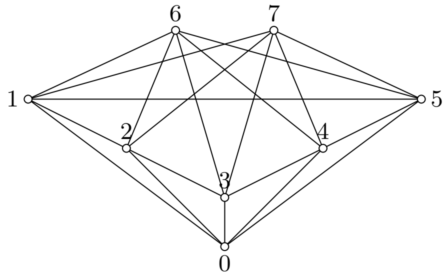
P_0 sei eine beliebige Person aus M. Da sie mit höchstens 5 anderen bekannt ist, kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass gilt:
P_0 ist mit keiner der Personen $P_6, P_7, ..., P_{1986}$ bekannt. (0)
P_6 ist mit höchstens 5 anderen Personen aus M bekannt, also erst recht mit höchstens 5 der Personen $P_7, ..., P_{1986}$. Man kann daher deren Bezeichnung, ohne dass (0) beeinträchtigt wird, so wählen, dass zusätzlich gilt:
P_6 ist mit keiner der Personen $P_{12}, P_{13}, ..., P_{1986}$ bekannt. (1) In dieser Weise kann man fortsetzen (und außer für $n = 0$, $n = 1$) für weitere $n = 2,3,...$ erhalten:
P_{6n} ist mit keiner der Personen $P_{6n+6}, P_{6n+7}, ..., P_{1986}$ bekannt. (n)
Als letzte dieser Aussagen erhält man für $n = 330$:
P_{1980} ist nicht mit P_{1986} bekannt. (330)

Die Menge $U = \{P_0, P_6, ..., P_{1980}, P_{1986}\}$, die aus 332 Personen besteht, hat hiernach die besagte Eigenschaft, dass keine Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist.

(b) Ein Beispiel der geforderten Art kann folgendermaßen gegeben werden:



P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$



P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$

Es sei $M = \{P_0, P_1, ..., P_{1987}\}$. Für jedes $n = 0,1,2,...,329$ sei definiert: In der Menge A_n der 6 Personen P_{6n+i} $(i = 0,...,5)$ ist jede mit jeder anderen bekannt. (linke Abbildung)

In der Menge B der 8 Personen P_{1980+i} $(i = 0,...,7)$ seien die Bekanntschaften wie in der rechten Abbildung definiert. Darüber hinaus seien in M keine Bekanntschaften vorhanden.
Nach dieser Definition ist einerseits, wie gefordert, jede Person aus M mit genau 5 anderen Personen aus M bekannt.

Wenn andererseits U irgendeine Untermenge von M ist, die mehr als 333 Personen enthält, so kann folgendermaßen bewiesen werden, dass mindestens einer Person aus U mit einer anderen Person aus U bekannt ist:

Da U mindestens 334 enthält, muss U entweder mit mindestens einer der 330 Mengen $A_0, A_1, ..., A_{329}$ mehr als eine Person gemeinsam haben oder andernfalls mit der Menge B mindestens 4 Personen gemeinsam haben.
Im ersten Fall sind die beiden Personen, die U mindestens mit der betreffenden Menge A_n gemeinsam hat, miteinander bekannt.
Im zweiten Fall gilt: Gehören etwa mindestens die 4 Personen X_0, X_1, X_2, X_3 aus B zu U, so gibt es außer ihnen nur 4 weitere Personen in B, also muss X_0, da mit 5 anderen Personen aus B bekannt, mit einer der Personen X_1, X_2, X_3 bekannt sein.

Aufgabe 291224:
Man löse die folgende Aufgabe
a) für $n = 8$ und $k = 5$,
b) für $n = 9$ und $k = 6$.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen $1, 2, ..., n^2$ in ein schachbrettartiges $n \times n$-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich k ist!
Hinweise:
1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, dass jedes Feld genau eine Zahl erhält und dass jede Zahl genau einmal verwendet wird.
2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

Lösung von Nuramon:
Es muss in beiden Fällen zwei solche benachbarte Felder geben.
Angenommen nicht. Dann gäbe es eine Eintragung, bei der je zwei benachbarte Felder Zahlen enthalten, deren Differenz höchstens $k - 1$ ist.
Für je zwei Felder F, F' gibt es eine Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$ von Feldern, so dass $F_1 = F, F_m = F'$ und aufeinander folgende Folgenglieder benachbart sind und $m \leq 2n - 1$ gilt. Daher gilt, dass die Differenz der Zahlen, die in F bzw. F' stehen nicht größer als $(2n - 2)(k - 1)$ ist.

Im Fall a) erhält man damit durch Betrachtung der Felder, die die Zahlen 1 bzw. 64 enthalten, den Widerspruch $63 \leq (2n-2)(k-1) = (2 \cdot 8 - 2)(5-1) = 56$.

Im Fall b) folgt, wegen $81 - 1 = 80 = (2 \cdot 9 - 2)(6-1)$, dass die Zahlen 1 und 81 in sich diagonal gegenüberliegenden Eckfeldern des Schachbrettes eingetragen sein müssen. Dann ist das Feld, auf dem die Zahl 80 eingetragen ist, aber höchstens $(2 \cdot 9 - 2) - 1 = 15$ Felder weit entfernt von dem Feld mit der Zahl 1. Das führt zum Widerspruch $79 = 80 - 1 \leq 15 \cdot (6-1) = 75$.

Aufgabe 321224:
Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando rechts um! drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.
Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.
Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muss, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.

Lösung von Kornkreis:
Angenommen, es gäbe eine Anfangssituation (mit endlich vielen Schülern), für die der beschriebene Umdrehprozess nie endet. Dann muss es insbesondere einen Schüler S_i geben, der sich im Laufe dieses Prozesses unendlich oft dreht.
Dieser Schüler kann nicht am Rand stehen, da er dann nach höchstens einer 180°-Drehung keinen Schüler mehr anschauen und sich folglich nicht mehr drehen würde. Der Schüler S_i hat also einen linken Nachbarn S_{i-1}, dem er unendlich oft ins Gesicht schaut, da sich S_i unendlich oft dreht.
Wenn sich S_i und S_{i-1} ins Gesicht schauen, dreht sich aber auch S_{i-1} um 180° weg. Da sich S_i und S_{i-1} unendlich oft ins Gesicht schauen, muss sich also auch S_{i-1} unendlich oft drehen. Iterativ folgt, dass sich der Schüler, der ganz links am Rand steht, unendlich oft drehen muss. Wie wir bereits festgestellt haben, ist dies aber nicht möglich.

Folglich gibt es für jede (der Aufgabenstellung entsprechende) Konfiguration endlich vieler Schüler einen Zeitpunkt, ab dem sich kein Schüler mehr dreht.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Stehen zwei benachbarte Schüler so, dass sie sich gegenseitig anschauen, so können sie auch, anstatt sich beide um 180° zu drehen, aneinander vorbeigehen: Bei beiden Bewegungen ist die entstehende Folge von nach rechts bzw. links schauenden Schülern gleich.

Offensichtlich kann aber jeder Schüler an jedem anderen höchstens einmal vorbeilaufen. Da es nur endlich viele Schüler sind, endet der Prozess also zwangsläufig.

III Runde 3

Aufgabe V11135:
Unter 13 gleichgroßen Kugeln weicht das Gewicht einer Kugel von dem der anderen ab.
a) Wie kann man mit 3 Wägungen (Balkenwaage) ermitteln, welche Kugel es ist?
b) Wann kann man entscheiden, ob die Kugel leichter oder schwerer als die übrigen ist ?

Lösung von Steffen Polster:
a) 1. Wägung: Es werden für jede Waagschale vier Kugeln ausgewählt. Fünf Kugeln werden nicht gewogen.

1.1. Die Waage zeigt Gleichgewicht. Dann sind die 8 Kugeln neutral. Drei dieser Kugeln wiegt man (rechte Seite) gegen 3 noch nicht verwendete Kugeln (linke Seite).

1.1.1. Ist die linke Seite leichter, so ist eine von den drei Kugeln leichter. Zwei dieser Kugeln werden gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.1.2. Ist die linke Seite schwerer, so ist eine von den drei Kugeln schwerer. Analog zu 1.1.1. bestimmt man diese.

1.1.3. Keine Seite ist leichter. Dann muss die gesuchte Kugel unter den zwei bisher noch bei keiner Wägung verwendeten Kugeln sein. Eine von beiden Kugeln vergleicht man mit einer neutralen. Bei Gleichgewicht ist die noch nicht verwendete die gesuchte, andernfalls findet man die gesuchte, die entweder zu leicht oder zu schwer ist.

1.2. Die Waage zeigt kein Gleichgewicht. O. B. d. A. sei die linke Seite leichter. Auf die eine Waagschale werden dann drei von der leichten Seite und eine von der schweren Seite gegen eine der leichten Seite und 3 bisher noch nicht verwendete Kugeln gewogen.

1.2.1. Die linke Seite ist leichter. Damit ist eine von drei Kugeln leichter. Nun werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen leichter, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel leichter.

1.2.2. Beide Seiten sind gleich schwer. Damit muss eine der drei Kugeln der rechten Seite der 1.Wägung (die bei der 2.Wägung nicht benutzt wurden) muss damit schwerer sein. Es werden zwei dieser Kugeln gewogen. Ist eine von ihnen schwerer, so hat man die gesuchte Kugel gefunden. Sind beide gleich schwer, so ist in dieser Wägung nicht verwendete Kugel schwerer.

1.2.3. Die linke Seite ist schwerer. Dann kann die eine Kugel der linken Seite, die von der schweren Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu schwer, oder die eine Kugel der rechten Seite, die von der leichten Seite der 1.Wägung genommen wurde, zu leicht. Die vielleicht zu schwere Kugel wird mit einer der neutralen Kugeln verglichen. Entweder ist sie schwerer oder die nicht verwendete Kugel ist zu leicht.

b) In allen Fällen, außer dem Fall 1.1.3. bei dem die allerletzte nicht verwendete Kugel die gesuchte ist, kann man entscheiden, ob die gesuchte Kugel zu leicht oder zu schwer ist. In diesem einen Fall allerdings nicht.

Aufgabe V11235:
Gegeben sind 13 gleich große Kugeln, von denen eine im Gewicht von den übrigen abweicht, also entweder leichter oder schwerer als die übrigen ist. Jemand behauptet, er könne mit drei Wägungen feststellen
a) welche Kugel im Gewicht abweicht,
b) ob sie leichter oder schwerer ist, falls er eine 14. Kugel benutzen darf, von der er weiß, dass ihr Gewicht nicht abweicht.
Anmerkung: Es ist bekannt, dass bei jeder Wägung je 10 Kugeln benutzt werden. Die zu untersuchenden Kugeln sind fortlaufend nummeriert und tragen die Nummern 1 bis 13, während die 14. Vergleichskugel die Nummer 0 erhält.
Bezeichnet man die Ergebnisse der drei Wägungen mit a, b und c und gibt ihnen den Wert + 1, wenn die linke Waagschale überwiegt, - 1, wenn die rechte überwiegt, und 0, wenn Gleichgewicht besteht, dann kann man die Nummer der gesuchten Kugel aus der Gleichung

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

errechnen, wobei $|n|$ die gesuchte Nummer ist. Ist $n > 1$, so ist die Kugel schwerer, ist $n < 1$, so ist sie leichter als die übrigen Kugeln.
Wie müssen die Kugeln bei den drei Wägungen verteilt werden, damit man stets das richtige Ergebnis erhält?

Lösung von OlgaBarati:
Vor Wägung a ist jede der durchnummerierten Kugeln mit $\{{}^uK_1^{\pm}, {}^uK_2^{\pm}, ...{}^uK_{12}^{\pm}, {}^uK_{13}^{\pm}\}$ (u)nbestimmt. Nur die Kugel ${}^bK_0^0$ ist als Kugel ohne Gewichtsabweichung ist (b)estimmt.

Wägung a erfolgt mit der Aufteilung links $\{{}^bK_0^0, {}^uK_6^{\pm}, {}^uK_8^{\pm}, {}^uK_{10}^{\pm}, {}^uK_{12}^{\pm}\}$ und rechts mit $\{{}^uK_5^{\pm}, {}^uK_7^{\pm}, {}^uK_9^{\pm}, {}^uK_{11}^{\pm}, {}^uK_{13}^{\pm}\}$. Die Kugeln $\{{}^uK_1^{\pm}, {}^uK_2^{\pm}, {}^uK_3^{\pm}, {}^uK_4^{\pm}\}$ werden im Durchgang a nicht gewogen.

$$a = (+1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^{+}, {}^uK_8^{+}, {}^uK_{10}^{+}, {}^uK_{12}^{+}\}, \{{}^uK_5^{-}, {}^uK_7^{-}, {}^uK_9^{-}, {}^uK_{11}^{-}, {}^uK_{13}^{-}\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (-1): \ \{{}^bK_0^0, {}^uK_6^{-}, {}^uK_8^{-}, {}^uK_{10}^{-}, {}^uK_{12}^{-}\}, \{{}^uK_5^{+}, {}^uK_7^{+}, {}^uK_9^{+}, {}^uK_{11}^{+}, {}^uK_{13}^{+}\}, \{{}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0\}$$

$$a = (\pm 0): \ \{{}^bK_0^0, {}^bK_6^0, {}^bK_8^0, {}^bK_{10}^0, {}^bK_{12}^0\}, \{{}^bK_5^0, {}^bK_7^0, {}^bK_9^0, {}^bK_{11}^0, {}^bK_{13}^0\}, \{{}^uK_1^{\pm}, {}^uK_2^{\pm}, {}^uK_3^{\pm}, {}^uK_4^{\pm}\}$$

Anmerkung: Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden jeweils nur die mit der Wägung zu untersuchenden Kugeln genannt. Die neutralen Kugeln, mit denen die Stückzahl auf zehn aufgefüllt wird, werden nicht einzeln benannt. Es sind für alle Fälle immer ausreichend bestimmte neutrale Kugeln vorhanden.

Für $a = (\pm 0)$ ist für die vier Kugeln, von denen nicht bekannt ist, welche davon im Gewicht abweicht, mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.
Wägung b, links $\{{}^uK_2^{\pm}, {}^uK_4^{\pm}\}$, rechts ${}^uK_3^{\pm}$, die Kugel${}^uK_1^{\pm}$ wird im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_2^{+}, {}^uK_4^{+}\}, {}^uK_3^{-}, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^{+}$, rechts ${}^uK_2^{+}$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^{-}$

$c = (+1): \ {}^bK_4^{+}, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0$ Formel $(0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(0+1+1)} = (+4)$
$c = (-1): \ {}^bK_2^{+}, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^{-}, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (-1): \ \{{}^uK_2^{-}, {}^uK_4^{-}\}, {}^uK_3^{+}, {}^bK_1^0$

Wägung c, links ${}^uK_4^{-}$, rechts ${}^uK_2^{-}$, nicht gewogen wird ${}^uK_3^{+}$

$c = (+1): \ {}^bK_4^0, {}^bK_1^0, {}^bK_2^{-}, {}^bK_3^0$
$c = (-1): \ {}^bK_2^0, {}^bK_1^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^{-}$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_3^{+}, {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_4^0$

$b = (\pm 0): \ \{{}^bK_2^0, {}^bK_4^0\}, {}^bK_3^0, {}^uK_1^{\pm}$

Wägung c, links ${}^uK_1^{\pm}$, rechts ${}^bK_0^0$

$c = (+1): \ {}^bK_1^{+}, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (-1): \ {}^bK_1^{-}, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_1^0, {}^bK_2^0, {}^bK_3^0, {}^bK_4^0$

Für $a = (1)$ ist für vier Kugeln, von denen eine möglicherweise schwerer ist und für fünf Kugeln von denen möglicherweise eine leichter ist, ist mit zwei Wägungen zu bestimmen, welche abweicht und ob sie schwerer oder leichter ist.

Wägung b, links $\{{}^uK_5^-, {}^uK_{12}^+, {}^uK_7^-\}$, rechts $\{{}^uK_{11}^-, {}^uK_6^+, {}^uK_{13}^-\}$, die Kugeln ${}^uK_8^+$, ${}^uK_9^-$, ${}^uK_{10}^+$ werden im Durchgang b nicht gewogen.

$b = (+1): \ \{{}^uK_{12}^+, {}^uK_{11}^-, {}^uK_{13}^-\}$

Wägung c, links ${}^uK_{13}^-$, rechts ${}^uK_{11}^-$, nicht gewogen wird ${}^uK_{12}^+$

$c = (+1): \ {}^bK_{13}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1)(-1)^{(1+1+1)} = (-13)$
$c = (-1): \ {}^bK_{11}^-$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1))(-1)^{(1+1-1)} = (-11)$
$c = (\pm 0): \ {}^bK_{12}^+$ Formel $(1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0)(-1)^{(1+1+0)} = (12)$

$b = (-1): \ \{{}^uK_5^-, {}^uK_6^+, {}^uK_7^-\}$
Analog.

$b = (\pm 0): \ \{{}^uK_8^+, {}^uK_{10}^+, {}^uK_9^-\}$
Analog.

Die Behauptung stimmt und berechnet sich für $a = (-1)$ analog.

Die Auswahl der Kugeln für die Wägevorgänge ist damit auch so gewählt, dass mit der Formel

$$n = (9a + 3b + c) \cdot (-1)^{a+b+c}$$

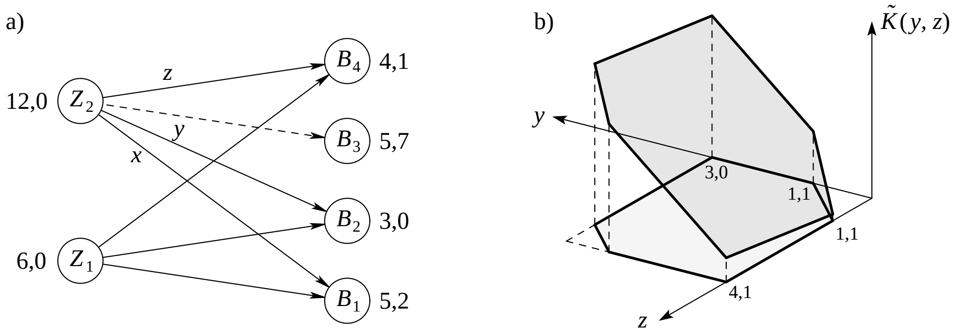
die abweichende Kugel zu bestimmen ist und zwar so, dass das Vorzeichen plus oder minus angibt, ob die Kugel leichter oder schwerer ist. Es sind somit für Wägung a die Werte $|n| \leq 4$ und bei Wägung b die Werte $8 \leq |n| \leq 10$ von der Wägung auszuschließen.

Aufgabe 011231:
Zwei Ziegeleien produzieren 6 Millionen bzw. 12 Millionen Ziegel. Sie sollen vier Baustellen versorgen, die einen Bedarf von 5,2; 3,0; 5,7 bzw. 4,1 Millionen Ziegel haben.
Die Entfernungen (in km) zwischen den zwei Ziegeleien und den vier Baustellen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

Baustelle	1	2	3	4
Ziegelei 1	28	30	37	21
Ziegelei 2	26	36	18	20

Wieviel Ziegel müssen von der 1. bzw. 2. Ziegelei zu den einzelnen Baustellen transportiert werden, damit die Gesamttransportkosten möglichst gering sind?
Es wird angenommen, dass die Transportkosten der Entfernung proportional sind. Die Baustelle 3 soll dabei nur von der Ziegelei 2 beliefert werden.

Lösung von Carsten Balleier:



Zur Bestimmung der optimalen Belieferung muss die Kostenfunktion in Abhängigkeit von den beeinflussbaren Parametern ausgedrückt werden. Diese Funktion ist die Summe der Transportkosten zu den einzelnen Baustellen bzw. (aufgrund der Proportionalität) die Entfernung, über die hinweg die Ziegel transportiert werden.

Wenn man die Lieferungen von Ziegelei 2 (Z_2) - in Millionen Ziegeln - an die Baustellen 1, 2 und 4 (B_1 usw.) mit x, y und z bezeichnet (B_3 braucht nicht beachtet zu werden), erhält man

$$K(x,y,z) = 28(5{,}2-x) + 26x + 30(3{,}0-y) + 36y + 21(4{,}1-z) + 20z = 321{,}7 - 2x + 6y - z$$

Als Nebenbedingung gilt dabei $x+y+z = 6{,}3$, d. h. Z_2 liefert 6,3 Millionen Ziegel an B_1, B_2 und B_4; die restlichen 5,7 Millionen gehen an B_3. Die Funktion K soll minimal werden.
Das ist der Fall, wenn x und z möglichst große, y dafür einen kleinen Wert annimmt, wie man an den Vorzeichen sieht.
Die Nebenbedingung fügt man ein, in dem man $\tilde{K}(y,z) = K(6{,}3-y-z, y, z) = 309{,}1 + 8y + z$ festlegt.

Zu beachten sind weiterhin $0 \leq y \leq 3{,}0$ und $0 \leq z \leq 4{,}1$ (nur dieser Bereich ist für Lieferungen der Z_2 an B_2 bzw. B_4 sinnvoll), sowie $1{,}1 \leq y+z \leq 6{,}3$ (B_1 kann höchstens 5,2 Millionen Ziegel von Z_2 bekommen).

In $\tilde{K}$ haben sowohl y als auch z positive Vorzeichen, beide müssen also so klein wie möglich werden. Den kleinsten Wert für $\tilde{K}(y,z)$ erhält man für $y=0$ und $z=1{,}1$, da y den größeren Vorfaktor hat. Es folgt $x=5{,}2$.
Zusammengefasst: Z_1 liefert je 3 Millionen Ziegel an B_2 und B_4, Z_2 liefert 5,2 Millionen an B_1 und 1,1 Millionen an B_4.

Hinweis: Das aus der Schule bekannte Verfahren, (lokale) Minima mittels Ableitungen zu bestimmen, funktioniert hier nicht. Grund dafür ist, dass die Funktion K (bzw. $\tilde{K}$) in ihren Argumenten linear ist.
Extrema treten in diesem Fall nur global auf an den Rändern der durch die Ungleichungen festgelegten Bereiche.

Aufgabe 041231:
In einem mathematischen Zirkel einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hatte, bestimmen soll. Nach seiner Rückkehr erhält er die folgenden Auskünfte:

1. a ist eine rationale Zahl.
2. a ist eine ganze Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4. a ist eine ganze Zahl, die durch 7 teilbar ist.

5. a ist eine reelle Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt. $0 < a^3 + a < 8000$.
6. a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, dass von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.
Wie lautet die Zahl a? Wie hat der siebente Teilnehmer die Zahl ermittelt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Auskunft 2 sei wahr, dann ist auch die Auskunft 1 wahr. Das ist aber nach der obigen Voraussetzung unmöglich. Also ist die Auskunft 1 wahr und die Auskunft 2 falsch.
Da die Auskunft 1 wahr ist, ist die Auskunft 3 falsch und die Auskunft 4 wahr. a ist also eine der Zahlen

$$\ldots, -35, -21, -7, 7, 21, 35, \ldots, 7(2n+1), \ldots$$

(n ganze Zahl). Nun ist die Auskunft 2 falsch, also ist auch die Auskunft 6 falsch und die Auskunft 5 richtig. Die Zahl a ist also positiv.
Nun ist $7^3 + 7 < 8000$, jedoch bereits $21^3 + 21 > 20^3 + 20 > 8000$. Also folgt $a = 7$.

Aufgabe 061235:
Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, n$ nebeneinander aufgestellt.
Ein Umordnungsbefehl besteht darin, dass jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ entsteht.

Lösung von cyrix:
Eine mögliche Variante lautet wie folgt:
1. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu $n+1$ ergänzen, tauschen die Plätze. (Ist $n+1$ gerade, so bleibt der Schüler mit Nr. $\frac{n+1}{2}$ an seinem Platz stehen.)

2. Umordnungsbefehl:
Jeweils zwei Schüler, deren Nummern sich zu n ergänzen, tauschen Plätze. (Der Schüler mit Nr. n und, falls existent, der Schüler mit Nr. $\frac{n}{2}$ bleibt/ bleiben stehen.)

Durch den ersten Umordnungsbefehl befindet sich der Schüler mit Nummer k nach dessen Ausführung auf der Position $n+1-k$, da er mit dem Schüler dieser Nummer getauscht hat. (Ist n+1 gerade, so hätte nur der Schüler mit Nummer $k = \frac{n+1}{2}$ keinen Tauschpartner. Aber er soll ja dann auch stehen bleiben und befindet sich genauso an der entsprechenden Position $n+1-k = \frac{n+1}{2} = k$.)

Tauscht nun im zweiten Umordnungsbefehl der Schüler mit Nummer ℓ den Platz mit dem Schüler mit Nummer $n-\ell$, so befand sich jener zweiter nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-(n-\ell) = \ell+1$.
Der Schüler mit Nummer ℓ ist also durch beide Umordnungsbefehle nun an die Position $\ell+1$, also einen Platz nach rechts gerutscht. Einzige hierbei noch nicht betrachtete Schüler sind diejenigen, die beim zweiten Umordnungsbefehl stehen bleiben.
Das ist einerseits der Schüler mit Nummer n. Dieser steht nach dem ersten Umordnungsbefehl auf Position $n+1-n = 1$, also ganz vorn, und bleibt da auch – wie gewünscht – stehen. Und zweitens, falls n gerade ist, der Schüler mit Nummer $\frac{n}{2}$.
Dieser befand sich nach dem ersten Umordnungsbefehl an Position $n+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}+1$, war also gegenüber der Ausgangsanordnung schon um einen Platz nach rechts gerückt. Bleibt er beim zweiten Umordnungsbefehl nun stehen, ist er schon an der gewünschten Position.

Damit ist gezeigt, dass nach Ausführung dieser beiden Umordnungsbefehle aus der Start-Anordnung die gewünschte Zielanordnung erreicht wird.

Aufgabe 071235:
In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)
Beweisen Sie, dass man drei verschiedene Stoffsorten derart finden kann, dass in ihnen alle sechs Farben auftreten!

Lösung von cyrix:
Die Farben seien von 1 bis 6 durchnummeriert.
O. B. d. A. existiere der Stoff mit den Farben 1 und 2, den wir kurz mit 1-2 bezeichnen wollen. Dann gilt für die vier übrigen Farben der Menge $R = \{3,4,5,6\}$, dass sie untereinander noch jeweils mit mindestens einer weiteren Farbe aus R in einem gemeinsamen Stoff vorkommen müssen, denn jede Farbe f von ihnen muss neben den (ggf. existierenden) Stoffen 1-f und 2-f noch in mindestens einem weiteren Stoff vorkommen.
O. B. d. A. existiere der Stoff 3-4. Nun führen wir eine Fallunterscheidung danach durch, in welchen Stoffen die Farben 5 und 6 enthalten sind:

1. Fall: Es gibt den Stoff 5-6. Dann bilden die drei Stoffe 1-2, 3-4 und 5-6 eine gewünschte Auswahl von 3 Stoffen mit allen sechs Farben.

2. Fall: Es gibt den Stoff 5-6 nicht, aber die Farben 5 und 6 sind mit verschiedenen Farben aus $\{3,4\}$ in einem Stoff verwoben. O. B. d. A. existieren also die Stoffe 3-5 und 4-6. Dann bilden die Stoffe 1-2, 3-5 und 5-6 eine entsprechende Stoffauswahl.

3. Fall: Die Farben 5 und 6 tauchen nur gemeinsam mit einer der beiden Fabren 3 oder 4 in einem Stoff auf, d. h., es gibt o. B. d. A. die Stoffe 3-5 und 3-6, aber weder 4-5, 4-6 noch 5-6. Damit existiert aber für jede der Farben 4, 5 und 6 jeweils nur eine weitere Farbe aus R, mit der sie gemeinsam in einem Stoff vorkommt. Demnach muss für jede dieser drei Farben f jeweils der Stoff 1-f als auch 2-f tatsächlich existieren, damit f in mindestens drei verschiedenen Stoffen vorkommt. Dann bilden die Stoffe 1-4, 2-5 und 3-6 eine gewünschte Auswahl.

Aufgabe 091232:
Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot. Sie einigten sich, dass jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, dass Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so dass diese Wünsche erfüllt sind!

Lösung von cyrix:
Wir führen eine Fallunterscheidung danach durch, welche der Fahrten von Dieter übernommen wird:

Fall 1: Dieter fährt als Erster. Dann fährt Christian nach 1. als Dritter und nach 3. Bodo nicht als Zweiter, also Vierter, sodass für Axel nur der zweite Platz verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Dieter, Axel, Christian, Bodo, welche der Bedingung 2 widerspricht. In diesem Fall gibt es also keine gültige Lösung.

Fall 2: Dieter fährt als Zweiter. Dann fährt nach 2. Christian als Erster und nach 3. Axel nicht als Dritter, also als Vierter, womit für Bodo nur die dritte Position verbleibt. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Dieter, Bodo, Axel. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 3: Dieter fährt als Dritter. Dann fährt nach 4. Axel als Zweiter. Nach 2. fährt Christian als Erster und schließlich Bodo als Vierter. Es ergibt sich die Reihenfolge Christian, Axel, Dieter, Bodo. Die Probe bestätigt diese Lösung.

Fall 4: Dieter fährt als Vierter. Dann fährt nach 5. Christian als Dritter, Axel als Erster und Bodo schließlich als Zweiter. Es ergibt sich die Reihenfolge Axel, Bodo, Christian, Dieter, die aber 2. widerspricht, sodass es in diesem Fall keine Lösung gibt.

Es gibt also genau zwei zulässige Reihenfolgen.

Aufgabe 111233:

21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abbildung angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, dass jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt.
Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.
Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden lässt.

Lösung von weird:
Ein 3×7-Tableau, welches ganz oder teilweise mit den Ziffern 1,2,3 ausgefüllt ist, heißt im Folgenden zulässig, wenn folgende Bedingungen für die bereits eingetragenen Ziffern erfüllt sind:
- Jede Ziffer kommt in dem Tableau höchstens dreimal vor
- Für jede Spalte sind alle ihre Ziffern verschieden
- Für je zwei verschiedene Spalten gibt es höchstens eine Ziffer, welche in beiden Spalten vorkommt.

Ferner denken wir uns die Kästchen eines Tableaus in dem Sinn geordnet, als ein Kästchen vor einem anderen kommt, wenn seine Spaltennummer kleiner ist, und bei gleicher Spaltennummer, wenn seine Zeilennummer dann kleiner ist. Des weiteren nennen wir im Folgenden ein Kästchen frei, wenn in dieses bis dahin noch keine Ziffer eingetragen wurde.

Folgender Greedy-Algorithmus liefert dann das gewünschte Ergebnis:
Beginnend mit dem noch leeren Tableau, welches offensichtlich zulässig ist, fügt man einfach jede Ziffer der Folge

$$1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7$$

in genau dieser Reihenfolgen an der ersten freien Stelle in das Tableau ein, für welches dieses weiterhin zulässig ist. Das Endtableau unten erfüllt dann offensichtlich alle Bedingungen der Aufgabe hier:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

Aufgabe 121233:
Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: „Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"
Zuschauer: „Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."
Reporter: „Wie wurden die Punkte verteilt?"
Zuschauer: „In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."
Reporter: „In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"
Zuschauer: „Ich weiß es nicht."
Reporter: „Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"
Zuschauer: „Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!
a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?
(Es sei bekannt, dass in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

Lösung von weird:
Es bezeichne im Folgenden k die Anzahl der Wettkämpfe und P die Gesamtzahl der für jeden Wettkampf zu verteilenden Punkte. Da laut Angabe die Gesamtpunktezahl für alle Wettkämpfe zusammengenommen $40 (= 9 + 22 + 9)$ beträgt, wissen wir, dass $k \cdot P = 40$ sein muss. Ferner ist $P \geq 6 (= 3 + 2 + 1)$, da die Punktezahlen für die einzelnen Platzierungen laut Angabe verschiedene positive ganze Zahlen sind. Dies schränkt dann auch k auf die drei Fälle $k = 2{,}4{,}5$ ein, welche wir nachfolgend untersuchen.

1.Fall: $k = 2$, $P = 20$
Hier müsste dann ADorf allein für seinen Sieg im Weitsprung schon mehr als 10 Punkte bekommen, obwohl seine Geamtpunktzahl nur 9 beträgt, Widerspruch!
2.Fall: $k = 4$, $P = 10$
Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es dann mindestens 6 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der Höchstwert für einen solchen Sieg, sonst wäre die Punktestände von jeweils 9 für ADorf und CeDorf nicht möglich. Dies impliziert dann automatisch die Punkteverteilung 6,3,1 für die drei Plätze in jedem Wettkampf, womit aber z. B. BeDorf dann nicht auf seine 22 Punkte kommt.
3. Fall: $k = 5$, $P = 8$
Für einen einzelnen Sieg in einem Wettkampf müsste es diesmal mindestens 5 Punkte geben, damit BeDorf auf seine Gesamtzahl von 22 Punkten kommt. Dies ist aber zugleich der höchste Wert für einen Sieg, für den eine additive Zerlegung von P in 3 verschiedene positve ganze Zahlen möglich ist, nämlich in diesem Fall $P = 8 = 5 + 2 + 1$. Abgesehen von der Reihenfolge der Summanden gibt es aber dann jeweils eine kompatible Zerlegung des Punktestandes für jeden der drei Bewerber, nämlich
ADorf: $5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$
BeDorf: $2 + 5 + 5 + 5 + 5 = 22$
CeDorf: $1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
Insbesondere stehen damit auch die Antworten auf obige Fragen fest:
a) BeDorf gewann im Kugelstoßen, weil es mit Ausnahme von Weitsprung ja alle Wettbewerbe gewonnen hat.

b) Aus dem gleichen Grund wieder BeDorf mit seinem einzigen 2.PLatz, eben dann in Weitsprung.

Aufgabe 161233:
Es sei eine Menge von endlich vielen roten und grünen Punkten gegeben, von denen einige durch Strecken verbunden sind.
Ein Punkt dieser Menge heiße außergewöhnlich, wenn mehr als die Hälfte der von ihm ausgehenden Verbindungsstrecken in Punkten enden, die eine andere Farbe als er haben.
Wenn es in der gegebenen Punktmenge außergewöhnliche Punkte gibt, so wähle man einen beliebigen aus und färbe ihn in die andere Farbe um. Falls in der entstandenen Menge außergewöhnliche Punkte existieren, werde das Verfahren fortgesetzt.
Man beweise:
Für jede Menge der beschriebenen Art und für jede Möglichkeit, jeweils außergewöhnliche Punkte zum Umfärben auszuwählen, entsteht nach endlich vielen solchen Umfärbungen eine Menge, die keinen außergewöhnlichen Punkt enthält.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne eine Strecke als „außergewöhnlich“ , wenn sie einen roten mit einem grünen Punkt verbindet. Unter den Strecken, die von einem außergewöhnlichen Punkt zu anderen Punkten der Menge ausgehen, sind also mehr als die Hälfte außergewöhnlich.
Beim Umfärben eines außergewöhnlichen Punktes reduziert sich somit die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken, die von diesem Punkt ausgehen, um mindestens eins. Insbesondere reduziert sich insgesamt die Anzahl der außergewöhnlichen Strecken in der gegebenen Anordnung von Punkten und Verbindungsstrecken um mindestens eins.

Die Anzahl der Verbindungsstrecken zweier verschiedener Punkte der gegebenen Punktmenge ist endlich, nennen wir sie n.
Nach höchstens n-maligem Ausführen des Umfärbeverfahrens hat man also die Situation erreicht, dass keine außergewöhnliche Strecke mehr vorliegt (d. h. nur gleichfarbige Punkte haben Verbindungsstrecken untereinander, sodass es insbesondere keine außergewöhnlichen Punkte gibt), oder dass kein Punkt mehr außergewöhnlich ist und das Umfärbeverfahren folglich nicht mehr durchgeführt werden kann. Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 211235:
37 Karten, von denen jede auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau gefärbt ist, seien so auf einen Tisch gelegt, dass genau 9 Karten von ihnen oben ihre blaue Seite zeigen.
Es sollen nun in Arbeitsgängen Karten umgedreht werden, und zwar in jedem einzelnen Arbeitsgang genau 20 beliebige der 37 Karten.
Untersuchen Sie, ob man mit endlich vielen Arbeitsgängen erreichen kann, dass alle 37 Karten
a) oben ihre rote Seite,
b) oben ihre blaue Seite
zeigen. Falls das möglich ist, ermitteln Sie jeweils die kleinste Anzahl der dafür hinreichenden Arbeitsgänge!

Lösung von cyrix:
a) Wir identifizieren eine Karte, deren rote Seite oben liegt, mit 1 und eine Karte, deren blaue Seite oben liegt, mit -1. Dann ist in der Startsituation die Summe aller Karten gleich $s = 9 \cdot (-1) + (37-9) \cdot 1 = 19$. Würden alle Karten ihre rote Seite zeigen, ergäbe sich eine Summe von $r = 37 \cdot 1 = 37$.

Das Umdrehen einer Karte verändert die Summe der Karten um ± 2: Entweder wird aus einer roten Karte (+1) eine blaue (-1), sodass der Wert um 2 sinkt, oder umgekehrt, sodass der Wert um 2 steigt. Das gleichzeitige Umdrehen von zwei Karten ändert also den Wert der Summe der Karten um ± 4 oder 0, jedenfalls um eine durch 4 teilbare Zahl. Also gilt dies auch für das wiederholte Umdrehen einer geraden Anzahl an Karten, etwa für wiederholtes Umdrehen von je 20 Karten.
Da aber $r - s = 37 - 19 = 18$ nicht durch 4 teilbar ist, kann also nie aus der Startsituation erzeugt werden, dass alle Karten ihre rote Seite zeigen.

b) Die Karten mit zu Beginn sichtbarer blauer Seite seien die Karten Nr. 1 bis 9, während die Karten Nr. 10 bis 37 jeweils ihre rote Seite zeigen. Wir geben nun eine Folge von zwei Arbeitsgängen an, sodass am Ende alle Karten ihre blaue Seite zeigen:

1) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 23. Dann zeigen genau die Karten mit Nr. 4 bis 9 und die mit Nr. 24 bis 37 rot, alle anderen blau.
2) Drehe alle Karten mit Nr. 4 bis 9 und alle Karten mit Nr. 24 bis 37. Dann zeigen alle Karten ihre blaue Seite.

Es gibt also eine Folge von zwei Arbeitsvorgängen, die die Startsituation in die Zielsituation mit ausschließlich sichtbaren blauen Kartenseiten überführt. Es bleibt noch zu zeigen, dass dies nicht auch mit weniger Arbeitsvorgängen erreicht werden kann. Da aber mit einem Arbeitsvorgang nicht alle 28 roten Karten der Startsituation umgedreht werden können, ist dies der Fall.

Aufgabe 251234:
Acht Gegenstände, die mit $A_1, A_2, \ldots, A_8$ bezeichnet seien, sind in zwei Schränke S_1 und S_2 verschlossen worden. Zur Ermittlung der Verteilung der Gegenstände werden folgende Aussagen gemacht.
In dem Schrank S_1 befinden sich
(1) A_1 genau dann, wenn sich A_3 und A_5 beide in S_1 befinden;
(2) A_2 genau dann, wenn sich A_3 und A_6 beide in S_1 befinden;
(3) A_3 genau dann, wenn sich A_4 und A_8 beide in S_2 befinden;
(4) A_4 genau dann, wenn sich A_1 und A_8 beide in S_2 befinden;
(5) A_5 genau dann, wenn sich A_6 in einem anderen Schrank befindet als A_7;
(6) A_6 genau dann, wenn sich A_4 in einem anderen Schrank befindet als A_5;
(7) A_7 genau dann, wenn sich A_1 in demselben Schrank befindet wie A_2;
(8) A_8 genau dann, wenn sich A_5 in demselben Schrank befindet wie A_7;
Ermitteln Sie alle diejenigen für eine Verteilung der acht Gegenstände auf die beiden Schränke bestehenden Möglichkeiten, bei denen alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn für eine Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind, so folgt:
Angenommen, es wäre A_1 in S_1. Dann erhielte man die in der Tabelle dargestellten Schlussfolgerungen

		Folgerung aus (1)	(3)	(8)	(7)	(2)
A_1	S_1					
A_2					S_2	
A_3		S_1				
A_4			S_2			
A_5		S_1				
A_6						S_2
A_7				S_2		
A_8			S_2			

Die dabei erhaltene Aussage „A_6 in S_2“ hätte nach (6) zur Folge, dass A_4 in demselben Schrank wie A_5 wäre, somit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_1 in S_2 (9).
Angenommen weiter, es wäre A_3 in S_1. Dann erhielt man aus (3), dass entweder A_4 oder A_8 in S_2 wären. Die erhaltene Aussage „A_4 in S_2“ hätte nach (4) zur Folge, dass A_1 und A_8 nicht beide in S_2 wären, womit ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_3 in S_2. (10)
Aus (10) und (2) folgt A_2 in S_2 (11).
Aus (9), (11) und (7) folgt A_7 in S_1. (12).

Angenommen schließlich, es wäre A_8 in S_1. Dann wäre nach (8) A_5 in S_1, nach (6) A_4 in S_1 und nach (5) A_6 in S_2. Die dabei erhaltene Aussage A_4 in S_1 hätte nach (4) zur Folge, dass A_8 in S_2 wäre, womit nochmals ein Widerspruch erreicht ist. Also ist A_8 in S_2. (13)

Aus (9), (13) und (4) folgt A_4 in S_1. (14)
Aus (13), (8) und (12) folgt A_5 in S_2. (15)
Aus (14), (15) und (6) folgt A_6 in S_1. (16)
Also können nur für die in (9) bis (16) angegebene Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sein.

II. Für die Verteilung (9) bis (16) gilt:
A_1 ist nicht in S_1; A_3 und A_5 nicht in S_1; also ist (1) wahr.
A_2 ist nicht in S_1; A_3 nicht in S_1; also ist (2) wahr.
A_3 ist nicht in S_1; A_4 nicht in S_2; also ist (3) wahr.
A_4 ist in S_1; A_1 und A_8 sind beide in S_2; also ist (4) wahr.
A_5 ist nicht in S_1; A_6 ist in demselben Schrank S_1 wie A_7; also ist (5) wahr.
A_6 ist in S_1; A_4 ist nicht in dem Schrank S_2, in dem A_5 ist; also ist (6) wahr.
A_7 ist in S_1; A_1 ist in demselben Schrank S_2 wie A_2; also ist (7) wahr.
A_8 ist nicht in S_1; A_5 ist nicht in dem Schrank S_1, in dem A_7 ist, also ist (8) wahr.

Mit I. und II. ist bewiesen, dass genau bei der in (9) bis (16) angegebenen Verteilung alle Aussagen (1) bis (8) wahr sind.

Aufgabe 271232:
Ein Auto soll einen Rundkurs in einem vorgeschriebenen Umlaufsinn durchfahren. Das zur Verfügung stehende Benzin reicht genau zum einmaligen Durchfahren des Kurses, wurde aber vorher willkürlich in eine Anzahl $n \geq 1$ von Kanistern verteilt, die ebenfalls willkürlich längs des Rundkurses aufgestellt sind.
Der Tank des Autos ist zu Beginn leer und besitzt ausreichendes Fassungsvermögen, um beim Erreichen jedes Kanisters dessen Benzin aufzunehmen.
Man beweise, dass es möglich ist, den Startpunkt des Autos so zu wählen, dass der Kurs genau einmal durchfahren werden kann.
(Eventuelle Verluste beim Umfüllen, Mehrverbrauch bei wiederholten Anfahren usw. sollen nicht berücksichtigt werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Im Fall $n = 1$ kann der einzige Kanister offenbar als Startpunkt gewählt werden.

2. Als Induktionsannahme weder vorausgesetzt, dass die Behauptung für $n = k$ Kanister zutrifft ($k \geq 1$). Dann folgt für jede Aufstellung A von $k + 1$ Kanistern:
Unter den Kanistern der Aufstellung A befindet sich wenigstens ein Kanister C, von dem aus der nächste Kanister C' mit dem Inhalt von C erreicht werden kann; denn andernfalls wäre die Summe der Inhalte aller Kanister kleiner als eine für den Rundkurs ausreichende Gesamtmenge.

Wird nun der Inhalt von C' in C umgefüllt und C' weggelassen, so entsteht eine Aufstellung A' von k Kanistern, zu der nach Induktionsannahme ein Standort existiert, von dem aus der Rundkurs durchfahren werden kann.
Dieser Standort kann an keiner Stelle sein, die zwischen C und dem in der Aufstellung A übernächsten Kanister C'' liegt; denn er muss bei einem Kanister C_0 sein (sonst könnte das Auto dort nicht starten), und zwischen C und C'' steht bei der Aufstellung A' kein Kanister.

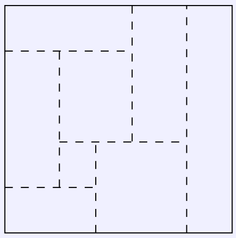
Also enthält für die Aufstellung A' der mit C_0 beginnende Rundkurs auf der Strecke von C_0 nach C (die auch mit $C_0 = C$ entartet sein kann) dieselben Standorte wir für A. Dann folgt die Strecke von C bis zu C'', und danach folgt auf der Strecke von C'' nach C_0 (die auch mit $C_0 = C''$ entartet sein kann) wieder dieselbe Standortverteilung für A' wie für A.

Damit ergibt sich für die Aufstellung A:

Nach einem Start in C_0 kann wie bei A' bis C gefahren werden. Anschließend würde (nach Voraussetzung über A') das im Auto und in C und in C' zusammen vorhandene Benzin reichen; daraus (und weil schon der Inhalt von C bis C' reicht) folgt:
Das im Auto und in C vorhandene Benzin reicht bis C', und von dort kommt man durch Hinzufügen des Benzins aus C' bis C''. Von dort schließlich gelangt man wie bei A' bis C_0.

Also hat sich ergeben, dass bei der Aufstellung A der Rundkurs von C_0 aus durchfahren werden kann; d. h., die Behauptung gilt auch für $n = k + 1$ Kanister.
Mit I. und II. ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen.

Aufgabe 271236:



Ein quadratisches Feld Q der Seitenlänge 10 km ist von einem Wassergraben u umgeben.
Zur Bewässerung soll Q durch Anlegen weiterer Gräben g vollständig in rechteckige Teilfelder $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zerlegt werden.
Die Breite der Gräben werde vernachlässigt; die Abbildung zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.
Ferner werde gefordert, dass jeder Punkt der Fläche Q nicht weiter als 100 m von einem Wassergraben (u oder g) entfernt ist.
a) Man beweise: Wenn diese Forderung durch Gräben g einer Gesamtlänge von L Kilometern erfüllt wird, so folgt stets $L \geq 480$.
b) Man beweise, dass es einen kleinsten Wert gibt, den L (bei Erfüllung der genannten Forderung) annehmen kann, und ermittle diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Zerlegung Z in Felder $F_1, F_2, \ldots, F_n$, die die genannte Forderung erfüllt, seien die Längenmaßzahlen der Seiten von F_i jeweils so mit a_i, b_i bezeichnet, dass $a_i \leq b_i$ gilt.
Aus der Forderung folgt dann $a_i \leq 0{,}2$ ($i = 1{,}2, \ldots ,n$). Da der Flächeninhalt des Feldes Q gleich der Summe der Flächeninhalte der F_i ist, folgt hieraus

$$100 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} 0{,}2 \cdot b_i = 0{,}2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{also} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 500 \tag{1}$$

Addiert man die Umfänge der Felder F_i, so erhält man die Summe aus der Länge u und der doppelten Länge von g, d. h., es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) = 40 + 2L$$

Hieraus und aus (1) folgt

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 2(a_i + b_i) - 40 \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - 20 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 480 \tag{2}$$

a) Da alle $a_i \geq 0$ sind, folgt aus (2), wie behauptet, $L \geq 480$.

b) Eine der beiden Richtungen von Gräben werde „horizontal“, die andere „vertikal“ genannt. Ein Feld F_i heiße horizontal bzw. vertikal je nachdem, ob b_i die Längenmaßzahl seiner horizontalen oder seiner vertikalen Seiten ist.
Nun tritt stets einer der beiden folgenden Fälle I., II. ein:
I. Wenn es eine horizontale Strecke gibt, die das Feld Q durchquert und dabei nur mit vertikalen Feldern der Zerlegung Z nichtleere Durchschnitte hat, so ist die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Durchschnitte gleich 10; also gilt erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 10$$

II. Wenn aber jede horizontale Strecke, die das Feld Q durchquert, mit mindestens einem horizontalen Feld der Zerlegung Z nichtleeren Durchschnitt hat, so folgt, indem man alle diese horizontalen Felder auf eine vertikale Gerade projiziert:
Diese Projektionen überdecken eine gesamte vertikale Strecke der Länge 10 km; d. h., die Summe der Längenmaßzahlen a_i dieser Projektionen ist größer oder gleich 10, also ergibt sich ebenfalls (3).

Somit gilt (3) für jede Zerlegung Z der geforderten Art; hiernach folgt aus (2) für jede solche Zerlegung

$$L \geq 490 \tag{4}$$

Ferner gilt: es gibt eine Zerlegung der geforderten Art mit $L = 490$, z. B. die Zerlegung in 50 vertikale Felder mit $a_i = 0{,}2$ und $b_i = 10$, die genau 49 Gräben g aufweist, deren jeder die Länge 10 km hat.
Damit ist, wie gefordert, die Existenz eines kleinsten Werte für L bewiesen; er beträgt 490.

Aufgabe 281233A:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i = 1, 2, ..., n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:
(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.
(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für $n = 3$ werden die Bedingungen z. B. durch $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 3$ mit den Differenzen $\{-1, -3, -1, -2, 3, 2\}$ erfüllt.

II. Für $n = 4$ werden die Bedingungen z. B. durch $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 6$ mit den Differenzen $\{-1, -4, -6, 1, -3, -5, 4, 3, -2, 6, 5, 2\}$ erfüllt.

III. Angenommen nun, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllt durch natürliche Zahlen $a_1, ..., a_n$. Dann folgt:
(3) Keine zwei der Zahlen $a_1, ..., a_n$ sind einander gleich.
Beweis:
Wäre $a_j = a_k$ $(j \neq k)$, so folgte mit einem von j und k verschiedenen i, dass $a_j - a_i = a_k - a_i$ wäre, was (2) widerspricht.

O. B. d. A. kann daher wegen (1) angenommen werden:
(4) Es gilt $0 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n \leq \frac{1}{2}(n-1)n$.

Weiter gilt:
(5) Die Differenzen $a_j - a_i$, die für alle i,j mit $1 \leq i < j \leq n$ gebildet werden, sind die Zahlen $1, 2, ..., \frac{1}{2}(n-1)n$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.
Beweis:
Nach (4) gilt $0 < a_j - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1)n$ für jede dieser Differenzen. nach (2) sind sie paarweise verschieden, also ist ihre Anzahl gleich der Anzahl der Paare (i,j) mit $1 \leq i < j \leq n$. Diese Anzahl ist aber gleich

$\frac{1}{2}(n-1)n$, daher muss (5) gelten.

Insbesondere gilt:
(6) Die Differenzen $d_i = a_{i+1} - a_i$, die für alle $i = 1,...,n-1$ gebildet werden, sind die Zahlen 1,2,...,$n-1$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.
Beweis:
Nach (4) ist die Summe dieser Differenzen

$$d_1 + ... + d_{n-1} = a_n - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1)n$$

nach (2) sind sie paarweise verschiedene natürliche Zahlen, nach (4) positiv.
Da aber bereits die Summe der Zahlen $1,2,...,n-1$ bekanntlich $\frac{1}{2}(n-1)n$ beträgt, verbleibt nur die Möglichkeit (6).
Nun erhält man: Nach (6) gibt es unter den Indizes $1,...,n-1$ genau einen Index p mit $d_p = 1$. Ist ein Index r $(1 \leq r \leq n-1)$ oberer oder unterer Nachbar von p, so muss $d_r = n-1$ sein; denn wäre für zwei benachbarte Indizes $i, i+1$ die einer der beiden Zahlen d_i, d_{i+1} gleich 1, die andere kleiner als $n-1$, so folgte

$$a_{i+2} - a_i = d_{i+1} + d_i < n$$

womit wegen (6) ein Widerspruch gegen (2) vorläge.
Also muss p einer der beiden Indizes $1, n-1$ mit nur einem Nachbar sein, und für diesen Nachbarindex r mit $d_r = n-1$ gelten; d. h., es muss einer der beiden folgenden Fälle A, B vorliegen:
A: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1$ B: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1$.

Ebenso erhält man: Es gibt genau einen Index q mit $d_q = 2$. Ist ein Index s oberer oder unterer Nachbar von q, so muss d_s einer der Zahlen $n-2, n-1$ sein. Wegen $n \geq 5$ sind diese beiden Zahlen von 1 und 2 verschieden.
Also muss, falls q zwei Nachbarn hat, der einen von ihnen der bereits in den Fällen A, B festgelegte Index r sein, und für den anderen Nachbar s muss $d_s = n-2$ gelten.
Hat q aber nur einen Nachbar s (d. h. gilt $q = n-1$ im Fall A bzw. $q = 1$ im Fall B), so ist wegen $n \geq 5$ dieser Nachbar nicht der in den Fällen A, B festgelegte Index r; also kann dann nur $d_s = n-2$ sein.
Das heißt, es liegt jeweils für A bzw. B einer der folgenden Unterfälle A1, A2 bzw. B1, B2 vor:

A1: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_3 = 2, d_4 = n-2$
A2: Es gilt $d_1 = 1, d_2 = n-1, d_{n-1} = 2, d_{n-2} = n-2$
B1: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_{n-3} = 2, d_{n-4} = n-2$.
B2: Es gilt $d_{n-1} = 1, d_{n-2} = n-1, d_1 = 2, d_2 = n-2$.

Damit finden sich in jedem Fall vier Indizes der Form $u, u+1, v, v+1$ mit $u \neq v$, für die $d_u + d_{u+1} = n, d_v + d_{v+1} = n$ also $a_{u+2} - a_u = a_{v+2} - a_V$ gilt. Das widerspricht (6).
Die Annahme, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllbar, hat somit in jedem Fall auf einen Widerspruch geführt.
Mit I., II., III. ist bewiesen: Die Bedingungen der Aufgabe werden genau von den beiden Zahlen $n = 3$ und $n = 4$ erfüllt.

Aufgabe 281233B:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet:
Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, dass die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.
(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.
(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, dass dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.
a) Geben Sie für $n = 3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach,

dass die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
b) Beweisen Sie, dass es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angabe einer Verteilung: In jedem der 3 Behälter gebe man genau 2 der Gegenstände.

Nachweis der Bedingungen:
Wegen $2 \geq 1$ und $2 \leq 3$ sind (1) und (2) erfüllt. Ferner ist bei jeder Möglichkeit, die 3 Behälter in den zwei Räumen unterzubringen, in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Behältern als in dem anderen Raum, da die Anzahl 3 aller Behälter eine ungerade Zahl ist.
Somit gilt bei jeder dieser Möglichkeiten auch, dass in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Gegenständen als in dem anderen Raum ist. Damit ist (3) erfüllt.

b) Durch die gleiche Beweisführung, angewandt auf beliebiges ungerades n statt 3, erhält man:
Für jedes ungerade $n \geq 3$ kann die Forderung (mindestens) durch diejenige Verteilung erfüllt werden, bei der in jeden der n Behälter genau 2 Gegenstände gegeben werden.

Nun wird die folgende Hilfsaussage gezeigt:
Wenn die betrachtete Forderung für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ dadurch erfüllt ist, dass jeweils für $i = 1,...,n$ in den i-ten Behälter genau a_i Gegenstände gegeben werde, dann folgt, dass alle $a_i = 2$ sein müssen.

Beweis: Die Behälter lassen sich so bezeichnen, dass

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq n \tag{4}$$

gilt, wobei die erste und letzte Ungleichung aus (1) und (2) folgt.
Wegen (4) und der Anzahl $2n > n$ der Gegenstände gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 2$ mit

$$a_1 + ... + a_{k-1} \leq n \tag{5}$$

$$a_1 + ... + a_{k-1} + a_k > n \tag{6}$$

Würde in (5) das Gleichheitszeichen gelten, so erhielte man im Widerspruch zu (3) die Möglichkeit, in den einen Raum vermittels der Behälter $1,...,k-1$ genau n Gegenstände und folglich in den anderen Raum die übrigen n Gegenstände zu bringen. Also gilt sogar

$$a_1 + ... + a_{k-1} < n \tag{7}$$

wegen $a_i + ... + a_{n-1} = 2n - a_n \geq n$ ist dabei $k < n$ (8). Es werde nun

$$s_1 = a_1 \quad ; \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad ; \quad ... \quad ; \quad s_{k-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}$$
$$t_1 = n - a_n \quad ; \quad t_2 = n - a_n - a_{n-1} \quad ; \quad ... \quad ; \quad s_{n-k} = n - a_n - a_{n-1} - ... - a_{k+1}$$

gesetzt. Wegen (1) sind alle s_i paarweise verschieden und alle t_j paarweise verschieden. Es ist aber auch jedes s_i von jedem t_j verschieden; denn aus $s_i = t_j$ würde

$$a_1 + ... + a_i + a_n + ... + a_{n-j+1} = n$$

und damit ein Widerspruch gegen (3) folgen.
Wegen (4), (6), (7) und der Gesamtzahl $2n$ der Gegenstände gilt für alle i bzw. j:

$$1 \leq s_i \leq n-1 \qquad 1 \leq t_j \leq n-1 \tag{9}$$

Aus (9) für die $n-1$ paarweise verschiedenen Zahlen s_i, t_j folgt:

Die Zahlen $s_1, ..., s_{k-1}, t_1, ..., t_{n-k}$ sind die Zahlen $1, ..., n-1$ in geeigneter Reihenfolge (10)

Wäre nun $a_1 = 1$, so könnten wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nicht alle $a_2, ..., a-n \leq 2$ sein, also müsste wegen (4) mindestens $a_n \geq 3$ sein. Daher wäre $t_1 \leq n-3$ und somit erst recht $t_j \leq n-3$ für alle j. Die beiden Zahlen $n-2$ und $n-1$ müssten wegen (10) also unter den s_i auftreten, was wegen $s_1 < ... < s_{k-1}$ nur mit $s_{k-2} = n-2$ und $s_{k-1} = n-1$ möglich wäre.
Das hätte aber $a_{k-1} = 1$, wegen (4) also $a_1 = ... = a_{k-1} = 1$ zur Folge. Aus $s_{k-1} = n-1$ erhielte man somit $k-1 = n-1$ im Widerspruch zu (8).
Also muss $a_1 = 2$ gelten; nach (4) müssen alle $a_i \geq 2$ sein, und dies ist wegen $a_1 + ... + a_n = 2n$ nur mit $a_1 = ... = a_n = 2$ möglich. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Unter Verwendung der Hilfsaussage ergibt sich folgender Beweis dafür, dass die in der Aufgabe betrachtete Forderung für gerades n nicht erfüllt werden kann:
Wäre es doch möglich, (1), (2), (3) zu erfüllen, so müsste nach der Hilfsaussage $a_1 = ... = a_n = 2$ gelten. Dann aber könnte man, da n gerade ist, in jeden der beiden Räume $\frac{n}{2}$ Behälter und damit n Gegenstände bringen, was (3) widerspricht.
c) Aus der Hilfsaussage folgt ferner, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ die in b) zu Anfang nachgewiesene Möglichkeit, (1) bis (3) durch $a_1 = ...a_N = 2$ zu erfüllen, die einzige ist.

Aufgabe 281234:
Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge
$a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ $(*)$
dieser Zahlen so gibt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
(2) Die Summe aller 21 Zahlen ergibt 1989.

Lösung von weird:
Wir bilden dazu die Folge $a_1,a_2,\ldots,a_{21}$, welche rekursiv folgendermaßen definiert ist durch

$$a_1 = 1994,\ a_2 = -5989,\ a_3 = 1995,\ a_4 = 1996$$

sowie für $k = 5,6,\ldots,21$ durch

$$a_k = \begin{cases} a_{k-4} + 3, & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod 4 \\ a_{k-4} - 9, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

Betrachtet man die ganze Folge, nämlich

$$1994, -5989, 1995, 1996, 1997, -5998, 1998, 1999, 2000, -6007, 2001, 2002, 2003, -6016, 2004,$$

$$2005, 2006, -6025, 2007, 2008, 2009$$

und dazu ihre Summe

$$1994 + \underbrace{(-5989) + 1995 + 1996 + 1997}_{=-1} + \underbrace{(-5998) + 1998 + 1999 + 2000}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6007) + 2001 + 2002 + 2003}_{=-1} + \underbrace{(-6016) + 2004 + 2005 + 2006}_{=-1} +$$

$$+ \underbrace{(-6025) + 2007 + 2008 + 2009}_{=-1} = 1994 - 5 = 1989$$

so sollte das einfache Konstruktionsprinzip der Folge damit klar sein:

Indem wir sicherstellen, dass die unterklammerten Teilsummen alle negativ sind, sind dann nach der Bauart der Folge automatisch auch alle anderen Teilsummen aus jeweils 4 aufeinanderfolgenden Gliedern der Folge negativ!
Damit erfüllt diese Folge also dann tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe.

Aufgabe 301233A:
Man ermittle alle diejenigen siebzehnstelligen natürlichen Zahlen n, für deren 17 Ziffern $x_1, x_2, \dots, x_{17}$ die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:
(1) Es gilt: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{17}$.
(2) Für die Summe $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{17}$ und das Produkt $p = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{17}$ gilt: $s = p$.
Hinweis: Die Reihenfolge $x_1, \dots, x_{17}$ entspreche der üblichen Schreibweise; es bezeichne also x_{17} die Einerziffer, x_{16} die Zehnerziffer u. s. w.

Lösung von weird:
Wir versuchen zunächst die gestellten Bedingungen für die Ziffern $x_1,x_2,\dots,x_{17}$ noch etwas enger zu fassen:

1. Wegen $x_1 > 0$ ist auch $s > 0$ und wegen $p = s$ kann daher keine der 17 Ziffern 0 sein. Insbesondere muss daher $x_1 \geq x_2 \geq 2$ gelten, da sonst $s \geq 17$, aber $p \leq 9$ gelten würde, wieder im Widerspruch zu $p = s$.

2. Es können höchstens $x_1,x_2 \in \{6,7,8,9\}$ sein, denn andernfalls wäre $p \geq 6^3 = 216$, aber $s \leq 17 \cdot 9 = 153$, Widerspruch!

3. Wegen 2. gilt schon mal
$$s \leq 2 \cdot 9 + 15 \cdot 1 = 33$$
da für alle 17-Tupel $(x_1,x_2,\dots,x_{17})$, für welche $x_1x_2\dots x_{17}$ einen vorgegeben Wert p (hier $p = 153$) nicht überschreitet immer jenes den größten Summenwert $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{17}$ aufweist, für welches die x_i, $i = 1,2,\dots,17$ in dieser Reihenfolge größtmöglich in Hinblick auf $x_1x_2\dots x_i \leq p$ gewählt sind, was hier eben auf $x_1 = x_2 = 9$, $x_3 = \dots = x_{17} = 1$ und damit zu obiger Abschätzung führt. Damit haben aber dann höchstens die Ziffern $x_1,x_2,\dots,x_5$ einen Wert größer als 1, da sonst
$$p \geq 2^6 = 64 > s$$
gelten würde.

4. Es kann aber auch nicht $x_5 > 1$ sein, denn die einzige nach 3. noch bestehende Möglichkeit $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (2,2,2,2,2)$ führt nicht auf eine Lösung, da für sie offensichtlich
$$s = x_2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 12 = 24 < 32 = x_1x_2x_3x_4x_5 = p$$
gilt. Wir dürfen daher im Folgenden auch $x_5 = 1$ voraussetzen.

Zusammenfassend müssen wir also nur die bereits erheblich einfachere Ausgabe lösen, 4 positive ganze Zahlen x_1,x_2,x_3,x_4 so zu finden, dass für sie die folgenden Bedingungen
$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 > 0 \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3x_4x_5 - 13 \leq 20 \tag{2}$$
erfüllt sind, wobei nach 1. außerdem $x_1 \geq x_2 > 1$ gelten muss.
Wir führen daher die folgende Fallunterscheidung durch:

1.Fall: $x_1 = 9$.
Von den 2 Möglichkeiten
$$(x_1,x_2,x_3,x_4)) \in \{(9,2,1,1),(9,3,1,1)\}$$

welche kompatibel mit obigen Bedingungen sind, führt dann tatsächlich $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (9,3,1,1)$ auf eine Lösung mit den weiteren Festlegungen $x_5 = x_6 = \cdots = x_{17} = 1$.

2.Fall: $x_1 = 8$.
Die 4 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2) \in \{(8,2,1,1),(8,2,2,1),(8,3,1,1),(8,4,1,1)\}$$

ergeben hier alle durch Einsetzen einen Widerspruch mit (2).

3.Fall: $x_1 = 7$
Auch hier ergeben die 4 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(7,2,1,1),(7,2,2,1),(7,3,1,1),(7,4,1,1)\}$$

keine weitere Lösung.

4.Fall: $x_1 = 6$
Hier haben wir die 5 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(6,2,1,1),(6,2,2,1),(6,3,1,1),(6,4,1,1),(6,5,1,1)\}$$

von denen dann

$$x_1 = 6,x_2 = 2,x_3 = 2,x_4 = \cdots = x_{17} = 1$$

tatsächlich eine Lösung ist.

5.Fall: $x_1 = 5$
Hier gibt es die 6 Möglichkeiten

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \{(5,2,1,1),(5,2,2,1),(5,3,1,1),(5,3,2,1),(5,4,1,1),(5,5,1,1)\}$$

von denen dann

$$x_1 = x_2 = 5,\ x_3 = \cdots = x_{17} = 1$$

tatsächlich eine Lösung ist.

Da wir nun für ev. weitere Lösungen ausschließen können, dass in ihnen die Ziffern 9,8,7,6,5 vorkommen, lohnt es sich, unsere Schranke für s nachzujustieren. Für sie gilt mittlerweile

$$s \leq 4 + 4 + 2 + 14 \cdot 1 = 24$$

Andererseits gilt auch die triviale untere Schranke $s \geq 17$, welche wir wegen $x_1 \geq x_2 > 1$ auch noch zu $s \geq 19$ verschärfen können. Tatsächlich ist es damit einfacher, sich einfach alle „Kandidaten“ für $s = p \in \{19,20,21,22,23,24\}$, anzusehen, von denen ja nur die mehr in Frage kommen, welche keinen Primfaktor größer als 3 aufweisen. Es bleibt somit nur $s = p = 24$, was auf die beiden Möglichkeiten

$$x_1 = 4,x_2 = 3,x_3 = 2,x_4 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 3,x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

führt, welche aber beide keine weitere Lösung hier liefern, da sie (2) nicht erfüllen.
Zusammenfassend sind also alle Lösungen der Aufgabe gegeben durch die drei 17-stelligen Zahlen

$$93111111111111111, \quad 62211111111111111, \quad 55111111111111111$$

Aufgabe 311233B:
Es sei $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer an einer Feier. Für je zwei Teilnehmer A, B seien die folgenden beiden Aussagen wahr:
(1) Ist A mit B bekannt, so gibt es keinen von A und B verschiedenen Teilnehmer, der sowohl mit A als auch mit B bekannt wäre.
(2) Ist A nicht mit B bekannt, so gibt es genau zwei von A und B verschiedene Teilnehmer, die sowohl mit A als auch mit B bekannt sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Alle Teilnehmer haben auf dieser Feier dieselbe Zahl von Bekannten.
Hinweis: Für je zwei Teilnehmer A, B gelte:
Ist A mit B bekannt, so auch B mit A. Kein Teilnehmer gelte als mit sich selbst bekannt.

Lösung von Kitaktus:
Es liegt nahe, die Fragestellung in ein Problem der Graphentheorie zu übertragen. Ich versuche hier die Begriffe der Aufgabenstellung zu verwenden, damit die Lösung auch für diejenigen verständlich bleibt, die nicht mit der Graphentheorie vertraut sind.

(a) Wir betrachten die Anzahl der Bekannten zweier miteinander bekannter Teilnehmer u und v.
Sei U die Menge der von v verschiedenen Teilnehmer, die mit u bekannt sind und V die Menge der von u verschiedenen Teilnehmer, die mit v bekannt sind.
Für miteinander bekannte Teilnehmer u und v gibt es nach (1) keinen Teilnehmer w, der sowohl mit u, als auch mit v bekannt ist. U und V sind also disjunkt. Sei w ein beliebiger Teilnehmer aus U. Da w nicht mit v bekannt ist, gibt es nach (2) genau zwei Teilnehmer, die sowohl mit w als auch mit v bekannt sind. Einer dieser beiden Teilnehmer ist u, da u sowohl mit w als auch mit v bekannt ist.

Der andere Teilnehmer muss in V liegen, da er ein Bekannter von v und von u verschieden ist. Wir bezeichnen diesen Teilnehmer mit f(w).
Umgekehrt kann w auch keinen weiteren Bekannten f'(w) in V haben, weil es dann mehr als zwei Teilnehmer gäbe, die mit w und v bekannt sind, nämlich u, f(w) und f'(w).

Für jeden Teilnehmer w aus U gibt es also genau einen Bekannten f(w) in V. Das Argument gilt symmetrisch auch genau andersherum, für jeden Teilnehmer w aus V gibt es also genau einen Bekannten g(w) in U.
Zwischen U und V besteht also eine Bijektion mittels der Abbildungen f ¡-¿ g. U und V sind daher gleichmächtig, u und v haben also gleichviele Bekannte.

(b) Seien nun u und v beliebige Teilnehmer. Entweder sind sie miteinander bekannt und haben nach (a) gleichviele Bekannte.
Oder sie sind nicht miteinander bekannt, dann gibt es nach (2) einen Teilnehmer w, der mit u und v bekannt ist.
Nach (a) haben u und w gleichviele Bekannte, aber auch v und w und somit auch u und v. Insgesamt haben also beliebige Teilnehmer u und v jeweils gleichviele Bekannte. q. e. d.

Aufgabe 311235:
Man untersuche, ob sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 fünfzig verschiedene so auswählen lassen, dass ihre Summe 2525 beträgt und dass keine zwei von ihnen die Summe 101 haben.

Lösung von cyrix:
Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen von einschließlich 14 bis 28, 30, von einschließlich 33 bis 50, von einschließlich 69 bis 70, 72 und von einschließlich 88 bis 100.

Dann hat M genau $15+1+18+2+1+13=50$ verschiedene Elemente, von denen keine zwei sich zu 101 ergänzen, da aus jedem Paar $(n,101-n)$ zweier natürlicher Zahlen zwischen einschließlich 1 und 100 jeweils genau eine Zahl in M enthalten ist. Summiert man alle Elemente von M, dann erhält man als Summe s den Wert

$$s = 15 \cdot \frac{14+28}{2} + 30 + 18 \cdot \frac{33+50}{2} + 69 + 70 + 72 + 13 \cdot \frac{88+100}{2} = 2525$$

sodass es offenbar eine entsprechende Auswahl, die der Aufgabenstellung genügt, getroffen werden kann.

Aufgabe 331235:
Zwei kongruente regelmäßige $2n$-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt.
Von einem der beiden $2n$-Ecke werde vorausgesetzt, dass es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden $2n$-Ecke so aufeinanderzulegen, dass in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

Lösung von Henning Thielemann:
Das eine $2n$-Eck besitze b blaue und $2n-b$ rote Dreiecke und das andere $2n$-Eck jeweils n blaue und rote Dreiecke.
Bei allen $2n$ Drehungen gibt es zusammengenommen $n \cdot b$ Übereinstimmungen blauer Dreiecke und $n \cdot (2n-b)$ Übereinstimmungen roter Dreiecke. Das sind zusammen $2n^2$ Übereinstimmungen.
Bei $2n$ möglichen Drehungen bedeutet dies nach dem Schubfachprinzip, dass es bei wenigstens einer Drehung mindestens n Übereinstimmungen gibt.

IV Runde 4

Aufgabe 051242:
An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren.
Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, dass es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, dass an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren, und jeder der beiden Herren mit genau einer der beiden Damen getanzt hat.
Es wird vorausgesetzt, dass der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d. h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.

Lösung von Kornkreis:
Anmerkung: Bei allen Lösungen wird davon ausgegangen, dass eine endliche Anzahl von Damen und Herren vorliegt. Für unendliche Mengen gilt die zu zeigende Aussage im Allgemeinen nicht.

Im Folgenden bezeichne „Aussage“ die zu zeigende Aussage der Aufgabenstellung.
Aus den Voraussetzungen folgt, dass mindestens zwei Herren und zwei Damen anwesend waren, da sonst ein Herr mit allen Damen oder eine Dame mit allen Herren getanzt haben müsste.

Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl der Herren durch.
Für zwei Herren und beliebig viele (größer gleich 2) Damen ist die Aussage wahr.
Dazu schreiben wir die Tanzkonstellation in Matrixform und bezeichnen mit „+“ und „-“ dass ein Tanz stattgefunden bzw. nicht stattgefunden hat. Jede Spalte entspricht einem bestimmten Herren und jede Zeile einer bestimmten Dame, d. h., wir haben zwei Spalten und beliebig viele Zeilen. Falls die Aussage nicht wahr wäre, müsste die Konstellation die folgende Form haben

$$\begin{array}{cc} + & - \\ + & - \\ \ldots & \\ + & - \end{array}$$

was aber bedeuten würde, dass ein Herr mit allen Damen getanzt hat (in diesem Fall sogar beide Herren).

Sei nun die Anzahl der Herren $n > 2$ und die Aussage bereits für $n-1$ Herren bewiesen. Wir betrachten eine Tanzkonstellation, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.
Falls man aus den n Herren $n-1$ Herren auswählen kann, für die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind (d. h. jeder dieser $n-1$ Herren hat mit mindestens einer Dame getanzt und jede der Damen mit einem dieser Herren, und niemand dieser Herren hat mit allen Damen getanzt und keine der Damen mit allen dieser Herren), so zeigt die Induktionsvoraussetzung die Aussage.

Wir betrachten nun den Fall, dass so eine Auswahl nicht existiert. Dies bedeutet in der Matrixschreibweise, dass man keine $n-1$ Spalten auswählen kann, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, d. h., in der Tanzkonstellation der n Herren gibt es eine Zeile, in der genau ein „+“ oder genau ein „-“ steht, o. B. d. A. sei dies genau ein Plus ganz rechts in der letzten Spalte (d. h. von der Form $--\cdots--+$).

Nun muss aber in einer anderen Zeile ganz rechts ein Minus stehen (sonst hätte der entsprechende Herr mit allen Damen getanzt) und irgendwo anders in derselben Zeile ein Plus (sonst hätte die entsprechende Dame mit keinem Herren getanzt).
D. h. man hat z. B. das Schema

$$\begin{array}{ccc} -\,- & \ldots & -\,-\,+ \\ & \ldots & \\ -\,+ & \ldots & +\,-\,- \end{array}$$

Die Damen, die diesen beiden Zeilen entsprechen und die Herren, die der ganz rechten Spalte und der Spalte mit dem Plus irgendwo anders (von der Zeile mit dem Minus ganz rechts) entsprechen, zeigen nun die Aussage.

Alternativ-Lösung von StrgAltEntf:
Sei d_1 eine Dame mit den meisten Tanzpartnern und h_1 ein Herr, mit dem d_1 nicht getanzt hat. d_2 sei eine Tanzpartnerin von h_1.
Dann gibt es einen Herrn h_2, mit dem d_1 aber nicht d_2 getanzt hat. (Denn sonst hätte d_2 mit allen Tanzpartnern von d_1 und zusätzlich mit h_1 getanzt, was der Maximalität von d_1 widerspricht.) d_1, d_2, h_1 und h_2 bilden ein Quartett, wie es laut Aufgabenstellung behauptet wird.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Laut Angabe hat jede Dame mindestens einen Tanzpartner(TP) und mindestens einen „Nichttanzpartner“ (NTP). Gleiches gilt umgekehrt auch für die Herren. Bei Erfülltsein dieser beiden Bedingungen wollen wir eine Tanzrunde hier als „zulässig“ bezeichnen. Des weiteren bezeichne ich im Folgenden einen Herrn als „redundant“, wenn bei seiner Entfernung die verbleibende Tanzrunde noch immer zulässig ist.

Wir gehen nun die Herren einzeln durch und entfernen sie nacheinander aus der Tanzrunde, sofern sie redundant sind. Wegen der hier natürlich ebenfalls vorausgesetzten „Endlichkeit“ der Tanzrunde muss man dabei irgendwann auf einen Herrn $H1$ stoßen, der nicht redundant ist, weil es eine Dame $D1$ gibt, welche ihn als einzigen TP oder NTP hat.

Sei nun $H1$ o. B. d. A. ein TP von dieser Dame $D1$. (Andernfalls müsste man im Folgenden einfach einen konsequenten Tausch TP $\leftrightarrow$ NTP vornehmen.) Ist dann $D2$ eine Dame, für welche $H1$ ein NTP ist, aber ein dann anderer Herr $H2$ ein TP, so ist Letzterer dann automatisch ein NTP von $D1$, da diese ja nur $H1$ als einzigen TP hat. Die Teilmenge $D1$,$D2$,$H1$,$H2$ der Tanzrunde ist daher ein Quartett mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 091241:
An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.
Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.
Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.
Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

Lösung von StrgAltEntf:
Es seien s_1,s_2,s_3 die Anzahlen der Freunde, die genau eine, zwei bzw. drei Sprachen beherrschen. Laut Aufgabenstellung gilt dann

(1) $s_1 + s_2 + s_3 = 30$
(2) $2s_3 < s_2 < 3s_1$
(3) $s_1 = s_3$
Aus (1) und (3) folgt $2s_1 + s_2 = 30$ und mit (2) dann
(4) $2s_1 < 30 - 2s_1 < 3s_1$
(4) ist äquivalent zu $s_1 < 7{,}5$ und $s_1 > 6$.
Somit ist $s_1 = s_3 = 7$ und $s_2 = 16$.

d,f,r seien die Anzahlen der Freunde, die nur Deutsch, Französisch bzw. Russisch beherrschen. Dann ist folglich $d + r + f = s_1 = 7$.
Weiterhin folgt aus der Aufgabenstellung, dass $r < d < f$ und $d < 3r$.
Eine einfache Fallunterscheidung zeigt nun, dass dies nur erfüllt sein kann, wenn $d = 2$,$r = 1$ und $f = 4$. ($s_3 = 7$, siehe oben.)

Aufgabe 121245:
Jemand schrieb auf die sechs Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen 0 und 1 befanden.
Danach ersetzt er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der vier Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden musste.)
Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzig mal durch. Zum Schluss stellte er fest, dass er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.
Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

Lösung von Kornkreis:
Antwort: Nein.
Beweis: Angenommen, die Antwort wäre „ja".
Nach jeder Operation sind die Zahlen gegenüberliegender Flächen gleich, insbesondere gilt dies nach der 25ten Operation und damit auch am Anfang. Man braucht also nur irgendwelche drei Seitenflächen des Würfels zu betrachten, die eine Ecke gemeinsam haben (das Problem reduziert sich also effektiv auf das eines Dreiecks statt eines Würfels, wobei die Zahlen an den Dreiecksecken stehen).

Bezeichne die Zahlen, die auf drei solchen Flächen nach der i-ten Operation stehen, jeweils als a_i, b_i, c_i ($i \geq 0$), d. h. a_0,b_0,c_0 sind die Zahlen am Anfang.
Man hat

$$a_{i+1} = \frac{b_i + c_i}{2}, \qquad b_{i+1} = \frac{a_i + c_i}{2}, \qquad c_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

(für alle $i \geq 0$), woraus nach Addieren zum einen folgt, dass $a_i + b_i + c_i$ eine Invariante ist für alle $i \geq 0$ (bezeichne die Summe mit s), und zum anderen findet man $c_{i+1} = a_{i+1}+b_{i+1}-c_i$. Mit $a_{i+1}+b_{i+1} = s-c_{i+1}$ ist dann also $2c_{i+1} = s - c_i$.

Die explizite Lösung dieser Rekursionsgleichung ist $c_i = \dfrac{c_0}{(-2)^i} + \dfrac{s}{2}\dfrac{-1 + 1/(-2)^i}{-3/2}$.
Nach der Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 0, aufgrund der Symmetrie der Gleichungen wählen wir o. B. d. A. $c_0 = 0$. Daraus folgt nun $c_{25} = 0 = \frac{s}{2}\frac{-1+1/(-2)^i}{-3/2}$ und wegen $-1 + 1/(-2)^{25} \neq 0$ folgt $s = 0$.
Sei nun o. B. d. A. $b_0 = 1$ (nach Aufgabenstellung war eine der Zahlen am Anfang 1). Es gilt eine analoge explizite Gleichung für b_i wie für c_i, und mit $s = 0$ folgt $b_{25} = 1 = 1/(-2)^{25}$, Widerspruch.

Aufgabe 181242:
Im Staat Wegedonien gibt es ein Straßennetz. An jeder Kreuzung und an jeder Einmündung von Straßen dieses Netzes steht ein Verkehrsposten.
Die Länge eines jeden Straßenabschnittes zwischen je zwei benachbarten dieser Posten ist kleiner als 100 km. Jeder Verkehrsposten lässt sich von jedem anderen auf einem Gesamtweg innerhalb des Netzes erreichen, der kürzer als 100 km ist.
Ferner gilt für jeden Straßenabschnitt zwischen zwei benachbarten Verkehrsposten:
Wird genau dieser Straßenabschnitt gesperrt, so ist immer noch jeder Verkehrsposten von jedem anderen aus auf einem Gesamtweg erreichbar, der sich nur aus ungesperrten Straßenabschnitten des Netzes zusammensetzt.
Man beweise, dass dies auf einem Weg erfolgen kann, der kürzer als 300 km ist.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die Posten wollen wir mit $A, B, C, Q, R, X, Y, ...$ bezeichnen, eine Buchstabenreihenfolge $BCRX$ bezeichne einen Weg von B über C und R nach X, mit (ARB) bezeichnen wir die minimale Entfernung innerhalb des Straßennetzes N von A nach B über R, und $(ARB)^*$ sei die minimale Weglänge von A nach B über R nach Sperrung eines Verbindungsweges zwischen zwei benachbarten Posten auf ungesperrten Wegen innerhalb des Netzes N.

Entsprechend sind mit (AB) bzw. $(AB)^*$ die minimalen Entfernungen innerhalb des Netzes vor bzw. nach Sperrung von A nach B gemeint.
Weiterhin sei P die Menge aller Posten. Es seien A und B benachbarte, R und Q beliebige Posten, und ein Streckenabschnitt AB werde gesperrt.
Für den Fall, dass ein Weg von A nach B existiert, dessen Länge nicht größer als die Länge des gesperrten Abschnitts ist, ist die Behauptung richtig. Wir nehmen also an, dass $(AB)^* > (AB)$ gilt und definieren für jeden Posten des Netzes N:

$$M_C = \{X | X \in P \wedge (XC)^* = (XC)\}$$

Jeder Posten X der Menge P gehört zu M_A oder M_B; denn sonst hätten wir $(XA)^* > (XA)$ und $(XB)^* > (XB)$, also ist BA Teilweg des Weges von X nach A mit minimaler Länge (XA) und AB Teilweg des Weges von X nach B mit minimaler Länge (XB), d. h.

$$(XA) = (XB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XA) + (AB) \qquad \text{also}$$
$$(XA) = (XA) + (AB) + (BA) \qquad \text{und} \qquad (XB) = (XB) + (BA) + (AB)$$

Das bedeutet aber $(AB) + (BA) = 0$, was nur für $A = B$ möglich ist. Offenbar gehören A zu M_A und B zu M_B.

Für Posten X, Y aus M_A gilt $(XY)^* = (XY)$, denn aus $(XY)^* > (XY)$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
(XY) &= (XBAY) = (XA) + (AB) + (BY) \qquad \text{oder} \\
(XY) &= (XBAY) = (XB) + (BA) + (AY) \qquad \text{und weiter} \\
(XY)^* &\le (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY) \\
&\le (XA) + (ABY) = (XA) + (AB) + (BY) = (XY) \qquad \text{oder} \\
(XY)^* &\le (XAY)^* = (XA)^* + (AY)^* = (XA) + (AY) \\
&\le (XBA) + (AY) = (XB) + (BA) + (BA) + (AY) = (XY)
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $(XY)^* > (XY)$.
Analog gilt für $X, Y \in M_B$ ebenfalls $(XB)^* = (XY)$. Nach den bisherigen Überlegungen ist o. B. d. A. nur noch der Fall $R \in M_A, Q \in M_A$, $(RQ)^* > (RQ)$ zu diskutieren.

1. Es gibt einen Posten Y mit $Y \in M_A \cap M_B$. Dann gilt wegen $R, Y \in M_A$ und $Y, Q \in M_B$ offenbar:

$$(RY)^* + (YQ)^* = (RY) + (YQ) = (RYQ)^* < 200km < 300km$$

2. Es gilt $M_A \cap M_B = \varnothing$. Nach Voraussetzung und wegen $P = M_A \cup M_B$ muss es nach Sperrung eines Abschnitts von $A \in M_A$ nach $B \in M_B$ minimaler Länge einen Weg von einem Posten$X \in M_A$ zu einem Posten $Y \in M_B$ geben, auf dem keine weiteren Posten zu finden sind, d. h., X und Y sind benachbart. Daraus ergibt sich:

$$(RQ)^* \le (RX)^* + 100km + (YQ)^* = (RX) + 100km + (YQ) < 100km + 100km + 100km = 300km$$

Alternativ-Lösung von TomTom314:

Seien A,B benachbarte Posten, s.d. deren Verbindung gesperrt ist und P,Q zwei beliebige Posten. Dann gibt es eine Vebindung $w : P \to Q$. Falls jeder Posten auf dem Weg eine Verbindung zu P oder Q, die nicht über $A \to B$ geht und kleiner als 100 km ist, können wir zwei benachbarte Posten X,Y mit Wegen $u : P \to X$ und $v : Y \to Q$ wählen, so dass der Weg $P \xrightarrow{u} X \to Y \xrightarrow{v} Q$ nicht über $A \to B$ geht und insgesamt kleiner als 300 km ist.

Falls es einen Posten auf w gibt, der von P und Q nur über $A \to B$ mit weniger als 100 km erreicht werden kann, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, d. h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \to A \xrightarrow{q_2} X$ von den wir o. B. d. A. annehmen können, dass p_1,p_2,q_1,q_2 nicht über $A \to B$ führen. Daraus erhalten wir zwei neue Wege $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{q_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} B \xrightarrow{p_2} X$, s.d. deren Summe der Längen kleiner als 200 km ist. Also ist einer der Wege im Widerspruch zur Annahme kürzer als 100 km.

2) Die Strecke $A \to B$ wird von den Wegen in der gleichen Richtung durchlaufen, d. h. wir haben Wege $P \xrightarrow{p_1} A \to B \xrightarrow{p_2} X$ und $Q \xrightarrow{q_1} A \to B \xrightarrow{q_2} X$. Dann ist der Weg $P \xrightarrow{p_1} A \xrightarrow{-q_1} Q$ kürzer als 200 km, der nicht über $A \to B$ läuft.

Aufgabe 211241:
Man untersuche, ob sich aus 1982 Zahlen $a_1, a_2, ..., a_{1982}$, die der Bedingung $|a_k| = 1$ $(k = 1, 2, ..., 1982)$ genügen, aber sonst beliebig vorgegeben sind, stets Zahlen so auswählen lassen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k ausgewählt.
(2) Es wird mindestens eine der Zahlen a_k nicht ausgewählt.
(3) Die Summe aller ausgewählten Zahlen ist gleich der Summe aller nicht ausgewählten Zahlen.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne $s := \sum_{i=1}^{1982} a_i$.
Da $a_i \equiv 1 \mod 2$ für alle i gilt, ist $s \equiv 1982 \cdot 1 \mod 2 \equiv 0 \mod 2$. Damit ist $s/2$ eine ganze Zahl.

Wir nehmen zunächst den Fall $s/2 > 0$ an und betrachten die Folge von Partialsummen: $a_1, a_1 + a_2,..., s$. Jedes Folgeglied unterscheidet sich von seinem Vorgänger um $+1$ oder -1. Wegen $s/2 > 0$ (und damit $s > s/2 > 0$) gibt es also eine Partialsumme, die genau $s/2$ beträgt, nicht mit s übereinstimmt und mindestens einen Summanden enthält. Die entsprechenden Summanden dieser Partialsumme erfüllen also alle Kriterien (1)-(3).

Für $s/2 < 0$ gilt eine analoge Argumentation. Es verbleibt $s = s/2 = 0$ zu betrachten. In diesem Fall muss eines der a_i gleich 1 und ein anderes gleich -1 sein. Wähle diese beiden Zahlen, diese erfüllen (1) bis (3).

Aufgabe 231242:
a) Man beweise, dass es eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3), (4) gibt:
(1) Jedes Element von M ist eine natürliche Zahl.
(2) Das kleinste Element von M ist die Zahl 1.
(3) Das größte Element von M ist die Zahl 100.
(4) Jedes Element von M mit Ausnahme der Zahl 1 ist die Summe von zwei Elementen von M oder das Doppelte eines Elementes von M.
b) Man ermittle eine Menge M, die die Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt und dabei möglichst wenig Elemente hat.
Dass die ermittelte Menge M diesen Anforderungen genügt, ist zu beweisen.

Lösung von Kornkreis:
a) Wähle $M = \{1,2,4,8,16,32,64,96,100\}$.
b) Das in a) angegebene M hat bereits die kleinstmögliche Anzahl an Elementen. Beweis: Betrachte eine Menge M, welche den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, und bezeichne ihre Elemente der Größe nach aufsteigend mit a_1, a_2,....

a_6 ist maximal 32, also gilt $a_7 < 100$, folglich muss M mindestens 8 Elemente haben. Ein M mit 9 Elementen haben wir bereits in der a) angegeben, also bleibt zu klären, ob M genau 8 Elemente haben kann. Dafür müsste folgendes gelten:

$$a_7 \geq 50 \geq a_6 \geq 25 \geq a_5 \geq 13 \geq a_4 \geq 7 \geq a_3 \geq 4$$

Daraus und mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ folgt $a_3 = 4$, $a_4 = 8$,...,$a_7 = 64$, woraus sich aber die 100 noch nicht erzeugen lässt, also benötigt man noch ein a_8, bevor man $a_9 = 100$ erreichen kann. Die kleinstmögliche Anzahl der Elemente ist also neun.

Aufgabe 231243:
Vier Mathematiker T, D, S, P einigen sich auf ein Ratespiel nach folgenden Regeln:
T denkt sich ein Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen mit $1 \leq x \leq y \leq z$ und $x + y + z \leq 10$.
Dann soll er D die Zahl $d = y - x$, S die Zahl $s = x + y + z$ und P die Zahl $p = xyz$ mitteilen, jeweils so, dass die beiden anderen den Wert der mitgeteilten Zahl nicht erfahren. Danach sollen sich D, S und P über ihre Informationen unterhalten.
Untersuchen Sie, ob es ein Tripel (x, y, z) gibt, mit dem bei einer Durchführung dieses Spiels (nach Mitteilung von d, s und p) das folgende Gespräch stattfinden kann:
P: „Ich kann das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig ermitteln.“
S: „Das wusste ich schon, bevor Sie es ausgesprochen haben.“

P: „Jetzt kann ich das Tripel ermitteln.“
D: „Ich auch.“
S: „Ich jetzt auch.“
Wenn es ein solches Tripel gibt, stellen Sie fest, ob es durch dieses Gespräch eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so geben Sie dieses Tripel an!

Lösung von OlgaBarati:
Aufgrund der Bedingungen $x + y + z \leq 10$ und $1 \leq x \leq y \leq z$ existiert für $z_{max} = 8$ nur das Tripel ($z = 8 : x = 1$, $y = 1$). Mit abnehmenden z addieren die in der Tabelle gezeigten Kombinationen hinzu.

Datentabelle

z	y	x	y-x	z+y+x	zyx
8	1	1	0	10	8
7	1	1	0	9	7
7	2	1	1	10	14
6	1	1	0	8	6
6	2	1	1	9	12
6	2	2	0	10	24
6	3	1	2	10	18
5	1	1	0	7	5
5	2	1	1	8	10
5	2	2	0	9	20
5	3	1	2	9	15
5	3	2	1	10	30
5	4	1	3	10	20
4	1	1	0	6	4
4	2	1	1	7	8
4	2	2	0	8	16
4	3	1	2	8	12
4	3	2	1	9	24
4	3	3	0	10	36
4	4	1	3	9	16
4	4	2	2	10	32
3	1	1	0	5	3
3	2	1	1	6	6
3	2	2	0	7	12
3	3	1	2	7	9
3	3	2	1	8	18
3	3	3	0	9	27
2	1	1	0	4	2
2	2	1	1	5	4
2	2	2	0	6	8
1	1	1	0	3	1

Der Mathematiker D kann von Mathematiker T für $d = y - x$ eine der Differenzen {0,1,2,3} genannt bekommen,
Mathematiker S mit $s = x + y + z$ eine der Summen {3,4,5,6,7,8,9,10}
und Mathematiker P mit $p = xyz$ eins der Produkte {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,18,20,24,27,30,32,36}.

Wenn P das Tripel nicht eindeutig ermitteln kann, muss der Zahlenwert von $p(xyz)$ mehrfach vorkommen und das gilt für die Produkte {4,6,8,12,18,20,24}. Wenn S das schon vor der 1. Aussage von P weiß, muss S dieses an $s(xyz)$ erkannt haben können. Da $s = 5$ die einzige Zahl ist, die unter denen, die mehrfach vorhandene Produkte $p(xyz)$ haben, nur einmal vorkommt und mit $s = 6$ gemeinsam ein $p = 4$ hat, hat S von T die Zahl $s = 6$ erhalten.

So weiß S bereits vor der 1. Aussage von P, dass P von T ein mehrmals vorhandenes Produkt $p = 4, 6$, *oder* 8 genannt bekommen hat und damit das Tripel (x, y, z) nicht eindeutig bestimmen kann.

Nach der 1. Aussage von S weiß P mit dem von T erhaltenen $p = 4$ dass S von T $s = 6$ erhalten haben muss da S mit $s = 5$ die Aussage nicht hätte treffen können (für $s = 5$ wäre auch ein für P eindeutiges $p = 3$ möglich gewesen). So ist das Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ damit für P ermittelbar.

Für Mathematiker D ergibt sich daraus, von T ein $d = 0$ erhalten zu haben. Nun weiß D bedingt durch die drei Aussagen von P und S dass die Häufigkeit n der gesuchten Summe $2 \leq n(s) \leq 3$ sein muss, denn unter abweichenden Bedingungen wären die drei Aussagen so nicht richtig gewesen.

Es bleiben damit für D nur die Summen $s = 5$, $s = 6$ und mit $d = 0$ ist $s = 6$ bestimmt. Mit $s = 6$ sind jedoch zwei Tripel $(x, y, z) = (1, 1, 4)$ mit $p = 4$ und $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ mit $p = 8$ möglich. Da die Häufigkeit von $p = 8$ größer zwei ist und somit das Tripel für P nicht ermittelbar wäre kann D das ausschließen und das Tripel ermitteln.

Auch Mathematiker S kann von seinen drei Möglichkeiten $p = 4, 6, 8$, das Produkt $p = 8$ mit der gleichen Überlegung ausschließen. Und D muss ein $d = 0$ erhalten haben, denn mit einem $d = 1$ kann D unter Erfüllung der o.g. Bedingungen / Erläuterungen kein Tripel bestimmen. Damit kann nun auch S das Tripel ermitteln.

Aufgabe 251241:
Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, dass unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.
Man beweise, dass der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, dass an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

Lösung von cyrix:
Die Gäste seien mit A bis E bezeichnet. Wir zeigen zuerst, dass jeder Gast genau zwei der anderen Gäste wechselseitig kennt:

Wir betrachten o. B. d. A. Gast A. Würde A keinen der weiteren Gäste kennen, so müssten sich alle anderen Gäste paarweise wechselseitig kennen, damit unter den drei Personen A und zwei beliebigen weiteren Gästen ein solches sich kennendes Paar vorkommt. Dann jedoch kennen sich B, C und D wechselseitig, sodass unter diesen dreien keine zwei existieren, die sich nicht gegenseitig kennen, was ein Widerspruch zur Aufgabenstellung darstellt.
Also muss A mindestens einen weiteren Gast, o. B. d. A. B, kennen. Würde A nun keinen weiteren Gast kennen, erhielte man den analogen Widerspruch, dass sich B, C und D jeweils paarweise kennen müssten, es also unter diesen dreien wieder keine zwei gäbe, die sich nicht kennen würden. Also muss A noch mindestens einen weiteren Gast, o. B. d. A. E, kennen.

Mit völlig analogem Vorgehen unter Vertauschung von „kennen“ und „nicht kennen“, zeigt man auch, dass A mindestens zwei der Gäste nicht kennt, was dann C und D sein müssen.
Da A hierbei beliebig gewählt wurde, gilt für jeden Gast, dass er genau zwei der anderen Gäste kennt. Insbesondere gilt dies auch für B und E, die also neben A noch jeweils genau einen weiteren Gast kennen. Würden sie sich gegenseitig kennen, hieße das, dass sie beide sowohl C als auch D nicht kennen, sodass C und D nur maximal einen Gast (nämlich den jeweils anderen) kennen könnten, was ein Widerspruch zur gerade gemachten Aussage, dass jeder Gast genau 2 andere kennt, wäre. Also können sich B und E nicht kennen.

Der zweite B bekannte Gast neben A sei o. B. d. A. C. Damit kennt D weder A noch B, muss also sowohl C als auch E kennen, sodass sich die Anordnung $A - B - C - D - E - A$ ergibt, die der Aufgabenstellung genügt, □.

Aufgabe 271241:
In einer Ebene sei G die Menge aller derjenigen Punkte, deren rechtwinklige kartesische Koordinaten ganze Zahlen sind.
Ferner sei F die Menge von 1988 verschiedenen Farben.
Man beweise: Für jede Verteilung von Farben, bei der jeder Punkt aus G genau eine der Farben aus F enthält, gibt es in G vier gleichfarbige Punkte, die die Ecken eines Rechtecks mit achsenparallelen Seiten sind.

Lösung von Kornkreis:
Betrachte die Punktmenge P_k bestehend aus den Punkten $(k{,}0),(k{,}1),...,(k{,}1988)$, wobei k eine ganze Zahl ist. Für jedes k sind dies 1989 Punkte, sodass es unter diesen immer zwei verschiedene Punkte gibt, die die gleiche Farbe haben (Schubfachprinzip).

Betrachte nun die Punktmengen $P_0, P_1, ..., P_n$ mit $n = 1988 \cdot (1989 \cdot \frac{1988}{2})$. Nach obiger Feststellung gibt es für jedes dieser P_k ($k \in \{0,...,n\}$) eine Farbe, sodass zwei Punkte aus P_k diese Farbe haben. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also eine Farbe F, sodass in $1 + (1989 \cdot \frac{1988}{2})$ verschiedenen dieser Mengen P_k jeweils zwei Punkte mit dieser Farbe F vorkommen.

Es gibt aber maximal $1989 \cdot \frac{1988}{2}$ Möglichkeiten dafür, dass sich die y-Koordinaten solcher zwei Punkte mit Farbe F aus einem der P_k von denen aus einem anderen der P_k unterscheiden. Demzufolge gibt es (nach dem Schubfachprinzip) vier Punkte mit der gleichen Farbe F, die die Eckpunkte eines Rechtecks bilden, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 281246B:
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1.
Sei $ABCD$ das gegebene Quadrat der Seitenlänge 1,99. Offenbar kann man ein Quadrat der Seitenlänge 1 in $ABCD$ legen. Mit zwei Quadraten ist das jedoch nicht mehr möglich, weil sich zwei beliebige, in $ABCD$ liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen.
Um das zu zeigen, wird bewiesen, dass ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge 1, das in $ABCD$ liegt, den Mittelpunkt M von $ABCD$ in seinem Innern enthält.

Angenommen, für ein solches Quadrat $PQRS$ ist das nicht der Fall.
Wir bezeichnen die Geraden durch P,Q bzw. Q,R bzw. R,S bzw. S,P mit p,q,r bzw. s. Dann liegt M auf dem Rand oder außerhalb von mindestens einem der beiden Streifen zwischen p und r bzw. zwischen q und s. Also hat M von mindestens einer der Geraden p,q,r oder s einen Abstand ≥ 1, o. B. d. A. von p.
Also liegt p ganz außerhalb des Inkreises k von $ABCD$, da dieser den Radius $\frac{1}{2} \cdot 1{,}99 < 1$ hat. Andererseits enthält der Durchschnitt von p mit der Quadratfläche $ABCD$ mindestens die Strecke PQ und ist daher selbst eine Strecke XY.
Wir bezeichnen nun mit E,F,G,H die Mittelpunkte von AB, BC, CD, DA sowie mit AEH die Differenz zwischen $\triangle AEH$ und dem in $\triangle AEH$ liegenden, durch E und H bestimmten Segment von k, wobei AEH ohne den Bogen $\overset{\frown}{EH}$, aber mit allen übrigen Randpunkten verstanden sein. Analog seien die Flächenstücke BFE, CGF und DHG definiert.

Da nun $ABCD$ mit dem Außengebiet von k nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke AEH, BFE, CGF und DHG gemeinsam hat, muss die Strecke XY ganz in einem dieser Stücke liegen, o. B. d. A. in AEH. Ihre Endpunkte X, Y sind Randpunkte von $ABCD$, wegen

$$XY \geq PQ = 1 > 0{,}5 \cdot 1{,}99 = AE = AH$$

also o. B. d. A. mit X auf AH und Y auf AE.
Unter allen Geraden, die parallel zu p sind und durch einen Punkt der Strecke XH gehen, muss es genau eine geben, die k berührt, den p selbst liegt außerhalb k, und die Parallele durch H zu p schneidet den Kreis k in zwei Punkten, da sie nicht auf dem Radius MH senkrecht steht. Diese k berührende Gerade u schneidet die Strecke XH also in einem inneren Punkt U und somit die Strecke YE in einem inneren Punkt V, ihr Berührungspunkt mit k sei W. Wegen $AX < AU$ ist nach dem Strahlensatz auch $XY < UV$.
Nach Dreiecksungleichungen und dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte folgt schließlich

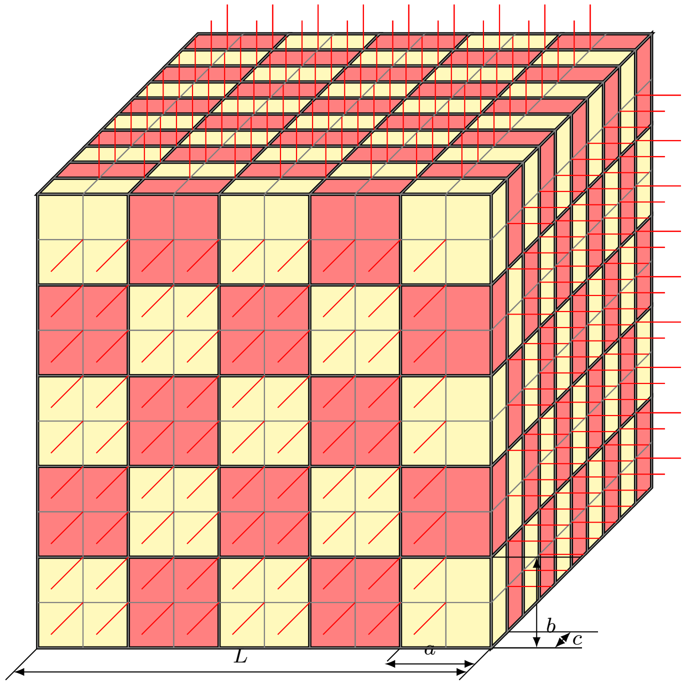
$$1 = PQ \leq XY < UV < \frac{1}{2}(AU + AV + UW + VW) = \frac{1}{2}(AU + AV + UH + VE) = AE = \frac{1}{2} \cdot 1{,}99$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war und beendet den Beweis.

Aufgabe 301242:
Zu einem würfelförmigen Kasten der Kantenlänge 10 cm seien alle diejenigen Geraden betrachtet und als markiert bezeichnet, die durch das Innere des Würfels gehen, parallel zu einer Würfelkante verlaufen und von den beiden Seitenflächen, die diese Kante enthalten, ganzzahlige (in cm gemessene) Abstände haben.
Man beweise:
Wie man auch den Kasten mit 250 quaderförmigen Bausteinen der Abmessungen 2 cm $\times$ 2 cm $\times$ 1 cm vollständig ausfüllt, stets gibt es wenigstens 100 markierte Geraden, die keinen der Bausteine durchstechen.
Dabei gilt ein Baustein genau dann als durchstochen, wenn die Gerade innere Punkte des Bausteins enthält.

Lösung von Kitaktus:
Wir zerlegen den Würfel in Elementarwürfel der Größe 1 cm x 1 cm x 1 cm. Ist der Kasten lückenlos mit Bausteinen gefüllt, so entspricht jeder Baustein vier im Quadrat liegenden Elementarwürfeln.
Wir stellen fest, dass jeder Baustein nur von einer einzigen markierten Geraden durchstochen wird, nämlich von der, die durch die Mittelpunkte der beiden 2 cm x 2 cm - Seitenflächen verläuft. (1)

Wir betrachten nun eine beliebige markierte g Gerade, die o. B. d. A. senkrecht zur Grundfläche steht.



Wir führen zwei Schritte aus, die jeweils parallel zu den beiden Paaren von Seitenflächen verlaufen und g vollständig enthalten. Dabei zerfällt der Kasten in vier Teile.

Jedes Teil enthält eine gerade Anzahl an Einheitswürfeln, da es eine ganzzahlige Länge und Breite sowie die Höhe 10 cm hat. (2)
Durch die beiden Schnitte werden auch einige Bausteine zerteilt. Die Einheitswürfel, aus denen die Bauteile bestehen bleiben dabei aber stets erhalten.

Ein Baustein, der nicht von g durchstochen wird, liegt entweder komplett in einem der vier Kastenteile, oder er wird durch einen Schnitt halbiert. Ein Baustein hingegen, der von g durchstochen wird (und nur solche), wird durch die Schnitte in seine vier Einheitswürfel zerlegt.

Angenommen, die Gerade g durchstößt genau einen Baustein B. Dann befänden sich in jedem Kastenteil einige ganze Bausteine, einige halbe Bausteine, sowie genau ein Einheitswürfel von B. Das kann aber nicht sein, weil das zusammen eine ungerade Anzahl von Einheitswürfeln ergibt, im Widerspruch zu (2).

Jede markierte Gerade durchstößt also keinen Baustein, oder mindestens zwei. (3) Insgesamt gibt es 3 x 9 x 9 = 243 markierte Geraden – drei Richtungen und jeweils neun ganzzahlige Abstände von den beiden Kanten (1 cm, ..., 9 cm).

Da es nur 250 Bausteine sind und wegen (1) jeder Baustein nur von einer Geraden durchstochen wird, kann es wegen (3) nicht mehr als 125 Geraden geben, die überhaupt einen Baustein durchstechen. Es gibt demnach mindestens $243 - 125 = 118 > 100$ Geraden, die keinen Baustein durchstechen. q. e. d.

Aufgabe 301244:
Eine streng monoton steigende Zahlenfolge $x_1, x_2, ..., x_n$ werde genau dann m-schmal genannt, wenn für alle $a = 2, ..., n$ die Ungleichungen $x_a - x_{a-1} \leq m$ gelten.
Eine Menge A von Zahlen werde genau dann m-dicht genannt, wenn sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine n-gliedrige streng monoton steigende Zahlenfolge enthält, die m-schmal ist.
Man beweise die folgende (einen berühmten Satz des niederländischen Mathematikers B. L. van der Waerden abschwächende) Aussage:

Zu jeder Zerlegung der Menge N aller natürlichen Zahlen in eine Anzahl $r \geq 2$ paarweise disjunkter nicht leerer Teilmengen $T_1, ..., T_r$ gibt es eine positive Zahl m, so dass (mindestens) eine der Mengen $T_1, ..., T_r$ eine m-dichte Menge ist.

1)Diesen Satz (bei dem arithmetische statt m-schmaler Folgen auftreten) ohne Beweis nur als bekannten Sachverhalt zu zitieren, würde hier für eine Lösung der Aufgabe nicht ausreichen.

Lösung von cyrix:
In der folgenden Lösung sei $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$. Die Aussage stimmt auch für die alternative Definition mit 0 als natürlicher Zahl und lässt sich vollkommen analog formulieren und beweisen.

Wir gehen induktiv vor und betrachten zunächst den Fall $r = 2$. Sei also die Menge der natürlichen Zahlen in die zwei disjunkten Mengen T_1 und T_2 zerlegt. Enthält T_1 für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, so ist T_1 1-dicht und die Behauptung erfüllt.

Andernfalls existiert eine natürliche Zahl m, sodass unter je m aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer mindestens eine nicht in T_1, also dann in T_2, enthalten ist. Zwei aufeinanderfolgende Elemente von T_2 haben damit immer den Abstand von höchstens $2m$, sodass T_2 nun $2m$-dicht ist, die Behauptung also für jede Zerlegung von $\mathbb{N}$ in $r = 2$ Teilmengen erfüllt ist.

Sei nun $r > 2$ und die Aussage schon für $r - 1$ bewiesen. Sei weiterhin $T_1, \dots, T_{r-1}, T_r$ eine Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen. Dann ist auch $T_1, \dots, T_{r-1} \cup T_r$ eine solche Zerlegung in $r - 1$ Mengen. Also existiert ein m, sodass mindestens eine dieser Mengen m-dicht ist. Ist eine der Mengen T_1 bis T_{r-2} m-dicht, so gilt die Aussage auch für die Zerlegung in die r Teilmengen.

Andernfalls ist $T_{r-1} \cup T_r$ m-dicht. Die Elemente von $T_{r-1} \cup T_r$ seien, der Größe nach geordnet, mit $a_1 < a_2 < \dots$ bezeichnet. (Es müssen unendlich viele sein, da sonst die Menge nicht m-dicht wäre.) Dann gilt für jede natürliche Zahl $i > 0$ die Ungleichung $a_{i+1} - a_i \leq m$. Weiterhin sei A_1 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_{r-1}$ gilt und analog A_2 die Menge der natürlichen Zahlen i, für die $a_i \in T_r$ gilt. Dann bilden (da T_{r-1} und T_r nichtleer und disjunkt sind) A_1 und A_2 eine Zerlegung der natürlichen Zahlen in zwei nichtleere und disjunkte Teilmengen.

Also gibt es nach dem schon bewiesenen Fall für $r = 2$ eine natürliche Zahl m', sodass mindestens eine der beiden Mengen – o. B. d. A. sei dies A_2 – m'-dicht ist. Dann jedoch ist T_r $m \cdot m'$-dicht, da eine m'-schmale Folge von Zahlen in A_2 sich in eine $m \cdot m'$-schmale Teilfolge von Zahlen in T_r übersetzt, wenn man die entsprechenden Indizes aus der Folge in A_2 wählt.

Also gibt es in jedem Fall für jede Zerlegung der natürlichen Zahlen in $r \geq 2$ paarweise disjunkte Teilmengen eine natürliche Zahl m, sodass mindestens eine dieser Teilmengen m-dicht ist, $\square$.

Aufgabe 301246B:
Für natürliche Zahlen n, k mit $2 \leq k \leq n$ werde eine Menge N von n Personen genau dann als k-familiär bezeichnet, wenn sich in jeder Menge K von k Personen aus N eine Person befindet, die mit allen anderen Personen aus K bekannt ist.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ alle diejenigen natürlichen Zahlen k mit $2 \leq k \leq n$, für die die Aussage gilt, dass jede k-familiäre Menge von n Personen auch n-familiär sein muss!
Hinweise: Für Personen a, b gelte stets: Wenn a mit b bekannt ist, so ist b mit a bekannt.
Ferner werde vorausgesetzt, dass jede in einer Menge theoretisch widerspruchsfreie Verteilung gegenseitiger Unbekanntheit oder Bekanntheit auch durch eine Menge von Personen realisiert werden kann.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst stellen wir fest, dass eine k-familiäre Menge von Personen k-familiär bleibt, wenn weitere Bekanntschaften unter den Personen hinzugefügt werden. Wir nennen nun eine Menge von n Personen „maximal verbunden„, wenn die Menge nicht n-familiär ist (d. h., es gibt keine Person, die alle anderen kennt), aber nach Hinzufügen einer beliebigen (noch nicht vorhandenen) Bekanntschaft stets n-familiär wird.

Wenn für ein $2 \leq k < n$ gilt, dass keine k-familiäre maximal verbundene Menge aus n Personen existiert, so existiert überhaupt keine Menge aus n-Personen, die nicht n-familiär aber k-familiär ist:

Denn so eine beliebige, nicht-n-familiäre Menge ergibt sich durch Entfernen von Bekanntschaften aus einer maximal verbundenen Menge, und wir haben oben schon festgestellt, dass das Hinzufügen von Bekanntschaften eine vorhandene k-Familiarität erhalten muss (umgekehrt muss das Entfernen von Bekanntschaften die Nicht-k-Familiarität erhalten).

Wir betrachten also maximal verbundene Mengen aus n Personen und wollen alle k finden, sodass keine dieser Mengen k-familiär ist. Diese k's sind dann gleichzeitig die Lösung der Aufgabe.

Wir bezeichnen mit der Tupel-Schreibweise $(a_1,a_2,\ldots,a_j)$ für $2 \leq j \leq n$, dass Person a_1 genau die Personen $a_2,\ldots,a_j$ nicht kennt, und Personen $a_2,\ldots,a_j$ jeweils genau Person a_1 nicht kennen.
Die Bekanntschaftsverhältnisse einer maximal verbundenen Menge lassen sich nun immer als Aufzählung solcher Tupel darstellen, wobei jede Person in genau einem Tupel vorkommt und jedes Tupel mindestens zwei Personen enthält.
Beweis:
Jede Person kennt mindestens eine andere Person nicht, da die Menge sonst n-familiär wäre. Wenn eine Person a_1 mehrere Personen $a_2,\ldots,a_j$ mit $j > 2$ nicht kennt, so gilt für die Personen $a_2,\ldots,a_j$, dass sie jeweils genau eine Person (nämlich a_1) nicht kennen.
Würde nämlich eine dieser Personen a_i $(1 < i \leq j)$, noch eine weitere Person außer a_1 nicht kennen, so könnte man die Bekanntschaft zwischen a_i und a_1 hinzufügen, ohne dass die Menge n-familiär werden würde, Widerspruch zur Eigenschaft maximal verbundener Mengen. Man sieht nun leicht, dass daraus die oben erklärte Darstellbarkeit der Bekanntschaften in Tupel-Form folgt.

Sei nun n beliebig und k gerade. Die Anzahl der Tupel mit einer ungeraden Anzahl an Personen (kurz: ungerade Tupel) sei mit $a \geq 0$ bezeichnet. Wähle nun k Personen so aus, dass aus einem ungeraden Tupel die ersten beiden, die ersten vier, ... ausgewählt werden, bis nur noch die letzte Person des Tupels übrig bleibt. Verfahre so mit allen ungeraden Tupeln.

Wähle dann aus einem geraden Tupel (also Tupel mit einer geraden Anzahl an Personen) ebenfalls die ersten beiden, die ersten vier, ... aus und verfahre so mit allen geraden Tupeln. Man sieht, dass man somit immer k Personen auswählen kann, sodass keine dieser Personen alle anderen $k-1$ Personen kennt, solange $2 \leq k \leq n - a$ gilt. Indem nun immer auch die jeweils letzte Person von zwei ungeraden Tupeln ausgewählt wird, kann man k bis auf n bzw. $n-1$ vergrößern, wenn a gerade bzw. ungerade ist. Folglich gilt für alle n, dass es keine k-familiäre und nicht-n-familiäre Menge gibt, wenn k gerade ist.

Sei nun k ungerade. Für n gerade kann man die Konfiguration der Form (1,2), (3,4), ..., (n-1,n) betrachten, für die bei einer Auswahl einer ungeraden Anzahl an Personen immer eine Person existiert, die mit allen anderen bekannt ist (nämlich die Person, die als einzige aus ihrem Tupel gewählt wurde), was k-Familiarität bedeutet.

Ist n ungerade, muss wieder eine ungerade Anzahl a ungerader Tupel vorliegen. Für ungerade k, wähle die ersten drei Elemente eines ungeraden Tupels aus, und danach weitere zwei Elemente dieses Tupels, etc., bis alle Elemente des ungeraden Tupels gewählt wurden.
Falls noch weitere ungerade Tupel vorliegen (es ist $a-1$ eine gerade Anzahl), wähle von einem die ersten beiden Elemente, etc., bis nur noch eines übrig bleibt, und verfahre genau so mit einem anderen ungeraden

Tupel. Wähle dann die letzten beiden Elemente dieser beiden ungeraden Tupel. Verfahre genau so mit weiteren ungeraden Tupeln.
Für vorliegende gerade Tupel, wähle eines aus, und darin die ersten zwei Personen, etc., bis aus alle geraden Tupeln gezogen wurde. Damit haben wir für beliebige Bekannschaftskonfigurationen gezeigt, dass für alle ungeraden k eine Auswahl von k Personen existiert, sodass keine davon alle anderen kennt, d. h., es liegt keine k-Familiarität vor.

Insgesamt haben wir:
Für genau $k \in \{2, 4, \dots, n\}$ für n gerade, und alle $2 \leq k \leq n$ für n ungerade, gibt es keine k-familiäre Menge, die nicht auch n-familiär ist.

Aufgabe 311246B:
In einem utopischen Roman ist von einem unendlich lange lebenden Autor die Rede.
An jedem Tag schreibt er einen Text, mit dem er mindestens ein Blatt Papier füllt und, wenn er an diesem Tag noch weitere Blätter beginnt, auch jedes dieser Blätter am gleichen Tag füllt. Im Lauf jedes Jahres füllt er auf diese Weise eine Anzahl Blätter; für verschiedene Jahre können diese Anzahlen verschieden sein, in keinem Jahr jedoch beträgt diese Anzahl mehr als 730.
Man beweise:
Im Leben dieses Autors gibt es für jede positive ganze Zahl n einen Zeitraum von aufeinanderfolgenden Tagen, in dem der Autor genau n Blätter füllt.
Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass die derzeit gültige Regel unendlich lange gilt, wonach sich stets unter acht aufeinanderfolgenden Jahren mindestens ein Schaltjahr mit 366 Tagen befindet, während jedes Nicht-Schaltjahr aus 365 Tagen besteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes positive ganze Zahl n gilt, wenn k eine ganze Zahl größer als $\frac{n}{2}$ ist:
Der Zeitraum von beliebige gewählten $9k$ aufeinanderfolgenden Jahren besteht aus einer Anzahl A von Tagen, für die

$$A \geq 365 \cdot 8k + k \tag{1}$$

gilt. Wird für $i = 1,2,...,A$ jeweils die Anzahl der Blätter, die der Autor in den ersten i Tagen dieses Zeitraums insgesamt gefüllt hat, mit x_i bezeichnet, so gilt nach Voraussetzung ferner

$$0 < x_1 < x_2 < ... < x_A \leq 730 \cdot 8k \tag{2}$$

Jede der positiven ganzen Zahlen

$$x_1, x_2, ..., x_A, x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n \tag{3}$$

ist folglich nicht größer als $730 \cdot 8k + n$. Für ihre Anzahl $2A$ gilt wegen (1) und $k > \frac{n}{2}$ aber $2A \geq 730 \cdot 8k + 2k > 730 \cdot 8k + n$.
Also müssen sich nach dem Schubfachschluss unter den Zahlen (3) mindestens zwei einander gleiche befinden. Nach (2) sind jedoch keine zwei der Zahlen $x_1 + n, x_2 + n, ..., x_A + n$.
Daraus folgt die Existenz von i und j mit $1 \leq i,j \leq A$ und

$$x_i = x_j + n \tag{4}$$

Wegen $n > 0$ ist hierfür $i > j$, und (4) besagt: In dem Zentrum vom $(j + 1)$-ten Tag bis zum i-ten Tag wurden genau n Blätter gefüllt.

Aufgabe 321241:
Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.
Beweisen Sie, dass es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

Lösung von Kornkreis:
Drehungen werden im Folgenden als verschieden bezeichnet, wenn die zugehörigen Drehwinkel sich nicht um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Für jeden der gelben Punkte gibt es genau 16 verschiedene Drehungen, die den gelben Punkt in einen gelben Punkt überführen.
Eine dieser Drehungen ist dabei immer die Identität.
Folglich gibt es maximal $16 \cdot 16 - 15 = 241$ verschiedene Drehungen, sodass es einen gelben Punkt gibt, der durch eine dieser Drehungen auf einen gelben Punkt abgebildet wird. Da es aber 250 verschiedene Drehungen gibt, die das 250-Eck in sich selbst überführen, müssen neun dieser 250 Drehungen jeden gelben Punkt in einen nicht-gelben, d. h. blauen Punkt überführen. Insbesondere ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 321243:
Von 1993 Punkten $P_1, ..., P_{1993}$ werde vorausgesetzt, dass keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, dass jeder der 1993 Punkte P_i mit mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Stecken verbunden ist.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.

Lösung von Nuramon:
Wir zeigen eine allgemeinere Aussage:
Es seien k,m positive natürliche Zahlen. Gegeben seien $n := km + 1$ Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Von jedem dieser Punkte seien die Verbindungsstrecken zu mindestens $d := (k - 1)m + 1$ anderen dieser Punkte eingezeichnet. Dann gibt es $k + 1$ Punkte, von denen jeder mit allen anderen der $k + 1$ Punkte verbunden ist.

Beweis durch Induktion nach k:

Induktionsanfang:
Für $k = 1$ ist die Aussage wahr, denn es ist dann $d = (k - 1)m + 1 = 1$, also gibt es mindestens $2 = k + 1$ Punkte, die miteinander verbunden sind.

Induktionsschluss:
Sei nun $k \geq 2$ und sei A irgendeiner der $n = km + 1$ Punkte. Es sei N_A die Menge aller Punkte, mit denen A verbunden ist. Nach Voraussetzung gilt $|N_A| \geq d$. Es gibt daher eine Teilmenge $N \subseteq N_A$ mit genau $d = (k - 1)m + 1$ Elementen.
Es gibt genau $n - d = m$ Punkte, die nicht in N enthalten sind. Daher muss jeder Punkt aus N mit mindestens $d - m = (k - 2)m + 1$ anderen Punkten aus N verbunden sein.
Nach Induktionsannahme gibt es somit k Punkte aus N, die alle paarweise miteinander verbunden sind. Da jeder dieser Punkte auch mit A verbunden ist, folgt die Behauptung.

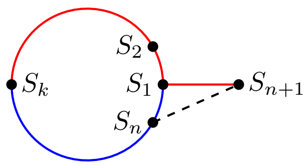
Lösung der Aufgabe:
Wegen $1993 = 6 \cdot 332 + 1$ und $1661 = 5 \cdot 332 + 1$ können wir mit $k = 6$ und $m = 332$ die Behauptung folgern.

Bemerkung:
Wir haben sogar stärker gezeigt, dass es zu jedem der 1993 Punkte sechs andere Punkte gibt, so dass jeder dieser 7 Punkte mit jedem anderen der 7 Punkte verbunden ist.

Aufgabe 321246A:
Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt.
Von n Städten $S_1, ..., S_n$ werde vorausgesetzt, dass zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen benutzbare) Verbindung besteht und dass diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, dass es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muss, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Lösung von Nuramon:
Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n. Für $n = 3$ ist die Aussage klar.

Betrachten wir also $n + 1$ Städte $S_1, \ldots, S_{n+1}$, so dass zwischen je zwei dieser Städte jeweils entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung besteht.
Per Induktionsannahme gibt es eine Bus-Bahn-Rundreise durch die Städte $S_1, \ldots, S_n$, bei der man höchstens einmal das Verkehrsmittel wechseln muss.
O. B. d. A. sei diese dadurch gegeben, dass man bei S_1 startet und die Städte S_2,$S_3, \ldots, S_k$ in dieser Reihenfolge mit dem Bus (rot) besucht und anschließend von S_k mit der Bahn (blau) über $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$ zurück nach S_1 fährt.
Wir nehmen außerdem o. B. d. A. an, dass zwischen S_1 und S_{n+1} eine Busverbindung besteht. (Falls zwischen S_1 und S_{n+1} eine Bahnverbindung besteht, so vertausche man im Beweis die Rollen von S_n und S_2.)



Falls zwischen S_n und S_{n+1} ein Bus fährt, so ist $S_n \to S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_k \to \ldots \to S_n$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Falls zwischen S_n und S_{n+1} die Bahn fährt, so ist $S_{n+1} \to S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_k \to \ldots \to S_n \to S_{n+1}$ eine geeignete Bus-Bahn-Rundreise.

Aufgabe 331241:
Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:
a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.
b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.
Hinweis: In dieser Aufgabe sei als Differenz zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x - y|$ verstanden.
Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x - y|$ und als $|y - x|$).

Lösung von weird:
Dies ist wieder einfach nur eine Anwendung des Schubfachprinzips in der folgenden verschärften Form: Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei n,$k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Konkret ist hier $n = \frac{32*31}{2} = 496$, also die Gesamtanzahl der Differenzen, welche bei 32 positiven ganzen Zahlen gebildet werden können und $k = 110$, also die Gesamtanzahl an möglichen Differenzen, welche zwischen zwei verschiedenen Zahlen in der Menge {1,2,,...,111} überhaupt auftreten können. Und tatsächlich ist

$$\left\lceil \frac{496}{110} \right\rceil = 5$$

d. h., die Aussage a) ist richtig. Dagegen ist b) falsch, denn es ist natürlich möglich, dass jede der 110 Differenzen weniger als sechsmal vorkommt, z. B. etwa bei der folgenden - zwar extrem unwahrscheinlichen, aber immerhin möglichen - Aufteilung

$$54 \cdot 4 + 56 \cdot 5 = 496$$

der 496 Differenzen, bei der sich in einer Gruppeneinteilung nach verschiedenen Differenzen, mit dann also jeweils gleicher Differenz innerhalb einer Gruppe, 54 mal Vierergruppen und 56 mal Fünfergruppen gebildet hatten.

Aufgabe 331245:
Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag.
Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen.
Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muss, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Lösung von Kornkreis:
Die Lösung erfolgt wie bei der Aufgabe 161233, wenn man folgende Dinge feststellt:
Eine Freundschaft (die ja immer gegenseitig sein soll) kann durch eine Linie zwischen zwei Punkten symbolisiert werden, wobei jeder Zwerg durch einen Punkt in der gegenwärtigen Farbe seines Hauses dargestellt wird.
Da jeder Zwerg eine ungerade Anzahl an Freundschaften mit anderen Zwergen hat, ist jeder Zwerg, dessen Haus umgestrichen werden kann, „außergewöhnlich“ (im Sinne der Definition in der 161233, dass mehr als die Hälfte der Verbindungen des entsprechenden Punktes von Punkten der anderen Farbe ausgehen), und tatsächlich wird immer das Haus eines außergewöhnlichen Zwerges umgestrichen werden, nämlich dann, wenn der nächste Geburtstag eines der außergewöhnlichen Zwerge ansteht.
In der Lösung der Aufgabe 161233 wurde festgestellt, dass, unabhängig von der Reihenfolge des Umfärbens außergewöhnlicher Punkte, nach einer endlichen Anzahl von Umfärbungen kein außergewöhnlicher Punkt mehr existiert.
Damit kann kein Umfärben mehr stattfinden, was die Behauptung der Aufgabe zeigt.

III.II Berechnung von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten, Binomialkoeffizienten

I Runde 1

Aufgabe V01209:
Wie viel Prozent

a) aller 2stelligen Zahlen	b) aller 3stelligen Zahlen
c) aller 5stelligen Zahlen	d) aller 10stelligen Zahlen
e) aller 20stelligen Zahlen	f) aller 50stelligen Zahlen

enthalten nicht die Null 0 als Ziffer?

Lösung von Steffen Polster:
Für ein $n \geq 2$ existieren genau $9 \cdot 10^{n-1}$ n-stellige Zahlen.
Damit eine n-stellige Zahl keine 0 enthält, muss an jeder Stelle eine Ziffer 1 bis 9 stehen, d. h. es gibt 9^n verschiedene n-stellige Zahlen ohne 0 in der Ziffernfolge. Der prozentuale Anteil ist somit

$$\frac{9^n}{9 \cdot 10^{n-1}} \cdot 100\% = 0{,}9^{n-1} \cdot 100\%$$

Damit ergibt sich: a) 90 %, b) 81 %, c) 65,61 %, d) 38,7 %, e) 13,5 % und f) 0,57 %.

Aufgabe V01210:
Bei einer Silvesterfeier, zu den 300 Personen anwesend sind, gratuliert im Mitternacht jeder jedem mit einem Händedruck.
Wie viel Zeit nimmt dies in Anspruch, wenn alle Personen gleichzeitig mit der Gratulation beginnen und jede 3 Sekunden dauert?
Lösen Sie die Aufgabe allgemein und dann mit den im Text gegebenen Werten.

Lösung von Steffen Polster:
Es seien n Personen anwesend. Da jeder jedem gratuliert, entspricht die Anzahl der Glückwünsche der Anzahl z von Möglichkeiten aus den n Personen genau 2 auszuwählen, d. h., $z = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ist n gerade und da die Personen sich gleichzeitig gratulieren, können sich gleichzeitig $\frac{n}{2}$ Paare die Hände schütteln. Damit sind $n-1$ Gratulationsrunden erforderlich, die $3n-3$ Sekunden benötigen.
Ist n ungerade können sich gleichzeitig $\frac{n-1}{2}$ Paare die Hände schütteln, während eine Person immer warten muss. Damit sind nun n Gratulationsrunden erforderlich, die 3 Sekunden benötigen.

„Gratulationsplan“:
Nummeriere die Personen mit $1, \dots, n$.

1. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist ungerade.
Dann betrachte folgenden Gratulationsplan:
Für $r = 1{,}2, \dots, n$ soll in Runde r die Person mit Nummer i der eindeutig bestimmten Person mit Nummer j gratulieren, für die $i + j \equiv r \pmod n$ gilt. Falls $i = j$ gilt, so setzt Person i in dieser Runde aus.

Korrektheitsbeweis:
Wegen $i + j = j + i$ ist klar, dass in jeder Runde die Person j, der Person i laut Plan gratulieren soll, ebenfalls der Person i gratulieren soll. Also sind die geplanten Gratulationen immer möglich.
Außerdem gratuliert jede Person jeder anderen genau einmal: Die Personen $i{,}j$ gratulieren sich in der Runde r für die $r \equiv i + j \pmod n$ gilt.

Beobachtung: Da n ungerade ist, gibt es in jeder Runde r genau eine Person i, die aussetzt, also für die $2i \equiv r \pmod n$ gilt. Außerdem gibt es zu jeder Person genau eine Runde, in der die Person aussetzt.

2. Fall: Angenommen die Anzahl n der Personen ist gerade.
Betrachte die Person n getrennt von den anderen. Der neue Plan ist, den Plan für die Personen $1{,}2, \dots, n-1$ gemäß des 1. Falls auszuführen mit dem Unterschied, dass die Person, die aussetzen sollte der Person n gratuliert.

Formal: Für $r = 1{,}2, \dots, n-1$ soll in Runde r die Person i (mit $1 \leq i < n$) der Person j mit $i + j \equiv r \pmod{n-1}$ (falls $j \neq i$) bzw. der Person n (falls $j = i$) gratulieren.
Die Korrektheit folgt aus Fall 1 und obiger Beobachtung.

Für den konkreten Fall $n = 300$ wird $z = \binom{300}{2} = 44850$. Die 299 Gratulationsrunden erfordern 897 Sekunden, d. h. 14 min 57 s.

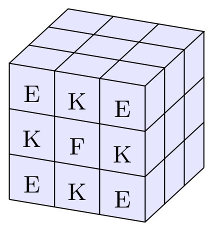
Aufgabe 011115:
Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind.
Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, dass in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wie viel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wie viel haben eine, wie viel zwei und wie viel drei angestrichene Flächen?

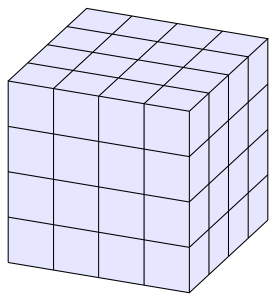
b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

Lösung von Korinna Grabski:



a) (Bild a) Für einen Würfel mit den Abmaßen $3 \times 3 \times 3$ haben
– 8 kleine Eckwürfel (E) drei bemalte Flächen,
– 12 kleine Kantenwürfel (K) zwei bemalte Flächen,
– 6 kleine Flächenwürfel (F) eine bemalte Fläche und
– 1 kleiner Innenwürfel keine bemalte Fläche.



b) (Bild b) Für einen Würfel mit den Abmaßen $4 \times 4 \times 4$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(4-2) = 24$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(4-2)^2 = 24$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(4-2)^3 = 8$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

c) Für einen Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ haben
– 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
– $12(n-2)$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
– $6(n-2)^2$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und – $(n-2)^3$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

Beweis:
Kleine Würfel mit drei bemalten Flächen liegen genau an den Ecken des großen Würfels. Da ein Würfel immer 8 Ecken hat, gibt es für jede Größe des Würfels immer 8 kleine Würfel mit drei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen liegen genau auf den Kanten des großen Würfels, aber nicht auf den Ecken. Eine Kante eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n kleine Würfel lang. Dazu gehören auch die zwei Eckwürfel. Damit erhält man für jede Kante des Würfels $n-2$ kleine Würfel mit 2 bemalten Flächen. Da ein Würfel immer 12 Kanten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $12(n-2)$kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen.

Kleine Würfel mit einer bemalten Fläche liegen auf den Seiten des großen Würfels, aber nicht auf den Kanten. Eine Seite eines $(n \times n \times n)$-Würfels ist n^2 kleine Würfel groß. Dazu gehören auch die vier Kanten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für jede Seite des Würfels $(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche. Da ein Würfel immer 6 Seiten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $6(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche.

Kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche liegen im Inneren des Würfels. Der $(n \times n \times n)$-Würfel besteht aus n^3 kleinen Würfeln. Dazu gehören auch die sechs Seiten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für das Innere des Würfels $(n-2)^3$ kleine Würfel. Damit gibt es immer $(n-2)^3$ kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche.

Zur Probe werden alle ermittelten Anzahlen addiert: $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3$, in Übereinstimmung damit, dass der Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ aus genau n^3 kleinen Würfeln besteht.

Aufgabe 011213:
Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern

a) 1 und 2, b) 1, 2 und 3, c) 1, 2, 3 und 4

bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen? Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!

1) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?

2) Was lässt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie, diese Vermutung zu beweisen!

Lösung von Eckard Specht:
Wir haben es hier mit Variationen mit Wiederholung zu tun, denn wir wollen k, nicht notwendig verschiedene Elemente aus der Menge der ersten n natürlichen Zahlen auswählen und in einer Reihe aufschreiben (also mit Beachtung der Reihenfolge). Dabei haben wir für jede der k Stellen in der Reihe n Möglichkeiten, demnach ist die gesuchte Anzahl $V(n,k)$ gegeben durch

$$V(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{\text{k-mal}} = n^k$$

Somit lassen sich
a) $V(2,3) = 2^3 3 = 8$
b) $V(3,3) = 3^3 = 27$
c) $V(4,3) = 4^3 = 64$ verschiedene dreistellige Zahlen bilden.
d) Für vierstellige Zahlen finden wir analog $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ bzw. $4^4 = 256$ verschiedene Lösungen.
e) Haben wir dagegen n Ziffern zur Verfügung, so lassen sich

- n Zahlen mit vier gleichen Ziffern aaaa angeben,
- $4n(n-1)$ Zahlen mit drei gleichen Ziffern aaab angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 4 Plätze, an denen b stehen kann),
- $3n(n-1)$ Zahlen der Form aabb angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen und 3 Möglichkeiten für die Platzwahl der beiden Paare aa bzw. bb),
- $6n(n-1)(n-2)$ Zahlen der Form aabc angeben (n Möglichkeiten, die Ziffer a auszuwählen, $n-1$ Möglichkeiten die Ziffer b auszuwählen, $n-2$ Möglichkeiten die Ziffer c auszuwählen und $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten für die Platzwahl der Ziffern b und c bzw. der Ziffern a und a),
- schließlich $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Zahlen abcd mit vier verschiedenen Ziffern angeben.

Die Gesamtzahl ist also

$$n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4$$

Aufgabe 021212:
Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wie viel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.

Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

Lösung von Carsten Balleier:
Da wir keine weiteren Angaben haben, müssen wir annehmen, dass die 52 Fische des zweiten Fangs eine repräsentative Stichprobe der Gesamtheit der Fische im See darstellen. Demzufolge sind $\frac{4}{52}$ der Fische (im ganzen See!) markiert, also jeder 13.
Insgesamt befinden sich dann ungefähr $13 \cdot 30 = 390$ Fische in diesem See.

Aufgabe 051214:
Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:

Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?

b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, dass ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z. B. o. B. d. A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten durch Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $n = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

Nehmen wir an, dass 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich dass 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

c) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{n} = \frac{8}{15} = 0{,}533...$$

Dieter hat also die größeren Gewinnchancen.

Aufgabe 081212:

a) Auf den Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ liegen die von den Eckpunkten und paarweise untereinander verschiedenen Punkte A_1, A_2, A_3 bzw. B_1, B_2, B_3, B_4 bzw. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Geben Sie die Anzahl aller Dreiecke an, die aus allen diesen Punkten (einschließlich der Eckpunkte A, B, C) gebildet werden können! Zwei Dreiecke gelten genau dann als gleich, wenn jede Ecke des einen Dreiecks auch Ecke des anderen ist.

b) Geben Sie die Anzahl aller verschiedenen Dreiecke an, wenn es sich entsprechend um die Punkte A_1, ..., A_k bzw. B_1, ..., B_m bzw. C_1, ..., C_n handelt (k, m, n gegebene natürliche Zahlen)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den gegebenen 15 Punkten lassen sich genau $\binom{15}{3}$ voneinander verschiedene Punkttripel bilden. Die Punkte eines jeden solchen Tripels sind genau dann die Ecken eines Dreiecks, wenn sie nicht auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Im gegebenen Fall befinden sich jedoch genau 5 der Punkte auf BC, 6 auf CA und 7 auf AB. Aus diesen sind dabei jeweils $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{3}$ bzw. $\binom{7}{3}$ der $\binom{15}{3}$ Tripel gebildet. Daher ist die gesuchte Anzahl Z der Dreiecke

$$Z \quad = \quad \binom{15}{3} - \binom{5}{3} - \binom{6}{3} - \binom{7}{3} = 390.$$

b) Auf Grund der gleichen Überlegungen erhält man jetzt

$$Z \quad = \quad \binom{k+m+n+3}{3} - \binom{k+2}{3} - \binom{m+2}{3} - \binom{n+2}{3}$$

Aufgabe 091211:
Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, dass jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, dass je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten.

Es ist die Anzahl aller bei dieser Veranstaltung anwesenden Damen und Herren zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Anzahl der anwesenden Herren mit h, die der Damen mit d, so beträgt die Anzahl der an diesem Abend ausgeführten Tänze sowohl $3h$ als auch $2d$, so dass zwischen h und d die Beziehung

$$3h = 2d \tag{1}$$

besteht. Eine weitere folgt daraus, dass die Anzahl der Paare von Herren, nämlich $\frac{1}{2}(h-1)h$, mit der Anzahl der Damen übereinstimmt, also auch

$$\frac{1}{2}(h-1)h = d \tag{2}$$

gilt. Aus (1) und (2) folgt $h = 4, d = 6$, so dass nur diese Anzahlen für die Lösung in Frage kommen.

Dass mit diesen Anzahlen tatsächlich eine (und bis auf die willkürliche Nummerierung de Teilnehmer auch genau eine) Lösung existiert, die allen drei gestellten Bedingungen genügt, zeigt nachfolgende Aufstellung der 12 Tanzpaare, in welcher die Herren von 1 bis 4, die Damen von 1' bis 6' nummeriert sind:

$$11', 22', 33', 14', 25', 36', 21', 32', 13', 44', 45', 46'$$

Hierin treten wie gefordert 1, 2, 3 und 4 je genau dreimal und 1', 2', ..., 6' je genau zweimal auf.

Aufgabe 131211:
Es sei M die Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000000000.

Man untersuche, ob die Anzahl derjenigen Zahlen (aus M), bei deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer, gleich oder kleiner ist als die Anzahl derjenigen Zahlen aus M, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt, ist gleich der Anzahl aller natürlicher Zahlen von 0 bis $10^{10} - 1$, bei deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt. Die Menge der letztgenannten Zahlen ist die Menge aller Zahlen $a_9 10^9 + ... + a_1 10^1 + a_0$, wobei jedes a_i eine der neun Ziffern $\neq 5$ ist.

Die Anzahl dieser Zahlen ist folglich 9^{10}. Die Anzahl der übrigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10} ist somit

$$10^{10} - 9^{10} = (10 - 9)(10^9 + 10^8 \cdot 9^1 + ... + 10^1 \cdot 9^8 + 9^9) > 9^9 + 9^8 \cdot 9^1 + ...9^1 \cdot 9^8 = 10 \cdot 9^9 > 9^{10}$$

Daher ist die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{10}, in deren dekadischer Darstellung die Ziffer 5 vorkommt, größer als die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen dieses Bereichs, in deren dekadischer Darstellung keine 5 auftritt.

Aufgabe 141211:
Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als 10 und keiner mit mehr als 12 Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als 12 und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, als ein Tanz. (Wenn z. B. genau 15 Paare gleichzeitig tanzen, so soll das als 15 Tänze und nicht als 1 Tanz verstanden werden.)

a) Man ermittle alle mit diesen Bedingungen vereinbaren Möglichkeiten für die Anzahl der Damen und Herren, die insgesamt anwesend waren.

b) Man gebe (am einfachsten in der Form eines Rechteckschemas) eine der bei den gefundenen Anzahlen möglichen Zusammenstellungen zu Tanzpaaren an, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Bezeichnet man die Anzahl der Herren mit h, die der Damen mit d, so ist $h \cdot d = 480 \quad (1)$.

Werden weiter die Anzahlen derjenigen Herren, die mit 10 bzw. 11 bzw. 12 Damen getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2, h_3 und entsprechend die Anzahlen der Damen, die mit 12, 13 bzw. 14 Herren getanzt hatten, in dieser Reihenfolge mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet, so ist

$$h_1 + h_2 + h_3 = h \qquad ; \qquad d_1 + d_2 + d_3 = h$$

während die Anzahl T der am dem Abend ausgeführten Tänze auf zwei Arten angegeben werden kann:

$$T = 10h_1 + 11h_2 + 12h_3 \qquad ; \qquad T = 12d_1 + 13d_2 + 14d_3$$

Aus den Umformungen

$$T = 10(h_1 + h_2 + h_3) + h_2 + 2h_3 \qquad ; \qquad T = 12(d_1 + d_2 + d_3) + d_2 + 2d_3$$
$$T = 12(h_1 + h_2 + h_3) - 2h_1 - h_2 \qquad ; \qquad T = 14(d_1 + d_2 + d_3) - 2d_1 - d_2$$

ergibt sich

$$10h < T \qquad , \qquad 12d < T \qquad , \qquad 12h > T \qquad , \qquad 14d > T$$

und daraus $12d < T < 12h$ und $10h < T < 14d$, also $d < h$, $h < \frac{7}{5}d$ zusammengefasst

$$d < h < \frac{7}{5}d \tag{2}$$

Weiter ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen $h \geq 12$, $d \geq 10$. Die Faktorzerlegungen von 480, bei denen beide Faktoren diesen Bedingungen genügen, sind

$$10 \cdot 48 \qquad , \qquad 12 \cdot 40 \qquad , \qquad 15 \cdot 32 \qquad , \qquad 16 \cdot 30 \qquad , \qquad 20 \cdot 24$$

Daraus ergibt sich wegen (1), dass $h = 24$, $d = 20$ sein muss, weil nur in diesem Fall auch (2) erfüllt ist.

Damit sind diese Angaben als einzige Möglichkeit für die Anzahlen der Herren und Damen ermittelt.

b) Bei diesen Anzahlen sind in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllbar, wie folgendes Beispiel einer Übersicht der Tanzpaarungen zeigt (siehe Abbildung):

Herr Nr. $\longrightarrow$

Dame Nr. $\downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	10 Damen mit je 14 Herren
2	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
3	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	×	
4	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	×	
5	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	×	
6	×	×	×	×	×	×													×	×	×	×	×	×	
7	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	×	4 Damen mit je 13 Herren
8	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	×	
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	×	
10	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					×								×	×	
11		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×										×	6 Damen mit je 12 Herren
12			×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×									
13				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×								
14					×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×							
15						×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×						
16							×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					
17								×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×				
18									×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
19										×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		
20											×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
	11 Herren mit je 10 Damen											2 H mit je 11 D		11 Herren mit je 10 Damen											

Aufgabe 161213:
Einer Schule stehen für ein Zeltlager folgende Zelte zur Verfügung:

2 Zelte für je 3 Personen,
1 Zelt für 8 Personen,
2 Zelte für je 10 Personen und
2 Zelte für je 16 Personen.

Jedes dieser Zelte wird entweder mit Mädchen zu genau 50% seiner Höchstbelegungszahl ausgelastet oder mit Jungen so belegt, dass es zu höchstens 70%, mindestens aber zu 50% ausgelastet ist. Dabei sind insgesamt für das Zeltlager mehr Mädchen als Jungen zu berücksichtigen.

a) Wieviel Personen können maximal unter diesen Bedingungen am Zeltlager teilnehmen?

b) Man gebe für einen derartigen Fall eine entsprechende Belegung der Zelte an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Zelte für 3 Personen seine mit Z_{31}, Z_{32}, das für 8 Personen mit Z_8, die für 10 Personen mit Z_{101}, Z_{102}, die für 16 Personen mit Z_{161}, Z_{162} bezeichnet.

Zunächst können nach den Angaben über die Auslastung die Zelte Z_{31}, Z_{32} nur mit je 2 Jungen belegt werden. Ferner folgt, dass die Zahl der Personen mindestens 34 ($= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8$) beträgt.

Für die einzelnen Zelte ergeben sich folgende mögliche Belegungen (dabei bezeichne J die Zahl der Jungen und M die der Mädchen).

Zelt	J	M
Z_{31}	2	-
Z_{32}	2	-
Z_8	4 oder 5	4
Z_{101}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{102}	5 oder 6 oder 7	5
Z_{161}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8
Z_{162}	8 oder 9 oder 10 oder 11	8

Es sei n_i die Belegungszahl für Z_i ($i = 31, 32, 9, 101, 102, 161, 162$). Wäre $n_{161} \geq 9$ und $n_{162} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 9 + 9 = 22$ und wegen $J + M \leq 44$ folglich $M \leq 22$ im Widerspruch zu $M > J$. O. B. d. A. sei darum $n_{162} = 8$.

Fallunterscheidung für n_8:

Es sei $n_8 = 5$ (d. h. dieses Zelt wurde mit 5 Jungen belegt). Wäre außerdem $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 2 + 5 + 9 = 18$ und damit $M \leq 5 + 5 + 8 = 18$ (Belegung der Zelte Z_{101}, Z_{102} und Z_{162}), im Widerspruch zu $M > J$. Es gilt also $n_{161} = 8$.

Wäre $n_{101} > 5$ und $n_{102} > 5$, so wäre $J \geq 2 + 2 + 5 + 6 + 6 = 21$ und $M \leq 8 + 8 = 16$, im Widerspruch zu $M > J$.

Für $n_{101} = n_{102} = 5$ gilt $J + M = 2 + 2 + 5 + 5 + 5 + 8 + 8 = 35$. Da hierbei nur die ersten beiden Zelte mit über 50 % ausgelastet sind, lässt sich diese Belegung auch unter Beachtung von $M > J$ realisieren.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5, so gilt

$$J + M \leq 2 + 2 + 5 + 5 + 7 + 8 + 8 = 37 \qquad \text{wobei} \qquad J \geq 2 + 2 + 5 + 6 = 15$$

gilt, also eine Belegung mit $M > J$ möglich ist. Im Falle $n_8 = 5$ können also höchstens 37 Schüler berücksichtigt werden.

Es sei $n_8 = 4$ (d. h. dieses Zelt kann entweder mit Jungen oder Mädchen belegt werden). Wäre mindestens eine der Zahlen n_{101}, n_{102} größer als 5 und zugleich $n_{161} \geq 9$, so wäre $J \geq 2+2+6+9 = 19$ und, im Widerspruch zu $M > J$ da $M \leq 4+5+8 = 17$.

Ist $n_{101} = n_{102} = 5$, so gilt $J + M \leq 2+2+4+5+5+11+8 = 37$. Wegen $J \geq 2+2+11 = 15$ ist eine solche Belegung möglich.

Ist genau eine der Zahlen n_{101}, n_{102} gleich 5 und folglich $n_{161} = 8$, so gilt

$$J + M \leq 2+2+4+5+6+7+8+8 = 36$$

Der nun noch als einziger verbleibende Fall $n_{101} > 5$ und $_{102} > 5$ kann dadurch realisiert werden, dass Z_{31} und Z_{32} mit je 2 Jungen, Z_8 mit 4 Mädchen, Z_{101} und Z_{102} mit je 7 Jungen, Z_{161} und Z_{162} mit je 8 Mädchen belegt werden. Das sind 18 Jungen und 20 Mädchen, also insgesamt 38 Personen. Mithin beträgt die gesuchte maximale Belegungszahl 38.

Aufgabe 211213:
Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Ist 3 eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ergibt sich die Anzahl A_k auf folgende Weise:
Man denke sich jede der genannten Teilmengen dadurch gebildet, dass man der Reihe nach ein erstes, ein zweites, ... , ein k-tes Element aus M auswählt. Für das erste Element gibt es dabei genau 55 Möglichkeiten der Auswahl. Nach jeder solchen Auswahl gibt es für das zweite Element genau (55-1) Möglichkeiten usw.

Schließlich gibt es nach jeder Möglichkeit einer vorangehenden Auswahl von $k-1$ Elementen für das k-te Element noch genau $(55-(k-1))$ Möglichkeiten. Somit hat man insgesamt $55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)$ Möglichkeiten, in der beschriebenen Weise der Reihe nach k Elemente auszuwählen.

Von diesen Auswahlmöglichkeiten führen jeweils genau diejenigen auf dieselbe Teilmenge, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten k Elemente unterscheiden. Für die Wahl einer solchen, Reihenfolge wiederum gibt es genau $k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1$ Möglichkeiten (da jeweils in einer solchen Reihenfolge an die erste Stelle eines der k Elemente zu setzen ist, an die zweite Stelle jeweils eines von den restlichen $(k-1)$ Elementen usw., ..., bis für die k-te Stelle bei jeder schon festgelegten Reihenfolge der ersten $(k-1)$ Elemente genau 1 Element verbleibt). Daher ist

$$A_k = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

II. Ist k eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq 55$, so ist entsprechend

$$A_{k+1} = \frac{55 \cdot 54 \cdot ... \cdot (56-k) \cdot (55-k)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)} \qquad \text{also gilt} \qquad A_{k+1} = \frac{55-k}{k+1} \cdot A_k$$

III. Für $k \leq 26$ ist der Bruch $\frac{55-k}{k+1}$ größer als 1, für $k = 27$ gleich 1 und für $28 \leq k \leq 55$ kleiner als 1, aber positiv. Daher gilt

$$A_0 < A_1 < ... < A_{26} < A_{27} = A_{28} \qquad ; \qquad A_{28} > A29 > ... > A_{54} > A_{55}$$

Somit wird A_k genau für $k = 27$ und $k = 28$ am größten.

Aufgabe 291211:
Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die dekadische Zifferndarstellung von z besteht aus fünf paarweise verschiedenen Ziffern.

(2) Die erste und die letzte Ziffer darin sind von 0 verschieden.

(3) Ist z' diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung aus der von z durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z + z'$ aus sämtlich einander gleichen Ziffern.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Ziffern von z seien a, b, c, d, e. Zu ermitteln ist die Anzahl der Lösungen einer Aufgabe, die nach Art eines Kryptogramms

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ + & \mathrm{e} & \mathrm{d} & \mathrm{c} & \mathrm{b} & \mathrm{a} \\ \hline & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} \end{array} \; (*) \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{ccccccc} + & & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ & & \mathrm{e} & \mathrm{d} & \mathrm{c} & \mathrm{b} & \mathrm{a} \\ \hline & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} & \mathrm{f} \end{array} \; (**)$$

lautet. Für jede solche Lösung folgt:

Da in der Einerstelle $a + e = f$ oder $a + e = 10 + f$ (4) gefordert wird, kann aus der Tausenderstelle kein Übertrag in die Zehntausenderstelle auftreten, d. h., es gilt $b + d < 10$ (5)

In (**) folgt $f = 1$ und $a + e > 10$, nach (4) also $a + e = 11$. Wegen des somit in der Einerstelle auftretenden Übertrags und $f = 1$ müsste $b + d = 0$ oder $b + d = 10$, wegen (5) also $b + d = 0$ sein. Das hätte den Widerspruch $b = d = 0$ gegen (1) zur Folge. Der Fall (**) scheidet als aus.

In (*) folgt $a + e < 10$ (6) und damit weiter, dass (*) genau dann erfüllt wird, wenn, an allen Stellen ohne Übertrag,

$$0 < f = a + e = b + d = 2c < 10 \tag{7}$$

gilt. Für die Darstellung der geraden Zahlen f zwischen 0 und 10 als Summe zweier voneinander und von 0 verschiedener natürlicher Zahlen a, e gibt es genau die Möglichkeiten der Tabelle

f	Darstellung	c
2	-	
4	1+3	2
6	1+5, 2+4	3
8	1+7, 2+6, 3+5	4

Für die Darstellung als Summe zweier voneinander verschiedener natürlicher Zahlen b, d, unter denen sich auch die 0 befinden kann, kommt jedes Mal noch die Möglichkeit $f = 0 + f$ hinzu. Die jeweils noch zu f gehörende Zahl c ist auch stets von den für a, e und b, d angegebenen Möglichkeiten verschieden.

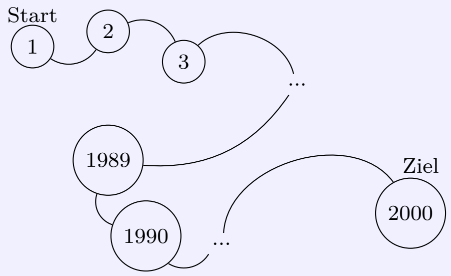
Im Fall $f = 4$ wird somit (*) genau mit den Mengen (ungeordneten Paaren) $\{a,e\} = \{1,3\}$ und $\{b,d\} = \{0,4\}$ erfüllt. In jeder dieser Mengen gibt es genau 2 Möglichkeiten der Reihenfolge; somit hat (*) für $f = 4$ genau 4 Lösungen.

Im Fall $f = 6$ ist für $\{a,e\}$ eine den Mengen $\{1,5\}, \{2,4\}$ (4 Möglichkeiten) und dazu für b, d entweder die andere dieser Mengen oder 0, 6 (4 Möglichkeiten) zu nehmen; somit hat (*) für $f = 6$ genau 16 Lösungen.

Im Fall $f = 8$ folgt ebenso, dass es für $\{a,e\}$ und für $\{b,d\}$ je 6 Möglichkeiten, für (*) also genau 36 Lösungen gibt.

Die gesuchte Anzahl aller Lösungen beträgt folglich 56.

Aufgabe 321214:



Bei einem Würfelspiel „Reise durch Deutschland“ sind 2000 Felder längs der Reiseroute angeordnet (siehe Abbildung). Beim Startfeld 1 beginnend, wird der Spielstein nach jedem Mal Würfeln in Richtung Ziel um die gewürfelte Augenzahl weiterbewegt, Steht der Stein dann genau auf dem Feld 1990, so erhält der Spieler einen Bonus.
Für jedes Feld n mit $1 \leq n \leq 1989$ bezeichne $P(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein auf dem Feld n stehender Stein im weiteren Verlauf des Spieles diesen Bonus einbringt.

Man ermittle diejenige Zahl n ($1 \leq n \leq 1989$), für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Hinweis: Informieren Sie sich gegebenenfalls über den Begriff Wahrscheinlichkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Über die Wahrscheinlichkeiten $P(n)$ kann man schrittweise für $n = 1989, 1988, \ldots, 2, 1$ folgende Aussagen erhalten: Es gilt

$$\begin{aligned}
P(1989) &= \frac{1}{6}\\
P(1988) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1987) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
&\ldots\\
P(1984) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1986) + \frac{1}{6} \cdot P(1987) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1983) &= \frac{1}{6} \cdot P(1984) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \cdots + \frac{1}{6} \cdot P(1989)\\
P(1982) &= \frac{1}{6} \cdot P(1983) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) + \cdots + \frac{1}{6} \cdot P(1988)\\
&\ldots\\
P(1) &= \frac{1}{6} \cdot P(2) + \frac{1}{6} \cdot P(3) + \cdots + \frac{1}{6} \cdot P(7)
\end{aligned}$$

Die hier behaupteten Werte für $P(n)$ mit $n = 1990 - k$ ($k = 1, \ldots ,6$) kann man folgendermaßen mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit) erhalten:

Genau einer der möglichen Würfe (Augenzahl k) führt sofort auf das Feld 1990; jeder der $k-1$ Würfe mit kleinerer Augenzahl (sofern es diese gibt) führt auf eines der Felder ν zwischen n und 1990, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt; jeder Wurf mit größerer Augenzahl als k führt im weiteren Spielverlauf mit Sicherheit nicht mehr auf den Bonus.

Die Werte für $P(n)$ mit $n \leq 1983$ ergeben sich ebenfalls mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Jeder der möglichen Würfe (Augenzahl $k = 1, \ldots ,6$) führt auf eines der Felder $\nu = n + k$, von denen aus das Weiterspielen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\nu)$ den Bonus einbringt. Aus den somit erhaltenen Gleichungen folgt der Reihe nach

$$P(1988) = P(1989) + \frac{1}{6} \cdot P(1989) > P(1989) \quad , \quad P(1987) = P(1988) + \frac{1}{6} \cdot P(1988) > P(1988) \quad \ldots$$

$$P(1984) = P(1985) + \frac{1}{6} \cdot P(1985) > P(1985) \quad , \quad P(1983) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

$$P(1982) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984) \quad \ldots \quad P(1) < 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot P(1984) = P(1984)$$

Damit ist $n = 1984$ als diejenige Zahl ermittelt, für die $P(n)$ den größten Wert hat.

Aufgabe 331213:
In einem Schönheitswettbewerb für Pudel stellen sich Asta, Benno, Cäsar und Dolly einer Jury aus vier Mitgliedern. Jedes Jurymitglied stimmt für einen der Hunde durch Heben eines Kärtchens mit dem Anfangsbuchstaben des Hundenamens. Als Regel zur Auswertung dieses Abstimmungsergebnisses wurde festgelegt: Kommen eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vor, so gelten sie als qualifiziert. Tritt aber der Fall ein, dass in dem Abstimmungsergebnis nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, so wird eine Zusatzregelung getroffen (z. B. eine erneute Abstimmung angesetzt).

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Abstimmungsergebnisse, die zu diesem letztgenannten Fall führen! Dabei gelten Abstimmungsergebnisse genau dann als einander gleich, wenn sie nicht nur in den Stimmenzahlen der Hunde, sondern auch darin übereinstimmen, welche Jurymitglieder für die betreffenden Hunde gestimmt haben. Beispielsweise gelten die Abstimmungsergebnisse $AABC$ und $CABA$ als voneinander verschieden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Abstimmungsergebnis gilt genau eine der folgenden fünf Aussagen:

(1) Ein Hund erhält alle vier Stimmen.
(2) Ein Hund erhält drei Stimmen, ein zweiter Hund eine Stimme.
(3) Zwei Hunde erhalten je zwei Stimmen.
(4) Ein Hund erhält zwei Stimmen, zwei weitere Hunde erhalten je eine Stimme.
(5) Jeder Hund erhält eine Stimme.

Der Fall, dass nicht eindeutig zwei Hunde mit größerer Stimmenzahl als die beiden anderen Hunde vorkommen, tritt genau dann ein, wenn eine der Aussagen (l), (4), (5) gilt.

Gilt (1), so ist das Abstimmungsergebnis durch Angabe des Hundes, der vier Stimmen erhielt, eindeutig festgelegt. Daher gibt es genau 4 Abstimmungsergebnisse mit (1).

Gilt (4), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig festgelegt durch

(a) Angabe der beiden Hunde mit je genau einer Stimme (hierfür gibt es genau $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten),
(b) Angabe der Jurymitglieder, die diese Hunde wählten (je genau $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten),
(c) Angabe desjenigen der beiden anderen Hunde, der zwei Stimmen erhielt (je genau 2 Möglichkeiten).

Also gibt es genau $6 \cdot 12 \cdot 2 = 144$ Abstimmungsergebnisse mit (4).

Gilt (5), so ist das Abstimmungsergebnis eindeutig durch Angabe der Zuordnung zwischen den Jurymitgliedern und den von ihnen gewählten Hunden festgelegt (genau $4! = 24$ Möglichkeiten). Der Fall, dass eine Zusatzregelung erforderlich wird, tritt daher bei genau $4 + 144 + 24 = 172$ Abstimmungsergebnissen ein.

Anmerkung: Dieser hohe Prozentsatz (ca. 67,2 % von $4^4 = 256$ möglichen Abstimmungsergebnissen) zeigt, dass die Auswertungsregel wenig effektiv ist.

Anregung: Ermitteln Sie die gesuchte Anzahl auch mit einem Computerprogramm, das alle Abstimmungsergebnisse „durchprobiert“!

Aufgabe 341212:
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen n, welche die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen:

(1) Die Zahl n ist durch 5 teilbar.

(2) Die Zahl n und ihre Quersumme enthalten beide in ihrer Dezimaldarstellung keine Ziffer Null.

(3) Die Quersumme der Quersumme von n beträgt 2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn eine natürliche Zahl n die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, so folgt:

Nach (2) und (3) beträgt die Quersumme von n entweder 2 oder 11. Nach (1) und (2) hat n die Einerziffer 5. Also verbleibt für die Quersumme von n nur die Möglichkeit 11; die Summe der übrigen Ziffern beträgt folglich 6.

II. Wenn eine natürliche Zahl die Einerziffer 5 hat und die übrigen Ziffern sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben, so erfüllt die Zahl die Bedingungen (1), (2) und (3).

Daher ist die gesuchte Anzahl gleich der Anzahl aller verschiedenen geordneten Zusammenstellungen von Ziffern, die sämtlich von 0 verschieden sind und die Summe 6 haben.
Dies sind genau die folgenden Zusammenstellungen:

Alle Permutationen von ...	Anzahl	Alle Permutationen von ...	Anzahl
1,1,1,1,1,1	1	1,1,1,2	5
1,1,1,3	4	1,1,2,2	6
1,1,4	3	1,2,3	6
1,5	2	2,2,2	1
2,4	2	3,3	1
6	1		

Als Summe ergibt sich die gesuchte Anzahl 32.

II Runde 2

Aufgabe 071221:
Es seien x_k und y_k ganze Zahlen, die die Bedingungen $0 \leq x_k \leq 2$ und $0 \leq y_k \leq 2$ erfüllen.
a) Ermitteln Sie die Anzahl aller (nicht entarteten) Dreiecke mit Eckpunkten $P_k(x_k; y_k)$, wobei x_k, y_k die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von P_k bedeuten!
Anmerkung: Dabei gelten zwei Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ genau dann als gleich, wenn jede Ecke von $\triangle_1$ auch Ecke von $\triangle_2$ ist.
b) Geben Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke an!

Lösung von StrgAltEntf:
a) Es gibt insgesamt 9 Paare (x,y) ganzer Zahlen mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 2$, also 9 Punkte $P(x,y)$ mit ganzzahligen Koordinaten $x,y \in \{0,1,2\}$. Es gibt $\binom{9}{3} = 84$ Möglichkeiten, 3 dieser 9 Punkte auszuwählen. Dabei liegen jedoch in 8 Fällen die 3 Punkte auf einer Geraden (entweder parallel zur x- oder y-Achse oder auf einer der Diagonalen $y = x$ oder $y = 3 - x$. Somit bilden in $84 - 8 = 76$ Fällen die drei Punkte ein nicht-entartetes Dreieck.

b) Es gibt 8 Klassen von Dreiecken, wobei die Dreiecke einer Klasse zueinander kongruent sind. Nämlich:

Klasse	Repräsentant	Anzahl	Flächeninhalt
1.	(0,0), (0,1), (1,0)	16	1/2
2.	(0,0), (0,1), (1,2)	16	1/2
3.	(0,0), (0,1), (2,0)	16	1
4.	(0,0), (0,1), (2,2)	8	1
5.	(0,0), (0,2), (1,2)	8	1
6.	(0,0), (0,2), (2,0)	4	2
7.	(0,0), (0,2), (2,1)	4	2
8.	(0,0), (1,2), (2,1)	4	3/2
Summe:		76	

Aufgabe 101222:
Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k > 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)...[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.
a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a > k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung gilt:

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Zeigen Sie, dass für $k > 2$ gilt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} \cdot (-1)^{k+1}$$

Lösung von cyrix:
a) Es ist

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{k!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} + \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-1)][a-k]}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} \cdot ([k+1]+[a-k]) =$$

$$= \frac{(a+1)a(a-1)(a-2)\dots[a-(k-2)][a-(k-1)]}{(k+1)!} = \binom{a+1}{k+1}$$

b) Es ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = \frac{1\cdot(1-2)\cdot\ldots\cdot(1-2(k-1))}{k!\cdot 2^k} =$$

$$= (-1)^{k-1}\cdot\frac{(2-1)\cdot\ldots\cdot(2(k-1)-1)}{k!\cdot 2^k} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^k\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-4)} =$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{(2k-3)!}{k!\cdot 2^{k+(k-2)}\cdot(2k-2)!}$$

Aufgabe 121224:
In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:
(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.
(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.
(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.
Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

Lösung von StrgAltEntf:
Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass Anfangs- und Endhaltestelle einer Buslinie zu den drei Haltestellen, die es laut (1) gibt, hinzuzählen. Jede Buslinie führt also von Anfangshaltestelle mit genau einem Zwischenstopp zur Endhaltestelle. In den folgenden Überlegungen stehen unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Haltestellen.

Linie 1 möge die drei Haltestellen A, B und C bedienen. In welcher Reihenfolge ist hier irrelevant. Wir schreiben:
Linie 1: A-B-C

Linie 2, die es nach Voraussetzung gibt, hat laut (2) mit Linie 1 genau eine Haltestelle gemeinsam. Dies sei o. B. d. A. die Haltestelle A. D und E seien die beiden anderen Haltestellen der Linie 2. Also:
Linie 2: A-D-E

Nach (3) muss es Linien 3 und 4 geben, die B und D bzw. B und E verbinden. (Eine Linie mit den Haltestellen B, D und E kann es nicht geben, da diese mit Linie 2 zwei Haltestellen gemeinsam hätte.) F und G seien die jeweils dritten Haltestellen der Linie 3 und 4. (F und G können nicht identisch sein, da sonst die Linien 3 und 4 zwei Haltestellen gemeinsam hätten, nämlich B und F=G.). Somit:
Linie 3: B-D-F
Linie 4: B-E-G

C und D liegen noch auf keiner gemeinsamen Linie. Also muss es eine weitere Linie geben, die C und D anfährt. Außerdem muss diese mit Linie 4 eine gemeinsame Haltestelle besitzen, was nur G sein kann (da sonst B und C oder D und E auf zwei Linien lägen). Also:
Linie 5: C-D-G

Analog muss es eine Linie geben, die C und E bedient, und diese muss wegen Linie 3 die Haltestelle F besitzen. Also:
Linie 6: C-E-F

Jetzt fehlt noch eine Verbindung zwischen A und F. Diese muss mit Linie 5 eine gemeinsame Haltestelle haben, was nur G sein kann. Also:
Linie 7: A-F-G

Die Linien 1 bis 7 erfüllen offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3). Eine weitere Linie kann nicht hinzugefügt werden, ohne eine der Bedingungen (1), (2) oder (3) zu verletzen. Die einzige mögliche Anzahl ist also 7.

Aufgabe 131222:
Jeder von 41 Schülern einer Klasse hatte an genau drei Leichtathletik-Wettkämpfen im Laufen teilzunehmen.

Dabei musste jeder dieser Schüler je einmal auf den Bahnen 1, 2 und 3 antreten.
Schüler A meint, dass es in dieser Klasse allein auf Grund dieser Bestimmungen mindestens sieben Schüler geben müsse, bei denen die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmte.
Schüler B meint dagegen nach einigem Nachdenken, dass es sogar acht solcher Schüler geben müsse.
Man überprüfe, ob jede dieser beiden Meinungen richtig ist.

Lösung von weird:
Anwendung des Schubfachprinzips:
Verteilt man n Objekte auf k Mengen, wobei $n,k > 0$ ist, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich zumindest $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte befinden. ($\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bezeichnet dabei die kleinste ganze Zahl g mit $g \geq \frac{n}{k}$.)

Hier sind die n Objekte nun einfach die 41 Schüler und die k Mengen sind einfach die 6 Mengen, welche der Aufteilung der Schüler gemäß den 3! Permutationen der 3 Startbahnen entsprechen, d. h., es ist $n = 41$ und $k = 6$. Also muss es dann tatsächlich mindestens 7 ($= \lceil \frac{41}{6} \rceil$) Schüler geben, für welche die Reihenfolge der Startbahnen übereinstimmt. Für 8 Schüler kann man dagegen diese Aussage nicht mehr machen, wie die einfache Gleichung

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6 = 41$$

zeigt, welche eine mögliche „Belegung“ der 6 Permutationen der Startbahnen angibt, bei der es keine 8 Schüler mit der gleichen Reihenfolge der Startbahnen gibt.

Aufgabe 151223:
Die Forschungsabteilungen zweier volkseigener Betriebe sollen zu einer gemeinsamen Beratung genau je sechs Mitarbeiter delegieren.
An der Beratung sollen insgesamt 6 Mathematiker und 6 Ingenieure teilnehmen. In der Forschungsabteilung des einen Betriebes arbeiten 5 Mathematiker und 7 Ingenieure, in der des anderen 7 Mathematiker und 5 Ingenieure.
Man ermittle die Anzahl aller möglichen personellen Zusammensetzungen der Beratung unter den angegebenen Bedingungen.

Lösung von Kitaktus:
Wenn die erste Abteilung m Mathematiker entsendet, dann muss sie $6 - m$ Ingenieure entsenden. Umgedreht muss die zweite Abteilung $6-m$ Mathematiker und m Ingenieure entsenden. Dabei ist m ganzzahlig und mindestens 0, aber höchstens 5, da es in der ersten Abteilung nur 5 Mathematiker gibt.

Es gibt dann $\binom{5}{m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{7}{6-m} \cdot \binom{5}{m}$ Möglichkeiten die Personen aus ihren entsprechenden Gruppen auszuwählen. Die gesuchte Anzahl ist die Summe aller dieser Produkte über m=0 bis 5:

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{5}{m}^2 \cdot \binom{7}{6-m}^2 = \binom{5}{0}^2 \cdot \binom{7}{6}^2 + \binom{5}{1}^2 \cdot \binom{7}{5}^2 + \binom{5}{2}^2 \cdot \binom{7}{4}^2 +$$

$$+\binom{5}{3}^2 \cdot \binom{7}{3}^2 + \binom{5}{4}^2 \cdot \binom{7}{2}^2 + \binom{5}{5}^2 \cdot \binom{7}{1}^2$$

$$= 1^2{\cdot}7^2{+}5^2{\cdot}21^2{+}10^2{\cdot}35^2{+}10^2{\cdot}35^2{+}5^2{\cdot}21^2{+}1^2{\cdot}7^2 = 2{\cdot}(7^2{+}105^2{+}350^2) = 2{\cdot}(49{+}11025{+}122500) = 267148$$

Es gibt also insgesamt 267148 Möglichkeiten die Teilnehmer auszuwählen.

Aufgabe 201223:
An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal.
Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt.
Nach Abschluss des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze $1, 2, ..., n$ der Abschlusstabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)
Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes mögliche Turnier und je zwei Mannschaften, die in der Abschlusstabelle unmittelbar benachbarte Plätze k und $k + 1$ $(1 \leq k \leq n - 1)$ einnehmen, gilt:

Die Mannschaften, die auf den Plätzen $1, ..., k$ liegen, haben untereinander $\frac{k(k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k(k - 1)$ Punkte erhalten. Außerdem haben diese Mannschaften gegen die Mannschaften, die auf den Plätzen $k + 1, k + 2, ..., n$ liegen, insgesamt $k \cdot (n - k)$ Spiele ausgetragen und dabei insgesamt höchstens $2k \cdot (n - k)$ Punkte erhalten.
Die Mannschaften der Plätze 1 bis k haben also insgesamt nicht mehr als

$$k(k - 1 = +2k(n - k) = k(2n - k - 1)$$

Punkte erhalten.
Hieraus folgt, dass die Mannschaft auf Platz k nicht mehr als $2n - k - 1$ Punkte erhielt; denn wäre dies doch der Fall, so müsste jede der Mannschaften auf den Plätzen 1,...,k ebenfalls mehr als $2n - k - 1$ Punkte erhalten haben, und es ergäben sich für diese Mannschaften insgesamt mehr als $k(2n - k - 1)$ Punkte.
Die $n - k$ Mannschaften auf den Plätzen $k + 1, ..., n$ haben untereinander insgesamt $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ Spiele ausgetragen und dafür insgesamt $(n - k)(n - k - 1)$ Punkte erhalten.
Also muss die Mannschaften auf dem Platz $k - 1$ mindestens $n - k - 1$ Punkte errungen haben; denn wäre es weniger, so erst recht für jede der Mannschaften auf den Plätzen $k + 1, ..., n$, wenn nur deren Spiele untereinander berücksichtigt werden, und es ergäben sich für diese Spiele insgesamt weniger als $(n - k)(n - k - 1)$ Punkte.

Folglich kann in jedem möglichen Turnier die Punktdifferenz zweier beliebiger Mannschaften, die in der Abschlusstabelle die benachbarten Plätze k und $k + 1$ einnehmen, nicht mehr als

$$(2n - k - 1) - (n - k - 1) = n$$

betragen.
Wenn nun noch ein Beispiel eines Turniers angegeben wird, worin zwei benachbarte Mannschaften mit der Punktdifferenz n auftreten, so ist n als die gesuchte Zahl nachgewiesen.
Ein solches Beispiel erhält man, wenn in einem Turnier die Mannschaft auf Platz 1 gegen alle übrigen Mannschaften gewonnen, dafür also $2n-2$ Punkte erhalten hat, und die übrigen Mannschaften untereinander unentschieden gespielt haben, so dass jede dieser Mannschaften für diese $n-2$ Spiele $n-2$ Punkte und damit insgesamt in der Abschlusstabelle $n - 2$ Punkte erhielt.
Die Punktdifferenz zwischen den Mannschaften auf den Plätzen 1 und 2 beträgt dann nämlich $(2n-2) - (n - 2) = n$ Punkte.

Aufgabe 221224:
Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ paarweise verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ gegeben.

Gesucht wird die Anzahl A_n aller verschiedenen Möglichkeiten, eine Menge von n Sehnen so zu zeichnen, dass folgende Forderungen erfüllt sind:
Jede Sehne verbindet einen der Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ mit einem anderen dieser Punkte, und keine zwei dieser Sehnen haben im Innern oder auf dem Rand des Kreises einen gemeinsamen Punkt.
Zwei Möglichkeiten gelten genau dann als verschieden, wenn es mindestens ein Punktepaar P_i, P_j gibt, das bei der einen der beiden Möglichkeiten durch eine Sehne verbunden ist, bei der anderen Möglichkeit dagegen nicht.
a) Ermitteln Sie die Anzahl A_3, indem Sie zu sechs Punkten $P_1, P_2, \dots, P_6$ mehrere verschiedene Möglichkeiten für drei Sehnen angeben und nachweisen, dass damit alle verschiedenen Möglichkeiten der geforderten Art erfasst sind!
b) Ermitteln Sie eine Formel, mit der man für beliebiges $n \geq 2$ die Anzahl A_n aus den Anzahlen $A_1, \dots, A_{n-1}$ berechnen kann!
c) Ermitteln Sie die Anzahl A_5!

Lösung von weird:
Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Punkte $P_1,P_2,\dots,P_{2n}$ nacheinander in genau dieser Reihenfolge, sowie in einem einheitlichen Umlaufsinn auf der Kreislinie angeordnet sind, was nur die Sprechweise hier etwas vereinfacht, aber in Hinblick auf die Problemstellung keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.
Ferner bezeichnen wir im Folgenden eine Auswahl von n Sehnen als „zulässig“, wenn sie alle gestellten Anforderungen der Aufgabe hier erfüllt. Allgemeiner wollen wir auch eine Auswahl von $k \leq n$ Sehnen als zulässig bezeichnen, wenn sie auf wenigstens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl von n Sehnen vervollständigt werden kann. Hierbei ist im Folgenden vor allem der Sonderfall $k = 1$ sehr wichtig.

a) Wir machen zunächst eine „Grobunterteilung“ nach den Möglichkeiten, von dem festgehaltenen Punkt P_1 eine zulässige Sehne zu ziehen, die also dann nach Obigem auf mindestens eine Weise zu einer zulässigen Sehnenauswahl vervollständigt werden kann.

• Verbindet man P_1 mit einem seiner beiden benachbarten Punkte P_2 oder P_6, so hat man für die restlichen 4 Punkte dann jeweils noch 2 Möglichkeiten der Vervollständigung zu einer zulässigen Sehnenauswahl.

• Verbindet man P_1 mit dem Punkt P_4, so sind die restlichen Sehnen für eine zulässige Auswahl dadurch wie folgt festgelegt: P_2 muss mit P_3 und P_5 mit P_6 verbunden werden, d. h., man hat hier nur genau eine Möglichkeit.

• Verbindet man P_1 mit einem der anderen Punkte P_3 oder P_5, so gibt es dann für P_2 bzw. P_6 keine zulässige „Paarung“ zu einem noch freien Punkt mittels einer Sehne, diese Verbindungen sind also dann Beispiele für nicht zulässige Sehnen.

Die Gesamtzahl A_3 der Möglichkeiten in a) für einen zulässige Sehnenauswahl beträgt somit 5.

b) Für den allgemeinen Fall müssen wir folgende Frage beantworten: Wann genau ist einen Sehne von P_1 zu einem anderen Punkt P_k, $k = 2,3,\dots,2n$ in obigem Sinne zulässig? Wenn wir voraussetzen, was sich auch induktiv als gültig erweist, dass alle $A_k > 0$ sind für $k = 0,1,\dots,n-1$ (wobei wir hier noch aus Gründen der Kompatibilität $A_0 := 1$ setzen), dann ist die Antwort überraschend einfach: Es genügt einfach zu fordern, dass zwischen P_1 und P_k, sowie auch zwischen P_k und P_1 im Sinne unserer zyklischen Orientierung, jeweils eine gerade Anzahl von Punkten liegen, da es dann für diese beiden Teilmengen von Punkten nach Voraussetzung jeweils für sich betrachtet eine zulässige Sehnenauswahl gibt.

Damit ist nun auch klar eine induktive Berechnungsmöglichkeit für A_n für $n > 0$ vorgegeben, nämlich:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-k-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Beispielsweise erhält man so:

- $A_1 = A_0 A_0 = 1 \cdot 1 = 1$.
- $A_2 = A_0 A_1 + A_1 A_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.
- $A_3 = A_0 A_2 + A_1 A_1 + A_2 A_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$.
- $A_4 = A_0 A_3 + A_1 A_2 + A_2 A_1 + A_3 A_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

womit sich nun auch der letzte noch ausstehende Punkt c) sehr einfach wie folgt beantworten lässt:

c) $A_5 = A_0 A_4 + A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1 + A_4 A_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$.

Aufgabe 301223:
Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \tag{1}$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q \geq 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leq i \leq q$ gilt.

Lösung von weird:
Wir betrachten dazu die zwei Folgen

$$a_n := \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad \text{bzw.} \quad b_n := \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

wobei die zu beweisende Behauptung äquivalent ist zu

$$\forall n \geq 2: \quad a_n > b_n$$

Nun gilt aber für $n \geq 1$, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} > 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

d. h., es gilt zwar noch $a_0 = b_0 = 1$ und $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, aber die Folge (a_n) wächst danach durchwegs stärker als die Folge (b_n), was obige Behauptung somit beweist.

III Runde 3

Aufgabe 021133:
Auf wieviel verschiedene Weisen lässt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen?
(Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Lösung von Steffen Weber:
Folgende geordnete Paare von Primzahlen a, b erfüllen die Gleichung $a + b = 99 - c$ für ein gegebenes $c > b > a$, $c > 33$:

c	$99-c$	(a,b) mit $a+b=99-c$	(a,b) mit $c>b>a$	Anzahl
97	2	$\varnothing$	$\varnothing$	0
89	10	(3,7),(5,5)	(3,7)	1
83	16	(3,13),(5,11)	(3,13),(5,11)	2
79	20	(3,17),(7,13)	(3,17),(7,13)	2
73	26	(3,23),(7,19),(13,13)	(3,23),(7,19)	2
71	28	(5,23),(11,17)	(5,23),(11,17)	2
67	32	(3,29),(13,19)	(3,29),(13,19)	2
61	38	(7,31),(19,19)	(7,31)	1
59	40	(3,37),(11,29),(17,23)	(3,37),(11,29),(17,23)	3
53	46	(3,43),(5,41),(17,29),(23,23)	(3,43),(5,41),(17,29)	3
47	52	(5,47),(11,41),(23,29)	(11,41),(23,29)	2
43	56	(3,53),(13,43),(19,37)	(19,37)	1
41	58	(5,53),(11,47),(17,41),(29,29)	$\varnothing$	0
37	62	(3,59),(19,43)	$\varnothing$	0

Für $c \leq 33$ ist $a+b = 99-c \geq 66$, d. h. $b > 33 \geq c$ wegen $a < b$, also würde dann nicht $c > b$ gelten und eventuelle Tripel (a,b,c) könnten umgeordent werden, so dass $c > b > a$ gilt.
Also lässt sich die 99 auf $1+2+2+2+2+2+1+3+3+2+1 = 21$ verschiedene Weisen als Summe von drei verschiedenen Primzahlen darstellen.

Aufgabe 021136:
In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, dass keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.
Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke?
Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.

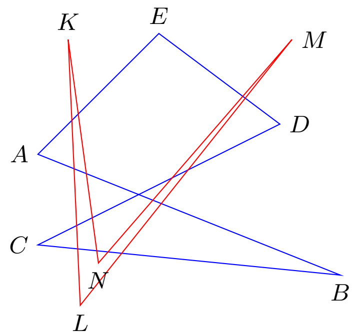
Lösung von Manfred Worel:
Ein ebenes allgemeines Fünfeck ist laut Definition eine geometrische Figur von fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 der gleichen Ebene, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen, die zusammen mit den Strecken A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 das Fünfeck bilden.
Zunächst bestimmen wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus der Aufgabenstellung (Fünfeck ist nicht unbedingt konvex, Eckpunkte des Fünfecks liegen nicht auf irgendeiner Seite des Vierecks) die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Seiten des Fünfeck.
Die Gerade g teile die Ebene ε in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2. O. B. d. A. wird angenommen: $A_1 \in \varepsilon_1, A_1 \notin g$.
Aus der Definition und den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt dann:

A_1A_2 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_2 \in \varepsilon_2, A_2 \notin g$
A_2A_3 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_3 \in \varepsilon_1, A_3 \notin g$
A_3A_4 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_4 \in \varepsilon_2, A_4 \notin g$
A_4A_5 hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_5 \in \varepsilon_1, A_5 \notin g$

Die Strecke A_5A_1 kann mit der Geraden g keinen Schnittpunkt haben, da A_1 und A_5 in der gleichen Halbebene $\varepsilon - 1$ liegen.

Damit ist bewiesen, dass eine Gerade und somit auch eine Seite eines Vierecks maximal vier Schnittpunkte mit den Seiten eines Fünfeckes haben kann. Hieraus folgt nun wiederum, das die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke $4 \cdot 4 = 16$ sein kann.

Es genügt nun an einem Beispiel zu zeigen, dass 16 Schnittpunkte unter den Bedingungen der Aufgabenstellung existieren wie im Bild angegeben.



Es seien $ABCDE$ ein konkaves Fünfeck und $KLMN$ ein konkaves Viereck.
Bemerkung: Die Seiten eines ebenen n-Eck haben mit einer Geraden g maximal $n-1$ gemeinsame Schnittpunkte bei ungeradem n und n gemeinsame Schnittpunkte bei geradem n.

Aufgabe 111236B:
50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.
Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

Hinweise:
1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis „günstigen“ Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also $p = \frac{g}{m}$ gesetzt.
2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ u anzusetzen.
3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis „Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne“ zu $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

Lösung von StrgAltEntf:
w und s seien die Anzahlen der weißen bzw. schwarzen Kugeln, die in Urne 1 gelegt werden. Nach Voraussetzung ist dann $(w,s) \neq (0,0)$ und $(w,s) \neq (50,50)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus Urne 1 bzw. Urne 2 gezogene Kugel weiß ist, beträgt $p_1(w,s) = \frac{w}{w+s}$ bzw. $p_2(w,s) = \frac{50-w}{100-w-s}$.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist also $p(w,s) = \frac{1}{2}(p_1(w,s)+p_2(w,s))$. Gesucht sind w und s, sodass $p(w,s)$ maximal wird.
Für $w = s$ gilt $p(w,s) = \frac{1}{2}$. Später werden wir sehen, dass dies nicht der gesuchte Maximalwert ist. Sei nun vorerst $w \neq s$.

Da nicht in beiden Urnen mehr schwarze als weiße Kugeln sein können, wird ohne Einschränkung angenommen, dass in Urne 1 mehr weiße als schwarze Urnen sind, also dass $s < w$ gilt.
Einfache algebraische Umformungen zeigen dann:
Für $0 < s < w \leq 50$ gilt $p_1(w-1,s-1) > p_1(w,s)$ und $p_2(w-1,s-1) > p_2(w,s)$.

Somit kann das Maximum von $p(w,s)$ nicht für $0 < s < w \leq 50$ angenommen werden, da $p(w-1,s-1) > p(w,s)$.
Das Maximum von $p(w,s)$ wird also für $s = 0$ (und $w > 0$) angenommen.

Es gilt $p(w,0) = \frac{1}{2}(1 + \frac{50-w}{100-w}) = 1 - \frac{25}{100-w}$. Dies wird für $w = 1$ maximal, und dann ist $p(1,0) = \frac{74}{99}$.

Wegen $\frac{74}{99} > \frac{1}{2}$ ist also $\frac{74}{99}$ die größtmögliche erreichbare Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn in Urne 1 eine weiße und keine schwarze Kugel (oder 49 weiße und 50 schwarze Kugeln gelegt) werden.

Aufgabe 121236B:
Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, dass sie die Strecke AB in $2n$ Teile gleicher Länge zerlegen.
a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwei aus den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, dass sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren lässt.
b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert: Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein „Fall“ bezeichnet.
Ein „Fall“ heiße ein „günstiger Fall“, wenn P_k und P_m so gewählt sind, dass sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden lässt.
Ist z die Anzahl aller möglichen „Fälle“ und z_1 die Anzahl aller „günstigen Fälle“, so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

Lösung von cyrix:
a) O. B. d. A. habe die Strecke AB die Länge $2n$, sodass die drei zu betrachtenden Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB die Längen k, $m - k$ bzw. $2n - m$ besitzen. Aus diesen Strecken lässt sich genau dann ein Dreieck konstruieren, wenn die drei Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

Die erste Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_kP_m| > |P_mB|$ ist also äquivalent zu $k + (m - k) > 2n - m$ bzw. $2m > 2n$, also $m > n$.
Die zweite Dreiecksungleichung $|P_kP_m| + |P_mB| > |AP_k|$ ist äquivalent zu $(m - k) + (2n - m) > k$ bzw. $2n > 2k$, also $n > k$.
Die dritte Dreiecksungleichung $|AP_k| + |P_mB| > |P_kP_m|$ ist äquivalent zu $k + (2n - m) > m - k$ bzw. $2m < 2n + 2k$, also $m < n + k$.

Damit gibt es für jedes $1 \leq k \leq n - 1$ also jeweils genau die $k - 1$ Möglichkeiten für m mit $n + 1 \leq m \leq n + k - 1$, sodass sich ein Dreieck aus den drei entstehenden Teilstrecken konstruieren lässt. Es gibt also

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1) = \sum_{k=0}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

günstige Auswahlen von k und m, dagegen aber $\binom{2n-1}{2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ gleich mögliche, sodass sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$P = \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n-8}{4n-2} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{6}{4n-2}\right)$$

ergibt.

b) Offensichtlich geht für $n \to \infty$ der Bruch $\frac{6}{4n-2}$ gegen 0, sodass $\lim_{n\to\infty} P = \frac{1}{4}$ folgt.

Aufgabe 131236B:
M sei die Menge aller Punkte $P(x, y)$ eines ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, wobei x, y ganzrationale Zahlen seien, für die $0 \leq x \leq 4$ und $0 \leq y \leq 4$ gilt.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei beliebiger Auswahl zweier verschiedener Punkte aus M der Abstand dieser beiden Punkte eine ganzrationale Maßzahl besitzt (Maßeinheit sei die Einheit des Koordinatensystems).

Hinweis: Wenn n die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten zweier Punkte und m die Anzahl derjenigen Auswahlmöglichkeiten ist, bei denen der Abstand eine ganzrationale Maßzahl besitzt, so nennt man den Quotienten $\frac{m}{n}$ die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit. Dabei heißen zwei Auswahlmöglichkeiten genau dann verschieden, wenn die bei ihnen ausgewählten (aus je zwei Punkten bestehenden) Mengen verschieden sind.

Lösung von weird:
Es gibt 25 Punkte und daher insgesamt

$$n = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Auswahlmöglichkeiten für die (ungeordneten) Punktepaare. Klarerweise ist der Abstand für so ein Punktpaar jedenfalls dann ganzrational, wenn für die beiden Punkte eine der beiden Koordinaten übereinstimmt, was dann also in

$$100 \quad \left(= 2 \cdot 5 \cdot \binom{5}{4}\right)$$

Fällen zutrifft. Dazu kommen dann noch alle 8 Punktepaare $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$, für welche gilt

$$\{|x_1 - x2|,|y_1 - y_2|\} = \{3,4\}$$

da für sie der Abstand 5 $= (\sqrt{3^2 + 4^2})$ beträgt, also dann ebenfalls ganzrational ist. Es gilt somit $m = 108$ und

$$\frac{m}{n} = \frac{108}{300} = \frac{9}{25} = 0.36$$

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit hier.

Aufgabe 141231:
In die 64 Felder eines Schachbretts sind die Zahlen 1, 2, ..., 64 so eingetragen, dass in der ersten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 1, 2, ..., 8, in der zweiten waagerechten Reihe von links nach rechts die Zahlen 9, 10, ..., 16 usw. in dieser Reihenfolge stehen.
Jemand soll nun acht Türme so auf Felder des Schachbretts stellen, dass keine zwei von ihnen einander schlagen können.
Danach soll er die Summe S der Zahlen bilden, die auf den von den Türmen besetzten Feldern stehen.
Es sind alle dabei möglichen Werte von S anzugeben.
Anmerkung:
Zwei Türme können einander genau dann schlagen, wenn sie auf einer gemeinsamen waagerechten oder senkrechten Felderreihe stehen.

Lösung von weird:
Geht man von der fertigen Turmaufstellung am Ende aus, so muss dann in jeder Reihe genau einer der 8 Türme stehen und gleiches gilt auch für die Spalten. Die Nummern der aufgestellten Türme sind daher aufsteigend geordnet von der Form

$$8(k - 1) + s_k,\ k = 1,2,...,8$$

wobei hier die Spaltennummern $s_1,s_2,...,s_8$ die Bedingung

$$\{s_1,s_2,...,s_8\} = \{1,2,...,8\}$$

erfüllen müssen, welche zunächst bei 8 Türmen klarerweise notwendig, aber dann auch hinreichend dafür ist, dass sich keine zwei der Türme gegenseitig schlagen können. Daraus folgt aber wegen der Kommutativität der Addition sofort

$$s_1 + s_2 + ... + s_8 = 1 + 2 + \ldots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

und somit

$$S = \sum_{k=1}^{8}(8(k-1)+s_k) = 9\sum_{k=1}^{8} k - 8\cdot 8 = 9\cdot 36 - 64 = 260$$

d. h., S hat unabhängig von der Aufstellung der Türme, sofern diese nur den Bedingungen der Aufgabe hier genügt, stets den gleichen Wert 260.

Aufgabe 141236A:
Ein in einem industriellen Prozess eingebauter Messkomplex M übermittelt an eine Übertragungseinheit A_1 genau eins der beiden Signale S_1 oder S_2, das dann von A_1 zu einer Übertragungseinheit A_2, von A_2 zu einer Übertragungseinheit A_3 und von A_3 zu einem Elektronenrechner R übermittelt wird.
Jede Übertragungseinheit A_i $(i = 1, 2, 3)$ kann genau die Signale S_1 oder S_2 übermitteln. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A_i statt des jeweils empfangenen Signals gerade das andere weitervermittelt, betrage 0,01.
Es sei nun bekannt, dass am Ende eines solchen Ablaufes durch A_3 in den Rechner R das Signal S_1 übertragen wurde.
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass M zu Beginn dieses Ablaufes an A_1 ebenfalls S_1 übermittelt hatte?
Hinweis:
Wenn sich unter den Voraussetzungen V in einer großen Anzahl n von Fällen insgesamt g solche befinden, bei denen ein Ereignis E eintritt bzw. eingetreten ist, so heißt die Zahl $p = \frac{g}{n}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten (bzw. Eingetretensein) von E unter den Voraussetzungen V.
Zur Lösung können außerdem folgende Sätze verwendet werden.
a) Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für unabhängige Ereignisse: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei einander ausschließenden Ereignissen E_1 und E_2 eins von beiden eintritt, ist gleich der Summe $p_1 + p_2$ der Wahrscheinlichkeit p_1 für das Eintreten von E_1 und der Wahrscheinlichkeit p_2 für das Eintreten von E_2.
b) Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E und ein Ereignis F eintreten, ist gleich dem Produkt $p \cdot q$ der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten von E und der Wahrscheinlichkeit q dafür, dass unter der Voraussetzung von E das Ereignis F eintritt.

Lösung von cyrix:
Wir gehen davon aus, dass die Ereignisse einer fehlerhaften Weitergabe des empfangenen Signals für die drei Übertragungseinheiten stochastisch unabhängig voneinander sind.

Das Ausgangssignal von M wird genau dann genauso von R empfangen, wenn entweder keine der Übertragungseinheiten eine fehlerhafte Übertragung des jeweils empfangenen Signals vornimmt, oder aber genau zwei.

Der erste Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-0{,}01)^3 = 0{,}99^3$ auf.
Für den zweiten Fall gibt es genau drei Möglichkeiten, die beiden fehlerhaft sendenden Übertragungseinheiten auszuwählen und für jede dieser Möglichkeiten dann eine entsprechende Übertragungswahrscheinlichkeit von $0{,}99 \cdot 0{,}01^2$, sodass sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$P = \frac{99^3 + 3\cdot 99\cdot 1^2}{100^3} = \frac{99\cdot(99^2+3)}{10^6} = \frac{99\cdot 9804}{10^6} = \frac{970596}{10^6} = 0{,}970596 = 97{,}0596\%.$$

Aufgabe 151236A:
Gegeben seien n Punkte einer Ebene $(n > 0)$, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Die n Punkte sollen durch Strecken so miteinander verbunden werden, dass es keine drei Punkte gibt,

von denen jeder mit jedem der anderen beiden verbunden ist.
Man zeige, dass sich unter diesen Bedingungen für die Anzahl Z_v der Verbindungsstrecken gilt:

$$Z_v \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

Man zeige ferner, dass sich unter Beachtung der Bedingungen $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ Verbindungsstrecken finden lassen.
Anmerkung: Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist.

Lösung von Kornkreis:
Der Einfachheit wegen zählen wir die Verbindungsstrecken doppelt, indem Verbindungen $P_1 - P_2$ und $P_2 - P_1$ als verschiedene Verbindungen gezählt werden. Die Behauptung der Aufgabenstellung wird damit zu $Z \leq \frac{n^2}{2}$ für gerade n, und $Z \leq \frac{n^2-1}{2}$ für ungerade n; kurz also $Z \leq [\frac{n^2}{2}]$ für alle n.

Wir betrachten eine Konfiguration gemäß der Aufgabenstellung und einen Punkt P_1 mit der höchsten Anzahl a an Punkten, mit denen er verbunden ist, bezeichne diese mit $P_2,...,P_{a+1}$. Zwischen keinem der Punkte, mit denen P_1 verbunden ist, kann es eine Verbindungslinie geben (da sonst ein Dreieck entstünde). Damit ist jeder von $P_2,...,P_{a+1}$ mit maximal $n - a$ Punkten verbunden.

Betrachte nun die übrigen $n-a-1$ Punkte. Jeder von ihnen ist mit maximal a Punkten verbunden (wegen der Maximalität von a). Insgesamt haben wir also höchstens $Z = a + a(n-a) + (n-a-1)a = 2a(n-a)$ Verbindungen, wobei a nur ganzzahlige Werte von 0 bis $n-1$ annehmen kann. Man sieht leicht, dass Z maximal ist, wenn der Betrag der Differenz von a und $n-a$, d. h. $|n-2a|$, kleinstmöglich ist, und dies ist der Fall für $a = [\frac{n}{2}]$. Das liefert $Z \leq 2[\frac{n}{2}](n - [\frac{n}{2}])$.
Für gerade n ist dies $Z \leq \frac{n^2}{2}$ und für ungerade n ist es $Z \leq 2\frac{n-1}{2}(n - \frac{n-1}{2}) = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}$, was die Behauptung zeigt.

Gleichheit wird für folgende Konfiguration angenommen:
Wähle $a = [\frac{n}{2}]$ und verbinde P_1 mit $P_2,...,P_{a+1}$. Verbinde nun jeden von $P_2,...,P_{a+1}$ mit jedem der übrigen Punkten $P_{a+2},...,P_n$. Das ergibt wie oben $2a(n-a)$ Verbindungen, was Gleichheit in der Ungleichung für Z entspricht.
Bei dieser Konfiguration entsteht kein Dreieck, da es sowohl zwischen keinen zwei der Punkte $P_2,...,P_{a+1}$ als auch zwischen keinen zwei der Punkte $P_{a+2},...,P_n$ eine Verbindungslinie gibt, und P_1 nur mit den Punkten $P_2,...,P_{a+1}$ verbunden ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 181233:
Es ist zu untersuchen, ob es in einer Menge M von 22222 Elementen 50 Teilmengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(1) Jedes Element m von M ist Element mindestens einer der Mengen M_i.
(2) Jede der Mengen M_i $(i = 1, 2, ..., 50)$ enthält genau 1111 Elemente.
(3) Für je zwei der Mengen M_i, M_j $(i \neq j)$ gilt: Der Durchschnitt von M_i und M_j enthält genau 22 Elemente.

Lösung von weird:
Die Angaben der Aufgabe führen sofort auf den Widerspruch

$$22222 = |M| = |\bigcup_{i=1}^{50} M_i| \geq \sum_{1\leq i\leq 50} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq 50} |M_i \cap M_j| = 50 \cdot 1111 - \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 22 = 28600$$

was zeigt, dass die Bedingungen (1)-(3) zusammen nicht erfüllbar sind.

Aufgabe 191231:
Es seien n und m natürliche Zahlen mit $n \geq 1$, $m \geq 1$; N sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und M die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis m.
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von N, die gemeinsame Elemente mit M haben.

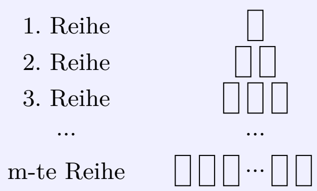
Lösung von weird:
Eine Teilmenge von $N = \{1,2,...,n\}$ hat offensichtlich genau dann keine gemeinsamen Elemente mit $M = \{1,2,...,m\}$, wenn sie auch Teilmenge von $M \setminus N$ ist.
Indem man also deren Anzahl von der Gesamtzahl der Teilmengen von N abzieht, ergibt sich dann also für die fragliche Anzahl $A_{m,n}$ aller derjenigen Teilmengen von N, welche gemeinsame Elemente mit M haben, zu

$$A_{m,n} = \begin{cases} 2^n - 1, & \text{falls } n \leq m \\ 2^{n-m}(2^m - 1), & \text{falls } n > m \end{cases}$$

bzw. zusammengefasst

$$A_{m,n} = 2^n - 2^{\max(n-m,0)}$$

Aufgabe 211236A:



Unter einem Stapel von Gegenständen (wie z. B. Konservenbüchsen) sei eine Anordnung wie in der Abbildung verstanden, bei der jeweils für $k = 1, 2, ..., m$ in der k-ten Reihe genau k Gegenstände stehen.
Dabei ist m eine natürliche Zahl, die als Höhe des Stapels bezeichnet werde. (Die Frage der praktischen Herstellbarkeit von Stapeln mit großer Höhe sei in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt.)
Untersuchen Sie, ob eine Zahl z mit $1000 \leq z \leq 10000$ so existiert, dass es einen Stapel aus z Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt!

Lösung von cyrix:
Es sei m die Anzahl der Reihen der beiden kleinen Stapel und $n > m$ die des großen. Dann gilt $z = 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ bzw. nach Multiplikation mit 8 und Addition von 2: $2 \cdot (4m^2 + 4m + 1) = 4n^2 + 4n + 1 + 1$ bzw. nach der Substitution $y := 2m + 1$ und $x := 2n + 1$ die Pellsche Gleichung $x^2 - 2y^2 = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $(x_1,y_1) = (1,1)$, sodass mit

$$-1 = x_1^2 - 2y_1^2 = (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1) \cdot (x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1)$$

auch für jede ungerade natürliche Zahl n auch

$$-1 = (-1)^n = (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1)^n \cdot (x_1 - \sqrt{2} \cdot y_1)^n := (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (x_n - \sqrt{2} \cdot y_n)$$

gilt. Dabei ergibt sich

$$x_{n+2} + \sqrt{2} \cdot y_{n+2} = (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (x_1 + \sqrt{2} \cdot y_1)^2 = (x_n + \sqrt{2} \cdot y_n) \cdot (1 + 2\sqrt{2} + 2) = 3x_n + 4y_n + \sqrt{2} \cdot (2x_n + 3y_n)$$

also $x_{n+2} = 3x_n + 4y_n$ und $y_{n+2} = 2x_n + 3y_n$.
Wir erhalten also folgende Lösungen

n	x_n	y_n
1	1	1
3	7	5
5	41	29
7	239	169

Aus der letzten Lösung erhalten wir $m = \frac{y-1}{2} = 84$ und $n = \frac{x-1}{2} = 119$. Tatsächlich ist $2 \cdot \frac{84 \cdot 85}{2} = 7140 = z = \frac{119 \cdot 120}{2}$, sodass es einen Stapel aus $z = 7140$ Gegenständen gibt, der sich in zwei Stapel von untereinander gleicher Höhe umordnen lässt.

Aufgabe 211236B:
Man beweise für jede ganze Zahl n mit $n \geq 3$:
Ist A_n die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen von n als Summe dreier positiver ganzzahliger Summanden, so gilt

$$\left| A_n - \frac{n^2}{12} \right| < \frac{1}{2}$$

Dabei werden zwei Darstellungen genau dann als verschieden bezeichnet, wenn sich nicht die eine durch Änderung der Reihenfolge der Summanden aus der anderen erhalten lässt.

Lösung von TomTom314:
A_n ist gleich der Anzahl aller geordneter Tripel (a,b,c) mit $1 \leq a \leq b \leq c$ und $a + b + c = n$. Sei B_n die Anzahl geordneter Tripel $(1,b,c)$ mit $1 + b + c = n$.
Durch Abzählen der Tripel $(1,b,c)$ beginnend bei $(1,1,n-2)$ und sukzessive Veränderung der zweiten und dritten Komponente erhalten wir $B_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Für ein beliebiges Tripel (a,b,c) ist entweder die erste Komponente 1 oder wir könne diese durch Inkrementierung aus $(a-1,b-1,c-1)$ erzeugen.
Daraus folgt $A_{n+3} = B_{n+3} + A_n$. Insbesondere gilt für $n < 6$: $A_3 = A_4 = 1$ und $A_5 = 2$.

Die zu zeigende Ungleichung ist äquivalent zu $n^2 - 6 < 12A_n < n^2 + 6$, welche für $n < 6$ erfüllt ist. Für $n \geq 3$ gilt induktiv:

$$12A_{n+3} = 12B_{n+3} + 12A_n < 12\left[\frac{(n+3)-1}{2}\right] + n^2 + 6 < 6(n+2) + n^2 = 3 + (n+3)^2 < (n+3)^2 + 6$$

Also ist die rechte Seite der Ungleichung erfüllt. Statt $n^2 - 6 < 12A_n$ zeigen wir die etwas stärkere Ungleichungen $(2k)^2 - 6 < 12A_{2k}$ und $(2k+1)^2 - 3 < 12A_{2k+1}$. Diese ist für A_3,A_4,A_5 erfüllt.

$$12A_{2k+3} = 12B_{2k+3} + 12A_{2k} > 6(2k+2) + (2k)^2 - 6 = (2k+3)^2 - 3$$

$$12A_{2k+4} = 12B_{2k+4} + 12A_{2k+1} > 6(2k+1) + (2k)^2 - 3 = (2k+3)^2 - 6$$

In den beiden Gleichungen haben wir $\left[\frac{(2k+3)-1}{2}\right] = k+1$ und $\left[\frac{(2k+4)-1}{2}\right] = k+1$ verwendet. q. e. d.

Alternativ-Lösung von Kornkreis:
Man erhält genau die verschiedenen Zerlegungen, indem die drei Summanden $a \leq b \leq c$ der Größe nach geordnet werden. Man sieht daraus, dass $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gelten muss, und für jedes $a \leq \lfloor n/3 \rfloor$ bekommt man die möglichen b und c, indem man $n - 3a$ in zwei Summanden zerlegt, wovon der erste kleiner gleich dem zweiten sein soll. Dafür gibt es $\lceil \frac{n-3a+1}{2} \rceil$ Möglichkeiten. Daraus folgt

$$A_n = \sum_{j=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil,$$

woraus sich durch Ausrechnen die Behauptung ergibt.

Rechnung:

Es gilt $\lfloor n/3 \rfloor = \frac{n-k}{3}$ mit einem $k \in \{0,1,2\}$. Des Weiteren alterniert $n - 3j + 1$ mit j zwischen geraden und ungeraden Zahlen, sodass $\left\lceil \frac{n-3j+1}{2} \right\rceil$ zwischen $\frac{n-3j+1}{2}$ und $\frac{n-3j+2}{2}$ alterniert.
Dementsprechend gilt, unter Benutzung der kleinen Gauß'schen Summenformel,

$$A_n = \frac{n-k}{3}\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\frac{\frac{n-k}{3}\left(\frac{n-k}{3}+1\right)}{2} + z,$$

wobei $z = 1+\frac{1}{2}+1+...+1$ ($\lfloor n/3 \rfloor$ Summanden) gilt, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sind, $z = \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+...+1$, falls n und $\lfloor n/3 \rfloor$ gerade, etc.
D. h., wir haben

$$\frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\lfloor n/3 \rfloor + 1}{2} \cdot 1 + \frac{\lfloor n/3 \rfloor - 1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{also}$$

$$\frac{3}{4}\frac{n-k}{3} - \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + \frac{1}{4}$$

Demzufolge haben wir

$$A_n = \frac{n^2}{6} - \frac{nk}{6} - \frac{1}{12}(n^2 - 2nk + k^2) - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z = \frac{n^2}{12} - \frac{k^2}{12} - \frac{3}{4}\frac{n-k}{3} + z.$$

Für $k = 0$ oder $k = 1$ folgt mit der obigen Abschätzung für z direkt die Behauptung. Für $k = 2$ stellen wir fest, dass nicht n gerade und $\lfloor n/3 \rfloor$ ungerade sein können, sodass sogar $z \geq \frac{3}{4}\frac{n-k}{3}$ und dann die Behauptung folgt.

Aufgabe 221236:
Eine Tür soll mit einer genügend großen Anzahl von Schlössern versehen werden.
Zu jedem Schloss soll eine Sorte passender Schlüssel in genügend großer Anzahl vorhanden sein, wobei jeder Schlüssel zu genau einem Schloss passen soll.
Elf Personen sollen derartige Schlüssel erhalten, aber nicht jede Person für jedes Schloss.
Ein Vorschlag lautet vielmehr, es solle folgendes erreicht werden:
Immer wenn mindestens sechs der elf Personen anwesend sind, befindet sich unter ihren Schlüsseln für jedes Schloss auch ein passender Schlüssel; immer wenn weniger als sechs Personen anwesend sind, haben sie für mindestens ein Schloss keinen passenden Schlüssel.
Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Schlössern sowie eine Schlüsselverteilung (an die elf Personen), mit der dieser Vorschlag realisierbar wäre!

Lösung von weird:
Ein vertrauenswürdiger Dealer wählt dazu eine „große“ Primzahl p und ein Polynom $f(X) \in (\mathbb{Z}/p)[X]$ vom Grad 5, sowie verschiedene 11 „Stützstellen“ $x_1, x_2, \ldots, x_{11} \in \mathbb{Z}/p$.
Die Primzahl p, sowie auch die Stützstellen, dürfen dabei durchaus allen Teilnehmern bekannt sein. Der geheime Schlüssel ist hier einfach der Vertreter der Restklasse von $f(0)$ in $\{0,1,\ldots,p-1\}$.

Jeder der 11 Personen P_i, i=1,2,...,11, bekommt dabei seinen „Teilschlüssel“ in Form des Paares $(x_i, f(x_i))$. Wenn mindestens 6 der Teilnehmer ihren Teilschlüssel beisteuern, kann dann $f(X)$ und damit dann auch $f(0)$ mit einer der bekannten Interpolationsformeln eindeutig rekonstruiert werden, bei weniger bekannten Teilschlüsseln ist das aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten bei einem ausreichend großem p aber nicht möglich.

Alternativ-Lösung von TomTom314:
Wir bilden aus den 11 Personen alle 6-elementigen Teilmengen, bringen zu jeder Teilmenge ein Schloss an und geben diesen 6 Personen einen Schlüssel dazu. Dann ist die Tür mit 5 Personen nicht aufschließbar, da es zu den 6 abwesenden Personen ein Schloss gibt und somit die 5 Personen dazu keinen Schlüssel haben. Je zwei 6-elementige Teilmengen haben mindestens ein Element in der Schnittmenge. Daher haben 6 Personen zu allen Schlössern einen Schlüssel. Also haben wir eine Lösung mit $\binom{11}{6} = \binom{11}{5}$ Schlössern.

Falls die Tür weniger als $\binom{11}{5}$ Schlösser mit den geforderten Bedingungen hat, gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens ein Schloss, so dass zwei verschiedene Gruppen aus 5 Personen keinen Schlüssel zu diesem Schloss haben. Also haben mindestens 6 Personen zu diesem Schloss keinen Schlüssel. Also kann diese Gruppe aus 6 Personen die Tür nicht öffnen.

Zweite Alternativ-Lösung von Nuramon:
Minimalitätsbeweis
Sei S die Menge der angebrachten Schlösser. Angenommen Person i hat die Schlüssel zu allen Schlössern in der Teilmenge $S_i \subset S$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller fünfelementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,11\}$.
Für jedes $\{a,b,c,d,e\} \in \mathcal{F}$ wählen wir ein Element $f(\{a,b,c,d,e\}) \in S \setminus (S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e)$.
Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung $f : \mathcal{F} \to S$.

Wir behaupten, dass f injektiv ist:
Angenommen $F_1,F_2 \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \neq F_2$. Dann gibt es $x \in F_2 \setminus F_1$. Sei $F_1 = \{a,b,c,d,e\}$. Da $S_a \cup S_b \cup S_c \cup S_d \cup S_e \cup S_x = S$ gilt, muss $f(F_1) \in S_f$ gelten. Also kann nicht $f(F_2) = f(F_1)$ sein.
Damit folgt, dass $|S| \geq |\mathcal{F}| = \binom{11}{5} = \binom{11}{6}$.

Aufgabe 251236:
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$ seien $2n$ Punkte $P_1,...,P_{2n}$ im Raum so gelegen, dass es keine Ebene gibt, auf der vier dieser Punkte liegen.
Mit T sei die Menge aller derjenigen Tetraeder bezeichnet, deren vier Eckpunkte der Menge $M = \{P_1,...,P_{2n}\}$ angehören.
Für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, sei t_ε die Anzahl aller derjenigen Tetraeder aus T, die mit ε ein Viereck als Schnittfläche gemeinsam haben.
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ den größtmöglichen Wert, den t_ε annehmen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jeweils $2n$ Punkte in der angegebenen Lage und für jede Ebene ε, die keinen Punkt von M enthält, gilt:
Die Ebene ε zerlegt den Raum in zwei Halbräume, und mit einer natürlichen Zahl $k \leq n$ gilt: In einem dieser beiden Halbräume liegt eine Menge M_1 von k Punkten aus M, in dem anderen liegt die aus den übrigen $2n-k$ Punkten bestehende Menge M_2.
Ferner gilt für jedes Tetraeder aus T: Mit einer natürlichen Zahl $h \leq 2$ liegen in einem dieser Halbräume h Eckpunkte des Tetraeders, in dem anderen $4-h$ Eckpunkte des Tetraeders.
Ist $h = 0$, so schneidet ε das Tetraeder nicht; ist $h = 1$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Dreieck; ist $h = 2$, so schneidet ε das Tetraeder in einem Viereck.

Somit erhält man genau dann ein Tetraeder aus T, das von ε in einem Viereck geschnitten wird, wenn man als Eckpunktmenge die Vereinigungsmenge aus einer beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_1 von $M1$ und einer unabhängig hiervon beliebig gewählten zweielementigen Untermenge Z_2 von M_2 nimmt. Dabei führen zwei Auswahlmöglichkeiten für Z_1 und Z_2 genau dann zu demselben Tetraeder, wenn sie sowohl in Z_1 als auch in Z_2 übereinstimmen.

Die Anzahl aller dieser Auswahlmöglichkeiten ist somit die in der Aufgabe erklärte Zahl t_ε. Sie ergibt sich, indem man die Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_1 mit der Anzahl aller zweielementigen Untermengen von M_2 multipliziert, d. h., es gilt

$$\begin{aligned} t_\varepsilon &= \binom{k}{2} \cdot \binom{2n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{4}(n-(n-k))(n-1-(n-k))(n+(n-k))(n-1+(n-k)) \\ &= \frac{1}{4}(n^2-(n-k)^2)((n-1)^2-(n-k)^2) \qquad (1) \end{aligned}$$

Für alle natürlichen Zahlen $k \leq n$ gilt nun $0 \leq n-k \leq n$, also

$$0 \leq n^2 - (n-k)^2 \leq n^2$$
$$(n-1)^2 - (n-k)^2 \leq (n-1)^2 \quad \text{sowie} \quad (n-1)^2 \geq 0$$

Daraus folgt

$$t_\varepsilon \leq \frac{1}{4} n^2 \cdot (n-1)^2 \tag{2}$$

Für $k = n$ ergibt sich aus (1) in (2) das Gleichheitszeichen. Somit ist $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ der gesuchte größtmögliche Wert von t_ε.

Aufgabe 301233B:
Es seien $D_1, ..., D_n$ Dosen, für deren Größen (Durchmesser) $d_1, ..., d_n$ in geeigneter Maßeinheit

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 3, \quad ..., \quad d_n = n+1$$

gelte. Weiter seien $G_1, ..., G_n$ Gegenstände, für deren Größen $g_1, ..., g_n$

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad ..., \quad g_n = n$$

gelte. Dabei seien die Größen so abgestimmt, dass jeweils gilt:
Genau dann, wenn $g_i \leq d_j$ ist, passt G_i in D_j.
Ermitteln Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $A(n)$ aller derjenigen Verteilungen der Gegenstände in die Dosen, bei denen in jeder Dose genau ein Gegenstand liegt.
Hinweis: Zwei Verteilungen heißen genau dann verschieden voneinander, wenn mindestens ein Gegenstand bei einer dieser beiden Verteilungen in einer anderen Dose liegt als bei der anderen Verteilung.

Lösung von cyrix:
Zuerst stellt man fest, dass für $n \geq 2$ der Gegenstand G_n in eine der beiden Dosen D_{n-1} oder D_n gelegt werden müssen. In beiden Fällen passen alle anderen Gegenstände in die noch freie der beiden gerade genannten Dosen.

Man erhält also für $n \geq 2$ jede Verteilung mit den Gegenständen G_1 bis G_n auf die Dosen D_1 bis D_n, indem man eine Verteilung der Gegenstände G_1 bis G_{n-1} auf die Dosen D_1 bis D_{n-1} auf eine der beiden folgenden Varianten abändert:

a) Man füge einfach den Gegenstand G_n in der noch leeren Dose D_n hinzu.
b) Man hole den Gegenstand, der momentan in Dose D_{n-1} enthalten ist, aus dieser heraus, lege ihn in die bisher noch leere Dose D_n und lege in die nun wieder leere Dose D_{n-1} den Gegenstand G_n.

Offensichtlich führen beide Varianten zu verschiedenen Verteilungen und je zwei Ausgangsverteilungen der ersten $n-1$ Gegenstände auf die ersten $n-1$ Dosen auch zu verschiedenen Verteilungen, da jeweils mindestens zwei Dosen anders befüllt werden.

Also gilt für jedes $n \geq 1$ die Rekursion $A(n+1) = 2A(n)$. Zusammen mit $A(1) = 1$ folgt $A(n) = 2^{n-1}$.

Aufgabe 331234:
Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Da $x,y \geq 0$, gilt gleichzeitig auch $x,y \leq 1993^2$. Für x und y kommen jeweils ausschließlich die Quadratzahlen 0,1,4,9,16,...,1993^2 in Frage.

Beweis:
Wenn x keine Quadratzahl ist, ist $\sqrt{x}$ irrational. Dann gilt, wenn man die Gleichung der Aufgabenstellung nach y auflöst:

$$y = (1993 - \sqrt{x})^2$$

$$y = 1993^2 + x - 2 \cdot 1993\sqrt{x}$$

Damit wäre y irrational, soll aber ganzzahlig sein, was einen Widerspruch darstellt. Ist also $x = n^2$ eine Quadratzahl mit $0 \leq n \leq 1993$, dann ist $y = (1993 - n)^2$. Somit gibt es 1994 Zahlenpaare, die die Gleichung der Aufgabenstellung erfüllen.

IV Runde 4

Aufgabe 061245:
Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5x + 2y + z = 10n$.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Zu lösen ist

$$5x + 2y + z = 10n \quad (\star)$$

Betrachten wir die kleinste natürliche Zahl. Sei also $n = 1$. Dann suchen wir also die nichtnegativen Lösungen für $5x + 2y + z = 10 \iff 2y + z = 10 - 5x$.
Offensichtlich kann x also nur die Werte 0,1,2 annehmen. Für $x = 0$ kann z die Werte 10,8,6,...,0 annehmen. Für $x = 1$ kann z die Werte 5,3,1 annehmen und für $x = 2$ kann z nur den Wert 0 annehmen.
Wir erhalten also insgesamt $6 + 3 + 1 = 10$ Lösungen.

Nun setzen wir in $(\star)$ mal $x \mapsto x - 2$. Wir erhalten:

$$5(x - 2) + 2y + z = 10n \iff 5x + 2y + z = 10(n + 1) \quad (\square)$$

Sei nun $A(n+1)$ die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen von $(\square)$. Dann ist $A(n+1) - A(n)$ gleich die Anzahl der ganzzahligen nichtnegativen Lösungen für $x = 0$ und $x = 1$ in $(\square)$.

1. Fall: Sei $x = 0$; $2y + z = 10n + 10$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 5$ und somit erhalten wir $5n + 6$ Lösungen.
2. Fall: Sei $x = 1$; $5 + 2y + z = 10n + 10 \iff 2y + z = 10n + 5$
Es gilt $0 \leq y \leq 5n + 2$ und somit erhalten wir $5n + 3$ Lösungen.

Es gilt somit $A(n + 1) - A(n) = 10n + 9$ sowie $A(1) = 10$. Rekursiv können wir also $A(n)$ berechnen.

$$(A(n) = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}(10k + 9) = 10 + 9(n - 1) + 10\frac{(n - 1)n}{2} = 5n^2 + 4n + 1$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offenbar gibt es für jedes $0 \leq x \leq 2n$ und jedes $0 \leq y \leq \frac{10n-5x}{2}$ genau ein $0 \leq z = 10n - 5x - 2y$.
Es ist also die Summe

$$A(n) = \sum_{x=0}^{2n} \left(1 + \left[\frac{10n - 5x}{2}\right]\right) = 2n + 1 + \sum_{x=0}^{2n} \left[\frac{10n - 5x}{2}\right]$$

zu bestimmen.
Für $x = 2n$ erhalten wir in der zweiten Summe den Wert 0. Alle übrigen Summanden erhält man, indem man für x entweder $2k$ oder $2k+1$ einsetzt, wobei k die natürlichen Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft. Also ist

$$A(n) = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[\frac{10n - 5 \cdot 2k}{2} \right] + \left[\frac{10n - 5 \cdot (2k+1)}{2} \right] \right) =$$

$$= 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (5(n-k) + 5(n-k) - 3) = 2n + 1 - 3n + 10 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) =$$

$$= 1 - n + 10 \sum_{\ell=1}^{n} \ell = 1 - n + 10 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1 - n + 5n^2 + 5n = 5n^2 + 4n + 1$$

Aufgabe 141246A:
Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.
Jemand schreibt n Briefe, von denen jeder für genau einen unter n verschiedenen Adressaten vorgesehen ist, und steckt in jeden von n Umschlägen genau einen dieser Briefe, ohne vorher die Adressen auf die Umschläge zu schreiben.
Da er nun nicht mehr weiß, in welchem Umschlag sich welcher Brief befindet, schreibt er willkürlich die n Adressen auf die n Umschläge (auf jeden Umschlag genau eine Adresse).
Man beweise:
Die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, dass bei keinem der Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, hat den Wert

$$q_n = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Man bezeichne jede überhaupt mögliche Verteilung der Briefe an die Adressaten (jeder Brief an genau einen der Adressaten) einen „möglichen Fall“.
Unter diesen bezeichne man jede Verteilung, bei der für keinen Adressaten der an ihn gerichtete Umschlag den für ihn vorgesehenen Brief enthält, ein „günstiger Fall“. Die Anzahl aller „möglichen Fälle“ sei a_n genannt, die Anzahl aller „günstigen Fälle“ g_n.
Dann ist die genannte Wahrscheinlichkeit q_n definiert als $q_n = \frac{g_n}{a_n}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Anzahl aller Möglichkeiten, n Briefe an n Adressaten zu verteilen, ist $n!$. Durch vollständige Induktion beweisen wir:
Die Anzahl g_n aller günstigen Fälle ist

$$g_n = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + (-1)^3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n + (-1)^n \qquad (1)$$

I. Für $n = 2$ ist unter allen Möglichkeiten genau eine günstig, also ist $g_2 = 1 = (-1)^2$.
Für $n = 3$ sind unter allen Möglichkeiten

$$(1 \to 1{,}2 \to 2, 3 \to 3), \quad (1 \to 1{,}2 \to 3, 3 \to 2), \quad (1 \to 2{,}2 \to 1, 3 \to 3)$$

$$(1 \to 2{,}2 \to 3, 3 \to 1), \quad (1 \to 3{,}2 \to 1, 3 \to 2), \quad (1 \to 3{,}2 \to 2, 3 \to 1)$$

genau zwei (die vierte und die fünfte) günstig, also gilt: $g_3 = 2(-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3$.

II. Für ein $n \geq 4$ sei die Richtigkeit von (1) für alle ν mit $2 \leq \nu < n$ statt n vorausgesetzt, dann folgt:
Dafür, dass Brief 1 nicht an Adressat 2 gelangt, gibt es genau $n-1$ Möglichkeiten. In jeder von ihnen lässt sich die Nummerierung des Paare aus Adressat und zugehörigem Brief so wählen, dass Brief 1 an Adressat 2 gelangt. Nun gibt es genau folgende Möglichkeiten:

a) Brief 2 gelangt an Adressat 1, und die Briefe $3, 4, \dots, n$ werden so an die Adressaten $3,4, \dots, n$ verteilt, dass kein Brief an den gleich nummerierten Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-2} Möglichkeiten.

b) Brief 2 gelangt an einen der Adressaten $3,4, \dots, n$, der etwa mit k bezeichnet sei, und die Briefe $3,4, \dots, n$ werden so an die von k verschiedenen unter den Adressaten $1, 3,4, \dots, n$ verteilt, dass kein Brief an der gleich nummerierten Adressaten gelangt.

Das ist gleichbedeutend mit der Forderung:
Man stelle eine neue Zuordnung zwischen den Briefen $2,3,4, \dots, n$ und den Adressaten $1,3,4, \dots, n$ her, nämlich $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 4$, $\dots$, $n \leftrightarrow n$, und fordere nun eine Zustellung der Briefe $2,3,4, \dots, n$ an je genau einen der Adressaten $1,3,4, \dots, n$, bei der kein Brief an den ihm gemäß der neuen Zuordnung gehörigen Adressaten gelangt. Hierfür gibt es genau g_{n-1} Möglichkeiten.

Damit ergibt sich $g_n = (n-1)(g_{n-2} + g_{n-1})$, nach Induktionsannahme also

$$g_n = (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) + \dots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2) + (-1)^{n-2} + (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)(n-1) + (-1)^{n-2} \cdot (n-1) + (-1)^{n-1}] =$$

$$= (n-1)[(-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)n + \dots + (-1)^{n-3} \cdot (n-2)n + (-1)^{n-2} \cdot n + (-1)^{n-1}] =$$

$$= (-1)^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n + \dots + (-1)^{n-3}(n-2)(n-1)n + (-1)^{n-2}(n-1)n + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

und damit die Richtigkeit von (1) für n.
Damit ist (1) durch vollständige Induktion bewiesen, und es ergibt sich

$$q_n = \frac{g_n}{n!} = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2!} + (-1)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

w. z. b. w.

Aufgabe 151245:
Bekanntlich gilt:
Für jede natürliche Zahl n gilt: Eine Ebene wird durch n Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt laufen und keine zwei parallel sind, in genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Teile zerlegt.
Man ermittle für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Teile, in die der Raum durch n Ebenen zerlegt wird, von denen keine vier durch ein und denselben Punkt gehen, keine drei zueinander parallele oder zusammenfallende Schnittgeraden besitzen sind und keine zwei zueinander parallel sind.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Man A_n ($n = 0,1,2,...$) sei die Anzahl der Teile bezeichnet, in die der Raum durch die n Ebenen (mit den angegebenen Bedingungen) zerlegt wird. Offensichtlich ist $A_0 = 1 \quad (*)$.
Für $n > 0$ seien $E_1, ..., E_n$ Ebenen, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen. Dann schneidet die Ebene E_n die Ebenen $E_1, ..., E_{n-1}$ in $n-1$ Geraden, von denen keine drei durch ein und denselben Punkt gehen und keine zwei parallel sind.
Diese Geraden zerlegen nun nach der Vorbemerkung die Ebene E_n in $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ Teile. Jeder dieser Ebenenteile zerlegt genau einen unter den bereits vorher vorhandenen A_{n-1} Raumteilen in genau zwei Raumteile; alle übrigen (bereits vorher vorhandenen Raumteile) bleiben unverändert. Demnach gilt:

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) \qquad (**)$$

für $n = 1,2,....$ Aus (*) und (**) erhält man durch vollständige Induktion:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 2) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + n$$

Bekanntlich gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{12 + n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 12n}{12} \\ &= \frac{12(n+1) + (n+1)(2n^2 + n - 3n)}{12} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Aufgabe 151246B:
In der mathematischen Statistik werden häufig Summen der folgenden Form benötigt:

$$M = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{2k}; \qquad N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}; \qquad m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$$

wobei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist.
a) Man berechne die Summen M, N und m.
b) Es sei f die für alle reellen x durch

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} (k-x)^2 \binom{2n}{2k}$$

definierte Funktion.
Man berechne $f(x)$ und weise nach, dass f einen kleinsten Funktionswert besitzt und diesen genau für $x = m$ annimmt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
a) 1. Es gilt:

$$M = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + ... + \binom{2n-1}{2n-2}$$

Es sei:

$$M' = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + ... + \binom{2n-1}{2n-1}$$

Dann gilt:

$$M + M' = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + ... + \binom{2n-1}{2n-1} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1} \qquad (1)$$

$$M - M' = (1-1)^{2n+1} = 0$$

Daraus folgt:

$$2M = 2^{n-1}, \qquad \text{also} \qquad M = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} = 2^{2n-2} \qquad (2)$$

$$2M' = 2^{2n-1}, \qquad \text{also} \qquad M' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{2k-1} = 2^{2n-2} \qquad (3)$$

2. Analog wird N berechnet. Mit $N' = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1}$ gilt:

$$N + N' = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \qquad ; \qquad N - N' = (1-1)^{2n} = 0$$

Daraus folgt:

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1} \qquad (4) \qquad N' = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} = 2^{2n-1} \qquad (5)$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2k\frac{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2k}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2n\frac{(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2k-1)} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\end{aligned}$$

und damit wegen (3)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = n\cdot 2^{2n-2} \qquad (6)$$

Daraus folgt:

$$m = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{2k} = \frac{n\cdot 2^{2n-2}}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2} \qquad (7)$$

b) Man erhält:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{n}(k-x)^2\binom{2n}{2k} = \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(2k-2x)^2\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}(4k^2-8kx+4x^2)\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\sum_{k=0}^{n}[2k(2k-1)+2k(1-4x)+4x^2]\binom{2n}{2k}\\ &= \frac{1}{4N}\left[\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} + 2(1-4x)\cdot\sum_{k=0}^{n}k\binom{2n}{2k} + 4x^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\right] \qquad (8)\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2k(2k-1)\binom{2n}{2k} &= \sum_{k=1}^{n}2k(2k-1)\frac{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}2n(2n-1)\binom{2n-2}{2k-2} = 2n(2n-1)2^{2n-3} \qquad (9)\end{aligned}$$

Aus (9), (6), (4) und (8) folgt weiter

$$f(x) = \frac{1}{4N}[2n(2n-1)2^{2n-3} + 2(1-4x)n\cdot 2^{n-2} + 4x^2\cdot 2^{2n-1}] \qquad (10)$$

und hieraus wegen $N = 2^{2n-1}$, also $4N = 2^{2n+1}$

$$f(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}(n^2\cdot 2^{2n-2} - n\cdot 2^{2n-2} + 2n\cdot 2^{2n-2} - nx\cdot 2^{2n+1} + x^2\cdot 2^{2n+1}) =$$

$$= x^2 - nx + \frac{n}{8} + \frac{n^2}{4} = \left(x-\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{8} \geq \frac{n}{8}$$

worin das Gleichheitszeichen für $x = \frac{n}{2} = m$ gilt. Daher besitzt f den kleinsten Funktionswert $\frac{n}{8}$ an der Stelle $x = m$.

Aufgabe 161242:
Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 1$.
Man ermittle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten $2n$ rote, $2n$ grüne und $2n$ schwarze Kugeln so auf zwei Gefäße Q_1 und Q_2 zu verteilen, dass jedes der Gefäße $3n$ Kugeln enthält.
Hinweis:
Zwei Verteilungsmöglichkeiten gelten genau dann als gleich, wenn für jede der drei Farben die Anzahl der in Q_1 enthaltenen Kugeln dieser Farbe bei beiden Verteilungsmöglichkeiten übereinstimmt (und folglich dasselbe auch für Q_2 zutrifft).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ordnet man jeder Verteilungsmöglichkeit das Tripel $(x_1, x2, x3)$ zu, wobei x_1, x_2 und x_3 die Anzahlen der roten, grünen und schwarzen Kugeln in Q_1 bezeichnen, so gilt nach Voraussetzung:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3n \qquad ; \qquad 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2n \qquad (1)$$

Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller Tripel ganze Zahlen, die (1) genügen. Ist $x_1 = k$ ($k = 0,1,...,n$), dann ergibt sich aus (1):

$$x_2 + x_3 = 3n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, \quad x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \leq 2n$ kann x_2 genau eine der Zahlen $n - k$, $n - k + 1$, ..., $2n$ sein. Im Fall $x_1 = k$ ($k = 0,1,..n$) gibt es also genau $n + k - 1$ Möglichkeiten.
Ist $x_1 = n + k$ ($k = 1,2,...,n$), so ergibt sich aus (1):

$$x_2 \neq x_3 = 2n - k \qquad ; \qquad 0 \leq x_2, x_3 \leq 2n$$

Wegen $x_3 \geq 0$ kann x_2 genau eine der Zahlen $0,1,...,2n - k$ annehmen. Im Fall $x_1 = n + k$ ($k = 1,2,...,n$) gibt es also genau $2n - k + 1$ Möglichkeiten.
Wegen $0 \leq x_1 \leq 2n$ gibt es für x_1 keine weiteren Fälle. Für die Anzahl A aller Möglichkeiten erhält man folglich:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n}(n + k + 1) + \sum_{k=1}^{n}(2n - k + 1) \\ &= \frac{(2n + 1)(2n + 2)}{2} - \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2n(2n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= (2n + 1)(n + 1) - n(n + 1) + n(2n + 1) = 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten beträgt $3n^2 + 3n + 1$.

Aufgabe 171246B:
a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1...A_{2n-1}$.
Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße einseitig, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Eckpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.
Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken einseitig ist.
b) Man ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ falls er existiert.
Hinweis:
Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller einseitigen unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als $w_n = \frac{g_n}{m_n}$.

Lösung von StrgAltEntf:
a) B sei die Menge aller einseitigen Dreiecke. Dann ist B die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$B_i = \{\{A_i,A_j,A_k\} \mid i < j < k \leq i + n\} \qquad (i = 0,1,...,2n - 1)$$

wobei wir $A_{2n} = A_0, A_{2n+1} = A_1, ..., A_{2n+n-1} = A_{n-1}$ setzen.
Alle Mengen B_i haben dieselbe Anzahl von Elementen; es gilt $|B_i| = \binom{n}{2}$. Folglich ist

$$g_n = |B| = 2n\binom{n}{2} = n^2(n-1)$$

Aus den Ecken $A_0, A_1, ... A_{2n-1}$ lassen sich $m_n = \binom{2n}{3}$ Dreiecke bilden. Somit ist $w_n = \frac{n^2(n-1)}{\binom{2n}{3}} = \frac{3n}{2(2n-1)}$
b) $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{3}{4}$

Aufgabe 191246B:
In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist.
Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von n Zügen bestehe darin, dass man nacheinander n Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen n Zügen feststellt, ob sich unter den n entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von n Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von k Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

Lösung von weird:
Gemäß Angabe haben wir hier vier Gruppen von je 5 Handschuhen zu folgenden Typen
• WL (=weiß und für linke Hand)
• WR (=weiß und für rechte Hand)
• SL (=schwarz und für linke Hand)
• SR (=schwarz und für rechte Hand)
Bei einer Ziehung von k Handschuhen, d. h., nach k „Zügen“, kommt es genau dann zu einem Erfolg, wenn wenn zwei Handschuhe der Typen WL und WR oder zwei Handschuhe der Typen SL und SR darunter sind. Diese Paarungen müssen aber spätestens nach 11 $(= 5 + 5 + 1)$ Zügen auf jeden Fall auftreten, was dann schon einmal die Frage in a) beantwortet.

Für b) betrachten wir die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs nach k Zügen, wobei hier das kleinste k zu berechnen ist, für welches diese < 0.01, also dann relativ klein ist. Wir gehen daher im Folgenden davon aus $k > 5$ sein wird, was dann auch durch die Rechnung nachträglich bestätigt wird.

Damit dann ein Misserfolg nach $k \in \{6,7,8,9,10\}$ Zügen eintritt, dürfen für gezogenen Handschuhe natürlich nur einer der 4 Typenkombinationen WL-SL, WL-SR, WR-SL, WR-SR auftreten. Die Wahrscheinlichkeit P_k für einen Misserfolg nach k Zügen beträgt daher

$$P_k = 4\prod_{j=1}^{k} \frac{11-j}{21-j}$$

und speziell für $k = 6$ und $k = 7$ erhält man so die Werte

$$P_6 \approx 0.02167 \quad \text{bzw.} \quad P_7 \approx 0.00619$$

Die Antwort auf die Frage in b) ist somit $k = 7$.

Aufgabe 201242:
In einem Fischgeschäft stehen für die Aufbewahrung lebender Karpfen drei Wasserbehälter zur Verfügung.
Zum Verkaufsbeginn sind in jedem dieser drei Behälter genau 20 Karpfen. Am Verkaufsende sind noch insgesamt 3 Karpfen vorhanden. Die verkauften Karpfen wurden einzeln nacheinander entnommen.
Ein Tausch eines Karpfens von einem Behälter in einen anderen fand nicht statt; neue Karpfen waren während des Verkaufs nicht hinzugekommen.
Berechnen Sie auf 3 Dezimalen nach dem Komma gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist!
Hinweis:
Die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p ist folgendermaßen definiert: Es sei A die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme von 57 Karpfen aus den drei Behältern.
Ferner sei G die Anzahl aller derjenigen unter diesen Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem der drei Behälter genau ein Karpfen ist.
Dabei gelten zwei mögliche Reihenfolgen der Entnahme genau dann als gleich, wenn sie für jedes $i = 1, 2, ..., 57$ in der Angabe übereinstimmen, aus welchem Behälter die i-te Entnahme eines Karpfen erfolgte.
Mit diesen Bezeichnungen ist $p = \frac{G}{A}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Die verschiedenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Entnahme lassen sich eindeutig kennzeichnen durch die verschiedenen 57gliedrigen Folgen $F = (a_1, a_2, ..., a_{57})$, in denen jeweils a_i die Nummer des Behälters angibt, aus dem die i-te Entnahme erfolgt.
In jeder dieser Folgen kommt jede der drei Behälternummern höchstens 20 mal vor. Daher lassen sich alle zu berücksichtigenden Folgen nach der Anzahl von Folgegliedern aus den drei Behältern so in Klassen einteilen, wie die nachstehende Tabelle angibt (Zahlen sind Anzahl der Vorkommens von Elementen des Behälters in der Folge):

Behälter 1 u	Behälter 2 v	Behälter 3 w
20	20	17
20	19	18
20	18	19
20	17	20
19	20	18
19	19	19
19	18	20
18	20	19
18	19	20
17	20	20

Zu 57 verschiedenen Elementen gibt es genau 57! verschiedene Anordnungen dieser Elemente.
Da es im gegebenen Fall gleich ist, welches Element aus einem gewählten Behälter entnommen wird, sind folglich in jeder der oben angeführten zehn Klassen (u, v, w) von Folgen im Sinne der Aufgabe genau diejenigen gleich, die sich nur durch Permutationen der u herausgegriffenen Karpfen aus dem ersten Behälter oder der v Karpfen, aus dem zweiten Behälter oder der w Karpfen aus dem dritten Behälter unterscheiden.
Da alle diese Permutationen voneinander unabhängig sind, ergibt sich folglich die Anzahl $a(u,v,w)$ der verschiedenen Folgen einer Klasse (u,v,w) mit

$$a(u, v, w) = \frac{57!}{u! \cdot v! \cdot w!}$$

Nach der Tabelle gibt es genau drei Klassen, in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 17, 20, 20 sind, ferner genau sechs Klassen in denen u, v, w in irgendeiner Reihenfolge 18, 19, 29 sind und genau eine Klasse mit $u = v = w = 19$. Daher gilt:

$$A = \frac{3 \cdot 57!}{17! \cdot 20! \cdot 20!} + \frac{6 \cdot 57!}{18! \cdot 19! \cdot 20!} + \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Genau diejenigen Folgen, die der Klasse mit $u = v = w = 19$ angehören, entsprechen den Möglichkeiten, bei denen am Verkaufsende in jedem Behälter genau ein Karpfen ist. Daher gilt:

$$G = \frac{57!}{19! \cdot 19! \cdot 19!}$$

Hieraus ergibt sich

$$A = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \left(\frac{3}{20 \cdot 20} + \frac{6}{18 \cdot 20} + \frac{1}{18 \cdot 19} \right) = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{513 + 1140 + 200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$G = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{1}{18 \cdot 19} = \frac{57!}{17! \cdot 19! \cdot 19!} \cdot \frac{200}{9 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 20}$$

$$p = \frac{G}{A} = \frac{200}{1853} = 0{,}1079...$$

also auf drei Stellen nach dem Komma gerundet $p = 0{,}108$.

Aufgabe 261241:
500 Bonbons sollen unter Verwendung von Umhüllungen passender Größen so zu einem Scherzpaket zusammengepackt werden, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt sind.
Dabei soll sich (2) auf jede Möglichkeit beziehen, alle Bonbons auszupacken, indem man nach und nach jeweils eine zugängliche Umhüllung öffnet und entfernt (falls mehrere Umhüllungen zugänglich sind, in beliebiger Reihenfolge):
(1) Es gibt genau eine Umhüllung, die das gesamte Paket enthält.
(2) Beim Öffnen dieser und jeder weiteren Umhüllung zeigt sich, dass deren Inhalt entweder aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen oder aus genau einem nicht umhüllten Bonbon besteht.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Umhüllungen, die ein solches Paket aufweisen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede positive ganze Zahl $n \neq 2$ sei ein Paket, das genau n Bonbons enthält und (1), (2) erfüllt, sei „n-Paket“ genannt.
Zu jedem Bonbon eines n-Pakets gibt es eine Umhüllung, die genau dieses Bonbon enthält (denn andernfalls gäbe es, im Widerspruch zu (2), eine Umhüllung, die dieses nicht nochmals umhüllte Bonbon und daneben weitere Teile enthielte).
Die außer diesen n Umhüllungen der einzelnen n Bonbons sonst noch in dem n-Paket vorkommenden Umhüllungen seien „Zusatzhüllen“ genannt.

Durch vollständige Induktion wird nun bewiesen: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets ist die größte ganze Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist.

1. Jedes 1-Paket besteht aus genau einem Bonbon mit seiner Umhüllung, hat also keine Zusatzhüllen. Jedes 3-Paket besteht aus genau drei Bonbons mit ihren Umhüllungen und genau einer Zusatzhülle. Für $n = 1$ und $n = 3$ trifft demnach die Behauptung zu.

2. Es sei $k \geq 4$, und es werde als Induktionsannahme vorausgesetzt, dass für alle positiven ganzen $n < k$ mit $n \neq 2$ jeweils die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines n-Pakets die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n}{2}$ sei. Dann folgt:

Es gibt k-Pakete mit maximaler Zahl von Zusatzhüllen (da es überhaupt nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ein k-Paket zu bilden).
Für jedes solche Paket gilt: Öffnet man seine nach (1) vorliegende äußere Umhüllung H, so besteht ihr Inhalt nach (2) und wegen $k > 1$ aus mindestens drei sämtlich mit Umhüllung versehenen Teilpaketen. Wären es fünf oder mehr, so könnte man diesen Inhalt ohne Verletzung von (2) dadurch ändern, dass man um genau drei der Teilpakete eine neue Umhüllung hinzufügt.

Das widerspricht der vorausgesetzten Maximalität der Zusatzhüllenzahl des k-Pakets. Also besteht der Inhalt von H entweder aus genau drei oder aus genau vier Teilpaketen. Jedes von ihnen erfüllt nach (2) selbst wieder (1) und (2), ist also ein n_i-Paket ($i = 1,2,3$ oder $i = 1,2,3,4$); dabei ist nach (2) jedes n_i eine positive ganze Zahl mit $n_i \neq 2$. Ferner gilt

$$n_1 + n_2 + n_3 = k \qquad \text{bzw.} \qquad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k \tag{3}$$

Also sind alle $n_i < k$. Jedes dieser n_i-Pakete muss seinerseits eine maximale Zahl z_i von Zusatzhüllen aufweisen (sonst könnte man es durch ein n_i-Paket mit größerer Zusatzhüllenzahl ersetzen, was der Maximalität des k-Pakets widerspricht).
Nach Induktionsannahme ist somit jeweils z_i die größte ganze Zahl kleiner als $\frac{n_i}{2}$.

In jedem der Fälle $k = 2m$, $k = 2m + 1$ gibt es für die n_i hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit als $n_i = 2m_i$ oder $n_i = 2m_i + 1$ (m, m_i ganzzahlig) bis auf die Reihenfolge genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle.
Anschließend sind dort die z_i und unter Anwendung von (3) ihre Summe s angegeben.

k	n_1	n_2	n_3	n_4	z_1	z_2	z_3	z_4	s
$2m$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$		m_1-1	m_2-1	m_3-1		$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2	m_3		$m-2$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4-1	$m-4$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3	m_4	$m-3$
	$2m_1+1$	$2m_2+2$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1	m_2	m_3	m_4	$m-2$
$2m+1$	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3+1$		m_1-1	m_2-1	m_3		$m-2$
	$2m_1+1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$		m_1	m_2	m_3		$m-1$
	$2m_1$	$2m_2$	$2m_3$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2-1	m_3-1	m_4	$m-3$
	$2m_1$	$2m_2+1$	$2m_3+1$	$2m_4+1$	m_1-1	m_2	m_3	m_4	$m-2$

Die sämtlichen Zusatzhüllen des k-Pakets sind nun: die s Zusatzhüllen der einzelnen n_i-Pakete und dazu noch die Umhüllung H.
Wegen der Maximalität scheiden für s alle Möglichkeiten außer den hervorgehobenen aus, und man erhält: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen eines k-Pakets ist im Fall $k = 2m$ die Zahl $m-1$, im Fall $k = 2m+1$ die Zahl m.
Das ist die Behauptung für $n = k$.

Mit 1. und 2. ist somit die Behauptung für alle positiven ganzen $n \neq 2$ bewiesen. Sie ergibt für $n = 500$: Die Maximalzahl von Zusatzhüllen ist 249. Die gesuchte größtmögliche Zahl aller Umhüllungen beträgt somit 749.

Aufgabe 261246A:
Im Mathematiklager schlägt ein Zirkelleiter den n Schülern ($n \geq 3$) seiner Gruppe vor, den Schüler, der den Tafeldienst wahrzunehmen hat, nach folgender Methode auszuwählen:
Die Schüler werden mit $P_1, P_2, \dots, P_n$ nummeriert und stellen sich in dieser Reihenfolge im Kreis auf. Dabei folgt (im Umlaufsinn $P_1, P_2, \dots$) auf P_n wieder P_1. Durch Münzwurf wird zunächst entschieden, ob P_1 oder P_2 aus dem Kreis ausscheidet. Liegt Wappen oben, so scheidet P_1 aus, bei Zahl P_2.
Danach wird der Ausscheid mit denjenigen beiden noch nicht ausgeschiedenen Schülern fortgesetzt, die auf den soeben zuletzt ausgeschiedenen Schüler im genannten Umlaufsinn folgen.

Bei Wappen scheidet wieder der in dem Umlaufsinn erste von diesen beiden aus, bei Zahl der zweite. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch ein Schüler übrigbleibt, der dann als Diensthabender bestimmt wird.

a) Man berechne im Fall $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit W_1, W_2, W_3 dafür, dass P_1, P_2 bzw. P_3 als Diensthabende bestimmt werden.

b) Man beweise für jedes $n \geq 3$, dass die Auswahlmethode ungerecht ist, d. h. dass die Wahrscheinlichkeit, als Diensthabender bestimmt zu werden, nicht für alle Schüler $P_1, P_2, \dots, P_n$ gleich ist.
Bemerkung:
Tritt irgendein zufälliges Ereignis A als Folge irgendeines von m Ereignissen aus einer Gesamtzahl von N möglichen Ereignissen (die einander ausschließen und gleichwahrscheinlich sind) ein, so bezeichnet man als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A die Zahl $p = \frac{M}{N}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zur Abkürzung wird W für einen Münzwurf mit dem Ergebnis „Wappen“ und Z für einen Wurf mit dem Ergebnis „Zahl“ geschrieben.

a) da für $n > 3$ der Diensthabende durch zweimaliges Werfen der Münze eindeutig bestimmt ist, entspricht jede mögliche Auswahl genau einer der Folgen (W,W), (W,Z), (Z,W), (Z,T), wobei die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Folgen untereinander gleich sind, d. h., jeweils gleich $\frac{1}{4}$.
Offenbar werden durch die oben angegebenen Folgen als Diensthabende, entsprechend obiger Reihenfolge, P_3, P_2, P_1, P_3 ausgewählt, Folglich ergibt sich für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$W_1 = \frac{1}{4}; \qquad W_2 = \frac{1}{4}; \qquad W_3 = \frac{1}{2}$$

b) Jeder möglichen Auswahl entspricht genau eine $(n-1)$-elementige Folge aus Würfen W und Z, wobei wiederum das Auftreten sämtlicher derartiger Folgen gleichwahrscheinlich ist. Ihre Gesamtzahl ist gleich der Anzahl der Variationen von 2 Elemente in Gruppen zu $(n-1)$ Elementen und damit gleich 2^{n-1}.

Diese $(n-1)$-elementigen Folgen seien in zwei Klassen A und B eingeteilt. Zu A gehören genau die Folgen, die mit W beginnen, zu B genau die Folgen, die mit Z beginnen. Weiterhin werde mit k_i^A ($i =$,1,2,...,n) die Anzahl derjenigen Folgen aus A bezeichnet, bei denen P_i als Diensthabender ausgewählt wird; analog werde k_i^B definiert.

Ist f eine Folge aus A und bildet man eine Folge $\overline{f}$ dadurch, dass das erste Element von f durch Z ersetzt wird, so ist $\overline{f}$ eine Folge aus B.
Bei f werde P_i als Diensthabender bestimmt.
Da die Ergebnisse der Münzwürfe bei f und $\overline{f}$ ab 2. Wurf übereinstimmen, der 2. Wurf bei f zwischen P_2 und P_3, bei $\overline{f}$ aber zwischen P_3 und P_4 entscheidet, wird folglich bei $\overline{f}$ der Schüler P_{i+1} als Diensthabender bestimmt.

Analog gilt umgekehrt: Ist $\overline{f}$ eine Folge aus B, die P_{i+1} aks Diensthabenden bestimmt, und entsteht f aus $\overline{f}$, indem das erste Element durch W ersetzt wird, so ist f eine Folge aus A und bestimmt P_i als Diensthabenden. Somit gilt

$$k_i^A = k_{i+1}^B \qquad (i = 1{,}2, \dots ,n; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{1}$$

Angenommen, die Auswahlmethode wäre gerecht, dann müsste wegen der Gleichwahrscheinlichkeit der Auswahl für jede Schüler gelten:

$$k_i^A + k_i^B = \frac{2^{n-1}}{n} = k \qquad (i = 1{,}2, \dots ,n) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergäbe sich

$$k_i^A + k_{i-1}^B = k \qquad (i = 2{,}3, \dots ,n+1; \quad k_{n+1}^B = k_1^B \quad \text{gesetzt}) \tag{3}$$

Offenbar gilt $k_1^A = 0$, weil P_1 sofort ausscheidet, wenn beim ersten Wurf W fällt. Setzt man das in (3) für $i = 2$ ein, so erhält man $k_2^A = k$ und hieraus nach (3) für $i = 3$ weiter $k_3^A = 0$.
Andererseits gehört die Folge (W,W,Z,W,...,W) zur Klasse A und führt zur Bestimmung von P_3 als Diensthabenden; d. h., es gilt $k_3^A \geq 1$. Mit diesem Widerspruch ist die Annahme, die Auswahlmethode wäre gerecht, für alle $n \geq 3$ widerlegt.

Aufgabe 271243:
Wieviel verschiedene Wörter $(a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n)$ kann man insgesamt aus den Buchstaben $a_i \in \{1,2,3,4,5\}$, $i = 1,...,n$ derart bilden, dass

$$|a_j - a_{j+1}| = 1$$

für $j = 1,...,n-1$ gilt?

Lösung von Nuramon:
Es sei $A_{i,n}$ die Anzahl der Wörter, aus n Buchstaben, die mit a_i enden. Die gesuchte Anzahl ist dann $A_n := A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n} + A_{5,n}$.
Offenbar gilt die Rekursion

$$A_{i,n+1} = \begin{cases} A_{2,n} & \text{falls } i = 1 \\ A_{i-1,n} + A_{i+1,n} & \text{falls } 2 \leq i \leq 4 \\ A_{4,n} & \text{falls } i = 5 \end{cases}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A_{2,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) + (A_{4,n}) \\ &= A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= A_{n+1} + A_{2,n+1} + A_{3,n+1} + A_{4,n+1} \\ &= (A_n + A_{2,n} + A_{3,n} + A_{4,n}) + (A_{1,n} + A_{3,n}) + (A_{2,n} + A_{4,n}) + (A_{3,n} + A_{5,n}) \\ &= 3A_n - A_{1,n} + A_{3,n} - A_{5,n} \end{aligned}$$

Schließlich ist dann

$$\begin{aligned} A_{n+3} &= 3A_{n+1} - A_{1,n+1} + A_{3,n+1} - A_{5,n+1} \\ &= 3A_{n+1} - A_{2,n} + (A_{2,n} + A_{4,n}) - A_{4,n} \\ &= 3A_{n+1} \end{aligned}$$

Durch explizites Nachrechnen finden wir außerdem, dass $A_1 = 5, A_2 = 8, A_3 = 14$. Insgesamt folgt dann

$$A_n = \begin{cases} 5 & \text{falls } n = 1 \\ 8 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m \\ 14 \cdot 3^{m-1} & \text{falls } n = 2m+1, n \neq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 271246A:
Alfred und Bernd teilen sich n Äpfel, indem der Reihe nach für jeden einzelnen Apfel durch eine Zufallsentscheidung (z. B. Werfen einer Münze festgelegt wird, wer diesen Apfel erhält.
Ein solcher Verteilungsvorgang heiße für Alfred günstig genau dann, wenn Alfred nicht nur am Ende sondern während des gesamten Vorganges niemals weniger Äpfel in seinem Besitz hat als Bernd.
Als Wahrscheinlichkeit $w(n)$ dafür dass ein Verteilungsvorgang für Alfred günstig ist, bezeichnet man den Quotienten, der sich ergibt, wenn die Anzahl aller für Alfred günstigen Verteilungsvorgänge durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Verteilungsvorgänge dividiert wird.
(a) Man ermittle $w(4)$.
(b) Man ermittle $w(n)$ für beliebiges natürliches $n \geq 2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder Verteilungsvorgang ist durch eine n-gliedrige Folge darstellbar, in der jedes Glied A oder B lautet. Ein solche Folge sei „j-Folge“ genannt, wenn sie genau j Glieder A enthält. Eine Folge heiße genau dann „günstig“, wenn sie einen für Alfred günstigen Verteilungsvorgang darstellt.

Für die größte ganze Zahl $m \leq \frac{n}{2} \quad (*)$ gelten nun folgende Aussagen:
(1) Jede j-Folge mit $j < m$ ist ungünstig.
(2) Die einzige n-Folge $(AA \dots A)$ ist günstig.
(3) Für jedes j mit $m \leq j < n$ ist die Anzahl aller ungünstigen j-Folgen gleich der Anzahl aller $(j+1)$-Folgen.

Dies kann wie folgt bewiesen werden:
Zu jeder ungünstigen j-Folge F gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied B lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Glieder ebenso viele Glieder A wir B befinden.
Man ordne die Folge F diejenige Folge F' zu, de aus F dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall A durch B und B durch A ersetzt wird. Für diese Zuordnung gilt:

I. Die Folge F' ist jeweils eine $(j+1)$-Folge.
II. Sind zwei ungünstige j-Folgen F_1, F_2 voneinander verschieden, so auch ihre zugeordneten Folgen F_1', F_2'.
III. Jede $(j+1)$-Folge G ist die zugeordnete Folge $G = F'$ einer ungünstigen j-Folge F.
Wegen $j \geq m$, also $j+1 \geq \frac{n}{2}$, enthält G nämlich mehr Glieder A als B; also gibt es eine kleinste Zahl $k \geq 1$ derart, dass das k-te Glied A lautet, während sich unter den vorangehenden $k-1$ Gliedern ebenso viele Glieder B wie A befinden.
Daher hat diejenige Folge die verlangten Eigenschaften (ungünstige j-Folge mit $F' = G$ zu sein), die aus G dadurch entsteht, dass in den ersten k Gliedern überall B durch A und A durch B ersetzt wird.
Mit I., II., III. ist die behauptete Anzahlgleichheit bewiesen.

Bezeichnet man die Anzahl aller j-Folgen mit a_j und die Anzahl aller günstigen j-Folgen mit g_j, so ergibt sich nach (1), (2), (3): Die Anzahl aller günstigen Folgen ist

$$g_0 + \dots + g_n = g_m + \dots + g_{n-1} + g_n = (a_m - a_{m+1}) + \dots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = a_m \qquad (**)$$

Die Anzahl a_m aller m-Folgen ist bekanntlich $a_m = \binom{n}{m}$, die Anzahl aller zu berücksichtigen n-gliedrigen Folgen überhaupt ist 2^n. Damit ergibt sich

$$\text{a)} \quad w(4) = \binom{4}{2} : 2^4 = 6 : 16 = \frac{3}{8} \qquad \text{b)} \quad w(n) = \binom{n}{m} : 2^n \qquad \text{mit m aus (*)}$$

Aufgabe 281244:
Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für die jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind.
Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.
Man ermittle die kleinste Zahl N, für die es N Kombinationen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d. h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muss.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Für eine Kombination $k = (k_1, k_2, k_3)$ werde genau dann gesagt, sie „überdecke“ (a_1, a_2, a_3), wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die acht möglichen Werte der a_i seien o. B. d. A. die Zahlen 0, 1, ... ,7.

I. Es seien S,T,U die Mengen

$$\begin{aligned} S &= \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\} \\ T &= \{(0,0,2),(0,2,0),(2,0,0),(2,2,2)\} \\ U &= \{(0,0,0),(4,4,4)\} \end{aligned}$$

Die 32 Kombinationen $k = s+t+u$ $(s \in S, t \in T, u \in U)$ bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1,a_2,a_3) überdeckt werden. Um dies zu beweise, sei eine beliebige dieser Kombinationen (a_1,a_2,a_3) betrachtet. Man setze zunächst

$$u = \begin{cases} (0{,}0{,}0) & \text{falls mindestens zwei } a_m, a_n \leq 3 \text{ sind } (m \neq n) \quad (1) \\ (4{,}4{,}4) & \text{sonst} \end{cases}$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m < n$ so, dass für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl $b_i = a_i - u_i$ (2) erfüllt $0 \leq b_i \leq 3$; also existieren

$$s_i \in \{0;1\}, \quad t_i \in \{0;2\} \qquad (3)$$

mit $b_i = s_i + t_i$ (4).
Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m;n) = (1;2),(1;3),(2;3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der s_i,t_i findet man nach Definition vn S und T ein $s = (s_1,s_2,s_3) \in S$ und ein $t = (t_1,t_2,t_3) \in T$, in denen s_m,s_n bzw. $_m,t_n$ gerade die Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1,k_2,k_3) = s+t+u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen

$$k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i \qquad (i = ,m,n)$$

w. z. b. w.

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1,a_2,a_3) überdeckt werden. Aus dieser Annahme lässt sich z. B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten:
Zunächst folgt, dass für mindestens einen der acht Werte $p = 0{,}1,\dots,7$ die Menge P aller (p,y,z) $(y,z \in \{0{,}1,\dots,7\})$ höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c,d,e so, dass aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c,d,e\}$ folgt, und es gibt (nicht notwendig verschiedene) Zahlen f,g,h so, dass aus $(k_1,k_2,k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f,g,h\}$ folgt.
Es sei $Y = \{0,\dots,7\} \setminus \{c,d,e\}$ und $Z = \{0,\dots,7\} \setminus \{f,g,h\}$.
Die Menge aller (p,y,z) $(y \in Y, z \in Z)$ (5) enthält mindestens $(8-3)\cdot(8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1,k_2,k_3) \in K$ überdeckt.
Nach Wahl der $c,\dots,f$ ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich nur mit $k_2 \in Y$ und $k_3 \in Z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, dass es mindestens 25 Kombinationen $(k_1,k_2,k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c,d,e\}$ geben muss und folglich höchstens $31 - 25 = 6$ mit $k_2 \in \{c,d,e\}$ geben kann.

Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c,d,e folgt nun, dass für mindestens einen der drei Werte $a = c,d,e$ die Menge Q aller (x,q,z) $(x,z \in \{0,\dots,7\})$ höchstens zwei Kombinationen aus K enthält.
Analog wie bei P ergibt sich hieraus $(8-2)\cdot(8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch.
Mit I. und II. ist als gesuchte kleinste Zahl $N032$ nachgewiesen.

Aufgabe 311243:
Man beweise:
Ist p eine Primzahl und werden zwei ganze Zahlen n,k mit $0 \leq k \leq n$ im Ziffernsystem mit der Basis p geschrieben als

$$\begin{aligned} n &= a_t \cdot p^t + a_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + a_1 p + a_0 \\ k &= b_t \cdot p^t + b_{t-1} \cdot p^{t-1} + \dots + b_1 p + b_0 \end{aligned}$$

(a_j, b_j ganze Zahlen mit $0 \leq a_j < p$, $0 \leq b_j < p$ für $j = 0, 1, ..., t$), so lässt die Zahl $\binom{n}{k}$ bei Division durch p denselben Rest wie

$$\binom{a_t}{b_t} \cdot \binom{a_{t-1}}{b_{t-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0}$$

Hinweis: Für ganze Zahlen $n \geq 0$ und $k \geq 1$ wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$$

definiert, für ganze Zahlen $n \geq 0$ ferner $\binom{n}{0} = 1$.

Lösung von Nuramon:
Wir arbeiten im Polynomring $\mathbb{F}_p[X]$.
Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt für alle f,$g \in \mathbb{F}_p[X]$ die Gleichung $(f+g)^p = f^p + g^p$.
Daher gilt für das Polynom $(X+1)^n \in \mathbb{F}_p[X]$:

$$(X+1)^n = \left(X^{p^t}+1\right)^{a_t} \left(X^{p^{t-1}}+1\right)^{a_{t-1}} \cdot \ldots \cdot \left(X^{p^1}+1\right)^{a_1} (X+1)^{a_0}.$$

Mit dem binomischem Lehrsatz folgt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i = \prod_{i=0}^{t} \left(\sum_{j=0}^{a_i} \binom{a_i}{j} X^{jp^i} \right).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung natürlicher Zahlen im Ziffernsystem zur Basis p folgt die Behauptung durch Vergleich der Koeffizienten von X^k auf beiden Seiten.

Aufgabe 321245:
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Lösung von MontyPythagoras:
Die drei Seitenlängen seien a, b und c mit $0 < a \leq b \leq c$. Die längste Seite sei c. Aufgrund der Dreiecksungleichung $a + b > c$ gilt $c_{max} = \left\lfloor \frac{1993}{2} \right\rfloor = 996$. Aufgrund der Sortierung nach der Größe gilt aber auch $c_{min} = \left\lceil \frac{1993}{3} \right\rceil = 665$, denn dann ist $a = b = 664$. Daher gilt:

$$665 \leq c \leq 996$$

Es gilt weiter:

$$a + b = 1993 - c$$

Um die Anzahl der Dreiecke für ein gegebenes c zu bestimmen, müssen wir jeweils das minimale und maximale a herausfinden. a ist minimal, wenn b maximal ist, und das maximale b ist gleich c. Daher ist

$$a_{min} = 1993 - 2c$$

a ist maximal, wenn es gleich b ist, oder um 1 kleiner als b, wenn $a + b$ ungerade ist. Also gilt:

$$a_{max} = \left\lfloor \frac{1993 - c}{2} \right\rfloor$$

Wir unterscheiden daher die 2 Fälle, ob c gerade oder ungerade ist. Die Anzahl der jeweiligen Dreiecke sei A_c.
1. $c = 2m$ mit $m = 333...498$. Dann ist

$$a_{min} = 1993 - 4m$$

$$a_{max} = 996 - m$$
$$A_{2m} = 996 - m - (1993 - 4m) + 1 = 3m - 996$$

2. $c = 2m + 1$ mit $m = 332...497$. Dann ist

$$a_{min} = 1991 - 4m$$
$$a_{max} = 996 - m$$
$$A_{2m+1} = 996 - m - (1991 - 4m) + 1 = 3m - 994$$

Die Gesamtanzahl an nicht kongruenten Dreiecken ist dann

$$A = \sum_{m=333}^{498} (3m - 996) + \sum_{m=332}^{497} (3m - 994)$$
$$A = \sum_{m=1}^{166} (3m) + \sum_{m=1}^{166} (3m - 1)$$
$$A = 2 \cdot 3 \sum_{m=1}^{166} m - 166$$
$$A = 3 \cdot 166 \cdot 167 - 166 = 166 \cdot (3 \cdot 167 - 1) = 166 \cdot 500$$
$$A = 83000$$

Es gibt daher exakt 83000 nicht kongruente Dreiecke.

Aufgabe 341243:
Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen k und n mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \binom{2n+1}{k}$$

gilt.
Hinweis: Für ganze Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ definiert man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, wobei für ganze Zahlen m mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$ [ausführlicher: $0! = 1$ sowie $m! = (m-1)! \cdot m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$].

Lösung von weird:
Beweis: Indem man

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \left(\frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n-k+2)!} + \frac{(2n+1)!}{(k+1)!(2n-k+1)!} \right) \frac{k!(2n-k+1)!}{(2n+1)!}$$

durch Kürzen noch vereinfacht, erhält man schließlich

$$\frac{\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k}} = \frac{k}{2n-k+2} + \frac{2n-k+1}{k+1} = \frac{2\left((k-n)(k-(n+1)) + (n+1)^2\right)}{(k+1)(2n-k+2)}$$

Wir somit somit nur noch die Frage klären, für welche $k \in \{1,2,...,2n\}$ der rechtsstehende Bruch den kleinsten Wert annimmt. Was seinen Zähler betrifft, ist dies klarerweise für $k = n$ und $k = n+1$ der Fall, für welche Werte er sein Minimum $2(n+1)^2$ annimmt. Für diese beiden Werte von k nimmt aber auch gleichzeitig sein Nenner, den wir auch in der Form

$$(k+1)(2n-k+2) = \frac{1}{4}\left((2n+3)^2 - (2n-2k+1)^2\right)$$

schreiben können, sein Maximum, nämlich $(n+1)(n+2)$ an. Insgesamt wird dieser Bruch also für $k = n$ bzw. $k = n+1$ kleinstmöglich und hat dann den Wert

$$\frac{2(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = 2\,\frac{n+1}{n+2}$$

für alle anderen Werte von $k \in \{1,2,...,2n\}$ ist er dagegen größer, was dann die Behauptung hier beweist.

III.III Spielstrategien

I Runde 1

Aufgabe 231214:
Bernd und Jürgen führen mit genau fünf roten, genau vier blauen Spielsteinen und einem Vorratsbehälter, der eine ausreichende Anzahl gelber Spielsteine enthält, ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

Zu Beginn werden die fünf roten, die vier blauen und genau drei gelbe Steine auf den Tisch gelegt. Danach sind die Spieler abwechselnd am Zug. Wer am Zug ist, nimmt drei beliebige Steine vom Tisch, wobei es nur verboten ist, drei rote Steine zu nehmen; danach verfährt er nach folgenden Vorschriften:

(1) Jeder genommene rote Stein wird wieder auf den Tisch gelegt.

(2) Für jeden genommenen blauen Stein wird ein gelber Stein aus dem Vorratsbehälter auf den Tisch gelegt; der blaue Stein kommt in den Vorratsbehälter.

(3) Jeder genommene gelbe Stein kommt in den Vorratsbehälter.

Sind diese Vorschriften befolgt, so hat der betreffende Spieler seinen Zug beendet. Hat ein Spieler mit seinem Zug erreicht, dass nur noch rote Steine auf dem Tisch liegen (so dass der Gegenspieler keinen Zug mehr anschließen kann), so hat er gewonnen. Jürgen macht den ersten Zug.

Geben Sie eine Strategie an, mit der Jürgen den Sieg erzwingen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Züge seien kurz durch Symbole beschrieben; z. B. bedeutet $r,g,g \to 5{,}2{,}0$, dass der Spieler einen roten Stein und zwei gelbe Steine nimmt und dass nach diesem Zug 5 rote, 2 blaue Steine und kein gelber Stein auf dem Tisch liegen.

Die folgende Tabelle gibt jeweils für Jürgen (J) eine Möglichkeit und für Bernd (B) alle danach jeweils vorhandenen Möglichkeiten eines Zuges an. Verfährt Jürgen nach dieser Strategie, so erreicht er, wie aus der Tabelle ersichtlich ist, stets die Stellung 5,0,0, also den Sieg.

J	$g,g,g \to 5{,}4{,}0$					
B	$r,r,b \to 5{,}3{,}1$			$r,b,b \to 5{,}2{,}2$		$b,b,b \to 5{,}1{,}3$
J	$b,b,b \to 5{,}0{,}4$			$r,g,g \to 5{,}2{,}0$		$g,g,g \to 5{,}1{,}0$
B	$r,r,g \to 5{,}0{,}3$	$r,g,g \to 5{,}0{,}2$	$g,g,g \to 5{,}0{,}1$	$r,r,b \to 5{,}1{,}1$	$r,b,b \to 5{,}0{,}2$	$r,r,b \to 5{,}0{,}1$
J	$g,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}1{,}0$	$r,g,g \to 5{,}0{,}0$	$r,r,g \to 5{,}0{,}0$
B				$r,r,b \to 5{,}0{,}1$		
J				$r,r,g \to 5{,}0{,}0$		

Aufgabe 241214:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Jeder der beiden Spieler erhält neun Karten, auf denen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 verzeichnet sind, jede dieser Zahlen auf genau einer Karte (des betreffenden Spielers).

A beginnt und legt eine seiner Karten auf den Tisch; dann legt B eine seiner Karten auf den Tisch, dann wieder A und dann B usw. Es wird jeweils die Summe der auf dem Tisch liegenden Zahlen festgestellt. Das Spiel ist beendet, wenn eine Summe erreicht wird, die größer als 99 ist. Verloren hat derjenige Spieler, durch dessen Karte diese Summe erreicht wurde; der andere Spieler hat gewonnen.

Man untersuche, ob es eine Strategie gibt, durch die bei jeder möglichen Reihenfolge der von A gespielten Karten der Spieler B den Gewinn erzwingen kann. Falls das zutrifft, gebe man eine solche Strategie an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt eine Strategie der gesuchten Art, z. B. die folgende:
B wählt als die ersten acht von ihm gespielten Karten alle diejenigen, auf denen nicht die Zahl 8 steht. (Die Reihenfolge dieser Karten wählt er beliebig.)

Ein Beweis, dass er durch diese Strategie den Gewinn erzwingt, ergibt sich folgendermaßen: Die Summe aller Zahlen im Spiel beträgt $2 \cdot (2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 108$. Beim Ausspielen der vorletzten Karte von B wird somit die Summe $108 - 8 - n = 100 - n$ erreicht, wobei n die Zahl auf der noch nicht ausgespielten Karte von A ist.

Wegen $n \geq 2$ ist diese Summe $100 - n \leq 98$. Daraus folgt einerseits, dass überhaupt das Spiel bis dahin noch nicht beendet ist; andererseits folgt, dass A als letzte Karte die mit der Zahl n ausspielen, die Summe 100 erreichen und damit verlieren muss. w.z.b.w

Aufgabe 251214:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:

Zu Beginn geben sie sich (z. B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Darauf multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozess abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.

a) Wie muss Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?

b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muss er anwenden, wenn $K = 1000000$ vorgegeben ist?

c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muss dieser Spieler vorgehen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es fällt auf, dass alle Elemente von M Potenzen der Zahl 2 sind:

$$M = \{2^1; 2^2; 2^3; 2^4\}$$

Also haben laut Spielregel sowohl die von A genannten Zahlen a_i als auch die von B genannten Zahlen b_i stets die Form 2^k.

Wir überlegen nun, welche Zahlen der Form 2^k man dem Gegner nicht nennen darf, weil dieser dann gewinnen könnte. Wegen $2^6 < 100 < 2^7$ sind dies die „Verlustzahlen“ $2^6, 2^5, 2^4$ und 2^3, weil in diesen Fällen der Gegner durch Multiplikation mit $2^1, 2^2, 2^3$ bzw. 2^4 die Zahl 100 überschreiten könnte.

Folglich ist 2^2 eine „Gewinnzahl„, weil von ihr ausgehend der Gegner laut Spielregel nur eine der „Verlustzahlen“ nennen kann.

Wählt daher der Spieler A aus der Menge M die Zahl 2^2 aus, dann kann er auf die angegebene Weise mit Sicherheit gewinnen.

b) Wegen $2^{19} < 1000000 < 2^{20}$ erhält man analog.

„Verlustzahlen“	19,18,17,16		14,13,12,11		9,8,7,6		4,3,2,1
„Gewinnzahlen„		15		10		5	

A muss verlieren, weil B als Nachziehender stets die „Gewinnzahlen„ $2^5, 2^{10}, 2^{15}$ erreichen kann.

c) Zu jedem $K \in N$ gibt es genau ein $k \in N$, so dass $2^{k-1} \leq K < 2^k$ gilt. Zu jedem k gibt es genau ein $i \in N$ und ein $r \in \{0,1,2,3,4\}$, so dass $k = 5i + r$ gilt (d. h., k lässt bei Division durch 5 den Rest r).

Ist $r \neq 0$, dann kann Spieler A gewinnen, indem er mit der „Gewinnzahl„ $2^r \in M$ beginnt und dann der Reihe nach die Zahlen

$$2^{r+5}, 2^{r+2\cdot 5}, \dots, 2^{r+5i}$$

nennt, was laut Spielregel stets möglich ist. Wegen $2^{r+5i} = 2^k > K$ hat er dann gewonnen.

Gilt dagegen $r = 0$, dann kann B gewinnen, indem er analog vorgeht.

II Runde 2

Aufgabe 091224:
Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so dass ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muss, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muss erfüllt sein, damit
a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler
den Gewinn erzwingen kann?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es gelten folgende Feststellungen:

I. Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler gewonnen.

II. Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, dass ein Spieler den Gewinn erzwingen kann, wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln n der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muss dieser eine Anzahl a Kugeln mit $1 \leq a \leq k$ (1) entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leq k + 1 - a \leq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln in der Schachtel.

III. Aus I. und II. folgt: Jede Zahl z der Form

$$m(k + 1) + 1, m = 0, 1, 2, ..., \quad (2)$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d. h., lässt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

IV. Ferner folgt als eine Lösung zu a) : Ist n von der Form $m(k+1)+r$, $m=0,1,2,...,$ $1<r\leq k+1$, d. h., lässt n bei Division durch $k+1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen.
Er kann nämlich im ersten Zug $r-1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0<r-1\leq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

V. Da die unter III. und IV. angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.

III Runde 3

Aufgabe 231233B:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so dass die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne dass B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln: Als ersten Zug nimmt B zwei beliebig von ihm ausgewählte Karten, und A sagt ihm, wie viele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten).
Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück.
Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spieles beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie:
Er nimmt im 1. Zug die Karten 1, 2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,
im 2. Zug die Karten 3, 4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt, falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen, im 9. Zug die Karten (17, 18).

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sind genau die beiden folgenden Fälle möglich:

1. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2),(3{,}4),\dots,(19{,}20)$ befindet sich das richtige Paar.
In diesem Fall hat B entweder nach höchstens 9 Zügen das Paar mit den richtigen Karten genommen, oder er kann aus den Antworten „Null“ auf die ersten 9 Züge erkennen, dass (19,20) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 10. Zug und hat damit den Gewinn erzielt.

2. Fall: Unter den Paaren $(1{,}2),(3{,}4),\dots,(19{,}20)$ befinden sich genau zwei Paare, in denen jeweils eine Karten richtig ist.
In diesem Fall weiß B spätestens nach dem 9. Zug, welche Paare dies sind.
Es seien die Paare $(a_1{,}a_2)$ und $(a_3{,}a_4)$ (etwa mit $a_1<a_2<a_3<a_4$). Dabei sind genau die in der folgenden Tabelle angegebenen vier Fälle möglich (die Angabe W unter a_i bedeutet, dass a_i eine der richtigen Karten ist; die Angabe F, dass a_i keine der richtigen Karten ist):

Fall	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1.	W	F	W	F
2.2.	W	F	F	W
2.3.	F	W	W	F
2.4.	F	W	F	W

Jetzt nimmt B im 10. Zug die Karten (a_1, a_3).
Im Fall 2.1. hat er damit die richtigen Karten genommen und das Spiel gewonnen.
Im Fall 2.4. erfährt er mit der Antwort „Null“ auf den 10. Zug, dass (a_2, a_4) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 11. Zug und gewinnt damit.
In den Fällen 2.2. und 2.3., die durch die Antwort „Eins“ auf den 10. zug charakterisiert ist, nimmt B im 11. Zug die Karten (a_1, a_4). Lag der Fall 2.2. vor, so hat B damit gewonnen. Lag aber der Fall 2.3. vor, so erfährt B dies in der Antwort „Null“ auf den 11. Zug. Er nimmt im 12. Zug (a_2, a_3) und gewinnt damit.
Durch die angegebene Strategie erzwingt B also den Gewinn.

b) Für jedes Paar (z_1, z_2) aus zwei verschiedenen der Zahlen $1, \ldots, 20$ gilt:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl z_1 eine der beiden richtigen Zahlen ist, beträgt $P_1 = \frac{2}{20}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann z_2 die andere richtige Zahl ist, beträgt $P_2 = \frac{1}{19}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (z_1, z_2) das richtige Paar ist, $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{190}$.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den Paaren (1,2), ..., (19,20) das richtige befindet (1. Fall): $10 \cdot \frac{1}{190} = \frac{1}{19}$.

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fall 2 eintritt $1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$. Die vier Fälle 2.1. bis 2.4. haben einander gleiche Wahrscheinlichkeit. B hat genau dann nach 11 Zügen den Gewinn noch nicht erreicht, wenn der Fall 2.3. vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt folglich $\frac{1}{4} \cdot \frac{18}{19} = \frac{9}{38}$.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass B den Gewinn spätestens nach 11 Zügen erreicht hat $1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38} \approx 0.763$.

Aufgabe 261235:
Zwei Personen, A und B, spielen mit n in einer Geraden angebrachten Lampen ($n > 3$) das folgende Spiel:
Zum Spielbeginn sind alle Lampen ausgeschaltet. Eine ganze Zahl k mit $1 < k < n-1$ wird vereinbart.
Dann verläuft das Spiel so, dads die Spieler, mit A beginnend, abwechselnd am Zuge sind:
Jeder Spieler schaltet, wenn er am Zug ist, nach eigener Wahl eine Anzahl nebeneinanderliegender Lampen ein, mindestens eine und höchstens k. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte der n Lampen einschaltet.
Man beweise, dass Spieler A für jedes $n > 3$ und jedes k mit $1 < k < n - 1$ durch eine geeignete Vorgehensweise (Strategie) den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von Kornkreis:
Wir bezeichnen die Lampen der Reihe nach mit $1, \ldots, n$ und eine Konfiguration von Ein-/Auszuständen der Lampen als symmetrisch, wenn die beiden Lampen in jedem der Lampenpaare $(1,n)$; $(2, n-1)$; ...; $\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right)$ jeweils denselben Ein-/Auszustand haben (wenn n ungerade ist, ist im letzten Lampenpaar nur eine Lampe, sodass für dieses die Gleichheit der Zustände trivialerweise vorliegt).

Lemma: Spieler A hat eine Strategie, sodass er mit jedem seiner Züge immer eine symmetrische Konfiguration erzielt und Spieler B mit jedem seiner Züge zwangsläufig eine nicht-symmetrische Konfiguration hervorruft.
Beweis: Im ersten Zug schalte Spieler A die Lampe(n) der Nummer $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ an, was eine symmetrische Konfiguration ergibt. Das geht für jedes $1 < k < n - 1$ und jedes $n > 3$.
Sei nun irgendwann im Spielverlauf eine symmetrische Konfiguration gegeben, die nach einem Spielzug von A entstand, und es seien noch ausgeschaltete Lampen vorhanden.

Da nur nebeneinanderliegende ausgeschaltete Lampen angeschaltet werden können, kann Spieler B nun entweder Lampen mit kleinerer Nummer als $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ oder mit größerer Nummer als $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ anschalten. Dies seien die Lampen $i, \ldots, j$. Aufgrund der Symmetrie vor B's Zug sind die Lampen $n-i+1, \ldots, n-j+1$ sowohl vor als auch nach B's Zug ausgeschaltet. Demnach ist die Konfiguration nach B's Zug nicht mehr symmetrisch. Spieler A hingegen kann nach B's Zug durch Anschalten der Lampen $n-i+1, \ldots, n-j+1$ wieder eine symmetrische Konfiguration erreichen. Damit ist das Lemma bewiesen.

Da die Anzahl der ausgeschalteten Lampen durch die Spielzüge von A und B streng monoton abnimmt, und eine endliche Anzahl von Lampen am Anfang vorlag, muss das Spiel irgendwann enden. Wenn A nach obiger Strategie spielt, macht also zwangsläufig A den letzten Zug, weil die Konfiguration, bei der alle Lampen angeschaltet sind, symmetrisch ist, was B nicht erreichen kann. Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen.

IV Runde 4

Aufgabe 101244:
Zwei Personen A und B spielen folgendes Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$x + a_1 y = b_1 \qquad (1) \qquad ; \qquad a_2 y + b_2 z = a_3 \qquad (2) \qquad ; \qquad b_3 x + a_4 z = b_4 \qquad (3)$$

wählt zunächst A für den Koeffizienten a_1, dann B für den Koeffizienten b_1, dann wieder A für $a2$, dann B für $b2$ usw., zum Schluss B für b_4 je eine beliebige ganze Zahl.
A hat genau dann gewonnen, wenn das System (1), (2), (3) genau eine ganzzahlige Lösung (x, y, z) hat.
a) Kann A so spielen, d. h., kann er die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ jeweils nach der Wahl von $b_1, ..., b_3$ durch B so auswählen, dass er gewinnt?
b) Kann A von vornherein für die Koeffizienten $a_1, ..., a_4$ solche Werte angeben, dass er unabhängig von der Wahl der Koeffizienten durch B (in jedem Falle) gewinnt?

Lösung von StrgAltEntf:
Die Antwort zu b (und damit auch zu a) lautet ja.

A wählt $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = a_4 = 1$. Das Gleichungssystem lautet dann

(1) $x = b_1$
(2) $y + b_2 z = 0$
(3) $b_3 x + z = b_4$

Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige und ganzzahlige Lösung

$$x = b_1 \qquad , \quad y = b_1 b_2 b_3 - b_2 b_4 \qquad , \qquad z = b_4 - b_1 b_3$$

Aufgabe 211242:
Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
In dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 1 \qquad (1) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 1 \end{aligned}$$

belegt zunächst A einen der Koeffizienten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl.
Dann belegt B einen der verbleibenden Koeffizienten mit einer von ihm gewählten natürlichen Zahl, dann wieder A, dann B usw., bis endlich A den letzten (neunten) Koeffizienten mit einer natürlichen Zahl belegt.
A hat gewonnen, wenn nach diesen Belegungen das Gleichungssystem (1) genau eine reelle Lösung (x, y, z) besitzt.
B hat gewonnen, wenn nach den Belegungen das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele reelle Lösungen (x, y, z) besitzt.
Man untersuche, ob B durch geeignete Belegungen in jedem Falle den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es sei (x,y,z) eine Lösung des Gleichungssystems (1). Dann gilt

$$(a_2c_1 - a_1c_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = c_1 - c_2$$
$$(a_3c_2 - a_2c_3)x + (b_3c_2 - b_2c_3)y = c_2 - c_3$$
$$(a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = c_3 - c_1$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit b_3, b_2 bzw. $B - 1$ und Addition

$$D \cdot x = (c_1 - c_2)b_3 = (c_2 - c_3)b_1 + (c_3 - c_1)b_2 \qquad (2)$$

wobei

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \qquad (3)$$

ist. Ferner erhält man

$$D \cdot y = (a_1 - a_2)c_3 + (a_2 - a_3)c_1 + (a_3 - a_1)c_2 \quad \text{und} \qquad (4)$$

$$D \cdot z = (b_1 - b_2)a_3 + (b_2 - b_3)a_1 + (b_3 - b_1)a_2 \qquad (5)$$

Das Gleichungssystem (1) hat daher wegen (2), (4) und 85) im Falle $D \neq 0$ genau eine reelle Lösung, so dass A gewinnt; im Falle $D = 0$ keine oder unendlich viele reelle Lösungen, so dass B gewinnt.
Daher kann B mit der folgenden Strategie den Gewinn erzwingen, d. h. erreiche, dass $D = 0$ wird:

1. O. B. d. A. sei angenommen, dass A zuerst den Koeffizienten a_1 belegt hat (auf diese Möglichkeit lassen sich alle anderen durch Vertauschen von Gleichungen oder Vertauschen von Unbekannten zurückführen). Dann belegt B den Koeffizienten c_2 mit 0 und erreicht damit

$$D = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

   worin nun der Koeffizient a_1 bereits festgelegt ist.

2. Belegt nun A den Koeffizienten c_3, so belegt B den Koeffizienten b_2 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3$$

   Belegt dagegen A einen anderen Koeffizienten, so belegt B den Koeffizienten c_3 mit 0 und erreicht

$$D = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

   In beiden Fällen ist in der erhaltenen Darstellung von D höchstens ein Koeffizient festgelegt (im ersten Fall ist dies genau der Koeffizient c_3).

3. Belegt jetzt A einen weiteren Koeffizienten, so kommen höchstens in einem der beiden Produkte (aus der erreichten Darstellung von D) zwei bereits festgelegte Koeffizienten vor. B kann dann in einem Produkt mit maximaler Anzahl festgelegte Koeffizienten einen weiteren Koeffizienten mit 0 belegen und damit

$$D = a_2b_3c_1 \qquad \text{oder} \qquad D = -a_3b_2c_1$$

   erreichen, worin jeweils höchstens ein Koeffizient festgelegt ist.

4. Gleichgültig welchen Koeffizienten A nun belegt, erreicht B durch Belegung des noch freien Koeffizienten mit 0, dass $D = 0$ wird.

   Unabhängig davon, welche weitere Belegungen bis zum Ende des Spiels noch vorgenommen werden, hat damit B den Gewinn erzwungen, da im Falle $D = 0$ das Gleichungssystem (1) keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 291246A:
In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln.
Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot.
Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden.
Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ 2 rot ist.
Hinweis:
Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, dass für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist.
Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als günstig und $M - G$ als ungünstig angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines günstigen Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

Lösung von Monika Noack:
1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus Urne A in Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten; bei einem Zug, wo eine Kugel von B nach A gelegt wird, sind es genau $n + 1$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $m^2(n + 1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Wir bestimmen nun die Anzahl der Möglichkeiten im ersten bis vierten Zug, eine rote bzw. eine blaue Kugel herauszugreifen:
Für den Fall, dass im 1. Zug eine rote Kugel gegriffen wird, gibt es genau m Möglichkeiten (dass eine blau gegriffen wird, 0 Möglichkeiten).
Im 2. Zug gibt es für jeden der m (durch den 1. Zug möglichen) Fälle genau n Möglichkeiten, eine blaue Kugel und genau eine Möglichkeit, eine rote Kugel zu greifen.
Im 3. Zug gibt es für jeden der $n \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine blaue Kugel gegriffen wurde) $(m - 1)$ Möglichkeiten, eine rote und 1 Möglichkeit, eine blaue Kugel herauszugreifen. Für jeden der $1 \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine rote Kugel gegriffen wurde) gibt es m Möglichkeiten, eine rote und 0 Möglichkeiten, eine blaue Kugel herauszugreifen.
Schließlich gibt es beim 4. Zug für jeden der $(m-1) \cdot n \cdot m$ Fälle (2. Zug blau, 3. Zug rot) 2 Möglichkeiten, eine rote (und $n - 1$ Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jede der $1 \cdot n \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug blau) genau 1 Möglichkeit, eine (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $m \cdot 1 \cdot m$ (2. und 3. Zug rot) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel herauszugreifen.

So ergibt sich als Anzahl S der günstigen Fälle (d. h. im 4. Zug wird eine rote Kugel gegriffen):

$$S = 2 \cdot (m - 1) \cdot n \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot n \cdot m + 1 \cdot m \cdot 1 \cdot m$$

Also ist die Menge aller ganzzahligen Paare $(m; n)$ zu finden, für die

$$\frac{m \cdot n + 2(m - 1)n \cdot m + m^2}{m^2(n + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Wegen $m \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$m - 2n + 2mn - mn^2 = 0 \qquad (*)$$

ist, woraus folgt, dass einerseits m ein teiler von $2n$ ist, andererseits aber m von n geteilt wird.
Somit gilt $m = t \cdot n$ mit $t = 1$ oder $t = 2$. Für $t = 1$ wird (*) zu

$$-n + 2n^2 - n^3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad n \cdot (n-1)^2 = 0$$

Diese Gleichung hat wegen $n = m$ und $n + m > 2$ keine Lösung. Der Fall $t = 2$ hingegen führt zu $4n^2 - 2n^3 = 0$, woraus unmittelbar $n = 2$, $m = 4$ folgt.
Diese Zahlen erfüllen in der Tat die Ausgangsgleichung. Also hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 341246B:
Zwei Personen P und Q spielen das folgende Spiel:
In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ belegt zunächst P, danach Q und schließlich wieder P je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten a, b, c mit einer reellen Zahl.
Das Spiel ist genau dann für P gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.
Man untersuche, ob P bei jeder Spielweise von Q den Gewinn erzwingen kann.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn die Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

drei reelle Lösungen haben soll, dann hat die Ableitung zwei reelle Nullstellen, also:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Die Lösungen für $f'(x) = 0$ lauten:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$

Sollte P als erstes den Koeffizienten a vorgeben, gewinnt Q auf jeden Fall, wenn er $b > \frac{1}{3}a^2$ wählt, da dann der Term unter der Wurzel negativ wird, die Funktion damit keine Extremata aufweist und folglich auch keine drei reellen Nullstellen. P's Strategie muss somit zunächst sein, entweder sicherzustellen, dass es auf jeden Fall zwei Extremata gibt, indem er ein $b < 0$ vorgibt, oder er beginnt mit der Vorgabe von c. Dann kann Q im nächsten Schritt zumindest nicht die Negativität des Wurzelterms erzwingen, da P als letzten Zug $a^2 > 3b$ wählen könnte.
Wir kürzen wie folgt ab:

$$w = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b}$$

Setzt man die Nullstellen ein, so liegen die Extremata bei

$$y_{1,2} = \left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^3 + a\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right)^2 + b\left(-\frac{1}{3}a \pm w\right) + c$$

$$y_{1,2} = -\frac{1}{27}a^3 \pm \frac{1}{3}a^2 w - aw^2 \pm w^3 + \frac{1}{9}a^3 \mp \frac{2}{3}a^2 w + aw^2 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 \mp \frac{1}{3}a^2 w \pm w^3 - \frac{1}{3}ab \pm bw + c$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(-\frac{1}{3}a^2 + w^2 + b\right)$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \pm w\left(w^2 - 3w^2\right)$$

$$y_{1,2} = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \mp 2w^3$$

Wenn es drei Lösungen geben soll, dann müssen die beiden Funktionswerte $y_{1,2}$ unterschiedliche Vorzeichen haben, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\left|\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right| < 2w^3$$

Angenommen, P gibt wie oben gesagt ein $b < 0$ vor, wodurch natürlich auch $w > 0$ gilt, dann kann er im letzten Zug auf jeden Fall den Sieg erzwingen:

1. Wenn Q ein a wählt, kann P einfach $c = \frac{1}{3}ab - \frac{2}{27}a^3$ wählen. Dadurch ist die linke Seite der Ungleichung gleich null, sie ist damit erfüllt und P gewinnt.

2. Wenn Q ein c vorgibt, so kann P ein passendes a wählen, so dass die linke Seite der Ungleichung ebenso null wird, da die Funktion $g(x) = \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{3}bx + c$ auf jeden Fall eine reelle Nullstelle hat.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass P auf jeden Fall gewinnt, wenn sein erster Zug in der Vorgabe eines $b < 0$ besteht und er in seinem zweiten Schritt bei der Festlegung des dritten Koeffizienten dafür sorgt, dass $\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$ ist.

IV Zahlentheorie

IV.I Teilbarkeit; Primzahlen; ggT

I Runde 1

Aufgabe 011111:
Es ist zu beweisen, dass bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Lösung von Korinna Grabski:
Es ist zu zeigen, dass 7 Teiler von $6^{2n} - 1$ für alle natürlichen Zahlen n ist. Die Behauptung können wir auch schreiben als $7 \cdot z = 6^{2n} - 1$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:
Als Induktionsanfang finden wir die Behauptung für $n = 0$ durch $6^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 7\cdot$ bestätigt.
Zum Induktionsschritt setzen wir voraus, dass es zu jedem $n = k$ ein $z_k \in \mathbb{N}$ gibt, für welches die Gleichung $7 \cdot z_k = 6^{2k} - 1$ gilt.
Die Induktionsbehauptung lautet dann, dass es für $n = k + 1$ auch ein $z_{k+1} \in \mathbb{N}$ gibt, das die Gleichung $7 \cdot z_{k+1} = 6^{2(k+1)} - 1$ erfüllt. Den Induktionsbeweis führen wir nun mit folgender Gleichungskette:

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 36 + 35 = 36 \cdot (6^{2k} - 1) + 35 =$$

$$= 36 \cdot 7z_k + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (36z_k + 5) = 7 \cdot z_{k+1}$$

Aufgabe 011211:
Ist die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Da für 45 die Primzahlzerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 32 und 5 teilbar ist.
Die letzte Ziffer von 21^n ist für jedes natürliche n gleich 1, und die letzte Ziffer von 39^{2n+1} ist für jedes natürliche n gleich 9. Daher ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0 und die Summe damit durch 5 teilbar.
Wegen $21 = 3\cdot 7$ und $39 = 3\cdot 13$ ist sowohl 21^{39} als auch 39^{21} durch 3^2 teilbar und damit auch die Summe.
Also ist $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar.

Aufgabe 021216:
Es ist zu beweisen, dass es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist!

Lösung von Steffen Weber:
Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} N &= x^4 + 4y4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2(2y^2x^2) - 4(x^2y^2) \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Da $x^2 + 2y^2 + 2xy \geq x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 > 0$ für $x + y > 0$ und $N = 0$ für $x + y = 0$ gilt, ist N genau dann prim, wenn der zweite Faktor in obiger Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2 = 1$$

und $x^2 + 2y^2 + 2xy$ Primzahl sind.

Da Quadrate immer nichtnegativ sind, muss zur Erfüllung der ersten Bedingung entweder $y = 1$ und $|x - y| = 0$ oder $y = 0$ und $|x - y| = 1$ sein. Im letzteren Fall wäre $(x, y) = (1, 0)$, aber $N = 1$ ist nicht prim.

Für $y = 1$ und $|x - y| = 0$ ist $(x, y) = (1, 1)$, d. h. $N = 1 + 4 = 5$ ist tatsächlich eine Primzahl.
Somit gibt es nur ein Paar (x, y) natürlicher Zahlen: $(1, 1)$, für das $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die Sophie-Germain-Identität liefert

$$N = x^4 + 4y4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Dabei ist sowohl N als auch der erste Faktor positiv, sodass es der zweite auch sein muss. Damit N eine Primzahl sein kann, muss diese Faktorisierung also die Form „$N \cdot 1$“ haben, da der zweite Faktor offenbar kleiner ist als der erste.
Es folgt also

$$1 = x^2 + 2y^2 - 2xy = (x-y)^2 + y^2.$$

Da 0 und 1 die kleinsten Quadratzahlen sind, ist diese Gleichung nur dann lösbar, wenn eine der beiden Zahlen $|x - y|$ und y gleich 1 und die andere gleich 0 ist. Im Fall $y = 0$ ergibt sich damit $x = |x - y| = 1$ und $N = 1^4 + 4 \cdot 0^4 = 1$, was keine Primzahl ist. Dagegen erhalten wir im Fall $|x - y| = 0$ direkt $y = x = 1$ und $N = 1^4 + 4 \cdot 1^4 = 5$, was natürlich eine Primzahl ist.
Damit erzeugt nur genau das eine Paar $(x,y) = (1,1)$ eine Primzahl N der Form $x^4 + 4y^4$, $\square$.

Aufgabe 031113:
Beweisen Sie, dass $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Lösung von Manuel Naumann:
Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt: $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.
Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Da p nach den Voraussetzungen nicht durch 3 teilbar sein kann, gilt entweder $3|(p-1)$ oder $3|(p+1)$. Somit ist 3 ein Teiler von $p^2 - 1$.
Des Weiteren muss p eine ungerade Zahl sein. $p - 1$ und $p + 1$ sind demzufolge zwei aufeinander folgende gerade Zahlen und damit durch 2 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist aber sogar genau eine durch 4 teilbar. Es gilt also ebenfalls: $8|(p^2 - 1)$.
Da 3 und 8 teilerfremd sind, folgt aus $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ die Behauptung, dass $24|(p^2 - 1)$. $\square$

Aufgabe 051213:
Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende „Siebenerregel“:

Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.

Man untersuche, ob diese „Siebenerregel“ richtig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der gegebenen Regel gilt, wenn a die letzte Ziffer von z bedeutet,

$$z - a = 10(z_1 + 2a),$$

also

$$z = 10z_1 + 21a.$$

Daher ist z genau dann durch 7 teilbar, wenn $10z_1$ es ist. Lässt nun z_1 den Rest r bei der Teilung durch 7, wobei $0 \leq r \leq 6$ gilt, so lässt z denselben Rest wie $10r$, und dieser Rest ist dann und nur dann Null, wenn $r = 0$ ist ($10p$ ist auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung genau dann durch 7 teilbar, wenn p durch 7 teilbar ist).

Die „Siebenerregel“ ist also richtig. Ob sie allerdings schneller zum Ziel führt als die übliche Division durch 7, die bei Nichtteilbarkeit auch den Rest liefert, hängt von der Übung im Umgang mit der Regel ab.

Aufgabe 131213:
Es seien a und n natürliche Zahlen mit $a \geq 2$ und $n \geq 2$.

Man beweise: Die Menge $M = \{a,a^2,\dots,a^n\}$ ist nicht die Vereinigung zweier solcher elementefremder nichtleerer Mengen M_1 und M_2, für die die Summe der in M_1 enthaltenen Zahlen gleich der Summe der in M_2 enthaltenen Zahlen ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, die Menge M kann so in in zwei elementfremde Teilmengen M_1 und M_2 aufgeteilt werden, dass die jeweiligen Elementesummen gleich groß sind, dann ergibt die Differenz dieser beiden Summen Null. Jedes Element dieser Gleichung der Menge M_1 hat dann ein positives und das der Menge M_2 ein negatives Vorzeichen und lässt sich wie folgt schreiben:

$$\pm a \pm a^2 \pm a^3 \pm \dots \pm a^n = 0$$

Nach Division durch a^2 (was nicht Null sein kann, da $a \geq 2$ ist) erhält man

$$\begin{aligned} \pm\frac{1}{a} \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm \dots \pm a^{n-2} &= 0 \\ \pm 1 \pm a \pm a^2 \pm \dots \pm a^{n-2} &= \mp\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Die linke Seite ist die Summe mehrerer ganzzahliger (positiver oder negativer) Zahlen, die rechte Seite ist auf jeden Fall nicht ganzzahlig ($\frac{1}{n}$ ist für $n \geq 2$ nie ganzzahlig). Aus diesem offensichtlichen Widerspruch folgt das Gegenteil der Annahme und mithin das zu Beweisende.

Aufgabe 141212:
Man beweise:

Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen m und n durch 7 teilbar ist, so ist die Summe $m^7 + n^7$ durch 49 teilbar.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung existiert eine ganze Zahl g mit $m + n = 7g$, also $m = 7g - n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m^7 + n^7 &= (7g - n)^7 + n^7 \\ &= (7g)^7 - 7(7g)^6 n + 21(7g)^5 n^2 - 35(7g)^4 n^3 + 35(7g)^3 n^4 - 21(7g)^2 n^5 + 7(7g)n^6 \end{aligned}$$

ist durch 49 teilbar, w. z. b. w.

Aufgabe 171211:
Man ermittle alle im dekadischen Positionssystem fünfstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17, 19 und 23 teilbar sind und deren Zehnerziffer 0 lautet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, eine natürliche Zahl a habe die geforderten Eigenschaften. Dann ist a durch die Primzahlen 17, 19 und 23 teilbar, also auch durch ihr Produkt $17 \cdot 19 \cdot 23 = 7429$. Daher gibt es eine ganze Zahl n mit $a = 7429n$.

Da a fünfstellig ist, gilt $10000 \leq 7429n \leq 99999$, also $2 \leq n \leq 13$. Ist y die Einerziffer von a, so gilt: Da a die Zehnerziffer 0 hat, hat die Zahl $a - y$ an ihren beiden letzten Stellen je eine 0, sie ist also durch 1100 teilbar. Daher gibt es eine ganze Zahl g mit $7429n - y = 100g$ bzw.

$$29n = 100(g - 74n) + y$$

Setzt man $x = g - 74n$, dann erhält man $29n = 100x + y$ bzw. $100x = 29n - y$. Wegen $2 \leq n \leq 13$ und $0 \leq y \leq 9$ gilt nun

$$49 = 29 \cdot 2 - 9 \leq 29n - y = 100x \leq 29 \cdot 13 - 0 = 377$$

Daraus folgt $1 \leq x \leq 3$. Aus $29n = 100x + y$ bzw. $29(n - 3x) = 13x + y$ erhält man, wenn man $z = n - 3x$ setzt,

$$13 = 13 \cdot 1 + 0 \leq 29z = 13x + y \leq 13 \cdot 3 + 9 = 48$$

also $z = 1$.
Daraus ergibt sich $13x + y = 29$, also ist $29 - y$ durch 13 teilbar, was wegen $0 \leq y \leq 9$ nur für $y = 3$ gilt. Mithin gilt $x = 2$, $n = 3x + z = 7, a = 7929 \cdot 7 = 52003$. Daher kann nur diese Zahl die verlangten Eigenschaften haben.

Sie hat diese Eigenschaften; denn sie ist als Vielfaches von $17 \cdot 19 \cdot 23$ durch 17, 19 und 23 teilbar und hat 0 als Zehnerziffer.

Aufgabe 211214:
Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.

In welcher der beiden natürlichen Zahlen 1981! und $1000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?

Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den Faktoren $1, 2, \dots, 1981$ der Zahl 1981! sind wegen $1981 = 283 \cdot 7$ genau die 283 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 1981(= 283 \cdot 7)$$

durch 7 teilbar. Daher kann man 1981 durch 7^{283} dividieren, indem man anstelle dieser 283 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 283 schreibt (und die übrigen, nicht durch 7 teilbaren Faktoren in 1981! unverändert stehenlässt). Bei dieser Ersetzung entsteht aus 1981! ein Produkt P, in dem wegen $283 = 40 \cdot 7 + 3$ genau die 40 Zahlen

$$7(= 1 \cdot 7) \quad ; \quad 14(= 2 \cdot 7) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 280(= 40 \cdot 7)$$

nochmals durch 7 teilbar sind. Daher kann man P nochmals durch 7^{40} dividieren, indem man anstelle dieser 40 Faktoren die Zahlen 1, 2, ..., 40 schreibt. Von den Faktoren des nun entstandenen Produktes Q sind genau die 5 Zahlen 7, 14, ..., 35 durch 7 teilbar. Daher kann man Q nochmals durch 7^5 dividieren, und in dem dann entstandenen Produkt enthält kein Faktor mehr die Primzahl 7.

Somit tritt 7 in 1981! insgesamt mit dem Exponenten $283 + 40 + 5 = 328$ auf.

In entsprechender Weise ergibt sich aus

$$1000 = 142 \cdot 7 + 6 \quad , \quad 142 = 20 \cdot 7 + 2 \quad , \quad 20 = 2 \cdot 7 + 6$$

dass 7 in 981! insgesamt mit dem Exponenten $140 + 20 + 2 = 162$ auftritt. Also tritt 7 in $1000! \cdot 981!$ insgesamt mit dem Exponenten 326 auf. Daher erhält die Primzahl 7 bei Darstellung der Zahl 1981! den größeren Exponenten.

Aufgabe 241213:
Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $2x-3$, $5x-14$ und $\frac{2x-3}{5x-14}$ ganze Zahlen sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn für eine reelle Zahl x die Zahlen

$$g = 2x - 3 \quad ; \quad h = 5x - 14 \quad \text{und} \quad k = \frac{2x-3}{5x-14} = \frac{g}{h} \tag{1,2,3}$$

ganze Zahlen sind, so folgt aus (1), (2)

$$5g = 10x - 15 \quad ; \quad 2h = 10x - 28$$

und daher

$$5h - 2h = 13$$

Berücksichtigt man hierin due aus (3) folgende Gleihcung $g = hk$, so folgt

$$(5k - 2)h = 13 \tag{4}$$

Somit ist $5k-2$ ein Teiler von 13, also eine der Zahlen 1, -1, 13, -13. Von diesen hat aber nur 13 die Form $5k-2$ mit ganzzahligem k, und damit folgt aus (4) weiter $h = 1$, nach (2) also $5x = h + 14 = 15$, $x = 3$.

Also kann nur $x = 3$ die geforderte Eigenschaft haben. In der Tat sind $2 \cdot 3 - 3 = 3$, $5 \cdot 3 - 14 = 1$ und $\frac{2\cdot 3-3}{5\cdot 3-14} = 3$ ganze Zahlen. Somit hat genau $x = 3$ die geforderte Eigenschaft.

II Runde 2

Aufgabe V11222:
Es ist zu beweisen, dass das Produkt von 6 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.

Lösung von svrc:
Der Binomialkoeffizient für nichtnegative ganze Zahlen k und n mit $n \geq k$ ist durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

definiert. Dieser ist in diesem Falle stets eine nichtnegative ganze Zahl. Es gilt $720 = 6!$. Wir bezeichnen das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit

$$n_k = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) = \prod_{j=k}^{k+5} j$$

für eine beliebige natürliche Zahl k. Mit der Definition des Binomialkoeffizienten und $720 = 6!$ folgt

$$n_k = \prod_{j=k}^{k+5} j = 6! \cdot \frac{\left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right) \cdot \left(\prod_{j=k}^{k+5} j\right)}{6! \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} j\right)} = 6! \cdot \frac{(k+5)!}{6! \cdot (k-1)!} = 720 \cdot \binom{k+5}{k-1}$$

und da der Binomialkoeffizient stets eine nichtnegative ganze Zahl ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe 011222:
Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Da $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$ das Produkt $P = x \cdot y \cdot z$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist.

1. Teilbarkeit durch 3:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 3 treten als mögliche Reste die Zahlen 0, 1 oder 2 auf und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen durch 3 nur die Reste 0 und 1. Die möglichen Reste der Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen sind daher 0, 1 oder 2.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur die Reste 0 oder 1 haben, d. h., mindestens eine der Zahlen x^2, y^2 hat den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar.
Aus $3|x^2$ oder $3|y^2$ folgt $3|x$ oder $3|y$, und damit teilt 3 das Produkt $P = xyz$.

2. Teilbarkeit durch 5:
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 5 kommen als Reste die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 vor und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen nur die Reste 0, 1, oder 4. Die möglichen Reste der Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen sind daher 0, 1, 2, 3, oder 4.
Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1 oder 4 haben, und daher hat mindestens eines der Quadrate x^2, y^2 oder z^2 den Rest 0 und ist somit durch 5 teilbar.
Wegen des Satzes über die eindeutige Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren ist daher weiter mindestens eine der Zahlen x, y oder z durch 5 teilbar und damit auch das Produkt P.

3. Teilbarkeit durch 4:
Zunächst ist mindestens eine der Zahlen x, y oder z gerade; denn die Annahme, dass sowohl x, y und z (und damit auch x^2, y^2, z^2) ungerade Zahlen wären, führt zu dem Widerspruch, dass $x^2 + y^2 = z^2$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl wäre.
Ist z gerade, so sind entweder

- x und y gerade - in diesem Falle teilt 4 das Produkt P - oder
- x und y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x' + 1$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z'$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten.

  (1) ist dann äquivalent mit

  $$4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 \qquad \text{bzw. mit} \qquad 4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2 = 4z'^2$$

  Dies ist ein Widerspruch, da eine natürliche Zahl nicht gleichzeitig durch 4 teilbar sein kann und bei der Division durch 4 den Rest 2 lässt. Also ist Fall b) nicht möglich.

Ist z ungerade und eine der Zahlen x oder y gerade, so kann o. B. d. A. x als gerade vorausgesetzt werden. Dann ist y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x'$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z' + 1$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann gleichbedeutend mit:

$$4{x'}^2 + 4{y'}^2 + 4y' + 1 = 4{z'}^2 + 4z' + 1 \qquad \text{und weiter mit} \qquad {x'}^2 = {z'}^2 + z' - {y'}^2 - y'$$

d. h., ${x'}^2$ ist als Summe von vier ungeraden Zahlen gerade, und daher ist auch x' durch 2 teilbar. Wegen $x = 2x'$ ist daher x durch 4 teilbar und damit auch das Produkt P.

Alternativ-Lösung von weird:
Es genügt offenbar der Nachweis, dass xyz durch jede der drei Zahlen 3,4,5 teilbar ist, weil daraus wegen deren Teilerfremdheit auch die Teilbarkeit durch deren Produkt 60 folgt.
Wäre nun $3 \nmid xyz$, so würde daraus sofort

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 2 \pmod 3$$

folgen, im Widerspruch dazu, dass 2 quadratischer Nichtrest mod 3 ist. Genauso wenig kann auch $5 \nmid xyz$ gelten, da dies

$$x^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,\ y^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,\ z^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$$

zur Folge hätte, womit $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod 5$ ebenfalls nicht gelten kann.
Für den Nachweis von $4 \mid xyz$ bemerken wir zunächst, dass die Zahlen x,y nicht beide ungerade sein können, da daraus

$$z^2 \equiv x^2 + y^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 2 \pmod 4$$

folgen würde, im Widerspruch dazu, dass 2 ein quadratischer Nichtrest mod 4 ist. Ist also dann o. B. d. A. x gerade, und damit y und z ungerade, so folgt dann daraus und der Tatsache, dass $u^2 \equiv 1 \pmod 8$ für ein beliebiges ungerades u gilt, dass

$$x^2 \equiv z^2 - y^2 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod 8$$

d. h., x muss wie behauptet sogar durch 4 teilbar sein.

Aufgabe 021125:
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Der Beweis erfolgt über das Prinzip der Vollständigen Induktion. Dazu wird zunächst nachgewiesen, dass es ein n gibt, mit dem die zu beweisende Aussage korrekt ist.
Sei $n = 1$:

$5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1} = 5^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3 = 152\cdot 8 = 19\cdot 8^2 Damitistnachgewiesen, dassesmindestenseinenatürlicheZahl$

n$gibt, fürdiedieBehauptungwahrist, d.\,h. fürdiegilt$:19k = $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ für eine natürliche Zahl k.
Kann unter dieser Induktionsvoraussetzung nun gezeigt werden, dass aus der Existenz eines n auch die

Behauptung für $n+1$ gilt, so wäre der Beweis erbracht:

$$\begin{aligned} x &= 5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} \\ &= 5^{2n+1+2} \cdot 2^{n+2+1} + 3^{n+2+1} \cdot 2^{2n+1+2} \\ &= 25 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \cdot 4 \cdot 2^{2n+1} \\ &= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\ &= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot \left(19k - 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}\right) \\ &= (50-12) \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\ &= 2 \cdot 19 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\ &= 19 \cdot \left(2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot k\right) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Induktionsbeweis geführt worden ist.

Alternativ-Lösung von weird:
Unter Verwendung der Umformung

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n$$

sowie

$$25^n \equiv 6^n \equiv 2^n \cdot 3^n \pmod{19}$$

gilt dann

$$10 \cdot 25^n \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n \equiv 10 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n + 9 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n = 19 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{19},$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe 031121:
Es ist zu beweisen, dass $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Lösung von Henning Thielemann:
Für jedes ungerade n gibt es eine natürliche Zahl (Null eingeschlossen) k mit $n = 2k+1$.

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= (n^2-1)(n+3) \\ &= (n-1)(n+1)(n+3) \\ &= 2k(2k+2)(2k+4) \\ &= 8 \cdot k(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k+1$ ist immer eine gerade und von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen k, $k+1$ und $k+2$ ist immer eine durch drei teilbar. Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist $k(k+1)(k+2)$ durch 6 teilbar und damit der ganze Ausdruck durch 48.

Alternativ-Lösung von ZePhoCa:
Es gilt $m := n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n+3) - (n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. Von den drei Zahlen $n-1$,$n+1$,$n+3$ ist genau eine durch 3 teilbar, also ist m durch 3 teilbar. Da n ungerade ist, sind diese drei Zahlen außerdem gerade und entweder $n-1$ oder $n+1$ ist sogar durch 4 teilbar. Also ist m durch $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ teilbar. Da dies teilerfremd zu 3 ist, ist m auch durch $48 = 3 \cdot 16$ teilbar.

Aufgabe 041222:
Es ist zu beweisen, dass alle Zahlen der Form

$$73^n + 1049 \cdot 58^n$$

wobei n eine ungerade natürliche Zahl ist; durch 1965 teilbar sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist:

$$1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73$$

Daher ist

$$z_n = 73^n + 1049 \cdot 58^n = 73^n + (31 \cdot 1965 - 73) \cdot 58^{n-1} = 73(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}$$

Da $n - 1 = 2k$ eine gerade Zahl mit $k \geq 0$ ist, folgt

$$73^{n-1} - 58^{n-1} = (73^2)^k - (58^2)^k = 5329^k - 3364^k.$$

Diese Zahl ist durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar. Also ist auch z_n durch 1965 teilbar.

Aufgabe 051222:
Man ermittle sämtliche nicht negativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede nichtnegative ganze Zahl n lässt sich in genau einer der folgenden Formen darstellen:

$$n = 3k \qquad \text{oder} \qquad n = 3k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 3k + 2$$

Dabei ist k eine nichtnegative ganze Zahl. Für $n = 3k$ gilt:

$$z = 5^{3k} - 4^{3k} = (5^3)^k - (4^3)^k$$

Da $a^m - b^m$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m stets durch $(a - b)$ teilbar ist, ist $(5^3)^k - (4^3)^k$ durch $5^3 - 4^3 = 61$ teilbar.
Für $n = 3k + 1$ gilt:

$$z = 5^{3k+1} - 4^{3k+1} = 5 \cdot 5^{3k} - 4 \cdot 4^{3k} = 5(5^{3k} - 4^{3k}) + 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z nicht durch 61 teilbar, da der Summand $5(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand 4^{3k} aber nicht.
Für $n = 3k + 2$ gilt:

$$z = 5^{3k+2} - 4^{3k+2} = 25 \cdot 5^{3k} - 16 \cdot 4^{3k} = 25(5^{3k} - 4^{3k}) + 9 \cdot 4^{3k}$$

In diesem Falle ist z ebenfalls nicht durch 61 teilbar, da der Summand $25(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand $9 \cdot 4^{3k}$ aber nicht.
Die Zahl $z = 5^n - 4^n$ ist also genau dann durch 61 teilbar, wenn n durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 061223:
Beweisen Sie folgende Behauptung! Ist $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch

$$p = a_1^5 + a_2^5 + .. + a_n^5$$

durch 30 teilbar. ($a_1, a_2, ..., a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt zu zeigen, dass $p - s$ durch 30 teilbar ist. Mit $p - s$ ist auch $p = (p - s) + s$ durch 30 teilbar.
Es ist

$$p - s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + ... + (a_n^5 - a_n)$$

Da für alle k ($k = 1,2,...,n$)

$$d_k = a_k^5 - a_k = a_k(a_k - 1)(a_k + 1)(a_k^2 + 1) \qquad (1)$$

gilt, und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, d. h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

Ebenfalls kann man zeigen, dass jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.
Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv \pm 1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (1) $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist, so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d. h. $a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ und daher $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Folglich ist bei beliebigem ganzzahligen a_k das entsprechende d_k durch 5 teilbar.
Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit neben $p - s$ auch p durch 30 teilbar.

Aufgabe 081221:
Geben Sie alle Primzahlen p an, für die sowohl $p + 10$ als auch $p + 14$ Primzahlen sind!

Lösung von ZePhoCa:
Sei $a \in \{0,1,2\}$ der Rest von p bei Division durch 3.
Gilt $a = 1$, so ist $p + 14$ durch 3 teilbar und wegen $p + 14 > 3$ keine Primzahl.
Gilt $a = 2$, so ist analog $p + 10$ durch 3 teilbar und keine Primzahl. Also muss p durch 3 teilbar sein, es muss also $p = 3$ gelten.
Dann gilt $p+10 = 13, p+14 = 17$ und da dies Primzahlen sind gibt es genau eine Lösung, nämlich $p = 3$.

Aufgabe 211224:
Man beweise:
Für jede ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1)$$

eine durch n teilbare ganze Zahl.

Lösung von weird:
Für eine ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ gilt nämlich

$$(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = (n-1)! \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = n \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

Nun sind hier alle Summanden

$$\frac{(n-1)!}{k(n-k)}$$

der rechtsstehenden Summe ganze Zahlen, da die beiden Faktoren des Nenners ja auch im Zähler $(n-1)!$ an verschiedenen Stellen als Faktoren vorkommen, weshalb dann auch der gesamte Ausdruck ein ganzzahliges Vielfaches von n ist, wie behauptet.

Aufgabe 251224:
Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die die folgende Eigenschaft haben:
Im abgeschlossenen Intervall $[2^n, 2^{n+1}]$ befindet sich mindestens eine durch n^3 teilbare natürliche Zahl.

Lösung von cyrix:
Offenbar sind $n = 1$ und $n = 2$ Zahlen mit dieser Eigenschaft, da z. B. $2 = 2^1$ bzw. $8 = 2^3$ in den jeweiligen Intervallen liegen und durch $1 = 1^3$ bzw. $8 = 2^3$ teilbar sind.
Liegt n zwischen inklusive 3 und 7, so ist jeweils das kleinste positive Vielfache von n^3; nämlich n^3 selbst; größer als 2^{n+1}, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnet: Es ist $2^4 = 16 < 27 = 3^3$, $2^5 = 32 < 64 = 4^3$, $2^6 = 64 < 125 = 5^3$, $2^7 = 128 < 216 = 6^3$ und $2^8 = 256 < 343 = 7^3$.

Wir zeigen im Folgenden, dass für $n \geq 8$ die Ungleichung $n^3 \leq 2^{n+1}$ gilt:
Es ist $8^3 = 2^9 = 2^{8+1}$, sodass die Ungleichung für $n = 8$ erfüllt ist. Und gilt für eine natürliche Zahl $n \geq 8$ die Ungleichung, so gilt sie wegen $2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 \geq n^3 + 8n^2 = n^3 + 3n^2 + 5n^2 \geq n^3 + 3n^2 + 40n \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$ auch für deren Nachfolger $n+1$ und damit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 8$.

Es folgt, dass für alle $n \geq 8$ der Wert n^3 direkt im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegt, und damit die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, oder aber $n^3 < 2^n$ gilt. In diesem Fall ist aber von je n^3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch n^3 teilbar, also insbesondere eine der Zahlen $2^n + 1$, $2^n + 2$, $\ldots$, $2^n + n^3 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, die alle im Intervall $[2^n; 2^{n+1}]$ liegen.

Damit gilt, dass genau diejenigen positiven ganzen Zahlen n, die $n = 1$, $n = 2$ oder $n \geq 8$ erfüllen, Lösungen der Aufgabe sind.

III Runde 3

Aufgabe 051231:
Es ist zu beweisen, dass die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 0$ Kubikzahl ist.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
$2^0 + 1 = 2$ ist nicht Kubikzahl. Für $n \geq 1$ ist die Zahl $2^n + 1$ ungerade.
Angenommen, $2^n + 1$ wäre Kubikzahl, so ist sie die dritte Potenz einer ungeraden Zahl, die sich in der Form $2k + 1$ darstellen lässt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Es gilt also

$$2^n + 1 = (2k+1)^3 \qquad (1)$$

Da die Zahl $2^n + 1$ für $n = 1$ nicht Kubikzahl ist, muss man in (1) $n > 1$ und $k > 0$ annehmen. Nun folgt aus (1)

$$\begin{aligned} 2^n + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 2^n &= 2k(4k^2 + 6k + 3) \\ 2^{n-1} &= k(4k^2 + 6k + 3) \end{aligned}$$

Der zweite Faktor der rechten Seite ist eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist. Diese Zahl müsste, da k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, Teiler von 2^{n-1} sein. Das ist aber wegen der Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit jeder natürlichen Zahl ≥ 2 in Primfaktoren nicht möglich.
Wir erhalten einen Widerspruch, also ist keine der Zahlen z der Form $2^n + 1$ Kubikzahl.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Gäbe es ein solches z, dass Kubikzahl wäre, so also auch eine natürliche Zahl k mit $2^n + 1 = k^3$ bzw. $2^n = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$.

Insbesondere wären sowohl $k-1$ als auch k^2+k+1 Teiler einer Zweierpotenz und damit selbst Zweierpotenzen.
Wegen $k-1 < k^2+k+1$ müsste $k-1|k^2+k+1$ folgen, was aber wegen $k^2+k+1-(k-1)(k+2) = k^2+k+1-(k^2+k-2) = 3$ auf $k=1$ oder $k=3$ führt. Jedoch sind weder $1^3-1=0$ noch $3^3-1=26$ Zweierpotenzen, sodass es keine solche Zahlen gibt.

Zweite Alternativ-Lösung von weird:
Dies folgt einfach daraus, dass im Falle einer Gleichheit $2^n+1=k^3 \quad (k,n \in \mathbb{N})$ bei einer Division durch 7 die linke Seite dieser Gleichung einen Rest in $\{2,3,5\}$, die rechte aber einen Rest in $\{0,1,6\}$ ergeben würde, Widerspruch!

Aufgabe 091231:
a) Es ist zu beweisen, dass die Zahl

$$z = \frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 6538^3 + 65539^3}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 32771}$$

eine ganze Zahl ist!
b) Die Zahl z ist zu berechnen!

Lösung von cyrix:
Mit $n := 2^{15} = 32768$ ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2n-3)^3 + (2n-2)^3 + (2n-1)^3 + (2n)^3 + (2n+1)^3 + (2n+2)^3 + (2n+3)^3}{(n-3)(n-2) + (n-1)n + n(n+1) + (n+2)(n+3)} \\ &= \frac{7 \cdot (2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 \cdot (-3-2-1+1+2+3)}{4n^2 + n \cdot (-3-2-1+1+2+3) + 6 + 6} + \\ &+ \frac{3 \cdot (2n) \cdot ((-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2) - 3^3 - 2^3 - 1^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3)}{4n^2 + n \cdot (-3-2-1+1+2+3) + 6 + 6} \\ &= \frac{56n^3 + 168n}{4n^2 + 12} = \frac{4 \cdot 14 \cdot n \cdot (n^2+3)}{4 \cdot (n^2+3)} = 4n = 2^{17} = 131072. \end{aligned}$$

Aufgabe 121234:
Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an+b$ $(n = 0,1,2,\dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben.
Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.
Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

Lösung von cyrix:
Nach dem euklidischen Algorithmus ist für alle natürlichen Zahlen n

$$\text{ggT}(z_n,a) = \text{ggT}(an+b,a) = \text{ggT}(b,a)$$

unabhängig vom Index n. Damit besitzen alle Folgenglieder den gleichen größten gemeinsamen Teiler d.

Aufgabe 221232:
Man ermittle für alle diejenigen 30-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ von (nicht notwendig verschiedenen) positiven ganzen Zahlen a_i $(i = 1, ..., 30)$, die

$$\sum_{i=1}^{30} a_i = 1983$$

erfüllen, den größten Wert, den der größte gemeinsame Teiler d der Zahlen a_i annehmen kann.

Lösung von weird:
Da alle a_i natürlich durch d teilbar sind, gilt dies auch für deren Summe 1983 mit der Primfaktorzerlegung $1983 = 3 \cdot 661$, d. h., es muss

$$d \in \{1,3,661,1983\}$$

sein. Da $d = 1983$ und $d = 661$ bei 30 positiven Summanden natürlich sofort ausscheiden, kommt dann als nächstes in Hinblick auf ein Maximum $d = 3$ in Betracht und damit ist das Problem hier natürlich leicht lösbar, z. B. mit der Belegung

$$a_1 = a_2 = ... = a_{29} = 3,\ a_{30} = 1983 - 29 \cdot 3 = 1896$$

Aufgabe 261233A:
Man untersuche ob es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die die folgende Eigenschaft haben:
Jede der vier Zahlen lässt sich so in zwei positive ganzzahlige Summanden x und y zerlegen, dass sie jeweils ein Teiler von $x \cdot y$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt vier solche Zahlen. Zum Beweis genügt es ein Beispiel anzugeben. Ein solches Beispiel bilden die Zahlen 242, 243, 244, 245:
$242 = 22 + 220$ ist wegen $242 \cdot 20 = 22 \cdot 220$ ein Teiler von $22 \cdot 220$
$243 = 81 + 162$ ist wegen $243 \cdot 54 = 81 \cdot 162$ ein Teiler von $81 \cdot 162$
$244 = 122 + 122$ ist wegen $244 \cdot 61 = 122 \cdot 122$ ein Teiler von $122 \cdot 122$
$245 = 35 + 210$ ist wegen $245 \cdot 30 = 35 \cdot 210$ ein Teiler von $35 \cdot 210$

Heuristische Lösung:
Eine natürliche Zahl n hat genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ($n \geq 2$ gilt und) n ein Teiler von einem der Produkte $k \cdot (n-k)$ $(k = 1,...,n-1)$ ist. Wegen $k \cdot (n-k) = kn - k^2$ ist das gleichbedeutend damit, dass n ein Teiler von einer der Quadratzahlen k^2 $(k = 1,...,n-1)$ ist.
Hierfür ist hinreichend, dass die Zahl n ihrerseits durch eine Quadratzahl $q^2 > 1$ teilbar ist; denn wenn dies zutrifft, so existiert eine natürliche Zahl a mit $n = q^2 \cdot a$, und damit ist n wegen $n \cdot a = q^2 a^2$ ein Teiler des Quadrates der natürlichen Zahl $k = qa$, die wegen $k = \frac{n}{q}$ und $q > 1$ kleiner als n ist.
Nun kann man z. B. versuchen, vier Zahlen der geforderten Art etwa als

$$n = 2^2 \cdot a \tag{1}$$
$$n + 1 = 3^2 \cdot b \tag{2}$$
$$n + 2 = 5^2 \cdot c \tag{3}$$
$$n + 3 = 7^2 \cdot d \tag{4}$$

zu finden. Hiervon werden (1) und (2), also $4a + 1 = 9b$ etwa gelöst durch $b = 1 + 4t$, $a = 2 + 9t$

$$n = 8 + 36t \tag{5}$$

sodann werden (5) und (3), also $10 + 36t = 25c$ etwa gelöst durch $t = -10 + 25u$, $c = -14 + 36u$

$$n = -352 + 900u \tag{6}$$

schließlich werden (6) und (4), also $-349+900u = 49d$ etwa gelöst durch $u = -16+49v$, $d = -301+900v$,

$$n = -14572 + 44100v$$

für $v = 1$ also $n = 29348$.

Hat man die Lösungsfindung wie hier als Nachweis hinreichender Bedingungen formuliert, so ist eine Probe nicht erforderlich.
Andernfalls ist es für die Korrektheit der Lösung (wie oben bemerkt, sogar allein) erforderlich, die verlangte Eigenschaft zu bestätigen:

$29348 = 4 \cdot 7337 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 2 \cdot 7337$, $y = 2 \cdot 7337$,
$29349 = 9 \cdot 3261 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 3 \cdot 3261$, $y = 6 \cdot 3261$,
$29350 = 25 \cdot 1174 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 5 \cdot 1174$, $y = 20 \cdot 1174$,
$29351 = 49 \cdot 599 = x + y$ ist Teiler von xy für $x = 7 \cdot 599$, $y = 42 \cdot 599$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Wir betrachten zuerst folgenden Hilfssatz, wobei für die Aufgabe nur die erste Implikation von Bedeutung ist:

Eine natürliche Zahl n lässt sich genau dann als Summe zweier positiver ganzer Zahlen x und y mit $n|x \cdot y$ darstellen, wenn es eine Primzahl p gibt, sodass p^2 ein Teiler von n ist.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, dass n durch p^2 teilbar ist und wählen $x := \frac{n}{p}$ sowie $y := n - x$. Dann ist $0 < x < n$ eine positive ganze Zahl und damit auch $0 < y < n$ eine solche. Weiterhin ist x durch p teilbar, also auch $y = n - x$, sodass es eine ganze Zahl t mit $y = t \cdot p$ gibt. Dann ist n ein Teiler von $n \cdot t = \frac{n}{p} \cdot (t \cdot p) = x \cdot y$.

Seien nun x und y positive ganze Zahlen mit $x+y = n$ und $n|x \cdot y$. Weiterhin sei p ein beliebiger Primteiler von n, sodass auch $p|x \cdot y$, also $p|x \vee p|y$ und damit wegen $x + y = n$ auch $p|x \wedge p|y$ gilt. Insbesondere sind also sowohl x als auch y durch jeden Primteiler p von n teilbar.
Wäre n quadratfrei, also für keine Primzahl p durch p^2 teilbar, so wäre es das Produkt paarweiser verschiedener Primzahlen, die aber auch alle Teiler von x und von y sein müssten, sodass wegen $x,y > 0$ und $n|x$, $n|y$, also $n \leq x,y$, ein Widerspruch zu $x + y = n$ entstehen würde. Also gibt es mindestens eine Primzahl p mit $p^2|n$, $\square$.

Nun zur Aufgabe:
Da $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$ und $49 = 7^2$ paarweise teilerfremd sind, gibt es nach dem Chinesischen Restsatz eine (und damit unendlich viele) natürliche Zahl m, sodass m bei der Teilung durch 49 den Rest 0, bei der Teilung der 25 den Rest 1, bei der Teilung durch 9 den Rest 2 und bei der Teilung durch 4 den Rest 3 lässt. (Dann ist, wie man leicht nachprüft, $m > 3$, sodass auch $m - 3$ eine natürliche Zahl ist.)

Sei m eine solche natürliche Zahl. Dann ist $m - 3$ durch 2^2, $m - 2$ durch 3^3, $m - 1$ durch 5^2 und m durch 7^2 teilbar, sodass nach dem vorhergehenden Hilfssatz sich jede dieser vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt als Summe $x + y$ positiver ganzer Zahlen und gleichzeitig Teiler vom Produkt $x \cdot y$ dieser beiden Summanden ist. Also gibt es solche Zahlen.

Bemerkung: Das Konstruktionsverfahren lässt sich in analoger Weise auf beliebig viele aufeinanderfolgende natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft erweitern.

Aufgabe 291236:
Man beweise:
Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leq n \leq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

Lösung von weird:
Stellt man eine beliebige natürliche Zahl a im Zahlensystem mit der Basis 1000 dar, also

$$a = \sum_{k=0}^{m} a_k\, 1000^k \quad (0 \leq a_k < 1000,\, m \in \mathbb{N})$$

so gilt bez. der Teilbarkeit durch 37 wegen $1000 \equiv 1 \pmod{37}$ die einfache Regel, dass a genau dann durch 37 teilbar ist, wenn dies für ihre „Ziffernsumme“ $\sum_{k=0}^{m} a_k$ gilt.
Im gegenständlichen Fall sind die Ziffern einfach alle natürlichen Zahlen von 111 bis 999, wobei in Hinblick auf die Ziffernsumme die Reihenfolge natürlich keine Rolle spielt. Und ja, diese Ziffernsumme, nämlich

$$\frac{111 + 999}{2}\,(999 - 111 + 1)$$

ist wegen $111 = 3 \cdot 37$ tatsächlich durch 37 teilbar.

Aufgabe 301236:
Man beweise: Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist.

Lösung von weird:
Sieht man sich einmal den ersten Teilsummanden 2^n für $(n \in \mathbb{N})$ an, so ist klar, dass er für $n \geq 2$ stets durch 4 teilbar ist und er mod 25 wegen ggt(2,25) = 1 die Periode $20 (= \varphi(25))$ oder einen Teiler davon hat, was dann also für $n \geq 2$ auch mod 100 gilt. Für den zweiten Teilausdruck n^2 gilt dagegen

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad (n + 50k)^2 = n^2 + 100nk + 2500k^2 \equiv n^2 \pmod{100}$$

sodass also für den Gesamtausdruck $2^n + n^2$ für $n \geq 2$ dann jedenfalls gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad 2^{n+100k} + (n + 100k)^2 \equiv 2^n + n^2 \pmod{100} \qquad (*)$$

Es genügt somit eine einzige(!) Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu finden, für die $2^n + n^2$ durch 100 teilbar ist, denn wegen (*) hat man damit automatisch dann auch unendlich viele solcher Zahlen. Und ja, $n = 6$ ist z. B. eine solche, wie man wohl am einfachsten durch Probieren - es kommen ja offensichtlich nur gerade n in Frage! - sehr schnell herausfindet.

Aufgabe 321234:
Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werde vorausgesetzt, dass jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ genau einmal unter den $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorkommt.
Man beweise, dass unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$$

stets eine gerade Zahl sein muss.

Lösung von MontyPythagoras:
Das Produkt kann nur dann ungerade sein, wenn jeder einzelne der Faktoren ungerade ist. Die Faktoren $(a_i - i)$ sind nur dann alle ungerade, wenn a_i und i verschiedene Parität haben, also z. B. a_i ungerade ist, wenn i gerade ist, oder anders herum.

Da $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist, gibt es in der Menge $\{1,2,3,\ldots,n\}$ eine ungerade Zahl mehr als es gerade gibt, also $m - 1$ gerade Zahlen und m ungerade Zahlen. Jedem ungeraden $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, von denen es m gibt, muss ein gerades a_i zugeordnet werden. Von denen gibt es aber nur $m - 1$, also eines zu wenig, so dass auf jeden Fall immer ein Faktor dabei ist, wo zwei ungerade Zahlen voneinander abgezogen werden.
Dieser Faktor ist dann gerade, und somit ist auch das Produkt gerade.

IV Runde 4

Aufgabe 021241:
a) Beweisen Sie, dass der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!
b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung von Burkhard Thiele:
a) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 30q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 29$.
Für alle Zahlen r, die durch 2, 3, oder 5 teilbar sind, ist $30q + r$ keine Primzahl. Daher kommen nur die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 als Rest r in Frage, d. h., r ist entweder gleich 1 oder eine Primzahl.

b) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:
$p = 60q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 59$.
Da sich die Primzahl 109 in der Form $109 = 60 \cdot 1 + 49$ schreiben lässt und da 49 keine Primzahl ist, gilt die Aussage von a) nicht für b).

Aufgabe 041242:
Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 109, 151, 491$ die Zahl $z = 1963^{1965} - 1963$ teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$z = 1963^{1965} - 1963 = 1963(1963^{1964} - 1) = 1963(1963^{982} + 1)(1963^{491} + 1)(1963^{491} - 1)$$

Wegen

$$a^k - 1(a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + 1)$$

für jedes positive ganze k und jedes a sowie

$$a^k + 1 = (a + 1)(a^{k-1} - a^{k-2} + ... + 1)$$

für jedes ungerade natürliche k und jedes a gilt:

$$z = 1962 \cdot 1963 \cdot 1964 \cdot P$$

wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist. Wegen

$$1962 = 2 \cdot 3^3 \cdot 109; \qquad 1963 = 13 \cdot 151; \qquad 1964 = 2^4 \cdot 491$$

ist z durch 2, 3, 13, 109, 151, 491 teilbar. Es gilt

$$1963^{1964} - 1 = (1963^4)^{491} - 1$$

Die letzte Ziffer von 1963^4 ist 1, deshalb ist auch 1 die letzte Ziffer von $(1963^4)^{491}$. Daher ist die letzte Ziffer von $1963^{1964} - 1$ gleich 0, damit ist diese Zahl durch 5 teilbar, und deswegen ist auch z durch 5 teilbar.
z ist also durch alle angegebenen Primzahlen teilbar.

Aufgabe 181245:
Es sei n eine natürliche Zahl größer als 1.
Man zeige, dass es zu jeder der n Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ mit $a_j = n! + j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ eine Primzahl p_j gibt, die die Zahl a_j, aber keine weitere Zahl a_k $(k \neq j)$ dieser n Zahlen teilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Es sei j eine der Zahlen $1, 2, ..., n$.
1. Fall: Es existiert ein Primteiler p_j von a_j mit $p_j \geq n$.
Wir behaupten, dass dieser Primteiler kein weiteres a_k $(k \neq j)$ teilt.
Angenommen, es existierte ein $k \neq j$, $0 < k \leq n$ derart, dass p_j a_k teilt. Dann würde p_j aber auch $a_k - a_j = k_j$ teilen, was wegen $|k - j| < n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $p_j \geq n$ steht.

2. Fall: Sämtliche Primteiler von a_j sind kleiner als n.
Dann ist
$$q = \frac{a_j}{j} = \frac{n!}{j} + 1$$
eine ganze Zahl, für die folgendes gilt:
q ist größer als 1 und besitzt daher Primteiler, die, da q ein Teiler von a_j ist, sämtlich kleiner als n sind.
Diese Primteiler können keine der Zahlen m mit $1 < m < n$ und $m \neq j$ sein, da m ein Teiler von $\frac{n!}{j}$, also keiner von $\frac{n!}{j} + 1$ wäre. Dann muss aber j Primteiler von q und damit von a_i, a_j also von der Form j^i sein.
Es bleibt zu zeigen, dass für kein k mit $0 < k \leq n$ und $k \neq j$ j Teiler von a_k ist.
Angenommen also, ein solches k existierte. Wie im ersten Fall müsste dann j auch Teiler von $k - j$ und damit von k sein, d. h., es existierte eine ganze Zahl g mit $k = g_j$. Es ist $0 < g_j \leq n$m $g_j \neq j$, also g_j Teiler von $\frac{n!}{j}$.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass j die Zahl $q = \frac{n!}{j} + 1$ teilt. Mit $p_j = j$ ist also auch im zweiten Fall eine Primzahl gefunden, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 221244:
Man beweise, dass das Polynom
$$f(x) = \frac{1}{630} \cdot x^9 - \frac{1}{21} \cdot x^7 + \frac{13}{30} \cdot x^5 - \frac{82}{63} \cdot x^3 + \frac{32}{35} \cdot x$$
für alle ganzzahligen x ganzzahlige Werte annimmt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir klammern zunächst aus und erhalten:
$$f(x) = \frac{1}{630} \left(x^9 - 30x^7 + 273x^5 - 820x^3 + 576x \right)$$
Es bleibt also zu zeigen: $630 \mid n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n$.
Nun ist $630 = 63 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$. Wir zeigen nun also die Teilbarkeit:
$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 + n^5 = n^5(n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 2$$
$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^5 + 3n^5 + n = n(4n^4 + 1) \equiv 0 \pmod 5$$

$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^3 - 30n - n^3 + 2n \equiv 0 \pmod 7$$
$$n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n \equiv n^9 - 3n^7 + 3n^5 - n^3 = n^3(n^6 - 3n^4 + 3n^2 - 1) =$$
$$= n^3(n-1)^3(n+1)^3 \equiv 0 \pmod 9$$

Aufgabe 241246A:
Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtliche kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

Lösung von Kornkreis:
Betrachte $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Für jede natürliche Zahl $a > 0$ und alle $k \in \{0, \pm 2, \pm 3, ..., \pm 22\}$ ist $a \cdot n \pm k$ keine Primzahl: Jede der ersten Primzahlen bis 19 kommt in $a \cdot n$ als Primfaktor vor, sodass jedes k aus der angegebenen Menge einen Primfaktor besitzt, der in $a \cdot n$ enthalten ist, sodass man diesen ausklammern kann. Des Weiteren ist stets $a \cdot n - 22 > 0$.

Nun gilt es nur noch, ein a zu finden, sodass $a \cdot n \pm 1$ keine Primzahlen sind. Man findet schnell mit Modulo-Rechnung und geeignetem Zusammenfassen der Faktoren in n, dass $n \equiv -8 \mod 23$ und $n \equiv 2 \mod 29$ gilt.
Wenn wir nun ein a finden könnten mit $a \equiv 3 \mod 23$ und $a \equiv 15 \mod 29$, so wäre $a \cdot n \equiv -1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv 1 \mod 29$, und wir wären fertig. Mit dem chinesischen Restsatz findet man, dass das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft $a = 624$ ist. Leider gilt dann aber $a \cdot n > 10^9$, sodass wir etwas anderes probieren müssen.

Ein a mit $a \equiv -3 \mod 23$ und $a \equiv -15 \mod 29$ ergibt $a \cdot n \equiv 1 \mod 23$ und $a \cdot n \equiv -1 \mod 29$. Das kleinste natürliche a mit dieser Eigenschaft ist $a = 43$, und tatsächlich kann man abschätzen bzw. ausrechnen, dass $a \cdot n + 22 < 10^9$ gilt. (Anmerkung: $a = 43$ ergibt sich auch aus obigem Fehlversuch vermittels $23 \cdot 29 - 624 = 43$.)

Demzufolge gibt es 45 (und insbesondere 40) aufeinanderfolgende Zahlen kleiner als 10^9, die keine Primzahlen sind, nämlich $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43 + k$ mit $k \in \{0, \pm 1, ..., \pm 22\}$

Aufgabe 251245:
Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d. h., es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \ldots$
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass es ein solches N gibt, indem wir die dazu äquivalente Behauptung beweisen, dass es ein S gibt, sodass für jedes $s > S$ weniger als $\frac{s}{4}$ Primzahlen $p \leq s$ gibt. Ist dem nämlich so, dann gilt insbesondere für jede Primzahl $p_n > S$ mit $s := p_n$, dass $n < \frac{s}{4} = \frac{p_n}{4}$, also $p_n > 4n$ gilt.

Für eine Primzahl $p > 7$ gilt, dass sie weder durch 2, 3, 5 noch 7 teilbar ist. Also kann sie nur in einer von zwei Restklassen modulo 2, in nur zwei von drei Restklassen modulo 3, in nur 4 von 5 Restklassen modulo 5 und in nur 6 der 7 Restklassen modulo 7 liegen. Nach dem chinesischen Restsatz lässt sich wegen der paarweisen Teilerfremdheit von 2, 3, 5 und 7 jede Kombination der Restklassen modulo 2, 3, 5 und 7 zu einer modulo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ zusammenfassen, sodass p nur in $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ der 210 Restklassen modulo liegen kann.

Da 210 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen alle Restklassen modulo 210 durchlaufen, können sich unter diesen nur höchstens 48 Primzahlen, die größer als 7 sind, befinden. Insbesondere gibt es also für jedes positive ganze k höchstens $48 \cdot k + 4$ Primzahlen, die kleiner oder gleich $210 \cdot k$ sind.

Es sei $S := 12 \cdot 210$, $s > S$ und k die größte ganze Zahl mit $210k \leq s$. Dann ist einerseits $k \geq 12$ und andererseits $s < (k+1) \cdot 210$. Also gibt es höchstens so viele Primzahlen $p \leq s$, wie es Primzahlen $p \leq (k+1) \cdot 210$ gibt. Nach dem Vorabsatz sind dies aber höchstens

$$48 \cdot (k+1) + 4 = 48k + 52 = \frac{210}{4} \cdot k - \frac{18}{4} \cdot k + 52 \leq \frac{s}{4} - \frac{9}{2} \cdot 12 + 52 = \frac{s}{4} - 54 + 52 < \frac{s}{4}, \square$$

Aufgabe 261244:
Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl a, für die $(a+1)^5 - a^5 - 1$ durch 18305 teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede positive ganze Zahl a ist

$$(a+1)^5 - a^5 - 1 = 5a(a^3 + 2a^2 + 2a + 1) = 5a(a+1)(a^2 + a + 1)$$

genau dann durch $18305 = 5 \cdot 7 \cdot 523$ teilbar, wenn

$$a(a+1)(a^2 + a + 1) \quad \text{durch } 7 \cdot 523 \tag{1}$$

teilbar ist. Darin ist 523 Primzahl (2); denn 523 ist durch keine der Zahlen 2,3,5,7,11,13,17,19 teilbar, und es gilt $23^2 > 523$.
Man kann zunächst a so zu ermitteln versuchen dass $a^2 + a +^1$ durch 523 teilbar ist (3), d. h. dass eine positive ganze Zahl k mit

$$a^2 + a + 1 = 523k \tag{4}$$

existiert. Ist diese Gleichung lösbar, so gilt wegen $a > 0$

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{523 \cdot 4k - 3} \tag{5}$$

dann ist also $523 \cdot 4k - 3$ eine ungerade Quadratzahl. Daraus folgt der Reihe nach

1. $2092k - 3$ hat eine der Einerziffern 1, 5, 9;
2. $2092k$ hat eine der Einerziffern 4, 8, 2;
3. k hat eine der Einerziffern 2, 7, 4, 9, 1, 6.

Außerdem ist nach (4) und weil $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ eine ungerade Zahl ist, auch k ungerade und hat somit einer der Einerziffern 1, 7, 9. Betrachtet man solche Zahlen k der Reihe nach, so zeigt sich:

Für $k = 1$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 2089$ wegen $45^2 < 2089 < 46^2$ keine Quadratzahl.
Für $k = 7$ ist $523 \cdot 4k - 3 = 14641 = 121^2$, nach (5) also $a = 60$.
Damit ist gezeigt: Für $a = 60$ gilt

$$a^2 + a + 1 = 523 \cdot 7$$

und zwar ist $k = 7$ in (4) die kleinste positive ganze Zahl, also auch $a = 60$ die kleinste positive ganze Zahl, für die (3) gilt. (7)

Wegen (6) erfüllt $a = 60$ sogar (1). Für alle positiven ganzen $a < 60$ folgt dagegen aus $0 < a, a+1 < 523$ sowie aus (7) und (2), dass diese a nicht (1) erfüllen.
Die kleinste Zahl mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften ist somit $a = 60$.

Aufgabe 341246A:
Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen a und b sei $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert ist.
Man beweise: Für jede Wahl von a und b enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

Lösung von weird:
Beweis: Sei p ein beliebiger Primteiler von $x_1 = a + b$. Gilt dann auch $p \mid a$, so würde daraus auch sofort $p \mid b = (a + b) - a$, d. h., mit Ausnahme von $x_0 = 1$ wären dann alle Folgenglieder durch p teilbar und da die Folge streng monton wächst, würde nicht nur $p \mid x_n$, sondern auch gleichzeitig $x_n > x_1 \geq p$ für $n > 1$ gelten, woraus die Behauptung in trivialer Weise folgt.
Sei also im Folgenden $p \nmid a$ vorausgesetzt und (y_n) die aus (x_n) durch die Definition

$$y_n \equiv x_n \pmod n, \text{ mit } 0 \leq y_n < p \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

abgeleitetete Folge. Diese muss dann, da es ja nur endlich viele Restklassen modulo p gibt, notwendigerweise periodisch werden. Ist nun $m > 1$ minimal so gewählt, dass $y_m = y_k$ für ein $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ gilt, so muss dann $k = 0$ sein, denn andernfalls könnte man aus

$$y_{m-1} + b = y_m = y_k = ay_{k-1} + b \pmod p,$$

indem man hier $-b$ beidseitig addiert und anschließend die Gleichung mit dem wegen $p \not| a$ existierenden Inversen $a^{-1} \pmod p$ multipliziert, sofort schließen, dass auch $y_{m-1} = y_{k-1}$ gelten müsste, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von m. Es gilt somit auch $y_{m+1} = y_1 = 0$ bzw. allgemeiner

$$y_{km+1} = y_1 = 0$$

und auf die ursprüngliche Folge bezogen (x_n) bezogen bedeutet dies

$$p \mid x_{km+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Wieder mit der ev. Ausnahme von x_1, für welches ja auch $x_1 = p$ gelten könnte, wären dann mit einer ähnlichen Schlussweise wie oben wieder alle Folgenglieder $x_{km+1}, k = 0,1,2,\ldots$, also dann jedenfalls unendlich viele, zusammengesetzt, q. e. d.

IV.II Diophantische Gleichungen

I Runde 1

Aufgabe 091213:
Es sind alle natürlichen Zahlen a anzugeben, für welche die Gleichung $a^{a^a} = (a^a)^a$ erfüllt ist.

Anmerkung: a^{a^a} bedeutet $a^{(a^a)}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da für alle positiven ganzen Zahlen

$$(a^a)^a = a^{a \cdot a} = a^{\left(a^2\right)}$$

gilt, kann die gegebene Gleichung auch in der Form $a^{a^a} = a^{\left(a^2\right)}$ geschrieben werden.

(1) Für $a \neq 1$ folgt hieraus die Bedingung, dass die Exponenten übereinstimmen müssen, so dass $a^a = a^2$ gefolgert werden kann. Wegen $a \neq 1$ folgt daraus weiter die Bedingung $a = 2$. Also kann für $a \neq 1$ nur die natürliche Zahl 2 Lösung sein.

Tatsächlich gilt $2^{2^2} = 2^4 = 16$ und $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

(2) Prüft man den bisher ausgeschlossenen Fall $a = 1$ unmittelbar durch Einsetzen in die gegebene Gleichung, so zeigt sich, dass auch die natürliche Zahl 1 die gegebene Gleichung löst; denn es gilt $1^{1^1} = 1 = (1^1)^1$.

Weitere Lösungswerte gibt es nicht.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist $a = 1$ eine Lösung. Sei ab nun deshalb $a > 1$. Wegen $(a^a)^a = a^(a \cdot a) = a^(a^2)$ folgt aufgrund der strengen Monotonie die Potenz-Funktion a^x aus der gegebenen Gleichung direkt die Gleichheit der Exponenten, also $a^a = a^2$ und damit analog $a = 2$, was auch eine Lösung liefert, wie man durch Einsetzen leicht nachprüft.
Also sind $a = 1$ und $a = 2$ die beiden einzigen Lösungen.

Aufgabe 121214:
Es sind alle geordneten Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y $(x \leqslant y$)anzugeben, für die die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$ erfüllt ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es seien x und y zwei derartige positive ganze Zahlen, so dass

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} = 6\sqrt{5 \cdot 11} \qquad (1)$$

gilt. Dann folgt

$$x + y + 2\sqrt{xy} = 36 \cdot 5 \cdot 11 \qquad (2)$$

Nun sei t der größte gemeinsame Teiler von x und y; dann gilt $x = tu$ und $y = tv$, wobei u und v positive ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teller 1 sind, für die $u \leq v$ gilt.

Ferner ist wegen (2) $\sqrt{xy} = t\sqrt{uv}$ eine positive ganze Zahl, woraus wegen der Teilerfremdheit von u, v weiter $u = u_1^2, v = v_1^2$ folgt, wobei u_1 und v_1 teilerfremde positive ganze Zahlen sind, für die $u_1 \leq v_1$ gilt.
Daraus folgt wegen (2)

$$t(u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1) = t(u_1 + v_1)^2 = 36 \cdot 5 \cdot 11$$

also kann nur einer der folgenden vier Fälle vorliegen:

a) $t = 36 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 1$;
b) $t = 9 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 2$;
c) $t = 4 \cdot 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 3$;
d) $t = 5 \cdot 11$, $u_1 + v_1 = 5$.

Fall a) ist durch U_1, v_1 mit den oben angegebenen Eigenschaften nicht erfüllbar,

Fall b) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 1$ und damit $x = 495, y = 495$,

Fall c) nur durch $u_1 = 1, v_1 = 2$ und damit $x = 220, y = 880$,

Fall d) nur durch $u_1 = l, v_1 = 5$ und damit $x = 55, y = 1375$ erfüllbar.

Daher können nur diese Werte die geforderten Eigenschaften haben. Eine Probe zeigt, dass sie diese tatsächlich besitzen.

Also sind genau die folgenden geordneten Paare positiver ganzer Zahlen Lösungen der gegebenen Gleichung: $(55, 1375)$, $(220, 880)$, $(495, 495)$.

Aufgabe 261211:
Man ermittle alle Tripel $(x; y; z)$ von Zahlen mit den folgenden Eigenschaften (1), (2):

(1) Die Zahlen x, y, z sind in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende ganze Zahlen.

(2) Es gilt: $x \cdot (x + y + z) = x \cdot y \cdot z$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn $(x; y; z)$ ein Tripel mit den Eigenschaften (1) und (2) ist, dann ist nach (1)

$$x = n - 1 \qquad , \qquad y = n \qquad , \qquad z = n + 1 \tag{3}$$

mit einer ganzen Zahl n, also $x + y + z = 3n$, und aus (2) folgt

$$(n - 1) \cdot 3 \cdot n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$$
$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = 0$$

Da ein Produkt nur dann 0 sein kann, wenn ein Faktor 0 ist, folgt: $n = 0$ oder $n = 1$ oder $n = 2$. Wegen (3) können also nur die Tripel $(-1; 0; 1), (0; 1; 2), (1; 2; 3)$ die geforderten Eigenschaften.

II. Sie haben diese Eigenschaften; denn sie sind Tripel von in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgenden ganzen Zahl x,y,z und sie erfüllen die Probe in der Gleichung (2).

Aufgabe 301211:
Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \tag{1}$$
$$a + b + c + d < 11111. \tag{2}$$

Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, in einem Beispiel natürliche Zahlen a,b,c,d anzugeben und (1), (2) für die angegebenen Zahlen zu bestätigen. Ein solches Beispiel sind etwa

$$a = 37, \quad b = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429, \quad c = 7 \cdot 101 = 707, \quad d = 9901$$

wie man durch Berechnung von $a + b + c + d = 11074$ und

$$3 \cdot 37 = 111, \quad 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001, \quad 101 \cdot 9901 = 1000001$$

also

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 = 111 \cdot 1001 = 111111$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 = 111111 \cdot 1000001 = 111111111111$$

bestätigen kann.

Aufgabe 311212:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, n) positiver ganzer Zahlen a, b, n, für die folgende Aussagen (1) und (2) gelten:

(1) Die Zahlen a und b sind Primzahlen.

(2) Es gilt $97ab = (a + n)(b + n)$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn a,b,n positive ganze Zahlen sind, die (1),(2) erfüllen, so folgt:

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung und weil $a + n > 1$, $b + n > 1$ gelten, muss eine der Zahlen $a + n$, $b + n$ gleich einer der Primzahlen 97, a, b sein, die andere gleich dem Produkt der beiden übrigen Primzahlen. Hierfür gibt es nur die Fälle

1. $a + n = 97a$, $b + n = b$,
2. $a + n = 97b$, $b + n = a$,
3. $a + n = ab$, $b + n = 97$

sowie die drei durch Vertauschung von a,b entstehenden Fälle.

Fall 1. führt auf den Widerspruch $n = 0$ und scheidet daher aus.

Fall 2. führt auf $(b+n)+n = 97b$, $2n = 96b$, $n = 48b$, $a = b+n = 49b$ und damit auf einen Widerspruch zur Primzahleigenschaft von a. Also scheidet auch dieser Fall aus.

Fall 3. führt auf $a + n = a(97 - n)$, $n(a + l) = 96a$ (3)

Da a teilerfremd zu $a+1$ ist, muss n durch a teilbar sein, etwa $n = k \cdot a$ (4) mit einer positiven ganzen Zahl k. Aus (3) folgt damit $k(a + 1) = 96.$ (5)

Nun hat 96 genau die positiv-ganzzahligen Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. Von ihnen haben nur

$$3, \quad 4 \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 24, \quad 32, \quad 48$$

die Form $a + 1$ mit einer Primzahl a, nämlich jeweils mit

$$a = 2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 23, \quad 31, \quad 47$$

Hiermit führen (5),(4) und die Bedingung $b + n = 97$ jeweils auf

$$\begin{aligned} k &= 32, \quad 24, \quad 16, \quad 12, \quad 8, \quad 4, \quad 3, \quad 2 \\ n &= 64, \quad 72, \quad 80, \quad 84, \quad 88, \quad 92, \quad 93, \quad 94 \\ b &= 33, \quad 25, \quad \mathbf{17}, \quad \mathbf{13}, \quad 9, \quad \mathbf{5}, \quad ,4, \quad \mathbf{3} \end{aligned}$$

Nur für die hervorgehobenen Werte ist b Primzahl. Also können nur die Tripel

$$(5{,}17{,}80), (7{,}13{,}84), (23{,}5{,}92), (47{,}3{,}94) \tag{6}$$

sowie die durch Vertauschung von a,b entstehenden Tripel

$$(17{,}5{,}80), (13{,}7{,}84), (5{,}23{,}92), (3{,}47{,}94) \tag{7}$$

die Bedingungen (1),(2) erfüllen

II. Sie erfüllen diese Bedingungen, da 3, 5, 7, 13, 17, 23, 47 Primzahlen sind und die Gleichung (2) für jedes Tripel erfüllt ist.

Nach I. und II. sind genau die Tripel in (6) und (7) alle diejenigen Tripel positiver ganzer Zahlen, die (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 321211:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b, für die das Quadrat ihren Produkts doppelt so groß wie die Summe ihrer Quadrate ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Paar $(a; b)$ nicht-negativer ganzer Zahlen a und b die genannte Bedingung $(ab)^2 = 2(a^2 + b^2)$ erfüllt, so folgt

$$a^2(b^2 - 2) = 2b^2$$

und daraus wegen der Ganzzahligkeit von b, also $b^2 - 2 \neq 0$,

$$a^2 = \frac{2b^2}{b^2 - 2} = 2 + \frac{4}{b^2 - 2} \qquad (1)$$

Da a^2 eine ganze Zahl ist, muss $b^2 - 2$ ein Teiler von 4, d. h. eine der Zahlen $1, -1, 2, -2, 4, -4$, sein. Die Werte $1, 4, -4$ scheiden aus, da sie auf $b^2 = 3, b^2 = 6$ bzw. $b^2 = -2$ führen würden, was für kein ganzzahliges b zutrifft. Auch $b^2 - 2 = -1$ scheidet aus, da nach (1) hiermit $a^2 = -2$ folgte, was für kein a gilt.

Also kann nur $b^2 - 2 = 2$ oder $b^2 - 2 = -2$ sein, was zusammen mit (1) wegen $a \geq 0$, $b \geq 0$ auf $(a; b) = (2; 2)$ oder $(a; b) = (0; 0)$ (2) führt.

II. Die in (2) genannten Paare erfüllen die Bedingungen. Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau die in (2) genannten Paare den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II Runde 2

Aufgabe 011121:
3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden. Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist?
Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Lösung von Korinna Grabski:
Es gibt noch andere Zahlentripel, die die Bedingungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $c = b + 1$ erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 \Rightarrow a^2 = 2b + 1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad (2)$$

Aus (1) lässt sich leicht erkennen, dass a^2 und damit a eine ungerade Zahl sein muss.
Ein Tripel (a, b, c) mit den geforderten Eigenschaften kann somit schnell gefunden werden, indem man a eine ungerade Zahl zuweist und b mittels (2) berechnet.
c ist dann um 1 größer als b.
Es lässt sich also für jede beliebige ungerade natürliche Zahl a ein derartiges Tripel bestimmen.

Aufgabe 071224:
Beweisen Sie, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist. Da

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^3 + 3n + 1)^2$$

gilt, liegt $n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlichen denen von $n^2 + 3n$ und $n^2 + 3n + 1$ und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

Aufgabe 111224:
Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Es ist zu beweisen, dass keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x, y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Angenommen ein Kreis um M enthält zwei rationale Punkte P,Q. Dann liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ.

Da P,Q rationale Koordinaten haben, sind ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke und die Steigung der Mittelsenkrechten rational. Daher liegt M auf einer Gerade $y = ax + b$ mit a,$b \in \mathbb{Q}$. Aus $\sqrt{3} - a\sqrt{2} = b$ folgt $3 - 2a\sqrt{6} + 2a^2 = b^2 \Rightarrow 2a\sqrt{6} = 3 + 2a^2 - b^2$, was nicht möglich ist, da $\sqrt{6}$ irrational ist.

Falls $a = 0$, so hat $b^2 = 3$ keine rationale Lösung. Falls die Mittelsenkrechte parallel zur y-Achse ist, erhalten wir durch Vertauschen der Koordinaten analog einen Widerspruch.

Aufgabe 121221:
Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.
a) Man beweise, dass dann

$$x = u \cdot v; \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2+y^2 = z^2$ gilt, d. h. dass (x, y, z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.
b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Da u,v ungerade sind, sind $u^2 - v^2, u^2 + v^2$ gerade und somit x,y,$z \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$4x^2 + 4y^2 = 4uv + (u^2 - v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2) = 4z^2$$

und somit $x^2+y^2=z^2$. b) Aus $u>v$ folgt

$$u+v>2v \Rightarrow (u+v)^2>4v^2>2v^2 \Rightarrow 0<(u+v)^2-2v^2=u^2-v^2+2uv=2x-2y$$

Also gilt stets $y<x$.

Aufgabe 151221:
a) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass in der nach dem binomischen Lehrsatz gebildeten Entwicklung

$$(a+b)^n = c_0a^n + c_1a^{n-1}\cdot b + c_2a^{n-2}\cdot b^2 + ... + c_nb^n \qquad (1)$$

die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 die Summe $c_0+c_1+c_2=79$ haben. Gibt es solche Zahlen n, so ermittle man sie.
b) Man untersuche, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, dass aus (1) durch die Ersetzung $a=x^2, b=\frac{1}{x}$ eine Entwicklung

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n = c_0x^{k_0}+c_1x^{k_1}+c_2x^{k_2}+...+c_nx^{k_n}$$

entsteht, in der einer der Exponenten den Wert $k_i=0$ hat, d. h., in der ein von x freies Glied vorkommt. Gibt es solche Zahlen, so ermittle man sie.
b) Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, die sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen erfüllen.

Lösung von ochen:
a) Für festes n gilt $c_0=\binom{n}{0}=1$, $c_1=\binom{n}{1}=n$ und $c_2=\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$. Es ist also die Gleichung

$$1+n+\frac{1}{2}n(n-1)=79$$

zu lösen. Nach der Multiplikation mit 2 und der Subtraktion von 79 erhalten wir die quadratische Gleichung

$$n^2+n+156=0.$$

Diese lässt sich mit der *pq*-Formel lösen und wir erhalten die Lösungen

$$n_1=12, \quad n_2=-13.$$

Offenbar ist hier nur $n=12$ sinnvoll. Dies ist die einzige Zahl, die die in a) gegebene Bedingung erfüllt.

b) Das Monom x^0 entsteht, wenn es eine Zahl k gibt, so dass k mal x^2 und $n-k$ mal $\frac{1}{x}$ mit einander multipliziert werden und

$$2k+(-1)(n-k)=0 \quad (2)$$

ist. Da keine Summanden negativ eingehen, kann es auch nicht wieder verschwinden. Gleichung (2) ist also auch die einzige Bedingung, der n genügen muss. Außerdem ist sie äquivalent zu $n=3k$. Es muss also n durch 3 teilbar sein.

c) Es erfüllt 12 als einzige natürliche Zahl sowohl die in a) als auch die in b) angegebenen Bedingungen.

Aufgabe 171223:
Es sind alle ganzen Zahlen x zu ermitteln, für die

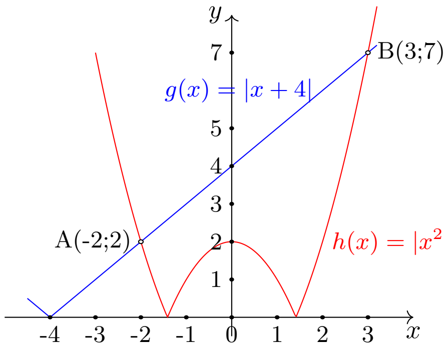
$$f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2-2}$$

ganzzahlig ist.

Lösung von Steffen Polster:
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, d. h. auch $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ oder $x + 4 = 0$ gilt. Die Gleichung $|x + 4| = |x^2 - 2|$ hat ihre Lösungen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.
Man kann sich überlegen, dass nur im Intervall $[-2; 3]$ die Beziehung $|x + 4| \geq |x^2 - 2|$ gilt, wie auch durch folgende Grafik verdeutlicht wird:



Eine zusätzliche Möglichkeit für ein ganzzahligen Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ergibt sich für $x = -4$, da durch ein Zähler $= 0$ der ganze Bruch 0 wird (Nenner wird nicht 0).
Da x ganzzahlig sein soll, verbleiben für x nur die Möglichkeiten $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Einsetzen von x in die Ausgangsfunktion ergibt

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-4	3	-2	4	-1	0	0	1
1	-2	2	6	3	4		

Da in jedem Fall $f(x)$ ganzzahlig ist, ist die gesuchte Lösungsmenge $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Durch Polynomdivision erhält man

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = 3 + \frac{x + 4}{x^2 - 2}$$

Damit kann $f(x)$ nur ganzzahlig sein, wenn der Bruch $\frac{x+4}{x^2-2}$ ganzzahlig ist, also $x^2 - 2$ ein Teiler von $x + 4$ ist. Damit ist $x^2 - 2$ auch ein Teiler von $(x+4)(x-4) = x^2 - 16$ und damit auch von $x^2 - 16 - (x^2 - 2) = 14$.

Wegen $x^2 \geq 0$ ist $x^2 - 2 \geq -2$, sodass, da 14 genau die ganzzahligen Teiler ± 1, ± 2, ± 7 und ± 14 besitzt, $x^2 - 2 \in \{-2, -1, 1, 2, 7, 14\}$ bzw. $x^2 \in \{0, 1, 3, 4, 9, 16\}$, also $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$ gilt.
Für alle diese Werte, bis auf $x = 4$, zeigt die Probe, dass $f(x)$ tatsächlich auch eine ganze Zahl ist, sodass genau für diejenigen ganzen Zahlen x mit $-4 \leq x \leq 3$ der Funktionswert $f(x)$ auch eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 241223:
Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ gibt, so dass für

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ so, dass für $p(x)$ sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gelten würde. Dann müsste

$$p(7) - p(3) = a_n(7^n - 3^n) + a_{n-1}(7^{n-1} - 3^{n-1}) + ... + a_1(7 - 3)$$

gelten. Da für beliebige reelle Zahlen a und b und beliebiger natürlicher Zahlen k die Beziehung

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

gilt, müsste $p(7) - p(3)$ durch $7 - 3 = 4$ teilbar sein.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass andererseits $p(7) - p(3) = 1$ ist und 1 nicht durch 4 teilbar ist. Es gibt also keine natürliche Zahl n und keine ganzen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n$ mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 261222:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (p, q, r) von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllen:
(1) In der Folge aller Primzahlen sind p, q, r in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende Primzahlen.
(2) Die Zahl $s = p^2 + q^2 + r^2$ ist eine Primzahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn p, q, r ein Tripel ist, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt (p, q, r) ist nicht das Tripel $(2, 3, 5)$; denn dieses erfüllt wegen $2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$ nicht die Bedingung (2).
Ferner folgt:
(p, q, r) ist kein Tripel mit $p > 3$ (also auch $q > 3$, $r > 3$); denn jede Primzahl, die größer als 3 ist, lässt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2, ihr Quadrat lässt also in beiden Fällen den Rest 1.
Für jedes Tripel (p, q, r) von Primzahlen $p, q, r > 3$ ist somit $p^2 + q^2 + r^2$ durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.
Nach (1) verbleibt daher nur die Möglichkeit, dass p, q, r das Tripel $(3, 5, 7)$ ist.

II. Dieses Tripel erfüllt als Tripel dreier aufeinanderfolgender Primzahlen die Bedingung (1), und wegen $3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$ auch die Bedingung (2).
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das Tripel $(3, 5, 7)$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

III Runde 3

Aufgabe 041235:
Gibt es eine natürliche Zahl z, die auf zwei verschiedene Weisen in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind und $x \leq y$ ist?

Lösung von Kornkreis:
Angenommen, $z = x! + y! = a! + b!$ mit $a \neq 0$ und $x \neq a \leq b$. Aufgrund der gleichen Gestalt beider Gleichungen kann man o. B. d. A. $a < x$ wählen.
Ausklammern liefert

$$z = x!(1 + \frac{y!}{x!}) = a!(1 + \frac{b!}{a!})$$

Division beider Gleichungen ergibt

$$1 = \frac{(a+1)\cdots x(1 + \frac{y!}{x!})}{(1 + \frac{b!}{a!})}$$

Der Quotient kann aber nicht 1 sein, da keiner der Primfaktoren von $a+1$ im Divisor $1+\frac{b!}{a!} = 1+(a+1)\cdots b$ enthalten ist (beachte, dass wegen $a < x$ auch $a < b$ gelten muss).
Damit kann es keine solche zweite Darstellung von z als Summe zweier Fakultäten geben.

Aufgabe 111232:
Man beweise, dass die Gleichung $4^x + 6^x = 9^x$ keine rationalen Lösungen besitzt.

Lösung von weird:
Diese Gleichung lässt sich nach Division durch 9^x auch schreiben als

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 1 = 0$$

d. h., $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $u^2 + u - 1 = 0$, woraus sich unmittelbar die sehr viel einfachere Gleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ergibt. Diese hat auf jeden Fall eine eindeutig bestimmte reelle Lösung $\tilde{x} > 0$. Wäre $\tilde{x}$ rational, also $\tilde{x} = \frac{r}{s}$ für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$, so würde daraus unmittelbar

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{r} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{s}$$

und weiter

$$2^{r+s} = 3^r(\sqrt{5}-1)^s$$

folgen. (Anmerkung siehe unten)

Diese letzte Gleichung kann aber nicht gelten, da deren rechte Seite in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ offensichtlich durch 3 teilbar ist, die linke Seite aber nicht, was den geforderten Widerspruch ergibt.

Aufgabe 191235:
Man beweise:
Es gibt keine positiven ganzen Zahlen p und q mit der Eigenschaft

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}$$

Lösung von svrc:
Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1:

Sei $p \geq q$. Dann gilt

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} > \frac{6}{9} > \frac{3\cdot\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

was den Voraussetzungen widerspricht.

Fall 2:

Sei $p < q$. Dann gilt

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$

Multiplikation mit $9 \cdot \sqrt{3} \cdot q^2$ liefert

$$9\cdot\sqrt{3}\cdot p\cdot q - \sqrt{3} < 9\cdot q^2 < 9\cdot\sqrt{3}\cdot p\cdot q + \sqrt{3}$$

und somit
$$\sqrt{3} \cdot (9pq - 1) < 9q^2 < \sqrt{3} \cdot (9pq + 1)\,.$$
Quadrieren gibt
$$3 \cdot (9pq - 1)^2 < 81q^4 < 3 \cdot (9pq + 1)^2\,.$$
Division durch 3 ergibt
$$(9pq - 1)^2 < 27q^4 < (9pq + 1)^2\,.$$
Division durch $9q^2$ liefert
$$\left(3p - \frac{1}{3q}\right)^2 < 3q^2 < \left(3p + \frac{1}{3q}\right)^2.$$
Ausmultiplizieren führt zu
$$9p^2 - 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2} < 3q^2 < 9p^2 + 2\frac{p}{q} + \frac{1}{9q^2}.$$
Wegen $p < q$ gilt
$$9p^2 - 2 < 3q^2 < 9p^2 + 3.$$
Somit muss
$$3q^2 = s$$
mit
$$s \in \left\{9p^2 - 1, 9p^2, 9p^2 + 1, 9p^2 + 2\right\}$$
sein.

Fall 2.1:
Falls $3q^2 = 9p^2 - 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{~mod}\,3 = 0 \mathbf{~mod}\,3$ und $9p^2 - 1 \mathbf{~mod}\,3 = 2 \mathbf{~mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.2:
Falls $3q^2 = 9p^2$ ist, muss $p = \dfrac{q}{\sqrt{3}}$ und somit $p \notin \mathbb{N}$ sein. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

Fall 2.3:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 1$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{~mod}\,3 = 0 \mathbf{~mod}\,3$ und $9p^2 + 1 \mathbf{~mod}\,3 = 1 \mathbf{~mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall 2.4:
Falls $3q^2 = 9p^2 + 2$ gilt, betrachten wir diese Gleichung $\mathbf{mod}\,3$. Wegen $3q^2 \mathbf{~mod}\,3 = 0 \mathbf{~mod}\,3$ und $9p^2 + 2 \mathbf{~mod}\,3 = 2 \mathbf{~mod}\,3$ kann dieser Fall nicht eintreten.

Somit widerspricht auch Fall 2 den Voraussetzungen. Insgesamt kann gefolgert werden, dass es keine positiven ganzen Zahlen p und q geben kann, welche die vorausgesetzten Eigenschaften erfüllen.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Man betrachte zunächst nur die linke Hälfte der Ungleichung:
$$\frac{p}{q} - \frac{1}{9q^2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$
Analog dazu aus der rechten Hälfte:
$$p > \frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q}$$
Wir führen das wieder zusammen und quadrieren:
$$\frac{q}{\sqrt{3}} - \frac{1}{9q} < p < \frac{q}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9q}$$

$$\frac{1}{3}q^2 - \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2} < p^2 < \frac{1}{3}q^2 + \frac{2}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{81q^2}$$

Noch mit 3 multiplizieren:

$$q^2 - \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2} < 3p^2 < q^2 + \frac{2}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{27q^2}$$

Da $\frac{2}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{9} \cdot 1.8 = 0.4$ und $\frac{1}{27q^2} \leq \frac{1}{27} < 0.04$ ist, kann man daraus ableiten, dass

$$q^2 - 1 < 3p^2 < q^2 + 1$$

sein muss. Daraus folgt aber direkt $q^2 = 3p^2$ bzw.

$$q = \sqrt{3}\, p$$

was aufgrund der Irrationalität von $\sqrt{3}$ nicht möglich ist.

Aufgabe 201234:
Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4} + \frac{k}{2(k-4)} + \frac{k+4}{x} = 0$$

lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

Lösung von cyrix:
Sei k eine ganze Zahl, für die die angegebene Gleichung eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt. Insbesondere ist dann $x \neq 0$, da sonst der dritte Summand nicht definiert wäre. Nach Multiplikation mit $2(k-4) \cdot x$ erhalten wir die Gleichung

$$2x^2 + kx + 2k^2 - 32) = 0 \text{ bzw. } x^2 + \frac{k}{2} + k^2 - 16 = 0,$$

welche die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - k^2 + 16} = \frac{1}{4} \cdot (-k \pm \sqrt{256 - 15k^2})$$

besitzt. Insbesondere muss also die Wurzel $\sqrt{256 - 15k^2}$ existieren und rational sein, was auf $|k| \leq 4$ führt. Weiterhin ist die Summe beider Lösungen gleich $-\frac{k}{2}$, sodass, wenn alle Lösungen ganzzahlig sind, es dieser Term auch sein muss, also k eine gerade Zahl ist. Es verbleibt damit $k \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$. Die Probe bestätigt, dass in all diesen Fällen jeweils zwei reelle Lösungen, die beide auch ganzzahlig sind, existieren.

Aufgabe 201235:
Man beweise, dass für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es reicht die Aussage für $n = 1$ zu zeigen, da jedes regelmäßige $3n$-Eck ein gleichseitiges Dreieck enthält.

Angenommen ein gleichseitiges Dreieck ABC habe zwei rationale Koordinatenpunkte. Dann können wir dieses verschieben, so dass A im Ursprung liegt und B die Koordinaten (x,y) mit $x,y \in \mathbb{Q}$ hat. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist durch $\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. Daher hat C die Koordinaten

$$\frac{1}{2}(x,y) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(-y,x) = (\frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{1}{2}y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x) \ .$$

Mindestens eine der Koordinaten von B ist von null verschieden. Für $y \neq 0$ sei $z := \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y \iff \frac{2z-x}{y} = \mp\sqrt{3}$, was ein Widerspruch ist, falls $z \in \mathbb{Q}$. Für $x \neq 0$ ergibt die zweite Koordinate ebenfalls einen Widerspruch.

Aufgabe 231235:
Man ermittle alle Paare $(a;b)$ von Primzahlen a und b für die gilt:

$$3a^2 + a = b^2 + b$$

Lösung von weird:
Wir halten zunächst fest, dass gilt

$$2a^2 = b^2 + b - a^2 - a = (b-a)(b+a+1) \quad (*)$$

und hier nicht $b - a = 1$ sein kann, da daraus wegen der Primzahleigenschaft von a und b sofort $a = 2$ und $b = 3$ folgen würde, was aber keine Lösung unserer Gleichung hier ist. Es kann aber auch nicht $a|b-a$ gelten, da aus $b = ka$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$ sofort $b = (k+1)a$ folgen würde, wieder im Widerspruch zur Primalität von b. Es muss daher $b - a = 2$, d. h., $b = a + 2$ sein. Einsetzen in (*) führt dann zunächst auf

$$2a^2 = 2(2a+3)$$

und nach einer einfachen Umformung weiter auf

$$(a-1)^2 = 4$$

Wegen $a > 1$ muss also dann $a = 3$ und damit $b = a + 2 = 5$ gelten, was dann tatsächlich als einziges Paar von Primzahlen die Aufgabe hier löst.

Aufgabe 241235:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver natürlicher Zahlen, für die $a^b + b^c = abc$ gilt.

Lösung von weird:
Wir beginnen mit zwei einfachen Hilfssätzen.

Lemma 1:

$$\forall a \geq 2 \ \forall b \geq 4 : \quad a^b \geq a^2 b$$

Beweis: Offenbar genügt es dafür

$$\forall b \geq 4 : \quad 2^{b-2} \geq b$$

einfach zu zeigen. Dies ist aber für $b = 4$ trivialerweise erfüllt und falls es für ein $b \geq 4$ gilt, dann wegen

$$2^{(b+1)-2} = 2 * 2^{b-2} \geq 2b > b + 1$$

auch für $b + 1$, q. e. d.

Lemma 2:
$$\forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad b^c > bc^2$$
Beweis: Auch das lässt sich sofort wieder auf die einfachere Behauptung
$$\forall c \geq 3: \quad 4^{c-1} > c^2$$
zurückführen, welche wir wieder mit Induktion beweisen. Dabei kann die Gültigkeit der Behauptung für $c = 3$ sofort direkt nachgerechnet werden kann und aus der Gültigkeit für ein $c \geq 3$ folgt sofort auch ihr Gültigkeit für $c + 1$:
$$4^c = 4 \cdot 4^{c-1} > (2c)^2 > (c+1)^2$$
q. e. d.

Damit folgt nun aus der bekannten Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel sofort, dass es unter den Voraussetzungen der beiden obigen Hilfssätze keine Lösung der Gleichung in der Aufgabe geben kann:
$$\forall a \geq 2\ \forall b \geq 4\ \forall c \geq 3: \quad a^b + b^c > 2\sqrt{(a^2b)(bc^2)} = 2abc > abc \quad (*)$$
Wir müssen also nur die durch (*) noch nicht abgedeckten Tripel (a,b,c) überprüfen, was dann schließlich auf die folgenden fünf Lösungen der Aufgabe hier führt:
$$(a,b,c) \in \{(1,1,2),(2,2,2),(2,2,3),(4,2,3),(4,2,4)\}$$

Aufgabe 251233A:
Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele 5-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ von positiven ganzen Zahlen gibt, für die die folgende Gleichung (1) erfüllt ist:
$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = x_5^{13} \qquad (1)$$

Lösung von cyrix:
Wir definieren $p := 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Dann ist einerseits p durch 3, 5 , 7 und 11 teilbar, also $\frac{p}{3}, \frac{p}{5}, \frac{p}{7}, \frac{p}{11} \in \mathbb{N}$ und andererseits $p \equiv 2 \cdot 7 \cdot (-2) \equiv 2 \cdot (-14) \equiv 2 \cdot (-1) \equiv -2 \pmod{13}$, also $\frac{p+2}{13} \in \mathbb{N}$.
Für jede positive ganze Zahl k ist mit $x_1 := 2^{\frac{p+13kp}{3}}$, $x_2 := 2^{\frac{p+13kp}{5}}$, $x_3 := 2^{\frac{p+13kp}{7}}$, $x_4 := 2^{\frac{p+13kp}{11}}$ und $x_5 := 2^{\frac{p+2}{13}+kp}$
$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^{11} = 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} + 2^{p+13kp} = 2^{2+p+13kp} = \left(2^{\frac{p+2}{13}+kp}\right)^{13} = x_5^{13}$$
Damit gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 271235:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die folgende Gleichung (1) erfüllen:
$$1243 \cdot (1 + yz) = 65 \cdot (xyz + x + z) \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn x,y,z ganze Zahlen sind, die (1) erfüllen, so folgt:
Da 1243 zu 65 teilerfremd istm mit $1 + yz$ durch 65 teilbar sein, d. h., eine ganze Zahl k mit
$$1 + yz = 65 \cdot k \qquad (2)$$
muss existieren, Aus (1) folgt damit
$$65 \cdot (xyz + x + z) = 1243 \cdot 65 \cdot k \qquad \text{also} \qquad (1 + yz) \cdot x + z = 1243 \cdot k$$

Mit (2) ergibt das $65kx + z = 1243k$ also

$$z = (1243 - 65 \cdot x) \cdot k \tag{3}$$

Setzt man dies in die aus (2) folgende Gleichung $65k - yz = 1$, so folgt

$$(65 - y(1243 - 65 \cdot x)) \cdot k = 1$$

Dies kann wegen der Ganzzahligkeit der Faktoren nur mit

$$65 - y(1243 - 65 \cdot x) = k = \pm 1 \tag{4}$$

erfüllt werden. Somit gilt

$$y(1243 + 65 \cdot x) = 64 \qquad \text{oder} \qquad y(1243 + 65 \cdot x) = 66 \tag{5}$$

d. h., es ist $1243 - 65x$ Teiler von 64 oder 66. (6)
Daraus folgt insbesondere

$$-66 \leq 1243 - 65 \cdot x \leq 66 \quad \Rightarrow \quad 1177 \leq 65 \cdot x \Rightarrow 66 \quad \Rightarrow x = 19 \quad \text{oder} \quad x = 20$$

$$1243 - 65 \cdot x = 8 \qquad \text{oder} \qquad 1243 - 65 \cdot x = -57 \tag{7}$$

Die Bedingungen (6) und (7) werden nur von $1243 - 65 \cdot x = 8$, also $x = 19$ erfüllt, wegen (5) zusammen mit $y = 8$, wonach (4) auf $k = 1$ und daher (3) auf $z = 8$ führt.
Also kann unter allen Tripeln ganzer Zahlen nur

$$(x,y,z) = (19,8,8) \tag{8}$$

die Gleichung (1) erfüllen.
II. Wie aus $1243(1 + 8 \cdot 8) = 1243 \cdot 65 = 65 \cdot (19 \cdot 8 \cdot 8 + 19 + 8)$ ersichtlich ist, erfüllt es diese Gleichung.
Mit I. und II. ist gezeigt, dass genau das in (8) genannte Tripel die Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 321231:
Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.
Hinweis:
Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist also $n \in \mathbb{N}$.
Wenn $q := \sqrt{n} + \sqrt{n+4} \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $q^2 \in \mathbb{Q}$. Nun ist $q^2 = n + n + 4 + 2\sqrt{n^2 + 4n}$, also ist auch $\sqrt{n^2 + 4n} \in \mathbb{Q}$. Somit ist $n^2 + 4n$ eine Quadratzahl.
Das kleinstmögliche Quadrat wäre $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Es ist aber $2n + 1 < 4n \, \forall n \in \mathbb{N}$.
Das nächstgrößere Quadrat wäre $(n+2)^2 = n^2+4n+4 > n^2+4n$. Somit ist $\sqrt{n}+\sqrt{n+4} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$.

IV Runde 4

Aufgabe 041245:
Ermitteln Sie alle Ziffertripel (x, y, z) mit $x, y, z \neq 0$, mit denen

$$\sqrt{(xxx...x) - (yyy...y)} = (zzz...z) \qquad (1)$$

$(xxx...x)$: $2n$ Ziffern; $(yyy...y)$: n Ziffern; $(zzz...z)$: n Ziffern
für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist!
Geben Sie sodann alle Zahlen n an, für die (1) mit den ermittelten Tripeln gilt!

Lösung von Rainer Müller:
Da wir nur mit positiven Zahlen rechnen, können wir beide Seiten von (1) quadrieren:

$$(1) \Leftrightarrow (xxx...x) - (yyy...y) = (zzz...z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(10^{2n}-1)x - \frac{1}{9}(10^n-1)y = \left(\frac{1}{9}(10^n-1)z\right)^2 \Leftrightarrow (10^n+1)x - y = \frac{1}{9}(10^n-1)z^2 \qquad (2)$$

Im Sonderfall $n = 1$ wird (2) zu $11x = z^2 + y$, und durch Einsetzen findet man, dass es zu jeder Ziffer $z > 1$ genau ein y gibt, so dass die rechte Seite durch 11 teilbar ist.
Für $n \geq 2$ betrachten wir (2) modulo 100 (beachte $\frac{1}{9}(10^n-1) = 111...11 \equiv 11$)1.

$$x - y = 11z^2 \qquad (3)$$

Für $z = 1, 2, ..., 9$ ist $11z^2$ modulo 100 gleich $11, 44, 99, 76, 75, 96, 39, 4, 91$. $x - y$ kann aber nur die Werte $0, ..., 8$ oder $92, ..., 99$ annehmen.
Also sind nur Lösungen mit $z = 3, z = 6$ oder $z = 8$ möglich. $x - y$ muss dann gleich $-1, -4$ bzw. $+4$ sein (nicht nur modulo 100). Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, prüfen wir durch Einsetzen in (2).

- $z = 3, y = x + 1$ liefert $10^n x = 10^n$, also $x = 1$, d. h. $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 6, y = x + 4$ liefert $10^n x = 10^n \cdot 4$, also $x = 4$, d. h. $(x, y, z) = (4, 8, 6)$ ist eine Lösung für alle n.
- $z = 8, y = x - 4$ führt auf $10^n x = \frac{1}{9}(10^n - 1) \cdot 64 - 4$, was äquivalent zu $9 \cdot 10^n x = 64 \cdot 10^n - 100$ ist. Für $n \geq 3$ ist diese Gleichung nicht erfüllbar (wie man modulo 1000 sieht), für $n = 2$ wird die Gleichung zu $9x = 63$, also ist $(x, y, z) = (7, 3, 8)$ eine zusätzliche Lösung für $n = 2$.

Die folgende Tabelle enthält alle Lösungsquadrupel (n, x, y, z). Die 2. und die 5. Zeile sind eigentlich überflüssig, da es Spezialfälle der beiden letzten Zeilen sind, und wurden nur zur Nachvollziehbarkeit der Herleitung aufgenommen.

n	x	y	z	n	x	y	z	n	x	y	z
1	1	7	2	1	1	2	3	1	2	6	4
1	3	8	5	1	4	8	6	1	5	6	7
1	6	2	8	1	8	7	9	2	7	3	8
bel.	1	2	3	bel.	4	8	6				

Aus dieser Tabelle aller Lösungen von (1) ist auch die Antwort auf die Aufgabenstellung zu entnehmen: Die einzigen Tripel (x, y, z), die Lösung von (1) für mindestens zwei verschiedene n sind, sind $(1, 2, 3)$ und $(4, 8, 6)$.
Für diese Tripel gilt (1) für alle positiven natürlichen Zahlen n.

Aufgabe 121242:
Es sind alle Paare (x, y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung erfüllt ist:

$$x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$$

Lösung von Kornkreis:
Mit $x = z - 4$ wird die Gleichung handlicher:

$$(z - 4)(z - 3)(z + 3)(z + 4) = y^2 \qquad \text{bzw.}$$
$$(z^2 - 16)(z^2 - 9) = z^4 - 25z^2 + 144 = (z^2 - 12)^2 - z^2 = y^2$$

Aus der letzten Gleichung $(z^2 - 12)^2 - z^2 = y^2$ wird ersichtlich, dass für ein Paar (z,y), das die Gleichung erfüllt, zum einen

$$(z^2 - 12)^2 > y^2$$

gilt (für $z \neq 0$), aber auch

$$(z^2-13)^2 = z^4 - 26z^2 + 169 < z^4 - 24z^2 + 144 - z^2 = y^2$$

für $z^2 > 25$. Dies bedeutet, dass $(z^2-12)^2 - z^2$ echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt und daher nicht gleich einer Quadratzahl y^2 sein kann. Folglich muss man nur die Fälle für $z^2 \leq 25$ prüfen.
Man sieht schnell, dass genau $z \in \{-5,-4,-3,0,3,4,5\}$ eine Quadratzahl liefert. Die Lösung der Aufgabe lautet also $(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-8,0),(-7,0),(-4,\pm 12),(-1,0)(0,0),(1,\pm 12)\}$.

Alternativ-Lösung von weird:
Ich gehe dazu mit $z = x+4$ ebenfalls von der Gleichung

$$(z^2-16)(z^2-9) = z^4 - 25z^2 - 144 = y^2$$

aus, welche sich nach einer einfachen Umformung auch schreiben lässt als

$$\left(z^2 - \frac{25}{2}\right)^2 = \frac{(2y)^2+49}{4} \qquad (*)$$

Damit haben wir nur mehr die einfache Frage zu beantworten, für welche Werte von y der Term $(2y)^2+49$ eine Quadratzahl ist. Wir müssen dazu nur zwei Fälle betrachten:
1. Fall: $y = 0$
Einsetzen in (*) ergibt dann $z \in \{\pm 3, \pm 4\}$, also dann die Lösungen

$$(x,y) \in \{(-8,0),(-7,0),(-1,0),(0,0)\}$$

2. Fall: $y \neq 0$
Ist dann $(2y)^2+49 = u^2$ für ein $u \in \mathbb{N}^*$, so ist $(2|y|,7,u)$ ein primitives pythagoräisches Zahlentripel, d. h., es muss

$$rs = |y|,\ r^2 - s^2 = 7,\ r^2 + s^2 = u$$

für gewisse $r,s \in \mathbb{N}^*$ gelten, wobei offensichtlich $r \leq 4$ sein muss. Tatsächlich ist $r = 4$, $s = 3$ die einzige Lösung von $r^2 - s^2 = 7$ in natürlichen Zahlen. Daraus folgt sofort $y = \pm 12$, sowie $z \in \{0, \pm 5\}$, was dann auf die restlichen 6 Lösungen

$$(x,y) \in \{(-9,\pm 12),(-4,\pm 12),(1,\pm 12)\}$$

hier führt.

Aufgabe 161245:
Man ermittle die Anzahl aller Paare (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ und der Eigenschaft, dass die Gleichung $x^5 + px + q = 0$ mindestens eine rationale Lösung hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für ein Paar (p,q) natürlicher Zahlen mit $1 \leq p \leq 100$ und $1 \leq q \leq 100$ sei x eine rationale Lösung der Gleichung $x^5 + px + q = 0$.
Wegen $p \geq 1$, $q \geq 1$ gilt dann $x = -\frac{a}{b} < 0$, wobei a,b teilerfremde Zahlen mit $a \neq 0, b \neq 0$ sind. Es gilt also

$$-\frac{a^5}{b^5} - p\frac{a}{b} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad qb^5 = pab^4 + a^5$$

Daher gilt $b|a^5$, also $b = 1$, da a und b teilerfremd sind. Daraus ergibt sich:

$$q = pa + a^5 \quad \Rightarrow \quad q = a(p + a^4)$$

Wegen $p,q,a \geq 1$ und $q \leq 100$ gilt daher $1 \leq a < 3$, also $a = 1$ oder $a = 2$.

1. Im Falle $a = 1$ erhält man $q = p + 1$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 99$, d. h., es gibt in diesem Falle nur 99 Paare $(p, p + 1)$ $(p = 1,2,...,99)$, die die geforderte Eigenschaft haben können.

2. Im Falle $a = 2$ erhält man $q = 2p + 32$.
Wegen $q \leq 100$ gilt $p \leq 34$, d. h., es gibt in diesem Falle nur 34 Paare $(p, 2 + +32)$ $(p = 1,2,...,34)$, die die geforderte Eigenschaft haben können.

Die angegebenen $99 + 34 = 133$ Paare sind wegen $p + 1 < 2p + 32$ sämtlich voneinander verschieden. Ferner haben sie die geforderte Eigenschaft; denn es gilt
im Falle 1: $x = -\frac{a}{b} = -1$, also $x^5 + px + (p + 1) = 0$ und
im Falle 2: $x = -\frac{a}{b} = -2$, also $x5 + px + (2p + 32) = 0$.
Daher gibt es genau 133 Paare (p,q) mit der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 191244:
Man beweise, dass für keine natürlichen Zahlen n, m, b mit $n \geq 2$, $m \geq 2$ und $(2n)^{2n} - 1 = b^m \quad (1)$ gilt!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Aus der Annahme der Existenz natürlicher Zahlen $n \geq 1$, $m \geq 2$ und b die der Gleichung (1) genüge, ergibt sich wegen $n \geq 1$ nach einer binomischen Formel

$$(2n)^{2n} - 1 = ((2n)^n - 1)((2n)^n + 1) = b^m$$

wobei $(2n)^n - 1$ und $(2n)^n + 1$ teilerfremd sind, da es sich um aufeinanderfolgende ungerade Zahlen handelt. Demzufolge muss jeder Primfaktor von $(2n)^n - 1$ und jeder Primfaktor von $(2n)^n + 1$ in den entsprechenden Primzerlegungen in einer Anzahl auftreten, die ein natürliches Vielfaches von m ist. Das bedeutet, es gibt natürliche Zahlen h und k mit

$$(2n)^n - 1 = h^m \qquad ; \qquad (2n)^n + 1 = k^m \qquad (*)$$

Damit erhält man unter Beachtung von $m \geq 2$

$$2 = k^m - h^n = (k - h) \sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i$$

Andererseits gilt aber mit $n \geq 1$ und (*)

$$k^m > k^h \geq (2 \cdot 1)^1 - 1 = 1$$

also $k > h \geq 1$, woraus sich $k - h \geq 1$ und

$$\sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i = k^{m-1} + k^{m-2}h + ... + h^{m-1} > mh^{m-1} \geq 2$$

ergibt. Das liefert aber den Widerspruch

$$2 = (k - h) \sum_{i=0}^{m-1} k^{m-1-i} \cdot h^i > 1 \cdot 2$$

Damit kann die oben gemachte Annahme nicht zutreffen.

Aufgabe 291243:
Man beweise:
Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

Lösung von Monika Noack:
Als ein möglicher Versuch, aus dem in den beiden Gleichungen zwischen den Zahlen a, b, c und d gespeicherten Wissen, Hinweise über das gesuchte pythagoreische Zahlentripel zu erhalten, kann das Quadrieren der Gleichung $a + b = c - d$ dienen. Man erhält:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

woraus unter Nutzung der Identitäten $c = a + b + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$ die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bd + d^2 \qquad \text{also}$$

$$(a + b)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2$$

folgt, d. h. mit den Maßzahlen $u = a + d$, $v = b + d$ und $w = a + b$ sind (positiv-ganzzahlige) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden. Für den Flächeninhalt A dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$A = \frac{1}{2} u \cdot v = \frac{1}{2}(a + d)(b + d) = \frac{1}{2}(ab + d(a + b + d)) = \frac{1}{2}(ab + cd),$$

d. h. $A = a \cdot b$. Also ist mit dem Zahlentripel $a + d$, $b + d$ und $a + b$ die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 291244:
Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17 \qquad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9 \qquad (2)$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
I. Wenn für ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen das System (1), (2) gilt, so folgt

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61$$
$$16(3x + 1)^2 + 3(8y - 9)^2 = 3187 \qquad (3)$$
$$0 < (3x + 1)^2 \leq 199, \quad 0 < x \leq 4$$

Bei $x = 1; 2; 4$ ergibt sich für y keine natürliche Zahl. Für $x = 3$ folgt (aus (3)) $y = 4$ und (aus (2)) $z = 6$.
Somit kann nur das Tripel $(3, 4, 6)$ aus natürlichen Zahlen bestehen und (1), (2) erfüllen.
Die Probe zeigt, dass dieses Tripel (1), (2) erfüllt.

Aufgabe 331246B:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ ganzer, nicht negativer Zahlen m, n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.

Lösung von weird:
Bei einem festgehaltenem Wert von $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $2^m - 5^n = 7$ genau eine reelle Lösung $m \in \mathbb{R}$, nämlich

$$m = \log_2(5^n + 7)$$

und genau dann, wenn dieser Wert von m sogar ganzzahlig ist, ist (m,n) dann auch eine Lösung unserer Aufgabe. In dieser Weise kann man zu den Werten $n = 0,1,2$ die Lösungen, soweit solche existieren, leicht bestimmen und erhält so einmal die 2 Lösungen

$$(m,n) \in \{(3,0),(5,2)\}$$

Unser Ziel ist es im Folgenden zu zeigen, dass diese auch schon die einzigen Lösungen hier sind, d. h., dass sich für die Annahme $n > 2$ (und damit auch $m > 5$), welche wir ab nun voraussetzen, ein Widerspruch zur Lösbarkeit der Gleichung ergibt.

Dazu formen wir die Ausgangsgleichung zunächst um zu

$$2^5(2^{m-5} - 1) = 5^2(5^{n-2} - 1) \quad (*)$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, dass

$$25 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 2^{m-5} \equiv 1 \pmod{25}$$

gilt. Da nun, wie man leicht nachrechnet, die Folge der Zweierpotenzen modulo 25 die Periode 20 hat, muss also schon mal die einschränkende Beziehung

$$m \equiv 5 \pmod{20}$$

gelten. Darüber hinaus muss aber auch

$$m \not\equiv 5 \pmod{100} \quad (**)$$

gelten, da sonst die linke Seite von (*) sogar durch 125 teilbar wäre, die rechte aber nicht. Mit einer ähnlichen Schlussweise sieht man, dass aus

$$32 \mid 5^{n-2} - 1 \quad \text{bzw.} \quad 5^{n-2} \equiv 1 \pmod{32}$$

und der Tatsache, die Folge der Potenzen 5^k modulo 32, $k = 0,1,2,\ldots$ die Periode 8 hat, folgt, dass

$$n \equiv 2 \pmod{8}$$

gelten muss. Wegen

$$2^{20} - 1 \mid 2^{m-5} - 1 \quad \text{und} \quad 2^{20} \equiv 1 \pmod{31}$$

besitzt der Ausdruck $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) jedenfalls ebenfalls den Primfaktor 31 und indem wir ähnlich wie oben wieder die Folge der Reste von 5^k, $k = 0,1,2,\ldots$ modulo 31 betrachten, welche sich mit einer Periode von 3 wiederholen, können wir insgesamt sogar schließen, dass $n - 2$ sogar durch 24 $(= 3 \cdot 8)$ teilbar sein muss. Nun gilt aber

$$5^{24} \equiv 1 \pmod{601}$$

für die Primzahl 601, sodass dann auch der Faktor $5^{n-2} - 1$ auf der rechten Seite von (*) und damit auch der Faktor $2^{m-5} - 1$ auf dessen linker Seite diesen Primfaktor haben müssen. Die Folge der Reste $2^k \pmod{601}$, $k = 0,1,2,\ldots$ hat aber nun die Periode 25, d. h., es muss

$$m \equiv 5 \pmod{25}$$

gelten, woraus in Verbindung mit der schon bewiesenen Beziehung $m \equiv 5 \pmod{20}$ nun endgültig

$$m \equiv 5 \pmod{100}$$

folgt, im klaren Widerspruch zu (**), q. e. d.

Aufgabe 341245:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen x,y, für die gilt:

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$$

Lösung von weird:
Wegen

$$8x^2 - 6x + 8 = 8\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{55}{8}$$

gilt zunächst

$$y^3 \geq x^3 + \frac{55}{8}$$

woraus in Verbindung mit $x,y \in \mathbb{N}$ und der Tatsache, dass wegen

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) = 8x^2 - 6x + 8$$

x und y die gleiche Parität haben müssen, dann auch sofort

$$y \geq x + 2$$

folgt. Hier gilt aber dann sogar das Gleichheitszeichen, denn wäre $y = x + k$ für ein $k \geq 3$, so könnte wegen

$$\forall x \in \mathbb{N}: \; y^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2 + k^3 > x^3 + 8x^2 - 6x + 8$$

eine Gleichheit dann nicht mehr auftreten, wie man durch einen Größenvergleich der Koeffizienten der beiden Polynomfunktionen in x sofort sieht.

Der Rest ist einfach, da nun mithilfe der Substitution $y = x + 2$ die Ausgangsgleichung eine einfache Gleichung in x allein wird, nämlich

$$(x+2)^3 - x^3 - 8x^2 + 6x - 8 = 2x(9-x) = 0$$

aus der wir die einzigen beiden Lösungen

$$(x,y) \in \{(0,2),(9,11)\}$$

der Aufgabe dann unmittelbar ablesen können.

IV.III (Dezimal-)Zahldarstellung; (End-)Ziffern; (quadratische) Reste

I Runde 1

Aufgabe V01202:
Der Ausdruck

$$\sqrt[3]{\bigstar\bigstar\bigstar 9}$$

ist eine ganze Zahl. Wie heißt die Zahl? Die Sterne stellen unleserliche Ziffern dar.

Lösung von OlgaBarati:
Die Ziffer 9 ist die einzige Endziffer einer Zahl, die mit 9^3 eine 9 als Endziffer hat. So muss auch die gesuchte Zahl die Endziffer 9 haben. Es kann somit nur die 19 sein da 29^3 bereits 5-stellig ist. Die gesuchte Zahl ist $19^3 = 6859$.

Aufgabe V01206:
Welche Ziffer steht in der Einerstelle der Summe

$$11^6 + 14^6 + 16^6$$

Lösung von svrc:
Da uns nur die Einerstellen der Summanden interessiert, folgt modulo 10

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \equiv \left(1^6 + 4^6 + 6^6\right) \pmod{10}.$$

Es ist $4^6 = 4096$, d. h. $4^6 \equiv 6 \pmod{10}$ und es ist $6^6 = 6^3 \cdot 6^3 = 216 \cdot 216$, d. h. $6^6 \equiv 6 \pmod{10}$. Also gilt

$$\left(11^6 + 14^6 + 16^6\right) \equiv 13 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Somit endet die Summe auf der Einerstelle 3.

Alternativ-Lösung von weird:
Mod 5 errechnet sich die fragliche Summe sehr leicht zu

$$11^6 + 14^6 + 16^6 \equiv 1^6 + (-1)^6 + 1^6 = 3 \pmod{5},$$

weshab ihre Endziffer also nur 3 oder 8 sein kann. Da sie aber als Summe von einer ungeraden und von zwei geraden Zahlen sicher ungerade ist, kommt letztlich dann nur 3 in Frage.

Aufgabe 041114:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:
Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1, 2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$ überein.

Beweis:
Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, dass

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1, 2$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100[100c_1c_2 + (10a_1 + b_1)c_2 + (10a_2 + b_2)c_1] + (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1, 2, 3, ...20$, so erkennt man die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.
Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67.
Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1, 2, 3, ..., 22$ erkennt man, dass die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von $4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2$.
Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.

Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$. Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

Aufgabe 061214:
Geben Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen an, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Es ist x^n für $x \geq 10$ und $n \geq 1$ eine mindestens $(n+1)$-stellige Zahl, weil $x^n = 10^n + s$ mindestens $(n+1)$-stellig ist. Daher kommen als Lösung nur solche Zahlen in Frage, deren Quersumme $x < 10$ ist.

b) Ist x^n eine k-stellige Zahl, so ist $x^{n+1} = x^n \cdot x$ wegen $x < 10$ höchstens $(k+1)$-stellig.

c) Im Fall $n = 1$ erhält man für x^n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

d) Im Fall $n \geq 2$ sei $r \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl, für die x^r eine höchstens $(r-1)$-stellige Zahl ergibt. Dann können wir uns auf die Betrachtung der Zahlen x^2, x^3, $\ldots$, x^{r-1} beschränken.

Für x=0, 1, 2, 3 ist $r = 2$, also gibt es für diese Quersummen keine derartigen Zahlen mit $n \geq 2$.

Da ferner alle Potenzen von 4 auf 4 oder 6, alle Potenzen von 5 auf 5 und alle Potenzen von 6 auf 6 enden und bei $n \geq 2$ außer dieser Endziffer mindestens noch eine von Null verschiedene Ziffer vorkommen muss, kann es auch für x=4, 5 und 6 keine derartigen Zahlen geben.

Man braucht daher nur zu untersuchen, ob es für x=7, 8 oder 9 solche n-stelligen Zahlen x^n gibt, deren Quersumme gleich x ist.

Es sei x=7.

Wegen (immer mod 10): $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 3$, $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$ braucht man nur die Potenzen der Form 7^m mit $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Nun ist $7^3 = 343$ (Quersumme $x > 7$), $7^4 = 2401$ (Quersumme $x = 7$), $7^7 = 823543$ (sechsstellig) und 7^m weniger als m-stellig für $m > 7$. Also ist $7^4 = 2401$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 7.

Es sei x=8.

Wegen (immer mod 10): $8^2 \equiv 4$, $8^3 \equiv 2$, $8^4 \equiv 6$, $8^5 \equiv 8$ braucht man nur die Potenzen der Form 8^m mit $m \equiv 2 \pmod 4$, $m \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 0 \pmod 4$ zu untersuchen. Wegen

$$n \lg 8 < n \cdot 0{,}904 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 11$$

ist 8^n für $n \geq 11$ höchsten $(n-1)$-stellig. Daher bleiben noch folgende Fälle zu untersuchen:

$8^2 = 64$ (Quersumme $x > 8$),
$8^3 = 512$ (Quersumme $x = 8$),
$8^4 = \ldots 096$ (Quersumme $x > 8$),
$8^6 = \ldots 144$ (Quersumme $x > 8$),

$8^7 = \dots 152$ (Quersumme $x > 8$),
$8^8 = \dots 216$ (Quersumme $x > 8$), $8^{10} = \dots 824$ (Quersumme $x > 8$).

(Es genügt eine Betrachtung der letzten drei Stellen.) Also ist $8^3 = 512$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 8.

Es sei x=9.

Wegen (immer modulo 10): $9^2 \equiv 1$, $9^3 \equiv 9$ braucht man nur alle Potenzen der Form 9^{2m} mit $m = 1,2,3,\dots$ zu betrachten. Analoge Überlegungen wie im Falle $x = 8$ ergeben: Wegen

$$n \lg 9 < n \cdot 0{,}9544 < n - 1 \quad \text{für } n \geq 22$$

ist 9^n eine höchstens $(n-1)$-stellige Zahl. Es bleiben also zu untersuchen übrig:

$9^2 = 81$ (Quersumme $x = 9$),
$9^4 = 6561$ (Quersumme $x > 9$),
$9^6 = \dots 1441$ (Quersumme $x > 9$),
$9^8 = \dots 6721$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{10} = \dots 4401$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{12} = \dots 6481$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{14} = \dots 4961$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{16} = \dots 1841$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{18} = \dots 9121$ (Quersumme $x > 9$),
$9^{20} = \dots 8801$ (Quersumme $x > 9$).

(Es genügt die Betrachtung der letzten 4 Stellen.) Also ist $9^2 = 81$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 9. Die gesuchten Zahlen sind also für

$n = 1$: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
$n = 2$: 81
$n = 3$: 512 $n = 4$: 2401

Für $n \geq 5$ gibt es keine derartigen Zahlen.

Aufgabe 151214:
Es sei M die Menge aller derjenigen siebenstelligen Zahlen (im dekadischen Positionssystem), in denen jede der sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 einmal auftritt.

Man beweise, dass keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes $z \in M$ hat die Quersumme $g(z) = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$ und lässt daher bei Division durch 3 und durch 9 den Rest 1.

Angenommen, $z_1 = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + ... + a_6 \cdot 10^6 \in M$ wäre durch $z_2 = b_0 + b_1 \cdot 10^2 + ... + b_6 \cdot 10^6 \in M$ teilbar ($(a_0, a_1, ..., a_6)$ und $(b_0, b_1, ..., b_6)$ zwei verschiedene Anordnungen der Ziffern 1,2,...,7), d. h., es gäbe eine ganze Zahl k mit $z_1 = kz_2$.

Wegen $z_1 > 0, z_2 > 0$ folgte dann $k > 0$, wegen $z_1 \neq z_2$ folgte $k \neq 1$. Ferner wäre

$$kz_2 = z_1 \leq 765431 < 7 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 < 7 \cdot (10^6 + 2 \cdot 10^5) < 7 \cdot 1234567 \leq 7z_2$$

also $k \leq 7$.
Da je zwei Zahlen z_1 und z_2 aus M bei Division durch 9 den gleichen Rest lassen, müsste die Zahl $z_1 - z_2 = (k-1) \cdot z_2$ durch 9 teilbar sein. Das steht im Widerspruch dazu, dass z_2 nicht durch 3 und $k - 1$ (als eine der Zahlen $2 - 1, ..., 7 - 1$) nicht durch 9 teilbar wäre.

Folglich ist keine der Zahlen aus M durch eine andere Zahl aus M teilbar.

Aufgabe 221213:
In einem alten Rechenbuch wird das folgende Verfahren für die Multiplikation der Zahl 142857 mit einer natürlichen Zahl n, die größer als 7 ist, angegeben:

	Beispiel für $n = 326$
Man dividiere zunächst n durch 7 und schreibe als erste Zahl den	(326 : 7 = 46, Rest 4)
ganzzahligen Teil des Ergebnisses auf. Dann multipliziere man 142857 mit	$\boxed{46}$
dem Rest und schreibe das Produkt hinter	$(142857 \cdot 4 = 571428)$
die zuerst aufgeschriebene Zahl. Von der so gebildeten Zahl subtrahiere	46571428
man die zuerst aufgeschriebene Zahl. Das Ergebnis ist das gesuchte Produkt.	-46 $46571382 = 142857 \cdot 326$

Es zeigt sich jedoch, dass dieses Verfahren nicht für alle natürlichen Zahlen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis führt.

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen n mit $n > 7$, für die das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt!

b) Nennen und begründen Sie für die anderen $n > 7$ ein zum richtigen Ergebnis führendes Verfahren, das ebenfalls das Multiplizieren von 142857 mit einer Zahl größer als 7 vermeidet und die Division von n durch 7 zum Ausgangspunkt hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ist q der ganzzahlige Teil und r der Rest, der sich bei Division einer natürlichen Zahl $n > 7$ durch 7 ergibt, so gilt

$$n = 7q + r \qquad \text{und} \qquad 0 \leq r \leq 6 \tag{1,2}$$

Die Multiplikation von 142857 mit r ergibt ein Produkt $p = 142857 \cdot r$, das

- im Fall $r = 0$ den Wert $p = 0$ hat und

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ die Ungleichung $142857 \leq p \leq 142857 \cdot 6 = 857142$ erfüllt, also eine sechsstellige Zahl ist.

Daher führt das angegebene Verfahren

- im Fall $r = 0$ auf die Zahl $q \cdot 10 - q = 9q$,

- im Fall $1 \leq r \leq 6$ auf die Zahl $q \cdot 10^5 + p - q = 999999q + 142857r$.

Andererseits ist das gesuchte Produkt in jedem Fall nach (1) die Zahl

$$142857n = 142857(7q + r) = 999999q + 1428574$$

Der Vergleich zeigt: Das Verfahren führt für genau diejenigen $n > 7$ zum richtigen Ergebnis, für die der Fall $1 \leq r \leq 6$ vorliegt, das sind genau diejenigen $n > 7$, die nicht durch 7 teilbar sind.

b) Das einfachste Verfahren wäre, statt $n = 7q + r$ mit $r = 0$ den Ansatz $n = 7q + 7$ mit $r = 7$ zu verwenden und anschließend wie beschreiben fortzufahren.

Aufgabe 251213:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:

(1) n lässt bei der Division durch 3 den Rest 1,

(2) n^2 lässt bei der Division durch 11 den Rest 1,

(3) es gilt: $100 < n < 200$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn $n = 11k + r$ mit einer natürlichen Zahl k und $r = 0, 1, 2, ..., 10$ ist, so ist

$$n^2 = 11(11k^2 + 2kr) +^2 = 11m + s$$

mit einer natürlichen Zahl m und $s = 0, 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1$. Also wird (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 11k + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 11k + 10 \tag{4}$$

erfüllt.
Die Bedingungen (3) und (2) werden somit genau von den 18 Zahlen 111, 122, ..., 199 und 109, 120, ..., 197 erfüllt. Für diese Zahlen ist (1) zu überprüfen.

Eine Zahl der Form (4) erfüllt genau dann (1), wenn mit einer natürlichen Zahl p auch $n = 3p + 1$, also

$$11k + 1 = 3p + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 11k + 10 = 3p + 1$$

oder, gleichwertig hiermit,

$$11k = 3p \qquad \text{bzw.} \qquad 11k = 3(p - 3)$$

gilt. Hierfür ist $3 \mid k$, also $k = 3q$ mit einer natürlichen Zahl q, notwendig und hinreichend; daher und nach (4) werden (1) und (2) genau von den Zahlen der Form

$$n = 33q + 1 \qquad \text{oder} \qquad n = 33q + 10$$

erfüllt, (1), (2), (3) somit genau von den Zahlen 133, 166, 199 und 109, 142, 175.

Aufgabe 271212:
Man ermittle alle diejenigen zweistelligen und alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern doppelt so groß ist wie die Quersumme!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Wenn eine zweistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt:

Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b, für die $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $ab = 2(a+b)$, also

$$(b-2)a = 2b \qquad (1)$$

gilt. Für $b = 1,2,5,7,8,9$ lautet diese Gleichung $(-1)a = 2$, $0 \cdot a = 4$, $3a = 10$, $5a = 14$, $6a = 16$ bzw. $7a = 18$. In keinem dieser Fälle hat sie eine natürliche Lösung. Daher kann b nur einer der zahlen 3, 4, 6 sein; in diesen Fällen ergibt sich aus (1) $1a = 6$, $2a = 8$ bzw. $4a = 12$, und daraus $a = 6$, $a = 4$ bzw. $a = 3$. Damit folgt, dass z einer der Zahlen 63, 44, 36 ist.

II. Wenn z eine dieser Zahlen ist, so hat z wegen die verlangte Eigenschaft, wie die Probe zeigt.

III. Wenn eine dreistellige Zahl z die verlangte Eigenschaft hat, so folgt: Die Ziffern von z sind natürliche Zahlen a,b,c, für die

$$0 < a \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq b \leq 9 \quad ; \quad 0 \leq c \leq 9 \quad \text{und} \qquad (2)$$

$$abc = 2(a+b+c) \quad (3) \qquad \text{also} \qquad (bc-2)a = 2(b+c) \quad (4)$$

gilt. Aus (2) folgt $a+b+c+ > 0$; hiernach und wegen (3) müssen auch $b > 0$ und $c > 0$ sein, so dass über (2) hinaus sogar

$$0 < a,b,c \leq 9 \qquad (2')$$

gilt. Wegen (3) muss mindestens eine der Zahlen a,b,c gerade sein. Da (3) und (2') bei beliebiger Umordnung von a,b,c erhalten bleiben, genügt es, etwa den Fall zu betrachten, dass c gerade ist, also wegen (2') eine der Zahlen 2,4,6,8.

Die folgende Tabelle enthält für diese Werte und alle $b = 1,2,...,9$ jedes Mal die durch 2 dividierte Gleichung (4) und Angaben über ihre Lösung a:

b	$c=2$		$c=4$		$c=6$		$c=8$	
1	$0a=3$	–	$1a=5$	$a=5$	$2a=7$	–	$3a=9$	$a=3$
2	$1a=4$	$a=4$	$3a=6$	$a=2$	$5a=9$	–	$7a=10$	–
3	$2a=5$	–	$5a=7$	–	$8a=9$	–	$11a=11$	$a=1$
4	$3a=6$	$a=2$	$7a=8$	–	$11a=10$	–	$15a=12$	–
5	$4a=7$	–	$9a=9$	$a=1$	$14a=11$	–	$19a=13$	–
6	$5a=8$	–	$11a=10$	–	$17a=12$	–	$23a=14$	–
7	$6a=9$	–	$13a=11$	–	$20a=13$	–	$27a=15$	–
8	$7a=10$	–	$15a=12$	–	$23a=14$	–	$31a=16$	–
9	$8a=11$	–	$17a=13$	–	$26a=15$	–	$35a=17$	–

Daraus folgt, dass z einer der folgenden Zahlen oder ein daraus durch Ziffernumordnung entstehende Zahl ist: 422, 242, 514, 224, 154, 318, 138.

IV. Wenn z eine derartige Zahl ist, so hat z wegen $2 \cdot 2 + 4 = 16 = 2(2+2+24)$ bzw. analog für die anderen Zahlen die verlangte Eigenschaft.

Mit I., II., III., IV. ist bewiesen, dass genau die Zahlen 36, 44, 63, 138, 145, 154, 183, 224, 242, 318, 381, 422, 514, 541, 813, 831 die verlangte Eigenschaft haben.

Aufgabe 271214:
Man ermittle den Rest, den die Summe $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede natürliche Zahl a gibt es natürliche Zahlen m und r mit $0 \leq r \leq 4$, so dass $n = 5m + r$ ist. Es gilt:

$$(5m+r)^5 = 5^5 \cdot m^5 + 5 \cdot 5^4 \cdot m^4 \cdot r + 10 \cdot 5^3 \cdot m^3 \cdot r^2 + 10 \cdot 5^2 \cdot m^3 \cdot r^3 + 5 \cdot 5 \cdot m \cdot r^4 + r^5$$

Folglich lässt $(5m+r)^5$ bei Division durch 25 $(= 5^2)$ denselben Rest wie r^5.

Fallunterscheidung:

Es sei r gleich	0, 1, 2, 3, 4,
dann ist r^5 gleich	0, 1, 32, 243, 1024
und der Rest von r^5 bei Division durch 25 gleich	0, 1, 7, 18, 24

Unter den Zahlen $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ sind (wegen $1987 = 5 \cdot 397 + 2$) jeweils genau 397 Zahlen von der Form $(5k)^5$ bzw. $(5k+3)^5$ bzw. $(5k+4)^5$ und jeweils genau 398 Zahlen von der Form $(5k+1)^5$ bzw. $(5k+2)^5$, d. h. jeweils 397 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 0 bzw. 18 bzw. 24 lassen, jeweils 398 Zahlen, die bei Division durch 25 den Rest 1 bzw. 7 lassen.

Die Summe der Reste bei der Division von $1^5, 2^5, ..., 1987^5$ durch 25 ist also

$$397 \cdot 18 + 397 \cdot 24 + 398 \cdot 1 + 398 \cdot 7 = 397 \cdot (18+7) + 7 + 397 \cdot (24+1) + 1 = 397 \cdot 25 + 397 \cdot 25 + 8$$

Also lässt $s = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + 1987^5$ bei Division durch 25 den Rest 8.

Aufgabe 331212:
Zeigen Sie, dass sich jede positive ganze Zahl z in der Form

$$z = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_n \cdot n^2$$

darstellen lässt, wobei n eine positive ganze Zahl ist und jeder Koeffizient a_1, a_2, ..., a_n eine der Zahlen 0, 1, -1 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt z. B. die Darstellungen

$$1 = 1 \cdot 1^2, \quad 2 = (-1) \cdot 1^2 + (-1) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2$$

für ungerade $z = 2k+1$ ($k = 1$ ganzzahlig) wegen $z = (k+1)^2 - k^2$ die Darstellung mit

$$a_k = -1, \quad a_{k+1} = 1 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq k, k+1)$$

sowie für gerade $z = 2k$ ($k \geq 2$ ganzzahlig) wegen $z = (k+1)^2 - k^2 - 1$ die Darstellung mit

$$a_1 = -1, \quad a_k = -1, \quad a_{k+1} = 0 \quad \text{und} \quad a_i = 0 \quad (i \neq 1, k, k+1)$$

Aufgabe 341211:
Von einer natürlichen Zahl n sei bekannt, dass ihre Dezimaldarstellung nur die Ziffern Drei und Null enthält, wobei die Drei genau 1994 mal und die Null genau 1995 mal auftritt.

Man untersuche, ob eine solche Zahl Quadratzahl sein kann.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine solche Zahl kann nicht Quadratzahl sein.

Beweis: Ihre Quersumme $1994 \cdot 3$ ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 9, da 1994 nicht durch 3 teilbar ist. Also ist auch die genannte Zahl durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Jede durch die Primzahl $p = 3$ teilbare Quadratzahl ist aber auch durch $p^2 = 9$ teilbar.
Also kann die genannte Zahl keine Quadratzahl sein.

II Runde 2

Aufgabe V11225:
Gesucht ist eine vierstellige Zahl, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme ist.
Wie haben Sie die Zahl ermittelt?

Lösung von StrgAltEntf:
Da die vierte Potenz der Quersumme vierstellig sein soll und $5^4 < 1000$, $10^4 > 9999$ gilt, kommt für die Quersumme nur 6, 7, 8 oder 9 infrage. Es gilt weiterhin $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ und $9^4 = 6561$. Die gesuchte Zahl ist somit 2401 mit der Quersumme 7.

Aufgabe 031221:
Geben Sie ohne Benutzung einer Tafel der Kubikzahlen alle zweistelligen Zahlen an, deren dritte Potenzen mit den Ziffern der ursprünglichen Zahl in derselben Anordnung beginnen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wenn es eine Zahl x gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist x^3 entweder vierstellig (Fall 1) oder fünfstellig (Fall 2) oder sechsstellig (Fall 3), da x eine zweistellige Zahl ist und $10^3 = 1000$ und $99^3 = 970299$.

1. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 100x + y$ mit $0 \leq y \leq 99$, d. h., es gilt: $100x \leq x^3 < 100x + 100$, $100x \leq x^3 < 100(x + 1)$ und folglich
$$100 \leq x^2 < 100(1 + \frac{1}{x}) \leq 100(1 + \frac{1}{10}) = 110$$
wegen $x \geq 10$. Also $100 \leq x^2 < 110$. Diese Beziehung ist nur für $x = 10$ erfüllt.

2. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 1000x + y$ mit $0 \leq y \leq 999$, d. h. es gilt:
$$1000x \leq x^3 < 1000x + 1000 \quad ; \quad 1000x \leq x^3 < 1000(x + 1)$$
und folglich $1000 \leq x^2 < 1000(1 + \frac{1}{x}) \leq 1100$.
Diese Beziehung ist nur für $x = 32$ erfüllt.

3. Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, lässt sich x^3 in folgender Form schreiben: $x^3 = 10000x + y$ mit $0 \leq y \leq 9999$, d. h. es gilt:
$$10000x \leq x^3 < 10000x + 10000 \quad ; \quad 10000x \leq x^3 < 10000(x + 1)$$
und folglich $10000 < x^2$. Dies ist nicht möglich, da x zweistellig ist und daher x^2 höchstens vierstellig sein kann.

Folglich sind wegen $10^3 = 1000$ und $32^3 = 32768$ die Zahlen 10 und 32 die einzigen, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

Aufgabe 031225:
Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen:
Der erste Hirte erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen, dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist.
Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

Lösung von Henning Thielemann:
Der Erlös für ein Tier betrage n Groschen, mithin werden n Tiere verkauft und die Hirten bekommen insgesamt n^2 Groschen für ihre Tiere.
Nach jeder Runde beim Verteilen (erster Hirte bekommt 10 Groschen, zweiter Hirte ebenfalls) verringert sich der verbleibende Betrag um 20 Groschen.
Sei r die Anzahl der Groschen, die bei der Verteilung noch vorhanden sind, nachdem der zweite Hirte zum letzten Mal volle 10 Groschen erhalten hat. Es gilt also $r \equiv n^2 \pmod{20}$ und $0 < r < 20$. Von denen bekommt der erste Hirte noch einmal 10 Groschen und danach sind noch $r - 10$ Groschen übrig, sodass $10 < r < 20$ gilt.
Jede natürliche Zahl n lässt sich darstellen als $10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{Z} \cap [-4, 5]$. Damit erhalten wir

$$n^2 = (10a + b)^2 = (100a^2 + 20ab + b^2) \equiv b^2 \pmod{20}.$$

Wegen $(-b)^2 = b^2$ testen wir nur

$$\begin{aligned} b = 0: &\quad 0 \equiv 0 \pmod{20} \\ b = 1: &\quad 1 \equiv 1 \pmod{20} \\ b = 2: &\quad 4 \equiv 4 \pmod{20} \\ b = 3: &\quad 9 \equiv 9 \pmod{20} \\ b = 4: &\quad 16 \equiv 16 \pmod{20} \\ b = 5: &\quad 25 \equiv 5 \pmod{20} \end{aligned}$$

und erhalten, dass nur $|b| = 4$ die Bedingung erfüllt, dass der Rest r von n^2 bei Division durch 20 zwischen 10 und 20 liegt, und schließen daraus, dass das Messer 6 Groschen kostet, unabhängig davon, wie viele Tiere genau verkauft wurden.

Aufgabe 111222:
Beweisen Sie, dass für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

Lösung von weird:
Beweis: Aus der Lösbarkeit von $x^2 = 7n + 3$ in $\mathbb{Z}$ würde sofort auch die Lösbarkeit der Kongruenz $x^2 \equiv 3 \pmod 7$ folgen.
Diese ist aber unlösbar, die man wohl am einfachsten durch Einsetzen aller „Kandidaten“ $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ sieht.

Aufgabe 121223:
Man beweise, dass für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Quadratische Reste modulo 6 sind $\{0; 1; 3; 4\}$, da $0^2 \equiv 0 \pmod 6, 1^2 \equiv 1 \pmod 6, 2^2 \equiv 4 \pmod 6, 3^2 \equiv 3 \pmod 6, 4^2 \equiv 4 \pmod 6, 5^2 \equiv 1 \pmod 6$.

$6n + 2 \equiv 2 \pmod 6$, d. h. $6n + 2$ kann niemals Quadrat werden. qed.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Jede natürliche Zahl m lässt sich darstellen als $m = 3k$ oder $3k \pm 1$, sodass dann $m^2 = 3 \cdot (3k^2)$ bzw. $m = 3 \cdot (3k^2 \pm 2k) + 1$ gilt. Insbesondere lässt keine Quadratzahl den Rest 2 bei der Division durch 3, sodass $6n + 2 = 3 \cdot (2n) + 2$ für kein n eine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 231224:
Man ermittle alle natürlichen Zahlen n, für die die Zahl $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist.

Lösung von weird:
Wenn $2^n + 5$ eine Quadratzahl ist, so muss dann n jedenfalls gerade sein, da für ein ungerades n

$$2^n + 5 = 4^{\frac{n-1}{2}}\, 2 + 5 \equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2 \equiv \pm 2 \pmod 5$$

gelten würde, d. h., $2^n + 5$ wäre dann ein quadratischer Nichtrest mod 5, Widerspruch!
Für ein gerades n gilt aber $2^n = k^2$ mit $k = 2^{\frac{n}{2}} \in \mathbb{N}$, d. h., 2^n ist selbst eine Quadratzahl. Wir müssen also nur noch die Gleichung

$$k^2 + 5 = \ell^2$$

in positiven ganzen Zahlen k,ℓ lösen. Aus $(\ell - k)(\ell + k) = 5$ folgt aber sofort $\ell - k = 1$, $\ell + k = 5$ und damit $k = 2$, $\ell = 3$. Wegen $2^n = k^2 = 2^2$ ist also $n = 2$ dann eine Lösung der Aufgabe und auch die einzige.

Aufgabe 331223:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ positiver ganzer Zahlen m, n, für die $1994^m - 1993^n$ eine Quadratzahl ist.

Lösung von weird:
Sei

$$1994^m - 1993^n = k^2 \quad (m{,}n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Indem wir diese Gleichung mod 4 betrachten, wird daraus die Kongruenz

$$2^m - 1 \equiv k^2 \pmod 4$$

Hier liegt für $m > 1$ die linke Seite der Kongruenz in der Restklasse 3 mod 4, die rechte aber in der Restklasse von 0 oder 1 mod 4, was also dann nur den Schluss zulässt, dass $m = 1$ sein muss. In diesem Fall ist aber die linke Seite von (*) für $n > 1$ negativ und daher sicher keine Quadratzahl. Für die verbleibende Möglichkeit $n = 1$ erhält man dagegen

$$1994 - 1993 = 1$$

also dann trivialerweise eine Quadratzahl und damit ist $(m{,}n) = (1{,}1)$ dann auch das einzige Paar von positiven ganzen Zahlen, für welches dies gilt.

Aufgabe 341224:
Ist z eine 1995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1994$, so bezeichne $z[n]$ diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung entsteht, indem man aus der Zifferndarstellung von z die ersten n Ziffern weglässt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Zifferndarstellung anfügt.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1994$:
Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

Lösung von Nuramon:
Wir schreiben z in der Form $z = a \cdot 10^{1995-n} + b$ mit $a,b \in \mathbb{N}, b < 10^{1995-n}$. Dann ist $z[n] = b \cdot 10^n + a$.
Die Zahl $10^{1995} - 1$ ist durch 27 teilbar, denn $(10^{1995} - 1) \cdot \frac{1}{9} = 11 \dots 11$ hat die Quersumme 1995 und ist somit durch 3 teilbar.
Wenn z durch 27 teilbar ist, dann gilt $-b \equiv a \cdot 10^{1995-n} \pmod{27}$. Multiplikation mit 10^n liefert dann zusammen mit obiger Bemerkung:

$$-10^n b \equiv a \cdot 10^{1995} \equiv a \pmod{27}.$$

Also ist auch $z[n]$ durch 27 teilbar.

III Runde 3

Aufgabe 011132:
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält?
Die Behauptung ist zu begründen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müsste die erste Ziffer von n gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von m gleich der Ziffernanzahl von n ist.
Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.
Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 021233:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
Wenn eine positive ganze Zahl durch 99 teilbar ist, dann ist die Summe ihrer Ziffern nicht kleiner als 18.

Lösung von Burkhard Thiele:
Die Zahl z lässt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

wobei $a_n, ..., a_0$ natürliche Zahlen kleiner als 10 sind und $a_n \geq 0$ ist. Da z durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme von z:

$$Q(z) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

durch 9 teilbar. Da z durch 11 teilbar ist, ist die alternierende Quersumme von z:

$$Q_a(z) = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pm ... - a_1 + a_0$$

durch 11 teilbar.
Setzt man die Summe der positiven Summanden von $Q_a(z)$ gleich a, also $a = a_0 + a_2 + ...$ und die negative Summe der übrigen Summanden gleich b, also $b = a_1 + a_3 + ...$, so gilt: $Q(z) = a + b = 9k$ und $Q_a(z) = a - b = 11m$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen, k positive ganze Zahl und m eine ganze Zahl bedeuten.
Die Aufgabe ist gelöst, wenn $k \neq 1$ gezeigt wird.
Angenommen, es gelte $k = 1$, so folgt aus $a + b = 9$ und $a - b = 11m$:

$$a = \frac{1}{2}(9 + 11m) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2}(9 - 11m)$$

Da a nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für a: $m \geq 1$. Da b ebenfalls nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus der Formel für b gleichzeitig $m \leq -1$. Diese beiden Bedingungen für m sind jedoch unvereinbar miteinander.

Daher ist die Annahme $k = 1$ nicht richtig, und es ist $k \geq 2$, d. h., die Quersumme $Q(z)$ ist größer oder gleich 18.

Aufgabe 031231:
Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die folgende Eigenschaft besitzen!
Bildet man ihre dritte Potenz und streicht bei dieser Zahl alle Ziffern mit Ausnahme der letzten beiden, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Wenn es eine Zahl x der geforderten Art gibt, so lässt sie sich in der Form

$$x = 10a + b \qquad (1)$$

mit $a = 1, 2, ..., 9$ und $b = 0, 1, 2, ..., 9$ schreiben, da x eine zweistellige Zahl ist.
$b = 0$ kommt nicht in Frage, da dann die letzten drei Ziffern von x^3 Null wären, was nur für $x = 0$ möglich ist. Laut Aufgabenstellung sind alle Zahlen x gesucht, für die gilt:

$$x^3 = 100n + 10a + b \qquad (2)$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen (1) gilt:

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, dass $b^3 - b$ durch 10 teilbar ist, sich also in der Form $b^3 - b = 10m \quad (4)$;
m natürliche Zahl, darstellen lässt. Weiterhin folgt aus (2) und (3), dass $30ab^2 + b^3 - b - 10a$ durch 100 teilbar ist, sich also in der Form

$$30ab^2 + b^3 - b - 10a = 100k \quad \text{oder} \quad 3ab^2 + \frac{1}{10}(b^3 - b) - a = 10k \quad (5)$$

k natürliche Zahl, darstellen lässt.
Wegen (4) kommen für b von den Ziffern $1, ..., 9$ nur die Ziffern $1, 4, 5, 6$ und 9 in Frage. Setzt man diese der Reihe nach in (5) ein, so erhält man:

Für $b = 1$ ergibt sich $a = 5$, d. h. $x = 51$.
Für $b = 4$ ergibt sich $a = 2$, d. h. $x = 24$.
Für $b = 5$ ergibt sich $a = 2$ oder $a = 7$, d. h. $x = 25$ oder $x = 75$.
Für $b = 6$ folgt $a = 7$, d. h. $x = 76$.
Für $b = 9$ folgt $a = 4$ oder $a = 9$, d. h. $x = 49$ oder $x = 99$.

Für die Lösung der Aufgabe kommen also nur die Zahlen $24, 25, 49, 51, 75, 76, 99$ in Frage.
Durch Bildung der dritten Potenzen dieser Zahlen bestätigt man, dass jede von ihnen allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 071233:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$\begin{array}{ll} 7^1 \equiv 7 \pmod{100} & 7^2 \equiv 49 \pmod{100} \\ 7^3 \equiv 43 \pmod{100} & 7^4 \equiv 1 \pmod{100} \end{array}$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100} \quad 7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist. Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod 4, \text{ also } \quad 7^7 \equiv -1 \pmod{100},$$

d. h. $7^7 = 4m - 1$, wobei m eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}$$

Da somit

$$7^{7^7} \equiv 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod 4$$

gilt, d. h. $7^{7^7} = 4m' - 1$ (m' natürliche von 0 verschiedene Zahl) ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}.$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100},$$

d. h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

Aufgabe 151231:
Jemand löste eine Divisionsaufgabe A; bei dieser war eine natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit fünf gleichen Ziffern geschrieben wird, durch eine vierstellige natürliche Zahl, die (in dekadischer Darstellung) mit vier gleichen Ziffern geschrieben wird, zu dividieren.
Bei dieser Division ergab sich die Zahl 16 und ein gewisser Rest.
Anschließend bildete jemand aus dieser Aufgabe A eine neue Divisionsaufgabe A', indem er sowohl im Dividenden als auch im Divisor je eine Ziffer wegfallen ließ.
Bei der Division der so erhaltenen Zahlen ergab sich wieder die Zahl 16 sowie ein um 2000 kleinerer Rest als bei der Aufgabe A.
Man nenne (durch Angabe von Dividend und Divisor) alle Divisionsaufgaben A, die diese Eigenschaft aufweisen.

Lösung von Arnd Hübsch:
Eine fünfstellige natürliche Zahl Z mit identischen Ziffern kann folgendermaßen dargestellt werden

$$Z = x + 10x + 100x + 1000x + 10000x = 11111x \qquad (1)$$

wobei x eine einstellige natürliche Zahl ist ($0 < x < 10$). Da analoge Beziehungen auch für drei- und vierstellige natürliche Zahlen mit identischen Ziffern gelten,kann man die Divisionsaufgabe A folgendermaßen schreiben

$$11111x = 16 \cdot 1111y + R \qquad (2)$$

wobei $0 < x < 10$, $0 < y < 10$, $0 < R < 1111y \quad (3)$ gilt und sowohl x als auch y eine einstellige natürliche Zahl ist. Der Rest R ist eine natürliche Zahl. Eine zu (2) äquivalente Beziehung kann man auch für die Divisionsaufgabe A' aufstellen

$$1111x = 16 \cdot 111y + (R - 2000) \qquad (4)$$

wobei zusätzlich zu (3) auch $0 < (R - 2000) < 111y \quad (5)$ erfüllt sein muss. Stellt man nun sowohl (2) als auch (4) nach R um und setzt die so gewonnen Beziehungen gleich, so erhält man

$$(11111 - 1111)x = 16 \cdot (1111 - 111)y + 2000 \qquad (6)$$

Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen

$$x = \frac{8}{5}y + \frac{1}{5} \qquad (7)$$

Setzt man nun die 9 verschiedenen Werte für y ein [vergleiche (3)], so stellt man fest, dass sich nur für $y = 3$ und für $y = 8$ eine natürliche Zahl für x ergibt. Da das Ergebnis für x bei $y = 8$ nicht einstellig ist, gibt es nur ein mögliche Kombination: $x = 5, y = 3$.
Einsetzen in (2) ergibt unmittelbar

$$55555 = 16 \cdot 3333 + R \Rightarrow R = 2227 \qquad (8)$$

womit gezeigt wäre, dass alle Forderungen aus (3) und (5) erfüllt sind.
Damit ist gezeigt, dass es nur eine Divisionsaufgabe A gibt; der Dividend ist dabei durch 55555, der Divisor durch 3333 gegeben.

Aufgabe 201236:
Man zeige, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B > 1$ eine natürliche Zahl $C \geq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern Null und Eins besteht und durch n teilbar ist.

Lösung von StrgAltEntf:
Definiere $C_k := \sum_{l=1}^{k} B^l$.
Für $1 \leq k \leq n+1$ haben wir $n+1$ Reste bei Division durch n. Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Indizes $k_1 < k_2 \leq n+1$, so dass C_{k_1},C_{k_2} denselben Rest haben.
Damit hat $C := C_{k_2} - C_{k_1}$ die gewünschte Darstellung und ist durch n teilbar.

Aufgabe 251231:
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen m und n, für die die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) $m + n$ und $m \cdot n$ sind zweistellige Zahlen.
(2) Vertauscht man die Ziffern der Zahl $m+n$ miteinander, so erhält man die (Zifferndarstellung der) Zahl $m \cdot n$.

Lösung von cyrix:
Nach Aufgabenstellung existieren Ziffern c,$d \in \{1; 2; \ldots; 9\}$ mit $m + n = 10c + d$ und $m \cdot n = 10d + c$. Dabei darf keine Ziffer 0 sein, da sonst die Zahl mit entsprechender Zehnerstelle nicht zweistellig wäre. Insbesondere ist

$$(m-1) \cdot (n-1) = (m \cdot n) - (m+n) + 1 = 10d + c - (10c + d) + 1 = 9(d-c) + 1$$

lässt bei Division durch 9 den Rest 1. Damit kann man aus der Restklasse von n eindeutig die von m modulo 9 bestimmen:
Ist $n \equiv 0{,}2{,}3{,}5{,}6{,}8 \pmod 9$, so muss $m \equiv 0{,}1{,}6{,}8{,}3{,}5 \pmod 9$ sein, während es jeweils keine Lösung gibt, falls $n \equiv 1{,}4{,}7 \pmod 9$ ist, da dann $n-1$ und damit auch $(n-1)(m-1)$ durch 3 teilbar ist, was ein Widerspruch zur Kongruenz zu 1 modulo 9 darstellt.

Analog erhält man

$$(m+1)(n+1) = (m \cdot n) + (m+n) + 1 = (10d + c) + (10c + d) + 1 = 11(c+d) + 1$$

was den Rest 1 bei der Division durch 11 lässt, sodass man wieder aus der Kongruenz von n modulo 11 auf die von m schließen kann:
Ist $n \equiv 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9 \pmod{11}$, so muss $m \equiv 0{,}5{,}3{,}2{,}8{,}1{,}7{,}6{,}4{,}9 \pmod{11}$ gelten, wobei es für $n \equiv 10 \pmod{11}$ keine Lösung gibt, da dann $(n+1)$ und damit $(n+1)(m+1)$ durch 11 teilbar ist, was der Kongruenzbedingung widerspricht.

Es sei o. B. d. A. $m \geq n$. Dann ist $n \neq 0$, da sonst $m \cdot n = 0$ nicht zweistellig wäre. Weiterhin ist $n \neq 1,4,7$, da es dafür aufgrund der Kongruenzbedingung keine Lösung gibt. Wegen $100 > m \cdot n \geq n^2$ ist $n < 10$, sodass noch die Fälle $n \in \{2,3,5,6,8,9\}$ verbleiben. In jedem dieser Fälle folgt für m eine Kongruenz modulo 9 und eine modulo 11, was sich nach dem Chinesischen Restsatz zu einer modulo 99 zusammenfassen lässt. Da $0 < m \leq m \cdot n \leq 99$ gilt, ist damit dann m auch schon eindeutig festgelegt.

1. Fall: $n = 2$. Dann muss $m \equiv 1 \pmod 9$ und $m \equiv 3 \pmod{11}$, also $m = 91$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
2. Fall: $n = 3$. Dann muss $m \equiv 6 \pmod 9$ und $m \equiv 2 \pmod{11}$, also $m = 24$ gelten, was wegen $mn = 72$ und $m + n = 27$ eine Lösung ist.
3. Fall: $n = 5$. Dann muss $m \equiv 8 \pmod 9$ und $m \equiv 1 \pmod{11}$, also $m = 89$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
4. Fall: $n = 6$. Dann muss $m \equiv 3 \pmod 9$ und $m \equiv 7 \pmod{11}$, also $m = 84$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
5. Fall: $n = 8$. Dann muss $m \equiv 5 \pmod 9$ und $m \equiv 4 \pmod{11}$, also $m = 59$ gelten, was wegen $mn > 100$ keine Lösung ist.
6. Fall: $n = 9$. Dann muss $m \equiv 0 \pmod 9$ und $m \equiv 9 \pmod{11}$, also $m = 9$ gelten, was wegen $mn = 81$ und $m + n = 18$ eine Lösung ist.

Damit gibt es insgesamt genau drei Paare, die den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, nämlich $(m,n) \in \{(3,24), (24,3), (9,9)\}$.

Aufgabe 291231:
Man beweise:
Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, ..., a_n$ Zahlen sind, die

$$a_1^2 = ... = a_n^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

Lösung von Nuramon:
Aus $a_i^2 = 1$ folgt $a_i = \pm 1$. Ändert man im Ausdruck $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ das Vorzeichen von a_i, dann ändert sich der Ausdruck um

$$a_{i-1}a_i + a_ia_{i+1} - (a_{i-1}(-a_i) + (-a_i)a_{i+1}) = 2a_i(a_{i-1} + a_{i+1})$$

Da $a_{i-1} + a_{i+1}$ gerade ist, ändert sich bei so einer Vorzeichenänderung der Wert von $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1$ um ein Vielfaches von 4.
Zu Beginn hat der Term den Wert 0 und ist somit durch 4 teilbar. Ändert man schrittweise das Vorzeichen aller negativen a_i, dann ergibt sich letztendlich, dass $1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 = n$ ebenfalls durch 4 teilbar sein muss.

Aufgabe 331233A:
Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \{0,1,2,...\}}$ durch die Festsetzung definiert, dass $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m lässt.
Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl m mit $m \geq 2$ eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

Lösung von Henning Thielemann:
Es gibt nur m^2 verschiedene Werte für Paare (x_n, x_{n+1}) aufeinanderfolgender Folgenglieder, aber unendlich viele Folgenglieder.
Daher gibt es nach dem Schubfachprinzip ein n und ein k mit $k > 0$, so dass $x_n = x_{n+k}$ und $x_{n+1} = x_{n+k+1}$ gilt. (Es gibt sogar ein n für das es unendlich viele solcher k gibt.)
Für zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder x_j, x_{j+1} lässt sich das Vorgängerglied eindeutig bestimmen mit $x_{j-1} = (x_{j+1} - x_j) \pmod m$, also gilt auch $x_{n-1} = x_{n+k-1}$, $x_{n-2} = x_{n+k-2}$ usw. bis zu $x_0 = x_k$.

Aufgabe 341234:
Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):
(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

Lösung von weird:
Für $n = 4$ (und daher natürlich auch für $n = 2{,}3$) kann man eine solche n-elementige Teilmenge M von $\mathbb{N}$ noch leicht finden, z. B. $M = \{0{,}1{,}2{,}3\}$. Sind dann nämlich $x{,}y \in M$ und ist $x \neq y$, so gilt für sie $0 < |x \pm y| < 7$, was somit $x \pm y \equiv 0 \pmod 7$ definitiv ausschließt.

Um zu zeigen, dass dies für $n > 4$ nicht mehr möglich ist, betrachten wir nun die Partition $P = \{\{0\},\{1{,}6\},\{2{,}5\},\{3{,}4\}\}$ von $\{0{,}1,\dots,6\}$ und dazu irgendeine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ mit mindestens 5 Elementen.
Denken wir uns nun zu jedem Element in M jenes Element in $\{0{,}1,\dots,6\}$ zugeordnet, zu der es mod 7 kongruent ist, so muss es dann nach dem Schubfachprinzip wegen $|M| \geq 5$ eine 2-elementige Klasse von P geben, deren zwei Elemente alle bei dieser Zuordnung „getroffen“ werden. Die Summe der ihnen entsprechenden Elemente von M ist aber dann nach Konstruktion von P durch 7 teilbar, q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 031244:
Es bezeichne a_n die letzte Ziffer der Zahl $n^{(n^n)}$ (n sei eine natürliche Zahl $\neq 0$).
Beweisen Sie, dass die Zahlen a_n eine periodische Folge bilden und geben Sie diese Periode an!

Lösung von Henning Thielemann:
Die Einerstelle einer natürlichen Zahlen im dekadischen Positionensystem entspricht dem Rest bei der Division durch 10. Die Einerstelle der Potenz n^k hängt nur von k und der Einerstelle von n ab.
Wir stellen fest, dass die Folge der Einerstellen der Potenzen n^k für k als Laufvariable und festes n eine Periode bildet, wobei die Länge der Periode von (der Einerstelle von) n abhängt. Die kleinste gemeinsame Periode (das kleinste gemeinsame Vielfache aller Einzelperioden) ist vier.

n	n_1 mod 10	n_2 mod 10	n_3 mod 10	n_4 mod 10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1

Da die kleinste gemeinsame Periode die Länge vier besitzt, hängt die Einerstelle der Potenz n^k nur von den Restklassen von n modulo 10 und k modulo 4 ab. (Der Fall $k = 0$ ist ausgeschlossen!)
In der Aufgabenstellung ist $k = n^n$ gesetzt. Daher ist die Periode der Folge dwer Reste von n^n modulo 4, $n \in \mathbb{N}$ zu untersuchen.
Wir vermuten, dass der Rest des Ausdrucks a^b modulo 4 sowohl in a als auch in b eine Periode besitzt, für festgehaltenes b bzw. a. Dieser Rest bei Division durch 4 des Ausdruck a^b besitzt in a immer eine Periode der Länge 4, weil er nur vom Rest von a und von b abhängt (vergleiche mit Argument zur Einerstelle im Dezimalsystem).
Mithilfe einer Wertetabelle ermittelt man für a^b bezüglich b eine Periode der Länge zwei.

a	a_1 mod 4	a_2 mod 4	a_3 mod 4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	0
3	3	1	3

Die vollständige Wertetabelle für die Reste von a^b modulo 4 besteht, abgesehen von der ersten Spalte, aus identischen Blöcken der Größe 4×2 auf deren Diagonale man die Werte der Folge der Reste modulo 4 von n^n, $n \in \mathbb{N}$ ablesen kann. Offensichtlich hat diese Folge die Periode vier.
Die vollständige Wertetabelle für die Reste von a^b modulo 10 besteht, wie oben zu sehen, aus identischen Blöcken der Größe 10×4. Die Einerstelle von $n^{(n^n)}$ entspricht in der m-ten Zeile der ersten Tabelle dem n-ten Diagonal-Eintrag des Rests von n^n modulo 4 gemäß zweiter Tabelle), wobei m die Einerziffer von n ist.
Die gesuchte Folge hat die Periode $\text{kgV}(10, 4) = 20$ und lautet:

$$(1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0, \dots)$$

Alternativ-Lösung von cyrix:

Ist n gerade, so n^n durch 4 teilbar. Ist n dagegen ungerade, so ist $n \equiv \pm 1 \pmod 4$ und somit auch $n \equiv (\pm 1)^n = \pm 1 \pmod 4$. Insbesondere wiederholen sich die Reste von n^n modulo 4 mit einer Periode von 4. Es folgt, dass n^n und $(n+20)^(n+20)$ die gleichen Reste modulo 4 lassen.
Weiterhin haben n und n^{4k+1} jeweils die gleiche Endziffer, wie man leicht durch Einsetzen von $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5\}$ und Induktion nach k nachweist, da diese Endziffer nur von der von n abhängt.
Damit folgt, dass $a_n = a_{n+20}$ für alle n gilt, die Folge also periodisch mit einer Periodenlänge, die Teiler von 20 ist, ist.
Es ist $20 = 2^2 \cdot 5$. Wäre die Periodenlänge echt kleiner als 20, müsste sie also $2^2 = 4$ oder $2 \cdot 5 = 10$ teilen. Die Werte $a_1 = 1$ und $a_5 = 5$ schließen den ersten Fall aus, die Werte $a_3 = 7$ und $a_{13} = 3$ den zweiten. Damit ist die Folge (a_n) periodisch mit Periodenlänge 20.

Aufgabe 071244:
Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der die ersten fünf Glieder neunstellig, fünf weitere Glieder zehstellig, vier Glieder elfstellig und zwei Glieder zwölfstellig sind.
Man beweise, dass es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.

Lösung von cyrix:
Seien die Folgenglieder mit a_0, a_1, ..., a_{15} bezeichnet und es gelte (da die Folge geometrisch ist) $a_i = a_0 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^i$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q.
Da $a_{15} = a_0 \cdot \frac{p^{15}}{q^{15}}$ ist und p^{15} und q^{15} teilerfremd sind, muss q^{15} ein Teiler von a_0 sein. Es ist $a_0 < 10^9$. Also muss $q < 4$ gelten, denn sonst wäre

$$a_0 \geq q^{15} \geq 4^{15} = 2^{30} = \left(2^{10}\right)^3 = 1024^3 > 1000^3 = 10^9$$

Wegen $a_9 < 10^{10}$ und $a_0 \geq 10^8$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^9 = \frac{a_9}{a_0} < 10^2$. Insbesondere ist also $\frac{p}{q} < 2$, da sonst $\left(\frac{p}{q}\right)^9 \geq 2^9 = 512 > 10^2$ wäre.
Als mögliche Quotienten $\frac{p}{q}$ aufeinander folgender Folgenglieder verbleiben also nur die rationalen Zahlen zwischen 1 und 2, welche einen Nenner von höchstens 3 besitzen. Dies sind $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{3}$.

Wegen $a_{14} \geq 10^{11}$ und $a_9 < 10^{10}$ ist $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{a_{14}}{a_9} > 10$. Es ist aber $\left(\frac{4}{3}\right)^5 < \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32} < 10$, sodass als einzig möglicher Quotient $\frac{p}{q}$ der Wert $\frac{5}{3}$ verbleibt.

Damit gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $a_i = n \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ für alle $0 \leq i \leq 15$ gilt.
Wegen $n \cdot 3^6 \cdot 5^9 = a_9 < 10^{10}$ und $3^6 \cdot 5^9 = (3^2 \cdot 5^3)^3 = (9 \cdot 125)^3 = (1000 + 125)^3 > 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 125 = 10^9 + 375 \cdot 10^6 > 1{,}25 \cdot 10^9 = \frac{1}{8} \cdot 10^{10}$ ist $n < 8$.

Aus $10^8 \leq a_0 = n \cdot 3^{15}$ folgt mit $3^{15} = 3^6 \cdot 3 \cdot (3^4)^2 = 9^3 \cdot 3 \cdot 81^2 = 729 \cdot 3 \cdot 6561 < 750 \cdot 20000 = 1{,}5 * 10^7$, dass $n > 6$ ist, denn sonst wäre $a_0 \leq 6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^7 < 10^8$.
Damit folgt zusammen, dass die Folge genau aus den Zahlen $a_i = 7 \cdot 3^{15-i} \cdot 5^i$ mit $0 \leq i \leq 15$ bestehen muss.

Bemerkung: Die Anzahl der Stellen der einzelnen Folgenglieder kann man nun nachrechnen. Dafür eignet sich ein Rechenwerkzeug, kann aber auch von Hand nachvollzogen werden.

Aufgabe 081241:
Jeder nichtnegative periodische Dezimalbruch repräsentiert eine rationale Zahl, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ dargestellt werden kann (p und q natürliche Zahlen und teilerfremd, $p \geq 0, q > 0$).
Nun seien a_1, a_2, a_3 und a_4 Ziffern zur Darstellung von Zahlen im dekadischen System. Dabei sei $a_1 \neq a_3$ oder $a_2 \neq a_4$.
Beweisen Sie!
Die Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,\overline{a_1a_2a_3a_4} = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4... \\ z_2 &= 0,\overline{a_4a_1a_2a_3} \\ z_3 &= 0,\overline{a_3a_4a_1a_2} \\ z_4 &= 0,\overline{a_2a_3a_4a_1} \end{aligned}$$

haben in der obigen Darstellung p/q stets gleiche Nenner.

Lösung von StrgAltEntf:
Für Ziffern $a,b,c,d \in \{0,1,...,9\}$ bezeichnen wir mit $[abcd]$ die (bis zu) vierstellige Zahl

$$[abcd] := 1000a + 100b + 10c + d$$

Dann ist $10000z_1 - z_1 = [a_1a_2a_3a_4]$, also $z_1 = \frac{[a_1a_2a_3a_4]}{9999}$. Entsprechend ist $z_2 = \frac{[a_4a_1a_2a_3]}{9999}$, $z_3 = \frac{[a_3a_4a_1a_2]}{9999}$ und $z_4 = \frac{[a_2a_3a_4a_1]}{9999}$. Diese vier Brüche haben jetzt zwar denselben Nenner, jedoch liegen sie noch nicht unbedingt in gekürzter Form vor.

Die Primfaktorzerlegung der Nenner der vier Brüche lautet $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Also lassen sich hier bestenfalls die Faktoren 3, (oder sogar 9), 11 und 101 kürzen.
Bekanntlich ist eine ganze Zahl genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Die Quersumme der vier Zähler ist jedoch identisch, also lässt sich bei allen vier Brüchen entweder 3 oder 9 oder keins von beiden kürzen.
Ebenfalls ist allgemein bekannt, dass eine ganze Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn die alternierende Quersumme der Zahl durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme der Zähler lautet hier $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ bzw. das Negative von diesem Wert. Also gilt auch hier: Entweder sind alle vier Zähler durch 11 teilbar oder keiner der Zähler. Und daher: Entweder lassen sich alle vier Brüche durch 11 kürzen oder keiner.

Schließlich gilt für $x := [abcd]$, dass x genau dann durch 101 teilbar ist, wenn $a = c$ und $b = d$. (Begründung: Wenn $[abcd] = 101y$, dann ist $y < 100$ und damit $y = 10e + f$ für gewisse $e,f \in \{0,1,...,9\}$ und daher $101y = [efef]$). Nach Voraussetzung ist jedoch der Fall, dass $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$ ausgeschlossen, also ist keiner der vier Zähler durch 101 teilbar und daher bei keinem der vier Brüche der Faktor 101 kürzbar.

Zusammenfassend: Bei keinem der vier Brüche z_1,z_2,z_3,z_4 lässt sich in obiger Darstellung der Faktor 101 kürzen, und die Faktoren 3 (bzw. 9) und 11 lassen sich in allen oder in keinem der Brüche kürzen. Somit besitzen alle vier Brüche in gekürzter Darstellung denselben Nenner.

Aufgabe 111245:
Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:
Hängt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge der Zahl $x+1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

Lösung von Kornkreis:
Wir bezeichnen die Zahl, die aus einem x durch das beschriebene Anhängen entsteht, als y. Im dekadischen System hat x die Form abc, d. h. $x = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ mit $a,b,c \in \{0,...,9\}$. Zusätzlich gilt $a \neq 0$, da x dreistellig sein soll, und $x \neq 999$, da y sechsstellig sein soll.
Es ist

$$y = (10^3 + 1)(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) + 1 = (10^3 + 1)x + 1$$

und dies soll stets gleich einer Quadratzahl n^2 mit $n \in \mathbb{Z}$ sein. Wegen $10^3 + 1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und da 7,11,13 Primzahlen sind, folgt daraus $n \equiv \pm 1 \bmod 7$, $n \equiv \pm 1 \bmod 11$, $n \equiv \pm 1 \bmod 13$. Dies liefert acht mögliche Kongruenzsysteme modulo 7, 11 und 13, die n erfüllen soll.

Da 7,11,13 teilerfremd sind, kann man diese Kongruenzsysteme mit dem chinesischen Restsatz für ganze Zahlen lösen (den man schnell und elementar beweisen kann und der daher sicherlich in der Olympiade benutzt werden kann, da es sich um die Klasse 12 und Stufe 4 handelt).

Nach dem chinesischen Restsatz gilt $n = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i + k \cdot M$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist und a_i die Kongruenzen bezeichnet (hier 1 oder -1). Außerdem ist $e_i = s_i \cdot M_i$, mit $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $m_3 = 13$ und $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, $M_i = M/m_i$. s_i ist eine ganze Zahl, die sich aus dem erweiterten euklidischen Algorithmus ergibt: Da m_i und M_i teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen r_i, s_i mit $r_i \cdot m_i + s_i \cdot M_i = 1$. Man findet mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus $(r_1,s_1) = (41,-2)$, $(r_2,s_2) = (-33,4)$, $(r_3,s_3) = (6,1)$ und erhält mit dem chinesischen Restsatz die Lösungen für n für die acht Kongruenzsysteme zu $n \in \{1,-1,573,-573,727,-727,155,-155\} + 7 \cdot 11 \cdot 13\,\mathbb{Z}$.

Wegen $10^5 < n^2 < 10^6$ folgt $316 < n < 1000$ oder $-1000 < n < -316$. Deshalb kommen für n nur folgende Zahlen in Frage (erinnere $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$): 573, $-573 + 1001 = 428$, $-155 + 1001 = 846$, 727 (hier nur die positiven aufgezählt).
Quadrieren liefert $y = 328329$, $y = 183184$, $y = 715716$, $y = 528529$ und dementsprechend $x = 328$, $x = 183$, $x = 715$, $x = 528$, was alle gesuchten Lösungen sind.

Aufgabe 231246B:
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ und k natürliche $a_1, a_2, ..., a_k$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind, gibt, so dass

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1984 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$

gilt. Falls das zutrifft, gebe man solche natürlichen Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k$ an.

Lösung von OlgaBarati:
Hier macht es Sinn, eine Aufteilung in 2er Potenzen vorzunehmen, da deren Quotienten wiederum einfach zu addieren sind.
Mit der fortwährenden Teilung von 1984 : 2 ergibt sich das Produkt von $2^6 \cdot 31 = 64 \cdot 31$. Die Multiplikation $32 + 64 \cdot 30 = 1952$ ergibt eine Summe der Quotienten $\frac{1}{32} + \sum_1^{30} \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$. Die Differenz von $1984 - 1952 = 32$ bildet mit der Aufteilung in $4 \cdot 8 = 32$ die Summe der Quotienten $\sum_1^4 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ und somit ist $k = 30+1+4 = 35$

$$\sum_1^{30} 64 + \sum_1^{1} 32 + \sum_1^{4} 8 = 1984$$

und

$$\sum_1^{30} \frac{1}{64} + \sum_1^{1} \frac{1}{32} + \sum_1^{4} \frac{1}{8} = 1$$

Aufgabe 251246A:
Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei Spiegelzahl genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d. h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358853, 27672, 44444 Spiegelzahlen.
Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

Lösung von cyrix:
Wir zeigen im Folgenden, dass für jede solche Zahl a eine durch a teilbare Spiegelzahl existiert:

Es sei b die Zahl, die aus a entsteht, wenn man aus ihrer Primfaktorzerlegung alle Faktoren 2 und 5 (sofern enthalten) streicht. Damit ist $\text{ggT}(b{,}10) = 1$ und nach dem Satz von Euler-Fermat gilt $10^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$, wobei $\phi(b)$ die zu b teilerfremden Restklassen modulo b angibt (also die Anzahl der natürlichen Zahlen $1 \leq n \leq b$ mit $\text{ggT}(b{,}n) = 1$). Offensichtlich ist $\phi(b) \geq 1$ für alle natürlichen Zahlen $b \geq 1$. Auch gilt offenbar für jede natürliche Zahl k, dass $10^{k \cdot \phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$ gilt.

Da a nicht durch 10 teilbar ist, ist $\frac{a}{b}$ eine reine Zweier- oder Fünferpotenz (oder 1). Wegen $a < 100$ und $2^7 = 128 > 100$ sowie $5^7 > 5^3 = 125 > 100$ ist eine natürliche Zahl genau dann durch a teilbar, wenn sie sowohl durch b teilbar ist als auch die aus ihren letzten 6 Ziffern gebildete Zahl durch $\frac{a}{b}$. (Dies nutzt die Teilerfremdheit von b und $\frac{a}{b}$ aus.)

Es sei c das kleinste Vielfache von $\phi(b)$, welches größer oder gleich 6 ist. Weiter definieren wir s die (ggf. um führende Nullen ergänzte) c-stellige Zahl mit Wert $\frac{a}{b}$ und t die c-stellige Zahl, die durch Spiegelung aus s entsteht. Dann besitzt t keine führende Null, da dies die Einerziffer von s ist. Wäre diese aber 0, so s und damit a durch 10 teilbar.
Weiterhin sei m die kleinste positive ganze Zahl, die $s + 10t + m \equiv 0 \pmod{b}$ erfüllt. Abschließend sei die natürliche Zahl n wie folgt definiert:

$$n = s + \sum_{k=1}^{m} 10^{k \cdot c} + t \cdot 10^{m \cdot c + 1}$$

Dann ist n eine Spiegelzahl: Bei der Definition der Zahl n als die angegebene Summe treten keine Summen von Ziffern an der gleichen Stelle auf: Da s nur c-stellig ist, aber alle weiteren Summanden der Summe mindestens den Faktor 10^c beinhalten, gibt es hier keine Überlappung.

Auch die einzelnen weiteren Summanden besitzen offenbar jeweils unterschiedliche Zehnerpotenzen und abschließend wird t mit der größten in der Definition vorkommenden Zehnerpotenz multipliziert. Also können wir die Ziffern einzeln vergleichen und es gilt nach Konstruktion, dass die erste Ziffer von n gleich der von t und damit der letzten von s und damit von n ist. Dies gilt auch für die entsprechenden zweiten, dritten, $\dots$, und c-ten Ziffern.

Darüber hinaus sind alle weiteren Ziffern von n gleich Null, es sei denn, die entsprechende Stelle wurde mit einem Summanden der Form $10^{k\cdot c}$ auf Eins gesetzt. Diese liegen aber symmetrisch zur Stelle mit Exponenten $\frac{m+1}{2}\cdot c$. Da t eine c-stellige Zahl ist, besitzt n genau $(m+1)\cdot c$ Stellen, sodass die Symmetrie genau „in der Mitte“ der Zahl liegt, es sich bei n also um eine Spiegelzahl handelt.

Weiterhin ist n durch $\frac{a}{b}$ teilbar, da s dadurch teilbar ist sowie jede Zehnerpotenz mit Exponenten von mindestens 6. Nach Definition ist aber $c \geq 6$, sodass diese Teilbarkeitsaussage für jeden Summanden in der Definition von n und damit auch für n selbst gilt.

Schließlich ist nach Konstruktion auch $n \equiv s + \sum_{k=1}^{m} 1 + 10 \cdot t \equiv 0 \pmod{b}$ und somit n durch b, also insgesamt auch durch a teilbar, $\square$.

Aufgabe 321242:
Man beweise, dass ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Lösung von Kornkreis:
Lemma 1: Wenn n eine positive Kubikzahl ist, kann man den Würfel immer in n Würfel zerlegen. (offensichtlich, man nehme dazu gleich große Würfel und ordne sie schichtweise quadratisch an, mit den Seitenflächen parallel zu denen des großen Würfels)

Bemerkung 1: Überdies kann man in so einer schichtweisen quadratischen Zerlegung in n gleichgroße Würfel eine Anzahl $k < n$ von Würfeln zusammenfassen, wenn k eine positive Kubikzahl ist (offensichtlich). Damit ergibt sich dann eine Zerlegung in $n - k + 1$ Würfel. Dies werden wir später noch benutzen.

Lemma 2: Wenn man eine Zerlegung in n Würfel hat, so kann man immer eine Zerlegung in $n+7$ Würfel erzielen. Beweis: Zerlege einen der Teilwürfel in 8 Würfel (was nach Lemma 1 geht), damit ist die Anzahl der Teilwürfel um 7 gestiegen.

Bemerkung 2: Daraus folgt, dass die Behauptung der Aufgabenstellung gezeigt ist, wenn man für jedes $r \in \{0,...,6\}$ eine Zerlegung in $n \leq 100$ Würfel hat, mit $n \equiv r \bmod 7$. Wende dazu iterativ Lemma 2 ein.

Die folgenden 7er-Reste von n für Zerlegungen in $n \leq 100$ Würfel können einfach erzielt werden (links steht der 7er-Rest, daneben n, zusammen mit der Rechenvorschrift, die der Zerlegung entspricht):

Rest 1: $1 = 1^3$; Rest 6: $27 = 3^3$

Um die anderen 7er-Reste zu erhalten, zerlegen wir den Würfel in 6^3 gleichgroße Teilwürfel und fasse einige dieser jeweils zu einem größeren Würfel zusammen (siehe Bemerkung 1).
Wir betrachten fünf verschiedene Möglichkeiten, bei denen wir jeweils 2, 3,..., 6 27er-Würfel zusammenfassen. Damit erhalten wir Zerlegungen in

$$6^3 - 2\cdot 27 + 2, \quad 6^3 - 3\cdot 27 + 3, \quad ..., \quad 6^3 - 6\cdot 27 + 6$$

Würfel. Da sowohl 27 als auch 6^3 den 7er-Rest -1 haben, erhalten wir damit die 7er-Reste 3, 5, 0, 2, 4. Wir müssen nur noch die Anzahl der Würfel weiter verkleinern, um unter 100 zu kommen, ohne den 7er-Rest zu ändern.

Dies geht, indem wir weiter einige 8er-Würfel zusammenfassen, wodurch sich die Gesamtzahl der Würfel immer jeweils um 7 verringert. Konkret erhalten wir die folgenden Zerlegungen (kodiert mithilfe der Rechenvorschrift; man überzeugt sich leicht, dass die angegebenen Zusammenfassungen tatsächlich möglich sind):

Rest 3: $59 = 6^3 - 2 \cdot 27 + 2 - 15 \cdot 8 + 15$,
Rest 5: $61 = 6^3 - 3 \cdot 27 + 3 - 11 \cdot 8 + 11$,
Rest 0: $49 = 6^3 - 4 \cdot 27 + 4 - 9 \cdot 8 + 9$,
Rest 2: $51 = 6^3 - 5 \cdot 27 + 5 - 5 \cdot 8 + 5$, Rest 4: $39 = 6^3 - 6 \cdot 27 + 6 - 3 \cdot 8 + 3$.

Da die größten dieser Zahlen, 59 und 61, 7er-Rest 3 bzw. 5 haben, und alle anderen n kleiner als 55 (mit 7er-Rest 6) sind, können wir (nach Bemerkung 2) für jedes $n \geq 55$ eine Zerlegung des Würfels in n Teilwürfel finden. Insbesondere folgt die Behauptung der Aufgabenstellung.

Aufgabe 341241:
Man beweise:
Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl x die Zahl $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses x und jede positive ganze Zahl n auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

Lösung von Kornkreis:
Beweis mit Induktion:
Für $n = 1$ gilt die Aussage nach Voraussetzung. Sei $n \geq 1$ und die Aussage für alle Exponenten 1,...,n bewiesen. Wir haben

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}},$$

sodass $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sich als Summe von Produkten ganzer Zahlen zusammensetzt. Induktiv folgt die Behauptung.