ANALYSIS

für Ingenieur- und Fachschulen

ANALYSIS

für Ingenieur- und Fachschulen

von W. Leupold, R. Conrad, H. Najuch, Dr. S. Hösel †,

Prof. R. Fucke, H. Nickel, H. Mende

4. Auflage. Mit 358 Bildern und 840 Aufgaben mit Lösungen

fv

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Lehrbücher der Mathematik

Herausgegeben im Auftrage des Ministeriums für das Hoch- und Fachschulwesen

von Prof. Dr. K. Bögel †, H. Birnbaum, Dr.-Ing. H. Götzke, H. Kreul, W. Leupold, Dr. F. Müller, Prof. Dr. P. H. Müller

Als Lehrbuch
an den Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt
Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen
Berlin, den 4. 9. 1965

AUTOREN

Federführung:

Fachschuldozent Dipl.-Ing. Wilhelm Leupold
Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden

Autoren:

Fachschuldozent Rudolf Conrad
Industrieinstitut der Technischen Universität, Dresden
(1. bis 3. 8.)

Dipl.-Ing. Herbert Najuch
Institut für Werkzeugmaschinen, Karl-Marx-Stadt
(3. 9. bis 6.)

Dr. rer. nat. Siegfried Hösel †
Technische Hochschule, Karl-Marx-Stadt
(7. bis 12.)

Professor Rudolf Fucke
Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
(13., 15., 16.)

Fachschuldozent Heinz Nickel
Ingenieurschule für Geodäsie und Kartographie, Dresden
(14., 21., 22.)

Fachschuldozent Horst Mende
Ingenieurschule für Elektrotechnik, Mittweida
(17. bis 20.)

Fachschuldozent Dipl.-Ing. Wilhelm Leupold
Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
(23. bis 25.)

Die Begutachtung und Lektorierung des Manuskripts wurde durchgeführt von:
Dipl.-Math. Helmut Grabowski, Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden
Dipl.-Math. Siegfried Völkel, Ingenieurschule für Eisenbahnwesen, Dresden

Redaktionsschluß 15. 7. 1968
ES 20 C 2 (19 B 1)

Copyright by VEB Fachbuchverlag Leipzig 1968

Verlagslektor: Alfred Sommer
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 74 Altenburg
Fotomechanischer Nachdruck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114 – 210/40/68
12,–

GELEITWORT

Wenn sich Wissenschaft und Technik planmäßig und schnell weiterentwickeln sollen, so ist es unumgänglich, daß alle Bereiche der Volkswirtschaft in immer stärkerem Maße mathematisch durchdrungen werden. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde am 1. 9. 1963 an den Ingenieur- und Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik ein neuer Lehrplan für das Unterrichtsfach Mathematik eingeführt, in dem wesentlich mehr als vorher Wert auf eine gediegene Grundlagenausbildung gelegt wurde, die das Erfassen komplizierterer mathematischer Zusammenhänge wesentlich erleichtert und damit die Voraussetzung für die erfolgreiche Lösung der in der Praxis auftretenden mathematischen Probleme schafft.

Die bisherigen Lehrbücher der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen erfüllten nicht mehr die Anforderungen, die der neue Lehrplan an Lehrer und Studierende stellt. Aus diesem Grunde wurde auf Veranlassung des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen in Zusammenarbeit mit der Zentralen Fachkommission für Mathematik ein Autorenkollektiv beauftragt, in möglichst kurzer Zeit ein dreibändiges Lehrbuch der Mathematik zu erarbeiten, durch das der Mathematikunterricht an den Schulen wirkungsvoll unterstützt werden kann.

Der nunmehr vorliegende zweite Band enthält die Teilgebiete Grundbegriffe der Analysis, Differential- und Integralrechnung, Unendliche Reihen, Fehler- und Ausgleichungsrechnung und Differentialgleichungen. Das Erscheinen dieses Bandes soll der Anlaß sein, den Autoren für die aufopferungsvolle Arbeit zu danken, die sie mit der Zusammenstellung des Manuskriptes übernommen haben. Besonderer Dank gilt auch den Herren Dipl.-Math. Grabowski und Dipl.-Math. Völkel, die in einer weit über das normale Ausmaß hinausgehenden Lektorentätigkeit das Manuskript vom Aufstellen der Disposition an bis zu seiner gründlichen Durchsicht beeinflußt haben.

Kurz nach dem Fertigstellen des Manuskriptes verstarb im Frühjahr 1964 der Autor des Teiles „Grundlagen der Integralrechnung", Herr Dr. Hösel. In seinem fachlichen Können, seinem steten Arbeitseifer, gepaart mit größter Zuverlässigkeit und Gewissenhaftigkeit, und als Erzieherpersönlichkeit möge er unseren Studierenden, für die dieses Buch geschrieben wurde, zum Vorbild dienen.

An die Benutzer dieses Buches sei die Bitte gerichtet, uns ihre Erfahrungen, Kritiken und Verbesserungsvorschläge mitzuteilen, die sie bei der Arbeit mit dem Buch gesammelt haben. Denn nur durch den gegenseitigen Erfahrungsaustausch zwischen Autoren und Leserschaft kann der Inhalt des Buches laufend verbessert werden.

Wir sind davon überzeugt, daß dieses Buch sowohl den Lehrern als auch den Studierenden des Direkt- und des Fernstudiums eine wertvolle Hilfe sein wird, und daß es die mathematischen Kenntnisse vermittelt, die durch die ständig sich weiterentwickelnde Technik von den Absolventen unserer Ingenieur- und Fachschulen gefordert werden müssen.

Zentrale Fachkommission für Mathematik
beim Institut für Fachschulwesen
der Deutschen Demokratischen Republik

INHALTSVERZEICHNIS

GRUNDBEGRIFFE DER ANALYSIS

1.	Funktionen	13
1.1.	Grundbegriffe der Mengenlehre	13
1.1.1.	Der Begriff der Menge	13
1.1.2.	Mengenrelationen	13
1.1.3.	Mengenoperationen	14
1.1.4.	Zahlenmengen und lineare Punktmengen	14
1.1.5.	Ebene und räumliche Punktmengen	17
1.2.	Der Begriff der Abbildung	20
1.2.1.	Das Mengenprodukt	20
1.2.2.	Die Abbildung als Teilmenge des Mengenprodukts	21
1.2.3.	Die inverse Abbildung	23
1.2.4.	Eindeutige und eineindeutige Abbildungen	23
	Aufgaben 1 bis 12	25
1.3.	Die Funktion	26
1.3.1.	Der Funktionsbegriff	26
1.3.2.	Arten der Darstellung reeller Funktionen	28
1.3.3.	Formen der analytischen Darstellung reeller Funktionen	30
1.3.4.	Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik und ihre graphische Darstellung	34
1.3.5.	Einteilung der reellen Funktionen	41
1.3.6.	Elementare Eigenschaften reeller Funktionen	45
1.3.7.	Die Umkehrfunktion	52
1.3.8.	Periodische Funktionen	56
1.3.9.	Die Newtonsche Interpolation	58
	Aufgaben 13 bis 35	59
2.	Folgen und Reihen; Grenzwert	74
2.1.	Folgen	74
2.1.1.	Der Begriff der Folge	74
2.1.2.	Arithmetische und geometrische Folgen	78
2.1.3.	Anwendungen der geometrischen Folge	84
	Aufgaben 36 bis 74	88
2.2.	Konvergenz, Divergenz einer Folge; Grenzwert	91
2.2.1.	Nullfolgen	91
2.2.2.	Der Grenzwert einer Zahlenfolge	94
2.2.3.	Die Zahl e	97
2.2.4.	Das Rechnen mit Grenzwerten	103
2.3.	Die unendliche geometrische Reihe	105
	Aufgaben 75 bis 94	108
2.4.	Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit	110
2.4.1.	Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$	110
2.4.2.	Die Stetigkeit einer Funktion	118
2.4.3.	Grenzwert des Funktionswertes für $x \to \pm \infty$	120
	Aufgaben 95 bis 100	122

GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

3. Einführung in die Differentialrechnung 124
3.1. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten 124
Aufgaben 101 bis 103 130
3.2. Die Ableitung der Potenzfunktion 131
3.3. Grundregeln der Differentiation 133
3.3.1. Vorbetrachtung 133
3.3.2. Die Ableitung einer konstanten Funktion 134
3.3.3. Die Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor 134
3.3.4. Die Ableitung der Summe mehrerer Funktionen 135
3.3.5. Die Ableitung des Produktes mehrerer Funktionen 136
3.3.6. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen 138
3.3.7. Ermittlung der Ableitung einer ganzrationalen Funktion an einer Stelle x_0 mittels des Hornerschen Schemas 140
Aufgaben 104 bis 133 141
3.4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen 145
3.4.1. Die Ableitung der Funktion $y = \sin x$ 145
3.4.2. Die Ableitung der Funktion $y = \cos x$ 145
3.4.3. Die Ableitungen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$ 146
3.5. Das Differential; der Differentialquotient 147
Aufgaben 134 bis 138 151
3.6. Die Ableitung der mittelbaren Funktion. Die Ableitung einer Funktion in impliziter Darstellung 151
3.7. Die Ableitung der logarithmischen und der Exponentialfunktion 156
3.8. Höhere Ableitungen 160
Aufgaben 139 bis 155 163
3.9. Graphische Differentiation 165
Aufgaben 156 bis 158 167

4. Untersuchung von Funktionen 168
4.1. Der geometrische Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer ersten und zweiten Ableitung 168
4.2. Extremwerte 171
4.3. Wendepunkte 174
4.4. Kurvendiskussionen 177
Aufgaben 159 bis 198 187

5. Anwendungen der Differentialrechnung 188
5.1. Extremwertaufgaben 188
Aufgaben 199 bis 220 192
5.2. Physikalisch-technische Anwendungen 194
Aufgaben 221 bis 223 196
5.3. Grenzwertbestimmung nach der Regel von de l'Hospital 197
Aufgaben 224 bis 243 199

6. Weitere transzendente Funktionen und ihre Ableitungen 200
6.1. Die Arcusfunktionen 200
6.1.1. Definition der Arcusfunktionen und ihre Darstellung 200
6.1.2. Differentiation der Arcusfunktionen 203
Aufgaben 244 bis 261 205
6.2. Die Hyperbelfunktionen 205
6.2.1. Definition der Hyperbelfunktionen und ihre Darstellung 205

6.2.2. Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen 208
6.2.3. Differentiation der Hyperbelfunktionen 208
Aufgaben 262 bis 273 209
6.3. Die Areafunktionen 210
6.3.1. Definition der Areafunktionen und ihre Darstellung 210
6.3.2. Differentiation der Areafunktionen 212
Aufgaben 274 bis 283 213
6.4. Beziehungen zwischen der gleichseitigen Hyperbel und den Hyperbelfunktionen . 214

7. Einführung in die Integralrechnung 215
7.1. Der Begriff des unbestimmten Integrals; Flächenfunktion 215
7.2. Das bestimmte Integral 219
7.3. Grundintegrale 226
7.4. Elementare Integrationsregeln 227
7.4.1. Vertauschung der Integrationsgrenzen 227
7.4.2. Integranden mit konstanten Faktoren 228
7.4.3. Integration einer algebraischen Summe 228
7.4.4. Zerlegung eines Integrals in eine Summe von Integralen durch Teilung des Integrationsbereiches 228
Aufgaben 284 bis 338 230

8. Geometrische Anwendungen des Integrals 232
8.1. Flächenberechnung (Quadratur) 232
Aufgaben 339 bis 353 239
8.2. Rauminhaltsberechnung (Kubatur) 240
8.2.1. Berechnung des Inhalts der Rotationskörper 240
8.2.2. Berechnung des Inhalts einiger anderer Körper 242
Aufgaben 354 bis 364 244
8.3. Bogenlängenberechnung (Rektifikation) 244
8.4. Mantelflächenberechnung (Komplanation) von Rotationskörpern 246

9. Integrationsverfahren 247
9.1. Integration durch Substitution 248
9.1.1. Allgemeine Vorbetrachtung 248
9.1.2. Integrale der Form $\int f(ax+b)\,dx$ 249
9.1.3. Integrale der Form $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ 254
9.1.4. Integrale der Form $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$ 256
9.1.5. Substitution trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen 259
9.1.6. Integrale der Form $\int R(\sin x;\cos x;\tan x;\cot x)\,dx$ 263
Aufgaben 365 bis 466 264
9.2. Partielle Integration 269
Aufgaben 467 bis 490 275
9.3. Integration durch Partialbruchzerlegung 276
9.3.1. Allgemeine Vorbetrachtung 276
9.3.2. Der Nenner des Integranden hat nur reelle einfache Nullstellen 278
9.3.3. Der Nenner des Integranden hat mehrfache reelle Nullstellen 283
9.3.4. Der Nenner des Integranden enthält auch komplexe einfache Nullstellen 286
Aufgaben 491 bis 512 290

10. Die Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe des bestimmten Integrals 291
Aufgaben 513 bis 514 294

11. Physikalisch-technische Anwendungen des Integrals 294
11.1. Das Arbeitsintegral 294
11.2. Statisches Moment und Schwerpunkt 297
11.2.1. Statisches Moment und Schwerpunkt von Flächen 298
11.2.2. Statisches Moment und Schwerpunkt von Körpern 303
11.2.3. Statisches Moment und Schwerpunkt von ebenen Kurven 306
11.2.4. Die Regeln von GULDIN 307
Aufgaben 515 bis 535 308
11.3. Trägheitsmomente 309
11.3.1. Flächenträgheitsmoment 309
11.3.2. Massenträgheitsmoment 313
Aufgaben 536 bis 549 317
11.4. Der radioaktive Zerfall 319
11.5. Der Träger gleicher Zugfestigkeit 320
11.6. Der senkrechte Wurf nach oben 321
11.7. Arbeit des Wechselstroms 322
11.8. Die chemische Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration 323
11.9. Die Ausflußzeit von Flüssigkeiten bei abnehmendem Flüssigkeitsstand 324

12. Näherungsweise Integration 326
12.1. Rechnerisches Verfahren; SIMPSONsche Formel 326
Aufgaben 550 bis 555 330
12.2. Die graphische Integration 330
12.3. Maschinelle Integration 335

WEITERER AUSBAU DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

13. Differentialgeometrie 338
13.1. Formen der analytischen Darstellung von Funktionen 338
13.1.1. Parameterdarstellung 338
13.1.2. Darstellung in Polarkoordinaten 339
13.2. Differentiation 341
13.2.1. Differentiation bei Parameterdarstellung 341
13.2.2. Differentiation bei Darstellung in Polarkoordinaten 342
Aufgaben 556 bis 567 344
13.3. Die Bogenlänge 345
Aufgaben 568 bis 574 349
13.4. Die Sektorenformeln 349
Aufgaben 575 bis 579 352
13.5. Berechnung von Drehkörpern 352
13.5.1. Kubatur (Volumenberechnung) 352
13.5.2. Mantelflächen 355
Aufgaben 580 bis 584 356
13.6. Krümmung ebener Kurven 357
13.6.1. Definition der Krümmung 357
13.6.2. Krümmungskreis; Evolute und Evolvente 359
Aufgaben 585 bis 593 363

14. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen 364
14.1. Definition und geometrische Veranschaulichung 364
Aufgaben 594 bis 595 369

14.2. Partielle Ableitungen 369
Aufgaben 596 bis 625 374
14.3. Das totale Differential 375
Aufgaben 626 bis 637 377
14.4. Die Ableitung von Funktionen mit impliziter Darstellung 378
Aufgaben 638 bis 647 381
14.5. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher . . . 381
Aufgaben 648 bis 660 385
14.6. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen 386
Aufgaben 661 bis 672 392

15. Mehrfache Integrale 393
15.1. Flächenberechnung 393
15.1.1. Cartesische Koordinaten 393
15.1.2. Angepaßte Koordinaten 395
Aufgaben 673 bis 676 396
15.2. Volumenberechnung 396
15.2.1. Cartesische Koordinaten 396
15.2.2. Angepaßte Koordinaten 398
Aufgaben 677 bis 682 401
15.3. Schwerpunkt- und Momentenberechnung 402
15.3.1. Schwerpunkte und Momente von Bögen 402
15.3.2. Schwerpunkte und Momente von Flächen 406
15.3.3. Schwerpunkte und Momente von Volumina 411
Aufgaben 683 bis 697 415

16. Linienintegrale 416
16.1. Vektorielle Darstellung von Kurven und Feldern 416
16.2. Differentiation und Integration von Vektoren 419
16.3. Das Linienintegral 421
16.4. Das Linienintegral im Potentialfeld 424
Aufgaben 698 bis 702 428

UNENDLICHE REIHEN

17. Grundbegriffe 429
17.1. Definition der unendlichen Reihe 429
17.2. Konvergenz, Divergenz 430

18. Konvergenzkriterien 431
Aufgaben 703 bis 710 436

19. Potenzreihen 436
19.1. Erklärung, Konvergenzradius, Konvergenzbereich 436
Aufgaben 711 bis 714 438
19.2. Die Maclaurinsche Form der Reihe von Taylor 439
19.3. Die Hauptform der Reihe von Taylor 441
Aufgaben 715 bis 716 442
19.4. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen 443
Aufgaben 717 bis 721 448
19.5. Entwicklung der Binomialreihe 448
19.6. Reihenentwicklung durch Integration 450
Aufgaben 722 bis 724 453

20. Anwendungen . . . 454
20.1. Näherungsformeln . . . 454
20.1.1 Wurzelausdrücke . . . 454
20.1.2. Besondere Fälle . . . 455
20.2. Integration nach vorhergegangener Reihenentwicklung . . . 459
Aufgaben 725 bis 734 . . . 467

EINFÜHRUNG IN DIE FEHLER- UND AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

21. Fehlerrechnung für wahre Fehler . . . 469
21.1. Fehlerarten . . . 469
21.2. Wahre Fehler . . . 470
Aufgaben 735 bis 747 . . . 475

22. Ausgleichungsrechnung . . . 477
22.1. Allgemeines zur Ausgleichungsrechnung . . . 477
22.2. Ausgleichung direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit . . . 478
22.3. Der mittlere Fehler als Genauigkeitsmaß . . . 480
Aufgaben 748 bis 757 . . . 486
22.4. Ausgleichung direkter Beobachtungen verschiedener Genauigkeit . . . 487
Aufgaben 758 bis 760 . . . 491
22.5. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen . . . 492
Aufgaben 761 bis 767 . . . 497
22.6. Ausgleichung bedingter Beobachtungen . . . 497
Aufgabe 768 . . . 500

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

23. Grundbegriffe. Aufstellen von Differentialgleichungen . . . 501
23.1. Definition der Differentialgleichung . . . 501
23.2. Aufstellen von Differentialgleichungen . . . 506
23.3. Differentialgleichung einer Kurvenschar . . . 511

24. Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 513
24.1. Geometrische Deutung . . . 513
24.2. Isoklinenverfahren . . . 514
24.3. Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen . . . 516
24.4. Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 519
24.5. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 524
24.6. Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . 531
Aufgaben 769 bis 819 . . . 538

25. Lineare Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 540
25.1. Einführen eines linearen Differentialoperators . . . 540
25.2. Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . 542
25.3. Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . 550
25.4. Lineare Differentialgleichungen 3. und höherer Ordnung . . . 561
Aufgaben 820 bis 840 . . . 563

Lösungen zu den Aufgaben 1 bis 840 . . . 564

Sachwortverzeichnis . . . 618

1. Funktionen

1.1. Grundbegriffe der Mengenlehre[1])

1.1.1. Der Begriff der Menge

Als **Menge** bezeichnet man jede Zusammenfassung einer Anzahl einzelner, wohlunterschiedener Objekte mit gemeinsamem Merkmal zu einer Gesamtheit.
Man sieht eine Menge als gegeben an, wenn bezüglich eines beliebigen Objektes auf Grund einer Eigenschaft oder Vorschrift genau eine der beiden Aussagen wahr ist:
das Objekt ist Element der Menge,
das Objekt ist nicht Element der Menge.
Eine Menge, die kein Element enthält, wird **leere Menge** genannt und mit $\emptyset$ bezeichnet.
Einige häufig auftretende Mengen sollen durch bestimmte Buchstaben angegeben werden. Es bezeichnen:

N die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null),
G die Menge der ganzen Zahlen,
R die Menge der reellen Zahlen.

Andere Mengen können auf zwei Arten angegeben werden. Entweder werden die Elemente der in Rede stehenden Menge aufgeführt, z. B.

$$A = \{-8, 3, 5, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\},$$

oder es wird die Eigenschaft angegeben, auf Grund der ein Objekt Element der Menge ist. So bedeutet

$$A = \{x \mid |x| < 1, x \in R\}:$$

die Menge A enthält alle reellen Zahlen, deren Betrag kleiner als 1 ist.

1.1.2. Mengenrelationen

Gleichheit

Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn A dieselben Elemente wie B besitzt. Im Fall $A = B$ gilt also stets:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

[1]) Vgl. auch die ausführlichere Darstellung im Band „Algebra und Geometrie"

Inklusion

Ist jedes Element von A auch Element von B, so heißt A **Teilmenge** oder **Untermenge** von B und B **Obermenge** von A:

$$A \subset B \quad \text{bzw.} \quad B \supset A.$$

Insbesondere gilt

$$A \subset A.$$

Ist $A \subset B$ und $A \neq B$, so heißt A *echte Teilmenge* von B.

1.1.3. Mengenoperationen

Die Menge, die sämtliche Elemente zweier Mengen A und B enthält, heißt die **Vereinigung** der Mengen A und B:

$$A \cup B.$$

Ein Element, welches in der Vereinigungsmenge $A \cup B$ liegt, muß also in mindestens einer der beiden Mengen A und B liegen. Andererseits liegt ein Element, das in mindestens einer der beiden Mengen A und B enthalten ist, auch sicher in der Vereinigungsmenge $A \cup B$. Es gilt also:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B.$$

Die Menge der Elemente, die zwei gegebenen Mengen A und B gemeinsam sind, nennt man den **Durchschnitt** der Mengen A und B:

$$A \cap B.$$

Ein Element x ist Element der Durchschnittsmenge, wenn es zugleich in A und in B liegt. Es gilt also

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{und} \quad x \in B.$$

Der Durchschnitt disjunkter (d. h. elementfremder) Mengen ist leer.
Die **Differenz** $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist die Menge, die man erhält, wenn aus A alle die Elemente entfernt werden, die auch in B enthalten sind. Es gilt:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{und} \quad x \notin B.$$

Sind A und B disjunkt, so gilt $A \setminus B = A$. Für $A \subset B$ wird $A \setminus B = \emptyset$.

1.1.4. Zahlenmengen und lineare Punktmengen

Auf einer Geraden g wählen wir einen Anfangspunkt O, tragen von O aus nach rechts eine Einsstrecke OE mit der Maßzahl 1 ab und ordnen dem Punkt O die Zahl 0, dem Punkt E die Zahl 1 zu (Bild 1). Ist auf der Geraden g ein Punkt P_1 gegeben, so können wir mit Hilfe der gewählten Einsstrecke OE die Länge der Strecke OP_1 messen und dem

Punkt P_1 die so gewonnene Maßzahl m der Strecke OP_1 zuordnen. In Bild 1 sind an den Punkten O, E und P_1 die ihnen zugeordneten Maßzahlen 0, 1 und m angeschrieben. Der Punkt O teilt die Gerade g in zwei Hälften. Die Hälfte, die den Punkt E enthält, nennen wir die positive, die andere die negative Hälfte der Geraden. Je nachdem, ob ein Punkt auf der positiven oder negativen Hälfte der Geraden liegt, geben wir der ihm zugeordneten Maßzahl das positive oder negative Vorzeichen.

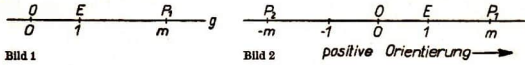


Bild 1 Bild 2

Auf diese Weise wird jedem Punkt der Geraden g eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet. Umgekehrt entspricht auch jeder reellen Zahl ein Punkt P der Geraden g (Bild 2). Eine solche umkehrbar eindeutige Zuordnung bezeichnet man als eineindeutig. Das Ergebnis dieser Überlegungen läßt sich kurz so zusammenfassen:

Die reellen Zahlen lassen sich eineindeutig den Punkten einer orientierten Geraden g mit gewählter Einsstrecke OE zuordnen.

Die Orientierung einer Geraden wird gewöhnlich durch eine in die positive Richtung weisende Pfeilspitze gekennzeichnet.
Nun ist es möglich, Zahlenmengen als lineare Punktmengen (und umgekehrt) darzustellen.
Wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung von Punkten und Zahlen wird oft zwischen Zahlenmengen und Punktmengen nicht streng unterschieden.

BEISPIELE

1. Der in Bild 3 dargestellten Punktmenge $\{P_1, P_2, P_3\}$ entspricht die Zahlenmenge $\{-1, 2, 3\}$.
2. N sei die Menge der natürlichen Zahlen. In Bild 4 ist ein Teil der Zahlenmenge $B = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$ dargestellt.
3. Bild 5 zeigt die Darstellung der unendlichen Zahlenmenge $A = \{x \mid a < x < b\}$. Die Zahlen a und b gehören nicht der Zahlenmenge an.

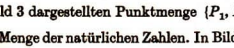


Bild 3

Bild 4

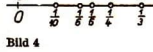


Bild 5

Im letzten Beispiel war die Menge aller Zahlen x zwischen a und b gegeben. Eine solche zwischen zwei Zahlen a und b gelegene Zahlenmenge wird **Intervall** genannt;

a und b heißen seine End- oder Randpunkte. Intervalle werden wir meist mit J bezeichnen.
Je nachdem, ob die Randpunkte a und b zum Intervall gehören, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $a \in J, \quad b \in J$

Die Randpunkte a und b gehören dem Intervall J an. Ein solches Intervall heißt *abgeschlossen* und wird durch $[a, b]$ oder $a \leqq x \leqq b$ bezeichnet (Bild 6).

b) $a \notin J, \quad b \notin J$

Die Randpunkte a und b gehören nicht zum Intervall. Ein solches Intervall wird als *offen* bezeichnet und durch (a, b) oder $a < x < b$ angegeben (Bild 7).

Bild 6

Bild 7

Bild 8

c) $a \notin J, \quad b \in J$ oder $a \in J, \quad b \notin J$

Es gehört nur eine der beiden Zahlen a und b dem Intervall an. Im Falle $a \notin J$, $b \in J$ spricht man von einem links offenen und rechts abgeschlossenen Intervall und bezeichnet es durch $(a, b]$ oder $a < x \leqq b$ (Bild 8).

Das Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist durch die Zahlen a und b eingeschränkt und wird deshalb *beschränkt* genannt. Neben beschränkten Intervallen sind auch solche zu betrachten, die rechts, links oder beiderseits keiner Beschränkung unterworfen sind. Solche *unbeschränkten* Intervalle schreibt man unter Verwendung des Zeichens ∞ (gelesen: unendlich):[1])

$$(a, +\infty), \qquad [a, +\infty), \qquad (-\infty, a), \qquad (-\infty, a], \qquad (-\infty, +\infty)$$

bzw. $a < x < +\infty$, $a \leqq x < +\infty$, $-\infty < x < a$, $-\infty < x \leqq a$, $-\infty < x < +\infty$

oder auch $x > a$, $x \geqq a$, $x < a$, $x \leqq a$, x beliebig.

Ein offenes Intervall (a, b) wird **Umgebung** des Punktes x_0 genannt, wenn x_0 ein Punkt des Intervalls ist, so daß also $a < x_0 < b$ gilt. Rechts und links von x_0 liegen also noch Punkte des Intervalls.

BEISPIELE

1. Die Intervalle $(-2, 1)$, $(-10^{-5}, 10^{-6})$ sind Umgebungen von $x_0 = 0$.
2. Das Intervall $[a, b]$ ist weder für a noch für b eine Umgebung, da links von a und rechts von b keine Punkte des Intervalls liegen.

[1]) Das Zeichen ∞ bedeutet keine Zahl. In dem hier vorliegenden Sachverhalt wird ausgedrückt, daß z. B. das Intervall $(a, +\infty)$ keinen durch eine bestimmte Zahl angebbaren rechten Randpunkt hat. Wie groß auch im Falle $(a, +\infty)$ ein Wert $x > a$ gewählt wird, stets erstreckt sich rechts von x noch ein unbegrenzt großer Teil des Intervalls. In Abschnitt 2. kann die Bedeutung des Zeichens ∞ genauer gefaßt werden

Man betrachtet mitunter auch *einseitige* Umgebungen. So spricht man im Falle

$$x_0 \leqq x < x_0 + \varepsilon \qquad (x_0 - \varepsilon < x \leqq x_0)$$

mit $\varepsilon > 0$ von einer rechtsseitigen (linksseitigen) Umgebung des Punktes x_0.

1.1.5. Ebene und räumliche Punktmengen

1.1.5.1. Das cartesische Koordinatensystem

Neben Punktmengen auf einer Geraden sind auch Punktmengen in der Ebene und im Raum zu betrachten. Um Punkte einer orientierten Geraden zahlenmäßig erfassen zu können, hatten wir durch Angabe eines Punktes O und einer Einsstrecke OE ein Bezugssystem auf der Geraden festgelegt. Dadurch konnte jedem Punkt der Geraden eine reelle Zahl, die **Koordinate** des Punktes, zugeordnet werden.
Durch Einführen eines geeigneten Bezugssystems lassen sich auch Punkte in der Ebene und im Raum zahlenmäßig erfassen. In der Ebene wählen wir zu diesem Zweck zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden[1]). Bezugspunkt O soll für beide Geraden ihr Schnittpunkt sein. Durch die Wahl der Einspunkte E_x und E_y wird auf jeder Geraden die Länge der Einheit festgelegt und beiden Geraden eine Orientierung gegeben (Bild 9). Das so gebildete Bezugssystem heißt **cartesisches Koordinatensystem**; die waagerechte Gerade wird *Abszissenachse* oder x-Achse, die senkrechte Gerade *Ordinatenachse* oder y-Achse genannt. Die den Punkten der Geraden zugeordneten Maßzahlen bezeichnet man dementsprechend als *Abszisse* bzw. *Ordinate*. Abszissen- und Ordinatenachse zerlegen die Ebene in vier Quadranten, die, dem mathematisch positiven Drehsinn folgend und mit dem Quadranten zwischen positiver x-Achse und positiver y-Achse beginnend, der Reihe nach mit I, II, III, IV bezeichnet werden.

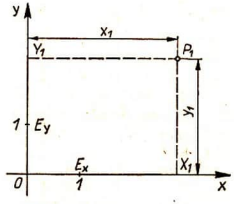


Bild 9

Ein Punkt P_1 der Ebene, die durch diese Koordinatenachsen aufgespannt wird, läßt sich nun zahlenmäßig wie folgt erfassen:
Von dem Punkt P_1 werden die Lote auf die Koordinatenachsen gefällt. Die Fußpunkte X_1 und Y_1 der Lote haben auf ihrer Koordinatenachse die Abszisse x_1 bzw. die Ordinate y_1. Durch P_1 sind also eindeutig zwei Zahlen x_1 und y_1, die **Koordinaten** des Punktes, bestimmt. Umgekehrt ist auch durch ein Zahlenpaar $(x; y)$ eindeutig ein Punkt P der Ebene festgelegt, für den man $P(x; y)$ schreibt.

Das cartesische Koordinatensystem vermittelt eine eineindeutige Zuordnung der Punkte der Ebene zu den Zahlenpaaren $(x; y)$.

Um einen Punkt im Raum eindeutig festzulegen, benötigt man eine dritte Koordinate. Dazu legt man durch den Punkt O eine dritte Koordinatenachse, z-Achse genannt,

[1]) Auf andere mögliche Bezugssysteme wird später eingegangen

senkrecht zur x,y-Ebene. Für die positive Orientierung der z-Achse gibt es zwei Möglichkeiten (Bilder 10a, b). Bild 10a stellt ein sogenanntes *Rechtssystem*, Bild 10b ein *Linkssystem* dar. Bei einem Rechtssystem zeigt die positive Richtung der z-Achse in die Richtung, in der eine rechtsgängige Schraube fortschreitet, wenn man die x-Achse auf dem kürzesten Wege in die Lage der y-Achse dreht. Beim Linkssystem zeigt die positive Richtung der z-Achse bei dieser Bewegung in die Fortschreitungsrichtung einer linksgängigen Schraube. Spreizt man Zeigefinger, Mittelfinger und Daumen der

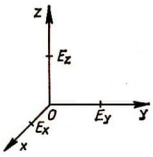


Bild 10a

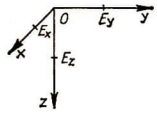


Bild 10b

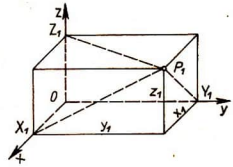


Bild 11

rechten bzw. linken Hand rechtwinklig zueinander, so entsprechen sie in dieser Reihenfolge der x-, y- und z-Achse eines Rechts- bzw. Linkssystems. Wir werden ausschließlich das Rechtssystem verwenden.

Jeweils zwei Achsen spannen eine Koordinatenebene auf: die x,y-, die x,z- und die y,z-Ebene. Durch die drei Koordinatenebenen wird der Raum in acht *Oktanten* zerlegt.

Die Koordinaten x_1, y_1, z_1 eines Raumpunktes P_1 sind wieder durch die Fußpunkte X_1, Y_1, Z_1 der Lote auf die Koordinatenachsen gegeben. Die Koordinate z_1 gibt den Abstand des Punktes P_1 von der x,y-Ebene an (vgl. Bild 11). Die Zuordnung der Raumpunkte zu den Zahlentripeln $(x; y; z)$ ist eineindeutig.

Das räumliche cartesische Koordinatensystem vermittelt eine eineindeutige Zuordnung der Punkte des Raumes zu den Zahlentripeln $(x; y; z)$.

1.1.5.2. Beispiele von Zahlen- und Punktmengen

Die eineindeutige Zuordnung von Punkten und Zahlenpaaren bzw. Zahlentripeln ist vor allem deshalb von Bedeutung, weil sich dadurch geometrische Gebilde zahlenmäßig erfassen und umgekehrt zahlenmäßig gegebene Beziehungen geometrisch deuten lassen. Wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung wird, wie schon erwähnt, zwischen Zahlen- und Punktmengen häufig nicht streng unterschieden.

BEISPIELE

1. Für alle Punkte der linken Halbebene ist die Abszisse $x \leqq 0$ (vgl. Bild 12). Die Menge dieser Punkte ist also durch die Menge A der Zahlenpaare $(x; y)$ mit $x \leqq 0$ gegeben:

$$A = \{(x; y) \mid x \leqq 0\}.$$

2. G sei die Menge der ganzen Zahlen. Die Menge

$$A = \{(x; y) \mid x, y \in G\}$$

wird durch alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten dargestellt. Man nennt sie **Gitterpunkte** der Ebene (Bild 13).

3. Durch $A = \{(x; y) \mid y - x = 2\}$ sind alle die Punkte gegeben, deren Koordinaten der Gleichung $y - x = 2$ genügen. Sie liegen bekanntlich auf einer Geraden. Mit $B = \{(x; y) \mid y - x > 2\}$ sind, wie man sich leicht klarmacht, die Punkte der Ebene oberhalb der Geraden $y - x = 2$ gegeben. Die Randpunkte auf der Geraden zählen wegen $y - x > 2$ nicht mit zur Punktmenge B. Die Gerade wurde deshalb in Bild 14 unterbrochen gezeichnet.

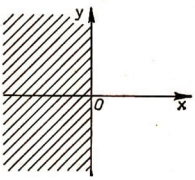


Bild 12

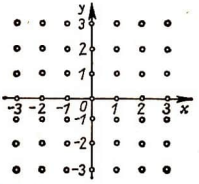


Bild 13

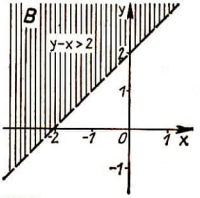


Bild 14

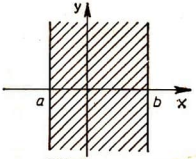


Bild 15

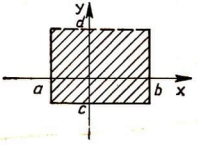


Bild 16

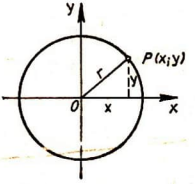


Bild 17

4. Alle Punkte, für deren Koordinaten $a \leq x \leq b$ gilt, liegen in einem Streifen parallel zur y-Achse (Bild 15).
Mit $A = \{(x; y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y < d\}$ sind die Punkte eines Rechtecks gegeben, dessen obere Seite nicht mit zur Punktmenge gehört (Bild 16).

5. Für die Koordinaten x und y eines Punktes P, der den Abstand r vom Ursprung des Koordinatensystems hat, gilt (Bild 17)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Das gilt für alle Punkte auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r um O. Jeder Punkt der Menge

$$K_1 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

liegt also auf der Kreisperipherie.
Für einen Punkt innerhalb des Kreises gilt offenbar $x^2 + y^2 < r^2$. Mit

$$K_2 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 < r\}$$

ist also eine Kreisfläche (ohne Rand) angegeben.

6. Man überlege sich, daß die angegebenen Mengen von Zahlentripeln die genannten geometrischen Gebilde bestimmen:

$A = \{(x; y; z) \mid z = 0\}$	x, y-Ebene im Raum
$B = \{(x; y; z) \mid z > 0\}$	oberhalb der x, y-Ebene liegender Raum
$C = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$	Kugeloberfläche (Bild 18)
$D = \{(x; y; z) \mid x^2 + z^2 \leqq a^2\}$	Vollzylinder; Zylinderachse ist die y-Achse (Bild 19)
$E = \{(x; y; z) \mid x, y, z \in G\}$	Gitterpunkte des Raumes

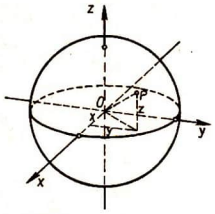


Bild 18

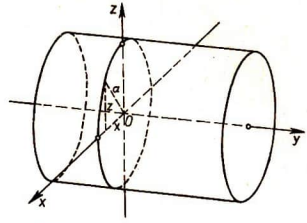


Bild 19

1.2. Der Begriff der Abbildung

1.2.1. Das Mengenprodukt

Unter dem **Mengenprodukt** oder *Kreuzprodukt* $X \times Y$ zweier Mengen X und Y versteht man die Menge aller *geordneten* Paare $(x; y)$ mit $x \in X$ und $y \in Y$. „Geordnet" soll heißen, daß bei der Bildung der Paare an erster Stelle stets ein Element aus der ersten, an zweiter Stelle ein Element aus der zweiten Menge genannt wird. Das Mengenprodukt ist also nicht kommutativ: Das Produkt $Y \times X$ liefert die Menge der Paare $(y; x)$, die im allgemeinen von der Menge der Paare $(x; y)$ verschieden ist.
Im Falle von Zahlenmengen liefert das Mengenprodukt Zahlenpaare. Liegen insbesondere die Zahlenmengen auf der x- und y-Achse eines cartesischen Koordinatensystems, so läßt sich das Mengenprodukt als eine Menge von Punkten der x, y-Ebene deuten.

BEISPIELE

1. Das Produkt $\{1; 2\} \times \{1; 2; 3; 4\}$ liefert die Zahlenpaarmenge $\{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4)\}$.
2. In einem ebenen cartesischen Koordinatensystem liegt auf den Koordinatenachsen jeweils die Menge R der reellen Zahlen. Das Mengenprodukt $R \times R$ stellt die Punkte der x, y-Ebene dar (Bild 9).
3. Ist G die Menge der ganzen Zahlen auf den Koordinatenachsen eines cartesischen Koordinatensystems, dann ergibt $G \times G$ die Gitterpunkte der x, y-Ebene (Bild 13).

4. In Bild 20 ist das Kreuzprodukt $A \times B$, in Bild 21 das Kreuzprodukt $B \times A$ der Mengen $A = \left\{\frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)\right\}$ und $B = N$ dargestellt.

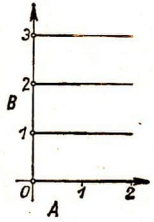


Bild 20

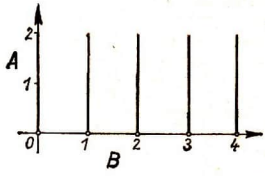


Bild 21

1.2.2. Die Abbildung als Teilmenge des Mengenprodukts

Der Abbildungsbegriff ist für viele Bereiche der Mathematik und der gesellschaftlichen Praxis von grundlegender Bedeutung. Man spricht von einer Abbildung, wenn einzelnen Elementen einer Menge ein oder auch mehrere Elemente einer anderen Menge (evtl. auch derselben Menge) zugeordnet sind. Die *Zuordnung* eines Elementes b zu einem Element a bedeutet die Bildung des Paares $(a; b)$. Bei einer Abbildung entsteht also eine Menge von Elementepaaren.

Abbildungen von Mengen reeller Zahlen sollen **reelle Abbildungen** heißen.

BEISPIELE

1. S sei die Menge der Studenten einer Ingenieurschule, K die Menge der Klassen dieser Ingenieurschule. Jeder Student gehört einer Klasse an. Die Menge der Studenten ist auf die Menge der Klassen abgebildet.

2. Gegeben seien die Mengen $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ und $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Ein Element $a \in A$ soll einem Element $b \in B$ zugeordnet sein, wenn gilt: $a \mid b$ (lies: a teilt b).
Durch diese Zuordnung wird die Menge der Zahlenpaare

$$F = \{(1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6); (2; 4); (2; 6); (3; 3); (3; 6); (4; 4); (5; 5); (6; 6)\}$$

gebildet.

Die Menge F des Beispiels 2 ist offenbar eine Teilmenge des Mengenprodukts $A \times B$.

Definition

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt F eine **Abbildung** aus A in B, wenn F eine Teilmenge des Mengenprodukts $A \times B$ ist:

$$F \subset A \times B.$$

Abbildungen bezeichnen wir im folgenden mit $F, G, H, f, g, h, \varphi, \psi$, gegebenenfalls mit Indizes.
Ist $(a; b)$ ein Element der Abbildung F, dann heißt b ein durch die Abbildung F vermitteltes **Bild** von a und a das **Urbild** von b.
Die Menge aller Elemente $a \in A$, die ein Bild $b \in B$ haben, nennt man den **Definitionsbereich** der Abbildung F. Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind *Vorbereich*, *Argumentbereich* oder *Urbildbereich*. Die Menge aller Elemente $b \in B$, die Bild eines Urbildes $a \in A$ sind, heißt **Wertebereich,** *Nachbereich*, *Gegenbereich* oder *Bildbereich*.
Wie Beispiel 2 zeigt, können einem Element aus A durchaus auch mehrere Elemente aus B zugeordnet sein. Alle Elemente $y \in B$, die Bild eines Elementes $x \in A$ sind, nennt man das *volle Bild* von x und schreibt dafür $F(x)$ (lies: F von x). In Beispiel 2 ist $F(1) = \{3; 4; 5; 6\}$, $F(5) = \{5\}$.
Um zu kennzeichnen, ob bei einer Abbildung F alle Elemente von A und B erfaßt werden oder nicht, gebraucht man verschiedene Sprechweisen. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

1. Abbildung aus A in B

   Es sind sowohl von A als von B nicht alle Elemente an der Abbildung F beteiligt. Definitionsbereich und Wertebereich sind also echte Teilmengen von A bzw. B (Bild 22).

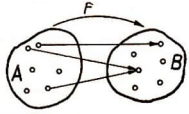


Bild 22

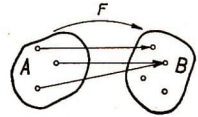


Bild 23

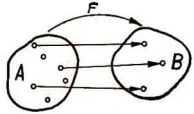


Bild 24

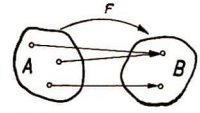


Bild 25

2. Abbildung von A in B

   Jedes Element von A hat bei der Abbildung F mindestens ein Bild in B. Der Definitionsbereich ist also gleich der Menge A (Bild 23).

3. Abbildung aus A auf B

   Jedes Element von B tritt als Bild von mindestens einem Element aus A auf, d. h., der Wertebereich ist gleich der Menge B (Bild 24).

4. Abbildung von A auf B

   Durch die Abbildung werden alle Elemente — sowohl von A als von B — erfaßt, d. h., der Definitionsbereich ist A, der Wertebereich ist B (Bild 25).

BEISPIELE

3. P sei die Menge der Sitzplätze im Theater einer Stadt, E die Menge der Einwohner dieser Stadt.
   a) Bei ausverkauftem Haus ist eine Abbildung von P in E gegeben.
   b) Wird eine Vorstellung nicht voll besucht, dann ist eine Abbildung aus P in E gegeben.
4. A sei die Menge der Arbeiter und Angestellten eines Betriebes, M die Menge der Arbeitsplätze in einer Betriebsabteilung. Durch die Besetzung aller Arbeitsplätze ist eine Abbildung aus A auf M gegeben.
5. Die Abbildungen der Beispiele 1 und 2 sind von der Art „von ... auf".

1.2.3. Die inverse Abbildung

F sei eine Abbildung aus A in B und $(a; b) \in F$. Danach ist mit der durch F gegebenen Abbildung dem Element $a \in A$ das Element $b \in B$ zugeordnet. Ordnet man umgekehrt dem Element $b \in B$ das Element $a \in A$ zu, bildet also das Paar $(b; a)$, so spricht man von einer Umkehrung der Zuordnung. Wird diese Umkehrung für alle Paare $(a; b) \in F$ durchgeführt, so erhält man eine Abbildung der Elemente aus B in Elemente aus A. Die so gebildete Abbildung heißt die **Umkehrabbildung** von F oder die zu F **inverse**[1]) **Abbildung.** Sie wird gewöhnlich mit F^{-1} bezeichnet.

Definition

Ist F eine Abbildung aus A in B, so bildet die Menge aller Paare $(b; a)$, für die $(a; b) \in F$ gilt, die zu F inverse Abbildung F^{-1}.

BEISPIEL

Ist $A = \{a; b; c\}$, $B = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ und $F = \{(a; \beta);\ (b; \alpha);\ (c; \alpha)\}$, dann lautet die inverse Abbildung $F^{-1} = \{(\alpha; b);\ (\alpha; c);\ (\beta; a)\}$ (Bild 26). F ist eine Abbildung von A in B, die Umkehrung F^{-1} eine Abbildung aus B auf A.

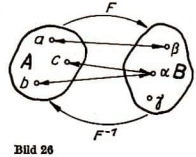


Bild 26

Wird die inverse Abbildung F^{-1} umgekehrt, so ergibt sich auf Grund der Definition offensichtlich wieder die ursprüngliche Abbildung F. Es gilt also:

$$\boxed{(F^{-1})^{-1} = F} \tag{1}$$

1.2.4. Eindeutige und eineindeutige Abbildungen

Von besonderer Bedeutung sind solche Abbildungen aus A in B, die einem Element $a \in A$ höchstens ein Element $b \in B$ zuordnen. Hat also $a \in A$ ein Bild $b_1 \in B$, so gibt es kein weiteres Element $b_2 \in B$, das ebenfalls ein Bild von a wäre.

Definition

Eine Abbildung f aus A in B heißt **eindeutig**, wenn jedem Element a des Definitionsbereiches von f genau ein Element b des Wertebereiches von f zugeordnet wird.

[1]) inversus (lat.) umgekehrt

Die inverse Abbildung f^{-1} einer eindeutigen Abbildung kann mehrdeutig oder eindeutig sein. So ist die inverse der in Bild 26 dargestellten eindeutigen Abbildung F eine mehrdeutige Abbildung.

Definition

Eine eindeutige Abbildung, deren inverse ebenfalls eindeutig ist, heißt eineindeutige Abbildung.

Aus der Definition ergibt sich, daß bei einer eineindeutigen Abbildung jedes Urbild genau ein Bild besitzt und umgekehrt zu jedem Bild genau ein Urbild gehört.
Definitionsbereich und Wertebereich einer eineindeutigen Abbildung besitzen offensichtlich die gleiche „Anzahl" von Elementen. Mit Hilfe einer eineindeutigen Abbildung läßt sich deshalb feststellen, ob zwei Mengen die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. Soll z. B. die Anzahl der Personen in einem Zimmer mit der Anzahl der vorhandenen Stühle verglichen werden, so wird durch die Aufforderung, Platz zu nehmen, eine eineindeutige Abbildung zwischen Personen und Stühlen hergestellt. Findet jede Person einen Stuhl und bleibt kein Stuhl frei, dann ist die Anzahl der Personen gleich der Anzahl der Stühle. Man sagt, die Menge P der Personen und die Menge S der Stühle sind **gleichmächtig.**
Die Gleichmächtigkeit der Mengen P und S hätte auch durch Abzählen der Personen und Stühle festgestellt werden können. Das Verfahren, eine eineindeutige Abbildung herzustellen, liefert aber die Möglichkeit, die Mächtigkeit unendlicher Mengen zu vergleichen.

Definition

Zwei Mengen A und B haben die gleiche **Mächtigkeit,** wenn sich A auf B eineindeutig abbilden läßt.

BEISPIEL

Zwischen der Menge A der geraden Zahlen und der Menge B der natürlichen Zahlen läßt sich eine eineindeutige Abbildung herstellen:

1	2	3	4	5	6	7	8 ...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	12	14	16 ...

Durch die hier dargestellte Abbildung ist jeder natürlichen Zahl genau eine gerade Zahl und jeder geraden Zahl genau eine natürliche Zahl zugeordnet. Es gibt bei dieser Abbildung keine natürliche Zahl und keine gerade Zahl, die keinen Partner hätte. Es folgt: die Menge der geraden Zahlen und die der natürlichen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit.

Unendliche Mengen, die sich eineindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden lassen, nennt man *abzählbar unendlich.* Einfache Beispiele dafür sind Zahlenmengen, die aus allen durch eine Zahl p teilbaren Zahlen bestehen. Beachtenswert hierbei ist, daß eine unendliche Menge und eine echte (unendliche) Teilmenge die gleiche Mächtigkeit haben können. Dieser Sachverhalt zeigt deutlich, welche grundlegenden Unterschiede zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen bestehen.

AUFGABEN

1. Die Menge A habe m, die Menge B habe n Elemente. Wieviel Elemente enthält
   a) $A \times A$, b) $A \times B$?

2. Im cartesischen Koordinatensystem sind die Punktmengen $U \times V$, $V \times U$ und $D = (U \times V) \setminus (V \times U)$ darzustellen für

$$U = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad V = \{3, 4, 5\}.$$

3. Man stelle $F \subset U \times U$ im cartesischen Koordinatensystem für $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dar.

a) $F = \{(x; y) \mid x \mid y\}$ b) $F = \{(x; y) \mid x \neq y\}$

c) $F = \{(x; y) \mid x > y\}$ d) $F = \{(x; y) \mid x$ teilt nicht $y\}$

Bemerkung: Die letzte Abbildung heißt die zu $F = \{(x; y) \mid x \mid y\}$ komplementäre Abbildung.

4. Man stelle $F \subset V \times V$ im cartesischen Koordinatensystem für

$V = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dar.

a) $F = \{(x; y) \mid y = 2x - 1\}$

b) $F = \{(x; y) \mid (x + 1)y = 6\}$

c) $F = \{(x; y) \mid y = x^2 + 1\}$

5. Für jede der Abbildungen der Aufgabe 3 ist $F(3)$ anzugeben.

6. Man bilde F^{-1} für die Abbildungen der Aufgabe 3.
Man beschreibe die Lage der Punkte im gleichgeteilten cartesischen Koordinatensystem im Vergleich zur Abbildung F.

7. Man bilde F^{-1} für die Abbildungen der Aufgabe 4.

8. Welche der Abbildungen von Aufgabe 4 sind eindeutig, welche eineindeutig?

9. Für welche der Abbildungen von Aufgabe 3 gilt $F^{-1} = F$?

10. Die folgenden Abbildungen sind darzustellen (x, y reell).

a) $F = \{(x; y) \mid y = x \cdot |x - 2|\}$ b) $F = \{(x; y) \mid y = |x^2 - 4x + 3|\}$

c) $F = \{(x; y) \mid |x| - |y| = 2\}$ d) $F = \{(x; y) \mid x + |x| = y\}$

e) $F = \{(x; y) \mid y = |x + 3|\}$ f) $F = \{(x; y) \mid |x| + |y| = 3\}$

g) $F = \{(x; y) \mid |x - y| = 2\}$ h) $F = \{(x; y) \mid |x + 1| + |y - 2| = 2\}$

Hinweis: Man zerlege F in Teilabbildungen, z. B.

$F = \{(x; y) \mid |x| + |y| = 3\}$ in

F_1: $x + y = 3$, für $x > 0$, $y > 0$ F_2: $-x + y = 3$, für $x < 0$, $y > 0$

F_3: $x - y = 3$, für $x > 0$, $y < 0$ F_4: $-x - y = 3$, für $x < 0$, $y < 0$.

11. Die folgenden Abbildungen sind darzustellen.
(Wenn nichts anderes bemerkt, sei x, y reell.)

a) $F = \{(x; y) \mid x, y \in G, \; x^2 + y^2 \leqq 4\}$

b) $A \cap B$ für $A = \{(x; y) \mid x - y \geqq 2\}$, $B = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 < 16\}$

c) $F = \{(x; y) \mid x < 3, \; y \geqq -1\}$

d) $F = \{(x; y) \mid |x - y| < 1\}$

e) $F = \{(x; y) \mid x + |y| < 3\}$

f) $F = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqq 16, \; x^2 + y^2 \geqq 4, \; y + 3|x| > 4\}$

g) $F = \{(x; y) \mid y \leqq |x - 2|\}$

h) $F = \{(x; y) \mid |x| + |y| < 3\}$

12. Man bilde F^{-1} und stelle F und F^{-1} dar für

a) $F = \{(x; y) \mid |y| = x + 2\}$ b) $F = \{(x; y) \mid 2y = x^2 + 2|x| - 3\}$

c) $F = \{(x; y) \mid |y| \geqq |x - 2|\}$, d) $F = \{(x; y) \mid |x - 1| + |y - 2| < 2\}$.

1.3. Die Funktion

1.3.1. Der Funktionsbegriff

Im vorangehenden Abschnitt wurde der Begriff der eindeutigen Abbildung definiert. Eine eindeutige Abbildung wird als **Funktion** bezeichnet.
Wegen ihrer besonderen Bedeutung als einer der Grundbegriffe der Mathematik soll die Funktion eingehend behandelt werden.

Definition

Ist jedem Element x einer Menge X genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet, so heißt die Menge f der geordneten Paare $(x; y)$ eine Funktion.

Die Menge X wird **Definitionsbereich**, die Menge Y **Wertebereich** der Funktion f genannt. Im Rahmen der Analysis betrachten wir Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen sind. Solche Funktionen werden als *reelle Funktionen* bezeichnet.
Die Funktion f kann auf verschiedene Weise gegeben sein. Darauf wird in 1.3.2. näher eingegangen. Wesentlich ist, daß f als Menge *eindeutig* gegeben ist. Es muß also, wie in 1.1.1. dargestellt, eindeutig entscheidbar sein, ob ein Element $(x; y)$ zur Funktion f gehört oder nicht.
Sind mehrere verschiedene Funktionen zu unterscheiden oder ist eine bestimmte Bedeutung der Funktion hervorzuheben, so werden statt f auch andere Bezeichnungen, wie g, h, φ, ψ, f_1, f_2, ..., benutzt. Ähnliches gilt für Definitions- und Wertebereich.
Die gegebene Funktion f ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ zu. Deshalb besteht das volle Bild von x stets aus nur einem Element y. Es ist also $f(x) = \{y\}$, wofür man kurz $f(x) = y$ schreibt. Mit $y = f(x)$ wird angegeben, daß y Funktionswert von f an der Stelle (im Punkte) x ist.
Das Element x wird **Variable** oder **Argument** der Funktion genannt. Die Abbildungsrichtung $x \to y$ findet ihren Ausdruck darin, daß y als von x abhängig betrachtet und deshalb als **abhängige Variable** oder **Funktionswert** von f an der Stelle x bezeichnet wird.
Fest gewählte Argumentwerte erhalten Bezeichnungen wie a, b, ..., a_0, a_1, a_2, ..., x_0, x_1, x_2, ... Für den Funktionswert an einer bestimmten Stelle, wie 0, a oder x_1, wird $f(0)$, $f(a)$, $f(x_1)$ — gelegentlich auch $y(0)$, $y(a)$, $y(x_1)$ — geschrieben. Für $f(x_1)$ kann auch y_1 stehen.

BEISPIELE

1. Der Definitionsbereich sei die Menge G der ganzen rationalen Zahlen, f ordne jedem Element $a \in G$ sein Quadrat zu. In dieser Erklärung ist auch der Wertebereich B gegeben: die Menge der Quadratzahlen a^2. Für die Wertepaare $(a; b)$ der Funktion f ergibt sich die folgende Tabelle:

a	1	2	3	4	5	...	−1	−2	−3	...
$b = f(a)$	1	4	9	16	25	...	1	4	9	...

2. Die Funktion φ ordne jeder natürlichen Zahl $n \in N$ die Anzahl der positiven Zahlen 1, 2, ..., $n-1$ zu, die teilerfremd zu n sind. Nach dieser Erklärung ist z. B. $\varphi(6) = 2$, denn von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sind 1 und 5 teilerfremd zu 6 (die Zahl 1 gilt als teilerfremd zu einer Zahl n). Für $n = 1, 2, \ldots, 12$ ergibt sich die Tabelle [man setzt $\varphi(1) = 1$]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

3. Definitionsbereich und Wertebereich sei die Menge R der reellen Zahlen. Die Funktion f bestehe aus der Menge reeller Zahlenpaare $(x; y)$, die der Gleichung $x - 2y = 2$ genügen. Werden Definitionsbereich X und Wertebereich Y auf die x- bzw. y-Achse eines cartesischen Koordinatensystems gelegt, dann liegen die Punkte $P(x; y)$ der Funktion f auf einer Geraden in der x, y-Ebene (Bild 27).

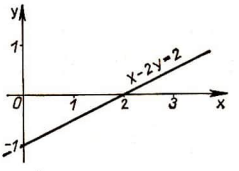


Bild 27

Gleichheit zweier Funktionen

Zwei Funktionen f und g sind genau dann gleich, wenn Definitionsbereich und Wertebereich beider Funktionen übereinstimmen und für jedes Element x des gemeinsamen Definitionsbereiches $f(x) = g(x)$ gilt. Man sagt dann genauer, f und g sind identisch und schreibt auch $f \equiv g$.

Von $f = g$ ist die Aussage $f(x) = g(x)$ streng zu unterscheiden. Sie besagt, daß mindestens einem Element x bei f derselbe Funktionswert zugeordnet ist wie bei g.

BEISPIELE

4. Die Funktionen

$$f\colon\ y = (x-1)^2 + 2x \quad \text{und} \quad g\colon\ y = x^2 + 1, \quad x \in R,$$

haben gleichen Definitionsbereich und Wertevorrat, und beiden Funktionsgleichungen genügen dieselben Wertepaare $(x; y)$. Es ist daher $f \equiv g$.

5. Die Funktionen

$$f\colon\ y = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{und} \quad g\colon\ y = x - 1$$

sind für alle x außer $x = -1$ gleich. Für $x = -1$ ergibt sich $f(-1) = 0/0$. Die Division durch Null ist aber unmöglich, d. h., $f(-1)$ existiert nicht. (Wäre $0/0 = a$, so müßte nach den Regeln der Arithmetik $0 = 0 \cdot a$ sein. Diese Gleichung wird durch jeden beliebigen Wert a erfüllt. Für $0/0$ läßt sich also kein bestimmter reeller Wert angeben.)
Während f für $x = -1$ nicht existiert, hat g bei $x = -1$ den Funktionswert $g(-1) = -2$. Somit unterscheiden sich f und g in den Definitionsbereichen: Für f gilt $X_1 = R \setminus \{-1\}$, für g gilt $X_2 = R$. Die Funktionen f und g sind voneinander verschieden.

6. Die Funktionen

$$f\colon\ y = 3x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g\colon\ y = 4x$$

haben zwar denselben Definitionsbereich; $f(x) = g(x)$ gilt aber nur für $x = 1$ und $x = 1/3$. Die Funktionen f und g sind voneinander verschieden.

1.3.2. Arten der Darstellung reeller Funktionen

Aus der Darstellung einer reellen Funktion muß eindeutig hervorgehen, welche Zahlenpaare $(x;y)$ zur Funktion f gehören. Geeignete und übliche Darstellungsweisen sind

die tabellenmäßige Darstellung,
die graphische Darstellung und
die Darstellung durch eine Funktionsgleichung.

Darüber hinaus gibt es noch weitere Darstellungsarten, wie die in Beispiel 2 des vorigen Abschnitts gegebene Funktion φ zeigt.

Die Darstellung durch eine Wertetabelle.

Einzelne Wertepaare einer Funktion können in einer Tabelle angegeben werden. Diese — im allgemeinen unvollständige — tabellenmäßige Darstellung einer Funktion findet in der Praxis Anwendung, wenn von einer Funktion der Zusammenhang zwischen den Variablen nur durch Messung oder Beobachtung ermittelt werden kann. Weitere bekannte Beispiele für die tabellenmäßige Darstellung sind die Tafeln der logarithmischen und die der trigonometrischen Funktionen, deren Werte für Berechnungen häufig gebraucht werden. Die tabellenmäßige Darstellung hat den Vorteil, daß die Funktionswerte mit der erforderlichen Genauigkeit angegeben und der Tabelle wieder entnommen werden können. Nachteilig ist, daß nur eine beschränkte Anzahl Wertepaare angegeben werden kann; weitere Funktionswerte müssen durch Interpolation gewonnen werden. Die Wertetabelle gibt auch keine anschauliche Vorstellung einer Funktion. Dazu dient u. a. die graphische Darstellung einer Funktion.

Die graphische Darstellung einer Funktion

Jedem Zahlenpaar $(x;y)$ läßt sich eineindeutig ein Punkt in einem cartesischen Koordinatensystem zuordnen. Die Angabe der Wertepaare $(x;y)$ einer Funktion f durch eine Punktmenge im cartesischen Koordinatensystem ist deshalb einer tabellarischen Darstellung — abgesehen von den Grenzen, die der Genauigkeit gesetzt sind — gleichwertig. Die Punktmengen der uns interessierenden Funktionen liegen vorwiegend auf Kurven. Eine Kurve stellt nur dann eine Funktion dar, wenn durch sie eine eindeutige Abbildung gegeben ist.

BEISPIELE

1. Bild 28 zeigt eine Funktion, für die man u. a. $(-1{,}5;-1) \in f$, $(1;1) \in f$, $(2{,}5;2) \in f$ abliest. Im Intervall $(2,\ 2{,}5)$ ist f nicht definiert, d. h., dieses Intervall gehört nicht zum Definitionsbereich der Funktion.
2. Die durch die Kurve in Bild 29 dargestellte Abbildung f ist in $0 \leqq x \leqq 3$ mehrdeutig, stellt also keine Funktion dar.

In der Praxis finden vielfach Geräte Verwendung, die eine sich ändernde Größe, wie Druck, Temperatur, Spannung, Strom in Abhängigkeit von der Zeit als Kurvenzug aufzeichnen. Bekannte Geräte sind Barograph, Elektrokardiograph und Oszillograph. Die von solchen Geräten aufgezeichneten Kurven stellen Funktionen dar, deren Definitionsbereich das Zeitintervall der Messung und deren Wertebereich die in diesem Zeitintervall aufgezeichnete Menge der Meßwerte der gemessenen Größe ist.

Die Gestalt der Funktionskurve ist von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Sind z. B. die Achsen unterschiedlich geteilt, so erscheint die Kurve gegenüber der im Koordinatensystem mit gleich geteilten Achsen verzerrt. Die Bilder 30 und 31 zeigen die gleiche Funktion in verschiedenen Koordinatensystemen. Die unterschiedliche Teilung der Achsen ist u. a. erforderlich, um den Verlauf einer Funktion im interessierenden Bereich in einem Bild darstellen zu können.
Die vollständige graphische Darstellung einer Funktion im cartesischen Koordinatensystem ist nur möglich, wenn Definitions- und Wertebereich in einem beschränkten

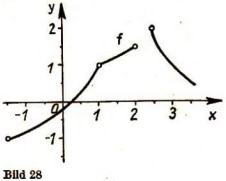


Bild 28

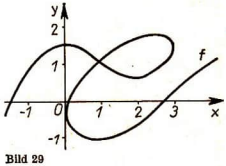


Bild 29

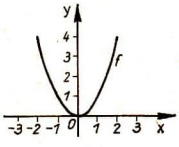


Bild 30

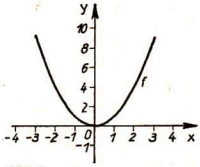


Bild 31

Intervall liegen. So stellt Bild 30 nur einen Ausschnitt der Funktion f: $y = x^2$ mit $X = (-\infty, \infty)$ dar. Dagegen ist die Funktion f: $y = x^2$ mit $X = [-2, 2]$ durch Bild 30 vollständig dargestellt.
Besteht eine Funktion f nur aus einer beschränkten Anzahl von Wertepaaren, so ergibt ihre Darstellung im cartesischen Koordinatensystem einzelne Punkte, die natürlich *nicht* durch einen Kurvenzug zu verbinden sind.
Die graphische Darstellung gibt eine anschauliche Vorstellung von einer Funktion. An Hand der graphischen Darstellung lassen sich mathematische oder physikalische Probleme geometrisch deuten und über diese Deutung einer Lösung zuführen. Im Laufe der Behandlung der Differential- und Integralrechnung wird von dieser Möglichkeit häufig Gebrauch gemacht werden.

Die Darstellung einer Funktion durch eine Funktionsgleichung

Die reellen Zahlenpaare $(x; y)$, die einer Gleichung in den Variablen x und y genügen, bilden eine Menge. Durch solch eine Gleichung wird also eine reelle Abbildung gegeben. Wird die Gleichung durch kein reelles Zahlenpaar erfüllt, dann ist die Abbildung die leere Menge.

Ergeben die Paare $(x; y)$ der durch eine Gleichung gegebenen Abbildung im cartesischen Koordinatensystem eine Kurve, dann heißt die Gleichung **Kurvengleichung**. Im Falle einer eindeutigen Abbildung spricht man von einer **Funktionsgleichung**. Häufig kann aus einer mehrdeutigen Abbildung F durch Abgrenzung von Definitions- und Wertebereich eine Teilmenge f so abgegrenzt werden, daß f eindeutig ist.

Eine reelle Funktion f ist durch Angabe von Definitionsbereich X, Wertebereich Y und Funktionsgleichung gegeben.

Die Darstellung mit Hilfe einer Funktionsgleichung wird häufig als **analytische Darstellung** der Funktion bezeichnet. Die in einer Funktionsgleichung auftretenden festen Größen werden im Unterschied zu den einander zugeordneten Größen **Konstante** genannt.

Sind keine Mißverständnisse möglich, so beschränkt man sich mitunter auf die Angabe der Funktionsgleichung, z. B. $x - 2y = 2$, und spricht auch kurz von der Funktion $x - 2y = 2$ oder (in anderer Form) $y = {}^1/_2 x - 1$. Vorzuziehen ist i. a. die Angabe f: $x - 2y = 2$, da mit $x - 2y = 2$ schließlich nur eine Gleichung angegeben ist. Genauer wird diese Funktion durch

$$f = \left\{(x; y) \mid y = \frac{1}{2}x - 1, \quad x \in R, \quad y \in R\right\}$$

oder durch

$$f = \left\{\left(x; \frac{1}{2}x - 1\right) \,\middle|\, x \in R\right\}$$

angegeben.

Auch eine Ausdrucksweise wie „die reelle Funktion f: $y = \sqrt{x - 2}$" führt nicht zu Mißverständnissen. Da es sich um eine reelle Funktion handelt, ist durch die Funktionsgleichung der Definitionsbereich mit $2 \leqq x < \infty$ bestimmt, denn für $x < 2$ ergeben sich keine reellen Werte für y. Der Wertebereich besteht aus allen Werten y, die sich ergeben, wenn x die reellen Zahlen von 2 bis ∞ durchläuft. Der Wertebereich ist somit das Intervall $0 \leqq y < \infty$.

Dagegen ist mit f: $x^2 + y^2 = r^2$ allein keine Funktion gegeben, denn für einen Wert x ergeben sich zwei Werte $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Die Gleichung bestimmt vielmehr bei fehlenden Angaben über Definitions- und Wertebereich eine zweideutige Abbildung, da jedem x-Wert für $-r < x < r$ zwei y-Werte zugeordnet sind. Wird aber z. B. der Wertebereich $y \geqq 0$ vorgegeben, dann bestimmt die Angabe

$$f: x^2 + y^2 = r^2, \quad y \geqq 0$$

eine Funktion (Bild 32), die auch kurz mit f: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ angegeben werden kann.

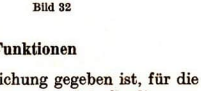


Bild 32

1.3.3. Formen der analytischen Darstellung reeller Funktionen

Im Grunde ist die äußere Form, in der eine Funktionsgleichung gegeben ist, für die dargestellte Funktion selbst ohne Bedeutung. Bei Umformungen ist allerdings zu beachten, daß die umgeformte Gleichung der Ausgangsform äquivalent ist.

So stellen

$$x - 2y = 2 \text{ und } y = \frac{1}{2}x - 1$$

dieselbe Funktion f dar. Dagegen ist die Gleichung

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2y+1}$$

den beiden ersten Formen nicht mehr äquivalent, da die Erfüllungsmenge dieser Gleichung das Wertepaar $(1; -1/2)$ nicht enthält.
Gewisse Formen der Funktionsgleichung werden besonders bezeichnet.
Die Form der Funktionsgleichung, in der die abhängige Variable y allein auf einer Seite der Gleichung steht, heißt **explizite Form** der Funktionsgleichung. Ein Beispiel ist:

$$y = \frac{1}{2}x - 2.$$

Da das Bild y des Argumentes x mit $f(x)$ bezeichnet wird, ist auch die Schreibweise

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

üblich. Sie deutet an, daß das Bild von x durch den Term $1/2\,x - 2$ gegeben ist. Die explizite Form gibt also das Bild von x direkt durch einen Term an.
Die Funktionsgleichung liegt in **impliziter Form** vor, wenn in der Funktionsgleichung die abhängige Variable nicht isoliert auf einer Seite der Gleichung steht.
So sind die Gleichungen

$$x - 2y - 2 = 0, \quad x = 2y + 2, \quad x - 2y = 2, \quad x - 2 = 2y$$

verschiedene implizite Formen, durch die ein und dieselbe Funktion gegeben ist. Das gemeinsame Merkmal ist, daß bei keiner der Gleichungen der Funktionswert y direkt durch einen Term $f(x)$ gegeben wird.
In der ersten und dritten der angegebenen Gleichungen treten auf einer Gleichungsseite Terme mit den zwei Variablen x und y auf. Allgemein werden solche Terme in zwei Variablen durch $T(x;y)$ — lies: T von $x;y$ — angegeben. An Stelle von T können auch andere Buchstaben stehen. Terme mit mehr als zwei Variablen $x, y, \ldots, z$ gibt man sinngemäß durch $T(x; y; \ldots; z)$ an.
Werden in dem Term $T(x;y)$ beide Variablen belegt, dann ergibt sich ein Zahlenwert. So liefert $F(x;y) = x - 2y - 2$ für $x = 2, y = -3$ den Wert

$$F(2; -3) = 6.$$

Das Paar $(2; -3)$ ist offenbar kein Element der durch $F(x;y) = 0$ gegebenen Funktion, da $F(2; -3) \neq 0$ ist.
Eine weitere Möglichkeit der analytischen Darstellung einer reellen Abbildung ist die Darstellung mittels einer Hilfsvariablen. Die Hilfsvariable wird **Parameter**, die Darstellung **Parameterdarstellung** genannt.

In der Parameterdarstellung wird eine reelle Abbildung f durch zwei Abbildungen φ und ψ gegeben, die jedem Parameterwert $t \in T$ durch $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ je ein Bild $x \in X$ und $y \in Y$ zuordnen. Die Abbildung f besteht aus den Wertepaaren $(x; y)$, bei denen x und y Bilder desselben Parameterwertes t sind (Bild 33).
Ist jedem x eindeutig ein y zugeordnet, so ist durch die Parameterdarstellung mittels des Parameters t eine Funktion gegeben.
Wertetabellen werden für alle drei Variablen t, x und y aufgestellt.
Eliminiert man aus den Gleichungen der Parameterdarstellung den Parameter, dann erhält man eine Gleichung in den Variablen x und y, also eine Kurvengleichung oder eine Funktionsgleichung.

BEISPIELE

1. Die Gleichungen

$$x = 2t \quad \text{und} \quad y = t - 1$$

liefern für f die Wertetabelle

	t	-2	-1	0	1	2	3
f	x	-4	-2	0	2	4	6
	y	-3	-2	-1	0	1	2

($t \xrightarrow{\varphi} x$, $t \xrightarrow{\psi} y$)

Die Funktion ist eine Gerade (Bild 34). Die in der Wertetabelle verwendeten t-Werte sind im Bild angeschrieben. Durch den Parameter ist der Geraden eine Orientierung gegeben.
Elimination von t ergibt für die Gerade die Darstellung $y = {}^1\!/_2 x - 1$.

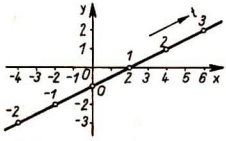


Bild 34

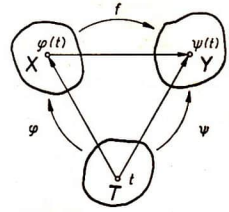


Bild 33

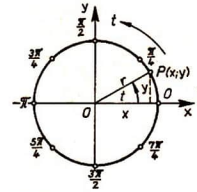


Bild 35

2. Die Gleichungen

$$x = r \cos t \quad \text{und} \quad y = r \sin t \tag{I}$$

bestimmen für $0 \leqq t < 2\pi$ eine Abbildung, die im cartesischen Koordinatensystem durch einen Kreis dargestellt wird (Bild 35). Das läßt sich leicht durch Elimination von t nachweisen: Aus

$$\frac{x}{r} = \cos t, \quad \frac{y}{r} = \sin t$$

folgt

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Aus Bild 35 ist weiterhin zu erkennen, daß der Parameter t die Bedeutung des Winkels hat, den der zum Punkte $P(x; y)$ gehörige Radius mit der x-Achse einschließt. Auf Grund dieser Bedeutung kann die Parameterdarstellung (I) aus Bild 35 abgelesen werden.
Für $0 \leqq t < \pi$ und $\pi \leqq t < 2\pi$ ist durch (I) je eine Funktion gegeben: der obere und der untere Halbkreis.

3. Wie sich durch Elimination des Parameters u bestätigen läßt, ist auch

$$x = r\,\frac{2u}{1+u^2}, \qquad y = r\,\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

eine Parameterdarstellung des Kreises. Der Punkt $(0; -r)$ ist dabei allerdings ausgenommen, denn für keinen Wert von u ergibt sich ein Punkt mit diesen Koordinaten.

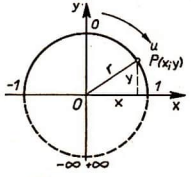


Bild 36

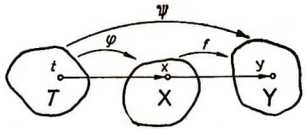


Bild 37

Mit wachsendem u wird der Kreis in mathematisch negativem Sinn durchlaufen (Bild 36). Für $|u| \leqq 1$ und $|u| \geqq 1$ ist durch die Parameterdarstellung jeweils eine Funktion $y = f(x)$ (oberer bzw. unterer Halbkreis) gegeben.

In den Beispielen 2 und 3 ist eine Abbildung (Funktion) durch zwei verschiedene Parameterdarstellungen gegeben. Allgemein sind für eine Funktion oder Abbildung beliebig viele Parameterdarstellungen möglich.
Ist eine Abbildung f durch $y = f(x)$ gegeben, und wählt man eine beliebige Abbildung φ mit $x = \varphi(t)$, so führt Einsetzen in $y = f(x)$ auf eine Abbildung mit $y = f[\varphi(t)]$. Diese Schreibweise bedeutet: Auf die Variable t ist die Abbildung φ und auf das Ergebnis die Abbildung f anzuwenden. Das Nacheinanderausführen der Abbildungen φ und f ergibt eine Abbildung der Menge T auf die Menge Y, die mit ψ bezeichnet werden soll (Bild 37). Mit

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$$

ist eine Parameterdarstellung für $y = f(x)$ gegeben.

BEISPIEL

4. Aus $y = f(x) = 2x - 3$ wird durch Einführen von $x = \varphi(t) = 2t + 1$ die Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t) = 2t + 1, \quad y = \psi(t) = 4t - 1$$

gewonnen.

Wie Beispiel 2 zeigt, kann dem Parameter eine besondere Bedeutung zukommen. Häufig lassen sich bei günstiger Wahl des Parameters Rechnungen und Umformungen

vereinfachen. Mitunter ist eine Funktion oder Abbildung gar nicht in expliziter oder impliziter Form angebbar. Bei der Darstellung einer Funktion oder Abbildung wird man diese Gesichtspunkte berücksichtigen.
Die eben gezeigte Herstellung einer Parameterdarstellung aus einer Darstellung der Form $y = f(x)$ führte auf die Darstellungsform $y = f[\varphi(t)]$. Sie ist eine explizite Darstellung der Abbildung ψ mittels einer Abbildung φ und verlangt das Nacheinanderausführen zweier Abbildungen φ und f. Die dadurch hergestellte Abbildung ψ heißt im Falle der Eindeutigkeit **mittelbare Funktion.**

Das Nacheinanderausführen zweier Abbildungen φ und f wird auch als Multiplikation bezeichnet. Das Produkt $f\varphi = \psi$ ist im allgemeinen nicht kommutativ, wie das Beispiel

$$\varphi\colon \begin{cases} \varphi(1) = 2 \\ \varphi(2) = 1, \end{cases} \qquad f\colon \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

zeigt. Es ist

$$f\varphi\colon \begin{cases} f[\varphi(1)] = 1 \\ f[\varphi(2)] = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi f\colon \begin{cases} \varphi[f(1)] = 2 \\ \varphi[f(2)] = 2. \end{cases}$$

Mittelbare Funktionen in analytischer Darstellung treten häufig auf. So wird durch die Gleichung

$$y = \sqrt{2x - 3}$$

der Variablen x zunächst durch $\varphi(x) = 2x - 3$ die Variable $u = \varphi(x)$ zugeordnet. Auf die Variable u ist dann die Abbildung f mit $f(u) = \sqrt{u}$ anzuwenden.

1.3.4. Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik und ihre graphische Darstellung

In Naturwissenschaft und Technik treten Funktionen auf, deren Wertepaare Größen (Länge, Masse, Zeit, Geschwindigkeit, ...) sind. Vielfach lassen sich für solche Funktionen Funktionsgleichungen angeben. Einfache Beispiele sind:
das Grundgesetz der Dynamik

$$F = f(a) = ma$$

(F Kraft, a Beschleunigung, m Masse),
die Weg-Zeit-Funktion der beschleunigten Bewegung

$$s = f(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

(s Weg, t Zeit, s_0 Ort zur Zeit $t_0 = 0$ s, v_0 Anfangsgeschwindigkeit, a Beschleunigung),
das Gasgesetz von BOYLE-MARIOTTE

$$p V = c$$

(p Druck, V Gasvolumen, c Konstante),
der Zusammenhang zwischen Länge l einer Schraubenfeder und Belastung F

$$l = cF + l_0$$

(l_0 Federlänge ohne Belastung, c Materialkonstante).

In den angeführten Gleichungen treten Größen auf, weshalb sie **Größengleichungen** genannt werden. Mit jeder der angeführten Gleichungen ist jeweils eine Funktion gegeben, da durch jede Gleichung einer Variablen u eine Variable v zugeordnet wird. Auf Grund der Definition

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert mal Einheit}$$

läßt sich nach Wahl der Einheit dem Wert einer Größe mittels der Beziehung

$$\text{Zahlenwert} = \frac{\text{Größe}}{\text{Einheit}}$$

stets ein Zahlenwert zuordnen. Das gibt die Möglichkeit, eine Größengleichung in eine Gleichung mit reellen Variablen überzuführen. Einer „Größenfunktion" läßt sich auf diese Weise eindeutig eine reelle Funktion zuordnen. So ergibt sich aus der Gleichung der Weg-Zeit-Funktion

$$s = 2\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}t + 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2$$

nach Division durch die Einheit m die **zugeschnittene Größengleichung**

$$\frac{s}{\mathrm{m}} = 2 + 12\,\frac{t}{\mathrm{s}} + 8\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)^2.$$

In dieser Gleichung ist jede Größe durch die Einheit dividiert, in der sie gemessen wird. Also sind $\frac{s}{\mathrm{m}}$ und $\frac{t}{\mathrm{s}}$ Zahlenwerte, für die die reellen Variablen y und x geschrieben werden können. Damit ist aus der Funktionsgleichung mit den Variablen s und t die Gleichung

$$y = 2 + 12x + 8x^2$$

einer Funktion mit den reellen Variablen x und y gewonnen.
Die Zuordnung von Größe und Zahlenwert gestattet es, Größen sowie Funktionen, deren Wertepaare Größen sind, mit den schon bereitgestellten Mitteln darzustellen.

Reguläre Leitern

Es sei

u die Größe

$[u]$ die Einheit, in der die Größe gemessen wird,

dann ist

$x = \frac{u}{[u]}$ der Zahlenwert, der der Größe u bei gewählter Einheit $[u]$ zugeordnet ist.

Dieser der Größe u zugeordnete Zahlenwert x kann jetzt auf einer Geraden dargestellt werden. Dazu wird auf einer orientierten Geraden g ein Anfangspunkt A gewählt und einem Wert x_0 aus dem darzustellenden Wertebereich X zugeordnet. Nach Wahl einer

Einslänge l_x wird dann einem Wert $x \in X$ ein Punkt P der Geraden g so zugeordnet, daß die mit Vorzeichen gemessene Strecke AP die Länge

$$\boxed{s(x) = l_x(x - x_0)} \tag{2}$$

hat (Bild 38).
Ist $x_0 = 0$, dann wird $s(x) = l_x x = l_u \cdot \frac{u}{[u]}$ mit $l_x = l_u$.

Werden gleichabständige x-Werte durch Teilstriche an der Geraden gekennzeichnet und die herausgegriffenen x-Werte (oder eine Auswahl derselben) an die Teilstriche geschrieben, so ergibt sich eine gleichmäßige Teilung der Geraden. Eine gleichmäßig geteilte Gerade, bei der die Teilstriche mit gleichabständigen Zahlenwerten beziffert sind, heißt *reguläre Leiter* oder *Skale*. Die Gerade wird *Träger* der Leiter genannt.

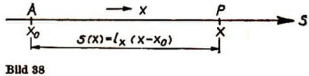


Bild 38

Die positive Differenz Δx der Teilstrichwerte nennt man *Stufe* der Leiter. Es ist üblich, als Stufenwerte 1, 2 oder 5 Einheiten einer Zehnerpotenz zu wählen.
Beim cartesischen Koordinatensystem sind die Koordinatenachsen reguläre Leitern mit $A = O$, $x_0 = 0$ (bzw. $y_0 = 0$), wobei l_x (bzw. l_y) die Länge der Strecke OE_x (bzw. OE_y) ist.
Je größer die Einslänge l_x gewählt wird, desto feiner läßt sich die Leiter unterteilen. Der Abmessung der Einslänge l_x sind aber durch den abzubildenden Bereich und die zur Verfügung stehende Leiterlänge L (sie ist z. B. durch die Blattgröße begrenzt) Grenzen gesetzt. Ist x_0 der kleinste, x_n der größte abzubildende Zahlenwert, dann muß

$$l_x(x_n - x_0) \leqq L$$

sein, damit der vorgesehene Wertebereich auf der Leiterlänge L untergebracht werden kann. Für die Einslänge ergibt sich daraus

$$\boxed{l_x \leqq \frac{L}{x_n - x_0}} \tag{3}$$

Es ist zweckmäßig, für l_x einen möglichst glatten Wert zu wählen, damit sich die Teilung einfach herstellen läßt.
Bei gegebener Einslänge l_x wird der Teilstrichabstand Δs durch die Wahl der Stufe Δx bestimmt:

$$\boxed{\Delta s = l_x \Delta x} \tag{4}$$

Um noch Zwischenwerte zwischen den Teilstrichen auf $^1/_{10}\,\Delta x$ (oder $^1/_5\,\Delta x$) nach Augenmaß abschätzen zu können, ist Δx so zu wählen, daß Δs möglichst klein, aber im allgemeinen $\geqq 1$ mm wird.

BEISPIELE

1. Für die Zeit t ist im Bereich $5\text{ s} \leqq t \leqq 50\text{ s}$ eine reguläre Leiter von maximal 100 mm Länge herzustellen.

   Lösung: Der der Zeit t zugeordnete Zahlenwert x ist, wenn zweckmäßig $[t] = \text{s}$ gewählt wird,

   $$x = \frac{t}{[t]} = \frac{t}{\text{s}}.$$

   Der abzubildende Wertebereich ist demnach

   $$5 \leqq x \leqq 50,$$

   also $x_0 = 5$, $x_n = 50$.
   Die Einslänge l_x ist durch

   $$l_x \leqq \frac{L}{x_n - x_0} = \frac{100\text{ mm}}{50 - 5} = 2{,}22\text{ mm}$$

   eingeschränkt. Es wird $l_x = 2$ mm gewählt. Die Gesamtlänge der Leiter ist dann nach (2)

   $$s(50) = 2\text{ mm}\,(50 - 5) = 90\text{ mm}.$$

   Die Stufenwerte sollen 1, 2 oder 5 Einheiten einer Zehnerpotenz bei Einhaltung von $\Delta s \geqq 1$ mm sein.
   Wegen $\Delta s = 2\text{ mm} \cdot \Delta x$ ist die kleinstmögliche Stufe $\Delta x = 0{,}5$. In Bild 39 wurde $\Delta x = 1$ gewählt.

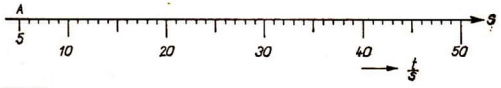


Bild 39

2. Für die resultierende Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit) beim waagerechten Wurf gilt (Bild 40)

   $$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

   Die Funktion ist in einem Koordinatensystem mit regulär geteilten Achsen für die waagerechte Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 35\text{ ms}^{-1}$ und $0 \leqq t \leqq 10\text{ s}$ darzustellen ($g \approx 10\text{ ms}^{-2}$).
   Die Breite der Darstellung soll 100 mm, die Höhe 150 mm nicht überschreiten.

   Lösung: Die den Größen t und v zugeordneten Zahlenwerte sind

   $$x = \frac{t}{\text{s}} \quad \text{und} \quad y = \frac{v}{\text{ms}^{-1}}. \qquad \text{(I)}$$

   In quadrierter Form lautet die Funktionsgleichung

   $$v^2 = 1225\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 100\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}\,t^2, \quad v \geqq 35\text{ ms}^{-1}.$$

   (Die Angabe von $v \geqq 35\text{ ms}^{-1}$ ist notwendig, da sonst nicht die gegebene Funktionsgleichung vorliegt.) Division durch $[v]^2 = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ liefert

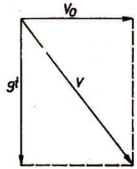


Bild 40

die zugeschnittene Größengleichung

$$\left(\frac{v}{\mathrm{ms^{-1}}}\right)^2 = 1225 + 100\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)^2, \quad \frac{v}{\mathrm{ms^{-1}}} \geqq 35.$$

Jetzt können nach (I) die Variablen x und y eingeführt werden:

$$y = \sqrt{1225 + 100x^2}.$$

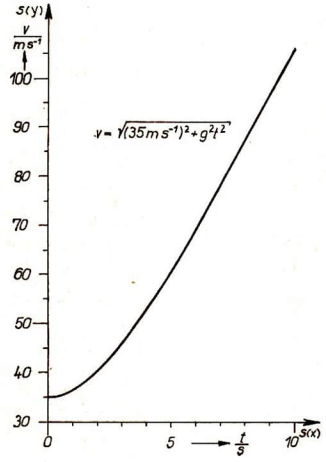


Bild 41

Diese reelle Funktion ist für

$$0 \leqq x \leqq 10, \quad 35 \leqq y \leqq 106$$

darzustellen.

Für die Einslängen der Achsen folgt, wenn als Anfangspunkt der y-Leiter $y_0 = 30$ gewählt wird,

$$l_x \leqq \frac{100\ \mathrm{mm}}{10} = 10\ \mathrm{mm}, \quad l_y \leqq \frac{150\ \mathrm{mm}}{106 - 30} = 1{,}97\ \mathrm{mm}.$$

Gewählt wird $l_x = 10$ mm, $l_y = 2$ mm[1]. Die Leitergleichungen lauten

$$s(x) = 10\ \mathrm{mm} \cdot x, \quad s(y) = 2\ \mathrm{mm}(y - 30).$$

Die Funktion ist in Bild 41 (in halber Größe) dargestellt.

[1]) Wenn die vorliegende Blattgröße es gestattet, wird man möglichst den glatten Wert $l_y = 2$ mm und nicht etwa $l_y = 1{,}9$ mm oder die kleine Einslänge $l_y = 1$ mm wählen

Oft wird statt mit der Einslänge mit dem Maßstab gearbeitet:

$$\text{Maßstab} = \frac{\text{abgebildete Strecke}}{\text{abzubildende Größe}},$$

$$m_u = \frac{s(x)}{u}.$$

Mit $s(x) = l_x x = l_u \frac{u}{[u]}$ folgt als Zusammenhang zwischen Maßstab und Einslänge

$$\boxed{m_u = \frac{l_u}{[u]}} \tag{5}$$

Ist u ein Zahlenwert, dann sind wegen $[u] = 1$ Maßstab und Einslänge miteinander identisch.

Funktionsleitern

Das cartesische Koordinatensystem ermöglicht es, die Zahlenpaare $(x; y)$ einer Funktion f als Punktmenge einer Ebene darzustellen. Eine andere Möglichkeit ist die Darstellung einer Funktion als Punktmenge einer Geraden (oder auch einer krummen

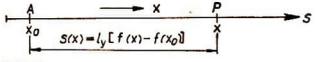


Bild 42

Linie). Dazu wird zunächst wieder einem Wert x_0 des Definitionsbereichs der Funktion f ein Anfangspunkt A einer orientierten Geraden g zugeordnet und auf dieser eine Einslänge l_y festgelegt. Die Zuordnung eines Punktes P der Leiter zu einem Wert $x \in X$ geschieht jetzt mittels der Funktion f, indem der Strecke AP die Länge

$$\boxed{s(x) = l_y[f(x) - f(x_0)]} \tag{6}$$

gegeben wird. Für $s(x) > 0$ wird $\overline{AP}$ in positiver, für $s(x) < 0$ in negativer Trägerrichtung abgetragen (Bild 42).

Für die Variable x werden — zumindest in Teilabschnitten der Leiter — wieder gleichabständige glatte Werte gewählt, die nach (6) zugeordneten Punkte durch Teilstriche gekennzeichnet und die gewählten x-Werte angeschrieben. Die Teilung einer Funktionsleiter ist im allgemeinen nicht mehr gleichmäßig. Die Einslänge l_y ist durch

$$\boxed{l_y \leq \frac{L}{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)}} \tag{7}$$

beschränkt. Hierbei ist $f_{\max}(x)$ der größte, $f_{\min}(x)$ der kleinste im Darstellungsbereich auftretende Funktionswert.

Für den Abstand der Teilpunkte gilt jetzt

$$\Delta s = l_y[f(x_{m+1}) - f(x_m)]. \tag{8}$$

Der Abstand Δs ändert sich also bei konstanter Stufe Δx. Deshalb muß unter Umständen die Stufe abschnittsweise geändert werden, damit $\Delta s \geqq 1$ mm bleibt.
Bekannte Funktionsleitern sind die Skalen auf dem Rechenstab. Dort erfordert die Änderung des Teilpunktabstandes eine unterschiedliche Stufung einzelner Skalenabschnitte.
Bild 43 zeigt eine trigonometrische Leiter mit

$$s(\alpha) = 100 \text{ mm} \cdot \sin \alpha \quad (0° \leqq \alpha \leqq 90°).$$

Wächst der Funktionswert bei zunehmendem Argument, so wird die Funktionsleiter in positiver Richtung durchlaufen. Die Laufrichtung ist entgegengesetzt der positiven Orientierung des Trägers, wenn der Funktionswert mit zunehmendem Argument fällt. Geht der Funktionswert bei zunehmendem Argument von Wachsen in Fallen über, dann wird die Skala *rückläufig*.

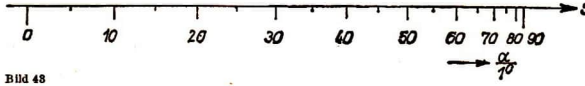


Bild 43

BEISPIEL

3. Das Bewegungsgesetz beim senkrechten Wurf nach oben

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

ist für $h_0 = 1$ m, $v_0 = 20$ ms^{-1}, $g \approx 10$ ms^{-2} durch eine Funktionsleiter mit dem Anfangspunkt h_0 darzustellen. Die Funktionsleiter soll eine Länge von 10 cm haben.

Lösung: Die geworfene Masse m gelangt nach der Wurfzeit t_w wieder in die Ausgangslage h_0 zurück. Es gilt also

$$h_0 + v_0 t_w - \frac{1}{2} g t_w^2 = h_0,$$

$$v_0 t_w - \frac{1}{2} g t_w^2 = 0.$$

Es folgt:

$$t_w = \frac{2 v_0}{g}.$$

Nach der Zeit $t_G = \frac{1}{2} t_w$ ist die Gipfellage h_{max} erreicht.

Der größte Funktionswert ist also

$$h_{max} = h_0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Mit den gegebenen Werten ist

$$t_w = 4\,\mathrm{s}, \quad t_O = 2\,\mathrm{s}, \quad h_{\max} = 21\,\mathrm{m}.$$

Aus der Größengleichung

$$h = 1\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{ms^{-1}}t - 5\,\mathrm{ms^{-2}}t^2$$

folgt

$$\frac{h}{\mathrm{m}} = 1 + 20\,\frac{t}{\mathrm{s}} - 5\left(\frac{t}{\mathrm{s}}\right)^2,$$

$$y = 1 + 20\,x - 5x^2.$$

Diese Funktion ist für $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 21$ darzustellen.

Anfangswert: $y_0 = 1$,

Leitergleichung: $s(x) = l_y(20x - 5x^2)$,

Einslänge: $$l_y = \frac{10\,\mathrm{cm}}{f(2) - f(0)} = 0{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Die Leiter zeigt Bild 44.

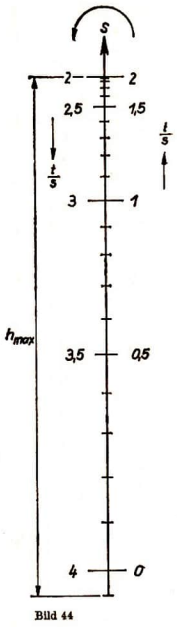


Bild 44

1.3.5. Einteilung der reellen Funktionen

In der expliziten analytischen Darstellung $y = f(x)$ einer reellen Funktion ist der Funktionswert zu x durch einen Term in x gegeben. Bei der Berechnung des Funktionswertes sind auf den gewählten Wert x Operationen auszuüben, die durch den Term bestimmt sind. Die auf x anzuwendenden Operationen liefern ein Einteilungsprinzip für die in expliziter Form analytisch darstellbaren Funktionen.

Die rationalen Funktionen

Die Funktionsgleichungen

$$y = x^3 - 3, \qquad y = \frac{2x^5 - 9}{8},$$

$$y = \pi\,x^3 - x\sqrt{5}, \qquad y = x(x+1)^3 + 2x,$$

$$y = (x^2 - 2)\,(x + 5), \qquad y = 2$$

verlangen die Anwendung der ganzrationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion und Multiplikation) auf das Argument x. Die durch sie gegebenen Funktionen heißen daher **ganzrationale Funktionen**. Zu dieser Menge von Funktionen gehören allgemein alle Funktionen, die sich durch eine Funktionsgleichung von der Form

$$\boxed{y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \tag{9}$$

angeben lassen, wobei $n \geqq 0$ und ganzzahlig ist und die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 reelle Zahlen sind. Ist $a_n \neq 0$, so ist n der höchste Exponent von x, und man bezeichnet die Funktion als *ganzrationale Funktion n-ten Grades*.

Im cartesischen Koordinatensystem ergibt eine ganzrationale Funktion stets eine nirgends unterbrochene Kurve ohne Knicke.

BEISPIELE

1. Die ganzrationale Funktion 1. Grades. Sie ist bereits als lineare Funktion $y = mx + b$ bekannt und liefert im cartesischen Koordinatensystem eine Gerade (Bild 45).
2. Die ganzrationale Funktion 2. Grades, bekannt als quadratische Funktion $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ihre Kurve ist eine Parabel. Bild 46 zeigt eine Parabel mit $a_2 = {}^1/_2$, $a_1 = -2$, $a_0 = 1$.
3. Die ganzrationale Funktion 3. Grades. Die Kurve im cartesischen Koordinatensystem heißt Parabel 3. Grades. Sie ist in Bild 47 für $a_3 = 0{,}2$, $a_2 = -0{,}3$, $a_1 = -3{,}6$, $a_0 = 1$ dargestellt.

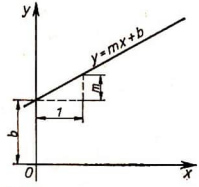


Bild 45

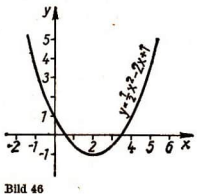


Bild 46

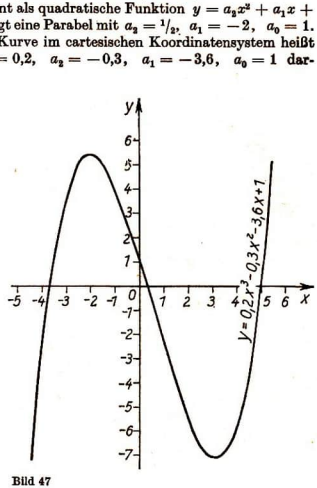


Bild 47

Den Funktionsgleichungen

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ b) $y = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3}$

c) $y = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1} = 1 + \dfrac{3x}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^3-4x+8}{4x-8} = \dfrac{1}{4}(x^2+2x) + \dfrac{2}{x-2}$

ist gemeinsam, daß in Zähler und Nenner der rechten Seite ganzrationale Terme stehen. Durch jede Funktionsgleichung, die sich auf die Form

$$y = R(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0} \tag{10}$$

bringen läßt, ist eine **gebrochenrationale Funktion** gegeben.

Die Menge der gebrochenrationalen Funktionen wird noch weiter unterteilt: in die Menge der echt gebrochenen und die Menge der unecht gebrochenen rationalen Funktionen.

Ist der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners, also $n < m$, liegt eine *echt gebrochene* rationale Funktion vor. Die Beispiele a) und b) mit $n = 0$, $m = 3$ bzw. $n = 1$, $m = 2$ sind solche Funktionen. Ist $n \geqq m$, so handelt es sich um *unecht*

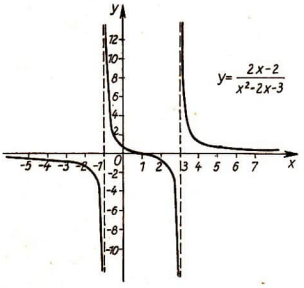


Bild 48

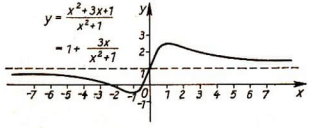


Bild 49

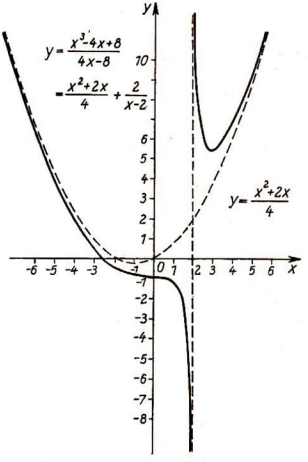


Bild 50

gebrochene rationale Funktionen. Der Term $\frac{g(x)}{h(x)}$ läßt sich dann, wie die Beispiele c) und d) zeigen, durch Ausführen der Division als die Summe eines ganzen und eines echt gebrochenen Terms darstellen.

Die Kurven der Funktionen der Beispiele b), c) und d) (Bilder 48, 49 und 50) lassen einige charakteristische Eigenschaften gebrochenrationaler Funktionen erkennen. Es sei hier hervorgehoben, daß bei gebrochenrationalen Funktionen mitunter für bestimmte x-Werte kein Funktionswert y existiert. Dies ist im Beispiel b) bei $x = -1$ und $x = 3$ (Bild 48), im Beispiel d) für $x = 2$ (Bild 50) der Fall. Die Ursache ist, daß in $R(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für diese x-Werte der Nenner $h(x) = 0$ wird. An solchen Stellen wird die Funktion als *unstetig* bezeichnet.

Die nichtrationalen Funktionen

Alle Funktionsgleichungen, die sich nicht auf die Formen (9) oder (10) bringen lassen, stellen *nichtrationale Funktionen* dar. Beispiele dafür sind

Wurzelfunktionen:	$y = \sqrt[3]{x}$,	$y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$,
logarithmische Funktionen:	$y = \log_4(x+1)$,	$y = \ln x$,
Exponentialfunktionen:	$y = 10^x$, $y = e^x$,	$y = x^{5x}$,
trigonometrische Funktionen:	$y = \cos 3x$,	$y = \sin(x^2-1)$,
Arcusfunktionen:	$y = \arcsin x$,	$y = \arctan\left(x + \sqrt{1+x^6}\right)$.

Algebraische und transzendente Funktionen

Neben der Einteilung in rationale und nichtrationale Funktionen ist noch eine Einteilung in algebraische und transzendente möglich. Jede Funktion, die mittels einer Gleichung definiert ist, die sich auf die Form

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$$

bringen läßt [$P_k(x)$ Polynome k-ten Grades in x], ist eine *algebraische Funktion*. Alle anderen Funktionen heißen *transzendent*. Algebraisch sind sowohl die rationalen (ganzen und gebrochenen) Funktionen als auch alle Wurzelfunktionen, also ein Teil der nichtrationalen Funktionen. Zu den einfachsten transzendenten Funktionen gehören die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion, die trigonometrischen und die Arcusfunktionen.

BEISPIELE

4. a) $y = x^2 + 4x\ln(a^2+1)$ — algebraisch und rational

   b) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ — algebraisch und nichtrational

   c) $y = \dfrac{2x^3 - \sqrt{x - \sqrt[3]{4+x^3}}}{\sqrt[4]{2x^3+3x^6} - \sqrt[3]{1+\sqrt{5+x^3}}}$ — algebraisch und nichtrational

   d) $y = \tan x$

   e) $y = x - \ln x$

   f) $y = \lg|\sin\sqrt[3]{x}|$

   g) $y = e^{\cos x}$

   — transzendent und nichtrational

Für die Funktionen in expliziter analytischer Darstellung gibt es also zwei Einteilungsprinzipien:

1. die Einteilung in rationale und nichtrationale Funktionen. In diesem Fall sind die transzendenten Funktionen unter den nichtrationalen enthalten;
2. die Einteilung in algebraische und transzendente Funktionen. Die transzendenten Funktionen sind alle nichtrational, wobei die ebenfalls nichtrationalen Wurzelfunktionen *nicht* zu den transzendenten gehören.

1.3.6. Elementare Eigenschaften reeller Funktionen

Eine der wichtigsten algebraischen Funktionen ist die **Potenzfunktion**

$$f\colon y = ax^{\alpha}$$

(α eine reelle Zahl). Für die folgenden Betrachtungen sei zunächst $a = 1$ gesetzt. Wegen $1^{\alpha} = 1$ für alle α haben alle Potenzfunktionen $y = x^{\alpha}$ den Punkt $(1; 1)$ gemeinsam. Für $\alpha = 0$ ergibt sich die Potenzfunktion $y = x^0$. Wegen $x^0 = 1$ ist sie identisch mit der Funktion $y = 1$ (Bild 51).

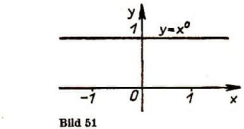


Bild 51

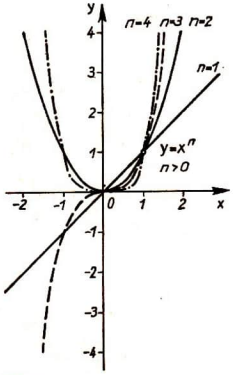


Bild 52

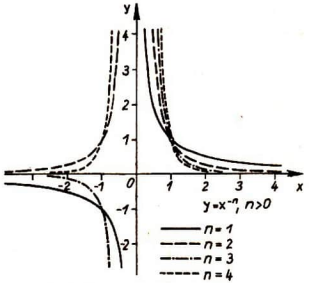


Bild 53

Ist α eine positive ganze Zahl: $\alpha = n$, dann ist die Potenzfunktion eine ganzrationale Funktion. Die Kurven der Funktionen

$$f\colon y = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

heißen *Parabeln*. Bild 52 zeigt die Parabeln für $n = 1, 2, 3, 4$.
Für $\alpha = -n$ $(n \in N)$ lautet die Potenzfunktion

$$f\colon y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Die Kurven sind im cartesischen Koordinatensystem *Hyperbeln* (Bild 53).

Ist α keine ganze Zahl, so ist die Potenzfunktion $y = x^\alpha$ nur für $x > 0$ — bei $\alpha > 0$ auch noch für $x = 0$ — definiert. Von der Menge der Potenzfunktionen mit nicht ganzzahligem Exponenten α soll hier die mit rationalem α hervorgehoben werden. Zu ihnen gehören die *Wurzelfunktionen*: $f: y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Die Kurven sind Halbparabeln. Bei geradem n werden diese Halbparabeln durch $y = -x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{x}$ zu

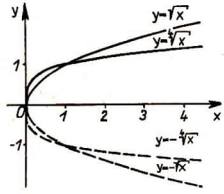


Bild 54

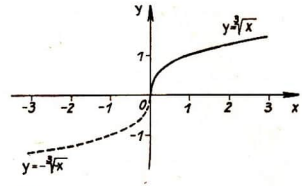


Bild 55

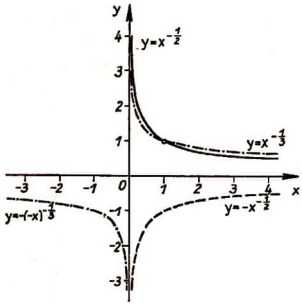


Bild 56

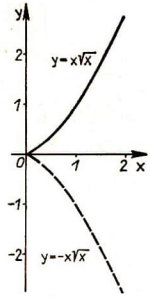


Bild 57

Vollparabeln ergänzt, die den Parabeln $y = x^n$ bei gleichem n kongruent sind (Bilder 54 und 52). Bei ungeradem n ist $y = -(-x)^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{-x}$ die ergänzende Halbparabel zu $y = x^{\frac{1}{n}}$ (Bild 55). Geschlossen werden diese Parabeln durch

$$y^n = x, \quad x \in R$$

angegeben.

Für $\alpha = -\frac{1}{n}$ ergeben sich wieder Hyperbeln (Bild 56).

Besonders erwähnt sei hier noch die NEILsche *Parabel* $y^2 = x^3$, die aus den Ästen

$$y = x\sqrt{x} \quad \text{und} \quad y = -x\sqrt{x}$$

besteht (Bild 57).

Die Potenzfunktion f: $y = ax^3$ weist dieselben Eigenschaften wie $y = x^3$ auf. Der Faktor a bewirkt bei $|a| > 1$ ein Strecken, bei $|a| < 1$ ein Stauchen der Kurve $y = x^3$ in Richtung der y-Achse. Gibt man a das entgegengesetzte Vorzeichen, so wird die ursprüngliche Kurve an der x-Achse gespiegelt. Bild 58 zeigt $y = ax^3$ für $a = 1, 2, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$.

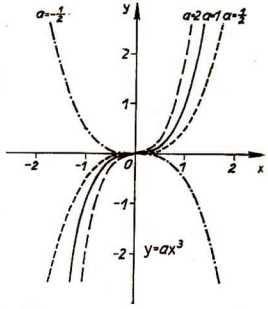


Bild 58

Bei Betrachtung der Bilder 51 ... 58 fallen die Symmetrieeigenschaften der dargestellten Kurven auf.
Durch die Gleichung

$$y = x^n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

sind Kurven gegeben, die bei geradem n *axialsymmetrisch* zur y-Achse, bei ungeradem n *zentralsymmetrisch* zum Ursprung O liegen.
Für

$$y^n = x, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

ergeben sich bei geradem n zur x-Achse axialsymmetrische Kurven, bei ungeradem n liegt wieder Zentralsymmetrie mit dem Zentrum in O vor.
Das Beispiel der Kurvengleichungen $y = x^n$ und $y^n = x$ zeigt, daß es allgemeine Eigenschaften — wie die Symmetrie der Kurven — gibt, die einer ganzen Reihe von Abbildungen bzw. Funktionen eigen sind. Da Kurve und Kurvengleichung eng miteinander verbunden sind, spiegeln sich Eigenschaften der Kurve in der Kurvengleichung wider.
Die Funktionen sollen auf einige solche allgemeine Eigenschaften untersucht werden. Nicht jede Funktion wird durch eine symmetrische Kurve dargestellt (vgl. Bild 50). Symmetriebeziehungen der Kurve zum Achsenkreuz lassen sich leicht an der Funktionsgleichung erkennen. Die Parabel $y = x^2$ liegt axialsymmetrisch zur y-Achse. Das bedeutet, daß die Funktionswerte für x und $-x$ gleich sind. So ist für $y = f(x) = x^2$

$$f(3) = f(-3) = +9, \quad \text{allgemein: } f(x) = f(-x).$$

Es ist leicht einzusehen, daß für alle Potenzfunktionen mit *geradem* Exponenten die Beziehung $f(x) = f(-x)$ gilt (Bilder 52 und 53).

Definition

Funktionen, bei denen für alle x

$$f(x) = f(-x)$$

gilt, heißen **gerade Funktionen.**

Gerade Funktionen liegen axialsymmetrisch zur y-Achse.
Die Parabel $y = x^3$ ist zentralsymmetrisch mit O als Symmetriezentrum. Stets gilt für zwei x-Werte $f(-x) = -f(x)$. Zum Beispiel ist $f(2) = 2^3 = 8$ und $f(-2) = (-2)^3 = -8$, also $f(-2) = -f(2)$. Alle Potenzfunktionen mit *ungeradem* Exponenten haben die gleiche Eigenschaft (Bilder 52 und 53).

Definition

Funktionen, bei denen für alle x

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt, heißen **ungerade Funktionen.**

Ungerade Funktionen liegen zentralsymmetrisch zum Ursprung des Achsenkreuzes.

BEISPIELE

1. $y = f(x) = \sin x$ ist eine ungerade Funktion, denn es gilt für alle x

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

2. $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ist eine gerade Funktion, denn

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x).$$

3. $y = f(x) = +\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ist weder gerade noch ungerade, denn

$$f(-x) = +\sqrt{(-x)^2 - 2(-x) + 5} = +\sqrt{x^2 + 2x + 5},$$

d. h., es ist sowohl $f(-x) \neq f(x)$ als auch $f(-x) \neq -f(x)$.

Betrachtet man die Wertepaare $(x; y)$ der Funktion $y = x^2$, so findet man, daß im Intervall $[0, \infty)$ die Funktionswerte y mit wachsendem x ständig zunehmen. Ist $x_1 < x_2$, so gilt auch $y_1 < y_2$. Dieser Sachverhalt spiegelt sich an der Kurve im Ansteigen des rechten Parabelastes wider. Im Intervall $(-\infty, 0]$ ist umgekehrt für $x_1 < x_2$ stets $y_1 > y_2$. Die Funktionswerte nehmen mit wachsendem x ab, die Kurve fällt ständig im Intervall $(-\infty, 0]$.

Definition

Eine Funktion f: $y = f(x)$ heißt in einem Intervall J *monoton wachsend*, wenn für irgend zwei Werte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leqq f(x_2)$ gilt. Sie heißt *monoton fallend*, wenn mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geqq f(x_2)$ gilt.

Es ist zu beachten, daß das Gleichheitszeichen zugelassen ist. Gilt durchweg das Ungleichheitszeichen, ist also im ganzen Intervall $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so spricht man von *strenger Monotonie.*
Die Funktion f: $y = 0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 1$ (vgl. Bild 47) z. B. ist im Intervall

$$\begin{aligned} -\infty < x \leqq -2 &\quad \text{(streng) monoton steigend,} \\ -2 \leqq x \leqq 3 &\quad \text{(streng) monton fallend,} \\ 3 \leqq x < \infty &\quad \text{(streng) monoton steigend.} \end{aligned}$$

Im Intervall $[0, 5]$ z. B. ist sie nicht monoton, da sie bis $x = 3$ fällt, von $x = 3$ an aber steigt.
Eine weitere wesentliche Eigenschaft ist die **Stetigkeit** einer Funktion. Sie soll zunächst nur anschaulich behandelt werden. Eine strengere Betrachtung wird später nachgeholt werden können.
Soll eine Funktion als Kurve in einem Koordinatensystem dargestellt werden, so stellt man gewöhnlich eine Wertetabelle auf, trägt die erhaltenen Wertepaare als Punkte im Koordinatensystem ein und verbindet die einzelnen Punkte zu einem Kurvenzug. Man nimmt dabei stillschweigend an, daß sich alle anderen nicht berechneten Punkte des Funktionsbildes ohne Unterbrechung auf der Verbindungslinie aneinanderreihen. Voraussetzung für den letzten Arbeitsgang ist also, daß die Kurve zwischen den einzelnen Punkten keine Lücken aufweist oder Sprünge macht. Eine Funktion, deren Kurvenbild in einem bestimmten Bereich einen ununterbrochenen Linienzug aufweist, heißt in diesem Bereich **stetig**. Trifft das nicht zu, heißt sie **unstetig**. Knicke sind durchaus zugelassen, denn an einem Knick hat der Linienzug keine Unterbrechung.

BEISPIELE

4. Nach der Anschauung wird man ohne weiteres und richtig die folgenden Funktionen für stetig erklären:

$$y = mx + b \qquad \text{(Bild 45),}$$

$$y = x^3 \qquad \text{(Bild 52),}$$

$$y = 0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 1 \qquad \text{(Bild 47),}$$

$$y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} \qquad \text{(Bild 49),}$$

$$y = 2^x \qquad \text{(Bild 72).}$$

5. Folgende Funktionen sind unstetig:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 8}{4x - 8} \qquad \text{bei } x = 2 \qquad \text{(Bild 50),}$$

$$y = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} \qquad \text{bei } x = -1 \text{ und } x = 3 \qquad \text{(Bild 48),}$$

$$y = x^{-n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ bei } x = 0 \qquad \text{(Bild 53).}$$

Die Unstetigkeit dieser gebrochenrationalen Funktionen ist offenbar dadurch begründet, daß der Nenner an der Unstetigkeitsstelle Null ist.

6. Die angeführten unstetigen Funktionen sind in bestimmten Intervallen stetig. Zum Beispiel ist

$$y = \frac{2x-2}{x^3-2x-3} \quad \text{stetig in} \quad -\infty < x < -1, \quad -1 < x < 3, \quad 3 < x < +\infty.$$

7.* Leicht einzusehen sind auch folgende Verallgemeinerungen:
a) Jede ganzrationale Funktion ist überall stetig (vgl. Beispiele).
b) Jede gebrochenrationale Funktion, deren Nenner nirgends verschwindet, ist überall stetig $\left(\text{Beispiel: } y = \frac{x^3+3x+1}{x^2+1}\right)$.
c) Jede gebrochenrationale Funktion ist überall dort unstetig, wo der Nenner verschwindet.

8. Aus der Anschauung nicht zu übersehen ist die Frage der Stetigkeit bei der Funktion $y = \sin 1/x$. Diese Funktion schwankt dauernd zwischen -1 und $+1$. Je mehr man sich der Stelle $x = 0$ nähert, desto öfter wechselt sie zwischen diesen Grenzen hin und her (Bild 59). Für $x = 0$ ist sie nicht erklärt. Die Funktion $y = \sin 1/x$ ist bei $x = 0$ unstetig.

Für viele Betrachtungen ist die Steilheit einer Kurve von Interesse. Als Maß für die Steilheit einer Kurve zwischen zwei Kurvenpunkten $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_1; y_1)$ kann der Quotient

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

dienen (Bild 60). Da in Zähler und Nenner Differenzen stehen, heißt dieser Quotient **Differenzenquotient.**
Nach Bild 60 ist

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan\sigma,$$

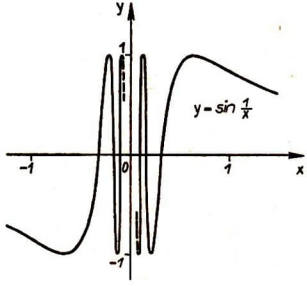


Bild 59

wobei σ der Steigungswinkel der Sekante P_0P_1 ist. Der Differenzenquotient gibt also die *Steigung der Sekante* an und kann daher als mittlere Steigung der Kurve angesehen werden. Ist eine genauere Angabe der Steigung der Kurve in der Nähe von P_0 erwünscht, so muß P_1 näher an P_0 gewählt werden.

Häufig wird der Differenzenquotient $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, kurz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geschrieben, gelesen: delta y durch delta x. Der griechische Buchstabe Δ steht als Merkmal dafür, daß eine Differenz gebildet wurde.
Die Einführung der Größen Δy und Δx gibt die Möglichkeit einer anderen und vielfach zweckmäßigeren Betrachtungsweise. Die Funktion f: $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Funktionswert $f(x_0)$. Erfährt x_0 eine Änderung um Δx, so ändert sich der Funktionswert um Δy. Die Größe Δy stellt also die *Änderung des Funktionswertes* bei der Argumentänderung um Δx dar. Es ist (Bild 61):

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Der mittlere Anstieg der zur Funktion $f\colon y = f(x)$ gehörenden Kurve zwischen den Kurvenpunkten $P_0(x_0; y_0)$ und $P_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ wird somit durch

$$\tan \sigma = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

angegeben.

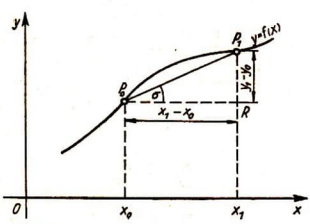


Bild 60

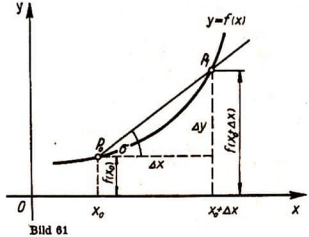


Bild 61

BEISPIEL

9. Es sei $f\colon y = 0{,}2x^2$. Für $x_0 = 1$ und $\Delta x = 4; 2; 1$ ist der Differenzenquotient zu bilden.

Lösung: $y_0 = f(x_0) = 0{,}2x_0^2$,

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = 0{,}2(x_0 + \Delta x)^2 = 0{,}2[x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2],$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0{,}2[x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2] - 0{,}2x_0^2,$$

$$\Delta y = 0{,}2[2x_0\Delta x + (\Delta x)^2],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}2\,\frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 0{,}2(2x_0 + \Delta x).$$

An der Stelle $x_0 = 1$ wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}4 + 0{,}2\,\Delta x.$$

Für $\Delta x = 4; 2; 1$ ergeben sich die Werte $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1{,}2; 0{,}8; 0{,}6$.

Bild 62 gibt den geometrischen Sachverhalt wieder: Mit der Änderung von Δx dreht sich die Sekante um P_0.

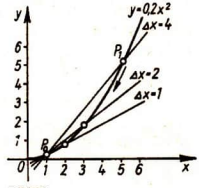


Bild 62

Der Differenzenquotient liegt vielen naturwissenschaftlichen Fragestellungen zugrunde. Ist die betrachtete Funktion das Weg-Zeit-Gesetz der Kinematik $s = f(t)$, so stellt der Quotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitspanne}}$$

die *mittlere Geschwindigkeit* eines Körpers im Zeitintervall $t_0 \ldots t_1$ dar. Meist interessiert aber nicht die mittlere, sondern die Augenblicksgeschwindigkeit des Körpers zu einem Zeitpunkt t_0. Man wird um so genauer Auskunft über die Augenblicksgeschwindigkeit erhalten, je kürzer die Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$ gewählt wird. Aus

Bild 63 ist zu erkennen, daß beim Problem der Geschwindigkeit der gleiche mathematische Sachverhalt vorliegt wie bei der Steigung einer Kurve.
Von den zahlreichen naturwissenschaftlichen Problemen, die zu der gleichen Fragestellung führen, sei noch die Beschleunigung erwähnt. Bewegt sich ein Körper mit der veränderlichen Geschwindigkeit $v = f(t)$, so gibt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{Änderung der Geschwindigkeit}}{\text{Zeitspanne}}$$

die *mittlere Beschleunigung* im Intervall $t_0 \dots t_1$ an (Bild 64). Zur Ermittlung eines brauchbaren Näherungswertes für die Augenblicksbeschleunigung zur Zeit t_0 muß die Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$ genügend klein gewählt werden.

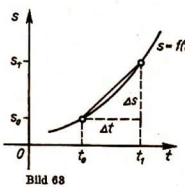


Bild 63

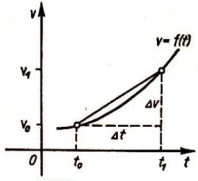


Bild 64

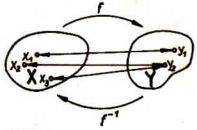


Bild 65

1.3.7. Die Umkehrfunktion

In 1.2.3. wurde der Begriff der zu F inversen Abbildung F^{-1} definiert. Ist die Abbildung eine Funktion f und die Umkehrung f^{-1} wieder eine Funktion, dann heißt f^{-1} die zu f **inverse Funktion** oder die **Umkehrfunktion** von f. Die Umkehrung f^{-1} von f ist nur dann eine Funktion, wenn f^{-1} eindeutig ist. Dann ist aber f eine eineindeutige Funktion.

Satz

Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie eineindeutig ist.

Das bedeutet, daß sich nur zu einer eineindeutigen Funktion die Umkehrfunktion bilden läßt. Bild 65 zeigt eine Funktion f, die sich nicht umkehren läßt, denn wegen $f(x_2) = f(x_3)$ ist $f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_3\}$. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist also nicht eindeutig und stellt keine Funktion dar. Ein weiteres Beispiel einer Funktion, zu der keine inverse existiert, zeigt Bild 66.
Da in der Analysis vorwiegend Funktionen betrachtet werden, die sich durch eine Funktionsgleichung darstellen lassen, soll auf die Umkehrung solcher Funktionen noch etwas näher eingegangen werden.
In der expliziten Form gibt die Funktionsgleichung den Funktionswert zum Argument direkt durch einen Term an. So ordnet die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \qquad \text{(I)}$$

der Funktion f dem Wert $x = 4$ den Wert $y = \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 1$ zu (Bild 67).

Da f eine eineindeutige Funktion ist, existiert die inverse Funktion $f^{-1} = \varphi$. Man erhält die explizite Form der Funktionsgleichung zu φ, indem man (I) nach der Variablen x auflöst:

$$x = \varphi(y) = 2y + 2. \tag{II}$$

Bei φ ist umgekehrt dem Wert $y = 1$ der Wert $x = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ zugeordnet.

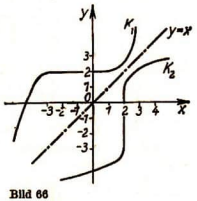


Bild 66

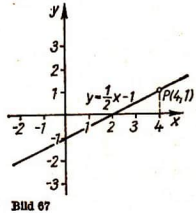


Bild 67

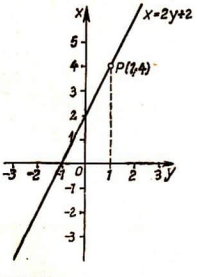


Bild 68

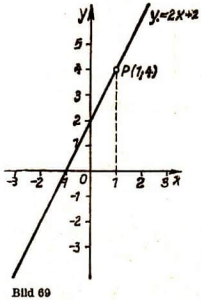


Bild 69

Das Argument von φ ist jetzt — wie auch die Schreibweise $\varphi(y)$ ausdrückt — mit y bezeichnet. In der graphischen Darstellung ist daher — entgegen dem Üblichen — die (waagerechte) Abszissenachse mit y, die (senkrechte) Ordinatenachse mit x zu bezeichnen (Bild 68). Um zur gewohnten Bezeichnungsweise zurückzukehren, werden meist die Symbole x und y vertauscht. (II) erscheint dann in der gewohnten Form

$$y = \varphi(x) = 2x + 2. \tag{IIa}$$

Das Vertauschen der Symbole ändert natürlich nicht die Funktion, denn (II) und (IIa) unterscheiden sich nur äußerlich durch die Bezeichnungsweise der Variablen. Ein Vergleich von Bild 68 und Bild 69 macht noch einmal deutlich, daß die Änderung der Bezeichnungsweise keine neue Funktion liefert.

Das Auflösen der Gleichung (I) nach der Variablen x ist zunächst nur ein formaler Schritt. Mit der Vereinbarung aber, die Aussageform $y = f(x)$ bzw. $x = \varphi(y)$ so zu lesen, daß die alleinstehende Variable das Bild der anderen ist, ist mit (II) die Umkehrfunktion zu (I) gegeben.
Formal rechnerisch geht die Bildung der Umkehrfunktion wie folgt vor sich:

Gegeben:	$f\colon\ y = f(x) = \frac{1}{2}x - 1$	Ausgangsfunktion
Auflösen nach x:	$\varphi\colon\ x = \varphi(y) = 2y + 2$	Umkehrfunktion
Vertauschen von x und y:	$\varphi\colon\ y = \varphi(x) = 2x + 2$	Umkehrfunktion

Die Umkehrung der Abbildungsrichtung hat zur Folge, daß ein Wertepaar $(a; b)$ der Ausgangsfunktion in das Wertepaar $(b; a)$ der Umkehrfunktion übergeht. Diese Wertepaare werden im x,y-Koordinatensystem durch die Punkte $P_1(a; b)$ und $P_2(b; a)$ dargestellt, die spiegelbildlich zur Geraden $y = x$ liegen. Dies gilt für alle Wertepaare einer Funktion, also auch für die gesamte die Funktion darstellende Kurve. Bild 70 demonstriert das am bisher behandelten Beispiel.

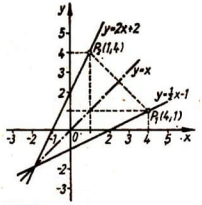


Bild 70

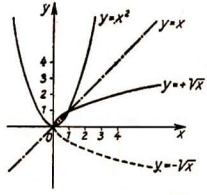


Bild 71

Satz

Funktion und Umkehrfunktion liegen in einem gleichgeteilten x,y-Koordinatensystem spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

Diese Spiegelung tritt nur im gleichgeteilten cartesischen Koordinatensystem ein.
Wird die Umkehrfunktion umgekehrt, so erhalten die Veränderlichen ihre ursprüngliche Bedeutung zurück. $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist also auch Umkehrfunktion zu $y = 2x + 2$.

Satz

Funktion und Umkehrfunktion sind zueinander invers.

Bei Funktionen, die nicht eineindeutig sind, führt die Umkehrung — wie schon erwähnt — auf mehrdeutige Abbildungen. Die Umkehrabbildung kann dann in einzelne eindeutige Abbildungen zerlegt werden.

BEISPIEL

1. Die zur Funktion $f\colon\ y = x^2$ inverse Abbildung $\varphi\colon\ y^2 = x$ kann — wie Bild 71 zeigt — in die Funktionen $\varphi_1\colon\ y = \sqrt{x}$ und $\varphi_2\colon\ y = -\sqrt{x}$ zerlegt werden.

Wie aus dem Beispiel ersichtlich ist, kann $f: y = x^2$ als Vereinigung der beiden eindeutigen Funktionen

$$f_1: y = x^2, \quad x \geqq 0$$

und

$$f_2: y = x^2, \quad x \leqq 0$$

aufgefaßt werden, zu denen die Umkehrfunktionen

$$\varphi_1: y = \sqrt{x}$$

und

$$\varphi_2: y = -\sqrt{x}$$

gehören.
Ist eine Funktion in einem Bereich streng monoton, so ist sie dort auch eindeutig (Bild 71).

Satz

Zu jeder streng monotonen Funktion existiert die Umkehrfunktion.

BEISPIELE

2. Allgemein liefert die Umkehrung der geraden Potenzfunktionen

$$y = x^{2n} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die mehrdeutigen Abbildungen

$$y^{2n} = x.$$

Jede dieser Abbildungen ist die Vereinigung zweier Funktionen

$$y = \sqrt[2n]{x} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt[2n]{x}.$$

Vgl. dazu die Bilder 52 und 54.

3. Zu jeder der ungeraden Potenzfunktionen

$$y = x^{2n-1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

existiert eine Umkehrfunktion. Es sind dies die Wurzelfunktionen[1])

$$y = \begin{cases} \sqrt[2n-1]{x}, & x \geqq 0, \\ -\sqrt[2n-1]{-x}, & x \leqq 0, \end{cases} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

für die geschlossen auch

$$y^{2n-1} = x$$

geschrieben werden kann. Für $n = 3$ zeigen die Bilder 52 und 55 Funktion und Umkehrfunktion.

[1]) Da $\sqrt[n]{a}$ nur für $a \geqq 0$ definiert ist, müssen hier zur vollständigen Angabe der Umkehrfunktion zwei Gleichungen geschrieben werden

$n = 0$ liefert die Potenzfunktion $y = x^{-1}$. Aus

$$y = \frac{1}{x}$$

folgt durch Auflösen nach x

$$x = \frac{1}{y}.$$

Vertauschen von x und y:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Bei der Einheitshyperbel sind Funktion und Umkehrfunktion identisch, da die Funktion $y = \frac{1}{x}$ im cartesischen Koordinatensystem symmetrisch zur Geraden $y = x$ liegt.

Für $n = 1$ liegt die Funktion $y = x$ vor. Auch hier fallen Funktion und Umkehrfunktion zusammen.

4. Für die Exponentialfunktion

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

folgt durch Auflösen nach x

$$x = \log_a y$$

und Vertauschen von x und y

$$y = \log_a x.$$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Bild 72 stellt die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion für $a = 1/2$ und $a = 2$ dar.

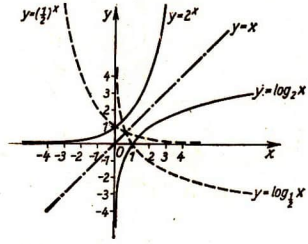


Bild 72

1.3.8. Periodische Funktionen

In Natur und Technik treten vielfach periodische Vorgänge auf. Unter periodischen Vorgängen werden solche Abläufe verstanden, bei denen sich ein bestimmter Vorgang oder eine bestimmte Situation nach Verstreichen einer festen Zeit T wiederholt. Bekannte Beispiele für periodische Vorgänge sind die periodisch wiederkehrenden Jahreszeiten ($T = 1$ Jahr), eingelaufene Produktionszyklen (u. a. in der Landwirtschaft) und Schwingungsvorgänge.

Mathematisch werden periodische Vorgänge durch periodische Funktionen erfaßt. Das sind — dem eben beschriebenen Sachverhalt entsprechend — Funktionen, die für alle Argumentwerte x, die sich um einen festen Wert a unterscheiden, denselben Funktionswert aufweisen.

Definition

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn für alle $x \in X$ und $x + ka \in X$

$$f(x + ka) = f(x) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gilt.

Die Konstante a heißt *Periode* der Funktion f. Die kleinste Periode p, für die $f(x + kp) = f(x)$ gilt, wird *primitive* Periode genannt. Jede Periode a einer Funktion f ist ein ganzzahliges Vielfaches von p.

Harmonische Schwingungen (z. B. Schwingung einer Stimmgabel, ungedämpfte elektrische Schwingungen) lassen sich mathematisch mit Hilfe der harmonischen Funktion

$$y = f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{I}$$

beschreiben. Hierbei heißen

y die Elongation,

$A > 0$ die Amplitude,

ω die Kreisfrequenz ($\omega > 0$),

φ der Nullphasenwinkel ($|\varphi| \leqq \pi$),

$\omega t + \varphi$ der Phasenwinkel.

Die Sinusfunktion $y = \sin x$ hat die (primitive) Periode $p = 2\pi$. Setzt man also $\omega t + \varphi = x$, so gilt

$$A \sin(x + 2\pi) = A \sin x.$$

Die *Schwingungsdauer* T von (I) folgt somit aus

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Der Kehrwert $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ heißt *Frequenz* der Schwingung.

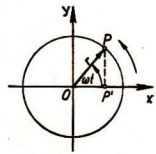


Bild 73

BEISPIEL

1. Ein Punkt P bewegt sich gleichförmig auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r. Der zugehörige Radius OP (Bild 73) überstreicht dabei in 10^{-1} s einmal die Kreisfläche. Wie groß sind Kreisfrequenz ω und Frequenz ν der Schwingung, die von der Projektion P' von P auf die x-Achse bei dieser Bewegung von P ausgeführt wird?

Lösung: In 10^{-1} s wird von $\overline{OP}$ der Winkel $\alpha = 2\pi$ überstrichen. Es gilt also wegen $\omega t = \alpha$:

$$\omega \cdot 10^{-1}\ \mathrm{s} = 2\pi$$

$$\underline{\underline{\omega = 20\pi\ \mathrm{s}^{-1}}}, \qquad \underline{\underline{\nu = 10\ \mathrm{s}^{-1}}}.$$

In elektrischen Schaltungen (z. B. Fernsehtechnik) werden häufig sogenannte *Kippschwingungen* angewendet. Das sind Schwingungen, bei denen sich elektrische Größen (Strom, Spannung) sprunghaft ändern, wobei sich dieser Vorgang periodisch wiederholt. Ein wesentliches Schaltelement zur Erzeugung solcher Schwingungen ist der Kondensator, der sich bei Anlegen einer Spannung innerhalb einer gewissen Zeitspanne auflädt und bei Kurzschließen in sehr kurzer Zeit entlädt. Die Kurven dieser Funktionen weisen gewöhnlich Ecken oder Sprünge auf. Auf solche periodische Funktionen wird an anderer Stelle eingegangen.

Haben die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ alle die Periode a, so hat auch jede Linearkombination

$$L(x) = c_0 + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

die Periode a. Das ist leicht einzusehen. Denn gilt

$$c_i f_i(x + ka) = c_i f_i(x) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{II}$$

so folgt für

$$L(x + ka) = c_0 + c_1 f_1(x + ka) + \cdots + c_n f_n(x + ka)$$

wegen (II):

$$L(x + ka) = c_0 + c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = L(x).$$

BEISPIEL

2. Welche primitive Periode p hat die Funktion

$$y = f(t) = b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t?$$

Lösung: Wegen $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ folgt für die primitive Periode p der Funktion $f_k(t) = \sin k\omega t$:

$$k\omega(t + p) = k\omega t + 2\pi,$$

$$k\omega p = 2\pi,$$

$$p = \frac{2\pi}{k\omega}.$$

Für jede Funktion f_k ist auch

$$a = kp = \frac{2\pi}{\omega}$$

eine Periode. Diese Periode ist unabhängig von k. Somit hat $y = f(t)$ die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$. Das ist offenbar auch die kleinste Periode. Also gilt

$$p = \frac{2\pi}{\omega}.$$

1.3.9. Die Newtonsche Interpolation

Das Newtonsche Interpolationspolynom

Die ganzrationalen Funktionen spielen in vielen praktischen Anwendungen eine Rolle, da sie gegenüber anderen Funktionen Vorzüge aufweisen, die für das praktische Arbeiten Bedeutung haben. Zur Berechnung der Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion sind bei Benutzung des HORNER-Schemas als Rechenoperationen nur

Addition und Multplikation erforderlich, so daß bei umfangreicheren Arbeiten Rechenmaschinen oder Rechenautomaten eingesetzt werden können. Unter anderem ist also der Grad der zu behandelnden ganzrationalen Funktionen von untergeordneter Bedeutung, sofern geeignete Hilfsmittel zur Verfügung stehen.
Dieser Vorteil kann auch für andere Funktionen genutzt werden, da sich für jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion eine ganzrationale Näherungsfunktion angeben läßt. Durch geeignete Wahl des Grades n und der Koeffizienten a_i kann man erreichen, daß die Abweichungen von der anzunähernden Funktion unter einer beliebig kleinen vorgegebenen Schranke bleiben.
In der Praxis ergibt sich oft die Aufgabe, aus einer Anzahl vorgegebener Wertepaare $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ einer Funktion $y = f(x)$ eine ganzrationale Funktion $y = g(x)$ zu bestimmen, die die vorgegebenen Wertepaare enthält. Die vorgegebenen Argumentwerte $x_0, \ldots, x_n$ heißen *Stützstellen*, die ihnen zugeordneten Funktionswerte $y_0, \ldots, y_n$ heißen *Stützwerte* der Funktion.
Für $y = g(x)$ wird gefordert

$$y_\nu = f(x_\nu) = g(x_\nu) \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{I}$$

Das sind $n + 1$ Bedingungen, die der Term $g(x)$ erfüllen muß. Deshalb ist für $g(x)$ ein ganzrationaler Term mit $n + 1$ Koeffizienten, also ein Term n-ten Grades, anzusetzen:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Wegen der Forderung (I) muß für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$y_\nu = a_n x_\nu^n + a_{n-1} x_\nu^{n-1} + \cdots + a_1 x_\nu + a_0 \tag{II}$$

gelten. Das liefert ein Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen für die $n + 1$ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Wie sich zeigen läßt, ist die Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

wenn alle Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ voneinander verschieden sind. Daher hat das Gleichungssystem (II) genau eine Lösung. Das bedeutet, es gibt genau eine ganzrationale Funktion von höchstens[1]) n-tem Grade, die die Forderung (I) erfüllt. Die gesuchte Funktion werden wir im folgenden wegen dieses Zusammenhanges mit $y = g_n(x)$ bezeichnen, auch wenn der Grad der ermittelten Funktion kleiner als n ausfallen sollte.
Für das praktische Rechnen ist der Weg, die Koeffizienten a_i aus dem Gleichungssystem (II) zu ermitteln, zu umständlich. Von den in der Praxis angewandten Verfahren, den Ausdruck $g_n(x)$ zu ermitteln, soll hier die NEWTONsche Interpolationsformel behandelt werden.

[1]) Es kann z. B. $a_n = 0$ oder $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k} = 0$ sein

Die ganzrationale Näherungsfunktion $y = g_n(x)$ wird zweckmäßig über den Ansatz

$$\begin{aligned} y = g_n(x) = c_0 &+ c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ &+ c_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{11}$$

bestimmt. Das in dieser Form angesetzte Polynom n-ten Grades heißt NEWTONsches **Interpolationspolynom.** Der Vorteil dieser Form des Ansatzes liegt darin, daß für die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ein gestaffeltes lineares Gleichungssystem entsteht, das sehr einfach zu lösen ist.

Die Funktion $y = g_n(x)$ soll den Forderungen (I) genügen. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} g_n(x_0) &= y_0 = c_0 \\ g_n(x_1) &= y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ g_n(x_2) &= y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ g_n(x_3) &= y_3 = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + \\ &\quad + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n(x_n) &= y_n = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\ &\quad + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{III}$$

Die Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und die Stützwerte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ sind von der Aufgabenstellung her bekannt. Aus diesem gestaffelten Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ lassen sich diese der Reihe nach wie folgt berechnen:

Aus der 1. Gleichung folgt sofort

$$c_0 = y_0.$$

Mit dem nun bekannten Wert c_0 ergibt sich aus der 2. Gleichung

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Die 3. Gleichung liefert unter Verwendung des ermittelten Koeffizienten c_1:

$$c_2 = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

In dieser Weise fortfahrend können alle Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ schrittweise berechnet werden.

BEISPIEL

1. Es ist die ganzrationale Funktion von höchstens 3. Grade zu bestimmen, die die Punkte (1; 9), (3; −27), (4; −30), (7; 165) enthält.

   Lösung: Aus dem Ansatz

$$g_3(x) = c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - 1)(x - 3) + c_3(x - 1)(x - 3)(x - 4)$$

folgt

$$g_3(1) = 9 = c_0,$$
$$g_3(3) = -27 = c_0 + 2c_1,$$
$$g_3(4) = -30 = c_0 + 3c_1 + 3c_2,$$
$$g_3(7) = 165 = c_0 + 6c_1 + 24c_2 + 72c_3.$$

Das gestaffelte Gleichungssystem liefert der Reihe nach

$$c_0 = 9$$
$$c_1 = \frac{-27 - 9}{2}, \qquad c_1 = -18$$
$$c_2 = \frac{-30 - 9 - 3 \cdot (-18)}{3}, \qquad c_2 = 5$$
$$c_3 = \frac{165 - 9 - 6 \cdot (-18) - 24 \cdot 5}{72}, \qquad c_3 = 2.$$

Die verlangte ganzrationale Funktion lautet demnach

$$y = g_3(x) = 9 - 18(x-1) + 5(x-1)(x-3) + 2(x-1)(x-3)(x-4).$$

Nach Potenzen von x geordnet ergibt sich

$$\underline{\underline{y = g_3(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18.}}$$

Die Berechnung der Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ wird bei dem hier eingeschlagenen Weg mit wachsender Zahl der Stützstellen immer umständlicher. In den Anwendungen werden außerdem bei den Stützstellen und Stützwerten nur selten ganzzahlige Werte auftreten. Für die Rechenpraxis wurden daher Rechenschemata entwickelt, mit deren Hilfe die Koeffizienten c_i sehr einfach und in schematischer Weise ermittelt werden können. Ein solches Rechenschema ist der sogenannte *Steigungsspiegel*. Dieses Schema soll hier nicht begründet, sondern nur erläutert werden. Die Herleitung würde umfangreichere Betrachtungen erfordern, die nicht im Rahmen dieses Lehrbuches liegen.

Der Steigungsspiegel wird nach folgendem Schema aufgebaut:

$x_{\nu+4} - x_\nu$	$x_{\nu+3} - x_\nu$	$x_{\nu+2} - x_\nu$	$x_{\nu+1} - x_\nu$	x_ν	y_ν	c_ν^1	c_ν^2	c_ν^3	c_ν^4
				x_0	$\underline{y_0}$				
			$x_1 - x_0$			$\underline{c_0^1}$			
		$x_2 - x_0$		x_1	y_1		$\underline{c_0^2}$		
	$x_3 - x_0$		$x_2 - x_1$			c_1^1		$\underline{c_0^3}$	
$x_4 - x_0$		$x_3 - x_1$		x_2	y_2		c_1^2		$\underline{c_0^4}$
⋮	$x_4 - x_1$		$x_3 - x_2$			c_2^1		c_1^3	⋮
	⋮	$x_4 - x_2$		x_3	y_3		c_2^2	⋮	
		⋮	$x_4 - x_3$			c_3^1	⋮		
			⋮	x_4	y_4	⋮			
				⋮	⋮				

In diesem Schema heißen

c_ν^1 $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ Steigungen 1. Ordnung,

c_ν^2 $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ Steigungen 2. Ordnung,

allgemein

c_ν^k $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ Steigungen k-ter Ordnung.

Die Berechnung des Steigungsspiegels wird von den Spalten für x_ν und y_ν ausgehend vorgenommen.
Zunächst berechnet man die Differenzen $x_{\nu+k} - x_\nu$. Die Differenz $x_4 - x_1$ steht z. B. im Schnittpunkt der von x_4 und x_1 ausgehenden Schrägzeilen. Nachdem die Differenzen ermittelt sind, werden spaltenweise die Steigungen 1. Ordnung, 2. Ordnung, ..., n-ter Ordnung berechnet.
An korrespondierender Stelle zu $x_4 - x_1$ steht auf der rechten Seite des Schemas die Steigung c_1^3. Diese Steigung 3. Ordnung berechnet sich aus den Steigungen 2. Ordnung, die in der linken Nachbarspalte schräg unter und über der gesuchten Steigung c_1^3 stehen, nach der Formel

$$c_1^3 = \frac{c_2^2 - c_1^2}{x_4 - x_1}.$$

Allgemein wird die Steigung k-ter Ordnung c_ν^k nach

$$c_\nu^k = \frac{c_{\nu+1}^{k-1} - c_\nu^{k-1}}{x_{\nu+k} - x_\nu}$$

berechnet. Dividiert wird stets durch die zu c_ν^k an korrespondierender Stelle stehende Differenz $x_{\nu+k} - x_\nu$.
Die rechts in der ersten absteigenden Schrägzeile stehenden Steigungen

$$y_0, c_0^1, c_0^2, \ldots, c_0^n$$

sind die gesuchten Koeffizienten

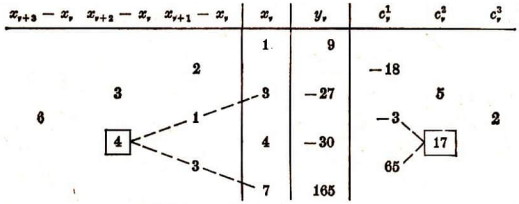
$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$$

des NEWTONschen Interpolationspolynoms (11). (y_0 kann als Steigung nullter Ordnung angesehen werden.)
Das Verfahren, $y = g_n(x)$ mit dem Steigungsspiegel zu ermitteln, hat den Vorteil, daß sich die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sehr leicht ermitteln lassen. Außerdem können ohne weiteres schrittweise weitere Stützstellen hinzugenommen werden, falls sich erweisen sollte, daß $y = g_n(x)$ noch nicht hinreichend der Funktion $y = f(x)$ angenähert ist. Dabei ist es nicht notwendig, daß die Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ im Steigungsspiegel der Reihe nach geordnet erscheinen.

BEISPIEL

2. Die in Beispiel 1 gestellte Aufgabe soll mit Hilfe des Steigungsspiegels gelöst werden.

Lösung:
Der Steigungsspiegel lautet:



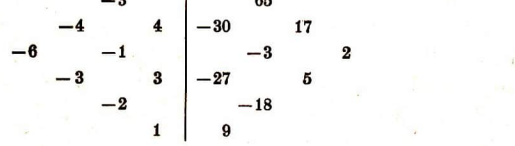
Die Berechnung von $x_3 - x_1$ und c_1^2 ist angedeutet.
Für die verlangte ganzrationale Funktion ergibt sich

$$y = g_3(x) = 9 - 18(x-1) + 5(x-1)(x-3) + 2(x-1)(x-3)(x-4).$$

Ordnen nach Potenzen von x liefert

$$y = g_3(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18.$$

Mit Hilfe des in der Form (11) gewonnenen Näherungspolynoms $g_n(x)$ ist die Berechnung einzelner Funktionswerte etwas umständlich, vor allem, da meist keine glatten Zahlenwerte wie im Beispiel vorliegen werden. Man könnte daran denken, wie im Beispiel die Form $g_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ herzustellen, um das HORNER-Schema ansetzen zu können. Wenn aber nur wenige Funktionswerte zu berechnen sind, dürfte der Aufwand für die Umformung nicht lohnen Es ist aber möglich, mit Hilfe des Steigungsspiegels einzelne Funktionswerte zu berechnen. Dazu führt die folgende Überlegung.
Dieselben Stützstellen können auch in anderer Reihenfolge angesetzt werden. Bei umgekehrter Stützstellenfolge sieht der Steigungsspiegel für das angeführte Beispiel wie folgt aus:



Mit den Werten der von rechts oben abwärts laufenden Schrägzeile als Koeffizienten lautet das Näherungspolynom

$$g_3(x) = 165 + 65(x-7) + 17(x-7)(x-4) + 2(x-7)(x-4)(x-3).$$

Es ist nur eine andere Form des im Beispiel 2 gewonnenen Polynoms. Ordnen nach Potenzen von x liefert wieder

$$g_3(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18.$$

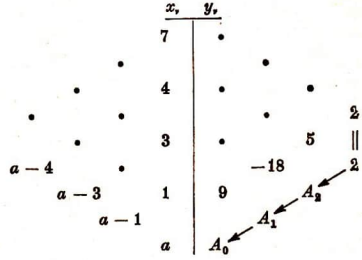
Die im Beispiel 2 errechneten Koeffizienten stehen jetzt in der von rechts unten aufsteigenden Schrägzeile. Man kann also auch — wie sich allgemein zeigen läßt — die aufsteigende Schrägzeile zur Aufstellung von $g_n(x)$ verwenden. Zu beachten ist nur, daß man die richtigen Linearfaktoren ansetzt. Die gezeigte Eigenschaft gestattet es, einzelne Funktionswerte zu errechnen. Es ist für $x = a$ (vgl. das Ergebnis im Beispiel 2)

$$g_3(a) = 9 - 18(a-1) + 5(a-1)(a-3) + 2(a-1)(a-3)(a-4).$$

Für die Rechnung im Steigungsspiegel läßt sich diese Formel wie folgt von hinten her „aufrollen“:

$$g_3(a) = (\underbrace{\{\underbrace{[\underbrace{2(a-4)}_{A_2} + 5]}_{A_1}(a-3) - 18\}}_{A_0}(a-1) + 9)$$

Zur Berechnung von $g_3(a)$ ist daher der Steigungsspiegel lediglich für die neue Stützstelle a zu erweitern:



In der nach links aufsteigenden Schrägzeile werden in gewohnter Weise die Differenzen $a-1$, $a-3$, $a-4$ berechnet. Im rechten Teil des Steigungsspiegels wird die letzte Steigung — hier also die 2 — unverändert heruntergeholt und in die mit $a-4$ korrespondierende Stelle geschrieben. Sodann wird die 2 mit $a-4$ multipliziert, das Produkt zu 5 addiert und das Ergebnis A_2 in die mit $a-3$ korrespondierende Stelle geschrieben. Jetzt wird A_2 mit $a-3$ multipliziert, das Produkt zu -18 addiert und das Ergebnis A_1 unterhalb von -18 eingetragen. In entsprechender Weise erhält man A_0.

BEISPIEL

3. Aus einer 4stelligen Tafel der natürlichen Werte der Tangensfunktion entnimmt man folgende Werte:

α	88,30°	88,40°	88,50°	88,60°
$\tan\alpha$	33,69	35,80	38,19	40,92

Es ist tan 88,36° zu berechnen.

Lösung: Der Steigungsspiegel wird für die gegebenen Stützstellen aufgestellt und für $\alpha = 88{,}36°$ erweitert. Dadurch wird kubisch interpoliert.

	$\alpha/1°$	$\tan\alpha$		
	88,30	33,69		
0,10			21,10	
0,20	88,40	35,80		14,0
0,30	0,10		23,90	
0,20	88,50	38,19		17,0
−0,04	0,10		27,30	
−0,14	88,60	40,92		16,6
−0,24			24,976	
	88,36	34,926		

Der berechnete Funktionswert tan 88,36° = 34,93 ist auf 4 Stellen genau. Bei linearer Interpolation hätte man 34,96, bei quadratischer Interpolation 34,92 — beides fehlerhafte Werte — erhalten.

Die Interpolationsformel von Gregory-Newton

Im letzten Beispiel traten **äquidistante Stützstellen** (d. h. Stützstellen mit gleichen Abständen) auf. In diesem Fall läßt sich das NEWTONsche Interpolationsverfahren noch vereinfachen. Zu diesem Zweck werden *Differenzen* eingeführt, die auch bei anderen numerischen Verfahren eine Rolle spielen.

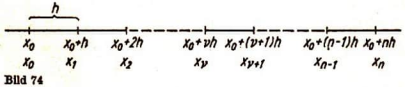


Bild 74

Die Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien äquidistant. Ist der Abstand zweier benachbarter Stützstellen $\Delta x = h$, dann läßt sich für die Stützstelle x_ν

$$x_\nu = x_0 + \nu h$$

schreiben (Bild 74).

Für die den Stützstellen x_ν zugeordneten Stützwerte y_ν definiert man die *Differenzen erster Ordnung*:

$$\Delta y_\nu = y_{\nu+1} - y_\nu,$$

mit diesen die *Differenzen zweiter Ordnung*:

$$\Delta^2 y_\nu = \Delta(\Delta y_\nu) = \Delta y_{\nu+1} - \Delta y_\nu .$$

In dieser Weise wird fortgefahren, so daß rekursiv (zurücklaufend) mit Hilfe der Differenzen k-ter Ordnung die Differenzen $(k+1)$-ter Ordnung definiert werden:

$$\boxed{\Delta^{k+1} y_\nu = \Delta(\Delta^k y_\nu) = \Delta^k y_{\nu+1} - \Delta^k y_\nu} \tag{12}$$

Für das praktische Rechnen wird ein *Differenzenschema* angelegt:

x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$	
$\vdots$	$\vdots$	Δy_4	$\vdots$	$\Delta^3 y_3$
		$\vdots$		$\vdots$

In jeder absteigenden Schrägzeile hat y denselben Index. Deshalb heißen die hier definierten Differenzen *absteigende Differenzen*.

Für bestimmte Zwecke werden die Differenzen auch anders bezeichnet, so daß die Indizes im Schema einen anderen Verlauf nehmen. Hier werden nur absteigende Differenzen benützt.

BEISPIEL

4.

x_ν	y_ν	Δy_ν	$\Delta^2 y_\nu$	$\Delta^3 y_\nu$	$\Delta^4 y_\nu$	$\Delta^5 y_\nu$
−1	−8					
		4				
−0,5	−4		2			
		6		−8		
0	2		−6		18	
		0		10		−31
0,5	2		4		−13	
		4		−3		
1	6		1			
		5				
1,5	11					

Der Argumentschritt ist $h = 0{,}5$. Bei 6 gegebenen Stützstellen läßt sich noch die Differenz 5. Ordnung $\Delta^5 y_0$ bilden.

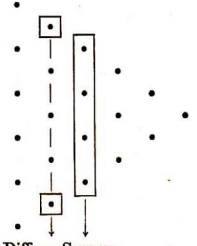
Es ist zweckmäßig, die Rechnung im Differenzenschema durch *Rechenkontrollen* zu überprüfen. Auf Grund der Definition (12) folgt

$$\Delta^{k+1}y_r + \Delta^{k+1}y_{r+1} + \Delta^{k+1}y_{r+2} + \cdots + \Delta^{k+1}y_{r+p-1} =$$
$$= (\Delta^k y_{r+1} - \Delta^k y_r) + (\Delta^k y_{r+2} - \Delta^k y_{r+1}) + (\Delta^k y_{r+3} - \Delta^k y_{r+2}) + \cdots + (\Delta^k y_{r+p} - \Delta^k y_{r+p-1}) =$$
$$= \Delta^k y_{r+p} - \Delta^k y_r.$$

Es gilt somit

$$\boxed{\Delta^k y_{r+p} - \Delta^k y_r = \Delta^{k+1} y_r + \Delta^{k+1} y_{r+1} + \cdots + \Delta^{k+1} y_{r+p-1}} \tag{13}$$

Zur Rechenkontrolle ist also im Differenzenschema folgende einfache Rechnung auszuführen:



Diff. = Summe

Für Beispiel 4 lautet die hier gezeigte Kontrolle:

$$5 - 4 = 2 - 6 + 4 + 1 = 1.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die NEWTONsche Interpolationsformel für den Fall äquidistanter Stützstellen auf eine einfache Form gebracht werden. Bei der Ermittlung der Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ wollen wir uns zunächst auf den Fall $n = 4$ beschränken.
Liegen äquidistante Stützstellen vor, so geht das aus dem Ansatz (11) folgende Gleichungssystem wegen

$$x_{r+k} - x_r = k \cdot h$$

für $n = 4$ über in

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0 \\
y_1 &= c_0 + c_1 \cdot 1h \\
y_2 &= c_0 + c_1 \cdot 2h + c_2 \cdot 2 \cdot 1h^2 \\
y_3 &= c_0 + c_1 \cdot 3h + c_2 \cdot 3 \cdot 2h^2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1h^3 \\
y_4 &= c_0 + c_1 \cdot 4h + c_2 \cdot 4 \cdot 3h^2 + c_3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2h^3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1h^4.
\end{aligned} \tag{I}$$

Wir bilden nun die 1., 2., 3. und 4. Differenzen:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= c_1 h \\
\Delta y_1 &= c_1 h + c_2 \cdot 2 \cdot 1 h^2 \\
\Delta y_2 &= c_1 h + c_2 \cdot 2 \cdot 2 h^2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^3 \\
\Delta y_3 &= c_1 h + c_2 \cdot 2 \cdot 3 h^2 + c_3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 h^3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^4
\end{aligned} \tag{II}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_0 &= c_2 \cdot 2 \cdot 1 h^2 \\
\Delta^2 y_1 &= c_2 \cdot 2 \cdot 1 h^2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^3 \\
\Delta^2 y_2 &= c_2 \cdot 2 \cdot 1 h^2 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 h^3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^4
\end{aligned} \tag{III}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_0 &= c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^3 \\
\Delta^3 y_1 &= c_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^4
\end{aligned} \tag{IV}$$

$$\Delta^4 y_0 = c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 h^4. \tag{V}$$

Aus den Gleichungen (I) bis (V) lassen sich nun die gesuchten Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_4$ berechnen:

$$c_0 = y_0 \qquad c_1 = \frac{\Delta y_0}{h} \qquad c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} \qquad c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} \qquad c_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4! h^4}.$$

Wie sich zeigen läßt, gilt allgemein

$$c_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{VI}$$

wobei $c_0 = y_0$ zu setzen ist.
Bei $n + 1$ äquidistanten Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $x_{\nu+1} - x_\nu = h$ folgt somit unter Benutzung von (VI):

$$y = g_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Wird zur weiteren Vereinfachung durch

$$x = x_0 + th$$

für x die Variable t eingeführt, so folgt wegen

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots, \quad x_{n-1} = x_0 + (n-1)h$$

$$\begin{aligned}
y = g_n(x_0 + th) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} th + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} th(th - h) + \cdots + \\
&+ \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} th(th - h)(th - 2h)\ldots[th - (n-1)h] = \\
&= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} th + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} h^2 t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} h^n t(t-1)(t-2)\ldots[t-(n-1)] = \\
&= y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_n.
\end{aligned}$$

Die Faktoren vor den Differenzen sind die Binomialkoeffizienten:

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1)}{k!}.$$

Für äquidistante Stützstellen ergibt sich so die **Interpolationsformel** von GREGORY-NEWTON.

$$g_n(x_0 + th) = y_0 + \binom{t}{1}\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 + \dots + \binom{t}{n}\Delta^n y_0 \qquad (14)$$

BEISPIEL

5. Die in Beispiel 3 geforderte Interpolation ist mit Hilfe der Interpolationsformel von GREGORY-NEWTON durchzuführen.

Lösung: Zunächst wird die Differenzentafel aufgestellt.

$\alpha/1°$	$\tan\alpha$			
88,30	33,69			
		2,11		
88,40	35,80		0,28	
		2,39		0,06
88,50	38,19		0,34	
		2,73		
88,60	40,92			

Aus $x = x_0 + th$ folgt mit $h = 0{,}1$, $x_0 = 88{,}30$ und $x = 88{,}36$ der Wert $t = 0{,}6$. Es ist

$$\binom{0{,}6}{1} = 0{,}6, \quad \binom{0{,}6}{2} = -0{,}12, \quad \binom{0{,}6}{3} = 0{,}056.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y_0 &= && 33{,}69 \\ \binom{t}{1}\Delta y_0 &= 0{,}6 && \cdot 2{,}11 = \quad 1{,}266 \\ \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 &= -0{,}12 && \cdot 0{,}28 = -0{,}0336 \\ \binom{t}{3}\Delta^3 y_0 &= 0{,}056 && \cdot 0{,}06 = \quad 0{,}00336 \\ \hline y &= && \underline{\underline{34{,}93}} \end{aligned}$$

AUFGABEN

13. Für die folgenden reellen Funktionen sind Definitionsbereich X und Wertebereich Y zu bestimmen.

a) $y = -x$ b) $y = 2x^3 + 1$ c) $y = +\sqrt{1 - x^2}$

d) $y = \sqrt[3]{x + 2}$ e) $y = 1 + \sqrt{9 + x^2}$ f) $y = -2 + \sqrt{x^2 - 16}$

g) $y = 4 - \sqrt{x+5}$ h) $y = \cos 3x$ i) $y = 2 + \sin 2x$

k) $y = \ln(x-1)$ l) $y = 2 + e^{x}$ m) $y = a^{+\sqrt{x}}$ $(a > 1)$

14. Man untersuche, ob $f = g$ ist. Im Falle $f \neq g$ ist anzugeben, worin sich f und g unterscheiden.

a) $y = f(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$, $y = g(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $y = f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$, $y = g(x) = x^2 - 1$

c) $y = f(x) = \ln \sqrt{x}$, $y = g(x) = \dfrac{1}{2} \ln x$

d) $y = f(x) = \ln x^2$, $y = g(x) = 2 \ln x$

e) $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$, $y = g(x) = \dfrac{1}{2 \cos x}$

f) $y = f(x) = \dfrac{3 + \sin^2 x}{2 + \cos x}$, $y = g(x) = 2 - \cos x$

15. Man stelle die in Parameterdarstellung gegebenen Abbildungen im cartesischen Koordinatensystem dar.

a) $x = \dfrac{1}{2} t^2$, $y = t$ b) $x = t$, $y = \dfrac{2}{t-1}$

c) $x = t^2$, $y = \dfrac{1}{2} t^3$ d) $x = 2t + 1$, $y = t(t+2)$

e) $x = 1 + 2t^2$, $y = -2 + t$ f) $x = \dfrac{5t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$

g) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ h) $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$

i) $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ k) $x = \cos^2 t$, $y = \cos 2t$

16. Man eliminiere in den Gleichungspaaren der Aufgabe 15 den Parameter t.

17. Man stelle für f eine Funktionsleiter von der Länge $L = 100$ mm her. Kleinster Teilpunktabstand $\Delta s \approx 5$ mm.

a) $y = f(x) = \lg x$, $1 \leqq x \leqq 10$

b) $y = f(x) = \lg x^2$, $1 \leqq x \leqq 100$

c) $y = f(x) = x^2$, $-5 \leqq x \leqq 5$

d) $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqq x \leqq 1$

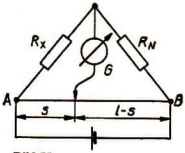


Bild 75

18. In der Elektrotechnik wird zur Widerstandsmessung die Wheatstonesche Brückenschaltung verwendet (Bild 75). Zur Bestimmung des unbekannten Widerstandes R_x wird auf dem Brückendraht AB ein Schleifkontakt in eine solche Stellung geschoben, daß das Galvanometer G keinen Ausschlag anzeigt. R_x berechnet sich dann nach der Gleichung

$$R_x = \frac{s}{l-s} R_N,$$

wobei R_N ein bekannter Normalwiderstand ist. Am Brückendraht von der Länge $l = 1000$ mm ist eine Teilung für die Zahlenwerte $x = \frac{R_x}{R_N}$ anzubringen (Zeichnung im Maßstab 1:10). Kleinster Teilpunktabstand $\Delta s \approx 2$ mm.

19. Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen reicht von 10^{-14} bis 10^{9} cm Wellenlänge. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Bereiche der Wellenlängen sind auf einer logarithmischen Skale von 190 mm Länge zu markieren.

Bezeichnung	Röntgenstrahlen		Licht		
	hart	weich	ultraviolett	sichtbar	infrarot
λ/cm	$10^{-13} \dots 5 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9} \dots 3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-7} \dots 4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5} \dots 7{,}5 \cdot 10^{-5}$	$7{,}5 \cdot 10^{-5} \dots 1{,}4 \cdot 10^{-1}$

Bezeichnung	Radiowellen				
	Mikrowellen	ultrakurz	kurz	mittel	lang
λ/cm	$2 \cdot 10^{-2} \dots 10^{2}$	$10^{2} \dots 10^{3}$	$10^{3} \dots 10^{4}$	$10^{4} \dots 10^{5}$	$10^{5} \dots 10^{6}$

20. Die folgenden Größengleichungen sind auf die angegebenen Einheiten zuzuschneiden.

a) Schnittgeschwindigkeit bei Drehmaschinen:

$$v = d\pi n, \quad [d] = \text{mm}, \quad [v] = \text{ms}^{-1}, \quad [n] = \text{min}^{-1}$$

b) Masse einer Stahlkugel:

$$m = \varrho \cdot {}^{\pi}/_{6}\, d^3, \quad [m] = \text{g}, \quad [d] = \text{mm}, \quad [\varrho] = \text{g cm}^{-3}$$

c) Massenträgheitsmoment eines Hohlzylinders:

$$J = {}^{1}/_{2}\, m\, r^2, \quad [J] = \text{kgm}^2, \quad [m] = \text{kg}, \quad [r] = \text{mm}$$

d) Newtonsches Grundgesetz:

$$F = ma, \quad [F] = \text{N}, \quad [m] = \text{g}, \quad [a] = \text{cm s}^{-2}$$

e) Leistung (bei gleicher Richtung von Kraft und Geschwindigkeit):

$$P = Fv, \quad [P] = \text{W}, \quad [F] = \text{kp}, \quad [v] = \text{cm s}^{-1}$$

f) Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad [T] = \text{s}, \quad g = 9{,}81 \text{ m s}^{-2}, \quad [l] = \text{mm}$$

21. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche ungerade?

a) $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ b) $y = 2x^3 - \sin x$ c) $y = \dfrac{x}{x^3 - 2x + 5}$

d) $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ e) $y = x^2 - \sin 2x$ f) $y = \tan x + \cos x$

g) $y = |x| + 2$ h) $y = {}^{1}/_{2}\,(x^2 + 2|x| - 3)$ i) $y = |x| + x$

k) $y = \sin |x|$ l) $y = x\sqrt{3 - x}, \; x \in [-3, 3]$ m) $y = x\sqrt[3]{|x + x^3|}$

22. Zu bilden ist der Differenzenquotient der Funktionen:

a) $y = 0{,}3x^2 + 2x$ b) $y = 2x^3 - x$ c) $v = f(t) = 2t^3 - 4t + 1$

23. Von den in Aufgabe 22 genannten Funktionen ist der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 2$ bzw. $t_0 = 2$ für Δx bzw. $\Delta t = 10; 5; 1; 0{,}1; 0{,}01$ zu berechnen.

24. Man berechne den Differenzenquotienten von $y = 0{,}2x^2 + 0{,}8x - 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ für $\Delta x = -8; -6; -3; -1$. Die Funktion ist mit den zu Δx gehörenden Sekanten zu zeichnen.

25. Man bilde den Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$:

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Bei b) und c) ist der Zähler des Differenzenquotienten rational zu machen.

26. Man bilde die Umkehrfunktion [Form: $y = \varphi(x)$ mit $\varphi = f^{-1} = \{(x; y) \mid y = \varphi(x)\}$].

a) $y = 3x - 2$ b) $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$ c) $y = \dfrac{2x - 3}{2}$

d) $y = -\sqrt[3]{2x}$ e) $y = 4 - \sqrt{x}$ f) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

g) $y = \dfrac{x}{2x - 3}$ h) $y = 4x^2 + 2 \quad (x \geqq 0)$ i) $y = -x^3 + 1$

k) $y = 2^x + 1$ l) $y = 1 + \ln x$ m) $y = \ln \ln x$

27. Welche primitive Periode haben die folgenden Funktionen?

a) $y = \sin 2x$ b) $y = \cos kx$ c) $y = 1 - 2\sin 3x$

d) $y = \cos 2x - 3\sin 5x$ e) $U = U_0 \sin(3\omega t - \varphi)$

f) $y = \sin 3\omega t + \cos 5\omega t$ g) $y = 2\cos 2\omega t - 3\sin 6\omega t$

h) $y = \sin^2 2t$ i) $y = \sin^2 \omega t - 2\cos 2\omega t$

k) $y = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_n \cos n\omega t + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_n \sin n\omega t$

28. Man gebe die Funktionsgleichung für die in den Bildern 76a und 76b dargestellten Funktionen an.
Die Kurven sind Sinuskurven.

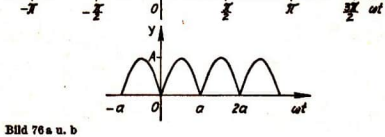


Bild 76a u. b

29. Es ist die ganzrationale Funktion zu bestimmen, die die Punkte

a) $(-1;-1)$, $(1;25)$, $(2;26)$, $(4;-56)$

b) $(-2;1)$, $(1;-6{,}5)$, $(4;-5)$, $(5;-2{,}5)$

c) $(-2;-14{,}610)$, $(-1;-7{,}61)$, $(1{,}5;-3{,}235)$, $(4;-2{,}610)$

d) $(-2{,}8;12{,}440)$, $(-1{,}2;5{,}080)$, $(2{,}0;5{,}720)$, $(4{,}4;-28{,}744)$

e) $(-3;71{,}4)$, $(-2;32{,}8)$, $(1;8{,}2)$, $(2;6{,}4)$, $(4;-30{,}8)$

enthält.

30. Für die in Aufgabe 29 gewonnenen Polynome berechne man mit Hilfe des Steigungsspiegels $g_n(-0{,}5)$ und $g_n(3{,}2)$.

31. Aus den Tafelwerten

x	0,12	0,13	0,14
$\ln x$	$-2{,}1203$	$-2{,}0402$	$-1{,}9661$

ist durch quadratische Interpolation a) $\ln 0{,}128$, b) $\ln 0{,}133$ zu bestimmen. Man interpoliere außerdem linear und vergleiche mit den zuerst gewonnenen Werten.

32. Aus den Tafelwerten

$x/1°$	0,46	0,47	0,48
$\lg \sin x + 10$	7,90463	7,91397	7,92311

ist durch quadratische Interpolation der Funktionswert a) für $x = 0{,}466°$, b) für $x = 0{,}477°$ zu bestimmen und mit dem durch lineare Interpolation gewonnenen Wert zu vergleichen.

33. Auf Grund der Tafelwerte

x	0	0,1	0,2	0,3
$\sin x$	0,00000	0,09983	0,19867	0,29552

ist für $y = \sin x$ ein Interpolationspolynom für den Bereich $0 \leqq x \leqq 0{,}3$ aufzustellen. Man berechne mit Hilfe dieses Polynoms a) $\sin 0{,}05$, b) $\sin 0{,}12$.

34. Aus den Tafelwerten

x	0,4	0,5	0,6	0,7
e^x	1,49182	1,64872	1,82212	2,01375

ist für $y = e^x$ ein Interpolationspolynom für den Bereich $0{,}4 \leqq x \leqq 0{,}7$ zu gewinnen. Man berechne danach a) $e^{0{,}45}$, b) $e^{0{,}51}$.

35. Mit Hilfe der Tafelwerte

x	0,40	0,45	0,50	0,55
$\sqrt{1-x^2}$	0,91652	0,89303	0,86603	0,83516

berechne man $\sqrt{1-x^2}$ a) für $x = 0{,}46$, b) für $x = 0{,}525$.

2. Folgen und Reihen; Grenzwert

2.1. Folgen

2.1.1. Der Begriff der Folge

Für viele der beim Aufbau der Analysis auftretenden Probleme wie auch für viele Anwendungen ist der Begriff der Zahlenfolge — oft kurz als Folge bezeichnet — von großer Wichtigkeit.

Bei einer Zahlenmenge wird bekanntlich von einer Anordnung der Elemente abgesehen. Eine *geordnete* Menge von Zahlen wird als **Zahlenfolge** bezeichnet. *Geordnet* soll heißen, daß die Zahlenfolge eine erste Zahl x_1, eine zweite Zahl x_2, eine dritte Zahl x_3 und so fort besitzt. Die einzelnen Zahlen einer Folge heißen ihre **Glieder**. Das Zeichen für die gesamte Zahlenfolge ist $\{x_k\}$, wobei x_k das k-te Glied der Folge bezeichnet. Anstelle von x und k werden auch andere Buchstaben verwendet.

BEISPIELE

1. Die Folge der geraden positiven Zahlen

$$\{x_k\} = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

2. Die Folge der ungeraden positiven Zahlen

$$\{x_k\} = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

3. Die Folge der Stammbrüche, deren Nenner Quadratzahlen sind

$$\{x_k\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$$

4. Die Folge

$$\{x_k\} = 2, 2, 2, 2, \ldots$$

5. Die Folge

$$\{x_k\} = 2, -4, 6, -8, \ldots$$

6. Die Folge

$$\{x_k\} = 7, 12, -3, 5, 2, 9.$$

7. Die Folge der negativen ganzen Zahlen

$$\{x_k\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$$

Das Zeichen ... in den angegebenen Beispielen ist zu lesen: und so weiter unbegrenzt. Die ersten fünf der angegebenen Folgen haben also unendlich viele Glieder. Sie heißen daher *unendliche* Folgen. Die sechste ist eine *endliche* Folge.

Das Zeichen ... für die nicht angegebenen Glieder einer Folge zu setzen ist nur dann sinnvoll, wenn die Folge eindeutig fortgesetzt werden kann. Bei den Folgen der Beispiele 1, 2, 3 und 7 ist das durch die Wortformulierung, bei der sechsten Folge durch die vollständige Angabe der Glieder gewährleistet. Bei den Folgen der Beispiele 4 und 5 läßt sich eine plausible Fortsetzung angeben. Die Angabe einer unendlichen Folge durch eine endliche Zahl von Gliedern ist aber nicht eindeutig.

Die eindeutige Fortsetzung einer Folge kann z. B. durch Angabe eines k-ten Gliedes x_k – des sogenannten *allgemeinen Gliedes* – gesichert sein. So liefert für $k = 1, 2, 3, \ldots$

$x_k = 2k$	die Folge	$2, \quad 4, \quad 6, \ldots, 2k, \ldots$
$x_k = 2k - 1$	„ „	$1, \quad 3, \quad 5, \ldots, 2k - 1, \ldots$
$x_k = \frac{1}{k^2}$	„ „	$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \ldots, \quad \frac{1}{k^2}, \ldots$
$x_k = 2$	„ „	$2, \quad 2, \quad 2, \ldots$
$x_k = (-1)^{k-1} \cdot 2k$	„ „	$2, \quad -4, \quad 6, \ldots$
$x_k = -k$	„ „	$-1, \quad -2, \quad -3, \ldots$

Der Buchstabe k wird gelegentlich auch als laufender Buchstabe, der Index k als Laufindex bezeichnet. Für ihn können auch andere Buchstaben, wie i, j, n, μ, ν stehen. Mitunter ist es auch vorteilhaft, die Numerierung der Glieder statt mit 1 mit 0 oder -1 oder -2 oder irgendeiner ganzen Anfangsnummer a zu beginnen. So bezeichnen

$$\{x_k\} = \{2k - 1\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\{x_n\} = \{2n + 1\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\{x_\nu\} = \{2\nu - 5\}, \qquad \nu = 3, 4, 5, \ldots$$
$$\{x_\mu\} = \{2\mu + 3\}, \qquad \mu = -1, 0, 1, \ldots$$

alle dieselbe Folge

$$\{x_k\} = 1, 3, 5, \ldots, \; 2k - 1, \ldots.$$

Da jede Zahlenfolge ein erstes Glied, ein zweites Glied, ein drittes Glied, ... besitzt, kann man die Glieder einer Zahlenfolge der Reihe nach den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... zugeordnet denken. Diese Zuordnung ist eindeutig.

Definition

Eine reelle Zahlenfolge ist eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich die Menge (oder eine endliche Teilmenge) der natürlichen Zahlen ist.

Ist f die Funktion, die die Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der Glieder der Zahlenfolge abbildet, so lassen sich die Glieder der Zahlenfolge durch

$$x_k = f(k)$$

angeben. Mit $k \in N$ ist eine unendliche, mit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ist eine endliche Zahlenfolge gegeben. Ist $f(k)$ als Term in k angebbar, so läßt sich eine Folge $\{x_k\}$ in **unabhängiger Darstellung** angeben, z. B.

$$\{x_k\}\colon \; x_k = \frac{1}{k^2}, \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Darstellung entspricht einer Funktionsgleichung und gibt x_k unabhängig von anderen Gliedern der Folge an.

Eine andere Möglichkeit der Darstellung ist die **rekursive Darstellung** einer Zahlenfolge mittels des allgemeinen Gliedes:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}).$$

Sie gibt an, wie jedes Glied der Folge aus seinem Vorgänger zu ermitteln ist und wird angewendet, wenn die unabhängige Darstellung unbequem oder so kompliziert ist, daß sie sich schwer finden läßt. Die rekursive Darstellung ist aber erst dann vollständig, wenn eine Anfangsbedingung, z. B. das Glied x_1, gegeben ist.

BEISPIEL

8. Für die Folge

$$a_k = k \cdot a_{k-1} \text{ mit } a_3 = 6 \text{ und } k = 1, 2, 3, \ldots$$

ist die unabhängige Darstellung anzugeben.

Lösung: Aus $a_3 = 3 \cdot a_2$ bzw. $6 = 3 \cdot a_2$ folgt $a_2 = 2$, $a_1 = 1$.
Von $a_1 = 1$ ausgehend können jetzt die Glieder der Folge berechnet werden:

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$a_4 = 4a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Als Bildungsgesetz für a_k ist

$$a_k = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

zu vermuten. Beweis durch vollständige Induktion! Die unabhängige Darstellung lautet somit

$$\{a_k\}\colon a_k = k! \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nicht jede Folge läßt sich durch eine unabhängige oder rekursive Darstellung angeben. Ein Beispiel dafür ist die Folge der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Die formelmäßig angebbaren Folgen sind gewissermaßen Ausnahmen. Diese Ausnahmen aber sind gerade für Theorie und Praxis von Bedeutung.
Bei einigen der in den Beispielen 1 bis 7 angegebenen Zahlenfolgen fallen Besonderheiten auf, über die sich Aussagen machen lassen, die für alle Glieder der jeweils betrachteten Folge gelten. So ist bei der Zahlenfolge

$$\{x_k\} = 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$$

jedes Glied größer als das vorangehende. Die Aussage gilt ohne Ausnahme für jeden Index k und ist deshalb eine Eigenschaft der Zahlenfolge. Man untersuche die Folgen der Beispiele 1 bis 7 hinsichtlich der im folgenden definierten Eigenschaften einer Zahlenfolge!

Definition

Eine Zahlenfolge heißt

(streng) monoton **wachsend**
(streng) monoton **fallend**
alternierend
konstant

wenn für alle k gilt

$a_k < a_{k+1}$
$a_k > a_{k+1}$
$a_k \cdot a_{k+1} < 0$
$a_k = \text{const}$

Durch die Ausdrucksweise streng monoton wird betont, daß zwei benachbarte Glieder der Folge stets voneinander verschieden sind. Man spricht von *Monotonie im weiteren Sinne*, wenn Gleichheit zugelassen ist, wenn also $a_k \leqq a_{k+1}$ oder $a_k \geqq a_{k+1}$ für alle k gilt.

Definition

Eine Zahlenfolge heißt **nach unten beschränkt**, wenn sich eine Zahl S_1 angeben läßt, so daß

$$S_1 \leqq x_k \quad \text{für alle } k$$

gilt.

Eine Zahlenfolge heißt **nach oben beschränkt**, wenn sich eine Zahl S_2 angeben läßt, so daß

$$x_k \leqq S_2 \quad \text{für alle } k$$

gilt.

Die Zahl S_1 (S_2) heißt **untere (obere) Schranke** der Zahlenfolge. In Hinblick auf die Zahlengerade sind auch die Sprechweisen „nach links (rechts) beschränkt" sowie „linke (rechte) Schranke" gebräuchlich. Die Folgen der Beispiele 1 und 2 sind nach unten (links) beschränkt. Eine untere Schranke ist z. B. für beide Folgen die Zahl -5, da für beide Folgen

$$-5 < x_k \quad \text{für alle } k$$

gilt.

Die Folge des dritten Beispiels ist nach unten und oben beschränkt. Die engsten Schranken für diese Folge sind $S_1 = 0$ und $S_2 = 1$. Zwischen diesen Zahlen liegen alle Glieder der Folge, denn es gilt

$$0 < x_k \leqq 1 \quad \text{für alle } k.$$

Die Folge des Beispiels 5 ist weder nach unten noch nach oben beschränkt; denn wie man auch z. B. S_2 wählen mag, stets gibt es Glieder x_k, die größer als S_2 sind.

Häufig ist es notwendig, die **Summe** einer Anzahl von Gliedern einer Folge zu berechnen. Für eine abkürzende Schreibweise wird das Zeichen Σ (griechischer Buchstabe sigma, entspricht dem lateinischen Buchstaben S) verwendet.

Ist $\{x_k\}$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge, so bedeutet z. B. die Schreibweise $\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ (lies: Summe über x_k für k gleich 1 bis k gleich n), es ist die Summe s_n der ersten n Glieder zu bilden:

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{I}$$

Unter und über dem Summenzeichen Σ wird angegeben, welchen Abschnitt der ganzen Zahlen der Laufindex k durchlaufen soll. Kürzere Schreibweisen sind

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{oder} \quad \sum_{1}^{n} x_k.$$

Auch $\sum x_k$ ist üblich, wenn vorweg bekannt ist, welche Glieder der Folge $\{x_k\}$ zu summieren sind.
Zuweilen ist es zweckmäßig, den Laufindex zu verändern. So bezeichnet

$$\sum_{\mu=-3}^{\mu=n-4} x_{\mu+4} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

dieselbe Summe, die durch (I) angegeben wurde.

BEISPIELE

9. Für $\sum_{k=5}^{k=n} a_k$ ist ein neuer Laufindex ν so einzuführen, daß von $\nu = 1$ an summiert wird.

Lösung: Man setzt an

$$a_{\nu+m} = a_k.$$

Für $\nu = 1$ muß $k = 5$ sein. Also

$$1 + m = 5 \qquad \nu + 4 = n$$
$$m = 4 \qquad \nu = n - 4.$$

Somit folgt

$$\sum_{k=5}^{k=n} a_k = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-4} a_{\nu+4}.$$

10. Man berechne $\sum_{\nu=-1}^{3} 2^{\nu-1}$.

Lösung: $\sum_{\nu=-1}^{3} 2^{\nu-1} = 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{31}{4}$.

Ehe weitere allgemeine Eigenschaften von Zahlenfolgen behandelt werden, sollen zwei besondere Arten von Zahlenfolgen näher untersucht werden, die schon in der Elementarmathematik eine Rolle spielen.

2.1.2. Arithmetische und geometrische Folgen

Bei den folgenden Betrachtungen soll die Numerierung der Glieder einer Folge stets mit $k = 1$ beginnen.
Die Folge

$$\{x_k\} = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 2k - 1, \ldots$$

zeichnet sich dadurch aus, daß die *Differenz* $x_{k+1} - x_k$ zweier benachbarter Glieder konstant ist. Die nacheinander gebildeten Differenzen bilden wieder eine Folge, die *Differenzenfolge*:

$$\{\Delta x_k\} = 2, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$$

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_k\}$ mit konstanter Differenzenfolge $\{\Delta x_k\}$ heißt **arithmetische Zahlenfolge.**

Die genauere Bezeichnung ist arithmetische Zahlenfolge *erster Ordnung*. Eine Zahlenfolge, bei der die p-te Differenzenfolge konstant ist, wird als arithmetische Zahlenfolge p-ter Ordnung bezeichnet. Ein Beispiel einer arithmetischen Zahlenfolge dritter Ordnung ist die Folge der Kubikzahlen:

$$\begin{aligned}
\{x_k\} &= 1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125, \quad 216, \ \ldots \\
\{\Delta x_k\} &= \quad 7, \quad 19, \quad 37, \quad 61, \quad 91, \ \ldots \\
\{\Delta^2 x_k\} &= \quad\quad 12, \quad 18, \quad 24, \quad 30, \ \ldots \\
\{\Delta^3 x_k\} &= \quad\quad\quad 6, \quad 6, \quad 6, \ \ldots
\end{aligned}$$

Hier sollen nur arithmetische Zahlenfolgen erster Ordnung betrachtet werden, so daß auf den Zusatz „erster Ordnung" verzichtet werden kann.

Die konstante Differenz $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ wird gewöhnlich mit d bezeichnet.
Aus der Definition folgt die *rekursive Darstellung* der arithmetischen Zahlenfolge

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + d} \tag{15}$$

Für $d > 0$ ist — wie man aus (15) sofort abliest — die arithmetische Zahlenfolge monoton steigend, für $d < 0$ monoton fallend. Eine konstante Folge kann als arithmetische Folge mit $d = 0$ angesehen werden. Es sollen nur endliche arithmetische Folgen betrachtet werden. Das letzte Glied x_n wird *Endglied* genannt.
Mit dem Anfangsglied x_1 und der Differenz d läßt sich die arithmetische Folge durch

$$x_1,\ x_1 + d,\ \ x_1 + 2d, \ldots, x_1 + (k-1)d, \ldots, x + (n-1)d$$

angeben. Danach gilt stets:

$$x_k = x_1 + (k-1)d.$$

Somit lautet die *unabhängige Darstellung* einer arithmetischen Zahlenfolge $\{x_k\}$:

$$\boxed{x_k = x_1 + (k-1)d, \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \ldots, n} \tag{16}$$

Da die Numerierung mit $k = 1$ beginnt, hat die Folge (16) n Glieder.

BEISPIELE

1. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_3 = -1 \qquad x_n = \frac{13}{5} \qquad d = \frac{3}{5}.$$

Man gebe die unabhängige Darstellung an.

Lösung: Nach (16) folgt für $k = 3$:

$$-1 = x_1 + 2 \cdot \frac{3}{5},$$

$$x_1 = -\frac{11}{5},$$

für $k = n$:

$$\frac{13}{5} = -\frac{11}{5} + (n-1) \cdot \frac{3}{5},$$

$$n = 9.$$

Somit

$$\{x_k\}: \quad x_k = -\frac{11}{5} + (k-1) \cdot \frac{3}{5}, \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

2. Zwischen je zwei Glieder der arithmetischen Folge

$$x_1 \qquad x_1 + d \qquad x_1 + 2d \qquad \ldots$$

sind m Glieder so einzuschalten, daß wieder eine arithmetische Folge entsteht.

Lösung: Die Differenz der neuen Folge sei d^*. Da zwischen zwei Nachbarglieder mit der Differenz $x_{k+1} - x_k = d$ jeweils m neue Glieder eingeschaltet werden, gilt

$$(m+1)\, d^* = d,$$

$$d^* = \frac{d}{m+1}.$$

Die arithmetische Zahlenfolge verdankt ihren Namen dem Umstand, daß das Glied x_k das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist. Nach (15) gilt nämlich

$$x_k - d = x_{k-1},$$
$$x_k + d = x_{k+1}$$

woraus folgt:

$$\boxed{x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}} \tag{17}$$

Mitunter ist die Summe

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots + x_n$$

der ersten n Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge zu berechnen. Sie ist leicht zu finden, wenn man die Summe noch einmal in umgekehrter Reihenfolge darunter schreibt:

$$s_n = x_n + x_{n-1} + \cdots + x_{n-k+1} + \cdots + x_1$$

und addiert:

$$2s_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \cdots + (x_k + x_{n-k+1}) + \cdots + (x_n + x_1).$$

Nun ist nach (16)

$$(x_k + x_{n-k+1}) = x_1 + (k-1)d + x_1 + (n-k)d = 2x_1 + (n-1)d =$$
$$= x_1 + x_n.$$

Dieser Summand tritt n-mal auf, also folgt für die n Glieder $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = \frac{n}{2}[2x_1 + (n-1)d]} \tag{18}$$

BEISPIELE

3. Es ist die Summe der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu berechnen.

   Lösung: Die Folge hat n Glieder. Mit $x_1 = 1$, $x_n = n$ folgt

   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Von einer arithmetischen Folge sind bekannt:

   $$x_1 = \frac{7}{3}, \qquad d = \frac{5}{3}, \qquad s_n = 138.$$

   Man bestimme die Anzahl der Glieder und x_n.

   Lösung: Einsetzen in die zweite Form von (18):

   $$138 = \frac{n}{2}\left[\frac{14}{3} + (n-1)\cdot\frac{5}{3}\right]$$

   liefert die quadratische Gleichung

   $$n^2 + 1{,}8n - 165{,}6 = 0$$

   mit den Lösungen $n_1 = 12$ und $n_2 = -13{,}8$. Die zweite Lösung scheidet aus, da die Anzahl der Glieder weder negativ noch gebrochen sein kann. Somit ist die Anzahl der Glieder $n = 12$.

   Das Endglied ergibt sich aus (16):

   $$x_n = \frac{7}{3} + 11 \cdot \frac{5}{3} = \frac{62}{3}.$$

Außer den arithmetischen Zahlenfolgen sind in der Elementarmathematik noch die geometrischen Zahlenfolgen von Bedeutung. Ein Beispiel dafür ist die Folge

$$\{x_k\} = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$$

Hier ist der *Quotient* $\frac{x_{k+1}}{x_k} = 2$ zweier benachbarter Glieder konstant. Dieser Quotient wird gewöhnlich mit q bezeichnet.

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_k\}$, bei der der Quotient $\frac{x_{k+1}}{x_k}$ zweier benachbarter Glieder für alle k denselben Wert q besitzt, heißt **geometrische Zahlenfolge.**

Aus der Definition ergibt sich die *rekursive Darstellung* der geometrischen Zahlenfolge

$$\boxed{x_{k+1} = x_k\, q} \tag{19}$$

Ist $q < 0$, so alterniert die geometrische Zahlenfolge. Eine nähere Untersuchung erfolgt in 2.2.2.

Sind Anfangsglied x_1 und Quotient q bekannt, so lassen sich die Glieder der geometrischen Folge der Reihe nach berechnen:

$$x_1,\quad x_1 q,\quad x_1 q^2,\quad \ldots,\quad x_1 q^k,\quad \ldots$$

Bei $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ heißt das k-te Glied der Folge $x_1 q^{k-1}$. Somit lautet die *unabhängige Darstellung* der geometrischen Zahlenfolge $\{x_k\}$:

$$\boxed{x_k = x_1\, q^{k-1} \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n} \tag{20}$$

BEISPIEL

5. Von einer geometrischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_5 = 2 \qquad x_n = \frac{16}{27} \qquad q = \frac{2}{3}.$$

Man gebe die unabhängige Darstellung an.

Lösung: Nach (20) folgt für $k = 5$:

$$2 = x_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \qquad x_1 = \frac{81}{8}$$

für $k = n$:

$$\frac{16}{27} = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$n - 1 = \frac{\lg \dfrac{8 \cdot 16}{27 \cdot 81}}{\lg \dfrac{2}{3}} = \frac{\lg \dfrac{2^7}{3^7}}{\lg \dfrac{2}{3}} = 7$$

$$n = 8.$$

Die unabhängige Darstellung lautet somit:

$$\{x_k\}: \quad x_k = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 8.$$

6. Zwischen je zwei Glieder der geometrischen Folge

$$x_1,\quad x_1 q,\quad x_1 q^2,\quad \ldots$$

mit $q > 0$ sind m Glieder einzuschalten, daß wieder eine geometrische Folge entsteht.

Lösung: Der Quotient der neuen Folge sei q^*. Werden zwischen zwei Nachbarglieder mit $\frac{x_{k+1}}{x_k} = q$ jeweils m neue Glieder eingeschaltet, so gilt

$$q^{*m+1} = q$$

$$\underline{\underline{q^* = \sqrt[m+1]{q}}} \qquad (q > 0).$$

Ihren Namen verdankt die geometrische Zahlenfolge der Eigenschaft, daß jedes Glied das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder ist. Das folgt sofort aus der Definition. Danach gilt nämlich für die Glieder x_{k-1}, x_k, x_{k+1}:

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{1}{q}$$

also:

$$\boxed{x_{k-1} : x_k = x_k : x_{k+1}} \tag{21}$$

oder

$$x_k^2 = x_{k-1} \cdot x_{k+1}.$$

Auch bei geometrischen Zahlenfolgen ist oft die Summe der ersten n Glieder

$$s_n = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \cdots + x_1 q^{n-1} \tag{I}$$

von Interesse. Um die Summierung der einzelnen Glieder zu umgehen, bildet man

$$s_n q = \quad x_1 q + x_1 q^2 + \cdots + x_1 q^{n-1} + x_1 q^n \tag{II}$$

und subtrahiert (II) von (I):

$$s_n(1 - q) = x_1 \qquad - x_1 q^n.$$

Es folgt:

$$\boxed{s_n = x_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \neq 1} \tag{22}$$

Für $q = 1$ ergibt sich sofort aus (I)

$$s_n = n x_1.$$

Nimmt man in (22) das Anfangsglied x_1 auf den Zähler:

$$s_n = \frac{x_1 - x_1 q^n}{1 - q}$$

und setzt $x_1 q^n = x_1 q^{n-1} \cdot q = x_n q$, so erhält die Summenformel die Gestalt

$$\boxed{s_n = \frac{x_1 - x_n q}{1 - q}} \tag{22a}$$

BEISPIELE

7. Wie groß ist a) das 8. Glied, b) die Summe der Glieder der geometrischen Folge

$$6, \quad -3, \quad \frac{3}{2}, \cdots, x_8?$$

Lösung:

a) $x_1 = 6 \quad q = -\frac{1}{2} \quad k = 8$ liefert

$$x_8 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{3}{64}.$$

b) Mit (22) folgt

$$s_8 = 6 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{255}{64}.$$

8. Man berechne die Summe

$$a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Lösung: Das allgemeine Glied der Summe lautet

$$x_k = a^{n-k}b^{k-1}.$$

Der Quotient

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{a^{n-k}\,b^{k-1}}{a^{n-k+1}b^{k-2}} = \frac{b}{a}$$

ist unabhängig von k, also konstant. Folglich handelt es sich bei den Gliedern der Summe um eine geometrische Folge. Da der Exponent von b von 0 bis $n-1$ läuft, ist die Anzahl der Glieder gleich n. Es folgt mit $x_1 = a^{n-1}$, $q = \frac{b}{a}$:

$$s_n = a^{n-1}\,\frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^n}{a} \cdot \frac{1 - \frac{b^n}{a^n}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

Folgerung: Der Term $a^n - b^n$ ist durch $a - b$ ohne Rest teilbar. So ist zum Beispiel

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2,$$

$$\frac{1 - x^4}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Bekannt ist schon der Fall $n = 2$:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

in der Form

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

2.1.3. Anwendungen der geometrischen Folge

Vorzugszahlen

Eine wesentliche Voraussetzung für eine schnelle Entwicklung der Großproduktion ist die Vereinheitlichung der industriellen Erzeugnisse nach Abmessung, Masse, Leistung, Drehzahl und anderen maßgebenden Größen. Da es häufig nötig ist, ein

Erzeugnis — etwa eine Welle oder ein Gewinde — in verschiedenen Abmessungen herzustellen, ist die Stufung der Abmessungen (Typenreihen) durch das Vorschreiben von **Vorzugszahlen** genormt. Das geschieht, indem man für die Maßzahlen der einzelnen Abmessungen bestimmte Zahlenfolgen vorschreibt. Die geometrische Zahlenfolge erweist sich dabei aus verschiedenen Gesichtspunkten heraus meist als sehr zweckmäßig.

BEISPIEL

1. Es sollen Rohre in sechs verschiedenen Größen gefertigt werden. Der Durchmesser des kleinsten Rohres soll 20 mm, der des größten Rohres 200 mm betragen. Zwischen 20 mm und 200 mm sind vier Glieder zwischenzuschalten.

Lösung: Es folgt für die

arithmetische Stufung: $d^* = \dfrac{180\ \text{mm}}{5} = 36\ \text{mm},$

geometrische Stufung: $q^* = \sqrt[5]{\dfrac{200\ \text{mm}}{20\ \text{mm}}} \approx 1{,}585.$

Demnach betragen die Rohrweiten bei

arithmetischer Stufung:	20	56	92	128	164	200 mm
geometrischer Stufung:	20	31,7	50,2	79,6	126,2	200 mm.

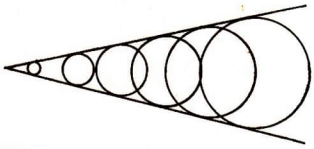


Bild 77

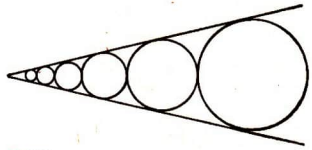


Bild 78

Bei arithmetischer Stufung ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers sehr unausgeglichen: Vom 1. zum 2. Rohr beträgt er 180%, vom 5. zum 6. Rohr nur noch etwa 22% (vgl. auch Bild 77). Dagegen ist der prozentuale Zuwachs des Durchmessers bei geometrischer Stufung von Rohrweite zu Rohrweite derselbe (Bild 78). Man wird daher der geometrischen Stufung den Vorzug geben.

Die Vorzugszahlen, die der Normung von Abmessungen zugrunde gelegt werden, bilden annähernd geometrische Folgen und sind dem Dezimalsystem angepaßt. Bei der Rundung der errechneten Werte wurde außerdem berücksichtigt, daß die Verdopplung oder Halbierung einer Abmessung leicht vorgenommen werden kann.
Die Anpassung an das Dezimalsystem wird erreicht, indem man als Anfangs- und Endglied der geometrischen Folgen aufeinanderfolgende Zehnerpotenzen wählt, also etwa 1 und 10 oder 10 und 100. Zwischen Anfangs- und Endglied werden 4, 9, 19 oder 39 Glieder eingeschaltet, so daß eine geometrische Folge mit 5, 10, 20 bzw. 40 Stufen entsteht. Auf diese Weise ergeben sich die sogenannten Grundreihen[1]) **R 5, R 10, R 20, R 40**, die sich durch die Feinheit der Unterteilung unterscheiden.

[1]) Nach unserer Definition müßte es Grundfolgen heißen. Der Sprachgebrauch in der Technik hält sich aber nicht immer an die mathematische Terminologie

Der Stufensprung bei R 5 ist z. B.

$$q^* = \varphi = \sqrt[5]{\frac{10^{n+1}}{10^n}} = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}5849.$$

Im technischen Schrifttum wird der Quotient der geometrischen Folge *Stufensprung* genannt und mit φ bezeichnet.

Mit φ und der Wahl des Anfangsgliedes ist die Reihe bestimmt:

$$10, \quad 10\varphi, \quad 10\varphi^2, \quad 10\varphi^3, \quad 10\varphi^4, \quad 10\varphi^5.$$

Wegen $\varphi^5 = \left(\sqrt[5]{10}\right)^5 = 10$ ist das letzte Glied gleich 100.
Für die anderen Grundreihen ergeben sich folgende Stufensprünge:

$$\text{R 10:} \quad \varphi = \sqrt[10]{10} \approx 1{,}2589,$$

$$\text{R 20:} \quad \varphi = \sqrt[20]{10} \approx 1{,}1220,$$

$$\text{R 40:} \quad \varphi = \sqrt[40]{10} \approx 1{,}0592.$$

In Tafel I sind nach TGL 0-323 die sogenannten *Hauptwerte* – das sind die zweckmäßig gerundeten Genauwerte – für den Bereich 1 ... 10 zusammengestellt.

Tafel I: Vorzugszahlen nach TGL 0-323

Hauptwerte der Grundreihen							
R 5	R 10	R 20	R 40	R 5	R 10	R 20	R 40
1,00	1,00	1,00	1,00				3,35
			1,06			3,55	3,55
		1,12	1,12				3,75
			1,18	4,00	4,00	4,00	4,00
	1,25	1,25	1,25				4,25
			1,32			4,50	4,50
		1,40	1,40				4,75
			1,50		5,00	5,00	5,00
1,60	1,60	1,60	1,60				5,30
			1,70			5,60	5,60
		1,80	1,80				6,00
			1,90	6,30	6,30	6,30	6,30
	2,00	2,00	2,00				6,70
			2,12			7,10	7,10
		2,24	2,24				7,50
			2,36		8,00	8,00	8,00
2,50	2,50	2,50	2,50				8,50
			2,65			9,00	9,00
		2,80	2,80				9,50
			3,00				
	3,15	3,15	3,15	10,00	10,00	10,00	10,00

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß man die Grundreihen R 5, R 10, R 20 aus der jeweils feiner gestuften Grundreihe durch Überspringen eines Gliedes erhält. Man begründe diesen Zusammenhang!
Für bestimmte Zwecke wurden die Reihen der Hauptwerte noch stärker gerundet. Diese stark gerundeten Werte heißen *Rundwerte*. Sie lauten z. B. für R 10:

$$1 \quad 1{,}25 \quad 1{,}6 \quad 2{,}0 \quad 2{,}5 \quad 3{,}2 \quad 4{,}0 \quad 5{,}0 \quad 6{,}3 \quad 8{,}0 \quad 10{,}0.$$

Zinseszinsrechnung

Die Verzinsung eines Guthabens wird so vorgenommen, daß die für ein Guthaben b innerhalb eines Jahres aufgelaufenen Zinsen am Ende des Jahres dem Guthaben b zugeschlagen und im kommenden Jahr mitverzinst werden.
Bei einem Zinssatz p betragen die für ein Guthaben b nach Ablauf eines Jahres zu zahlenden Zinsen

$$z = b\,\frac{p}{100},$$

so daß das Guthaben am Ende des ersten Jahres

$$b_1 = b + b\,\frac{p}{100} = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

beträgt. Die Verzinsung von b_1 zu dem gleichen Zinssatz p ergibt am Ende des zweiten Jahres ein Guthaben

$$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Bleibt das Guthaben n Jahre stehen, dann entsteht am Ende des n-ten Jahres ein Endbetrag von

$$b_n = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

(Beweis durch vollständige Induktion).
Wird noch $1 + \dfrac{p}{100} = q$ gesetzt, so ergibt sich dieser Endbetrag nach der sogenannten

Zinseszinsformel:

$$\boxed{b_n = b q^n} \tag{23}$$

Man nennt $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ den **Zinsfaktor**.
Zur logarithmischen Berechnung von q^n werden siebenstellige Logarithmen verwendet. Für diesen Zweck sind in den gebräuchlichen fünfstelligen Logarithmentafeln für 1 bis 1,1 siebenstellige Mantissen angegeben.

Auch die Potenz q^n selbst ist für die gebräuchlichen Zinssätze vertafelt. Die Benutzung solcher Zinseszinstafeln ist besonders dann zweckmäßig, wenn eine Rechenmaschine zur Verfügung steht.
Da in (23) vier Variable auftreten, sind vier Aufgabenstellungen möglich.

BEISPIEL

2. Die Gesamtbevölkerung der Erde wurde 1950 auf $2{,}48 \cdot 10^9$ und 1957 auf $2{,}78 \cdot 10^9$ geschätzt. Welche Bevölkerungszahl ist für das Jahr 2000 zu erwarten, wenn man annimmt, daß die prozentuale Zunahme pro Jahr in diesem Zeitraum konstant bleibt?

Lösung: Aus (23) folgt nach Logarithmieren

$$\lg q = \frac{\lg b_n - \lg b}{n}.$$

Für $n = 7$, $b = 2{,}48 \cdot 10^9$, $b_7 = 2{,}78 \cdot 10^9$ wird

$$\lg q = \frac{\lg 2{,}78 - \lg 2{,}48}{7} = 0{,}007084.$$

(Aus $q = 1{,}0164$ ergibt sich eine jährliche Zuwachsrate von 1,64%.)
Im Jahre 2000 ist eine Bevölkerungszahl von

$$b_{50} = b \cdot q^{50}$$

zu erwarten. Unter Verwendung von $\lg q = 0{,}007084$ ergibt sich

$$b_{50} \approx 5{,}6 \cdot 10^9.$$

AUFGABEN

36. Bei den angegebenen Zahlenfolgen ist ein neuer Laufindex so einzuführen, daß das erste Glied der Zahlenfolgen die Nummer 0 erhält.

a) $\{x_k\}$: $x_k = \dfrac{1}{k^2}$ $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\{x_k\}$: $x_k = 2^{5-k}$ $\qquad k = 4, 5, 6, \ldots$

c) $\{x_k\}$: $x_k = (1-k)^{k+1}$ $\qquad k = -2, -1, 0, \ldots$

d) $\{x_k\}$: $x_k = k^2 - 2k + 5$ $\qquad k = -3, -2, -1, \ldots$

37. Aus der rekursiven Darstellung ist das erste Glied der Folge zu ermitteln und die Darstellung des allgemeinen Gliedes herzuleiten.
Das erste Glied soll stets die Nummer 1 tragen.

a) $a_1 = 3$, $a_{k+1} = a_k - 2$ $\qquad$ b) $a_2 = 4$, $a_{k+1} = 2a_k - 4$

c) $a_3 = 2$, $a_{k+1} = 2a_k - 4$ $\qquad$ d) $a_3 = 5$, $a_{k+1} = 2a_k + k$

Hinweis zu c) und d): Man betrachte die Differenzen $a_{k+1} - a_k$, $\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

e) $a_4 = 6$, $a_{k+1} = 2a_k$ $\qquad$ f) $a_3 = 1$, $a_{k+1} = a_k + 3$

g) $a_2 = -2$, $a_{k+1} = \dfrac{1}{a_k}$ $\qquad$ h) $a_4 = 2$, $a_{k+1} = -\dfrac{1}{2}\, a_k$

38. Die Folgen der Aufgabe 37 sind hinsichtlich Monotonie und Vorzeichenwechsel zu charakterisieren.

39. Man gebe für die nachstehenden Folgen die unabhängige Darstellung an ($k = 0, 1, 2, \ldots$) und charakterisiere sie hinsichtlich Monotonie und Vorzeichenwechsel.

a) $a_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2$

b) $a_0 = 4, \quad a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1}$

c) $a_0 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1})$

d) $a_0 = 0, \quad a_1 = -2, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k-1} - a_k) - 1$

e) $a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$

f) $a_0 = 4, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad 2a_{k+1} = a_{k-2} - a_{k-1} - a_k$

40. Man berechne

a) $\sum_{k=3}^{8} \frac{k-2}{2}$ b) $\sum_{n=3}^{8} 3 \cdot 10^{5-n}$ c) $\sum_{\nu=2}^{5} (\nu - 3)^3$

d) $\sum_{\nu=-2}^{3} \frac{2\nu+1}{4-\nu}$ e) $\sum_{k=3}^{7} (-1)^k k$ f) $\sum_{k=3}^{9} (2k-5)$

41. Man berechne

a) $\sum_{n=1}^{6} a^n b^{1-n}$ b) $\sum_{\nu=3}^{6} (x-1)^{\nu-3}, \quad (x \neq 1)$ c) $\sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k-1}$

d) $\sum_{\nu=1}^{4} \binom{4}{\nu-1}\binom{5}{4-\nu}$ e) $\sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ f) $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k (1-a)^{k-1} \quad (a \neq 1)$

42. Man schreibe den binomischen Satz für $(a + b)^\mu$ unter Verwendung des Summenzeichens.

43. In den Termen der Aufgabe 40 ist ein neuer Laufindex μ so einzuführen, daß von $\mu = 1$ an zu summieren ist.

44. Welche der Folgen der Aufgaben 37 und 39 sind arithmetische Folgen? Man gebe jeweils die konstante Differenz d an.

45. Für die arithmetische Folge $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, von der die folgenden Werte bekannt sind, sollen x_7 und s_{13} berechnet werden.

a) $x_4 = 5, \quad d = -2{,}5$ b) $x_3 = -12, \quad d = 1{,}5$

c) $x_{11} = -6, \quad d = -0{,}4$ d) $x_4 = -5, \quad x_9 = -9$

e) $x_3 = -4{,}2, \quad x_{11} = 3$ f) $x_6 = 0{,}8, \quad x_{10} = -4{,}8$

g) $x_4 = 6, \quad s_9 = 21$ h) $x_5 = -12, \quad s_{11} = 33$

46. Man berechne n und x_n.

a) $x_1 = 15, \quad d = -7/3, \quad s_n = 13$

b) $x_1 = -12, \quad d = 3/4, \quad s_n = -102$

c) $x_1 = -3, \quad d = 2, \quad s_n = -5.$

47. Das Argument x der linearen Funktion $y = mx + n$ durchlaufe die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... Welche Folge durchlaufen dann die Funktionswerte y?

48. Man beweise die Formel für die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge durch vollständige Induktion.

49. Es ist die Summe aller ganzen Zahlen zwischen 100 und 1000 zu berechnen, die durch 7 teilbar sind.

50. Man berechne die Summe aller ganzen Zahlen zwischen 1000 und 10000, die bei Division durch 11 den Rest 3 lassen.

51. Man beweise:

a) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$, b) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

52. Es ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen zu berechnen.

53. Welche der Folgen in Aufgabe 37 und 39 sind geometrische Folgen? Man gebe das erste Glied und q an.

54. Man untersuche die geometrische Folge $\{x_1 q^{k-1}\}$ für $x_1 > 0$ hinsichtlich Monotonie.

55. Für die geometrische Folge $\{x_k\}$ ist q zu bestimmen.

a) $\frac{4}{5}$, 2, 5, ... b) $8a^3$, $4a^2b$, $2ab^2$, ...

c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, ... d) $\sqrt{2}-1$, $2-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}-2$, ...

56. Für eine geometrische Folge $\{x_k\}$ ist der Term $\lg x_k$ zu bilden! Was für eine Folge ergibt sich? Man gebe ein konkretes Beispiel an und interpretiere das Ergebnis.

57. Man berechne x_5 und s_7 für die geometrische Folge $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

a) $x_1 = -3{,}2$, $q = 0{,}5$ b) $x_1 = -100$, $q = -0{,}4$

c) $x_1 = 64$, $q = -2{,}5$ d) $x_1 = -5$, $q = 1$

e) $x_3 = 1{,}6$, $x_6 = 0{,}1024$ f) $x_4 = -3{,}2$, $x_8 = -51{,}2$

58. Man berechne für die geometrische Folge $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, n und x_n, wenn gegeben ist

a) $x_1 = 0{,}2$, $q = 3$, $s_n = 656$; b) $x_1 = 192$, $q = -\frac{1}{2}$, $s_n = 128{,}25$.

59. Man berechne für die geometrische Folge $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, n und s_n, wenn gegeben ist

a) $x_1 = -0{,}5$, $q = -3$, $x_n = 1093{,}5$; b) $x_1 = -48{,}6$, $q = -\frac{2}{3}$, $x_n = 6{,}4$.

60. Die Dualzahl LLLLL LLLLL LLLLL LLLLL (L = 1 im Dualsystem) ist im Dezimalsystem anzugeben.

61. Die Dualzahl LLLLL LLLLL, LLL ist im Dezimalsystem anzugeben.

62. Es sind 60 Rohre so zu stapeln, daß jede Schicht auf Lücke mit der darunterliegenden Schicht liegt. Die oberste Schicht soll aus 4 Rohren bestehen. Wieviel Rohre müssen in die unterste Schicht gelegt werden, und wieviel Schichten umfaßt der ganze Stapel?

63. In der Tonleiter stehen die Schwingungszahlen von Grundton und Oktave im Verhältnis 1:2. Bei der gleichschwebenden Stimmung werden zwischen Grundton und Oktave 11 Halbtöne so eingeschaltet, daß das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungszahlen konstant ist. Man gebe die Schwingungszahlen für die Halbtöne der Tonleiter an, deren Grundton die Frequenz 440 s^{-1} hat.

64. Man berechne die Summe a) der Quadratzahlen, b) der Kubikzahlen zwischen 101 und 10001 (vgl. dazu Aufgabe 51).

65. Ein Vollkreis ist in 10 Sektoren aufzuteilen. Der Zentriwinkel des 1. Sektors soll 55,5° betragen, die Zentriwinkel der übrigen Sektoren sollen von Sektor zu Sektor um denselben Betrag abnehmen. Wie lautet die Folge der Zentriwinkel?

66. Mit einem Draht von 0,2 mm Durchmesser soll eine Spule von 2400 Windungen gewickelt werden. Wie lang ist der Wickeldraht, wenn die Spule bei einem lichten Durchmesser von 0,8 cm eine Länge von 2 cm hat ($\pi \approx 3{,}14$)?

67. Eine Drehmaschine soll 21 Drehzahlstufen mit konstantem Stufensprung erhalten. Wie lauten die Drehzahlen, wenn die niedrigste 120 min^{-1}, die höchste 1200 min^{-1} beträgt?

68. An einem Regelwiderstand lassen sich 10 verschiedene Widerstände abgreifen. Wieviel Ohm hat der kleinste Widerstand, wenn der größte 10 kΩ beträgt und jeder Widerstand um 25% gegenüber dem nächstgrößeren abfällt?

69. Man berechne:

a) $\sum_{\nu=0}^{6} (-1)^\nu x^\nu$ b) $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu x^\nu$ c) $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a^\nu b^{n-\nu}$

70. Nach welcher Zeit verdoppelt (verdreifacht) sich ein Geldbetrag, der zu 5% Jahreszinsen auf Zinseszins steht?

71. Die Amplitude A einer Schwingung mit der Frequenz $\nu = 100 s^{-1}$ verringert sich nach jeder Schwingungsperiode um 1%. Nach welcher Zeit ist die Amplitude A auf 0,1 $A_{Anf.}$ abgesunken?

72. Das Produktionsvolumen eines großen Industriebetriebes sollte im Vergleich zu 1955 bis 1960 auf 134% anwachsen. Dieses Ziel wurde bereits nach vier Jahren erreicht. Wie groß war der prozentuale, auf den jeweiligen Jahresanfang bezogene Jahreszuwachs, wenn ein gleichmäßiges Anwachsen der Industrieproduktion angenommen wird?

73. Auf welchen Betrag wächst ein Grundbetrag von 4000 Mark bei 4,5% Zinseszins a) in 6 Jahren, b) in 12 Jahren an?

74. Ein Grundbetrag ist in 11 Jahren bei 4% Zinseszins auf 5600 Mark angewachsen. Wie groß war der Grundbetrag?

2.2. Konvergenz, Divergenz einer Folge; Grenzwert

2.2.1. Nullfolgen

Die Zahlenfolgen sind gegenüber den Mengen dadurch ausgezeichnet, daß ihren Gliedern eine bestimmte Anordnung gegeben ist. Wegen dieser Anordnung kommen den Zahlenfolgen bestimmte Eigenschaften zu, die in der strengen Aufeinanderfolge der Glieder begründet sind. Solche Eigenschaften sind die Monotonie oder die Eigenschaft, arithmetisch oder geometrisch zu sein. Bei unendlichen Zahlenfolgen sind darüber hinaus solche Eigenschaften von Bedeutung, die wesentlich durch die Glieder mit hoher Gliednummer — gewissermaßen durch die „fernen" Glieder — bedingt werden. Auf diese Eigenschaften hat die Beschaffenheit der ersten Glieder oder irgendeiner be-

stimmten Anzahl von Gliedern der Folge keinerlei Einfluß. Sie werden deshalb *infinitäre*[1]) Eigenschaften einer Zahlenfolge genannt.
Eine solche infinitäre Eigenschaft ist die Beschränktheit (vgl. 2.1.1.) einer Zahlenfolge. Betrachtet man z. B. die beschränkte Folge

$$\{x_n\} = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots,$$

so bleibt die Eigenschaft der Beschränktheit erhalten, auch wenn man etwa die ersten 100000 Glieder abändert. Wählt man z. B. für das größte dieser neuen Glieder den Wert 10^6, so hat zwar die neue Folge eine andere obere Schranke, nämlich 10^6. Die Folge ist aber immer noch beschränkt, da für keinen Index n die obere Schranke $S = 10^6$ von einem Glied x_n übertroffen wird.
Nach diesen Vorbetrachtungen sollen jetzt einige weitere infinitäre Eigenschaften von Zahlenfolgen behandelt werden, die von weittragender Bedeutung sind. Die Numerierung soll im folgenden immer bei $n = 0$ beginnen.
Für die Zahlenfolge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

ist 1 eine obere, 0 eine untere Schranke. Wegen $x_0 = 1$ gehört die obere Schranke 1 selbst zur Zahlenfolge, während der Wert 0 der unteren Schranke von keinem Glied der Folge angenommen wird.
Die Zahlenfolge hat bezüglich der unteren Schranke 0 eine besondere Eigenschaft: Da $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ eine fallende Folge ist, nähern sich die Glieder der Folge mit wachsendem Index n immer mehr der unteren Schranke 0. Charakteristisch für diese Annäherung ist, daß der Abstand zwischen 0 und einem Glied x_n um so kleiner ist, je größer die Gliednummer n ist (vgl. Bild 79). Obwohl kein Glied der Folge den Wert 0 annimmt, läßt sich kein kleinster Abstand zwischen 0 und den Gliedern der Folge angeben. Denn wählt man einen beliebig kleinen Abstand ε, so gibt es stets einen Index $N(\varepsilon)$, so daß

$$x_N < \varepsilon \tag{I}$$

ausfällt. Ist etwa $\varepsilon = 10^{-3}$, so wird für $N(\varepsilon) = 1000$ das Glied $x_{1000} = \frac{1}{1001} < 10^{-3}$.
Die Ungleichung (I) gilt aber nicht nur für diesen Index $N(\varepsilon)$, sondern für alle $n \geqq N(\varepsilon)$. In dem kleinen Intervall $(0, \varepsilon)$ liegen also alle Glieder der Folge mit Aus-

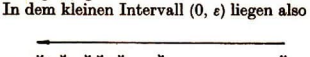


Bild 79

nahme der N Glieder x_0 bis x_{N-1}, und das sind unzählig viele. Man sagt für diesen Sachverhalt auch kurz: Im Intervall $(0, \varepsilon)$ liegen fast alle Glieder der Folge.

[1]) infinitum (lat.) das Unendliche

Zahlenfolgen mit dieser Eigenschaft werden **Nullfolgen** genannt.
Auch die alternierende Zahlenfolge

$$\{x_n\} = \left\{(-1)^n \frac{1}{n+1}\right\} = 1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots$$

ist eine Nullfolge, denn die Beträge $|x_n|$ nähern sich mit wachsendem n immer mehr dem Wert 0, und für eine beliebige (kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ läßt sich stets ein Index $N(\varepsilon)$ angeben, so daß

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$

Bei dieser Zahlenfolge ist es das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, in dem fast alle Glieder der Folge liegen.

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ heißt **Nullfolge**, wenn sich für jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß gilt:

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$

Der Nachweis, daß $\{x_n\}$ eine Nullfolge darstellt, ist erst dann erbracht, wenn für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ der Index $N(\varepsilon)$, von dem ab alle Glieder dem Betrage nach kleiner als ε sind, angegeben werden kann.
Auch in den folgenden Beispielen soll die Numerierung stets bei $n = 0$ beginnen.

BEISPIELE

1. a) Es ist nachzuweisen, daß die Folge $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ eine Nullfolge ist.

   b) Von welcher Gliednummer ab sind die Glieder sämtlich kleiner als $\varepsilon = 10^{-2}$?

   Lösung:

   a) Aus

   $$\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

   folgt

   $$2n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

   $$n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{2} = \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

   Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Es läßt sich daher stets eine Zahl $N(\varepsilon) > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$ finden, so daß $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ gilt. Die Folge ist eine Nullfolge.

   b) Für $\varepsilon = 10^{-2}$ wird

   $$\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{1-10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = \frac{99}{2}.$$

   Vom Index $N(\varepsilon) = 50 > \frac{99}{2}$ ab sind also alle Glieder der Folge kleiner als 10^{-2}.

2. Es ist zu prüfen, ob $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}$ eine Nullfolge ist.

Lösung: Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ kann dividiert werden:

$$\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Jedes Glied der Folge ist also größer als 1/2. Das bedeutet: Es existiert kein Index $N(\varepsilon)$ derart, daß für $n \geqq N(\varepsilon)$

$$\frac{n+1}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

wäre. Die Zahlenfolge ist keine Nullfolge.

2.2.2. Der Grenzwert einer Zahlenfolge

Der Begriff der Nullfolge läßt sich leicht verallgemeinern.
Bei einer Nullfolge läßt sich kein kleinster Abstand zwischen 0 und den Gliedern der Folge angeben. Wir betrachten jetzt Folgen, für die sich kein kleinster Abstand zwischen einer Zahl g und den Gliedern der Folge angeben läßt. In diesem Fall bilden also die Abstände

$$|x_n - g|$$

eine Nullfolge.
Ein Beispiel dafür ist die Folge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n+2}{n+1}\right\} = 2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \ldots$$

Obwohl die Glieder mit wachsendem n immer kleiner werden, wird der Wert 1 nicht unterschritten, da der Zähler stets größer als der Nenner ist. Der Abstand des Gliedes x_n von der Zahl 1 ist

$$\left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| = \frac{n+2-(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Für diese Abstände ergibt sich also die Folge

$$\{|x_n - 1|\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\},$$

die schon als Nullfolge bekannt ist. Daher läßt sich für die Glieder der Folge kein kleinster Abstand zu der Zahl 1 angeben.
Die Zahl 1 gehört zwar nicht selbst zu der Folge. Die Glieder nähern sich aber unbegrenzt dem Wert 1.
Man nennt 1 den Grenzwert der Zahlenfolge und sagt, die Zahlenfolge strebt mit wachsendem n gegen $g = 1$, geschrieben

$$x_n \to g \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(lies: x_n gegen g für n gegen unendlich)

oder

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g$$

(lies: limes[1]) x_n für n gegen unendlich gleich g).
Das Symbol $n \to \infty$ besagt, daß dem Anwachsen von n keine Schranke gesetzt ist, bedeutet also nicht, daß n gegen einen bestimmten Zahlenwert strebt und die Zahlenfolge bei einem Index ∞ abbricht. Mit anderen Worten: Es gibt unter den Indizes keinen größten Index n^*. Darum kann es auch kein letztes Glied a_{n^*} der Zahlenfolge geben. Trotz $x_n \to 1$ wird der Grenzwert 1 selbst nie erreicht. Die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ behauptet nur, daß der *Grenzwert* — der Wert, dem sich die x_n unbegrenzt nähern — gleich g ist. Im allgemeinen ist $x_n \neq g$. Es gibt natürlich auch Zahlenfolgen, für die $x_n = g$ ist, z. B. $\{x_n\} = 1, 1, 1, \ldots$ mit $g = 1$. Hier gilt schon von $n = 0$ an durchweg $x_n = g$.
Genauer wird der Begriff des Grenzwertes durch die folgende Definition erfaßt.

Definition

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ hat den **Grenzwert** g, wenn sich für jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß gilt

$$|x_n - g| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$

In diesem Falle schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g.$$

In dieser Definition ist für $g = 0$ die Definition der Nullfolge enthalten. Eine Nullfolge hat den Grenzwert 0.
Die Eigenschaft einer Zahlenfolge $\{x_n\}$, einen Grenzwert g zu besitzen, kann auch durch folgende Formulierungen ausgedrückt werden:

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ hat den Grenzwert g, wenn

$$\{x_n - g\}$$

eine Nullfolge ist.
Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ hat den Grenzwert g, wenn für *jedes beliebige* $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge in der ε-Umgebung $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ liegen.

Man kann die Zahlenfolgen in zwei Klassen einteilen: in solche, die einen Grenzwert g haben und solche, die keinen Grenzwert g besitzen.

Definition

Zahlenfolgen, die einen Grenzwert haben, heißen **konvergent**[2]).
Zahlenfolgen, die keinen Grenzwert haben, heißen **divergent**[2]).

[1]) limes (lat.) die Grenze
[2]) vergere (lat.) sich neigen

Die Zahlenfolge $\{2n\}$ strebt für $n \to \infty$ keinem bestimmten Zahlenwert g zu. Mit unbeschränkt wachsendem n überschreiten die Glieder jede noch so große Schranke S. Man schreibt in diesem Falle

$$\lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$$

Allgemein werden

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

uneigentliche Grenzwerte genannt. Trotzdem man hier den Begriff Grenzwert benutzt, sind Zahlenfolgen mit uneigentlichem Grenzwert natürlich divergent zu nennen. Auch die Zahlenfolge

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

ist divergent. In jeder noch so kleinen Umgebung von 1 liegen zwar unendlich viele Glieder der Folge. Dasselbe trifft aber auch für -1 zu. Eine solche Folge heißt **unbestimmt divergent**. Im Unterschied dazu nennt man divergente Folgen mit dem uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$ **bestimmt divergent**.

BEISPIEL

3. Man weise nach, daß $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}$ den Grenzwert $g = \dfrac{1}{2}$ hat.

Lösung: Es ist

$$|x_n - g| = \left|\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1-\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n-1}\right| = \left|\frac{\frac{3}{2}}{2n-1}\right|.$$

Mit $n \to \infty$ wächst bei konstantem Zähler des Quotienten $\dfrac{\frac{3}{2}}{2n-1}$ der Nenner unbegrenzt. Somit gilt

$$\left\{\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right\} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge hat also den Grenzwert $\dfrac{1}{2}$.

4. Für welche Werte von q ist die Folge $\{q^n\}$ konvergent, für welche divergent?

Lösung:

$|q| > 1$: Der Betrag der Potenz q^n wächst mit $n \to \infty$ unbeschränkt:

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = \infty.$$

Für $q > 1$ wird $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ (bestimmt divergent);

für $q < -1$ wird $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \pm\infty$ (unbestimmt divergent).

$q = 1$: Es ist stets $1^n = 1$ für alle n, also

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 1 \quad \text{(konvergent)}.$$

$q = -1$: Es ist $(-1)^n = +1$ oder -1, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es liegt die Folge

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

vor, die unbestimmt divergent ist.

$|q| < 1$: Es läßt sich $q = \frac{1}{p}$, also $q^n = \frac{1}{p^n}$ mit $|p| > 1$ setzen. Da, wie oben gezeigt,

$\lim\limits_{n\to\infty} |p^n| = \infty$ ist, ist $\left\{\frac{1}{p^n}\right\}$ für $|p| > 1$ eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

2.2.3. Die Zahl e

Die Berechnung des Grenzwertes einer Zahlenfolge ist nicht immer mit elementaren Mitteln zu erreichen. Eine solche Zahlenfolge ist

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = (1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Der Grenzwert dieser Zahlenfolge wird später benötigt. Er soll aber schon hier vorbereitend betrachtet werden.
Um zu zeigen, daß die angeführte Zahlenfolge einen Grenzwert hat, muß ein Satz herangezogen werden, dessen Beweisführung den Rahmen dieses Lehrbuches überschreitet.

Satz

Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.

BEISPIELE

1. Die Zahlenfolge

$$\{x_n\} = 0{,}3, \quad 0{,}33, \quad 0{,}333, \quad \ldots, \quad 0{,}333\ldots3, \quad \ldots$$

ist *monoton wachsend*. Eine obere Schranke ist 0,4, denn es gilt

$$x_n < 0{,}4 \quad \text{für alle } n.$$

Die Folge hat den Grenzwert $g = 1/3$.

2. Die Zahlenfolge

$$\{x_n\} = 0{,}4,\quad 0{,}34,\quad 0{,}334,\quad \ldots,\quad 0{,}333\ldots34,\quad \ldots$$

ist *monoton fallend*. Eine untere Schranke ist 0,3:

$$0{,}3 < x_n \quad \text{für alle } n.$$

Die Folge hat den Grenzwert $g = 1/3$.

Als erstes soll nachgewiesen werden, daß $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ eine beschränkte Zahlenfolge ist. Nach der binomischen Formel gilt:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}. \tag{I}$$

Da jeder Summand positiv ist, folgt zunächst

$$x_n > 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} = 1 + 1 = 2. \tag{II}$$

2 ist also eine untere Schranke der Folge.

Der Summand $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ läßt sich wie folgt umformen:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= \frac{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Auf (I) angewendet folgt:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Wegen $\left(1-\frac{k}{n}\right) < 1$ kann x_n nach oben abgeschätzt werden, indem jede der Klammern durch 1 ersetzt wird:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}.$$

Wird ferner jeder Faktor in den Nennern, der größer als 2 ist, durch die kleinere Zahl 2 ersetzt, so wird die Summe wiederum vergrößert. Es gilt somit:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vom zweiten Summanden ab bilden die Summanden eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied 1 und $q = 1/2$. Nach (22) ist also

$$x_n < 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$x_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da $\left\{-\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ eine monoton wachsende Nullfolge ist, gilt

$$x_n < 3. \tag{III}$$

(II) und (III) ergeben schließlich

$$2 < x_n < 3. \tag{IV}$$

Die Folge ist also beschränkt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Folge $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ monoton wächst.

Das auf x_n folgende Glied lautet

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Das Glied x_n liefert $n+1$, das Glied x_{n+1} liefert $n+2$ Summanden. Außerdem ist wegen $n < n+1$

$$\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$$

und

$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}. \tag{V}$$

Da x_n weniger Summanden als x_{n+1} hat und wegen (V) jeder Summand von x_n — ausgenommen die beiden ersten — kleiner als der entsprechende von x_{n+1} ist, folgt

$$x_n < x_{n+1}.$$

Die Folge $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ist also monoton wachsend.

Nach dem angeführten Satz hat die Folge einen Grenzwert. Dieser Grenzwert wird mit e bezeichnet und **Eulersche Zahl** genannt. Durch Abschätzung wurde schon festgestellt:

$$2 < e < 3$$

[vgl. (IV)]. Die Zahl e ist eine *transzendente*[1] ***Zahl*** und lautet in den ersten 16 Stellen $e \approx 2{,}718281828459045$. Es ist also

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828} \tag{24}$$

Die Zahl e spielt eine wesentliche Rolle in der höheren Mathematik, z. B. als Basis des natürlichen Logarithmus $\log_e x = \ln x$ und als Basis der Exponentialfunktion $y = e^x$. In der Praxis ist die Funktion $y = ae^{bx}$ von Bedeutung, die Prozesse des Wachstums und des Abklingens beschreibt. Der nachfolgende Abschnitt bringt dazu einige Beispiele.

Stetige Verzinsung

Bei jährlicher Verzinsung werden die aufgelaufenen Zinsen am Ende des Jahres dem Grundbetrag zugeschlagen und erst im folgenden Jahr mitverzinst. Innerhalb des laufenden Jahres werden die Zinsen proportional dem Grundbetrag, der zu Beginn des betreffenden Jahres vorhanden ist, berechnet.

Die Zunahme beim organischen Wachstum — z. B. Vermehrung eines Waldbestandes, Vermehrung einer Bakterienkultur — erfolgt aber ständig und ist in jedem Augenblick dem in diesem Augenblick vorhandenen Grundbestand proportional.

[1] Transzendent ist jede Zahl x, die nicht Lösung einer Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n > 1)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Neben e sind u. a. auch π und die meisten Funktionswerte der transzendenten Funktionen $y = \sin x$, $y = \log_a x$ usw. transzendent

Um die Gesetzmäßigkeit des organischen Wachstums zu erfassen, stellen wir die folgende Überlegung an.
Bei jährlicher Verzinsung zum Zinssatz p wächst der Grundbetrag 1 auf

$$1 + \frac{p}{100}.$$

Werden die Zinsen schon nach einem halben Jahr zum Grundbetrag geschlagen und mitverzinst, so ist der Zinssatz $p/2$ anzuwenden. Das Jahr hat dann zwei Zinstermine, so daß der Grundbetrag 1 auf

$$\left(1 + \frac{p}{2 \cdot 100}\right)^2$$

anwächst.
Bei Verzinsung und Zuschlagen zum Grundbetrag nach dem k-ten Teil eines Jahres hat das Jahr k Zinstermine, und der Zinssatz ist mit $\frac{p}{k}$ anzusetzen. Demnach wächst der Grundbetrag nach Ablauf eines Jahres auf

$$\left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k \text{ an.} \tag{I}$$

Für die weitere Betrachtung setzen wir $\frac{p}{k \cdot 100} = \frac{1}{n}$. Dann wird $k = n \cdot \frac{p}{100}$, und der Ausdruck (I) erhält die Gestalt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \frac{p}{100}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{p}{100}}. \tag{II}$$

Wählt man die Zeiträume zwischen den Zinsterminen immer kürzer, so wächst die Zahl k der Zinstermine immer mehr. Wegen $n = k \cdot \frac{100}{p}$ wächst mit unbeschränkt wachsendem k auch n unbeschränkt. Somit ergibt sich

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^k = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{p}{100}}.$$

Nach (24) ist

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Der Grundbetrag wächst demnach bei stetiger Verzinsung und unter Anwendung des auf die jährliche Verzinsung bemessenen Zinssatzes p auf den Wert

$$\overline{w} = e^{\frac{p}{100}}.$$

Das ergibt natürlich einen Zuwachs pro Jahr, der größer als p % ist. Soll aber der Jahreszuwachs wie bei jährlicher Verzinsung auch nur p % betragen, so ist für die stetige Verzinsung ein Zinssatz p^* anzusetzen. Das ergibt dann den Jahresendbetrag

$$w = e^{\frac{p^*}{100}}.$$

p^* kann aus dem Ansatz

$$e^{\frac{p^*}{100}} = 1 + \frac{p}{100}$$

ermittelt werden:

$$p^* = 100 \ln \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Für $p = 3$ wird zum Beispiel

$$p^* = 2{,}9559.$$

Wir setzen noch

$$\frac{p^*}{100} \Big/ \text{Zeiteinheit} = \alpha.$$

Den auf die Zeiteinheit bezogenen Wert α wollen wir *Wachstumsintensität* nennen. Für die stetige Verzinsung eines Grundbetrages b über den Zeitraum t ergibt sich schließlich

$$\boxed{w = b e^{\alpha t}} \tag{25}$$

(25) wird **Gesetz des organischen Wachstums** genannt. Auch Prozesse des Abklingens, wie die Abkühlung eines Körpers (NEWTONsches Abkühlungsgesetz), die Entladung eines Kondensators oder der radioaktive Zerfall, werden durch dieses Gesetz beschrieben. In diesen Fällen ist α negativ. Beim radioaktiven Zerfall wird $\alpha = -\lambda$ gesetzt. Die Größe λ heißt *Zerfallskonstante*. Gemäß (25) lautet das

Gesetz des radioaktiven Zerfalls

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \tag{26}$$

Hierbei ist N_0 die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne zur Zeit $t = 0$, N die nach dem Verstreichen der Zeit t noch nicht zerfallenen Kerne.
Als anschaulichere Größe für den Zerfallsvorgang wird häufig die sogenannte **Halbwertszeit** T angegeben. Das ist die Zeit, in der die Anzahl der aktiven Atomkerne eines Radionuklids auf die Hälfte absinkt.

BEISPIEL

3. Die Zerfallskonstante des Radionuklids Ra 226 beträgt $\lambda = 4{,}28 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{a}^{-1}$. Wie groß ist die Halbwertszeit T?

Lösung: Aus

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

folgt

$$\lambda T = \ln 2,$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \underline{\underline{1620\ \mathrm{a}}}.$$

2.2.4. Das Rechnen mit Grenzwerten

Für die Grenzwertberechnung leisten oft einige Sätze über Grenzwerte gute Dienste. Sie ermöglichen es vielfach, über Folgen mit bekanntem Grenzwert den Grenzwert einer anderen Folge herzuleiten.
Es gelten die folgenden **Grenzwertsätze:**

Sind $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ konvergente Zahlenfolgen und ist

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v,$$

so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v, \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n = u - v, \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n = u \cdot v \tag{29}$$

und unter der Voraussetzung $v \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = \frac{u}{v}. \tag{30}$$

Diese Sätze lassen sich wie folgt kurz zusammenfassen:

Sind $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ konvergente Zahlenfolgen, so können die rationalen Rechenoperationen mit dem Grenzübergang vertauscht werden.

Es soll hier nur der erste der vier Sätze bewiesen werden. Es seien $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v. \tag{I}$$

Wir wählen eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$. Wegen (I) gibt es einen Index $N_1(\varepsilon)$ derart, daß

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n > N_1(\varepsilon),$$

und einen Index $N_2(\varepsilon)$, so daß

$$|v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n > N_2(\varepsilon)$$

gilt. Die größere der beiden Zahlen $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$ soll mit $N(\varepsilon)$ bezeichnet werden. Dann gilt *gleichzeitig*

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n > N(\varepsilon).$$

Nun ist aber

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leqq |u_n - u| + |v_n - v|$$

und für alle $n > N(\varepsilon)$

$$|u_n - u| + |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n > N(\varepsilon).$$

Das bedeutet: Der Grenzwert der Folge $\{(u_n + v_n)\}$ ist $u + v$:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v.$$

Damit ist der erste Satz bewiesen.

BEISPIELE

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ist zu berechnen.

   Lösung: Es ist

   $$u_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 1,$$

   $$v_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = 0,$$

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}.$$

2. Gesucht ist der Grenzwert der Folge $\left\{\frac{n^2 - 2n + 10}{2n^2 - n}\right\}$.

   Lösung: Häufig führen erst geeignete Umformungen auf Folgen mit bekanntem Grenzwert. Hier führt zweckmäßiges Kürzen des Quotienten auf konstante Folgen und auf Nullfolgen und somit zum Ziel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+10}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1-0+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Angewandt wurden der 1., 2. und 4. Grenzwertsatz.

2.3. Die unendliche geometrische Reihe

In 2.1.2. wurde die Summe der ersten n Glieder der geometrischen Zahlenfolge $x_1, x_1q, \ldots, x_1q^{n-1}$ mit

$$s_n = x_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

angegeben. Für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ stellt

$$\{s_k\} = \left\{x_1\frac{1-q^k}{1-q}\right\} \tag{I}$$

eine Zahlenfolge dar. Die Glieder $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ dieser Folge sind die sogenannten **Teilsummen** oder **Partialsummen**[1])

$$s_1 = x_1 = x_1\frac{1-q}{1-q}$$

$$s_2 = x_1 + x_1q = x_1\frac{1-q^2}{1-q}$$

$$s_3 = x_1 + x_1q + x_1q^2 = x_1\frac{1-q^3}{1-q}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_k = x_1 + x_1q + \cdots + x_1q^{k-1} = x_1\frac{1-q^k}{1-q} \tag{II}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

der Summe

$$s_n = x_1 + x_1q + \cdots + x_1q^{k-1} + \cdots + x_1q^{n-1} = x_1\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{III}$$

Das schrittweise Summieren der Summe (III) liefert also die Zahlenfolge (I), deren letztes Glied s_n gleich der Summe (III) ist.
Wird die Folge (I) nicht beim Glied s_n abgebrochen, sondern unbegrenzt fortgesetzt, so entsteht eine unendliche Zahlenfolge, deren Konvergenzverhalten nun untersucht werden soll.

[1]) pars (lat.) der Teil

Laut Beispiel 4 aus 2.2.2. ist für $|q| > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = \infty.$$

In diesem Fall divergiert die Folge (I).

Für $q = 1$ liefert (I) keine Aussage, da dann der Quotient $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ lautet. Greift man auf (II) zurück, dann ergibt sich

$$s_k = kx_1.$$

Es wird somit

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \infty.$$

Die Folge (I) divergiert auch für $q = 1$.

Für $q = -1$ folgt aus (I)

$$s_k = \frac{1-(-1)^k}{2} = \begin{cases} 0 \text{ für gerades } k \\ 1 \text{ für ungerades } k. \end{cases}$$

Die Folge (I) ist dann unbestimmt divergent.

Für $|q| < 1$ ist nach 2.2.2., Beispiel 4:

$$\lim_{k\to\infty} q^k = 0.$$

Es wird also

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} x_1 \frac{1-q^k}{1-q} = x_1 \frac{1-0}{1-q} = \frac{x_1}{1-q}. \tag{IV}$$

Die Folge (I) ist für $|q| < 1$ konvergent.

Dieses Ergebnis ist überraschend. Gemäß (III) ist das Glied s_n der Folge (I) gleich der Summe

$$x_1 + x_1 q + \cdots + x_1 q^{n-1}$$

von n Gliedern. Läßt man hier $n \to \infty$ laufen, so bedeutet das, eine Summe mit unendlich vielen Summanden zu bilden. Eine solche Summierung ist aber nicht ausführbar und daher sinnlos. Bildet man aber Teilsummen:

$$x_1,\ x_1 + x_1 q,\ x_1 + x_1 q + x_1 q^2,\ \ldots,$$

so hat diese Folge von Teilsummen einen Grenzwert, der durch (IV) gegeben ist.

Man definiert daher:

Der Term

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1} = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \cdots + x_1 q^n + \cdots$$

heißt **unendliche geometrische Reihe** und ist der Teilsummenfolge

$$x_1 = x_1 \frac{1-q}{1-q}$$

$$x_1 + x_1 q = x_1 \frac{1-q^2}{1-q}$$

$$x_1 + x_1 q + x_1 q^2 = x_1 \frac{1-q^3}{1-q}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \cdots + x_1 q^{n-1} = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

äquivalent.

Für $|q| < 1$ ist die Teilsummenfolge

$$\left\{x_1 \frac{1-q^n}{1-q}\right\}$$

konvergent. Ihr Grenzwert

$$\boxed{s = \frac{x_1}{1-q}} \tag{31}$$

heißt **Summe der unendlichen geometrischen Reihe.**

BEISPIELE

1. Die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + - \cdots$$

ist wegen $q = -\frac{1}{2}$:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

2. Der unendliche periodische Dezimalbruch $0{,}\overline{18}$ ist in einen gemeinen Bruch umzuwandeln.

Lösung: $0{,}\overline{18}$ kann als geometrische Reihe dargestellt werden:

$$0{,}\overline{18} = 0{,}18 + 0{,}0018 + 0{,}000018 + \cdots$$

Es ist $x_1 = 0{,}18$, $q = 0{,}01$. Wegen $|q| < 1$ gilt nach (31)

$$0{,}\overline{18} = \frac{0{,}18}{1 - 0{,}01} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

Es soll hier bemerkt werden, daß auf den Term $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1}$ ganz bewußt das Wort „Summe" nicht angewendet wird. Dieser Term bekommt erst dann einen Sinn, wenn er als unendliche Folge der angeführten (endlichen) Partialsummen aufgefaßt wird. Die Summanden dieser Folgen heißen Glieder der Reihe.
Man definiert auf dieselbe Weise auch andere unendliche Reihen, deren Glieder *keine* geometrische Folge bilden. Da diese unendlichen Reihen als *Folgen von Partialsummen* aufzufassen sind, kann für sie die bei den Folgen eingeführte Terminologie übernommen werden.

Definition

Eine unendliche Reihe heißt konvergent (divergent), wenn ihre Partialsummenfolge konvergent (divergent) ist.

BEISPIEL

3. Man prüfe die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

auf Konvergenz und berechne im gegebenen Falle ihre Summe!

Lösung: Die Glieder der Reihe bilden keine geometrische Folge. Es ist also zunächst die Folge der Partialsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ zu bilden. Die n-te Partialsumme lautet:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nun gilt für das k-te Glied dieser Summe:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \qquad \text{(I)}$$

Wird diese Umformung auf alle Glieder von s_n angewendet, so folgt

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Für $n \to \infty$ ist $\frac{1}{n+1}$ eine Nullfolge. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Die Reihe hat die Summe $s = 1$.

AUFGABEN

75. Der Holzbestand eines Waldes wird auf 80000 fm, 10 Jahre später auf 118000 fm geschätzt. Wie groß ist die Wachstumsintensität?

76. Nach welcher Zeit verdoppelt sich der Holzbestand eines Waldes, wenn die Wachstumsintensität $\alpha = 0{,}043\ \mathrm{a}^{-1}$ (1 a = 1 Jahr) beträgt?

77. Man bestimme die Halbwertzeit folgender Radionuklide der Transurane:
a) Plutonium 239, $\lambda = 2{,}85 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{a}^{-1}$
b) Plutonium 237, $\lambda = 3{,}85\,\mathrm{s}^{-1}$
c) Einsteinium 254, $\lambda = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{d}^{-1}$

78. In welcher Zeit ist die Aktivität eines Radionuklids mit der Zerfallskonstante $\lambda = 0{,}05\,\mathrm{s}^{-1}$ auf den 10. Teil abgesunken?

79. Die Temperatur eines Körpers erniedrigt sich innerhalb einer Minute von 120°C auf 105°C. Es sei vorausgesetzt, daß sich der Körper nach dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz abkühlt. In welcher Zeit wird er sich von 105°C auf 70°C abgekühlt haben?

80. Die Beobachtung einer Bakterienkultur unter dem Mikroskop ergab, daß von 10 Bakterien in $1\frac{1}{2}$ Stunden 12 Bakterien zur Teilung gelangen. Auf das Wievielfache haben sich die Bakterien dieser Kultur innerhalb von 4 Tagen vermehrt?

81. Welche der angegebenen Zahlenfolgen ($n = 0, 1, 2, \ldots$) sind beschränkt? Im gegebenen Falle sind die engsten Schranken zu bestimmen.

a) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$ b) $\left\{\binom{6}{n}\right\}$ c) $\{\ln(n+1)\}$

d) $\left\{\frac{3-n}{1+n}\right\}$ e) $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ f) $\{(x_0 - nd)\}$

g) $\{(-2)^n\}$ h) $\{(-2)^{-n}\}$ i) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$

k) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2} + \cos n\pi\right\}$ l) $\left\{\sqrt[n+1]{3}\right\}$ m) $\left\{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\right\}$

82. Man berechne die nachstehenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^5 n}{n^2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n^3}{10n^2+n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$

83. Man zeige, daß die angegebenen Folgen ($n = 1, 2, \ldots$) Nullfolgen sind und gebe den Index $N(\varepsilon)$ an, von dem an $|x_n| < \varepsilon$ gilt. (Zahlenbeispiel: $\varepsilon = 0{,}01$)

a) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ b) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

d) $\left\{\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)\right\}$ e) $\left\{\left(\sqrt[n]{0{,}5} - 1\right)\right\}$ f) $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$

84. Für welche Werte von c sind die angegebenen Folgen ($n = 1, 2, \ldots$) Nullfolgen?

a) $\{n^c\}$ b) $\{c^n\}$ c) $\left\{\left(\sqrt[n]{c} - 1\right)\right\}$

85. Von den Folgen der Aufgabe 81 ist das Konvergenzverhalten anzugeben. Für die konvergenten Folgen bestimme man den Grenzwert.

86. Man bestimme den Grenzwert der Folge $\{x_n\}$.

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ b) $\left\{\frac{an}{n+1}\right\}$ c) $\left\{\frac{an+b}{cn+d}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{1+c^n}\right\}$ $(|c| > 1)$ e) $\left\{\frac{1}{1+c^n}\right\}$ $(|c| < 1)$ f) $\left\{\frac{(n-5)^2}{n^2+1}\right\}$

Es ist außerdem der Index $N(\varepsilon)$ anzugeben, von dem an $|x_n - g| < \varepsilon$ gilt.

87. Man berechne $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1}$ für

a) $q = 1/3$ b) $q = -1/3$ c) $q = 0{,}1$ d) $q = -4/5$.

88. Von welchem Index N ab weicht bei $x_1 = 1$ die Partialsumme s_n der Reihen von Aufgabe 87 um weniger als 0,001 von der Summe s ab? Man gebe zunächst die allgemeine Lösung an.

89. In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b wird vom Scheitel des rechten Winkels das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes fällt man das Lot auf die Kathete b, von dessen Fußpunkt das Lot auf c, vom Fußpunkt des letzten Lotes das Lot auf b. Dieses Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Wie groß ist die Summe aller Lote?

90. Die Seite a_1 eines Quadrates ist Diagonale eines zweiten Quadrates, dessen Seite die Diagonale eines dritten Quadrates usf. a) Man summiere die Seiten $a_1, a_2, \ldots$ aller Quadrate. b) Es ist die Summe aller Quadratflächen zu bilden.

91. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a_1 ist ein Quadrat so einbeschrieben, daß seine Ecken die Seiten des ersten Quadrates im Verhältnis $m:n$ teilen. In derselben Weise ist dem zweiten Quadrat ein drittes, dem dritten ein viertes einbeschrieben usf. Man berechne a) die Summe der Seiten $a_1, a_2, \cdots$, b) die Summe der Flächen aller Quadrate.

92. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a_1 wird ein Kreis, diesem ein Quadrat, dem Quadrat wieder ein Kreis einbeschrieben usf. Man berechne
a) die Summe der Umfänge aller Quadrate und Kreise;
b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate und Kreise.

93. Die nachstehenden periodischen Dezimalbrüche sind als gemeine Brüche zu schreiben.

a) $0{,}\overline{7}$ b) $0{,}\overline{03}$ c) $6{,}4\overline{2970}$ d) $1{,}1\overline{923076}$

94. Der periodische Dualbruch

a) $0, \overline{\mathrm{L}}$ b) $\mathrm{L}, \overline{0\,\mathrm{L}}$ c) $\mathrm{L}, \overline{\mathrm{LL0}}$

ist als gemeiner Bruch im Dezimalsystem zu schreiben.

2.4. Grenzwerte von Funktionen; Stetigkeit

2.4.1. Der Grenzwert einer Funktion an der Stelle $x = a$

Bei der Behandlung der Eigenschaften reeller Funktionen in 1.3.6. trat auch das Problem der Stetigkeit einer Funktion auf.

Ist eine Funktion an einer Stelle x unstetig, so kann mit den bisher bereitgestellten Mitteln nichts Näheres über das Verhalten der Funktion an dieser Stelle ausgesagt werden. Das zeigen schon verhältnismäßig einfache Beispiele:

a) Die Funktion f sei für $x \in (-\infty, \infty)$ dadurch gegeben, daß der Funktionswert $f(x)$ gleich der größten ganzen Zahl g ist, für die $g \leqq x$ gilt. Es ist also (vgl. auch Bild 80)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leqq x < 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1 & \text{für} \quad -1 \leqq x < 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

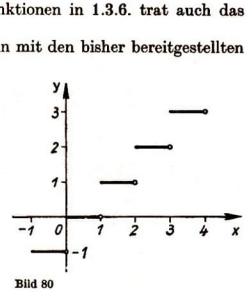


Bild 80

Diese Funktion wird gewöhnlich kurz durch

$$y = f(x) = [x]$$

angegeben.
Die Funktion $y = [x]$ ist zwar für jedes $x \in (-\infty, \infty)$ definiert. Es ist aber nicht ohne weiteres klar, wie sich z. B. an der Stelle $x = 2$ der Übergang von dem Funktionswert 1 zum Funktionswert 2 vollzieht.

Bemerkung: Solche „Sprungfunktionen" treten in der Praxis z. B. bei Schaltvorgängen auf.

b) Die Funktion $f: y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ist für jedes $x \in X = R \setminus 0$ definiert. Für $x = 0$ ergibt sich $f(0) = \dfrac{0}{0}$. Da $\dfrac{0}{0}$ ein sinnloser Term ist, existiert für $x = 0$ kein Funktionswert. Die Funktion f hat bei $x = 0$ eine **Lücke** und ist dort unstetig. Deshalb ist das Verhalten der Funktion in der engeren Umgebung von $x = 0$ von Interesse.

c) Eine Lücke hat auch die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, denn für $x = 1$ ergibt sich $f(1) = \dfrac{0}{0}$. Die Funktion ist bei $x = 1$ nicht definiert. Auch hier ist eine Untersuchung der Funktion in der engeren Umgebung von $x = 1$ notwendig.

d) Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ ist bei $x = 0$ unstetig, da $f(0) = \dfrac{1}{0}$ nicht definiert ist. Das Verhalten der Funktion in der Umgebung von $x = 0$ ist zunächst ungeklärt.

Schon diese wenigen Beispiele zeigen, daß Unstetigkeiten von mannigfacher Art sein können. Es wird daher zweckmäßig sein, die betreffende Funktion in der *näheren Umgebung* der Unstetigkeitsstelle zu untersuchen. Ein Mittel dafür ist durch die Zahlenfolgen und die Definition des Grenzwertes gegeben. Wie bei einer solchen Untersuchung vorzugehen ist, soll zunächst am Beispiel einer stetigen Funktion erläutert werden.
Wir betrachten die Menge von Zahlenpaaren (bzw. Punkten), die durch die Gleichung

$$y = x^2 \tag{I}$$

definiert ist. Die durch (I) gegebene Abbildung $x \to y$ ist als eindeutig bekannt, stellt also eine Funktion $f = \{(x; y) \mid y = x^2, x \in R\}$ dar.
Um das Verhalten der Funktion in der Umgebung eines Punktes — z. B. $(2;4)$ — näher zu untersuchen, wählen wir aus dem Definitionsbereich $X = R$ eine Zahlenfolge aus, deren Grenzwert 2 ist. Eine solche Zahlenfolge ist

$$\{x_n\} = 3,\ \ 2 + \frac{1}{2},\ \ 2 + \frac{1}{3},\ \ \ldots,\ \ 2 + \frac{1}{n},\ \ \ldots.$$

Jedem Glied x_n dieser Folge ist genau ein Wert y_n des Wertebereiches $Y \subset R$ zugeordnet. Das heißt: Durchläuft die Variable x die Folge $\{x_n\} = \left\{2 + \dfrac{1}{n}\right\}$, so durch-

läuft die Variable y die zugeordnete Folge

$$\{y_n\} = \{x_n^2\} = \left\{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2\right\},$$

also

$$\{y_n\} = 3^2,\ \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2,\ \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2,\ \ldots,\ \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots.$$

Wir untersuchen, welchen Grenzwert die Folge $\{y_n\}$ hat. Ist dieser Grenzwert g, so muß der Abstand

$$|y_n - g| = \left|\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - g\right| = \left|4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - g\right|$$

für $n \to \infty$ gegen Null streben. Da $\left\{\frac{4}{n}\right\}$ und $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ Nullfolgen sind, ergibt sich $g = 4$, d. h.,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4. \qquad \text{(II)}$$

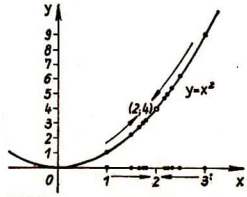


Bild 81

Da wir uns dem Wert 2 durch eine Folge genähert haben, deren Glieder sämtlich größer als 2 waren, also auf der Abszissenachse rechts von 2 lagen (Bild 81), soll der so gewonnene Grenzwert der Folge $\{y_n\}$ **rechtsseitiger Grenzwert** der Funktion $y = x^2$ an der Stelle $x = 2$ genannt werden. Für eine Annäherung von links an den Punkt $(2; 4)$ kann die Folge

$$\{x_n\} = 1,\ 2 - \frac{1}{2},\ 2 - \frac{1}{3},\ \ldots,\ 2 - \frac{1}{n},\ \ldots$$

dienen, die ebenfalls den Grenzwert 2 hat. Die zugeordnete Folge der Ordinaten ist

$$\{y_n\} = 1^2,\ \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2,\ \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2,\ \ldots,\ \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots.$$

Für den so gebildeten **linksseitigen Grenzwert** von $y = x^2$ in $x = 2$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4. \qquad \text{(III)}$$

Auch eine beliebige andere Folge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert 2 würde für die zugeordnete Folge $\{y_n\}$ denselben Grenzwert liefern.

Mit Hilfe der Zahlenfolgen $\left\{2 + \frac{1}{n}\right\}$ und $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$ wurden die links- und die rechtsseitige Umgebung des Punktes $(2; 4)$ untersucht. Durch die Wahl der Zahlen-

folgen sind wir gewissermaßen in jede noch so enge Umgebung von (2; 4) eingedrungen.
Die zur Untersuchung der Funktion $y = x^2$ an der Stelle $x = 2$ angewendeten Mittel sollen nun für den allgemeinen Fall definiert werden.

Definition

Es sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich X eine Umgebung der Stelle a enthält. Hat die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den Grenzwert g *für jede beliebige* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \to a$, so heißt g **der allgemeine Grenzwert der Funktion** f an der Stelle a, und man schreibt

$$f(x) \to g \quad \text{für} \quad x \to a$$

oder

$$\lim_{x \to a} f(x) = g.$$

Es soll besonders bemerkt werden, daß bei der hier definierten Schreibweise der Index n fortgelassen wird. Man schreibt also $x \to a$ statt $x_n \to a$ und $f(x) \to g$ statt $f(x_n) \to g$.
Es gibt Funktionen, für die an einer Stelle a dieser Grenzwert nicht existiert. Dann ist u. U. der rechts- oder der linksseitige Grenzwert vorhanden oder es existieren beide Grenzwerte. In solchen Fällen sind Folgen $\{x_n\}$ heranzuziehen, deren Glieder nur rechts bzw. nur links von a liegen.

Definition

Es sei f eine Funktion, deren Definitionsbereich X mindestens eine rechtsseitige Umgebung von a enthält. Hat die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ den Grenzwert g^+ für jede beliebige gegen a konvergierende Folge $\{x_n\}$, deren Glieder sämtlich größer als a sind, so heißt g^+ **rechtsseitiger Grenzwert der Funktion** f an der Stelle a, und man schreibt

$$f(x) \to g^+ \quad \text{für} \quad x \to a + 0$$

oder

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = g^+.$$

Dementsprechend ist der **linksseitige Grenzwert der Funktion** f erklärt. Man schreibt:

$$f(x) \to g \quad \text{für} \quad x \to a - 0$$

oder

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = g^-.$$

Ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$, dann gilt natürlich auch

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = g,$$

denn f hat ja laut Definition genau dann den Grenzwert g, wenn $\{f(x_n)\} \to g$ für jede beliebige Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \to a$ gilt. Also muß man auch Folgen wählen können, deren Glieder nur von rechts (von links) dem Wert a zustreben.
Auch die Umkehrung dieses Sachverhalts ist richtig, was hier nicht bewiesen werden soll.

Satz

Ist

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = g,$$

so gilt auch

$$\lim_{x \to a} f(x) = g.$$

Die praktische Berechnung des Grenzwertes einer Funktion wird oft dadurch erleichtert, daß man eine neue Variable einführt. Im Falle $x \to 0$ wurde schon die Substitution

$$x = \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad n \to \infty$$

benutzt. Hierbei muß n nicht unbedingt die natürlichen Zahlen durchlaufen. Bei $x \to a$ führt oft die Substitution

$$x = a + h \quad \text{mit} \quad h \to 0$$

zum Ziel.
Da mit dem Einsetzen einer Folge $\{x_n\}$ in $y = f(x)$ eine Folge $\{y_n\}$ entsteht, gelten natürlich auch hier die Grenzwertsätze.

BEISPIELE

1. Es ist $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ zu berechnen.

   Lösung: Wir setzen $x = 1 + h$ mit $h \to 0$. Dabei muß stets $h \neq 0$ gelten, denn der Term $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist für $x = 1$ nicht definiert. Es folgt

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{(1 + h) - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}.$$

   Wegen $h \neq 0$ kann mit h gekürzt werden:

   $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

2. Das Verhalten der Funktion $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ in der Umgebung von $x = 0$ ist zu untersuchen.

   Lösung: Wir wählen zunächst die Nullfolge $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ mit $n \to \infty$. Dann strebt $x \to +0$, und es folgt

   $$\lim_{x \to +0} \frac{x + 1}{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} + 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} (1 + n) = \infty.$$

Durch Einsetzen der Nullfolge $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ ergibt sich

$$\lim_{x\to-0}\frac{x+1}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}+1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-n)=-\infty.$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert an der Stelle $x=0$ sind voneinander verschieden und beides uneigentliche Grenzwerte. Man vergleiche dazu Bild 82.

3. Die Funktion $y=f(x)=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ ist in der Umgebung von $x=0$ zu untersuchen.

Lösung: Zur Bildung des rechtsseitigen Grenzwertes setzen wir die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ mit $n\to\infty$ ein:

$$\lim_{x\to+0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+2^{n}}.$$

Da der Nenner für $n\to\infty$ unbeschränkt wächst, während der Zähler konstant bleibt, folgt

$$\lim_{x\to+0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0.$$

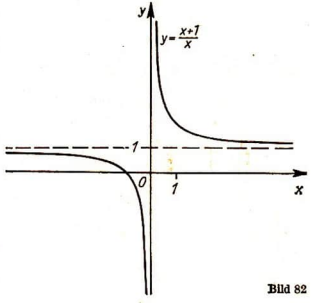


Bild 82

Zur Bildung des linksseitigen Grenzwertes benutzen wir die Folge $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ für $n\to\infty$:

$$\lim_{x\to-0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+2^{-n}}=$$

$$=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n}}}=\frac{2}{1+0}=2.$$

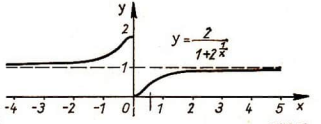


Bild 83

Rechts- und linksseitiger Grenzwert sind voneinander verschieden. Die Funktion zeigt Bild 83.

Ist $f(x)$ ein gebrochenrationaler Term, also von der Form $\dfrac{g(x)}{h(x)}$, so kann auch wie folgt vorgegangen werden.
Der Term ist für solche Werte x nicht definiert, für die der Nenner $h(x)$ verschwindet. Ist etwa

$$h(a)=0 \quad \text{und} \quad g(a)\neq 0,$$

so ist $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, da $h(x)$ für $x\to a$ eine Nullfolge ist, ein uneigentlicher Grenzwert.

Gilt $\qquad h(a)=0 \quad \text{und} \quad g(a)=0,$

haben also Zähler und Nenner dieselbe Nullstelle, so läßt sich in Zähler und Nenner der Faktor $(x-a)$ abspalten:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x-a)\,g_1(x)}{(x-a)\,h_1(x)}.$$

Ist jetzt

$$h_1(a) \neq 0 \quad \text{und} \quad g_1(a) \neq 0,$$

so führt das Einsetzen einer Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \to a$ und $x_n \neq a$ auf die Folge $\left\{\frac{(x_n-a)\,g_1(x_n)}{(x_n-a)\,h_1(x_n)}\right\}$. Wegen $x_n \neq a$ kann gekürzt werden. Also folgt:

$$\lim_{x_n \to a} \frac{g(x_n)}{h(x_n)} = \lim_{x_n \to a} \frac{(x_n-a)\,g_1(x_n)}{(x_n-a)\,h_1(x_n)} = \lim_{x_n \to a} \frac{g_1(x_n)}{h_1(x_n)} = \frac{g_1(a)}{h_1(a)}.$$

Das führt zu dem Verfahren, im Falle

$$\frac{g(a)}{h(a)} = \frac{0}{0}$$

in $\frac{g(x)}{h(x)}$ mit $(x-a)$ zu kürzen und anschließend in dem gekürzten Term wieder $x = a$ zu setzen.

BEISPIEL

4. Zähler und Nenner von

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^3+8}{x^2+3x+2}$$

haben die gemeinsame Nullstelle $x = -2$.
Für $x \neq -2$ folgt

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x+2)\,(x^2-2x+4)}{(x+2)\,(x+1)} = \frac{x^2-2x+4}{x+1}.$$

Also ist

$$\lim_{x \to -2} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x+4}{x+1} = -12.$$

Es läßt sich nicht immer wie in den angeführten Beispielen überschauen, welchem Grenzwert eine Funktion zustrebt. Oft ist die Anwendung einer besonderen Beweisführung notwendig. Ein solcher Grenzwert, der oft gebraucht wird, ist $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, der nun untersucht werden soll.
Sucht man den Funktionswert der Funktion f: $y = \frac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x = 0$, so erhält man den Term $f(0) = \frac{0}{0}$. Dieser Term ist aber sinnlos, da die Division durch Null unmöglich ist. Der Funktionswert $f(x)$ ist für $x = 0$ nicht erklärt.

Wir können uns darauf beschränken, die Funktion auf die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes bei $x = 0$ zu untersuchen. Da nämlich $f\colon y = \dfrac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x),$$

gilt bei Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes:

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x).$$

In Bild 84 ist

$$\text{Dreieck } OAD < \text{Sektor } OBD < \text{Dreieck } OBC,$$

also

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}.$$

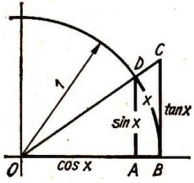


Bild 84

Dividiert man diese Ungleichung durch $\dfrac{\sin x}{2}$, so wird

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

und nach Bilden des Kehrwertes

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Für $x \to 0$ ist $\dfrac{\sin x}{x}$ zwischen $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ eingeschlossen, also gilt

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{32}$$

Aus diesem Ergebnis kann keinesfalls geschlossen werden, daß $\dfrac{0}{0}$ gleich 1 wäre. $\dfrac{\sin x}{x}$ strebt gegen 1 für $x \to 0$, wobei stets $x \neq 0$ und $\dfrac{\sin x}{x} \neq \dfrac{0}{0}$ bleibt.

Nach der Erklärung des Grenzwertes gilt nach (32) für x-Werte, die dem Betrage nach genügend klein sind,

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1, \quad \text{also} \quad \sin x \approx x.$$

Für kleine x-Werte kann daher für $\sin x$ näherungsweise x (im Bogenmaß) gesetzt werden. Dies zeigt auch nachstehende Tabelle. Der Sinus weist bis zu 4° nur Ab-

weichungen gegenüber dem Winkel (im Bogenmaß) auf, die dem Betrage nach kleiner als 1‰ sind:

$$\frac{|0{,}06976 - 0{,}06981|}{0{,}06981} = \frac{5}{6981} < 1‰.$$

x	$\sin x$
$0° \quad = 0{,}00000$	0,00000
$0°\ 1' = 0{,}00029$	0,00029
$0°10' = 0{,}00291$	0,00291
$0°30' = 0{,}00873$	0,00873
$1° \quad = 0{,}01745$	0,01745
$2° \quad = 0{,}03491$	0,03490
$3° \quad = 0{,}05236$	0,05234
$4° \quad = 0{,}06981$	0,06976
$5° \quad = 0{,}08727$	0,08716

2.4.2. Die Stetigkeit einer Funktion

Ist f eine Funktion, deren Definitionsbereich eine Umgebung der Stelle a enthält, so können folgende Fälle eintreten:

1. Die Funktion f ist an der Stelle $x = a$ nicht definiert;
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ist nicht vorhanden;
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ist vorhanden, aber $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$;
4. es ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Tritt einer der ersten drei Fälle ein, so heißt die Funktion f unstetig.

Definition

Eine Funktion $f = \{[x; f(x)]\}$, deren Definitionsbereich eine Umgebung der Stelle $x = a$ enthält, ist an der Stelle $x = a$ genau dann **stetig**, wenn

1. die Funktion f an der Stelle $x = a$ definiert, also $[a; f(a)]$ ein Element der Menge f ist,
2. der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und gleich einer bestimmten Zahl g ist,
3. $f(a) = g$ gilt.

Ist auch nur einer dieser Punkte nicht erfüllt, dann ist die Funktion f unstetig.
Die Punkte 1 und 3 der Definition bereiten meist keine Schwierigkeiten.
Bei Punkt 2 ist zu beachten, daß eine Unstetigkeit vorliegt, wenn auch nur eine spezielle Folge $\{x_n\}$ nachgewiesen wird, für die $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ nicht existiert.

Ist eine Funktion in jedem Punkt eines Intervalls J stetig, so heißt sie **stetig im Intervall J.**

BEISPIELE

1. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist an der Stelle $x = 1$ unstetig. Zwar ist $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ vorhanden, aber $f(1)$ existiert nicht.

2. Die Funktion $y = f(x) = [x]$ ist z. B. an der Stelle $x = 2$ definiert: $f(2) = 2$. Es gilt aber:

$$\lim_{x \to 2+0} [x] = \lim_{h \to +0} [2 + h] = 2,$$

$$\lim_{x \to 2-0} [x] = \lim_{h \to +0} [2 - h] = 1,$$

d. h., $\lim\limits_{x \to 2} [x]$ ist nicht vorhanden. Die Funktion ist bei $x = 2$ unstetig. Das gleiche gilt für jeden ganzzahligen Wert des Definitionsbereichs.

3. Die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist bei $x = 0$ unstetig. Hier existiert sowohl $f(0)$ als auch $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Es ist nämlich

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Grenzwert und Funktionswert an der Stelle $x = 0$ sind aber voneinander verschieden:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Die in Beispiel 1 untersuchte Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist bei $x = 1$ unstetig, weil $f(1)$ nicht existiert. Da aber der allgemeine Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ vorhanden ist, ist es sinnvoll, für den fehlenden Funktionswert diesen Grenzwert zu setzen. Mit der Festsetzung $f(1) = 2$ ist die Lücke geschlossen. Die so ergänzte Funktion ist stetig, denn nach dieser Ergänzung ist ja

1. f an der Stelle $x = 1$ definiert,
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ vorhanden,
3. $f(1) = 2$.

Die Unstetigkeit läßt sich also hier durch die Festsetzung $f(1) = 2$ beheben. Man spricht in diesem Falle von einer **hebbaren Unstetigkeit**.

Eine Unstetigkeit an der Stelle $x = a$ läßt sich dann und nur dann beheben, wenn der allgemeine Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert. Wie man auch z. B. bei $y = f(x) = [x]$ den Funktionswert $f(2)$ wählt, die drei Forderungen der Stetigkeit lassen sich nicht erfüllen.

2.4.3. Grenzwert des Funktionswertes für $x \to \pm\infty$

Häufig interessiert die Frage, wie sich der Funktionswert einer Funktion bei unbeschränkt wachsendem (fallendem) Argument x verhält.

Definition

Ist f eine in $[a, \infty)$ definierte Funktion und gilt für die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ mit $x_n \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g,$$

so sagt man, der Funktionswert *konvergiert* für $x \to \infty$ gegen den Grenzwert g.

Dementsprechend ist auch die Konvergenz für $x \to -\infty$ definiert.

BEISPIELE

1. Für $y = f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ $(k > 0)$ ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Das Ergebnis spiegelt sich an der Kurve im cartesischen Koordinatensystem dadurch wider, daß die x-Achse Asymptote der Kurve ist (vgl. Bilder 53 und 56).

2. Für die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$ ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = \frac{1}{=} 1.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man für $x \to -\infty$. Die Gerade $y = 1$ ist also Asymptote der Kurve (vgl. Bild 49).

3. Es soll das Konvergenzverhalten der Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ diskutiert werden.

Lösung:

$a > 1$:

Setzt man $a = 1 + k$, so folgt für $x > 0$:

$$a^x = (1 + k)^x > 1 + kx.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}(1+kx)=\infty$ ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty. \tag{I}$$

Zur Bildung von $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ soll $x=-z$ mit $z\to\infty$ gesetzt werden. Dann folgt mit (I)

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{z\to\infty} a^{-z} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{a^z} = 0. \tag{II}$$

$0<a<1$:

Die Aufgabe läßt sich auf die vorige zurückführen, wenn man $a=\frac{1}{b}$ setzt. Dann ist $b>1$ und es folgt mit dem Ergebnis (II):

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} b^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = 0,$$

und mit (I):

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{z\to-\infty} b^{-x} = \lim_{z\to\infty} b^z = \infty.$$

Man vergleiche dazu auch Bild 72!

Für gebrochenrationale Funktionen lassen sich allgemeine Aussagen machen. Für $n<m$ ist

$$y = R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

eine *echt gebrochene* rationale Funktion.

Wir kürzen den Quotienten mit x^n:

$$y = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1}x^{m-n-1} + \cdots + \frac{b_2}{x^{n-2}} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}.$$

Jetzt stehen für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$ im Zähler neben a_n lauter Nullfolgen, während der Nenner wegen $n<m$ durch das Glied $b_m x^{m-n}$ dem Betrage nach unbeschränkt wächst. Somit gilt für $n<m$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0} = 0.$$

Jede *unecht gebrochene* rationale Funktion läßt sich als Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion schreiben. Ist

$$y = R(x) = P(x) + r(x)$$

und $P(x)$ der ganze, $r(x)$ der echt gebrochene Anteil, so folgt:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = 0.$$

Da $r(x)$ für jede Folge $x \to \infty$ eine Nullfolge ist, gilt für genügend großes x

$$R(x) \approx P(x).$$

Dasselbe folgert man für $x \to -\infty$. Die Funktion $y = P(x)$ ist deshalb eine Asymptote der Funktion $y = R(x)$.

BEISPIELE

4. Für $y = R(x) = \dfrac{1}{x^k}$ $(k > 0)$ wurde schon festgestellt:

$$\underline{\underline{P(x) = 0.}}$$

5. Für

$$y = R(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$$

ist

$$\underline{\underline{P(x) = 1.}}$$

6. Für

$$y = R(x) = \frac{x^3 - 4x + 8}{4x - 8} = \frac{x^2 + 2x}{4} + \frac{2}{x - 2}$$

ist

$$\underline{\underline{P(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x).}}$$

Man vergleiche dazu Bild 50.

AUFGABEN

95. Die nachstehenden Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ sind durch Einsetzen einer geeigneten Folge $\{x_n\}$ in $f(x)$ zu bestimmen.

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 - 3x + 10}{2x^2 + x - 10}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 2)^2 - 4}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^4 - a^4}{x - a}$

96. Man berechne die Grenzwerte der Aufgabe 95 durch Kürzen vor dem Grenzübergang.

97. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^2 - 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

98. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cos x}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to +0} \left(\sin x - \dfrac{\cos x}{x}\right)$ h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$

99. Die Stetigkeit der Funktion $f\colon y = f(x)$ ist zu diskutieren. Im Falle einer Unstetigkeit ist zu untersuchen, ob die Unstetigkeit hebbar ist. Man begründe das Ergebnis.

a) $y = \dfrac{x}{|x|}$ b) $y = \sin\dfrac{1}{x}$ c) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$

d) $y = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x+1}$ e) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ f) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

100. Man diskutiere die Unstetigkeiten der nachstehenden Funktionen.

a) $y = \dfrac{x^2}{|x|}$ b) $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$ c) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

d) $y = x - [x]$ e) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ f) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

3. Einführung in die Differentialrechnung

3.1. Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten

Bei einer Reihe wichtiger naturwissenschaftlicher und technischer Fragestellungen stößt man auf eine Problematik, die von grundlegender Art ist und der sich mit elementaren Mitteln nicht beikommen läßt. Ein Beispiel dafür ist die Ermittlung der Geschwindigkeit v_0 eines ungleichförmig bewegten Körpers zu einem Zeitpunkt t_0 im Bahnpunkt P_0.

Bewegt sich ein Körper *gleichförmig* und hat er nach der Zeit t_0 den Weg $s(t_0) = s_0$, nach der Zeit t_1 den Weg $s(t_1) = s_1$ zurückgelegt, so ist seine Geschwindigkeit nach der physikalischen Definition durch den Quotienten

$$\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitspanne}} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{I}$$

gegeben. Bei *ungleichförmiger* Bewegung ist aber die Geschwindigkeit im Bahnpunkt P_0 eine andere als im Bahnpunkt P_1. Die Geschwindigkeit im Bahnpunkt P_0 läßt sich nach (I) nicht angeben. Da der Punkt P_0 keine Ausdehnung hat, durchläuft der Körper in P_0 die Strecke Null in der Zeit Null, und für seine Geschwindigkeit wäre nach (I) $v_0 = \frac{0}{0}$ anzugeben. Das liefert kein Ergebnis. Da sich aber der Körper bewegt, muß ihm eine Geschwindigkeit zukommen.

Der Quotient (I) — in 1.3.6. schon als Differenzenquotient der Wegzeitfunktion $s = s(t)$ eingeführt — gibt einen mittleren Wert der Geschwindigkeit im Zeitintervall $t_0 \cdots t_1$ an. Da sich die Geschwindigkeiten an Anfang und Ende der Meßstrecke um so weniger unterscheiden, je kürzer die Meßstrecke ist, liegt der Gedanke nahe, $\Delta s = s_1 - s_0$ möglichst klein zu wählen, um eine möglichst gute Aussage über die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_0 zu gewinnen. Auch bei diesem Vorgehen erhält man stets nur einen Näherungswert für die Geschwindigkeit zur Zeit t_0. Ähnliche Fragestellungen, die auf die gleiche Problematik führen, sind u. a. die Frage nach der Augenblicksbeschleunigung, nach Stromstärke und Spannung eines veränderlichen elektrischen Stromes zur Zeit t_0 oder nach der Steigung der Tangente in einem Kurvenpunkt. Da sich die zuerst genannten Probleme alle auf das der Tangente zurückführen lassen und hier die Möglichkeit einer anschaulichen Darstellung am besten gegeben ist, wird das Tangentenproblem im folgenden im Mittelpunkt stehen.[1])

[1]) Vom Tangentenproblem ausgehend gelangte Leibniz (1646 bis 1716) zur Differentialrechnung. Newton (1642 bis 1727), der unabhängig von Leibniz arbeitete, ging von der Geschwindigkeit aus

An die in Bild 85 dargestellte Kurve der stetigen Funktion f: $y = f(x)$ soll im Punkt P_0 die Tangente t gelegt werden. Die Lage einer Geraden ist durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Steigung der Geraden gegen eine Bezugsrichtung (hier: Richtung der x-Achse) bestimmt. Von der Tangente ist aber nur ein Punkt P_0 bekannt. Deshalb sei zunächst ein zweiter Kurvenpunkt P gewählt und die Sekante P_0P gezogen.

Die gewählte Bezeichnungsweise soll hier andeuten, daß eine einmal gewählte Abszisse x_0 beibehalten wird, während wir uns vorbehalten, für x verschiedene Werte einzusetzen oder x eine bestimmte Folge durchlaufen zu lassen.

Wandert in Bild 85 der Punkt P auf der Kurve gegen den festgehaltenen Punkt P_0, so führt die Sekante P_0P eine Drehung um P_0 aus. Je mehr sich P dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekante einer Grenzlage. Man definiert die Gerade in dieser Grenzlage als Tangente der Kurve in P_0. Die *Steigung der Tangente* in P_0 wird auch als *Steigung der Kurve* in P_0 bezeichnet.
Die hier gegebene Definition der Tangente erfaßt auch Sonderfälle. So kann z. B. — wie Bild 86 zeigt — die Tangente die Kurve auch durchsetzen.

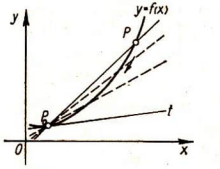


Bild 85

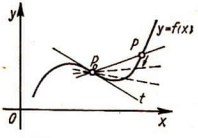


Bild 86

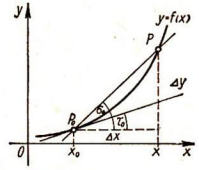


Bild 87

Nachdem die Tangente im Punkte einer Kurve definiert ist, kann das Tangentenproblem rechnerisch erfaßt werden. Da der Punkt P_0 gegeben ist, genügt es, die Steigung der Tangente in P_0 zu ermitteln. Die Lage der Tangente ist dann durch P_0 und die Steigung bestimmt.
Gegeben sei die Kurve einer stetigen Funktion f: $y = f(x)$ (Bild 87). Um die Steigung der Tangente in $P_0(x_0; y_0)$ zu ermitteln, wird von der Steigung einer Sekante P_0P ausgegangen, die mit der x-Achse einen Winkel σ_0 einschließt. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan \sigma_0 \qquad \text{(II)}$$

wird als *Steigung der Sekante* P_0P bezeichnet.
Durchläuft die Variable x eine Folge mit dem Grenzwert x_0:

$$x \to x_0,$$

so führt P auf der Kurve eine Bewegung $P \to P_0$ aus, und die Sekante dreht sich in eine Grenzlage, d. h. in die Lage der Tangente mit dem Steigungswinkel τ_0. Die

Steigung der Tangente ist also durch den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan \tau_0 \qquad \text{(III)}$$

gegeben.

Für den Differenzenquotienten (II) einer Funktion ist noch eine andere Schreibweise üblich. Setzt man $x = x_0 + \Delta x$, so wird $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten lautet dann

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Von einer geometrischen Aufgabenstellung ausgehend, wurde der Grenzwert (III) des Differenzenquotienten (II) einer Funktion f gebildet. Auch in (I) liegt im Prinzip der gleiche Differenzenquotient wie in (II) vor. Die Überlegung zum Tangentenproblem liefert daher auch die Lösung des Geschwindigkeitsproblems sowie der anderen angedeuteten Probleme. Der Grenzwert (II) des Differenzenquotienten hat also zentrale Bedeutung.

Definition

Ist f eine Funktion und $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$, so heißt der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

— falls er existiert — **Ableitung der Funktion f** an der Stelle x_0.

Wenn von der Ableitung einer Funktion die Rede ist, ist stets dieser Grenzwert gemeint. Daß die Existenz dieses Grenzwertes nicht selbstverständlich ist, wird aus den bei der Behandlung des Grenzwertbegriffs geführten Betrachtungen einleuchten. Auf diesen Umstand wird später genauer eingegangen.

Das Bilden des eben definierten Grenzwertes wird als *Differenzieren* oder *Ableiten* bezeichnet. Der Vorgang heißt *Differentiation*. Für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 wird nach LAGRANGE[1]) kurz $y_0' = f'(x_0)$ geschrieben.

Aus dem Zusammenhang Funktion — Kurve ergibt sich die Feststellung:

Die Ableitung $y_0' = f'(x_0)$ der Funktion f: $y = f(x)$ gibt — sofern sie existiert — die Steigung der Tangente (die Steigung der Kurve) an der Stelle x_0 an.

Der Grenzwert

$$y_0' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

[1]) LAGRANGE (1736 bis 1813), bedeutender französischer Mathematiker

kann nun nicht einfach dadurch gebildet werden, daß man $\Delta x = 0$ setzt. Für $\Delta x = 0$ erhält man den sinnlosen Term

$$\frac{f(x_0 + 0) - f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}.$$

Den Differenzenquotienten muß man, um den Grenzübergang ohne Schwierigkeiten durchführen zu können, in geeigneter Weise umformen.

BEISPIEL

1. Für die Funktion f: $y = f(x) = 0{,}5x^2$ ist an der Stelle x_0:

$$y_0' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}5\,[(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}5[x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}5[2x_0\Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0{,}5(2x_0 + \Delta x)$$

$$\underline{y_0' = x_0}.$$

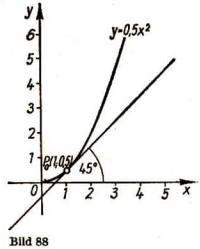


Bild 88

Dies ist die Steigung der Kurve an der Stelle x_0. Für $x_0 = 1$ wird

$$y_0' = 1,$$

d. h., die Kurventangente hat in $P_0(1; 0{,}5)$ die Steigung

$$\tan \tau_0 = 1$$

und den Steigungswinkel

$$\tau_0 = 45°$$ (Bild 88).

Es wurde schon erwähnt, daß die Existenz der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 nicht selbstverständlich ist. Andererseits kann aber eine Funktion u. U. in allen Stellen ihres Definitionsbereiches — einzelne Punkte eventuell ausgenommen — eine Ableitung besitzen. So läßt sich in allen Punkten einer Parabel die Tangente anlegen, was sich darin widerspiegelt, daß die Funktion f: $y = x^2$ an jeder Stelle des Definitionsbereichs eine Ableitung besitzt.

Definition

Eine Funktion f: $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 *differenzierbar*, wenn

1. f an der Stelle x_0 definiert ist,
2. der allgemeine Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert und gleich einer bestimmten Zahl y_0' ist.

Die Funktion f heißt im Intervall (a, b) differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls differenzierbar ist.

Für den Fall, daß die Ableitung einer Funktion f in einem evtl. den ganzen Definitionsbereich umfassenden Intervall existiert, kann die Stelle, an der differenziert wird, beliebig in diesem Intervall gewählt werden. Diese Tatsache, daß die Ableitung für jede Stelle innerhalb eines Intervalls (a, b) existiert, soll dadurch angedeutet werden, daß die Ableitungsstelle durch eine Variable ohne Index angegeben wird. Wir schreiben also in diesem Falle x statt x_0 und $y' = f'(x)$ statt $y'_0 = f'(x_0)$.
Jedem Wert x, für den die Ableitung von f existiert, ist ein Ableitungswert y' zugeordnet. Die Wertepaare $(x; y')$ bilden also wieder eine Funktion, die **Ableitungsfunktion**

$$f' = \{(x; y') \mid y' = f'(x)\}.$$

Der Definitionsbereich von f' fällt mit dem Definitionsbereich X der Funktion f zusammen, wenn f überall in X differenzierbar ist.
Die Bezeichnungsweise der Variablen ist natürlich auf das Differenzieren ohne Einfluß. Bei der Funktion $u = f(t) = 0{,}5t^2$ heißt die unabhängige Veränderliche t. Nach dem letzten Beispiel wird $u' = f'(t) = t$.
Die Definition der Differenzierbarkeit soll noch erläutert werden.
Die erste Voraussetzung für die Differenzierbarkeit einer Funktion an der Stelle x_0 ist, daß sie an der Stelle x_0 erklärt ist. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist bei $x_0 = 0$ unstetig, es existiert dort kein Funktionswert. Also ist $y = \frac{1}{x}$ für $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Satz

Ist eine Funktion bei x_0 unstetig, so ist sie dort nicht differenzierbar.

Diese Feststellung besagt aber nicht, daß andererseits jede stetige Funktion differenzierbar wäre. So ist die in Bild 89 wiedergegebene Funktion im dargestellten Bereich überall stetig. Sie weist aber an der Stelle x_0 einen Knick auf und hat daher an dieser Stelle zwei Tangenten mit verschiedener Steigung. Dies äußert sich darin, daß der Differenzenquotient dort einen links- und einen rechtsseitigen Grenzwert hat. Man nennt

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ die *linksseitige Ableitung*,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ die *rechtsseitige Ableitung*

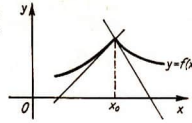


Bild 89

der Funktion f an der Stelle x_0. Da beide Grenzwerte verschieden ausfallen, ist die in Bild 89 gezeigte Funktion an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

BEISPIELE

2. Die Funktion $y = f(x) = -x^2 + 4\,|x - 1| + 3$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ zu differenzieren.

Lösung: Es ist

$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 7 & \text{für } x \leqq 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

Zunächst ist die Stetigkeit von f in $x_0 = 1$ festzustellen:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (-x^2 - 4x + 7) = \lim_{k\to +0} [-(1-k)^2 - 4(1-k) + 7] =$$
$$= \lim_{k\to +0} (2 + 6k - k^2) = 2.$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (-x^2 + 4x - 1) = \lim_{h\to +0} [-(1+h)^2 + 4(1+h) - 1] =$$
$$= \lim_{h\to +0} (2 + 2h - h^2) = 2.$$

Die Funktion ist in $x_0 = 1$ stetig.
Nun sind links- und rechtsseitiger Differenzenquotient für $x_0 = 1$ zu bilden. Wegen

$$f(x) = -x^2 - 4x + 7 \quad \text{für} \quad x \leqq 1, \qquad f(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{für} \quad x \geqq 1$$

folgt aus

$$f(1) = 2, \qquad f(1) = 2,$$
$$f(1-\Delta x) = -(1-\Delta x)^2 - \qquad f(1+\Delta x) = -(1+\Delta x)^2 +$$
$$- 4(1-\Delta x) + 7 = \qquad + 4(1+\Delta x) - 1 =$$
$$= 2 + 6\Delta x - (\Delta x)^2, \qquad = 2 + 2\Delta x - (\Delta x)^2$$

der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{-\Delta x} = -6 + \Delta x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 - \Delta x$$

Der Grenzübergang liefert als links- bzw. rechtsseitige Ableitung in $x_0 = 1$:

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta y}{-\Delta x} = -6 \qquad \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

Links- und rechtsseitige Ableitung sind verschieden. Die Funktion f ist in $x_0 = 1$ nicht differenzierbar (Bild 90).

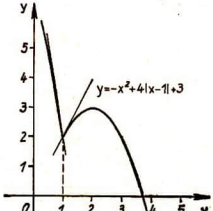


Bild 90

3. Die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ abzuleiten.

Lösung: Wegen $X = [0, \infty)$ kann an der Stelle $x_0 = 0$ nur die rechtsseitige Ableitung gebildet werden. Der Differenzenquotient lautet ($\Delta x > 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Somit wird

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ ist ein *uneigentlicher* Grenzwert. Die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar. Geometrisch bedeutet das Ergebnis, daß die Tangente der Kurve an der Stelle $x_0 = 0$ senkrecht zur x-Achse verläuft (Bild 91).

Die Beispiele zeigen: Voraussetzung für die Differenzierbarkeit ist stets die Stetigkeit. Diese Bedingung reicht aber nicht aus, denn auch stetige Funktionen sind mitunter nicht differenzierbar (z. B. $y = \sqrt[3]{x}$ bei $x_0 = 0$). Man sagt: Die Stetigkeit ist eine zwar *notwendige*, aber *nicht hinreichende* Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion.

Es gilt aber der

Satz

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

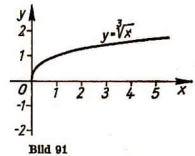


Bild 91

Für die Existenz eines eigentlichen Grenzwertes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ist nämlich notwendig, daß der Zähler des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ eine Nullfolge ist. Damit jedoch

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

ist, muß

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

sein. Das ist aber nach Abschnitt 2.4.2. die Bedingung der Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle x.

Die Differenzierbarkeit ist *keine notwendige* Bedingung für die Stetigkeit, denn eine stetige Funktion braucht nicht unbedingt differenzierbar zu sein (z. B. $y = \sqrt[3]{x}$ bei $x_0 = 0$). Doch ist die Bedingung *hinreichend*, denn aus der Differenzierbarkeit folgt — wie gezeigt wurde — unbedingt die Stetigkeit einer Funktion.

Außer der notwendigen Bedingung und der hinreichenden Bedingung gibt es noch die *notwendige und hinreichende* Bedingung. Sie verlangt weder zuwenig — wie die notwendige Bedingung — noch zuviel wie die hinreichende Bedingung.

Die Untersuchung, ob eine Bedingung notwendig und hinreichend ist, erfordert in vielen Fällen ein tieferes Eindringen in die vorliegende Problematik. Es soll deshalb nicht näher auf die notwendige und hinreichende Bedingung eingegangen werden.

AUFGABEN

101. Von den folgenden Funktionen ist der Differenzenquotient aufzustellen und durch Grenzübergang die Ableitung zu bilden.

a) $y = -2x^2$ b) $y = -0{,}6x^2 - 2x + 1$

c) $v = v(u) = 1{,}2u^3$ d) $y = 0{,}2x^3 + 0{,}5x + 4$

e) $y = (-2x + 3)^2$ f) $y = (2 - 3x)(x - 4)$

102. Von den nachstehenden Funktionen ist, vom Differenzenquotienten ausgehend, die Ableitung zu bilden.

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{-x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

Hinweis: Im Differenzenquotienten zunächst den Zähler rational machen.

103. Man untersuche, in welchem Bereich die Funktion f: $y = f(x)$ differenzierbar ist. Das Ergebnis ist zu begründen.

a) $y = 4x^2$ b) $y = |x|$ c) $y = x^n, \quad n \in N$

d) $y = \frac{1}{x^2}$ e) $y = \frac{x}{|x|}$ f) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Hinweis zu f): Im Differenzenquotienten zunächst den Zähler rational machen.

3.2. Die Ableitung der Potenzfunktion

Es wäre mühsam, für jede Funktion die Ableitung, vom Differenzenquotienten ausgehend, zu bilden. Es wird sich zeigen, daß die Kenntnis der Ableitungsfunktionen von einer geringen Anzahl einfacher Funktionen sowie die Kenntnis einiger Ableitungsregeln genügt, um eine Vielfalt von Funktionen differenzieren zu können.
In diesem und den folgenden Abschnitten werden die für das Differenzieren benötigten Ableitungen und die Grundregeln der Differentiation hergeleitet.
Liegt die Potenzfunktion f: $y = f(x) = x^n$ (n positiv, ganzzahlig) vor, so heißt der Differenzenquotient an der Stelle x_0:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Für $x \neq x_0$ liefert die Division

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}.$$

Jetzt kann der Grenzübergang $x \to x_0$ durchgeführt werden. Man erhält für die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

Da dieses Ergebnis für jede Stelle x des gesamten Definitionsbereiches gilt, folgt

$$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}} \tag{33}$$

d. h., die Ableitungsfunktion f' ist durch $y' = n x^{n-1}$ gegeben.
Die Ableitung der Potenzfunktion wurde für ganzzahlige, positive n hergeleitet. Das gewonnene Ergebnis gilt aber — wie noch in 3.7. gezeigt werden wird — für jeden reellen Exponenten n.

BEISPIELE

1. Für die Ableitung von $y = x^6$ ergibt sich

$$y' = 6x^{6-1} = \underline{\underline{6x^5}}.$$

2. Ist die Steigung der Kurve mit der Gleichung $y = x^3$ an der Stelle $x_0 = -2$ zu bestimmen, so bildet man zunächst die Ableitung an der Stelle x:

$$y' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

Für $x_0 = -2$ erhält man

$$y'_0 = 3 \cdot (-2)^2 = \underline{\underline{12}}.$$

Die Tangente hat also im Punkte $P_0(-2; -8)$ die Steigung $\tan \tau_0 = 12$.

3. $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}}$$

4. $y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$$y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \underline{\underline{-\frac{3}{x^4}}}$$

5. $y = x$ liefert $y' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0$. Es folgt somit $y' = 1$.
Wie aus der Elementarmathematik bekannt ist, stellt $y = x$ eine Gerade mit dem Steigungswinkel $\alpha = 45°$ dar, was durch die Ableitung noch einmal bestätigt wird.

6. In welchen Punkten hat die Tangente der kubischen Parabel mit der Gleichung $y = \sqrt[3]{x}$ den Steigungswinkel $\alpha = 45°$?

Lösung: Die Ableitung für $y = \sqrt[3]{x}$ lautet

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Wegen

$$\tan 45° = 1$$

muß

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 1$$

sein. Es folgt

$$\sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{27}$$

$$x_1 = \frac{1}{9}\sqrt{3} \qquad x_2 = -\frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

Für den negativen Wert x_2 ist $y = \sqrt[3]{x}$ nicht erklärt.

Die Tangente der Kurve hat im Punkte $P_1\left(\frac{1}{9}\sqrt{3}; \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ den Steigungswinkel $\alpha = 45°$. Kurve und Tangente sind zu zeichnen.

3.3. Grundregeln der Differentiation

3.3.1. Vorbetrachtung

Bei der Herleitung der Ableitung einer Funktion f wurde davon ausgegangen, daß f durch einen Ausdruck $y = f(x)$ bei festgelegtem Definitionsbereich X und Wertebereich Y gegeben ist. Zur Aufstellung der Grundregeln der Differentiation werden die Funktionen unter dem Gesichtspunkt betrachtet, welche Gestalt der Term $f(x)$ hat.

Vorbereitend zu den in den folgenden Abschnitten anzustellenden Betrachtungen soll auf einige Sprechweisen und Vereinbarungen eingegangen werden. Definitionsbereich und Wertevorrat sollen in diesem Abschnitt stets als gegeben angesehen werden.

Ist a eine Konstante, so wird die durch $y = a \cdot f(x)$ gegebene Funktion als *Funktion mit konstantem Faktor* bezeichnet. Diese ungenaue, aber übliche Sprechweise darf nicht mißverstanden werden. Gemeint ist, daß der Term $f(x)$ mit einem konstanten Faktor multipliziert ist.

Sind zwei Funktionen $u\colon\ y = u(x)$ und $v\colon\ y = v(x)$ gegeben, so heißt

$$f\colon y = f(x) = u(x) + v(x)$$

die *Summe der Funktionen u und v*. Die Bezeichnung Summe bezieht sich wieder auf die Terme $u(x)$ und $v(x)$.

Dementsprechend sind

die *Differenz* $f\colon\ y = f(x) = u(x) - v(x)$

das *Produkt* $f\colon\ y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

der *Quotient* $f\colon\ y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $v(x) \neq 0$

der Funktionen u und v erklärt.

BEISPIEL

Für die Funktionen

$$u\colon\ y = x^2 \quad \text{und} \quad v\colon\ y = 2x - 1$$

lautet die Differenz von u und v

$$f\colon\ y = f(x) = x^2 - 2x + 1,$$

das Produkt von u und v

$$f\colon\ y = x^2(2x - 1),$$

der Quotient von u und v

$$f\colon\ y = \frac{x^2}{2x - 1}.$$

Bei der Bildung der Ableitung wird mit dem Term $f(x)$ operiert. Das Ergebnis ist wieder ein Term $f'(x)$. Wird x belegt, so ergeben sich Funktionswerte von f bzw. f'. Das

entspricht der Absicht, die Augenblicksgeschwindigkeit, die Steigung der Tangente, die Ableitung, also einen Funktionswert an einer bestimmten Stelle zu gewinnen. Da vornehmlich der Funktionswert interessiert, werden Formeln für die Ableitungsregeln in der Form angegeben, wie es schon bei der Potenzfunktion geschehen ist: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Mit dem Term nx^{n-1} ist ja nach stillschweigender Vereinbarung auch die Ableitungsfunktion f': $\{(x;\ y') \mid y' = nx^{n-1}\}$ gegeben.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich auch die in Worte gefaßte Kurzform der Ableitungsregeln, deren Text sich nur auf den die Funktion definierenden Term bezieht.

3.3.2. Die Ableitung einer konstanten Funktion

Die Funktion $y = f(x) = c$ ergibt im cartesischen Koordinatensystem eine Parallele zur x-Achse im Abstand c. Da der Differenzenquotient unabhängig von Δx stets gleich Null ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0,$$

ist auch die Ableitung als dessen Grenzwert gleich Null. Es gilt:

$$\boxed{(c)' = 0} \tag{34}$$

▌ Die Ableitung einer Konstanten ist gleich Null.

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, da die Ableitung als Tangens des Steigungswinkels einer Kurve erklärt ist und die Gerade $y = c$ überall den Steigungswinkel $\alpha = 0$ besitzt.

3.3.3. Die Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor

Es sei vorausgesetzt, daß die Ableitung der Funktion $f: y = f(x)$ existiert. Ist $f(x)$ mit einem konstanten Faktor a versehen:

$$y = a \cdot f(x),$$

so folgt für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = a\,\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Für die Ableitung ist der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

zu bilden. Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren (vgl. 2.2.4.). Es folgt also

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$\boxed{(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)} \tag{35}$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

BEISPIEL

Für die Ableitung von $y = 3x^5$ erhält man

$$y' = (3x^5)' = 3 \cdot (x^5)' = 3 \cdot 5x^4,$$

$$y' = \underline{\underline{15x^4}}.$$

3.3.4. Die Ableitung der Summe mehrerer Funktionen

Ist eine Funktion $y = f(x) = u(x) + v(x)$ gegeben, so lautet der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Unter Verwendung des 1. Grenzwertsatzes aus 2.2.4. wird, sofern die Grenzwerte der Summanden existieren,

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Dies sind die Grenzwerte der Differenzenquotienten $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}$. Nach dem Grenzübergang folgt die **Summenregel:**

$$\boxed{[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)} \tag{36}$$

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen der Summanden.

Diese Regel gilt für endlich viele, also auch für mehr als zwei Summanden. Auch Differenzen sind als algebraische Summen in dieser Regel eingeschlossen.

BEISPIELE

1. Für die ganzrationale Funktion

$$f\colon\ y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

wird

$$f'\colon\ y' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Die Ableitungsfunktion ist wieder eine ganzrationale Funktion mit einem um 1 niedrigeren Grade.

2. Für $y = x^3 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$ folgt $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $y = (2x^2 - x)(x + 3)$
$y = 2x^3 + 5x^2 - 3x$
$y' = 6x^2 + 10x - 3$.

4. An welchen Stellen der Kurve mit der Gleichung

$$y = 0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 1$$

verläuft die Tangente parallel zur x-Achse?

Lösung: Die Ableitung der Funktion lautet

$$y' = 0{,}6x^2 - 0{,}6x - 3{,}6.$$

Gesucht sind die Stellen, an denen die Steigung der Kurventangente $\tan\tau = 0$ ist. Es ist also $y' = 0$ zu setzen:

$$0{,}6x^2 - 0{,}6x - 3{,}6 = 0,$$
$$x^2 - x - 6 = 0,$$
$$\underline{\underline{x_1 = -2, \quad x_2 = 3.}}$$

Die Tangente der Kurve $y = 0{,}2x^3 - 0{,}3x^2 - 3{,}6x + 1$ verläuft an den Stellen $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ parallel zur x-Achse.
Das Ergebnis ist mit der in Bild 47 dargestellten Kurve zu vergleichen!

3.3.5. Die Ableitung des Produktes mehrerer Funktionen

Es soll die Ableitung des Produktes zweier Funktionen $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gebildet werden. Die Differenzierbarkeit der Funktionen u und v sei vorausgesetzt. Der Differenzenquotient lautet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Ehe der Grenzübergang vorgenommen wird, soll der Differenzenquotient so umgeformt werden, daß die Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x}$ und $\dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}$ auftreten. Dies gelingt, wenn im Zähler $u(x)\,v(x + \Delta x)$ subtrahiert und wieder addiert wird:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\, v(x+\Delta x) + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\, u(x) =$$
$$= \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\, v(x+\Delta x) + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\, u(x).$$

Jetzt kann der Grenzwert gebildet werden. Für $\Delta x \to 0$ geht $v(x+\Delta x) \to v(x)$, $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \to u'(x)$, $\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \to v'(x)$, und $u(x)$ bleibt unverändert. Unter Anwendung der Grenzwertsätze erhält man die Produktregel

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

die auch kurz durch

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'} \tag{37}$$

angegeben werden kann.
Ist eine Funktion aus drei Faktoren

$$y = u \cdot v \cdot w$$

gegeben, so kann zunächst (uv) als ein Faktor aufgefaßt werden. Für die Ableitung folgt

$$y' = (uv)'w + (uv)w'.$$

Mit $(uv)' = u'v + uv'$ erhält man

$$y' = (u'v + uv')w + uvw'$$

und schließlich

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Die Produktregel läßt sich leicht auf n Faktoren erweitern. Ist

$$y = u_1 u_2 \dots u_n,$$

so folgt als Ableitung

$$y' = \underbrace{u_1' u_2 \cdot \dots \cdot u_n + u_1 u_2' \cdot \dots \cdot u_n + \dots + u_1 u_2 \cdot \dots \cdot u_n'}_{n \text{ Summanden}}.$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion erfolgen.

BEISPIELE

1. Bei der Funktion

$$y = (2x^2 + 1)\sqrt{x}$$

sind

$$u = (2x^2 + 1), \quad v = x^{\frac{1}{2}}$$

und

$$u' = 4x, \qquad v' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

Es wird also

$$y' = u'v + uv'$$

$$y' = 4x\sqrt{x} + \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}} = 5x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}}}.$$

Man kommt hier auch ohne Produktregel aus, indem man zunächst ausmultipliziert:

$$y = 2x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}.$$

Es folgt ohne Produktregel

$$y' = 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 5x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Für Funktionen wie $y = x \sin x$ ist aber die Produktregel unentbehrlich.

2. Mit Hilfe der Produktregel läßt sich die Formel

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

für ganzzahliges $n > 1$ leicht bestätigen. Schreibt man

$$y = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}},$$

so wird nach der Produktregel

$$y' = \underbrace{1 \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x + \cdots + x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ Summanden}}.$$

$$\underline{\underline{y' = nx^{n-1}.}}$$

3.3.6. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen

Die Differenzierbarkeit der Funktionen u und v sei wieder vorausgesetzt. Weiterhin sei $v(x)$ im zu differenzierenden Bereich stets ungleich Null. Der Differenzenquotient der gebrochenen Funktion

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

heißt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - v(x+\Delta x) \cdot u(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}.$$

Fügt man im Zähler $u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)$ (das ist gleich Null) hinzu, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \times$$

$$\times \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - v(x+\Delta x)\cdot u(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x) - \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)\right].$$

Da nun in der eckigen Klammer die Differenzenquotienten $\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}$ stehen, findet man beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ die **Quotientenregel**

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2},$$

in einfacher Schreibweise

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \tag{38}$$

Bei der Anwendung der Quotientenregel darf nie übersehen werden, daß eine gebrochene Funktion $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ nur dort differenzierbar ist, wo $v(x) \neq 0$ ist.

BEISPIELE

1. Für $y = 2\frac{x-1}{x^2-2x-3}$ ist $u(x) = x-1$, $v(x) = x^2-2x-3$; $u'(x) = 1$, $v'(x) = 2x-2$.

   Es wird

$$y' = 2\frac{1(x^2-2x-3) - (x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$y' = 2\frac{-x^2+2x-5}{(x^2-2x-3)^2}.$$

   Die Funktion ist an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ nicht differenzierbar, da $v(-1) = 0$ und $v(3) = 0$ ist. Die Funktion ist an diesen Stellen unstetig (Bild 48).

2. Für die sogenannte *reziproke Funktion*

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

   wird

$$y' = \frac{0\cdot f(x) - 1\cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

3. Mit Hilfe der Quotientenregel kann die Formel

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

für negative Exponenten $n = -m \quad (m > 0)$ bestätigt werden.
Aus

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

folgt nach (38) oder Beispiel 2

$$y' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$y' = -mx^{-m-1},$$

also

$$\underline{\underline{(x^{-m})' = -mx^{-m-1}.}}$$

Das ist aber Formel (33) für $n = -m$.

3.3.7. Ermittlung der Ableitung einer ganzrationalen Funktion an einer Stelle x_0 mittels des Hornerschen Schemas

Zur Ermittlung der Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion wird zweckmäßigerweise das Hornersche Schema benutzt. Auch die Berechnung der Ableitung an einer Stelle x_0 läßt sich sehr einfach mit Hilfe des Hornerschen Schemas durchführen.
Bekanntlich kann das Polynom

$$g_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

für $x_0 \in X$ in der Form

$$g_n(x) = (x - x_0) g_{n-1}(x) + r_0 \tag{I}$$

dargestellt werden. Diese Division mit Rest wird mit dem Hornerschen Schema ausgeführt, das die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ des Polynoms $g_{n-1}(x)$ und den Divisionsrest r_0 liefert:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
	$\downarrow$	$x_0 b_{n-1}$	$x_0 b_{n-2}$	$\cdots$	$x_0 b_1$	$x_0 b_0$
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r_0

Für $x = x_0$ folgt aus (I)

$$g_n(x_0) = r_0.$$

Wegen dieser Beziehung dient das Hornersche Schema zur Berechnung von Funktionswerten der ganzrationalen Funktionen $y = g_n(x)$.
Wird (I) nach x differenziert, so folgt nach der Produktregel

$$g_n'(x) = g_{n-1}(x) + (x - x_0) g_{n-1}'(x). \tag{II}$$

Für $x = x_0$ ergibt sich aus (II):

$$g_n'(x_0) = g_{n-1}(x_0).$$

Das bedeutet: Der Wert des Polynoms $g_{n-1}(x_0)$ ist gleich der Ableitung der ganzrationalen Funktion $y = g_n(x)$ an der Stelle x_0. Diesen Wert $g_{n-1}(x_0)$ erhält man, wenn das HORNERsche Schema auf $g_{n-1}(x)$ angewendet wird. Es zeigt sich also, daß der Divisionsrest r_1 in

$$g_{n-1}(x) = (x - x_0)g_{n-2}(x) + r_1$$

gleich dem Wert der Ableitung $g_n'(x_0)$ der Funktion g_n ist. Zusammengefaßt:

$g_n(x) \rightarrow$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$ a_2	a_1	a_0
	$\downarrow$	$x_0 b_{n-1}$	$x_0 b_{n-2}$	$\dots$ $x_0 b_2$	$x_0 b_1$	$x_0 b_0$
$g_{n-1}(x) \rightarrow x_0$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$ b_1	b_0	$r_0 = g_n(x_0)$
	$\downarrow$	$x_0 c_{n-2}$	$x_0 c_{n-3}$	$\dots$ $x_0 c_1$	$x_0 c_0$	
$g_{n-2}(x) \rightarrow x_0$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\dots$ c_0	$r_1 = g_n'(x_0)$	

Es sei betont, daß sich das nach Division durch $x - x_0$ gewonnene Polynom $g_{n-1}(x)$ *nicht* zur Berechnung einer Ableitung $g_n'(x_1)$ mit $x_1 \neq x_0$ verwenden läßt, da die Division durch $x - x_1$ ein anderes Polynom $\bar{g}_{n-1}(x)$ liefert. Für die von x_0 verschiedene Stelle x_1 muß das HORNERsche Schema erneut angesetzt werden.
Bemerkenswert ist, daß sich $g_n'(x_0)$ *ohne* Differentiation durch Fortsetzung des HORNERschen Schemas ergibt.

BEISPIEL

Für die ganzrationale Funktion

$$y = g_4(x) = 1{,}2x^4 - 2{,}5x^3 + 0{,}8x - 3{,}2$$

ist die Ableitung $g_4'(-1{,}4)$ zu berechnen.

Lösung:

Σ:							
$-3{,}7$		$1{,}2$	$-2{,}5$	0	$0{,}8$	$-3{,}2$	
		$\downarrow$	$-1{,}68$	$5{,}85$	$-8{,}19$	$10{,}35$	Kontrolle:
$-4{,}52$	$-1{,}4$	$1{,}2$	$-4{,}18$	$5{,}85$	$-7{,}39$	$7{,}15 = g_4(-1{,}4)$	$-3{,}7 + 2{,}4 \cdot 4{,}52 = 7{,}15$
		$\downarrow$	$-1{,}68$	$8{,}20$	$-19{,}67$		
$9{,}39$	$-1{,}4$	$1{,}2$	$-5{,}86$	$14{,}05$	$-27{,}06 = g_4'(-1{,}4)$		$-3{,}7 - 2{,}4 \cdot 9{,}39 = -27{,}06$

Zur Kontrollrechnung vergleiche man Band „Algebra und Geometrie", 18.1.

AUFGABEN

104. Man bilde die Ableitung der Funktionen von Aufgabe 101 unter Anwendung der hergeleiteten Regeln.

Die folgenden Funktionen sind zu differenzieren.

105. a) $y = 2x^4 - 3x^2 - 5x + 6$ b) $y = -0{,}8x^3 + \sqrt{3}\,x^2 + 1{,}9x - 2$

c) $y = \frac{5}{12}x^6 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x$ d) $y = -ax^4 + 3bx^2 + c^2x + d$

e) $y = (4t - 1)^2$ f) $y = (x - a)^2\,(x + a)$

106. a) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - 0{,}5x^{-2} + 3$ b) $y = (1 - x^{-4})\,(2x^2 + x^{-1})$

c) $y = 6x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 10x^{\frac{2}{5}}$ d) $y = \left(2x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

107. a) $y = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2}$ b) $y = v(s) = as - \dfrac{bs + c}{s^2}$

c) $y = \dfrac{(x - 2x^2)^3}{x^5}$ d) $y = \dfrac{3(x^{-2} - x^{-4})}{x^{-1} + x^{-2}}$ e) $y = \dfrac{x^{-2} + x^{-3}}{1 + x}$

108. a) $g = t\sqrt{t}$ b) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ c) $y = x^2\left(\sqrt[4]{x^3}\right)$

d) $y = \dfrac{a - x}{\sqrt{bx}}$ e) $y = \dfrac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}}$ f) $y = \dfrac{1 - x}{x + \sqrt{x}}$

g) $y = \left(x^2 + 2x\sqrt{x} + 4\right)\sqrt[3]{x^2}$ h) $y = \left(\sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)$

i) $y = \left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^3$ k) $y = \dfrac{(x^{-2} - 1)^2}{x^{-1} + 1}$

109. Welchen Wert hat die Ableitung der Funktion $f: y = f(x)$ an der Stelle x_1, und welchen Winkel bildet dort die Kurventangente mit der x-Achse?

a) $y = -\frac{2}{3}x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$ $x_1 = -2$

b) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x}$ $x_1 = 4$

c) $y = 0{,}2x^2 + 0{,}8x + 4$ $x_1 = -4{,}5$

d) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $x_1 = 0{,}25$

110. An welchen Stellen der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}1x^4 + 0{,}4x^3 - 0{,}8x^2 - 5{,}8x + 8$ bildet die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 135°?

111. Unter welchem Winkel schneidet die Kurve mit der Gleichung

a) $y = 0{,}1x^4 - 0{,}2x^2 - 0{,}3$, b) $y = -x^3 + 3x - 18$,

c) $y = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)^2$

die x-Achse?

112. Wo und unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven mit den Gleichungen

a) $y = x^3$ und $y = \sqrt[3]{x}$; b) $y = x^3$ und $y = x^2$;

c) $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ und $y = 2x - 1$?

113. Wo hat die Kurve mit der Gleichung

a) $y = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ b) $y = x^5 - x^3 + \frac{1}{4}x - 3$

waagerechte Tangenten?

114. Die Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - 10x^2 + 28x - 19$ ist mit Hilfe von Punkten und Tangenten für $x = 1, 2, \ldots, 6$ zu zeichnen.

115. Es ist die Funktion 3. Grades zu bestimmen, für die bekannt ist:

a) $f(0) = -2, \quad f(2) = 2, \quad f'(-1) = -16, \quad f'(0) = 0$

b) $f(-2) = 1, \quad f(1) = -5, \quad f'(0) = -8, \quad f'(3) = 46$

c) $f(-2) = 1, \quad f'(-2) = -7, \quad f'(1) = -4, \quad f'(-3) = -20.$

(Ansatz: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

116. Für $y = g_n(x)$ ist mit Hilfe des HORNERschen Schemas $g_n'(x_0)$ zu berechnen.

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 10, \quad x_0 = -2$

b) $y = -x^4 + 3x^2 - 8x - 6, \quad x_0 = 1{,}6$

c) $y = x^4 + 4{,}40x^3 + 9{,}24x^2 - 10{,}08x + 4{,}32, \quad x_0 = 1{,}2$

d) $y = -1{,}2x^5 + 4{,}2x^3 - 2{,}2x^2 + 2{,}5x - 3{,}3, \quad x_0 = 2{,}12$

e) $y = 1{,}6x^4 - 2{,}8x^3 - 10{,}2x^2 + 5.8x - 12{,}6, \quad x_0 = -1{,}28$

117. Die Kurve einer Funktion 3. Grades geht durch die Punkte $P_1(-1; 0)$, $P_2(0; 2)$, $P_3(1; 0)$ und schneidet die x-Achse in P_1 unter einem Winkel von 45°.

a) Wie heißt die Funktionsgleichung?

b) Wie lautet die dritte Nullstelle?

118. Wie heißt die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Kurve im Punkt $(2; -4)$ die Steigung -3 besitzt und die Achsen in $x = 4$ und $y = 4$ schneidet?

119. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat eine Kurve, die die x-Achse bei $x = -2$ unter einem Winkel von 45° und die y-Achse in $y = 2$ waagerecht schneidet?

120. Für welche Funktion zweiten Grades geht die Kurve durch die Punkte $P_1(-2; 0)$ und $P_2(3; -5)$ und hat in P_1 die Steigung -4?

121. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die die Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - {}^3/_2 x + 4$ berührt und die Gerade mit der Gleichung $y = 2x - 3$ unter einem rechten Winkel schneidet?

122. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten der Funktion $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ genügen, damit die Kurve nirgends eine waagerechte Tangente hat?

123. Wie groß muß b gewählt werden, damit sich die Kurven mit den Gleichungen $y = x^2 - b$ und $y = -x^2 + b$ unter einem rechten Winkel schneiden?

124. Welche Bedingung müssen a und b erfüllen, damit sich die Kurven mit den Gleichungen

$$y = x^2 + 2ax - b \text{ und } y = -x^2 - 2ax + b$$

unter einem rechten Winkel schneiden?

125. Wie lautet die ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Kurve bei $x = -1$ und $x = 1$ die Gerade mit der Gleichung $y = -{}^1/_2 x + {}^5/_2$ unter einem rechten Winkel schneidet? Wo liegt der dritte Schnittpunkt?

Man differenziere nach der Produktregel:

126. a) $y = (x-1)(2-x^2)$ b) $y = (1-x-x^2)(x^3+2x)$
c) $y = (-x^3+4x-1)(x^2-6x+5)$ d) $y = (x^3-2)(x^2-2x+1)$
e) $y = (4x^2-3x)(2-x^2)x^3$ f) $y = (2x^3-5)^2$
g) $y = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ h) $y = (1-x-x^2)\left(1-\sqrt{x}\right)$

127. a) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)$ b) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\sqrt{5x}-\sqrt[6]{x^5}\right)$
c) $y = \frac{3x^2+2}{x\sqrt[3]{x}}\left(4-\sqrt[3]{x}\right)$ d) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{2x^2}\left(1+\sqrt{x}\right)^2$

128. a) $y = (a+bx)(c-dx)-(a-bx)(c+dx)$ b) $y = (x-1)^4$
c) $y = (2x^2-1)^3(5-2x^3)$ d) $y = (ax+b)^2(b-ax)^2$
e) $y = (ax+b)^n$ f) $y = (ax^2-bx+c)^2$

Man differenziere:

129. a) $y = \frac{2x}{x-1}$ b) $y = \frac{x+1}{x-1}$ c) $y = \frac{ax+b}{ax-b}$
d) $y = \frac{2x^2-1}{3x+4}$ e) $y = \frac{4x^2-2x}{3x^3-x+4}$ f) $y = \frac{2-6x^2}{5x-2x^3}$
g) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$ h) $y = (2x^2-4)\frac{2-4x^3}{5-x}$ i) $y = \frac{4-x}{(3-2x)(x^2+1)}$
k) $y = \frac{(3x^2-2)(x+1)}{x^2+1}$ l) $y = \frac{1}{x+2}$ m) $y = \frac{1}{(x^2-2)(3x-4)}$

130. a) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ b) $y = \frac{x^2+3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$ c) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$
d) $y = \frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}$ e) $y = \frac{2a}{a+\sqrt{x}}$ f) $y = \frac{2x-\sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$
g) $y = \frac{-2x^2+1}{\sqrt{x}-x}$

131. Warum haben die Funktionen der Aufgaben 129a) und 129b) die gleiche Ableitung?

132. a) Für welche Werte von x steigt (fällt) die Kurve der Funktion $y = \frac{x}{1+x^2}$?
b) Wo hat die Kurve waagerechte Tangenten?

133. Die Funktion f ist auf Differenzierbarkeit zu untersuchen. Ist f an einer Stelle nicht differenzierbar, so prüfe man, ob links- und rechtsseitige Ableitung an dieser Stelle existieren. Diese Ableitungen sind im gegebenen Fall zu bestimmen.

a) $y = f(x) = |x^2-4|$ b) $y = f(x) = x^2 - 2|x| + 5$
c) $y = f(x) = |x^3-2x-3|$ d) $y = f(x) = (x-2)\cdot|x+3|$
e) $y = f(x) = |x^3-3x^2+3x-1|$ f) $y = f(x) = |x|\sqrt{|x|}$

3.4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

In der Elementarmathematik wird bei den trigonometrischen Funktionen das Argument zumeist im Gradmaß angegeben. In der höheren Mathematik ist es notwendig, das Bogenmaß zu verwenden. Dies ist beim Auftreten trigonometrischer Funktionen zu beachten.

3.4.1. Die Ableitung der Funktion $y = \sin x$

Der Differenzenquotient von $y = \sin x$ hat den Wert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Mit $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}$ wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Nach Formel (32) ist $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Mit $z = \frac{\Delta x}{2}$ gilt demnach $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$.

Da für $\Delta x \to 0$ außerdem $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$ geht, heißt die Ableitung von $y = \sin x$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \tag{39}$$

3.4.2. Die Ableitung der Funktion $y = \cos x$

Ähnlich wie für $y = \sin x$ läßt sich die Ableitung der Funktion $y = \cos x$ herleiten. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

erhält mit $\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$ die Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Für $\Delta x \to 0$ geht $\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \sin x$ und $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$. Also wird

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \tag{40}$$

3.4.3. Die Ableitungen der Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$

Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist, gewinnt man die Ableitungen von $y = \tan x$ und $y = \cot x$ am einfachsten unter Verwendung der Quotientenregel.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \qquad y' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erhält man also

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \tag{41}$$

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}} \tag{42}$$

Ohne Anwendung von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ergibt sich für diese Ableitungen die zuweilen zweckmäßige Form

$$\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x} \tag{41a}$$

bzw.

$$\boxed{(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)} \tag{42a}$$

BEISPIELE

1. $y = 3x^2 \cos x$; $\underline{\underline{y' = 6x \cos x - 3x^2 \sin x.}}$

2. Aus $y = \sin 2x$ folgt nach Umformung in $y = 2 \sin x \cos x$

$y' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\underline{\underline{y' = 2 \cos 2x.}}$

3.5. Das Differential; der Differentialquotient

Wird das Argument x der Funktion f: $y = f(x)$ um Δx geändert, so ändert sich der Funktionswert um Δy.
Die Funktion f sei an der Stelle x differenzierbar. Wir denken uns die durch f gegebene Kurve vom Punkt $P(x;y)$ an durch die Tangente in P *linear fortgesetzt*. Wird jetzt wieder x um Δx geändert, so erfährt der Funktionswert der so fortgesetzten Funktion eine Änderung, die in Bild 92 durch das Ordinatenstück QR dargestellt wird. Diese Änderung $\overline{QR}$ läßt sich leicht berechnen, denn im Tangentendreieck PRQ gilt:

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \tan\tau.$$

Die Gegenkathete QR wird mit $\mathrm{d}y$ bezeichnet. Mit $\overline{PR} = \Delta x$ und $\tan\tau = f'(x)$ folgt

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{I}$$

Man nennt $\mathrm{d}y$ das **Differential** der Funktion f: $y = f(x)$. Wegen $y = f(x)$ ist für das Differential auch die Schreibweise $\mathrm{d}f(x)$ üblich.
Während Δy die tatsächliche Änderung des Funktionswertes y bei der Argumentänderung Δx angibt, liefert $\mathrm{d}y$ die Änderung, die $y = f(x)$ erfährt, wenn f von der Stelle x an linear fortgesetzt würde.

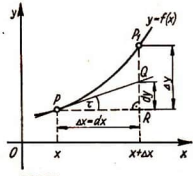


Bild 92

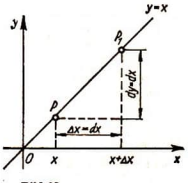


Bild 93

BEISPIELE

1. Das Differential der Funktion $y = f(x) = \sin x$ ist

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}\sin x = (\sin x)' \cdot \Delta x = \cos x \cdot \Delta x.$$

2. Das Differential von $y = f(x) = x$ ist

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$$
$$\mathrm{d}x = \Delta x.$$

Das letzte Ergebnis ist sehr wichtig:
Das Differential $\mathrm{d}f(x)$ und die Abszissenänderung Δx sind bei der Funktion $y = x$ dem Werte nach gleich (vgl. Bild 93). Man kann daher in (I) den Faktor Δx durch das Differential $\mathrm{d}x$ der Funktion $y = x$ ersetzen.

Mit $\Delta x = \mathrm{d}x$ erscheint Gleichung (I) in der Form

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x} \tag{43}$$

Während stets $\Delta x = \mathrm{d}x$ gilt, ist im allgemeinen $\Delta y \neq \mathrm{d}y$; denn Δy ist die Änderung des Funktionswertes und $\mathrm{d}y$ die Änderung der Tangentenordinate. Nur bei der Geraden fallen Kurve und Tangente zusammen, so daß hier $\Delta y = \mathrm{d}y$ gilt.
Das Differential $\mathrm{d}y$ und die Änderung des Funktionswertes Δy sind beide abhängig von der Stelle x, an der sie gebildet werden, und von der Argumentänderung Δx. Man überlege sich das am folgenden Beispiel.

BEISPIEL

3. Für die Funktion $y = f(x) = x^2$ sind Δy und $\mathrm{d}y$ an der Stelle $x = 1$ zu berechnen, wenn $\Delta x = \mathrm{d}x$ die Werte 10; 1; 0,1; ...; 0,0001 annimmt.
Für Δy erhält man

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Für $\mathrm{d}y$ ergibt sich

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Ist $x = 1$ und $\Delta x = 10$, so wird $\Delta y = 120$, $\mathrm{d}y = 20$.
Die weiteren Werte für Δy und $\mathrm{d}y$ sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

$\Delta x = \mathrm{d}x$	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$
10	120	20
1	3	2
0,1	0,21	0,2
0,01	0,0201	0,02
0,001	0,002001	0,002
0,0001	0,00020001	0,0002

Der Zusammenhang zwischen Δy und Δx ist — abgesehen von linearen Funktionen — mehr oder weniger kompliziert:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dagegen besteht zwischen Differential $\mathrm{d}y$ und Δx die einfache *lineare Beziehung*

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \Delta x.$$

BEISPIEL

4. Für $y = x^3$ ist

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3, \qquad \Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$\mathrm{d}y = (x^3)'\Delta x, \qquad \mathrm{d}y = 3x^2\Delta x.$$

An der Stelle $x = 2$ gilt z. B.

$$\Delta y = 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\mathrm{d}y = 12\Delta x$$

Im Beispiel 4 sind bei $\mathrm{d}y$ gegenüber Δy die Glieder mit Potenzen von Δx vernachlässigt. Je kleiner Δx ist, desto weniger fällt diese Vernachlässigung ins Gewicht. So ist für $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = 1{,}261 \approx \mathrm{d}y = 1{,}2.$$

Für hinreichend kleines Δx gilt also hier $\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

Das Ersetzen von Δy durch den Näherungswert $\mathrm{d}y$ bedeutet ein Vernachlässigen von Gliedern, die für kleines Δx bei der Berechnung von Δy nur geringen Einfluß auf das Ergebnis haben. Der Gewinn ist eine einfacher zu handhabende lineare Beziehung. Durch die Unterdrückung von vernachlässigbaren Größen wird die Aufgabe, Δy zu berechnen, *linearisiert*. Das Vorgehen, komplizierte Zusammenhänge zu linearisieren, wird in der Praxis vielfach angewendet.

Es zeigt sich, daß die Näherung $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ bei kleinem $\Delta x = \mathrm{d}x$ für differenzierbare Funktionen allgemein gilt. Bildet man nämlich $\dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y}$, so ergibt eine kleine Umformung $[f'(x) \neq 0]$

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f'(x)\,\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{f'(x)}.$$

Es wird damit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x)} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = 1.$$

Das bedeutet, daß für kleines Δx gilt:

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} \approx 1 \quad \text{oder} \quad \Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

wie behauptet wurde. Für genügend kleines Δx kann also Δy durch $\mathrm{d}y$ ersetzt werden. Das wird auch am Beispiel der Tabelle auf S. 148 sichtbar. Eine Anwendung wird die Beziehung $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ in 21.2. finden.
Dividiert man Gleichung (43) durch $\mathrm{d}x$, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)} \tag{44}$$

Der Quotient der Differentiale $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ wird gelesen „$\mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}x$" und heißt Differentialquotient. Da der Differentialquotient gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ des Differenzenquotienten ist, pflegt man die Bezeichnungen „Ableitung" und „Differentialquotient" nebeneinander zu gebrauchen.

Wegen $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist für (44) auch die Schreibweise

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \tag{44a}$$

möglich. Das ist die Definitionsgleichung von LEIBNIZ für den Differentialquotienten. Formel (44a) kann zu der *falschen* Auffassung führen, für $\Delta x \to 0$ ergäben sich die Differentiale dy und dx und sie wären „unendlich kleine" Größen. Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ergibt aber den *Quotienten* der Differentiale, und diese selbst können durchaus große Werte annehmen, wie der Anfang der Tabelle auf S. 148 zeigt.

Aus der differentiellen Schreibweise für die Ableitung geht klar hervor, welches die Variable ist, nach der differenziert werden soll. So heißt für $u = f(s)$ der Differentialquotient $\dfrac{du}{ds}$, und für $u = as^4 - bs^2 + c$ wird

$$\frac{du}{ds} = \frac{d}{ds}(as^4 - bs^2 + c) = 4as^3 - 2bs.$$

Nach 1.3.6. gibt der Differenzenquotient $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ die mittlere Geschwindigkeit an. Je kleiner Δt gewählt wird, desto besser beschreibt dieser Quotient die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Für $\Delta t \to 0$ erhält man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Nach (44a) wird

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit. Für den freien Fall gilt

$$s = f(t) = \frac{g}{2} t^2.$$

Für die Geschwindigkeit erhält man daraus die bekannte Formel $v = gt$:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \frac{g}{2} \cdot t = gt.$$

Aus der mittleren Beschleunigung $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ wird für $\Delta t \to 0$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion nach der Zeit. Beim freien Fall ist

$$v = gt.$$

Es wird

$$a = \frac{dv}{dt} = g.$$

AUFGABEN

134. Wie lauten die Ableitungen der nachstehenden Funktionen?

a) $y = \sin^2 x$ b) $y = \cot^2 x$ c) $y = 3 \sin t + t \cos t$

d) $y = 2 \sin x (x - \cot x)$ e) $y = (2 \tan x - 3 \sin x)(\cot x - 2 \cos x)$

f) $y = (x - \tan x) \sin x \cos x$ g) $y = \dfrac{1}{1 + \tan x}$

h) $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x}$ i) $y = \dfrac{x + \cot x}{\sin^2 x}$ k) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

l) $y = -\dfrac{\cos x}{2x \tan x}$ m) $y = \dfrac{(2x^2 - 1) \sin x}{1 + \cos x}$

135. Man differenziere und vereinfache das Ergebnis soweit wie möglich.

a) $y = \cos 2x + \sin^2 x$ b) $y = 3 \sin 2x + 2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x$

c) $y = \cos x (\sin x + \cos x)$ d) $y = (4 \sin x - 8 \sin^2 x) \cos x$

e) $y = \dfrac{1}{\cos x} + \tan x$ f) $y = \dfrac{-1 + \sin x}{\cos x}$

g) $y = x - \sin x \cos x$ h) $y = x + \sin x \cos x$

136. Unter welchem Winkel schneiden einander die Kurven mit den Gleichungen

a) $y = \sin x$ und $y = \cos x$ b) $y = \tan x$ und $y = \cot x$ c) $y = \sin 2x$ und $y = \sin^2 x$?

137. Wie heißt das Differential $\mathrm{d}y$ der Funktion

a) $y = 4x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \tan x$

c) $y = \dfrac{1}{x^2}$ d) $y = x - 5$?

138. Für die folgenden Funktionen sind an der Stelle x_1 die Differenz $\Delta y - \mathrm{d}y$ sowie die Quotienten $\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$ und $\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}$ für die Werte $\Delta x = 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}1$ zu bilden. Die Ergebnisse sind — soweit möglich — zeichnerisch zu veranschaulichen.

a) $y = 0{,}3x^2$, $x_1 = 0{,}5$ b) $y = 0{,}1x^3 - 2$, $x_1 = -2$

3.6. Die Ableitung der mittelbaren Funktion. Die Ableitung einer Funktion in impliziter Darstellung

Neben den in 3.3. erhaltenen Vorschriften können eine Reihe von elementaren Funktionen sowie Summen, Produkte und Differenzen dieser Funktionen differenziert werden. Die Differentiation von Funktionen wie

$$y = f(x) = \sin(2x + 3) \quad \text{oder} \quad y = f(x) = 3\sqrt{\cos(1 - x^2)}$$

ist aber nach den bisher bekannten Regeln nicht möglich. Bevor für solche Funktionen eine Ableitungsvorschrift hergeleitet wird, sollen die angeführten Beispiele näher betrachtet werden.

Ist im ersten Beispiel ein Funktionswert zu berechnen, so wird man zunächst in dem Term $2x + 3$ die Variable x mit dem ins Auge gefaßten Argumentwert belegen

und von dem sich ergebenden Wert $u = 2x + 3$ den Sinuswert aufsuchen, also $\sin u$ bilden.

$$y = f(x) = \sin u \quad \text{mit} \quad u = 2x + 3$$

ist dann der x zugeordnete Funktionswert.
Diesem Vorgehen entspricht, daß man $f\colon\ y = f(x) = \sin(2x + 3)$ als mittelbare Funktion (vgl. 1.3.3.) auffaßt, bei der zunächst dem Wert x der Funktionswert $u = \varphi(x) = 2x + 3$ und anschließend dem Wert u der Funktionswert $y = \psi(u) = \sin u$ zugeordnet wird. Kurz:

$$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{\psi} y.$$

Man bezeichnet φ als *innere* und ψ als *äußere Funktion* der mittelbaren Funktion und schreibt

$$y = f(x) = \psi[\varphi(x)].$$

Die Funktionen $\varphi\colon\ u = \varphi(x) = 2x + 3$ und $\psi\colon\ y = \psi(u) = \sin u$ sind Funktionen, für die Ableitungsregeln bereitstehen. Man wird daher versuchen, die Ableitung von f über die Ableitungen von φ und ψ zu gewinnen.
Ist eine mittelbare Funktion $f\colon\ f(x) = \psi[\varphi(x)]$ mit $u = \varphi(x)$, $y = \psi(u)$ gegeben, so lassen sich die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\psi(u + \Delta u) - \psi(u)}{\Delta u} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

bilden. Das Produkt dieser beiden Differenzenquotienten liefert $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, den Differenzenquotienten der mittelbaren Funktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Geht $\Delta x \to 0$, so strebt — falls $\varphi\colon\ u = \varphi(x)$ stetig ist — auch $\Delta u \to 0$. Es wird also nach dem Grenzwertsatz über Produkte

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} \tag{45}$$

Wegen $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \psi'(u)$ und $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$ ergibt sich als andere Schreibweise

$$\boxed{f'(x) = \psi'(u) \cdot \varphi'(x)} \tag{45a}$$

Diese Regel heißt **Kettenregel.**

Die Ableitung einer mittelbaren Funktion $y = f(x) = \varphi[\varphi(x)]$ ist gleich dem Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer Funktion.

In Formel (45) zeigen sich die Vorzüge der differentiellen Schreibweise, denn formal läßt sich die rechte Seite durch Erweitern der linken mit $\mathrm{d}u$ erhalten. Das wäre aber kein Beweis dieser Formel, denn bei den Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ist u einmal unabhängige, dann abhängige Variable.

Die Kettenregel läßt sich auf den Fall von zwei und mehr inneren Funktionen erweitern. Für

$$y = f(x) = f_1\{f_2[f_3(x)]\}$$

mit

$$u = f_3(x), \quad v = f_2(u), \quad y = f_1(v)$$

gilt z. B.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

oder

$$f'(x) = f_1'(v) \cdot f_2'(u) \cdot f_3'(x).$$

BEISPIELE

1. $y = \sin(2x + 3)$

   Lösung: Innere Funktion: $u = \varphi(x) = 2x + 3$.

   Äußere Funktion: $y = \varphi(u) = \sin u$

   Mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u) = \cos u$ und $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x) = 2$

   wird $y' = 2 \cdot \cos u = \underline{\underline{2\cos(2x + 3)}}$.

2. $y = 3\sqrt{\cos(1 - x^2)}$

   Lösung: $u = f_3(x) = 1 - x^2 \quad v = f_2(u) = \cos u \quad y = f_1(v) = 3\sqrt{v}$

   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\sin u \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} = \frac{3}{2\sqrt{v}}$$

   $$y' = -2x \cdot (-\sin u) \cdot \frac{3}{2\sqrt{v}}$$

   $$y' = \underline{\underline{\frac{3x \sin(1 - x^2)}{\sqrt{\cos(1 - x^2)}}}}$$

Häufig tritt der Fall ein, daß eine Funktion in einer impliziten Darstellung $F(x; y) = 0$ vorliegt, für die sich u. U. keine explizite Form angeben läßt. Auch solche Funktionen lassen sich zum großen Teil mit den bisher bereitgestellten Mitteln differenzieren.

Die Ableitung der Funktion f: $y = f(x)$ ist so definiert, daß für den Term $f(x)$ der Term

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gebildet und davon der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ bestimmt wird. Das Ergebnis ist ein Term $f'(x)$.

Auf Grund der Grenzwertsätze war es möglich, formale Vorschriften — die Ableitungsregeln — für die Bildung von $f'(x)$ zu gewinnen, falls $f(x)$ Linearkombination, Produkt, Quotient oder mittelbarer Term anderer Terme ist. Die Grenzwertsätze erlauben es, einen Term $F(x;y)$ in der gleichen Weise wie einen Term $f(x)$ zu behandeln. Zu beachten ist nur, daß jeder die Variable y enthaltende Term $F(x;y)$ wegen $y = f(x)$ ein mittelbarer Term $F[x;f(x)]$ der Variablen x ist, auf den folglich die Kettenregel anzuwenden ist.
Als Beispiel sei die Funktion

$$F(x;y) = x^2 - y^3 = 0 \tag{I}$$

genommen. Die linke Seite läßt sich als Summe der Terme

$$\varphi(x) = x^2 \quad \text{und} \quad \psi(y) = y^3$$

auffassen, wobei $\psi(y) = y^3$ wegen $y = f(x)$ ein mittelbarer Term von x ist: $\chi(x) = \psi[f(x)]$. Auf die Linearkombination $F(x;y) = \varphi(x) - \psi[f(x)]$ lassen sich die Differentiationsregeln in bekannter Weise anwenden:

$$\varphi'(x) = 2x, \quad \chi'(x) = \psi'(y) \cdot f'(x) = 3y^2 \cdot y'.$$

Die Differentiation von (I) nach x liefert somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x;y) = 2x - 3y^2 y' = 0$$

und schließlich

$$y' = \frac{2x}{3y^2}.$$

Da hier $F(x;y) = 0$ nach y auflösbar ist, folgt mit $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Häufig tritt der Fall ein, daß $F(x;y) = 0$ keine eindeutige Abbildung des Variablenbereiches X in den Variablenbereich Y liefert. Auch dann kann so, wie am Beispiel demonstriert, verfahren werden.
Zum Beispiel folgt aus

$$F(x;y) = x^3 - y^2 = 0 \quad (x \geqq 0)$$

bei Differentiation nach x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x;y) = 3x^2 - 2yy' = 0$$

$$y' = \frac{3x^2}{2y}. \tag{II}$$

Für $y \geqq 0$ stellt $F(x; y) = x^3 - y^2 = 0$ die Funktion $y = \sqrt{x^3}$ dar (Bild 57, S. 47, ausgezogene Kurve), deren Ableitung nach (II)

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

lautet.
$x^3 - y^2 = 0$ mit $y \leqq 0$ ist die implizite Darstellung der Funktion $y = -\sqrt{x^3}$, für deren Ableitung aus (II)

$$y' = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

folgt.
Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$ die Steigung der Tangente für jeden Punkt $(x; y)$ der Kurve $x^3 - y^2 = 0$ angibt.

BEISPIELE

3. $\cos x + x \sin y = 0$

   Lösung: $-\sin x + \sin y + xy' \cos y = 0$

$$y' = \frac{\sin x - \sin y}{x \cos y}.$$

4. Es soll die Gültigkeit der in 3.2. für positives ganzzahliges n bewiesenen Ableitungsregel

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

für rationales $n = \dfrac{p}{q}$ nachgewiesen werden. Der Nachweis ist nur für $x > 0$ zu führen, da die Potenz $x^{\frac{p}{q}}$ nur für $x > 0$ erklärt ist.

Lösung: Nach Umformung von $y = x^{\frac{p}{q}}$ $(x > 0)$ in

$$y^q = x^p$$

wird $\quad qy^{q-1} \cdot y' = px^{p-1}$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

5. Es soll die Gleichung der Tangente aufgestellt werden, die die Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ in $P_0(x_0; y_0)$ berührt.

   Lösung: Durch Differentiation der Ellipsengleichung gewinnt man

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Daraus ergibt sich für die Steigung in $P_0(x_0; y_0)$

$$y_0' = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Die Tangente in P_0 hat also die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Nach Umformung folgt

$$\frac{x x_0 - x_0^2}{a^2} + \frac{y y_0 - y_0^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

3.7. Die Ableitung der logarithmischen und der Exponentialfunktion

Zur Herleitung der Ableitungsvorschrift für die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ wird wieder vom Differenzenquotienten ausgegangen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}.$$

Wegen $\log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$ wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Nun ist

$$\frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Also folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Setzt man vorübergehend $\frac{x}{\Delta x} = n$, so erhält der Numerus des Logarithmus die Gestalt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Für $\Delta x \to 0$ geht $\frac{x}{\Delta x} = n \to \infty$, also ist

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Damit wird, wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$$

und

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\cdot\log_a e.$$

Es gilt also

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\cdot\log_a e} \tag{46}$$

Die Basis des natürlichen Logarithmus ist e. Für $y = \ln x$ folgt daher nach (46)

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\cdot\log_e e$$

und wegen $\log_e e = 1$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \tag{47}$$

Die Einfachheit der letzten Regel ist ein Grund für die Bevorzugung des natürlichen Logarithmus in der höheren Mathematik.

BEISPIELE

1. Bei $y = \ln x^3$ führt, wie in vielen Fällen, die Anwendung der Logarithmengesetze zur Vereinfachung der Rechnung:

$$y = 3\ln x$$

$$y' = \frac{3}{x}.$$

Anmerkung: Wie stets bei der Umformung einer Gleichung ist auf Äquivalenz der Umformung zu achten! So sind die Gleichungen $y = \ln x^3$ und $y = 2\ln x$ *nicht* äquivalent, da der Variablenbereich der ersten Gleichung $X_1 = R \setminus \{0\}$ der der zweiten Gleichung $X_2 = (0, +\infty)$ ist. Nach Differentiation ergibt sich in beiden Fällen die Gleichung $y' = 2/x$. Die Ableitungsfunktion zu $y = \ln x^3$ ist

$$f' = \left\{(x; y') \mid y' = \frac{2}{x},\ x \in R \setminus \{0\}\right\}.$$

Für $y = 2 \ln x$ lautet sie

$$f' = \left\{(x; y') \mid y' = \frac{2}{x},\ x \in (0, +\infty)\right\}.$$

2. $y = \ln \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$. Für $|x| < 1$ ist das äquivalent mit $y = \ln(1 - x^2) - \ln(1 + x^2)$.
Es folgt

$$y' = -\frac{2x}{1 - x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = \underline{\underline{-\frac{4x}{1 - x^4}}} \qquad (|x| < 1).$$

3. $y = \ln f(x)$.

$$y' = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \underline{\underline{\frac{f'(x)}{f(x)}}} \qquad (f(x) > 0).$$

Beispiel 2 kann auch mit Hilfe des Ergebnisses von Beispiel 3 berechnet werden.

Die Kenntnis der Ableitungsvorschrift für die Logarithmusfunktion gestattet eine einfache Herleitung des Differentialquotienten der Exponentialfunktion. Man logarithmiert zunächst die Gleichung $y = a^x$ $(a > 0)$, wobei wegen der Einfachheit von Formel (47) e als Basis vorzuziehen ist:

$$\ln y = x \ln a.$$

Unter Beachtung von $y = f(x)$ kann nun nach bekannten Regeln leicht differenziert werden:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)} \tag{48}$$

Im besonderen wird für $a = \mathrm{e}$

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x} \tag{49}$$

Man erhält das sehr bemerkenswerte Ergebnis, daß die Ableitung von $y = \mathrm{e}^x$ gleich der Funktion selbst ist. Diese Eigenschaft sowie die Einfachheit der Regel $\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ verschaffen der Zahl e ihre besondere Stellung in Theorie und Praxis.

Zur Herleitung von (48) und (49) wurde die Funktionsgleichung zunächst logarithmiert und dann differenziert. Dieses Verfahren wird als **Differentiation nach Logarithmieren**, mitunter auch — nicht ganz korrekt — als *logarithmische Differentiation* bezeichnet. Es läßt sich allgemein auf Funktionen der Form $y = u^v$ mit $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ anwenden, die der Differentiation zunächst nicht ohne weiteres zugänglich scheinen. Man logarithmiert $y = u^v$ zur Basis e:

$$\ln y = v \ln u.$$

Die Differentiation bietet nun keine Schwierigkeiten:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = y \left[v' \ln u + \frac{u'v}{u} \right]$$

$$y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{u'v}{u} \right].$$

Zur Beseitigung des Nenners kann noch umgeformt werden:

$$y' = u^{v-1}(uv' \ln u + u'v).$$

BEISPIELE

4. $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \underline{\underline{x^x(1 + \ln x)}}$$

5. $y = x^{\ln \sin x}$, $\ln y = (\ln \sin x) \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \ln x + \frac{1}{x} \ln \sin x$$

$$y' = \underline{\underline{x^{\ln \sin x} \left(\cot x \cdot \ln x + \frac{\ln \sin x}{x} \right)}}$$

6. Die Ableitungsregel $\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$ wurde in 3.2. nur für positives ganzzahliges n und in 3.6., Beispiel 4, für $n = \frac{p}{q}$ bewiesen. Um zu zeigen, daß diese Regel bei $x > 0$ für jedes reelle n gilt, logarithmiert man zunächst die Gleichung $y = x^n$ $(x > 0)$.

Aus

$$\ln y = n \ln x$$

folgt

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x}$$

$$y' = n \frac{y}{x} = n \frac{x^n}{x}$$

$$y' = \underline{\underline{nx^{n-1}}}.$$

Bei der Durchführung der Rechnung ist n keinerlei Bedingungen unterworfen. Daher gilt $\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$ für jedes reelle n und $x > 0$.

3.8. Höhere Ableitungen

Ist die Ableitungsfunktion f': $y' = f'(x)$ einer Funktion f differenzierbar, so kann man die Ableitungsfunktion wiederum differenzieren. Die zweite Ableitung wird $y'' = f''(x)$ (lies: y zwei Strich gleich f zwei Strich von x) geschrieben. Mit $y''' = f'''(x)$ wird die dritte Ableitung bezeichnet. Von der vierten Ableitung an schreibt man $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$, $y^{(5)} = f^{(5)}(x)$, ..., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. Unter Ableitung schlechthin versteht man stets die erste Ableitung einer Funktion. Die zweite und alle weiteren Ableitungen werden *höhere Ableitungen* genannt.
In differentieller Schreibweise wird die erste Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ geschrieben. Die zweite Ableitung wäre

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Dafür schreibt man kürzer

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

gelesen: de zwei y durch de x Quadrat. Dementsprechend werden die höheren Ableitungen mit $\frac{d^3y}{dx^3}$ (de drei y durch de x hoch drei), $\frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ bezeichnet.

BEISPIELE

1. Es ist die dritte Ableitung von $y = e^{ax}$ zu bilden.

Aus

$$y = e^{ax}$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax},$$

weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{ax},$$

schließlich

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^3e^{ax}.$$

2. Die erste Ableitung der Potenzfunktion n-ten Grades

$$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ist

$$\frac{dy}{dx} = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.$$

Die höheren Ableitungen werden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2\cdot a_3 x + 2\cdot 1\cdot a_2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \cdots + 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3.$$

Der Grad der ganzrationalen Funktion erniedrigt sich bei jeder Differentiation um 1. Schließlich wird

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot a_n = a_n n!$$

Die n-te Ableitung ist konstant. Die $(n+1)$-te Ableitung und alle weiteren sind daher identisch gleich Null.

Für eine ganzrationale Funktion n-ten Grades $y = g_n(x)$ lassen sich neben der ersten auch alle höheren Ableitungen an einer Stelle x_0 mittels des Hornerschen Schemas ermitteln.

Wie in Algebra und Geometrie 18.1. gezeigt wurde, läßt sich ein Polynom $g_n(x)$ an einer Stelle x_0 wie folgt entwickeln:

$$g_n(x) = r_n(x-x_0)^n + \cdots + r_3(x-x_0)^3 + r_2(x-x_0)^2 + r_1(x-x_0) + r_0. \quad \text{(I)}$$

Hierbei sind $r_0, r_1, \ldots, r_n$ die Reste, die im vollständigen Hornerschen Schema bei der fortlaufenden Division durch $(x - x_0)$ auftreten. Es soll zunächst eine Beziehung zwischen den Resten r_k und den Ableitungen $g_n^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ hergestellt werden. Unter $g_n^{(0)}(x_0)$ ist sinngemäß $g_n(x_0)$ zu verstehen.

Wird (I) n-mal nach x differenziert, so folgt

$$\begin{aligned}
g_n'(x) &= n r_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots + 3r_3(x-x_0)^2 + 2r_2(x-x_0) + r_1,\\
g_n''(x) &= n(n-1)r_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots + 3\cdot 2\cdot r_3(x-x_0) + 2\cdot 1\cdot r_2,\\
g_n'''(x) &= n(n-1)(n-2)r_n(x-x_0)^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2\cdot 1\cdot r_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
g^{(n)}(x) &= n!\,r_n.
\end{aligned}$$

Für $x = x_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
g_n(x_0) &= r_0 & r_0 &= g_n(x_0)\\
g_n'(x_0) &= 1!\,r_1 & r_1 &= \frac{1}{1!}g_n'(x_0)\\
g_n''(x_0) &= 2!\,r_2 & r_2 &= \frac{1}{2!}g_n''(x_0)\\
g_n'''(x_0) &= 3!\,r_3 & r_3 &= \frac{1}{3!}g_n'''(x_0)\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
g_n^{(n)}(x_0) &= n!\,r_n & r_n &= \frac{1}{n!}g_n^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

Mit diesen Werten für $r_0, r_1, \ldots, r_n$ geht (I) über in die **Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen**:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = g_n(x_0) + \frac{g_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{g_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{50}$$

Man sagt: $g_n(x)$ ist *an der Stelle* x_0 *nach Taylor entwickelt* oder: $g_n(x)$ ist *nach Potenzen von* $x - x_0$ *entwickelt*.
Die für die Koeffizienten $r_0, r_1, \ldots, r_n$ gefundenen Beziehungen erlauben es, aus dem vollständigen HORNERschen Schema die Ableitungen $g_n^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ zu entnehmen.

BEISPIEL

Für die ganzrationale Funktion

$$y = g_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 12$$

sind die erste bis vierte Ableitung an der Stelle $x_0 = 2$ zu berechnen. Mit Hilfe der TAYLORschen Formel ist $g_n(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ zu entwickeln.

Lösung:

Σ:

-7		3	-2	0	4	-12
		↓	6	8	16	40
35	2	3	4	8	20	$28 = g_4(2)$
		↓	6	20	56	
41	2	3	10	28	$76 = g_4'(2)$	
		↓	6	32		
19	2	3	16	$60 = \frac{g_4''(2)}{2!}$		
		↓	6			
3	2	3	$22 = \frac{g_4'''(2)}{3!}$			
		↓				
		$3 = \frac{g_4^{(4)}(2)}{4!}$				

Kontrolle:

$-7 + 1 \cdot 35 = 28$

$35 + 1 \cdot 41 = 76$

$41 + 1 \cdot 19 = 60$

$19 + 1 \cdot 3 = 22$

Es ergibt sich:

$$g_4'(2) = 76, \quad g_4''(2) = 120, \quad g_4'''(2) = 132, \quad g_4^{(4)}(2) = 72.$$

Entwicklung an der Stelle $x_0 = 2$:

$$g_4(x) = 28 + 76(x - 2) + 60(x - 2)^2 + 22(x - 2)^3 + 3(x - 2)^4.$$

AUFGABEN

139. Für $y = g_n(x)$ sind mit Hilfe des HORNERschen Schemas die Ableitungen $g_n^{(k)}(x_0)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ zu berechnen. Die Funktion ist an der Stelle x_0 nach TAYLOR zu entwickeln.

a) $y = -2x^3 + 5x + 10$, $x_0 = 3$

b) $y = x^4 + 2{,}40x^3 - 3{,}46x - 4{,}08$, $x_0 = -1{,}20$

c) $y = -0{,}80x^4 + 2{,}28x^2 + 1{,}04x + 3{,}16$, $x_0 = 1{,}18$

d) $y = 2{,}40x^5 - 4{,}16x^3 + 1{,}16x - 2{,}78$, $x_0 = -2{,}48$

140. Für die in den Aufgaben 139 a), b), c) gegebenen Funktionen sind unter Verwendung der dort vorgenommenen TAYLOR-Entwicklung die folgenden Funktionswerte auf zwei Dezimalen nach dem Komma zu berechnen:

Aufgabe a): $g_3(2{,}96)$,

Aufgabe b): $g_4(-1{,}40)$,

Aufgabe c): $g_4(1{,}16)$.

141. Die nachstehenden durch $y = f(x)$ gegebenen Funktionen sind zu differenzieren.

a) $y = (2x^2 - 1)^{10}$

b) $y = (x^3 - 2x)\,(1 - x^3)^5$

c) $y = \left(6x - 2\sqrt[3]{x^2}\right)^8$

d) $y = \sqrt{1 - x}$

e) $x = \sin 2t$

f) $y = \cot(1 - 2x)$

g) $y = \left(3 - 2\sqrt{2x}\right)^5$

h) $y = \left(1 - \sqrt{1 + x^2}\right)^6$

i) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

k) $y = \cos\dfrac{1}{1 - x}$

l) $y = \sqrt{\tan x}$

m) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

n) $y = \dfrac{2x}{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$

o) $y = \dfrac{-\sqrt{1 - x - x^2}}{2x - 3}$

p) $y = \sin\sqrt{1 - 2x}$

q) $y = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x}}{1 - x}$

r) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

s) $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x}{x - 1}}$

142. Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r. Der Ort seiner Projektion auf der x- bzw. auf der y-Achse ist durch die Gleichung $x = r\cos\omega t$ bzw. $y = r\sin\omega t$ gegeben (Bild 94).

a) Für die Projektionen des Punktes auf die Achsen sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnet werden.

b) Zu welchen Zeiten sind Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung der Projektionen gleich Null?

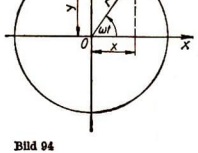


Bild 94

143. Man differenziere implizit

a) $2x^3 + 2xy^2 - 2y = 0$

b) $y^2 = x^2\left(\dfrac{a + x}{a - x}\right)$ (Strophoide)

c) $x^3 + y^3 = 3axy$ (Cartesisches Blatt)

d) $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$ (Kardioide)

e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Astroide)

f) $y - x\sin y = 0$

g) $y^4 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ h) $y^3 - \frac{x+y}{x-y} = 0$ i) $xy(x+y) + x^2 = 2y^2$

k) $y^3(x-1) = x^4 - 2xy$ l) $x^4 - y^4 = 4x^2y$ m) $x^5 + y^5 = xy^2$

n) $x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$

144. Die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist a) in der impliziten, b) in der expliziten Form zu differenzieren. Die Ergebnisse sind zu vergleichen.

145. Man ermittle die Steigung der Kurve mit der Gleichung

a) $x^2 + y^2 = r^2$ b) $y^2 = 2px$ c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

in $P_0(x_0; y_0)$ und stelle die Gleichung der Tangente auf, die die Kurve in P_0 berührt.

146. Man leite die Quotientenregel her, indem man die Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ in der Form $f(x) \cdot v(x) = u(x)$ differenziert.

147. Für die Kurve mit der Gleichung $(x-6)^2 + (y-8)^2 - 100 = 0$ ist die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -2$ zu ermitteln.

148. Man differenziere

a) $y = x \ln x$ b) $y = \frac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln \sqrt{1-x}$

d) $y = \ln \tan x$ e) $y = \log_2 3x$ f) $u = f(t) = \frac{\ln \sin t}{\ln \cos t}$

g) $y = \sqrt{|\ln \sin x|}$ h) $y = \lg x^n$ i) $y = f(t) = \ln \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$

k) $y = \log_a x^3 \cdot \log_b \frac{1}{x}$ l) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ m) $y = \ln(x \cos x)$

n) $y = \ln \ln x$ o) $y = \ln \ln \tan 2x$ p) $y = f(u) = (\ln u)^4$

q) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ r) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ s) $y = \ln \sin x + \frac{1}{2}\cot^2 x$

149. Man differenziere

a) $y = 2^x$ b) $y = x^2 e^x$ c) $y = \frac{\sin x}{e^x}$

d) $y = a^x \cdot x^a$ e) $u = f(t) = e^{\sqrt{t}}$ f) $y = e^{\cos x}$

g) $y = e^{\ln x}$ h) $v = f(u) = e^u \cos u$ i) $y = f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

k) $y = f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ l) $y = \sqrt{1 - e^{2x}}$ m) $y = f(t) = e^{\sin \omega t}$

n) $y = \sqrt{1 + a^x}$ $(a > 0)$ o) $y = 2^x \cdot e^x$ p) $y = \ln e^{2x-1}$

q) $y = \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$ r) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ s) $y = \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{1-x}}}$

150. Man wende die Differentiation nach Logarithmieren an

a) $y = x^{\sin x}$ b) $y = \sin x \cdot x^{\cos x}$ c) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

d) $y = \sqrt[x]{x}$ e) $y^x = 2e^x$ f) $y = x^{1-\cos x}$

g) $y = x^{x \cos x}$ h) $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ i) $e^x = x^y$

151. Es sind die erste und die zweite Ableitung zu bilden.

a) $y = \sin x \cos x$ b) $y = \cos^2 x$ c) $y = \dfrac{x}{1-x}$

d) $y = x^4 \ln x$ e) $y = a^{2x}$ f) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$

g) $y = x^2 \sin 2x$ h) $y = e^x \sin x$ i) $y = e^{-x} + e^{-2x}$

k) $y = \dfrac{1+x}{1-2x-x^2}$ l) $y = \dfrac{ax^2}{ax+b}$ m) $y = \sqrt[3]{1-x}$

n) $y = \sqrt{1-x^2}$ o) $y = e^{\tan x}$ p) $y = xe^{\sqrt{x}}$

152. Man bilde die ersten vier Ableitungen von

a) $y = \sin x$ b) $y = \cos x$ c) $y = \ln x$

d) $y = x^n$ e) $y = u(x) \cdot v(x)$

153. Es ist die n-te Ableitung von

a) $y = x^n$ b) $y = \ln x$ c) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

d) $y = \dfrac{x}{1-x}$ e) $y = e^{ax}$ f) $y = 2^x$

zu bilden.

154. An die Kurve mit der Gleichung $x^3 - ay^2 = 0$, $a > 0$ (NEILsche Parabel) lege man in einem beliebigen Punkte $P(x_0; y_0)$ die Tangente und bestimme deren Schnittpunkt mit der Kurve.

155. Für welche ganzrationale Funktion 3. Grades ist

a) $f(-1) = 0$, $f'(1) = 7$, $f'(2) = 34$, $f''(-1) = -18$;

b) $f(1) = -4$, $f'(-1) = 10$, $f''(1) = 8$, $f''(-1) = -16$;

c) $f(2) = -28$, $f'(-2) = -53$, $f''(0) = 2$, $f''(1) = -22$?

Ansatz: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3.9. Graphische Differentiation

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ einer Funktion $y = f(x)$ immer rechnerisch gebildet. Das Bild dieser Ableitungsfunktion nennt man die abgeleitete Kurve. Das gleiche gilt für die höheren Ableitungen. Die Kurve der gegebenen Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ heißt die Stammkurve. Es kommt in der Technik nun häufig vor, daß eine Funktion nicht analytisch, sondern nur durch ihre Kurve gegeben ist. Will man zu dieser die Ableitung bilden, so kann man graphische Verfahren anwenden, um die abgeleitete Kurve zu ermitteln. Nachfolgend soll nun gezeigt werden, wie diese auf graphischem Wege zu einer gegebenen Stammkurve gefunden wird. In Bild 95 ist P ein Punkt der gegebenen Stammkurve und P_1 der ent-

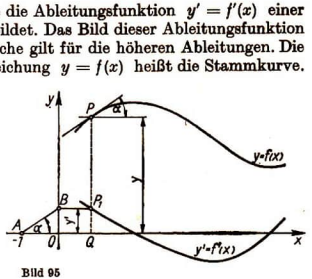


Bild 95

sprechende Punkt der abgeleiteten Kurve (d. h., P und P_1 haben die gleiche Abszisse), den man folgendermaßen erhalten kann: Man zieht in P an die gegebene Kurve so genau wie möglich die Tangente und zu dieser die Parallele durch den Punkt $A\ (-1;\ 0)$. Punkt A wird auch *Pol* und $\overline{OA}$ *Polabstand* genannt. Die Parallele zur Tangente schneidet die y-Achse im Punkt B; die Parallele zur x-Achse durch B und Parallele zur y-Achse durch P schneiden einander im Punkt P_1. Der Abstand QP_1 des Punktes P_1 von der x-Achse ist die gesuchte Ordinate y'. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AOB. Der Winkel OAB ist gleich dem Anstiegswinkel α der Tangente in P, demnach ist

$$\tan\alpha = y' = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}.$$

Wählt man $\overline{OA}$ als Einslänge der y-Achse ($l_y = \overline{OA}$), so wird y' gleich der Maßzahl von $\overline{OB} = \overline{QP_1}$, da nach Konstruktion $\overline{BP_1}$ parallel zur x-Achse läuft. Konstruiert man auf dieselbe Art zu jedem Punkt P der Stammkurve den entsprechenden Punkt P_1, so entsteht schließlich die Kurve mit der Gleichung $y' = f'(x)$. Nun kann man durch Messen der Ordinaten dieser Kurve die Ableitung an jeder beliebigen Stelle bestimmen.

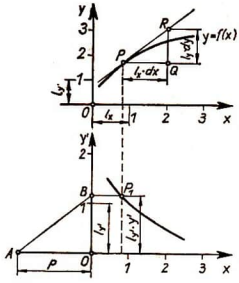


Bild 96

Die hier beschriebene Konstruktion der abgeleiteten Kurve setzt voraus, daß die Einheiten der Koordinaten x, y und y' wie auch der Polabstand $OA = p$ durch gleichlange Strecken dargestellt werden. Für viele Fälle ist es aber notwendig, die Darstellung der Werte x, y und y' durch verschiedene Maßstäbe vorzunehmen. Für diesen Fall ändert sich aber auch der Polabstand $OA = p$ (Bild 96).

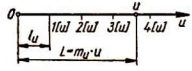


Bild 97

Um nun die Beziehung zwischen den Maßstäben und der Strecke $OA = p$ darzustellen, ist es zweckmäßig, Einslängen zu verwenden (vgl. 1.3.4.). Unter Einslänge wird die Länge der Einheit der dargestellten Größe verstanden. In Bild 96 ist also l_x die Einslänge von x, l_y die von y und l'_y die von y'. Allgemein sei l_u die Einslänge der Größe u. Ist u eine reine Zahl, dann ist die Einslänge l_u identisch mit dem Maßstab m_u, wobei unter dem Maßstab m_u immer der Quotient aus der Länge L, die die Größe u darstellt, und der Größe u verstanden wird (Bild 97), also

$$m_u = \frac{L}{u}.$$

Da aber die Maßeinheit $[u]$ von u durch die Einslänge l_u dargestellt wird, so gilt

$$\boxed{m_u = \frac{L}{u} = \frac{l_u}{[u]}} \qquad (51)$$

In den meisten Fällen, auch bei technischen Anwendungen, werden an die Koordinatenachsen nur die Zahlenwerte angeschrieben, z. B. für die Größe u die Zahlenwerte $\frac{u}{[u]}$. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, nur mit den Einslängen zu rechnen.

Die Beziehung zwischen dem Polabstand $p = \overline{OA}$ und den Einslängen l_x, l_y und $l_{y'}$ ergibt sich aus Bild 96. Nach der am Anfang dieses Abschnittes beschriebenen Konstruktion der abgeleiteten Kurve müssen die Dreiecke AOB und PQR in Bild 96 ähnlich sein. Aus der Ähnlichkeit folgt die Beziehung $\overline{QR}:\overline{PQ} = \overline{OB}:\overline{AO}$ oder, da die Längen der Katheten $\overline{QR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{OB}$ und $\overline{AO}$ dieser Dreiecke $l_x \cdot \mathrm{d}x$, $l_y \cdot \mathrm{d}y$, $l_{y'} \cdot y'$ und p sind:

$$\frac{l_y \cdot \mathrm{d}y}{l_x \cdot \mathrm{d}x} = \frac{l_{y'} \cdot y'}{p}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{p = \frac{l_x \cdot l_{y'}}{l_y}} \qquad (52)$$

Für das Bild 96 wurden gewählt: $l_x = 0{,}75$ cm, $l_y = 0{,}5$ cm und $l_{y'} = 1$ cm. Daraus ergibt sich für den Polabstand

$$p = \frac{0{,}75 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}}{0{,}5 \text{ cm}} = \underline{\underline{1{,}5 \text{ cm}}}.$$

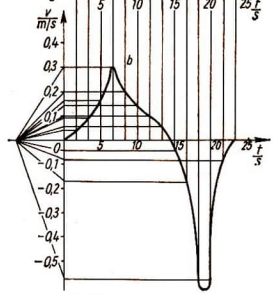


Bild 98

BEISPIEL

Nach dem in Bild 98a dargestellten Weg-Zeit-Verlauf soll der Geschwindigkeitsverlauf graphisch bestimmt werden.

Lösung: In Bild 98b ist die Konstruktion der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve durchgeführt. Für die Einslängen wurden gewählt:

$l_t = 1{,}5$ mm, $l_s = 7{,}5$ mm und $l_v = 50$ mm. Mit diesen Werten ergibt sich für den Polabstand nach Formel (52)

$$p = \frac{l_t \cdot l_v}{l_s} = \frac{1{,}5 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}}{7{,}5 \text{ mm}} = \underline{\underline{10 \text{ mm}}}.$$

AUFGABEN

156. Man bestimme durch graphische Differentiation die Ableitung der Funktion $y = \frac{1}{5}x^3 + 2$ an der Stelle $x = 2$ und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach.

157. Man zeichne die Kurve der 1. Ableitung für die Funktion

$$y = 0{,}1x^3 - 0{,}9x^2 + 2{,}7x - 0{,}7.$$

158. Ein Punkt bewege sich nach dem in Bild 99 dargestellten Weg-Zeit-Gesetz. Nach welcher Zeit t_1 hat der Punkt die Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}5$ m/s, und wie groß ist die Beschleunigung zu dieser Zeit t_1? Die Lösung ist graphisch durchzuführen.

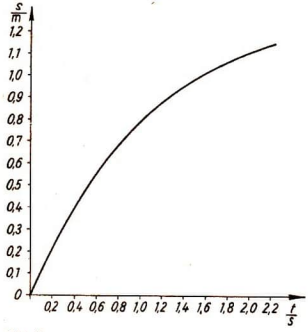


Bild 99

4. Untersuchung von Funktionen

4.1. Der geometrische Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer ersten und zweiten Ableitung

Wie bereits in 3.1. gezeigt wurde, läßt sich der Funktionswert der Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ einer an der Stelle x differenzierbaren Funktion f: $y = f(x)$ als Steigung der Kurve der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P(x; y)$ deuten. Falls $y' = f'(x)$ differenzierbar ist, kann diese Funktion wiederum abgeleitet werden, und es ergibt sich $y'' = f''(x)$. Diese zweite Ableitung hat für die erste Ableitung dieselbe Bedeutung wie die erste Ableitung für die Stammfunktion $y = f(x)$. Es stellt also der Funktionswert der zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$ an der Stelle x die Steigung der Kurve der 1. Ableitung im Punkte $P'(x; y')$ dar. Neben diesen bereits bekannten Beziehungen sollen nachfolgend noch weitere geometrische Zusammenhänge zwischen der Funktion $y = f(x)$ und ihrer ersten und zweiten Ableitung untersucht werden. Zu diesem Zweck sei die Funktion

$$y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$$

mit ihren ersten beiden Ableitungen

$$y' = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

und

$$y'' = \frac{3}{8}x - \frac{3}{2} \quad \text{betrachtet.}$$

In Bild 100 ist das Bild dieser Funktion mit denen der ersten und zweiten Ableitung im Bereich $0 \leqq x \leqq 8$ dargestellt. Aus Bild 100a ist zu ersehen, daß die Funktionskurve bis E_1 steigt, von E_1 bis E_2 fällt und von E_2 an wieder steigt. Betrachtet man in

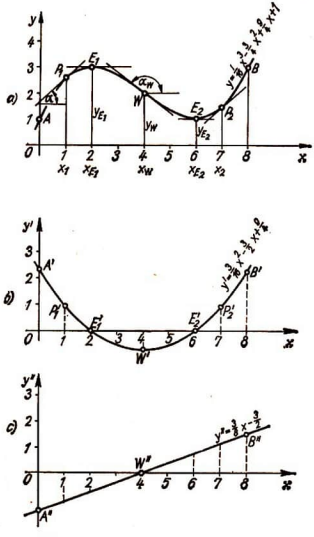


Bild 100

den einzelnen Bereichen die Anstiegswinkel der Tangenten, so ist festzustellen, daß bei steigender Kurve der Richtungswinkel α im Bereich $0° < \alpha < 90°$ und bei fallender Kurve im Bereich $90° < \alpha < 180°$ liegt. Da aber der Tangens für Winkel zwischen 0° und 90° größer als Null und für Winkel zwischen 90° und 180° kleiner als Null und da weiterhin $\tan \alpha = y'$ ist, läßt das Vorzeichen der Ableitung erkennen, ob die Kurve der Funktion an der betreffenden Stelle steigt oder fällt. Zum Beispiel steigt im Punkt P_1 mit $x_1 = 1$ die Kurve (Bild 100a), in diesem Punkt ist α spitz und $f'(1) = 3/16 - 3/2 + 9/4 = 15/16$, y' ist also größer als Null, während im Punkt W

mit $x_W = 4$ die Kurve fällt und in diesem Punkt $f'(4) = -3/4$, also kleiner als Null ist.
Es gelten allgemein folgende Regeln:

Ist eine Kurve in einem Punkt $P(x;y)$ steigend, so ist $f'(x) > 0$ (also positiv); ist sie in $P(x;y)$ fallend, so ist $f'(x) < 0$ (also negativ).

Ebenfalls gelten die Umkehrungen, was auch ohne weiteres aus der Anschauung entnommen werden kann:

Ist $f'(x) > 0$, so steigt die Kurve in $P(x;y)$; ist $f'(x) < 0$, so fällt die Kurve $P(x;y)$.

Dieser Sachverhalt läßt sich auch an Hand der Bilder 100a und b verfolgen.
In den Punkten E_1 und E_2 (Bild 100a) verlaufen die Tangenten parallel zur x-Achse, d. h., der Anstieg in diesen Punkten ist Null. Also sind E_1 und E_2 Punkte, in denen die Kurve weder steigt noch fällt. Nur an solchen Stellen können **Extrempunkte** der Kurve liegen. In 4.2. wird Näheres über Extrempunkte gesagt.
Weiterhin interessiert bei einer Kurve noch, in welchen Intervallen sie **konkav** bzw. **konvex** ist. Für diese Begriffe gelten die

Definitionen

Eine Funktion f sei in einem Intervall J differenzierbar. Die Funktion f ist in J genau dann konkav, wenn in jedem Punkt des Kurvenbildes von f die Tangente oberhalb der Kurve liegt (Bild 101a und b).
Die Funktion f ist in J genau dann konvex, wenn in jedem Punkt des Kurvenbildes von f die Tangente unterhalb der Kurve liegt (Bild 101c und d).

Das Bild einer in J konkaven Funktion f ist eine in diesem Intervall konkave Kurve, und entsprechend ist das Bild einer in J konvexen Funktion eine in J konvexe Kurve.
Aus den Bildern 101a und b ergibt sich, daß bei einer in einem Intervall J konkaven Kurve beim Durchlaufen der Kurve der Tangentenanstieg ständig abnimmt. Folglich muß die Ableitungfunktion f' eine in J streng monoton fallende Funktion sein, und wenn f' in J differenzierbar ist, folgt daraus, daß f'' in J negativ sein muß, da die Funktionswerte von f'' als die Steigungen der Tangenten an das Bild von f' gedeutet werden können. Entsprechendes läßt sich aus den Bildern 101c und d für eine konvexe Funktion folgern. Es gelten also die

Sätze

Eine Funktion f sei in einem Intervall J zweimal differenzierbar.
Wenn f in J konkav ist, dann sind die Funktionswerte der 2. Ableitung $f''(x) < 0$ für $x \in J$.
Wenn f in J konvex ist, dann sind die Funktionswerte der 2. Ableitung $f''(x) > 0$ für $x \in J$.

Ebenfalls gelten die Umkehrungen

Wenn $f''(x) < 0$ für $x \in J$, dann ist f in J **konkav**,
wenn $f''(x) > 0$ für $x \in J$, dann ist f in J **konvex**.

In Bild 100a verläuft die Kurve links vom Punkt W konkav und rechts von ihm konvex. Aus Bild 100c ist zu erkennen, daß $f''(x_W) = 0$ ist und die Funktionswerte der 2. Ableitung auf beiden Seiten dieses Punktes verschiedene Vorzeichen haben. Einen solchen Punkt nennt man **Wendepunkt** (vgl. 4.3.).

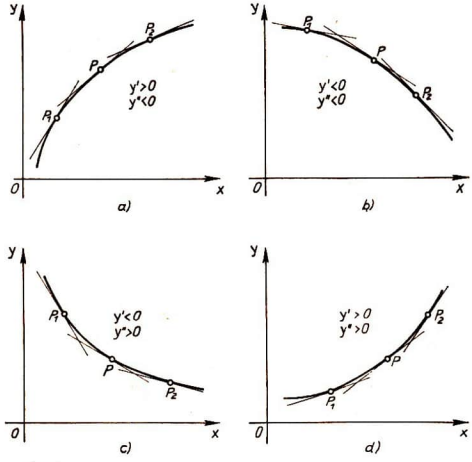


Bild 101

4.2. Extremwerte

Im vorigen Abschnitt wurden bereits die Funktionswerte in den Punkten E_1 und E_2 als *Extremwerte* der in Bild 100a dargestellten Funktion bezeichnet. An Hand dieses Bildes kann man erkennen, daß die Extremwerte einer Funktion die Ordinaten der höchsten bzw. tiefsten Punkte der Kurve sind. Genauer ausgedrückt sagt man, daß eine Funktion einen größten Wert oder ein **Maximum** an einer Stelle x_E hat, wenn der Funktionswert an dieser Stelle größer ist als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung, d. h., ein Maximum liegt vor, wenn sich ein $\varepsilon > 0$ derart bestimmen läßt, daß für alle $|\Delta x| < \varepsilon$ gilt: $f(x_E) > f(x_E \pm \Delta x)$. Die Funktion besitzt einen kleinsten Wert oder ein **Minimum** an einer Stelle x_E, wenn der Funktionswert an dieser Stelle kleiner ist als die Funktionswerte in der unmittelbaren Umgebung, d. h., bei einem Minimum muß sich ein $\varepsilon > 0$ bestimmen lassen, so daß für alle $|\Delta x| < \varepsilon$ gilt: $f(x_E) < f(x_E \pm \Delta x)$. Der Begriff des Extremwertes bzw. des Maximums oder Minimums einer Funktion hängt also zusammen mit der Beziehung auf die unmittel-

bare Umgebung dieses Wertes, d. h., ein Maximum ist nicht etwa ein absolut größter und ein Minimum nicht etwa ein absolut kleinster Funktionswert einer Funktion. Wie Bild 102 zeigt, kann sehr wohl ein Maximum an einer Stelle einen kleineren Ordinatenwert besitzen als ein Minimum an einer anderen Stelle der Funktion. Man müßte deshalb genauer von den *relativen Extremwerten* einer Funktion sprechen. Da aber in diesem Zusammenhang nur die relativen Extremwerte behandelt werden sollen, wird nachfolgend nur die Bezeichnung Extremwert bzw. Maximum oder Minimum gebraucht.

Zwischen den Extremwerten einer Funktion und ihren Ableitungen an diesen Stellen bestehen gewisse Beziehungen, die es ermöglichen, diese Stellen x_E mit Hilfe der Ableitungen zu bestimmen.

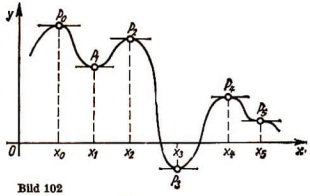


Bild 102

Ist bei einer differenzierbaren Funktion an der Stelle x_E ein Extremwert vorhanden, so liegt im Bild der Funktion die Tangente parallel zur x-Achse (Bilder 100 und 102), d. h., die Steigung ist Null. Damit gilt für einen Extremwert als notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$.

Besitzt die Funktion für $x = x_E$ ein Maximum (Bild 100 im Punkt E_1), so ist die Kurve konkav und nach den in 4.1. entwickelten Sätzen muß $f''(x_E) < 0$ sein. Liegt dagegen ein Minimum vor, so muß die Kurve konvex sein, und damit ist $f''(x_E) > 0$. Zusammengefaßt kann also gesagt werden:

Eine Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_E ein
Maximum, wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$,
Minimum, wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$.

Man beachte, daß $f'(x_E) = 0$ nur bedeutet, daß die Tangente der Kurve in $x = x_E$ waagerecht verläuft (Bild 102 Punkt P_5). Erst mit $f''(x_E) \neq 0$ erhält man die Gewißheit, daß tatsächlich ein Extremum vorliegt. Man sagt auch, die erste Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist für ein Extremum notwendig, aber nicht hinreichend. Dagegen ist die zweite Bedingung $f''(x_E) \neq 0$ in Verbindung mit $f'(x_E) = 0$ hinreichend, aber nicht notwendig. Es gibt nämlich auch Funktionen, bei denen für ein Extremum nicht nur die erste Ableitung gleich Null ist, sondern auch noch weitere Ableitungen verschwinden (z. B. bei $y = x^4$ an der Stelle $x = 0$). Die Bedingung $f''(x_E) \neq 0$ ist dann nicht erfüllt. Da aber diese Fälle für die Technik von geringerer Bedeutung sind.

sei an dieser Stelle auf alle weiteren Ausführungen verzichtet, lediglich soll später in einem Beispiel noch näher darauf eingegangen werden (vgl. 4.3., Beispiel 3). Abschließend seien noch die aufgetretenen Begriffe zusammengefaßt:
Eine Stelle x_E, an der die Funktion f einen Extremwert hat, heißt eine *Extremstelle* der Funktion. Der Funktionswert $y_E = f(x_E)$ ist der *Extremwert* (*Maximum* bzw. *Minimum*) und der Kurvenpunkt mit den Koordinaten $(x_E; y_E)$ ist der *Extrempunkt*.

BEISPIELE

1. Es sollen die Extremstellen und die Extremwerte der Funktion

$$y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$$

bestimmt werden.

Lösung: Um die Extremstellen zu bestimmen, muß man die ersten beiden Ableitungen y' und y'' bilden, also

$$y' = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

und

$$y'' = \frac{3}{8}x - \frac{3}{2}.$$

Die Bedingungen für ein Extremum sind $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$. Um also die Stellen x_E zu finden, für die $f'(x_E) = 0$ ist, muß man die erste Ableitung Null setzen und diese Gleichung nach x auflösen. Es ergeben sich damit die Abszissen der Punkte, in denen die Tangenten parallel zur x-Achse verlaufen. Setzt man die gefundenen Abszissen x_E in die zweite Ableitung ein, so entscheidet sich, ob ein Extremum vorliegt und ob dasselbe ein Maximum oder ein Minimum ist. Der weitere Rechengang ist also folgender:

$$\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \qquad x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x_{E1;2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} \qquad \underline{\underline{x_{E1} = 2;}} \quad \underline{\underline{x_{E2} = 6.}}$$

Für $x_{E1} = 2$ ist die zweite Ableitung $y''_{E1} = {}^3\!/\!_8 \cdot 2 - {}^3\!/\!_2 = -{}^3\!/\!_4 < 0$, und für x_{E2} ist $y''_{E2} = {}^3\!/\!_8 \cdot 6 - {}^3\!/\!_2 = {}^3\!/\!_4 > 0$. Für $x_{E1} = 2$ liegt somit ein Maximum vor, da $y''_{E1} < 0$. Für $x_{E2} = 6$ liegt ein Minimum vor, da $y''_{E2} > 0$.
Die Funktionswerte y_{E1} und y_{E2} für x_{E1} und x_{E2} (und damit die Größe der Extremwerte) findet man, wenn x_{E1} und x_{E2} in die Gleichung der untersuchten Funktion

$$y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$$

eingesetzt werden. Es ist

$$y_{E1} = \frac{1}{16} \cdot 2^3 - \frac{3}{4} \cdot 2^2 + \frac{9}{4} \cdot 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$$

und

$$y_{E2} = \frac{1}{16} \cdot 6^3 - \frac{3}{4} \cdot 6^2 + \frac{9}{4} \cdot 6 + 1 = \underline{\underline{1}}.$$

Die vorliegende Funktion hat also für $x_{E1} = 2$ das Maximum $y_{E1} = 3$ und für $x_{E2} = 6$ das Minimum $y_{E2} = 1$. In Bild 100 ist diese Funktion dargestellt.

2. Man bestimme die Extremstellen und die Extremwerte der Funktion

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Lösung: $y' = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$$

Die Extremstellen ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

Damit die Gleichung erfüllt ist, muß der Zähler den Wert 0 annehmen und der Nenner dort $\neq 0$ sein. Also ist

$$1 - x^2 = 0$$

$$\underline{\underline{x_{E1} = 1}}; \quad \underline{\underline{x_{E2} = -1}}.$$

Die Funktionswerte an diesen Stellen, d. h., die Extremwerte, sind

$$\underline{\underline{y_{E1} = \frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_{E2} = -\frac{1}{2}}}.$$

Für $x_{E1} = 1$ ist $y''_{E1} = -\dfrac{1}{2} < 0$, für $x_{E2} = -1$ ist $y''_{E2} = \dfrac{1}{2} > 0$.
Die Funktion hat für $x_{E1} = 1$ das Maximum $y_{E1} = \dfrac{1}{2}$, für $x_{E2} = -1$ das Minimum $y_{E2} = -\dfrac{1}{2}$.

4.3. Wendepunkte

In 4.1. wurde der Punkt W im Bild 100 als *Wendepunkt* bezeichnet, da dort die Kurve aus dem konkaven Teil in den konvexen übergeht (oder auch aus dem konvexen in den konkaven Teil). Wenn nun die Kurve wie in Bild 100a bis zum Wendepunkt W konkav ist, ist in diesem Bereich der Anstieg abnehmend, d. h., f' ist streng monoton fallend und f'' hat negative Funktionswerte. Im Wendepunkt erreicht der Anstieg einen tiefsten Wert, d. h., f' hat dort ein Minimum. Die Kurve geht aus dem konkaven in den konvexen Teil über, der Anstieg nimmt wieder zu, und f'' hat positive Funktionswerte. Liegen die Verhältnisse umgekehrt, d. h., ist die Kurve links vom Wendepunkt konvex und rechts konkav (Bild 103), so nimmt der Anstieg bis zum Wendepunkt zu, erreicht im Wendepunkt einen höchsten Wert und nimmt rechts vom Wendepunkt wieder ab.

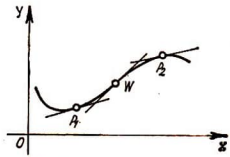


Bild 103

Der Wendepunkt ist also ein Punkt des größten oder kleinsten Kurvenanstiegs, d. h., f' hat im Wendepunkt ein Extremum, und daher muß der Funktionswert der zweiten Ableitung dort gleich Null sein. Wendet man nun die im vorhergehenden Abschnitt für einen Extremwert abgeleiteten Bedingungen auf die erste Ableitung $y' = f'(x)$ im Zusammenhang mit dem Wendepunkt an, so ergibt sich folgender

Satz

Das Bild der Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_W einen Wendepunkt, wenn $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ ist.

Man beachte, daß $f''(x_W) = 0$ nur bedeutet, daß $y' = f'(x)$ für $x = x_W$ eine waagerechte Tangente hat, während erst $f'''(x_W) \neq 0$ besagt, daß $f'(x_W)$ ein Extremum von f' ist.
Obigen Satz benutzt man nun, um die Wendepunkte einer Kurve zu bestimmen. Zu diesem Zweck muß die zweite Ableitung gleich Null gesetzt und die so erhaltene Gleichung $f''(x) = 0$ nach x aufgelöst werden.

BEISPIEL

1. Es sollen die Wendepunkte folgender Funktionen bestimmt werden:

a) $y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 1$ b) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Lösung:

a) Es ist $y' = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ und $y'' = \frac{3}{8}x - \frac{3}{2}$.

Für den Wendepunkt gilt $f''(x) = 0$, also

$$\frac{3}{8}x - \frac{3}{2} = 0$$

und daraus

$$\underline{\underline{x_W = 4.}}$$

Den Funktionswert y_W findet man wieder durch Einsetzen von $x_W = 4$ in die Ausgangsfunktion. Es ist

$$\underline{\underline{y_W = 2.}}$$

Die dritte Ableitung $y''' = 3/8$ ist verschieden von Null, also hat das Bild der Funktion einen Wendepunkt mit den Koordinaten $x_W = 4$, $y_W = 2$. Der Anstieg im Wendepunkt ergibt sich aus der ersten Ableitung: $f'(x_W) = f'(4) = -3/4$.

b) Es ist $y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$ und $y''' = \frac{-6(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$.

Die Abszissen der Wendepunkte ergeben sich aus der Gleichung

$$2x^3 - 6x = 0$$

$$x(2x^2 - 6) = 0$$

$$\underline{\underline{x_{W1} = 0}}$$

$$\underline{\underline{x_{W2} = \sqrt{3} \approx 1{,}732}}$$

$$\underline{\underline{x_{W3} = -\sqrt{3} \approx -1{,}732.}}$$

Die Ordinaten sind

$$\underline{\underline{y_{W_1} = 0}}$$

$$y_{W_2} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \approx \underline{\underline{0{,}433}}$$

$$y_{W_3} = -\frac{1}{4}\sqrt{3} \approx \underline{\underline{-0{,}433}}.$$

Für alle 3 Werte $x_{W_1}, x_{W_2}, x_{W_3}$ ist $f'''(x_W) \neq 0$.

Das Bild der Funktion $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ hat also drei Wendepunkte:

$$W_1(0;0), \quad W_2\left(\sqrt{3}; \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \text{ und } W_3\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{4}\sqrt{3}\right).$$

Mit Hilfe der ersten Ableitung kann man nun noch den Anstieg in den Wendepunkten bestimmen.

Es kann auch noch der Fall eintreten, daß bei einer Funktion für einen Wert $x = x_0$ die erste und die zweite Ableitung verschwinden, also $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist. Im allgemeinen liegt dann ein Wendepunkt mit zur x-Achse paralleler Wendetangente vor (Punkt P_5 in Bild 102), den man auch Stufen- oder **Terrassenpunkt** nennt. Die für das Vorhandensein eines Terrassenpunktes *notwendige Bedingung* $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ wird in Verbindung mit $f'''(x_0) \neq 0$ *hinreichend*.

BEISPIEL

2. Die Wendepunkte der Kurve der Funktion $y = (x-1)^3$ sollen bestimmt werden.

Lösung: Es ist

$$y' = 3(x-1)^2$$

$$y'' = 6(x-1)$$

$$y''' = 6$$

Für $x = 1$ ist sowohl $f'(1) = 0$ als auch $f''(1) = 0$, aber die dritte Ableitung $f'''(1) \neq 0$. Die Kurve hat also für $x = 1$; $y = 0$ einen Terrassenpunkt, also einen Wendepunkt, in dem der Kurvenanstieg Null ist.

Wie in 4.2. bei den Bedingungen für die Extremwerte, so ist auch für den Wendepunkt die Bedingung $f''(x_W) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend, zusammen mit der Bedingung $f'''(x_W) \neq 0$ hinreichend, aber nicht notwendig.
Es kann nämlich der Fall eintreten, daß bei einer Funktion für $x = x_0$ nicht nur die erste bzw. die ersten zwei Ableitungen, sondern auch noch mehrere höhere Ableitungen den Wert Null annehmen. Da diese Fälle für die Technik von geringerer Bedeutung sind und man in den meisten Fällen bei der Bestimmung der Extremwerte bzw. Wendepunkte mit den ersten zwei bzw. den ersten drei Ableitungen auskommt, sei hier auf alle weiteren Betrachtungen und Beweise in diesem Zusammenhang verzichtet und gleich die Regel für solche Fälle angegeben:
Nehmen bei einer Funktion $y = f(x)$ für $x = x_0$ nicht nur die erste und die zweite Ableitung, sondern auch weitere höhere Ableitungen den Wert Null an, so bildet man

diese Ableitungen für $x = x_0$, bis sich eine findet, die für diesen x-Wert nicht Null ist. An der Ordnung dieser Ableitung entscheidet sich nun, ob $x = x_0$ eine Stelle ist, für die die Kurve einen Extrem- oder einen Wendepunkt hat. Ist die Ordnung dieser Ableitung gerade, so liegt eine Extremstelle vor, und zwar ist der Extremwert dort ein Maximum, wenn diese Ableitung negativ, und ein Minimum, wenn sie positiv ist. Bei ungerader Ordnung der ersten für $x = x_0$ nicht verschwindenden Ableitung liegt ein Wendepunkt vor. In diesem besitzt die Kurve eine zur x-Achse parallele Wendetangente.
Im folgenden Beispiel sollen zwei Funktionen dieser Art untersucht werden.

BEISPIEL

3. Die Funktionen

a) $y = (x - a)^6$ und
b) $y = (x - a)^7$

sollen auf das Vorhandensein von Extrempunkten und Wendepunkten untersucht werden.

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned} y' &= 6(x-a)^5 \\ y'' &= 30(x-a)^4 \\ y''' &= 120(x-a)^3 \\ y^{(4)} &= 360(x-a)^2 \\ y^{(5)} &= 720(x-a) \\ y^{(6)} &= 720 \end{aligned}$$

Für $x = a$ ist $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(5)}(a) = 0$.
Erst die 6. Ableitung ist ungleich Null. Diese Ableitung ist von gerader Ordnung, also hat die Funktion $y = (x - a)^6$ für $x = a$ ein Extremum. Da $f^{(6)}(a) > 0$ ist, ist dieses ein Minimum.

b) Es ist

$$\begin{aligned} y' &= 7(x-a)^6 \\ y'' &= 42(x-a)^5 \\ y''' &= 210(x-a)^4 \\ y^{(4)} &= 840(x-a)^3 \\ y^{(5)} &= 2520(x-a)^2 \\ y^{(6)} &= 5040(x-a) \\ y^{(7)} &= 5040 \end{aligned}$$

Bei dieser Funktion verschwinden für $x = a$ die ersten 6 Ableitungen. $f^{(7)}(a)$ ist die erste nicht verschwindende Ableitung. Sie ist von ungerader Ordnung, also hat das Bild der Funktion für $x = a$ einen Wendepunkt.

4.4. Kurvendiskussionen

Besonders nützlich sind die in 4.1. bis 4.3. behandelten Regeln bei der Untersuchung von Funktionen und ihren Kurven (Kurvendiskussion). Für den Techniker kommt es häufig darauf an, aus einer gegebenen Funktionsgleichung möglichst schnell den Verlauf der Kurve und damit das Verhalten der Funktion herzuleiten, ohne daß er ge-

zwungen ist, die Kurve Punkt für Punkt zu zeichnen. Um dieses Ziel zu erreichen, wird man zweckmäßigerweise folgende Punkte und Eigenschaften der gegebenen Funktion $y = f(x)$ untersuchen:

1. Symmetrieeigenschaften
2. Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$
3. Nullstellen
4. Polstellen
5. Lücken
6. Definitionsbereich und Wertebereich
7. Extrempunkte und Wendepunkte

Zu 1. Man unterscheidet folgende Fälle der Symmetrie der Kurve:

a) Symmetrie zur y-Achse (vgl. 1.3.6.),

b) zentrische Symmetrie zum Ursprung (vgl. 1.3.6.),

c) Symmetrie zur Geraden $y = x$.

Die Bedingungen für die angeführten Fälle sind sehr leicht einzusehen.

Der Fall a) liegt vor, wenn die Funktion gerade ist, d. h., wenn $f(-x) = f(x)$ ist.

Beispiel: Das Bild von $y = x^2$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Im Fall b) muß die Funktion ungerade sein, d. h., es ist $f(-x) = -f(x)$.

Beispiel: Das Bild von $y = x^3$ ist zentralsymmetrisch zum Ursprung.

Der Fall c) liegt vor, wenn Funktion und Umkehrfunktion gleich sind, d. h., wenn für $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ gilt: $f = \varphi$.

Beispiel: Das Bild von $y = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ ist symmetrisch zur Geraden $y = x$, denn es ist $x = f^{-1}(y) = \varphi(y) = \dfrac{1-y}{1+y}$, $y = f^{-1}(x) = \varphi(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Zu 2. Um das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ zu überprüfen, müssen die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ untersucht werden. Bei gebrochenen Funktionen interessieren noch die Gleichungen der Asymptoten. Es sei die Funktion $y = f(x)$ definiert für $-\infty < x < a$, dann gehört zu dieser Funktion die Asymptote $y = g(x)$, wenn $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)] = 0$. Entsprechendes gilt für den Definitionsbereich $a < x < +\infty$. Bei gebrochenrationalen Funktionen $y = f(x)$ unterscheidet man zwei Fälle:

a) $y = f(x)$ sei echt gebrochen. Dann ist $y = g(x) \equiv 0$ die Asymptote, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Die x-Achse ist also Asymptote.

b) $y = f(x)$ sei unecht gebrochen. Durch Partialdivision läßt sich jede unecht gebrochene Funktion immer in eine ganze Funktion g und eine echt gebrochene rationale Funktion f_1 verwandeln, also $y = f(x) = g(x) + f_1(x)$.
Die ganze Funktion $y = g(x)$ ist dann die Gleichung der Asymptote, denn $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 0$.

Beispiele:

$f(x) = g(x) + f_1(x)$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)]$
$\dfrac{3x+2}{x-3} = 3 + \dfrac{11}{x-3}$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{11}{x-3} = 0$
$\dfrac{x^2+16}{x-2} = x + 2 + \dfrac{20}{x-2}$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{20}{x-2} = 0$
$\dfrac{x^3+6}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \dfrac{14}{x-2}$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{14}{x-2} = 0.$

Die Bilder der ganzrationalen Teilfunktionen $y = 3$, $y = x + 2$ und $y = x^2 + 2x + 4$ sind Kurven, denen sich die Bilder der zugehörigen gebrochenrationalen Funktionen asymptotisch nähern.

Zu 3. Die Nullstellen der Funktion sind die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse. Diese findet man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$. Bei gebrochenen Funktionen $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ sind die Nullstellen der Funktion gleich den Nullstellen des Zählers $u(x)$, sofern nicht der Nenner $v(x)$ für den gleichen x-Wert ebenfalls eine Nullstelle besitzt.

Zu 4. Die Polstellen bei gebrochenen Funktionen sind die Nullstellen des Nenners, vorausgesetzt, daß für dieselben x-Werte nicht gleichzeitig der Zähler Null ist. Ist bei einer gebrochenen Funktion $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $x = x_0$ der Nenner $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$, so hat die Funktion an dieser Stelle keinen Funktionswert.

Für die seitlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ und $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{u(x)}{v(x)}$ erhält man $+\infty$ oder $-\infty$, d. h., die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist eine vertikale Asymptote der Kurve. Man sagt, die Kurve hat für $x = x_0$ einen Pol. Bei einer Polstelle ungerader Ordnung ergeben sich für die beiden seitlichen Grenzwerte verschiedene Vorzeichen, bei einer Polstelle gerader Ordnung gleiche Vorzeichen,

z. B. $y = \dfrac{1}{x}$ Polstelle 1. (also ungerader) Ordnung für $x_0 = 0$

$y = \dfrac{1}{x^2}$ Polstelle 2. (also gerader) Ordnung für $x_0 = 0$.

Zu 5. Die Lücken bei gebrochenen Funktionen $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ sind die Stellen $x = x_0$ der Funktion, für die der Zähler und der Nenner gleichzeitig Null ist, also $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Es entsteht der unbestimmte Ausdruck 0/0. Der Funktionswert ist für diese Stelle nicht definiert, und damit ist die Funktion für $x = x_0$ unstetig. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = g$, so kann man die Unstetigkeit für $x = x_0$

dadurch beseitigen, daß man dieser Funktion den Grenzwert als Funktionswert an dieser Stelle zuordnet. Ist also $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, dann setzt man $f(x_0) = g$ und spricht in diesem Falle von einer hebbaren Unstetigkeit (vgl. 2.4.2.).

Zu 6. Den Definitionsbereich und den Wertebereich bestimmt man nach den Ausführungen in 1.3.1. (Polstellen und Lücken gehören nicht mit zum Definitionsbereich.)

Zu 7. Die Lage der Extremstellen und Wendepunkte findet man nach den Regeln aus 4.2. und 4.3.

BEISPIELE

1. Man diskutiere die Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 3x + 2$.

Lösung: $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ stellt eine ganzrationale Funktion dar. Ihr Definitionsbereich ist $X = R$, sie besitzt keine Polstellen oder Lücken.
Die Kurve weist keine der obengenannten Symmetrieeigenschaften auf.
Für $x \to \pm\infty$ geht $y \to \infty$.
Die Nullstellen der Funktion werden als Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ bestimmt.
Man erhält

$$x_{N_1} = 2; \qquad x_{N_2} = 1.$$

Es ist

$$y' = 2x - 3, \quad y'' = 2.$$

Die Abszisse des Extremwertes findet man aus der Gleichung

$$2x - 3 = 0$$

zu

$$x_E = \frac{3}{2}.$$

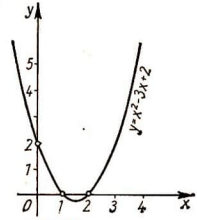


Bild 104

Da y'' für jedes x gleich 2, also positiv ist, hat die Kurve keinen Wendepunkt, sie ist für alle $x \in X$ konvex.
Für $x_E = 3/2$ hat sie das Minimum $y_E = (3/2)^2 - 3 \cdot 3/2 + 2 = -1/4$. Die Kurve fällt also für $-\infty < x < 3/2$ und steigt für $3/2 < x < +\infty$. Der Punkt $(3/2; -1/4)$ ist tiefster Punkt der Kurve (Bild 104).

2. Die Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - x^2 - 2x$ ist zu diskutieren.

Lösung: Es liegt eine ganzrationale Funktion vor, folglich existieren weder Polstellen noch Lücken, der Definitionsbereich ist $X = R$.
Die Kurve besitzt keine der obengenannten Arten von Symmetrie. Die Nullstellen ergeben sich aus der Gleichung

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x_{N_1} = 0; \quad x_{N_2} = 2; \quad x_{N_3} = -1.$$

Es ist

$$y' = 3x^2 - 2x - 2,$$

$$y'' = 6x - 2.$$

Für ein Extremum muß $y' = 0$ sein, also

$$3x^2 - 2x - 2 = 0$$

und daraus

$$x_{E_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx 1{,}215; \quad y_{E_1} \approx -2{,}113$$

$$x_{E_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx -0{,}549; \quad y_{E_2} \approx 0{,}631.$$

Es ist $f''(x_{E_1}) > 0$ und $f''(x_{E_2}) < 0$, also hat die Kurve für $x_{E_1} \approx 1{,}215$ ein Minimum und für $x_{E_2} \approx -0{,}549$ ein Maximum.
Für den Wendepunkt muß

$$y'' = 0$$

sein, also folgt aus

$$6x - 2 = 0$$

für den Wendepunkt

$$x_W = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

und aus der Kurvengleichung $y_W = -20/27 \approx -0{,}74$.
Für $x_W = 1/3$ ist $y''' \neq 0$, also hat die Kurve für $x_W = 1/3$ einen Wendepunkt.
Für $x \to -\infty$ geht auch $y \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ geht auch $y \to +\infty$. Die gegebene Kurve ist also für

$$-\infty < x < \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \quad \text{steigend und konkav}$$

und hat für

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx -0{,}549 \quad \text{ein Maximum;}$$

für

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} < x < \frac{1}{3} \quad \text{ist sie fallend und konkav}$$

und hat für

$$x_W = \frac{1}{3} \quad \text{einen Wendepunkt;}$$

für

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \quad \text{ist sie fallend und konvex}$$

und hat für

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx 1{,}215 \quad \text{ein Minimum;}$$

für

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} < x < +\infty \quad \text{ist sie steigend und konvex.}$$

3. Die Kurve der gebrochenrationalen Funktion $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 3}$ ist zu diskutieren.

Lösung: Die Kurve weist keine der interessierenden Symmetrieeigenschaften auf.

Berechnung der Gleichung der Asymptote

$$y = (x^2 - 16):(x - 3) = x + 3 - \frac{7}{x - 3}$$

$$\begin{array}{r} -(x^2 - 3x) \\ \hline 3x - 16 \\ -(3x - 9) \\ \hline -7 \end{array}$$

Nach den obengeführten Überlegungen zu Punkt 2 lautet die Gleichung der Asymptote $y = x + 3$ (Bild 105).

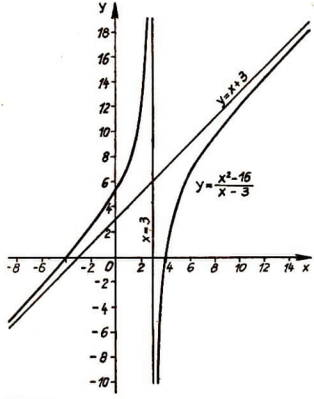


Bild 105

Die Nullstellen der Funktion erhält man aus den Nullstellen des Zählers, also durch Lösen der Gleichung $x^2 - 16 = 0$; daraus folgt

$$x_{N_1} = 4; \quad x_{N_2} = -4.$$

Bei einer gebrochenen Funktion sind noch die Nullstellen des Nenners von Interesse. Es sind dies die Polstellen der Funktion. In der gegebenen Funktion erhält man aus der Gleichung $x - 3 = 0$ einen Pol für $x_P = 3$. Für $x \to 3 + 0$ geht $y \to -\infty$, und für $x \to 3 - 0$ geht $y \to +\infty$ (Pol 1. Ordnung).
Somit lautet der Definitionsbereich: $X = R \setminus \{3\}$.
Es ist

$$y' = 1 + \frac{7}{(x-3)^2},$$

$$y'' = \frac{-7 \cdot 2\,(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{-14}{(x-3)^3}.$$

Zur Bestimmung der Extremstellen untersucht man die 1. Ableitung. Diese kann für keinen Wert von x den Wert Null annehmen, also hat die Funktion keine Extremwerte. Ebenfalls sind keine Wendepunkte vorhanden, da y'' für keinen Wert von x zu Null wird.

Die Kurve der gebrochenrationalen Funktion $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ ist zu diskutieren.

Lösung: Es liegt eine gerade Funktion vor: $f(x) = f(-x)$, die Kurve verläuft symmetrisch zur y-Achse (Bild 106).

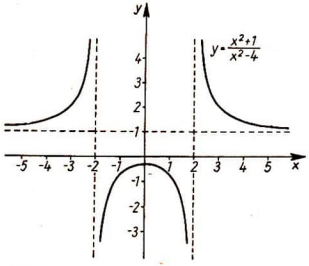


Bild 106

Es ist $y = (x^2+1):(x^2-4) = 1 + \dfrac{5}{x^2-4}$. Die Gleichung der Asymptote ist demnach $y = 1$, das ist eine zur x-Achse parallele Gerade. Die Funktion hat keine Nullstellen. Sie hat zwei Polstellen 1. Ordnung, und zwar für $x = -2$ und $x = +2$, denn beide Werte sind einfache Nullstellen des Nenners.

Für $x \to -2-0$ geht $y \to +\infty$,
für $x \to -2+0$ geht $y \to -\infty$,
für $x \to +2-0$ geht $y \to -\infty$ und
für $x \to +2+0$ geht $y \to +\infty$.

Die Funktion ist also definiert in

$$X = R \setminus \{-2; 2\}.$$

Es ist

$$y' = \frac{-10x}{(x^2-4)^2},$$

$$y'' = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

Für $x_E = 0$ hat die Funktion das Maximum $y_E = -1/4$.

Die Kurve besitzt keinen Wendepunkt, da $y'' = f''(x)$ für keinen Wert von x gleich Null wird.

5. Die Kurve der Funktion $y = f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ist zu diskutieren.

Lösung: Die Kurve weist keine Symmetrieeigenschaften auf.
Für $x \to +\infty$ geht $y \to +\infty$, für $x \to -\infty$ geht $y \to 0$.
Da Zähler e^x und Nenner x^2 für $x < 0$ und $x > 0$ positiv sind, kann y nur positiv sein. Die Funktion hat also keine Nullstelle. Für $x = 0$ wird der Nenner x^2 gleich 0. Die Funktion hat also für $x_P = 0$ eine Polstelle 2. Ordnung. Für $x \to 0$ geht $y \to +\infty$.
Definiert ist die Funktion in den Bereichen $-\infty < x < 0$ und $0 < x < +\infty$. Für $x = 0$ ist $y = f(x)$ nicht definiert.
Es ist

$$y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}.$$

Die Extremstellen der Funktion findet man aus $y' = 0$:

$$e^x(x-2) = 0.$$

Da $e^x \neq 0$, folgt aus $x - 2 = 0$

$$x_E = 2$$

und

$$y_E = \frac{e^2}{4} \approx 1{,}83.$$

Für $x_E = 2$ ist $y'' > 0$, also hat die Funktion für $x_E = 2$ ein Minimum.
Die Wendepunkte ergeben sich aus $y'' = 0$:

$$e^x(x^2 - 4x + 6) = 0,$$

oder, da $e^x \neq 0$ ist,

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x_{W_{1;2}} = \pm\sqrt{-2}.$$

Die Gleichung hat keine reellen Lösungen. Die Kurve besitzt keine Wendepunkte.
Man zeichne die Kurve.

6. Die Kurve mit der Gleichung $y = 2e^{-0{,}5x} \sin 2x$ soll diskutiert werden.

Lösung: Die Kurve weist keine Symmetrie auf.
Für $x \to +\infty$ geht $y \to 0$, für $x \to -\infty$ läßt sich kein Grenzwert angeben.
Aus

$$y = 2e^{-0{,}5x} \sin 2x$$

folgt

$$y' = 2e^{-0{,}5x}(2\cos 2x - 0{,}5 \sin 2x)$$

und

$$y'' = -2e^{-0{,}5x}(3{,}75 \sin 2x + 2\cos 2x).$$

Die Nullstellen ergeben sich aus der Gleichung

$$2e^{-0{,}5x} \sin 2x = 0.$$

Da $e^{-0,5x} = 0$ keine Lösung besitzt, findet man die Nullstellen durch Lösen der Gleichung

$$\sin 2x = 0.$$

Daraus folgt

$$2x_N = k\pi$$

und

$$x_N = k\frac{\pi}{2} \text{ mit } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$$

Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse liegen also um die konstante Strecke $p = \frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt. Sie stimmen mit den Nullstellen der Funktion $y = \sin 2x$ überein. Die Extremstellen errechnen sich aus der Gleichung $y' = 0$. Da die Gleichung $e^{-0,5x} = 0$ keine Lösung hat, ergeben sich die Extremstellen aus

$$2\cos 2x - 0{,}5\sin 2x = 0.$$

Es folgt $\tan 2x = 4$.
Die Extremstellen sind

$$x_E = \frac{1}{2}\arctan 4 + k\cdot\frac{\pi}{2} \approx 0{,}6629 + k\cdot\frac{\pi}{2} \text{ mit } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots;$$

und zwar hat die Funktion Maxima für

$$x_{E1} = \frac{1}{2}\arctan 4 + k\cdot\pi \approx 0{,}6629 + k\pi$$

und Minima für

$$x_{E2} = \frac{1}{2}\arctan 4 + (1+2k)\frac{\pi}{2} \approx 0{,}6629 + (1+2k)\frac{\pi}{2}$$

mit $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$
Für die Wendepunkte gilt $y'' = 0$. Es ergeben sich also die Abszissen der Wendepunkte aus der Gleichung

$$3{,}75\sin 2x + 2\cos 2x = 0.$$

Hieraus folgt

$$\tan 2x = -\frac{8}{15} \approx -0{,}53333$$

$$2x = \arctan\left(-\frac{8}{15}\right) + k\pi,$$

$$x_W = -\frac{1}{2}\arctan\frac{8}{15} + k\frac{\pi}{2} \approx -0{,}245 + k\frac{\pi}{2} \text{ mit } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots$$

Die Kurve mit der Gleichung $y = 2e^{-0,5x}\sin 2x$ ist eine abklingende Sinuskurve (Bild 107). Da $-1 \leq \sin 2x \leq +1$ ist, liegt die Bildkurve von $y = 2e^{-0,5x}\sin(2x)$ zwischen den beiden Exponentialkurven mit den Gleichungen $y = 2e^{-0,5x}$ und $y = -2e^{-0,5x}$. Die Abszissen der Berührungspunkte mit den beiden sie begrenzenden Exponentialkurven sind

$$x_B = (1+2k)\frac{\pi}{4}, \text{ mit } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ldots,$$

da für diese Werte $\sin 2x$ den Wert $+1$ oder -1 annimmt. Diese Abszissen x sind gleichzeitig die Extremstellen der Funktion $y = \sin 2x$. Sie stimmen nicht mit den Extremstellen der gegebenen Funktion $y = 2e^{-0,5x} \sin 2x$ überein. Letztere sind gegenüber den Extremstellen der Funktion $y = \sin 2x$ um $\frac{1}{2} \arctan 4 - \frac{\pi}{4}$ verschoben. Es muß also

$$x_B + \frac{1}{2} \arctan 4 - \frac{\pi}{4} = (1 + 2k) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan 4 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \arctan 4 + k \frac{\pi}{2} = x_E,$$

d. h. gleich den Extremstellen der Funktion $y = 2e^{-0,5x} \sin 2x$ sein.

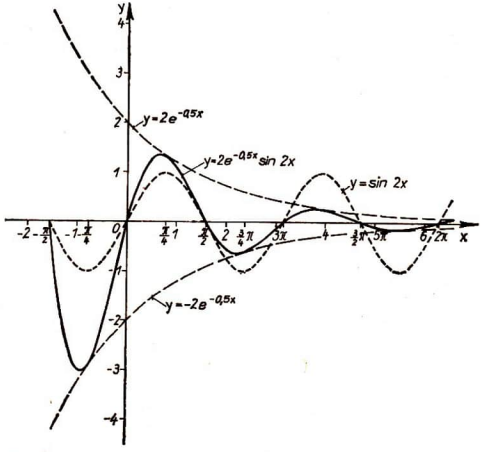


Bild 107

Setzt man in der Gleichung der gegebenen Funktion $y = 2e^{-0,5x} \sin 2x$ für x den Wert $x_1 = x + \frac{\pi}{2}$ ein, so wird der zugehörige Funktionswert $y_1 = 2e^{-0,5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Da $e^{-0,5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{-0,5x}$ und $\sin(2x + \pi) = -\sin 2x$ ist, folgt

$$y_1 = -e^{-\frac{\pi}{4}} 2e^{-0,5x} \sin(2x) = -e^{-\frac{\pi}{4}} y,$$

d. h., y_1 ist das $-e^{-\frac{\pi}{4}}$-fache von y. Die Funktionswerte y_k der Argumente $x + k \cdot \frac{\pi}{2}$ bilden also eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = -e^{-\frac{\pi}{4}}$.
In Bild 107 sind die Kurven mit den Gleichungen $y = 2e^{-0,5x} \sin 2x$, $y = 2e^{-0,5x}$, $y = -2e^{-0,5x}$ und $y = \sin 2x$ dargestellt.

AUFGABEN

Die Kurven der Funktionen in den Aufgaben 159 bis 190 sind zu diskutieren.

159. $y = 2x^3 - 6x^2$
160. $y = x^4 - 24x^2 - 64x + 5$
161. $y = x^2(9 - x^2)$
162. $y = x^3 - \frac{1}{16}x^5$
163. $y = x^3 - 10x$
164. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x - 1$
165. $y = x^4 - 2x^3 + 1$
166. $y = x^5 - x^3$
167. $y = \frac{x^2}{x^2 + 10}$
168. $y = \frac{2x - 1}{x^2}$
169. $y = \frac{x^2 + 6}{x - 3}$
170. $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 9}$
171. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
172. $y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2}$
173. $y = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2$
174. $y = \frac{x + 3}{x - 3}$
175. $y = \frac{6}{3 + x^2}$
176. $y = \frac{x^4 - 1}{x^3}$
177. $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$
178. $y = \sqrt{x(x^2 - 9)}$
179. $y = x \ln x$
180. $y = x^2 \ln x$
181. $y = \frac{\ln x}{x}$
182. $y = \frac{\ln x}{x^2}$
183. $y = \sin^2 x$
184. $y = axe^{-bx}$ (a und b positiv)
185. $y = xe^x$
186. $y = \frac{x}{e^x}$
187. $y = x^2 e^x$
188. $y = (x - 1)e^x$
189. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$
190. $y = \frac{e^x}{x}$

191. Die Nullstellen und Extremstellen der Kurve mit der Gleichung $y = \cos 2x + 2 \sin x + 3$ sind für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ graphisch und numerisch zu bestimmen.

192. Für die Funktion $y = \frac{1}{4}e^{x^2 - 2x}$ sind zu ermitteln
a) die Extremstellen;
b) Steigung und Richtungswinkel an der Stelle $x = 2$.

193. An welchen Stellen hat die Funktion $y = e^x \cos x$ im Intervall $[0; 2\pi]$ Extremwerte und Wendepunkte?

194. Man bestimme das Extremum der Funktion $y = \frac{2}{27,5x - e^x}$.

195. Wie lautet die Gleichung der Wendetangente an die Kurve mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1?$$

196. Man bestimme die Gleichung der Tangente an die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ im Punkte $P_1(x_1; y_1)$.

197. Man bestimme die Gleichung der kubischen Parabel, die den Punkt $P_1(-1; 1)$ als Maximumpunkt und den Punkt $P_2(1; -1)$ als Wendepunkt hat.

198. Eine kubische Parabel habe im Nullpunkt die Gerade $y = 2x$ als Tangente, der Punkt $P_1(1; 1)$ sei ein Wendepunkt der Kurve. Man bestimme die Gleichung der Kurve und die Gleichung der Wendetangente.

5. Anwendungen der Differentialrechnung

5.1. Extremwertaufgaben

Eine wichtige Anwendung findet die Differentialrechnung bei der Lösung von Extremwertaufgaben. Es handelt sich hierbei um Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten (z. B. Arithmetik, Geometrie, Physik, Technik usw.), bei denen es darauf ankommt, bei irgendeinem Vorgang den Bestwert zu ermitteln, z. B. das maximale Volumen, die maximale Belastbarkeit eines Balkens, den minimalen Materialaufwand usw.

Bei der Lösung solcher Aufgaben ist wichtig, daß man klar erkennt, welches die zu bestimmende extremale Größe ist und von welcher Variablen diese abhängt. Am besten wird der Lösungsweg an Hand der nachfolgenden Beispiele klar werden.

BEISPIELE

1. Welcher von allen echten Brüchen bildet mit seinem Quadrat die größte Differenz?

Lösung: Der gesuchte Bruch sei x; sein Quadrat ist dann x^2. Also ist die Differenz

$$D = x - x^2;$$
$$D' = 1 - 2x$$
$$D'' = -2.$$

Die Stelle x, für die D ein Extremum hat, findet man aus $D' = 0$, also

$$1 - 2x = 0$$
$$\underline{\underline{x_E = \frac{1}{2}}}.$$

Da D'' negativ ist, so hat die Differenz für $x_E = 1/2$ ein Maximum:

$$\underline{\underline{D_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}}}.$$

2. Einem Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h soll ein Parallelogramm von möglichst großem Inhalt einbeschrieben werden. Wie sind die Grundlinie x und die Höhe y des Parallelogramms zu wählen (Bild 108)?

Lösung: Es ist $A = xy$. A ist somit von den beiden Variablen x und y abhängig. Wenn nun die Schnittlinien anders gelegt werden, z. B. wenn die Seite x größer gewählt wird, so wird

die Höhe y kleiner, d. h., y und x sind voneinander abhängig. Man kann also y mit Hilfe von x ausdrücken, so daß A nur noch von x abhängt.

Bei den meisten Extremwertaufgaben muß dieser Weg gegangen werden, daß zuerst eine Funktion zweier Variablen gebildet wird und man noch eine Bezugsgleichung zwischen diesen Variablen aufstellen muß, um zum Schluß wie hier wieder eine Funktion mit einer unabhängigen Variablen zu erhalten. Die Abhängigkeit zwischen den Variablen x und y wird aus den ähnlichen Dreiecken ABC und AB_1C_1 (Bild 108) bestimmt. Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{h-y}{h}=\frac{x}{a}$$

und daraus

$$y=h-\frac{h}{a}x=h\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Damit ergibt sich A als Funktionswert von x:

$$A=h\left(1-\frac{x}{a}\right)x=h\left(x-\frac{x^2}{a}\right).$$

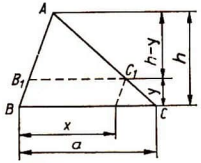


Bild 108

Die ersten beiden Ableitungen sind

$$A'=h\left(1-\frac{2x}{a}\right)$$

$$A''=-\frac{2h}{a}.$$

Den Wert x, für den A ein Extremum ist, findet man aus $A'=0$, also folgt aus

$$1-\frac{2x}{a}=0$$

$$\underline{\underline{x_E=\frac{a}{2}}} \quad \text{und damit} \quad \underline{\underline{y_E=\frac{h}{2}}}.$$

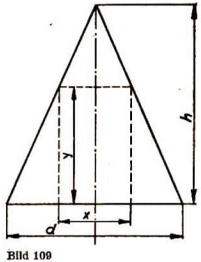


Bild 109

A'' ist negativ, also ergeben diese beiden Werte $x_E=a/2$ und $y_E=h/2$ ein Maximum des Flächeninhaltes des Parallelogramms mit $A_{\max}={}^1/_4\,ah$. Das ist die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks.

. Einem geraden Kegel mit der Höhe h und dem Durchmesser d des Grundkreises soll ein Zylinder mit möglichst großem Rauminhalt einbeschrieben werden. Wie groß sind der Durchmesser x und die Höhe y des Zylinders zu wählen, wie groß wird sein maximaler Rauminhalt (Bild 109)?

Lösung: Es ist

$$V=\frac{\pi x^2}{4}y.$$

Aus den ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken mit den Grundlinien x und d folgt

$$(h-y):h=x:d,$$

daraus

$$y=h\left(1-\frac{x}{d}\right),$$

und damit

$$V = \frac{\pi}{4} h \left(x^2 - \frac{x^3}{d} \right)$$

$$V' = \frac{\pi}{4} h \left(2x - \frac{3}{d} x^2 \right)$$

$$V'' = \frac{\pi}{4} h \left(2 - \frac{6}{d} x \right).$$

Aus

$$2x - \frac{3}{d} x^2 = 0$$

folgt

$$\underline{\underline{x_{E_1} = 0}}$$

$$\underline{\underline{x_{E_2} = \frac{2}{3} l}}$$

Für $x_{E_2} = \frac{2}{3} d$ ist $V'' = \frac{\pi}{4} h (2 - 4) = -\frac{\pi}{2} h$, also negativ, d. h., für $x_{E_2} = \frac{2}{3} d$ hat der Rauminhalt V des Zylinders ein Maximum. Für die Höhe folgt

$$y_{E_2} = \frac{1}{3} h.$$

Für das größte Volumen erhält man

$$V_{\max} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi d^2 h}{27}}}$$

$$V_{\max} = \frac{4}{9} V_{\text{Kegel}}.$$

Die Lösung $x_{E_1} = 0$ ist auch eine Extremstelle der Funktion $V = \frac{\pi}{4} \cdot h \left(x^2 - \frac{x^3}{d} \right)$, und zwar ist V für $x_{E_1} = 0$ ein Minimum, da für diesen Wert $V'' > 0$ ist.

4. Aus Blechscheiben von 200 mm Durchmesser sollen zylindrische Gefäße gezogen werden. Welche Größe müssen Durchmesser x und Höhe y erhalten, damit das Volumen eines Gefäßes ein Maximum wird (Bild 110)?

Lösung: Das Volumen eines Gefäßes ist

$$V = \frac{\pi x^2}{4} y$$

und die Oberfläche

$$A = \frac{\pi x^2}{4} + \pi x y = (200 \text{ mm})^2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Also ist

$$y = \frac{(200 \text{ mm})^2}{4x} - \frac{x}{4}.$$

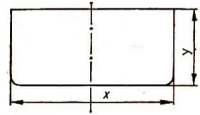


Bild 110

Daraus folgt

$$V = \frac{\pi}{16}[(200\text{ mm})^2 x - x^3]$$

$$V' = \frac{\pi}{16}[(200\text{ mm})^2 - 3x^2]$$

$$V'' = -\frac{3}{8}\pi x.$$

Aus

$$(200\text{ mm})^2 - 3x^2 = 0$$

folgt

$$x_E = \frac{200}{3}\sqrt{3}\text{ mm} \approx 115{,}4\text{ mm}$$

(Die negative Lösung der quadratischen Gleichung hat für die Lösung der Aufgabe keinen Sinn.)
V'' ist für diesen Wert x_E negativ, also hat V für $x = x_E$ ein Maximum. Mit $x_E = \frac{200}{3}\sqrt{3}$ mm folgt

$$y_E = \frac{100}{3}\sqrt{3}\text{ mm} \approx 57{,}7\text{ mm}$$

Der Durchmesser muß 115,4 mm und die Höhe 57,7 mm gewählt werden, damit das Volumen eines Gefäßes ein Maximum wird. Es ist also $x_E = 2y_E$.

5. Ein Fenster, wie in Bild 111 dargestellt, soll eine (mittlere) Fläche von 0,6 m² aufweisen. Wie müssen die Breite x und die Höhe y des rechteckigen Teiles gewählt werden, damit die Materialkosten des Eisenrahmens ein Minimum werden?

Lösung: Die Materialkosten werden am kleinsten, wenn die Abmaße des Fensters so gewählt werden, daß der Umfang ein Minimum wird. Es muß also der Umfang als Funktionswert der Seitenlängen dargestellt werden. Es ist

$$U = x + 2y + \frac{\pi x}{2}.$$

Da die Fläche konstant ist, gilt zwischen x und y die Beziehung

$$A = xy + \frac{\pi x^2}{8} = 0{,}6\text{ m}^2$$

und daraus

$$y = \frac{0{,}6\text{ m}^2}{x} - \frac{\pi x}{8}.$$

Mit diesem Wert ergibt sich für den Umfang

$$U = x + \frac{1{,}2\text{ m}^2}{x} - \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi x}{2}$$

$$U = \frac{1{,}2\text{ m}^2}{x} + x\left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Die Ableitungen sind

$$U' = -\frac{1{,}2\text{ m}^2}{x^2} + 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$U'' = \frac{2{,}4\text{ m}^2}{x^3}$$

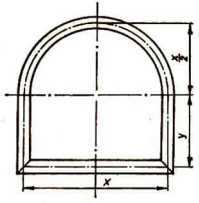


Bild 111

Aus

$$-\frac{1{,}2\ \mathrm{m}^2}{x^2}+1+\frac{\pi}{4}=0$$

folgt

$$x^2=\frac{1{,}2\ \mathrm{m}^2}{1+\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}672\ \mathrm{m}^2$$

$$x_{E_{1;2}}\approx \underline{\underline{\pm 0{,}82\ \mathrm{m}}}$$

Für $x_{E_1}=0{,}82$ wird $U''>0$. Damit ist der Umfang für $x_{E_1}=0{,}82$ ein Minimum. Die Höhe y_E errechnet sich zu

$$y_E=\frac{0{,}6\ \mathrm{m}^2}{x_1}-\frac{\pi x_1}{8}\approx 0{,}41\ \mathrm{m}.$$

Das Fenster muß also so ausgeführt werden, daß die Breite 0,82 m und die Höhe des Rechtecks 0,41 m gewählt werden.

AUFGABEN

199. Aus einer Strecke von a Meter Länge soll der Umfang eines Rechtecks gebildet werden. Wie groß müssen die Seiten gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

200. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 15 cm lang. Wie sind ihre Längen zu wählen, damit die Hypotenuse möglichst klein wird?

201. An den 4 Ecken eines quadratischen Bleches mit der Seitenlänge 42 cm sollen gleiche Quadrate abgeschnitten und aus dem übrigbleibenden Stück ein oben offener Kasten gebildet werden. Wie groß müssen die Seiten der abzuschneidenden Quadrate gewählt werden, damit der Rauminhalt des Kastens möglichst groß wird?

202. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sei ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ gegeben. Man soll durch P_1 eine Gerade so ziehen, daß der Flächeninhalt des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks OAB (A und B sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen) möglichst klein wird. Wie groß müssen die Abschnitte OA und OB gewählt werden?

203. Aus einem Baumstamm mit dem Durchmesser d soll ein rechteckiger Balken von möglichst großer Tragkraft (das Widerstandsmoment $W=\frac{1}{6}bh^2$ soll ein Maximum werden) herausgeschnitten werden. Wie sind die Breite b und die Höhe h des Balkens zu wählen? Wie groß wird das Verhältnis $b:h$?

204. Ein auf waagerechter Ebene liegender Körper mit dem Gewicht G und dem Reibungskoeffizienten μ soll durch eine Kraft F fortgezogen werden, die mit der Ebene den Winkel φ bildet. Für welchen Winkel φ wird diese Kraft ein Minimum?

205. Der Strahl einer Wasserspritze hat eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0=25$ m/s. Um welchen Winkel gegen die Waagerechte muß die Spritze geneigt sein, um einen möglichst hohen Punkt einer um $s=10$ m entfernten Hauswand zu treffen (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes)?

206. Welchen Durchmesser d und welche Höhe h muß eine Konservenbüchse vom Inhalt V erhalten, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird (die Oberfläche muß ein Minimum sein)?

207. Unter welchem Winkel α muß ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geworfen werden (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes), damit die horizontale Wurfweite ein Maximum wird?

208. In welcher Höhe h über dem Punkt B muß eine punktförmige Lichtquelle L angebracht werden, damit die Stelle A am besten beleuchtet wird (Bild 112)? Man beachte, daß die Beleuchtungsstärke $\sin\alpha$ direkt und r^2 umgekehrt proportional ist.

209. Eine Spule von kreisförmigem Querschnitt soll durch einen kreuzförmigen Eisenkern möglichst weitgehend ausgefüllt werden. Welche Abmessungen muß man nehmen, wie groß wird insbesondere der Winkel α (Bild 113)?

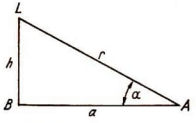


Bild 112

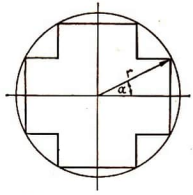


Bild 113

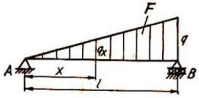


Bild 114

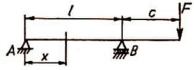


Bild 115

210. Wie groß ist in einem Gleichstromkreis mit der konstanten Urspannung E und dem konstanten Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle der Außenwiderstand R_a zu wählen, damit die in ihm verbrauchte Leistung ein Maximum erreicht? Wie groß ist die maximale Leistung?

211. Ein Balken auf zwei Stützen sei durch eine Dreieckslast F belastet (Bild 114). In welcher Entfernung x_E vom linken Auflager ist das Biegemoment am größten?

212. Ein Träger auf zwei Stützen sei, wie im Bild 115 angegeben, durch die Kraft F belastet. In welcher Entfernung x_E vom Auflager A ist die Durchbiegung am größten? Die Gleichung der elastischen Linie zwischen A und B ist

$$y = \frac{F l^2 c}{6 E I}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Wie groß ist die maximale Durchbiegung?

213. Ein zweiseitig eingespannter Träger sei mit der Dreieckslast F belastet. Die Gleichung der elastischen Linie dieses Trägers ist

$$y = \frac{F l^3}{60 E I}\left(2\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^5}{l^5}\right),$$

worin y die Durchbiegung an der Stelle x, E den Elastizitätsmodul und I das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes bedeuten. An welcher Stelle x_E des Trägers ist die Durchbiegung ein Maximum und wie groß ist die maximale Durchbiegung?

214. Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h soll parallel zur Grundfläche geschnitten werden. Diese Schnittfläche soll die Grundfläche einer neuen Pyramide sein, deren Spitze in der Grundfläche der gegebenen Pyramide liegt. In welcher Höhe über der Grundfläche G muß der Schnitt gelegt werden, damit das Volumen der neuen Pyramide ein Maximum wird?

215. Durch einen Punkt Q zwischen den Schenkeln eines Winkels α soll eine Gerade so gezogen werden, daß das entstehende Dreieck möglichst klein wird. Wie muß man die Gerade durch Q legen? Der Punkt Q sei durch die Seiten a und b des Parallelogramms bestimmt, das durch die Schenkel des Winkels α und durch die Parallelen durch Q zu den Schenkeln gegeben ist.

216. Der Scheitel eines rechten Winkels sei A. Auf dem einen Schenkel liegen die Punkte B und C, so daß $\overline{AB} = b$ und $\overline{AC} = c$ ist. Wo muß man auf dem anderen Schenkel den Punkt P legen, damit $\sphericalangle BPC$ möglichst groß wird?

217. Ein Kreissektor habe den Umfang a. Wie groß muß der Radius und die Bogenlänge gewählt werden, damit der Flächeninhalt ein Maximum ist?

218. Der Wirkungsgrad einer Schraubenspindel mit Flachgewinde und dem Steigungswinkel α ist durch die Gleichung $\eta = \dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\varrho)}$ gegeben, worin ϱ den konstanten Reibungswinkel bedeutet ($\mu = \tan\varrho$). Für welchen Steigungswinkel α wird η ein Maximum?

219. Vier gleich breite Blechstreifen sollen, wie im Bild 116 angegeben, so zu einer Rinne zusammengeschweißt werden, daß die Durchflußmenge eine Maximum wird. Wie groß ist der Winkel φ zu wählen?

220. Aus einem Draht mit der Länge l soll ein Rechteck gebogen werden. Durch Rotation dieses Rechtecks um eine Seite entsteht ein Zylinder. Wie muß man die Längen der Rechteckseiten wählen, damit der Zylinder a) die größte Mantelfläche und b) den größten Rauminhalt besitzt?

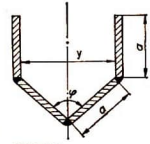


Bild 116

5.2. Physikalisch-technische Anwendungen

In den bisher behandelten Kapiteln wurde die Bedeutung der Ableitung nur an Hand der Steigung einer Kurve gezeigt. Die Ableitung hat aber in der Physik und in der Technik bei vielen Vorgängen eine große Bedeutung, und zwar immer dort, wo irgendeine Größe als Quotient von zwei anderen Größen ausgedrückt wird, die nicht linear voneinander abhängen. Das typische Beispiel ist der Begriff der Momentangeschwindigkeit. Wie bereits in 1.3.6. gezeigt, bedeutet

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

die mittlere Geschwindigkeit eines Körpers im Zeitintervall Δt. Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieser Ausdruck auch gleich der Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt der Bewegung. Bei einer ungleichförmigen Bewegung, wie sie z. B. in Bild 117 dargestellt ist, gibt $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nur einen mittleren Wert der Geschwindigkeit an (vgl. 3.1.). Genaugenommen ist es die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper

in der Zeit $t_1 - t = \Delta t$ bewegen würde, wenn der Weg-Zeit-Verlauf in Bild 117 durch die Sekante gegeben wäre. Wird nun das betrachtete Zeitintervall Δt immer kleiner gewählt, so wird die Geschwindigkeit v_m sich immer mehr der augenblicklichen Geschwindigkeit nähern. Wie bereits in 3.5. gezeigt wurde, wird die Geschwindigkeit zur Zeit t (Momentangeschwindigkeit) durch den Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit v_m für $\Delta t \to 0$ angegeben.

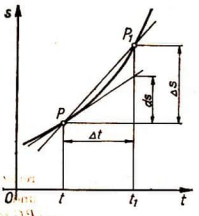


Bild 117

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Betrachtet man nun die Änderung der Geschwindigkeit $v = f(t)$, bezogen auf das Zeitintervall Δt, so führen dieselben Überlegungen zu dem Begriff der mittleren Beschleunigung während der Zeit Δt. Also ist die mittlere Beschleunigung

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

und die momentane Beschleunigung zur Zeit t

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Da aber die Geschwindigkeit v bereits die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion ist, ist die Beschleunigung a die zweite Ableitung, also $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.

Die Ableitung nach der Zeit t wird häufig auch mit einem Punkt und die zweite Ableitung nach t mit zwei Punkten angegeben. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$v = \dot{s},$$

$$a = \ddot{s} = \dot{v}.$$

Ein anderer Begriff, der sich in Form des Differentialquotienten ausdrücken läßt, ist die Leistung. Bekanntlich wird die Leistung P als Quotient aus der Arbeit W und der Zeit t definiert. Diese Definition gilt aber nur, wenn in gleichen Zeitintervallen Δt immer die gleiche Arbeit ΔW vorliegt. Ist das nicht der Fall, dann kann man die Leistung nur definieren mit Hilfe des Differentialquotienten

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Die Wärmemenge ΔQ, die notwendig ist, um die Temperatur T eines Körpers um den Betrag ΔT zu erhöhen, ist durch die Gleichung

$$\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

gegeben. Hierin ist m die Masse des Körpers und c seine spezifische Wärme. Aus dieser Beziehung folgt für die spezifische Wärme

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn c unabhängig von der Temperatur T ist. Das ist im allgemeinen nicht der Fall, und man erhält eine exakte Definition der spezifischen Wärme erst dann, wenn der Grenzwert für $\Delta T \to 0$ gebildet wird:

$$c = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

Neben diesen hier angeführten Anwendungen gibt es noch eine Reihe anderer aus den verschiedensten Gebieten, und zwar wendet man den Differentialquotienten immer dann an, wenn sich eine Größe in Näherung als Differenzenquotient darstellen läßt, für die exakte Darstellung aber der Nenner nach Null streben muß. Es würde hier zu weit führen, wollte man alle Anwendungen als Beispiel anführen. Später bei der Integralrechnung und den Differentialgleichungen wird nochmals an Hand der verschiedensten technischen Anwendungen die außerordentliche Wichtigkeit und Nützlichkeit der höheren Mathematik für den Techniker gezeigt werden.

BEISPIEL

Der Schwerpunkt eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 im luftleeren Raum senkrecht nach unten geworfenen Körpers bewegt sich nach dem Gesetz $s = {}^1/_2 g t^2 + v_0 t$. Hieraus folgt durch Differenzieren die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v = \dot{s} = g t + v_0$$

und die Beschleunigung

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = g.$$

AUFGABEN

221. Man bestimme für das Weg-Zeit-Gesetz $s = (15\ \mathrm{m/s})\, t - (0{,}075\ \mathrm{m/s^2})\, t^2$ (gleichförmig verzögerte Bewegung) das Geschwindigkeits- und das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz. Wie groß sind die Bremszeit und der Bremsweg?

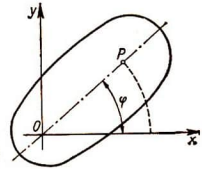


Bild 118

222. Für die Drehbewegung sind die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung α aus dem Drehwinkel φ [φ ist der Winkel, um den sich der Strahl OP in der Zeit t gedreht hat, also $\varphi = f(t)$, Bild 118] zu bestimmen.

223. Die Weg-Zeit-Gleichung einer vom Stillstand aus beschleunigten Bewegung sei $s = (0{,}525\ \mathrm{m/s^2})\, t^2 - (0{,}05\ \mathrm{m/s^3})\, t^3$. Die Bewegung verlaufe 3 s nach diesem Gesetz. Wie heißen die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungs-Zeit-Gleichung?
Es sollen die Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Zeit-Schaubilder gezeichnet werden. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 3 s?

5.3. Grenzwertbestimmung nach der Regel von de l'Hospital

Wenn in einer gebrochenen Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $x = x_0$ sowohl $u(x_0) = 0$ als auch $v(x_0) = 0$ ist, so nimmt die Funktion als Funktionswert den Ausdruck

$$f(x_0) = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{0}{0}$$

an. DieserAusdruck 0/0 hat keinen Sinn. Die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert. Besitzt aber $f(x)$ für $x \to x_0$ einen Grenzwert, so kann man diesen Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = x_0$ als Funktionswert zuordnen und so die Lücke der Funktion beheben. Es soll nun untersucht werden, wie man den Grenzwert für $x \to x_0$ der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ findet, wenn $u(x_0) = v(x_0) = 0$ ist, also $f(x)$ die sinnlose Form 0/0 annimmt. Bei der Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$$

untersucht man die Funktion in der Umgebung für $x = x_0$, indem man x_0 um Δx ändert. Es ist nun

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)}.$$

Da nach Voraussetzung $u(x_0) = v(x_0) = 0$ ist, kann man auch schreiben

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch Δx, so ergibt sich

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{\dfrac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}{\dfrac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}}.$$

Durch diese Umformung stehen jetzt im Zähler und im Nenner die Differenzenquotienten von $u(x)$ und $v(x)$ für das Intervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen u und v an der Stelle x_0 differenzierbar sind, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0)$$

und

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} = v'(x_0).$$

Dann ist auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Man erhält also den Grenzwert der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $x \to x_0$, indem man Zähler und Nenner für sich differenziert und für x den Wert x_0 einsetzt. Sollten auch $u'(x_0) = v'(x_0) = 0$ sein, so kann man dieses Verfahren auch auf $\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ ausdehnen (wieder unter der Voraussetzung, daß u' und v' an der Stelle x_0 differenzierbar sind). Zusammengefaßt ergibt sich die folgende

Regel von de l'Hospital

Man findet den Grenzwert einer Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $x \to x_0$, wenn $u(x_0) = v(x_0) = 0$, indem man den Quotienten aus den Ableitungen an der Stelle $x = x_0$ bildet. Sollten auch $u'(x_0) = v'(x_0) = 0$ sein, so bildet man den Quotienten aus den Ableitungen $u''(x_0)$ und $v''(x_0)$ usw. Voraussetzung ist, daß die Funktionen u und v an der Stelle $x = x_0$ so oft differenzierbar sind, wie es benötigt wird.

Diese Regel gilt auch dann, wenn Zähler und Nenner der Funktion für $x = x_0$ unendlich groß werden, wenn also $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \infty$ und damit $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ für $x = x_0$ die Form ∞/∞ annimmt. Auf den Beweis soll hier verzichtet werden.

Die Formen $0/0$ und ∞/∞ werden oft als unbestimmte Ausdrücke bezeichnet, die jeden Wert annehmen können. Man beachte aber, daß diese Formen an sich sinnlos sind. Erst die Tatsache, daß diese Formen aus Funktionswerten für einen bestimmten Wert $x = x_0$ entstehen, gibt die Möglichkeit, daß man als Grenzwert einen Wert bestimmen kann, der natürlich nicht von $0/0$ oder ∞/∞ abhängt, sondern durch die jeweiligen Funktionen gegeben ist. Da diese Grenzwerte je nach den gegebenen Funktionen verschieden sind, entstand für $0/0$ bzw. ∞/∞ die Bezeichnung unbestimmter Ausdruck.

Andere sogenannte unbestimmte Ausdrücke sind die Formen $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞ und $\infty - \infty$. Man beachte aber, daß es sich immer um Ausdrücke $u(x) \cdot v(x)$, $u(x)^{v(x)}$, $1^{v(x)}$ und $u(x) - v(x)$ handelt, die für $x = x_0$ eine dieser Formen annehmen. Für diese Fälle muß man durch Umformen die Ausdrücke $0/0$ oder ∞/∞ herstellen und dann obige Regel anwenden.

BEISPIELE

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{3x^2 - 15x + 18}$.

   Setzt man $x = 3$, so ergibt sich die Form $0/0$. Differenziert man Zähler und Nenner getrennt und bildet den Quotienten für $x = 3$, so erhält man den Wert $2/3$. Zusammenhängend ge-

schrieben sieht das wie folgt aus:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{3x^2-15x+18}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-12x+11}{6x-15}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=\underline{\underline{0}}.$

Bei diesem Beispiel mußte die Regel von DE L'HOSPITAL mehrmals angewendet werden.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$

Hier ergibt sich die Form $0\,(-\infty)$. Durch Umformen kann man die Form ∞/∞ erreichen, also

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=\underline{\underline{0}}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x^2}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-3x^2}{3x^2\sin x+x^2\cos x}=\underline{\underline{\infty}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. Bei diesem Beispiel wird erst der Grenzwert von $\ln x^x=x\cdot\ln x$ untersucht (vgl. Beispiel 3), um dann auf den Grenzwert von x^x zu schließen. Es ist also $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}=$
$=e^0=\underline{\underline{1}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\underline{\underline{\dfrac{1}{6}}}.$

AUFGABEN

224. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{\cos 3x}$

225. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{3x^2-15x+18}$

226. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[5]{2x^5-32}}{\sqrt[3]{x^3-8}}$

227. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$

228. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

229. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\cos x}\right)$

230. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right)$

231. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

232. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$

233. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$

234. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-a)^{\frac{1}{x-a}}$

235. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^n}{1-x}$

236. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{30-x}}{\sqrt{2x-1}-3\sqrt{6-x}}$

237. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

238. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

239. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^3-7x+6}$

240. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$

241. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\left(\frac{3}{2}x\right)}{\cos\frac{x}{2}}$

242. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

243. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\sin x}$

6. Weitere transzendente Funktionen und ihre Ableitungen

6.1. Die Arcusfunktionen

6.1.1. Definition der Arcusfunktionen und ihre Darstellung

Die *Arcusfunktionen* sind die *inversen Funktionen* zu den *trigonometrischen*. Da die trigonometrischen Funktionen im ganzen Definitionsbereich nicht streng monoton sind, existieren keine eindeutigen Umkehrabbildungen. Um die Forderung der eindeutigen Zuordnung zu erfüllen, bildet man die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen nur in bestimmten Intervallen. Die Sinusfunktion ist im Intervall $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq+\frac{\pi}{2}$ streng monoton. Es existiert also in diesem Bereich eine Umkehrfunktion, diese ist die Arcussinusfunktion. Es ist also zu

$$f_1=\left\{(x;y)\mid y=\sin x;\, x\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right];\, y\in[-1;+1]\right\}$$

die Umkehrfunktion

$$f_1^{-1}=\left\{(x;y)\mid y=\arcsin x;\, x\in[-1;+1];\, y\in\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]\right\}\qquad(53a)$$

Das bedeutet also, daß die Arcusfunktion $y=\arcsin x$ die Umkehrfunktion der Funktion $y=\sin x$ im Definitionsbereich $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq+\frac{\pi}{2}$ ist. In Bild 119 ist die Bedeutung von x und y der Funktion $y=\arcsin x$ am Einskreis veranschaulicht. Es ist also x der Sinus des Winkels y (y in Bild 119 ist die Maßzahl der Länge des Bogens am Einskreis).

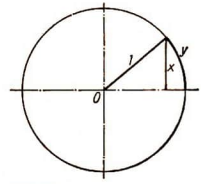


Bild 119

Die Umkehrfunktionen zu den anderen trigonometrischen Funktionen werden entsprechend gebildet. Die Monotonieintervalle, in denen die Arcusfunktionen als

Umkehrungen der trigonometrischen definiert werden, sind

für die Funktion $y = \cos x$ das Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$

für die Funktion $y = \tan x$ das Intervall $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

für die Funktion $y = \cot x$ das Intervall $0 < x < \pi$.

Es sind also zu den Funktionen

$$f_2 = \{(x; y) \mid y = \cos x;\ x \in [0; \pi];\ y \in [-1; 1]\}$$

$$f_3 = \left\{(x; y) \mid y = \tan x;\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);\ y \in (-\infty; \infty)\right\}$$

$$f_4 = \{(x; y) \mid y = \cot x;\ x \in (0; \pi);\ y \in (-\infty; \infty)\}$$

die Umkehrfunktionen

$$f_2^{-1} = \{(x; y) \mid y = \arccos x;\ x \in [-1; 1];\ y \in [0; \pi]\} \tag{54a}$$

$$f_3^{-1} = \left\{(x; y) \mid y = \arctan x;\ x \in (-\infty; \infty);\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{55a}$$

$$f_4^{-1} = \{(x; y) \mid y = \operatorname{arccot} x;\ x \in (-\infty; \infty);\ y \in (0; \pi)\} \tag{56a}$$

Die Arcusfunktionen schreibt man auch kürzer

$$\boxed{y = \arcsin x} \tag{53b}$$

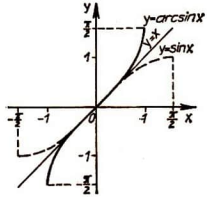
$$\boxed{y = \arccos x} \tag{54b}$$

$$\boxed{y = \arctan x} \tag{55b}$$

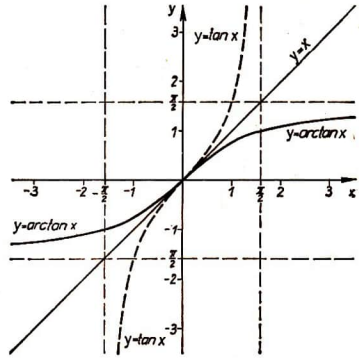
$$\boxed{y = \operatorname{arccot} x} \tag{56b}$$

und versteht darunter die Funktionen, die durch die Beziehungen (53a) bis (56a) definiert sind.
Es ist z. B. $\arcsin(-0{,}5) = -\frac{\pi}{6}$; $\arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(-0{,}5) = \frac{2\pi}{3}$ usw. In den Bildern 120a ··· 120d sind die Arcusfunktionen mit den Umkehrungen dargestellt.
Für die Arcusfunktionen seien noch einige Beziehungen angegeben. Es gelten folgende Gleichungen:

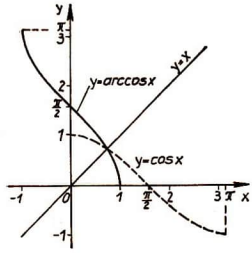
$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}} \tag{57}$$



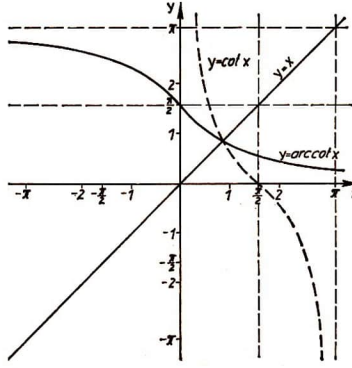
a



c



b



d

Bild 120

und

$$\boxed{\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}} \tag{58}$$

Bekanntlich ist $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Setzt man beide Ausdrücke gleich x, also

$$x = \sin z$$

und

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

so erhält man durch Umkehrung

$$z = \arcsin x$$

$$\frac{\pi}{2} - z = \arccos x,$$

daraus folgt durch Addition die Beziehung (57)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Entsprechend kann man auch die Beziehung (58) beweisen.

6.1.2. Differentiation der Arcusfunktionen

Die Ableitungen der Arcusfunktionen lassen sich sehr leicht mit Hilfe der Ableitungen der trigonometrischen Funktionen bestimmen. Aus

$$y = \arcsin x$$

folgt

$$x = \sin y$$

oder

$$x - \sin y = 0.$$

Dieser Ausdruck ist eine Funktion in impliziter Darstellung, die sich unter Beachtung, daß y Funktionswert einer Funktion in x ist, mit Hilfe der Kettenregel (vgl. 3.6.) differenzieren läßt. Also erhält man durch Differentiation

$$1 - \cos y \cdot y' = 0$$

oder daraus

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Da aber $\sin y = x$ und $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ist, folgt für die Ableitung

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

oder auch

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{59}$$

Für die Funktion

$$y = \arccos x$$

folgt nach (57)

$$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

und nach (59) folgt sofort

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bzw.

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{60}$$

Die beiden Funktionen $y = \arcsin x$ und $y = \arccos x$ sind zwar für $x \in [-1; +1]$ definiert, aber nach (59) und (60) nur für $x \in (-1; +1)$ differenzierbar.
Für die Ableitung von $y = \arctan x$ ergibt sich folgender Rechengang:

$$x = \tan y$$

$$x - \tan y = 0$$

$$1 - (1 + \tan^2 y)\, y' = 0$$

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

bzw.

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}} \tag{61}$$

Für $y = \operatorname{arccot} x$

folgt nach (58)

$$y = \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

und nach (61) folgt sofort

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

bzw.

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}} \tag{62}$$

BEISPIELE

1. Als Ableitung der Funktion $y = \arcsin 2x$ folgt

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

2. Die Ableitung von $y = x^2 \cdot \arctan x$ ist

$$y' = \frac{x^2}{1 + x^2} + 2x \cdot \arctan x.$$

3. Die Ableitung von $y = \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arccos} x}$ ist

$$y' = \frac{\operatorname{arccos} x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}\,(\operatorname{arccos} x)^2}.$$

Da nach Gleichung (57) $\operatorname{arccos} x + \arcsin x = \pi/2$ ist, folgt

$$y' = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}\,(\operatorname{arccos} x)^2}.$$

AUFGABEN

Es sollen die Ableitungen folgender Funktionen gebildet werden.

244. $y = \arcsin \dfrac{x}{a}$

245. $y = \arcsin (ax)$

246. $y = x \cdot \arcsin x$

247. $y = x \cdot \operatorname{arccos} \dfrac{x}{a}$

248. $y = \arctan \dfrac{x}{a}$

249. $y = x \cdot \operatorname{arccot} \dfrac{x}{a}$

250. $y = x^n \cdot \arcsin x$

251. $y = \arcsin x + \operatorname{arccos} x$

252. $y = \arcsin (1 - x)$

253. $y = \operatorname{arccos} \dfrac{1}{x}$

254. $y = \arctan \sqrt{x}$

255. $y = x \cdot \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$

256. $y = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$

257. $y = x \cdot \operatorname{arccot} x$

258. $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

259. $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

260. $y = \operatorname{arccot} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

261. $y = 2 \arctan e^x$

6.2. Die Hyperbelfunktionen

6.2.1. Definition der Hyperbelfunktionen und ihre Darstellung

Eine Reihe physikalischer und technischer Probleme führen auf gewisse Exponentialausdrücke, die man als neue Funktionen definiert. Diese Funktionen zeigen ein ähnliches Verhalten wie die trigonometrischen Funktionen (Kreisfunktionen), und da sich ihre Argumente und Funktionswerte an der gleichseitigen Hyperbel mit der

reellen Halbachse 1 in ähnlicher Weise darstellen lassen wie die trigonometrischen Funktionen am Einskreis, nennt man diese Funktionen **Hyperbelfunktionen**. Bei den unendlichen Reihen wird gezeigt werden, daß noch ein weiterer enger Zusammenhang der Hyperbelfunktionen mit den trigonometrischenFunktionen besteht. Da an dieser Stelle auf diesen Zusammenhang noch nicht näher eingegangen werden kann, sollen hier die Hyperbelfunktionen nur durch ihre Exponentialausdrücke erklärt werden. Zum Beispiel bezeichnet man den Ausdruck $^1/_2\,(e^x - e^{-x})$ als *Hyperbelsinus* (auch *hyperbolischer Sinus* oder *Sinus hyperbolicus*) und schreibt dafür kurz $\sinh x$, $^1/_2(e^x + e^{-x})$ heißt Hyperbelcosinus, geschrieben $\cosh x$. Die **Hyperbelsinusfunktion** ist definiert durch

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{63}$$

die **Hyperbelcosinusfunktion** durch

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{64}$$

Der Quotient aus Hyperbelsinus und Hyperbelcosinus heißt *Hyperbeltangens*, und die **Hyperbeltangensfunktion** lautet

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{65}$$

Der Kehrwert des Hyperbeltangens ist der *Hyperbelcotangens* und die **Hyperbelcotangensfunktion**

$$y = \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{66}$$

In Bild 121a sind die Funktionen $y = \frac{e^x}{2}$ und $y = \frac{e^{-x}}{2}$ dargestellt. Subtrahiert bzw. addiert man die Ordinaten dieser Kurven, so ergeben sich die Kurven der Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$, die ebenfalls in Bild 121a dargestellt sind. Da e^{-x} mit wachsendem x gegen Null geht, gilt für große x die Näherungsformel

$$\sinh x \approx \frac{e^x}{2} \approx \cosh x.$$

Der Kurvenverlauf der Funktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ ist aus Bild 121b ersichtlich. Aus diesem Bild und aus den Gleichungen (65) und (66) kann man für große x ebenfalls eine Näherungsformel ableiten:

$$\tanh x \approx \coth x \approx 1.$$

Man kann dies auch wie folgt schreiben:

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \coth x = 1$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = \lim_{x \to -\infty} \coth x = -1.$$

Das bedeutet also, daß die Funktionswerte der beiden Funktionen für größer werdende x sich immer mehr dem Wert $+1$ und für kleiner werdende x immer mehr dem Wert -1 nähern. Die Geraden mit den Gleichungen $y = 1$ und $y = -1$ sind Asymptoten an den Kurven der Funktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$.

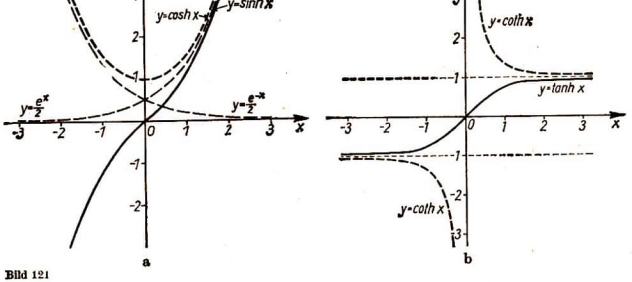


Bild 121

Weiterhin ist aus Bild 121 b wie auch aus der Beziehung (66) zu ersehen, daß $y = \coth x$ für $x = 0$ keinen Funktionswert hat. Die Funktion ist an dieser Stelle unstetig. Die Funktionswerte von $y = \tanh x$ liegen alle im Bereich $-1 < y < +1$ und die von $y = \coth x$ in den Bereichen $-\infty < y < -1$ und $+1 < y < +\infty$. Nachfolgend sind die Hyperbelfunktionen mit ihren Definitions- und Wertebereichen zusammengestellt:

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \sinh x$	$x \in R$	$x \in R$
$y = \cosh x$	$x \in R$	$y \in [+1; +\infty)$
$y = \tanh x$	$x \in R$	$y \in (-1; +1)$
$y = \coth x$	$x \in R \setminus \{0\}$	$y \in (-\infty; -1) \cup (+1; +\infty)$

6.2.2. Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

Zwischen den Hyperbelfunktionen lassen sich ähnliche Beziehungen aufstellen wie zwischen den trigonometrischen Funktionen. Hier sollen die wichtigsten Beziehungen angegeben werden. Die Beweise dieser Formeln lassen sich leicht mit Hilfe der Definitionsgleichungen (63) bis (66) führen. Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (64) und (63) erhält man:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

und

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$$

Setzt man für x den Wert $-x$ ein, so ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sinh(-x) = -\sinh x; & \cosh(-x) = \cosh x \\ \tanh(-x) = -\tanh x; & \coth(-x) = -\coth x \end{array}} \tag{67}$$

Durch Quadrieren von $\cosh x$ und $\sinh x$ und durch Subtrahieren ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \tag{68}$$

Es gelten die Additionstheoreme

$$\boxed{\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y} \tag{69}$$

$$\boxed{\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y} \tag{70}$$

Aus diesen folgt sofort für $y = x$

$$\boxed{\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x} \tag{69a}$$

und

$$\boxed{\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x} \tag{70a}$$

Aus den hier angeführten Beziehungen ist zu erkennen, daß für die Hyperbelfunktionen fast die gleichen Formeln gelten wie für die trigonometrischen Funktionen. Zu beachten ist jedoch, daß die entsprechenden Formeln der Trigonometrie zum Teil andere Vorzeichen bzw. Rechenzeichen haben.

6.2.3. Differentiation der Hyperbelfunktionen

Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen lassen sich sofort aus den Gleichungen (63) bis (66) bestimmen. Aus

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

folgt unter Beachtung, daß $(e^x)' = e^x$ und $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ist, für die Ableitung

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Die Ableitung des hyperbolischen Sinus ist also der hyperbolische Cosinus. Auf ähnlichem Wege ergibt sich für die Ableitung des Hyperbelcosinus der Hyperbelsinus. Es gilt also

$$\boxed{(\sinh x)' = \cosh x} \tag{71}$$

und

$$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x} \tag{72}$$

Für $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

folgt mit Hilfe der Quotientenregel

$$y' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x},$$

und da nach Formel (68) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ist, ergibt sich für die Ableitung des hyperbolischen Tangens

$$\boxed{(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}} \tag{73}$$

Auf gleichem Wege ergibt sich die Ableitung des Hyperbelcotangens:

$$\boxed{(\coth x)' = 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x}} \tag{74}$$

BEISPIELE

1. Die Ableitung von $y = 2 \sinh \dfrac{x}{2}$ ist

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{x}{2}.$$

2. Die Ableitung von $y = \ln \cosh (2x)$ ist

$$y' = \frac{2 \sinh (2x)}{\cosh (2x)} = 2 \tanh (2x).$$

AUFGABEN

Man bilde die Ableitung folgender Funktionen:

262. $y = \sinh x \cosh x$ 263. $y = \dfrac{1}{\cosh x}$

264. $y = \dfrac{1}{\sinh x \cosh x}$

265. $y = x \cdot \cosh x$

266. $y = \ln \sinh x$

267. $y = \ln \tanh (2x + 3)$

268. $y = \ln \cosh (ax + b)$

269. $y = \cosh^2 x$

270. $y = \dfrac{1}{2} \coth 2x$

271. $y = e^{\cosh x}$

272. $y = \dfrac{\sinh x \cdot \cosh x}{2} + \dfrac{x}{2}$

273. $y = \dfrac{1}{2}(x^2 + \sinh^2 x)$

6.3. Die Areafunktionen

6.3.1. Definition der Areafunktionen und ihre Darstellung

Um die Umkehrungen der Hyperbelfunktionen zu bilden, führt man wieder ein neues Funktionssymbol ein. Zum Beispiel ergibt sich aus

$$y = \sinh x$$

durch Vertauschen der Veränderlichen

$$x = \sinh y$$

und beim Auflösen nach y schreibt man mit dem neuen Funktionssymbol

$$y = \operatorname{arsinh} x,$$

gelesen: y gleich area[1]) sinus hyperbolicus x.
Entsprechend ergibt sich

zur Hyperbelfunktion:	die Umkehrfunktion:
$y = \cosh x$ für $x \geqq 0$	$y = +\operatorname{arcosh} x$
$y = \cosh x$ für $x \leqq 0$	$y = -\operatorname{arcosh} x$
$y = \tanh x$	$y = \operatorname{artanh} x$
$y = \coth x$	$y = \operatorname{arcoth} x$.

Man nennt diese Funktionen die **Areafunktionen**. Dieser Name erklärt sich aus der Tatsache, daß diese Funktionen, wie noch in 6.4. gezeigt wird, mit dem Flächeninhalt eines Hyperbelsektors zusammenhängen.
Die Funktionskurven der Areafunktionen ergeben sich aus den Kurven der Hyperbelfunktionen durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ jeweils in einem Bereich, in dem sie streng monoton sind. In den Bildern 122a und b sind die Kurven der Areafunktionen gezeichnet. Aus diesen Bildern ist sofort zu ersehen, daß $y = \operatorname{arsinh} x$ für alle x erklärt ist, $y = \operatorname{arcosh} x$ nur für $x \geqq 1$, $y = \operatorname{artanh} x$ für $|x| < 1$ und $y = \operatorname{arcoth} x$ für $|x| > 1$.

[1]) area (lat.), die Fläche

Die Areafunktionen lassen sich auch ohne Einführung eines neuen Funktionssymbols darstellen, da die Hyperbelfunktionen zusammengesetzte Exponentialfunktionen sind. Bildet man nun zu diesen die Umkehrungen, so ergeben sich logarithmische Funktionen. Nachfolgend soll der Weg für eine Funktion gezeigt werden. Aus

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

folgt

$$x = \sinh y$$

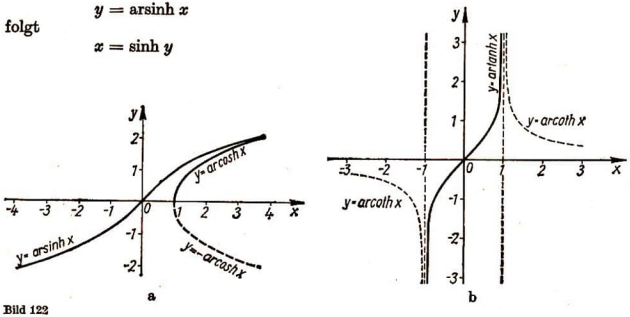


Bild 122

und nach Gleichung (63) ist

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Also ist

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Diese Beziehung soll nach y aufgelöst werden. Man isoliert zunächst e^y, also

$$e^y - e^{-y} = 2x.$$

Durch Multiplikation mit e^y erhält man

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^y. Aus dieser ergibt sich

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Da e^y für alle reellen y positiv ist, kommt nur das positive Vorzeichen in Frage, und es folgt

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Da aber bei dieser Entwicklung von $y = \operatorname{arsinh} x$ ausgegangen wurde, ist

$$\boxed{y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{75}$$

In gleicher Weise lassen sich die anderen Areafunktionen darstellen. Durch Umkehrung der Funktion $y = \cosh x$ im Intervall $0 \leqq x < \infty$ erhält man die Funktion

$$\boxed{y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{für} \quad x \geqq 1} \tag{76}$$

Die durch Umkehrung der Funktion $y = \cosh x$ im Intervall $-\infty < x \leqq 0$ gebildete Umkehrfunktion ist (unterer Ast in Bild 122a)

$$y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \ln \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = -\operatorname{arcosh} x.$$

Als Umkehrfunktionen zu $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ erhält man

$$\boxed{y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ für } |x| < 1} \tag{77}$$

$$\boxed{y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \text{ für } |x| > 1} \tag{78}$$

Hinter den Gleichungen sind die Definitionsbereiche angegeben, die bereits aus den Bildern 122a und b zu erkennen waren.
Nachfolgend sind die Areafunktionen mit ihren Definitions- und Wertebereichen zusammengestellt:

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = \operatorname{arsinh} x$	$x \in R$	$y \in R$
$y = \operatorname{arccos} x$	$x \in [+1, +\infty)$	$y \in [0, +\infty)$
$y = \operatorname{artanh} x$	$x \in (-1, +1)$	$y \in R$
$y = \operatorname{arcoth} x$	$x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$	$y \in R \setminus \{0\}$.

6.3.2. Differentiation der Areafunktionen

Die Ableitungen der Areafunktionen kann man entweder mit Hilfe ihrer Umkehrungen, der Hyperbelfunktionen, oder direkt aus den logarithmischen Funktionen (75) bis (78) erhalten. Der Weg über die Hyperbelfunktionen ist ähnlich dem, der in 6.1.2. bei den Arcusfunktionen benutzt wurde. Benutzt man den Weg über die logarith-

mischen Funktionen, so ergibt sich für

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Also

$$\boxed{(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \tag{79}$$

In gleicher Weise kann man auch die Ableitungen der drei anderen Areafunktionen bestimmen. Es ergeben sich folgende Formeln:

$$\boxed{(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ für } x > 1} \tag{80}$$

$$\boxed{(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ für } |x| < 1} \tag{81}$$

$$\boxed{(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ für } |x| > 1} \tag{82}$$

Aus der Beziehung (80) ergibt sich ein Unterschied zwischen Definitionsbereich und Differenzierbarkeitsbereich der Funktion $y = \operatorname{arcosh} x$. Definiert ist diese Funktion für $x \in [+1, +\infty)$ und differenzierbar für $x \in (+1, +\infty)$.

BEISPIELE

1. Die Ableitung von $y = \operatorname{arcosh}(2x + 3)$ ist

$$y' = \frac{2}{\sqrt{(2x+3)^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+12x+8}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}.$$

2 Die Ableitung von $y = \operatorname{artanh} \frac{x}{2}$ ist

$$y' = \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4-x^2}.$$

AUFGABEN

Man differenziere folgende Funktionen:

274. $y = 2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{2}$

275. $y = \sqrt{\operatorname{artanh} 2x}$

276. $y = \frac{1}{3} \operatorname{arcosh} 6x$

277. $y = \operatorname{arcosh} \frac{1}{1-x}$

278. $y = x\,\operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1 - x^2)$

279. $y = x\,\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$

280. $y = x\,\operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 1)$

281. $y = \operatorname{arcoth}(1 + x^2)$

282. $y = \operatorname{artanh} \frac{2x}{1 + x^2}$

283. $y = \operatorname{arcoth} \frac{1}{x}$. Für welchen Bereich von x gilt die für diese Funktion berechnete Ableitung?

6.4. Beziehungen zwischen der gleichseitigen Hyperbel und den Hyperbelfunktionen

Zwischen den Hyperbelfunktionen und der gleichseitigen Hyperbel besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen dem Kreis und den trigonometrischen Funktionen. In Bild 123 sind zum Vergleich die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen am Einskreis gezeichnet. Für den Punkt $P(x; y)$ in Bild 123 folgt

$$x = \cos t$$

und

$$y = \sin t.$$

Hierin bedeutet t den Winkel, der vom Strahl OP und der positiven x-Achse eingeschlossen wird. Man kann aber auch t als Maßzahl der doppelten Fläche des in Bild 123 schraffierten Sektors deuten, denn für den Flächeninhalt des schraffierten Sektors gilt $\frac{A}{[A]} = 0{,}5\,\frac{b}{[b]}\,\frac{r}{[r]} = 0{,}5 \cdot t$ und $t = 2\,\frac{A}{[A]}$.

Aus obigen Gleichungen folgt durch Quadrieren

$$x^2 = \cos^2 t,$$

$$y^2 = \sin^2 t$$

und durch Addieren

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t.$$

Mit der bekannten Beziehung $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt

$$x^2 + y^2 = 1.$$

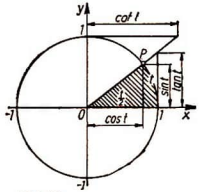


Bild 123

Dies ist aber die Gleichung des Einskreises.

Zwischen den Hyperbelfunktionen und der gleichseitigen Hyperbel mit den Halbachsen $a = b = 1$ besteht ein ähnlicher Zusammenhang. Setzt man

$$x = \cosh t$$

und

$$y = \sinh t,$$

so ergibt sich durch Quadrieren

$$x^2 = \cosh^2 t$$

und

$$y^2 = \sinh^2 t.$$

Durch Subtrahieren erhält man die Gleichung

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t.$$

Nun ist aber nach Gleichung (68) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und damit folgt

$$x^2 - y^2 = 1.$$

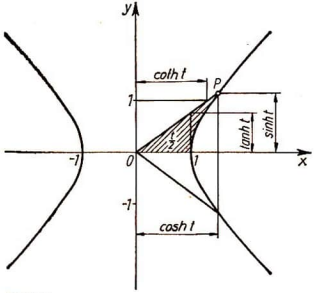


Bild 124

Dies ist aber die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel mit den Halbachsen $a = b = 1$. Aus dieser Entwicklung folgt eine Darstellung der Funktionswerte der Hyperbelfunktionen an dieser gleichseitigen Hyperbel (Bild 124), ähnlich der Darstellung der Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen am Einskreis. Der Wert t ist die Maßzahl für die doppelte Fläche des in Bild 124 schraffierten Sektors. Der Beweis dafür bleibt der Integralrechnung vorbehalten und wird in 13.4. durch Ausrechnung der Sektorfläche geführt.

7. Einführung in die Integralrechnung

7.1. Der Begriff des unbestimmten Integrals; Flächenfunktion

In vielen Gebieten unseres modernen Lebens sind Flächenberechnungen erforderlich. Die Geometrie der Ebene — Planimetrie — hält einen umfangreichen Bestand an Formeln bereit, mit denen man den Flächeninhalt von Quadrat, Rechteck, Kreis usw. berechnen kann. Dennoch bleibt zu bedenken, daß die Planimetrie nur relativ ein-

fache Flächen zu bestimmen gestattet. Die Frage nach dem Inhalt einer Fläche sei deshalb ganz allgemein gestellt.

Es soll der Inhalt einer Fläche berechnet werden, die oben von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, unten von der x-Achse und seitlich von zwei Geraden parallel zur y-Achse begrenzt wird (Bild 125).

Der allgemeine Charakter der Problemstellung kommt in der allgemeinen Wahl der Funktion f zum Ausdruck, die lediglich im betrachteten Intervall stetig sein soll. Die Annahme nur positiver Funktionswerte ist keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit, wie man später sehen wird. Die linksseitige Begrenzung (sogenannte *untere Grenze*) sei $x = a$, während die rechte vorerst variabel gelassen werden soll. Deshalb kann noch keine eindeutige Flächenbestimmung erfolgen. Der Flächeninhalt A ist abhängig von der rechten Begrenzung, der *oberen Grenze* x, also ist $A = F(x)$.

Zur Berechnung des Flächeninhalts erteilt man der rechten seitlichen Begrenzung x einen Zuwachs $\Delta x = \overline{NQ}$ und damit dem zugehörigen $y = \overline{NP_2}$ den Zuwachs $\Delta y = \overline{RP_3}$. Dadurch wird die Fläche um $\Delta F(x) = NQP_3P_2$ vergrößert.

Dieser Flächenzuwachs ist dem Inhalt geeigneter Rechtecke ungefähr gleich. Das Rechteck $NQRP_2$ hat den Inhalt $y\,\Delta x$, wobei für monoton wachsende Funktionen f die Ungleichung

$$y\,\Delta x \leqq \Delta F(x)$$

besteht.

Das Rechteck NQP_3S hat den Inhalt

$$(y + \Delta y)\,\Delta x,$$

wobei jetzt

$$(y + \Delta y)\Delta x \geqq \Delta F(x) \text{ ist.}$$

Mithin folgt

$$y\Delta x \leqq \Delta F(x) \leqq (y + \Delta y)\Delta x$$

$$y \leqq \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \leqq y + \Delta y.$$

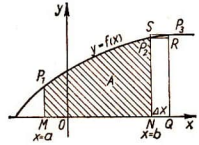


Bild 125

Wegen der Stetigkeit der Funktion f geht für $\Delta x \to 0$ auch $\Delta y \to 0$. Also gilt für den Grenzfall $P_3 \to P_2$

$$y \leqq \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \leqq y.$$

Daraus folgt aber

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = y = f(x)} \tag{83}$$

Die Gleichung besagt:

Der Differentialquotient der gesuchten Flächenfunktion F ist die Funktion f, d. h. diejenige Funktion, deren Kurve die Fläche von oben begrenzt.

Die Beziehungen ändern sich nicht, wenn man keine monoton wachsenden, sondern monoton fallende oder stückweise wachsende und fallende Funktionen wählt, deren Kurven die Fläche von oben begrenzen. Die Frage nach dem Inhalt der schraffierten Fläche des Bildes 125 ist damit noch nicht beantwortet. Das erklärt sich daraus, daß bei der Herleitung der Beziehung (83) in keiner Weise auf die für den Inhalt doch wesentliche seitliche Begrenzung eingegangen wurde.
Dieses Problem wird in 7.2. weiter verfolgt. Hier ist zunächst eine sehr wichtige Verbindung der Fragestellung mit dem Differentialquotienten zu erkennen.
Beim Differenzieren war eine Funktion f gegeben und deren Ableitungsfunktion f' gesucht. Betrachtet man (83), so ist ersichtlich, daß die Ableitungsfunktion F' der gesuchten Flächenfunktion F gleich einer Funktion f ist, deren Kurve die Fläche von oben begrenzt. Es handelt sich hier also um die Umkehrung des Problems der Differentialrechnung, die sehr wichtig ist und häufig auftritt. Das Gebiet der Mathematik, das sich damit beschäftigt, heißt **Integralrechnung**. Die Tätigkeit wird **Integrieren** genannt.

Die Differentialrechnung sucht zur gegebenen Funktion f deren Ableitungsfunktion f'. Die Integralrechnung bestimmt zur gegebenen Ableitungsfunktion F' die Funktion F.

Durch die Einführung eines Symbols geht man einer umständlichen Schreibweise aus dem Wege.
Ist eine Funktion $f = \{(x; y) \mid y = f(x)\}$ gegeben und eine Funktion $F = \{(x; y) \; y = F(x)\}$ gesucht, die die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt, dann schreibt man

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x), \tag{I}$$

gelesen: Integral über $f(x)\,\mathrm{d}x$ gleich $F(x)$.
Man nennt $f(x)$ den **Integranden**, x die **Integrationsvariable** und F eine zugehörige **Stammfunktion** oder **Integralfunktion** von f. Das $\mathrm{d}x$ gibt zu erkennen, daß x die Integrationsvariable ist. Über den tieferen Sinn des $\mathrm{d}x$ und der Wahl des Symbols $\int$ gibt 7.2. Auskunft.

BEISPIELE

1. $\int x\,\mathrm{d}x = ?$
   (Fragestellung: Welcher Term ergibt differenziert den Term x?)
   $$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$$
2. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = ?$
   (Fragestellung: Welcher Term ergibt differenziert den Term $\sin x$?)
   $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Sind die in den Beispielen 1. und 2. gefundenen Stammfunktionen die einzig möglichen, sind die Resultate eindeutig?
Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß die Differentiation einer additiven Konstanten Null ergibt.

Somit ist jede der Funktionen

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ (+0),\quad F(x) = \frac{x^2}{2} + 3,\quad F(x) = \frac{x^2}{2} - 10,$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \in R)$$

Integralfunktion oder Stammfunktion von $y = f(x) = x$.
Alle sind jedoch nur einzelne Elemente der Menge aller Stammfunktionen.
Die *Menge aller Stammfunktionen* heißt auch *allgemeine Lösung* des Integrals. Jede Belegung von C liefert ein spezielles Element der Menge, eine spezielle Stammfunktion oder, wie man sagt, eine *partikuläre Lösung* des Integrals.
Diese Abhängigkeit von der Wahl einer additiven Konstanten bringt man zweckmäßigerweise zum Ausdruck, indem man F_C statt F schreibt.[1])
Dann ist in Weiterführung des obigen Beispiels

$$F_0(x) = \frac{x^2}{2},\quad F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 3 \quad \text{und} \quad F_{-10}(x) = \frac{x^2}{2} - 10.$$

Allgemein gilt

$$F_C(x) = F_0(x) + C.$$

Für (I) ergibt sich unter Beachtung der gewonnenen Erkenntnisse

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F_C(x) = F_0(x) + C} \tag{84}$$

Man nennt (84) das **unbestimmte Integral** der Funktion f, C die **Integrationskonstante.** Im Sinne des unbestimmten Integrals ist

$$\int a\,\mathrm{d}x = ax + C,\ \text{wobei}\ F_0(x) = ax\ \text{und}\ F_C(x) = ax + C,$$

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

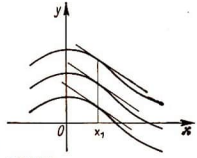


Bild 126

Setzt man in jeweils eines dieser Beispiele verschiedene C-Werte ein, so erhält man einzelne Elemente der Menge aller Stammfunktionen, die sich allerdings in der Integrationskonstanten unterscheiden. Die graphische Darstellung dieser Stammfunktionen ergibt eine einparametrige Kurvenschar. Die verschiedenen C-Werte bewirken eine Parallelverschiebung in Richtung der y-Achse. Bei einer solchen Kurvenschar bleibt für eine Stelle $x = x_1$ die Tangentenrichtung und damit für die Menge der Stammfunktionen die Ableitung an der Stelle $x = x_1$ gleich (Bild 126).

[1]) $F_C = \{(x; F_0(x) + C) \mid x \in R; C \in R\}$

Diese Vieldeutigkeit der Flächenfunktion, die nach den Erkenntnissen dieses Abschnitts die Flächengröße mißt, beruht auf der noch unbestimmten linksseitigen Begrenzung der Fläche.

7.2. Das bestimmte Integral

Die Frage nach dem Flächeninhalt A soll nun endgültig beantwortet werden. Geht man zum speziellen Fall des Bildes 127 über, so ist zunächst das unbestimmte Integral zu berechnen:

$$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Aus der Menge der erhaltenen Funktionen ist die Funktion auszuwählen, die für diesen speziellen Fall die Flächenfunktion ist. Nimmt man als linksseitige Begrenzung den Wert $x = a = 1$ (untere Grenze des Integrals genannt), so ist der Inhalt der Fläche abhängig von der rechtsseitigen Begrenzung x (obere Grenze des Integrals genannt). Wählt man für dieses x ebenfalls den Wert $x = a = 1$, so muß, wie das Bild 127 lehrt, die Flächenfunktion den Wert Null annehmen.
Also ist

$$0 = F_0(a) + C \quad \text{oder speziell} \quad 0 = \frac{1}{3} + C.$$

Daraus folgt

$$C = -F_0(a) \quad \text{oder speziell} \quad C = -\frac{1}{3}.$$

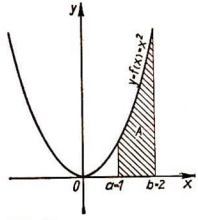


Bild 127

Mit der Festlegung der unteren Grenze $x = a = 1$ ist es möglich geworden, aus der Menge aller Stammfunktionen (Bild 126) durch Verfügung über C eine bestimmte auszuwählen. Aus dem unbestimmten Integral ist das bestimmte geworden.
Allgemein schreibt man für das bestimmte Integral:

$$\int_{x=a}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = F_0(x) - F_0(a) \tag{85}$$

Für das obige Beispiel gilt:

$$\int_{x=1}^{x} x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Das x als obere Grenze soll andeuten, daß diese Begrenzung noch variabel ist.
Die Integralfunktion, der Flächeninhalt in den Bildern 125 oder 127, ist abhängig von dieser oberen Grenze (rechten Begrenzung). Für jedes $x = b$ hat $F_0(x) - F_0(a)$ oder $x^3/3 - 1/3$ einen bestimmten Wert.

Setzt man als obere Grenze des Integrals $x = b = 2$ ein, so entsteht

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = F_0(b) - F_0(a) \tag{I}$$

oder speziell

$$\int_{x=1}^{x=2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche im Bild 127 beträgt demnach $^7/_3$ Flächeneinheiten. Beachtet man die Beziehung $F_C = F_0 + C$, so folgt aus

$$F_0(b) - F_0(a) = [F_0(b) + C] - [F_0(a) + C]$$

$$F_0(b) - F_0(a) = F_C(b) - F_C(a).$$

Also ist es in Gl. (I) nicht erforderlich, den Index 0 an das F zu schreiben. Es könnte dafür auch an beiden Stellen ein anderer C-Wert stehen. Das gibt Veranlassung, in Gl. (I) auf den Index völlig zu verzichten und zu schreiben:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Bevor man die Ausdrücke $F(b)$ und $F(a)$ bilden kann, muß man den Term $F(x)$ kennen. Der Lösungsweg eines bestimmten Integrals unterscheidet sich also nur wenig von dem des unbestimmten. Die einzelnen erforderlichen Schritte bei der Rechnung haben zur Verwendung der folgenden Symbolik geführt:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \tag{86}$$

Häufig findet man auch die Schreibweise $[F(x)]_a^b$ statt $F(x)\big|_a^b$.
Man nennt (86) den **Wert des bestimmten Integrals** (85).

Der Wert des bestimmten Integrals gibt den Inhalt der Fläche an, die oben von der Kurve der Funktion f: $y = f(x)$, unten von der Abzissenachse und seitlich von den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Er ergibt sich als Differenz der Funktionswerte der Funktion F an den Stellen der oberen und unteren Grenze.

Die Ausdrücke (85) und (86) führen auch ohne den Hintergrund einer Flächenberechnung stets die Namen bestimmtes Integral bzw. Wert des bestimmten Integrals. In solchen Fällen wäre dann das A unangebracht.

BEISPIELE

1. $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C.$

2. $\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 1{,}5.$

3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1.$

4. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0{,}6931.$

Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe

Die folgenden Betrachtungen entwickeln den Integralbegriff im Gegensatz zum Vorangegangenen völlig unabhängig vom Differentialquotienten. Diese Deutung bringt eine erhebliche Erweiterung des Anwendungsgebietes des Integrals. Die folgende Einführung des Integralbegriffes könnte also auch am Beginn der Integralrechnung stehen. Lediglich methodische Gründe lassen das nicht ratsam erscheinen.

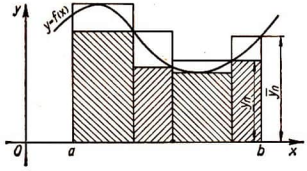


Bild 128

$y = f(x)$ sei eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion, deren Bild im Koordinatensystem nur oberhalb der x-Achse verläuft[1]).

Man kann den Inhalt der Fläche A, die von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, der Abzissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ (Bild 128) begrenzt wird, approximativ, d. h. näherungsweise, durch die Aufstellung sogenannter Unter- bzw. Obersummen bestimmen. Man teilt zunächst das Intervall $a \leqq x \leqq b$ in n nicht unbedingt gleich breite Intervalle auf. In jedem Teilintervall hat f sowohl einen kleinsten als auch einen größten Wert. Im i-ten Teilintervall seien $(\overline{x}_i; \overline{y}_i)$ die Koordinaten des höchsten Punktes, und $(\underline{x}_i; \underline{y}_i)$ seien die Koordinaten für den tiefsten Punkt.

Zeichnet man durch diese Punkte die Parallelen zur x-Achse (Bild 128) und errichtet in den Endpunkten jedes Teilintervalls Senkrechte, so entstehen rechteckige Flächenteile.

Nimmt man gleiche Teilintervallbreite Δx an, so ist jedes Intervall $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ breit.

[1]) Die Forderung $y > 0$ ist nicht unbedingt notwendig. Sie vereinfacht jedoch die Rechnung.

Die Flächeninhalte $\underline{A}_i$ und $\overline{A}_i$ der beiden Rechtecke des i-ten Teilintervalls sind dann

$$\underline{A}_i = \underline{y}_i \, \Delta x = f(\underline{x}_i) \, \Delta x; \quad \overline{A}_i = \overline{y}_i \, \Delta x = f(\overline{x}_i) \, \Delta x.$$

Die gesamte Figur ist demnach zweifach durch je ein Treppenpolygon angenähert. Jeder der Polygonzüge bildet eine Näherung für den Flächeninhalt A.
Durch die Summierung aller $\underline{A}_i$ erhält man $\underline{A}$, meist als Untersumme A_u bezeichnet.

$$\underline{A} = A_u = \underline{y}_1 \, \Delta x + \underline{y}_2 \, \Delta x + \ldots + \underline{y}_n \, \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i \, \Delta x.$$

Summiert man auch alle $\overline{A}_i$, so erhält man $\overline{A}$, meist als Obersumme A_o bezeichnet:

$$\overline{A} = A_o = \overline{y}_1 \, \Delta x + \overline{y}_2 \, \Delta x + \ldots + \overline{y}_n \, \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \, \Delta x.$$

Auf Grund der Eigenschaften der y_i und $\overline{y}_i$ folgt:
$\underline{A}_i \leqq \overline{A}_i$. (Das Gleichheitszeichen gilt für Funktionen $y = \text{const.}$) Damit ist aber auch $A_u \leqq A_o$ und in Beziehung zur gesuchten Fläche A

$$A_u \leqq A \leqq A_o.$$

Geht man nun zur Grenze über, d. h., wählt man eine immer feiner werdende Einteilung (also $n \to \infty$), so geht gleichzeitig $\Delta x \to 0$, und die beiden Werte A_u und A_o nähern sich dem gemeinsamen gesuchten Grenzwert A. Erwähnt sei, daß dies bei einer stetigen Funktion immer der Fall ist. Im allgemeinen spricht man eben dann und nur dann vom Flächeninhalt einer Figur (vom bestimmten Integral), wenn sich bei irgendeiner Intervallteilung beim Grenzübergang A_u und A_o einem gemeinsamen Grenzwert nähern. Man kann also schreiben:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_o = \lim_{n \to \infty} A_u = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \, \Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x}_i) \, \Delta x.$$

Dieser gemeinsame Wert der Ober- und Untersumme im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist der Wert des bestimmten Integrals über $f(x)$ von a bis b. a und b sind dabei wieder die Grenzen, x wird Integrationsveränderliche genannt. Erfüllt eine Funktion die oben genannte Bedingung, so sagt man, sie sei im Intervall $a \leqq x \leqq b$ integrierbar. Nun hat auch das von Leibniz eingeführte Symbol $\int$ als langgezogenes S (Anfangsbuchstabe des Wortes Summe) einen Sinn.
Man schreibt:

$$A = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

oder

$$A = \int_a^b y \, \mathrm{d}x.$$

Das Ergebnis deckt sich völlig mit Formel (86), die bei der Einführung des Integrals mit Hilfe der Differentialrechnung gewonnen wurde:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Allerdings erweitert die Summendefinition des Integrals den Anwendungsbereich erheblich.
Auch hier lag zwar die Bestimmung eines Flächeninhaltes zugrunde; das war jedoch nicht notwendig, sondern nur für das Verständnis der Zusammenhänge günstig. Das Integral kann nun stets angewendet werden, wenn es sich um die Summierung von Produkten handelt, deren Anzahl größer und größer und deren Wert kleiner und kleiner wird. Auch hieran erkennt man die Integration als die Umkehroperation der Differentiation. Aus dem „Quotient von Differenzen" ist eine „Summe von Produkten" geworden.
Als Integrand tritt ein Term mit der Variablen x auf, der nicht unbedingt die Bedeutung einer Ordinate haben muß. Diese Eigenschaft des Integranden erkennt man an der Schreibweise $F(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ besser als an der Form $F(x) = \int_a^b y\,\mathrm{d}x$.
Selbstverständlich muß die Integrationsvariable nicht notwendigerweise x heißen.
Als Ergebnis der vorangegangenen Betrachtungen erhält man unabhängig von der Differentialrechnung:

Das bestimmte Integral ist der Grenzwert einer Summe von Produkten, deren Anzahl nach ∞ und bei denen ein Faktor nach Null strebt.

Die Ausführungen können ohne Schwierigkeit auf Integranden übertragen werden, die im betrachteten Intervall nicht ständig positiv sind. Ist der Integrand innerhalb der betrachteten Grenzen negativ, so wird auch der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ negativ. Wechselt $y = f(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ das Vorzeichen, so erhält man mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Differenz der oberhalb und unterhalb der x-Achse gelegenen Teilflächen.
Im folgenden Beispiel wird der Inhalt der Fläche, die von der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und der x-Achse in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = b$ eingeschlossen wird, bestimmt, ohne auf den Differentialquotienten einzugehen.
Das Beispiel erfordert eine Vorbetrachtung.
Nach der Summenformel der arithmetischen Reihe ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

Außerdem ist

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n\,(n + 1)\,(2n + 1).$$

Die zweite Formel erhält man leicht, wenn man in

$$(r+1)^3 - r^3 = 3r^2 + 3r + 1 \quad \text{für } r \text{ die Werte } 0, 1, 2, \ldots, n$$

setzt und die dabei entstehenden Ausdrücke addiert.
Das heißt:

$$\begin{array}{l|l|l}
1^3 & = 1 & \\
2^3 - 1^3 & = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 & + \\
3^3 - 2^3 & = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 & + \\
4^3 - 3^3 & = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 & + \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(n+1)^3 - n^3 & = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 & + \\
\hline
(n+1)^3 & = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + & \\
 & \quad + (n+1). &
\end{array}$$

Daraus folgt

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (n+1)^3 - (n+1) - 3(1 + 2 + \cdots + n)$$

und unter Benutzung der Summenformel für die arithmetische Reihe:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1).$$

Nach dieser Vorbetrachtung teilt man das Intervall $0 \leqq x \leqq b$ in n gleiche Teile ein.
Die Intervallbreite der Teilintervalle ist dann $h = b/n$. Unter Benutzung der Beziehung $y = x^2$ ergibt sich als Obersumme

$$A_o = h\,(h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + 4^2h^2 + \cdots + n^2h^2)$$

$$A_o = \frac{b^3}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Benutzt man die oben erhaltene Beziehung, so ist

$$A_o = \frac{b^3}{6n^3}\,n\,(n+1)\,(2n+1).$$

Als Untersumme ergibt sich

$$A_u = h\,[0 + h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + \cdots + (n-1)^2h^2]$$

$$A_u = \frac{b^3}{n^3}\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

$$A_u = \frac{b^3}{6n^3}\,(n-1)\,n\,(2n-1).$$

Läßt man nun n über jede noch so große Schranke wachsen (wofür man kurz sagt: n gegen Unendlich gehen), so entstehen die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} A_o = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_u = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Man erkennt, daß die Grenzwerte von A_o und A_u übereinstimmen. Also schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} A_o = \lim_{n\to\infty} A_u = A = \frac{b^3}{3}.$$

Man löse $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x$ auf übliche Art und überzeuge sich von der Übereinstimmung.

Man wird Vergleiche mit der Differentialrechnung anstellen und deshalb einfache Formeln und Regeln für die Integration erwarten. Auch die Integration vollzieht sich nach Formeln (= formalisierten Gesetzen), jedoch ist die Entscheidung über die Anwendbarkeit einer Formel nicht so einfach wie bei der Differentialrechnung. Außerdem führen die Integrationsregeln keineswegs bei jeder Funktion zum Ziel (im Gegensatz zu den Ableitungsregeln, die für alle Funktionstypen angewendet werden konnten). Deshalb sind die sogenannten Integrationsverfahren, die später behandelt werden, sehr wichtig, da sie bei einiger Übung ausreichende Hinweise für den bei einer Integration einzuschlagenden Weg geben.

Die ersten Abschnitte der Integralrechnung sollten lediglich zeigen: Die Umkehroperation zum Differenzieren ist das Integrieren. Während in der Differentialrechnung $y = F(x)$ gegeben ist und $y' = F'(x) = f(x)$ bestimmt wird, stellt die Integralrechnung die Aufgabe, bei bekanntem $y' = F'(x)$ eine Funktion $y = F(x)$ zu suchen.

Symbolisch schreibt man $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F_C(x)$. $F'(x) = f(x)$ heißt der Integrand, $F_C(x)$ stellt die Menge *aller* Stammfunktionen dar, der Index C weist besonders darauf hin. Es gilt $F_C(x) = F_0(x) + C$. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F_0(x) + C$ heißt unbestimmtes Integral der Funktion F'. Das bestimmte Integral $\int_a^x F'(x)\,\mathrm{d}x = F_C(x) - F_C(a)$ gestattet mit seinem Wert $\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ die Berechnung solcher Flächen, die oben von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, unten von der x-Achse und seitlich von den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden.

Darüber hinaus kann die Summierung von Produkten durch Integration vorgenommen werden; denn das bestimmte Integral ist der Grenzwert einer Summe von Produkten, deren Anzahl nach ∞ und bei denen ein Faktor dabei nach Null strebt.

Dieser weitgesteckte Anwendungsbereich des Integrals steht übrigens keinesfalls im Widerspruch zur Flächenberechnung, sondern enthält diese Aufgabenstellung als Sonderfall. Auch bei der Flächenberechnung handelt es sich um die Summierung von Produkten $y \cdot \Delta x$.

7.3. Grundintegrale

Beachtet man die Ergebnisse der Differentialrechnung und den Umkehrcharakter der Integration gegenüber der Differentiation, so ergeben sich die folgenden **Grundintegrale:**

$$\frac{\mathrm{d}(x^m)}{\mathrm{d}x} = m x^{m-1} \qquad \int x^m \,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;\ m \neq -1$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln|x|)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C = \ln|\bar{C}x|;\ \text{wobei } \ln\bar{C} = C^{1})$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \qquad \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}x} = a^x \cdot \ln a \qquad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \left(\text{für } x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2};\ n \in G\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \ (\text{für } x \neq n\pi;\ n \in G)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{\mathrm{d}(\arccos x)}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2;\ x \in (-1;1)$$

Beachte, daß $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ ist.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}\right\} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$$

Beachte, daß $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$ ist.

---

[1]) Für $x > 0$ gilt $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$. Da aber für $x < 0$ $\frac{\mathrm{d}[\ln(-x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ ist, wird für $x < 0$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C$. Beide Integrationen faßt man zusammen in $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$, wobei die Variable x entweder nur positiv oder ausschließlich negativ vorausgesetzt werden muß

$$\frac{\mathrm{d}(\sinh x)}{\mathrm{d}x} = \cosh x \qquad \int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cosh x)}{\mathrm{d}x} = \sinh x \qquad \int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tanh x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\coth x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \quad (\text{für } x \neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{arsinh} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{arcosh} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \quad (\text{für } x > 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{artanh} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C \quad (\text{für } |x| < 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{arcoth} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C \quad (\text{für } |x| > 1).$$

Somit:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (\text{für } |x| \neq 1).$$

Es wird selten eintreten, daß zu lösende Integrale die Form eines Grundintegrals haben. Da jedoch alle Lösungsverfahren letztlich auf diese Grundintegrale zurückführen und da insbesondere die Wahl eines entsprechenden Verfahrens oft von der Kenntnis eines Grundintegrals abhängt, ist es ratsam, sich die Grundintegrale gut einzuprägen.

7.4. Elementare Integrationsregeln

Die folgenden Regeln geben wichtige Hinweise für das Lösen von Integralen.

7.4.1. Vertauschung der Integrationsgrenzen

Die Vertauschung der Integrationsgrenzen entspricht der Umkehrung des Vorzeichens des Integranden.

Ist nämlich

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

so ist

$$\int_b^a F'(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b).$$

Mithin, da $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$ ist, folgt

$$\boxed{\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a F'(x)\,\mathrm{d}x} \tag{87}$$

Man prüfe diesen Satz an den beiden Integralen

$$\int_3^5 x^3\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_5^3 x^3\,\mathrm{d}x \quad \text{nach.}$$

7.4.2. Integranden mit konstanten Faktoren

Enthält der Integrand einen konstanten Faktor, so kann dieser vor das Integralzeichen gezogen werden.

$$\boxed{\int a F'(x)\,\mathrm{d}x = a \int F'(x)\,\mathrm{d}x} \tag{88}$$

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Grundregel der Differentialrechnung

$$\frac{\mathrm{d}\,[a F(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{a\,\mathrm{d}[F(x)]}{\mathrm{d}x} = a F'(x).$$

7.4.3. Integration einer algebraischen Summe

Das Integral einer algebraischen Summe von Termen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Terme.[1])

$$\boxed{\int [f(x) + g(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x + \int h(x)\,\mathrm{d}x} \tag{89}$$

Die Regeln (88) und (89) sind sowohl für das bestimmte als auch für das unbestimmte Integral gültig.

7.4.4. Zerlegung eines Integrals in eine Summe von Integralen durch Teilung des Integrationsbereiches

Der Wert eines bestimmten Integrals ändert sich nicht, wenn man zwischen den Grenzen a und b eine andere Grenze c einschaltet und das Integral nicht von a bis b, sondern die Summe der Integrale von a bis c und c bis b bestimmt.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{90}$$

[1]) Der Beweis dieses Satzes folgt aus der entsprechenden Regel der Differentialrechnung

Dabei ist die Bedingung $a < c < b$ nicht unbedingt notwendig. Außerdem kann man endlich viele Werte c einschalten.

Beweis:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \text{ wenn } f(x) = F'(x) \text{ ist.}$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(c).$$

Addiert man die letzten beiden Gleichungen, so folgt

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$$

oder

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

BEISPIELE

Man achte auf die Formeln 87 bis 90.
Man benutze die Möglichkeit der Probe: Der Differentialquotient des Terms einer Stammfunktion ist gleich dem Integranden.

1. $\int (x + x^2)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{x^3}{3} + C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C,$

   wobei $C_1 + C_2 = C$ ist.

2. $\int 4x^5\,\mathrm{d}x = 4\int x^5\,\mathrm{d}x = 4\,\frac{x^6}{6} + C = \frac{2x^6}{3} + C$

3. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \cos x - x\right)\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x + \int \cos x\,\mathrm{d}x - \int x\,\mathrm{d}x = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \sin x - \frac{x^2}{2} + C$

4. $\int (x + 2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

5. $\int_1^2 (x + 2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^2 = \overbrace{\left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right)}^{F(b)} - \overbrace{\left(\frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right)}^{F(a)} = 6 - 2{,}5 = 3{,}5$

6. $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{2x} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_a^b = \frac{1}{2}[\ln|b| - \ln|a|] = \ln\sqrt{\frac{b}{a}}$

7. $\int_0^2 (\mathrm{e}^x + 8)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x + 8x)\Big|_0^2 = (\mathrm{e}^2 + 8 \cdot 2) - (\mathrm{e}^0 + 8 \cdot 0) = \mathrm{e}^2 + 15$

8. $\int \frac{x^3 - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - 5x^{-\frac{3}{4}} + 2x^{-\frac{7}{12}}\right) dx = \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} - 20x^{\frac{1}{4}} + \frac{24x^{\frac{5}{12}}}{5} + C$

9. $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 3a^x\right) dx = -\cot x + \operatorname{arsinh} x - 3\frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int r x^{\frac{n}{r}}\,dx = r\int x^{\frac{n}{r}}\,dx = r\frac{x^{\frac{n}{r}+1}}{\frac{n}{r}+1} + C = \frac{r^2 x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + C$

11. $\int \cos\alpha\,d\alpha = \sin\alpha + C$

12. $\int_0^3 \cos\alpha\,dx = \cos\alpha \int_0^3 dx = \cos\alpha \cdot x\Big|_0^3 = \cos\alpha\,[3-0] = 3\cos\alpha$

(cos α ist ein konstanter Faktor.)

13. $\int 3u^2\,du = 3\int u^2\,du = u^3 + C$

14. $\int_{-1}^{+1} (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-1}^{+1} = \left[\frac{1^3}{3} - 1^2\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right] =$

$= \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$

15. $\int_{-1}^{-2} \frac{dy}{y} = \ln|y|\Big|_{-1}^{-2} = \ln|-2| - \ln|-1| = \ln\left|\frac{-2}{-1}\right| = \ln 2 = 0{,}6931$

16. $\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$

17. $\int_{0{,}25}^{0{,}50} [2\,(1-u^2)^{-1} + 3]\,du = [2\,\operatorname{artanh} u + 3u]\Big|_{0{,}25}^{0{,}50} = 1{,}33$

18. $\int_r^{2r} \frac{da}{\sqrt{a^2-1}} = \operatorname{arcosh} a\Big|_r^{2r} = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\Big|_r^{2r} = \ln\frac{2r + \sqrt{4r^2-1}}{r + \sqrt{r^2-1}}$ $\qquad (r > 1).$

AUFGABEN

284. $\int (x^4 - 7x + 8)\,dx$

285. $\int \sqrt{x}\,dx$

286. $\int 2\sin x\,dx$

287. $\int 4\sqrt[3]{x^4}\,dx$

288. $\int \frac{x^3 + x}{5x^3}\,dx$

289. $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\,dx$

290. $\int \frac{dx}{(2x+7)^{-2}}$

291. $\int r\cos t\,dt$

292. $3\int s^3\,ds$

293. $\int (u^3 + 5)\,du$

294. $6\int_4^5 t^{-2}\,dt$

295. $\int_7^5 x^2\,dx$

296. $-\int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$

297. $\int_{1}^{2} \sqrt[3]{x} \, dx$

298. $\int_{0}^{2} (x^5 - 3x^3 + x - 7) \, dx$

299. $3\int_{10}^{12} dt$

300. $\int_{1}^{2} \cos \pi \sin t \, dt$

301. $\int_{1}^{5} \frac{x^3}{5} \, dx$

302. $\int_{p}^{q} ax \, dx$

303. $\int_{0}^{2} 4x^3 \, dx$

304. $\int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

305. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \omega \cos 2\pi \, dx$

306. $\int_{0}^{3} ax^4 \, dx$

307. $\int_{3}^{1} \cos \varphi \cdot x \, dx$

308. $\int (3 \sinh x + x^{-1}) \, dx$

309. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

310. $\int \frac{7 \, dx}{\cos^2 x}$

311. $\int \frac{dx}{2 - 2x^2}$

312. $\int_{0}^{\pi} (\sin x - 5) \, dx$

313. $2\int (a + bx) \, dx$

314. $\int_{2}^{3} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + 1}}$

315. $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{x^2 - 1}$

316. $\int \left[u - (u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\right] du$

317. $\int \sqrt[7]{x^4} \, dx$

318. $\int \sqrt{ax} \, dx$

319. $\int p^x \, dx$

320. $\int_{-2}^{4} (x + 10) \, dx$

321. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} \, dx$

322. $\int \cos^2 x \, du$

323. $\int \frac{x^4 - 6\sqrt[3]{x} + 12x^{-3}}{3\sqrt{x}} \, dx$

324. $\int \left(m - \frac{1}{m}\right) dm$

325. $\int \frac{x^2 - bx^n + ax - qx^{\frac{r}{n}}}{x^n} dx$

326. $\int a \sqrt[n]{r^k} \, dr$

327. $\int (2^3 + x^2 - r^x) \, dx$

328. $\int_{-2}^{1} (2 - 4x) \, dx$

329. $\int 6x^{-7} \, dx$

330. $\int_{0}^{a} 3e^x \, dx$

331. $\int (7x^{-1} + 2x^2) \, dx$

332. $\int_{x_1}^{x_2} ab\pi \, dx$

333. $\int \frac{dr}{x^2 + 1}$

334. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \, dx$

335. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

336. $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x}$

337. $\int \sqrt[3]{\frac{Qr^2 x}{l - 1}} \, dx$

338. $\int (3x^2 - 3^x + 3^3 + \alpha^\beta - x^{-1}) \, dx$

8. Geometrische Anwendungen des Integrals

Die folgenden Ausführungen zeigen eine erste wichtige Gruppe von Anwendungsmöglichkeiten des Integrals. Dabei ist die Auswahl von Beispielen besonders bei der Bogenlängen- und Mantelflächenberechnung noch sehr beschränkt. Dieser Mangel wird erst mit der Behandlung der Integrationsverfahren beseitigt. Ein weiterer Ausbau dieser geometrischen Anwendungen erfolgt auch im Abschnitt 13.

8.1. Flächenberechnung (Quadratur)

In 7.2. wurde gezeigt, daß der Wert des bestimmten Integrals

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

den Inhalt der von der Kurve der Funktion $y = f(x)$, der Abszissenachse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche angibt. Diese Erkenntnis soll ergänzt und ausgebaut werden.

BEISPIEL

1. Man bestimme den Inhalt der von der Kurve[1]) der Funktion $y = {}^1/_2 x + 2$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 7$ begrenzten Fläche und prüfe das Ergebnis an Hand elementarer mathematischer Beziehungen nach (Bild 129).

Lösung: $A = \int_1^7 \left(\frac{1}{2}x + 2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right)\Big|_1^7 = \left(\frac{49}{4} + 14\right) - \left(\frac{1}{4} + 2\right) =$

$= 24$ Flächeneinheiten[2])

Die elementare Prüfung wird dem Leser überlassen.

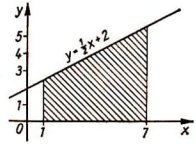


Bild 129

Schon in 7.2. wurde darauf hingewiesen, daß für unterhalb der x-Achse liegende Flächenstücke das Ergebnis der Flächenberechnung negativ wird, da sämtliche y_i negativ sind. Untere und obere Grenze müssen dabei im Sinne wachsender x-Werte eingesetzt sein, d. h. $a < b$, da sonst eine Vertauschung der Grenzen gegenüber dem abgeleiteten Fall eintreten und dadurch der Vorzeichenwechsel wieder aufgehoben würde.

Das Vorzeichen der Fläche ergibt sich sehr einfach aus ihrem Umlaufsinn, wenn man in der Richtung von der unteren zur oberen Grenze fortschreitet. Entspricht der Umlaufsinn dem positiven Drehsinn, so erhält man bei der Flächenberechnung durch Integration einen positiven Wert, im Falle des negativen Drehsinns einen negativen (Bild 130).

[1]) Im folgenden Text wird an Stelle „Kurve der Funktion" meist nur kurz „Funktion" gesagt

[2]) Die Einheit „Flächeneinheiten" wird in den folgenden Beispielen weggelassen

BEISPIEL

2. Fläche unter der Sinuskurve (Bild 131)

a) Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und von der Funktion $y = \sin x$ in den Grenzen von 0 bis π begrenzt wird.

$$\text{Lösung: } A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = \underline{\underline{2}}.$$

b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und von der Funktion $y = \sin x$ in den Grenzen von π bis 2π begrenzt wird.

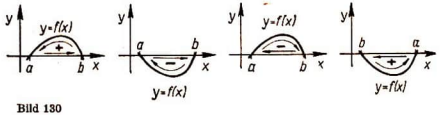


Bild 130

Lösung: Das Bild 131 zeigt, daß ein im Vergleich zu a) im Betrag gleicher, im Vorzeichen entgegengesetzter Wert auftreten muß.

$$4 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos \pi = \underline{\underline{-2}}.$$

Das Resultat besagt, daß der Inhalt der Fläche 2 Einheiten beträgt. Das negative Vorzeichen weist darauf hin, daß die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.

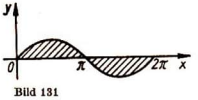


Bild 131

c) Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und von der Funktion $y = \sin x$ in den Grenzen von 0 bis 2π begrenzt wird.

$$\text{Lösung: } A = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = \underline{\underline{0}}.$$

Der Wert des Integrals ist Null, während — wie ein Vergleich mit 2a) und 2b) lehrt — der Inhalt der Fläche 4 Einheiten betragen muß.

Man sieht am Beispiel 2, daß die Summierung über alle Elemente unter Berücksichtigung der betreffenden Vorzeichen erfolgt. Da im Fall 2c die Kurve in dem betrachteten Intervall teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse verläuft, kommt es zur algebraischen Addition der positiven und der negativen Flächenteile, die hier den Wert Null ergibt. Will man dagegen den absoluten Wert des Flächeninhalts, also den Flächeninhalt im ursprünglichen planimetrischen Sinn berechnen, so zerlegt man das Integral in eine Summe zweier Integrale, wobei die neue eingeschobene Grenze die Nullstelle der Begrenzungsfunktion ist. Um den Inhalt der Gesamtfläche zu erhalten, muß man die Beträge der Einzelintegrale addieren.
Deshalb schreibt man im Falle des Beispiels 2c:

$$A_{\text{abs}} = \left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = 4.$$

In Fällen, bei denen man den Verlauf der Begrenzungskurve, also auch die Lage der Teilflächen kennt, kann man bei negativen Teilstücken, statt die Addition der Beträge vorzunehmen, die positiven Zeichen durch Vertauschung der Integrationsgrenzen erreichen. Also schreibt man für das Beispiel 2c):

$$A_{\text{abs}} = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{2\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 4.$$

BEISPIEL

3. Das Integral $A = \int_{-2}^{3} (2x - 4) \, dx$ ist zu lösen und geometrisch zu deuten (Bild 132).

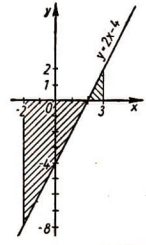


Bild 132

Lösung: $A = (x^2 - 4x)\Big|_{-2}^{3} = (9 - 12) - (4 + 8) = -15.$

Will man den absoluten Wert der Fläche berechnen, so ergibt sich zunächst aus der Bedingung $y = f(x) = 2x - 4 = 0$ die Nullstelle $x = 2$. Also bestimmt sich der Flächeninhalt wie folgt:

$$A_{\text{abs}} = \left| \int_{-2}^{2} (2x - 4) \, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (2x - 4) \, dx \right|$$

$$\int_{-2}^{2} (2x - 4) \, dx = (x^2 - 4x)\Big|_{-2}^{2} = 4 - 8 - 4 - 8 = -16$$

$$\int_{2}^{3} (2x - 4) \, dx = (x^2 - 4x)\Big|_{2}^{3} = 9 - 12 - 4 + 8 = 1.$$

Somit ist $A_{\text{abs}} = |-16| + |1| = 17$.
Die geometrische Deutung, die auf Grund der Ergebnisse sehr leicht möglich ist, wird dem Leser überlassen.

Aus den Beispielen erkennt man:

Verläuft $y = f(x)$, die Kurve der Begrenzungsfunktion der Fläche, im betrachteten Intervall $a \leqq x \leqq b$ teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse, so ergibt der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) \, dx$ stets die Differenz der Inhalte der oberhalb (positiv) und unterhalb (negativ) der x-Achse liegenden Flächenteile. Will man dagegen den absoluten Wert der Fläche bestimmen, so zerlegt man das bestimmte Integral in eine Summe von bestimmten Integralen unter Einschub jener neuen Grenzen, die Nullstellen der Funktion $y = f(x)$ für $a < x < b$ sind, und addiert die Beträge der Teilintegrale.

BEISPIELE

4. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche von Bild 133.

Lösung: Mit $y = +\sqrt{2px}$ erhält man als Ansatz

$$A = \int_0^{x_1} \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} \, dx = \sqrt{2p} \, \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{x_1} = \frac{2\sqrt{2p}\, x_1^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Beachtet man, daß $\frac{2\sqrt{2p}x_1^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2x_1\sqrt{2px_1}}{3}$ ist, so wird

$$A = \frac{2}{3}x_1y_1, \quad \text{da } \sqrt{2px_1} = y_1 \text{ ist.}$$

Das Ergebnis läßt sich auch in Worten ausdrücken:

Das von dem Parabelteil mit der Gleichung $y = \sqrt{2px}$, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = x_1$ begrenzte Flächenstück verhält sich zum Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 wie 2:3.

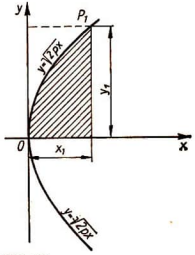


Bild 133

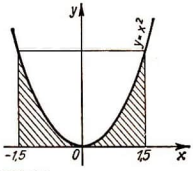


Bild 134

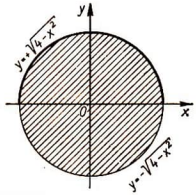


Bild 135

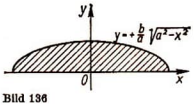


Bild 136

5. Berechne den Inhalt der in den Bildern 134, 135 und 136 schraffierten Flächenteile. Zur Übung soll lediglich der Ansatz für die Berechnung aufgestellt werden. Später gestatten die Integrationsverfahren eine Bestimmung der Integrale.

Lösung: Die drei Kurven liegen symmetrisch zu den Achsen. Will man den Inhalt bestimmen, so gilt, wie die Anschauung unmittelbar lehrt, für die Fläche in Bild 134:

$$A = \int_{-1,5}^{1,5} x^2 \, dx$$

oder besser

$$A = 2\int_0^{1,5} x^2\,\mathrm{d}x,$$

da die untere Grenze Null die Rechnung vereinfacht.

Diese Möglichkeit hat man nur, wenn die y-Achse Symmetrieachse der Kurve ist, wenn demnach der Integrand der Term einer *geraden* Funktion f: $f(-x) = f(x)$ ist und wenn das Integrationsintervall durch die y-Achse halbiert wird.
Allgemein kann man schreiben:
Für *gerade Funktionen* gilt stets

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Übertragung auf ungerade Funktionen f: $f(x) = -f(-x)$ (z. B. auf die Funktion $y = x^3$), ergibt

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

oder für den absoluten Inhalt $A_{\mathrm{abs}} = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bild 135: $A_{\mathrm{abs}} = 2\int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x,$

wobei der Faktor 2 die Symmetrie zur x-Achse berücksichtigt.
Unter Beachtung der Regel für gerade Funktionen erhält man kürzer

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Bild 136: $A = \dfrac{2b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

Quadratur von Flächen, die oben und unten von Kurven begrenzt sind

BEISPIEL

6. Soll man den Inhalt der von den beiden Kurven $x^2 = 2(y-2)$ und $y = x + 6$ begrenzten Fläche bestimmen, so benötigt man zunächst die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven (Bild 137) als Integrationsgrenzen.

Aus dem Gleichungssystem $\left|\begin{array}{l} x^2 = 2(y-2) \\ y = x + 6 \end{array}\right|$ folgen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$.

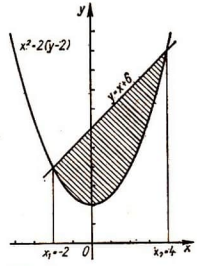


Bild 137

Den Inhalt findet man leicht, indem man vom Trapez die oben parabelförmig begrenzte Fläche subtrahiert.

$$A = A_1 - A_2$$

$$A_1 = \int_{-2}^{4} (x + 6)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-2}^{4} = 42$$

$$A_2 = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} + 2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{6} + 2x\right)\Big|_{-2}^{4} = 24$$

$$A = A_1 - A_2 = 42 - 24 = \underline{\underline{18}}.$$

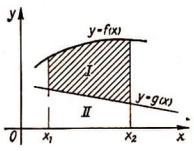


Bild 138

Schneller kommt man zum Ziel, wenn man beide Integrationen vereint durchführt (die Grenzen sind für beide Teilintegrale gleich), also schreibt:

$$A = \int_{-2}^{4} \left(x + 6 - \frac{x^2}{2} - 2\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4\right)\mathrm{d}x = \underline{\underline{18}}.$$

Allgemein ergibt sich als Inhalt der in Bild 138 schraffierten Fläche:

$$\boxed{A_{\text{abs}} = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x} \tag{91}$$

Die Formel gestattet auch dann, den absoluten Flächeninhalt zu berechnen, wenn Teile der Fläche unterhalb der x-Achse liegen. Diese Teilflächen werden in $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x$ zwar negativ in Rechnung gesetzt, da aber vor $g(x)$ ein Minuszeichen steht, werden sie letztlich addiert. Dagegen werden die positiven, also oberhalb der x-Achse gelegenen Teile der Fläche zwischen $y = g(x)$ und der x-Achse in (91) subtrahiert. Das ist auch erforderlich, da sie im ersten Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, obwohl nicht zur Fläche gehörig, addiert wurden.

Dieser Vorzug der Formel (91) erklärt sich daraus, daß über eine völlig neue Funktion $y = f(x) - g(x)$ integriert wird, die man sich in der graphischen Darstellung auch als nur *eine* Kurve denken kann. Die folgenden Beispiele wenden die Formel (91) an.

BEISPIELE

7. Bestimme den Inhalt der im Bild 139 schraffierten Fläche.

Lösung: $A_{\text{abs}} = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$A_{\text{abs}} = \int_{0}^{\pi} [\sin x - (x - \pi)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\cos x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right)\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 + 1 = \underline{\underline{2 + \frac{\pi^2}{2}}}.$$

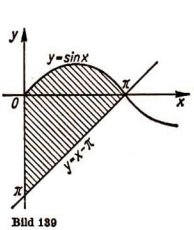


Bild 139

8. Bestimme den Inhalt der im Bild 140 schraffierten Fläche.

Lösung: $A_{\text{abs}} = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

$$A_{\text{abs}} = \int_0^{\pi} \left[1 + \sin x - \left(-\frac{2x}{\pi} + 1\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \left(x - \cos x + \frac{x^2}{\pi} - x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left(-\cos x + \frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 1 + \pi + 1 = \underline{\underline{2 + \pi}}.$$

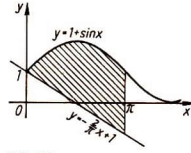


Bild 140

9. Bestimme den Inhalt der Fläche, die oben von der Kurve mit der Gleichung $y = 2\cosh x$, unten von der x-Achse und seitlich von den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 2$ begrenzt wird.

Lösung: Mit $y = 2\cosh x$ ergibt sich unter Beachtung der Tatsache, daß $f(x) = f(-x)$ ist (gerade Funktion, also Symmetrie zur y-Achse)

$$A = 2\int_0^2 2\cosh x\,\mathrm{d}x = 4\sinh x\Big|_0^2 = 4\,(\sinh 2 - \sinh 0) =$$

$$= 4\sinh 2 = 4 \cdot 3{,}6269 = \underline{\underline{13{,}076}}.$$

10. Bestimme den absoluten Betrag der Fläche, die von der x-Achse, der Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ und den Geraden mit den Gleichungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$ begrenzt wird.

Lösung: Über die erkennbare Lösung $x = 2$ erhält man nach der Division $(x^3 - 3x^2 - 18x + 40) : (x - 2)$ die quadratische Gleichung $x^2 - x - 20 = 0$. Deren Lösungen $x = 5$ und $x = -4$ sind zusammen mit $x = 2$ die Nullstellen der gegebenen Funktion. Also erhält man:

$$A_{\text{abs}} = \left|\int_0^2 (x^3 - 3x^2 - 18x + 40)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^5 (x^3 - 3x^2 - 18x + 40)\,\mathrm{d}x\right| +$$

$$+ \left|\int_5^6 (x^3 - 3x^2 - 18x + 40)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - x^3 - 9x^2 + 40x\right)\Big|_0^2\right| + \left|(\,)\Big|_2^5\right| + \left|(\,)\Big|_5^6\right| =$$

$$= \left|40\right| + \left|-\frac{135}{4}\right| + \left|\frac{71}{4}\right| = \underline{\underline{\frac{183}{2}}}.$$

11. In welchem Abstand ξ ist jene Parallele zur y-Achse zu ziehen, die die von der y-Achse, der x-Achse, der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ und der Kurve mit der Gleichung $y = \mathrm{e}^x$ begrenzte Fläche im Verhältnis 1:2 teilt (Bild 141)?

Lösung: Ehe man die Fläche teilen kann, muß man deren Wert kennen.

$$A = \int_0^1 e^x \, dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

Der gesuchte Flächenstreifen muß demnach den Inhalt $\frac{e-1}{3}$ haben. Somit gilt

$$A_{1/3} = \int_0^{x=\xi} e^x dx = e^x \Big|_0^{x=\xi} = e^\xi - 1 = \frac{e-1}{3}.$$

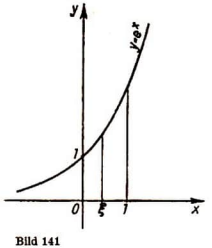


Bild 141

Aus der Gleichung

$$e^\xi - 1 = \frac{e-1}{3}$$

folgt

$$e^\xi = \frac{e+2}{3}$$

$$\xi = \ln \frac{e+2}{3} = \ln 1{,}57276 \approx \underline{\underline{0{,}45}}.$$

Die Parallele ist im Abstand $\xi \approx 0{,}45$ zu ziehen.

12. Welche Fläche bestimmt das Integral $\int_1^2 dx$?

Lösung: Da hier der Integrand offenbar $y = f(x) = 1$ ist, handelt es sich um die Bestimmung eines Rechtecks, das von den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$, $x = 2$: $y = 1$ und $y = 0$ (x-Achse) begrenzt wird.

AUFGABEN

Man bestimme die Flächeninhalte der Figuren mit folgenden Begrenzungen:

339. $y = \frac{x^3}{10}$, x-Achse, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$

340. $y = x$, x-Achse, $x_1 = 7$, $x_2 = 10$

341. $y = \frac{2}{3}x + 3$, x-Achse, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$

342. $y = x^2 - 2x - 35$, x-Achse und Nullstellen

343. $y = \cos x$, x-Achse, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$

344. $y = x^3 - 4x^2 + x + 6$, x-Achse, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ (Absoluter Flächeninhalt ist gefragt)

345. $y = \frac{1}{3x}$, x-Achse, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

346. $y^2 = x$, $y = x - 2$

347. $y^2 = x$, $x^2 = \sqrt{8}\,y$

348. Die Fläche, die von der y-Achse, der x-Achse, der Kurve mit der Gleichung $y = \cos x$ bis zur Stelle $x = \pi/2$ begrenzt wird, soll durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden. In welchem Abstand von der y-Achse ist die Parallele zu ziehen?

349. Wie groß ist der Flächeninhalt der von den Kurven mit den Gleichungen $y = 2x^3$ und $y = 3x^2 - 1$ eingeschlossenen Fläche?

350. Welche Fläche schließen die Kurven mit den Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ im Bereich zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte ein?

351. Gegeben sei die Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = x^3$ $(x > 0)$, der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = b^3$ begrenzt wird. Wie heißt die Gleichung der Geraden, die die beschriebene Fläche halbiert und parallel zur x-Achse verläuft?

352. Man berechne den Inhalt der von den beiden Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = x^2 - 1/2$ eingeschlossenen Fläche.

353. Durch das Integral $\int_{-2}^{3} {}^1\!/_x \, \mathrm{d}x$ soll eine Fläche bestimmt werden. Man fertige eine Skizze an und äußere sich dazu.

8.2. Rauminhaltsberechnung (Kubatur)

8.2.1. Berechnung des Inhalts der Rotationskörper

Ein Rotationskörper entsteht durch Drehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse. Die rotierende Fläche wird die erzeugende Fläche oder die Erzeugende genannt. Will man das Volumen des in Bild 142 im Längsschnitt dargestellten geraden Kreiskegels bestimmen, so schlägt man folgenden für alle Integrationen gültigen Weg ein[1]:
Man wählt aus dem vorgegebenen Gebilde ein günstig liegendes Element aus, berechnet für dieses Element die gesuchte Größe näherungsweise und findet dann durch Integration (Summierung mit anschließender Grenzwertbildung) dieser Teilgrößen über das gesamte Gebilde die Lösung. Voraussetzung ist dabei, daß der durch die näherungsweise Berechnung des Elements auftretende Fehler beim Grenzübergang gegen Null geht.

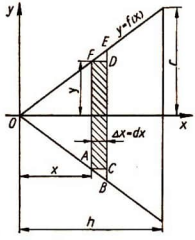


Bild 142

Dieses Grundprinzip auf die vorliegende Aufgabe übertragen heißt, den Kegel in der angedeuteten Art in Scheiben parallel zur Grundfläche zerlegen und das Volumen eines solchen Elements bestimmen. Versteht man unter $\mathrm{d}V$ (Zylinder mit dem Achsenschnitt $ACDF$, Volumendifferential) einen Näherungswert für das Volumen ΔV der Schicht (Kegelstumpf mit dem Achsenschnitt $ABEF$), so ist $\Delta V \approx \mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x$.[2]) Dabei hängt y vom gewählten x ab.

[1]) Unter speziellen Voraussetzungen ist auch die 1. Guldinsche Regel zur Volumenbestimmung geeignet (vgl. 11.2.4.)

[2]) Mit dem Symbol $\Delta \ldots$ wird, auch für alle folgenden Abschnitte, stets die wahre Größe des herausgegriffenen Elementes bezeichnet, während ein $\mathrm{d} \ldots$ die wahre Größe in erster Näherung darstellt

Durch Integration erhält man:

$$V_x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \Delta x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \mathrm{d}x,$$

wobei der Index x angeben soll, daß die Rotation um die x-Achse erfolgt.
Allgemein gilt demnach für das Volumen eines Rotationskörpers
bei Drehung um die x-Achse, wobei die Kurve der Funktion $y = f(x)$ *die Begrenzungskurve der erzeugenden Fläche ist:*

$$\boxed{V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \mathrm{d}x} \tag{92a}$$

bei Drehung um die y-Achse, wobei die Kurve der Funktion $x = f(y)$ *die Begrenzungskurve der erzeugenden Fläche ist:*

$$\boxed{V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \mathrm{d}y} \tag{92b}$$

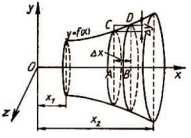


Bild 143

Im Fall des Bildes 142 ist in V_x für $y = {}^{r}/_{h}\, x$ einzusetzen.
Also folgt für das Volumen des geraden Kreiskegels

$$V_x = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Will man das Integral durch den gemeinsamen Grenzwert einer Unter- und Obersumme erklären, so gilt für $\Delta \overline{V}_x = \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$ (Bild 143) und $\Delta \underline{V}_x = \pi y^2 \Delta x$ sowie das Volumen V_x der Scheibe $\Delta \underline{V}_x \leqq V_x \leqq \Delta \overline{V}_x$, wobei wiederum ohne Einschränkung der Allgemeingültgkeit eine monoton wachsende Funktion vorausgesetzt wurde. Nach Summierung über alle Scheibenelemente des Körpers entsteht

$$V_u \leqq V \leqq V_o$$

(wobei $\sum \Delta \underline{V}_x = V_u$; $\sum \Delta \overline{V}_x = V_o$; V gesuchtes Volumen des Körpers). Geht man zur Grenze $\Delta x \to 0$ über, so entsteht als gemeinsamer Grenzwert der beiden Summen

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \mathrm{d}x,$$

wie ein Blick auf die Ausdrücke $\Delta \underline{V}_x$ und $\Delta \overline{V}_x$ zeigt.

BEISPIEL

Bestimme das Volumen des Kugelabschnittes der Höhe h (Kugelradius r).

Lösung: Die Kugel hat als Erzeugende die im Bild 144 gezeichnete Halbkreisfläche. Die Gleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ergibt $y^2 = r^2 - x^2$.

Die Grenzen sind $x_1 = r - h$; $x_2 = r$.
Mithin ist

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{r-h}^{r}.$$

Nach einfachen Umformungen folgt daraus

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

Setzt man als Grenzen $x_1 = -r$ und $x_2 = +r$, so erhält man das Volumen der Vollkugel (ebenso aus der gefundenen Formel für $h = 2r$).

Bei der Volumenbestimmung der Rotationskörper hatte jedes Volumenelement als Grundfläche einen Kreis, der mittels πr^2 berechnet wurde. Die Methode läßt sich leicht auf solche Körper übertragen, bei denen die Grundflächen der Elemente nicht kreisförmig sind.

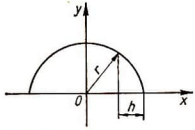


Bild 144

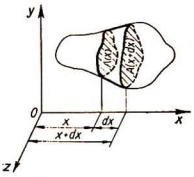


Bild 145

8.2.2. Berechnung des Inhalts einiger anderer Körper

Das Volumen des in Bild 145 dargestellten Körpers soll berechnet werden.
Das ausgesuchte Volumenelement hat näherungsweise das Volumen $\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$, der Gesamtkörper mithin

$$V \approx \sum A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bei Verfeinerung der Teilung, d. h. für $\Delta x \to 0$ folgt

$$\boxed{V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,\mathrm{d}x} \tag{93}$$

wenn sich der Körper im Intervall von x_1 bis x_2 erstreckt. Man erkennt den völlig gleichen Gedankengang wieder, der auf die Formel (92a) geführt hatte, bemerkt

aber auch, daß die Lösung des Integrals (93) nur möglich ist, wenn der Inhalt der Querschnittsfläche $A(x)$ und ihre Abhängigkeit von x bekannt sind. Der Fall eines Kreises als Querschnittsfläche führte auf die Beziehung (92a).
Die Integration, die auf das Volumen führt, setzt eine Flächenbestimmung, im allgemeinen also eine Integration voraus. Diese zweimalige Integration wird nur bei Körpern, deren Querschnittsfläche elementar bestimmt werden kann, vermieden. In komplizierteren Fällen findet das sogenannte dreifache Integral Anwendung (vgl. 15. 2.).

BEISPIEL

Bestimme das Volumen der Pyramide der Höhe h, deren Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge a ist.

Lösung: Bei allen Aufgaben sollte man sich grundsätzlich eine Skizze anfertigen. Die Lage des betreffenden Körpers (Fläche usw.) im Koordinatensystem darf man dabei nicht dem Zufall überlassen, sondern man wähle sie so, daß der dadurch auftretende Integrand eine einfache Gestalt erhält.
Zeichnet man eine Skizze, in der die Spitze der Pyramide im Koordinatenursprung liegt, die x-Achse durch den Schwerpunkt der Grundfläche geht und die Grundfläche senkrecht zur x-Achse liegt, so ist

$$A(x) = (2y)^2,$$

wobei $$y = \frac{a}{2h}x$$

die Abhängigkeit der Größe der Schnittfläche von der Abszisse angibt.
Nunmehr wird

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,dx$$

$$V = \int_0^h \left(2\frac{a}{2h}x\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x$$

$$V = \frac{a^2}{3h^2}x^3\Big|_0^h$$

$$V = \frac{a^2 h}{3}.$$

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Die Volumenbestimmung (Kubatur) ist, wie die vorangegangenen Betrachtungen zeigen, bisher in 2 Fällen möglich:
1. Der Körper ist ein Rotationskörper.
2. Man kennt von den Körpern den Inhalt der zu einer Achsenebene parallelen Schnittflächen. Zur Berechnung dient die Formel

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A(x)\,\mathrm{d}x; \text{ bei Drehkörpern ist } A(x) = \pi y^2.$$

AUFGABEN

(Man fertige stets, wenn nicht mit zu großem Zeitaufwand verbunden, eine Skizze an.)

354. Man berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation der Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ um die y-Achse entsteht ($y_1 = 0$; $y_2 = b$).

355. Welches Volumen hat der Körper, der bei Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = (x^2 - 1)^2$ um die x-Achse entsteht ($x_1 = -1$; $x_2 = +1$)?

356. Man berechne die Volumen der Körper, die bei Rotation eines beliebigen Dreiecks um die Seiten entstehen.
(a, b und c seien die bekannten Dreiecksseiten, h_a, h_b und h_c die dazugehörigen Höhen).

357. Man berechne das Volumen des Stromlinienkörpers, der entsteht, wenn die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = {}^1/_4 \sqrt{x}\,(3 - x)$ im Bereich zwischen den beiden Nullstellen um die x-Achse rotiert.

358. Man berechne das Volumen einer Pyramide der Höhe h, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge s ist.

359. Die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Bestimme die Volumen der dabei entstehenden Körper.

360. Durch den Wert des Integrals $V_x = \pi \int_a^b x\,\mathrm{d}x$ wird das Volumen eines Rotationskörpers bestimmt. Wie heißt die Gleichung der Kurve, die die erzeugende Fläche von oben begrenzt? Welche Gestalt hat der entstehende Rotationskörper?

361. Durch den Wert des Integrals $V_y = \int_{y_1}^{y_2} \cos^2(2y - 1)\,\mathrm{d}y$ wird das Volumen eines Rotationskörpers bestimmt. Wie heißt die Gleichung der Kurve, die die erzeugende Fläche von oben begrenzt?

362. Mit dem Integral $V_x = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ wird das Volumen eines Rotationskörpers bestimmt. Wie heißt die Gleichung der oberen Begrenzungsfunktion jener Fläche, die durch Rotation um die x-Achse den Körper erzeugt?

363. Bei der Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $ay^3 = x^4$ um die x-Achse entsteht ein Körper. Man bestimme dessen Volumen in den Grenzen x_1 und x_2.

364. Wie groß sind die Volumen der Rotationshyperboloide, die durch Rotation der Fläche unter der Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ um deren Hauptachsen entstehen?

8.3. Bogenlängenberechnung (Rektifikation)

Auch bei der Bestimmung der Länge einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ schlägt man den bei der Behandlung der Rauminhaltsberechnung als grundsätzlich gangbar bezeichneten Weg ein (vgl. 8.2.1.). Vorausgesetzt wird: f muß differenzierbar und f' stetig im Integrationsintervall sein.
So ersetzt man den gesamten Bogen näherungsweise durch *geradlinige* Streckenelemente $\mathrm{d}s$ (*Bogendifferentiale*), die, wie Bild 146 für ein herausgegriffenes Element zeigt, jeweils Teile der in den Anfangspunkten P_0 der Teilintervalle gelegten Tangenten an die Kurve sind.

Dann folgt nach Bild 146

$$(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = (\mathrm{d}s)^2,$$

wobei $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ die zugehörigen Differentiale bedeuten. Dann ist aber

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

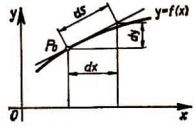


Bild 146

oder

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{94}$$

Wählt man die Anzahl der Teilintervalle, in die das Gesamtintervall $x_1 \ldots x_2$ aufgeteilt ist, größer und größer, so stellt nach dem Begriff des Integrals als Grenzwert einer Summe von unendlich vielen Produkten, deren einer Faktor gegen Null geht,

$$\boxed{s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x} \tag{95a}$$

die Bogenlänge des Bildes der Funktion $y = f(x)$ im Bereich $x_1 \leqq x \leqq x_2$ dar. Da es unter der Voraussetzung, daß im betrachteten Intervall zu jedem y nur ein x existiert, gleichgültig ist, ob man den zu berechnenden Bogen durch die Begrenzung x_1 und x_2 oder durch die zugehörigen Ordinaten y_1 und y_2 angibt, folgt aus

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

auch

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

und somit

$$\boxed{s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y} \tag{95b}$$

Die Formeln (95) zeigen, daß Bogenlängenberechnungen meist auf komplizierte Integrale führen. Deshalb soll an dieser Stelle, vor der Behandlung der Integrationsverfahren, nur ein Beispiel gerechnet werden.

BEISPIEL

Berechne den Umfang des Kreises mit dem Radius 1.

Lösung: Aus der Kurvengleichung des Kreises in Ursprungslage

$$x^2 + y^2 = 1$$

folgt für den oberhalb der x-Achse gelegenen Halbkreis die Funktionsgleichung

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Mit $$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

wird aus (95a) für den Halbkreis

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\arcsin x\Big|_0^1 = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Also folgt für den gesamten Einskreis die Bogenlänge 2π.

8.4. Mantelflächenberechnung (Komplanation) von Rotationskörpern

In Bild 147 sei $y = f(x)$ das Bild der oberen Begrenzungsfunktion jener Fläche, die bei Rotation um die x-Achse einen Körper erzeugt. Die Mantelfläche des so entstehenden Körpers soll bestimmt werden[1]).
Zur Entstehung der Mantelfläche denkt man sich den Gesamtbogen in Bogendifferentiale $\mathrm{d}s$ zerlegt, die bei Rotation um die x-Achse je ein sog. Mantelflächendifferential $\mathrm{d}A_M$ erzeugen.
Ein solches Mantelflächendifferential entspricht der Mantelfläche eines Kegelstumpfes. Deshalb gilt unter Benutzung der Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}A_M = 2\pi\left(y + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}s,$$

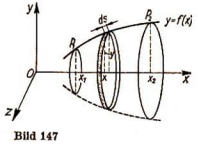


Bild 147

wie aus der elementaren Planimetrie folgt.
Nach vollzogenem Grenzübergang ergibt sich durch Summierung über alle Mantelflächendifferentiale, da der Ausdruck $y + {}^1/_2\,\mathrm{d}y$ gegen y geht

$$A_M = 2\pi\int y\,\mathrm{d}s$$

oder unter Beachtung von (94)

$$\boxed{A_{Mx} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x} \qquad (96a)$$

Der Index x soll an die hier vorausgesetzte Rotation um die x-Achse erinnern.

[1]) Unter speziellen Voraussetzungen ist auch die 2. Guldinsche Regel zur Mantelflächenbestimmung geeignet (vgl. 11.2.4.)

Bei der Rotation um die y-Achse führt der gleiche Gedankengang auf die Formel

$$A_{My} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\, \mathrm{d}y \tag{96b}$$

Auch im Falle der Mantelflächenberechnung ist die Auswahl geeigneter Beispiele an dieser Stelle noch sehr stark beschränkt, da erst die Integrationsverfahren die Möglichkeit der Lösung solcher Integrale schaffen.

BEISPIEL

Berechne die Oberfläche der Kugel mit dem Radius 1.

Lösung: In diesem Fall decken sich die Begriffe Mantelfläche und Oberfläche.

Der Halbkreis in Ursprungslage, der durch Rotation die Kugel erzeugt, ist die Kurve der Funktion

$$f = \{(x; \sqrt{1 - x^2}) \mid x \in R \text{ und } |x| \leqq 1\}$$

Mit $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ folgt aus (96a)

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x$$

$$= 4\pi \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{(1 - x^2)\,(1 - x^2 + x^2)}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x$$

$$= 4\pi \int_{0}^{1} \mathrm{d}x = 4\pi x \Big|_0^1 = 4\pi. \qquad \equiv$$

Weitere Beispiele und Aufgaben zu den geometrischen Anwendungen der Integralrechnung, insbesondere zu 8.3. und 8.4., sind in 9.1. bis 9.3. zu finden. Zu ihrer Lösung werden allerdings die nachfolgend behandelten Integrationsverfahren benötigt.

9. Integrationsverfahren

Die bisher auftretenden Integrale waren Grundintegrale oder konnten sehr einfach auf solche zurückgeführt werden. Dieser Umstand ist aber nur in wenigen Fällen zu verzeichnen. Aufgabe der folgenden Abschnitte muß es daher sein, Wege zu weisen, die ein Zurückführen eines komplizierten Integrals auf ein Grundintegral gestatten. Hierbei zeigt sich ein Unterschied zum Differenzieren. Beim Integrieren vermißt man ähnliche Regeln wie Produkt- oder Quotientenregel der Differentialrechnung. An Stelle dieser Regeln können gegebenenfalls die nachfolgend behandelten drei Lösungsverfahren verwendet werden, die jedoch den Lösungsweg nur grob an-

geben. Bei diesen drei Verfahren läßt sich kein starres Schema anwenden. Die Technik des Integrierens besteht in der Hauptsache darin, für ein vorgegebenes Integral das geeignete Lösungsverfahren festzulegen und mit dessen Hilfe die Lösung zu ermitteln. Bei ausreichender Übung wird dies bald keine großen Schwierigkeiten mehr bereiten. Das Ziel wird um so leichter und schneller erreicht werden, je sicherer die Grundintegrale beherrscht werden.
Aber auch mit Hilfe dieser drei Verfahren lassen sich nicht alle Integrale lösen. Es gibt viele Integrale, bei denen kein geschlossenes Integrieren möglich ist.
Von den Verfahren der

Integration durch Substitution,
der partiellen Integration
und der Integration durch Partialbruchzerlegung

sei zunächst das Substitutionsverfahren behandelt.

9.1. Integration durch Substitution

9.1.1. Allgemeine Vorbetrachtung

Selbst so einfache Integrale wie

$1.\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ oder $2.\int(2-3x)^7\,\mathrm{d}x$

lassen sich, wie das erste von beiden, mit den bisher kennengelernten Mitteln nicht lösen, oder sie erfordern, wie das zweite Beispiel, einen erheblichen Rechenaufwand (Anwendung des binomischen Lehrsatzes). Oft ergibt eine einfache Substitution ein Grundintegral und damit die Lösung des Integrals.

1. Setzt man in $\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$ für $1+x=u$, so hat man eine neue Variable u eingeführt. Die alte Variable x ist aber nicht nur im Radikanden $1+x$ enthalten, sondern ebenfalls in $\mathrm{d}x$. Deshalb muß auch $\mathrm{d}x$ durch die neue Variable u ausgedrückt werden. Durch Differentiation von $u=1+x$ erhält man $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1$, d. h., es ist $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$. Somit ist

$$\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u.$$

Dadurch ist ein Grundintegral der Form $\int x^n\,\mathrm{d}x$ entstanden.
Es folgt

$$\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

und unter Beachtung von $u=1+x$

$$\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(Durch Differentiation der rechten Seite kann man sich von der Richtigkeit der Lösung überzeugen!)

2. Setzt man in

$$\int (2-3x)^7\,\mathrm{d}x$$

$$2-3x=u,$$

so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-3,\quad \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}u.$$

Man erkennt, daß sich die Beziehung zwischen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}u$ zwangsläufig aus der Gleichung zwischen x und u ergibt.
Durch Einsetzen erhält man

$$\int u^7\left(-\frac{1}{3}\mathrm{d}u\right)=-\frac{1}{3}\int u^7\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{3\cdot 8}u^8+C=-\frac{1}{24}(2-3x)^8+C.$$

Nachdem das Verfahren der Substitution an zwei Beispielen erläutert wurde, kann man es allgemein wie folgt formulieren:
Zur Lösung des Integrals $\int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}x$ führt man eine neue Variable $u=\varphi(x)$ ein. Die Funktion φ muß differenzierbar und eindeutig umkehrbar sein. Schließt man von $u=\varphi(x)$ auf $x=\psi(u)$ und ist ψ differenzierbar und ψ' stetig, so ist $\mathrm{d}x=\psi'(u)\,\mathrm{d}u$, und man erhält

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(u)\psi'(u)\,\mathrm{d}u} \tag{97}$$

Nach vollzogener Integration setzt man wieder $\varphi(x)$ für u ein und erhält die Lösung als Funktion der Variablen x. Die Formel (97) und ihre Herleitung zeigen deutlich den großen Einfluß des $\mathrm{d}x$ bei der Substitution.
Das Substitutionsverfahren wird nur nach gründlicher Übung beherrscht. Man überlasse die Wahl der Substitution nicht dem Zufall, sondern lege sich stets die Frage vor:

Durch welche Substitution geht das gegebene Integral unter Beachtung des Einflusses, den das $\mathrm{d}x$ ausübt, in ein Grundintegral über?

Die folgenden Gruppen fassen Integrale zusammen, die sich nach einem einheitlichen Gesichtspunkt lösen lassen.

9.1.2. Integrale der Form $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$

Der Integrand ist Funktionswert einer mittelbaren Funktion $y=f[\varphi(x)]$, wobei φ eine lineare Funktion ist. Die Substitution des Ausdruckes $ax+b$ vereinfacht zweifellos den Integranden. Deshalb setzt man

$$\varphi(x)=ax+b=u,\quad a\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

und erhält

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(u)\,\mathrm{d}u} \tag{98}$$

Das Integral hat eine wesentlich einfachere Form. Es ist lösbar, wenn $\int f(u)\,\mathrm{d}u$ ein Grundintegral ist. Die bereits behandelten Beispiele in 9.1.1. gehören dieser Gruppe an. Weitere Beispiele sollen das Verfahren erläutern.

BEISPIELE

1. $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\cos^2(4x-2)}$ Subst.: $4x-2=u,\ \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}u.$

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\cos^2(4x-2)} = \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \frac{3}{4}\tan u + C = \underline{\underline{\frac{3}{4}\tan(4x-2)+C.}}$$

2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ Subst.: $\frac{x}{2}=u,\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}u.$

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^u + C = \underline{\underline{2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C.}}$$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(ax+b)^2}$ Subst.: $ax+b=u,\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}u.$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(ax+b)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \underline{\underline{\frac{1}{a}\arctan(ax+b)+C.}}$$

Die folgenden Integrale können so umgeformt werden, daß sie die Gestalt von Formel (98) erhalten.

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$

Man formt zunächst das Integral um:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad \text{und setzt} \quad \frac{x}{a}=u$$

also $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$. Daraus folgt:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \underline{\underline{\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C}}$$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Subst.: $\frac{x}{a}=u,\ \mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \underline{\underline{\arcsin\frac{x}{a}+C.}}$$

6. Auch das wichtige Integral

$$\int \cos^2 x \, dx$$

läßt sich nach Umformung durch eine einfache Substitution lösen. Bekanntlich gilt die Formel

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Deshalb wird

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx.$$

Setzt man im zweiten Integral $2x = u$, also $2\,dx = du$, so entsteht

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + C_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin u + C.$$

Also ist

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

oder auch

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.$$

7. Mit der Beziehung $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ folgt leicht unter Benutzung von 6.:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)\, dx$$

$$= x - \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

8. Auch das Integral

$\int \sin mx \sin nx \, dx$ (m und n ganzzahlig, positiv und verschieden) läßt sich nach geeigneten Umformungen lösen.

Lösung: Aus der Trigonometrie ist bekannt, daß

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ist. Daraus folgt

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Beachtet man — entsprechend der Aufgabenstellung —

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta}{2} &= mx\\ \frac{\alpha-\beta}{2} &= nx\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned}\alpha &= (m+n)\,x\\ \beta &= (m-n)\,x,\end{aligned}$$

so ist

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos(m-n)\,x\,dx - \int \cos(m+n)\,x\,dx\right].$$

Substituiert man

$$(m-n)\,x = u; \quad (m-n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

und

$$(m+n)\,x = v; \quad (m+n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v,$$

so entsteht

$$\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n}\int \cos u\,\mathrm{d}u - \frac{1}{m+n}\int \cos v\,\mathrm{d}v\right) =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)\,x - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)\,x + C.$$

9. Das folgende Beispiel, ein bestimmtes Integral, soll benutzt werden, um die *Änderung der Integrationsgrenzen bei Substitutionen* zu betrachten.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Subst.:}\ \frac{x}{3} = u; \quad \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u.$$

Damit ist jedoch die Substitution noch nicht auf alle vorkommenden Größen angewendet. Man beachte, daß auch die Grenzen 0 und $\pi/2$ x-Werte sind. Um anzudeuten, daß auf diese Werte die Substitution nicht ausgedehnt wurde, kann man diese Grenzen in Klammern setzen und schreiben:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3\int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos u\,\mathrm{d}u = 3\sin u\Big|_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 3\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Im letzten Ausdruck fehlen die Klammern, da er wieder die Variable x enthält. Erst jetzt, nachdem der Widerspruch zwischen den Grenzen und der vorübergehend benutzten Variablen u beseitigt ist, kann man einsetzen und erhält:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right) = \frac{3}{2}.$$

Eine andere Möglichkeit, die besonders bei schwierigen Aufgaben zu empfehlen ist, besteht darin, die Grenzen entsprechend der Substitutionsgleichung, die die Wechselbeziehung zwischen x und u angibt, mit zu ändern.
Das Beispiel erhält dann folgende Gestalt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Subst.:}\ \frac{x}{3} = u \quad \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \quad x_1 = 0 \to u_1 = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} \to u_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos u\,\mathrm{d}u = 3\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 3\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right) = \frac{3}{2}.$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß man nicht wieder zur Variablen x zurückkehren muß.

10. Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Kurve der Funktion $y = \dfrac{2}{4-3x}$ und den beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1/3$ und $x = -2$ begrenzt wird.

Lösung:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{4-3x} = 2\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{4-3x}.$$

Setzt man $4-3x = u$, $\quad \mathrm{d}x = -{}^1\!/_3\,\mathrm{d}u$, so folgt

$$x_1 = -2 \;\rightarrow\; u_1 = 4 - 3\,(-2) = 10,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \;\rightarrow\; u_2 = 4 - 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 5.$$

Somit erhält man das Grundintegral

$$-\frac{2}{3}\int_{10}^{5} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_{10}^{5}.$$

Man beachte, daß man nur auf diese Substitution kommen kann, wenn man Kenntnis von dem Grundintegral $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ hat.

Es ergibt sich als Inhalt der Fläche

$$A = +\frac{2}{3}(\ln 10 - \ln 5) = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{5} = \frac{2}{3}\ln 2 = \frac{2}{3}\cdot 0{,}6931 = \underline{\underline{0{,}4620}}.$$

11. Berechne die Länge der Kettenlinie $y = \cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ für $-1 \leqq x \leqq +1$.

Lösung:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Da $f(x) = f(-x)$ ist, also eine gerade Funktion vorliegt, gilt

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Während das erste Integral als Grundintegral $\mathrm{e} - 1$ ergibt, substituiert man beim zweiten $-x = u$; $-\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und erhält

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_{(0)}^{(1)} \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} + 1.$$

Also ist

$$s = e - 1 - e^{-1} + 1 = e - \frac{1}{e}.$$

Die Rechnung könnte auch unter Benutzung der Beziehungen $y = \cosh x$; $y' = \sinh x$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x$$

erfolgen.

9.1.3. Integrale der Form $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$

Der Integrand ist ein Bruch, dessen Zähler die erste Ableitung des Nenners ist. Diese Forderung erfüllt z. B. das Integral

$$\int \frac{(6x + 4)\,dx}{3x^2 + 4x + 7}.$$

Setzt man den Nenner gleich u, also

$$3x^2 + 4x + 7 = u,$$

so wird wegen

$$(6x + 4)\,dx = du$$

der Zähler des Ausgangsintegrals gleich du.
Also erhält man mit $u = 3x^2 + 4x + 7$ das Grundintegral

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|3x^2 + 4x + 7| + C.$$

Allgemein setzt man in

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} \quad f(x) = u \quad f'(x)\,dx = du \text{ und erhält}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C} \tag{99}$$

In den meisten Fällen wird man erst durch Umformungen die gewünschte Gestalt des Zählers und Nenners erhalten.

BEISPIELE

1. $\int \frac{x\,dx}{ax^2 + b}$.

Der fehlende Faktor $2a$ im Zähler stört nicht, denn setzt man

$$ax^2 + b = u, \text{ so ist } 2ax\,dx = du, \text{ also } x\,dx = \frac{1}{2a}\,du, \text{ und}$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2a}\ln|ax^2 + b| + C.$$

Fehlt also an der geforderten Form nur ein konstanter Faktor, so läßt sich das Verfahren dennoch ohne Schwierigkeiten anwenden.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}$ Subst.: $a+b\cos x=u$

$$-b\sin x\,dx=du;\qquad x_1=0;\quad u_1=a+b$$

$$\sin x\,dx=-\frac{1}{b}\,du;\quad x_2=\frac{\pi}{2};\quad u_2=a$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}=-\frac{1}{b}\int_{a+b}^{a}\frac{du}{u}=-\frac{1}{b}\ln|u|\Big|_{a+b}^{a}=-\frac{1}{b}(\ln|a|-\ln|a+b|)=$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a+b}{a}\right|}}.$$

3. $\int \frac{\left(x^3-\frac{1}{9}\right)dx}{15x^3-5x+7}$.

Um den Zähler auf die Form $45x^2-5$ zu bringen, ist die Erweiterung mit 45 erforderlich. Dann entsteht:

$$\frac{1}{45}\int\frac{(45x^2-5)\,dx}{15x^3-5x+7}=\underline{\underline{\frac{1}{45}\ln|15x^3-5x+7|+C}}.$$

Das letzte Beispiel ist zweifellos konstruiert und dürfte so ideal, daß die Erweiterung die gleichzeitige Übereinstimmung der beiden Zählerglieder mit den zugehörigen im Nenner bringt, kaum auftreten. Das Problem wird später allgemein behandelt.

4. Berechne das Volumen jenes Körpers, der bei Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y=\sqrt{\frac{2+x}{x^2+4x}}$ für $1\leqq x\leqq 2$ um die x-Achse entsteht.

Lösung:

Nach (92a) ist

$$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2\,dx=\pi\int_1^2\frac{2+x}{x^2+4x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_1^2\frac{2x+4}{x^2+4x}\,dx.$$

Durch die Erweiterung mit 2 ist im Zähler die Ableitung des Nenners entstanden.

$$x^2+4x=u;\qquad x_1=1;\quad u_1=5$$

$$(2x+4)\,dx=du;\qquad x_2=2;\quad u_2=12$$

$$\pi\int_1^2\frac{2+x}{x^2+4x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_5^{12}\frac{du}{u}=\frac{\pi}{2}\ln|u|\Big|_5^{12}=\frac{\pi}{2}(\ln 12-\ln 5)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{12}{5}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2{,}4=\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}8755=\underline{\underline{1{,}3752}}.$$

5. Bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und der Kurve der Funktion $y = \tan x$ in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi/4$ eingeschlossen wird.

Lösung:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \qquad \begin{array}{ll} \text{Subst.: } \cos x = u; & x_1 = 0; \quad u_1 = 1 \\ -\sin x \, dx = du; & x_2 = \frac{\pi}{4}; \quad u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}$$

$$A = -\int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^1 \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \approx \underline{\underline{0{,}347}}.$$

9.1.4. Integrale der Form $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$

In den Integralen von 9.1.3. stand die Ableitung des Nenners des Integranden im Zähler, während nun der Integrand ein Produkt darstellt, bei dem der eine Faktor Funktionswert einer mittelbaren Funktion ist und der zweite Faktor, das ist das Wesentliche dabei, die Ableitung des inneren Terms des ersten Faktors ist.
Auch die Gruppe 9.1.2., bei der $\varphi(x) = ax + b$ war, läßt sich in die neue Gruppe einordnen. Sie verdankt ihre Sonderstellung nur dem besonders einfachen Aufbau des Integranden.

BEISPIEL

1. $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

Lösung: Setzt man

$$\sin x = u,$$

so ist $\cos x \, dx = du$, also der zweite Faktor des Integranden dem du gleich.
Durch Einsetzen erhält man:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \underline{\underline{\frac{\sin^5 x}{5} + C}}.$$

Handelt es sich allgemein um die Lösung des Integrals

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx,$$

so führt die Substitution

$$\varphi(x) = u, \quad \varphi'(x)\,dx = du$$

auf

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du} \qquad (100)$$

Es ist nicht immer möglich, nach dieser Substitution das Integral zu lösen. Mitunter sind noch andere Verfahren anzuschließen. Dennoch wird die Substitution bei Integralen der betrachteten Form den Integranden stets vereinfachen.

BEISPIELE

2. $\int \frac{\cosh^5 x - 3\cosh^2 x - 7}{\cosh^4 x} \sinh x \, dx$

Lösung: Aus $\cosh x = u$ folgt $\sinh x \, dx = du$
und deshalb

$$\int \frac{\cosh^5 x - 3\cosh^2 x - 7}{\cosh^4 x} \sinh x \, dx = \int \frac{u^5 - 3u^2 - 7}{u^4} du =$$

$$= \int (u - 3u^{-2} - 7u^{-4}) \, du = \frac{u^2}{2} + 3u^{-1} + \frac{7}{3} u^{-3} + C =$$

$$= \frac{\cosh^2 x}{2} + \frac{3}{\cosh x} + \frac{7}{3\cosh^3 x} + C.$$

Das Beispiel läßt deutlich erkennen, wie zweckmäßig die Substitution $\cosh x = u$ ist. Zwei einfache Fälle sollen noch betrachtet werden, die besonders häufig auftreten.

3. $\int f(x) f'(x) \, dx$

Lösung: Mit $f(x) = u$, $f'(x) \, dx = du$ entsteht $\int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C.$

4. $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx$

Lösung: Aus $f(x) = u$, $f'(x) \, dx = du$ folgt $\int e^u \, du = e^u + C = e^{f(x)} + C.$

5. $\int_0^1 \frac{\arctan x \, dx}{1 + x^2}$

Lösung: Das Beispiel ist erneut gut geeignet zu zeigen, daß man nur bei sicherer Beherrschung der Grundformeln der Differential- und Integralrechnung die zweckmäßige Substitution erkennen kann.
Aus der Schreibweise

$$\int_0^1 \arctan x \frac{dx}{1 + x^2}$$

schließt man auf die Substitution

$$\arctan x = u, \quad \frac{1}{1 + x^2} dx = du.$$

Daraus ergeben sich die Grenzen

$$x_1 = 0 \qquad u_1 = \arctan x_1 = 0$$

$$x_2 = 1 \qquad u_2 = \arctan x_2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 \arctan x \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u \, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{2 \cdot 16} = \frac{\pi^2}{32}.$$

6. $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$

7. Bestimme den Inhalt der Fläche, die für $0 \leq x \leq 1$ von der Kurve mit der Gleichung $y = \sin x \cos x$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

   Lösung:

$$A = \int_0^1 \sin x \cos x \, dx = \int_{(0)}^{(1)} u \, du = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sin^2 1 = 0{,}35406$$

In vielen Fällen muß man erst die der Formel (100) entsprechende Form herstellen, wie das folgende Beispiel zeigt.

8. $\int (\tan^3 x + \tan x + 1) \, dx$

   Lösung: Hier fehlt offenbar der erforderliche Faktor $\frac{1}{\cos^2 x}$. Um den Integranden mit diesem zu versehen, erweitere man mit $\cos^2 x$ unter Benutzung der Formel

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

   Mit $\tan x = u$ ergibt sich

$$\int \frac{(\tan^3 x + \tan x + 1) \, dx}{(1 + \tan^2 x) \cos^2 x} = \int \frac{u^3 + u + 1}{1 + u^2} \, du.$$

   Nach Division erhält man

$$\int u \, du + \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} u^2 + \arctan u + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + \arctan (\tan x) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + x + C.$$

   Beachtet man, daß aus $\tan x = u$ die Beziehung $x = \arctan u$ folgt, so ergibt sich aus $\frac{1}{2} u^2 + \arctan u + C$ auch direkt $\frac{1}{2} \tan^2 x + x + C$.

9. $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx.$

   Lösung: Mit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ folgt

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = -\int (1 - u^2) \, du = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

10. $\int \sin^{2n+1} x \, dx = \int \sin^{2n} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x \, dx = \int (1 - u^2)^n \, du.$ (n ganzzahlig)

    Die Lösung läßt sich für ein bestimmtes n mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes leicht finden. Sie erfolgt ähnlich der des Beispiels 9.
    Auch dieses Beispiel zeigt wieder deutlich die Zweckmäßigkeit dieser und nur dieser Substitution.

11. Durch die Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = x^{-\frac{1}{2}} \ln x$ um die x-Achse entsteht ein Körper, dessen Volumen (in den Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$) bestimmt werden soll.

Lösung:

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 \frac{1}{x} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x \qquad \ln x = u \qquad \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$V_x = \pi \int_{(1)}^{(2)} u^2 \,\mathrm{d}u = \pi \frac{u^3}{3}\Big|_{(1)}^{(2)} = \frac{\pi}{3} (\ln x)^3 \Big|_1^2 = \underline{\underline{\frac{\pi (\ln 2)^3}{3}}}.$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^3}}$

Lösung: Subst.: $a^3 - x^3 = u$; $-3x^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$; $x^2 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^3}} = -\frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3} u^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{3} \sqrt{a^2 - x^3} + C}}.$$

9.1.5. Substitution trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Integrale der Form

a) $\int f\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$

b) $\int f\left(x; \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$

und c) $\int f\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$.

Alle Integranden weisen einen irrationalen Term eines quadratischen Terms auf.

a) $\int f\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$

Die Substitution

$$x = a \sin u$$

vereinfacht den Integranden, indem die Wurzel in Wegfall kommt.

Aus $x = a \sin u$ folgt

$\mathrm{d}x = a \cos u \,\mathrm{d}u$ und, unter Anwendung der Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, für

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a \sqrt{1 - \sin^2 u} = a \cos u.$$

Somit wird

$$\int f\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \sin u; a \cos u)\, a \cos u \,\mathrm{d}u.$$

In den Lösungen treten oft die trigonometrischen Funktionen der Variablen u auf, bei deren Zurückführung auf die Variable x beachtet werden muß:

$$\sin u = \frac{x}{a};\quad \cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\quad \cot u = \frac{1}{\tan u} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Außerdem gilt wegen $x = a \sin u$ auch $u = \arcsin x/a$.
Erwähnt sei, daß auch die Substitution $x = a \cos u$ zum Ziele führt, weil auch sie die Wurzel $\sqrt{a^2-x^2}$ auf Grund der Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ beseitigt. Scheint auch die Substitution trigonometrischer Funktionen zunächst sehr willkürlich und wenig verständlich, so zeigen doch die dadurch bedingten Vereinfachungen des Radikanden deutlich die Zweckmäßigkeit einer solchen Substitution. Erwähnt sei, daß die vereinfachten Integrale noch nicht in jedem Fall lösbar sind. Mitunter bedarf es zusätzlich der Anwendung eines anderen Verfahrens. Eine starke Vereinfachung tritt jedoch stets auf.

BEISPIELE

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Lösung: Durch die Substitution $x = a \sin u$; $dx = a \cos u\, du$ erhält man

$$\int \frac{a\cos u\, du}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}} = \int \frac{\cos u\, du}{\cos u} = \int du = u + C = \underline{\underline{\arcsin \frac{x}{a} + C.}}$$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ Subst.: $x = 3\sin u \quad dx = 3\cos u\, du$

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx = \int 3^3 \sin^3 u \sqrt{9-9\sin^2 u}\cdot 3\cos u\, du =$$

$$= 3^5 \int \sin^3 u \cos^2 u\, du = 3^5 \int \sin^2 u \cos^2 u \sin u\, du =$$

$$= 3^5 \int (1-\cos^2 u)\cos^2 u \sin u\, du = 3^5 \int (\cos^2 u - \cos^4 u)\sin u\, du =$$

$$= -3^5 \int (v^2 - v^4)\, dv = -3^5 \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^5}{5}\right) + C =$$

$$= 3^5 \left(\frac{\cos^5 u}{5} - \frac{\cos^3 u}{3}\right) + C = \frac{3^5}{15}\cos^3 u\,(3\cos^2 u - 5) + C =$$

$$= \frac{3}{5}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(9-x^2)}{3} - 5\right] + C = \underline{\underline{\frac{-(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5}(x^2+6) + C.}}$$

3. Zur Bestimmung des Inhaltes des Kreises mit dem Radius r setzt man in $A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ein und erhält

$$A_{\text{Kreis}} = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx \qquad \text{(Viertelkreisfläche mal 4)}$$

Mit $x = r \sin u \qquad \mathrm{d}x = r \cos u \,\mathrm{d}u \qquad x_1 = 0; \quad u_1 = 0$

$$x_2 = r; \quad u_2 = \frac{\pi}{2}$$

folgt daraus

$$A_{\text{Kreis}} = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \,\mathrm{d}u.$$

Im Beispiel 6 von 9.1.2. ergab sich $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$.

Also ist

$$A_{\text{Kreis}} = \frac{4r^2}{2}(u + \sin u \cos u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2 \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi r^2}}.$$

Die Fälle b) und c) haben untereinander und auch mit a) viel Gemeinsames:

b) $\int f(x; \sqrt{a^2 + x^2})\,\mathrm{d}x$ c) $\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x$

An die Stelle der Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ des Falles a) tritt hier die Beziehung $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$

Substitution

$x = a \sinh u$	$x = a \cosh u$
$\mathrm{d}x = a \cosh u \,\mathrm{d}u$	$\mathrm{d}x = a \sinh u \,\mathrm{d}u$
$u = \operatorname{arsinh} x/a$	$u = \operatorname{arcosh} x/a$

Damit wird

$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2 u} = a \cosh u$ $\quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2} = a \sinh u$

Für Umformungen benötigt man mitunter nach folgende Beziehungen:

$$\sinh u = \frac{x}{a} \qquad \cosh u = \frac{x}{a}$$

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \qquad \sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$\coth u = \frac{1}{\tanh u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} \qquad \coth u = \frac{1}{\tanh u} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$u = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a \qquad u = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a$$

BEISPIELE

4. $\int \sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Subst.: $x = \sqrt{5}\sinh u \qquad u = \operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{5}}$

$$\mathrm{d}x = \sqrt{5}\cosh u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{5+5\sinh^2 u}\,\sqrt{5}\cosh u\,\mathrm{d}u = 5\int \cosh^2 u\,\mathrm{d}u.$$

Die Aufgabe 373 zeigt $\int \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = {}^1/_2(u+\sinh u\cosh u)+C$.
Also folgt

$$\int \sqrt{5+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}(u+\sinh u\cosh u)+C =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5\operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{5}} + x\sqrt{5+x^2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5\ln\left[\frac{x}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{x^2}{5}+1}\right] + x\sqrt{5+x^2}\right)+C.^{1})$$

$$= \frac{1}{2}\left[5\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right) + x\sqrt{x^2+5}\right]+C,$$

5. $\int_1^3 \sqrt{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Man vermißt zunächst die übliche Form des Integranden. Durch die Einführung der quadratischen Ergänzung gelingt es jedoch leicht, die gewohnte Form zu finden.

$$\int_1^3 \sqrt{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{4+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Substitution

$$x-1=u; \qquad \mathrm{d}x=\mathrm{d}u \qquad \begin{matrix} x_1=1; & u_1=0 \\ x_2=3; & u_2=2 \end{matrix}$$

ergibt $\int_0^2 \sqrt{4+u^2}\,\mathrm{d}u$. Das Integral geht durch die Substitution $u = 2\sinh v$ über in

$$4\int_{(0)}^{(2)} \cosh^2 v\,\mathrm{d}v = \frac{4}{2}(v+\sinh v\cosh v)\Big|_{(0)}^{(2)} = 2\left(\operatorname{arsinh}\frac{u}{2} + \frac{u}{4}\sqrt{4+u^2}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\operatorname{arsinh}1 + 2\sqrt{8} - 4\operatorname{arsinh}0 - 0\right) \approx 4{,}59.$$

---

[1]) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Beachte diese zwei möglichen Schreibweisen bei allen Areafunktionen, besonders beim Vergleichen mit den Lösungen im Anhang

6. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Lösung: Mit $x = a\cosh u$ folgt $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^3\int \cosh^3 u\,du = a^3\int (1+\sinh^2 u)\cosh u\,du$.

Setzt man $\sinh u = v$, so ergibt sich

$$a^3\int (1+\sinh^2 u)\cosh u\,du = a^3\int (1+v^2)\,dv = a^3\left(\sinh u + \frac{1}{3}\sinh^3 u\right) + C =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}\right) + C = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{3}(2a^2+x^2) + C.$$

Die drei behandelten Fälle lassen deutlich erkennen, wie durch sinnvolle Anwendung der Formeln $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bzw. $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ eine Substitution gefunden wird, die die im Integranden auftretende Wurzel beseitigt.

9.1.6. Integrale der Form $\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\,dx$, wobei der Integrand rational in $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ ist

Ist der Integrand ein rationaler Term von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$, so gehen diese Integrale durch die *Substitution*

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

in Integrale der Form

$$\int \bar{R}(u)\,du$$

über, wobei $\bar{R}(u)$ einen rationalen Term der Variablen u andeuten soll. Als Argumente werden meist nicht alle trigonometrischen Funktionen auftreten.
Setzt man

$$u = \tan\frac{x}{2}, \quad \text{so folgt} \quad x = 2\arctan u$$

und damit

$$dx = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Die Funktionswerte $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ können leicht durch die neue Variable u ausgedrückt werden:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Demnach ist

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2u}{1-u^2} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{1-u^2}{2u}$$

Deshalb kann man allgemein schreiben:

$$\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \bar{R}\left(\frac{2u}{1+u^2}; \frac{1-u^2}{1+u^2}; \frac{2u}{1-u^2}; \frac{1-u^2}{2u}\right)\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \bar{R}(u)\,\mathrm{d}u.$$

BEISPIELE

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{(1+u^2)\,\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.}}$$

2. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2-2u} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} + C.}}$$

Die Auswahl weiterer Beispiele ist hier noch sehr beschränkt, da die entstehenden Integranden gebrochenrationale Terme von u werden. Die Integration gebrochenrationaler Terme ist aber Aufgabe der *Integration durch Partialbruchzerlegung* (9.3.) Damit ist das Verfahren der Substitution, wenn auch nicht erschöpfend, so doch in den wesentlichen Zügen entwickelt.

Bei der Lösung der folgenden Übungsaufgaben beachte man die Form der Integranden und wende folgende Substitutionen an:

$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$	Substitution: $ax+b=u$
$\int \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{f(x)}$	Substitution: $f(x)=u$
$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$	Substitution: $\varphi(x)=u$
$\int f(x; \sqrt{a^2 \pm x^2})\,\mathrm{d}x$	Substitution: $x = a\sin u$ (für $-$) $x = a\sinh u$ (für $+$)
$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x$	Substitution: $x = a\cosh u$
$\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\,\mathrm{d}x$	Substitution: $\tan\frac{x}{2} = u$

Man berücksichtige den Einfluß des $\mathrm{d}x$ und ändere bei bestimmten Integralen gegebenenfalls die Grenzen entsprechend der Substitutionsgleichung um.

AUFGABEN

Zu 9.1.2. $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$

365. $\int \sqrt{a-bx}\,\mathrm{d}x$ 366. $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$ 367. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2(4-3x)}$

368. $\int (2ax+b)^5 \,dx$ 369. $\int \frac{dx}{x+a}$ 370. $\int_2^4 2e^{3u-6}\,du$

371. $\int \cos^2\alpha \cosh(a-q^2x)\,dx$ 372. $\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx$

373. $\int \cosh^2 x\,dx$ **Anmerkung:** Beachte das Beispiel 6. in 9.1.2.

374. $\int \sinh^2 x\,dx$ **Anmerkung:** Beachte das Beispiel 7. in 9.1.2.

Zu 9.1.3. $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$

375. $\int \cot x\,dx$ 376. $\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2}$ 377. $\int \frac{dm}{(1-m^2)\,\mathrm{arcoth}\,m}$

378. $\int_0^{-1} \frac{u^3\,du}{2-3u^3}$ 379. $\int \frac{x^3\,dx}{3x^4-2}$ 380. $\int \coth(2-12x)\,dx$

381. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{a+b\sin x}$ 382. $\int \frac{x^k\,dx}{2-ax^{k+1}}$

Zu 9.1.4. $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$

383. $\int \left(\sin^4 x - 3\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x + 5\right)\cos x\,dx$ 384. $\int x^4\sqrt{3x^5-4}\,dx$

385. $\int \frac{\mathrm{artanh}\,3u\,du}{1-9u^2}$ 386. $\int x\cos x^2\,dx$ 387. $\int_0^2 \cosh^2 u \sinh u\,du$

388. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^k x}$ 389. $\int_{\frac{1}{2a}}^{a} \frac{\ln 2ar\,dr}{r}$ 390. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Zu 9.1.5. Substitution trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen

a) $\int f\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

391. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 392. $\int x\sqrt{3-(4+u)^2}\,du$

393. $\int \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ 394. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{m-x^2}}$

b) $\int f\left(x; \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$ [1])

395. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

396. $\int \sqrt{x^2+4x+29}\,dx$

397. $\int \frac{dx}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

398. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+5}}$

c) $\int f\left(x; \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$

399. $\int \sqrt{x^2-4x-12}\,dx$

400. $\int \frac{dx}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$

401. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$ Beachte $\frac{1}{\cosh^2 u} = 1 - \tanh^2 u$.

402. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x}}$

Zu 9.1.6. $\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\,dx$

403. $\int \frac{dx}{\cos x}$

404. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

Gemischte Aufgaben zum Substitutionsverfahren:

405. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+b)}$

406. $\int_a^b \frac{e^x\,dx}{e^x+a}$

407. $\int (\sqrt{a}\,x - 13c)^n\,dx$

408. $\int_2^3 \tanh x\,dx$

409. $\int a^{5x-2}\,dx$

410. $\int_{1,5}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$

411. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-bx^2}}$

412. $\int \cos^2 x\,dx$

413. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{a^2+b^2}}$

414. $\int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^4 x}\,dx$

415. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right) dx$

416. $\int \cos^{2n+1} x\,dx$

417. $\int_2^3 \frac{x\,dx}{a+x^2}$

418. $\int \frac{\cot^7 x - \cot^2 x + 1}{\sin^2 x}\,dx$

419. $\int_0^2 \left(a+\frac{x}{b}\right)^{n+1} dx$

420. $\int \sinh^3 x\,dx$

421. $\int_c^d a^{bx}\,dx$

[1]) Beachte beim Vergleichen mit den Lösungen die verschiedenen möglichen Schreibweisen der Areafunktionen!

422. $\int_a^b x^{-1} \ln x \, dx$

423. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right] dx$

424. $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 3x)(\sin 2x + 3)\, dx$

425. $\int \frac{dx}{\frac{x}{2} - b}$

426. $\int (\cot^3 x - \cot^2 x + 7) \frac{dx}{\sin^2 x}$

427. $\int \sqrt{-x^2 - 6x}\, dx$

428. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^4 x}$

429. $\int \frac{3x^2 - \sqrt{4}}{x^3 - 2x + 4} dx$

430. $\int_1^3 \frac{(a^2 + x^2)\, dx}{x^2}$

431. $\int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 7} dx$

432. $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctan x}$

433. $\int \frac{21x - 28}{7x^2 + 14x + 112} dx$

434. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{artanh} x}{1 - x^2} dx$

435. $\int_a^d \frac{x^{n-1}}{b - cx^n} dx$

436. $\int (3x^3 + 9x^2 + 7)(9x^2 + 18x)\, dx$

437. $\int (a^{3x} + 3a^{2x} + a^x)\, dx$

438. $\int_1^2 \frac{dx}{a + x}$

439. Von einer Funktion kennt man $y' = 4(3 \sin^2 x + 4 \sin x + 2) \cos x$. Man bestimme $y = f(x)$.

440. Man bestimme den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse, der Kurve der Funktion $y = b \cosh \frac{x}{b}$ und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ begrenzt wird.

441. Man bestimme den Inhalt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

442. $\int (r + qx^m)^s x^{m-1}\, dx$

443. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 16x + 32}}$

444. Welchen Inhalt hat die Fläche, deren Begrenzung die x-Achse, die Kurve der Funktion $y = -\sin\left(\frac{x}{5} + 1\right)$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 2$ sind?

445. Man bestimme die Länge des Bogens der Halbparabel mit der Gleichung $v = 6h^{1/2}$ $(v > 0)$ im Intervall $0 \leqq h \leqq h_1$. Dabei sei h_1 jene Abszisse, die gleich der zugehörigen Ordinate und $\neq 0$ ist. Die Möglichkeit, das Problem auf die h-Achse oder auf die v-Achse zu beziehen, ist zu beachten.

446. Man bestimme die Oberfläche des Rotationsellipsoids mit den Achsen $2a$ und $2b$ bei Rotation um die x-Achse.

447. Es ist, wie auch in 9.1.4., Beispiel 7, gezeigt, $\int \sin x \cos x \, dx = {}^1/_2 \sin^2 x + C$. Andererseits folgt aus $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ $\int \sin x \cos x \, dx = {}^1/_2 \int \sin 2x \, dx$.
Man löse diese Integrale und äußere sich zu den beiden Resultaten.

448. Man bestimme den Inhalt des von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{2} \sin x$ und $y = \tan x$ mit $x \in [0; \pi/2)$ eingeschlossenen Flächenstücks.

449. Welche Fläche wird von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sin^2 x$ und $y = {}^1/_2 \tan x$ mit $x \in [0; \pi/2)$ eingeschlossen?

450. Wie groß ist der Flächeninhalt des von den Kurven mit den Gleichungen $y^2 = 2x$ und $y^2 = \dfrac{8(x+1)^3}{27}$ gebildeten Bogendreiecks?

451. Man bestimme die Länge des Bogens der Kurve mit der Gleichung $P = aQ^{3/2}$
1) für den Fall $P = f(Q)$; $P > 0$; $0 < b \leqq Q \leqq c$ und
2) für den Fall $P = f(a)$; $0 \leqq a \leqq Q$.

452. Durch Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = (1 - 4x)^{0{,}25}$ um die Achsen entstehen Rotationskörper, deren Volumen bestimmt werden sollen (Rotation um x-Achse $-1 \leqq x \leqq 0$; Rotation um y-Achse $0 \leqq y \leqq 1$).

453. Die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{x}{a + bx^2}$ ist in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ zu berechnen.

454. Durch die Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 2\cos(1 - 2x)$ um die x-Achse entsteht ein Körper, dessen Volumen in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 1$ bestimmt werden soll.

455. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-8 + 6x - x^2}}$

456. $\displaystyle\int_{2{,}5}^{6{,}25} \frac{dx}{x \ln x^3}$

457. Eine Fläche wird von der Kurve mit der Gleichung $y = {}^1/_2 x + 2$, der y-Achse und den Parallelen zur x-Achse in den Abständen 1 und 2 begrenzt. Diese Fläche rotiert um die y-Achse. Man bestimme das Volumen des erzeugten Körpers.

458. Die Sinuskurve rotiere um die x-Achse. Die Oberfläche des dabei im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ entstehenden Körpers ist zu berechnen.

459. Wie groß ist die von den Kurven mit den Gleichungen $25y^2 - 144x + 144 = 0$ und $9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$ eingeschlossene Fläche?

460. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

461. $\displaystyle\int_2^8 \frac{dx}{x \ln x}$

462. Man bestimme die Länge des Bogens der Parabel mit der Gleichung $y^2 = ax$ in den Grenzen $x_1 = 0$; $x_2 = c$.

463. In welchem Abstand von der y-Achse ist die Parallele zu ziehen, die mit der positiven x-Achse und der Kurve der Funktion $y = \tan x$ die Fläche begrenzt, die den Inhalt 1 hat?

464. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{7 - 3x} \, dx$

465. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx$

Anleitung: Man erweitere so, daß nur der Nenner eine Wurzel enthält.

466. $\displaystyle\int \frac{dx}{q - rx}$

9.2. Partielle Integration

Konnte man in der Substitutionsmethode das Analogon zur Kettenregel der Differentialrechnung sehen, so läßt sich die partielle Integration aus der Produktregel der Differentialrechnung erklären.

Nach Formel (37) ist

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$$

also

$$u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u,$$

wobei $u = u(x)$ und $v = v(x)$ ist. Durch beiderseitige Integration entsteht

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u} \tag{101}$$

Mit Hilfe dieser Formel wird die Integration $\int u\,\mathrm{d}v$ in zwei Schritten, in zwei Teilintegrationen vollzogen. Deshalb nennt man das Verfahren partielle Integration oder Integration in Teilen (Teilintegration). Nach Formel (101) gilt es, einen vorgegebenen Integranden so in zwei Faktoren u und $\mathrm{d}v$ zu zerlegen, daß der daraus resultierende Integrand $v\,\mathrm{d}u$ durch eine Substitution oder ein anderes Verfahren gelöst werden kann. Der Erfolg wird damit wesentlich von der Wahl des u und $\mathrm{d}v$ abhängen. Die zahlreichen Beispiele verfolgen den Zweck, den Blick für eine solche günstige Wahl zu schärfen. Als Differentiationsübung sei wiederum die Probe empfohlen.

BEISPIELE

1. $\int xe^x\mathrm{d}x$

Lösung: Der Leser überzeuge sich zunächst davon, daß die Lösung mit dem Substitutionsverfahren nicht möglich ist. Die Hauptverfahren zur Lösung eines Integrals (Substitution, partielle Integration, Partialbruchzerlegung) stellen also nicht drei für ein und dasselbe Integral anwendbare Lösungswege dar, sondern jede Methode ist einer bestimmten Gruppe von Integranden vorbehalten, wobei auch Überschneidungen vorkommen können. Eine formale Einteilung der Integrale in diese drei Gruppen ist daher auch nicht möglich. Nur durch vieles Üben erlangt man Sicherheit im Integrieren. Im Beispiel $\int xe^x\mathrm{d}x$ setze man nach Formel (101)

$$u = x, \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x.$$

Aus $u = x$ folgt durch Differentiation

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

und aus $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$ durch Integration (erste Teilintegration)

$$v = e^x$$

Die bei beiden Integrationen auftretende Integrationskonstante wird zu einer Konstanten vereinigt und erst bei der zweiten Teilintegration hinzugefügt.

Setzt man entsprechend der Formel (101) ein, so erhält man:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx.$$

Es verbleibt also noch das Integral $\int e^x dx$, das jedoch als Grundintegral leicht lösbar ist (zweite Teilintegration).

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C = \underline{\underline{e^x(x-1) + C}}.$$

Würde man die Faktoren u und dv

$$u = e^x \text{ und } dv = x dx$$

wählen, so folgte daraus

$$du = e^x dx, \qquad v = \frac{1}{2} x^2$$

und

$$\int x e^x dx = \frac{x^2 e^x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

Das verbleibende Integral auf der rechten Seite ist aber nicht, wie gewünscht, einfacher, sondern schwieriger geworden.

2. $\int x^2 e^x \, dx$

Lösung: Wählt man $u = x^2$ und $dv = e^x dx$,

so muß man sich Gedanken über das dadurch auftretende Restintegral $\int v \, du$ der rechten Seite machen und abwägen, ob die getroffene Wahl günstig ist. Dieses erforderliche rasche Überschlagen setzt aber wiederum voraus, daß man die Formeln der Differential- und Integralrechnung gründlich beherrscht.

Aus

$$u = x^2$$

folgt durch Differentiation

$$du = 2x dx$$

und aus

$$dv = e^x dx$$

durch Integration (erste Teilintegration)

$$v = e^x.$$

Möge sich der Anfänger sogleich dieses rasche Überschlagen angewöhnen und die Wahl von u und dv nicht dem Zufall überlassen. In diesem Beispiel erkennt man wie im 1., daß sich bei der Differentiation von x^2 der Grad um eins erniedrigt. Das bedeutet zweifellos eine Vereinfachung. Außerdem ändert sich am Ausdruck e^x nichts. Würde man $e^x = u$ setzen, so wäre $e^x dx = du$, aber bei der Integration von $x^2 dx = dv$ tritt mit x^3 eine Erhöhung des Grades ein und damit ein schwierigeres Restintegral. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Unter Benutzung der Ergebnisse des Beispiels 1. folgt:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C = \underline{\underline{e^x(x^2 - 2x + 2) + C}}.$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

Lösung: Man setze

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{1}}.$$

4. $\int \ln x \, dx$

Lösung: Man setze

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = dx \qquad v = x$$

Das Beispiel zeigt, daß mitunter der eine Faktor nur dx heißen kann. Dann ist

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = \underline{\underline{x(\ln x - 1) + C}}.$$

5. Die Kurve mit der Gleichung $y = \arcsin 2x$ umschließt gemeinsam mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 1/2$ eine Fläche, deren Inhalt bestimmt werden soll.

Lösung:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x \, dx$$

Durch die Substitution

$$2x = z \qquad x_1 = 0 \qquad z_1 = 0$$
$$2dx = dz \qquad x_2 = \frac{1}{2} \qquad z_2 = 1$$

erhält man zunächst die einfachere Form

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin z \, dz.$$

Nach (101) ergibt sich daraus:

$$u = \arcsin z \qquad du = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$
$$dv = dz \qquad v = z$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin z \, dz = \frac{1}{2} \left[z \arcsin z \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{z \, dz}{\sqrt{1 - z^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(z \arcsin z + \sqrt{1 - z^2} \right) \Big|_0^1,$$

wobei das Restintegral nach 9.1.3. gelöst wurde.

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \underline{\underline{0{,}2854}}.$$

6. Der zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = \mathrm{e}$ liegende Teil der Fläche, die von der x-Achse und der Kurve mit der Gleichung $y = \ln x$ begrenzt wird, rotiere um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers?

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Man setze

$$u = (\ln x)^2 \qquad \mathrm{d}u = \frac{2\ln x\,\mathrm{d}x}{x}$$

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

$$\pi \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[x\,(\ln x)^2\Big|_1^{\mathrm{e}} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x\right].$$

Als Nebenrechnung ergibt sich für

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x \text{ nach Beispiel 4 die Lösung } x\,(\ln x - 1).$$

Somit ist

$$A = \pi\left[x\,(\ln x)^2 - 2\,x\,(\ln x - 1)\right]\Big|_1^{\mathrm{e}} = \underline{\underline{\pi(\mathrm{e} - 2)}}.$$

7. $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x$

Lösung: Man setze

$$u = \mathrm{e}^{ax} \qquad \mathrm{d}u = a\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \sin bx\,\mathrm{d}x \qquad v = -\frac{1}{b}\cos bx$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x.$$

Wählt man also $\mathrm{d}v = \sin bx\,\mathrm{d}x$, so enthält das Restintegral einen Faktor $C\cos bx$. Gleicht dabei der andere Faktor des Restintegrals dem u des ursprünglichen Integrals oder, anders ausgedrückt, entsteht durch die Wahl von u und $\mathrm{d}v$ als Restintegral das Integral mit dem Term der Cofunktion im Integranden, so führt eine nochmalige ähnliche Wahl von u und $\mathrm{d}v$ zum Ziel, wie es die folgende Betrachtung zeigt. Zunächst soll nur das Restintegral weiter umgeformt werden.

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \quad u = \mathrm{e}^{ax} \qquad \mathrm{d}u = a\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{b}\sin bx$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

Insgesamt ist also

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist aber das Restintegral gleich dem Ausgangsintegral. Die Gleichung kann also nach dem Ausgangsintegral aufgelöst werden:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{b}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right)$$

oder

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{b^2 e^{ax}}{(a^2+b^2)\,b}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right) + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.}}$$

Rekursionsformeln

Mit Hilfe der Rekursionsformeln[1]) gelingt es oft, Integranden, die n-te Potenz eines Terms sind, zu vereinfachen, indem der Exponent erniedrigt wird. Diese Methode, fortlaufend angewendet, führt schließlich einmal auf ein Grundintegral oder einen anderweitig integrierbaren Ausdruck. Die Herleitung der Rekursionsformeln gehört in das Gebiet der partiellen Integration. Die Beispiele 2. und 6. benutzten im Prinzip die Rekursion zur Lösung. So wurde etwa im Beispiel 2. der Exponent von x stufenweise bis zur Null erniedrigt.

Um die folgenden Betrachtungen vorzubereiten, soll zunächst das Integral $\int \sin^2 x\,dx$ gelöst werden. Es wurde bereits auf Seite 251 — allerdings ohne Benutzung der partiellen Integration — behandelt.

BEISPIELE

8. $\int \sin^2 x\,dx$

Lösung: Man setze

$$u = \sin x \qquad du = \cos x\,dx$$

$$dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx.$$

Aus dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx.$$

Die Vereinigung des ursprünglichen und des Restintegrals auf der linken Seite ergibt

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + C.}}$$

[1]) rekurrent, zurücklaufend

9. $\int \sin^4 x \, dx$

Lösung: Man setze

$$u = \sin^3 x; \qquad du = 3 \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx; \qquad v = -\cos x$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \, (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \, dx - 3 \int \sin^4 x \, dx$$

$$4 \int \sin^4 x \, dx = -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx.$$

Nach Beispiel 8 ist

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C$$

und damit

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C.$$

Das Integral $\int \sin^4 x \, dx$ wird also zunächst auf das Restintegral $\int \sin^2 x \, dx$ geführt und dieses unter erneuter Anwendung des gleichen Gedankenganges gelöst. Ebenso führt $\int \sin^6 x \, dx$ zunächst auf $\int \sin^4 x \, dx$. Das verbleibende Integral wird dann nach und nach auf den Fall $\int \sin^2 x \, dx$ reduziert.

Die Erkenntnisse aus den letzten Beispielen sollen nun verallgemeinert werden. Zu berechnen sei:

$$\int \sin^m x \, dx \; (m > 0, \text{ ganzzahlig}).$$

Es sollen zwei Fälle unterschieden werden:

a) m ist eine ungerade Zahl $\qquad m = 2n + 1,$

b) m ist eine gerade Zahl $\qquad m = 2n.$

Im Falle a) läßt sich das Integral mit Hilfe des Substitutionsverfahrens sehr leicht lösen:

$$\int \sin^{2n+1} x \, dx = \int \sin^{2n} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x \, dx =$$

$$= -\int (1 - t^2)^n \, dt =$$

$$= -\int \left(1 - nt^2 + \binom{n}{2} t^4 - \binom{n}{3} t^6 + -\ldots\right) dt = \ldots.$$

Der Fall b) ($m = 2n$) muß durch Anwendung der oben schon speziell für $n = 2$ gegebenen Anleitung gelöst werden.

$$\int \sin^{2n} x \, dx$$

Man setze

$$u = \sin^{2n-1} x \qquad du = (2n-1)\sin^{2n-2}\cos x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int \sin^{2n} x \, dx = -\cos x \sin^{2n-1} x + (2n-1)\int \sin^{2n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \sin^{2n-1} x + (2n-1)\int \sin^{2n-2} x (1 - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= -\cos x \sin^{2n-1} x + (2n-1)\int \sin^{2n-2} x \, dx -$$

$$-(2n-1)\int \sin^{2n} x \, dx.$$

Faßt man gleiche Integrale wieder links zusammen und dividiert entsprechend, so folgt

$$\boxed{\int \sin^{2n} x \, dx = -\frac{1}{2n}\cos x \sin^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2} x \, dx} \qquad (102)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß der Exponent von $\sin x$ im Restintegral um zwei kleiner ist als im Ausgangsintegral. Bei wiederholter Anwendung dieser Formel muß man schließlich auf den Exponenten Null und somit auf ein lösbares Restintegral stoßen. Der gleiche Weg oder die Substitution $x = \pi/2 - t$ ergibt

$$\boxed{\int \cos^{2n} x \, dx = \frac{1}{2n}\sin x \cos^{2n-1} x + \frac{2n-1}{2n}\int \cos^{2n-2} x \, dx} \qquad (103)$$

Vom zweiten Hauptverfahren der Integralrechnung kann zusammenfassend gesagt werden:

Die partielle Integration baut auf der Formel $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ auf. Sie findet Anwendung, wenn der Integrand so in geeignete Faktoren u und dv zerlegt werden kann, daß das Restintegral $\int v \, du$ lösbar wird, oder wenn man durch mehrmaliges Integrieren wieder das Ausgangsintegral erhält.

AUFGABEN

467. $\int x^3 e^{-4x} dx$ 468. $\int x^2 \cosh \frac{x}{a} \, dx$

469. $\int \arctan t \, dt$ 470. $\int \arccos \frac{ax}{b} \, dx$ 471. $\int x^3 \sin x \, dx$

472. Die von den Kurven mit den Gleichungen $y = 0$, $y = \cosh x$, $x = -1$ und $x = 1$ begrenzte Fläche rotiert um die x-Achse. Das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers ist zu bestimmen.

473. $\int (b + cx) \cos(\omega x + \varphi)\, dx$

474. $\int \sinh^2 u\, du$

475. $\int (\ln x)^5 dx$

476. $\int \sin^6 x\, dx$

477. $\int x^2 \ln x \ln a\, dx$

478. $\int \cos^3 x\, dx$

479. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$

480. $\int_1^2 x^{-2} \ln x\, dx$

481. Es soll eine Rekursionsformel für $\int \cosh^{2n} x\, dx$ aufgestellt werden.

482. Es soll eine Rekursionsformel für $\int (\ln x)^m\, dx$ aufgestellt werden.

483. Bei der Anwendung der Formel für die partielle Integration wählt man den Faktor dv. Daraus folgt eigentlich das unbestimmte Integral $\int dv = v + C$. Mit welcher Berechtigung wurde in den Beispielen jeweils nur auf $\int dv = v$, also auf $C = 0$, geschlossen?

484. Man berechne den Inhalt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = 0$, $y = \lg x^2$, $x = 1$ und $x = 10$ begrenzt wird.

485. Die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = a^x \sqrt{x}$ erzeugt bei der Rotation um die x-Achse einen Körper, dessen Inhalt $(x_1 = 0;\ x_2 = 1)$ berechnet werden soll.

486. Bei der Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \cos x$ um die x-Achse entsteht ein Körper. Er erstrecke sich im Intervall $0 \leqq x \leqq a$.
Welchen Wert muß a haben, damit das Volumen den Wert $\pi/8$ annimmt?
Man ziehe zur Berechnung die graphische Lösung von Gleichungen mit heran.

487. Man berechne die Mantelfläche des Körpers, der bei Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = 2x^2$ um die x-Achse für $|x| \leqq 2{,}5$ entsteht.

488. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\cos x + 1)\, dx$

489. $\int_0^{1{,}20} x \cosh(x^2)\, dx$

490. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

9.3. Integration durch Partialbruchzerlegung

9.3.1. Allgemeine Vorbetrachtung

Die Partialbruchzerlegung wird zur Integration rationaler Integranden benötigt. Um den Rechnungsgang zu verstehen, bedarf es einiger grundlegender Sätze. Diese sollen zunächst einer Betrachtung unterzogen werden, ohne daß für sie im Rahmen dieses Buches immer eine exakte Beweisführung möglich ist.
Die Integration über ganzrationale Integranden ist ohne Schwierigkeiten möglich. Das Augenmerk kann sich deshalb auf gebrochenrationale Integranden richten, die man immer auf die Form

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

(n und m ganzzahlig, a_n und $b_m \neq 0$) bringen kann. Die a_i und b_i seien dabei reelle konstante Koeffizienten.
Da man, wie in 1.3.5. gezeigt, jede unecht gebrochene rationale Funktion in die Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen kann und die Integration im Falle eines ganzrationalen Integranden ohne Schwierigkeiten ausführbar ist, kann man sich im folgenden auf die Behandlung des *echt gebrochenen rationalen Integranden*

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$$

$$(n < m;\ a_n \text{ und } b_m \neq 0)$$

beschränken.
Um die Partialbruchzerlegung eines echt gebrochenen rationalen Terms zu verstehen, muß man Kenntnis von einem Satz der Algebra haben. Er findet mitunter auch bei der Lösung von Gleichungen höheren Grades in der Elementarmathematik Verwendung, wenn Wurzeln der betreffenden Gleichung bekannt sind oder erkannt werden können. Dieser sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, daß jede ganzrationale Funktion n-ten Grades

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

als ein Produkt von Linearfaktoren

$$g(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

dargestellt werden kann. Dabei sind die a_i konstante reelle oder komplexe Koeffizienten und die x_i die reellen oder komplexen Nullstellen des Terms $g(x)$. Setzt man die a_i reell voraus, wie es hier im folgenden geschehen soll, so sind die eventuell auftretenden komplexen x_i stets paarweise konjugiert komplex.
Um das Verständnis für diesen wichtigen Satz zu fördern, sei er speziell für $n = 2$ und $n = 3$, also für den quadratischen und kubischen Fall, an zwei Beispielen näher erörtert.

a) Aus der ganzrationalen Funktion 2. Grades

$$y = g(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

wird unter der Bedingung

$$y = 0 \text{ (Nullstellenbedingung)}$$

die quadratische Gleichung

$$a_2(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

die gleichbedeutend mit

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$
$$x^2 \qquad + ax \quad + b = 0 \quad \text{ist.}$$

Man erkennt darin nicht nur den Wurzelsatz von VIETA wieder, sondern sieht, daß die beiden Schreibweisen

$$g(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2)$$

und

$$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

identisch sind.

b) Die kubische Gleichung

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

hat die Wurzeln

$$x_1 = 1 \quad \text{(erkennbar)}$$
$$x_2 = -2$$
$$x_3 = -2$$

Daraus folgt die Identität

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)(x + 2).$$

Diese Zerlegungen in Linearfaktoren benötigt man zur Integration echt gebrochener rationaler Integranden, d. h. zum Lösen des Integrals

$$\int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}\,\mathrm{d}x. \tag{I}$$

($b_m = 1$ kann durch Kürzen erreicht werden.)

Der Integrand wird in einfache, leicht lösbare sogenannte Teil- oder Partialbrüche zerlegt.
Die Gestalt der Partialbrüche richtet sich nach der Beschaffenheit der Nullstellen des Nennerterms $N(x)$ des Integranden in (I).

I. Fall $N(x)$ hat nur reelle einfache, also voneinander verschiedene Nullstellen;
II. Fall $N(x)$ hat nur reelle, aber auch mehrfache Nullstellen;
III. Fall $N(x)$ enthält komplexe einfache Nullstellen[1]).

9.3.2. Der Nenner des Integranden hat nur reelle einfache Nullstellen

Demnach kann man in

$$N(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

sämtliche x_i reell und voneinander verschieden annehmen.

[1]) Komplexe mehrfache Nullstellen sollen nicht betrachtet werden

Das Integral

$$\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+2x-8}$$

entspricht diesem Fall, denn aus $x^2+2x-8=0$ folgt $x_1=2$ und $x_2=-4$. Also ist

$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$$

und

$$\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+2x-8}=\int \frac{(3x-5)\,dx}{(x-2)(x+4)}.$$

Das Integral ist in dieser Form nicht lösbar, aber es ist immer möglich, den Integranden in

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

zu zerlegen.
Der Hauptnenner der rechten Seite ist mit dem Nenner der linken Seite identisch. Die Koeffizienten A und B, die bisher noch nicht bekannt sind, müssen noch der Bedingung entsprechend bestimmt werden. Die auf der rechten Seite stehenden *Partialbrüche* können mit Hilfe des Grundintegrals $\int \frac{dx}{x}$ leicht integriert werden.
Das Augenmerk muß sich also zunächst auf die Bestimmung der Koeffizienten A und B richten.

Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen

Multipliziert man

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

mit

$$N(x)=x^2+2x-8=(x-2)(x+4),$$

so folgt

$$3x-5=A(x+4)+B(x-2).$$

Da x variabel ist, muß diese Gleichung für jedes x gelten. Es genügt, zwei spezielle Werte für x einzusetzen, um zwei Gleichungen für die gesuchten Werte A und B zu erhalten. Setzt man $x=x_1=2$ und $x=x_2=-4$, also nacheinander die Nullstellen des Nenners ein, so ergeben sich besonders einfache Gleichungen für A und B, weil der jeweilige Linearfaktor $(x-x_i)=0$ wird.
Man erhält aus

$$3x-5=A(x+4)+B(x-2)$$

für $x=x_1=2$

$$6-5=A(2+4)+B(2-2)$$

für $x=x_2=-4$

$$-12-5=A(-4+4)+B(-4-2).$$

Daraus folgt

$$1 = 6A \qquad A = \frac{1}{6}$$

$$-17 = -6B \qquad B = \frac{17}{6}.$$

Demnach ist

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{17}{6}}{x+4}$$

und deshalb

$$\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{6}\int \frac{dx}{x+4}.$$

Die Integration der Partialbrüche ist ohne Schwierigkeiten möglich:

$$\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+2x-8} = \frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{17}{6}\ln|x+4| + C.$$

Die Koeffizienten können auch durch andere Verfahren bestimmt werden. Häufig benutzt man den sogenannten Koeffizientenvergleich. Er sei am gleichen Beispiel erläutert. Die Betrachtung kann ohne Nachteil für das Folgende übergangen werden.

$$\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+2x-8}; \quad \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$$

$$3x-5 = A(x+4) + B(x-2)$$

$$3x-5 = (A+B)x + (4A-2B).$$

Die Gleichheit kann nur dann für jedes x erfüllt sein, wenn

und $\left|\begin{array}{l} 3 = A+B \\ -5 = 4A-2B \end{array}\right|$ ist.

Dieser Koeffizientenvergleich ergibt also ein leicht lösbares Gleichungssystem, aus dem in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Einsetzverfahrens $A = \frac{1}{6}$ und $B = \frac{17}{6}$ folgt.

Der weitere Lösungsgang deckt sich mit dem bereits entwickelten.
In den folgenden Beispielen werden die Koeffizienten ausschließlich durch das Einsetzverfahren bestimmt.

BEISPIELE

1. $\int \frac{(x^2-31x+94)\,dx}{x^3+4x^2-19x+14}$

Lösung: Die Nullstelle $x_1 = 1$ erkennt man leicht. Die Division $N(x):(x-1)$ führt auf eine quadratische Gleichung. Somit sind

$$x_2 = 2 \qquad x_3 = -7$$

die restlichen Lösungen.
Also ist

$$N(x) = (x-1)(x-2)(x+7).$$

Die Nullstellen des Nennerterms sind sämtlich reell und einfach, deshalb gilt der Ansatz

$$\boxed{\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \cdots + \frac{M}{x-x_m}} \tag{104}$$

in dem die x_i die Nullstellen von $N(x)$ und $A, B, \ldots, M$ die noch zu bestimmenden Koeffizienten sind. Speziell für das Beispiel ergibt sich aus (104) demnach:

$$\frac{x^2-31x+94}{x^3+4x^2-19x+14} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+7}.$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$(x-1)(x-2)(x+7) = x^3+4x^2-19x+14$$

erhält man:

$$x^2-31x+94 = A(x-2)(x+7) + B(x-1)(x+7) + C(x-1)(x-2).$$

Daraus folgt

für $x = x_1 = 1$	$64 = A(1-2)(1+7)$
für $x = x_2 = 2$	$36 = B(2-1)(2+7)$
für $x = x_3 = -7$	$360 = C(-7-1)(-7-2).$

Deshalb ist

$$A = -8$$
$$B = 4$$
$$C = 5.$$

Damit wird

$$\frac{x^2-31x+94}{x^3+4x^2-19x+14} = \frac{-8}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+7}$$

und deshalb auch

$$\int \frac{(x^2-31x+94)\,dx}{x^3+4x^2-19x+14} = -8\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x+7} =$$
$$= -8\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + 5\ln|x+7| + C =$$
$$= \ln\left|\frac{(x-2)^4(x+7)^5}{(x-1)^8}\right| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{(x+20)\,dx}{x^2+5x-6}$

Lösung: Nullstellen des Nennerterms

$$x_1 = 1;\ x_2 = -6.$$

$$\frac{x+20}{x^2+5x-6} = \frac{x+20}{(x-1)(x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}$$

$$x + 20 = A(x+6) + B(x-1).$$

Einsetzverfahren:

$$x = x_1 = 1 \qquad 21 = 7A$$

$$x = x_2 = -6 \qquad 14 = -7B$$

Daraus folgen $A = 3$ und $B = -2$. Somit lautet die Zerlegung:

$$\frac{x+20}{x^2+5x-6} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+6}$$

und die Lösung

$$\int \frac{(x+20)\,dx}{x^2+5x-6} = 3\ln|x-1| - 2\ln|x+6| + C = \underline{\underline{\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+6)^2}\right| + C.}}$$

3. Man bestimme den Inhalt der Fläche, die für $0 \leqq u \leqq \pi/4$ von der Kurve mit der Gleichung $y = (\sin 2u)/(1+\sin u)$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Lösung:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2u}{1+\sin u}\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin u}{1+\sin u}\cos u\,du = 2\int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{z}{1+z}\,dz$$

Mit

$$z : (1+z) = 1 - \frac{1}{1+z}$$

ergibt sich

$$A = 2\int_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) dz,$$

wobei sich hier offensichtlich eine Partialbruchzerlegung elementarer Art durch die Division ergibt.

$$A = 2[(z - \ln(1+z)]\Big|_{(0)}^{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2[\sin u - \ln(1+\sin u)]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{0{,}26.}}$$

9.3.3. Der Nenner des Integranden hat mehrfache reelle Nullstellen

Das Integral

$$\int \frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x-1)^3\,(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

hat als Nullstellen des Nenners

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = x_5 = -2.$$

Man sagt, die Nullstelle 1 habe die Vielfachheit 3 (oder ist eine 3fache Nullstelle), die Nullstelle -2 die Vielfachheit 2 (eine 2fache Nullstelle).
Man erkennt, daß der Ansatz

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x+2}$$

falsch wäre, denn die gleichnamigen Brüche der rechten Seite können zusammengefaßt werden, und der Hauptnenner der rechten Seite würde nicht mit $N(x)$ übereinstimmen. Vielmehr führt hier der Ansatz

$$\frac{-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18}{(x-1)^3\,(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}$$

zum Ziel, weil $(x-1)^3\,(x+2)^2$ Hauptnenner aller Partialbrüche ist. Dabei treten neben der höchsten Potenz $(x-1)^3$ auch jeweils die niedrigeren $(x-1)^2$ und $(x-1)$ auf, die mit im Hauptnenner enthalten sind.
Durch Multiplikation mit $N(x)$ erhält man

$$-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18 = A_3(x+2)^2 + A_2(x-1)\,(x+2)^2 + A_1(x-1)^2\,(x+2)^2 + B_2(x-1)^3 + B_1(x-1)^3\,(x+2).$$

Zur Bestimmung der fünf Koeffizienten setzt man wieder fünf spezielle x-Werte ein. Da nur zwei verschiedene Nullstellen vorhanden sind, wählt man noch drei beliebige x-Werte.
So ergibt sich

für $x = x_1 = 1$	$45 = 9A_3$
für $x = x_2 = -2$	$-52 = -27B_2$
für $x = 0$	$18 = 4A_1 - 4A_2 + 4A_3 - 2B_1 - B_2$
für $x = -1$	$51 = 4A_1 - 2A_2 + A_3 - 8B_1 - 8B_2$
für $x = 2$	$-6 = 16A_1 + 16A_2 + 16A_3 + 4B_1 + B_2.$

Aus den beiden ersten Beziehungen folgen die Werte

$$A_3 = 5 \text{ und } B_2 = 2.$$

Setzt man diese Koeffizienten in die drei restlichen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\left|\begin{array}{r} 0 = 2A_1 - 2A_2 - B_1 \\ 31 = 2A_1 - A_2 - 4B_1 \\ -22 = 4A_1 + 4A_2 + B_1 \end{array}\right|$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf

$$A_1 = -4 \quad A_2 = 1 \quad B_1 = -10.$$

Also ist

$$\int \frac{(-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18)\,dx}{(x-1)^3\,(x+2)^2} =$$

$$= 5\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 4\int \frac{dx}{x-1} +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{(x+2)^2} - 10\int \frac{dx}{x+2}.$$

Neben Integralen der Form $\int \frac{du}{u}$ ist hier das Grundintegral $\int u^n\,du$ zu erkennen. Nach 9.1.2. erhält man für

$$5\int \frac{dx}{(x-1)^3} \text{ mit der Substitution } x - 1 = u \quad dx = du$$

$$5\int \frac{du}{u^3} = 5\int u^{-3}\,du = \frac{-5u^{-2}}{2} + C = \frac{-5}{2}(x-1)^{-2} + C.$$

Als Lösung der Aufgabe erhält man:

$$\int \frac{(-14x^4 + 5x^3 + 44x^2 - 8x + 18)\,dx}{(x-1)^3\,(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-5}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-1| - \frac{2}{x+2} - 10\ln|x+2| + C.$$

Stellt man das Verfahren am allgemeinen Beispiel dar, so wird es in der Schreibweise recht umständlich. Man halte sich deshalb jeweils einen speziellen Fall vor Augen, damit man die im gezeigten Beispiel vollzogenen Schritte wiedererkennt.
Es sei

$$N(x) = (x - x_1)^\alpha\,(x - x_2)^\beta\,(x - x_3)^\gamma \ldots (x - x_k)^\varkappa.$$

Dabei soll x_1 eine α-fache, x_2 eine β-fache ... und x_k eine $\varkappa$-fache Nullstelle sein. Wenn $N(x)$ vom m-ten Grade sein soll, so gilt

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa = m$$

Man setzt

$$\begin{aligned}\frac{Z(x)}{N(x)} = &\frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-x_1)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-x_1} + \\ &+ \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-x_2)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-x_2} + \\ &+ \frac{C_\gamma}{(x-x_3)^\gamma} + \frac{C_{\gamma-1}}{(x-x_3)^{\gamma-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-x_3} + \\ &+ \cdots \\ &\vdots \\ &+ \frac{K_\varkappa}{(x-x_k)^\varkappa} + \frac{K_{\varkappa-1}}{(x-x_k)^{\varkappa-1}} + \cdots + \frac{K_1}{x-x_k}\end{aligned} \tag{105}$$

Die $A_i, B_i, \ldots, K_i$ sind unbekannt.
Man multipliziert (105) mit

$$N(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta \cdots (x-x_k)^\varkappa$$

und wendet das Einsetzverfahren zur Bestimmung der Koeffizienten an.
Erwähnt sei, daß die Formel (105) die Formel (104) als Sonderfall enthält. Hat $N(x)$ nur reelle *einfache* Nullstellen, so ist in (105) lediglich $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = 1$ zu setzen.

BEISPIEL

$$\int \frac{(x^2+15x+8)\,dx}{x^3-3x^2-9x-5}$$

Lösung: Im Nenner ist die Nullstelle $x_1 = -1$ erkennbar. Nach entsprechender Division erhält man die beiden anderen Nullstellen $x_2 = -1$ und $x_3 = 5$. Also gilt:

$$\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1}{x-5}$$

$$x^2+15x+8 = A_2(x-5) + A_1(x+1)(x-5) + B_1(x+1)^2$$

Einsetzverfahren:

$x = x_1 = -1$	$-6 = -6A_2$	$A_2 = 1$
$x = x_2 = 5$	$108 = 36B_1$	$B_1 = 3$
$x = 0$	$8 = -5A_1 - 5A_2 + B_1$	$A_1 = -2.$

Also gilt:

$$\int \frac{Z(x)\,dx}{N(x)} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-5} = \underline{\underline{-\frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}\right| + C.}}$$

9.3.4. Der Nenner des Integranden enthält auch komplexe einfache Nullstellen

Wenn in $N(x)$ neben reellen Nullstellen auch komplexe einfache auftreten, so sind letztere immer paarweise konjugiert komplex, da die b_i reell vorausgesetzt wurden. Man könnte auch hier das Verfahren 9.3.2. anwenden, also in

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \cdots + \frac{M}{x-x_m}$$

zerlegen[1]) und dabei für die x_i die jeweiligen komplexen Werte einsetzen. Ein Versuch würde zeigen, daß dann auch die zugehörigen Koeffizienten im Zähler konjugiert komplex sind. Aus diesem Grunde vermeidet man dieses Verfahren und damit das Auftreten komplexer Größen, indem man die Partialbrüche, die zu den jeweiligen Paaren komplexer Nullstellen gehören, auf einen gemeinsamen Nenner bringt. Da das Produkt (für den dabei entstehenden Nenner) und die Summe (für den entstehenden Zähler) zweier konjugiert-komplexer Zahlen immer reell sind, werden also auch die so entstehenden Partialbrüche

$$\frac{Px+Q}{x^2+ax+b}$$

reell sein. Zahlenbeispiele sollen auch hier das Verfahren erläutern.
Zu bestimmen sei

$$\int \frac{(7x^3-19x+30)\,dx}{x^3-6x^2+10x}.$$

$N(x)$ hat die Nullstellen

$$x_1 = 0,\ x_2 = 3-j,\ x_3 = 3+j.$$

Man könnte also prinzipiell wieder schreiben

$$\frac{7x^3-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3+j} + \frac{C}{x-3-j}$$

und würde dann B und C konjugiert-komplex finden. Durch Vereinigung der beiden letzten Partialbrüche erhält man jedoch besser:

$$\frac{7x^3-19x+30}{x^3-6x^2+10x} = \frac{A}{x} + \frac{Px+Q}{x^2-6x+10}$$

Allgemein setzt man folgende Partialbrüche an:

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{Px+Q}{x^2+ax+b}.$$

[1]) Vorausgesetzt, daß auch die reellen Nullstellen nur einfach auftreten. Andernfalls setzt man an die Stelle von $x-x_m$ die Ausdrücke $(x-x_m)^\mu$, wie in (105) gezeigt wurde

Für das spezielle Beispiel gilt:

$$N(x) = x^3 - 6x^2 + 10x = x(x - 3 + \mathrm{j})\,(x - 3 - \mathrm{j}) = x(x^2 - 6x + 10).$$

Man spaltet also die im Nenner stehenden quadratischen Ausdrücke nicht in Linearfaktoren auf, wenn sie komplexe Nullstellen haben. Nach der Multiplikation mit $N(x)$ erhält man

$$7x^2 - 19x + 30 = A(x^2 - 6x + 10) + x(Px + Q).$$

Das Einsetzverfahren führt auch hier auf die gesuchten Koeffizienten:

$x = x_1 = 0$	$30 = 10A$	$A = 3$
$x = 1$	$18 = 5A + P + Q$	$P = 4$
$x = -1$	$56 = 17A + P - Q$	$Q = -1$

Damit lautet die Zerlegung:

$$\int \frac{(7x^2 - 19x + 30)\,\mathrm{d}x}{x^3 - 6x^2 + 10x} = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{(4x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10}$$

$$= 3\ln|x| + \int \frac{(4x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} + C_1.$$

Zur Berechnung des restlichen Integrals zerlegt man den Zähler des Integranden so in eine Summe, daß ein Summand die Ableitung des Nenners wird und somit als $\int \frac{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}{\varphi(x)}$ gelöst werden kann. So ist in dem vorliegenden Beispiel

$$\int \frac{(4x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} = 2\int \frac{(2x - 6)\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} + 11\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10}.$$

Der Faktor 2 vor dem ersten Summanden bringt die Übereinstimmung des x-Gliedes $(4x)$ der linken und der rechten Gleichungsseite des Zählers. Wenn man vorerst nur den ersten Summanden der rechten Seite betrachtet, so unterscheiden sich die Absolutglieder des Zählers der linken und der rechten Gleichungsseite noch um 11 (links -1; rechts -12). Damit auch das Absolutglied der rechten Seite den geforderten Wert annimmt, fügt man noch den Summanden $11/N(x)$ hinzu. Dann ist, wie gefordert,

$$2(2x - 6) + 11 = 4x - 1.$$

Man erhält

$$\int \frac{(4x - 1)\,\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} = 2\ln|x^2 - 6x + 10| + 11\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} + C_2.$$

Das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10}$ löst man, indem man im Nenner die quadratische Ergänzung hinzufügt und so auf das Grundintegral $\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$ kommt.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 10} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x - 3)^2 + 1}.$$

Substituiert man $x-3=u \quad dx=du,$ so ergibt sich

$$\int \frac{dx}{(x-3)^2+1}=\int \frac{du}{1+u^2}=\arctan(x-3)+C_3$$

Die Lösung der Nebenrechnung ist

$$\int \frac{(4x-1)\,dx}{x^2-6x+10}=2\ln|x^2-6x+10|+11\arctan(x-3)+C_2+C_3.$$

Damit ergibt sich $(C_1+C_2+C_3=C)$

$$\int \frac{(7x^3-19x+30)\,dx}{x^3-6x^2+10x}=$$

$$=3\ln|x|+2\ln|x^2-6x+10|+11\arctan(x-3)+C.$$

BEISPIEL

$$\int \frac{(6x^3+13x^2+101x-7)\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+20)}$$

Lösung: Da $x_1=j;\ x_2=-j;\ x_3=2+4j;\ x_4=2-4j$ ist, ist folgender Ansatz zu wählen:

$$\frac{Z(x)}{N(x)}=\frac{Px+Q}{x^2+1}+\frac{Rx+S}{x^2+4x+20}$$

Daraus entsteht nach Multiplikation mit $N(x)$

$$6x^3+13x^2+101x-7=(Px+Q)(x^2+4x+20)+(Rx+S)(x^2+1).$$

Einsetzverfahren:

$$\begin{aligned} x&=0 & -7&=20Q+S\\ x&=1 & 113&=(P+Q)25+(R+S)2\\ x&=-1 & -101&=(-P+Q)17+(-R+S)2\\ x&=2 & 295&=(2P+Q)32+(2R+S)5. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$P=5;\quad Q=0;\quad R=1;\quad S=-7.$$

So ergibt sich zunächst

$$\int \frac{(6x^3+13x^2+101x-7)\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+20)}=5\int \frac{x\,dx}{x^2+1}+\int \frac{(x-7)\,dx}{x^2+4x+20}.$$

Während $5\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$ durch die Substitution $x^2+1=u \quad 2x\,dx=du$ in

$$\frac{5}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{5}{2}\ln|x^2+1|+C_1$$

übergeht, formt man das zweite Integral wieder günstig um und erhält

$$\int \frac{(x-7)\,dx}{x^2+4x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+20} - 9\int \frac{dx}{x^2+4x+20} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20| - 9\int \frac{dx}{(x+2)^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20| - \frac{9}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{4}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20| - \frac{9}{4}\arctan\frac{x+2}{4} + C_2,$$

wenn man $\frac{x+2}{4} = u$ und damit $dx = 4\,du$ setzt.

Als Endlösung tritt deshalb auf:

$$\int \frac{(6x^3+13x^2+101x-7)\,dx}{(x^2+1)(x^2+4x+20)} = \underline{\underline{\frac{5}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+20| - \frac{9}{4}\arctan\frac{x+2}{5} + C.}}$$

Zusammenfassung: Die Integration durch Partialbruchzerlegung vollzieht sich stets nach einem bestimmten Schema.
Die Integration eines echt gebrochenen rationalen Integranden, der unter Umständen erst aus einem unecht gebrochenen durch Division hervorgegangen ist, beginnt mit der Bestimmung der Nullstellen des Nenners des Integranden.
Sind diese Nullstellen

reell und einfach	so setzt man Partialbrüche der Form	$\frac{D}{x-x_d}$
reell und mehrfach		$\frac{D_\delta}{(x-x_d)^\delta} + \frac{D_{\delta-1}}{(x-x_d)^{\delta-1}} + \cdots$
komplex und einfach		$\frac{Px+Q}{x^2+ax+b}$ an.

Die entstandene Gleichung multipliziert man mit $N(x)$. Um die Koeffizienten zu bestimmen, setzt man in diese Gleichung spezielle x-Werte ein. Unter Benutzung der ermittelten Koeffizienten erhält man nur Integrale der Form

$$D\int \frac{dx}{x-x_d}, \quad D_\delta \int \frac{dx}{(x-x_d)^\delta} \quad \text{und} \quad \int \frac{(Px+Q)\,dx}{x^2+ax+b},$$

die sich durch geeignete Substitutionen lösen lassen.
Handelt es sich dabei um bestimmte Integrale, so ist zu beachten, daß innerhalb der Integrationsgrenzen keine Nullstellen des Nenners liegen dürfen, also $N(x) \neq 0$ sein muß. Andernfalls erhält man sogenannte uneigentliche Integrale, auf deren Berechnung hier nicht eingegangen werden soll.

Zusammenfassend kann von den drei behandelten Integrationsverfahren gesagt werden:
Alle Verfahren verfolgen das Ziel, die gegebenen Integrale auf Grundintegrale zurückzuführen. Das umfangreiche und vielfältige Verfahren der Integration durch Substitution versucht, durch das Einsetzen geeigneter Ausdrücke den Integranden so umzuformen, daß ein Grundintegral entsteht. Die partielle Integration ermöglicht, viele Produkte mit Hilfe der Formel $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ zu integrieren. Die Integration durch Partialbruchzerlegung wird bei der Integration gebrochenrationaler Terme benutzt. Die Integrationsverfahren sind keine Rezepturen, sondern mögliche Wege zur Lösung eines Integrals. Die Auswahl des richtigen gangbaren Weges und die sinnvolle Übertragung des Grundgedankens des betreffenden Integrationsverfahrens auf das jeweilige spezielle Beispiel bleiben stets dem Lernenden vorbehalten.

AUFGABEN

491. $\int \frac{(3x+5)\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+9}$

492. $\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x-1}$

493. $\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2-10x+25}$

494. $\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(1-x)}$

495. $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

496. $\int \frac{3x^2+7x+29}{x^3+4x^2+29x}\,\mathrm{d}x$

497. $\int \frac{(12x^2-134x-94)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-7x-30)}$

498. $\int \frac{(10x^3-22x^2+14x-14)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+3)(x^2+1)}$

499. $\int \frac{(-2x^3+16x^2-12x+6)\,\mathrm{d}x}{x^4-7x^2+6x}$

500. $\int \frac{(-x^2+8x+17)\,\mathrm{d}x}{x^3+7x^2+7x-15}$

501. $\int \frac{(11x+16)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x-8}$

502. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)^2}$

503. $\int \frac{3x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$

504. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$

505. $\int_0^1 \frac{3x^4-x^2-4x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

506. $\int \frac{u^5+1}{u^4(u^2+1)}\,\mathrm{d}u$

507. $\int \frac{(x^2-6x+12)\,\mathrm{d}x}{14(x-1)^3}$

508. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

509. Welches Volumen hat der Köper, der durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ um die x-Achse in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ entsteht?

510. $\int \frac{27\,u^6\,\mathrm{d}u}{3u^2+2}$

511. $\int_3^9 \frac{4\,\mathrm{d}x}{x+x^3}$

512. Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^3+5x^2+8x+4}$ begrenzt gemeinsam mit $x = 0$, $x = 1$ und der x-Achse eine Fläche, deren Inhalt bestimmt werden soll.

10. Die Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe des bestimmten Integrals

Das Bild 148 zeigt das v,t-Diagramm einer verzögerten Bewegung. Im Zeitintervall von t_1 bis t_2 ändert sich die Geschwindigkeit fortwährend. Bei solchen und ähnlichen Problemen interessiert oft die Frage nach dem sogenannten Mittelwert, hier also nach der mittleren Geschwindigkeit. Als mittlere Geschwindigkeit bezeichnet man jene *konstante* Geschwindigkeit, mit der ein Körper während des betrachteten Zeitintervalls bewegt werden müßte, um den gleichen Weg zurückzulegen wie der Körper, der sich in dem Zeitintervall mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegt.
Zerlegt man die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $v = f(t)$ (Bild 148) in rechteckige Flächenelemente, so entspricht das einer Verwandlung der ungleichförmigen Bewegung in gleichförmige Teilbewegungen mit zwar konstanter, aber für jeden Streifen unterschiedlicher Geschwindigkeit v_t. Dann gibt aber $v_t\,\mathrm{d}t$, also der Inhalt eines Streifens, wegen $s = vt$, näherungsweise den Weg $\mathrm{d}s$ des Körpers in der Zeit $\mathrm{d}t$ an. Aus $\mathrm{d}s = v_t\,\mathrm{d}t$ folgt

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t,$$

wobei $v = f(t)$ ist. Die gesuchte konstante mittlere Geschwindigkeit v_m ist jene, die in der Zeit $t_2 - t_1$ den gleichen Weg bewirkt. Dieser Weg erscheint deshalb in Bild 148 als Rechteck $FGED$, das flächengleich (gleiche Wege!) $FGBA$ sein muß, also ist $DCA = CBE$.
Daher ist

$$v_\mathrm{m}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t.$$

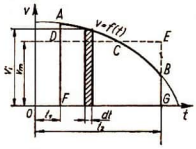


Bild 148

Der gefragte Mittelwert ist deshalb

$$v_\mathrm{m} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t.$$

Allgemein gilt:
Der Mittelwert y_m einer Funktion $y = f(x)$ für ein Intervall $[x_1; x_2]$ entspricht der Höhe des über $[x_1; x_2]$ errichteten Rechtecks, das inhaltsgleich der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ ist:

$$\boxed{y_\mathrm{m} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x} \qquad (106)$$

BEISPIELE

1. Elektrolytischer und effektiver Wert der Stromstärke.
Ein elektrischer Strom konstanter Stärke I transportiert während der Zeit t die Elektrizitätsmenge $Q = It$. Ist dagegen die Stromstärke I ein Funktionswert der Zeit, also $I = f(t)$, so erhält man mit

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \, dt$$

die in der Zeit $t_2 - t_1$ beförderte Ladungsmenge. Von einer solchen Stromstärke I ausgehend, erhebt sich oft die Frage, welche gedachte *konstante* Stromstärke I_m erforderlich ist, um in der gleichen Zeit die gleich große Elektrizitätsmenge zu transportieren.

Lösung: Es muß

$$I_m(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I \, dt$$

sein.
Daraus folgt für $t_1 = 0$, $t_2 = t$

$$I_m = \frac{1}{t} \int_0^t I \, dt.$$

Legt man dieser Betrachtung einen sinusförmigen Wechselstrom zugrunde, so ist

$$I = I_{max} \sin \omega t,$$

wobei I_{max} der maximale Wert der Stromstärke (Amplitude, Scheitelwert) und $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz ist (T Periodendauer).
Betrachtet man nun

$$I_m = \frac{I_{max}}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t \, dt$$

für eine halbe Periode, so erhält man, wenn $\omega = 2\pi/T$ Beachtung findet,

$$I_m = \frac{2I_{max}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \, dt = \frac{2I_{max}}{\omega T} \int_0^{\frac{\omega T}{2}} \sin u \, du = \frac{2I_{max}}{\pi}$$

$$\underline{I_m \approx 0{,}637 \, I_{max}}.$$

Man nennt I_m in der Elektrotechnik den *arithmetischen* oder *elektrolytischen Mittelwert eines Wechselstromes*. Darunter ist also jene konstante Stromstärke zu verstehen, die während der Zeit $T/2$ die gleiche Elektrizitätsmenge transportiert wie der zugehörige Wechselstrom der Stärke $I = I_{max} \sin \omega t$.
Will man die während einer Zeit t von einem Wechselstrom der Stärke $I = I_{max} \sin \omega t$ entwickelte Wärme bestimmen, so ist (da $W = UIt = I^2Rt$, wobei U und I zeitlich veränderlich sind):

$$W = \int_0^t RI_{max}^2 \sin^2 \omega t \, dt.$$

Der *Effektivwert der Stromstärke* oder das *effektive Mittel* I_{eff} ist jener Strom konstanter Stärke, der in einer halben Periode den gleichen Effekt erzielt, also die gleiche Wärmemenge W liefert.
Somit gilt wegen $W = I^2 R t$

$$I_{\text{eff}}^2 R \frac{T}{2} = R I_{\max}^2 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t$$

und

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{2 I_{\max}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t.$$

Durch Auflösen erhält man unter Beachtung von $\omega = 2\pi/T$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

und deshalb

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{0{,}707 I_{\max}}}.$$

2. Eine Kraft F, die längs des Weges von $s_1 = 1$ m bis $s_2 = 8$ m angreift, sei in der Form

$$F = \frac{s^2}{2} \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$$

wegabhängig.
Bestimme die mittlere Kraft, also jene konstante Kraft, die längs des Weges die gleiche Arbeit verrichtet.

Lösung: Es ist

$$F_{\text{m}} = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} F \, \mathrm{d}s$$

$$F_{\text{m}} = \frac{1}{7} \int_1^8 \frac{s^2}{2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{7} \cdot \frac{s^3}{6} \Big|_1^8 \approx \underline{\underline{12{,}2 \text{ kp.}}}^{1})$$

Abschließend sei nochmals darauf verwiesen, daß die Berechnung eines Mittelwertes mit Hilfe des Integrals

$$y_{\text{m}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y \, \mathrm{d}x$$

die Verwandlung einer beliebigen Fläche im x,y-System in ein Rechteck darstellt, dessen Höhe das gesuchte y_{m} ist.

[1]) Während der Integration sind, um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, die Einheiten weggelassen worden

AUFGABEN

513. Bei einer geradlinigen Bewegung sei die Beschleunigung zeitabhängig. Man betrachte die Zeit von $t_1 = 0$ min bis $t_2 = 1$ min. Die Beschleunigung ändere sich nach der Gleichung

$$a = \frac{1}{2} t^3 \frac{\text{m}}{\text{min}^5}.$$

Die mittlere Beschleunigung a_m für das betrachtete Zeitintervall ist zu bestimmen.

514. Man berechne den mittleren Funktionswert y_m der Funktion $y = \sqrt{9 - x^2}$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq 3$ und deute y_m durch eine Skizze.

11. Physikalisch-technische Anwendungen des Integrals

Nachdem das Integral bereits zur Lösung geometrischer Aufgaben herangezogen wurde, soll nunmehr seine Bedeutung in Physik und Technik gezeigt werden.
Obwohl die Probleme ganz verschiedener Art sind, kann man feststellen, daß man das Integral immer dann anwenden kann, wenn es sich um die Berechnung des Grenzwertes einer Summe von Produkten handelt oder wenn eine Funktion bestimmt werden soll, deren Differentialquotient man kennt.
Bei den folgenden Abschnitten wird es sich meist um die Bildung des Grenzwertes einer Summe von Produkten handeln.
Trotz der schon erwähnten Vielfalt der Anwendungen soll man wieder das Grundprinzip, das Gemeinsame, erkennen:
Aus dem vorliegenden Gebilde wird stets ein Element herausgegriffen, das oft nur einen Näherungswert darstellt. Von diesem Element wird zunächst die gesuchte Größe berechnet (z. B. Volumen, statisches Moment, Arbeit usw.). Durch Integration dieser Teilgrößen über das gesamte Gebilde ergibt sich die Lösung der gestellten Aufgabe.
Während durch ein vorgesetztes Δ stets die wahre Größe eines solchen Elements bezeichnet wird, stellt ein d als Vorsatz das Element in erster Näherung dar.

11.1. Das Arbeitsintegral

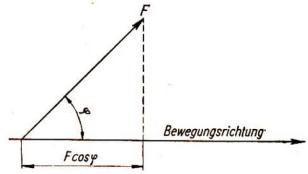


Bild 149

Die Arbeit ist in der Mechanik als $W = Fs\cos\varphi = F_s s$ (wenn F_s die in die Bewegungsrichtung fallende Kraftkomponente ist) definiert. Dabei muß eine konstante Kraft F an einem geradlinig fortbewegten Körper wirken (Bild 149). Diese Formel geht bei der Übereinstimmung von Kraft- und Bewegungsrichtung ($\varphi = 0$) in $W = Fs$ = Kraft mal Weg über.
Diese Definition der Arbeit ist unzureichend, wenn es sich um eine variable Kraft oder um einen krummlinig bewegten Körper handelt. Hierzu einige Beispiele:

Ausdehnung einer Schraubenfeder

Will man die Dehnungsarbeit, die bei einer Dehnung aus der Ruhelage $s_1 = 0$ um $s_e = s_2 - s_1$ erforderlich ist, bestimmen, so muß man beachten, daß die erforderliche Kraft nach dem HOOKEschen Gesetz innerhalb der Proportionalitätsgrenze

$$F = k \cdot s$$

ist, wobei s die Federdehnung und k eine materialbedingte Federkonstante bedeuten.
Es ist also $F = f(s)$ und somit wäre $W = F(s_2 - s_1)$ falsch. Man kann sich jedoch den gesamten Ausdehnungsweg $s_2 - s_1$ in kleine Teilabschnitte Δs zerlegt denken.
In einem solchen kleinen Teilintervall kann die Kraft konstant angenommen werden.
Also ist $F_i \Delta s$ ein Näherungswert für die Arbeit im i-ten Teilintervall. Somit stellt

$$W \approx F_1 \Delta s + F_2 \Delta s + F_3 \Delta s + \cdots + F_n \Delta s = \sum F_i \Delta s$$

einen Näherungswert für die gesamte Arbeit dar. Die Berechtigung der Annahme einer im Intervall Δs gleichbleibenden Kraft ist um so größer, je kleiner Δs, d. h., je größer die Anzahl der Teilintervalle ist.
Es gilt also

$$W = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{s_1}^{s_2} F_i \Delta s,$$

wofür man nach der Definition des bestimmten Integrals auch

$$\boxed{W = \int_{s_1}^{s_2} F \, \mathrm{d}s} \tag{107}$$

schreiben kann[1]).
Speziell für die Schraubenfeder ist $F = ks$ und deshalb

$$W = \int_{s_1}^{s_e} ks \, \mathrm{d}s = k \int_0^{s_e} s \, \mathrm{d}s = \frac{ks_e^2}{2} = \underline{\underline{\frac{F_e s_e}{2}}}.$$

Dabei sei $F_e = ks_e$ die Endkraft, also die Kraft nach einer Ausdehnung um s_e.
Aus $\frac{F_e s_e}{2}$ folgt der Satz:

Die zum Dehnen einer Feder erforderliche Arbeit ist gleich dem Produkt aus dem Gesamtdehnungsweg und der halben Endkraft.
Ist $F = f(s) = \text{const.}$, so geht (107) über in

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \, \mathrm{d}s = F \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = F(s_2 - s_1) = \text{Kraft mal Weg.}$$

[1]) Auch diese bestimmte Integration kann als Flächenberechnung aufgefaßt werden. Bekanntlich ist die Größe der Fläche im F, s-Diagramm das Maß für die verrichtete Arbeit

Gravitation

Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 sollen gegenüber einer anfänglichen Entfernung r_1 auf die neue Entfernung r_2 gebracht werden. Welche Arbeit ist auf Grund der wirkenden Kraft zu verzeichnen?

Das Gravitationsgesetz der Physik $F = f\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ gibt den Zusammenhang zwischen den sich anziehenden Massen m_1 und m_2, dem Abstand r beider und der Kraft F an. f ist die sogenannte Gravitationskonstante mit dem Wert

$$f = 6{,}685 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{dyn cm}^2}{\text{g}^2}.$$

Die auftretende Kraft ist nicht konstant, sondern abhängig vom Abstand der beiden Massen. Nach (107) wird dann die Arbeit

$$W = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,\mathrm{d}r = f m_1 m_2 \left.\frac{1}{r}\right|_{r_1}^{r_2} = \underline{\underline{f m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}}.$$

Isotherme und adiabatische Ausdehnung eines Gases

Dehnt sich ein Gas vom Volumen v um $\mathrm{d}v$ aus, so verrichtet es die Arbeit $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}v$, wenn p der herrschende Druck ist. Für die isotherme Ausdehnung (Temperatur bleibt konstant) gilt nach dem BOYLEschen Gesetz[1]) $p_1 v_1 = pv$, wenn p_1 und v_1 bekannte Anfangswerte und p und v zusammengehörige Zustandsgrößen eines Endzustandes sind.

Aus $p = \dfrac{p_1 v_1}{v}$ folgt $\mathrm{d}W = \dfrac{p_1 v_1}{v}\,\mathrm{d}v$. Die Gesamtarbeit bei der Volumenänderung von v_1 bis v erhält man durch das bestimmte Integral

$$W = \int_{v_1}^{v} p\,\mathrm{d}v = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \underline{\underline{p_1 v_1 \ln \frac{v}{v_1}}}.$$

Findet dagegen die Ausdehnung nicht isotherm, sondern adiabatisch (d. h. ohne Zu- oder Ableitung von Wärme) statt, so gilt das POISSONsche Gesetz[2])

$$p_1 v_1^{\varkappa} = p v^{\varkappa},$$

wobei $\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärme des betreffenden Gases bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen angibt. Also ist

$$p = p_1 \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa}$$

[1]) BOYLE (1626 bis 1691), engl. Physiker
[2]) POISSON (1781 bis 1840), franz. Mathematiker und Physiker

und deshalb

$$W = \int_{v_1}^{v} p\,\mathrm{d}v = \int_{v_1}^{v} p_1 \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa} \mathrm{d}v = p_1 v_1^{\varkappa} \int_{v_1}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^{\varkappa}} =$$

$$= p_1 v_1^{\varkappa} \frac{v^{-\varkappa+1}}{-\varkappa+1}\Bigg|_{v_1}^{v} = -\frac{p_1 v_1^{\varkappa}}{\varkappa - 1}\left(\frac{1}{v^{\varkappa-1}} - \frac{1}{v_1^{\varkappa-1}}\right)$$

$$\underline{\underline{W = \frac{p_1 v_1^{\varkappa}}{\varkappa - 1}\left(\frac{1}{v_1^{\varkappa-1}} - \frac{1}{v^{\varkappa-1}}\right).}}$$

Abschließend sei noch auf eine aus der Physik stammende Beziehung verwiesen. Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Arbeit und kinetischer Energie wieder.

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\,\mathrm{d}s; \qquad F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v = \int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2.$$

Die aufgewandte Arbeit entspricht also der Änderung der kinetischen Energie. Im Beispiel der Gravitation findet sich die Energie als potentielle in der fortbewegten Masse wieder. Die Feder hat ebenfalls durch die Dehnung eine gewisse potentielle Energie erhalten, die sie beim Zurückschnellen wieder in kinetische verwandeln kann. Man sieht also auch hier deutlich die Gültigkeit des Energiesatzes.

11.2. Statisches Moment und Schwerpunkt

Das statische Moment oder das Drehmoment ist für die Mechanik besonders wichtig. Betrachtet man eine endliche Anzahl von Massenelementen $\Delta m_1, \ldots, \Delta m_n$, die von einer Bezugsebene oder -achse die Abstände $l_1, \ldots, l_n$ haben, so nennt man das Produkt $l_i\,\Delta m_i = \Delta M_i$ eines solchen Massenelements Δm_i mit dem zugehörigen Abstand l_i das statische Moment des Massenelements in bezug auf die Ebene oder Achse. Der Wert von ΔM_i ist von der Wahl der Bezugsachse oder -ebene abhängig.
Die Praxis hat es nicht mit Massenelementen zu tun, sondern mit kontinuierlich verteilten Massen (Flächen, Körpern).
Um z. B. das statische Moment einer Fläche zu bestimmen, wählt man sich von der Gesamtfläche ein kleines Element $\mathrm{d}A_i$ mit dem Abstand l_i von der Bezugsachse aus. Dann ist

$$l_i\,\mathrm{d}A_i = \mathrm{d}M_i$$

ein Näherungswert des statischen Moments eines Elements. Das statische Moment der gesamten Fläche erhält man durch Integration.

Geht man allgemein nicht von einem Flächenelement, sondern von einem Massenelement $\mathrm{d}m$ aus, so ist das statische Moment erklärt durch

$$\boxed{M = \int\limits_m l \,\mathrm{d}m} \tag{108}$$

wobei das m am Integralzeichen andeuten soll, daß über das gesamte Gebilde von der Masse m zu integrieren ist.
Legt man homogene Gebilde mit der Dichte $\varrho = 1$ zugrunde[1]), so kann man für die Masse jeweils den Inhalt setzen, da dann beide gleiche Maßzahl haben. Diese Voraussetzung sei im folgenden immer erfüllt. Man erhält in den verschiedenen Fällen des statischen Moments eines Körpers, einer Fläche und eines Kurvenstückes

$$M = \int\limits_V l \,\mathrm{d}V; \qquad M = \int\limits_A l \,\mathrm{d}A; \qquad M = \int\limits_s l \,\mathrm{d}s.$$

Die Bedeutung des statischen Moments zeigt sich besonders in den Beziehungen zum Schwerpunkt. Für jedes Gebilde existiert ein Punkt, für den, wenn man sich die gesamte Masse in ihm vereinigt denkt, das statische Moment der Gesamtmasse — bezogen auf irgendeine Achse — gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Teile des Gebildes ist, bezogen auf die gleiche Achse. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt.
Es sei l_S der Schwerpunktsabstand eines Gebildes (Körper, Fläche, Linie) von der Bezugsachse oder -ebene.
Demnach ist $M = \int l \,\mathrm{d}m = l_S m$.
Daraus folgen die wichtigen Formeln:

$$M = \int\limits_V l \,\mathrm{d}V = l_S V; \quad M = \int\limits_A l \,\mathrm{d}A = l_S A; \quad M = \int\limits_s l \,\mathrm{d}s = l_S s$$

und

$$\boxed{l_S = \frac{\int\limits_V l \,\mathrm{d}V}{V} = \frac{M}{V}; \quad l_S = \frac{\int\limits_A l \,\mathrm{d}A}{A}; \quad l_S = \frac{\int\limits_s l \,\mathrm{d}s}{s}} \tag{109}$$

Damit kann bei Kenntnis des statischen Moments und des Inhalts die Lage des Schwerpunkts berechnet werden.

11.2.1. Statisches Moment und Schwerpunkt von Flächen

Überträgt man die allgemeinen Begriffe und Formeln (108) und (109) auf den Fall einer Fläche, also auf Bild 150, so teilt man, wenn die statischen Momente in bezug auf die Koordinatenachsen M_x und M_y bestimmt werden sollen, die Fläche in Flächenstreifen parallel zu den Achsen auf. Für einen solchen Streifen kann man

[1]) Die Einheit von ϱ ist für Körper, Fläche und Kurve verschieden, da die entsprechenden Dimensionen unterschiedlich sind

näherungsweise einen gemeinsamen Abstand von der Bezugsachse für alle zum Streifen gehörenden Flächenelemente annehmen.
Dann ist

$$M_x = \int_A y \, \mathrm{d}A \qquad \text{und} \qquad M_y = \int_A x \, \mathrm{d}A .$$

Also erhält man auch nach (109) als

statisches Moment einer Fläche

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \int_A y \, \mathrm{d}A = y_S A \\ M_y &= \int_A x \, \mathrm{d}A = x_S A \end{aligned}} \tag{110}$$

wenn $S(x_S; y_S)$ der Schwerpunkt der Fläche ist. Bei speziellen Aufgaben wird man sich oft mit Erfolg der Tatsache erinnern, daß bei homogener Massenverteilung der Schwerpunkt ein Element jeder Symmetrieachse ist[1]).

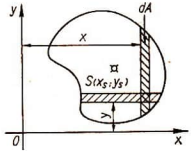


Bild 150

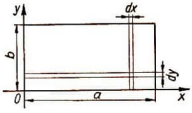


Bild 151

BEISPIELE

1. Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten $(x_S; y_S)$ eines Rechteckes mit den Seiten a und b. (Man lege das Rechteck wie in Bild 151 in das Koordinatensystem.)

   Lösung: Hier kann man als Flächenelement einen Streifen parallel zur Bezugsachse auswählen. Die statischen Momente für ein Element sind

   $$\mathrm{d}M_x = y \, \mathrm{d}A = ya \, \mathrm{d}y$$
   $$\mathrm{d}M_y = x \, \mathrm{d}A = xb \, \mathrm{d}x .$$

   Also ist

   $$M_x = \int_0^b ya \, \mathrm{d}y = a \frac{y^2}{2}\Big|_0^b = \frac{ab^2}{2},$$

   $$M_y = \int_0^a x b \, \mathrm{d}x = b \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2 b}{2}.$$

[1]) Für die Berechnung des Schwerpunktes einer Fläche ist auch die 1. GULDINsche Regel geeignet (vgl. 11.2.4.)

Für die Schwerpunktskoordinaten ergibt sich daraus

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{a^2 b}{2ab} = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$$

$$y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{ab^2}{2ab} = \underline{\underline{\frac{b}{2}}}.$$

Die Berechnung des dA ist nicht immer so einfach. Deshalb werden diese Betrachtungen in 15.3.2. unter Verwendung des Doppelintegrals erweitert.

2. Man bestimme den Schwerpunkt eines Dreiecks.

Lösung: Nach Bild 152 ist $dA = \overline{AB}\,dx$ ein Näherungswert für den Flächeninhalt eines Streifens. Dabei hat man das Trapez durch ein Rechteck ersetzt. Die Strecke AB ist abhängig von x. Ihre Abhängigkeit von x wird durch die Proportion

$$\overline{AB} : a = x : h$$

ausgedrückt. Also ist

$$dA = \overline{AB}\,dx = \frac{ax}{h}\,dx$$

und

$$dM_y = x\,dA = \frac{ax^2}{h}\,dx$$

das statische Moment eines Streifenelements[1]).
Deshalb ist

$$M_y = \int_0^h \frac{ax^2}{h}\,dx = \frac{a}{3h}x^3\Big|_0^h = \underline{\underline{\frac{ah^2}{3}}}$$

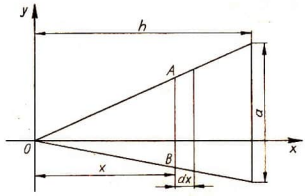


Bild 152

und

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{ah^2}{3}}{\frac{ah}{2}} = \underline{\underline{\frac{2h}{3}}}.$$

Überträgt man die Überlegungen auf die anderen Dreiecksseiten, so folgt der Satz:
Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt auf der Parallelen zu einer Seite im Abstand $h/3$, wobei h die zur angenommenen Seite gehörige Höhe ist.

Die vorangegangenen Beispiele reihen sich in die Vielzahl der Fälle ein, bei denen eine Fläche (Bild 153) — begrenzt durch die Kurve der Funktion $y = f(x)$, die x-Achse und zwei zur y-Achse parallele Geraden — gegeben ist. Ein Element der Fläche

[1]) Der Grenzübergang bestätigt, daß die Näherung der Trapeze durch Rechtecke zutreffend ist, denn aus $dA = \frac{ax}{h}\,dx$ folgt

$$A = \int_0^h \frac{ax}{h}\,dx = \frac{ah}{2},$$ also der Dreiecksinhalt

hat näherungsweise den Inhalt

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x.$$

Also ist

$$\mathrm{d}M_y = xy\,\mathrm{d}x$$

und

$$M_y = \int_A x\,\mathrm{d}A = \int_{x_1}^{x_2} xy\,\mathrm{d}x,$$

wobei $y = f(x)$.

Für die Aufstellung einer Formel für M_x behält man die Zerlegung in Flächenstreifen parallel zur y-Achse bei (Bild 153). Man hat dabei den Vorzug, daß die Integrationsgrenzen wieder x-Werte sind. Der schraffierte Flächenstreifen ΔA wird durch den rechteckigen Streifen $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ ersetzt. Das statische Moment $\mathrm{d}M_x$ für ein solches Rechteck ist dem Beispiel 1 zu entnehmen.

Dort ergab sich $M_x = \frac{ab^2}{2}$. Beachtet man, daß nunmehr $\mathrm{d}x$ statt a und y statt b auftreten, so ist $\mathrm{d}M_x = {}^1/_2\, y^2\,\mathrm{d}x$.

Deshalb ist

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x.$$

Mit $A = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x$ ergibt sich für die

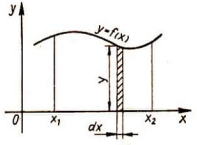


Bild 153

Koordinaten des Schwerpunktes einer Fläche

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x}$$

$$y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x} \qquad (111)$$

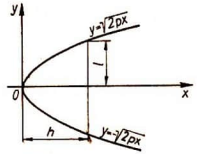


Bild 154

BEISPIELE

3. Man bestimme die Koordinaten des Schwerpunktes eines Parabelsegments.

Lösung: Die Parabel habe die Kurvengleichung $y^2 = 2px$, h sei die Segmenthöhe (Bild 154). Infolge der Symmetrieeigenschaft muß $y_s = 0$ sein. Für x_s ergibt sich:

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy\,\mathrm{d}x = \int_0^h x\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x.$$

Die Berechnung für den oberhalb der x-Achse gelegenen Teil, der von der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{2px}$ begrenzt ist, genügt, da die Berücksichtigung des unteren Teils nur eine Multiplikation mit 2 der Ausdrücke für M_y und A bedeutet. Dieser Faktor würde sich bei der x_S-Bestimmung wieder herauskürzen.

$$M_y = (2p)^{\frac{1}{2}} \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_0^h = \frac{2}{5} h^2 \sqrt{2ph}$$

$$A = \int_0^h \sqrt{2px}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} h \sqrt{2ph}$$

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{3}{5} h.$$

4. Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten der Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = \cos 2x$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = \pi/4$ begrenzt wird.

Lösung:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} = 0{,}19635$$

(Siehe 9.1.2., Beispiel 6)

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0{,}14245$$

(partielle Integration)

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$x_S = \frac{M_y}{A} = 0{,}28490 \quad \text{und} \quad y_S = \frac{M_x}{A} = 0{,}39270.$$

Die Formeln (111) lassen sich leicht auf die Berechnung von Schwerpunkten von Flächen übertragen, die von den Kurven zweier Funktionen f und g begrenzt werden. Dann gilt, wie ohne Schwierigkeiten aus (111) folgt:

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}; \quad y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} [f(x)^2 - g(x)^2]\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}$$

BEISPIEL

5. Wo liegt der Schwerpunkt der in Bild 155 stark umrandeten Fläche?

Lösung: Auch ohne Anwendung der Formeln folgt unmittelbar aus dem Begriff des statischen Moments:

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}A, \quad \text{wobei} \quad \mathrm{d}A = [f(x) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}x = (1 - \ln x)\,\mathrm{d}x.$$

Also gilt:

$$M_y = \int_1^{\mathrm{e}} x\,(1 - \ln x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\,(2 \ln x - 1)\right]\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} [1^2 - (\ln x)^2]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\{x - x\,[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2]\}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln x)\,\mathrm{d}x = [x - x\,(\ln x - 1)]\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 2.$$

Demnach ist:

$$x_S = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4(\mathrm{e} - 2)} \approx \underline{\underline{1{,}53}}$$

$$y_S = \frac{1}{2(\mathrm{e} - 2)} \approx \underline{\underline{0{,}69}}.$$

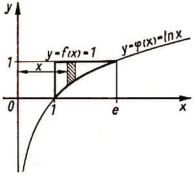


Bild 155

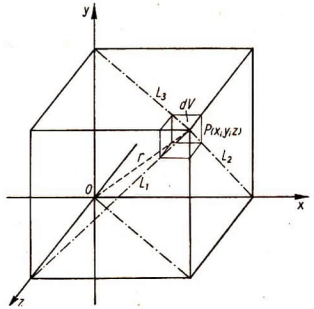


Bild 156

11.2.2. Statisches Moment und Schwerpunkt von Körpern

Die Berechnungen bleiben vorerst auf die Körper beschränkt, für die mit den bisher kennengelernten Mitteln die Volumenbestimmung möglich ist (vgl. 8.2.).
In Bild 156 ist ein Volumenelement $\mathrm{d}V$ gezeichnet. An die Stelle der Bezugsachse für Flächen tritt hier die Bezugsebene.
Es ist

$$\mathrm{d}M_{xz} = x\,\mathrm{d}V$$

das statische Moment des Elements $\mathrm{d}V$, bezogen auf die y,z-Ebene. Daraus folgt $M_{yz} = \int\limits_V x\,\mathrm{d}V$. Unter Berücksichtigung des Bildes 156 und der Formel (109) ergibt sich für die

Koordinaten des Schwerpunktes eines Körpers

$$x_S = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\int\limits_V x\,\mathrm{d}V}{V}$$

$$y_S = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{\int\limits_V y\,\mathrm{d}V}{V} \qquad (112)$$

$$z_S = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\int\limits_V z\,\mathrm{d}V}{V}$$

BEISPIEL

1. Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten eines geraden Kreiskegels (Grundkreisradius r, Höhe h).

Lösung: Bild 157 gibt den Kegel im Schnitt wieder. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften folgt $z_S = y_S = 0$. Also genügt es, x_S zu bestimmen. Zunächst denkt man sich eine Schichtenzerlegung des Körpers durch Parallelebenen zur y,z-Ebene durchgeführt. Für eine solche Schicht ergibt sich als Näherung ein Kreiszylinder mit dem Volumen $\mathrm{d}V = y^2\pi\,\mathrm{d}x$. Dabei ist y abhängig von x. Um $y = f(x)$ zu erhalten, stellt man die Proportion

$$y : r = x : h$$

auf. Mit $y = rx/h$ folgt daraus

$$M_{yz} = \int\limits_V x\,\mathrm{d}V = \pi\int\limits_0^h x\left(\frac{rx}{h}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2}\int\limits_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2 h^2}{4}$$

$$x_S = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\frac{\pi r^2 h^2}{4}}{\frac{\pi r^2 h}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

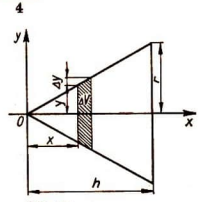


Bild 157

Der Schwerpunkt des geraden Kreiskegels hat die Koordinaten

$$\underline{\underline{S\left(\frac{3h}{4};\ 0;\ 0\right).}}$$

Die Betrachtungen des Beispiels 1 können leicht auf den allgemeinen Fall eines Rotationskörpers übertragen werden. Denkt man sich in Bild 157 den Kegel durch

einen beliebigen Rotationskörper ersetzt, so ist stets

$$\mathrm{d}V = \pi y^2\,\mathrm{d}x$$

der Näherungswert für ein Volumenelement parallel zur gedachten y,z-Ebene. Also ist

$$\mathrm{d}M_{yz} = x\pi y^2\,\mathrm{d}x$$

das statische Moment eines solchen Elements.
Somit ergibt sich für das

statische Moment eines Rotationskörpers

$$\boxed{M_{yz} = \pi \int_{x_1}^{x_2} x\,y^2\,\mathrm{d}x} \tag{113}$$

Mit $x_S = \dfrac{\pi \int_{x_1}^{x_2} x y^2 \mathrm{d}x}{V}$ erhält man leicht eine Schwerpunktskoordinate, während die beiden anderen aus Symmetriegründen gleich Null sein müssen.
Bei der Lösung von Aufgaben ist es nicht immer zu empfehlen, die fertige Formel zu benutzen. Sie ergibt sich bei systematischem Vorgehen von selbst wieder. Diese Methode hat den Vorteil, daß man sich immer mit dem eigentlichen Problem beschäftigen muß — hier mit dem Begriff des statischen Moments. Auf diese Weise begegnet man der Gefahr, die Formeln ohne tieferes Verständnis zu gebrauchen.

BEISPIEL

2. Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten eines Kugelabschnitts der Höhe h.

Lösung: Bild 158 zeigt den Schnitt der Kugel. Man erhält mit $\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x$

$$M_{yz} = \pi \int_{r-h}^{r} y^2 x\,\mathrm{d}x,$$

wobei $y^2 = r^2 - x^2$ ist.
Weitere statische Momente sind wegen der Symmetrieeigenschaften der Kugel nicht erforderlich, also $y_S = z_S = 0$.

$$M_{yz} = \pi \left(\frac{x^2 r^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{r-h}^{r} = \frac{\pi h^2}{4} (2r - h)^2.$$

In 8.2.1. ergab sich das Volumen des Kugelabschnittes zu

$$V_A = \pi \frac{h^2}{3} (3r - h).$$

Damit ist

$$x_S = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{3(2r - h)^2}{4(3r - h)}.$$

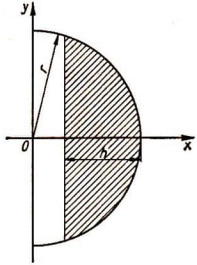


Bild 158

Für die Bestimmung des Schwerpunkts der Halbkugel muß man in Bild 158 die Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = r$ wählen. Dadurch ist die Abschnittshöhe $h = r$, und aus dem Ergebnis für x_S folgt $x_S = 3r/8$. (Für $h = 2r$ entsteht der Fall der Vollkugel: $x_S = 0$.)

11.2.3. Statisches Moment und Schwerpunkt von ebenen Kurven

Will man die Schwerpunktskoordinaten des im Bild 159 gezeichneten Bogenteils der Kurve der Funktion $y = f(x)$ bestimmen, die der Bedingung $x_1 \leqq x \leqq x_2$ genügt, so zerlegt man den Gesamtbogen wieder näherungsweise in Bogendifferentiale $\mathrm{d}s$. Damit ist $\mathrm{d}M_x = y\,\mathrm{d}s$ das statische Moment eines solchen Bogendifferentials auf die x-Achse bezogen. Daraus folgt für das statische Moment

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}s.$$

Man denkt sich den Bogen homogen mit Masse belegt. Dann kann man sich die Masse im Schwerpunkt vereinigt denken, und es gilt [in Analogie zu Formel (110)]

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}s = y_S s. \qquad \text{(I)}$$

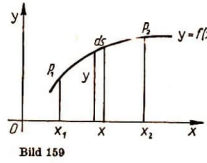


Bild 159

Der gleiche Gedankengang führt auf

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}s = x_S s. \qquad \text{(II)}$$

Die Formeln (I) und (II) ergeben unter Beachtung von Formel (95a) für die

Koordinaten des Schwerpunktes eines Kurvenstücks

$$y_S = \frac{M_x}{s} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}$$

$$x_S = \frac{M_y}{s} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x} \qquad (114)$$

BEISPIEL

Die Schwerpunktskoordinaten der Kurve mit der Gleichung $y = \cosh x$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ sollen bestimmt werden.

Lösung: Nach (114) ist

$$M_x = \int_0^2 \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^2 \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{4}(\sinh 2x + 2x)\Big|_0^2 = 7{,}823$$

$$M_y = \int_0^2 x \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^2 x \cosh x\, dx = x \sinh x - \cosh x\Big|_0^2 = 4{,}4916$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_0^2 \cosh x\, dx = \sinh x\Big|_0^2 = 3{,}6269$$

Also gilt

$$y_S = \frac{7{,}823}{3{,}6269} \approx 2{,}16; \qquad x_S = \frac{4{,}4916}{3{,}6269} \approx 1{,}24$$

$S(1{,}24\ ;\ 2{,}16)$.

11.2.4. Die Regeln von Guldin

Eine günstige Berechnungsmöglichkeit für Volumina, Oberflächen und Schwerpunkte bieten, bei entsprechenden Voraussetzungen, die *Regeln von* Guldin.

1. Guldinsche Regel:

Das Volumen V des Körpers, der bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus der erzeugenden Fläche A und dem Weg ihres Schwerpunkts.

$$\boxed{V = 2\pi y_S A} \tag{115}$$

Beweis: Nach Formel (92a) gilt für Rotationskörper $V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx$, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Begrenzungskurve der rotierenden Fläche ist. Stellt man die Formel etwas um, so erhält man unter Beachtung von (111)

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx = 2\pi M_x = 2\pi y_S A.$$

Demnach ist V gleich dem Produkt aus Schwerpunktsweg und erzeugender Fläche. Diese erste Guldinsche Regel kann bei Kenntnis von y_S und A zur Volumenbestimmung, bei Kenntnis von V und A zur Bestimmung von y_S benutzt werden.

BEISPIELE

1. Das Volumen des zylindrischen Ringes in Bild 160 (*Torus*) ist zu berechnen.

   Lösung: Nach Guldin ist $V = 2\pi y_S A$. Setzt man $A = \pi r^2$ und $y_S = R$ ein, so erhält man

   $$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

2. Man bestimme den Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b nach GULDIN.

Lösung: Aus der Kenntnis der Katheten kann man leicht auf das Volumen des Kegels schließen, der bei der Rotation des Dreiecks entsteht. Somit läßt sich nach (115) der Schwerpunkt bestimmen.

$$V = 2\pi y_S A; \quad y_S = \frac{V}{2\pi A} = \frac{2a^2\pi b}{3 \cdot 2\pi ab} = \frac{a}{3}.$$

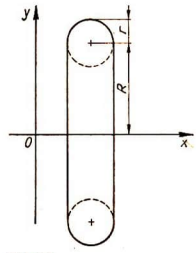


Bild 160

2. Guldinsche Regel:

Die Mantelfläche A_M des Körpers, der bei der Rotation des Bogens s um die x-Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem erzeugenden Bogen s und dem Weg seines Schwerpunkts.

$$\boxed{A_M = 2\pi y_S s} \tag{116}$$

Beweis: Die Mantelfläche A_M eines Rotationskörpers ist nach (96a) $A_M = 2\pi \int\limits_{(s)} y \, ds$. Außerdem gilt nach (114)

$$M_x = \int\limits_{(s)} y \, ds = y_S s$$

für das statische Moment und den Schwerpunkt eines Bogens.
Setzt man (114) in (96a) ein, so ergibt sich

$$A_M = 2\pi \cdot M_x = 2\pi y_S s,$$

die 2. GULDINsche Regel.
Die 2. GULDINsche Regel dient bei Kenntnis von y_S und s zur Mantelflächenbestimmung, bei Vorgabe von A_M und s ermöglicht sie die Schwerpunktsberechnung.

BEISPIEL

3. Man bestimme den Schwerpunkt eines Halbkreisbogens mit dem Radius r.

Lösung: Aus (116) folgt mit

$$A_M = 4\pi r^2 \quad \text{und} \quad s = \pi r \quad \text{für} \quad y_S = \frac{A_M}{2\pi s} = \frac{4\pi r^2}{2\pi \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Wegen $x_S = 0$ gilt also: $S\left(0; \frac{2r}{\pi}\right)$.

AUFGABEN

Anmerkung: Die Rechnung wird durch das Anfertigen einer Skizze wesentlich erleichtert.

515. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 8$ in den Grenzen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

516. Man bestimme den Schwerpunkt eines Kegelstumpfes.

517. Man bestimme den Schwerpunkt einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

518. Man bestimme den Schwerpunkt eines Halbkreises mit dem Radius r, ohne die GULDINsche Regel zu benutzen.
519. Man bestimme das Volumen eines Rotationsparaboloids nach GULDIN.
520. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird.
521. Man bestimme den Schwerpunkt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a und b und der Höhe h.

    Anmerkung: Es genügt, x_S zu bestimmen, weil nach den Regeln der Mechanik der Schwerpunkt auf der Verbindungsstrecke der Mitten der parallelen Seiten liegen muß. Damit hat man neben der Geraden mit der Gleichung $x = x_S$ einen zweiten geometrischen Ort für den Schwerpunkt. Die Fälle $a = b$ und $b = 0$ sind zu beachten.
522. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen

$$y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad x = 1$$

    begrenzt wird.
523. Man bestimme den Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b ohne Benutzung der GULDINschen Regel.
524. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = e^{-2x}$ innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1/2$.
525. Man bestimme den Schwerpunkt der von der Kurve mit der Gleichung $y = {}^1/_8\sqrt{x}(4 - x)$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.
526. Man bestimme das statische Moment des Bogens mit der Gleichung $y = x^3$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 4$, bezogen auf die x-Achse.
527. Bei der Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \ln x$ um die x-Achse entsteht im Intervall $1 \leqq x \leqq e$ ein Körper. Welche Koordinaten hat sein Schwerpunkt?
528. Man benütze den Fall des geraden Kreiskegels, um an Hand bekannter Formeln aus der Geometrie die beiden GULDINschen Regeln auf ihre Gültigkeit zu prüfen.
529. Man berechne die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r durch Anwendung der GULDINschen Regel.
530. Man bestimme den Schwerpunkt der unter der Kurve mit der Gleichung $y = 4e^{2x}$ ($x_1 = 0$; $x_2 = 3$) liegenden Fläche.
531. Man bestimme den Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche.
532. Man berechne die Oberfläche eines zylindrischen Kreisringes nach GULDIN.
533. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = 0$, $x = x_1$ und $ay - x^2 = 0$ begrenzt wird.
534. Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = x(3 - x)$ und der x-Achse begrenzt wird.
535. Man berechne den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \cosh x$ von $x_1 = 0$ bis $x_2 = x$.

11.3. Trägheitsmomente

11.3.1. Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment spielt in der Festigkeitslehre (Knick- und Biege- sowie Verdrehfestigkeit) eine große Rolle. Während das statische Moment in 11.2.1. als das Produkt aus Flächenelement dA und Abstand von der betreffenden Bezugsachse erklärt wurde, ist das Flächenträgheitsmoment eines Flächenteilchens gleich

dem Produkt aus dem Flächenelement und dem Quadrat des Abstands dieses Teilchens von der Bezugsachse.
Somit ist das Flächenträgheitsmoment eines Teilchens $\mathrm{d}A$, das von der Bezugsachse den Abstand l hat,

$$\mathrm{d}I = l^2\,\mathrm{d}A,$$

also das

Trägheitsmoment einer Fläche A

$$\boxed{I = \int_A l^2\,\mathrm{d}A} \tag{117}$$

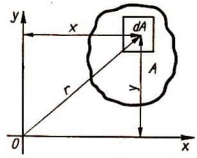


Bild 161

Man unterscheidet

äquatoriale (*axiale*) Trägheitsmomente

und

polare Trägheitsmomente.

Beide unterscheiden sich nur durch die Lage der Bezugsachse.
Beim äquatorialen Trägheitsmoment liegt die Bezugsachse in der Ebene der Fläche.
Beim polaren Trägheitsmoment steht die Bezugsachse senkrecht zur Ebene der Fläche.
Der Durchstoßpunkt der Achse mit der Ebene der Fläche heißt Pol.
Beide Arten von Trägheitsmomenten stehen in einem engen Zusammenhang. In Bild 161 sind die x- und y-Achse zwei äquatoriale Bezugsachsen für die Fläche A, während die im Ursprung des Koordinatensystems senkrecht zur x,y-Ebene stehende z-Achse für die Fläche eine polare Achse darstellt.
Aus der Erklärung des äquatorialen Trägheitsmoments und des polaren folgen unter Benutzung der Formel (117) die

äquatorialen Trägheitsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2\,\mathrm{d}A \\ I_y &= \int_A x^2\,\mathrm{d}A \end{aligned}} \tag{117a}$$

und das

polare Trägheitsmoment

$$\boxed{I_z = I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A} \tag{117b}$$

Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS ist $r^2 = x^2 + y^2$ und deshalb

$$I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A = \int_A (y^2 + x^2)\,\mathrm{d}A = \int_A y^2\,\mathrm{d}A + \int_A x^2\,\mathrm{d}A.$$

Also folgt

$$\boxed{I_p = I_x + I_y} \tag{118}$$

Die Summe zweier äquatorialer Trägheitsmomente, deren Achsen senkrecht aufeinanderstehen, ist gleich dem polaren Trägheitsmoment bezogen auf jene Achse, die im Schnittpunkt der beiden Achsen senkrecht steht.

Satz von Steiner[1])

Das Trägheitsmoment einer Fläche A in bezug auf irgendeine Achse G ist gleich dem um Aa^2 vermehrten Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt der Fläche gehende, zu G parallele Achse, wenn a der Abstand der beiden Achsen ist.

$$\boxed{I_G = I_S + Aa^2} \tag{119}$$

Beweis: Das Trägheitsmoment des Flächenelements $\mathrm{d}A$ (Bild 162) in bezug auf die Schwerpunktsachse ist $\mathrm{d}I_S = x^2\,\mathrm{d}A$. Bezieht man auf die zur Schwerpunktsachse parallele Achse G, so folgt $\mathrm{d}I_G = (a + x)^2\,\mathrm{d}A$.
Für die Gesamtfläche ergeben sich somit:

$$I_S = \int_A x^2\,\mathrm{d}A; \quad I_G = \int_A (a + x)^2\,\mathrm{d}A.$$

Nun ist

$$I_G = a^2 \int_A \mathrm{d}A + 2a \int_A x\,\mathrm{d}A + \int_A x^2\,\mathrm{d}A.$$

Das erste Integral hat den Wert A, also kann man für das erste Glied schreiben a^2A. Das dritte Integral ist mit I_S identisch und das zweite ist das statische Moment in bezug auf die Schwerpunktsachse, also gleich Null. Mithin folgt

$$I_G = Aa^2 + I_S, \qquad \text{was zu beweisen war.}$$

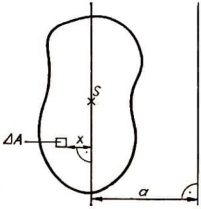


Bild 162

Auch bei der Berechnung spezieller Flächenträgheitsmomente wählt man sich ein Flächenelement $\mathrm{d}A$ aus, das Punkte gleichen Abstands von der Bezugsachse vereinigt, bildet das Flächenträgheitsmoment dieses Elements und erhält mit dem Grenzwert der Summe aller dieser Trägheitsmomente, also durch Integration, das Trägheitsmoment der gesamten Fläche.

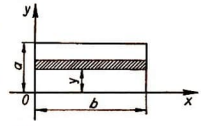


Bild 163

BEISPIELE

1. Man bestimme die äquatorialen Trägheitsmomente eines Rechteckes in bezug auf seine Seiten und in bezug auf die durch den Schwerpunkt zu den Seiten parallel laufenden Achsen (Bild 163).

[1]) Jacob Steiner (1796 bis 1863), schweiz. Mathematiker

Lösung: Wählt man die x-Achse als Bezugsachse und betrachtet einen Streifen parallel zur x-Achse, $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$, so ist $\mathrm{d}I_x = y^2 b\,\mathrm{d}y$ das Trägheitsmoment dieses Flächenelements und

$$I_x = \int_0^a b y^2\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{a^3 b}{3}}}$$

das Trägheitsmoment der gesamten Fläche.

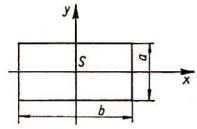


Bild 164

Analog ist

$$I_y = \underline{\underline{\frac{a b^3}{3}}}.$$

Nach Bild 164 ist für den Fall der Schwerpunktsachse

$$I_{Sx} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} b y^2\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{a^3 b}{12}}}$$

und

$$I_{Sy} = \underline{\underline{\frac{a b^3}{12}}}.$$

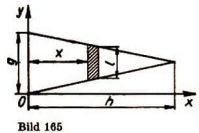


Bild 165

Die Resultate für die Schwerpunktsachsen sind auch mit dem Satz von STEINER leicht zu finden:

$$I_G = I_S + A a^2;\ I_S = I_G - A a^2;$$

$$I_{Sx} = I_x - A\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^3 b}{3} - \frac{a b a^2}{4} = \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_{Sy} = I_y - A\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a b^3}{3} - \frac{a b b^2}{4} = \frac{a b^3}{12}.$$

2. Bestimme das Trägheitsmoment eines Dreiecks (Grundlinie g und Höhe h) in bezug auf die Grundlinie.

Lösung: Das Trägheitsmoment des Flächenstreifens $\mathrm{d}A = l\,\mathrm{d}x$ in bezug auf g ist (Bild 165) $\mathrm{d}I_g = x^2 l\,\mathrm{d}x$, wobei $l = f(x)$. l findet man aus der Proportion

$$l : g = (h - x) : h;\quad l = \frac{g}{h}(h - x).$$

Damit ergibt sich

$$I_y = I_g = \frac{g}{h}\int_0^h (h - x)\,x^2\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{g h^3}{12}}}.$$

Die Übertragung auf den allgemeinen Fall der Berechnung eines Flächenträgheitsmoments ist nicht schwierig.

Die Fläche habe als obere Begrenzung die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, die untere sei die x-Achse, und $x = x_1$ und $x = x_2$ seien die Gleichungen der Geraden, die die seitlichen Begrenzungen bilden. Bild 153 (S. 301) zeigt die Zerlegung in Flächenstreifen. Die entstandenen Flächenelemente können näherungsweise als Rechtecke mit den Seiten y und $\mathrm{d}x$ angesehen werden. Nach Beispiel 1 ist das Trägheitsmoment

eines solchen Rechteckstreifens in bezug auf die x-Achse (wenn a durch y und b durch $\mathrm{d}x$ ersetzt wird)

$$\mathrm{d}I_x = \frac{1}{3} y^3 \mathrm{d}x.$$

Also gilt für das

Trägheitsmoment der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 \mathrm{d}x} \tag{120a}$$

Bezüglich der y-Achse erhält man nach Bild 153

$$\boxed{I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y \, \mathrm{d}x} \tag{120b}$$

BEISPIEL

3. Bestimme die äquatorialen Flächenträgheitsmomente I_x und I_y und das polare Trägheitsmoment eines Segments der Parabel $y^2 = 2px$ mit der Segmenthöhe h (Bild 166).

Lösung:

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_{x_1}^{x_2} y^3 \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_0^h (2px)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{15p} (2px)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^h.$$

Daraus folgt, wenn man $l^2 = 2ph$ beachtet

$$I_x = \underline{\underline{\frac{4 l^3 h}{15}}}.$$

Durch die Multiplikation mit 2 hat man gleichzeitig die Fläche unterhalb der x-Achse mit erfaßt.

$$I_y = 2 \int_{x_1}^{x_2} x^2 y \mathrm{d}x = 2 \int_0^h x^2 \sqrt{2px} \mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{4}{7} h^3 l}}.$$

Beachtet man (118), so folgt

$$I_p = I_x + I_y = \underline{\underline{\frac{4hl}{105} (7l^2 + 15h^2)}}.$$

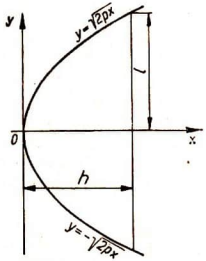


Bild 166

11.3.2. Massenträgheitsmoment

In der Dynamik rotierender Körper spielt das Massenträgheitsmoment eine wichtige Rolle.

Die kinetische Energie eines geradlinig bewegten Körpers ist $W_{\mathrm{kin}} = \frac{m}{2} v^2$, wobei m die Masse und v die Geschwindigkeit des bewegten Körpers bedeuten. Für kreis-

förmige Bewegungen läßt sich zeigen, daß die Rotationsenergie eines Massenelements $\mathrm{d}m$, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand r vom Drehzentrum kreist.

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2\,\mathrm{d}m \quad \text{ist.}$$

Also ist

$$W_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\int_m \omega^2 r^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int_m r^2 \mathrm{d}m$$

die Rotationsenergie für den gesamten Körper.
Die dabei auftretende Größe

$$\boxed{J = \int_m r^2\,\mathrm{d}m} \tag{121}$$

nennt man das **Massenträgheitsmoment des Körpers.**
Ein Vergleich der Formeln für die Bewegungsenergie der geradlinigen und kreisförmigen Bewegung zeigt, daß bei W_{rot} die Größe J an die Stelle der Masse bei W_{kin} getreten ist (an die Stelle des v die Größe ω).
Bei der Berechnung des Massenträgheitsmoments eines Körpers wählt man ein Massenelement aus, dessen Massenpunkte, aus denen er sich aufbaut, angenähert den gleichen Abstand von der Bezugsachse haben, und bestimmt durch Multiplikation dieses Elements mit dem Quadrat des Abstandes von der Bezugsachse das Massenträgheitsmoment des Elements. Durch Integration erhält man auch hier das Massenträgheitsmoment des Gesamtkörpers.
Die Gegenüberstellung von Flächenträgheitsmoment (117) und Massenträgheitsmoment (121) zeigt, daß in (121) $\mathrm{d}m$ an die Stelle von $\mathrm{d}A$ in (117) getreten ist. Außerdem findet in beiden Fällen eine Multiplikation der Elemente mit dem Quadrat des Abstands statt. Damit unterscheiden sich beide Größen auch in der Dimension:
Während die Dimension des Flächenträgheitsmoments $[\mathrm{L}^4]$ ist, gilt für das Massenträgheitsmoment $[\mathrm{ML}^2]$. Dennoch weisen beide Größen sehr starke Ähnlichkeit auf, die auch im gemeinsamen Namen Trägheitsmoment zum Ausdruck kommt.
Der für Flächenträgheitsmomente bewiesene Satz von STEINER gilt in übertragener Weise auch für Massenträgheitsmomente.

BEISPIEL

1. Man bestimme das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h in bezug auf die Drehachse.

   Lösung: Zerlegt man den Körper in dünnwandige Hohlzylinder (Bild 167), so erhält man zunächst $\mathrm{d}V = 2\pi x h\,\mathrm{d}x$ als Volumenelement des Körpers. Beachtet man die Beziehung zwischen der Dichte ϱ, der Masse m und dem Volumen V,

   $$\varrho = \frac{m}{V},$$

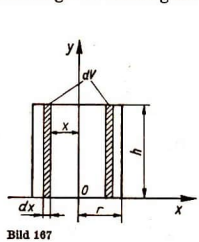


Bild 167

so ist das gesuchte Massenelement

$$\mathrm{d}m = \varrho \,\mathrm{d}V = \varrho 2\pi x h \,\mathrm{d}x.$$

Somit ist $\mathrm{d}J_y = x^2 \varrho 2\pi x h \,\mathrm{d}x$ das Massenträgheitsmoment eines Elements und

$$J_y = 2\pi\varrho h \int_0^r x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi\varrho h}{2} x^4 \Big|_0^r = \underline{\underline{\frac{\pi\varrho h}{2} r^4}}$$

das gefragte Massenträgheitsmoment des gesamten Körpers.
Da $\pi r^2 h$ das Gesamtvolumen des Körpers und demnach $\pi r^2 h \varrho$ seine Gesamtmasse ist, geht die Lösung über in

$$J_y = \underline{\underline{\frac{m r^2}{2}}}.$$

Das Beispiel 1 läßt sich auch auf beliebige Drehkörper verallgemeinern, vorausgesetzt, daß die Drehachse Bezugsachse bleibt.
Denkt man sich den gesamten Körper in Kreiszylinder zerlegt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Massenteils

$$\mathrm{d}J_y = \frac{\pi\varrho}{2} x^4 \,\mathrm{d}y,$$

wenn man die y-Achse als Rotationsachse wählt und h im Beispiel 1 durch $\mathrm{d}y$ ersetzt. Für den gesamten Drehkörper, der durch Rotation der Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $x = \varphi(y)$ und der y-Achse entsteht, erhält man als

Massenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse

$$\boxed{J_y = \frac{\pi\varrho}{2} \int_{y_1}^{y_2} x^4 \,\mathrm{d}y} \qquad (122\mathrm{a})$$

Bei Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ um die x-Achse ergibt sich analog als

Massenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$\boxed{J_x = \frac{\pi\varrho}{2} \int_{x_1}^{x_2} y^4 \,\mathrm{d}x} \qquad (122\mathrm{b})$$

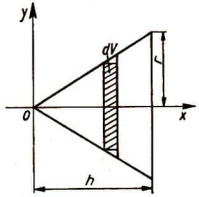


Bild 168

BEISPIEL

2. Bestimme das Massenträgheitsmoment eines geraden Kreiskegels (Dichte ϱ) in bezug auf die Rotationsachse (Bild 168).

Lösung: Nach (122b) gilt

$$J_x = \frac{\pi\varrho}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,\mathrm{d}x.$$

Aus dem Bild 168 folgt

$$y = \frac{r}{h}x.$$

Deshalb ist

$$J_x = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi\varrho r^4}{10h^4}x^5\Big|_0^h$$

$$J_x = \underline{\underline{\frac{\pi\varrho r^4 h}{10}}}.$$

Beachtet man

$$m = V\varrho = \frac{\pi r^2 h\varrho}{3},$$

so gilt

$$J_x = \underline{\underline{\frac{3mr^2}{10}}}.$$

3. Das Massenträgheitsmoment eines Schwungrades soll berechnet werden. Der Kranz des Schwungrades der Dichte ϱ haben die Breite b, die beiden Radien seien r und R (Bilder 169a und 169b).

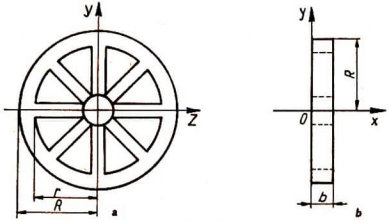


Bild 169

Lösung: Mit Hilfe der Formel (122) soll zunächst das Trägheitsmoment des Kranzes bestimmt werden. Das Bild 169b zeigt, daß der Kranz durch Rotation eines Rechtecks um die x-Achse entstanden ist. Dieses Rechteck wird oben von der Kurve mit der Gleichung $y = R$ begrenzt, während die Kurve mit der Gleichung $y = r$ den unteren Abschluß bildet. Deshalb sind bei der Anwendung der Formel (122) eigentlich zwei Integrationen erforderlich. Die erste erfaßt den Vollzylinder mit dem Radius R. Subtrahiert man davon das Massenträgheitsmoment des Vollzylinders mit dem Radius r, so verbleibt der gewünschte Kranz als Hohlzylinder. Vollzieht

man die beiden Integrationen in einem Schritt, so ergibt sich:

$$J_x = \frac{\pi\varrho}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\varrho}{2}\int_0^b (R^4 - r^4)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi b\varrho}{2}(R^4 - r^4).$$

Beachtet man die Masse des Hohlzylinders

$$m = \pi\varrho b\,(R^2 - r^2),$$

so erhält man

$$J_y = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$$

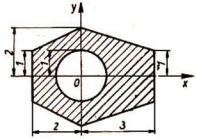


Bild 170

und unter Einführung des mittleren Radius

$$\overline{R} = \frac{R + r}{2}$$

$$J_x = 2m\left(\frac{R + r}{2}\right)^2 - mRr = 2m\overline{R}^2 - mRr. \tag{I}$$

Nun sind noch die Nabe und die Speichen des Schwungrades zu berücksichtigen. Infolge der geringen Masse im Vergleich zum Kranz und besonders wegen des geringen Abstandes von der Bezugsachse sind jedoch diese beiden Teile meist ohne großen Einfluß.
Der Praktiker rechnet deshalb oft mit dem Wert

$$J = \overline{m}\,\overline{R}^2$$

wobei $\overline{m}$ die Gesamtmasse des Schwungrades einschließlich Nabe und Speichen ist. Da $2m > \overline{m}$ ist, wird auch das subtraktive Glied der Gleichung (I) ausgeglichen. Es sei jedoch besonders darauf verwiesen, daß nicht in jedem Falle die Vernachlässigung der Nabe und Speichen zulässig ist. Dafür können nur die erforderliche Genauigkeit oder auch die Verhältnisse der Größe und Anordnung der einzelnen Teile entscheidend sein.

AUFGABEN

536. Man bestimme das äquatoriale Flächenträgheitsmoment des in 11.3.1., Beispiel 3, behandelten Parabelsegmentes in bezug auf die Schwerpunktsachse parallel zur Leitlinie.

537. Man bestimme das Flächenträgheitsmoment I_x eines Kreises mit dem Radius r (Anmerkung: Umweg über das polare Trägheitsmoment).

538. Man bestimme das Massenträgheitsmoment einer Kugel vom Radius r und der Dichte ϱ a) in bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Achse und b) in bezug auf eine Achse, die Tangente der Kugel ist [Anmerkung: Satz von STEINER (119)].

539. Bild 170 zeigt die Schnittfläche eines Körpers mit kugelförmigem Hohlraum, der durch Rotation um die x-Achse entstanden ist. Bestimme das Massenträgheitsmoment in bezug auf die x-Achse. Die Maße sind in m angegeben, und die Dichte des Körpers sei $\varrho = 7{,}8\ \mathrm{kg/dm^3}$.

540. Man bestimme das Massenträgheitsmoment des Körpers, der durch die Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = 3x^2$ um die x-Achse in den Grenzen $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ entsteht (Bezugsachse sei die Drehachse, die Dichte des Körpers sei ϱ).

Man bestimme die Flächenträgheitsmomente der in den Bildern 171 bis 174 gegebenen Profile in bezug auf die angedeuteten Achsen.

541. Bild 171 542. Bild 172 543. Bild 173 544. Bild 174

545. Es sind die Flächenträgheitsmomente I_x und I_y der Fläche zu bestimmen, die in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = \pi/2$ von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sin x$ und $y = 0$ begrenzt wird.

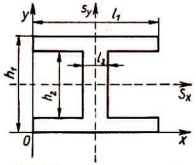


Bild 171

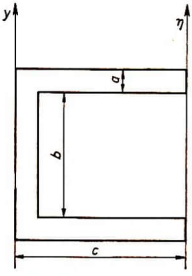


Bild 172

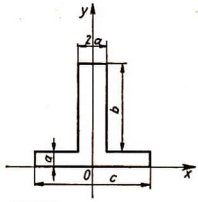


Bild 173

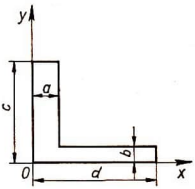


Bild 174

546. Man bestimme die Trägheitsmomente der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \ln x$ in den Grenzen $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ in bezug auf die Koordinatenachsen.

547. Man bestimme das Trägheitsmoment der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{x - 4}{x^2 - 1}$ in den Grenzen x_1 und x_2 in bezug auf die x-Achse $(x_2 > x_1 > 4)$.

548. Man bestimme das Massenträgheitsmoment des Körpers, der bei Rotation der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \sin x$ um die x-Achse in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi/2$ entsteht. Die Rotationsachse sei Bezugsachse. $\varrho = 1\left[\dfrac{m}{l^3}\right]$.

549. Man bestimme das Massenträgheitsmoment eines Rotationsparaboloids in bezug auf die Drehachse $\left(\varrho = 1\left[\dfrac{m}{l^3}\right]\right)$.

11.4. Der radioaktive Zerfall

Natürlicher Radioaktivität unterliegende Elemente haben die Eigenschaft, daß sich in gleichen Zeiten t der gleiche Bruchteil der noch nicht zerfallenen Atome in das entsprechende Folgeprodukt verwandelt. Mit anderen Worten heißt das, die Anzahl der je Zeiteinheit zerfallenden Atome oder kurz die Zerfallsgeschwindigkeit $\frac{dn}{dt}$ ist proportional der Anzahl n der noch nicht zerfallenen Atome selbst, also $\frac{dn}{dt} \sim n$ oder mit $-\lambda$ als Proportionalitätsfaktor

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n. \tag{I}$$

Da die Zahl der vorhandenen Atome abnimmt, ist dn negativ. n ist aber stets nichtnegativ, deshalb muß (mit $\lambda > 0$) ein Proportionalitätsfaktor $-\lambda$ angesetzt werden.

Es interessiert die Funktion $n = f(t)$, die die Menge der noch nicht zerfallenen Atome in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Die Eigenschaft $\frac{dy}{dx} \sim y$ weisen nach 3.7. Exponentialfunktionen auf.
Die Gleichung (I) entspricht eigentlich schon einer Differentialgleichung einfacher Form. Auch bei den folgenden Beispielen wird sich jedoch dieser Vorgriff auf den Teil Differentialgleichungen nicht störend auswirken, da die Gleichungen relativ einfach gelöst werden können. Man kennt von der gesuchten Funktion $n = f(t)$ deren Differentialquotienten $\frac{dn}{dt}$. Da dies der Grundaufgabe der Integralrechnung entspricht, muß mittels Integration $n = f(t)$ bestimmbar sein.
Aus (I) folgt

$$\frac{dn}{n} = -\lambda\, dt,$$

$$\int \frac{dn}{n} = -\lambda \int dt,$$

$$\ln n + C_1 = -\lambda t + C_2.$$

Die Terme $\ln n$ und $-\lambda t$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante, also gilt

$$\ln n = -\lambda t + C.$$

Damit ist

$$n = e^{-\lambda t + C} = e^{C} \cdot e^{-\lambda t} \tag{II}$$

die allgemeine Lösung (Menge aller Lösungsfunktionen).
Nimmt man an, daß zur Zeit $t = 0$ die Anzahl der vorhandenen, nicht zerfallenen Atome n_0 beträgt, und belegt man $t = 0$, $n = n_0$, so erhält man

$$n_0 = e^{C} \cdot 1, \quad \text{also ein bestimmtes } C.$$

Deshalb ist die Exponentialfunktion $n = n_0 e^{-\lambda t}$, die die Menge der noch nicht zerfallenen Atome in Abhängigkeit von der Zeit angibt, eine partikuläre Lösung des Integrals. Dabei ist λ die sogenannte Zerfallskonstante, die für den betreffenden Stoff charakteristisch ist.

11.5. Der Träger gleicher Zugfestigkeit

Man soll das Profil eines Stabes ermitteln, der bei einer Zugkraft F unter Beachtung des Eigengewichtes in jedem Querschnitt die gleiche konstante Spannung erfährt (Bild 175). Ein beliebiger Querschnitt A im Abstand x von der unteren Begrenzung des Stabes unterliegt somit der Belastung σA. Bei einer Abstandsvergrößerung um dx nimmt σA um $\sigma\, dA$ zu. Da die Beanspruchung für jeden Querschnitt konstant sein soll, muß $\sigma\, dA = \varrho g A\, dx$ sein, denn $\varrho g A\, dx$ ist das Gewicht des Teiles mit A als Querschnitt (für kleine dx konstant anzunehmen), dx als Höhe, der Dichte ϱ des Materials und g als Erdbeschleunigung. Daraus folgt

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\varrho g}{\sigma} A.$$

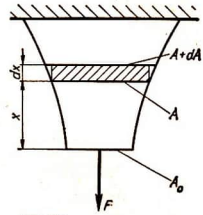


Bild 175

Wie in 11.4. erhält man daraus

$$\int \frac{dA}{A} = \frac{\varrho g}{\sigma} \int dx$$

$$\ln A = \frac{\varrho g}{\sigma} x + C \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

$$A = e^C e^{\frac{\varrho g}{\sigma} x}. \qquad \text{(I)}$$

Für $x = 0$ (unterer Querschnitt) sei $A = A_0$ und deshalb $F = \sigma A_0$, also

$$A_0 = \frac{F}{\sigma}.$$

Dann folgt aus (I) durch Belegen mit

$A = A_0$ für $x = 0$

$A_0 = e^C$ und somit für das gesuchte Profil

$$A = A_0 e^{\frac{\varrho g}{\sigma} x} = \frac{F}{\sigma} e^{\frac{\varrho g}{\sigma} x} \quad \text{(partikuläre Lösung).}$$

Der Querschnitt des Stabes muß also nach oben exponentiell zunehmen, um die konstante Spannung in jedem Querschnitt zu garantieren.

11.6. Der senkrechte Wurf nach oben

Angenommen, von einer Bewegung sei nur eine Aussage über die Beschleunigung bekannt.
Für den senkrechten Wurf nach oben gilt dann z. B.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g. \tag{I}$$

Das negative Vorzeichen muß gesetzt werden, weil beim senkrechten Wurf nach oben die Geschwindigkeit abnimmt, also $\mathrm{d}v$ negativ ist. Aus (I) kann man leicht auf $v = f(t)$ und $s = \varphi(t)$ durch Integration schließen.
Aus (I) folgt

$$\mathrm{d}v = -g\,\mathrm{d}t$$

$$v = -gt + C_1. \tag{II}$$

Nimmt man für $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung $v = v_0$ an, so erhält man durch diese Anfangsbedingung die Möglichkeit, die Integrationskonstante zu bestimmen.

$$v_0 = -g \cdot 0 + C_1, \quad C_1 = v_0$$

Also folgt aus (II)

$$\underline{\underline{v = v_0 - gt.}}$$

Mit

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

wird hieraus

$$\int \mathrm{d}s = \int (v_0 - gt)\,\mathrm{d}t.$$

$$s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + C_2.$$

Wählt man für $t = 0$ auch $s = 0$, so folgt

$$0 = 0 - 0 + C_2, \quad \text{somit} \quad C_2 = 0.$$

Als Ergebnis erhält man

$$\underline{\underline{s = v_0 t - \frac{g}{2} t^2,}}$$

die bekannte Weg-Zeit-Beziehung des senkrechten Wurfes nach oben.

11.7. Arbeit des Wechselstroms

Für Spannung und Stromstärke von Wechselströmen gilt

$$u = U \sin \omega t \quad \text{und} \quad i = I \sin(\omega t + \varphi).$$

Dabei sind

u und i die Momentanwerte,
U und I die Maximalwerte von Spannung und Stromstärke,
φ der Phasenwinkel zwischen Spannung und Stromstärke und
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz mit T als Periodendauer.

Mit $P = ui$ für die Leistung erhält man

$$P = UI \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi).$$

In der Zeit $\mathrm{d}t$ wird dann die Arbeit

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}t = UI \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t \tag{I}$$

verrichtet.
Aus dieser Gleichung kann auf die Arbeit des Wechselstromes während einer Periode T geschlossen werden, denn aus (I) folgt

$$W = UI \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t. \tag{II}$$

Nach Additionstheorem ist

$$\sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right].$$

Deshalb folgt aus (II)

$$W = \frac{UI}{2}\left[\cos \varphi \int_0^T \mathrm{d}t - \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \frac{UI}{2}\left[T \cos \varphi - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + \varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin \varphi\right].$$

Unter Beachtung von

$$2\omega T = 4\pi, \quad \sin(4\pi + \varphi) = \sin \varphi$$

erhält man endlich

$$W = \frac{UI}{2}\, T \cos \varphi.$$

Die mittlere Leistung $\overline{P} = \frac{W}{T}$ ist somit

$$\overline{P} = \frac{U I}{2} \cos \varphi$$

oder mit

$$U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{P} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi .$$

11.8. Die chemische Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration[1])

Bei der irreversiblen Vereinigung zweier Stoffe ist nach dem Massenwirkungsgesetz die momentane Reaktionsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (dabei ist x die Anzahl der reagierenden Moleküle) proportional dem Produkt der jeweiligen Konzentration der beiden Stoffe. Dabei soll sich die Reaktion so vollziehen, daß jeweils Molekülpaare miteinander reagieren.
Sind dann a_1 und a_2 die Ausgangskonzentrationen, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a_1 - x)(a_2 - x). \tag{I}$$

Dabei ist der Proportionalitätsfaktor k eine konzentrationsunabhängige Reaktionskonstante, die jedoch, was hier nicht weiter berücksichtigt werden soll, stark temperaturabhängig ist.
Will man aus (I) t als Funktionswert von x entnehmen, so gilt es, die Integrale

$$k \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a_1 - x)(a_2 - x)} \tag{II}$$

zu lösen. Während links kt entsteht, folgt rechts durch Integration in Partialbrüchen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a_1 - x)(a_2 - x)} = \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(a_1 - x)} + \int \frac{B\,\mathrm{d}x}{(a_2 - x)}$$

und unter Benutzung des Einsetzverfahrens zunächst für die Konstanten A und B

$$1 = A(a_2 - x) + B(a_1 - x)$$

$$x = a_2 \qquad 1 = B(a_1 - a_2)$$

$$x = a_1 \qquad 1 = A(a_2 - a_1)$$

[1]) Sirk Hugo, „Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker", 7. Auflage, Th. Steinkopff, Leipzig u. Dresden 1956

also

$$A = \frac{1}{a_2 - a_1}; \quad B = -\frac{1}{a_2 - a_1}.$$

Somit ist

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a_1 - x)(a_2 - x)} = \frac{1}{a_2 - a_1} [\ln (a_2 - x) - \ln (a_1 - x)] + C.$$

Aus Gleichung (II) wird somit

$$kt = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \frac{a_2 - x}{a_1 - x} + C \quad \text{(allgemeine Lösung).} \tag{III}$$

Da für $t = 0$ die Reaktion erst beginnen soll, ist dort auch das Reaktionsprodukt $x = 0$.
Dadurch ergibt sich für C

$$0 = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \frac{a_2}{a_1} + C$$

$$C = \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \frac{a_1}{a_2}$$

und aus (III) schließlich

$$kt = \frac{1}{a_2 - a_1} \left(\ln \frac{a_2 - x}{a_1 - x} + \ln \frac{a_1}{a_2} \right) \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

$$t = \frac{1}{k(a_2 - a_1)} \ln \frac{a_1 (a_2 - x)}{a_2 (a_1 - x)}.$$

11.9. Die Ausflußzeit von Flüssigkeiten bei abnehmendem Flüssigkeitsstand

Ist h die Höhe der Flüssigkeit in einem Behälter, so ergibt sich als theoretische Ausflußgeschwindigkeit[1]) für eine am Boden befindliche Öffnung mit dem Querschnitt A

$$v = \sqrt{2gh} \quad (\textit{Theorem von} \text{ Torricelli}^2).$$

Außerdem wird die Beziehung $Q = A \cdot v$ als bekannt vorausgesetzt, wobei Q die ausfließende Menge je Zeiteinheit ist. Der variable Gefäßquerschnitt sei (Bild 176) $y = f(x)$. Nach t Sekunden soll der Flüssigkeitsstand nur noch x über der Öffnung betragen. Für ein kleines Zeitintervall $\mathrm{d}t$ kann man dann ohne großen Fehler die Druckhöhe x und den Gefäßquerschnitt als unveränderlich ansehen, während der Flüssigkeitsspiegel um $\mathrm{d}x$ sinkt.

[1]) Von Reibungsverlusten wird abgesehen. Diese werden in der Praxis durch einen Faktor $k < 1$ berücksichtigt, also $v = k\sqrt{2gh}$

[2]) Evangeliste Torricelli (1608 bis 1647), ital. Physiker, Schüler Galileis

Die in der Zeit $\mathrm{d}t$ ausfließende Flüssigkeitsmenge ist dann

$$A\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t = -y\,\mathrm{d}x \quad \text{(das Minuszeichen muß wegen } \mathrm{d}x < 0 \text{ stehen)}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{-y\,\mathrm{d}x}{A\sqrt{2gx}}.$$

Für die Zeit $t = 0$ und $t = t$ beträgt der Stand der Flüssigkeit $x = h$ und $x = x$. Daher ist

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_h^x \frac{-y\,\mathrm{d}x}{A\sqrt{2gx}}$$

und

$$t = -\frac{1}{A\sqrt{2g}}\int_h^x \frac{y\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \qquad \text{(I)}$$

Bild 176

$y = f(x)$ ist dabei die Gleichung der Funktion, die die Veränderung des Gefäßquerschnittes mit der Höhe x angibt. Es läßt sich somit die Zeit t bestimmen, in der der Flüssigkeitsstand von h auf x gesunken ist $(x < h)$. So folgt für ein zylindrisches Gefäß

$$y = f(x) = \text{const} = A_0 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Also geht (I) über in

$$t = -\frac{A_0}{A\sqrt{2g}}\int_h^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \qquad \text{(II)}$$

Für die völlige Entleerung wird $x = 0$ und (II) wird zu

$$t = \frac{A_0}{A\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$t = \frac{A_0\sqrt{2gh}}{gA}.$$

BEISPIEL

In einem kegelförmigen Behälter, dessen Mantellinie um 45° gegenüber der Vertikalen geneigt ist, steht eine Flüssigkeit 1 m hoch. Am Boden befindet sich eine 1 cm² große Öffnung. Wie lange dauert es, bis der Stand der Flüssigkeit nur noch 0,25 m beträgt, wenn man davon absieht, daß durch die Öffnung an der Spitze die Gesamthöhe eine Veränderung erfährt und wenn man die auftretende Reibung vernachlässigt?

Lösung: Setzt man in (I) $y = \pi x^2$, $A = 1\ \mathrm{cm}^2$, $g = 981\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$, $h = 100\ \mathrm{cm}$ und $x = 25\ \mathrm{cm}$ ein und löst das Integral, so entsteht

$$t = \frac{-2\pi}{5\sqrt{2 \cdot 981}}\, x^{\frac{5}{2}}\Big|_{100}^{25} \approx 263\ \mathrm{s}.$$

Die vorangegangenen Beispiele zeigen die vielfältige Anwendungsmöglichkeit des Integrals. In sehr vielen Zweigen der Technik und Naturwissenschaften erweist es sich als unentbehrliches Hilfsmittel.

Auf Grund der unterschiedlichen Probleme, zu deren Lösung das Integral herangezogen werden kann, ist es doppelt wichtig, bei aller Vielfalt das Gemeinsame zu sehen. Das Integral ist der Grenzwert einer Summe von Produkten, deren Anzahl über alle Grenzen wächst und bei denen ein Faktor gegen Null geht. In anderer Form heißt das: Ist von einer Funktion $y = f(x)$ nur der 1. Differentialquotient $y' = f'(x)$ bekannt, so erhält man $y = f(x)$ durch das Integral $\int y'\,\mathrm{d}x$.

12. Näherungsweise Integration

12.1. Rechnerisches Verfahren; Simpsonsche Formel

Die behandelten Integrationsverfahren ermöglichen nicht immer die Lösung eines bestimmten Integrals. In solchen Fällen führt man die Berechnung näherungsweise durch. Diese Näherungsmethoden sind für die Technik besonders wichtig, da der Integrand mitunter nicht als Term gegeben ist, sondern nur einzelne, empirisch gefundene Werte bekannt sind, die tabellarisch vorliegen oder ihren Niederschlag in einer Skizze im Koordinatensystem gefunden haben.

Sehr häufig begegnet man dem rechnerischen Näherungsverfahren.

Man soll die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ in den Grenzen $x_0 \leqq x \leqq x_n$ näherungsweise berechnen, also eine Annäherung an das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ durchführen (Bild 177).

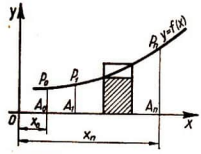


Bild 177

Man zerlegt das Gesamtintervall in n gleich breite Teilintervalle der Breite $h = \frac{x_n - x_0}{n}$.

Ersetzt man die entstandenen Flächenstreifen durch Rechtecke (die die Streifen von unten oder oben annähern), so stellt die Summe aller dieser Rechtecke eine Näherungslösung für das gesuchte bestimmte Integral dar.

Wesentlich besser wird die Näherung, wenn man die krummlinige Begrenzung der Flächenstreifen durch die zugehörigen Sehnen ersetzt, also eine Zerlegung in Trapeze (Bild 179) vornimmt. Bezeichnet man $\overline{A_0P_0}$ mit y_0, $\overline{A_1P_1}$ mit y_1 usw. und die Streifenbreite mit h, so ist eine Näherung durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$A = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right).$$

Dies ergibt die

Trapezformel

$$\boxed{A = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)} \tag{123}$$

Die Simpsonsche Formel

Der Gedanke einer noch besseren Näherung stammt von dem englischen Mathematiker THOMAS SIMPSON (1710 bis 1761), der durch je drei nebeneinanderliegende Kurvenpunkte P_0, P_1, P_2 statt der vorhandenen Kurve eine Parabel 2. Grades zog. Man zerlegt das Gesamtintervall in eine gerade Anzahl gleich breiter Teilintervalle. Die Breite beträgt dann $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. Durch die drei jeweils zusammengehörigen Punkte P_{i-1}, P_i, P_{i+1} kann eindeutig eine Parabel mit der Gleichung

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gelegt werden, deren Achse parallel zur y-Achse verläuft.
Der erste Doppelstreifen erhält als obere Begrenzung die Parabel mit der Gleichung $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, die durch die Punkte P_0, P_1 und P_2 geht. Um die Rechnung einfacher zu gestalten, denkt man sich die y-Achse so weit parallel verschoben, daß sie durch den Punkt P_1 hindurchgeht. In diesem neuen Koordinatensystem haben die drei Punkte des ersten Doppelstreifens die Koordinaten (Bild 178):

$$P_0(-h;\, y_0), \quad P_1(0;\, y_1), \quad P_2(h;\, y_2).$$

Da diese Punkte auf der Parabel liegen sollen, müssen sie deren Kurvengleichung befriedigen. Deshalb gilt das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} y_0 = a_2h^2 - a_1h + a_0 \\ y_1 = a_0 \\ y_2 = a_2h^2 + a_1h + a_0 \end{array}\right|$$

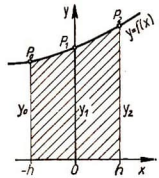


Bild 178

mit den Variablen a_2, a_1 und a_0.
Daraus folgt

$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

$$a_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$$

$$a_0 = y_1.$$

Also ist

$$y = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 + \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)x + y_1$$

die Kurvengleichung der Parabel durch die Punkte P_0, P_1 und P_2. Der Inhalt der parabelförmig begrenzten Fläche des ersten Doppelstreifens ist

$$A = \int_{-h}^{+h} (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x\right)\Bigg|_{-h}^{+h} = 2a_2\frac{h^3}{3} + 2a_0h.$$

Setzt man die Werte für a_2 und a_0 ein, so erhält man mit

$$A_{0;2} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

den Inhalt des ersten Doppelstreifens.

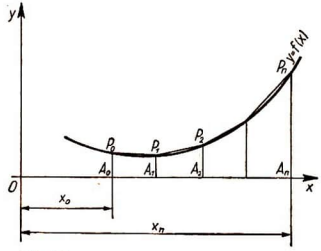


Bild 179

Analog ergibt sich für die folgenden Doppelstreifen:

$$A_{2;4} = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \ldots$$

Addiert man die Inhalte aller $\frac{n}{2}$ Doppelstreifen des Bildes 179, so ist

$$A = \int_{x_0}^{x_n} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)].$$

Durch Zusammenfassen gleicher Glieder erhält man die **Simpsonsche Formel**

$$A = \int_{x_0}^{x_n} y\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]. \tag{124}$$

Man beachte, daß die Anwendung der SIMPSONschen Formel nicht nur auf Flächenberechnungen beschränkt bleibt, sondern für alle Rechnungen herangezogen werden kann, die auf bestimmte Integrale führen. Enthält die Kurve der Funktion $y = f(x)$ Ecken oder Sprungstellen, so ist die Intervallteilung so zu wählen, daß diese Punkte Anfang oder Ende eines Doppelstreifens bilden.

BEISPIEL

Bestimme den Inhalt der Fläche, die unten von der x-Achse, seitlich von den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ und oben von der Kurve mit der Gleichung $y = 1/x$ begrenzt wird.

Lösung: Durch Integration würde man

$$A = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 = 0{,}69515$$

finden, also wäre die Anwendung der SIMPSONschen Formel nicht erforderlich. Ihre Benutzung soll hier einen Vergleich der Resultate und damit eine Genauigkeitsprüfung gestatten.
Für die bei größeren n-Werten recht umfangreiche Zahlenrechnung empfiehlt sich die Verwendung eines Schemas. So erhält man für das gewählte Beispiel mit $n = 6$, also $h = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$, nachstehende übersichtliche Zusammenstellung:

$y_0 = f(1)$	$\frac{1}{1}$	1,00000			
$y_6 = f(2)$	$\frac{1}{2}$	0,50000			
	Σ_1	1,50000			
$y_1 = f\left(\frac{7}{6}\right)$	$\frac{6}{7}$	0,85714	$y_2 = f\left(\frac{8}{6}\right)$	$\frac{6}{8}$	0,75000
$y_3 = f\left(\frac{9}{6}\right)$	$\frac{6}{9}$	0,66667	$y_4 = f\left(\frac{10}{6}\right)$	$\frac{6}{10}$	0,60000
$y_5 = f\left(\frac{11}{6}\right)$	$\frac{6}{11}$	0,54545			
Σ_2		2,06926	Σ_3		1,35000
$4\,\Sigma_2$		8,27704	$2\,\Sigma_3$		2,70000

Σ_1	1,50000
$4\,\Sigma_2$	8,27704
$2\,\Sigma_3$	2,70000
Σ_{ges}	12,47704

$$A \approx \frac{h}{3}\,\Sigma_{ges} = \frac{1}{18} \cdot 12{,}47704 = \underline{\underline{0{,}69317}}.$$

AUFGABEN

550. Bestimme mit Hilfe der SIMPSONschen Formel

$$\int_{10}^{20} \frac{dx}{\ln x} \quad \text{(Man wähle } n = 10\text{)}$$

551. Wie groß ist der Inhalt der Fläche des Bildes 180? (Die Punkte haben die Koordinaten $A'(2;10)$; $B'(3;11)$; $C'(4;13)$; $D'(5;17)$; $E'(6;19)$; $F'(7;20)$; $G'(8;18)$.) Berechne nach SIMPSON.

552. $\displaystyle\int_0^{12} \frac{dx}{1+x} \qquad (n = 6)$

553. $\displaystyle\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \qquad (n = 4)$

554. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x} \qquad (n = 4)$

555. $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Prüfe das Ergebnis durch Integration.

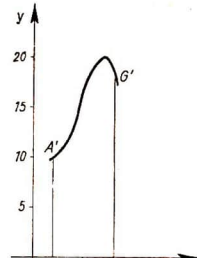


Bild 180

12.2. Die graphische Integration

Auch die graphische Integration gehört zu den Näherungsverfahren. Sie setzt jedoch im Gegensatz zur Anwendung der SIMPSONschen Formel stets die Kurve der zu integrierenden Funktion voraus. Es wird sich dabei sehr oft um empirisch gegebene Funktionen handeln, deren Funktionsgleichung $y = f(x)$ nicht bekannt ist. Da das Verfahren der graphischen Integration auf dem der graphischen Differentiation aufbaut, ist es ratsam, sich vorher nochmals zu orientieren (vgl. 3.9.).

Jede graphische Integration ist gleichbedeutend mit der Lösung des Integrals $\int f(x)\,dx = F_0(x) + C$ bzw. mit dem Wert des bestimmten Integrals $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$.

Das erste Beispiel (Bild 181), in dem der Integrand ein linearer Term ist, bietet die Möglichkeit einer einfachen anschaulichen Kontrolle des Resultates, da man weiß, daß die Integration der Funktion $y = x$ auf $y = x^2/2 + C$ führt. Zunächst teilt man sich den betrachteten Integrationsbereich durch die Punkte $P_0, P_1, \ldots$ in Teilintervalle auf, die im Falle einer linearen Funktion gleich breit sein können. Nun ersetzt man die Gerade durch den in der Abbildung eingezeichneten Treppenzug. Dabei sind die schraffierten Flächenteile paarweise einander gleich.

Die Parallelen zur x-Achse durch die Punkte $P_0, P_1, \ldots$ schneiden die y-Achse in den Punkten $\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots$ $(P_0 \equiv \overline{P}_0)$.

Die geradlinigen Verbindungen dieser Punkte mit dem Polpunkt A haben die gleiche Neigung wie die entsprechenden Tangenten an die gesuchte Kurve, da in den entstehenden Dreiecken Polpunkt—Koordinatenursprung—jeweiliger Punkt auf der y-Achse $\tan\alpha = y/1$ gilt. Der gegebene Integrand $f(x)$ stellt aber stets die Richtungsfaktoren der gesuchten Funktion dar. Diese Tangentenrichtung ändert sich in jedem Punkt. Der Ersatz von $y = f(x)$ durch den Treppenzug bedeutet Verzicht auf die sich ständig ändernde Tangentenrichtung und Ausgleich durch Intervalle mit jeweils konstanter Neigung der Tangente.

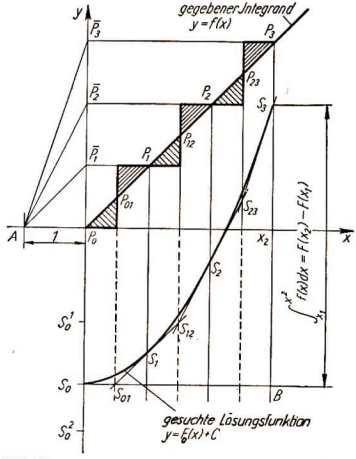


Bild 181

Die Neigung $\overline{AP_0}$, $\overline{AP_1}$, ... überträgt man durch Parallelverschiebung. Somit ist zunächst die waagerechte Tangente in S_0 zu zeichnen. S_0 muß gleichzeitig Kurvenpunkt der Kurve der gesuchten Funktion sein. Der Beginn der Kurve könnte ebenso in S_0^1 oder auch in S_0^2 liegen, da die Lösung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Zieht man durch P_{01} die Parallele zur y-Achse, so wird S_{01} ihr Schnittpunkt mit der Tangente an die gesuchte Kurve in S_0. Vom Punkt P_{01} der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ an sollte aber näherungsweise bereits die durch den Treppenzug angegebene neue Tangentenrichtung gelten. Deshalb konstruiert man durch S_{01} die Parallele zu $\overline{AP_1}$.

Aus dem gleichen Grund beginnt in S_{12} die Tangente, die parallel $\overline{AP_2}$ verläuft. Verfährt man in der gleichen Weise weiter, so ergibt sich ein Tangentenzug an die Kurve

der gesuchten Lösungs-Funktion, die durch die Punkte S_0, S_1, S_2, ... gehen muß. Somit läßt sich aber, wie auch in Bild 181 geschehen, die Kurve der Funktion $y = F_0(x) + C$ leicht einzeichnen. Im Falle des unbestimmten Integrals findet

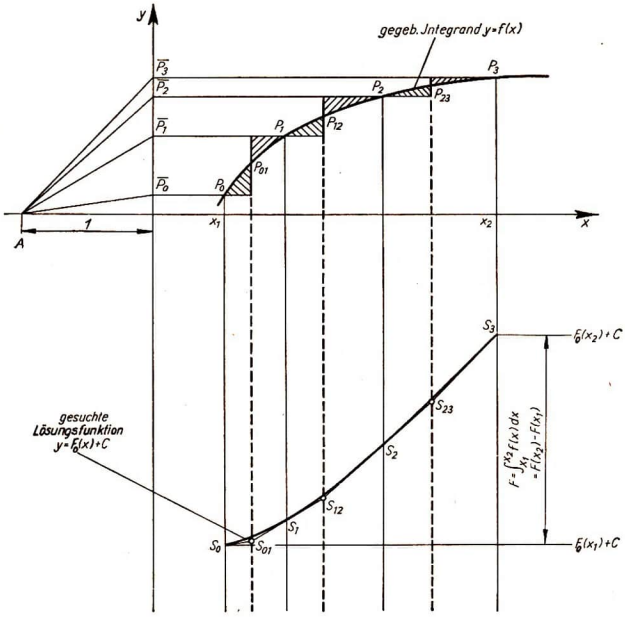


Bild 182

die Kurve seitlich keine Begrenzung. Subtrahiert man jedoch die Funktionswerte an den Stellen $x = x_1$ (in Bild 181 ist $x_1 = 0$) und $x = x_2$, so erhält man mit

$$[F_0(x_2) + C] - [F_0(x_1) + C] = F(x_2) - F(x_1)$$

den Wert des bestimmten Integrals $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{S_3 B}$.

Im Bild 182 ist das gleiche Verfahren an einer gekrümmten Kurve gezeigt. Hier wählt man an stärker gekrümmten Stellen eine kleine, an relativ gestreckten Kurvenstücken große Teilintervallbreite. Unter den Begrenzungspunkten P_0, P_1, ..., P_n dieser Teilintervalle sollen sich eventuell auftretende Extrema und Nullstellen befinden. In praktischen Fällen ist auf eine sinnvolle Wahl der Einslängen auf den Achsen und des Polabstandes zu achten (vgl. 3.9., graph. Differentiation).
Nach (52) kann man entweder bei fest vorliegenden Einslängen den Polabstand p bestimmen oder die auftretenden Größen l_x, l_y, $l_{y'}$ und p so aufeinander abstimmen, daß die Größen zeichnerisch günstig sind und somit die Ausdehnung der Integralfunktion nach oben und unten auf die Zeichenebene begrenzt bleibt.

BEISPIEL

Die Kurve der Funktion $F = f(s)$, die die Abhängigkeit einer Kraft F längs ihres Weges s angibt, sei im F, s-Diagramm gegeben (Bild 183). Durch graphische Integration ist die von der Kraft F längs des Weges von $s_1 = 0$ m bis $s_2 = 24$ m verrichtete Arbeit zu bestimmen.

Lösung: Der Verlauf der Kurve der Funktion $F = f(s)$ ist kreisförmig angenommen worden (Viertelkreisbogen, $r = 8$ cm); somit ist in diesem Fall die Möglichkeit der elementaren Nachprüfung (Inhalt des Viertelkreises mit $r = 8$ cm) gegeben.
Für die graphische Integration liegen auf der gegebenen Skizze fest:

$$l_s = \frac{1}{3}\ \text{cm}; \qquad l_F = \frac{1}{10}\ \text{cm}.$$

Unter Beachtung der Formel (52) wählt man:

$$l_W = \frac{1}{90}\ \text{cm}.$$

Damit wird

$$p = \frac{l_x \cdot l_{y'}}{l_y} = \frac{l_s \cdot l_F}{l_W} = \frac{\frac{1}{3}\ \text{cm} \cdot \frac{1}{10}\ \text{cm}}{\frac{1}{90}\ \text{cm}}$$

$$p = 3\ \text{cm}$$

Auch die Wahl $l_W = 1/150$ cm und $p = 5$ cm wäre möglich gewesen.
Man beachte bei Anwendung der Formel (52), daß dem $l_{y'}$ die Einslänge der Ordinate des gegebenen Integranden entspricht.
Die graphische Integration ist, nachdem anfangs nur das F,s-Schaubild gegeben war, in Bild 183 durchgeführt. Es ist nur der Tangentenzug gezeichnet, weil dieser für das Ablesen des Wertes des bestimmten Integrals genügt.
Als Lösung liest man ab: $W = 16{,}7 \cdot 90\ \text{kpm} = \underline{\underline{1503\ \text{kpm}}}$.

Dieser Wert folgt auch aus

$$W = Fs = \frac{8^2\pi}{4} \cdot 10\ \text{kp} \cdot 3\ \text{m} = 1507{,}20\ \text{kpm},$$

wenn man die Einslängen der Kraft- und der Wegachse berücksichtigt.

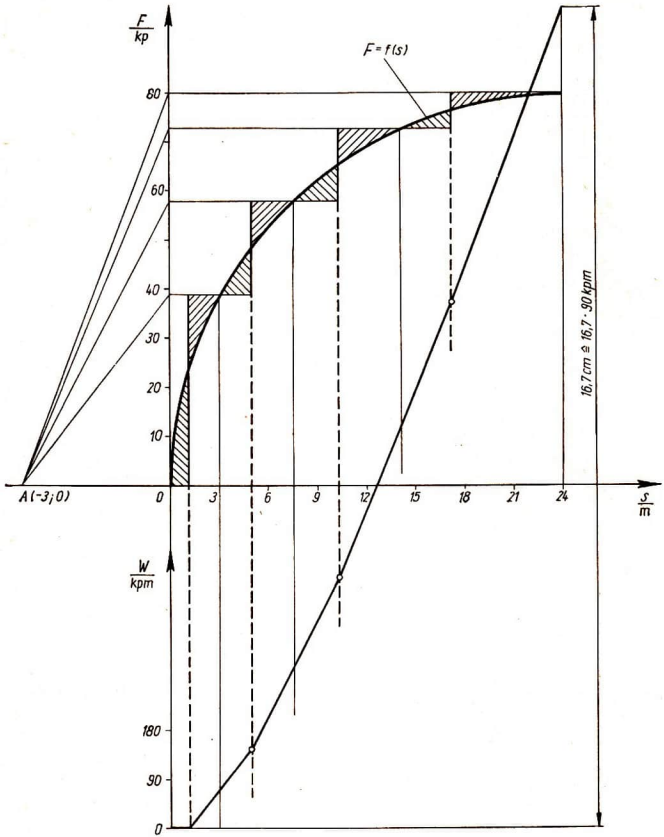

F/kp
F = f(s)
80
60
40
30
20
10
A(-3;0)
0
3
6
9
12
15
18
21
24
s/m
16,7 cm ≙ 16,7 · 30 kpm
W/kpm
180
90
0

Bild 183

12.3. Maschinelle Integration

Die Bedeutung der Integration für die Lösung vielfältiger theoretischer und praktischer Probleme führte zwangsläufig zur Entwicklung geeigneter Geräte, die häufig wiederkehrende Integrationen und insbesondere die Auswertung von graphischen Versuchsergebnissen ökonomisch gestalten. Der Nutzen dieser sogenannten Integratoren wird offensichtlich, wenn man bedenkt, daß sie die Lösung von Integralen ermöglichen, die bei Anwendung der bekannten Integrationsverfahren nicht lösbar sind. In vielen Fällen ist es gar nicht möglich, die Funktionsgleichung der vorgegebenen Kurve zu ermitteln.

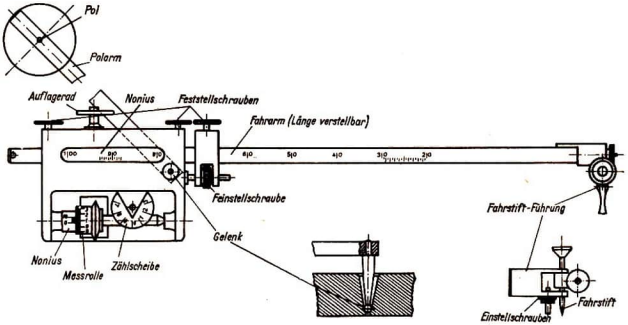
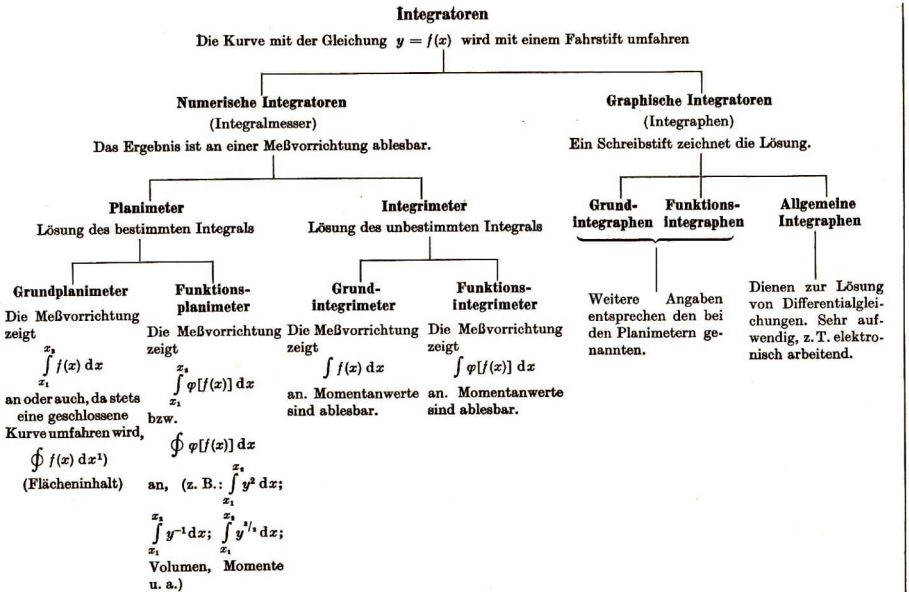


Bild 184

Das folgende Schema soll einen informatorischen Überblick über die zur Verfügung stehenden Geräte geben. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit[1]).
Neben den aufgeführten, z. T. sehr wertvollen Geräten, gibt es noch einige weniger anspruchsvolle, die schon von der Theorie des Instrumentes her notwendigerweise nur näherungsweise Integrationen gestatten. So legt man z. B. bei der Quadratur eine Glasplatte mit genauem quadratischem Netz auf die Fläche und bestimmt deren Inhalt durch Auszählen der Quadrate. Wählt man statt des quadratischen Netzes ein geeignetes Funktionspapier, so läßt sich, ebenfalls durch Auszählen der Rechtecke, der Wert des bestimmten Integrals $\int_{x_1}^{x_2} \varphi[f(x)]\,\mathrm{d}x$ ermitteln.

Die größte Bedeutung für die Praxis hat das sog. Polarplanimeter. Dieses Grundplanimeter erfand der Schweizer Amsler im Jahre 1854. Das Bild 184 zeigt das Gerät. Beim Umfahren der Fläche mit dem Fahrstift dreht sich die mit einem Nonius ver-

[1]) Einzelheiten und weiterführende Betrachtungen siehe z. B. F. A. Willers, „Mathematische Maschinen und Instrumente", Akademie-Verlag, Berlin 1951



[1]) $\oint f(x)\,dx$ vgl. 13.4.

sehene Meßrolle, während sich das Gelenk auf der Peripherie des Kreises bewegt, dessen Mittelpunkt mit dem Pol zusammenfällt. Die Größe des Flächeninhalts wird an der Meßrolle abgelesen, wobei die ganzzahligen Umdrehungen der Meßrolle auf der Zählscheibe ersichtlich sind. Die Fahrarmlänge ist verstellbar. Dadurch läßt es sich erreichen, daß in gewissen Grenzen eine volle Meßrollenumdrehung gleich dem Inhalt einer gewünschten Einheitsfläche ist. Der Fahrstift kann durch eine Glasplatte mit Ablesekreis oder Ablesekreuz mit Lupe ersetzt werden. Damit wird das Auge des Benutzers geschont und erreicht, daß sich das Auge unmittelbar über der Ablesestelle befindet und nicht, wie beim Fahrstift, seitlich versetzt ist. Damit werden Parallaxenfehler vermieden.

Bezeichnet man mit n_2 die 2. Ablesung (in der Endstellung, nach Umfahren der Fläche), mit n_1 die 1. Ablesung (in der Anfangsstellung) und mit k die Planimeterkonstante, so ist der Inhalt einer umfahrenen Fläche

$$\boxed{A = k(n_2 - n_1)} \tag{125}$$

k kann entweder aus einer beigegebenen Wertetabelle (zugeordnet der Fahrarmlänge) oder durch mehrmaliges Umfahren einer bekannten Fläche ermittelt werden.

Zusammenfassend kann über die Näherungsverfahren gesagt werden:
Die Simpsonsche Formel, die graphische Integration und das Polarplanimeter (maschinelle Integration) sind Verfahren zur Näherungsintegration. Während die Simpsonsche Formel als rechnerisches Verfahren durch eine hinreichend feine Intervallbreite jede gewünschte Genauigkeit zu erreichen gestattet, können die beiden restlichen Methoden, die beide die Kurve der Funktion $y = f(x)$, also des Integranden, voraussetzen, durch Exaktheit in der Zeichnung und Sorgfalt beim Umfahren eine Genauigkeit erzielen, die den meisten praktischen Belangen durchaus Rechnung trägt.

13. Differentialgeometrie

13.1. Formen der analytischen Darstellung von Funktionen

13.1.1. Parameterdarstellung

Neben der Darstellung von Funktionen durch die Zuordnung cartesischer Koordinaten mittels der Gleichung $y = f(x)$ hat man auch die Möglichkeit, die beiden Veränderlichen x und y einer dritten Veränderlichen t zuzuordnen. Diese Veränderliche heißt **Parameter**. Man nennt dann die beiden Gleichungen

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

die **Parameterdarstellung** der Funktion (vgl. 1.3.3.).

Der Parameter t kann verschiedene Bedeutung haben.

a) Der Parameter ist ein Winkel

Aus Bild 185 liest man für einen beliebigen Punkt des Kreises ab:

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t.$$

Durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen eliminiert man t und erhält $x^2 + y^2 = r^2$, die Kreisgleichung in cartesischer Form.

b) Der Parameter ist die Zeit

Wird ein Körper unter dem Erhebungswinkel φ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen, so führt er gleichzeitig zwei Bewegungen aus: die gleichförmig-geradlinige Bewegung in Richtung v_0 und die Fallbewegung. Hieraus ergeben sich zur Zeit t die Koordinaten eines Bahnpunktes:

$$x = v_0 t \cos \varphi; \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2.$$

Setzt man den aus der ersten Gleichung gewonnenen t-Wert in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \varphi} \sin \varphi - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = x \tan \varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2.$$

Das ist die Gleichung der transformierten, nach unten geöffneten Parabel (Bild 186).

c) *Der Parameter ist eine beliebige Veränderliche ohne geometrische oder physikalische Deutung*

In der Gleichung

$$y = 3x^2 + 2$$

kann man setzen

$$x = \sqrt{t}, \quad \text{also} \quad y = 3t + 2.$$

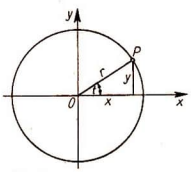


Bild 185

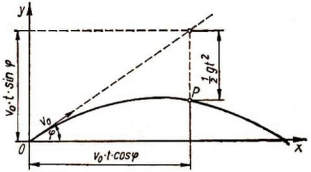


Bild 186

Dies ist *eine mögliche* Parameterdarstellung der durch die obige Gleichung gegebenen Funktion.

In der Funktionsgleichung $y = 3x^2 + 2$ könnte x alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Die Gleichung $x = \sqrt{t}$ dagegen läßt nur noch positive x-Werte einschließlich 0 zu. y nimmt infolge der Gleichung $y = 3x^2 + 2$ Werte an, die größer oder gleich 2 sind. Die Parameterdarstellung kann, wie dieses Beispiel zeigt, gegenüber der cartesischen Darstellung den Definitionsbereich einschränken.

Überblick:

$y = 3x^2 + 2$	$x = \sqrt{t}$; $y = 3t + 2$
Definitionsbereich: $(-\infty, +\infty)$	Parameterbereich: $[0, +\infty)$
Wertebereich: $[+2, \infty)$	Definitionsbereich: $[0, +\infty)$
	Wertebereich: $[+2, +\infty)$

Wenn der Parameter im Sinne wachsender Werte seinen Bereich durchläuft, durchwandern x und y ihre Bereiche in einem durch die Parameterdarstellung gegebenen Sinne. Der sich ändernde Parameter gibt somit einen *Durchlaufsinn* der die Funktion darstellenden Kurve an.

13.1.2. Darstellung in Polarkoordinaten

Die Lage eines Punktes P kann statt in cartesischen Koordinaten auch in Polarkoordinaten angegeben werden. Hierbei gibt man den stets positiv genommenen Abstand r des Punktes vom Ursprung (Pol) an, den man den **Radiusvektor** oder **Leitstrahl** nennt, und den Winkel φ, die **Abweichung** oder **Anomalie**, den dieser

Leitstrahl mit der positiven x-Achse bildet. Zwischen den Polarkoordinaten r und φ und den cartesischen Koordinaten bestehen dann die Beziehungen (Bild 187)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}} \tag{126}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}} \tag{127}$$

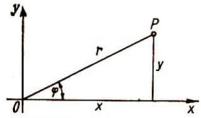


Bild 187

Bewegt sich ein Punkt längs einer durch die Gleichung $y = f(x)$ gegebenen Kurve, so muß zwischen r und φ ein funktionaler Zusammenhang bestehen, da jeder Richtung φ ein bestimmter Wert r zugeordnet ist. Es gilt also eine Gleichung $r = r(\varphi)$.
Für den Kreis um den Ursprung gilt offenbar

$$r = \text{const.} = r_0.$$

Die Darstellung der Ellipse mit den Halbachsen a und b ergibt sich aus ihrer Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

unter Beachtung von (126) zu

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}.$$

Besonders einfach werden durch Einführung von Polarkoordinaten die Gleichungen der Funktionen, welche Spiralkurven darstellen:

Archimedische Spriale: $r = a\varphi$;

Logarithmische Spirale: $r = e^{\varphi}$.

Würde man z. B. die logarithmische Spirale in cartesischen Koordinaten darstellen, so erhielte man nach (127)

$$y = x\tan\ln\sqrt{x^2 + y^2};$$

es leuchtet ein, daß die Darstellung in Polarkoordinaten weit günstiger ist.
Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ergibt sich in Polarkoordinaten zu

$$r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a^2$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

13.2. Differentiation

13.2.1. Differentiation bei Parameterdarstellung

Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichungen

$$x = x(t); \quad y = y(t).$$

Gilt es, die Steigung der Kurventangente für einen Parameterwert $t = t_0$ zu bestimmen, so ist y nach x zu differenzieren, d. h., es ist zu bilden $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Nun ist aber

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}} \tag{128}$$

Die übergesetzten Punkte sollen die Differentiation nach dem Parameter bedeuten, während y' nach wie vor die Differentiation nach x anzeigt.
Aus (128) folgt:

$$\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \mathrm{d}y = \dot{y}\,\mathrm{d}t,$$

also

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}} \tag{129}$$

Die zweite Ableitung $y'' = \dfrac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x}$ erhält man aus (129), indem man nach der Kettenregel zunächst $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ nach t differenziert und dann t nach x, also

$$y'' = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

Also gilt

$$\boxed{y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}} \tag{130}$$

BEISPIEL

Für die Kurve der Funktion mit den Gleichungen

$$x = \cos t; \quad y = \sin^2 t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

sind die extremalen Punkte zu bestimmen.

Lösung:

$$\dot{x} = -\sin t; \qquad \dot{y} = \sin 2t$$
$$\ddot{x} = -\cos t; \qquad \ddot{y} = 2\cos 2t.$$

Es ist

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin 2t}{-\sin t} = -2\cos t;\quad y' = 0 \quad \text{für} \quad t = \frac{\pi}{2};$$

$$y'' = \frac{-2\sin t\cos 2t + \sin 2t\cos t}{-\sin^3 t};\quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0.$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Die Kurve besitzt also im Punkte $P(0;1)$ ein Maximum. Durch Einführung von cartesischen Koordinaten erkennt man sofort, daß eine Parabel mit P als Scheitel vorliegt.

$$x^2 + y = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$y = 1 - x^2.$$

Man beachte, daß in dieser Schreibweise x alle positiven und negativen Werte einschließlich der Null annehmen könnte; die gegebene Parameterdarstellung aber läßt nur den Definitionsbereich $[-1, +1]$ zu, und der Wertevorrat enthält nur positive Werte und Null. Die Parameterdarstellung ergibt also den im ersten und zweiten Quadranten liegenden Parabelbogen. Der Durchlaufsinn dieses Bogens führt von $P_1(1;0)$ über P nach $P_2(-1;0)$; die Kurve wird nämlich, wenn t das Intervall von 0 bis π durchläuft, im Sinne fallender x-Werte abgelaufen.

13.2.2. Differentiation bei Darstellung in Polarkoordinaten

Liegt eine Funktion durch die Gleichung $r = r(\varphi)$ vor, so kann man ohne weiteres zu einer Parameterdarstellung mit dem Parameter φ übergehen. Nach (126) kann man schreiben:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi = f_1(\varphi)$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi = f_2(\varphi).$$

Der Differentialquotient ergibt sich zu

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi}} \qquad (131)$$

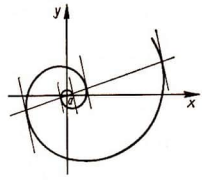


Bild 188

Für die logarithmische Spirale z. B. gilt die Parameterdarstellung

$$x = e^{\varphi}\cos\varphi; \quad y = e^{\varphi}\sin\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi}{e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{1 + \tan\varphi}{1 - \tan\varphi}.$$

Das Ergebnis besagt, daß der Tangentenanstieg nur von $\tan\varphi$, also nicht von der Leitstrahllänge, abhängt. Ein beliebiger Leitstrahl schneidet daher alle Bogen der Spirale unter gleichem Winkel (Bild 188).

BEISPIEL

Es soll der Kurvenverlauf der *Lemniskate* diskutiert werden.

Lösung: Die Lemniskate hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0;$$

in Polarkoordinaten geht die Gleichung nach (126) über in

$$r^2 - a^2 \cos 2\varphi = 0$$

oder

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Also ergibt sich die Parameterdarstellung

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi,$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$\dot{x} = a\left(\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\right) = -a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$\dot{y} = a\left(\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\right) = a\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Somit ist

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos 3\varphi}{-\sin 3\varphi} = -\cot 3\varphi.$$

Da sich wegen $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ nur in den Winkelbereichen $-45° \leqq \varphi \leqq +45°$ und $135° \leqq \varphi \leqq 225°$ reelle Werte für r ergeben, kann die Diskussion der Kurve auf diese Bereiche beschränkt werden. Sie soll in Form einer Tabelle durchgeführt werden, indem man φ die Winkelbereiche durchlaufen läßt und die zu den Winkeln gehörigen r-Werte, dann die cartesischen Koordinaten der Kurvenpunkte und schließlich die Tangentenanstiege in diesen Punkten ermittelt. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

φ	$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$	P: $x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$	$y' = -\cot 3\varphi$
0°	a	P_1: $a; 0$	∞
30°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	P_3: $\frac{1}{4}\sqrt{6}; \frac{1}{4}\sqrt{2}$	0
45°	0	0; 0	1
135°	0	0; 0	−1
150°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	P_4: $-\frac{1}{4}\sqrt{6}; \frac{1}{4}\sqrt{2}$	0
180°	a	P_2: $-a; 0$	∞
210°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	P_5: $-\frac{1}{4}\sqrt{6}; -\frac{1}{4}\sqrt{2}$	0
225°	0	0; 0	1
315°	0	0; 0	−1
330°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	P_6: $\frac{1}{4}\sqrt{6}; -\frac{1}{4}\sqrt{2}$	0
360°	a	P_1: $a; 0$	∞

Nach dieser Tabelle kann die Lemniskate in ihrem prinzipiellen Verlauf gezeichnet werden (Bild 189).

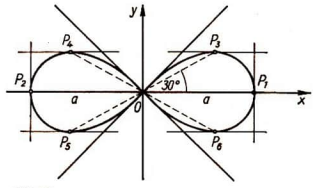


Bild 189

AUFGABEN

556. Von der durch die Gleichungen

$$x = t^2 + 2t; \quad y = t^3 - 2t - 1$$

gegebenen Kurve sind zu berechnen:

a) Horizontal- und Vertikaltangenten,

b) die Gleichung der Kurve in cartesischen Koordinaten,

c) Parameterbereich; Definitionsbereich und Wertevorrat für die Parameterdarstellung.

557. Welche Kurve wird durch die Parameterdarstellung gegeben

a) $x = \sqrt{t}$; $\quad y = \sqrt{t-1}$,

b) $x = \dfrac{t}{1-t}$; $\quad y = \dfrac{1}{t}$?

Man untersuche die Bereiche für cartesische und für Parameterdarstellung.

558. Ein Kreis vom Radius r rollt innen auf einem Kreis vom Radius $R = 2r$ ab. Auf der Fläche des rollenden Kreises befindet sich der Punkt P im Abstand a von dessen Mittelpunkt. Man zeige, daß P eine Ellipse mit den Halbachsen $(r + a)$ und $(r - a)$ beschreibt.
Man zeige weiterhin, daß für $a = r$ der Punkt P periodisch den Durchmesser des Kreises mit dem Radius R durchläuft (Umsetzung einer Kreisbewegung in eine geradlinige Bewegung, CARDANO, 1570).

559. In einem Getriebe bewege sich eine Stange AB von der Länge s so, daß die Endpunkte A und B in je einer geraden Schiene gleiten, die aufeinander senkrecht stehen. Welche Bahn beschreibt ein Punkt P der Stange $(\overline{AP} = a)$?

560. Man rechne in cartesische Koordinaten um

$$x = \cosh t; \quad y = \sinh t.$$

561. Man untersuche mittels der ersten Ableitung das Verhalten der drei Zykloiden an der Stelle $t = 0$.

562. Man bilde y' und y'' für die Funktionen mit den Gleichungen

a) $x = \ln t$; $\quad y = t^2$,

b) $x = \sin^2 t$; $\quad y = \cos^2 t$.

563. Die Gleichung der *Astroide* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ist in einer Parameterdarstellung anzugeben. Mit dieser Darstellung untersuche man den Kurvenverlauf und den Durchlaufsinn der Kurve für wachsende Parameterwerte.

564. Man gebe die durch die Gleichungen $x = a$ bzw. $y = a$ gegebenen Kurven in Polarkoordinaten an.

565. Die in Parameterdarstellung gegebene *Strophoide* soll in cartesische und in Polarkoordinaten umgerechnet werden:

$$x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}; \qquad y = \frac{a\,t\,(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Man entwerfe ein Bild der Kurve unter Verwendung von Polarkoordinaten. Man untersuche den Durchlaufsinn der Kurve bei den verschiedenen Darstellungen und begründe, warum bei Darstellung in cartesischer Form nicht die vollständige Strophoide erfaßt wird.

566. Man schreibe in Polarkoordinaten um:

a) $\arctan\frac{y}{x} = \frac{2xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$;

b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (*Cartesisches Blatt*).

567. Für die Kurve mit der Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 = 4xy$$

bestimme man die zu den Achsen parallelen Tangenten mit ihren Berührungspunkten. Welche Punkte der Kurve haben vom Ursprung maximalen Abstand? Welche Richtung hat die Kurve in diesen Punkten? (Man verwende Polarkoordinaten.)

13.3. Die Bogenlänge

Um die Länge eines Bogenstückes einer Kurve berechnen zu können, ist es notwendig, diese Bogenlänge zunächst als eine Summe von geradlinigen Streckenelementen näherungsweise darzustellen, um dann durch einen Grenzübergang, der die Streckenstücke unendlich klein werden läßt, zur eigentlichen Bogenlänge zu gelangen.
Man nähert zunächst ein Bogenstück, das man sich schon beliebig klein denken kann, durch das Stück Tangente an, die man im Anfangspunkt P_0 (Bild 190) an das Kurvenelement legt. Aus dem Bilde kann dann unter Beachtung der Bedeutung der Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ die Beziehung abgelesen werden:

$$(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = (\mathrm{d}s)^2.$$

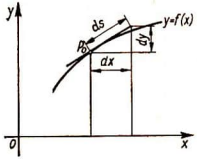


Bild 190

Hierfür kann man auch schreiben:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2$$

oder [vgl. (94)]

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(I)}$$

Die Wurzel ist positiv, während $\mathrm{d}x$ positiv oder negativ sein kann. Nun ist die Summation über die *Bogendifferentiale* durchzuführen. Die erhaltene Summe geht beim Grenzübergang in das Integral über die Bogendifferentiale über, wobei dieses Integral längs eines Kurvenstückes von x_1 bis x_2 zu bilden ist. Man erhält somit zwischen den Punkten P_1 und P_2 einer Kurve [vgl. (95a)] für die

Bogenlänge (cartesisch)

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(II)}$$

Unter der Wurzel erscheint $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, d. h., die Ableitung der vorgegebenen Funktion.
Liegt die Funktion in Parameterdarstellung vor, so gelten die Gleichungen

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t.$$

Weiterhin gilt

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{und} \quad y'^2 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}$$

Die Formel für die Bogenlänge geht jetzt über in

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}\,\dot{x}\,\mathrm{d}t$$

oder

Bogenlänge (Parameterdarstellung)

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t} \tag{132a}$$

Nun sei die Funktion in Polarkoordinaten gegeben, also $r = r(\varphi)$. Zwischen den cartesischen Koordinaten x, y und den Polarkoordinaten r, φ bestehen die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi.$$

Unter Beachtung der Produktregel gilt für die Differentiale

$$\mathrm{d}x = (\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}y = (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Der übergesetzte Punkt bedeutet die Differentiation nach dem Parameter φ. Aus der Beziehung

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

folgt:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

oder

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Durch Integration erhält man

Bogenlänge (Polarkoordinaten)

$$\boxed{s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi} \tag{132b}$$

BEISPIELE

1. Berechnung des Kreisumfanges bei gegebenem Radius r_0.

Lösung:

a) *cartesisch*: Im ersten Quadranten gilt für den Kreis die Funktionsgleichung

$$y = \sqrt{r_0^2 - x^2},$$

also ist

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r_0^2 - x^2}}.$$

Somit gilt nach (95a) für den Viertelkreisbogen:

$$s = \int_0^{r_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r_0^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = r_0 \int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r_0^2 - x^2}} =$$

$$= r_0 \arcsin \frac{x}{r_0}\Big|_0^{r_0} = r_0 (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \underline{\underline{r_0 \frac{\pi}{2}}}.$$

Der Vollkreis hat somit den Umfang $2\pi r_0$.

b) *in Parameterdarstellung*:

Für den Vollkreis gilt

$$x = r_0 \cos t; \qquad y = r_0 \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi);$$
$$\dot{x} = -r_0 \sin t; \qquad \dot{y} = r_0 \cos t.$$

Also folgt aus (132a) für die Bogenlänge

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_0^2 \sin^2 t + r_0^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = r_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \underline{\underline{2\pi r_0}}.$$

c) *in Polarkoordinaten*:

Die Darstellung des Vollkreises heißt jetzt:

$$r = r_0,$$
$$\dot{r} = 0.$$

Nach (132b) gilt

$$s = \int_0^{2\pi} r_0 \mathrm{d}\varphi = \underline{\underline{2\pi r_0}}.$$

2. Berechnung der Bogenlänge eines Bogens der Zykloide mit den Gleichungen

$$x = a\,(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

a ist der Radius des längs der x-Achse rollenden Kreises, der mit einem Umfangspunkt den Zykloidenbogen beschreibt.

Lösung: Es ist

$$\dot{x} = a(1 - \cos t),$$
$$\dot{y} = a \sin t.$$

Nach (132a) folgt für die Bogenlänge:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, \mathrm{d}t =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t, \text{ weil } 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \text{ ist.}$$

Die Integration ergibt

$$s = -2a \cdot 2 \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = \underline{\underline{8a}}.$$

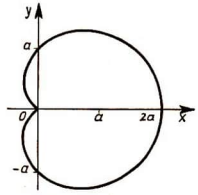


Bild 191

3. Berechnung der Bogenlänge der logarithmischen Spirale

$$r = r_0 e^{a\varphi}$$

zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2.

Lösung: Es ist

$$\dot{r} = a\, r_0 e^{a\varphi};$$

also ergibt sich nach (132b):

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r_0^2 e^{2a\varphi} + a^2 r_0^2 e^{2a\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi = r_0 \sqrt{1 + a^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{a\varphi}\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= r_0 \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (e^{a\varphi_2} - e^{a\varphi_1}),$$

oder, da

$$r_1 = r_0 e^{a\varphi_1} \quad \text{und} \quad r_2 = r_0 e^{a\varphi_2} \text{ ist,}$$

$$s = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (r_2 - r_1) = \underline{\underline{\text{const.}\, (r_2 - r_1)}}.$$

Die Bogenlänge der logarithmischen Spirale ist also proportional der Differenz der Radiusvektoren, welche sie einschließen.

4. Berechnung der Bogenlänge der *Kardioide* mit der Gleichung $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Lösung: Mittels Wertetabelle findet man den im Bild 191 dargestellten Kurvenverlauf. Die Kurve ist symmetrisch in bezug auf die x-Achse. Für das Bogenlängendifferential ergibt sich mit $\dot{r} = -a \sin\varphi$:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, \mathrm{d}\varphi = a \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= a\sqrt{2}\, \sqrt{1 + \cos\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2}\, \mathrm{d}\varphi,$$

weil $1 + \cos\varphi = 2\cos^2 \varphi/2$ ist.

Für $180° \leqq \varphi \leqq 360°$ wird ds negativ; also würden sich bei Integration über den Vollwinkel die summierten Bogenlängendifferentiale aufheben und Null ergeben. Man integriert daher nur von 0° bis 180°, und aus der Symmetrie der Kurve folgt für die Bogenlänge:

$$s = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

AUFGABEN

568. Man berechne die Länge der Kettenlinie, welche die Gleichung hat

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{für} \quad -a \leqq x \leqq a.$$

569. Man berechne die Bogenlänge der Kreisevolvente, die sich durch Abwicklung eines Halbkreises ergibt:

$$x = r(\cos t + t\sin t); \qquad y = r(\sin t - t\cos t).$$

570. Man berechne die Bogenlänge der Astroide

$$x = a\cos^3 t; \qquad y = a\sin^3 t.$$

571. Man berechne die Länge der Schleife

$$y^2 = \frac{1}{9}x(3-x)^2.$$

572. Welche Weglänge durchfällt ein Körper, der mit der Geschwindigkeit v_0 horizontal abgeworfen wird und auf den um die Höhe H tiefer gelegenen Boden fällt?

573. Welche Länge hat der im vierten Quadranten liegende Bogen der Kurve mit der Gleichung

$$r = 4(2\cos\varphi - \sin\varphi)?$$

Um welche Kurve handelt es sich hier?

574. Für $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ berechne man die Bogenlänge der durch die Gleichung $r = 2\varphi$ gegebenen Spirale.

13.4. Die Sektorenformeln

Es sei eine Funktion in *Polarkoordinaten* gegeben. Will man den Sektor berechnen, den der Radiusvektor überstreicht, wenn sich das Argument von φ_1 nach φ_2 ändert, so zerlegt man vorerst den Sektor in Flächendifferentiale, die jeweils den Winkel $d\varphi$ (Bild 192) enthalten. Ein solches Flächendifferential kann bei hinreichender Kleinheit als ein Kreissektor angesehen werden, der den Bogen $r\,d\varphi$ hat. Seine Fläche ist:

$$dA = \frac{1}{2}r\cdot r\,d\varphi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Also ist die Gesamtfläche

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi} \qquad (133a)$$

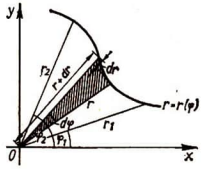


Bild 192

Nun liege die Funktion in *Parameterdarstellung* vor. In diesem Falle ist

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad \tan\varphi = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Die letzte Beziehung zeigt, daß φ abhängig von t ist; sie kann also auf beiden Seiten nach t differenziert werden. Es ergibt sich (Kettenregel)

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2}.$$

Da $x = r\cos\varphi$ ist, folgt weiter

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2\cos^2\varphi}$$

oder

$$r^2\,\mathrm{d}\varphi = (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t.$$

Das Flächendifferential eines Sektors ist somit in Parameterdarstellung

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t$$

und der Sektor selbst:

Leibnizsche Sektorenformel

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t \tag{133b}$$

Wenn t_1 einem Winkel φ_1 und t_2 einem Winkel $\varphi_2 (\varphi_2 > \varphi_1)$ entspricht, geht man bei wachsendem t von t_1 nach t_2 entlang der Kurve so, daß die Sektorfläche zur Linken liegt (Bild 193). Sie ergibt sich positiv, weil man im Sinne wachsender φ-Werte $(\mathrm{d}\varphi > 0)$ läuft. Also muß in diesem Falle auch das Integral der Formel (133b) positiv sein. Liegt entsprechend die Fläche zur Rechten, wenn man die Kurve abwandert, so muß hierbei im Sinne abnehmender φ-Werte $(\mathrm{d}\varphi < 0)$ die Fläche negativ werden. Umwandert man nun eine *geschlossene Kurve*, so liegt, wie Bild 194

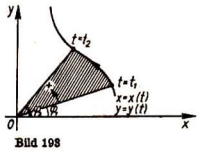


Bild 193

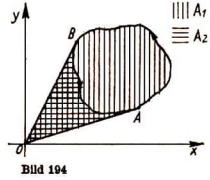


Bild 194

zeigt, die Fläche A_1 (vertikal schraffiert) zur Linken und A_2 zur Rechten; es wird also das Integral über die geschlossene Kurve

$$\frac{1}{2}\oint (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt = A_1 - A_2.$$

Man erhält somit die von der Kurve umschlossene Fläche.

BEISPIELE

1. Man berechne die von der bereits diskutierten Lemniskate (Bild 189) umschlossene Fläche.

   Lösung: Die Lemniskate hat die Gleichung $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Die umschlossene Fläche ist dann unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Kurve nach (133a):

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{a^2}}.$$

   Man kann also die vier Viertelflächen einer Lemniskate in ein Quadrat umformen.

2. Man berechne die Fläche, die der Radiusvektor der in Parameterdarstellung gegebenen Einshyperbel überstreicht.

   Lösung: Die Hyperbel hat die Gleichung (vgl. Aufg. 560):

$$x = \cosh t; \qquad y = \sinh t.$$

   Es ist

$$\dot{x} = \sinh t; \qquad \dot{y} = \cosh t.$$

   Also gilt nach (133b):

$$A = \frac{1}{2}\int_0^t (\cosh^2 t - \sinh^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t dt = \underline{\underline{\frac{t}{2}}}.$$

   Das Ergebnis läßt die geometrische Deutung des Parameters t als Fläche erkennen (Bild 195).

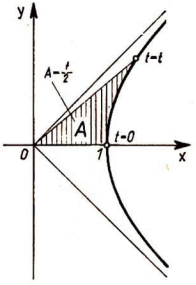


Bild 195

3. Man berechne die Fläche der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

   Lösung: Es gilt

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t$$
$$\dot{x} = -a\sin t; \qquad \dot{y} = b\cos t.$$

   Also ist nach (133b):

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt = \underline{\underline{ab\pi}}.$$

   Man vergleiche an diesem Beispiel den eleganten Rechenweg mit dem, der sich unter Anwendung cartesischer Koordinaten ergeben würde.

4. Man berechne die von der Kardioide umschlossene Fläche (Bild 191).

Lösung: Mit der Gleichung

$$r = a\,(1 + \cos\varphi)$$

ergibt sich nach (133a):

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\,(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3}{2}\,\pi a^2.$$

Die LEIBNIZsche Sektorenformel stellt, wie man sagt, ein *Linienintegral* dar, weil längs einer (geschlossenen) Linie integriert wird. Da Flächen auch, wie später noch gezeigt wird, mit zweifachen Integralen berechnet werden können, ergibt sich somit unter Einsatz der Sektorenformel die Möglichkeit, zweifache Integrale auf einfache zurückzuführen. Hiervon wird in der Theorie der Kraft- und Strömungsfelder Gebrauch gemacht.

AUFGABEN

575. Man berechne die Fläche, die unter einem Zykloidenbogen liegt und vergleiche sie mit der Fläche des Kreises, durch den die Zykloide erzeugt wird.

576. Man berechne die von der dreischleifigen Hypozykloide umschlossene Fläche

$$x = 2a\,(\cos t + \cos 2t)$$
$$y = 2a\,(\sin t - \sin 2t).$$

577. Man berechne die von der Schleifenlinie mit den Gleichungen

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin 2t$$

umschlossene Fläche.

578. Man berechne die Fläche der Exzenterscheibe, die von dem Bogen der Spirale mit der Gleichung $r = a\varphi$ und von den zu den Argumenten $\pi/4$, $7\pi/4$ gehörigen Leitstrahlen begrenzt wird.

579. Man berechne die im zweiten Quadranten liegende Fläche, die von den Koordinatenachsen und von der Kurve mit der Gleichung $r = 1 - \cos\varphi$ begrenzt wird. Welcher Leitstrahl halbiert diese Fläche?

13.5. Berechnung von Drehkörpern

13.5.1. Kubatur (Volumenberechnung)

Drehkörper entstehen, wenn eine Kurve um eine Achse rotiert; die Kurve selbst beschreibt hierbei den Mantel des Körpers, der seinerseits das Volumen des Körpers einschließt. Die Berechnung dieses Volumens aus der gegebenen Kurve gelingt, wenn die x-Achse Drehachse ist, indem man den Körper in Kreisscheiben senkrecht zur x-Achse zerlegt. Die beliebig klein angenommene Höhe jeder Scheibe sei $\mathrm{d}x$, ihr Radius

ist y, wenn die Kurvengleichung $y = f(x)$ ist. Dann gilt für ein Volumenelement:

$$\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x.$$

Das gesamte Volumen ergibt sich nach Integration [vgl. (92a) und (92b)]:

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \mathrm{d}x \qquad \text{(I)}$$

In analoger Weise folgt bei Rotation um die y-Achse:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \mathrm{d}y \qquad \text{(II)}$$

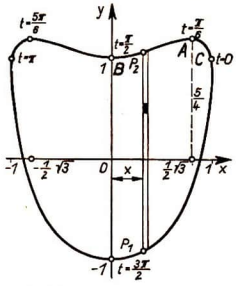


Bild 196

Diese beiden Beziehungen können ohne weiteres auf die Fälle übertragen werden, in denen die Gleichungen der Kurven in Parameterdarstellung bzw. in Polarkoordinaten gegeben sind.

Für die Parameterdarstellung gilt:

$$\boxed{V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \, \dot{x} \mathrm{d}t; \qquad V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 \, \dot{y} \mathrm{d}t} \qquad \text{(134a)}$$

Bei gegebener Darstellung in Polarkoordinaten sind für die Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ die bereits hergeleiteten Formeln (vgl. 13.3.) einzusetzen. Es folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2\varphi \, (\dot{r} \cos\varphi - r \sin\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \\ V_y &= \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2\varphi \, (\dot{r} \sin\varphi + r \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned}} \qquad \text{(134b)}$$

BEISPIELE

1. Die durch die Gleichungen

$$x = \cos t; \qquad y = \cos^2 t + \sin t$$

gegebene Kurve rotiere um die y-Achse. Man berechne das Volumen der entstehenden „Birne".

Lösung: Mittels Wertetabelle ergibt sich die im Bild 196 dargestellte Kurve.

Der Drehkörper wird bereits von der rechten Kurvenhälfte beschrieben. Die Integration ist also von $t = 3\pi/2$ bis $t = \pi/2$ durchzuführen. Da $\dot{y} = \cos t - 2 \sin t \cos t$ ist, folgt

aus (134a)

$$V_y = \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,(\cos t - 2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \pi \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t - 2\cos^2 t \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Es ist:

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{t=\frac{3\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}(\sin t) =$$

$$= \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(Der Rechenvorgang entspricht der Substitution $z = \sin t$).

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 t \sin t\,\mathrm{d}t = -2\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{3\pi}{2}} \cos^3 t\,\mathrm{d}(\cos t) = -\left(\frac{1}{2}\cos^4 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 0$$

Also folgt

$$\underline{\underline{V_y = \frac{4\pi}{3}}}$$

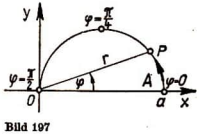


Bild 197

Es ist zu beachten, daß der von A nach B laufende Bogen negative Werte von $\mathrm{d}y$ ergibt, so daß sich bei der Integration das zum Bogen von C bis A gehörende, zu große Drehvolumen von selbst um das zum Bogen AB gehörende Drehvolumen vermindert.

2. Die Kurve mit der Gleichung $r = a\cos\varphi$ rotiere um die x-Achse für $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$. Welches Drehvolumen entsteht?

Lösung: Im Bild 197 ist die Kurve dargestellt. Da $\dot{r} = -a\sin\varphi$ ist, gilt nach (134b):

$$V_x = \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,(-\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi a^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^3\varphi \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi a^3 \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} (1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi) =$$

$$= 2\pi a^3 \left[\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^6\varphi}{6}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\pi a^3\left(-\frac{1}{12}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{6}\pi a^3}}.$$

Daß sich das Volumen negativ ergibt, erklärt sich aus dem für die Kurve gewählten Durchlaufsinn von A nach 0 ($\mathrm{d}x < 0$). Übrigens ist die Kurve ein transformierter Halbkreis, wovon man sich durch Umrechnen in cartesische Koordinaten leicht überzeugt. Es wurde also das Kugelvolumen für den Durchmesser a berechnet.

13.5.2. Mantelflächen

Die durch die Gleichung $y = f(x)$ gegebene Kurve rotiere um die x-Achse. Hierbei erzeugt ein Bogenlängendifferential ein Differential der Mantelfläche, welches die Form eines Reifens hat. Seine Fläche beträgt

$$\mathrm{d}A_{Mx} = 2\pi y\,\mathrm{d}s = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die gesamte Fläche ergibt sich durch Integration (vgl. (96a) und (96b)) zu

$$A_{Mx} = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x. \tag{I}$$

Bei Rotation um die y-Achse folgt entsprechend mit $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y$:

$$A_{My} = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + x'^2}\,\mathrm{d}y. \tag{II}$$

Die Übertragung dieser Formeln auf den Fall der Parameterdarstellung ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{Mx} &= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \\ A_{My} &= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} \tag{135a}$$

Bei Darstellung in Polarkoordinaten folgt aus (I) und (II):

$$\boxed{\begin{aligned} A_{Mx} &= 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi \\ A_{My} &= 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}} \tag{135b}$$

BEISPIELE

1. Man berechne die Oberfläche des Rotationsellipsoides mit den Achsen $2a$ und $2b$. $2a$ sei die Drehachse. Die Ellipse hat die Gleichungen

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t.$$

Lösung: Nach (135a) folgt unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft der Ellipse

$$\begin{aligned} A_{Mx} &= 2\cdot 2\pi\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\pi b\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t) \end{aligned}$$

Mit $u = \cos t$ folgt

$$A_{Mx} = 4\pi b \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - u^2}\, \mathrm{d}u.$$

Das Integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x \text{ ergibt (vgl. 9.1.5.):}$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

also ist

$$A_{Mx} = 4\pi b \sqrt{a^2 - b^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - 1} + \frac{a^2}{2(a^2 - b^2)} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) =$$

$$= 2\pi\left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right).$$

2. Welche Fläche beschreibt der im ersten Quadranten liegende Bogen $(0 \leqq \varphi \leqq \pi/2)$ der logarithmischen Spirale mit der Gleichung $r = \mathrm{e}^{\varphi}$ bei Drehung um die y-Achse?

Lösung: Nach (135b) gilt:

$$A_{My} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\varphi} \cos\varphi \sqrt{\mathrm{e}^{2\varphi} + \mathrm{e}^{2\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\varphi} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi.$$

Durch partielle Integration findet man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\varphi} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2\varphi}\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2} - 1\right) = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2).$$

Also ist

$$A_{My} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2).$$

AUFGABEN

580. Man leite die Formel für das Kugelvolumen her, falls der erzeugende Kreis in Parameterdarstellung bzw. in Polarkoordinaten gegeben ist (Mittelpunkt im Ursprung).

581. Man berechne das Volumen des Rotationsellipsoides, wenn die Ellipse in Parameterdarstellung vorliegt (V_x und V_y).

582. Man berechne die Oberfläche der Kugel, falls der erzeugende Kreis in Parameterdarstellung bzw. in Polarkoordinaten gegeben ist.

583. Welche Oberfläche beschreibt die im ersten und vierten Quadranten liegende Schleifenkurve mit der Gleichung $r = 1 - \varphi^2$ bei Drehung um die x-Achse?

584. Ein „Stromlinienkörper" entstehe durch Drehung der Kurve mit den Gleichungen

$$x = t^2; \qquad y = \frac{1}{3}t(3 - t^2)$$

Man berechne die Oberfläche des Körpers.

13.6. Krümmung ebener Kurven

13.6.1. Definition der Krümmung

Wandert man auf einer Kurve im Sinne wachsender x-Werte um eine beliebig kleine Bogenlänge Δs, so ändert sich hierbei der Richtungswinkel der Tangente um $\Delta\alpha$ (Bild 198). Je größer diese Änderung ist, um so größer ist dann auch die Krümmung der Kurve. Der Quotient $\Delta\alpha/\Delta s$ kann also als Maß der **mittleren Krümmung** angesehen werden. Durch den Grenzübergang

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

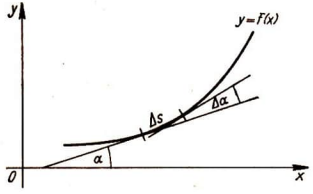


Bild 198

erhält man die Krümmung der Kurve in einem Punkte:

$$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}. \tag{I}$$

Nun ist $\tan\alpha = y'$, also $\alpha = \arctan y'$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+y'^2}\,y'' \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

Andererseits ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x;$$

also folgt aus (I) für die

Krümmung der Kurve in einem Punkt

$$\boxed{k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{136}$$

Die so definierte Krümmung hat ein Vorzeichen. Bei einer „Linkskurve" nehmen die α-Werte zu ($\Delta\alpha > 0$), bei einer „Rechtskurve" nehmen sie ab ($\Delta\alpha < 0$) (Bild 199). Es gilt demnach

Rechtskrümmung (konkav): k *negativ*

Linkskrümmung (konvex): k *positiv*.

Da der Nenner von (136) niemals Null werden kann, sondern stets positiv ist, wird die Krümmung nur für $y'' = 0$ auch Null (vgl. 4.3.), d. h.:

In einem Wendepunkt ist die Krümmung einer Kurve gleich Null.

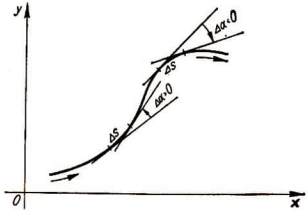


Bild 199

Für die Sinuskurve z. B. ergibt sich nach (136):

$$k = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x^3}}.$$

Im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ ist somit $k < 0$, weil der Zähler negativ ist; es liegt auch in der Tat eine Rechtskrümmung vor. Im Maximum ($x = \pi/2$) hat die Krümmung den Wert

$$k = -1.$$

Im Minimum ($x = 3\pi/2$) ist $k = 1$; dort besitzt die Kurve eine Linkskrümmung. Für $x = \pi$ ist $k = 0$ (Wendepunkt!).
Ein besonderer Punkt einer Kurve ist ein solcher, in welchem die Kurve maximale oder minimale Krümmung besitzt. Diese *Punkte extremaler Krümmung* nennt man **Scheitel** der Kurve.
Als Beispiel hierzu soll der Scheitel der Exponentialkurve ($y = e^x$) ermittelt werden. Es ist

$$k = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}} > 0 \qquad \text{(Linkskrümmung)}$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{e^x (1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} e^x 2 (1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3} =$$

$$= \frac{e^x (1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}} [1 + e^{2x} - 3e^{2x}]}{(1 + e^{2x})^3} = 0.$$

Der Bruch kann nur beim Verschwinden des letzten Zählerfaktors gleich Null werden; also folgt

$$e^{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad 2x = -\ln 2 \qquad x_s = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

Aus $y = e^x$ ergibt sich

$$y_s = e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Der Scheitel hat die Koordinaten

$$\left(-\frac{1}{2}\ln 2;\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Liegt die Funktion in Parameterdarstellung vor, so folgt wegen (129) und (130) aus (136):

$$\boxed{k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (136a)$$

Bei Polarkoordinaten empfiehlt es sich, die Funktion mit φ als Parameter darzustellen $[x = r(\varphi)\cos\varphi;\ y = r(\varphi)\sin\varphi]$ und dann (136a) anzuwenden. Für die Archimedische Spirale $(r = a\varphi)$ ergibt sich zum Beispiel:

$$x = a\varphi\cos\varphi; \quad \dot{x} = a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) \quad \ddot{x} = a(-2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$
$$y = a\varphi\sin\varphi; \quad \dot{y} = a(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi) \quad \ddot{y} = a(2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi).$$

Also ist nach (136a)

$$k = \frac{2 + \varphi^2}{a(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \qquad \text{(Linkskrümmung).}$$

13.6.2. Krümmungskreis; Evolute und Evolvente

Die Krümmung eines Kreises ergibt sich aus

$$x = r\cos t; \qquad y = r\sin t$$
$$\dot{x} = -r\sin t; \qquad \dot{y} = r\cos t$$
$$\ddot{x} = -r\cos t; \qquad \ddot{y} = -r\sin t$$

zu

$$k = \frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} > 0.$$

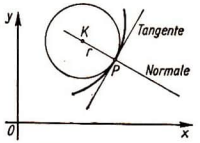


Bild 200

Dieses Ergebnis kann verwendet werden, um in einem Punkt P einer Kurve einen **Krümmungskreis** anzulegen, der folgende Bedingungen in P erfüllt (Bild 200):

1. Kurve und Kreis berühren einander in P mit gemeinsamer Tangente ($y'_{\text{Kreis}} = y'_{\text{Kurve}}$);
2. Kurve und Kreis haben in P die gleiche Krümmung, also gilt nach (136): $y''_{\text{Kreis}} = y''_{\text{Kurve}}$ und $|k| = 1/r$.

Dieser Kreis berührt, wie man sagt, die Kurve in zweiter Ordnung; sein Mittelpunkt K heißt **Krümmungsmittelpunkt**, sein Radius r **Krümmungsradius**. Der Krümmungsmittelpunkt muß auf der Normalen der Kurve im Punkte P liegen.

Für die Sinuskurve z. B. hat der Gipfelpunkt P (Bild 201), zu dem $k = -1$ berechnet wurde, einen Krümmungsradius $r = 1/|k| = 1$, also liegt der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der x-Achse. Das negative Vorzeichen von k bedeutet, daß der Kreis beim Durchlaufen der Kurve in Richtung wachsender Abszissen zur Rechten liegt.

Da zu jedem Punkt P einer Kurve ein Krümmungsmittelpunkt K gehört, ergibt die Gesamtheit aller Krümmungsmittelpunkte eine Kurve, die **Evolute** genannt wird, während die ursprüngliche Kurve **Evolvente** heißt. Es gilt, den Zusammenhang zwischen beiden Kurven herzustellen.

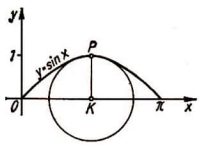


Bild 201

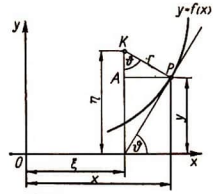


Bild 202

Im Bild 202 ist für eine Evolvente mit der Gleichung $y = f(x)$ an einem Punkt P der Krümmungskreis mit dem Mittelpunkt $K(\xi; \eta)$ gelegt. Aus dem Dreieck KAP ergibt sich:

$$x - \xi = r \sin \vartheta \tag{I}$$

und

$$\eta - y = r \cos \vartheta. \tag{II}$$

Nun ist aber

$$\sin \vartheta = \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}} \quad \text{und} \quad \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}}.$$

Mit $\tan \vartheta = y'$ gehen (I) und (II) über in

$$\xi = x - r \sin \vartheta = x - \frac{1}{|k|} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''};$$

$$\eta = y + r \cos \vartheta = y + \frac{1}{|k|} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = y + \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Die **Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes** sind also

$$\boxed{\begin{aligned}\xi &= x - y'\,\frac{1+y'^2}{y''}\\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}} \tag{137}$$

Führt man in diese Formeln für x, y, y' und y'' die Ausdrücke der Parameterdarstellung ein, so erhält man für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\boxed{\begin{aligned}\xi &= x(t) - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\\ \eta &= y(t) + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}\end{aligned}} \tag{137a}$$

Die Gleichungen (137) und (137a) geben zugleich eine **Parameterdarstellung der Evolute,** indem einmal x, das andere Mal t der Parameter ist.
Als Beispiel diene die Ellipse (Evolvente) und ihre Evolute. Aus $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$ folgen die Gleichungen:

$$\xi = a\cos t - b\cos t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

$$\eta = b\sin t - a\sin t\cdot\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Die Evolute der Ellipse hat für $t = 0$ (Hauptscheitel) die Koordinaten

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a};\qquad \eta = 0$$

(Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes im positiven Hauptscheitel der Ellipse).

Für $t = 90°$ ergibt sich (Nebenscheitel):

$$\xi = 0;\qquad \eta = \frac{b^2-a^2}{b}$$

(Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes im positiven Nebenscheitel der Ellipse).

Die dazugehörigen Krümmungsradien sind dann, wie Bild 203 erkennen läßt,

$$r_1 = a - \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{b^2}{a};\qquad r_2 = b - \frac{b^2-a^2}{b} = \frac{a^2}{b}.$$

Die Ellipse läßt sich nun sehr gut in den Scheiteln durch die Krümmungskreise ersetzen, wie Bild 204 zeigt. Die Werte für r_1 und r_2 ergeben sich aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke. Aus Symmetriegründen wiederholt sich die Konstruktion entsprechend für die Gegenscheitel.

Für einen beliebigen Ellipsenpunkt hat die Ellipsentangente den Richtungsfaktor $\dot{y}/\dot{x}$, die Normale dazu also $-\dot{x}/\dot{y} = \dfrac{a \sin t}{b \cos t} = \dfrac{a}{b} \tan t$. Für den gleichen Parameterwert hat die Evolute die Tangentenrichtung

$$\frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} = \frac{3(b^2 - a^2)}{b} \sin^2 t \cos t : \left(\frac{3(b^2 - a^2)}{a} \cos^2 t \sin t \right) = \frac{a}{b} \tan t = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Die *Normale zur Evolvente* ist zugleich die *Tangente an die Evolute*. Da auf der Normalen der Krümmungsmittelpunkt liegt, ist dieser der Berührungspunkt für die Evolutentangente. Dieser für die Ellipse hergeleitete Sachverhalt gilt allgemein.

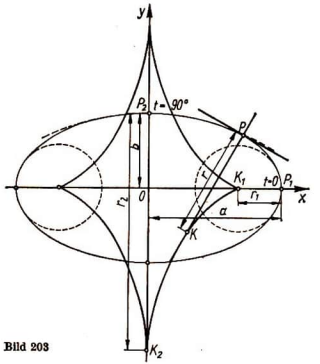


Bild 203

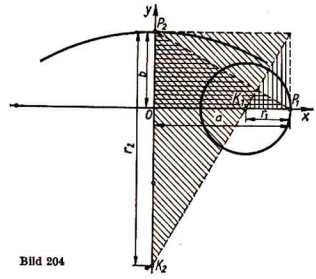


Bild 204

Wandert man auf der Evolute ein kleines Stück ds, so hat sich der Krümmungsradius um einen Betrag dr geändert, der, wie sich nachrechnen läßt, gerade so groß ist, wie der abgewanderte Evolutenbogen. Es gilt also:

$$|dr| = |ds|.$$

Man kann daher auch sagen; Die Evolutentangente rollt an der Evolute ab, wobei sich r in seiner Länge um den gleichen Betrag ändert, um den die Tangente längs der Evolute „abgewickelt" wurde. Praktisch bedeutet dies für die Ellipse: Ein um einen Evolutenbogen ($K_1 K_2$) gelegter Faden, der in einem Hauptscheitel (P_1) endet, werde von der Evolute straff abgewickelt; dann beschreibt der bewegte Endpunkt des Fadens einen Ellipsenbogen (Bild 205). Der jeweilige Ablösepunkt des Fadens von der Evolute ist der momentane Drehpunkt, um den der Fadenendpunkt mit dem jeweiligen Krümmungsradius dreht. So wird die Ellipse laufend durch Krümmungskreisbögen erzeugt.

Mit diesen Überlegungen kann umgekehrt zu einer Kurve als Evolute eine dazugehörige Evolvente entwickelt werden. Als Beispiel werde die technisch wichtige **Kreisevolvente** gewählt. Im Bild 206 ist der Kreis die Evolute. Die Abwicklung beginne im Punkt P_0. Der Kreispunkt K ist Krümmungsmittelpunkt zu einem Evolventenpunkt P. Aus dem Bild folgt ohne weiteres mit $r = b = Rt$:

$$x = \xi + r \sin t = \xi + r \frac{\eta}{R} = R \cos t + Rt \frac{R \sin t}{R}$$

$$\underline{\underline{x = R (\cos t + t \sin t);}}$$

$$y = \eta - r \cos t = \eta - r \frac{\xi}{R} = R \sin t - R t \frac{R \cos t}{R}$$

$$\underline{\underline{y = R (\sin t - t \cos t).}}$$

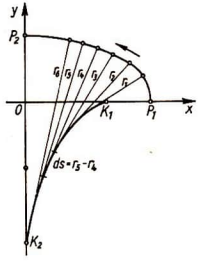


Bild 205

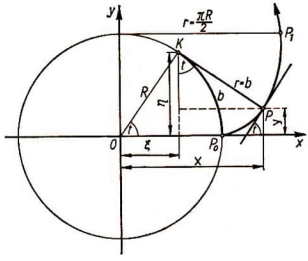


Bild 206

Man beachte, daß sich für $t = \pi/2$ ergibt (Punkt P_1):

$$x = \frac{\pi R}{2}; \qquad y = R.$$

In der Tat wurde ja auch der Viertelkreis $\pi R/2$ abgewickelt, der nun den zur x-Achse parallel liegenden Krümmungsradius ergeben muß.

AUFGABEN

585. Wie groß ist der Krümmungsradius der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ im Scheitel?

586. Man bestimme die Evolute der Normalparabel $y = x^2$.

587. Wo besitzt die Kurve des natürlichen Logarithmus ihren Scheitel; wie groß ist dort der Krümmungsradius?

588. Man entwerfe ein Bild der zur Gleichung $y = \ln \sin x$ gehörigen Kurve, indem man für die Zeichnung den Krümmungskreis im Scheitel zu Hilfe nimmt.

589. Man zeige für die Kurve mit den Gleichungen

$$x = \cos t + t \sin t; \qquad y = \sin t - t \cos t,$$

daß sie keinen Scheitel besitzt und daß ihre Evolute ein Kreis ist.

590. Man bestimme die Evolute der durch $r = 4(2\cos\varphi - \sin\varphi)$ gegebenen Kurve.

591. Für die Parabel $(x = t;\ y = t^2)$ zeige man, daß für den gleichen t-Wert gilt: $|dr| = |ds|$, wobei ds ein Bogenlängendifferential der Evolute ist.

592. Man beweise den Satz: Der Krümmungsradius der gleichseitigen Hyperbel $xy = c^2$ ist halb so lang wie die durch die dazugehörige Normale bestimmte Sehne.

593. Wie groß ist der Krümmungsradius der Hyperbel mit der Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

in den Scheiteln? Man zeige mit dem Ergebnis, daß die Krümmungsmittelpunkte gefunden werden können, indem man die in den Nebenscheiteln zu den Asymptoten errichteten Senkrechten mit der Hauptachse zum Schnitt bringt.

14. Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen

14.1. Definition und geometrische Veranschaulichung

Der bisher verwandte Funktionsbegriff ist erklärt als die Zuordnung zwischen zwei Variablen x und y, wobei jedem Wert der „unabhängigen" Variablen x aus einem Definitionsbereich X eindeutig ein Wert der „abhängigen" Variablen y aus einem Wertebereich Y zugeordnet ist. Als kurze symbolische Schreibweise verwendete man $x \to y$ oder $y = f(x)$. Nun gibt es aber in der Physik und Technik zahlreiche Beispiele, in denen die betrachteten Größen von mehreren anderen variablen Größen abhängig sind. Deshalb soll in dem vorliegenden Kapitel der Funktionsbegriff bezüglich der Anzahl der Variablen verallgemeinert werden.

Zum Beispiel ist die Stromstärke I nach dem Ohmschen Gesetz $I = \dfrac{U}{R}$ von der Spannung U und dem Widerstand R abhängig. Dabei sind U und R selbst voneinander unabhängige Größen, denn man kann Spannung und Widerstand unabhängig voneinander beliebig verändern. Jedem Wertepaar $(U; R)$ ist eindeutig eine Stromstärke I zugeordnet. Man nennt dann die Menge f der geordneten Wertetripel $(U; R; I)$ eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen und schreibt

$$f = \{(U; R; I) \mid I = f(U; R)\}.$$

$I = f(U; R)$ heißt der Funktionswert von U und R und wird auch gelesen: I ist f von U und R. Vereinfacht spricht man meist von der „Funktion $I = f(U; R)$". Auch die Schreibweise $(U; R) \to I$ [gelesen: $(U; R)$ abgebildet auf I] wird verwendet. Bei praktischen Aufgaben sind für U und R nur Werte aus bestimmten Bereichen zugelassen.

Verallgemeinert erhält man für zwei unabhängige Variable: Es sind drei Mengen X, Y und Z gegeben, und es seien $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ beliebige Elemente dieser Mengen. Man bildet die Menge D der geordneten Paare $(x; y)$, d. h. die Produktmenge $D = X \times Y$.

Definition

Liegt eine eindeutige Abbildung der Menge $D = X \times Y$ auf die Menge Z vor, d. h., ist jedem Paar $(x; y) \in D$ eindeutig ein Element $z \in Z$ zugeordnet, dann heißt die Menge f der geordneten Tripel $(x; y; z)$ eine **Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen,** und man schreibt

$$f = \{(x; y; z) \mid z = f(x; y)\}$$

oder kürzer nur

$$z = f(x; y) \qquad \text{bzw.} \qquad (x; y) \to z.$$

BEISPIEL

1. Eine Funktion f sei durch die analytische Darstellung

$$z = 2x^2 - 3y + 1$$

gegeben. Hier können für x und y unabhängig voneinander beliebige reelle Zahlen gewählt werden. Es gilt also

$$x \in X = R, \qquad y \in Y = R \quad \text{und} \quad D = R \times R.$$

Man betrachtet die eindeutige Abbildung $(x; y) \to 2x^2 - 3y + 1$, z. B. $(1; 1) \to 0$, $(2; 1) \to 6$, $(3; 10) \to -11$ usw. Die Funktion f ist die Menge der Tripel $(x; y; 2x^2 - 3y + 1)$, enthält also u. a. die Tripel $(1; 1; 0)$, $(2; 1; 6)$, $(3; 10; -11)$.

Als Beispiel für eine Funktion mit mehr als zwei unabhängigen Variablen betrachte man einen Raum, der von einer Stelle aus erwärmt wird. Die Temperatur T ist in den einzelnen Raumpunkten P unterschiedlich und außerdem von der Zeit t abhängig. Legt man ein dreiachsiges cartesisches Koordinatensystem zugrunde, in dem jeder Raumpunkt 3 Koordinaten x, y und z hat, dann ist jedem gewählten Quadrupel $(x; y; z; t)$ eindeutig eine Temperatur T zugeordnet, und man nennt die Menge f der geordneten Quintupel $(x; y; z; t; T)$ eine Funktion f von vier unabhängigen Variablen und schreibt dafür kurz

$$T = f(x; y; z; t).$$

Um allgemein eine Funktion von n unabhängigen Veränderlichen zu definieren, betrachtet man die $n + 1$ Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$. Weiterhin seien $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$, $y \in Y$ beliebige Elemente dieser Mengen. D sei die Menge der geordneten n-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, also das mehrfache Mengenprodukt $D = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Daraus folgt die

Definition

Liegt eine eindeutige Abbildung der Menge D auf die Menge Y vor, d. h., ist jedem n-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D$ eindeutig ein Element $y \in Y$ zugeordnet, dann heißt die Menge f der geordneten $(n + 1)$-Tupel $(x_1; x_2; \ldots; x_n; y)$ eine **Funktion**

von n unabhängigen Veränderlichen. Man schreibt dafür

$$f = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n; y) \mid y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)\}$$

oder wieder vereinfacht

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) \qquad \text{bzw.} \qquad (x_1; x_2; \ldots; x_n) \to y.$$

Hier dienen also die Indizes nicht zur Kennzeichnung fester Werte von x, sondern werden zur Unterscheidung der Variablen verwendet. Die Menge $D = X_1 \times X_2 \times \times \cdots \times X_n$ heißt der **Definitionsbereich**, die Menge Y der **Wertebereich** der Funktion f. Bei zwei unabhängigen Veränderlichen schreibt man meist $z = f(x; y)$ und bei drei unabhängigen Veränderlichen $u = f(x; y; z)$.

Die unabhängigen Variablen sollen auch stets selbst voneinander unabhängig sein. Würde nämlich in $u = f(x; y; z)$ z. B. zwischen y und z eine Beziehung bestehen, so daß etwa $y = g(z)$ ist, dann könnte man diesen Wert in u einsetzen und erhielte mit $u = f[x; g(z); z] = \varphi(x; z)$ nur noch eine Funktion der zwei unabhängigen Veränderlichen x und z.

Die Einteilung der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen erfolgt nach denselben Gesichtspunkten wie bei den Funktionen einer Veränderlichen. So stellt z. B.

$$z = 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 2y + 3$$

eine ganzrationale Funktion 2. Grades von 2 Veränderlichen und

$$u = e^z \cos(x + y)$$

eine transzendente Funktion von 3 Veränderlichen dar.

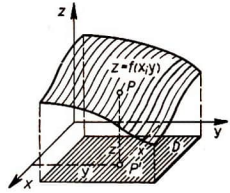


Bild 207

Bekanntlich läßt sich einer Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen unter Zugrundelegung eines ebenen Koordinatensystems eine Kurve als graphische Darstellung zuordnen.

Im folgenden soll erklärt werden, was unter dem Bild einer Funktion $z = f(x; y)$ zu verstehen ist.

Zugrunde gelegt werde ein räumliches cartesisches Koordinatensystem, dessen x-, y- und z-Achse ein Rechtssystem bilden sollen. Wie bereits in 1.1.5.1. gezeigt wurde, gibt es eine eineindeutige Abbildung der Punkte des Raumes auf die Menge der Zahlentripel $(x; y; z)$. Der Funktion als Menge f von Zahlentripeln entspricht eine Punktmenge im Raum, die im allgemeinen eine Fläche ist und das Bild der Funktion $z = f(x; y)$ heißt.

Zur Entstehung dieser Fläche noch folgende Überlegung: Einem beliebig gewählten Wertepaar $(x; y)$ läßt sich ein eindeutig bestimmter Punkt P' in der x, y-Ebene zuordnen und der zugehörige Funktionswert $z = f(x; y)$ läßt sich als die Höhe eines senkrecht über P' gelegenen Raumpunktes P deuten (Bild 207). Dem Definitionsbereich D als Menge der zulässigen Wertepaare $(x; y)$ entspricht die Menge aller Punkte P' in der x, y-Ebene. Die Menge der zugehörigen Raumpunkte bildet die Fläche Φ:

$$\Phi = \{P(x; y; z) \mid z = f(x; y), \qquad (x; y) \in D\}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $(x; y) \to z$ trifft jede innerhalb des Definitionsbereiches errichtete Senkrechte zur x,y-Ebene die Fläche genau einmal. Umgekehrt stellt die Orthogonalprojektion der Fläche auf die x,y-Ebene das Bild des Definitionsbereiches dar.

Ist aus einer gegebenen Funktion $z = f(x; y)$ auf die Form der zugehörigen Fläche und ihre Lage im Koordinatensystem zu schließen, dann werden am besten auf der Fläche liegende Kurven betrachtet. Man beschränkt sich meist auf die Schnittkurven zwischen der Fläche und den Koordinatenebenen sowie auf die dazu parallelen Kurven.

Die von der y- und z-Achse aufgespannte Koordinatenebene E_{yz} ist dadurch ausgezeichnet, daß ihre sämtlichen Punkte die Koordinate $x = 0$ besitzen:

$$E_{yz} = \{P(x; y; z) \mid x = 0\}.$$

Entsprechendes gilt für die beiden anderen Koordinatenebenen:

$$E_{xz} = \{P(x; y; z) \mid y = 0\},$$
$$E_{xy} = \{P(x; y; z) \mid z = 0\}.$$

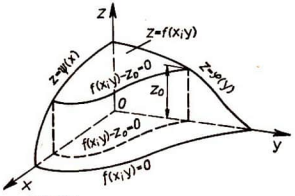


Bild 208

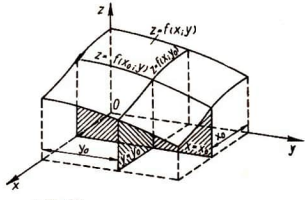


Bild 209

Die Schnittkurve k zwischen der Fläche und der Ebene E_{yz} ist der Durchschnitt der entsprechenden Punktmengen. Die Gleichung der Schnittkurve folgt daher sofort aus der Flächengleichung $z = f(x; y)$, wenn in dieser $x = 0$ gesetzt wird (Bild 208):

$$k = \Phi \cap E_{yz} = \{P(x; y; z) \mid z = f(0; y) = \varphi(y)\}.$$

Durch Nullsetzen der Variablen y bzw. z ergeben sich die Gleichungen der übrigen Schnittkurven:

$$g = \Phi \cap E_{xz} = \{P(x, y; z) \mid z = f(x; 0) = \psi(x)\},$$
$$h = \Phi \cap E_{xy} = \{P(x; y; z) \mid 0 = f(x; y)\}.$$

Die Gleichung von h ist in impliziter Form gegeben.

Die Menge aller Punkte, welche von der y,z-Ebene den Abstand x_0 haben, stellt eine zur y,z-Ebene parallele Ebene dar (Bild 209), deren Gleichung $x = x_0$ lautet:

$$E_{yz}(x_0) = \{P(x; y; z) \mid x = x_0\}.$$

Durch Einsetzen des Wertes $x = x_0$ in $z = f(x; y)$ folgt mit $z = f(x_0; y)$ die Gleichung der Schnittkurve $k(x_0)$ zwischen Φ und $E_{yz}(x_0)$:

$$k(x_0) = \Phi \cap E_{yz}(x_0) = \{P(x; y; z) \mid z = f(x_0; y)\}.$$

Analog ist

$$g(y_0) = \Phi \cap E_{xz}(y_0) = \{P(x; y; z) \mid z = f(x; y_0)\}$$

eine Kurve in der Fläche, die parallel zur x,z-Ebene ist und von dieser den Abstand $y = y_0$ hat.

$$h(z_0) = \Phi \cap E_{xy}(z_0) = \{P(x; y; z) \mid z_0 = f(x; y)\}$$

ist die Gleichung einer Höhenlinie der Fläche (Bild 208). Mit Hilfe mehrerer in den Grundriß projizierter Höhenlinien kann ein Bild der Fläche entworfen werden.

BEISPIELE

2. Gesucht wird das Bild der Funktion

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = f(x; y).$$

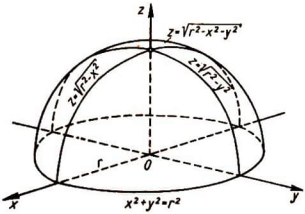


Bild 210

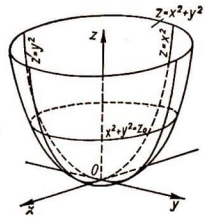


Bild 211

Lösung: Durch Nullsetzen der einzelnen Variablen ergeben sich die folgenden Schnittkurven mit den Koordinatenebenen:

$k = \Phi \cap E_{yz} = \{P(x; y; z) \mid z = \sqrt{r^2 - y^2}\}$ $\Rightarrow$ Halbkreis mit dem Radius r

$g = \Phi \cap E_{xz} = \{P(x; y; z) \mid z = \sqrt{r^2 - x^2}\}$ $\Rightarrow$ Halbkreis mit dem Radius r

$h = \Phi \cap E_{xy} = \{P(x; y; z) \mid 0 = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$

$= \{P(x; y; z) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ $\Rightarrow$ Kreis mit dem Radius r.

Das Bild der Funktion ist eine Halbkugelfläche mit dem Radius r. Wegen der Bedingung $x^2 + y^2 \leqq r^2$ ist das Bild des Definitionsbereiches eine Kreisfläche mit dem Radius r (Bild 210).

3. Welches Bild besitzt die Funktion

$$z = x^2 + y^2 = f(x; y) \quad ?$$

Lösung: $k = \Phi \cap E_{yz} = \{P(x; y; z) \mid z = y^2\} \Rightarrow$ Parabel

$g = \Phi \cap E_{xz} = \{P(x; y; z) \mid z = x^2\} \Rightarrow$ Parabel

$h = \Phi \cap E_{xy} = \{P(x; y; z) \mid 0 = x^2 + y^2\} \Rightarrow$ Punkt (Ursprung) mit den Koordinaten $(0; 0; 0)$.

Die Funktion besitzt als Bild eine Fläche, welche durch Rotation einer Parabel, z. B. mit der Gleichung $z = x^2$, um die x-Achse entsteht und daher Rotationsparaboloid genannt wird (Bild 211). Für die Wahl von x und y bestehen keine Einschränkungen, also ist $D = R \times R$ und die zugehörige Punktmenge ist die gesamte x,y-Ebene.

Für Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen ist eine derartige geometrische Veranschaulichung nicht möglich, da sie mehr als drei Dimensionen erfordern würde.

AUFGABEN

594. Welches Bild besitzt die Funktion

$$z = -\frac{1}{2}x - 2y + 2?$$

595. Welche Fläche wird durch die Gleichung

$$x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 0 \quad \text{mit} \quad y \geqq 0$$

dargestellt?

14.2. Partielle Ableitungen

Nach diesen Vorbereitungen sollen nun auch Ableitungen für Funktionen von mehreren Variablen definiert werden. Die erforderlichen Beziehungen werden zunächst für zwei Variable anschaulich aus dem Bild abgeleitet. Das Ergebnis wird dann sinngemäß auf Funktionen von mehr als zwei Variablen übertragen.

Anmerkung:

An dieser Stelle soll ausdrücklich betont werden, daß eine strenge, analytische Herleitung der Formeln in diesem Abschnitt und in den folgenden Abschnitten über den Rahmen des Buches hinausführt und daher eine Beschränkung auf Plausibilitätsbetrachtungen notwendig ist. Es ist das Ziel dieses Kapitels, so weit in das Gebiet der Funktionen mehrerer Variabler einzuführen, daß die in der Praxis vorkommenden Aufgaben sicher gelöst werden können.

In Bild 212 wurde die Fläche mit der Gleichung $z = f(x; y)$ mit zwei durch die Gleichungen $x = x_0$ und $y = y_0$ gegebenen Ebenen zum Schnitt gebracht. Die Schnittkurven mit den Gleichungen $z = f(x_0; y)$ und $z = f(x; y_0)$ verlaufen parallel zur y,z- bzw. x,z-Ebene und schneiden einander in P_0. Entsprechend der Definition des Differentialquotienten für eine Variable sollen nun die Anstiege der in P_0 an die beiden Kurven gelegten Tangenten berechnet werden. Das Sekantendreieck der Schnittkurve, die in der Ebene mit der Gleichung $y = y_0$ liegt, hat die Katheten h und $f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)$. Der Anstieg der Sekante wird also durch den

Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h;\,y_0)-f(x_0;\,y_0)}{h}$$

angegeben. Für $h\to 0$ geht die Sekante in die Tangente über. Ihr Anstieg ergibt sich aus dem Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h;\,y_0)-f(x_0;\,y_0)}{h}=\tan\alpha_1. \tag{I}$$

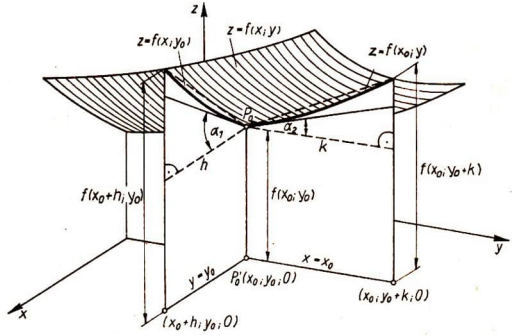


Bild 212

Entsprechend erhält man für den Anstieg der Tangente, die in P_0 an die Kurve mit der Gleichung $z=f(x_0;\,y)$ gelegt ist, den Grenzwert

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0;\,y_0+k)-f(x_0;\,y_0)}{k}=\tan\alpha_2. \tag{II}$$

Die Grenzwerte (I) und (II) heißen die **ersten partiellen Differentialquotienten** oder die **ersten partiellen Ableitungen** der Funktion $z=f(x;\,y)$ nach x bzw. y. Betrachtet man nun die partiellen Ableitungen nicht an einer bestimmten Stelle P_0, sondern in einem beliebigen Punkt P mit den Koordinaten $x;y$, dann erhält man unter Beifügung der verschiedenen gebräuchlichen Bezeichnungen

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h;\,y)-f(x;\,y)}{h}&=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x;\,y)}{\partial x}=z_x=f_x(x;\,y)\\ \lim_{k\to 0}\frac{f(x;\,y+k)-f(x;\,y)}{k}&=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x;\,y)}{\partial y}=z_y=f_y(x;\,y)\end{aligned}} \tag{138}$$

Die partiellen Ableitungen (138) stellen geometrisch den Anstieg von Tangenten dar, die in einem beliebigen Punkt P an die Fläche mit der Gleichung $z = f(x; y)$ angelegt sind und parallel zur x,z- bzw. y,z-Ebene verlaufen.

Zum Unterschied gegen den gewöhnlichen Differentialquotienten verwendet man hier das geschwungene ∂. Für $\partial z/\partial x$ spricht man: de-z partiell nach de-x bzw. de-z partiell durch de-x.

Zur Definition der partiellen Ableitung $f_x(x; y)$ wurde eine Kurve auf der Fläche betrachtet, deren Punkte einen konstanten Wert $y = y_0$ besitzen. Für die praktische Berechnung ergibt sich daraus die einfache Regel:

Um entsprechend (138) die partielle Ableitung der Funktion $z = f(x; y)$ nach x zu bilden, betrachtet man vorübergehend y als konstante Größe und differenziert nach den bekannten Regeln die Funktion nach x. Entsprechend ist bei der partiellen Ableitung nach y die Variable x vorläufig als konstant anzusehen und nach y zu differenzieren. Will man die Tangentenanstiege für einen bestimmten Punkt P_0 berechnen, dann setzt man in die partiellen Ableitungen, die ja wieder Funktionen von x und y sind, die Koordinaten x_0 und y_0 dieses Punktes ein.

BEISPIELE

1. Wie groß ist der Anstiegswinkel α der Tangente, die die Fläche mit der Gleichung $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ im Punkte $P_0(2; 1; z_0)$ berührt und parallel zur y,z-Ebene verläuft?

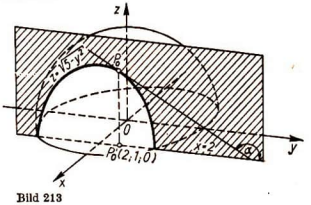


Bild 213

Lösung: Die Funktion stellt nach Beispiel 2 aus 14.1. eine Halbkugel mit dem Radius $r = 3$ dar. Für die partielle Ableitung nach y erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Sie bedeutet zunächst den Anstieg einer Tangente, welche in einem beliebigen Punkt $P\left(x; y; \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)$ parallel zur y,z-Ebene an die Halbkugel gelegt ist.

Setzt man nun $x = 2$, dann muß der Berührungspunkt auf der Kurve mit der Gleichung $z = \sqrt{9 - 4 - y^2} = \sqrt{5 - y^2}$ liegen (Bild 213), und der Tangentenanstieg für diese Kurve ist

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x=2} = \frac{-y}{\sqrt{5 - y^2}}.$$

Die Schreibweise $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x=2}$ bedeutet hierbei, daß die partielle Ableitung der Funktion nach y an der Stelle $x = 2$ zu betrachten ist.

Mit $y = 1$ folgt dann schließlich die Ableitung

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=2 \\ y=1}} = f_y(2; 1) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 1}} = -\frac{1}{2} = \tan\alpha$$

und der gesuchte Winkel mit $\alpha = 153°26'$.

2. Man bilde die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = 3x^2 + xy - y^2 - 4x - 5y + 6$$

an der Stelle $x = 2$, $y = -3$.

Lösung: Die partiellen Ableitungen lauten allgemein

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y - 5.$$

Durch Einsetzen der Werte $x = 2$, $y = -3$ folgt

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=2\\y=-3}} = \frac{\partial f(2;-3)}{\partial x} = 5$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=2\\y=-3}} = \frac{\partial f(2;-3)}{\partial y} = 3.$$

3. Man bilde die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$z = e^x \cos y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Lösung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Der Begriff des partiellen Differentialquotienten wird nun formal auch auf Funktionen von mehr als zwei Variablen übertragen. Danach besitzt die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

von n Variablen die n ersten partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}.$$

Dabei wird $\partial y/\partial x_i$ definiert als der Grenzwert

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1; \ldots; x_{i-1}; x_i + h; x_{i+1}; \ldots; x_n) - f(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{h}.$$

Um etwa $\partial y/\partial x_2$ zu berechnen, sind bei der Differentiation $x_1, x_3, \ldots, x_n$ als konstant, x_2 als variabel zu betrachten.

BEISPIEL

4. Man bilde die ersten partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$u = z \sin x + \ln (x^2 - y^2) = f(x; y; z).$$

Lösung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z\cos x + \frac{2x}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin x.$$

Da die ersten partiellen Ableitungen wieder Funktionen sind, kann man sie nochmals partiell differenzieren und gelangt so zu dem Begriff der höheren partiellen Ableitungen. Zum Beispiel ergeben sich für die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x;y)$ vier Möglichkeiten mit folgenden Schreibweisen:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x;y) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x;y)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}(x;y) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x;y).$$

Ferner bedeutet z. B.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = f_{xxy}(x;y),$$

daß die Funktion $z = f(x;y)$ erst zweimal partiell nach x und anschließend einmal partiell nach y zu differenzieren ist.

BEISPIEL

5. Man berechne die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktionen:

a) $z = x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 + 3x - \frac{3}{2}y + 10,$

b) $z = 2x^3 \sin 2y.$

Lösung:

a) $z_x = 2x + 5y + 3 \qquad z_y = 5x - y - \frac{3}{2}$

$z_{xx} = 2 \qquad z_{xy} = 5 \qquad z_{yx} = 5 \qquad z_{yy} = -1$

b) $z_x = 6x^2 \sin 2y \qquad z_y = 4x^3 \cos 2y$

$z_{xx} = 12x \sin 2y \qquad z_{yx} = 12x^2 \cos 2y$

$z_{xy} = 12x^2 \cos 2y \qquad z_{yy} = -8x^3 \sin 2y$

Die Übereinstimmung der beiden gemischten Ableitungen z_{xy} und z_{yx} in obigen Beispielen ist kein Zufall. Es gilt nämlich der

Satz von Schwarz

Unter der Voraussetzung, daß die Funktion und ihre partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Reihenfolge der partiellen Differentiationen gleichgültig.

BEISPIEL

6. Man zeige für die Funktion

$$u = \frac{2y}{x}\tan z$$

die Gleichheit der gemischten partiellen Ableitungen 3. Ordnung u_{xyz} und u_{yzx}.

Lösung:

$$u_x = \frac{-2y}{x^2}\tan z \qquad u_z = \frac{2y}{x\cos^2 z}$$

$$u_{xy} = \frac{-2}{x^2}\tan z \qquad u_{zy} = \frac{2}{x\cos^2 z}$$

$$u_{xyz} = \frac{-2}{x^2\cos^2 z} \qquad u_{zyx} = \frac{-2}{x^2\cos^2 z}$$

AUFGABEN

596. Man berechne die Ableitung z_x der Funktion $z = x^2 + y^2$ an der Stelle $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ und stelle das Ergebnis anschaulich entsprechend Bild 213 dar.

Man berechne die 1. partiellen Ableitungen der Funktionen in den Aufgaben 597 bis 609.

597. $z = x^3 - 8x^2y + xy^2 + 15x - 20y + 2$

598. $u = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^3$

599. $f(x;y) = \dfrac{3x^2 + 2xy^2}{1 - x}$

600. $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

601. $u = \dfrac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2}$

602. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

603. $z = \cos(x + y)\cos(x - y)$

604. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

605. $z = e^{\sin xy} + e^{\cos(x+y)}$

606. $u = e^x \ln y + z^2\cos y$

607. $v = v_0\dfrac{p_0}{p}(1 + \alpha t) = f(p;t)$

608. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = f(l;g)$

609. $I_1 = I\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = f(R_1;R_2)$

Man berechne die 1. und 2. partiellen Ableitungen der Funktionen in den Aufgaben 610 bis 618.

610. $z = x^5 + 2x^3y^2 + 2y^5$

611. $u = xy + yz + zx$

612. $f(x;y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

613. $z = \dfrac{1 + xy}{1 - xy}$

614. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

615. $z = 2\sin(x + y)\cos(x - y)$

616. $z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$

617. $f(x;y) = \ln\dfrac{x + y}{x - y}$

618. $f(x;y) = \ln\dfrac{\sin y}{\sin x}$

619. Man berechne für die Funktion $u = e^{xyz}$ die partielle Ableitung 3. Ordnung $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$.

620. Man zeige für die Funktion $u = (x - y)^z$ die Gleichheit der partiellen Ableitungen 3.Ordnung u_{xyz} und u_{zyx}.

621. Man weise für die Funktion $u = x^2 \ln \sin (y - z)$ die Richtigkeit der folgenden Gleichungen nach:

a) $u_{xyz} = u_{zyx}$;

b) $u_{yyz} = u_{zyy}$.

622. Man zeige, daß die Funktion $z = e^y \arcsin (x - y)$ die Beziehung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \text{erfüllt.}$$

623. Man bestimme $xz_x + yz_y$ für die Funktion $z = \dfrac{x}{y}$.

624. Man berechne $u_x + u_y + u_z$ für $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

625. Man zeige, daß die Funktion $z = e^{\frac{x^2}{y^2}}$ die Gleichung $xz_x + yz_y = 0$ erfüllt.

14.3. Das totale Differential

In 3.5. wurden für eine Funktion $y = f(x)$ die Begriffe Funktionsänderung und Differential behandelt. Analoge Betrachtungen werden nun auch für Funktionen von mehreren Variablen angestellt.
Die Änderung Δz eines Funktionswertes $z = f(x; y)$, die dieser erfährt, wenn die beiden unabhängigen Variablen x und y um Δx und Δy geändert werden, ist

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Geometrisch bedeutet Δz die Höhenänderung eines Punktes, der auf der Fläche von P nach P_1 verschoben wird (Bild 214). Das Differential $\mathrm{d}z$ läßt sich darstellen als die zugehörige Höhenänderung bis zur Tangentialebene, die in $P(x; y; z)$ an die Fläche $z = f(x; y)$ gelegt ist. Nun wurde in 3.5. gezeigt, daß für die unabhängige Variable x bei Funktionen einer Variablen das Differential $\mathrm{d}x$ und die Differenz Δx übereinstimmen. Entsprechend kann auch bei den vorliegenden zwei unabhängigen Variablen

$$\Delta x = \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \Delta y = \mathrm{d}y$$

gesetzt werden. Dagegen ist zu beachten, daß sich Differential $\mathrm{d}z$ und Differenz Δz der abhängigen Variablen wegen ihrer verschiedenen geometrischen Bedeutung im allgemeinen voneinander unterscheiden. Das Differential läßt sich leicht mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnen.
Zwei durch $P(x; y; z)$ gehende und parallel zur x,z- bzw. y,z-Ebene liegende Ebenen schneiden die Fläche in zwei Kurven. An diese Kurven sind in P die Tangenten gelegt. Ihre Anstiegswinkel sind α_1 und α_2. Die Ankatheten der beiden entstandenen rechtwinkligen Dreiecke sind $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$. Da $\tan \alpha_1 = z_x$ und $\tan \alpha_2 = z_y$ ist, haben die Gegenkatheten die Längen $z_x \mathrm{d}x$ und $z_y \mathrm{d}y$. Die beiden Tangenten spannen eine

Tangentialebene auf. Aus Bild 214 erkennt man, daß sich der Höhenzuwachs bis zum Punkt P_2 dieser Ebene aus den Strecken $z_x\,dx$ und $z_y\,dy$ zusammensetzt. Es ist also

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy.$$

Man nennt

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy} \tag{139}$$

das **vollständige** oder **totale Differential** der Funktion $z = f(x; y)$.
Für kleine Werte dx und dy gilt die wichtige Näherung $dz \approx \Delta z$. Hiervon wird in der Fehlerrechnung (vgl. 21.2.) Gebrauch gemacht.

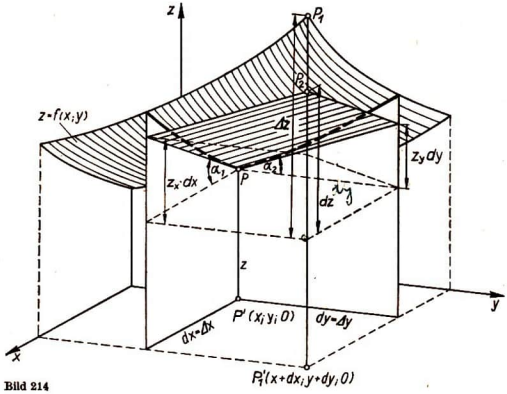


Bild 214

BEISPIEL

1. Man berechne Δz und dz der Funktion $z = 2x + y^2$ für $x = 3$, $y = 5$, $dx = 0{,}3$ und $dy = 0{,}2$.

   Lösung: Man erhält an der Stelle (3; 5) den Funktionswert

   $$z_1 = f(x; y) = f(3; 5) = 6 + 25 = 31.$$

   Wird x um $dx = 0{,}3$ und y um $dy = 0{,}2$ vermehrt, dann ist

   $$z_2 = f(x + dx; y + dy) = f(3{,}3;\ 5{,}2) = 6{,}6 + 27{,}04 = 33{,}64.$$

   Damit wird

   $$\Delta z = z_2 - z_1 = 2{,}64.$$

   Für dz folgt

   $$dz = 2dx + 2y\,dy = 0{,}6 + 2 = 2{,}60.$$

   Tatsächlich gilt also $\Delta z \approx dz$.

Die für $z = f(x; y)$ angestellten Betrachtungen lassen sich wieder auf Funktionen mit beliebig vielen Variablen erweitern.
Ist die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

gegeben und werden die unabhängigen Variablen um die Werte $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ verändert, dann ergibt sich das totale Differential mit

$$\boxed{\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n} \tag{140}$$

Für die Änderung $\Delta y = f(x_1 + \mathrm{d}x_1; \ldots; x_n + \mathrm{d}x_n) - f(x_1; \ldots; x_n)$ des Funktionswertes y gilt bei kleinen Änderungen $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ ebenfalls die Näherung $\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

BEISPIELE

2. Man berechne das totale Differential der Funktion $z = x\,y$.

   Lösung: Es ist nach (139)

   $$\mathrm{d}z = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y. \tag{I}$$

   Das Ergebnis läßt sich auf einfache Weise geometrisch deuten. Man kann $z = x\,y$ als Fläche eines Rechtecks mit den Seiten x und y auffassen.
   Eine Vergrößerung der Seiten um $\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}y$ ergibt nach Bild 215 den Flächenzuwachs

   $$\Delta z = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{II}$$

   Ein Vergleich mit (I) zeigt anschaulich den Fehler, der bei der Näherung $\Delta z \approx \mathrm{d}z$ gemacht wird. Er ist gleich dem Produkt $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$. Für kleine Änderungen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ kann dieses Rechteck aber tatsächlich gegen die beiden anderen hinzukommenden Rechtecke vernachlässigt werden.

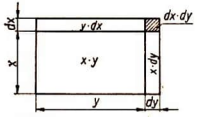


Bild 215

3. Wie lautet das totale Differential der Funktion

   $$u = \frac{x}{\sqrt{y^2 - z^2}}\,?$$

   Lösung: Für die partiellen Ableitungen erhält man

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-xy}{\sqrt{y^2 - z^2}^3} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xz}{\sqrt{y^2 - z^2}^3}.$$

   Damit folgt nach (140)

   $$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{y^2 - z^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{\sqrt{y^2 - z^2}^3}\,\mathrm{d}y + \frac{xz}{\sqrt{y^2 - z^2}^3}\,\mathrm{d}z.$$

AUFGABEN

626. Man berechne für die Funktion $u = xy + yz + zx$ die Funktionsänderung Δu und das totale Differential $\mathrm{d}u$ an der Stelle $x = 2, y = 3, z = 1$, wenn die Veränderungen $\mathrm{d}x = 0{,}1$, $\mathrm{d}y = -0{,}2$, $\mathrm{d}z = 0{,}2$ gegeben sind.

627. Man bestimme Δz und $\mathrm{d}z$ für die Funktion $z = x^2/y$ an der Stelle $x = 12$, $y = -3$ mit $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = 0{,}2$.

628. Es ist das totale Differential der Funktion $w = 3x^2 - xy + 2yz + 4z^2$ für $dx = dy = dz = 0{,}25$ an der Stelle $x = 2, y = -4, z = 1$ zu bestimmen.
Man berechne für jede der Funktionen 629 bis 635 das totale Differential:

629. $z = 4x^3 - 6x^2y^2 + 4y^3$

630. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

631. $z = x^y$

632. $u = e^{x^2+y^2+z^2}$

633. $z = e^x \sin y$

634. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

635. $z = \arctan xy$

636. Welche Änderung $\Delta\alpha$ hat man annähernd für den Winkel α eines rechtwinkligen Dreiecks zu erwarten, wenn die Ankathete $b = 28$ m um 5 cm vergrößert und die Hypotenuse $c = 35$ m um 10 cm verkleinert werden?

637. Um welchen Wert ändert sich die Fläche A eines Dreiecks, wenn die Seiten $a = 10$ m, $b = 16$ m und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 60°$ sowie die Änderungen $\Delta a = \Delta b = 0{,}2$ m und $\Delta\gamma = 1°$ gegeben sind?

14.4. Die Ableitung von Funktionen mit impliziter Darstellung

Die bisherigen Regeln für die Ableitung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen setzen voraus, daß die Funktionsgleichung in expliziter Form gegeben ist. Eine Funktion kann aber auch durch einen impliziten analytischen Ausdruck dargestellt werden, daß heißt durch eine Gleichung, bei der die Variablen x und y sowie sämtliche Konstanten auf der linken Seite der Gleichung stehen (vgl. 1.3.3.). Bezeichnet man den links stehenden Term mit $F(x; y)$, dann lautet die implizite Darstellung $F(x; y) = 0$. Nun ist es manchmal schwierig oder sogar unmöglich, diese Gleichung nach y aufzulösen, um zu einer expliziten Darstellung zu gelangen. Es wird daher in diesem Abschnitt gezeigt, wie mit Hilfe der partiellen Ableitungen auch implizit dargestellte Funktionen differenziert werden können. Zuvor muß jedoch noch auf einige Schwierigkeiten der impliziten Darstellung eingegangen werden. So ist einer gegebenen Gleichung $F(x; y) = 0$ nicht sofort anzusehen, ob sie eine oder mehrere Funktionen darstellt. Ist außerdem eine Auflösung nach y nicht möglich, dann hat man keine Vorschrift, um zu einem gewählten x-Wert den zugehörigen y-Wert zu ermitteln. Man erhält lediglich durch Probieren Wertepaare $(x; y)$, die die Funktionsgleichung erfüllen. Und nur dann, wenn sich jedem gewählten x-Wert nur ein y-Wert zuordnen läßt, stellt die Menge f der Wertepaare $(x; y)$ eine durch $F(x; y) = 0$ definierte Funktion dar. Als Beispiele seien die Gleichungen

$$x^2 - 6y + 8 = 0 \tag{I}$$

$$x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0 \tag{II}$$

$$x^5 - 4x^3y - 8x^2y^4 - 9y^5 - 23 = 0 \tag{III}$$

$$3\cos x - 2xy - 6\sin y = 0 \tag{IV}$$

gegeben.
Aus (I) erhält man durch Umformung die explizite Darstellung

$$y = \frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}$$

und erkennt, daß jedes gewählte $x \in R$ eindeutig auf ein $y \in [4/3; \infty)$ abgebildet wird. (I) stellt also tatsächlich eine Funktion mit dem Definitionsbereich $X = R$ und dem Wertebereich $Y = [4/3; \infty)$ dar.

Aus (II) erhält man

$$y = 3 \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

Die Gleichung (II) stellt also zwei Funktionen

$$y = 3 + \sqrt{36 - x^2} = f_1(x)$$

$$y = 3 - \sqrt{36 - x^2} = f_2(x)$$

dar, deren Definitionsbereiche ($X_1 = X_2 = [-6; 6]$) gleich und deren Wertebereiche ($Y_1 = [3; 9]$, $Y_2 = [-3; 3]$) verschieden sind. Beide Funktionen sind in der Darstellung (II) zusammengefaßt. Aus der Gleichung (III) läßt sich keine explizite Darstellung für y gewinnen, da bekanntlich Gleichungen vom 5. und höheren Grad im allgemeinen nicht mehr lösbar sind. Durch Probieren erhält man zu einem gewählten x-Wert den y-Wert, z. B. zu $x = 2$ den Wert $y = 1$. Da zu $x = 2$ auch weitere y-Werte gehören können, bleibt offen, ob (III) eine oder mehrere Funktionen darstellt. Auch die Bestimmung des Definitions- bzw. Wertebereiches stößt auf Schwierigkeiten. Dasselbe gilt für Gleichung (IV), die als transzendente Gleichung für y nicht nach y auflösbar ist.

Für das Folgende wird angenommen, daß die Gleichung $F(x; y) = 0$ die implizite analytische Darstellung einer Funktion $y = f(x)$ sei, auch wenn die Gleichung nicht nach y auflösbar ist. Auch implizit dargestellte Funktionen haben als Bilder ebene Kurven, denn man kann die Menge der Wertepaare $(x; y)$, welche $F(x; y) = 0$ erfüllen, eindeutig auf eine ebene Punktmenge abbilden.

k sei die durch $F(x; y) = 0$ festgelegte Kurve. Die Ableitung y' der implizit dargestellten Funktion f bedeutet geometrisch den Tangentenanstieg dieser Kurve k. Zur Bestimmung der Ableitung betrachtet man $F(x; y) = 0$ als Sonderfall der Funktion $z = F(x; y)$ von zwei unabhängigen Variablen für $z = 0$. Dann ist k nach Bild 216 die Schnittkurve zwischen der Fläche mit der Gleichung $z = F(x; y)$ und

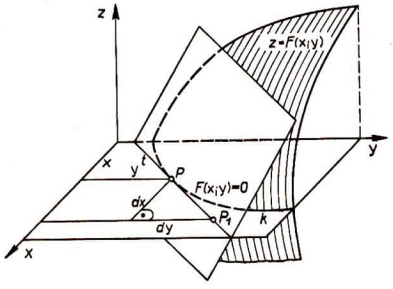


Bild 216

der x,y-Ebene. In einem beliebigen Punkt $P(x;y;0)$ von k ist an die Fläche die Tangentialebene gelegt, welche die x,y-Ebene in der durch P gehenden Tangente von k schneidet. Man geht nun zum Punkt $P_1(x+\mathrm{d}x;\ y+\mathrm{d}y;\ 0)$ über, wobei $\mathrm{d}y$ das zu $\mathrm{d}x$ gehörende Differential der Funktion f ist. Mit $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ folgt für das totale Differential der Funktion $z=F(x;y)$:

$$\mathrm{d}z = F_x(x;y)\,\mathrm{d}x + F_y(x;y)\,\mathrm{d}y.$$

Da P_1 in der Tangentialebene liegt, ist nach der geometrischen Bedeutung des totalen Differentials $\mathrm{d}z=0$:

$$0 = F_x(x;y)\,\mathrm{d}x + F_y(x;y)\,\mathrm{d}y.$$

Division durch $\mathrm{d}x$ ergibt

$$F_x(x;y) + F_y(x;y)\,y' = 0$$

bzw. unter der Voraussetzung $F_y(x;y) \neq 0$

$$\boxed{y' = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}} \tag{141}$$

Auf der rechten Seite von (141) steht ein Term, der im allgemeinen x und y enthält. Ist $F(x;y)=0$ nach y auflösbar, dann kann der Wert für y in (141) eingesetzt und die Form $y'=f'(x)$ hergestellt werden. Sonst müssen zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt beide Koordinaten x und y bekannt sein.

BEISPIELE

1. Man berechne den Neigungswinkel der Tangente, die im Punkt $P_0(1;2)$ an die Kurve mit der Gleichung

   $$x^4 - 3x^2y + y^3 - 3 = 0$$

   angelegt ist.

   Lösung: Nach (141) folgt

   $$y' = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)} = -\frac{4x^3 - 6xy}{-3x^2 + 3y^2}$$

   und für die Koordinaten von P_0

   $$\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{8}{9} = \tan\alpha.$$

   Damit wird $\alpha = 41°38'$.

2. Es ist die Tangentengleichung der Parabel mit der Gleichung

   $$F(x;y) = y^2 - 2px = 0$$

   für den Berührungspunkt $P_0(x_0;y_0)$ aufzustellen.

Lösung: In der Punkt-Richtungs-Gleichung der Tangente durch P_0

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m$$

ist der Richtungsfaktor m gleich der Ableitung y' der Parabelgleichung an der Stelle P_0. Man erhält

$$m=[y']_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=-\frac{F_x(x_0;y_0)}{F_y(x_0;y_0)}=-\frac{-2p}{2y_0}=\frac{p}{y_0}.$$

Aus der Geradengleichung folgt damit

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{p}{y_0}$$

oder nach Umformung

$$yy_0-y_0^2=px-px_0.$$

Da P_0 auf der Parabel liegt, müssen seine Koordinaten die Parabelgleichung erfüllen, also muß gelten $y_0^2=2px_0$. Setzt man diesen Wert oben ein, so erhält man nach Umformung die bekannte Gleichung der Parabeltangente:

$$\underline{\underline{yy_0=p(x+x_0)}}.$$

AUFGABEN

638. Man berechne die Neigungen der Tangenten, die an die Kurve mit der Gleichung $y^3-3y++x=0$ in den Schnittpunkten der Kurve mit der y-Achse angelegt sind.

639. Unter welchen Neigungen schneidet die Kurve mit der Gleichung $F(x;y)=2y^3+6x^3--24x+6y=0$ die x-Achse?

640. Man bestimme die Ableitung y' der Funktion $(y+2)\sin x-\sin y=0$ an der Stelle $(0;0)$.

Man berechne die 1. Ableitungen der Funktionen mit den impliziten Darstellungen 641 bis 646.

641. $x^3-ay^2=0$

642. $xy+\arccos\sqrt{x^2-y^2}+c=0$

643. $xy=y^x$

644. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$ (Astroide)

645. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$

646. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\ln c=\arctan y/x$

647. Unter welchen Winkeln schneiden einander die Kurven mit den Gleichungen

$$x^2+4y^2-100=0 \quad \text{und} \quad x^2-y^2-20=0?$$

14.5. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher

Die aus 4.2. bekannte Bestimmung von Extremwerten soll nun auf Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen werden. Hierzu gibt es wieder zahlreiche Anwendungen.

Man betrachte eine Funktion $z=f(x;y)$, welche die in Bild 217 dargestellte, annähernd halbkugelförmige Fläche als Bild besitzt. Auf ihr gibt es einen Punkt E, der höher liegt als jeder Punkt seiner Umgebung. Die Funktion $z=f(x;y)$ nimmt

also an der Stelle $(x_E; y_E)$ in bezug auf ihre Umgebung den maximalen Wert z_E an. Man sagt, sie besitze für $x = x_E$ und $y = y_E$ (ein relatives) *Maximum*. Entsprechend besitzt eine Funktion an einer Stelle $(x_E; y_E)$ ein (relatives) *Minimum*, wenn im Funktionsbild der Punkt $E(x_E; y_E; z_E)$ tiefer liegt als jeder Punkt seiner Umgebung (Bild 218).

Eine Fläche besitzt im Maximum- bzw. Minimumpunkt E eine waagerechte Tangentenebene. Jede in der Fläche liegende und durch E gehende Kurve hat dort ebenfalls einen Maximum- bzw. Minimumpunkt und somit eine waagerechte Tangente. Betrachtet man speziell die Kurven k_1 und k_2 parallel zur x,z- bzw. y,z-Ebene, so

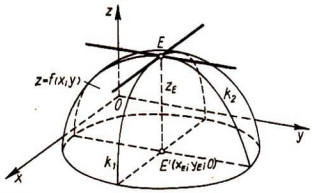


Bild 217

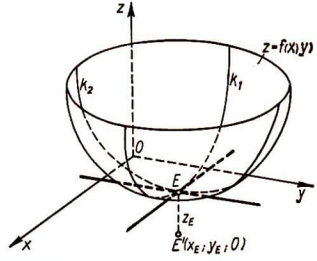


Bild 218

folgt, daß die partiellen Ableitungen $f_x(x_E; y_E)$ und $f_y(x_E; y_E)$ gleich Null sind. Also lauten die notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums

$$f_x(x_E; y_E) = 0; \qquad f_y(x_E; y_E) = 0. \tag{I}$$

Diese Formeln liefern 2 Gleichungen zur Berechnung der unbekannten Koordinaten x_E und y_E der Extremstelle.

BEISPIEL

1. An welcher Stelle nimmt die Funktion

$$z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5 = f(x; y)$$

einen Extremwert an, und wie lautet dieser?

Lösung: Die notwendigen Bedingungen lauten:

$$f_x(x; y) = 4x + 3y - 5 = 0$$
$$f_y(x; y) = 3x + 4y - 2 = 0.$$

Daraus ergibt sich die Extremstelle

$$\underline{\underline{(x_E; y_E) = (2; -1)}}$$

und der extremale Funktionswert zu

$$\underline{\underline{z_E = 1}}.$$

Damit ist aber nur die Existenz einer waagerechten Tangentenebene im Punkte $E(2; -1; 1)$ bekannt. Eine Unterscheidung in Maximum oder Minimum ist noch nicht möglich. Es kann sogar ein 3. Fall eintreten. So ist der in Bild 219 gezeigte Punkt J einer Sattelfläche zwar der Maximumpunkt der Kurve k_1, aber zugleich auch der Minimumpunkt der Kurve k_2. Obwohl also die Tangenten an beiden Kurven waagerecht und damit die partiellen Ableitungen gleich Null sind, ist kein Extrempunkt der Fläche vorhanden. Ein solcher Punkt heißt *Sattel-* oder *Jochpunkt*. Aus diesen Gründen werden noch weitere Bedingungen angegeben, die hier nicht bewiesen werden

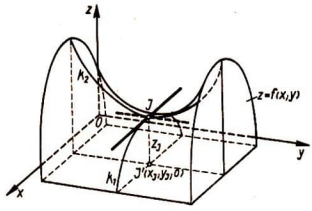


Bild 219

sollen. Zusammen mit (I) erhält man dann die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein eines Extremwertes und für die Unterscheidung von Maximum und Minimum:

Existenz eines	$f_x(x_E; y_E) = 0$	$f_y(x_E; y_E) = 0$
Extremwertes:	$f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E, y_E) > 0$	
Maximum:	$f_{xx}(x_E; y_E) < 0$ (und damit auch	$f_{yy}(x_E; y_E) < 0$)
Minimum:	$f_{xx}(x_E; y_E) > 0$ (und damit auch	$f_{yy}(x_E; y_E) > 0$)

(142)

Ist $f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E; y_E) < 0$, dann ist kein Extremwert vorhanden. Für $f_{xx}(x_E; y_E) \cdot f_{yy}(x_E; y_E) - f_{xy}^2(x_E; y_E) = 0$ sind ein Maximum, ein Minimum oder kein Extremwert möglich, d. h., mit Hilfe der 2. Ableitung kann keine Entscheidung getroffen werden. Dieser Fall wird hier nicht weiter verfolgt.

BEISPIELE

1. (Fortsetzung):
   Für obige Funktion folgt

$$f_{xx}(2; -1) = 4 \qquad f_{yy}(2; -1) = 4 \qquad f_{xy}(2; -1) = 3$$

$$f_{xx}(2; -1) \cdot f_{yy}(2; -1) - f_{xy}^2(2; -1) = 7 > 0.$$

   Die Funktion besitzt also an der Stelle $(x_E; y_E) = (2; -1)$ einen Extremwert, und zwar wegen $f_{xx}(2; -1) > 0$ ein Minimum.

2. Man berechne die Extremwerte der Funktion $f(x; y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$.

Lösung: Aus

$$f_x(x; y) = 6x^2 + 4y = 0$$
$$f_y(x; y) = 4x - 6y^2 = 0$$

folgt

$$x_{E1} = 0 \qquad x_{E2} = 2/3$$
$$y_{E1} = 0 \qquad y_{E2} = -2/3.$$

Die 2. Ableitungen lauten

$$f_{xx}(x; y) = 12x \qquad f_{yy}(x; y) = -12y \qquad f_{xy} = 4.$$

Für x_{E1}, y_{E1} erhält man

$$f_{xx}(0; 0) \cdot f_{yy}(0; 0) - f_{xy}^2(0; 0) = -16 < 0.$$

An der Stelle (0; 0) liegt also kein Extremwert vor.
Für x_{E2}, y_{E2} folgt

$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) - f_{xy}^2\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = 48 > 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = 8 > 0.$$

An der Stelle $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ besitzt die Funktion das Minimum $f\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \frac{119}{27}$.

3. In einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem sind die drei Punkte $A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$ und $C(x_c; y_c)$ durch ihre Koordinaten gegeben. Ein Punkt $M(x; y)$ ist so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Punkten ein Minimum wird.

Lösung: Mit den Bezeichnungen des Bildes 220 soll also das Minimum der Funktion

$$g(u; v; w) = u^2 + v^2 + w^2$$

bestimmt werden. Drückt man u, v, w durch Koordinaten aus, dann erhält man

$$f(x; y) = (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 + (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2.$$

Es folgt dann

$$f_x(x; y) = 2(x - x_a) + 2(x - x_b) + 2(x - x_c) = 0$$
$$f_y(x; y) = 2(y - y_a) + 2(y - y_b) + 2(y - y_c) = 0$$

und daraus

$$x = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \qquad y = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}.$$

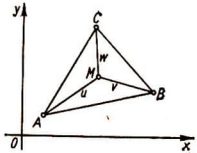


Bild 220

Der gesuchte Punkt M ist also der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.
Wegen

$$f_{xx}(x; y) = f_{yy}(x; y) = 6 > 0 \qquad f_{xy}(x; y) = 0$$
$$f_{xx}(x; y) f_{yy}(x; y) - f_{xy}(x, y) = 36 > 0$$

liegt tatsächlich ein Minimum vor.

Die Bestimmung der Extremwerte läßt sich auch auf Funktionen von beliebig vielen Variablen übertragen. Ist die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

von n unabhängigen Veränderlichen gegeben, dann bildet man die n partiellen Differentialquotienten und setzt sie einzeln gleich Null:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0.$$

Aus den n Gleichungen lassen sich dann die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Extremstelle berechnen. Auf die entsprechenden hinreichenden Bedingungen kann hier nicht eingegangen werden, da sie weitergehende algebraische Hilfsmittel erfordern.

BEISPIEL

4. Man bestimme den Extremwert der Funktion

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$$

Lösung: Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - y + 1 = 0 \\ u_y &= -x + 2y = 0 \\ u_z &= 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

folgt

$$x_E = -\frac{2}{3}; \quad y_E = -\frac{1}{3}; \quad z_E = -1 \quad \text{und damit} \quad u_E = -\frac{4}{3}.$$

Es läßt sich zeigen (u. a. durch Betrachtung der benachbarten Funktionswerte), daß ein Minimum vorliegt.
(Bei eingekleideten Aufgaben geht meist schon aus der Aufgabenstellung die Existenz und Art des Extremwertes hervor.)

AUFGABEN

Man berechne die Extremstellen und -werte der Funktionen 648 bis 655.

648. $z = x^2 - xy + y^2 + 3y$

649. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 8$

650. $z = x^3 + y^3 - 4x - 6y + 7$

651. $z = 5(x + 2y - 1) - (x^2 + xy - y^2)$

652. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 24x + 20y - 5$

653. $z = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

654. $z = x^3y^2(1 - x - y)$

655. $z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$

656. Für $f(x; y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sind die im Bereich $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ liegenden Extremstellen und zugehörigen Extremwerte zu berechnen.

657. Eine Strecke l ist so in 3 Teile zu teilen, daß deren Produkt ein Maximum ist.

658. Ein Dreieck wird festgelegt durch 3 Geraden mit den Gleichungen $y = x + 2$; $y = -x + 3$; $x - 6 = 0$. Man bestimme die Koordinaten des Punktes, für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Dreieckseiten ein Minimum ist.

659. Das Volumen eines Quaders sei V. Wie groß müssen die Kanten sein, damit die Oberfläche ein Minimum wird?

660. Ein Kanal besitzt einen trapezförmigen Querschnitt, dessen Fläche A gegeben ist. Wie müssen Höhe h und Böschungswinkel α gewählt werden, damit der benetzte Umfang U ein Minimum wird?

14.6. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen

Bei vielen Aufgaben der Extremwertbestimmung sind die Variablen nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine oder mehrere Nebenbedingungen miteinander verknüpft.

BEISPIEL

1. Gegeben ist die Summe $2s = x + y + z$ der Dreieckseiten x, y, z. Wie groß müssen die Seiten selbst gewählt werden, damit die Dreiecksfläche A ein Maximum wird?

   Lösung: Mit A wird auch A^2 ein Maximum. Nach der HERONischen Formel folgt die Forderung:

   $$A^2 = f(x; y; z) = s(s-x)(s-y)(s-z) = \text{Maximum},$$

   wobei zwischen den Dreieckseiten außerdem die Nebenbedingung

   $$\varphi(x; y; z) = x + y + z - 2s = 0$$

   besteht.

   Diese Aufgabe läßt sich auf 2 Arten lösen. Man kann sie erstens auf eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen zurückführen, indem man die Gleichung $\varphi(x; y; z) = 0$ nach einer Variablen, z. B. z, auflöst und diesen Wert in die Funktion $f(x; y; z)$ einsetzt. Man erhält dann mit $z = 2s - x - y$ eine Funktion von 2 Variablen:

   $$g(x; y) = s(s-x)(s-y)(x+y-s).$$

   Nach den Methoden des vorigen Abschnitts ergibt sich

   $$g_x(x; y) = -s(s-y)(x+y-s) + s(s-x)(s-y) = 0 \qquad \text{(I)}$$
   $$g_y(x; y) = -s(s-x)(x+y-s) + s(s-x)(s-y) = 0.$$

   Da im Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die 3. Seite, gilt

   $$s - y \neq 0 \text{ und } s - x \neq 0.$$

   Man erhält aus den Gleichungen (I) nach Division durch s und $s - y$ bzw. $s - x$

   $$2s - 2x - y = 0$$
   $$2s - x - 2y = 0$$

   und schließlich $x_E = y_E = z_E = 2s/3$.
   Das Dreieck muß also gleichseitig sein. Wegen

   $$g_{xx}(x_E; y_E) = g_{yy}(x_E; y_E) = -\frac{2}{3}s^2 < 0 \qquad g_{xy}(x_E; y_E) = -\frac{s^2}{3}$$

   $$g_{xx}(x_E; y_E) \cdot g_{yy}(x_E; y_E) - g_{xy}^2(x_E; y_E) = \frac{4s^4}{9} - \frac{s^4}{9} = \frac{s^4}{3} > 0$$

   liegt tatsächlich ein Maximum vor.

Die hier verwandte Lösungsmethode hat den Nachteil, daß sie die Veränderlichen nicht gleichmäßig behandelt. Von den 3 zunächst gleichberechtigten Dreieckseiten nimmt z eine Sonderstellung ein, indem es eliminiert wurde. Man nennt solche Lösungen unsymmetrisch. Für verschiedene Aufgaben mit größerer Gleichungsanzahl, z. B. aus der Ausgleichungsrechnung, ist aber gerade die Symmetrie der Lösung notwendig. Außerdem kann es Schwierigkeiten machen, die Nebenbedingung nach einer Veränderlichen aufzulösen. Hier führt ein 2. Lösungsverfahren zum Ziel, das unter Beschränkung auf eine Funktion $z = f(x; y)$ von 2 Variablen und auf eine Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ anschaulich hergeleitet werden soll.

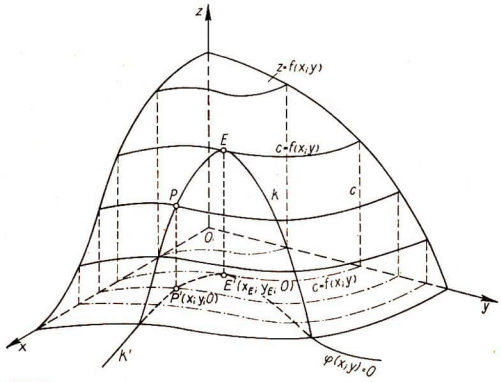


Bild 221

Der Funktion $z = f(x; y)$ läßt sich bekanntlich eine Fläche im Raum zuordnen (Bild 221), während man die Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ als die implizite Darstellung einer Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen auffassen kann. Diese hat aber als Bild eine Kurve k' in der x, y-Ebene.

Liegt für einen Flächenpunkt $P(x; y; z)$ die Grundrißprojektion P' auf der Kurve k', dann erfüllen dessen Koordinaten x, y die Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$. Umgekehrt stellt die Menge aller Punkte der Fläche, deren Koordinaten die Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ befriedigen, eine in der Fläche gelegenen Raumkurve k dar, die die Kurve k' als Grundrißprojektion hat.

Die Aufgabe, das Maximum oder Minimum der Funktion $z = f(x; y)$ unter Beachtung der Nebenbedingung zu berechnen, bedeutet also geometrisch, das Maximum bzw. Minimum dieser Raumkurve zu ermitteln.

Für $z = c =$ konst. erhält man aus der gegebenen Funktion die Gleichung einer Höhenlinie der Höhe c in der Form $c = f(x; y)$ bzw. $f(x; y) - c = 0$. Eine spe-

zielle dieser Höhenlinien berührt die Raumkurve k in dem gesuchten Extrempunkt E (für Bild 221 im Maximumpunkt). Die Grundrißprojektion E' ist der Berührungspunkt zwischen der Kurve k' und der Projektion der Höhenlinie $f(x; y) - c = 0$. Wegen der Berührung haben beide Kurven in E' dieselben Tangenten und damit auch die gleichen Ableitungen. Nach (141) erhält man für die Tangentenneigung von k':

$$y' = -\frac{\varphi_x(x; y)}{\varphi_y(x; y)}$$

und von der Projektion der Höhenlinie

$$y' = -\frac{f_x(x; y)}{f_y(x; y)},$$

gleichgesetzt ergibt dies

$$-\frac{f_x(x; y)}{f_y(x; y)} = -\frac{\varphi_x(x; y)}{\varphi_y(x; y)}.$$

Hieraus folgt, daß die Zähler bzw. die Nenner jeweils proportional sein müssen:

$$f_x(x; y) \sim \varphi_x(x; y) \qquad f_y(x; y) \sim \varphi_y(x; y).$$

Der gemeinsame Proportionalitätsfaktor wird mit $-\lambda$ bezeichnet und heißt *Lagrangescher Multiplikator*. Dann folgt:

$$f_x(x; y) = -\lambda\varphi_x(x; y) \qquad f_y(x; y) = -\lambda\varphi_y(x; y)$$

oder

$$f_x(x; y) + \lambda\varphi_x(x; y) = 0 \qquad f_y(x; y) + \lambda\varphi_y(x; y) = 0. \tag{II}$$

Bildet man nun eine Funktion $F(x; y)$ von der Form

$$F(x; y) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y),$$

dann stellen die Gleichungen (II) die partiellen Ableitungen dieser Funktion dar. Durch Zusammenfassung dieser Ergebnisse ergibt sich folgende **Lagrangesche Multiplikatorenregel** für 2 Variable:

Um die Extremwerte der Funktion $z = f(x; y)$ bei Berücksichtigung der Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ zu bestimmen, setzt man unter Verwendung eines unbekannten Multiplikators λ die Funktion

$$F(x; y) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$$

an. Bildet man ihre partiellen Ableitungen und setzt diese gleich Null, dann kann man aus den beiden Gleichungen

$$F_x(x; y) = f_x(x; y) + \lambda\varphi_x(x; y) = 0$$
$$F_y(x; y) = f_y(x; y) + \lambda\varphi_y(x; y) = 0$$

in Verbindung mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x; y) = 0$$

die Koordinaten x_E, y_E der Extremstelle und den Multiplikator λ berechnen.

Die Frage, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelwert vorliegt, ist hiermit noch nicht entschieden.

BEISPIELE

2. Gesucht werden die Extremstelle und der Extremwert der Funktion $f(x; y) = x^2 + y^2$, wobei zwischen den Variablen die Nebenbedingung $\varphi(x; y) = x + y - 1 = 0$ besteht.

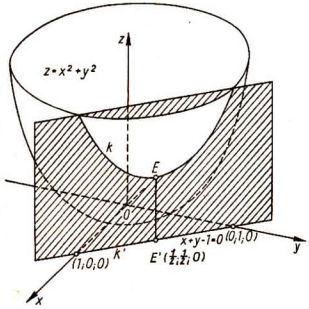


Bild 222

Lösung: Man bildet die Funktion

$$F(x; y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

und erhält durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen die Gleichungen

$$F_x(x; y) = 2x + \lambda = 0$$
$$F_y(x; y) = 2y + \lambda = 0.$$

Daraus folgt $x = y$
und damit aus der Nebenbedingung $x + y - 1 = 0$

$$x_E = y_E = \frac{1}{2}.$$

Für den Funktionswert an dieser Stelle ergibt sich

$$f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bild 222 veranschaulicht das Ergebnis. E stellt einen Minimumpunkt dar.

3. Aus vier gegebenen Strecken der Längen a, b, c, d soll ein Viereck mit maximaler Fläche A gebildet werden. Wie sind die Winkel des Vierecks zu wählen?

Lösung: Mit den Bezeichnungen des Bildes 223 ergibt sich für die Fläche

$$A = \frac{1}{2} ad \sin x + \frac{1}{2} bc \sin y$$

oder, da mit A auch $2A$ ein Maximum wird,

$$f(x; y) = 2A = ad \sin x + bc \sin y.$$

Die Nebenbedingung ergibt sich aus der Tatsache, daß man die Diagonale BD aus den beiden Dreiecken DBC und ABD berechnen kann:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos x = b^2 + c^2 - 2bc \cos y$$

oder

$$\varphi(x; y) = a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y = 0.$$

Damit bildet man

$$F(x; y) = ad \sin x + bc \sin y + \lambda(a^2 + d^2 - 2ad \cos x - b^2 - c^2 + 2bc \cos y).$$

Aus den Gleichungen

$$F_x(x; y) = ad \cos x + 2\lambda ad \sin x = 0$$
$$F_y(x; y) = bc \cos y - 2\lambda bc \sin y = 0$$

folgt

$$\cos x = -2\lambda \sin x$$
$$\cos y = \quad 2\lambda \sin y.$$

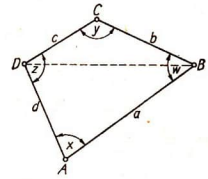


Bild 223

Durch Division beider Gleichungen eliminiert man λ:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = -\frac{\sin x}{\sin y}.$$

Daraus ergibt sich

$$\sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$$

oder

$$\sin(x + y) = 0.$$

Von den beiden Lösungen $x + y = 0$ und $x + y = \pi$ hat nur die zweite geometrisch einen Sinn. Da daraus aber auch $w + z = \pi$ folgt, sind also die Winkel so zu wählen, daß die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt. Das Viereck mit maximalem Flächeninhalt ist deshalb ein Sehnenviereck, d. h., seine Eckpunkte liegen auf einem Kreis.

Die LAGRANGEsche Multiplikatorenregel läßt sich auch auf Funktionen von mehreren Variablen und ebenso auf das Vorhandensein von mehreren Nebenbedingungen übertragen. Ohne Beweis wird hier die dann anzuwendende **verallgemeinerte Lagrangesche Multiplikatorenregel** mitgeteilt:

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

von n Veränderlichen, die durch m Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

miteinander verbunden sind. Um die Extremwerte der Funktion zu bestimmen, bildet man unter Einführung von m Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die Funktion

$$F(x_1; \ldots; x_n) = f(x_1; \ldots; x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1; \ldots; x_n) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x_1; \ldots; x_n)$$

und setzt die partiellen Ableitungen gleich Null:

$$\left.\begin{aligned} F_{x1}(x_1; \ldots; x_n) &= 0 \\ F_{x2}(x_1; \ldots; x_n) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_{xn}(x_1; \ldots; x_n) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Aus diesen $n + m$ Gleichungen (III) und (IV) kann man die Koordinaten x_{1E}, $x_{2E}, \ldots, x_{nE}$ der Extremstelle und die Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ berechnen.

Allgemeine Formeln für die Untersuchung, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, können hier nicht angegeben werden. Es muß für jede Aufgabe gesondert entschieden werden und ergibt sich meist schon aus der Aufgabenstellung heraus.
Da die Multiplikatoren nur als Hilfsgrößen eingeführt wurden, wird ihr Wert selbst meist nicht benötigt. Man versucht deshalb, sie aus den Gleichungen gleich am Anfang der Rechnung zu eliminieren.

BEISPIEL

4. Gegeben sind die Parabel mit der Gleichung

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 9x - 38y + 154 = 0$$

und die Gerade mit der Gleichung

$$3x + 4y + 21 = 0.$$

Gesucht wird der kürzeste Abstand d der Geraden von der Parabel.

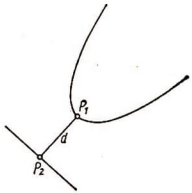


Bild 224

Lösung: Liegen P_1 auf der Parabel und P_2 auf der Geraden (Bild 224), dann gilt:

$$d^2 = f(x_1; x_2; y_1; y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$\varphi_1(x_1; x_2; y_1; y_2) = 16x_1^2 - 24x_1y_1 + 9y_1^2 + 9x_1 - 38y_1 + 154 = 0$$
$$\varphi_2(x_1; x_2; y_1; y_2) = 3x_2 + 4y_2 + 21 = 0.$$

Man bildet

$$F(x_1;\ldots;y_2) = f(x_1;\ldots;y_2) + \lambda_1\varphi_1(x_1;\ldots;y_2) + \lambda_2\varphi_2(x_1;\ldots;y_2)$$

und erhält

$$F_{x1}(x_1;\ldots;y_2) = 2(x_1 - x_2) + \lambda_1(32x_1 - 24y_1 + 9) = 0 \qquad \text{(V)}$$

$$F_{x2}(x_1;\ldots;y_2) = -2(x_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot 3 = 0 \qquad \text{(VI)}$$

$$F_{y1}(x_1;\ldots;y_2) = 2(y_1 - y_2) + \lambda_1(-24x_1 + 18y_1 - 38) = 0 \qquad \text{(VII)}$$

$$F_{y2}(x_1;\ldots;y_2) = -2(y_1 - y_2) + \lambda_2 \cdot 4 = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

Aus (V) und (VII) folgt durch Elimination von λ_1:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{32x_1 - 24y_1 + 9}{-24x_1 + 18y_1 - 38} \qquad \text{(IX)}$$

und entsprechend aus (VI) und (VIII) durch Elimination von λ_2:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{3}{4}. \qquad \text{(X)}$$

Gleichsetzen von (IX) und (X) liefert:

$$y_1 = \frac{4}{3}x_1 + 1 \qquad \text{(XI)}$$

und schließlich (XI) in $\varphi_1(x_1;\ldots;y_2)$ eingesetzt:

$$x_{1E} = 3 \qquad y_{1E} = 5.$$

Damit erhält man aus (X) und $\varphi_2(x_1;\ldots;y_2)$:

$$x_{2E} = -3 \qquad y_{2E} = -3$$

und schließlich für den gesuchten Abstand

$$d = 10.$$

AUFGABEN

661. Man bestimme die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $z = 3 - \frac{3}{4}x - y$ unter Beachtung der Nebenbedingung $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ und überlege sich anschaulich wie in Bild 222, wo ein Maximum oder Minimum vorliegt.

* Man berechne die Extremstellen und Extremwerte der Funktionen 662 bis 665 mit Nebenbedingungen.

662. $f(x;y) = xy \qquad \varphi(x;y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$

663. $u = x^3 + y^3 + z^3 \qquad x + y + z = 6$

664. $u = x + y + z \qquad \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{16}{z} = 1$

665. $u = xyz \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

666. Man behandle das Beispiel 1. aus 14.6. nach der LAGRANGEschen Methode.

667. Welcher Punkt P_1 der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ hat von dem Punkt $P_0(0;1)$ die kleinste Entfernung?

668. Die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, lautet $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$. Man bestimme die Halbachsen a und b.

669. Welches dem Kreis mit dem Radius r einbeschriebene Fünfeck besitzt den größten Inhalt?

670. Gegeben ist ein Sektor mit dem Inhalt A. Wie groß muß der Radius sein, damit der Sektorumfang ein Minimum wird?

671. Man bestimme den Kreiszylinder, der bei gegebener Oberfläche O das größte Volumen besitzt.

672. Die Zahl a ist so in 3 Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt ein Maximum ist.

15. Mehrfache Integrale

15.1. Flächenberechnung

15.1.1. Cartesische Koordinaten

Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wurde als Grenzwert einer Summe entwickelt, als es galt, die Fläche unter einer Kurve zu berechnen. Die in Rechtecke zerlegte Fläche hatte den genäherten Wert

$$\sum_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x,$$

wobei jeder Summand $f(x)\,\Delta x$ ein solches Rechteck darstellte. Es ist aber nun möglich, bereits jedes einzelne Rechteck wiederum durch eine Summe von Flächenteilchen darzustellen. Man wählt als solche Teilchen Rechtecke mit den Seiten Δx und Δy (Bild 225).
Ein „großes" Rechteck hat dann angenähert den Inhalt

$$\sum_{y=0}^{f(x)} \Delta y\,\Delta x;$$

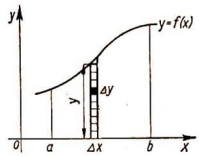


Bild 225

die Summation erfolgt in Richtung der y-Achse bis zur Kurve der Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$. Um die Gesamtfläche unter der Kurve zwischen den Abszissen a und b zu erhalten, ist dann noch in Richtung der x-Achse von a bis b über alle „großen" Rechtecke zu summieren. Man schreibt also die Doppelsumme

$$A \approx \sum_{x=a}^{b} \sum_{y=0}^{f(x)} \Delta y\,\Delta x.$$

Durch Grenzübergang gehen die Summen in Integrale über, und man erhält:

$$\boxed{A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=0}^{f(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$$

$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ nennt man *Flächendifferential.*

BEISPIELE

1. Berechnung der Fläche des Viertelkreises (Bild 226).

Lösung: Man lege ein *beliebiges* Flächendifferential $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in den Kreis. Integriert man zunächst in der y-Richtung, so lagert man gewissermaßen die Differentiale $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ übereinander von $y=0$ bis $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Es ist dann, wie man sagen kann, ein *Fadendifferential* entstanden:

$$\mathrm{d}A=\int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Man beachte, daß bei dieser Integration x und auch $\mathrm{d}x$ konstant bleiben. Integriert man nun über die Fadendifferentiale, die in Richtung x-Achse von 0 bis r nebeneinanderliegen, so ergibt sich die Viertelkreisfläche zu

$$A=\int_{x=0}^{r}\int_{y=0}^{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

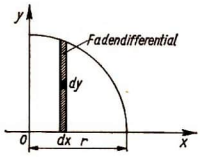


Bild 226

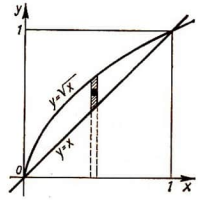


Bild 227

Dieses Doppelintegral setzt sich aus einem *inneren* und einem *äußeren* Integral zusammen. Man berechne zunächst das innere Integral, zu dem das Differential $\mathrm{d}y$ gehört (d. h. also Integration in der Richtung der y-Achse, y ist die Integrationsvariable).
Symbolisch schreibt man:

$$A=\int_{x=0}^{r}y\Big|_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Das verbleibende äußere Integral mit dem Differential $\mathrm{d}x$ hat konstante Grenzen und kann nun berechnet werden. Man erhält

$$A=\frac{1}{4}\pi r^2.$$

2. Man berechne die Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y=x$ und $y=\sqrt{x}$ begrenzt wird (Bild 227).

Lösung: Ein beliebig in die Fläche gelegtes Flächendifferential ist zunächst in Richtung y-Achse von $y=x$ bis $y=\sqrt{x}$ zu integrieren. Das so erhaltene Fadendifferential ist sodann in

x-Richtung von 0 bis 1 zu integrieren, weil sich die Kurven für $x = 1$ schneiden. Man erhält also

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} y\Big|_{x}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_{x=0}^{1} (\sqrt{x} - x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

15.1.2. Angepaßte Koordinaten

Oftmals vereinfacht sich die Berechnung mehrfacher Integrale, wenn man Koordinaten einführt, die sich der zu berechnenden Fläche „anpassen". So erscheint es z. B. zweckmäßig, bei der Berechnung ebener Flächen, die durch Drehung eines Radiusvektors erzeugt werden, *Polarkoordinaten* anzuwenden. In der Ebene erhält man dann ein Flächendifferential (Bild 228), das von zwei Differentialen dr des Leitstrahles und zwei Bogendifferentialen $r\,d\varphi$ um so besser rechteckförmig begrenzt wird, je kleiner man die Differentiale dr und $d\varphi$ ansetzt. Es ist also

$$dA = r\,dr\,d\varphi.$$

Die Integration, d. h. das Ausfüllen der Fläche mit diesen Flächendifferentialen dA, erfolgt einmal in der Richtung des Leitstrahles (r-Richtung) und dann noch durch Drehung des erhaltenen, nach O hin zugespitzten Fadendifferentials um den Ursprung in Richtung des Arguments φ. Man kann also schreiben:

$$\boxed{A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=0}^{r(\varphi)} r\,dr\,d\varphi.} \tag{144}$$

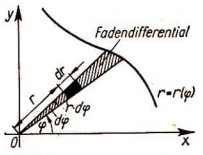


Bild 228

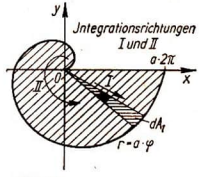


Bild 229

BEISPIELE

1. Berechnung der vom Leitstrahl bei der ersten Umdrehung überstrichenen Fläche der Spirale mit der Gleichung $r = a\varphi$ $(a > 0)$ (Bild 229).

   Lösung: Man legt in die Fläche ein beliebiges Flächendifferential dA. Integriert man nun bei konstantem φ „von innen nach außen", so muß man von 0 bis $a\varphi$ über die Variable r integrieren; sodann wird in der φ-Richtung mit der Variablen φ von 0 bis 2π integriert, also

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3.$$

2. Berechnung der von der Kardioide $r = 1 + \cos\varphi$ umschlossenen Fläche (Bild 230).

Lösung: Unter Beachtung der Symmetrie gilt das Integral

$$A = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} r^2 \Big|_0^{1+\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

AUFGABEN

673. Man berechne mit einem Doppelintegral die Fläche der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

674. Für die Kurve mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$$

berechne man die umschlossene Fläche mit einem Doppelintegral.

675. Man berechne die von den Kurven mit den Gleichungen $y = \mathrm{e}x^2$ und $y = \mathrm{e}^x$ begrenzte Fläche mit einem Doppelintegral ($x \geqq 0$).

676. Mit einem Doppelintegral berechne man die Fläche, welche von der Kurve mit der Gleichung $r = \sin\varphi\cos\varphi$ umschlossen wird.

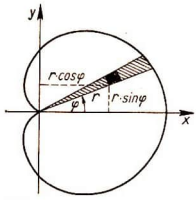


Bild 230

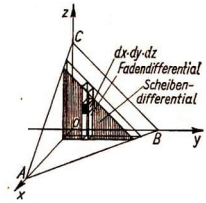


Bild 231

15.2. Volumenberechnung

15.2.1. Cartesische Koordinaten

Es bereitet keine Schwierigkeiten, das für die Flächenberechnung entwickelte Doppelintegral nun für die Volumenberechnung zum dreifachen Integral zu erweitern. Ein *Volumendifferential* (Quader) $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ liege im x, y, z-Koordinatensystem so, daß seine Seiten je zu den drei Raumachsen parallel laufen. Ein vorgegebenes Volumen (im Bild 231 ist dies die Pyramide $OABC$) kann mit diesen Volumendifferentialen in den drei Achsenrichtungen nacheinander angenähert ausgefüllt werden:

1. Summation in Richtung der z-Achse ergibt ein *Fadendifferential*,
2. Summation der Fadendifferentiale in Richtung der y-Achse ergibt ein *Scheibendifferential*,
3. Summation der Scheibendifferentiale in Richtung der x-Achse ergibt das gesamte *Volumen*.

Diese Betrachtung führt im Grenzübergang zu dem dreifachen Integral (in allgemeiner Schreibweise):

$$V = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{145}$$

An einem Beispiel soll das Festlegen der Integrationsgrenzen und die Berechnung des Integrales gezeigt werden. Die Parabel mit der Gleichung $z = y^2$ rotiere um die z-Achse. Das Volumen des entstehenden Paraboloides soll berechnet werden, wenn die Höhe des Paraboloides $h = 9$ sei. In Bild 232 ist das Paraboloid in Grund- und Aufriß dargestellt.

Man legt ein Volumendifferential $\mathrm{d}V$ *beliebig* in den Körper. Die Integration dieses Differentiales in Richtung der z-Achse erfolgt von der Paraboloidoberfläche bis zum Deckkreis des Körpers. Hat $\mathrm{d}V$ die Koordinaten x, y, z, so bleiben bei dieser Integration x und y konstant, während sich z ändert. Sein oberster Wert ist 9. Hat $\mathrm{d}V$ von der z-Achse den Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so ist der unterste Wert von z, der einem Punkt der drehenden Parabel $z = r^2$ entspricht, gleich $r^2 = x^2 + y^2$. Im Bild 232 ist diese Parabel im Aufriß angedeutet.

Das Fadendifferential ist somit

$$\mathrm{d}V_1 = \int_{z=x^2+y^2}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Integriert man nun die Fadendifferentiale in Richtung der y-Achse, so legt man gewissermaßen einen ebenen Schnitt durch das Paraboloid, der im Grundriß als Sehne senkrecht zur x-Achse im Kreis mit dem Radius $r_1 = 3$ des Deckkreises erscheint. Bei dieser Integration bleibt x konstant, und y wandert von $-\sqrt{9 - x^2}$ bis $+\sqrt{9 - x^2}$.

Also ist das Scheibendifferential

$$\mathrm{d}V_2 = \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

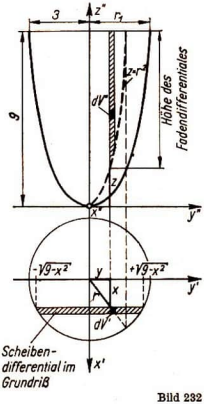


Bild 232

Nun wird schließlich die Integration in Richtung der x-Achse ausgeführt. Das Scheibendifferential durchwandert das Paraboloid von $x = -3$ bis $x = +3$. Es ergibt sich

$$V = \int_{x=-3}^{+3} \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{9} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Die Integration hat sich in drei Schritten zu vollziehen (wobei — wie bei mehrfachen Integralen üblich — in den Zwischenrechnungen statt der Integrationsgrenzen nur die Integrationsvariablen angegeben sind):

1. Integration nach z:

$$V = \int_x \int_y z \Big|_{x^2+y^2}^{9} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_x \int_y (9 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x;$$

2. Integration nach y:

$$V = \int_x \left(9y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{9-x^2}}^{+\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_x \left[2(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2} - \frac{2}{3}(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{3}\int_x (9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x;$$

3. Integration nach x:

$$V = \frac{4}{3}\left[9\int_x \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int_x x^2\sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x\right].$$

Beide auftretenden Integraltypen wurden bereits behandelt; es ergibt sich

$$V = \frac{81}{2}\pi.$$

Das Beispiel zeigt das Spiel der Integralgrenzen. Beim inneren Integral hängen diese (zumindest die untere) von x und y ab, beim mittleren Integral nur noch von x, und beim letzten Integral sind beide Grenzen konstant. Daher kann dieses auch nur als letztes integriert werden, da bei einer anderen Reihenfolge sonst das letzte Integral beim Einsetzen der Grenzen wieder Variable in den Wert des Integrales einführen würde.

15.2.2. Angepaßte Koordinaten

Für die Berechnung vieler Körper, insbesondere Drehkörper, führt man *Zylinderkoordinaten* ein. In dem im Bild 233 dargestellten räumlichen Koordinatensystem $(x; y; z)$ kann die Lage eines Raumpunktes festgelegt werden durch die 3 Koordinaten φ, r, z. Es bedeuten r und φ die Polarkoordinaten in der x,y-Ebene, und z gibt die Höhenlage des Punktes über der x,y-Ebene an. Das Volumendifferential ergibt sich zu

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

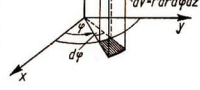


Bild 233

Die Integration geschieht jetzt in Richtung der drei Zylinderkoordinaten:

1. in der z-Richtung;
2. in der r-Richtung;
3. in der φ-Richtung.

Natürlich kann die Reihenfolge der Integrationsrichtungen vertauscht werden; die Hauptsache ist, daß das zu berechnende Volumen vollständig mit den Volumendifferentialen ausgefüllt wird und daß im letzten Integral konstante Grenzen auftreten. Dieses letzte Integral muß nur noch eine Variable mit ihrem Differential enthalten. Als einfachstes Beispiel diene zunächst der Drehzylinder vom Radius r_1 und der Höhe h. Er stehe auf der x,y-Ebene so, daß seine Achse auf der z-Achse liegt. Man lege in das Zylinderinnere beliebig ein Volumendifferential. Die Integration in der z-Richtung bei konstantem φ und r ergibt das *Fadendifferential*

$$\mathrm{d}V_1 = \int_{z=0}^{h} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Die nun erfolgende Integration in der r-Richtung liefert das *Scheibendifferential*

$$\mathrm{d}V_2 = \int_{r=0}^{r_1}\int_{z=0}^{h} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Endlich ergibt die Integration in der φ-Richtung das gesamte Zylindervolumen:

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r_1}\int_{z=0}^{h} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r_1} rh\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= h\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{r_1^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = h\,\frac{r_1^2}{2}\,2\pi = \underline{\underline{\pi r_1^2 h}}.$$

Da bei diesem Integral *alle* Grenzen konstant sind, hätte man auch in beliebig anderer Reihenfolge integrieren können, wovon man sich durch Nachrechnen leicht überzeugen kann. Man mache sich hierbei auch die geometrische Auffüllung des Zylindervolumens mit den Volumendifferentialen klar.

BEISPIELE

1. Das im vorigen Abschnitt berechnete Paraboloid soll mit Zylinderkoordinaten ermittelt werden.

   Lösung: Wenn man der Reihe nach in der z-, r- und φ-Richtung integriert, gilt das dreifache Integral

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{3}\int_{z=r^2}^{9} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi}\int_{r} r(9-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{\varphi}\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3 \mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{81}{4}\,2\pi = \underline{\underline{\frac{81}{2}\,\pi}}.$$

2. Die Halbkugel vom Radius R werde von einem Zylinder vom Radius $R/2$ so durchdrungen, daß der Kugelmittelpunkt auf dem Zylindermantel liegt. Man berechne das beiden Körpern gemeinsame Volumen.

Lösung: Bild 234a zeigt die beiden Körper passend in ein Koordinatensystem gestellt. Der Grundkreis des Zylinders hat, wie man aus Bild 234b erkennt, in Polarkoordinaten die Gleichung $r = R\cos\varphi$. Da beide Körper in bezug auf die y,z-Ebene symmetrisch liegen, berechnet man nur das gemeinsame Volumen auf der Seite der positiven x-Achse, also die Hälfte des gesuchten Volumens. Die Integration erfolgt nun mit Zylinderkoordinaten in drei Richtungen:

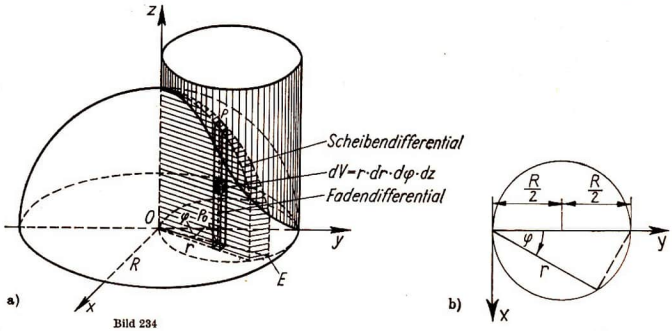


Bild 234

1. *Integration in der z-Richtung* von $z = 0$ bis an die Kugeloberfläche zum Punkte P. P hat, wie aus $\triangle OP_0P$ folgt, die z-Koordinate $\sqrt{R^2 - r^2}$.
2. *Integration in der r-Richtung* von $r = 0$ bis zum Umfang des Grundkreises, also bis $R\cos\varphi$.
3. *Integration in der φ-Richtung* von $\varphi = 0$ bis $\pi/2$.

1. ergibt das Fadendifferential, welches durch 2. von innen nach außen geschoben wird und dabei das Scheibendifferential bildet. 3. dreht das Scheibendifferential durch das gesuchte Halbvolumen mit der z-Achse als Drehachse.

Es gilt somit

$$\frac{V}{2} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R\cos\varphi} \int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi} \int_{r} r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Die Substitution $R^2 - r^2 = t$ mit $-2r\,dr = dt$ führt das Integral über in

$$\frac{V}{2} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{t=R^2\sin^2\varphi}^{R^2} \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_{\varphi} t\sqrt{t}\,\Big|_{R^2\sin^2\varphi}^{R^2} d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_{\varphi} (1 - \sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}\left(\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3} + \cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)}}.$$

Man beachte wiederum an diesem Beispiel, daß eine Veränderung der Reihenfolge der Integration hier nicht möglich ist. Würde man zum Beispiel zuerst nach r integrieren, so käme bei der folgenden Integration nach z die Variable r wieder ins Integral. Man sieht wieder, daß nur bei konstanten Grenzen die Integrationsreihenfolge beliebig ist.

AUFGABEN

677. Man berechne das Kugelvolumen mit cartesischen und mit Zylinderkoordinaten.

678. Man entwickle mit cartesischen und mit Zylinderkoordinaten die Volumenformel für den Drehkegel.

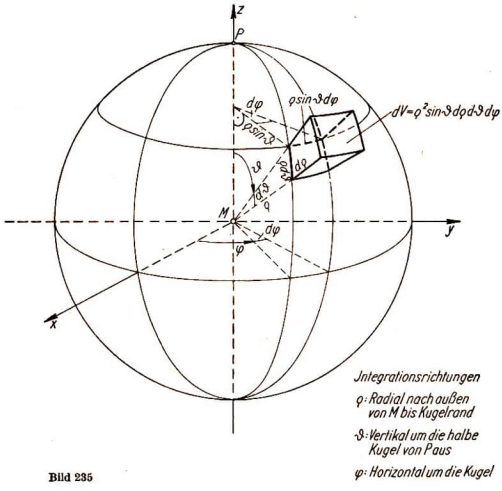


Bild 235

679. Man berechne das Volumen des Rotationsellipsoides mit den Achsen $2a$ und $2b$ (Drehachse $2a$).

680. Eine Kugel (R) verschneidet sich mit einem Drehzylinder ($R/2$). Die Achsen beider Körper fallen zusammen. Man berechne das beiden Körpern gemeinsame Volumen.

681. Der Mittelpunkt einer Kugel ist zugleich Spitze eines Drehkegels. Man berechne das vom Drehkegel ausgeschnittene Kegelvolumen.
Kugelradius: R; Kegelgrundkreisradius: R; Kegelhöhe: $2R$.

682. Der Radius einer Kugel sei ϱ. Auf dieser Kugel kann man einen Oberflächenpunkt durch *Kugelkoordinaten* angeben:

1. Bogenabstand vom Pol (ϑ),
2. Argument φ (Bild 235).

Verändert man nun ϱ, φ und ϑ um ihre Differentiale $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}\vartheta$, so ergibt sich ein Volumendifferential

$$\mathrm{d}V = \varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \quad \text{(Bild 235)}.$$

Man berechne mit diesem Differential das Volumen einer Kugel vom Radius R, indem man der Reihe nach in den Richtungen ϱ, φ und ϑ integriert.

15.3. Schwerpunkt- und Momentenberechnung

15.3.1. Schwerpunkte und Momente von Bögen

Die Lage des Schwerpunktes eines Kurvenstückes bestimmt man durch folgende Überlegung (Bild 236). In bezug auf die x-Achse hat jedes einzelne Bogendifferential ein statisches Moment $\mathrm{d}M_x = y\,\mathrm{d}s$. Die Summe dieser Momente zwischen zwei allgemein mit (1) und (2) bezeichneten Grenzen

$$\int_{(1)}^{(2)} y\,\mathrm{d}s$$

muß gleich dem statischen Moment sein, das sich ergibt, wenn man sich die gesamte Bogenlänge „im Schwerpunkt vereinigt" denkt. Hat der Schwerpunkt die Ordinate y_S, so muß also gelten (vgl. 11.2.3.):

$$\int_{(1)}^{(2)} y\,\mathrm{d}s = s\,y_S$$

oder

$$y_S = \frac{\int_{(1)}^{(2)} y\,\mathrm{d}s}{s}. \qquad \text{(I)}$$

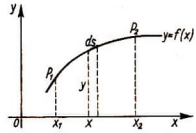


Bild 236

Die analoge Überlegung für das statische Moment in bezug auf die y-Achse führt zur Abszisse x_S des Schwerpunktes:

$$x_S = \frac{\int_{(1)}^{(2)} x\,\mathrm{d}s}{s}. \qquad \text{(II)}$$

Diese Formeln lassen sich ohne weiteres auf Parameterdarstellung und Polarkoordinaten übertragen. Man erhält

$$x_S = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t}; \qquad y_S = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t} \qquad (146)$$

Mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ folgt weiter:

$$x_S = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)\sqrt{r^2+\dot r^2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,\mathrm{d}\varphi}\;;\quad y_S = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)\sqrt{r^2+\dot r^2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,\mathrm{d}\varphi} \tag{147}$$

BEISPIELE

1. Bestimmung der Schwerpunktkoordinaten des Zykloidenbogens mit den Gleichungen

$$x = a(t-\sin t);\qquad y = a(1-\cos t).$$

Lösung: Die Bogenlänge wurde bereits zu $8a$ ermittelt. Das Bogenlängendifferential $\mathrm{d}s$ ergibt sich mit $\dot x = a(1-\cos t)$ und $\dot y = a\sin t$ zu $\mathrm{d}s = a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = 2a\sin{}^t/_2\,\mathrm{d}t$. Aus (146) folgt nun:

$$x_S = \frac{1}{8a}\,2a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{4}\left[\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Also gilt:

$$x_S = \frac{a}{4}\,4\pi = \underline{\underline{a\pi}}.$$

Der Schwerpunkt liegt auf der mittleren Ordinate eines Zykloidenbogens, was auch aus der Symmetrie der Kurve ersichtlich ist.

Für y_S gilt

$$y_S = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{4}\left[\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos t\,\mathrm{d}t\right].$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t;$$

mit $z = \cos{}^t/_2$ ergibt sich: $J_2 = -4/3$. Also ist

$$y_S = \frac{a}{4}\left(4+\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}a}}.$$

2. Bestimmung des Schwerpunktes des Bogens der Kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ für $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

Lösung: Die Bogenlänge wurde bereits zu $4a$ berechnet. Das Bogenlängendifferential ist, wegen $\dot{r} = -a\sin\varphi$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{(vgl. 13.3.)}.$$

Also gilt nach (147):

$$x_S = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\varphi}{2} - \cos^3\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^5 t - \cos^3 t)\,\mathrm{d}t.$$

Beide Teilintegrale sind dem Typ nach bekannt; man erhält schließlich

$$x_S = 2a\left(\frac{16}{15} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{5}.$$

Für y_S ergibt sich:

$$y_S = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{4a}{5}.$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes sind also $\underline{\underline{\left(\frac{4a}{5}; \frac{4a}{5}\right)}}$.

Nach der Definition des *Trägheitsmomentes* läßt sich dieses für *Kurvenstücke* berechnen, indem man die einzelnen Bogendifferentiale mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Bezugsachse bzw. vom Pol multipliziert und die erhaltenen Produkte integriert. Für die x-Achse als Bezugsachse gilt:

$$\boxed{I_x = \int_{(1)}^{(2)} y^2\,\mathrm{d}s} \qquad (148\mathrm{a})$$

Für die y-Achse gilt entsprechend:

$$\boxed{I_y = \int_{(1)}^{(2)} x^2 \, \mathrm{d}s} \tag{148b}$$

Neben diesen *äquatorialen Trägheitsmomenten* gibt es auch das *polare Trägheitsmoment* mit dem Ursprung als Pol (Bezugspunkt). Es gilt hier offenbar:

$$\boxed{I_p = I_x + I_y = \int_{(1)}^{(2)} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s} \tag{148c}$$

Die Übertragung dieser Formeln auf die Parameterdarstellung und auf Polarkoordinaten ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t \\ I_p &= \int_{t_1}^{t_2} \{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}t \end{aligned}} \tag{149}$$

und

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\varphi \\ I_y &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\varphi \\ I_p &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned}} \tag{150}$$

BEISPIELE

1. Man berechne das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreisumfanges in bezug auf einen Durchmesser.

   Lösung: Legt man den Kreis mit seinem Mittelpunkt in den Nullpunkt des Koordinatensystems, so kann die x-Achse als Bezugsachse angesehen werden. Jedes Bogenlängendifferential hat dann den Abstand y von der x-Achse, und es gilt bei Parameterdarstellung:

$$I_x = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \, \mathrm{d}s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 t \, \mathrm{d}s.$$

Weil $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{d}t$ ist, folgt weiter

$$I_x = 4R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2R^3 \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^3\,\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi R}{2}R^2 = \underline{\underline{\frac{U_0}{2}R^2}},$$

wenn U_0 der Kreisumfang ist.

4. Man berechne das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreisumfanges in bezug auf eine Tangente.

Lösung: Man wähle die y-Achse als Tangente (Bild 237). Die Gleichung des Kreises heißt in Polarkoordinaten $r = 2R\cos\varphi$. Jedes Bogenlängendifferential hat von der y-Achse den Abstand $r\cos\varphi$.
Also gilt

$$I_y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}s = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2\cos^4\varphi\,\mathrm{d}s.$$

Es ist $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{4R^2\cos^2\varphi + 4R^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2R\,\mathrm{d}\varphi$; somit ergibt sich

$$I_y = 16R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi R^3 = \underline{\underline{\frac{3}{2}U_0R^2}}.$$

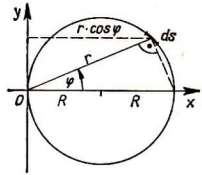


Bild 237

5. Man berechne das polare Trägheitsmoment der Kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ in bezug auf den Ursprung als Pol.

Lösung: Es ist mit $\mathrm{d}s = 2a\cos{}^{\varphi}/_{2}\,\mathrm{d}\varphi$ das folgende Integral anzusetzen:

$$I_p = 2\int_0^{\pi} r^2\,\mathrm{d}s = 4a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 16a^3 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 16a^3 \int_0^{\pi} \cos^5\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 32a^3 \left(\sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t + \frac{1}{5}\sin^5 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 32a^3\,\frac{8}{15} = \underline{\underline{\frac{32}{15}U_K a^2}},$$

wobei $U_K = 8a$ der Umfang der Kardioide ist.

15.3.2. Schwerpunkte und Momente von Flächen

Die Berechnung des *Schwerpunktes von Flächen* erfolgt nach der gleichen Überlegung, wie sie in 15.3.1. für Kurven angestellt wurde: Man bildet die Summe der statischen Momente aller Flächendifferentiale $\mathrm{d}A$ und setzt diese gleich dem statischen Moment der „im Schwerpunkt vereinigt" gedachten Fläche. Es gelten also die Formeln

(cartesisch):

x-Achse als Bezugsachse

$$\boxed{y_S = \frac{1}{A}\int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \qquad (151\,a)$$

y-Achse als Bezugsachse

$$\boxed{x_S = \frac{1}{A}\int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x} \qquad (151\,b)$$

x und y unter dem Integral sind die jeweiligen Abstände der Flächendifferentiale von der y- bzw. der x-Achse.
Liegt die Kurve, welche die Fläche begrenzt, in Parameterdarstellung vor oder in Polarkoordinaten, so muß (151) auf diese Darstellungen abgewandelt werden. Dies soll an Beispielen gezeigt werden.

BEISPIELE

1. Man berechne die Lage des Schwerpunktes der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = x$ und $y = \sqrt{x}$ begrenzt wird (Bild 227).

   Lösung: Die Fläche wurde bereits zu $A = 1/6$ ermittelt (15.1.1., Beispiel 2.) Nun gilt

$$y_S = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 6\int_x \frac{y^2}{2}\Big|_x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}\int_x (x - x^2)\,\mathrm{d}x = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 6\int_{x=0}^{1} x\,y\Big|_x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 6\int_x \left(x\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x = 6\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

   Der Schwerpunkt hat die Koordinaten $\underline{x_S = 2/5;\ y_S = 1/2}$.

2. Man berechne den Schwerpunkt der von der Kardioide ($r = 1 + \cos\varphi$) umschlossenen Fläche (Bild 230).

   Lösung: Die umschlossene Fläche wurde zu $A = {}^3/_2\pi$ berechnet. Für die Schwerpunktkoordinaten gilt:

$$x_S = \frac{1}{A}\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\cos\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3\pi}\int_\varphi \frac{r^3}{3}\cos\varphi\Big|_0^{1+\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2}{9\pi}\int_\varphi (1 + \cos\varphi)^3\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{6}$$

$$y_S = \frac{1}{A}\int_{\varphi=-\pi}^{+\pi}\int_{r=0}^{1+\cos\varphi} r\sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_\varphi \frac{r^3}{3}\sin\varphi\Big|_0^{1+\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{9\pi}\int_\varphi (1 + \cos\varphi)^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Also:

$$x_S = \frac{5}{6}; \qquad y_S = 0.$$

3. Wo hat die Fläche, die von der x-Achse und der Kurve mit den Gleichungen $x = t; y = 1 - t^2$ begrenzt wird, ihren Schwerpunkt?

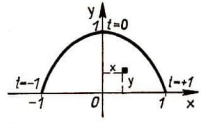


Bild 238

Lösung: Die Kurve ist im Bild 238 dargestellt. Für die Berechnung eines beliebig in die Fläche gelegten Flächendifferentiales dA stehen die Formeln $dy\,dx$ bzw. $r\,dr\,d\varphi$ zur Verfügung. Wählt man die erste Formel, so sind die Abstände von den Achsen cartesisch mit x und y anzugeben. Daher rechnet man die gegebene Funktion in cartesischer Schreibweise durch Elimination von t um. Man erhält $y = 1 - x^2$. Nun gilt:

$$x_S = \frac{1}{A}\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} x\,dy\,dx \quad \text{und} \quad y_S = \frac{1}{A}\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} y\,dy\,dx$$

mit $A = 2\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$.

Die Berechnung der Integrale ergibt:

$$x_S = \frac{3}{4}\int_x xy\Big|_0^{1-x^2} dx = \frac{3}{4}\int_x (x - x^3)\,dx = 0$$

$$y_S = \frac{3}{4}\int_x \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x^2} dx = \frac{3}{4\cdot 2}\int_x (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{16}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$x_S = 0; \qquad y_S = \frac{2}{5}.$$

Man beachte besonders, daß die unter den Integralen für x_S und y_S stehenden Variablen x und y Koordinaten eines beliebigen Flächendifferentiales sind, also *nicht* die laufenden Koordinaten der Kurve darstellen!

Die Berechnung der *Trägheitsmomente von Flächen* erfolgt mit den Formeln, welche ohne weiteres aus der Definition des Trägheitsmomentes abgeleitet werden können. Für die x-Achse als Bezugsachse gilt (cartesisch):

$$I_x = \int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} y^2\,dy\,dx \tag{152a}$$

Für die y-Achse gilt entsprechend:

$$I_y = \int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} x^2\,dy\,dx \tag{152b}$$

Für Polarkoordinaten gehen die Formeln über in

$$I_x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=0}^{r(\varphi)} r^3 \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi \tag{153a}$$

$$I_y = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=0}^{r(\varphi)} r^3 \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi \tag{153b}$$

Das polare Trägheitsmoment mit dem Ursprung als Pol heißt:

$$I_p = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \tag{152c}$$

$$I_p = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=0}^{r(\varphi)} r^3 \, dr \, d\varphi \tag{153c}$$

Liegt die Funktion in Parameterdarstellung vor, ist es wie im Beispiel 3 angebracht, die Funktion in die cartesische Form bzw. in Polarkoordinaten umzuschreiben.

BEISPIELE

4. Es soll das polare Trägheitsmoment der Lemniskatenfläche in bezug auf den Ursprung als Pol berechnet werden (Bild 189, S. 344).

   Lösung: Die Gleichung der Lemniskate heißt in Polarkoordinaten

   $$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

   Unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Kurve gilt für das gesuchte Trägheitsmoment:

   $$I_p = 4 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi} r^4 \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = a^4 \int_{\varphi} \cos^2 2\varphi \, d\varphi =$$

   $$= \frac{a^4}{2} \int_{\varphi} (1 + \cos 4\varphi) \, d\varphi = \frac{a^4}{2} \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{\pi a^4}{8}}}.$$

5. Man berechne das äquatoriale Trägheitsmoment der Fläche, die von der Kurve mit den Gleichungen

   $$x = \cos t; \qquad y = \cos^2 t + \sin t$$

   umschlossen wird, in bezug auf die y-Achse (Bild 196, S. 353).

   Lösung: Arbeitet man mit dem cartesischen Flächendifferential $dy\,dx$, so ist die Gleichung der Kurve in cartesischen Koordinaten aufzustellen. Es ergibt sich

   $$y = \cos^2 t + \sqrt{1 - \cos^2 t} = x^2 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Diese Gleichung stellt den oberhalb der Geraden $y = 1$ liegenden Kurventeil dar. Der Restteil der Kurve hat die Gleichung

$$y = x^2 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Somit gilt für I_y

$$I_y = 2\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2-\sqrt{1-x^2}}^{x^2+\sqrt{1-x^2}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\int_x x^2\left(x^2+\sqrt{1-x^2}-x^2+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 4\int_x x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $x = \sin\varphi$, $\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ erhält man

$$I_y = 4\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_\varphi \sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_\varphi (1-\cos 4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Man berechne das polare Trägheitsmoment der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a, wenn ein Eckpunkt Pol ist.

Lösung: In Bild 239 ist P der Pol und r der Abstand eines Flächendifferentiales vom Pol. Die Strecke PR hat die Länge

$$\frac{h}{\cos\varphi} = h\sqrt{1+\tan^2\varphi} = h\sqrt{1+\frac{x^2}{h^2}} = \sqrt{h^2+x^2}.$$

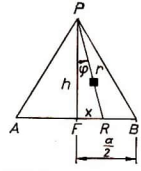


Bild 239

Für Polarkoordinaten gilt:

$$I_p = 2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{\frac{h}{\cos\varphi}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nun soll an Stelle von φ die Variable x eingeführt werden, da sonst der Integrand $\cos^4\varphi$ im Nenner erhält und schwer lösbar wird. Es ist

$$\tan\varphi = \frac{x}{h}, \quad \text{also} \quad \varphi = \arctan\frac{x}{h}, \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral geht unter Beachtung der obigen Umrechnung von $h/\cos\varphi$ über in

$$I_p = 2\int_{x=0}^{\frac{a}{2}}\int_{r=0}^{\sqrt{h^2+x^2}} r^3\,\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{für}\quad \varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{wird} \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{x}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}, \quad \text{also:} \quad x = \frac{a}{2}\right).$$

Die Integration ergibt:

$$I_p = \frac{h}{2}\int_x \frac{(h^2+x^2)^2}{h^2+x^2}\,dx = \frac{h}{2}\int_x (h^2+x^2)\,dx = \frac{h}{2}\left(h^2x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{ah}{4}\left(h^2 + \frac{a^2}{12}\right).$$

Da $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist, folgt

$$I_p = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}\left(\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{12}\right) = \frac{10a^4\sqrt{3}}{96} = \frac{5}{48}a^4\sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{5}{12}A_\triangle a^2}},$$

wenn $A_\triangle$ die Dreiecksfläche ist.

15.3.3. Schwerpunkte und Momente von Volumina

In diesem Abschnitt sollen im wesentlichen die Schwerpunkt- und Momentenberechnungen an den technisch wichtigen Drehkörpern gezeigt werden. Die angestellten Überlegungen lassen sich sinngemäß auf beliebige Körper erweitern.

Soll z. B. die Lage des **Schwerpunktes eines Drehkegels** ermittelt werden, dessen Höhe h und Grundkreisradius r_1 gegeben sind, so wählt man die Grundebene als Bezugsebene und bildet für alle Volumendifferentiale die statischen Momente in bezug auf diese Ebene. Die Summe dieser Momente muß gleich sein dem statischen Moment, welches das „im Schwerpunkt vereinigt gedachte" Kegelvolumen in bezug auf die gleiche Ebene besitzt. Es gilt also (Bild 240) bei Zylinderkoordinaten mit $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$\iiint_{\varphi\,r\,z} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h z_S,$$

wobei z_S die Koordinate des Schwerpunktes S ist, der aus Symmetriegründen auf der z-Achse liegen muß. Zur Festlegung der Grenzen liest man aus Bild 240 für die obere Grenze z_0 ab:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{h - z_0}{h}; \qquad z_0 = h\left(1 - \frac{r}{r_1}\right).$$

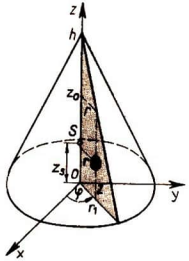


Bild 240

Also gilt:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r_1}\int_{z=0}^{h\left(1-\frac{r}{r_1}\right)} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\varphi\int_r h^2\left(1-\frac{r}{r_1}\right)^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{h^2}{2}\int_\varphi\int_r \left(r - \frac{2r^2}{r_1} + \frac{r^3}{r_1^2}\right)dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi h^2}{2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3r_1} + \frac{r^4}{4r_1^2}\right)\Big|_0^{r_1} = \pi h^2\frac{1}{12}r_1^2.$$

Somit ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{12}\pi h^2 r_1^2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h z_S$$

$$z_S = \frac{h}{4}.$$

Der Schwerpunkt des Drehkegels liegt im Abstand $h/4$ von der Grundebene.

BEISPIELE

1. Man berechne die Lage des Schwerpunktes für das Volumen der Halbkugel.

   Lösung: Aus Gründen der Symmetrie liegt der Schwerpunkt auf dem mittleren Radius OG (Bild 241). Wählt man die Auflageebene der Halbkugel als Bezugsebene, so hat ein beliebiges Volumendifferential $r\,dz\,dr\,d\varphi$ von dieser Ebene den Abstand z, sein statisches Moment ist also $zr\,dz\,dr\,d\varphi$. Nun gilt nach den oben angestellten Überlegungen (Bild 241):

$$\frac{2}{3}\pi R^3 z_S = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi}\int_{r} r(R^2-r^2)\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}.$$

   Also ist

$$z_S = \frac{3}{8}R.$$

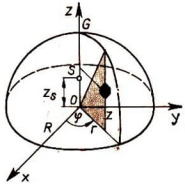


Bild 241

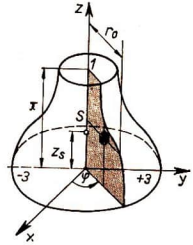


Bild 242

2. Die Kurve mit der Gleichung $x = 2 + \cos z$ $(0 \leqq z \leqq \pi)$ rotiere um die z-Achse. Wo liegt auf der z-Achse der Schwerpunkt des entstehenden Drehvolumens?

   Lösung: Als Bezugsebene wähle man die x,y-Ebene (Bild 242). Dann hat jedes Volumendifferential $r\,dr\,dz\,d\varphi$ von dieser Ebene den Abstand z und das statische Moment $rz\,dr\,dz\,d\varphi$. Ist z_S die Schwerpunktkoordinate, so gilt:

$$V \cdot z_S = \int_{\varphi}\int_{z}\int_{r} zr\,dr\,dz\,d\varphi.$$

Integriert man in der Reihenfolge r, z, φ und beachtet man, daß $r_0 = 2 + \cos z$ die obere Grenze für r ist, so ergibt sich

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2+\cos z} r \, dr \, dz \, d\varphi = \frac{9}{2} \pi^2$$

und

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2+\cos z} rz \, dr \, dz \, d\varphi = \frac{9}{4} \pi^3 - 8\pi.$$

Also gilt:

$$\frac{9}{2} \pi^2 z_S = \frac{9}{4} \pi^3 - 8\pi.$$

$$z_S = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{9\pi} = 1{,}01.$$

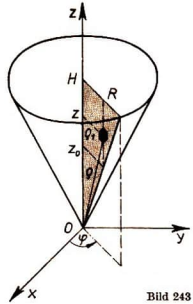


Bild 243

Für die Berechnung der *Trägheitsmomente von Volumina* ist gemäß der Definition des Trägheitsmomentes jedes Volumendifferential mit dem Quadrat seines Abstandes von der Bezugsachse bzw. vom Pol zu multiplizieren, und die erhaltenen Produkte sind zu summieren.

BEISPIELE

3. Man berechne das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf einen Durchmesser.

   Lösung: Unter Verwendung des Bildes 241 erkennt man sofort das Integral

$$I_p = 2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} V_k \cdot R^2,$$

   wobei V_k das Kugelvolumen ist.

4. Man berechne das polare Trägheitsmoment der Kugel mit dem Mittelpunkt als Pol. Man verwende Kugelkoordinaten (vgl. Aufg. 682 und Bild 235).

   Lösung: Der Abstand des Volumendifferentiales $dV = \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\varphi \, d\vartheta$ vom Pol ist ϱ. Also gilt

$$I_p = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{R} \varrho^4 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\varphi \, d\vartheta = \frac{R^5}{5} 2\pi 2 = \frac{4}{5} \pi R^5 = \frac{3}{5} V_k R^2.$$

5. Man berechne das polare Trägheitsmoment eines Drehkegels in bezug auf seine Spitze als Pol!

   Lösung: Das Volumendifferential $\varrho_1 d\varrho_1 d\varphi dz$ (Bild 243) hat von O den Abstand ϱ, und es gilt

$$I_0 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho_1=0}^{R} \int_{z=z_0}^{H} \varrho^2 \varrho_1 \, dz \, d\varrho_1 \, d\varphi.$$

   Hierbei ist $\varrho^2 = \varrho_1^2 + z^2$ und nach dem Strahlensatz

$$z_0 = \frac{H}{R} \varrho_1;$$

also geht das Integral über in

$$I_p = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho_1=0}^{R} \int_{z=\frac{H}{R}\varrho_1}^{H} (\varrho_1^2 + z^2)\varrho_1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varrho_1\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi}\int_{\varrho_1}\int_{z} (\varrho_1^3 + z^2\varrho_1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varrho_1\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\pi R^2 H}{10}(R^2 + 2H^2) = \frac{3}{10} V_k (R^2 + 2H^2),$$

wenn V_k das Kegelvolumen bedeutet.

6. Die Strecke $AB = s$ führt mit konstanter Drehgeschwindigkeit bei stets horizontaler Lage eine Volldrehung so um die z-Achse aus, daß sich hierbei der Punkt A längs der z-Achse von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 hebt. Man berechne das Trägheitsmoment des unter der Strecke liegenden Volumens in bezug auf die z-Achse.

Lösung: Ein beliebiges Volumendifferential $r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ mit dem Abstand r von der z-Achse liefert zum Trägheitsmoment den Beitrag $r^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Für die Integration ist die obere Grenze von z zu bestimmen. Hat die Strecke den Drehwinkel φ erreicht, so gilt für die hierbei erreichte Hubhöhe Δh die Proportion (Bild 244):

$$\varphi : 2\pi = \Delta h : (h_2 - h_1)$$

$$\Delta h = \frac{h_2 - h_1}{2\pi}\,\varphi.$$

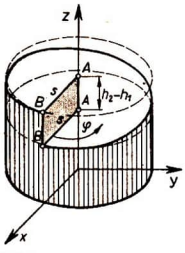


Bild 244

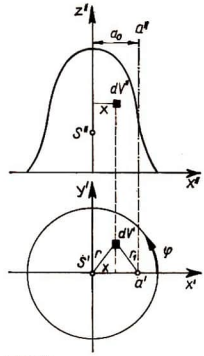


Bild 245

Die obere Grenze für z ist also: $z_0 = h_1 + \Delta h = h_1 + \dfrac{h_2 - h_1}{2\pi}\,\varphi$. Nun gilt für das Trägheitsmoment:

$$I_z = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{s} \int_{z=0}^{z_0} r^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi s^4}{4}(h_1 + h_2).$$

Bei der Berechnung dieses Integrals beachte man, daß bei der Integration nach z die Veränderliche φ ins Integral kommt, welche bei der Integration nach r („Scheibendifferential") konstant bleibt und erst bei der letzten Integration nach φ zu integrieren ist.

Abschließend soll der in 11.3.1. hergeleitete Satz von STEINER nochmals unter Verwendung mehrfacher Integrale entwickelt werden. Im Bild 245 ist ein Drehkörper

mit der z-Achse als Drehachse in Zweitafelprojektion dargestellt. S ist sein Schwerpunkt; die Drehachse geht also durch den Schwerpunkt („Schwerpunktachse"). Das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die z-Achse ist allgemein

$$I_z = I_S = \int_{\varphi}\int_{z}\int_{r} r^2 \,\mathrm{d}V.$$

Denkt man sich alle Volumendifferentiale $\mathrm{d}V$ in die x,y-Ebene projiziert, so bleiben die jeweiligen r-Werte unverändert, das heißt aber, jedes $\mathrm{d}V$ behält beim Projektionsvorgang unverändert sein Trägheitsmoment $\mathrm{d}I_S = r^2\,\mathrm{d}V$. Daher kann im folgenden eine Betrachtung für die in die x, y-Ebene projizierten Volumendifferentiale durchgeführt werden, die unverändert auch für ihre eigentliche Raumlage gilt: Die z-Achse werde parallel zu sich um a_0 nach der neuen Lage (a) geschoben. In bezug auf diese Achse gilt:

$$\mathrm{d}I_a = r_1^2 \,\mathrm{d}V.$$

Nun ist $r_1^2 = (a_0 - x)^2 + r^2 - x^2 = a_0^2 - 2a_0x + r^2$. Also folgt:

$$\mathrm{d}I_a = a_0^2 \,\mathrm{d}V - 2a_0x\,\mathrm{d}V + r^2\,\mathrm{d}V.$$

Die Integration über das gesamte Volumen ergibt

$$I_a = a_0^2 V - 2a_0 \iiint x\,\mathrm{d}V + \iiint r^2\,\mathrm{d}V$$

Für das mittlere Integral gilt andererseits nach den Eigenschaften des Schwerpunktes

$$Vx_S = \iiint x\,\mathrm{d}V.$$

Da $x_S = 0$ ist, verschwindet also das Integral.
Es bleibt

$$I_a = \iiint r^2\,\mathrm{d}V + Va_0^2$$

oder

$$\boxed{I_a = I_S + Va_0^2} \tag{154}$$

Gleichung (154) stellt den **Satz von Steiner** dar, der in 11.3.1. [vgl. (119)] für Flächenträgheitsmomente hergeleitet wurde.

AUFGABEN

683. Man berechne das polare Trägheitsmoment des Kreisumfanges, wenn der Mittelpunkt bzw. ein Punkt des Umfanges der Pol ist.

684. Man berechne das polare Trägheitsmoment der logarithmischen Spirale $r = \mathrm{e}^{\varphi}$, wenn der Ursprung Pol ist $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$.

685. Man berechne die Lage des Schwerpunktes des Halbkreisbogens in Parameter- bzw. in Polarkoordinatendarstellung.

686. Wo liegt der Schwerpunkt der geschlossenen Kurve mit der Gleichung $r = 2 - 2\cos\varphi$?

687. Wo liegt der Schwerpunkt der Kreisevolvente mit den Gleichungen

$$x = R(\cos t + t \sin t)$$
$$y = R(\sin t - t \cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)?$$

688. Man berechne das Trägheitsmoment der Kardioidenfläche in bezug auf den Ursprung.

689. Man berechne mittels Doppelintegrals die Fläche der Halbellipse ($x \geqq 0$) und deren Schwerpunktlage.

690. Man berechne das Trägheitsmoment einer rechtwinkligen Dreiecksfläche in bezug auf die eine Kathete. (Gegeben sind beide Katheten a und b.)

691. Man berechne mittels Doppelintegrals das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche, wenn a) der Mittelpunkt, b) ein Peripheriepunkt der Pol ist.

692. Für die gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecksfläche mit der Hypotenuse c berechne man das polare Trägheitsmoment in bezug auf den Scheitel des rechten Winkels als Pol. (Man wähle die Katheten als Achsen eines cartesischen Koordinatensystems.)

693. Man entwickle eine Formel für das Trägheitsmoment des Drehzylinders, wenn die Drehachse bzw. eine Mantellinie Bezugsachse ist. (Gegeben sind R und h.)

694. Man berechne das Trägheitsmoment des Volumens, das durch Drehung der Sinuskurve um die x-Achse zwischen 0 und π entsteht, in bezug auf die Drehachse.

695. Man berechne das Trägheitsmoment des Volumens, das durch Drehung der Seilkurve $y = \cosh x$ zwischen $x = -a$ und $x = +a$ entsteht, in bezug auf die x-Achse als Drehachse („Seilscheibe").

696. Man entwickle eine Formel für das polare Trägheitsmoment des Paraboloides, das durch Drehung der Normalparabel $y = x^2$ um die y-Achse entsteht. (Scheitel ist der Pol; Höhe $= h$.)

697. Wo liegt der Schwerpunkt des Normalparaboloides von der Höhe h?

16. Linienintegrale

16.1. Vektorielle Darstellung von Kurven und Feldern

Liegt in der x, y-Ebene eine Kurve in der Parameterdarstellung

$$x = x(t); \qquad y = y(t)$$

vor, so können die Werte $x(t)$ und $y(t)$ als die Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{x}$ aufgefaßt werden; der durch einen Pfeil symbolisch dargestellte Vektor hat seinen Ausgangspunkt im Ursprung (Bild 246). Bei veränderlichem Parameter t „tastet" der Vektor mit seiner Spitze die Kurve ab. Dieser an den festen Ursprung gebundene Vektor wird **Ortsvektor** genannt. Da er die Kurve abtastet, kann er auch *Kurvenvektor* genannt werden.

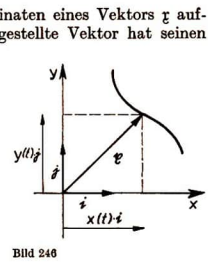


Bild 246

Mit den Einsvektoren i und j gilt für $\mathfrak{x}$:

ebene Kurve

$$\boxed{\mathfrak{x} = x(t)\,\mathrm{i} + y(t)\,\mathrm{j}} \qquad (155)$$

Die Kurve kann also durch den Vektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t)$ dargestellt werden. Für den Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt z. B. gilt, da die Parameterdarstellung $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ ist,

$$\mathfrak{r}(t) = r\cos t\,\mathfrak{i} + r\sin t\,\mathfrak{j}.$$

Ohne weiteres können diese Überlegungen auf *Raumkurven* übertragen werden, wenn man noch die z-Achse mit dem Einsvektor $\mathfrak{k}$ dazunimmt. Dann gilt:

Raumkurve

$$\boxed{\mathfrak{r}(t) = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j} + z(t)\,\mathfrak{k}} \tag{156}$$

Zum Beispiel ist die durch den Vektor

$$\mathfrak{r} = r\cos t\,\mathfrak{i} + r\sin t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\,t\,\mathfrak{k}$$

gegebene Kurve eine *Schraubenlinie von der Ganghöhe h*. Denn wandert t von 0 bis 2π, so hat sich $\mathfrak{r}$, in der x-Achsenrichtung beginnend, um 360° gedreht; außerdem aber hat sich seine Spitze von 0 bis h gleichmäßig gehoben, wie die z-Koordinate zeigt. Die Spirale liegt auf dem Mantel des Zylinders, dessen Grundkreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

hat. Man beachte, daß sich der Betrag von $\mathfrak{r}$, also $|\mathfrak{r}|$, natürlich für den an den Nullpunkt gebundenen Vektor $\mathfrak{r}$ vergrößert, wenn sich t vergrößert; für ihn gilt

$$|\mathfrak{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\,t^2}.$$

BEISPIEL

Man untersuche den geometrischen Verlauf der Kurve, welche durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \sin t\,\mathfrak{i} + \sin^2 t\,\mathfrak{j} + t\,\mathfrak{k} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

dargestellt wird.

Lösung: Es ist $x = \sin t$ und $y = \sin^2 t$; also gilt $y = x^2$, d. h., die Projektion der Raumkurve ergibt einen Bogen der Normalparabel in der x, y-Ebene. Weiterhin gilt:

$$t = 0 \;\rightarrow\; x = 0;\; y = 0;\; z = 0$$

Die Kurve beginnt im Ursprung.

$$t = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; x = 1;\; y = 1;\; z = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$$

$$t = \pi \;\rightarrow\; x = 0;\; y = 0;\; z = \pi \approx 3{,}14$$

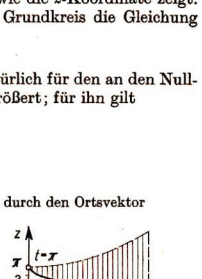


Bild 247

Die Kurve kehrt zur z-Achse in der Höhe π zurück, wobei die Parabel in der x, y-Ebene wieder rückwärts durchlaufen wird. Im Bild 247 ist die Kurve in einer Raumskizze dargestellt.

Auch zur *Darstellung von Feldern* (Kraftfelder, Geschwindigkeitsfelder, Strömungsfelder usw.) kann man sich der Vektoren bedienen. In diesem Falle ist, wenn man wieder zunächst ein ebenes Feld betrachtet, jedem Punkte $P(x; y)$ ein Vektor zugeordnet, der die in diesem Punkte vorliegende Feldgröße (z. B. die Kraft) symbolisch darstellt. Dieser von Ort zu Ort veränderliche **Feldvektor** werde mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet, seine Komponenten sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (Bild 248). Diese müssen also jeweils von den Koordinaten x und y abhängig sein. Also gilt:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1(x; y) + \mathfrak{F}_2(x; y)$$

oder

stationäres, ebenes Feld

$$\boxed{\mathfrak{F} = F_1(x; y)\,\mathfrak{i} + F_2(x; y)\,\mathfrak{j}} \tag{157}$$

Das durch $\mathfrak{F}$ dargestellte Feld heißt stationär, weil $\mathfrak{F}$ nicht zusätzlich noch von der Zeit abhängt. Die Feldgröße ist also in jedem Punkte des Feldes konstant, sie ist aber von Punkt zu Punkt veränderlich.
Auf den Raum übertragen ergibt sich analog

stationäres, räumliches Feld

$$\boxed{\mathfrak{F} = F_1(x; y; z)\,\mathfrak{i} + F_2(x; y; z)\,\mathfrak{j} + F_3(x; y; z)\,\mathfrak{k}} \tag{158}$$

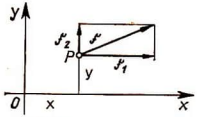


Bild 248

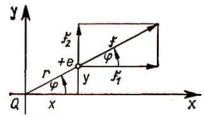


Bild 249

Beispiel für ein ebenes Kraftfeld: Im Ursprung befinde sich die elektrische Ladung $(+Q)$. Das um diese Ladung erregte Kraftfeld wird nun durch den Vektor $\mathfrak{F}$ dargestellt, der die auf die positive Ladungseinheit $(+e)$ wirkende Kraft repräsentiert (Bild 249).
Es ist $\mathfrak{F} = F_1\mathfrak{i} + F_2\mathfrak{j}$.

Nach dem Coulombschen Gesetz hat $\mathfrak{F}$ den Betrag

$$F = \frac{Qe}{r^2}.$$

Aus Bild 249 liest man ab:

$$F_1 = F\cos\varphi = \frac{Qe}{r^2}\,\frac{x}{r} = Qe\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_2 = F\sin\varphi = \frac{Qe}{r^2}\,\frac{y}{r} = Qe\,\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Das Feld kann also wie folgt dargestellt werden:

$$\mathfrak{F} = Qe\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{i} + Qe\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{j} = Qe\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jedem Wertepaar $x; y$ ist also ein Feldvektor $\mathfrak{F}$ zugeordnet.

16.2. Differentiation und Integration von Vektoren

Gegeben sei der zeitabhängige Ortsvektor $\mathfrak{r}(t)$, der eine Raumkurve darstellt. Bildet man die Differenz zweier benachbarter Vektoren $\mathfrak{r}(t+\Delta t) - \mathfrak{r}(t)$, so stellt dieser Differenzenvektor den im Bild 250 eingezeichneten *Sehnenvektor* dar. Man bildet nun den Vektor

$$\frac{\mathfrak{r}(t+\Delta t) - \mathfrak{r}(t)}{\Delta t},$$

der mit dem Sehnenvektor die gleiche Richtung hat. Für eine differenzierbare Kurve geht der Sehnenvektor beim Grenzübergang ($\Delta t \to 0$) in einen Tangentenvektor als Grenzlage über. Man kann also schreiben:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathfrak{r}(t+\Delta t) - \mathfrak{r}(t)}{\Delta t} = \mathfrak{r}'(t) = \dot{\mathfrak{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t}.$$

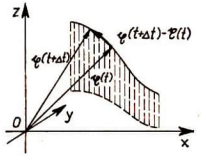


Bild 250

Liegt der Vektor in Komponentendarstellung vor, gilt:

$$\frac{\mathfrak{r}(t+\Delta t) - \mathfrak{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\,\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\,\mathbf{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\,\mathbf{f}.$$

Der Grenzübergang ergibt, da bei i, j und f die Differenzenquotienten der Funktionen x, y und z stehen, den

Tangentenvektor an eine Raumkurve

$$\boxed{\dot{\mathfrak{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{f}} \tag{159}$$

Für eine ebene Kurve gilt entsprechend

Tangentenvektor an eine ebene Kurve

$$\boxed{\dot{\mathfrak{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}} \tag{159a}$$

Für die im Bild 247 dargestellte Kurve mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \sin t\,\mathbf{i} + \sin^2 t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{f}$$

ergibt sich für den Tangentenvektor

$$\dot{\mathfrak{x}} = \cos t\,\mathfrak{i} + 2\sin t\cos t\,\mathfrak{j} + \mathfrak{k}.$$

Speziell gilt: $\dot{\mathfrak{x}}(0) = \mathfrak{i} + \mathfrak{k}$, die Kurve startet also vom Ursprung aus in der x,z-Ebene unter 45° Anstieg gegen die x-Achse;

$$\dot{\mathfrak{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathfrak{k}, \qquad \text{die Kurve verläuft vertikal}$$

$$\dot{\mathfrak{x}}(\pi) = -\mathfrak{i} + \mathfrak{k}, \qquad \text{die Kurve gelangt unter 45° Anstieg zur } z\text{-Achse.}$$

Für eine ebene Kurve wurde bereits für das Bogenlängendifferential die Formel entwickelt:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

Die Wurzel stellt den Betrag des Tangentenvektors dar:

$$|\dot{\mathfrak{x}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Also gilt für das **Bogenlängendifferential einer Kurve**

$$\mathrm{d}s = |\dot{\mathfrak{x}}|\,\mathrm{d}t = |\mathrm{d}\mathfrak{x}|.$$

Die Formel gilt natürlich auch für Raumkurven mit

$$|\dot{\mathfrak{x}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Die **Bogenlänge** selbst liefert die Formel

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathfrak{x}}|\,\mathrm{d}t} \tag{160}$$

Die Bogenlänge einer Windung der Schraubenlinie

$$\mathfrak{x} = r\cos t\,\mathfrak{i} + r\sin t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\,t\,\mathfrak{k}$$

ist mit

$$|\dot{\mathfrak{x}}| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

16.3. Das Linienintegral

Man betrachte ein Kraftfeld, das durch den Feldvektor

$$\mathfrak{F}(x;y;z) = F_1\mathfrak{i} + F_2\mathfrak{j} + F_3\mathfrak{k}$$

gegeben ist. In diesem Feld bewege sich unter dem Einfluß der Feldkraft ein Massenpunkt längs der Raumkurve mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r}(t) = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j} + z(t)\,\mathfrak{k}.$$

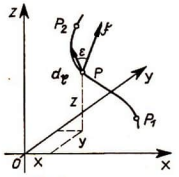


Bild 251

Um die von der Feldkraft am Massenpunkt verrichtete Arbeit zu berechnen, greift man auf der Kurve den beliebigen Punkt $P(x;y;z)$ heraus. Die Feldkraft ist dort $\mathfrak{F}$. Das zu diesem Punkt gehörige Arbeitsdifferential erhält man, indem man die in Kurvenrichtung liegende Tangentialkomponente von $\mathfrak{F}$ mit dem Wegdifferential $\mathrm{d}s$ multipliziert. Man bildet also, da $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathfrak{r}|$ ist (Bild 251):

$$\mathrm{d}W = |\mathfrak{F}|\,|\mathrm{d}\mathfrak{r}|\cos\varepsilon,$$

das ist das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathrm{d}\mathfrak{r}$. Also gilt

$$\mathrm{d}W = \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}.$$

Die Arbeit zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 längs der Kurve ist dann

Arbeitsintegral längs einer Raumkurve

$$\boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}} \tag{161}$$

Zur Berechnung des Integrales beachte man, daß $\mathfrak{F}$ von den drei Raumkoordinaten x, y, z abhängt. Da aber das Integral *längs der Kurve* gebildet werden soll, ist zu setzen

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t).$$

Somit ergibt sich, ausführlich geschrieben, der folgende Rechengang:

$$\begin{aligned} W = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}\,\dot{\mathfrak{r}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \big[F_1(x(t);y(t);z(t))\,\mathfrak{i} + F_2(x(t);y(t);z(t))\,\mathfrak{j} + \\ &+ F_3(x(t);y(t);z(t))\,\mathfrak{k}\big]\cdot\big[\dot{x}(t)\,\mathfrak{i} + \dot{y}(t)\,\mathfrak{j} + \dot{z}(t)\,\mathfrak{k}\big]\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [F_1\dot{x} + F_2\dot{y} + F_3\dot{z}]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das Integral enthält also letzten Endes nur t als Veränderliche. Es heißt **Linienintegral.**

BEISPIELE

1. Man berechne die Arbeit des Kraftfeldes

$$\mathfrak{F} = (x + y)\mathfrak{i} + x\mathfrak{j} + xz\mathfrak{k}$$

längs der Kurve

$$\mathfrak{x} = \sin t\,\mathfrak{i} + \sin^2 t\,\mathfrak{j} + t^2\mathfrak{k} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi/2).$$

Lösung: Es ist

$$\dot{\mathfrak{x}} = \cos t\,\mathfrak{i} + 2\sin t\cos t\,\mathfrak{j} + 2t\,\mathfrak{k}.$$

Längs der Kurve gilt:

$$x = \sin t; \quad y = \sin^2 t; \quad z = t^2.$$

Somit heißt das Linienintegral

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin t + \sin^2 t)\mathfrak{i} + \sin t\,\mathfrak{j} + t^2 \sin t\,\mathfrak{k}] \cdot [\cos t\,\mathfrak{i} + 2\sin t\cos t\,\mathfrak{j} + 2t\,\mathfrak{k}]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t + \sin^2 t\cos t + 2\sin^2 t\cos t + 2t^3 \sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t + 3\sin^2 t\cos t + 2t^3 \sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \left(\frac{3}{2}\pi^2 - 12\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}(\pi^2 - 7) > 0.}}$$

Das positive Ergebnis bedeutet, daß man beim Ablaufen der Kurve mit wachsendem Parameter zum Teil oder immer mit dem Kraftfeld schreitet.

2. Ein Körper der Masse m werde längs einer Windung der Schraubenlinie

$$\mathfrak{x} = \cos t\,\mathfrak{i} + \sin t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\,t\,\mathfrak{k}$$

um h im Kraftfeld der Erde gehoben. Welche Arbeit ist aufzuwenden, wenn die z-Achse vom Erdmittelpunkt weg zeigt?

Lösung: Für das Kraftfeld gilt im gesamten Bereich der Spirale:

$$\mathfrak{F} = -mg\mathfrak{k}.$$

Also gilt für die Arbeit:

$$W = \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x} = -mg\int_0^{2\pi} \mathfrak{k}\left[-\sin t\,\mathfrak{i} + \cos t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\mathfrak{k}\right]\mathrm{d}t = -mg\int_0^{2\pi} \frac{h}{2\pi}\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{-mgh.}}$$

Die hier berechnete Arbeit verrichtet das Kraftfeld. Man selbst muß aber, wenn man die Masse gegen die Kraft des Feldes bewegt, die gleich große positive Arbeit aufbringen, die der Masse

als potentielle Energie gegeben wird. Liefert das Gravitationsfeld positive Arbeit (der Körper fällt längs der Spirale), so nimmt der Körper diese Arbeit als kinetische Energie auf. Man beachte also, daß das Arbeitsintegral stets die vom Kraftfeld verrichtete Arbeit angibt (und nicht die, welche an einer im Kraftfeld bewegten Masse verrichtet wird).

3. Um den Ursprung existiere ein Kraftfeld, bei dem alle Feldvektoren nach dem Ursprung hin gerichtet sind. Ihr Betrag ist proportional dem Abstand vom Ursprung (Proportionalitätsfaktor $= c$). Welche Arbeit ist aufzubringen, wenn die Masse längs der Schraubenlinie

$$\mathfrak{x} = a\cos t\,\mathfrak{i} + a\sin t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\,t\mathfrak{k}$$

um eine Ganghöhe bewegt wird?

Lösung: Für einen beliebigen Punkt P des Raumes mit den Koordinaten x, y, z ist der nach P zeigende Ortsvektor mit der Spitze P

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}.$$

Liegt P auf der Spirale, so ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{x}$. Die in diesem Punkte wirkende Feldkraft ist dann nach Forderung der Aufgabe $\mathfrak{F} = -c\mathfrak{x}$. Also gilt

$$W = \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}\cdot \mathrm{d}\mathfrak{x} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-ac\cos t\,\mathfrak{i} - ac\sin t\,\mathfrak{j} - \frac{ch}{2\pi}\,t\mathfrak{k}\right]\cdot\left[-a\sin t\,\mathfrak{i} + a\cos t\,\mathfrak{j} + \frac{h}{2\pi}\,\mathfrak{k}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= +c\cdot\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos t\sin t - a^2\sin t\cos t - \frac{h^2}{4\pi^2}\,t\right)\mathrm{d}t = c\left(-\frac{h^2}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\,ch^2}}.$$

Nach obigen Überlegungen ist dann die aufzubringende Arbeit $^1/_2\,ch^2$.

4. Man berechne in dem Felde

$$\mathfrak{F} = xy^2\mathfrak{i} + x^2y\mathfrak{j}$$

das Linienintegral $\int_0^P \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x}$ zwischen dem Ursprung und dem Punkte $P(1;1)$ längs

a) der geradlinigen Verbindung $y = x$

b) der Normalparabel $y = x^2$

c) und längs der x- und y-Richtung (Bild 252).

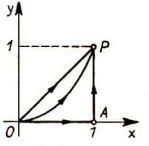


Bild 252

Lösung:

a) $y = x$ kann in Parameterdarstellung geschrieben werden: $x = t$; $y = t$. Dann ist der Ortsvektor der Geraden durch O und P:

$$\mathfrak{x} = t\mathfrak{i} + t\mathfrak{j} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}.$$

Also heißt das Integral für die Arbeit mit $x = t$ und $y = t$:

$$W = \int_0^1 (t^3\mathfrak{i} + t^3\mathfrak{j})\,(\mathfrak{i} + \mathfrak{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^3 + t^3)\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

b) Eine Parameterdarstellung für $y = x^2$ ist: $x = t;\ y = t^2$.
Der Ortsvektor der Parabel ist also

$$\mathfrak{r} = t\mathfrak{i} + t^2\mathfrak{j} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i} + 2t\mathfrak{j}.$$

Es folgt:

$$W = \int_0^1 (t^5\mathfrak{i} + t^4\mathfrak{j})\,(\mathfrak{i} + 2t\mathfrak{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^5 + 2t^5)\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

c) Der Integrationsweg setzt sich aus $\overline{OA}$ und $\overline{AP}$ zusammen. Für $\overline{OA}$ gilt: $y = 0$. Man kann also schreiben: $x = t;\ y = 0$. Somit ist $\mathfrak{r}_1 = t\mathfrak{i}$, und es gilt:

$$W_{OA} = \int_0^1 (0)\,\mathfrak{i}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Für $\overline{AP}$ ist $x = 1$; die Parameterdarstellung für $\overline{AP}$ ist demnach $x = 1;\ y = t$. Somit folgt: $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{i} + t\mathfrak{j}$.

$$W_{AP} = \int_0^1 (t^2\mathfrak{i} + t\mathfrak{j})\,(\mathfrak{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Also ist $W = W_{OA} + W_{AP} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

In diesem Felde ergeben die 3 verschiedenen Wege den gleichen Wert des Linienintegrales $\int_0^P \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}$.

16.4. Das Linienintegral im Potentialfeld

Das letzte Beispiel gibt Anlaß zu der Frage: Unter welchen Bedingungen ist das Linienintegral vom Wege unabhängig? In den folgenden Untersuchungen, welche ohne weiteres auf Raumfelder erweitert werden könnten, sollen nur *ebene Felder* zugrunde gelegt werden.
Ist das Feld mit dem Feldvektor

$$\mathfrak{F} = F_1(x;y)\,\mathfrak{i} + F_2(x;y)\,\mathfrak{j}$$

gegeben und in ihm die Kurve mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x(t)\,\mathfrak{i} + y(t)\,\mathfrak{j},$$

so kann man das Linienintegral $\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{r}$ in skalare Schreibweise wie folgt umrechnen: Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathfrak{r} &= (\dot{x}\mathfrak{i} + \dot{y}\mathfrak{j})\,\mathrm{d}t = \\ &= \dot{x}\mathrm{d}t\mathfrak{i} + \dot{y}\mathrm{d}t\mathfrak{j} = \\ &= \mathrm{d}x\mathfrak{i} + \mathrm{d}y\mathfrak{j}.\end{aligned}$$

Also folgt für das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x} = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} (F_1\mathrm{i} + F_2\mathrm{j})\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{i} + \mathrm{d}y\,\mathrm{j}) = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} (F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y).$$

Dieses Integral hat also den Integranden

$$F_1(x;y)\,\mathrm{d}x + F_2(x;y)\,\mathrm{d}y,$$

der dann ein *vollständiges Differential* einer Funktion $W(x;y)$ ist, wenn die *Schwarzsche Bedingung* erfüllt ist:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}W = F_1 \cdot \mathrm{d}x + F_2 \cdot \mathrm{d}y = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y$$

und

$$\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} \mathrm{d}W = W(x_2, y_2) - W(x_1, y_1) = W_2 - W_1.$$

Für den Wert des Integrales entscheiden also nur Anfangs- und Endwert; d. h., das Integral ist vom Wege unabhängig.
Für das Beispiel 4 des letzten Abschnittes ist in der Tat die Schwarzsche Bedingung erfüllt:

$$F_1 = xy^2 \qquad F_2 = x^2y$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy.$$

Es gilt also der

Satz

Erfüllen die Funktionen der Komponenten des Feldvektors eines ebenen Feldes die Schwarzsche Bedingung, so ist in diesem Felde das Linienintegral vom Wege unabhängig.

Ein solches Feld heißt **Potentialfeld,** und W ist die **Potentialfunktion.**

BEISPIELE

1. Für das elektrische Kraftfeld um die felderregende Ladung $(+Q)$ im Ursprung wurde bereits (vgl. 16.1.) der Feldvektor berechnet:

$$\mathfrak{F} = Qe\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{j}\right).$$

Bei für die Rechnung erlaubtem Verzicht auf die multiplikative Konstante Qe heißen die Terme für die Koordinaten:

$$F_1 = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad F_2 = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-3xy\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-3xy\cdot(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also ist die Schwarzsche Regel erfüllt.

Soll das Linienintegral $\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x}$ vom Punkte $A(x_1; y_1)$ bis zum Punkte $B(x_2; y_2)$ berechnet werden, spielt der Integrationsweg keine Rolle, da ein Potentialfeld vorliegt. Man bestimmt die zu dem totalen Differential

$$\mathrm{d}W = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \tag{I}$$

gehörige Potentialfunktion $W(x; y)$:

$$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial W}{\partial y}\,\mathrm{d}y, \tag{II}$$

also

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$W = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}} + \varphi(y) = \qquad \begin{matrix} t = x^2+y^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{t}} + \varphi(y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(y).$$

Nach (I) und (II) gilt weiter, wenn man $\dfrac{\partial W}{\partial y}$ bildet:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{2y}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = 0, \qquad \varphi = 0 \ (= \text{const.}).$$

Somit heißt die Potentialfunktion

$$W = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Das Integral hat nun den Wert $W(x_2; y_2) - W(x_1; y_1)$, also

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} \mathfrak{F}\, \mathrm{d}\mathfrak{x} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2},$$

wobei r_1 und r_2 die Abstände der Punkte A und B vom Ursprung sind.
Der Wert des Integrals hängt nur vom radialen Abstand der Wegendpunkte von der felderregenden Ladung ab:

$$\int_A^B \mathfrak{F}\, \mathrm{d}\mathfrak{x} = Q e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Er stellt physikalisch den Potentialunterschied zwischen den Punkten A und B dar.

2. Führt man einer abgeschlossenen Gasmenge mit den Zustandsgrößen p_1, V_1, T_1 eine Wärmemenge Q zu, so geht sie in den Zustand p_2, V_2, T_2 über. Die Wärmemenge dient zur Steigerung der inneren Energie des Gases und zur Aufbringung der Expansionsarbeit. In Differentialform gilt:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\, \mathrm{d}V = mc_v\, \mathrm{d}T + \frac{mTR}{V}\, \mathrm{d}V.$$

Hieraus folgt durch Integration die gesamte Wärmezufuhr Q, die das Gas vom Zustand I in den Zustand II führt. Ist diese Überführung vom Weg abhängig? Wenn nicht, dann muß $\mathrm{d}Q$ ein totales Differential mit den Variablen T und V sein und die Bedingung von SCHWARZ erfüllen.

$$\mathrm{d}Q = \underbrace{(mc_v)}_{F_1}\, \mathrm{d}T + \underbrace{\left(\frac{mRT}{V}\right)}_{F_2}\, \mathrm{d}V.$$

Es ist $\dfrac{\partial F_1}{\partial V} = 0$ und $\dfrac{\partial F_2}{\partial T} = \dfrac{mR}{V} \neq 0.$

Die SCHWARZsche Bedingung ist nicht erfüllt; es wird also je nach gewähltem Weg von I nach II (z. B. erst isobar, dann isochor, oder erst isotherm bis V_2 und dann isochor bis T_2 usw.) eine verschiedene Wärmemenge benötigt.
Dividiert man das obige Differential für $\mathrm{d}Q$ durch T, so ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = \underbrace{\frac{mc_v}{T}}_{F_3}\, \mathrm{d}T + \underbrace{\frac{mR}{V}}_{F_4}\, \mathrm{d}V.$$

Jetzt gilt

$$\frac{\partial F_3}{\partial V} = \frac{\partial F_4}{\partial T} = 0,$$

also liegt ein totales Differential vor, und es gibt eine Funktion $S(V; T)$, die dieses Differential hat. Nunmehr ist

$$\int_I^{II} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_I^{II} \mathrm{d}S = S_{II} - S_I$$

unabhängig vom Wege. Die Funktion S beschreibt also den jeweiligen Zustand des Gases selbst, da der Weg, auf dem das Gas in diesen Zustand gelangte, auf den Wert von S keinen Einfluß hat. S heißt Entropie und ist eine *Zustandsgröße*.

AUFGABEN

698. Man berechne für das Kraftfeld

$$\mathfrak{F} = x^2\mathfrak{i} + y^3\mathfrak{j} + z^2\mathfrak{k}$$

die Feldarbeit längs der Kurve

$$\mathfrak{x} = \sqrt{3}\sin t\,\mathfrak{i} + \cos t\,\mathfrak{k}$$

von $A\left(\sqrt{3};\,0;\,0\right)$ bis $B(0;\,0;\,-1)$.

699. Man deute den Verlauf der Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \sin^2 t\,\mathfrak{i} + \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathfrak{j} + \left(t^2 - \frac{\pi}{2}t\right)\mathfrak{k}$$

und berechne für sie das Linienintegral im Felde

$$\mathfrak{F} = x\mathfrak{i} + xy\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

im Intervall $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

700. Man berechne für das Kraftfeld

$$\mathfrak{F} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

die Arbeit längs der Kurve

$$\mathfrak{x} = \sqrt{2}\cos t\,\mathfrak{i} + \cos 2t\,\mathfrak{j} + \frac{2t}{\pi}\mathfrak{k} \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

und deute den Verlauf der Kurve.

701. Man zeige, daß das Feld

$$\mathfrak{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\mathfrak{j}$$

ein Potentialfeld ist und berechne die Arbeit von $P_1(0;0)$ nach $P_2(3;4)$ einmal unter Verwendung der Potentialfunktion, dann aber längs der Geraden P_1P_2.

702. Man zeige für das Integral

$$Q = \int_I^{II}\left(mc_v\,\mathrm{d}T + \frac{mRT}{V}\,\mathrm{d}V\right),$$

daß es wegabhängig ist, indem man vom Zustand I in den Zustand II folgende Wege wählt:

a) isotherm, isochor,
b) isochor, isotherm.

(Man mache sich die Wege im p,V-Diagramm klar.)

17. Grundbegriffe

17.1. Definition der unendlichen Reihe

Bisweilen kommt es vor, daß die Glieder einer unendlichen Folge addiert werden sollen. Wenn z. B. die unendliche Folge

$$\{u_k\} = 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \cdots$$

gegeben ist, so ergibt sich bei Addition der einzelnen Glieder der Term

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Zunächst zeigt sich aber hier eine Schwierigkeit. Denn eine Summe ist für diese unendlich vielen Summanden nicht definiert. Es liegt auch vorerst keine Berechtigung vor, die Grundgesetze der Addition, also z. B. Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, ohne weiteres anzuwenden.
Verallgemeinert hat der genannte Term das Aussehen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots.$$

Es ist aber nun möglich, diesen Term zu definieren. Zu diesem Zwecke soll die Addition in der Weise geschehen, daß von u_1 ausgegangen wird, dazu u_2 addiert, zu diesem Ergebnis u_3 addiert, dazu wieder u_4 addiert und in diesem Sinne weiter. Die so erhaltenen Werte sollen mit $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ bezeichnet werden und erhalten die Namen **Teilsummen** oder **Partialsummen** des vorliegenden Terms. Also

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ s_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \ \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese Partialsummen bilden für sich eine Folge $\{s_k\}$, $\{s_k\} = s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$. Sie ist eine Partialsummenfolge der ursprünglichen Folge $\{u_k\}$. Der angegebene Term $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$, kurz geschrieben $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, wird eine **unendliche Reihe** genannt. Er ist nichts anderes als eine andere Darstellung für die Partialsummenfolge. Für eine vorliegende Reihe ist es oft nicht einfach, die formelmäßige Berechnungsvorschrift für alle Glieder aus dem Anfang dieser Reihe zu ermitteln.

BEISPIELE

1. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ ist nur eine andere Darstellung der Folge

$$\{s_k\} = 1;\ 1 + \frac{1}{2};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4};\ \cdots$$

$$= 1;\quad \frac{3}{2}\quad ;\quad \frac{11}{6}\quad ;\quad \frac{25}{12}\quad ;\ \cdots .$$

2. Gegeben ist die Reihe

$$R = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots .$$

Durch Probieren ergibt sich die Berechnungsvorschrift für alle Glieder $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$ ist also nur eine andere Darstellung der Folge

$$\{s_k\} = \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \cdots .$$

3. $R(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$ ist eine geometrische Reihe. Das Bildungsgesetz für die einzelnen Glieder sagt aus, daß ein Glied aus dem vorangegangenen entsteht, indem dieses mit $-x$ multipliziert wurde. Hier liegt ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber den ersten beiden Beispielen vor, denn dort sind alle Glieder Konstante, während hier die Glieder von $R(x)$ Terme mit einer Variablen sind. Dieser Fall soll später eingehend behandelt werden.

17.2. Konvergenz, Divergenz

Bei Betrachtung der drei vorhergegangenen Beispiele taucht nun die Frage auf, ob diese Reihen, oder auch andere solcher Art, obwohl sie unendlich viele Summanden besitzen, einen endlichen Summenwert haben.
Nur besonders einfache Fälle gestatten es, hierüber sofort Klarheit zu bekommen.

BEISPIEL

1. $R = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots$.
Dies ist eine geometrische Reihe, sie hat den Quotienten $q = 0{,}1$. Nach Formel (31) ist die Summe $s = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{3}$.

In den weitaus meisten Fällen ist die Ermittlung des Summenwertes nicht so einfach wie hier.
Um den Begriff *Konvergenz* zu klären, sollen von $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$ nochmals die Partialsummen hingeschrieben werden, also

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots .$$

Somit ist $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ die n-te Teilsumme der unendlichen Reihe. Sie hat n Glieder.

Definition

Wenn mit wachsendem n die Teilsumme s_n einem bestimmten Grenzwert s zustrebt, nennt man die Reihe konvergent, also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

Dabei bezeichnet s den **Summenwert** der endlichen Reihe. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die Reihe als *divergent* bezeichnet. Sie heißt *bestimmt divergent*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \pm\infty \text{ ist.}$$

Ist die Reihe weder konvergent noch bestimmt divergent, so heißt sie *unbestimmt divergent* oder *oszillierend divergent*.

BEISPIELE

2. $R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$. Diese geometrische Reihe ist konvergent. Ihr Summenwert ist $R = 2$.
3. $R = 1 + 2 + 3 + \cdots$. Diese Reihe ist bestimmt divergent. Alle arithmetischen Reihen sind bestimmt divergent.
4. $R = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2} + \cdots = 1 - 1 + 1 - + \cdots$.

   Diese Reihe ist unbestimmt divergent oder oszillierend divergent.

18. Konvergenzkriterien

Notwendige und hinreichende Bedingung

Es ist verständlich, daß nur konvergente Reihen von Interesse sind. Also ist es nun die Aufgabe, Sätze oder sogenannte Konvergenzkriterien zu finden, die es entweder stets oder unter gewissen Voraussetzungen gestatten festzustellen, ob eine vorgelegte Reihe konvergent ist oder nicht. Zwar gibt es allgemeine Konvergenzkriterien, die notwendig und hinreichend sind. Da aber diese Kriterien keine praktische Bedeutung haben, soll zunächst die **notwendige Bedingung** angegeben werden. Diese ist

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} u_k = 0} \tag{162}$$

Die Glieder müssen also eine Nullfolge bilden. Ausdrücklich soll gesagt werden, daß die Forderung (162) zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist. Das heißt, wenn sie erfüllt ist, braucht trotzdem die Reihe nicht konvergent zu sein. Dieser Sachverhalt soll an einer einfach aufgebauten Reihe, der harmonischen Reihe, verdeutlicht werden.

BEISPIEL

1. $R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$. Die genannte notwendige Bedingung ist erfüllt, aber trotzdem ist die Reihe bestimmt divergent. Es ist nämlich möglich, aufeinanderfolgende Glieder der Reihe so zusammenzufassen, daß deren Summe jeweils größer als 1/2 ist:

$$R = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + (\cdots) + \cdots.$$

Da hierbei unendlich oft ein Wert $> 1/2$ erhalten wird, so geht der Summenwert über alle Grenzen, das heißt, die Reihe ist bestimmt divergent.

Alternierende Reihen

Darunter werden solche Reihen verstanden, die abwechselnd positive und negative Glieder haben, wie z. B. die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots.$$

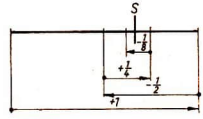


Bild 253

Für diese gilt der **Satz von LEIBNIZ**:

Wenn die absoluten Beträge der Glieder einer alternierenden Reihe einsinnig (monoton) gegen Null abnehmen, so ist die Reihe konvergent.

Hier ist die Bedingung (162) notwendig und hinreichend.
Dieser Satz wird deutlich durch Bild 253, welches die Ineinanderschachtelung der einzelnen Glieder zeigt. Dabei kommt es bei unendlich vielen Gliedern im Innern zu einem Häufungspunkt S, der also als Zahlenwert der Summe angesehen werden muß.
Beim eingangs genannten Beispiel ist zu beachten, daß durch die vorgenommene Änderung der Vorzeichen in der harmonischen Reihe eine konvergente Reihe entsteht.
Wenn eine konvergente alternierende Reihe auch dann noch konvergiert, wenn vorübergehend alle Glieder absolut genommen werden, so wird diese alternierende Reihe *absolut konvergent* oder *unbedingt konvergent* genannt.
Konvergiert aber eine konvergente alternierende Reihe nicht, wenn alle Glieder positiv genommen werden, so wird sie *bedingt konvergent* genannt. Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ist somit bedingt konvergent, denn werden die absoluten Beträge der Glieder genommen, so entsteht die bestimmt divergente harmonische Reihe.

Majorantenmethode

Hier handelt es sich um eine Vergleichsmethode bei Reihen mit nur positiven Gliedern.
Es sollen zwei Reihen $R_u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ und

$$R_v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

gegeben sein. Ist nun $u_n \leqq v_n$ für alle n, so heißt die Reihe R_v eine *Majorante oder Oberreihe* der Reihe R_u, während R_u als *Minorante oder Unterreihe* von R_v bezeichnet wird. Es gilt nun der

Satz

Gibt es zu einer Reihe $R_u = u_1 + u_2 + \cdots$ mit nur positiven Gliedern eine konvergente Majorante $R_v = v_1 + v_2 + \cdots$, so konvergiert auch die Reihe R_u, und ihre Summe ist höchstens gleich der Summe der Majorante.

BEISPIEL

2. Die Reihe $R_u = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \frac{1}{37} + \cdots$ soll auf Konvergenz untersucht werden.

   Lösung: Das allgemeine Glied ist $u_n = \frac{1}{2^n + n}$. Damit kann R_u als Minorante der geometrischen Reihe

   $$R_v = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \text{ mit } v_n = \frac{1}{2^n}$$

   aufgefaßt werden. R_u ist somit konvergent, da $u_n < v_n$ ist.

Das Quotientenkriterium

Diese Konvergenzprobe stammt vom franz. Mathematiker D'ALEMBERT (1717 bis 1783). Sie besagt folgendes:

Wenn bei einer Reihe $R = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ von einem bestimmten n an der Quotient $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqq q < 1$ ist, so konvergiert die Reihe. Ist aber $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, so divergiert sie.

Bei der praktischen Rechnung wird die folgende handliche Form benutzt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = q < 1} \tag{163}$$

falls der Grenzwert vorhanden ist. Für $q > 1$ ist die Reihe divergent, für $q = 1$ ist das Verhalten der Reihe unbestimmt, d. h., das Konvergenzkriterium liefert keine eindeutige Entscheidung. Das Quotientenkriterium ist für die Konvergenz hinreichend, d. h., wenn es erfüllt ist, ist die Reihe konvergent. Jedoch bedeutet Nichterfüllung nicht unbedingt Divergenz.
Da hierbei die absoluten Beträge betrachtet werden, wird absolute Konvergenz festgestellt.

BEISPIELE

3. Es soll die Reihe $R = \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \cdots$ auf Konvergenz untersucht werden. Der Summenwert der Reihe ist auf 3 Stellen zu berechnen.

Lösung: Mit $u_n = \frac{n^2}{n!}$ und $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$ wird

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)!\,n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

Somit ist die Reihe konvergent. Der Summenwert der Reihe auf 3 Stellen wird:

$$R = 1{,}000 + 2{,}000 + 1{,}500 + 0{,}667 + 0{,}208 + 0{,}050 + 0{,}0097 + 0{,}0016 + \\ + 0{,}0002 = 5{,}44.$$

Hier ist deutlich zu erkennen, wie am Anfang die Werte der einzelnen Glieder noch zunehmen, wie aber die der weiteren dann sehr rasch so klein werden, daß ihr Einfluß vernachlässigt werden kann.

4. Die Reihe $R = \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{3^2}{2\cdot 2^2} + \frac{3^3}{3\cdot 2^3} + \dots$ ist auf Konvergenz zu untersuchen.

Lösung: Mit $u_n = \frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ und $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}$ wird

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n\,2^n}{(n+1)2^{n+1}3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{3}{2}.$$

Die Reihe ist somit bestimmt divergent.

5. Die schon erwähnte harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ und die ihr ähnliche, aber alternierende Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$ sollen mittels des Quotientenkriteriums auf Konvergenz untersucht werden.

Lösung: Da nur die absoluten Beträge in Betracht kommen, gilt für beide Reihen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 1.$$

Das Quotientenkriterium führt also zu keinem Ziel. Es wurde aber schon gezeigt, daß die harmonische Reihe bestimmt divergent ist. Die andere, alternierende Reihe ist jedoch bedingt konvergent.

Das Wurzelkriterium

Diese Konvergenzprobe stammt vom franz. Mathematiker Cauchy (1798 bis 1857, Cauchy sprich koschi). Sie besagt:

Wenn bei einer Reihe $R = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ von einem bestimmten n an $\sqrt[n]{|u_n|} \leqq q < 1$ ist, so konvergiert die Reihe.

Für die praktische Rechnung wird die folgende handliche Form

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = q < 1} \tag{164}$$

benutzt, falls der Grenzwert vorhanden ist.

Auch das Wurzelkriterium ist eine hinreichende Bedingung. Wenn es erfüllt ist, ist die Reihe sicher konvergent. Da auch hier nur die absoluten Beträge in Rechnung gehen, wird absolute Konvergenz festgestellt. Für $q > 1$ divergiert die Reihe, für $q = 1$ ist auch hier ihr Verhalten unbestimmt.
Wie gesagt gibt es, außer bei alternierenden Reihen, kein handliches Kriterium, welches zugleich notwendig und hinreichend ist. Das Wurzelkriterium ist etwas stärker als das Quotientenkriterium. Letzteres ist schließlich nur ein Sonderfall des Wurzelkriteriums. Auf die Herleitung soll hier verzichtet werden.

BEISPIELE

6. Die Reihe $R = 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{2+(-1)^n}{2^n} + \cdots$ ist auf Konvergenz zu untersuchen.

   Lösung: Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} < 1.$

   Somit ist die Reihe konvergent. Mit Hilfe des Quotientenkriteriums bekommt man

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2+(-1)^n}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}\right|.$$

   Ist n gerade, so ergibt $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ den Wert $\frac{1}{6}$, ist n ungerade, so wird als Grenzwert 3/2 erhalten.
   Dieses Beispiel zeigt die Überlegenheit des Wurzelkriteriums gegenüber dem Quotientenkriterium.
   Trotzdem wird bei der Konvergenzprobe meistens zuerst das Quotientenkriterium genommen, da es handlicher ist.

7. Die Reihe

$$R = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

   ist auf Konvergenz zu untersuchen.

   Lösung: Leicht ist zu erkennen, daß das allgemeine Glied $u_n = \frac{1}{n^n}$ lautet.

   Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

   Also ist die vorgelegte Reihe konvergent.

8. Es soll nun anhand der Reihe $R = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ gezeigt werden, daß beide Kriterien gleichzeitig versagen können.

   Lösung: Es ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1,$
   bei Anwendung des Wurzelkriteriums

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{n}} = 1,$$

   wenn dabei die Regel von DE L'HOSPITAL (vgl. 5.3.) angewendet wird.

Es ist aber möglich, eine Vergleichsreihe aufzustellen. Es gilt nämlich:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots <$$

$$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{16^2}+\cdots=$$

$$=1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{8}{8^2}+\frac{16}{16^2}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Diese konvergente geometrische Reihe ist somit Majorante der zu untersuchenden Reihe, das heißt, jene ist also konvergent.

AUFGABEN

Die folgenden Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen. Bei der Reihe 703. ist außerdem der Summenwert auf drei Dezimalen zu ermitteln.

703. $R=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28}+\frac{1}{82}+\cdots$ 704. $R=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots.$

705. $R=1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots.$ 706. $R=1+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\cdots.$

707. $R=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots.$ 708. $R=1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{7}{4!}+\cdots.$

709. $R=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\cdots.$

710. $R=1+\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\frac{4}{e^4}+\cdots.$

19. Potenzreihen

19.1. Erklärung, Konvergenzradius, Konvergenzbereich

Eine Potenzreihe ist eine Reihe von der Form

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Dabei sind die $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ konstante Zahlen, x eine unabhängige Variable. Die Konvergenz der Potenzreihe hängt vom Wert der Variable x ab. Alle Potenzreihen konvergieren für $x=0$. Weiterhin gilt der

Konvergenzsatz

Wenn $P(x)$ für $x=+\xi$ (wobei $\xi\geqq 0$ ist) konvergent ist, so ist sie das auch für alle Werte x, für die $-\xi<x\leqq+\xi$ gilt.
Ist $P(x)$ für $x=-\xi$ konvergent, so ist sie das auch für alle Werte x, für die $-\xi\leqq x<+\xi$ gilt.

Der größte Wert $\xi_{\max}$ wird **Konvergenzradius** r genannt. Für den Konvergenzradius r kann gelten: $0 \leqq r < +\infty$. Bei $r = 0$ schrumpft er auf einen Konvergenzpunkt zusammen. Wenn aber $r \to +\infty$, so wird die Reihe als *beständig konvergent* bezeichnet. Zur Ermittlung des Konvergenzradius dient einmal das Quotientenkriterium. Dieses angesetzt ergibt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| < 1, \quad \text{daraus}$$

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{somit der}$$

Konvergenzradius

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \tag{165a}$$

Ähnlich ergibt sich mit Hilfe des Wurzelkriteriums:

$$\boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{165b}$$

Dabei gilt: für $|x| < r$ konvergiert die Reihe,
für $|x| > r$ divergiert die Reihe,
für $|x| = r$ ist das Verhalten der Reihe unbestimmt.

Oft gehört der Konvergenzradius nicht mehr dem Konvergenzbereich an. Deshalb muß, wenn nötig, das Verhalten der Reihe für $x = r$ und $x = -r$ besonders untersucht werden.
Bei der Anwendung ist zu beachten, daß a_n und a_{n+1} Koeffizienten der Reihe sind. Sind die beiden Grenzwerte (165a) und (165b) vorhanden, so stimmen sie überein.

BEISPIELE

1. Die Reihe $P(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$ soll auf Konvergenz untersucht werden.

   Lösung: Der Konvergenzradius ist $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1$, ebenso $r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, denn der Nenner wird 1. Dies wird durch Anwenden der Regel von DE L'HOSPITAL gefunden. (Man setze $\sqrt[n]{n} = z(n)$, $\ln z(n) = \frac{\ln n}{n}$, d. h., $\ln z(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$, also $z(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.)

Anderseits ergibt sich Konvergenz aus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|.$$

Es ist also Konvergenz vorhanden für alle $x < 1$.
Im Grenzfalle $x = 1$ liegt die divergente harmonische Reihe vor.
Für $x = -1$ ist die Reihe alternierend und konvergiert, denn es ist

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-+\cdots = -\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck wurde schon als konvergent bewiesen. Somit ist die Reihe konvergent für $-1 \leqq x < +1$.

2. Zu untersuchen ist die Reihe

$$P(x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\cdots \text{ auf Konvergenz.}$$

Lösung: Der Konvergenzradius ist mit $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Für $x = 1$ wurde schon früher gezeigt, daß die Reihe konvergent ist. Für $x = -1$ ist die Reihe alternierend und damit konvergent. Somit ist die Reihe konvergent für $-1 \leqq x \leqq +1$.

3. Zu untersuchen ist die Reihe

$$P(x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^4}{4^4}+\cdots \text{ auf Konvergenz.}$$

Lösung: Mit $a_n = \frac{1}{n^n}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ wird der Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1).$$

Hier ist der Grenzwert eines Produktes zu bestimmen. Dabei gilt: Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der einzelnen Faktoren. Also

$$r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}(n+1) = \mathrm{e}\cdot\infty = \infty.$$

Die Reihe ist konvergent für alle Werte $-\infty < x < +\infty$, das heißt, sie ist beständig konvergent.

AUFGABEN

Die folgenden Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen.

711. $P(x) = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^4}+\cdots$.

712. $P(x) = \frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \cdots$.

713. $P(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{20} + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{42} + \cdots$.

714. $P(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{4^5} + \cdots$.

19.2. Die Maclaurinsche Form der Reihe von Taylor

Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, wenn eine Funktion $y = f(x)$ als Potenzreihe dargestellt wird. Zum Beispiel kann es erst dann möglich sein, eine Integration durchführen zu können. Es soll deshalb nach Möglichkeiten gesucht werden, $f(x)$ als Reihe darzustellen, d. h. nach Potenzen von x zu entwickeln.
Zum Beispiel kann nach Division folgendes geschrieben werden

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \cdots.$$

Das ist eine Reihenentwicklung, die als Näherungsformeln für Werte $|x| \ll 1$ Anwendung findet, da rechts die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Entsprechend dem eben angeführten Beispiel wird eine Potenzreihe das folgende, ganz allgemeine Aussehen haben

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Damit wurde die Funktion f nach Potenzen von x entwickelt.
Es handelt sich nun darum, die unbekannten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu ermitteln. Zu diesem Zwecke werden die Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ des Termes $f(x)$ benötigt. Es gilt der

Satz

Jede konvergente Potenzreihe darf gliedweise differenziert werden. Die neue Potenzreihe hat den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche.

Die Ermittlung der $a_0, a_1, a_2, \ldots$ geschieht wie folgt:

In $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

gilt $f(0) = a_0$, da rechts für $x = 0$ alle Glieder verschwinden.
Wenn nun die Reihe für $f(x)$ an der Stelle x konvergent ist, so ist es auch die abgeleitete Reihe

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

und damit

$$f'(0) = a_1.$$

Weiter wird

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3 + \cdots$$

und

$$f''(0) = 2a_2, \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0),$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5 x^2 + \cdots$$

und

$$f'''(0) = 2 \cdot 3a_3 = 3!a_3, \text{ wenn } 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! \text{ gesetzt wird.}$$

Somit ist

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0).$$

Mit diesen Werten wird der Ausdruck für a_k erkannt. Dieser lautet $a_k = (1/k!) f^{(k)}(0)$. Durch Einsetzen dieser Werte in die Ausgangsreihe wird die **Maclaurinsche Form der Reihe von Taylor**, d. h. die Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach Potenzen von x, erhalten

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots} \tag{166}$$

Notwendige Bedingung hierbei ist: f muß an der Stelle $x = 0$ einen endlichen Funktionswert haben und beliebig oft differenzierbar sein.
Wird nach einem bestimmten Glied die Reihe abgebrochen, so gibt es sog. Restgliedabschätzungen, mit deren Hilfe eine Schranke für den Wert der vernachlässigten Glieder angegeben werden kann. Darauf soll hier verzichtet werden.
In Bild 254 ist $f(0)$ die Ordinate des Punktes $P[0; f(0)]$, $f'(0) = \tan\alpha$ der Anstieg der in P angelegten Tangente. Der Wert $f''(0)$ ist maßgebend für die Krümmung in P (vgl. 13.6.1.). Nun sollen die Kurven von zwei Funktionen mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x) = f(0) + f'(0)\,x + [f''(0)/2!]\,x^2 + \cdots$ miteinander verglichen werden. Dabei ist g eine ganzrationale Funktion n-ten Grades.
Unter Beachtung, daß an der Stelle $x = 0$ entwickelt wird, bedeutet die Entwicklung bis zum

1. Glied: Die Kurven der Funktionen f und g stimmen überein im Punkte P,
2. Glied: Die Kurven der Funktionen f und g stimmen überein im Punkte P und haben gleiche Tangentenrichtungen,
3. Glied: Die Kurven der Funktionen f und g stimmen überein im Punkte P, in Tangentenrichtung und Krümmung.

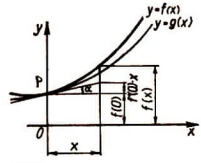


Bild 254

Nicht jede Funktion läßt sich nach MACLAURIN in eine Potenzreihe entwickeln. Zum Beispiel eignet sich die Funktion $f(x) = 1/x$ nicht dazu, da sie und ihre Ableitungen zwar differenzierbar, aber $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$ nicht definiert sind.
Vor der Durchrechnung von Beispielen sollen noch weitere Formen der TAYLOR-Reihe abgeleitet werden.

19.3. Die Hauptform der Reihe von Taylor

Für manche technische Untersuchungen macht es sich nötig, nicht den Term $f(x)$ nach Potenzen von x an der Stelle $x = 0$, sondern den Term $f(x + h)$ an der Stelle x nach Potenzen von h zu entwickeln. Dabei soll vorübergehend x als konstant und h als variabel betrachtet werden (Bild 255).
Zum Zwecke der Herleitung wird gesetzt

$$f(x + h) = g(h) \quad \text{und bei} \quad h = 0$$
$$f(x) = g(0).$$

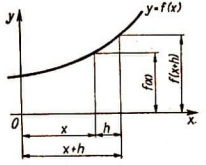


Bild 255

Auf beiden Seiten werden die Ableitungen gebildet, dabei soll x wieder variabel sein:

$$f'(x) = g'(0)$$
$$f''(x) = g''(0)$$
$$f'''(x) = g'''(0), \ldots .$$

Nach MACLAURIN wird $g(h)$ nach Potenzen von h entwickelt:

$$g(h) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}h + \frac{g''(0)}{2!}h^2 + \frac{g'''(0)}{3!}h^3 + \cdots .$$

Mit den obigen Werten ergibt sich die

Hauptform der Reihe von Taylor:

$$\boxed{f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots} \qquad (167)$$

BEISPIEL

1. Gegeben ist $f(x) = \dfrac{4}{1 - 3x}$. Es soll $f(x + h)$ nach Potenzen von h entwickelt werden. Die ersten 4 Glieder sind zu ermitteln.

   Lösung: Nach (167) sind die ersten 3 Ableitungen von $f(x)$ erforderlich.

$$f'(x) = \frac{12}{(1 - 3x)^2}, \quad f''(x) = \frac{72}{(1 - 3x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{648}{(1 - 3x)^4},$$

   damit

$$f(x + h) = \frac{4}{1 - 3x} + \frac{12h}{(1 - 3x)^2} + \frac{36h^2}{(1 - 3x)^3} + \frac{108h^3}{(1 - 3x)^4} + \cdots,$$

   oder

$$f(x + h) = \frac{4}{1 - 3x} + \frac{4 \cdot 3}{(1 - 3x)^2}h + \frac{4 \cdot 3^2}{(1 - 3x)^3}h^2 + \frac{4 \cdot 3^3}{(1 - 3x)^4}h^3 + \cdots .$$

   Die Schreibart der letzten Zeile gestattet es, bei Bedarf auch noch Glieder mit höherer Potenz von h sofort hinzuschreiben.

Wird in (167) eine Transformation in der Abszissenrichtung so vorgenommen, daß zunächst $x = a$ gesetzt wird, so ist

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots,$$

und mit $h = x$ bekommt man eine andere Fassung der TAYLOR-Reihe

$$\boxed{f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \cdots} \tag{168}$$

Auch hier ist zu beachten, daß die Ausdrücke $f(a), f'(a), f''(a), \ldots$ konstante Werte sind, nämlich die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen an der Stelle $x = a$. Schließlich wird noch eine Fassung der TAYLOR-Reihe erhalten, wenn in (168) an Stelle von x der Wert $x - a$ gesetzt wird:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots} \tag{169}$$

BEISPIEL

2. Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 6$. Sie soll an der Stelle $a = -2$ nach Potenzen von x entwickelt werden.

Lösung: Mit (168) wird

$$f(-2+x) = f(-2) + \frac{f'(-2)}{1!}x + \frac{f''(-2)}{2!}x^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f(x) = x^7 + 5x^4 - 3x^2 + 6,$	$f(-2) = -54$
$f'(x) = 7x^6 + 20x^3 - 6x,$	$f'(-2) = 300$
$f''(x) = 42x^5 + 60x^2 - 6,$	$f''(-2) = -1110$
$f'''(x) = 210x^4 + 120x,$	$f'''(-2) = 3120$
$f^{(4)}(x) = 840x^3 + 120,$	$f^{(4)}(-2) = -6600$
$f^{(5)}(x) = 2520x^2,$	$f^{(5)}(-2) = 10080$
$f^{(6)}(x) = 5040x,$	$f^{(6)}(-2) = -10080$
$f^{(7)}(x) = 5040,$	$f^{(7)}(-2) = 5040$

Unter Beachtung der Fakultäten im Nenner wird

$$f(-2+x) = -54 + 300x - 555x^2 + 520x^3 - 275x^4 + 84x^5 - 14x^6 + x^7.$$

AUFGABEN

715. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^5 + 6x^3 - 9x + 10$. Zu ermitteln ist $f(x+h)$ nach Potenzen von h geordnet.

716. Die Funktion $f(x) = \dfrac{4}{1-3x}$ soll an der Stelle $2 + x$ nach Potenzen von x entwickelt werden. Die ersten 4 Glieder sind zu ermitteln.

19.4. Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Entwicklung der Funktion $f(x) = \sin x$

Bei Anwendung der MACLAURINschen Form (166) werden benötigt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\ f^{(5)}(x) &= \cos x, & f^{(5)}(0) &= 1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die Reihe (166) ergibt sich für $\sin x$ die folgende alternierende Reihe

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots .} \tag{170}$$

Die Funktion $y = \sin x$ ist eine ungerade Funktion, denn infolge der ungeraden Potenzen von x auf der rechten Seite gilt $\sin(-x) = -\sin x$.
Zur Bestimmung der Konvergenz liefert (165a):

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1)(n+2) = \infty ,$$

das heißt, es gilt $-\infty < x < +\infty$. Die Reihe ist also beständig konvergent.
Mit der Reihe (170) ist die Sinusfunktion, die anschaulich im Einskreis festgelegt ist, analytisch definiert. Praktische Anwendung findet diese Reihe z. B. bei der Berechnung des Sinuswertes eines bestimmten Winkels, wobei x im Bogenmaß eingesetzt werden muß.

BEISPIEL

Es ist sin 24° auf drei Stellen genau zu bestimmen.

Lösung: Es ist arc 24° = 24 arc 1° = 24 · 0,017453 ≈ 0,419.
Durch Einsetzen in (170) wird

$$\sin 24° = 0{,}419 - \frac{0{,}419^3}{6} + \frac{0{,}419^5}{120} - + \cdots = 0{,}419 - 0{,}012 + 0{,}000 \ldots = \underline{\underline{0{,}407}}.$$

Die Rechnung zeigt, daß bei der geforderten Genauigkeit von drei Stellen nur die ersten zwei Glieder einen Beitrag liefern. Solche Reihen, bei denen schon die ersten zwei, drei oder vier Glieder eine hinreichende Genauigkeit ergeben, werden *schnell konvergierend* genannt. Es ist verständlich, daß für die praktische Mathematik nur solche Reihen von Bedeutung sind.

Bei Betrachtung der Reihe $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - + \cdots$ kann gesagt werden, daß sich die Kurve von $f(x) = \sin x$ durch Superposition der Parabeln n-ter Ordnung auf der rechten Seite der Gleichung darstellen läßt. Je mehr Glieder rechts hinzugenommen werden, um so mehr schmiegen sich diese Parabeln, die deshalb den Namen *Schmiegungsparabeln* bekommen haben, an die Sinus-Linie an. Im Bild 256 ist dies veranschaulicht worden. Dabei bedeuten

$$f(x) = \sin x, \quad f_1(x) = x, \quad f_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Die Funktion $f(x) = \sin x$ kann also durch Potenzfunktionen angenähert werden. Da z. B. bei $f_5(x)$ nach der 5. Potenz abgebrochen wurde, so liegt eine Schmiegungsparabel vom 5. Grad vor.

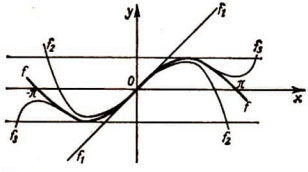


Bild 256

Entwicklung der Funktion $f(x) = \cos x$

Hier ergibt sich ähnlich wie bei der Entwicklung von $\sin x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= 1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die MACLAURINsche Form (166) wird die Reihe für $\cos x$ erhalten:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.} \tag{171}$$

Als gerade Funktion hat die Cosinusreihe nur gerade Potenzen von x. Es ist zu erkennen, daß die Beziehung $\cos(-x) = \cos x$ Gültigkeit hat.
Wie die Sinusreihe ist auch die Cosinusreihe konvergent für alle $-\infty < x < +\infty$, d. h., sie ist beständig konvergent. Übrigens kann auch noch durch gliedweises Differenzieren der Reihe für $\sin x$ als Ergebnis die Reihe für $\cos x$ erhalten werden.

Entwicklung der Funktion $f(x) = \tan x$

Es ist $f(0) = 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \frac{2\cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 2ff', \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = 2(ff'' + f'^2), \qquad f'''(0) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = 2(ff''' + f'f'' + 2f'f'') = 2(ff''' + 3f'f''), \qquad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = 2(ff^{(4)} + f'f''' + 3f'f''' + 3f'f''^2) =$$
$$= 2(ff^{(4)} + 4f'f''' + 3f''^2), \qquad f^{(5)}(0) = 16$$

usw.

Diese Werte in (166) eingesetzt, ergibt

$$\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots} \tag{172}$$

Die Reihe konvergiert für alle $|x| < \pi/2$. Auf die Entwicklung von $f(x) = \cot x$ soll hier nicht eingegangen werden, da sie einerseits umfangreicher ist und andererseits weniger Anwendung findet. Insbesondere läßt sich $\cot x$ um $x = 0$ nicht entwickeln, da die Funktion dort einen Pol hat.

Entwicklung der Funktion $f(x) = e^x$

Dieser Fall ist besonders einfach, da alle Ableitungen gleich der Funktion sind.

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 1, \quad \cdots, \quad f^{(k)}(0) = 1.$$

Diese Werte in (166) eingesetzt ergibt

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}} \tag{173}$$

Hier muß bei Anwendung des Summenausdruckes $0! = 1$ definiert werden.

Die Konvergenz wird aus $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{x^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n+1}$ gefunden. Die Reihe für e^x ist konvergent für alle $-\infty < x < +\infty$, d. h., sie ist beständig konvergent.

Nach der grundlegenden Forderung (162) über konvergente Reihen bedeutet das, daß der Ausdruck $x^n/n!$ für $n \to \infty$ gegen Null geht. Damit kann gesagt werden: Im Fall $n \to \infty$ wird $n!$ „stärker unendlich" als x^n.

Wird (173) gliedweise differenziert, so wird als Ergebnis die gleiche Reihe erhalten, wie es ja auch sein muß.

Das Bild 257 zeigt die Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ und die Schmiegungsparabeln $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = 1 + x + x^2/2!$. Wird in der Reihe für e^x als Sonderfall $x = 1$ gesetzt, so ergibt sich die schnell konvergierende Reihe für e:

$$\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2{,}71828\ldots} \tag{173a}$$

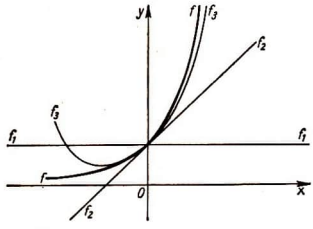


Bild 257

Ist $f(x) = a^x$, so ergibt eine einfache Umformung $a^x = e^{x \ln a}$ und mit (173) wird

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots.$$

Entwicklung der Funktion $f(x) = \cosh x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= \sinh x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= \cosh x, & f''(0) &= 1, \\ f'''(x) &= \sinh x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cosh x, & f^{(4)}(0) &= 1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} \tag{174}$$

Da nur gerade Potenzen von x vorkommen, so ist $\cosh x$ eine gerade Funktion. Die Konvergenz ergibt sich aus

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{(n+1)(n+2)},$$

d. h., für alle Werte $-\infty < x < +\infty$ ist die Reihe konvergent.

Die Reihen für $\cosh x$ und $\cos x$ haben große Ähnlichkeit, der Unterschied liegt nur in den Vorzeichen. Die Verwandschaft wird sofort sichtbar, wenn an Stelle des x die imaginäre Größe $\mathrm{j}x$ eingesetzt wird. Nun ist $\mathrm{j}^2 = -1$, $\mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}$, $\mathrm{j}^4 = 1$, $\mathrm{j}^5 = \mathrm{j}, \ldots$ und damit schließlich:

$$\cosh \mathrm{j}x = 1 + \frac{(\mathrm{j}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{j}x)^4}{4!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots.$$

Das ist aber die Reihe für $\cos x$. Somit gilt $\cosh \mathrm{j}x = \cos x$. Ähnlich ergibt sich: $\cos \mathrm{j}x = \cosh x$. Diese Beziehungen finden Anwendung besonders in der Elektrotechnik.

Das Bild (258) zeigt die Kurve die Funktion $f(x) = \cosh x$ und die Schmiegungsparabeln $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2!}$, $f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

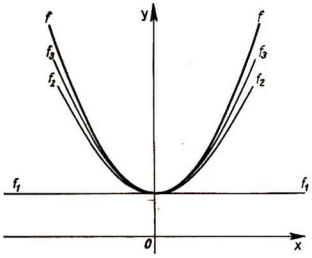


Bild 258

Die Gleichung von Euler

Wird in der Potenzreihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ an Stelle des reellen Exponenten x der imaginäre Ausdruck $\mathrm{j}x$ gesetzt, wobei also $\mathrm{j}^2 = -1$, so ist zunächst

$$e^{\mathrm{j}x} = 1 + \mathrm{j}x + \frac{(\mathrm{j}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{j}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{j}x)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{j}x)^5}{5!} + \cdots$$

oder

$$e^{\mathrm{j}x} = 1 + \mathrm{j}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{j}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{j}\frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

Das ist eine Reihe mit komplexen Gliedern. Solche Reihen sind etwas qualitativ Neuartiges. Sie haben besondere Gesetze, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Nach solch einem Satz ist es hier möglich, reelle und imaginäre Teile für sich zu-

sammenzufassen, also

$$e^{jx} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right) + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right).$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind aber die Potenzreihen für $\cos x$ und $\sin x$. Es gilt also die für die Elektrotechnik besonders wichtige

Gleichung von Euler

$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j \sin x} \tag{175}$$

Wird in dieser Gleichung das Argument negativ genommen, so wird $e^{-jx} = \cos(-x) + j\sin(-x)$, also $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$. Bei Addition der Gleichungen für e^{jx} und e^{-jx} ergibt sich $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cosh jx$, bei Subtraktion schließlich $\sin x = -j\,\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} = -j \sinh jx$.

AUFGABEN

717. Es ist die Cosinuslinie mit den Schmiegungsparabeln bis zum 4. Grade zu zeichnen.

718. Es ist zu beweisen, daß die Reihe für a^x beständig konvergent ist.

719. Für $f(x) = \sinh x$ ist die Potenzreihe zu entwickeln und die Kurve der Funktion mit den Schmiegungsparabeln bis zum 5. Grade zu zeichnen. Anschließend ist der Zusammenhang zwischen Kreissinus und Hyperbelsinus zu zeigen.

720. Die Funktion $f(x) = \sin(x + \pi/3)$ ist in eine Potenzreihe bis zur 4. Potenz zu entwickeln.

721. Für $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$ ist a) eine Potenzreihe bis zur 4. Potenz zu entwickeln, b) der Ausdruck für das n-te Glied aufzustellen.

19.5. Entwicklung der Binomialreihe

(Beweis für die bereits im Band „Algebra-Geometrie" angeführte Reihe.)
Für kleine ganze n können dem Pascalschen Dreieck die Binomialkoeffizienten entnommen werden. Wird jedoch n sehr groß oder gar gebrochen, so wird diese Methode umständlich bzw. versagt sie. Um die Entwicklung nach Maclaurin (166)* durchführen zu können, wird ermittelt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (a + x)^n, & f(0) &= a^n,\\
f'(x) &= n(a + x)^{n-1}, & f'(0) &= n a^{n-1},\\
f''(x) &= n(n-1)(a + x)^{n-2}, & f''(0) &= n(n-1)\, a^{n-2},\\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)(a + x)^{n-3}, & f'''(0) &= n(n-1)(n-2)\, a^{n-3},
\end{aligned}$$

allgemein: $f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, a^{n-k}$.

Eingesetzt in (166):

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \cdots \tag{176}$$

Diese Reihe ist gültig für alle reellen Werte von n.

Für $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$ kann die kürzere symbolische Schreibweise $\binom{n}{k}$ genommen werden (vgl. Bd. „Algebra-Geometrie"). Mit dieser Vereinfachung erhält (176) die Form

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}x^k + \cdots$$

Bei Betrachtung der Gesetzmäßigkeit der Binomialkoeffizienten könnte der erste Summand rechts vom Gleichheitszeichen den Faktor $\binom{n}{0}$ haben.

Deshalb wird definiert $\binom{n}{0} = 1$. Aus der Definitionsgleichung ergibt sich $\binom{n}{n} = 1$.

Ein Sonderfall ergibt sich in (176), wenn $a = 1$ ist, dies ist die

Binomialreihe

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots \tag{176a}$$

Ist der Exponent n eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe von selbst ab. Ist das nicht der Fall, so handelt es sich um eine unendliche Reihe. Die Konvergenz von (176) ergibt sich aus:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}}{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}}\cdot\frac{a^{n-k-1}x^{k+1}}{a^{n-k}x^k}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{x}{a}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\cdot\frac{x}{a}\right| = \left|\frac{x}{a}\right|,$$

d. h., für alle $|x| < a$ herrscht Konvergenz. Die Binomialreihe (176a) ist somit konvergent für $|x| < 1$.

19.6. Reihenentwicklung durch Integration

Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe läßt sich oft dadurch ermöglichen, daß zunächst die Ableitung dieser Funktion in eine Potenzreihe entwickelt und diese dann gliedweise integriert wird. Dabei gilt der

Satz

Jede konvergente Potenzreihe darf im Innern ihres Konvergenzbereiches gliedweise integriert werden.

Reihe für $f(x) = \arctan x$

Es ist $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Wird der Integrand in eine Reihe entwickelt, wobei hier die Division schneller zum Ziele führt als die Benutzung der Binomialreihe, so gilt:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \cdots, \text{ konvergent für } |x| < 1.$$

Mit dieser Bedingung ist es möglich zu schreiben

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \cdots)\,\mathrm{d}x.$$

Somit wird

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \cdots, |x| \leqq 1} \qquad (177)$$

Sonderfall: Wird hier $x = 1$ gesetzt, so ist $\arctan 1 = \pi/4$.
Damit ergibt sich die recht langsam konvergierende LEIBNIZsche *Reihe*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots.$$

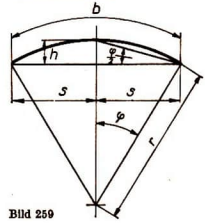


Bild 259

Die Länge eines Kreisbogens (Entwicklung der Bogenlänge nach Potenzen des Verhältnisses Bogenhöhe zu halber Spannweite). Nach Bild 259 sind gegeben: s halbe Spannweite, h Bogenhöhe. Gesucht: b Bogenlänge.
Wird gesetzt $h/s = \lambda$, so ist also $b = f(h/s) = f(\lambda)$. Nun ist $\tan \varphi/2 = h/s = \lambda$, $\varphi = 2 \arctan \lambda$, und außerdem $b = 2\varphi r$. Der Höhensatz liefert $s^2 = h(2r - h)$,

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{h} + h\right) = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right).$$

Werden die Werte für r und φ in den Ausdruck für b eingesetzt, so ergibt sich zunächst

$$b = 2s\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)\arctan\lambda.$$

Wenn nun noch für $\arctan\lambda$ die Potenzreihe (177) eingesetzt wird, so ist

$$b = 2s\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)\left(\lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \frac{\lambda^7}{7} + - \cdots\right).$$

Nach Multiplikation der Klammern und Ordnen nach Potenzen von λ wird schließlich

$$b = 2s\left(1 + \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{2}{15}\lambda^4 + \frac{2}{35}\lambda^6 - \frac{2}{63}\lambda^8 + - \cdots\right), \quad \lambda \leqq 1.$$

BEISPIEL

1. Welche Länge b muß eine kreisförmig gebogene Eisenbahnschiene haben, wenn die Sehne $2s = 6500$ mm lang und die Bogenhöhe $h = 555$ mm sein soll?

Lösung: Mit

$$\lambda = \frac{h}{s} = \frac{555\text{ mm}}{3250\text{ mm}} = 0{,}17077$$

wird

$$b = 6500\text{ mm}\left(1 + \frac{2}{3}\,0{,}17077^2 - \frac{2}{15}\,0{,}17077^4 + \frac{2}{35}\,0{,}17077^6 - + \cdots\right) =$$

$$= 6500\text{ mm}\,(1 + 0{,}0194416 - 0{,}0001134 + 0{,}0000014 - + \cdots)$$

$$b = 6626\text{ mm}.$$

Spiegelablesung einer Meßgröße. Bei der Spiegelablesung einer Meßgröße entspricht einem bestimmten Drehwinkel φ (in Grad) des Spiegels Sp eine Auslenkung des Lichtstrahles L, die als Länge x auf einer um h vom Spiegel entfernten Skala abgelesen werden kann. Es soll eine Funktion $\varphi = f(x)$ mit $x \ll h$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Wie lautet damit die aufgestellte Näherungsformel, wenn bei $h = 7{,}50$ m und $x \leqq 1$ m der Winkel φ mit einem Fehler von $1^0/_0$ bzw. $1^0/_{00}$ bestimmt werden soll?

Nach Bild 260 gilt

$$\tan 2\varphi = \frac{x}{h}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{h}.$$

Mit der Reihenentwicklung (177) wird daraus

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{h}\right)^5 - + \cdots\right].$$

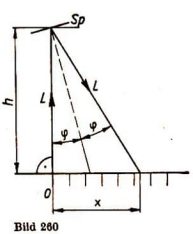


Bild 260

Nach Umrechnung des Winkels φ ins Gradmaß wird

$$\varphi = \frac{90°}{\pi}\left[\frac{x}{h} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{h}\right)^5 - + \cdots\right],$$

$$\varphi = \frac{90°}{\pi}\cdot\frac{x}{h}\left[1 - \frac{x^2}{3h^2} + \frac{x^4}{5h^4} - + \cdots\right].$$

Für den größtmöglichen Wert von x, $x_{\max} = 1$ m, wird mit $h = 7{,}50$ m

$$\varphi = \frac{90°}{\pi}\cdot\frac{1}{7{,}50}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7{,}5^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7{,}5^4} - + \cdots\right].$$

Das 2. Glied in der Klammer besitzt angenähert den Wert 0,006. Es kann demnach bereits vernachlässigt werden, wenn ein Fehler von $1\,^0/_0$ zugelassen ist.
Das 3. Glied in der Klammer besitzt angenähert den Wert 0,00006 und kann bei einem zugelassenen Fehler von $1\,^0/_{00}$ unberücksichtigt bleiben.
Damit heißen die Näherungsformeln

für einen Fehler $\leqq 1\,^0/_0$ $\quad \varphi = \dfrac{90°}{\pi}\,\dfrac{x}{h}$,

für einen Fehler $\leqq 1\,^0/_{00}$ $\quad \varphi = \dfrac{90°}{\pi}\left[\dfrac{x}{h} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{h}\right)^3\right]$.

Reihe für $f(x) = \ln x$

Wird in $\int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx$ der Integrand als Reihe geschrieben, also $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots$, eingesetzt und integriert von $0 \cdots x$, so ergibt sich

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots, \quad -1 < x \leqq +1.$$

Für $x = 1$ wird:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots = 0{,}693\cdots.$$

Die Reihe für $\ln(1+x)$ konvergiert zu langsam, sie eignet sich also schlecht zur praktischen Rechnung. Deshalb wird eine andere Reihe hergeleitet. Durch Änderung des Vorzeichens von x ergibt sich zunächst die Reihe

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Durch Bilden der Differenz $\ln(1+x) - \ln(1-x)$ erhält man eine neue Reihe:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right), \quad |x| < 1 \tag{178}$$

Wird hierin $\frac{1+x}{1-x} = z$ gesetzt, so folgt daraus $x = \frac{z-1}{z+1}$.
Schreibt man für die Variable wiederum x (statt z), so ergibt sich eine Form, die sich für das praktische Rechnen besser eignet:

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \cdots\right], \quad x > 0 \tag{179}$$

Aus der obigen Substitution $\frac{1+x}{1-x} = z$ wird der angegebene Konvergenzbereich erhalten, da dort $|x| < 1$ ist.
Die Reihe (179) hat also eine umfassendere Gültigkeit als die Reihe für $\ln(1+x)$.

BEISPIELE

2. Es soll für ln 2 eine Reihe aufgestellt werden.

   Lösung: In (178) wird $x = 1/3$ gesetzt oder in (179) $x = 2$, in beiden Fällen ergibt sich die schnell konvergierende Reihe

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \cdots\right) = 0{,}693\cdots.$$

3. Es soll ln 3 bestimmt werden.

   Lösung: Ähnlich wie in Beispiel 2 wird gefunden:

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} + \cdots\right) = 1{,}098\cdots.$$

Durch geschickte Kombination logarithmischer Reihen sind die Logarithmen der nächsten Primzahlen ermittelt und damit die Logarithmentafeln aufgestellt worden.

AUFGABEN

722. $\pi/6$ ist mittels einer Potenzreihe (bis zum 5. Glied) zu berechnen.

723. Mit Hilfe von $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ ist eine Potenzreihe für $\arcsin x$ und daraus eine Reihe für $\pi/2$ bis zum 5. Gliede zu entwickeln.

724. In der Reihe für die Länge eines Kreisbogens ist für b das allgemeine Glied zu ermitteln und damit die angegebene Konvergenz zu beweisen.

20. Anwendungen

20.1. Näherungsformeln

Die Hauptanwendung der Binomialreihe liegt in der Aufstellung von Näherungsformeln. Je nach geforderter Genauigkeit wird die Reihe an einer bestimmten Stelle abgebrochen.

20.1.1. Wurzelausdrücke

BEISPIELE

1. Entwicklung von $f(x) = \sqrt{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{2}}$.

   Lösung: Mit (176) wird:

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}a^{\frac{1}{2}-2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}a^{\frac{1}{2}-3}x^3 + \\ + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{24}a^{\frac{1}{2}-4}x^4 + \cdots, \quad \text{also}$$

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{x^3}{a^3} - \frac{5}{128}\cdot\frac{x^4}{a^4} + - \cdots\right).$$

   Die Koeffizienten lassen sich anders schreiben, damit ihre Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck kommt:

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^4}{a^4} + - \cdots\right).$$

   Diese Reihe ist konvergent für $|x| < a$. Die vorstehende Entwicklung zeigt, daß vor der Reihenentwicklung die einfache Umformung $\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{1+\frac{x}{a}}$ ebenfalls zum Ziele geführt hätte, wenn anschließend die Wurzel nach Potenzen von x/a entwickelt worden wäre. Für $a = 1$ wird:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + - \cdots, \quad |x| < 1.$$

2. Entwicklung von $f(x) = \sqrt{a+x^2} = (a+x^2)^{\frac{1}{2}}$.

   Lösung: Wird hier $x^2 = z$ gesetzt, so läßt sich die Reihe vom vorigen Beispiel verwenden, also:

$$\sqrt{a+x^2} = \sqrt{a}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{a^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{x^6}{a^3} - \frac{5}{128}\cdot\frac{x^8}{a^4} + - \cdots\right), \quad |x| < \sqrt{a}.$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + - \cdots, \quad |x| < 1.$$

3. Entwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Lösung: Bei ähnlicher Rechnung wie im ersten Beispiel ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^4}{a^4} - + \cdots\right), \quad |x| < a.$$

Ein Sonderfall wird erhalten für $a = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots, \quad |x| < 1.$$

4. Die Funktion $f(x) = \sqrt{4+5x}$ soll bis zur 4. Potenz von x entwickelt werden.

Lösung: Zunächst eine kleine Umformung mit anschließender Substitution:

$$\sqrt{4+5x} = 2\sqrt{1+\frac{5}{4}x} = 2\sqrt{1+z}, \quad z = \frac{5}{4}x.$$

$$2\sqrt{1+\frac{5}{4}x} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{25}{16}x^2 + \frac{1}{16}\cdot\frac{125}{64}x^3 - \frac{5}{128}\cdot\frac{625}{256}x^4 + - \cdots\right),$$

oder

$$\sqrt{4+5x} = 2(1 + 0{,}6250x - 0{,}1953x^2 + 0{,}1221x^3 - 0{,}0954x^4 + - \cdots), \quad |x| < \frac{4}{5}.$$

Die n-te Wurzel einer Zahl kann mit Hilfe einer Reihenentwicklung gezogen werden, wenn vorher der Radikand so umgeformt wird, daß die Binomialreihe möglichst schnell konvergiert.

BEISPIEL

5. $\sqrt{41}$ ist auf 4 Dezimalen genau zu bestimmen.

Lösung: Es ist

$$\sqrt{41} = \sqrt{36+5} = \sqrt{36\left(1+\frac{5}{36}\right)} = 6\sqrt{1+\frac{5}{36}}.$$

Wird nun $x = \dfrac{5}{36}$ gesetzt und die Reihenentwicklung für $\sqrt{1+x}$ angewendet, so ergibt sich

$$6\sqrt{1+\frac{5}{36}} = 6\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{36} - \frac{1}{8}\cdot\frac{25}{1296} + \frac{1}{16}\cdot\frac{125}{46656} - \frac{5}{128}\cdot\frac{625}{1679616} + - \cdots\right) =$$

$$= 6(1 + 0{,}069444 - 0{,}002411 + 0{,}000167 - 0{,}0000145 + - \cdots)$$

$$\sqrt{41} = \underline{\underline{6{,}4031}}.$$

20.1.2. Besondere Fälle

Schubkurbelgetriebe. Der Kreuzkopfabstand ist nach Potenzen des Verhältnisses Kurbelradius zu Schubstangenlänge zu entwickeln.
Nach Bild 261 sind gegeben: r Radius der Kurbel, s Länge der Schubstange, φ Drehwinkel, δ Hilfswinkel.

Gesucht: x Abstand Kurbelachse-Kreuzkopfmitte.

Wird das Verhältnis $\frac{r}{s} = \lambda$ gesetzt, so ist gesucht $x = f\left(\frac{r}{s}\right) = x(\lambda)$. (Bei Dampfmaschinen ist $\lambda \approx 1/5$.)

Von Bild 261 ist abzulesen $x = r\cos\varphi + s\cos\delta$, und der Sinussatz sagt aus

$$\frac{\sin\delta}{r} = \frac{\sin\varphi}{s}, \quad \text{also} \quad \sin\delta = \frac{r}{s}\cdot\sin\varphi.$$

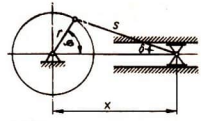


Bild 261

Mit

$$\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta}$$

ist

$$x = r\cos\varphi + s\sqrt{1-\left(\frac{r}{s}\right)^2\sin^2\varphi}$$

oder

$$x = s\left(\frac{r}{s}\cos\varphi + \sqrt{1-\left(\frac{r}{s}\right)^2\sin^2\varphi}\right).$$

Wenn hier das Verhältnis $r/s = \lambda$ eingesetzt wird, so ist

$$x = s\left(\lambda\cos\varphi + \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}\right).$$

Nun kann der Wurzelausdruck $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1+z}$ mit $z = -\lambda^2\sin^2\varphi$ zunächst nach Potenzen von z entwickelt werden. Unter Benutzung der Entwicklung von $f(x) = \sqrt{1+x}$ ergibt sich

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi - \frac{1}{16}\lambda^6\sin^6\varphi - \cdots.$$

Wird dies oben in die letzte Gleichung für x eingesetzt, so ist

$$x = s\left(\lambda\cos\varphi + 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi - \cdots\right) =$$

$$= s\left[1 + \lambda\cos\varphi - \frac{1}{2}\lambda^2(1-\cos^2\varphi) - \cdots\right].$$

Werden hierbei die Glieder höherer Ordnung fortgelassen, so gilt für hinreichend kleine Werte von λ:

$$x = s\left(1 + \lambda\cos\varphi - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\cos^2\varphi\right), \quad \lambda \ll 1.$$

Zahlenbeispiel:

Es seien $s = 1{,}150\,\text{m}$, $\varphi = 60°$, $\frac{r}{s} = \lambda = \frac{1}{5}$ und $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Damit wird der Abstand

$$x = 1{,}150\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{4}\right)\text{m},$$

$$x = 1{,}248\text{ m}.$$

Die genaue, aber umständlichere Rechnung liefert den gleichen gerundeten Wert.

Pfeilhöhe eines Kreisabschnittes. Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses Bogen zu Radius.

Nach Bild 262 sind gegeben Bogen b und Radius r. Wird $\frac{b}{r} = \lambda$ gesetzt, dann ist gesucht $h = f\left(\frac{b}{r}\right) = f(\lambda)$.

Das Bild zeigt, daß $r\cos\varphi + h = r$ ist, also $h = r(1 - \cos\varphi)$.

Mit

$$2\varphi = \frac{b}{r} \quad \text{wird} \quad h = r\left(1 - \cos\frac{b}{2r}\right).$$

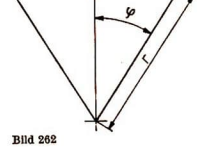


Bild 262

Nun ist nach (171)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.$$

Wird hierin

$$x = \frac{b}{2r}$$

eingesetzt, so ist

$$\cos\frac{b}{2r} = 1 - \left(\frac{b}{2r}\right)^2\cdot\frac{1}{2!} + \left(\frac{b}{2r}\right)^4\cdot\frac{1}{4!} - \left(\frac{b}{2r}\right)^6\cdot\frac{1}{6!} + - \cdots.$$

Wenn schließlich zur Abkürzung $\frac{b}{r} = \lambda$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$h = r\left(\frac{\lambda^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{\lambda^4}{2^4\cdot 4!} + \frac{\lambda^6}{2^6\cdot 6!} - + \cdots\right)$$

oder

$$h = r\left(\frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^4}{384} + \frac{\lambda^6}{46080} - + \cdots\right).$$

Der Konvergenzradius ergibt sich aus

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+2}(n+2)!}{2^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty} 2^2(n+1)(n+2) = \infty,$$

d. h., die Reihe ist konvergent für alle $|\lambda| < \infty$. In Anwendungen dürften aber nur Werte $\lambda < \pi$ vorkommen.

Zahlenbeispiel:

Es soll die Höhe des Kreisabschnittes bestimmt werden, für den das Verhältnis Bogen zu Radius gleich 2 ist.

Lösung: Mit $\lambda = 2$ wird $h = r\left(\frac{4}{8} - \frac{16}{384} + \frac{64}{46080}\right) =$

$$= r(0{,}500 - 0{,}0416 + 0{,}00138) = \underline{\underline{0{,}460r}}.$$

Die Brinellsche Kugeldruckprobe. Eine Stahlkugel vom Durchmesser D in mm wird mit einer Kraft F in kp in die blanke Oberfläche eines Probestückes gepreßt. Ist d in mm der Durchmesser der Eindruckfläche (er muß auf hundertstel mm genau angegeben werden), so läßt sich nach BRINELL (TGL 8648) die Härte in kp/mm² berechnen nach der Formel

$$H = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}.$$

Mit Hilfe einer Potenzreihe soll diese Formel durch eine Näherungsformel ersetzt werden.
Hierbei soll sein

$$0{,}2 \leqq \frac{d}{D} \leqq 0{,}5.$$

Zunächst ist

$$\sqrt{D^2 - d^2} = D\sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}.$$

Der Wurzelausdruck wird nun in eine Potenzreihe entwickelt:

$$D\sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2} = D\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^6 - \cdots\right]$$

damit wird

$$H = \frac{2F}{\pi D\left\{D - D\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^6 - \cdots\right]\right\}}$$

oder

$$H = \frac{2F}{\frac{\pi D^2}{2}\left(\frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{4}\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{8}\frac{d^6}{D^6} + \cdots\right)}$$

und weiter

$$H = \frac{4F}{\pi d^2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{8}\frac{d^4}{D^4} + \cdots\right)} = \frac{4F}{\pi d^2}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{d^2}{D^2} + \frac{1}{8}\frac{d^4}{D^4} + \cdots}$$

Mit Anwendung der Näherung

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$$

(oder mit Hilfe der Division) wird

$$H \approx \frac{4F}{\pi d^2}\left(1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{D^2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{d^4}{D^4}\right).$$

Schließlich kann noch zur Vereinfachung gesetzt werden

$$\frac{4}{\pi} \approx 1{,}273, \quad \frac{d}{D} = \alpha,$$

und man erhält

$$H \approx 1{,}273\,\frac{F}{d^2}\left(1 - \frac{1}{4}\,\alpha^2 - \frac{1}{16}\,\alpha^4\right).$$

Da $\frac{d}{D} < 1$, ist $\alpha < 1$.

Zahlenbeispiel:

Mit $\frac{d}{D} = \alpha = 0{,}2$ ist $\alpha^2 = 0{,}04$, $\alpha^4 = 0{,}0016$

und $H \approx 1{,}273\,\frac{F}{d^2}(1 - 0{,}01 - 0{,}0001) \approx 1{,}273\,\frac{F}{d^2}\,0{,}99 \approx 1{,}26\,\frac{F}{d^2}$.

Anderseits ist mit $\frac{d}{D} = \alpha = 0{,}5$, $\alpha^2 = 0{,}25$ und $\alpha^4 = 0{,}0625$

und

$$H \approx 1{,}273\,\frac{F}{d^2}\,(1 - 0{,}0625 - 0{,}0039) \approx 1{,}19\,\frac{F}{d^2}.$$

20.2. Integration nach vorhergegangener Reihenentwicklung

Bei der Lösung eines Integrales kann der Fall eintreten, daß sich trotz Anwendung der bekannten Lösungsverfahren das Integral nicht in einer geschlossenen Form lösen läßt. Dann steht das hier zu behandelnde Mittel zur Verfügung. Der Integrand wird in eine Potenzreihe entwickelt und das Ergebnis dann gliedweise integriert. Natürlich muß eine Entwicklung in eine Potenzreihe überhaupt möglich sein. Von der zu integrierenden Reihe muß Konvergenz gefordert werden. Es läßt sich nachweisen, daß die mittels der Integration gewonnene neue Potenzreihe den gleichen Konvergenzradius wie die alte Reihe hat.

Integration irrationaler Funktionen

Die Bogenlänge der Parabel 2. Grades (Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses Bogenhöhe h zu halber Bogenbreite s).

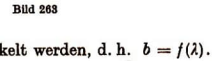


Bild 263

Nach Bild 263 sind gegeben s und h, wobei $\frac{h}{s} = \lambda \ll 1$.

Die Bogenlänge b soll also nach Potenzen von λ entwickelt werden, d. h. $b = f(\lambda)$.

Die Parabel hat die Gleichung $y = cx^2$, also $h = cs^2$ oder $c = \frac{h}{s^2}$, somit

$$y = \frac{h}{s^2}\,x^2.$$

Um die Formel für die Bogenlänge $s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ anwenden zu können, sind erforderlich

$$y' = 2\,\frac{h}{s^2}\,x \quad \text{und} \quad y'^2 = 4\,\frac{h^2}{s^4}\,x^2.$$

Dies eingesetzt, wird

$$b = \int_0^s \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_0^s \sqrt{1 + 4\,\frac{h^2}{s^4}\,x^2}\, dx.$$

Nach Einführung einer neuen Variablen

$$z = 4\,\frac{h^2}{s^4}\,x^2$$

läßt sich der Integrand wie folgt als Reihe schreiben

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{8}\,z^2 + \frac{1}{16}\,z^3 - + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Damit ist

$$\left(1 + 4\,\frac{h^2}{s^4}\,x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{h^2}{s^4}\cdot x^2 - \frac{1}{8}\cdot 16\cdot\frac{h^4}{s^8}\cdot x^4 + \\ + \frac{1}{16}\cdot 64\cdot\frac{h^6}{s^{12}}\cdot x^6 - + \cdots.$$

Nun wird auf beiden Seiten integriert und das Verhältnis $\frac{h}{s} = \lambda$ gesetzt. Es ergibt sich dann

$$b = s\left(1 + \frac{2}{3}\,\lambda^2 - \frac{2}{5}\,\lambda^4 + \frac{4}{7}\,\lambda^6 - \frac{10}{9}\,\lambda^8 + - \cdots\right).$$

Sind z. B. $h = 1\text{ m}$, $s = 4\text{ m}$, so ist also $\lambda = \frac{1}{4}$ und

$$b = 4\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{640} + \frac{1}{7168} - \frac{5}{294912} + - \cdots\right)\text{m} = 4{,}161\text{ m}.$$

BEISPIELE

1. Es soll $\int_0^{0{,}655} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ gelöst werden.

Lösung: Mit Hilfe der Binomialreihe wird der Integrand in eine Reihe entwickelt. Mit der Reihe für $(1+z)^{\frac{1}{2}}$, wobei $z = x^3$ ist, wird erhalten

$$\int_0^x \sqrt{1 + x^3}\, dx = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^6 + \frac{1}{16}\,x^9 - \frac{5}{128}\,x^{12} + - \cdots\right) dx, \quad |x| < 1.$$

$$\int_0^x \sqrt{1 + x^3}\, dx = x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5\,x^{13}}{1664} + - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Wenn nun für die obere Grenze $x = 0{,}655$ gesetzt wird, so ergibt die Zahlenrechnung

$$\int_0^{0{,}655} \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = 0{,}655 + \frac{0{,}655^4}{8} - \frac{0{,}655^7}{56} + - \cdots = \underline{\underline{0{,}677}}.$$

2. Es ist zu bestimmen

$$\int_0^{0{,}800} \sqrt{\frac{4-x^2}{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Der Integrand wird zunächst als Produkt geschrieben, d. h.

$$\int \sqrt{\frac{4-x^2}{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = 2\int \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Nun gilt der Satz:
Zwei Potenzreihen dürfen miteinander multipliziert werden innerhalb des Bereiches, für den sie gemeinsam absolute Konvergenz besitzen.
Im vorliegenden Falle konvergieren beide gemeinsam für $|x| < 1$. Die Reihen für die Faktoren des Integranden lauten:

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{128}x^4 - \frac{1}{1024}x^6 - \frac{5}{32768}x^8 - \frac{7}{262144}x^{10} - \cdots,$$

$$(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \frac{35}{128}x^{12} - + \cdots.$$

Werden diese beiden Reihen ausmultipliziert und nach Potenzen von x geordnet, so ergibt sich für den Integranden I:

$$I = 1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{16}x^5 + \frac{383}{1024}x^6 + \frac{1}{256}x^7 - \frac{1541}{32768}x^9 \pm \cdots.$$

Mit dieser Reihe ergibt sich

$$\int_0^x \sqrt{\frac{4-x^2}{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = 2\left(x - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{640}x^5 + \frac{1}{96}x^6 + \frac{383}{7168}x^7 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2048}x^8 - \frac{1541}{294912}x^9 \cdots\right), \quad |x| < 1.$$

Wird nun die obere Grenze $x = 0{,}800$ eingesetzt, so ist

$$\int_0^{0{,}800} \sqrt{\frac{4-x^2}{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = 2\,(0{,}800 - 0{,}0213 - 0{,}0512 - 0{,}0005 + 0{,}0027 + 0{,}0112 +$$
$$+ 0{,}00008) = \underline{\underline{1{,}482}}.$$

Integration transzendenter Funktionen

BEISPIELE

1. Das Integral $\int_0^x e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ läßt sich zwar in geschlossener Form lösen. Wird aber der Integrand in eine Potenzreihe entwickelt, so genügen oft schon wenige ihrer ersten Glieder für eine hinreichende Genauigkeit.

Lösung: Die Verwendung der Reihen für e^x und $\sin x$ führt zum Ansatz:

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \cdots\right) \times$$
$$\times \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - + \cdots\right).$$

Dieser Ansatz ist gestattet, da beide Reihen nicht nur absolut konvergent, sondern sogar beständig konvergent sind.
Wird ausmultipliziert und das Ergebnis nach steigenden Potenzen von x geordnet, so ergibt sich

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^9}{22680} - \cdots,$$

(die 4. und die 8. Potenz fallen dabei heraus.) Damit wird

$$\int_0^x e^x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{180} - \frac{x^7}{630} - \frac{x^8}{5040} - \frac{x^{10}}{226800} - \cdots.$$

Zahlenbeispiel:

Das vorstehende Integral soll im Intervall $0{,}200 \leqq x \leqq 0{,}850$ bestimmt werden.

$$\int_{0{,}200}^{0{,}850} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(0{,}85^2 - 0{,}2^2) + \frac{1}{3}(0{,}85^3 - 0{,}2^3) + \frac{1}{12}(0{,}85^4 - 0{,}2^4) -$$
$$- \frac{1}{180}(0{,}85^6 - 0{,}2^6) - \frac{1}{630}(0{,}85^7 - 0{,}2^7) - \cdots =$$
$$= 0{,}34125 + 0{,}02024 + 0{,}04337 - 0{,}00209 - 0{,}00051 = \underline{\underline{0{,}584}}.$$

2. Das Integral $\int \frac{x}{e^x - 1} dx$ soll durch Reihenentwicklung gelöst werden.

Lösung: Zur Entwicklung des Integranden in eine Potenzreihe ist der folgende Ansatz zu wählen:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots.$$

Die Ermittlung der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ erfolgt durch *Koeffizientenvergleich*, d. h., nach Multiplikation mit dem Nenner müssen auf beiden Seiten die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x übereinstimmen. Also:

$$x = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots),$$
$$x = a_0 x + x^2\left(\frac{a_0}{2} + a_1\right) + x^3\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2\right) + x^4\left(\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{2} + a_3\right) +$$
$$+ x^5\left(\frac{a_0}{120} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{2} + a_4\right) + x^6\left(\frac{a_0}{6!} + \frac{a_1}{5!} + \frac{a_2}{4!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{2!} + a_5\right) + \cdots.$$

Damit wird $a_0 = 1$ und alle Klammerausdrücke sind Null. Durch wiederholtes Einsetzen wird gefunden:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{720}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{30240}.$$

Werden diese Koeffizienten oben eingesetzt, so gilt:

$$\int \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \frac{1}{30240}x^6 - + \cdots\right) dx$$

schließlich

$$\int_0^x \frac{x}{e^x - 1}\,dx = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{3600}x^5 + \frac{1}{211680}x^7 - + \cdots.$$

Zahlenbeispiel:

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x - 1}\,dx = 1{,}0000 - 0{,}2500 + 0{,}0278 - 0{,}0002 = \underline{\underline{0{,}7776}}.$$

Der Integralsinus

Bei der Untersuchung von gewissen Vorgängen, z. B. in der Elektrotechnik, hat das Integral

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Si}(x) \quad \text{(sinus integralis)}$$

eine besondere Bedeutung. Weder eine Substitution noch partielle Integration führen zu einer Lösung. Dieses Integral ist nicht in geschlossener Form lösbar, d. h., es gibt mit den festgelegten Definitionen keine bekannte Funktion, deren erste Ableitung den Integranden ergibt. Die Lösung des Integrals führt auf eine neue unbekannte Funktion, die Integralsinus benannt wird.
Der Integrand läßt sich aber leicht als Reihe darstellen:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \cdots$$

und damit

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + - \cdots.$$

Ähnlich wie die Reihe für $\sin x$ konvergiert auch diese Reihe sehr schnell. Sie ist ebenfalls beständig konvergent.

Ohne Beweis sei angeführt

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Si}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Das Gaußsche Fehlerintegral

Eine besondere Rolle in der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt das Fehlerintegral von C. F. Gauss (1777 bis 1855). In der einfachsten Form kann es geschrieben werden

$$\Phi(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Es läßt sich ebenfalls nicht in geschlossener Form darstellen. Auch hier führt die Reihenentwicklung zum Ziel. Wird in der Reihe

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

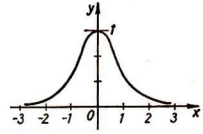


Bild 264

für $z = -x^2$ gesetzt, so ergibt sich

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - + \cdots\right)\mathrm{d}x$$

und schließlich

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - + \cdots,$$

konvergent für $|x| < \infty$.
Bild 264 zeigt den Verlauf der Kurve der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Die Kurve wird auch Verteilungs-, Häufigkeits- oder Gausssche Glockenkurve genannt. Der Inhalt der Fläche unter der Kurve im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + - \cdots = 0{,}747.$$

Ohne Beweis sei angeführt

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Die Bogenlänge der Ellipse

Die Ellipse mit den Halbachsen a und b, wobei $a > b$, hat nach Bild 265 die Parameterdarstellung $x = a \sin t$, $y = b \cos t$.
Hierbei gilt:

$$\text{für } t = 0 \qquad \text{ist } x = 0, \quad y = b,$$

$$\text{für } t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ist } x = a, \quad y = 0.$$

Mit den Differentialen $\mathrm{d}x = a \cos t \, \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = -b \cdot \sin t \, \mathrm{d}t$ und dem Bogendifferential

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

wird

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = a \sqrt{\cos^2 t + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Nun ist bekanntlich die numerische Exzentrizität ε festgelegt durch

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}},$$

also

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

daraus folgt

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2.$$

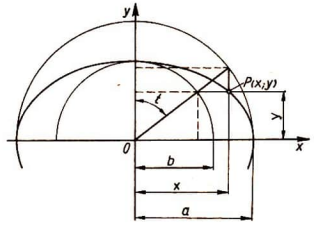


Bild 265

Wird dies oben eingesetzt, so gilt

$$\mathrm{d}s = a \sqrt{\cos^2 t + (1 - \varepsilon^2) \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t$$

Die Bogenlänge ist dann

$$s = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Dieses Integral läßt sich durch keine elementare Funktion ausdrücken, es wird *elliptisches Integral zweiter Gattung* genannt. Der Integrand

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}$$

wird nach Potenzen von $\varepsilon^2\sin^2 t$ entwickelt. Damit wird unter Benutzung von

$$(1-z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2\cdot 4}z^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 - \cdots$$

$$(1-\varepsilon^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 t - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\sin^4 t - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\sin^6 t - \\ - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^8\sin^8 t - \cdots.$$

Mit dieser Reihenentwicklung wird

$$s = a\int_0^t \Big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 t - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\sin^4 t - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\sin^6 t - \\ - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^8\sin^8 t - \cdots\Big)\,\mathrm{d}t$$

oder

$$s = a\Big(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^t \sin^2 t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\int_0^t \sin^4 t\,\mathrm{d}t - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\int_0^t \sin^6 t\,\mathrm{d}t - \\ - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^8\int_0^t \sin^8 t\,\mathrm{d}t - \cdots\Big).$$

Für die hier auftretenden Integrale, allgemein $\int_0^t \sin^n t\,\mathrm{d}t = S_n$, gilt die Rekursionsformel

$$S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} t\cos t + \frac{n-1}{n}S_{n-2}, \quad n > 1.$$

Werden damit die in der Klammer stehenden Integrale gelöst und für den Ellipsenquadranten $t = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, so ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,\mathrm{d}t = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t\,\mathrm{d}t = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Mit diesen Werten wird zunächst der Viertelumfang erhalten

$$s = \frac{U}{4} = \pi a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^4 \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6 \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^8 \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{2} - \cdots\right).$$

Der volle Umfang ist

$$U = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^6}{5} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon^8}{7} - \cdots\right]$$

oder

$$U = 2\pi a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \frac{175}{16384}\varepsilon^8 - \cdots\right).$$

Für praktische Rechnungen ist es besser, die gemeinen Brüche als Dezimalbrüche zu schreiben:

$$U \approx 2\pi a\,(1 - 0{,}25\,\varepsilon^2 - 0{,}046875\,\varepsilon^4 - 0{,}01953125\,\varepsilon^6 - 0{,}010681153\,\varepsilon^8 - \cdots).$$

Zahlenbeispiel:

Es ist der Umfang der Ellipse mit den Halbachsen $a = 26{,}5$ cm und $b = 20{,}3$ cm zu bestimmen.

Lösung: Die numerische Exzentrizität ergibt sich zu

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{26{,}5^2 - 20{,}3^2}}{26{,}5} = 0{,}6428.$$

$$U = 2\pi\,26{,}5\,(1 - 0{,}1033 - 0{,}0080 - 0{,}0014 - 0{,}0003 - \cdots)$$

$$U = 148 \text{ cm}.$$

AUFGABEN

725. Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(7-4x)^2}}$ soll bis zur 4. Potenz entwickelt werden.

726. $\sqrt[3]{9350}$ ist bis auf 4 Dezimalen zu berechnen.

727. $\displaystyle\int_0^{1{,}100} \sqrt{10 - x^4}\,\mathrm{d}x$ (3 Dezimalen).

728. $\displaystyle\int_0^{0{,}350} \sqrt{3 - x^2}\,\sqrt{5 - x}\,\mathrm{d}x$ (3 Dezimalen).

729. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{-x^2}\sin 2x\,\mathrm{d}x$ (4 Dezimalen).

730. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$ (3 Dezimalen).

731. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$ (4 Dezimalen).

732. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (3 Dezimalen).

733. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ (4 Dezimalen).

734. Als elliptisches Integral erster Gattung wird definiert

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,,\quad k^2<1.$$

Es ist zu ermitteln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}.$$

21. Fehlerrechnung für wahre Fehler

21.1. Fehlerarten

Um den Wert einer Größe, z. B. der Strecke, der Temperatur oder der Stromstärke, zu bestimmen, werden Messungen mit bestimmten Instrumenten und nach bestimmten Methoden durchgeführt. Der erhaltene Meßwert wird im allgemeinen nicht mit dem wahren Wert der Größe übereinstimmen, da bei den Messungen Fehler auftreten. Man unterscheidet drei Arten von Meßfehlern:

Grobe Fehler ergeben sich etwa durch Unaufmerksamkeit des Messenden (Beobachter) oder durch Verwendung eines schadhaften Instrumentes. Ein grober Fehler tritt z. B. auf, wenn bei der Messung einer Strecke an einem in cm geteilten Meßband ein Ablesefehler von 1 m gemacht wird, oder wenn ein beschädigtes Voltmeter, das bei einem Meßbereich von 10 V eine Ablesegenauigkeit von $^1/_{20}$ V gestattet, die Spannung um mehrere Volt falsch angibt. Grobe Fehler liegen also weit über der erreichbaren Ablesegenauigkeit. Man kann grobe Fehler erkennen, indem man mehrere Messungen durchführt bzw. andere Messungs- oder Rechnungsproben beachtet. So müßte z. B. die Summe der gemessenen Winkel eines Dreiecks 180° betragen. Nach dem Bekanntwerden lassen sich diese Fehler rechnerisch beseitigen. Prinzipiell gehören die groben Fehler zu den *vermeidbaren* Fehlern.

Systematische oder regelmäßige Fehler sind nicht immer vermeidbar und haben ihre Ursache hauptsächlich in gewissen Mängeln des verwendeten Instrumentes bzw. in der Art des Meßvorgangs. Zum Beispiel sei ein Meßband von 20 m Länge um 1 cm zu kurz. Bei der Messung einer Strecke von 250 m wird also ein Fehler von $\frac{250\text{ m}}{20\text{ m}}\ 1\text{ cm} =$ $= 12{,}5$ cm gemacht. Ein regelmäßiger Fehler tritt auch auf, wenn ein Thermometer einen Nullpunktfehler besitzt und somit beispielsweise alle Temperaturen um 2 grd zu klein angibt. Regelmäßige Fehler haben daher immer das gleiche Vorzeichen. Diese Fehler können entweder durch Berichtigung des Instrumentes vor der Messung vermieden werden, oder man bestimmt durch Vergleich mit anderen Instrumenten und Meßmethoden die Größe des Fehlers und beseitigt ihn nach der Messung durch Anbringung einer Reduktion.

Zufällige oder unregelmäßige Fehler ergeben sich aus dem Zusammenwirken zahlreicher Fehlerursachen, die vom Beobachter nicht erfaßt und beseitigt werden können, und sind daher *nicht vermeidbar*. Die Fehlerursachen sind Mängel im Instrument, die trotz aller Sorgfalt bei der Herstellung auftreten, Unvollkommenheit der Meßmethoden, persönliche Fehler des Beobachters, z. B. Augenfehler, Witterungseinflüsse usw. Die dabei auftretenden kleinen Teilfehler ergeben sich mit einer ähnlichen Zufälligkeit wie die Zahlen 1 bis 6 beim Würfelspiel. Da positive und negative Vorzeichen

gleich wahrscheinlich sind, werden sich einige der Teilfehler bei ihrer Vereinigung zum zufälligen Fehler gegenseitig aufheben. Wie die Teilfehler bleibt der zufällige Fehler, der auch *Meß-* oder *Beobachtungsfehler* heißt, unbekannt. Man begnügt sich mit genäherten Werten.
Den Betrachtungen des vorliegenden Kapitels wird nur der zufällige Fehler zugrunde gelegt.
In der Fehlerrechnung gibt es vor allem *zwei Aufgaben*: Sind die Fehler gemessener Größen näherungsweise bekannt, etwa geschätzt, und werden aus den gemessenen Größen andere berechnet, dann ist zu zeigen, wie sich die Meßfehler auf die zu berechnende Größe auswirken. Hierdurch wird verhindert, daß bei der Rechnung eine nicht vorhandene Genauigkeit vorgetäuscht wird, also z. B. Dezimalstellen berechnet werden, die wegen der Meßfehler nicht gesichert sind.
Wird umgekehrt vorgeschrieben, mit welcher Genauigkeit eine Größe aus Messungen zu bestimmen ist, dann lassen sich mit Hilfe der Fehlerrechnung die einzuhaltenden Meßfehler berechnen und Entscheidungen über die zu verwendenden Instrumente und Meßmethoden treffen.

21.2. Wahre Fehler

X sei der wahre Wert einer zu messenden Größe und x der erhaltene Meßwert oder Beobachtungswert. Dann definiert man als den **wahren Fehler** der Messung

$$\varepsilon = X - x.$$

ε hat den Charakter einer Verbesserung, die man zur Beobachtung x addieren muß, um den wahren Wert X zu erhalten. Als zufälliger Fehler muß ε relativ klein sein und innerhalb bestimmter Grenzen bleiben. Bei mehreren Messungen ein- und derselben Größe werden die Beobachtungen x um den wahren Wert „streuen", d. h., die wahren Fehler ε werden gleichwahrscheinlich positiv und negativ sein und annähernd symmetrisch zum Wert $\varepsilon = 0$ liegen.
Da mit dem wahren Wert X auch der wahre Fehler ε unbekannt bleibt, begnügt man sich häufig mit seiner Schätzung, für die die Ablesegenauigkeit des Meßinstrumentes, das Streuen der Beobachtungswerte x bei mehreren Beobachtungen sowie die Erfahrung des Beobachters die Grundlage bilden. Der geschätzte Wert von ε wird mit Δx bezeichnet und, da X unbekannt ist, mit doppeltem Vorzeichen angegeben. Δx wird zur Beobachtung x hinzugefügt und mit der Schreibweise $X = x + \Delta x$ ausgedrückt, daß der wahre Wert mit großer Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$x - |\Delta x| < X < x + |\Delta x|$$

liegen wird. Häufig interessiert nicht der Fehler Δx selbst, sondern sein Verhältnis zu der zu messenden Größe. Man nennt in diesem Zusammenhang

Δx den **absoluten Fehler,**

$\dfrac{\Delta x}{x}$ den **relativen Fehler.**

Der relative Fehler wird oft in Prozent angegeben.

BEISPIELE

1. An einem Voltmeter wurde eine Spannung von 42,9 V abgelesen und der Meßfehler mit $\Delta U = \pm 0{,}3$ V geschätzt. Dann ist

$$U = (42{,}9 \pm 0{,}3)\ \text{V},$$

d. h., der wahre Wert ist im Intervall $42{,}6\ \text{V} < U < 43{,}2\ \text{V}$ zu erwarten, der relative Fehler ist

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\pm 0{,}3\ \text{V}}{42{,}9\ \text{V}} = \pm 0{,}007 = \pm 0{,}7\%.$$

2. Eine Strecke $s_1 = 622{,}60$ m wurde mit dem absoluten Fehler $\Delta s_1 = \pm 20$ cm und eine Strecke $s_2 = 280{,}70$ m mit dem absoluten Fehler $\Delta s_2 = \pm 15$ cm bestimmt. Für die relativen Fehler erhält man

$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\pm 20\ \text{cm}}{62260\ \text{cm}} = \pm 0{,}00032,$$

$$\frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\pm 15\ \text{cm}}{28070\ \text{cm}} = \pm 0{,}00053.$$

Der relative Fehler zeigt also besser als der absolute Fehler, daß der ersten Messung eine größere Genauigkeit als der zweiten innewohnt.

Häufig läßt sich eine Größe nicht unmittelbar messen, sondern sie muß aus anderen, durch Messung erhaltenen Größen rechnerisch abgeleitet werden. Zum Beispiel sei eine Größe Y von k Größen $X_1, X_2, \ldots, X_k$ abhängig:

$$Y = f(X_1; X_2; \ldots; X_k). \tag{I}$$

Die Messungen der X_i haben die Werte x_i ergeben, mit denen man aus (I) erhält

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_k).$$

Es ist nun wichtig festzustellen, wie sich die wahren Fehler ε_i der Meßwerte auf das Ergebnis der Rechnung auswirken, d. h., wie groß der wahre Fehler ε_y von y ist. Nach dem Satz vom totalen Differential folgt

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k.$$

Man setzt $\mathrm{d}x_i = \varepsilon_i$. Da die ε_i relativ klein sind, gilt $\mathrm{d}y \approx \Delta y = \varepsilon_y$, und man erhält

$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_k}\varepsilon_k} \tag{180}$$

(180) ist das **Fehlerfortpflanzungsgesetz für wahre Fehler.** Für praktische Aufgaben werden die ε_i durch die geschätzten Fehler Δx_i ersetzt. Da diese Fehler doppelte Vorzeichen besitzen, nimmt man sicherheitshalber den ungünstigsten Fall an, daß sich

in (180) alle einzelnen Fehleranteile summieren und gelangt so zur Definition des **absoluten Maximalfehlers:**

$$\boxed{\Delta y_{\max} = \pm\left(\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\,\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_k}\,\Delta x_k\right|\right)} \tag{181}$$

Ist $y = f(x)$ eine Funktion von einer unabhängigen Variablen und hat x den Meßfehler Δx, dann ergibt sich der Fehler Δy als Sonderfall von (181):

$$\boxed{\Delta y = f'(x)\,\Delta x} \tag{182}$$

Die Zahlenrechnung erfolgt mit dem Rechenstab. Man hüte sich dabei vor übertriebenen Genauigkeiten. Es wird stets nach oben gerundet. Für den Fehler werden nur ein oder höchstens zwei Ziffern (ohne die Nullen vor bzw. nach dem Komma) angegeben. Nach dem Fehler richtet sich wiederum die Genauigkeit, mit der y selbst angegeben wird.

Mit (181) bzw. (182) läßt sich noch der **relative Maximalfehler**

$$\boxed{\Delta y_r = \frac{\Delta y_{\max}}{y}} \tag{183}$$

bilden.

BEISPIELE

3. Zur Bestimmung der nicht meßbaren Strecke $AB = c$ wurde ein Hilfspunkt C gewählt, und dann wurden die Strecken $a = 364{,}76$ m, $b = 402{,}35$ m und der Winkel $\gamma = 68°14'$ gemessen (Bild 266). Die Meßfehler der Seiten und Winkel wurden mit $\Delta a = \Delta b = \pm 5$ cm, $\Delta\gamma = \pm 1'$ geschätzt. Wie groß ist c und sein absoluter Maximalfehler?

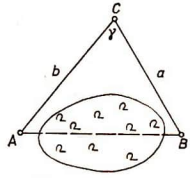


Bild 266

Lösung: c ergibt sich als Funktionswert der gemessenen Größen aus

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = f(a; b; \gamma), \tag{II}$$

und man erhält $c = 431{,}38$ m. Nach (181) folgt

$$\Delta c_{\max} = \pm\left(\left|\frac{\partial c}{\partial a}\,\Delta a\right| + \left|\frac{\partial c}{\partial b}\,\Delta b\right| + \left|\frac{\partial c}{\partial \gamma}\,\Delta\gamma\right|\right).$$

Bei der Bildung der partiellen Ableitungen wird die Wurzel nach (II) durch c ersetzt:

$$\Delta c_{\max} = \pm\left(\left|\frac{a - b\cos\gamma}{c}\,\Delta a\right| + \left|\frac{b - a\cos\gamma}{c}\,\Delta b\right| + \left|\frac{ab\sin\gamma}{c}\,\Delta\gamma\right|\right).$$

Anmerkung: Um den Streckenfehler in cm zu erhalten, wird beim Einsetzen der Zahlenwerte der Winkelfehler im Bogenmaß angegeben, d. h., $1'$ wird ersetzt durch

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}00029.$$

Dieser Wert kann aus einer Tabelle entnommen werden. Weil die Berechnung der Fehler zumeist mit dem Rechenstab erfolgt, auf dem im allgemeinen der mit ϱ' bezeichnete Wert

$$\frac{180 \cdot 60}{\pi} = 3438$$

besonders gekennzeichnet ist, kann auch

$$1' = \frac{1}{3438}$$

gesetzt werden. Ebenfalls kann man mit genügender Genauigkeit die Werte der trigonometrischen Funktionen mit dem Rechenstab bestimmen.
Mit den gegebenen Zahlen folgt

$$\Delta c_{\max} = \pm\left(\frac{365 - 402 \cdot 0{,}371}{431} 0{,}05 + \frac{402 - 365 \cdot 0{,}371}{431} 0{,}05 + \frac{365 \cdot 402 \cdot 0{,}929}{431 \cdot 3438}\right) \text{m},$$

$$\Delta c_{\max} = \pm(0{,}025 + 0{,}031 + 0{,}092)\ \text{m},$$

$$\Delta c_{\max} = \pm 0{,}148\ \text{m} \approx \pm 0{,}15\ \text{m}.$$

Für die Strecke c erhält man

$$\underline{\underline{c = (431{,}38 \pm 0{,}15)\ \text{m}.}}$$

4. Zur Berechnung eines elektrischen Widerstandes R wurden die Stromstärke $I = (15 \pm 0{,}3)$ A und die Spannung $U = (110 \pm 2)$ V gemessen. Gesucht wird der relative Maximalfehler von R.

Lösung: Nach dem Ohmschen Gesetz gilt

$$R = \frac{U}{I} = f(U; I).$$

Nach Formel (181) folgt

$$\Delta R_{\max} = \pm\left(\left|\frac{\partial R}{\partial U}\Delta U\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\Delta I\right|\right) = \pm\left(\left|\frac{\Delta U}{I}\right| + \left|\frac{U}{I^2}\Delta I\right|\right).$$

Zur Bestimmung des relativen Maximalfehlers wird durch R geteilt und $IR = U$ beachtet:

$$\Delta R_r = \frac{\Delta R_{\max}}{R} = \pm\left(\left|\frac{\Delta U}{IR}\right| + \left|\frac{U}{I^2 R}\Delta I\right|\right) = \pm\left(\left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|\right).$$

Die Zahlenwerte ergeben

$$\Delta R_r = \frac{\Delta R_{\max}}{R} = \pm\left(\frac{2}{110} + \frac{0{,}3}{15}\right) \approx \underline{\underline{\pm 0{,}04}}.$$

Speziell für Funktionen der Form

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_k) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) \cdots \varphi_k(x_k) \qquad \text{(III)}$$

erhält man den relativen Maximalfehler leicht durch *logarithmische Differentiation* (vgl. 3.7.). Man logarithmiert (III) und erhält

$$\ln y = \ln \varphi_1(x_1) + \ln \varphi_2(x_2) + \cdots + \ln \varphi_k(x_k).$$

Das totale Differential ergibt

$$\mathrm{d}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\varphi_1'(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_2(x_2)}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\varphi_k'(x_k)}{\varphi_k(x_k)}\,\mathrm{d}x_k.$$

Die Differentiale ersetzt man wieder durch die Fehler Δy, Δx_i und erhält den relativen Maximalfehler aus

$$\Delta y_r = \frac{\Delta y_{max}}{y} = \pm\left(\left|\frac{\varphi_1'(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\,\Delta x_1\right| + \left|\frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_2(x_2)}\,\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\varphi_k'(x_k)}{\varphi_k(x_k)}\,\Delta x_k\right|\right).$$

BEISPIELE

5. Von einem Zylinder wurde der Durchmesser $D = (4{,}84 \pm 0{,}01)$ cm, die Höhe $h = (6{,}74 \pm 0{,}01)$ cm und durch Wägung die Masse $m = (968{,}5 \pm 0{,}1)$ g bestimmt. Mit welchem relativen Maximalfehler läßt sich daraus die Dichte ϱ berechnen?

Lösung: Es ist

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 h} = f(D; h; m).$$

Man erhält logarithmiert

$$\ln \varrho = \ln \frac{4}{\pi} + \ln m - 2 \ln D - \ln h$$

und für das totale Differential

$$\mathrm{d}(\ln \varrho) = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}m}{m} - \frac{2\,\mathrm{d}D}{D} - \frac{\mathrm{d}h}{h}.$$

Daraus ergibt sich der relative Maximalfehler

$$\frac{\Delta \varrho_{max}}{\varrho} = \pm\left(\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{2\,\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right|\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{0{,}1}{970} + \frac{2 \cdot 0{,}01}{4{,}84} + \frac{0{,}01}{6{,}74}\right) =$$

$$= \pm(0{,}0001 + 0{,}0041 + 0{,}0015) = \underline{\underline{\pm 0{,}0057 \approx \pm 0{,}6\%}}.$$

Man sieht, daß der Fehler der Wägung gegen die Längenmeßfehler vernachlässigt werden kann und eine weitere Genauigkeitssteigerung für ϱ nur durch genauere Volumenbestimmung möglich ist.

Für die Dichte selbst erhält man $\varrho = 7{,}81\ \mathrm{gcm^{-3}}$ und für den absoluten Maximalfehler

$$\Delta \varrho_{max} = \pm 0{,}0057 \cdot \varrho = \pm 0{,}045\ \mathrm{gcm^{-3}},$$

also

$$\varrho = (7{,}81 \pm 0{,}05)\ \mathrm{gcm^{-3}}.$$

6. Aus der Länge $l = 118{,}5$ cm und der Schwingungsdauer $T = 2{,}180$ s eines mathematischen Pendels soll die Erdbeschleunigung g berechnet werden. Wie genau müssen l und T bestimmt werden, damit der absolute Maximalfehler von g nicht mehr als ± 1 cm s^{-2} beträgt?

Lösung: Obgleich die Fehler Δl und ΔT der zu messenden Größen unbekannt sind, muß zunächst eine Formel für $\Delta g_{\max}$ aufgestellt werden. Man erhält aus

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}:$$

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = f(l;T)$$

$$\Delta g_{\max} = \pm\left(\left|\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l\right| + \left|\frac{-8\pi^2 l}{T^3}\Delta T\right|\right) = \pm 1 \text{ cm s}^{-2}. \tag{IV}$$

Nun wird die Annahme gemacht, daß die Fehler in der Messung der Länge und der Schwingungsdauer je zur Hälfte zum Fehler $\Delta g_{\max}$ beitragen sollen. Aus (IV) folgt also

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l = \pm 0{,}5 \text{ cm s}^{-2}$$

oder

$$\Delta l = \pm\frac{T^2}{4\pi^2}\,0{,}5 \text{ cm s}^{-2} = \pm 0{,}06 \text{ cm},$$

$$\frac{8\pi^2 l}{T^3}\Delta T = \pm 0{,}5 \text{ cm s}^{-2}$$

oder

$$\Delta T = \pm\frac{T^3}{8\pi^2 l}\,0{,}5 \text{ cm s}^{-2} = \pm 0{,}00055 \text{ s}.$$

Die Pendellänge müßte annähernd auf einen halben Millimeter und die Schwingungszeit auf sechs zehntausendstel Sekunden bestimmt werden, um die geforderte Genauigkeit für g einzuhalten.

AUFGABEN

735. Die Zahl $\pi = 3{,}14159265\ldots$ werde durch die Näherungswerte

$$z_1 = \frac{22}{7} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{355}{113}$$

ersetzt.

a) Wie groß sind die wahren Fehler von z_1 und z_2?

b) Welchen Fehler erhält man für den Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = 5$ m, wenn man U unter Verwendung von z_1 bzw. z_2 berechnet?

736. Der Durchmesser d eines Drahtes wurde unter Verwendung einer Schieblehre mit $(0{,}361 \pm \pm 0{,}005)$ mm gemessen. Mit welchem relativen Fehler kann man daraus die Querschnittsfläche berechnen?

737. Von einem Quader wurden die Kanten mit

$$a = (32{,}3 \pm 0{,}1) \text{ cm}, \quad b = (12{,}0 \pm 0{,}1) \text{ cm}, \quad c = (6{,}7 \pm 0{,}1) \text{ cm}$$

bestimmt. Wie groß ist der absolute Maximalfehler des Quadervolumens?

738. Zur Bestimmung der Brennweite einer einfachen, bikonvexen Linse wurden die Gegenstandsweite $a = 42{,}4$ cm und die Bildweite $b = 26{,}6$ cm mit den Meßfehlern $\Delta a = \Delta b = \pm 0{,}1$ cm ermittelt. Wie groß ist die Brennweite f und ihr absoluter Maximalfehler?

739. Im rechtwinkligen Dreieck wurden die Hypotenuse $c = (130 \pm 0{,}06)$ m und die Kathete $a = (50 \pm 0{,}02)$ m gemessen. Welcher absolute Maximalfehler ergibt sich hieraus für den Winkel α?

740. Bei der Widerstandsmessung mit der WHEATSTONEschen Brücke ergibt sich der zu bestimmende Widerstand aus

$$R_x = R\,\frac{x}{1000 - x},$$

wobei

$$R = (1000 \pm 1)\,\Omega$$

der bekannte Widerstand und $x = (765{,}8 \pm 0{,}3)$ die Maßzahl der am Maßstab abgelesenen Länge in mm sind. Mit welchem absoluten Maximalfehler erhält man den gesuchten Widerstand R_x?

741. Die drei Widerstände

$$R_1 = (100 \pm 1)\,\Omega,\quad R_2 = (50 \pm 1)\,\Omega,\quad R_3 = (250 \pm 2)\,\Omega$$

sind hintereinandergeschaltet. Wie groß ist für die Spannung

$$U = (200 \pm 2)\,\mathrm{V}$$

die Stromstärke des durchfließenden Stromes und ihr relativer Maximalfehler?

742. Die Widerstände

$$R_1 = (350 \pm 2)\,\Omega \quad \text{und} \quad R_2 = (100 \pm 1)\,\Omega$$

sind parallelgeschaltet. Man berechne den Ersatzwiderstand R und seinen relativen Maximalfehler.

743. Mit welcher Genauigkeit erhält man $y = \lg \sin \alpha$, wenn $\alpha = 24°10'$ mit dem Fehler $\Delta\alpha = \pm 2'$ versehen ist?

744. Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls eines Stahldrahtes wurden dessen Länge $l = (2473 \pm 3)$ mm und der Durchmesser $d = (0{,}292 \pm 0{,}001)$ mm gemessen. Durch eine am Draht angreifende Kraft $F = (1 \pm 0{,}005)$ kp ergab sich eine Längenänderung $\delta = (1{,}750 \pm 0{,}005)$ mm. Den Elastizitätsmodul erhält man aus

$$E = \frac{Fl}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \delta}.$$

Man bestimme E sowie seinen absoluten und relativen Maximalfehler.

745. Ein Hohlzylinder hat den äußeren Radius $r_1 \approx 10$ cm, den inneren Radius $r_2 \approx 8$ cm und die Höhe $h \approx 12$ cm. Mit welchen absoluten Fehlern müssen diese drei Größen gemessen werden, damit der relative Maximalfehler des Volumens $\pm 0{,}2\%$ beträgt?

746. Der Brechungsindex einer Glassorte ergibt sich aus $n = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Wie genau müssen Einfallswinkel $\alpha \approx 33°20'$ und Ausfallswinkel $\beta \approx 21°45'$ gemessen werden, damit der relative Maximalfehler von n höchstens $\pm 0{,}001$ beträgt?

747. Im Dreieck sollen die Seite b und die Winkel α und β gemessen und daraus die Seite a berechnet werden.

a) Man stelle mit Hilfe der logarithmischen Differentiation die Fehlerformel für den relativen Maximalfehler von a auf.

b) Wie genau müssen $b \approx 220$ m, $\alpha \approx 63°$, $\beta \approx 42°$ gemessen werden, damit sich a mit dem relativen Maximalfehler

$$\frac{\Delta a_{\max}}{a} = \pm 0{,}0003$$

ergibt?

22. Ausgleichungsrechnung

22.1. Allgemeines zur Ausgleichungsrechnung

Die Ausgleichungsrechnung kommt überall dort zur Anwendung, wo zur Bestimmung unbekannter Größen mehr Messungen als notwendig gemacht wurden.

Wurde z. B. eine Größe nicht nur einmal, sondern mehrfach gemessen, dann ergeben sich wegen der zufälligen Messungsfehler voneinander abweichende Werte, d. h., die Messungen widersprechen sich. Es besteht daher die Aufgabe, aus den vorliegenden Messungen einen Mittelwert zu bilden, der dem wahren Wert möglichst nahekommt. Er wird auch als günstigster oder plausibelster Wert bezeichnet. Für den vorliegenden einfachen Fall bildet man bekanntlich, meist ohne weitere Begründung, das arithmetische Mittel der Meßwerte.

Ein ähnliches Problem liegt z. B. vor, wenn zwei Größen x und y direkt meßbar sind, zwischen denen eine lineare Beziehung $y = mx + b$ besteht. Die Konstanten m und b sollen bestimmt werden. Ermittelt man durch Messungen zwei Wertepaare $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, dann lassen sich aus den Gleichungen $y_1 = mx_1 + b$, $y_2 = mx_2 + b$ eindeutig m und b berechnen. Geometrisch veranschaulicht wird also durch zwei Punkte eine Gerade gelegt. Bei Vergrößerung der Zahl der Messungen erhält man sich widersprechende Gleichungen $y_i = mx_i + b$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, d. h., die zu den Wertepaaren $(x_i; y_i)$ gehörigen Punkte liegen nicht genau auf einer Geraden, sondern „streuen" mehr oder weniger stark. Es gilt nun, günstige Werte für m und b zu finden, geometrisch also eine Gerade, die sich den vorliegenden Punkten am besten anpaßt.

Als drittes Beispiel betrachtet man ein Dreieck, in dem die drei Winkel gemessen wurden. Wegen der Messungsfehler weicht die Summe der Meßwerte von 180° ab. Auch hier sind günstigste, den wahren Werten möglichst nahe kommende Werte für die Winkel zu ermitteln, die aber gleichzeitig noch die Winkelsummenbedingung erfüllen.

Die allgemeinen Aussagen „günstigste Werte" oder „Werte, die sich den Messungen am besten anpassen", müssen nun präzise analytisch formuliert werden.

Hierzu muß die Verteilung der zufälligen Fehler untersucht werden. Mit den Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik gelangt man zu folgender **Ausgleichungsbedingung:**

Man erhält die günstigsten oder ausgeglichenen Werte der gesuchten Größen, wenn man die Beobachtungen mit Verbesserungen versieht, so daß

1. die auftretenden Widersprüche beseitigt werden und
2. die Summe der Quadrate der Verbesserungen ein Minimum wird.

Diese **Methode der kleinsten Quadrate** wurde unabhängig voneinander von C. F. GAUSS und A. M. LEGENDRE am Anfang des 19. Jahrhunderts entwickelt und zeigte zunächst bei der Lösung astronomischer Aufgaben ihre großen Vorteile. Wenn auch eine gewisse Willkürlichkeit in ihr enthalten ist, so hat sie sich doch seit über 150 Jahren bewährt und konnte durch kein besseres Verfahren ersetzt werden.
Die oben angeführten drei Beispiele führen zu drei verschiedenen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung, die der klassischen Einteilung entsprechen:

1. Ausgleichung direkter Beobachtungen

Hier werden die gesuchten Größen, wie z. B. eine Stromstärke oder eine Strecke, direkt gemessen.

2. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

Die gesuchten Größen werden nicht unmittelbar gemessen, sondern aus anderen, gemessenen Größen abgeleitet.

3. Ausgleichung bedingter Beobachtungen

Zwischen den gemessenen Größen bestehen noch Bedingungen, die streng erfüllt sein müssen.

Im vorliegenden Kapitel wird das erste Problem ausführlicher behandelt. Die beiden anderen Probleme werden an einigen Aufgaben erklärt.

22.2. Ausgleichung direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit

Eine Größe X sei n-mal mit gleicher Genauigkeit (gleiche Meßinstrumente, gleiche Meßverfahren usw.) gemessen, und man habe die Werte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ erhalten. Die Anzahl n der Messungen soll nicht unter 8 bis 10 liegen, da sich sonst die Zufälligkeit der Meßfehler zu einseitig auswirken kann. Aus den Beobachtungen l_i ist nach der Methode der kleinsten Quadrate der günstigste Wert x zu bestimmen, der auch **scheinbarer** oder **wahrscheinlichster Wert** von X heißt.
Man versieht die l_i mit Verbesserungen v_i, so daß die Widersprüche verschwinden, und stets gilt:

$$x = l_i + v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{I}$$

x ist so zu wählen, daß

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = [vv] = \text{Minimum}} \tag{184}$$

wird. Die eckige Klammer bedeutet „Summe aller v_i^2" und stellt die von GAUSS stammende Summensymbolik dar. Mit (I) folgt

$$[vv] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \cdots + (x - l_n)^2 = f(x).$$

Das Minimum ergibt sich aus

$$\frac{\mathrm{d}[vv]}{\mathrm{d}x} = 2(x - l_1) + 2(x - l_2) + \cdots + 2(x - l_n) = 0.$$

Daraus folgt

$$nx = l_1 + l_2 + \cdots + l_n,$$

$$\boxed{x = \frac{[l]}{n}} \tag{185}$$

Der scheinbare Wert x ist erwartungsgemäß das **einfache arithmetische Mittel** aus den n Messungen. Die Abweichungen v_i der Beobachtungen l_i vom scheinbaren Wert heißen **scheinbare Fehler**

$$\boxed{v_i = x - l_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{186}$$

Je größer n ist, um so näher muß der scheinbare Wert am wahren Wert liegen. Daher stimmen für großes n die v_i annähernd mit den ε_i überein. Summiert man die n Gleichungen (186) und beachtet (185), dann folgt

$$[v] = nx - [l] = n\frac{[l]}{n} - [l] = 0,$$

$$\boxed{[v] = 0} \tag{187}$$

Die Summe der scheinbaren Fehler ist Null, was als Probe für die Bildung des arithmetischen Mittels verwandt werden kann.
Die praktische Berechnung von x vereinfacht sich durch Verwendung kleinerer Zahlen, wenn ein Näherungswert x_0 gewählt wird:

$$\boxed{x = x_0 + \delta x} \tag{188}$$

Aus (186) ergibt sich

$$v_i = x_0 + \delta x - l_i = \delta x - (l_i - x_0).$$

Entsprechend (184) folgt jetzt aus der Bedingung $[vv]$ = Minimum:

$$\boxed{\delta x = \frac{[l - x_0]}{n}} \tag{189}$$

BEISPIEL

Die Länge einer Strecke wurde achtmal gemessen und ergab die folgenden Werte: 164,35 m; 164,32 m; 164,36 m; 164,34 m; 164,39 m; 164,31 m; 164,35 m; 164,37 m. Man berechne nach (188) und (189) den Mittelwert x und verwende die Probe (187).

Lösung: Als Näherungswert wurde $x_0 = 164{,}30$ m gewählt.

l_i	v_i
164,35 m	−0,001 m
164,32 „	0,029 „
164,36 „	−0,011 „
164,34 „	0,009 „
164,39 „	−0,041 „
164,31 „	0,039 „
164,35 „	−0,001 „
164,37 „	−0,021 „
$[l - x_0] = 0{,}39$ m	0,077 m
	−0,075 „
	$[v] \approx 0$ m

$$\delta x = \frac{[l - x_0]}{n} = \frac{0{,}39 \text{ m}}{8} = 0{,}049 \text{ m}$$

$$x = x_0 + \delta x = 164{,}30 \text{ m} + 0{,}049 \text{ m}$$

$$x = 164{,}349 \text{ m}$$

22.3. Der mittlere Fehler als Genauigkeitsmaß

Für die Messungen im vorigen Abschnitt war gleiche Genauigkeit gefordert. Es liegt nahe, als **Genauigkeitsmaß** für die l_i einen Mittelwert der v_i zu bilden. Das arithmetische Mittel ist ungeeignet, da $[v] = 0$ ist. Man könnte höchstens die Absolutwerte der v_i addieren und den sogenannten *durchschnittlichen Fehler*

$$t = \pm \frac{[|v|]}{n}$$

bilden. Ein besseres Genauigkeitsmaß ist aber der **mittlere Fehler,** der durch die Formel

$$\boxed{m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n - 1}}} \tag{190}$$

definiert wird. Hier werden also die Quadrate der v_i addiert. m gibt als Genauigkeitsmaß die mittlere Abweichung einer Messung l_i vom scheinbaren Wert, d. h. bei großem n annähernd vom wahren Wert an. Man sagt auch, m ist ein Maß für die Streuungen der Messungen um den Mittelwert und nennt m *Streuungsmaß*. Die Definition des mittleren Fehlers hängt eng mit der Methode der kleinsten Quadrate zusammen. Wegen der Ausgleichungsbedingung $[vv] =$ Minimum und der im folgenden abgeleiteten Formel (191) hat der scheinbare Wert x gegenüber anderen möglichen Mittelwerten, etwa dem geometrischen Mittel, den kleinsten mittleren Fehler.

Anmerkung: Häufig wird der mittlere Fehler unter Verwendung der wahren Fehler durch

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

definiert, und zwar strenggenommen für $n \to \infty$. Beim Übergang zu scheinbaren Fehlern kann dann näherungsweise für endliches n die Formel (190) abgeleitet werden.

BEISPIEL

1. Zur genauen Bestimmung der Länge eines Werkstückes wurden von zwei Beobachtern A und B je acht Messungen durchgeführt. Zu berechnen sind der scheinbare Wert, der durchschnittliche und der mittlere Fehler aus jeder Messungsreihe.

Lösung: Die Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle angegeben. Nachdem die Mittelwerte x gebildet sind, werden die v_i und v_i^2 berechnet und damit wird t und m bestimmt. (187) dient wieder als Probe.

	Beobachter A			Beobachter B		
	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{v_i}{\text{mm}}$	$\frac{v_i^2}{\text{mm}^2}$	$\frac{l_i}{\text{mm}}$	$\frac{v_i}{\text{mm}}$	$\frac{v_i^2}{\text{mm}^2}$
1	1283,0	0,1	0,01	1283,0	0,0	0,00
2	1282,9	0,2	0,04	1283,5	−0,5	0,25
3	1283,4	−0,3	0,09	1282,4	0,6	0,36
4	1283,0	0,1	0,01	1283,0	0,0	0,00
5	1283,3	−0,2	0,04	1282,9	0,1	0,01
6	1282,8	0,3	0,09	1283,3	−0,3	0,09
7	1283,4	−0,3	0,09	1282,9	0,1	0,01
8	1283,0	0,1	0,01	1283,0	0,0	0,00
	8,8	0,0	0,38	8,0	0,0	0,72

$$x = \left(1282{,}0 + \frac{8{,}8}{8}\right)\text{mm} \qquad x = \left(1282{,}0 + \frac{8{,}0}{8}\right)\text{mm}$$

$$x = 1283{,}1\ \text{mm} \qquad x = 1283{,}0\ \text{mm}$$

$$t = \pm\frac{1{,}6}{8}\text{mm} = \pm 0{,}2\ \text{mm} \qquad t = \pm\frac{1{,}6}{8}\text{mm} = \pm 0{,}2\ \text{mm}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{0{,}38}{7}}\text{mm} = \pm 0{,}23\ \text{mm} \qquad m = \pm\sqrt{\frac{0{,}72}{7}}\text{mm} = \pm 0{,}32\ \text{mm}$$

Nimmt man den durchschnittlichen Fehler als Genauigkeitsmaß, dann werden beide Meßreihen als gleich genau beurteilt. Nach dem mittleren Fehler ist aber die linke Meßreihe genauer, d. h. die Messungen sind sorgfältiger oder mit einem besseren Instrument durchgeführt. Tatsächlich sind links die v_i gleichmäßiger verteilt, während rechts zwar einige Male $v_i = 0$ ist, dafür aber auch größere v_i vorkommen. Größere v-Werte fallen aber durch die Quadratbildung bei der Berechnung des mittleren Fehlers sehr ins Gewicht.

Entsprechend dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (180) für wahre Fehler soll ein Fortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler abgeleitet werden.
Eine Größe z sei abhängig von den Größen x und y:

$$z = f(x; y). \tag{I}$$

Zur Bestimmung von x und y wurden je n Messungen

$$l_1, l_2, \ldots, l_n \quad \text{bzw.} \quad \bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_n$$

durchgeführt und daraus die Mittel

$$x = \frac{[l]}{n} \qquad y = \frac{[\bar{l}]}{n}$$

gebildet. Weiterhin wurden die scheinbaren Fehler

$$v_i = x - l_i \qquad \bar{v}_i = y - \bar{l}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

sowie die mittleren Fehler der Messungen l_i bzw. $\bar{l}_i$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad \bar{m} = \pm\sqrt{\frac{[\bar{v}\bar{v}]}{n-1}} \tag{II}$$

berechnet.

Werden in (I) für x und y die Werte der i-ten Messung l_i, $\bar{l}_i$ eingesetzt, dann ergibt sich

$$\tilde{l}_i = f(l_i; \bar{l}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{III}$$

Zunächst wird gezeigt, wie sich die mittleren Fehler m, $\bar{m}$ der Messungen l_i, $\bar{l}_i$ auf die Genauigkeit der zu errechnenden Größe $\tilde{l}_i$ auswirken. Man bildet wie in (186)

$$\begin{aligned}\tilde{v}_i &= z - \tilde{l}_i = f(x; y) - f(l_i; \bar{l}_i) = \\ &= f(l_i + v_i; \bar{l}_i + \bar{v}_i) - f(l_i; \bar{l}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n\end{aligned}$$

und erhält mit dem totalen Differential

$$\tilde{v}_i = f_x(l_i; \bar{l}_i)\, v_i + f_y(l_i; \bar{l}_i)\, \bar{v}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus den n Werten $\tilde{v}_i$ soll analog zu (190) ein Mittelwert als Genauigkeitsmaß der $\tilde{l}_i$ gebildet werden. Man quadriert

$$\tilde{v}_i^2 = f_x^2(l_i; \bar{l}_i)\, v_i^2 + f_y^2(l_i; \bar{l}_i)\, \bar{v}_i^2 + 2 f_x(l_i; \bar{l}_i)\, f_y(l_i; \bar{l}_i)\, v_i \bar{v}_i$$

und summiert

$$[\tilde{v}\tilde{v}] = f_x^2(l_i; \bar{l}_i)\,[vv] + f_y^2(l_i; \bar{l}_i)\,[\bar{v}\bar{v}] + 2 f_x(l_i; \bar{l}_i)\, f_y(l_i; \bar{l}_i)\,[v\bar{v}]. \tag{IV}$$

Die v_i und $\bar{v}_i$ sind gleich wahrscheinlich positiv und negativ. Für großes n gilt daher $[v\bar{v}] \approx 0$. Nach Division durch $n - 1$ folgt aus (IV)

$$\frac{[\tilde{v}\tilde{v}]}{n-1} = f_x^2(l_i; \bar{l}_i)\,\frac{[vv]}{n-1} + f_y^2(l_i; \bar{l}_i)\,\frac{[\bar{v}\bar{v}]}{n-1}$$

und mit (II) und nach Radizieren

$$\tilde{m} = \pm\sqrt{f_x^2(l_i; \bar{l}_i)\, m^2 + f_y^2(l_i; \bar{l}_i)\, \bar{m}^2}, \tag{V}$$

wobei

$$\tilde{m} = \pm\sqrt{\frac{[\tilde{v}\tilde{v}]}{n-1}}$$

der mittlere Fehler eines nach (III) berechneten Funktionswert $\tilde{l}_i$ ist.
Bevor das Problem der Fortpflanzung mittlerer Fehler weiter verfolgt werden kann, ist eine wichtige Anwendung zu behandeln. Mit Hilfe von (V) kann man speziell aus dem mittleren Fehler m der Messungen l_i den mittleren Fehler m_x des arithmetischen Mittels x berechnen. Für die Funktion

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n} = f(l_1; l_2; \ldots; l_n)$$

folgt durch Erweiterung von (V) auf n Variable

$$m_x = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial l_1}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l_2}\right)^2 m^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x}{\partial l_n}\right)^2 m^2} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m^2}{n^2} + \frac{m^2}{n^2} + \cdots + \frac{m^2}{n^2}} = \pm\sqrt{\frac{n m^2}{n^2}}.$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

$$\boxed{m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}} \tag{191}$$

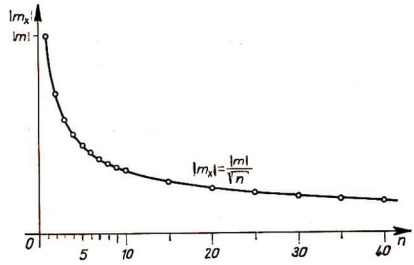


Bild 267

Durch Vergrößerung der Messungszahl n läßt sich also der mittlere Fehler von x verkleinern, d. h. die Genauigkeit des Mittelwertes vergrößern. Da man durch $\sqrt{n}$ teilt, wird bei einer Vergrößerung von n die Abnahme von m_x zwar am Anfang schnell,

später aber immer langsamer vor sich gehen (Bild 267). Um z. B. den aus zehn Messungen berechneten mittleren Fehler m_x auf die Hälfte herabzudrücken, wären weitere 30 Messungen notwendig, was meist nicht ökonomisch ist. Eine günstige Messungszahl liegt bei $n = 8$ bis 10.

Nun kann das mit Gleichung (V) erreichte Ergebnis verallgemeinert werden. Praktisch interessiert nicht ein Wert $\bar{l}_i$ mit dem mittleren Fehler $\bar{m}$, sondern der aus den Mittelwerten x und y nach (I) berechnete Wert z und sein mittlerer Fehler m_z. Setzt man in (V) für die mittleren Fehler m und $\bar{m}$ der Einzelmessungen l_i bzw. $\bar{l}_i$ die mittleren Fehler

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}; \qquad m_y = \frac{\bar{m}}{\sqrt{n}}$$

von x und y ein, dann erhält man aus

$$m_z = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 m_y^2}$$

den mittleren Fehler der Größe $z = f(x; y)$.

Durch Übergang zu k gemessenen Größen folgt allgemein:

Gegeben sei die Funktion

$$y = f(x_1; x_2; \ldots; x_k).$$

Die x_i seien Mittelwerte aus mehreren Messungen, die die mittleren Fehler m_i haben. Dann ergibt sich der mittlere Fehler von y aus dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler**

$$\boxed{m_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} m_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k} m_k\right)^2}} \qquad (192)$$

BEISPIELE

2. Zur Bestimmung der unzugänglichen Entfernung e (Bild 268) wurden in einem Hilfsdreieck die Strecke b und die Winkel α und β je achtmal gemessen. Die Meßwerte sind in den entsprechenden Tabellen in der Lösung angegeben. Gesucht werden
   a) die Mittelwerte für b, α und β,
   b) die mittleren Fehler je einer Beobachtung dieser Größen,
   c) die mittleren Fehler des arithmetischen Mittels für jede dieser Größen,
   d) die aus den Mittelwerten von b, α und β berechnete Strecke e,
   e) der mittlere Fehler von e.

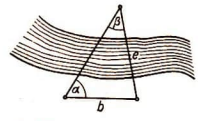


Bild 268

Lösung: Die Rechnungen zu a) und b) erfolgen wie in Beispiel 1.

b_i m	v_i cm	v_i^2 cm²	α_i	$\frac{v_i}{1''}$	$\left(\frac{v_i}{1''}\right)^2$	β_i	$\frac{v_i}{1''}$	$\left(\frac{v_i}{1''}\right)^2$
318,28	2	4	63° 26′ 40″	−15	225	76° 56′ 40″	0	0
318,31	−1	1	63° 26′ 00″	25	625	76° 57′ 00″	−20	400
318,30	0	0	63° 27′ 20″	−55	3025	76° 55′ 00″	100	10000
318,25	5	25	63° 25′ 40″	45	2025	76° 56′ 40″	0	0
318,34	−4	16	63° 26′ 40″	−15	225	76° 58′ 00″	−80	6400
318,30	0	0	63° 27′ 40″	−75	5625	76° 57′ 00″	−20	400
318,29	1	1	63° 26′ 20″	5	25	76° 55′ 20″	80	6400
318,33	−3	9	63° 25′ 00″	85	7225	76° 57′ 40″	−60	3600
2,40	0	56	51′ 20″	0	19000	53′ 20″	0	27200

$$b = \left(318 + \frac{2{,}40}{8}\right)\text{m} \qquad \alpha = 63°20' + \frac{51'\,20''}{8} \qquad \beta = 76°50' + \frac{53'\,20''}{8}$$

$$b = 318{,}30\text{ m} \qquad \alpha = 63°26'25'' \qquad \beta = 76°56'40''$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{56}{7}}\text{ cm} = \pm 2{,}8\text{ cm} \qquad m = \pm\sqrt{\frac{19000}{7}}'' = \pm 52'' \qquad m = \pm\sqrt{\frac{27200}{7}}'' = \pm 62''$$

Aus (191) erhält man die mittleren Fehler der arithmetischen Mittel

$$m_b = \pm\frac{2{,}8\text{ cm}}{\sqrt{8}} = \pm 1\text{ cm} \qquad m_\alpha = \pm\frac{52''}{\sqrt{8}} = \pm 19'' \qquad m_\beta = \pm\frac{62''}{\sqrt{8}} = \pm 22''$$

e ergibt sich als Funktionswert der gemessenen Größen aus

$$e = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = f(b;\alpha;\beta). \tag{VI}$$

Die Rechnung mit den Mittelwerten von b, α und β ergibt

$$e = 292{,}26\text{ m}.$$

Den mittleren Fehler m_e von e erhält man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (192) aus

$$m_e = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial b}m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial\alpha}\cdot m_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial\beta}\cdot m_\beta\right)^2}$$

$$m_e = \pm\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}m_b\right)^2 + \left(\frac{b\cos\alpha}{\sin\beta}m_\alpha\right)^2 + \left(\frac{-b\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\beta}m_\beta\right)^2}$$

und unter Beachtung von (VI) folgt

$$m_e = \pm\sqrt{\left(\frac{e}{b}m_b\right)^2 + (e\cot\alpha\, m_\alpha)^2 + (e\cot\beta\, m_\beta)^2}$$

$$m_e = \pm\sqrt{\left(\frac{292}{318}\,0{,}01\right)^2 + (292\cdot 0{,}50\cdot 9\cdot 10^{-5})^2 + (292\cdot 0{,}23\cdot 11\cdot 10^{-5})^2}\,\text{m}$$

$$m_s = \pm\sqrt{0{,}9 \cdot 10^{-4} + 1{,}8 \cdot 10^{-4} + 0{,}5 \cdot 10^{-4}}\,\mathrm{m}$$

$$m_s = \pm\sqrt{3{,}2 \cdot 10^{-4}}\,\mathrm{m} = \pm 0{,}018\,\mathrm{m} \approx \pm 0{,}02\,\mathrm{m}.$$

Für die unbekannte Strecke e erhält man abschließend

$$e = (292{,}26 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m}.$$

3. Mit einer vorhandenen Meßeinrichtung ergibt sich die Länge l eines Werkstückes aus einer Messung mit dem mittleren Fehler $m = \pm 0{,}10$ mm. Wieviel Messungen muß man annähernd ausführen, damit der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels $m_l = \pm 0{,}02$ mm beträgt?

Lösung: Aus (191) folgt

$$n = \frac{m^2}{m_l^2} = \frac{0{,}10^2}{0{,}02^2} = 25,$$

d. h., es sind etwa 25 Messungen auszuführen.

AUFGABEN

748. Der Durchmesser einer Kugel wurde achtmal gemessen und ergab in Millimetern die folgenden Werte: 34,10; 34,18; 34,14; 34,08; 34,12; 34,14; 34,04; 34,12. Man berechne den Mittelwert des Durchmessers, den mittleren Fehler einer Beobachtung sowie des Mittelwertes, das Kugelvolumen und seinen relativen mittleren Fehler.

749. In einem rechtwinkligen Dreieck wurden die Hypotenuse $c = 42{,}16$ m und die Kathete $a = 25{,}78$ m mit den mittleren Fehlern $m_c = m_a = \pm 2$ cm gemessen. Gesucht wird die Kathete b und ihr mittlerer Fehler m_b.

750. Man betrachte in 21.2., Beispiel 3, die Meßfehler als mittlere Fehler und berechne den mittleren Fehler von c.

751. Bei der Durchführung eines physikalischen Versuches wurde die Zeitdifferenz Δt zwischen zwei Ereignissen sechsmal bestimmt. Man erhielt die Werte 4,3 s; 4,6 s; 4,4 s; 4,2 s; 4,5 s; 4,4 s. Wie oft müßte man die Zeitmessungen durchführen, um für den Mittelwert der Δt den mittleren Fehler $m_{\Delta t} = \pm 0{,}03$ s zu erhalten?

752. Um die Fläche eines Dreiecks zu bestimmen, wurden mit einem Lineal die Grundlinie $c = (11{,}31 \pm 0{,}03)$ cm und die Höhe $h = (7{,}44 \pm 0{,}03)$ cm gemessen. Welcher mittlere Fehler ergibt sich für die Dreiecksfläche?

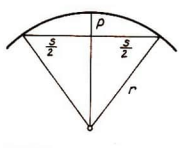


Bild 269

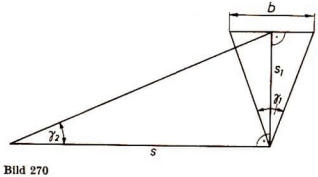


Bild 270

753. Um den Radius eines im Kreisbogen verlegten Gleises zu bestimmen, wurden eine Sehne $s = (20 \pm 0{,}01)$ m und die zugehörige Pfeilhöhe $p = (0{,}085 \pm 0{,}001)$ m gemessen. Man berechne den Radius und seinen mittleren Fehler (Bild 269).

754. Zur „optischen Messung" der Strecke s wurden unter Verwendung einer Hilfsbasis s_1 die Winkel $\gamma_1 = 3° 26' 00''$ und $\gamma_2 = 5° 43' 10''$ mit den mittleren Fehlern $m_{\gamma 1} = m_{\gamma 2} = \pm 10''$ gemessen (Bild 270). Die als fehlerfrei anzunehmende Basis beträgt $b = 2$ m. Man berechne den relativen mittleren Fehler der Strecke s.

755. Wie genau sind in einem Dreieck die Winkel α und β zu messen, damit man γ mit dem mittleren Fehler $m_\gamma = \pm 2'$ berechnen kann?

756. Um die Höhe h eines Turmes zu bestimmen, wurden in P der Winkel $\alpha = 19° 15'$ und die waagerechte Entfernung $e = 254{,}30$ m gemessen (Bild 271). Mit welcher Genauigkeit müßte diese Messung durchgeführt werden, um h mit dem mittleren Fehler $m_h = \pm 1$ dm zu erhalten?

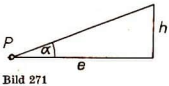


Bild 271

757. Für eine bikonvexe Linse wurden zu verschiedenen Gegenstandsweiten g die zugehörigen Bildweiten b gemessen. Man erhielt die folgenden Wertepaare $(g; b)$ mit Angabe in cm: (11,8; 62,3), (62,5; 11,7), (12,0; 56,5), (56,7; 11,8), (12,2; 51,4), (51,5; 12,0), (12,6; 45,6), (45,6; 12,5). Man berechne für jedes Wertepaar die Brennweite, deren Mittelwert und dessen mittleren Fehler.

22.4. Ausgleichung direkter Beobachtungen verschiedener Genauigkeit

Bisher wurde angenommen, daß die n Messungen zur Bestimmung einer Größe X von gleicher Genauigkeit sind, d. h., alle Meßwerte $l_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ besitzen den gleichen mittleren Fehler m. Es kann aber auch vorkommen, daß die Meßwerte l_i verschiedene Genauigkeiten, also verschiedene mittlere Fehler besitzen. So könnten für die Messungen verschiedene Instrumente oder unterschiedliche Meßmethoden verwendet worden sein. Der Mittelwert x folgt dann nicht mehr aus Formel (185), diese muß vielmehr verallgemeinert werden.

Zur Einführung in das neue Problem wird zunächst vom Fall gleich genauer Beobachtungen ausgegangen.

Die Größe X sei zehnmal mit gleicher Genauigkeit gemessen worden, und man erhielt die Werte

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10},$$

aus denen nach (185) der Mittelwe. ó

$$x = \frac{[\lambda]}{n} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{10}}{10} \tag{I}$$

folgt. Aus irgendeinem Grund seien aber zuerst die Teilmittel

$$l_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}, \qquad l_2 = \frac{\lambda_4 + \lambda_5}{2}, \qquad l_3 = \frac{\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10}}{5} \tag{II}$$

gebildet und man fragt nun, wie diese Teilmittel zum Mittelwert x vereinigt werden können. Das einfache arithmetische Mittel aus den l_i nach (185) ist nicht zu verwenden, da die l_i aus einer verschieden großen Anzahl von Beobachtungen λ_k berechnet wurden und daher nicht die gleiche Genauigkeit besitzen. Durch Zusammenfassen von (I)

und (II) läßt sich aber für x schreiben

$$x = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_4 + \lambda_5) + (\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10})}{10},$$

$$x = \frac{3l_1 + 2l_2 + 5l_3}{3 + 2 + 5}.$$

Die Koeffizienten der l_i bezeichnet man allgemein mit p_i:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{[pl]}{[p]} \quad \text{mit} \quad p_1 = 3,\ p_2 = 2,\ p_3 = 5.$$

Die Zahl p_i gibt an, wieviele der ursprünglichen Beobachtungen λ_k zur Bildung des Mittels l_i verwendet wurden und mit welchem Gewicht daher l_i in die Berechnung des Mittels x eingeht. Man nennt die Zahlen p_i **Gewichte.** Das arithmetische Mittel x selbst hat das Gewicht $p_x = [p]$, weil es aus $n = [p]$ Messungen gebildet wird.
Ist m der mittlere Fehler der gleich genauen Messungen λ_k, dann erhält man die Fehler von l_1, l_2 und l_3 nach (191) aus

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{m}{\sqrt{p_1}};\quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{p_2}};\quad m_3 = \frac{m}{\sqrt{5}} = \frac{m}{\sqrt{p_3}}.$$

Aus den ersten zwei Gleichungen folgt z. B.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_1^2}{m_2^2}.$$

Allgemein gilt der **Satz**

> Die Gewichte verhalten sich umgekehrt proportional wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Für eine Größe X seien nun n verschieden genaue Messungen

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

mit den mittleren Fehlern

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

durchgeführt und gesucht wird der Mittelwert x. Die l_i sind jetzt im allgemeinen keine Teilmittel und ihre unterschiedlichen Genauigkeiten rühren von der Messung selbst her. Man kann dann aber jedes l_i als Mittel aus einer Anzahl p_i von gedachten, nicht wirklich durchgeführten gleich genauen Messungen ansehen und sich nach obigem Satz aus den mittleren Fehlern m_i die zugehörigen Gewichte p_i berechnen. Für einen beliebigen Meßwert, z. B. l_1, kann das Gewicht $p_1 = 1$ gesetzt werden, da die Gewichte nur Verhältniszahlen sind. Die übrigen Gewichte folgen aus

$$p_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2},\quad p_3 = \frac{m_1^2}{m_3^2}, \ldots, p_n = \frac{m_1^2}{m_n^2}.$$

Der Meßwert mit dem Gewicht 1 heißt **Gewichtseinheit** und wird meist mit l_0, sein mittlerer Fehler mit m_0 bezeichnet. Mit den bekannten Gewichten wird das **allgemeine arithmetische Mittel** gebildet:

$$\boxed{x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}} \tag{193}$$

Multipliziert man die scheinbaren Fehler

$$v_i = x - l_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

mit den zugehörigen Gewichten p_i

$$p_i v_i = p_i x - p_i l_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

und summiert über i

$$[pv] = [p]\,x - [pl],$$

dann folgt wegen (193)

$$\boxed{[pv] = 0} \tag{194}$$

was wieder als Probe verwandt werden kann.
Hat l_i den mittleren Fehler m_i, dann hat die Größe $l_i' = l_i\sqrt{p_i}$ nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (192) den mittleren Fehler $m_i' = m_i\sqrt{p_i}$. Aus dem Verhältnis

$$\frac{p_i}{p_i'} = \frac{m_i'^2}{m_i^2} = \frac{m_i^2 p_i}{m_i^2} = p_i$$

folgt $p_i' = 1$.

Satz

Multipliziert man bei verschieden genauen Messungen l_i jede mit der Wurzel aus ihrem Gewicht, dann haben alle Größen $l_i\sqrt{p_i}$ das Gewicht 1, sind also gleich genau.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Auswertung verschieden genauer Messungen auf den Fall gleich genauer Messungen zurückführen. Unter anderem lassen sich mit diesem Satz leicht Formeln zur Berechnung der mittleren Fehler aufstellen. Die Fehlergleichungen

$$v_i = x - l_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

multipliziert man mit $\sqrt{p_i}$

$$\sqrt{p_i}\,v_i = \sqrt{p_i}\,x - \sqrt{p_i}\,l_i$$

und faßt $l_i' = \sqrt{p_i}\, l_i$ als neue, jetzt aber gleich genaue Messungen, $v_i' = \sqrt{p_i}\, v_i$ als neue scheinbare Fehler auf. Durch Einsetzen dieser Fehler $\sqrt{p_i}\, v_i$ in (190) erhält man den **mittleren Fehler einer Messung vom Gewicht 1** oder den **Gewichtseinheitsfehler**

$$\boxed{m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}} \tag{195}$$

Entsprechend folgt für den mittleren Fehler einer Messung vom Gewicht p_i, wenn p_i wie oben als Messungsanzahl gedeutet wird, nach (191)

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-1)}}$$

und für den **mittleren Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels**

$$\boxed{m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}} \tag{196}$$

Werden die scheinbaren Fehler $v_i' = \sqrt{p_i}\, v_i$ in die Ausgleichungsbedingung $[v'v'] =$ Minimum eingesetzt, dann folgt für den Fall verschieden genauer Beobachtungen die **Ausgleichungsbedingung**

$$\boxed{[pvv] = \text{Minimum}} \tag{197}$$

Während in diesem Abschnitt das allgemeine arithmetische Mittel (193) aus dem einfachen arithmetischen Mittel (185) abgeleitet wurde, kann auch die Ausgleichungsbedingung (197) an den Anfang gestellt und ähnlich wie in 22.2. die Formel (193) abgeleitet werden (vgl. Aufgabe 758).

BEISPIEL

Das Volumen eines Körpers wurde nach verschiedenen Verfahren bestimmt. Für jedes Verfahren wurden mehrere Messungen durchgeführt und daraus folgende Mittelwerte und mittlere Fehler berechnet:

$V_1 = (138{,}0 \pm 2{,}1)\ \text{cm}^3$ $\qquad$ $V_2 = (140{,}5 \pm 3{,}0)\ \text{cm}^3$

$V_3 = (139{,}5 \pm 1{,}5)\ \text{cm}^3$ $\qquad$ $V_4 = (138{,}5 \pm 1{,}8)\ \text{cm}^3$

$V_5 = (141{,}5 \pm 3{,}4)\ \text{cm}^3$

Man bilde aus den 5 Werten das allgemeine arithmetische Mittel sowie seinen mittleren Fehler.

Lösung: Nimmt man $m_0 = \pm 3\ \text{cm}^3$ an, dann folgen die Gewichte aus

$$p_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2} = \frac{9}{4{,}41} \approx 2 \qquad p_2 = \frac{m_0^2}{m_2^2} = \frac{9}{9} = 1$$

$$p_3 = \frac{m_0^2}{m_3^2} = \frac{9}{2{,}25} = 4 \qquad p_4 = \frac{m_0^2}{m_4^2} = \frac{9}{3{,}24} \approx 2{,}8$$

$$p_5 = \frac{m_0^2}{m_5^2} = \frac{9}{11{,}56} \approx 0{,}8.$$

Die weitere Berechnung erfolgt wieder in einer Tabelle.

$\frac{V_i}{\text{cm}^3} = \frac{l_i}{\text{cm}^3}$	p_i	$\frac{p_i l_i}{\text{cm}^3}$	$\frac{v_i}{\text{cm}^3}$	$\frac{p_i v_i}{\text{cm}^3}$	$\frac{v_i v_i}{\text{cm}^6}$	$\frac{p_i v_i v_i}{\text{cm}^6}$
138,0	2,0	276,0	1,2	2,40	1,44	2,88
140,5	1,0	140,5	−1,3	−1,30	1,69	1,69
139,5	4,0	558,0	−0,3	−1,20	0,09	0,36
138,5	2,8	387,8	0,7	1,96	0,49	1,37
141,5	0,8	113,2	−2,3	−1,84	5,29	4,23
	10,6	1475,5		0,02		10,53

Man berechnet zunächst die Produkte $p_i l_i$, bildet die Summen $[pl]$ und $[p]$ und erhält nach (193)

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{1475{,}5}{10{,}6}\ \text{cm}^3 = 139{,}2\ \text{cm}^3.$$

Dann berechnet man die scheinbaren Fehler v_i, $p_i v_i$ und macht die Probe $[pv] = 0{,}02\ \text{cm}^3 \approx \approx 0\ \text{cm}^3$. Schließlich bildet man $[pvv]$ und nach (196) den mittleren Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{10{,}53}{10{,}6(5-1)}}\ \text{cm}^3 = \pm 0{,}5\ \text{cm}^3.$$

Für das gesuchte Volumen folgt

$$\underline{\underline{V = (139{,}2 \pm 0{,}5)\ \text{cm}^3}}.$$

Die Berechnungen von m_0 und m_i sind hier nicht notwendig, da diese mittleren Fehler bereits in der Aufgabe enthalten sind.

AUFGABEN

758. Man leite für den Fall verschieden genauer Messungen aus der Ausgleichungsbedingung $[pvv] =$ Minimum das allgemeine arithmetische Mittel (193) ab.

759. Zur Bestimmung einer Größe wurden insgesamt 36 gleich genaue Messungen in 4 Gruppen durchgeführt, und es liegen die einfachen arithmetischen Mittel der Messungen aus jeder Gruppe vor:

1. Gruppe: 6 Messungen, Mittelwert: $l_1 = 245{,}7$
2. „ 10 „ „ : $l_2 = 245{,}3$
3. „ 4 „ „ : $l_3 = 243{,}9$
4. „ 16 „ „ : $l_4 = 244{,}8$.

Man berechne das allgemeine arithmetische Mittel x aus den l_i, den mittleren Fehler einer Messung, die mittleren Fehler der Mittelwerte l_i sowie den mittleren Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels.

760. Es liegen die Ergebnisse von 5 Meßreihen zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g vor:

$g_1 = (980{,}2 \pm 2{,}0)\ \text{cm s}^{-2}$ $\quad g_2 = (983{,}6 \pm 3{,}5)\ \text{cm s}^{-2}$

$g_3 = (981{,}4 \pm 2{,}5)\ \text{cm s}^{-2}$ $\quad g_4 = (978{,}5 \pm 4{,}0)\ \text{cm s}^{-2}$

$g_5 = (983{,}0 \pm 3{,}0)\ \text{cm s}^{-2}$

Zu berechnen sind das allgemeine arithmetische Mittel und sein mittlerer Fehler.

22.5. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

Bei der Ausgleichung direkter Beobachtungen wurde eine unbekannte Größe direkt mehrfach gemessen und daraus als ausgeglichener Wert das einfache bzw. allgemeine arithmetische Mittel berechnet. Jetzt sind erstens mehrere unbekannte Größen zu bestimmen, und zweitens lassen sie sich nicht selbst messen, sondern sie müssen aus anderen gemessenen Größen rechnerisch abgeleitet werden. Eine Ausgleichung der Messungsergebnisse setzt wieder voraus, daß mehr Messungen durchgeführt wurden, als zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten notwendig sind.
Der einfachste und zugleich häufiger vorkommende Fall liegt vor, wenn zwei Unbekannte gesucht werden, die mit den zu messenden Größen durch eine lineare Beziehung verknüpft sind (vgl. Aufg. 761). Dieser Fall soll behandelt werden.
In der Funktion

$$y = ax + b \tag{I}$$

sind die Koeffizienten a und b zu bestimmen. x sei eine willkürlich wählbare und zunächst als fehlerfrei anzunehmende Variable. Zu jedem gewählten Wert $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ wurde ein Wert y_i gemessen.
Für $n = 2$ könnte man aus den zwei Gleichungen $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ eindeutig a und b berechnen. Für $n > 2$ gibt es aber wegen der auftretenden Messungsfehler von y_i keine Werte a, b, so daß alle n Gleichungen

$$y_i = ax_i + b, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{II}$$

gleichzeitig erfüllt sind. Es treten Widersprüche auf. Es können also nur nach der Methode der kleinsten Quadrate günstigste Werte für a und b ermittelt werden.
Geometrisch bedeutet die Aufgabe, daß eine Gerade g mit der Gleichung (I) zu zeichnen ist, von der n Punkte $P_i(x_i; y_i)$ gegeben sind.
Wegen der Messungsfehler liegen die Punkte nicht genau auf einer Geraden, sondern streuen, und man muß die Gerade so legen, daß sie sich allen Punkten möglichst gut anpaßt. Diese nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete Gerade heißt auch **ausgleichende Gerade.**
Man versieht die Meßwerte y_i mit Verbesserungen v_i, so daß in (II) die Widersprüche beseitigt sind (Bild 272):

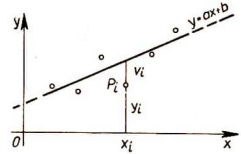


Bild 272

$$y_i + v_i = ax_i + b$$

oder

$$v_i = ax_i - y_i + b, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{III}$$

(III) stellt die **Fehlergleichungen** oder Verbesserungsgleichungen dar. a und b sind nun so zu wählen, daß $[vv]$ ein Minimum wird. Man bildet

$$v_i^2 = a^2x_i^2 + y_i^2 + b^2 - 2ax_iy_i + 2abx_i - 2by_i$$

und summiert über alle i:

$$[vv] = a^2[xx] + [yy] + nb^2 - 2a[xy] + 2ab[x] - 2b[y] = f(a; b).$$

Die partiellen Ableitungen nach a und b werden Null gesetzt (vgl. 14.5.):

$$\frac{\partial [vv]}{\partial a} = 2a[xx] - 2[xy] + 2b[x] = 0$$

$$\frac{\partial [vv]}{\partial b} = 2nb + 2a[x] - 2[y] = 0$$

oder

$$\begin{aligned} [xx]a + [x]b &= [xy] \\ [x]\ a + n\ \ b &= [y]. \end{aligned} \tag{IV}$$

Die Gleichungen (IV) heißen allgemein in der Ausgleichungsrechnung **Normalgleichungen.** Man erhält für die ausgeglichenen Werte der Koeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{[xy]\,n - [x]\,[y]}{[xx]\,n - [x]^2} \\ b &= \frac{[xx]\,[y] - [xy]\,[x]}{[xx]\,n - [x]^2} \end{aligned}} \tag{198}$$

Es sind noch die mittleren Fehler von a und b und zur Einschätzung der Messung selbst ist der mittlere Fehler der Meßwerte y_i zu bestimmen.
Hierzu berechnet man zunächst mit den Werten a und b aus den Fehlergleichungen (III) die scheinbaren Fehler v_i und bildet $[vv]$. Der mittlere Fehler eines Meßwertes y_i folgt dann aus

$$\boxed{m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}} \tag{199}$$

Da n Messungen durchgeführt wurden, zwei aber nur zur eindeutigen Berechnung der Unbekannten notwendig sind, stellt $n-2$ die Anzahl der überschüssigen Messungen dar. Man vergleiche (199) mit der Formel (190) für direkte Beobachtungen. Dort ist zur einfachen Größenbestimmung nur eine Messung erforderlich, so daß $n-1$ überschüssige Messungen vorliegen. Auf den Beweis von (199) wird verzichtet.
Die mittleren Fehler von a und b erhält man aus

$$\boxed{\begin{aligned} m_a &= m \sqrt{\frac{n}{[xx]\,n - [x]^2}} \\ m_b &= m \sqrt{\frac{[xx]}{[xx]\,n - [x]^2}} \end{aligned}} \tag{200}$$

Um z. B. m_a zu berechnen, wird nach (198) a in Abhängigkeit von den Meßwerten y_i betrachtet:

$$a = \frac{[xy]\,n - [x]\,[y]}{[xx]\,n - [x]^2} = \frac{n(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) - [x]\,(y_1 + \cdots + y_n)}{[xx] \cdot n - [x]^2}$$

und das Fehlerfortpflanzungsgesetz (192) angewendet, wobei alle y_i den gleichen Fehler m besitzen:

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{(nx_1 - [x])^2\, m^2 + \cdots + (nx_n - [x])^2\, m^2}{([xx]\,n - [x]^2)^2}}$$

$$m_a = m \sqrt{\frac{n^2 x_1^2 - 2nx_1[x] + [x]^2 + \cdots + n^2 x_n^2 - 2nx_n[x] + [x]^2}{([xx]\,n - [x]^2)^2}}$$

$$m_a = m \sqrt{\frac{n^2[xx] - 2n[x]^2 + n[x]^2}{([xx]\,n - [x]^2)^2}} = m \sqrt{\frac{n}{[xx]\,n - [x]^2}}.$$

Auf gleichem Weg wird m_b abgeleitet.

BEISPIEL

In der linearen Gleichung $y = ax + b$ sind die Konstanten a und b zu bestimmen. Es wurden zu 10 gewählten Werten x_i die zugehörigen Werte y_i gemessen. Die Wertepaare $(x_i; y_i)$ sind in der folgenden Tabelle angegeben. Es sind nach (198) a und b sowie nach (199) und (200) die mittleren Fehler zu berechnen.

Lösung: Man bildet in der Tabelle die Werte x_i^2 und $x_i y_i$ und summiert über alle i:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	v_i	v_i^2
4	3,3	16	13,2	0,9	0,81
6	5,3	36	31,8	0,0	0,00
8	7,4	64	59,2	−1,1	1,21
10	6,9	100	69,0	0,5	0,25
12	9,0	144	108,0	−0,6	0,36
14	8,6	196	120,4	0,9	0,81
16	10,8	256	172,8	−0,3	0,09
18	12,4	324	223,2	−0,8	0,64
20	12,0	400	240,0	0,7	0,49
22	13,2	484	290,4	0,5	0,25
130	88,9	2020	1328,0		4,91

Nach (198) folgt

$$a = \frac{1328{,}0 \cdot 10 - 130 \cdot 88{,}9}{2020 \cdot 10 - 130^2} = \frac{1723}{3300} = 0{,}522$$

$$b = \frac{2020 \cdot 88{,}9 - 1328{,}0 \cdot 130}{2020 \cdot 10 - 130^2} = \frac{6938}{3300} = 2{,}102.$$

Mit a und b erhält man nach (III) v_i, v_i^2 und $[vv] = 5{,}82$. Der mittlere Fehler einer Messung ist

$$m = \pm\sqrt{\frac{4{,}91}{10-2}} = \pm\,0{,}8,$$

und die mittleren Fehler von a und b sind

$$m_a = \pm\,0{,}8\sqrt{\frac{10}{3300}} = \pm 0{,}05,$$

$$m_b = \pm\,0{,}8\sqrt{\frac{2020}{3300}} = \pm\,0{,}7.$$

Es ist daher sinnvoll, a nur auf zwei Dezimalen und b auf eine Dezimale anzugeben. Man erhält für die gesuchte Gleichung

$$\underline{\underline{y = 0{,}52x + 2{,}1}} \qquad \text{(V)}$$

oder ausführlicher

$$y = (0{,}52 \pm 0{,}05)x + (2{,}1 \pm 0{,}7).$$

In Bild 273 sind die den Wertepaaren $(x_i; y_i)$ entsprechenden Punkte P_i sowie die der Gleichung (V) entsprechende ausgleichende Gerade angegeben.

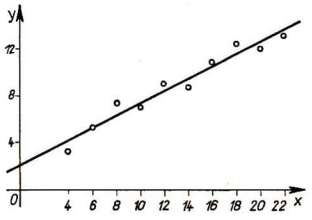


Bild 273

Durch einen Kunstgriff lassen sich die Berechnungen von a, b und der mittleren Fehler vereinfachen. Man bestimmt nach den Formeln

$$x_S = \frac{[x]}{n}, \qquad y_S = \frac{[y]}{n}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes S des gegebenen Punktsystems und legt durch S ein neues Koordinatensystem mit den Achsen x' und y' parallel zu den alten Achsen (Bild 274). Die neuen Punktkoordinaten folgen aus

$$x_i' = x_S - x_i, \qquad y_i' = y_S - y_i.$$

Es gilt dann

$$[x'] = 0, \qquad [y'] = 0$$

und aus (198) folgt

$$a' = \frac{[x'y']}{[x'x']}, \qquad b' = 0.$$

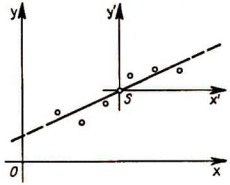


Bild 274

Die ausgleichende Gerade geht also stets durch den Schwerpunkt des gegebenen Punktsystems. Im x', y'-System hat sie die Gleichung

$$y' = \frac{[x'\boldsymbol{y'}]}{[x'\boldsymbol{x'}]}\, x'.$$

Aus (200) folgt

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{[x'x']}}, \qquad m_b = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Sind die Messungen y_i von verschiedener Genauigkeit, dann bestimmt man ihre Gewichte p_i, multipliziert die Fehlergleichungen (III) nach dem Satz aus 22.4. mit $\sqrt{p_i}$ und leitet auf gleichem Weg Formeln für a und b ab, wie es für die Formeln (198) erfolgte.

Schließlich sei noch auf den seltener vorkommenden Fall verwiesen, daß außer den y_i auch die x_i mit Fehlern behaftete Meßwerte sind. Man bestimmt dann die Gerade derart, daß die Summe der Quadrate der (senkrechten) Abstände der Punkte von der Geraden ein Minimum wird (s. Aufgabe 763).

Bei einigen Anwendungen ist keine ausgleichende Gerade, sondern allgemeiner eine **Ausgleichsparabel n-ter Ordnung**, zu bestimmen. So kann z. B. der Zusammenhang zwischen den Größen x und y von ihrer technischen oder physikalischen Bedeutung her bekannt sein und eine ganzrationale Funktion n-ten Grades

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

darstellen, deren Koeffizienten auf Grund vorliegender Meßwerte durch die Ausgleichung zu bestimmen sind. In anderen Fällen soll die Art der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen x und y überhaupt erst bestimmt werden. Sind die Wertepaare $(x_i; y_i)$ durch Messung bekannt und werden die zugehörigen Punkte gezeichnet, dann ist meist aus dem Bild zu erkennen, ob eine Parabel 2., 3. oder höheren Grades sich den Punkten am besten anpaßt, und es können ebenfalls durch die Ausgleichung die Koeffizienten berechnet werden. Da der Rechenaufwand mit Erhöhung des Grades n stark ansteigt, beschränkt man sich möglichst auf Parabeln 2. oder 3. Grades.

Die Formelableitung ist prinzipiell wie bei der linearen Funktion. Soll zu n Wertepaaren $(x_i; y_i)$ z. B. die Parabel mit der Gleichung

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gefunden werden, dann bildet man die Fehlergleichungen

$$v_i = a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i. \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Forderung $[vv] =$ Minimum führt zu dem System der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} n \cdot a_0 + [x]\, a_1 + [x^2]\, a_2 &= [y] \\ [x]\, a_0 + [x^2]\, a_1 + [x^3]\, a_2 &= [xy] \\ [x^2]\, a_0 + [x^3]\, a_1 + [x^4]\, a_2 &= [x^2 y]. \end{aligned}$$

Mit Determinanten oder besser unter Verwendung des Gaussschen Algorithmus werden die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 berechnet. Auf die Berechnung der mittleren Fehler kann hier nicht eingegangen werden. Bild 275 zeigt die zu den 6 eingezeichneten Punkten gehörende ausgleichende Parabel 2. Grades.

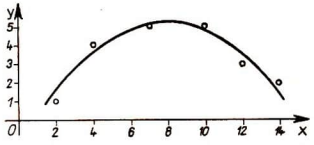


Bild 275

AUFGABEN

761. Für die Abhängigkeit des Widerstandes eines metallischen Leiters von der Temperatur gilt innerhalb eines gewissen Temperaturintervalls die Gleichung

$$R_T = R_0 + R_0 \beta T \text{ mit } R_T \text{ Widerstand bei der Temperatur } T$$
$$R_0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 0\,^\circ\text{C}$$
$$\beta \text{ Temperaturkoeffizient.}$$

Zu acht verschiedenen als fehlerfrei anzunehmenden Temperaturen T wurden die Widerstände R_T gemessen. Man erhielt die Wertepaare (20 °C; 1,66 Ω), (30 °C; 1,71 Ω), (40 °C; 1,76 Ω), (50 °C; 1,81 Ω), (60 °C; 1,86 Ω), (70 °C; 1,93 Ω), (80 °C; 2,00 Ω), (90 °C; 2,05 Ω).
Zu berechnen sind die Konstanten R_0 und β ($R_T = aT + b$ mit $a = R_0\beta$, $b = R_0$) und die mittleren Fehler m, m_a, $m_b = m_{R_0}$ und m_β.

762. Man berechne das Beispiel aus 22.5. durch Reduktion der Koordinaten auf den Schwerpunkt S.

763. Es ist die Formel für den Neigungswinkel α der ausgleichenden Geraden zu entwickeln, wenn x_i und y_i mit Fehlern behaftete Meßgrößen sind. (Man reduziere zunächst auf den Schwerpunkt.)

764. Man berechne für die gemessenen Wertepaare (10; 60), (30; 55), (50; 45), (70; 30), (90; 15), (110; 15) nach der in Aufgabe 763 entwickelten Formel den Neigungswinkel der ausgleichenden Geraden.

765. Es ist das in 22.5. angegebene System der Normalgleichungen zur Bestimmung der ausgleichenden Parabel mit der Gleichung $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ abzuleiten.

766. Man bestimme zu den Punkten $P_1(2; 1)$, $P_2(4; 4)$, $P_3(7; 5)$, $P_4(10; 5)$, $P_5(12; 3)$, $P_6(14; 2)$ die ausgleichende Parabel mit der Gleichung $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (Verwendung einer Rechenmaschine) und zeichne die Punkte und die Kurve.

767. Desgleichen für $P_1(0; 0{,}28)$, $P_2(5; -0{,}70)$, $P_3(10; -1{,}01)$, $P_4(15; -0{,}80)$, $P_5(20; -0{,}27)$, $P_6(25; 1{,}10)$.

22.6. Ausgleichung bedingter Beobachtungen

Es werden mehrere, direkt meßbare Größen x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ betrachtet. Diese Größen seien außerdem durch eine oder mehrere Nebenbedingungen

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

miteinander verknüpft, die streng erfüllt sein müssen. Werden die Meßwerte der Größen in die Nebenbedingungen eingesetzt, dann sind diese wegen der zufälligen Fehler nicht erfüllt, sondern es ergeben sich *Widersprüche:*

$$\varphi_k(l_1, l_2, \ldots, l_n) = w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Man versieht deshalb wieder die Meßwerte mit Verbesserungen v_i, an die *zwei Forderungen* gestellt werden:

1. Die verbesserten Meßwerte $l_i + v_i$ müssen die Nebenbedingungen streng erfüllen.
2. Die Summe der Quadrate der Verbesserungen muß ein Minimum werden.

Es liegt also die Aufgabe vor, den Extremwert einer Funktion von mehreren Variablen unter Beachtung von Nebenbedingungen zu finden (vgl. 14.6.). Es werden jetzt die Verbesserungen v_i als die eigentlichen Variablen betrachtet, die sich aus der Ausgleichung ergeben.
Das Verfahren soll an einer übersichtlichen geometrischen Aufgabe erklärt werden.

BEISPIEL

In dem Viereck $ABCD$ wurden die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ gemessen (Bild 276):

$\alpha_1 = 70° 15'$ $\quad \alpha_2 = 46° 12'$ $\quad \alpha_3 = 78° 56'$
$\alpha_4 = 67° 13'$ $\quad \alpha_5 = 33° 50'$ $\quad \alpha_6 = 63° 36'$
$\alpha_7 = 124° 59'$ $\quad \alpha_8 = 97° 21'.$

Sie sind unter Beachtung der notwendigen Nebenbedingungen auszugleichen.

Lösung: Um die Anzahl r der Nebenbedingungen zu finden, wird zunächst folgende Überlegung angestellt: Ist eine Seite des Vierecks gegeben, dann genügen 4 Winkel, um das Viereck eindeutig zu konstruieren oder zu berechnen. Jeder weitere hinzukommende Winkel liefert eine Bedingungsgleichung. Ist $n = 8$ die Zahl der gemessenen Winkel, $u = 4$ die Zahl der notwendigen Winkel, dann ist $n - u = r = 4$ die Zahl der überschüssigen Messungen und zugleich die Zahl der Nebenbedingungen. Es ist also stets $r < n$. Für dieses Beispiel ergeben sich folgende Bedingungen:

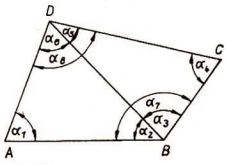


Bild 276

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6 - 180° &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 180° &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_7 &= 0 \\ \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_8 &= 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Die Bedingungen müssen voneinander unabhängig sein. Daher ist die Viereckbedingung $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - 360° = 0$ neben den ersten beiden Gleichungen nicht mit zu verwenden, da sie die Summe beider Gleichungen ist. Werden in (I) die gemessenen Werte eingesetzt, dann ergeben sich die Widersprüche

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6 - 180° &= w_1 = \ \ 3' \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 180° &= w_2 = -1' \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_7 &= w_3 = \ \ 9' \\ \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_8 &= w_4 = \ \ 5'. \end{aligned} \tag{II}$$

Man bringt an die Meßwerte Verbesserungen an, so daß die Widersprüche Null werden:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + v_1) + (\alpha_2 + v_2) + (\alpha_6 + v_6) - 180° &= 0 \\ (\alpha_3 + v_3) + (\alpha_4 + v_4) + (\alpha_5 + v_5) - 180° &= 0 \\ (\alpha_2 + v_2) + (\alpha_3 + v_3) - (\alpha_7 + v_7) &= 0 \\ (\alpha_5 + v_5) + (\alpha_6 + v_6) - (\alpha_8 + v_8) &= 0. \end{aligned} \tag{III}$$

Die Differenz einer Gleichung von (III) minus der entsprechenden Gleichung von (II) ergibt

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_6 + w_1 &= 0 \\ v_3 + v_4 + v_5 + w_2 &= 0 \\ v_2 + v_3 - v_7 + w_3 &= 0 \\ v_5 + v_6 - v_8 + w_4 &= 0. \end{aligned} \tag{IV}$$

Nun ist das Minimum der Funktion $[vv] = f(v_1, \ldots, v_8)$ unter Beachtung der Nebenbedingungen (IV) zu berechnen. Nach 14.6. bildet man mit den LAGRANGEschen Multiplikatoren die Funktion

$$F = \sum_{i=1}^{8} v_i^2 + \lambda_1(v_1 + v_2 + v_6 + w_1) + \lambda_2(v_3 + v_4 + v_5 + w_2) + \\ + \lambda_3(v_2 + v_3 - v_7 + w_3) + \lambda_4(v_5 + v_6 - v_8 + w_4)$$

und setzt ihre partiellen Ableitungen gleich Null:

$$\begin{aligned} F_{v1} &= 2v_1 + \lambda_1 = 0 \quad \text{(a)} & F_{v5} &= 2v_5 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ F_{v2} &= 2v_2 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & F_{v6} &= 2v_6 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ F_{v3} &= 2v_3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & F_{v7} &= 2v_7 - \lambda_3 = 0 \quad \text{(c)} \\ F_{v4} &= 2v_4 + \lambda_2 = 0 \quad \text{(b)} & F_{v8} &= 2v_8 - \lambda_4 = 0 \quad \text{(d)}. \end{aligned} \tag{V}$$

(IV) und (V) stellen ein System von 12 Gleichungen mit den 12 Variablen v_i $(i = 1, \ldots, 8)$ und λ_k $(k = 1, \ldots, 4)$ dar. Werden aus den Gleichungen (Va) bis (Vd) die λ_k berechnet, aus den restlichen Gleichungen von (V) die Verbesserungen v_2, v_3, v_5 und v_6 und wird alles in (IV) eingesetzt, dann folgt

$$\begin{aligned} 3v_1 \quad - v_7 - v_8 &= -w_1 = -3' \\ 3v_4 - v_7 - v_8 &= -w_2 = \ 1' \\ v_1 + v_4 - 3v_7 &= -w_3 = -9' \\ v_1 + v_4 \quad - 3v_8 &= -w_4 = -5'. \end{aligned}$$

Mit Determinanten bzw. mit dem GAUSSschen Algorithmus folgt

$$v_1 = 1{,}5'; \quad v_4 = 2{,}9'; \quad v_7 = 4{,}5'; \quad v_8 = 3{,}1'$$

und damit

$$v_2 = -3'; \quad v_3 = -1{,}6'; \quad v_5 = -0{,}2'; \quad v_6 = -1{,}6'.$$

Die ausgeglichenen Winkel sind

$$\begin{aligned} \alpha_1 + v_1 &= 70^\circ\ 16{,}5' & \alpha_5 + v_5 &= \ 33^\circ\ 49{,}8' \\ \alpha_2 + v_2 &= 46^\circ\ 09' & \alpha_6 + v_6 &= \ 63^\circ\ 34{,}4' \\ \alpha_3 + v_3 &= 78^\circ\ 54{,}4' & \alpha_7 + v_7 &= 125^\circ\ 03{,}5' \\ \alpha_4 + v_4 &= 67^\circ\ 15{,}9' & \alpha_8 + v_8 &= \ 97^\circ\ 24{,}1'. \end{aligned}$$

Zur Probe werden diese Werte in die Nebenbedingungen eingesetzt, die bis auf Rundungsfehler widerspruchsfrei erfüllt sein müssen. Der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels ergibt sich aus

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{54{,}68'}{4}} = \pm\ 3{,}7'.$$

Auf den Beweis wird verzichtet.

Abschließend sei noch erwähnt, daß bei vermittelnden oder bei bedingten Beobachtungen die Fehlergleichungen auch nichtlinear sein können. Mit Hilfe des totalen Differentials bzw. des TAYLORschen Satzes für mehrere Variable werden diese Fehlergleichungen näherungsweise in lineare verwandelt. Diese Rechnungen sind in der Spezialliteratur für die Ausgleichungsrechnung enthalten.

AUFGABE

768. Gegeben sind die Höhen der Punkte A und B mit $H_A = 153{,}625$ m, $H_B = 168{,}177$ m. Um die Höhen der Punkte P_1 und P_2 zu bestimmen, wurden die Höhenunterschiede $h_1 = 8{,}053$ m, $h_2 = -2{,}410$ m, $h_3 = -5{,}652$ m, $h_4 = 6{,}492$ m, $h_5 = -8{,}912$ m in der durch Pfeile angegebenen Richtung gemessen (Bild 277). Man berechne die ausgeglichenen Höhenunterschiede $h_i + v_i$ und damit die Höhen H_1 und H_2 der Punkte P_1 und P_2.

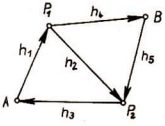


Bild 277

23. Grundbegriffe. Aufstellen von Differentialgleichungen

23.1. Definition der Differentialgleichung

In Naturwissenschaft und Technik treten oft Probleme auf, deren mathematische Behandlung das Lösen von Differentialgleichungen[1]) erfordert. Auch in den vorangegangenen Abschnitten dieses Bandes wurden bereits einfache Dgln. gelöst, so z. B. in 11.6. bei der Ermittlung des Weg-Zeit-Gesetzes für den Wurf senkrecht nach oben. Auf einen senkrecht nach oben geworfenen Körper wirkt (wenn von anderen Kräften wie Luftwiderstand usw. abgesehen wird) die Anziehungskraft der Erde und bewirkt eine der Wurfrichtung entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung

$$a = -g. \tag{I}$$

Da $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ist, kann man aus

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g$$

durch Integrieren die Geschwindigkeit

$$v = -gt + C_1 \tag{II}$$

(C_1 Integrationskonstante) ermitteln.

Wegen $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ermöglicht ein nochmaliges Integrieren das Bestimmen des Weges

$$s = -\frac{g}{2}\,t^2 + C_1 t + C_2 \tag{III}$$

(C_2 Integrationskonstante).

Hat der Körper zu Beginn der Zeitmessung, für $t = 0$, die Geschwindigkeit $v = v_0$, und ist der bisher zurückgelegte Weg $s = s_0$, so kann mit Hilfe dieser *Anfangsbedingung* das Weg-Zeit-Gesetz (III) eine für den betrachteten Fall gültige spezielle Form bekommen.

Aus (II) folgt für $t = 0$, $v = v_0$: $C_1 = v_0$,

aus (III) folgt für $t = 0$, $s = s_0$: $C_2 = s_0$.

---

[1]) Im folgenden wird „Differentialgleichung" mit „Dgl." abgekürzt

Somit lautet das Weg-Zeit-Gesetz des Wurfes senkrecht nach oben unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $t = 0$, $v = v_0$, $s = s_0$

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2. \tag{IV}$$

Dieses Ergebnis wurde aus Gl. (I) gewonnen, die man wegen

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + g = 0 \tag{V}$$

schreiben kann. Gl. (V) enthält eine Ableitung (hier die 2. Ableitung) einer zu bestimmenden Funktion mit einer abhängigen (hier s) und einer unabhängigen Variablen (hier t), die durch Integrationen in Form der Gl. (III) ermittelt werden konnte. Allgemein gilt die

Definition

Eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion einer unabhängigen Variablen, die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion nach der unabhängigen Variablen enthält, heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Von der Richtigkeit der Lösung (III) der Dgl., aber auch der speziellen Lösung (IV), kann man sich durch Ableiten von (III) oder (IV) und Einsetzen der Werte der Ableitungen in (V) überzeugen.

Definition

Lösung der Dgl. ist die Menge aller Funktionen, deren Funktionswerte und Werte der Ableitungen die Dgl. erfüllen.

In der Dgl. (V) war die höchste Ableitung eine zweite. Man nennt eine solche Dgl. eine Dgl. 2. Ordnung. Allgemein gilt:

Die höchste in einer Dgl. vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion bestimmt die Ordnung der Dgl., d. h., in einer Dgl. n-ter Ordnung tritt als höchste Ableitung die n-te auf.

Ein weiteres, einfach lösbares Beispiel einer Dgl. trat in 11.4. auf. Beim radioaktiven Zerfall ist (im Mittel) die Anzahl der in einer bestimmten Zeit zerfallenden Atome, d. i. die Zerfallsgeschwindigkeit $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$, proportional der Anzahl n der noch nicht zerfallenen Atome. Mit λ als Proportionalitätsfaktor (Zerfallskonstante des jeweiligen Elements) erhält man zur Beschreibung des Problems die Dgl. 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n. \tag{VI}$$

Die Lösung dieser Dgl. folgt aus

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\lambda \mathrm{d}t$$

durch Integrieren

$$\ln |n| = -\lambda t + C$$

zu

$$n = \pm \mathrm{e}^{-\lambda t + C} = \pm \mathrm{e}^{C} \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Mit $\pm \mathrm{e}^{C} = K$ wird

$$n = K \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{VII}$$

Auch hier kann für eine Anfangsbedingung der Integrationskonstanten ein spezieller Wert erteilt werden. Ist z. B. zur Zeit $t = 0$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome n_0, so wird

$$n_0 = K \mathrm{e}^{0} = K.$$

Damit gilt für diese Anfangsbedingung

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{VIII}$$

Bei beiden bisher betrachteten Dgln. lieferten die zum Lösen erforderlichen Integrationen zunächst eine Menge von Lösungsfunktionen. Einzelne Lösungsfunktionen ergaben sich durch Belegen der Integrationskonstanten mit speziellen Werten. Man nennt die Menge aller Lösungsfunktionen einer Dgl. [z. B. Gl. (III) und (VII)] die **allgemeine Lösung der Dgl.**

Das Lösen der Dgl. (I) bzw. (V), die eine Dgl. 2. Ordnung ist, erfordert ein zweimaliges Integrieren. Deshalb enthält die allgemeine Lösung (III) zwei Integrationskonstanten, über die — sofern keine Anfangsbedingung gegeben ist — willkürlich verfügt werden kann. Diese Integrationskonstanten werden auch als *Parameter* bezeichnet. Die Dgl. (VI), eine Dgl. 1. Ordnung, lieferte nach einmaligem Integrieren die allgemeine Lösung (VII) mit einer Integrationskonstanten (einem Parameter). Allgemein gilt — was hier nicht bewiesen werden soll — der

Satz

Die allgemeine Lösung einer Dgl. n-ter Ordnung enthält genau n willkürliche Parameter.

Legt man, z. B. auf Grund einer Anfangsbedingung, für diese Parameter spezielle Werte fest, so bekommt man eine **partikuläre Lösung der Dgl.**

Die allgemeine Lösung einer Dgl. kann man graphisch durch eine Kurvenschar darstellen. Man nennt die Darstellung der Lösungsmenge einer Dgl. n-ter Ordnung, die n willkürliche Parameter enthält, eine *n-parametrige Kurvenschar*. Einer partikulären Lösung entspricht dann eine dieser Kurven, die man auch als *Lösungskurve* oder Integralkurve bezeichnet.

Die durch Gl. (III) beschriebene Lösungsmenge der Dgl. (V) wird durch eine zweiparametrige Kurvenschar dargestellt, nämlich durch quadratische Parabeln. Durch die Parameterwerte C_1 und C_2 kann man die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel festlegen, durch Variieren von C_1 und C_2 kann der Scheitelpunkt in jeden Punkt der Koordinatenebene gebracht werden. In Bild 278 ist die Lösungskurve für die partikuläre Lösung (IV) dargestellt.

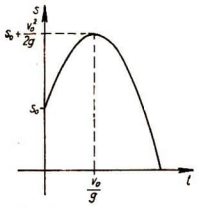


Bild 278

BEISPIELE

1. Gesucht ist die Gleichung $y = f(x)$ der Menge aller Kurven, deren Subtangente die konstante Länge l besitzt. Es sind einige Kurven der Kurvenschar zu zeichnen, darunter die durch den Punkt $(0; 1/2)$ verlaufende. Die Richtigkeit der errechneten Gleichung ist zu überprüfen.

   Lösung: Für die Subtangente (Projektion des Tangentenabschnitts zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt mit der Abszissenachse auf die Abszissenachse) gilt (Bild 279)

$$\tan\tau = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{l}.$$

   Das ist eine Dgl. 1. Ordnung mit x als unabhängiger und y als abhängiger Variabler. Trennt man die beiden Variablen bzw. ihre Differentiale

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{l},$$

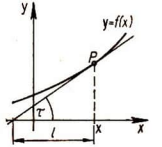


Bild 279

   so erhält man durch Integrieren

$$\ln|y| = \frac{x}{l} + C$$

   und daraus

$$y = \pm\,\mathrm{e}^{\frac{x}{l}+C} = \pm\,\mathrm{e}^{C}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}.$$

   Mit $\pm\mathrm{e}^{C} = K$ als Parameter lautet die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{y = K\,\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}}}.$$

   Die Menge aller Kurven, deren Subtangente die konstante Länge l hat, ist eine einparametrige Schar von Exponentialkurven. Die Werte der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 1/2$ in die allgemeine Lösung eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{2} = K\cdot\mathrm{e}^{0}$$

$$K = \frac{1}{2}.$$

   Damit erhält man als partikuläre Lösung

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}}}.$$

Bild 280 zeigt die zu dieser partikulären Lösung gehörende Lösungskurve sowie einige weitere Kurven der Lösungsmenge. Die Probe für die ermittelte allgemeine Lösung

$$y = K\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}$$

führt man durch, indem man diese differenziert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{K}{l}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}$$

und die als Funktionswert und Wert der 1. Ableitung erhaltenen Terme in die Dgl. einsetzt.

Man erhält eine identische Gleichung. $y = K\mathrm{e}^{\frac{x}{l}}$ ist somit die allgemeine Lösung der aufgestellten Dgl. (Da die Richtigkeit der Lösung für einen beliebigen Parameterwert K nachgewiesen wurde, erübrigt sich eine Nachprüfung der partikulären Lösung mit $K = 1/2$.)

2. Ein Stromkreis mit einer Gleichurspannung E, einer Induktivität L und einem Gesamtwiderstand R (Bild 281) wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen.

a) Wie heißt die Dgl. des Einschaltvorganges?

b) Es ist zu prüfen, ob $I = \frac{E}{R} + K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ (K Parameter) die allgemeine Lösung der aufgestellten Dgl. ist.

c) Wie heißt die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung des Einschaltvorganges genügt?

Lösung:

a) Im geschlossenen Stromkreis muß die Summe der Spannungsabfälle gleich der vorhandenen Urspannung sein:

$$u_R + u_L = E.$$

Mit $u_R = I \cdot R$ und $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ erhält man eine Dgl. 1. Ordnung zur Beschreibung des Zeitverhaltens des Stromes:

$$IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E$$

bzw.

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I = \frac{E}{R}.$$

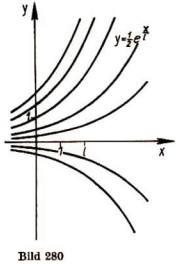


Bild 280

b) Aus

$$I = \frac{E}{R} + K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

erhält man durch Differenzieren

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -K\frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Die Terme für I und $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ in die aufgestellte Dgl. eingesetzt, ergibt

$$\frac{L}{R}\left(-K\frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) + \frac{E}{R} + K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}$$

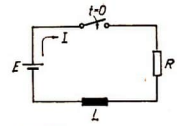


Bild 281

d. i. eine identische Gleichung. Da die gegebene Lösung sowohl einen willkürlichen Parameter enthält als auch die Dgl. erfüllt, ist sie die allgemeine Lösung der Dgl.

c) Da zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis erst geschlossen wird, muß bis dahin $I = 0$ gelten; denn die Stromstärke in einer Induktivität kann sich nicht sprunghaft ändern. Diese Anfangsbedingung in

$$I = \frac{E}{R} + K\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

eingesetzt, ermöglicht das Bestimmen des der Anfangsbedingung entsprechenden speziellen Wertes von K:

$$0 = \frac{E}{R} + K\mathrm{e}^{0}$$

$$K = -\frac{E}{R}.$$

Somit lautet die partikuläre Lösung

$$I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

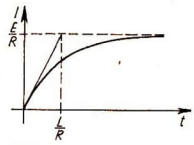


Bild 282

Den Verlauf der Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit zeigt Bild 282.

23.2. Aufstellen von Differentialgleichungen

Im 2. Beispiel des vorangegangenen Abschnitts wurde die Dgl. eines technischen Vorgangs, eines Schaltvorgangs, ermittelt. Das Aufstellen einer Dgl. ist ein wichtiger Teil der mathematischen Erfassung und Lösung eines naturwissenschaftlichen oder technischen Problems. Es soll deshalb anhand einiger Beispiele gezeigt werden. Sehr oft ermöglicht das Zurückgreifen auf bestimmte Grundgesetze den Ansatz.

BEISPIELE

1. Beim freien Fall eines Körpers von der Masse m ist der Luftwiderstand bei geringer Geschwindigkeit dieser selbst proportional, bei höheren Geschwindigkeiten dem Quadrat der Geschwindigkeit, bei sehr großen Geschwindigkeiten einer höheren als 2. Potenz. Es soll die Dgl. des freien Falles mit Luftwiderstand bei Annahme eines quadratischen Widerstandsgesetzes mit der Geschwindigkeit als abhängiger Variabler aufgestellt werden.

   Lösung: Das Grundgesetz der Dynamik lautet

   $$F = m\,a.$$

   Die beschleunigende Kraft F setzt sich zusammen aus der gleich gerichteten Gravitationskraft F_G und der entgegengesetzt gerichteten Kraft des Luftwiderstandes F_L:

   $$F = F_G - F_L,$$

   wobei $F_G = m\,g$ und $F_L = c\,v^2$ ist (c Proportionalitätsfaktor).

Also wird

$$m\,a = m\,g - c\,v^2$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - c\,v^2.$$

Die Dgl. lautet

$$\frac{m}{c}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2 = \frac{m\,g}{c}. \tag{I}$$

2. An einem RC-Glied (Bild 283) soll eingangsseitig eine zeitlich veränderliche Urspannung $e(t)$ anliegen. Die Abhängigkeit der Ausgangsspannung u von der Zeit ist durch eine Dgl. anzugeben.

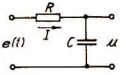


Bild 283

Lösung: Nach dem 2. KIRCHHOFFschen Satz („Die Summe aller Urspannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle") gilt

$$e(t) = u_R + u_C,$$

wobei $u_R = I\,R$ und $u_C = u$ ist.

Für einen idealen Kondensator gilt die Strom-Spannungs-Beziehung

$$I = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Damit erhält man

$$e(t) = I\,R + u =$$

$$= C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,R + u.$$

Das Übertragungsverhalten des Vierpols wird also durch die Dgl. 1. Ordnung

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e(t) \tag{II}$$

beschrieben.

Man schreibt Dgln. der Technik, in denen die Zeit als unabhängige Variable auftritt, im allgemeinen so, daß die abhängige Variable mit keinem Koeffizienten behaftet ist (insbesondere dann, wenn die abhängige Variable linear auftritt). Bei dieser Schreibweise kann man aus der Dgl. sofort auch das statische Verhalten erkennen. Wenn im Beispiel 2 die Ausgangsgröße des RC-Gliedes (nach längerer Zeit) in einen stationären Zustand übergeht, müssen alle Ableitungen der Ausgangsgröße nach der Zeit zu Null geworden sein, und man entnimmt aus der Dgl.

$$u\,|_{t\to\infty} = e.$$

Anhand des Beispiels 2 soll auch noch erläutert werden, warum für viele Betrachtungen in Naturwissenschaft und Technik die Dgl. nicht nur wichtiger, sondern in ihrer Aussagekraft auch viel umfassender als ihre Lösung ist, die meist in Form der

allein interessierenden partikulären Lösung angegeben wird. Die Dgl. (II) beschreibt das Übertragungsverhalten des elektrischen Baugliedes für jede beliebige Form der Eingangsgröße (Urspannung) $e(t)$. Es könnte also $e(t)$ sowohl eine Gleichurspannung E sein (die im Zeitpunkt $t = 0$ zugeschaltet wird) als auch eine zeitliche veränderliche Urspannung, z. B. $E \sin \omega t$ oder $E \cdot t$. Eine Lösung der Dgl. in der Form $u = f(t)$ kann aber stets nur für eine bestimmte Form der Eingangsgröße angegeben werden.

BEISPIELE

3. Es soll die Dgl. der elastischen Linie eines auf zwei Stützen gelagerten Balkens bei Einwirkung eines positiven Momentes M aufgestellt werden.

   Lösung: Wird ein Balken von konstantem Querschnitt durch ein positives Moment auf Biegung beansprucht (Bild 284), so wirken auf der Balkenunterseite Zugspannungen, verbunden mit einer Längung der Faser, auf der Oberseite Druckspannungen, verbunden mit einer Verkürzung der Faser. Eine bestimmte, dazwischenliegende Schicht, die neutrale Faser, behält ihre ursprüngliche Länge bei.

   Für ein Balkenelement von der ursprünglichen Länge Δx (Bild 285) kann man die Proportion

   $$\Delta x : \varrho = \Delta l : a$$

   aufstellen (ϱ Krümmungsradius der neutralen Faser, Δl Längung der Faser im Abstand a von der neutralen Faser).

   Hieraus folgt

   $$\Delta l = \frac{a \cdot \Delta x}{\varrho}.$$

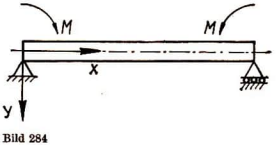
   

   Bild 284

   Nach dem Hookeschen Gesetz ist aber auch

   $$\Delta l = \varepsilon \cdot \Delta x = \frac{\sigma}{E} \cdot \Delta x$$

   (ε Dehnung, σ Normalspannung, E Elastizitätsmodul), so daß man erhält

   $$\frac{a \cdot \Delta x}{\varrho} = \frac{\sigma}{E} \cdot \Delta x$$

   $$\varrho = \frac{E \cdot a}{\sigma}.$$

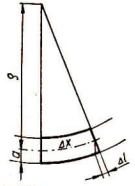
   

   Bild 285

   Setzt man hierin den Wert für σ aus der Biegespannungsformel

   $$\sigma = \frac{M}{I} a$$

   ein (I Flächenträgheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die neutrale Faser), so wird

   $$\varrho = \frac{E \cdot I}{M}.$$

   Für den Krümmungsradius ϱ gilt

   $$\varrho = \frac{1}{|k|} = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

   [k Krümmung, vgl. (136)].

In dem zugrunde gelegten Koordinatensystem (Bild 284) muß bei einem positiven Moment $y'' < 0$ sein, also kann man setzen

$$\varrho = \frac{EI}{M} = -\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Diese Dgl. 2. Ordnung ist die Dgl. der elastischen Linie

$$y'' + \frac{M}{EI}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0. \tag{III}$$

Da die Durchbiegung des Balkens in den meisten praktischen Fällen sehr klein gegenüber der Balkenlänge ist, ist y', das als Tangenswert des Neigungswinkels gedeutet werden kann, sehr klein und y'^2 kann gegenüber 1 vernachlässigt werden. Die Dgl. der elastischen Linie nimmt dann die wesentlich einfacher zu lösende Form

$$y'' = -\frac{M}{EI} \tag{IV}$$

an. Aus dieser kann für den jeweiligen Belastungsfall durch einmaliges Integrieren der Neigungswinkel der elastischen Linie, nach zweimaligem Integrieren die Durchbiegung y im Abstand x vom Auflager berechnet werden.

4. Mittels des Impulssatzes soll die Dgl. der Raketenbewegung aufgestellt werden.

Lösung: Der Impulssatz besagt: Die Änderung des Impulses ist gleich der von außen einwirkenden Kraft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot v) = F.$$

Nimmt man zunächst als Näherung an, daß die Wirkung der äußeren Kräfte vernachlässigt werden kann, so ist $F = 0$. Zwischen zwei Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ muß also die Größe des Impulses erhalten bleiben. Ist m die Masse und v die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t, dann fliegt zur Zeit $t + \Delta t$ die infolge Treibstoffverbrauches kleinere Masse $m - \Delta m$ mit der vergrößerten Geschwindigkeit $v + \Delta v$ weiter. Die in der Zeit Δt ausgestoßenen Antriebsgase mit der Masse Δm besitzen eine Relativgeschwindigkeit v_a gegenüber der Rakete. v_a ist der Geschwindigkeit v entgegengesetzt gerichtet, Δm besitzt folglich die Geschwindigkeit $v - v_a$ (Bild 286).

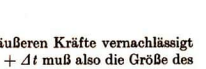


Bild 286

Es gilt also

$$m \cdot v = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m (v - v_a) =$$

$$= m \cdot v - v \cdot \Delta m + m \cdot \Delta v - \Delta m \cdot \Delta v + v \cdot \Delta m - v_a \cdot \Delta m$$

$$\Delta m \cdot \Delta v = m \cdot \Delta v - v_a \cdot \Delta m.$$

Dividiert man durch Δt und bildet den Grenzwert für $\Delta t \to 0$, so erhält man hieraus

$$0 = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v_a \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}.$$

Dies ist die Dgl. der (idealen) Raketenbewegung

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{V}$$

Sollen die äußeren Kräfte nicht außer Acht gelassen werden, so sind noch der Luftwiderstand und die Anziehungskraft der Erde zu berücksichtigen:

$$F = F_{\mathrm{L}} + F_{\mathrm{G}}$$

mit $F_{\mathrm{L}} = \frac{\varrho}{2} v^2 c_w A_{\max}$ (ϱ Dichte der Luft, c_w ein geschwindigkeits- und formabhängiger Beiwert, $A_{\max}$ größte Querschnittsfläche der Rakete) und $F_{\mathrm{G}} = -mg\sin\alpha$ (α Schußwinkel). Weiterhin müßte bei großen Geschwindigkeiten auf der linken Seite der Gleichung die relativistische Massenänderung $v\frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}t}$ mit in Rechnung gesetzt werden, so daß die Dgl. der Raketenbewegung genauer lautet

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}t} - v_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\varrho}{2} v^2 c_w A_{\max} - mg\sin\alpha.$$

Die bisher behandelten Beispiele von Dgln. zeigen bereits eine Vielfalt des Ansatzes, der in vielen Fällen durch Verwenden verschiedener, für das jeweils vorliegende Problem gültiger technisch-physikalischer Gesetzmäßigkeiten gefunden werden kann. Einige Gesetze werden recht oft für das Aufstellen einer Dgl. verwendet, so z. B.

das Grundgesetz der Dynamik $F = ma$,

der Impulssatz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = F$,

die Gleichgewichtsbedingung für die Momente $\sum M = 0$,

der Energiesatz $\sum W_{\mathrm{zu}} = \sum W_{\mathrm{ab}}$,

der 2. KIRCHHOFFsche Satz $\sum u = \sum e$,

oder auch die Tatsache, daß die zeitliche Änderung eines Zustandes dem jeweils erreichten Zustand proportional ist (z. B. im Gesetz des organischen Wachstums).

Im folgenden soll noch eine Einteilung der Differentialgleichungen vorgenommen werden. In allen bisherigen Beispielen von Dgln. traten stets nur die Ableitungen nach einer Variablen auf. Solche Dgln. heißen **gewöhnliche Differentialgleichungen**[1]. Als mögliches Einteilungsprinzip der gewöhnlichen Dgln. wurde in 23.1. bereits die Ordnung der Dgl. genannt. Eine gewöhnliche Dgl. n-ter Ordnung mit den Variablen x und y kann allgemein in der Form

$$\boxed{\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0} \tag{201}$$

geschrieben werden.

[1] *Partielle Dgln.*, in denen die zu bestimmende Funktion eine Funktion mehrerer unabhängiger Variabler ist und demzufolge die auftretenden Ableitungen partielle sind, sollen in diesem Band nicht behandelt werden

Ist die Funktion Φ eine rationale bezüglich des Funktionswertes y und der Werte der Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, so kann man auch von einem Grad der Dgl. sprechen, der sich aus der höchsten Potenz von y und seinen Ableitungen ergibt. Besondere Bedeutung für die Praxis besitzen *lineare Dgln.* (Dgln. 1. Grades),

a) da sehr oft in Naturwissenschaft und Technik lineare Zusammenhänge zwischen dem Funktionswert y und den Werten der Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ bestehen;
b) weil für lineare Dgln. spezielle, relativ einfache Lösungsverfahren existieren (neben numerischen und graphischen Lösungsverfahren ist hier die Möglichkeit des Lösens mittels Analogrechner zu nennen).

Aus dem letztgenannten Grund werden auch oft nichtlineare Dgln. linearisiert, d. h., die Beschreibung durch eine nichtlineare Dgl. wird entweder für den gesamten Definitionsbereich oder innerhalb einzelner Intervalle durch eine in Näherung gültige lineare Dgl. ersetzt. So ist z. B. die lineare Dgl. 2. Ordnung (IV) ein im allgemeinen den Anforderungen der Praxis mit hinreichender Genauigkeit genügender Ersatz für die nichtlineare Dgl. (III).

Da in linearen Dgln. die Glieder mit $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ jeweils vom 1. Grade sind, besitzt die **lineare Dgl. n-ter Ordnung** die allgemeine Form

$$g_n(x)y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\,y' + g_0(x)\,y = S(x) \tag{202}$$

23.3. Differentialgleichung einer Kurvenschar

Wie in 23.1. festgestellt wurde, kann die Lösung einer Dgl. n-ter Ordnung als n-parametrige Kurvenschar dargestellt werden. Wegen der größeren Allgemeingültigkeit der Aussage durch die Dgl. selbst kann es erforderlich sein, die zu einer n-parametrigen Kurvenschar gehörende Dgl. n-ter Ordnung zu bestimmen. Um n Parameter zu ersetzen, werden $n + 1$ Gleichungen benötigt. Eine Gleichung ist durch die Kurvengleichung selbst bereits gegeben, die n Gleichungen bekommt man durch n-maliges Differenzieren der Kurvengleichung.

Differenziert man die Gleichung einer n-parametrigen Kurvenschar n-mal, so kann die zugehörige Dgl. n-ter Ordnung durch Eliminieren der n Parameter aus den $n + 1$ Gleichungen ermittelt werden.

BEISPIELE

1. Die Dgl. der durch die Gleichung

$$y = Y - K\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}} \qquad (x \geqq 0)$$

(Y und τ Konstanten, K Parameter) dargestellten Kurvenschar ist aufzustellen.

Lösung: Aus $y = Y - K\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}}$ erhält man durch Differentiation

$$y' = \frac{K}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}}.$$

Also ist

$$y = Y - \tau y'$$

oder

$$\tau y' + y = Y.$$

Dies ist eine lineare Dgl. 1. Ordnung. τ und K bestimmen den Anstieg der aus dem Punkt $(0; Y - K)$ herausgehenden Kurven, denn für $x = 0$ ist $y = Y - K$ und $y' = \frac{K}{\tau}$. Für $x \to \infty$ gilt $y \to Y$ (Bild 287).

2. Gesucht ist die Dgl. der harmonischen Schwingung

$$s = C \sin(\omega t + \varphi)$$

(ω Konstante, C und φ Parameter).

Lösung: Die Gleichung beschreibt eine zweiparametrige Schar sinusförmiger Kurven mit C als Amplitude und φ als Phasenwinkel (der dem Ursprung nächstgelegene Anfangspunkt einer Sinuswelle hat den Abszissenwert $t = -\varphi/\omega$).

Die Differentiation ergibt

$$\frac{ds}{dt} = \omega C \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 C \sin(\omega t + \varphi).$$

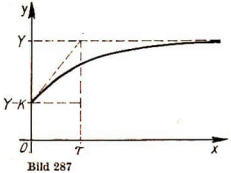


Bild 287

Somit wird wegen

$$s = C \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

oder

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

Die Dgl. der harmonischen Schwingung ist eine lineare Dgl. 2. Ordnung.

3. Die Dgl. aller Kreise ist aufzustellen.

Lösung: Die Gleichung eines Kreises in beliebiger Lage und mit beliebigem Radius kann entweder durch

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

oder durch

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

mit a, b, c oder x_m, y_m, r als Parameter angegeben werden. Geht man von der zweiten Gleichung aus und differenziert diese dreimal (da 3 Parameter enthalten sind), so wird

$$x - x_m + (y - y_m)y' = 0$$

$$1 + (y - y_m)y'' + y'^2 = 0$$

$$(y - y_m)y''' + y'y'' + 2y'y'' = 0.$$

Hier braucht man nur noch aus den letzten beiden Gleichungen den Parameter y_m zu ersetzen, und man bekommt als Dgl. aller Kreise

$$\underline{\underline{y'''(1+y'^2)-3y'^2y'=0}},$$

eine Dgl. 3. Ordnung (und 3. Grades).

4. Wie heißt die Dgl. aller Kurven, die alle Geraden durch den Ursprung rechtwinklig schneiden?

Lösung: Die Menge aller Geraden durch den Ursprung wird durch die Gleichung

$$y = mx$$

beschrieben.

Es ist also

$$y' = m$$

und damit

$$y = y'x \qquad (x \neq 0)$$

die Dgl. dieser Geraden.

Da $y' = y/x$ als Tangenswert des Richtungswinkels der Ursprungsgeraden gedeutet werden kann, muß für die in allen Punkten $(x;y)$ senkrecht dazu verlaufenden Kurven der Tangenswert des Richtungswinkels

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

sein.

$$\underline{\underline{y'y + x = 0}} \qquad \text{mit} \qquad x \neq 0, \qquad y \neq 0$$

ist die Dgl. der Kurvenschar, die alle Ursprungsgeraden rechtwinklig schneiden.

24. Differentialgleichungen 1. Ordnung

24.1. Geometrische Deutung

In einer Dgl. 1. Ordnung tritt mindestens einmal der Wert der abgeleiteten Funktion $y' = f'(x)$ einer Funktion f auf, die zwischen einer unabhängigen Variablen x und einer abhängigen Variablen y besteht. Weiterhin können x und y selbst noch vorkommen.

Gleichung (201) bekommt für die Dgl. 1. Ordnung die Gestalt

$$\boxed{\Phi(x;y;y') = 0} \tag{203}$$

Bei dieser Form spricht man auch von einer *impliziten Dgl. 1. Ordnung*. Im folgenden sollen ausschließlich solche Dgln. 1. Ordnung behandelt werden, die sich eindeutig

nach y' auflösen lassen. Diese sog. *expliziten Dgln. 1. Ordnung* können allgemein in der Form

$$\boxed{y' = \varphi(x; y)} \tag{204}$$

geschrieben werden.

Der Dgl. (204) kann man eine anschauliche geometrische Deutung geben. Jedem Wertepaar $x; y$ des Definitionsbereiches der Funktion φ entspricht genau ein Punkt der x, y-Ebene. Durch die Funktion φ ist jedem dieser Punkte eine Steigung $y' = \varphi(x; y)$ mit einem Winkel $\alpha = \arctan y'$ zugeordnet (Bild 288). Ein Wertetripel $(x; y; y')$ bestimmt demnach ein *Linienelement*, die Gesamtheit aller Linienelemente ergibt ein *Richtungsfeld* in der x, y-Ebene. Alle Kurven, die in jedem Punkt die Richtung des Linienelementes haben, erfüllen die Dgl., sind Kurven der Lösungsmenge der Dgl.

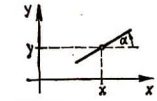


Bild 288

BEISPIEL

Welche Kurven beschreibt die Lösungsmenge der Dgl. $y' = x$?

Lösung: Die Dgl. besagt, daß in jedem Punkt des Richtungsfeldes die Steigung des Linienelementes gleich dem Abszissenwert dieses Punktes sein muß. Zeichnet man z. B. die Linienelemente nur für Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, so erhält man ein Richtungsfeld wie in Bild 289. Die zu diesem Richtungsfeld gehörenden Kurven sind quadratische Parabeln mit der Gleichung $y = x^2/2 + C$.

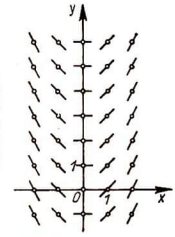


Bild 289

24.2. Isoklinenverfahren

In Bild 289 ist für alle Linienelemente mit gleichem Abszissenwert der Richtungswinkel der gleiche. Die Parallelen zur y-Achse sind also Linien, in deren sämtlichen Punkten die Linienelemente dieselbe Richtung besitzen. Solche Linien heißen *Isoklinen*.

Mittels der Isoklinen kann man sich — unter Vermeidung des oft recht mühsamen punktweisen Zeichnens — das Bild des Richtungsfeldes verschaffen. Da für eine Isokline

$$y' = c \qquad (c = \text{const.})$$

gilt, muß sich zu einer expliziten Dgl. 1. Ordnung immer eine *Isoklinengleichung*

$$\varphi(x; y) = c$$

bilden lassen.

Setzt man in der Isoklinengleichung für c verschiedene Werte ein und zeichnet die durch diese Gleichungen dargestellten Kurven, so erhält man Isoklinen. Diese ergeben ein Bild des Richtungfeldes, in das man mit guter Annäherung Lösungskurven der Dgl. einzeichnen kann.

BEISPIELE

1. Das Richtungsfeld der Dgl. $y' = -y/x$ $(x \neq 0)$ ist durch Isoklinen zu zeichnen und die der Anfangsbedingung $x = 1$, $y = 1$ genügende Lösung graphisch zu ermitteln.

   Lösung: Zur Dgl. $y' = -y/x$ erhält man als Isoklinengleichung $-y/x = c$. Löst man diese nach y auf,

   $$y = -cx,$$

   so erkennt man, daß die Isoklinen Geraden durch den Ursprung mit der Steigung $-c$ sind. In Bild 290 sind die Isoklinen für $c = -2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2$ (die Isokline für $c = 0$ ist die x-Achse) sowie die durch den Punkt $(1; 1)$ gehende Lösungskurve gezeichnet (es ist, wie später noch anhand der rechnerischen Lösung nachgewiesen werden wird, ein Ast der gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung $y = 1/x$).

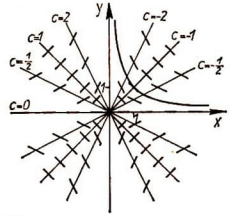


Bild 290

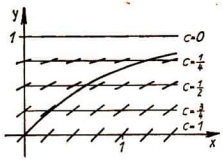


Bild 291

2. Mit Hilfe des Richtungsfeldes der Dgl. $y' = 1 - y$ (wobei $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq 1$ sein soll) ist die vom Koordinatenursprung ausgehende Lösungskurve zu ermitteln.

   Lösung: Die Isoklinengleichung der gegebenen Dgl. lautet

   $$y = 1 - c.$$

   Für $c = 0$, 1/4, 1/2, 3/4 und 1 erhält man die Gleichungen von Parallelen zur x-Achse in den Abständen 1, 3/4, 1/2, 1/4 und 0. Bild 291 zeigt die Isoklinen für die ausgewählten Werte von c sowie die vom Ursprung ausgehende Lösungskurve. Man erkennt diese als Kurve der Gleichung $y = 1 - e^{-x}$.

Das Isoklinenverfahren stellt ein gut anwendbares graphisches Lösungsverfahren für Dgln. 1. Ordnung dar. Als besondere Vorteile sind anzusehen:

a) Es ermöglicht, sich relativ schnell einen Überblick über den Verlauf der Kurven der Lösungen und damit über die Lösungen der Dgl. selbst zu verschaffen;

b) partikuläre Lösungen, die z. B. durch eine Anfangsbedingung bestimmt sind, können mit recht guter Genauigkeit ermittelt werden.

24.3. Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Kann in der expliziten Dgl. 1. Ordnung $y' = \varphi(x;y)$ die rechte Seite $\varphi(x;y)$ als Produkt zweier Terme $g(x)$ und $h(y)$ geschrieben werden, die jeweils nur eine der beiden Variablen enthalten, so entsteht die häufig vorkommende Form einer Dgl.

$$\boxed{y' = g(x) \cdot h(y)} \tag{205}$$

Bei dieser Dgl. ist es stets möglich, die beiden Variablen zu trennen. Man nennt deshalb (205) auch eine Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen.
Zum Lösen der Dgl. schreibt man y' als Quotienten der Differentiale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\,h(y),$$

trennt die Variablen

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

und integriert beide Seiten

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Berechnung der Integrale auf beiden Seiten liefert die Lösung der Dgl.

BEISPIELE

1. Die Dgl. $y'y + x = 0$ $(y \neq 0)$ soll gelöst werden (vgl. 23.3. Beisp. 4).

   Lösung:

   Explizite Form

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

   Trennen der Variablen

   $$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

   Integrieren

   $$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

   $$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

   Mit $r = \sqrt{2C}$ wird

   $$\underline{\underline{x^2 + y^2 = r^2}}.$$

   Dies ist die Gleichung von Kreisen, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

2. Man löse die Dgl. $ay' + y = b \quad (a \neq 0,\ y \neq b)$.

Lösung:

Explizite Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b-y}{a}.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{dy}{y-b} = -\frac{dx}{a}.$$

Integrieren

$$\ln|y-b| = -\frac{x}{a} + C$$

$$y - b = \pm e^{-\frac{x}{a}+C} = \pm e^{C} \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

$$\underline{\underline{y = b + Ke^{-\frac{x}{a}}}} \quad \text{mit} \quad \pm e^{C} = K.$$

Mit dieser Dgl. können auch die Dgln.

$$\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} + I = \frac{E}{R} \qquad \text{(vgl. 23.1. Beisp. 2)}$$

$$\tau y' + y = Y \qquad \text{(vgl. 23.3. Beisp. 1)}$$

$$y' = 1 - y \qquad \text{(vgl. 24.2. Beisp. 2)}$$

als allgemein gelöst betrachtet werden.

Beim vorstehenden Beispiel ergab sich nach dem Integrieren der linken Seite der Logarithmus eines Terms. Ist dies auf mindestens einer der beiden Seiten der Fall, dann setzt man zweckmäßig die Integrationskonstante gleich in der Form des Logarithmus einer Konstanten an. Dies ist ohne Einschränkung der Lösungsmenge möglich, denn C soll eine reelle Zahl sein, und jede reelle Zahl kann als Logarithmus einer positiven Zahl dargestellt werden.

Im Beispiel 2 würde sich ergeben

$$\ln|y-b| = -\frac{x}{a} + \ln|K|$$

$$\ln\left|\frac{y-b}{K}\right| = -\frac{x}{a}$$

$$\frac{y-b}{K} = e^{-\frac{x}{a}}$$

$$y = b + Ke^{-\frac{x}{a}}.$$

3. Man bestimme die partikuläre Lösung der Dgl. des freien Falles mit Luftwiderstand (vgl. 23.2. Beisp. 1)

$$\frac{m}{c}\frac{dv}{dt} + v^2 = \frac{mg}{c}$$

für die Anfangsbedingung $t = 0, \quad v = 0$.

Lösung:
Explizite Form

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v^2.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{dv}{g - \frac{c}{m} v^2} = dt \qquad \left(v \neq \sqrt{\frac{mg}{c}},\ \text{vgl. weiter unten}\right).$$

Die Integration der linken Seite geht auf das Grundintegral

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{artanh} x + C$$

zurückzuführen.
Man erhält durch Integrieren

$$\sqrt{\frac{m}{cg}} \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{c}{mg}}\, v = t + C.$$

Die Anfangsbedingung $t = 0$, $v = 0$ liefert für die Integrationskonstante

$$C = 0.$$

Damit wird die partikuläre Lösung

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh \sqrt{\frac{cg}{m}}\, t$$

oder auch $\left(\text{mit } \sqrt{\frac{cg}{m}} = k\right)$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{mg}{c}}\, \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}}}}.$$

Wie man erkennt, nähert sich v nach langer Zeit einer konstanten Geschwindigkeit

$$v\,|_{t \to \infty} = \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

4. Aus der Dgl. der (idealen) Raketenbewegung (vgl. 23.2. Beisp. 4) soll v in Abhängigkeit von m unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $t = 0$, $m = m_0$, $v = 0$ berechnet werden. Welche Geschwindigkeit v_B bei Brennschluß ($t = t_B$) ergibt sich für die Rakete A4, die eine Masse von 12960 kg mit einem Treib- und Betriebsstoffanteil von 8930 kg besitzt? Die Ausströmgeschwindigkeit der Gase während der Brenndauer von 71 s wird mit $v_a = -1950$ m/s als konstant angenommen.

Lösung: Die Dgl. der Raketenbewegung lautet

$$m \frac{dv}{dt} - v_a \frac{dm}{dt} = 0.$$

Setzt man voraus, es bestehe nicht nur eine eindeutige Zuordnung der Werte von m und v zu den Werten von t, sondern auch der Werte von v zu den Werten von m, so kann man die Dgl. als Dgl. mit m und v als Variablen schreiben

$$m\,\mathrm{d}v = v_\mathrm{a}\,\mathrm{d}m.$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}v = v_\mathrm{a}\frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

Integrieren

$$v = v_\mathrm{a}\ln m + C.$$

Die Anfangsbedingung $m = m_0$, $v = 0$ liefert

$$C = -v_\mathrm{a}\ln m_0.$$

Also ist

$$v = -v_\mathrm{a}\,(\ln m_0 - \ln m)$$

$$\underline{\underline{v = -v_\mathrm{a}\ln\frac{m_0}{m}}}$$

die partikuläre Lösung der Dgl.
Hieraus erhält man durch Einsetzen von $m_0 = 12960$ kg, $m_{t=t_\mathrm{B}} = (12960 - 8930)$ kg $=$ $= 4030$ kg und $v_\mathrm{a} = -1950$ m/s die Brennschlußgeschwindigkeit

$$\underline{\underline{v_\mathrm{B} = 2280 \text{ m/s}.}}$$

Dieser Wert liegt über der tatsächlich erreichten Brennschlußgeschwindigkeit, da der Einfluß der Schwerkraft und des Luftwiderstandes (vgl. die in 23.2. am Ende von Beisp. 4 angegebene Dgl.), die eine Verminderung der Geschwindigkeit um ca. 3% und ca. 19% (bei der Rakete A 4) bewirken, vernachlässigt wurde. Der Einfluß der relativistischen Massenänderung kann vernachlässigt werden, da v_B sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Die von der Rakete A 4 erreichte Brennschlußgeschwindigkeit beträgt $v_\mathrm{B} = 1780$ m/s.

24.4. Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In manchen Fällen kann eine explizite Dgl. 1. Ordnung durch eine geeignete Substitution auf eine Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen zurückgeführt werden. Die rechte Seite der Dgl. $y' = \varphi(x; y)$ soll die Variablen x und y nur in der Verbindung y/x $(x \neq 0)$ enthalten:

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{206}$$

Diese Dgl. kann durch Einführung einer neuen Variablen

$$\boxed{u = \frac{y}{x}}$$

in eine Dgl. mit trennbaren Variablen umgewandelt werden.

Aus $u = \frac{y}{x}$ folgt $y = ux$

und nach Differentiation nach x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u.$$

Dies in (206) eingesetzt, ergibt

$$\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u)$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}[\varphi(u) - u]} \tag{206a}$$

Dies ist eine Dgl. mit den trennbaren Variablen x und u, aus der zunächst u berechnet werden kann. y folgt aus $y = ux$.

BEISPIEL

1. $y' = \frac{x - y}{x}$ $(x \neq 0)$.

Lösung: Die Dgl. kann in der Form

$$y' = 1 - \frac{y}{x}$$

geschrieben werden.

Die Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

und

$$y' = \frac{du}{dx}x + u$$

liefern die Dgl. mit trennbaren Variablen

$$\frac{du}{dx}x + u = 1 - u.$$

Explizite Form

$$\frac{du}{dx} = \frac{1 - 2u}{x}.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{du}{2u - 1} = -\frac{dx}{x} \qquad \left(u \neq \frac{1}{2}\right).$$

Integrieren

$$\frac{1}{2}\ln|2u-1| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|2u-1| = 2\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$2u-1 = \pm\left(\frac{C}{x}\right)^2.$$

Mit $\pm C^2 = K$ wird

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{K}{x}\right).}}$$

Treten die Variablen x und y in der Dgl. $y' = \varphi(x; y)$ nur in der Verbindung $ax + by + c$ auf

$$\boxed{y' = \psi(ax + by + c)} \tag{207}$$

so kann die Dgl. durch die Substitution

$$\boxed{u = ax + by + c}$$

auf eine Dgl. mit trennbaren Variablen zurückgeführt werden. Wegen

$$u = ax + by + c,$$

$$y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

wird (207) zu

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = \psi(u)$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = b\,\psi(u) + a} \tag{207a}$$

In dieser Dgl. können die Variablen x und u getrennt und somit u berechnet werden. y erhält man durch die Rücksubstitution $y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$.

BEISPIEL

2. Die partikuläre Lösung der Dgl. $y' = (x + y - 1)^2$ $(|x| < \pi/2)$ für die Anfangsbedingung $x = 0,\ y = 1$ ist zu bestimmen.

Lösung:

Substitution

$$u = x + y - 1$$

$$y = u - x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1.$$

Dgl. für u

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2.$$

Explizite Form

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{du}{1 + u^2} = dx.$$

Integrieren

$$\arctan u = x + C$$

$$u = \tan(x + C).$$

Rücksubstitution

$$x + y - 1 = \tan(x + C).$$

Anfangsbedingung

$$x = 0, \qquad y = 1$$

$$1 - 1 = \tan C; \quad C = 0.$$

Partikuläre Lösung der Dgl.

$$y = 1 - x + \tan x.$$

Die beiden Typen $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ und $y' = \varphi(ax + by + c)$ sind spezielle Formen eines allgemeineren Typs von Dgln.:

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)} \tag{208}$$

Für diese Dgl. gibt es zwei verschiedene Lösungswege, je nachdem die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

gleich oder verschieden von Null ist.

a) $D = 0$ (aber $b^2 + \beta^2 \neq 0$, da sonst $b = \beta = 0$ wäre und damit bereits eine Dgl. mit trennbaren Variablen vorläge).

Die Determinante kann nur dann den Wert Null besitzen, wenn die Elemente der Zeilen einander proportional sind. Man kann also $\alpha = \lambda a$ und $\beta = \lambda b$ setzen, und es wird

$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by + c) + \gamma - \lambda c}.$$

Substituiert man

$$u = ax + by + c,$$

so erhält man wegen

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

die Dgl. mit trennbaren Variablen

$$\boxed{\frac{du}{dx} = a + b \cdot \varphi\left(\frac{u}{\lambda u + \gamma - \lambda c}\right)} \tag{208a}$$

BEISPIEL

3. $y' = \dfrac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 1}$.

Lösung: Es ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Substitution

$$u = x - 2y + 1; \quad y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 1} = \frac{u}{2u - 3}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx} = 1 - 2\frac{u}{2u - 3}.$$

Explizite Form

$$\frac{du}{dx} = -\frac{3}{2u - 3}.$$

Trennen der Variablen

$$(2u - 3)\,du = -3\,dx.$$

Integrieren

$$u^2 - 3u = -3x + C$$

$$(x - 2y + 1)^2 - 3(x - 2y + 1) + 3x - C = 0.$$

Lösung

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 2y + K = 0 \quad (K = -2 - C).$$

Die Probe kann durch implizites Differenzieren und Auflösen der Gleichung nach y' durchgeführt werden.

b) $D \neq 0$

Dann ist das Gleichungssystem

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

eindeutig lösbar. Die Lösungen seien x_0 und y_0.
Führt man neue Variable ξ und η durch

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta$$

ein, so wird wegen

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \varphi\left(\frac{ax_0 + by_0 + c + a\xi + b\eta}{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma + \alpha\xi + \beta\eta}\right) = \varphi\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \varphi\left(\frac{a + b\,\dfrac{\eta}{\xi}}{\alpha + \beta\,\dfrac{\eta}{\xi}}\right)} \tag{208 b}$$

Das ist eine Dgl. vom Typ $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, die nach dem hierfür erläuterten Verfahren gelöst werden kann. Aus η erhält man mit $y = y_0 + \eta$ die Lösung der vorgelegten Dgl.

24.5. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine lineare Dgl. 1. Ordnung besitzt die Form [vgl. 23.2., (202)]

$$g_1(x)\,y' + g_0(x)\,y = S(x) \qquad [g_1(x) \neq 0].$$

Dividiert man durch $g_1(x)$, so erhält man mit $\dfrac{g_0(x)}{g_1(x)} = g(x)$, $\dfrac{S(x)}{g_1(x)} = s(x)$ die Normalform der **inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung**

$$\boxed{y' + g(x)\,y = s(x)} \tag{209}$$

Im Falle $s(x) = 0$ liegt die **homogene lineare Dgl. 1. Ordnung** vor

$$\boxed{y' + g(x)\, y = 0} \tag{210}$$

Die homogene lineare Dgl. 1. Ordnung kann nach Trennen der Variablen gelöst werden.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x)\, y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -g(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int g(x)\, \mathrm{d}x + \ln|K|.$$

Damit wird die allgemeine Lösung der homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung

$$\boxed{y_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-\int g(x)\mathrm{d}x}} \tag{210a}$$

(Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. soll von der der inhomogenen Dgl. durch den Index h unterschieden werden, deshalb y_h.)
Die inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung besitzt im Gegensatz zur homogenen Dgl. ein Glied $s(x)$, das nur die Variable x enthält. Dieser Term $s(x)$ wird auch als Störfunktion bezeichnet. Der französische Mathematiker LAGRANGE hatte die Idee, die Integrationskonstante K in der allgemeinen Lösung der homogenen Dgl. durch einen Term mit der Variablen x zu ersetzen und diesen Term $K(x)$ so zu bestimmen, daß $y = K(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\mathrm{d}x}$ Lösung der inhomogenen Dgl. wird. Weil bei diesem Verfahren die Integrationskonstante durch einen Term mit einer Variablen ersetzt wird, spricht man von der **Variation von Konstanten.** Aus (210a) wird also

$$y = K(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\mathrm{d}x}.$$

Differenziert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = K'(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} - K(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Einsetzen in (209) ergibt

$$K'(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} - K(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} + g(x)\, K(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} = s(x)$$

$$K'(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x} = s(x)$$

$$K'(x) = s(x)\, \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Das ist eine nach Trennen der Variablen lösbare Dgl. Man erhält durch Integrieren

$$K(x) = \int s(x)\, \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Damit ist der Term $K(x)$ bestimmt. Setzt man ihn in den Ansatz

$$y = K(x)\, \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

ein, so erhält man mit

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int s(x)\, \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]} \tag{209a}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl., denn (209a) ist Lösung der inhomogenen Dgl. und enthält auch eine willkürliche Konstante. Zum Lösen der inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung sind also zwei Schritte mit insgesamt zwei Integrationen erforderlich:

1. Lösen der homogenen Dgl. durch Trennen der Variablen;
2. Lösen der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten.

Schreibt man die rechte Seite von (209a) als Summe, so ist bemerkenswert, daß der 2. Summand $C\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl., der 1. Summand $\mathrm{e}^{-\int g(x)\,\mathrm{d}x}\int s(x)\, \mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. (für $C = 0$) darstellt.
Was hier für die lineare Dgl. 1. Ordnung festgestellt wurde, gilt auch für die lineare Dgl. n-ter Ordnung.

Satz

Die allgemeine Lösung einer linearen Dgl. n-ter Ordnung setzt sich aus einer partikulären Lösung der Dgl. und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. zusammen.

BEISPIELE

1. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x \quad (x \neq 0)$

   Lösung:

   Homogene Dgl.

   $$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

   Trennen der Variablen

   $$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad (y \neq 0).$$

Integrieren

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|K|.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$y_h = \frac{K}{x}.$$

Variation der Konstanten

$$y = \frac{K(x)}{x}$$

$$y' = \frac{K'(x)\,x - K(x)}{x^2}.$$

Einsetzen in die Dgl.

$$\frac{K'(x)\,x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \sin x$$

$$\frac{K'(x)}{x} = \sin x.$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}K(x) = x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Integrieren

$$K(x) = \sin x - x\cos x + C.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$y = \frac{\sin x - x\cos x + C}{x}$$

$$y = \frac{C + \sin x}{x} - \cos x.$$

2. Ein Stromkreis mit dem ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Wechselspannungsquelle $e(t) = \hat{e}\sin\omega t$ wird zur Zeit $t = 0$ geschlossen (Bild 292). Wie ist der zeitliche Verlauf des Stromes?

Lösung: Der 2. KIRCHHOFFsche Satz ermöglicht den Ansatz der Dgl.:

$$u_R + u_L = e$$

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \hat{e}\sin\omega t.$$

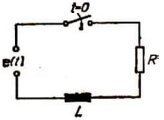


Bild 292

Dgl. des Stromkreises

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{\hat{e}}{L}\sin\omega t.$$

Homogene Dgl.

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t.$$

Integrieren

$$\ln|i| = -\frac{R}{L}\,t + \ln|K|.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{\underline{i_h = K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}}.$$

Lösungsansatz durch Variation der Konstanten

$$i = K(t)\ \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = K'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - K(t)\,\frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Einsetzen in die Dgl.

$$K'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - K(t)\,\frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}\,K(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\hat{e}}{L}\sin\omega t.$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}K(t) = \frac{\hat{e}}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t.$$

Integrieren

$$K(t) = \frac{\hat{e}}{L}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t\right) + C.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{\underline{i = \frac{\hat{e}}{R^2 + \omega^2 L^2}\,(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t) + C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}}.$$

Für den Einschaltvorgang gilt die Anfangsbedingung $t = 0,\ i = 0$.
Aus

$$0 = \frac{\hat{e}}{R^2 + \omega^2 L^2}\,(0 - \omega L) + C\mathrm{e}^0$$

läßt sich für C der Wert

$$C = \frac{\hat{e}\,\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

errechnen. Damit wird die partikuläre Lösung zu

$$i_p = \frac{\hat{e}}{R^2 + \omega^2 L^2}\,(\omega L\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t).$$

In einem Wechselstromkreis bestehen zwischen Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand die in Bild 293 dargestellten Beziehungen ($\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$ Phasenwinkel, R_s Scheinwiderstand). Ersetzt man außerdem den Quotienten $\frac{L}{R}$, der die Dimension einer Zeit hat, durch die Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$, so kann wegen

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \qquad R_s = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

die partikuläre Lösung in der Form

$$i_p = \frac{\hat{e}}{R_s}\left(\sin\varphi\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \cos\varphi \sin\omega t - \sin\varphi\cos\omega t\right)$$

geschrieben werden. Faßt man noch die beiden letzten Summanden in der Klammer mittels eines Additionstheorems zusammen, so wird

$$i_p = \frac{\hat{e}}{R_s}\left[\sin\varphi\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \sin(\omega t - \varphi)\right].$$

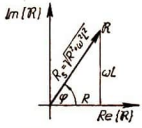


Bild 293

Für $t \to \infty$ geht der erste Summand der rechten Seite gegen Null. Dieser Anteil des Stromes wird deshalb auch als *flüchtiger Anteil*

$$i_{fl} = \frac{\hat{e}}{R_s}\sin\varphi\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

bezeichnet. Der Anteil

$$i_{st} = \frac{\hat{e}}{R_s}\sin(\omega t - \varphi)$$

heißt der *stationäre Anteil*. Er beschreibt den Stromverlauf nach Abklingen des Einschaltvorganges. Bild 294 zeigt den Verlauf von i, i_{fl} und i_{st}.

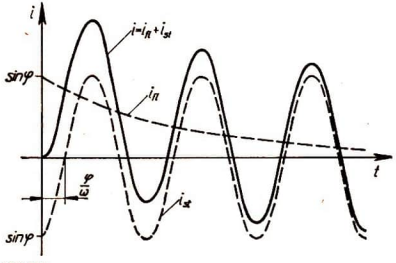


Bild 294

Bei Dgln., die einen technischen Sachverhalt zum Inhalt haben, kommt es nicht selten vor, daß man partikuläre Lösungen der Dgln. kennt. Dann kann ein Teil des Lösungsganges, insbesondere der sonst erforderlichen Integrationen, eingespart werden.
Mit $y_1 = f_1(x)$ liege eine partikuläre Lösung der homogenen, linearen Dgl. 1. Ordnung vor, d. h., es sei

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x)\, y_1 = 0.$$

Dann ist auch $C\, y_1 = C f_1(x)$, worin C eine Konstante ist, Lösung dieser Dgl.; denn es ist $\left(\text{da } \frac{dC y_1}{dx} = C \frac{dy_1}{dx}\right)$

$$C \frac{dy_1}{dx} + g(x)\, C\, y_1 = C \left(\frac{dy_1}{dx} + g(x)\, y_1\right) = 0.$$

Weil somit $C y_1 = C f_1(x)$ Lösung der Dgl. ist und eine willkürliche Konstante enthält, muß es die allgemeine Lösung sein. Es gilt also:

Ist von einer homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung eine partikuläre Lösung bekannt, so erhält man durch Multiplizieren mit einer Konstanten die allgemeine Lösung.

Ist $y_1 = f_1(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung, so kann nach Einführen einer neuen, von x abhängigen Variablen u die allgemeine Lösung mittels des Lösungsansatzes

$$y = y_1 + u$$

berechnet werden.
Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Nach Einsetzen in (209) erhält man

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} + g(x)\, y_1 + g(x)\, u = s(x).$$

Da vorausgesetzt wurde, daß y_1 partikuläre Lösung ist, muß

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x)\, y_1 = s(x)$$

sein. Damit vereinfacht sich die Dgl. zu

$$\frac{du}{dx} + g(x)\, u = 0,$$

also einer Dgl. mit trennbaren Variablen, aus der u bestimmt werden kann. Man erkennt:

Ist von einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung eine partikuläre Lösung bekannt, so genügt eine Integration, um die allgemeine Lösung zu finden.

Sind $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ zwei partikuläre Lösungen einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung, so muß gelten

$$\frac{dy_1}{dx} + g(x)\, y_1 = s(x)$$

und

$$\frac{dy_2}{dx} + g(x)\, y_2 = s(x).$$

Durch Subtrahieren der ersten Gleichung von der zweiten erhält man

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + g(x)\,(y_2 - y_1) = 0.$$

$y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$ ist also eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Wie oben dargelegt wurde, erhält man aus einer partikulären die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung durch Multiplizieren mit einer Konstanten. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung kann man nunmehr als Summe aus einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. ermitteln:

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Aus zwei partikulären Lösungen einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung kann die allgemeine Lösung ohne Integrationen bestimmt werden.

24.6. Auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführbare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die implizite Dgl. 2. Ordnung besitzt die allgemeine Form

$$\boxed{\Phi(x, y, y', y'') = 0} \tag{211}$$

die explizite Dgl. 2. Ordnung lautet

$$\boxed{y'' = \varphi(x, y, y')} \tag{212}$$

Im folgenden sollen diejenigen expliziten Dgln. 2. Ordnung behandelt werden, die sich auf Dgln. 1. Ordnung zurückführen lassen.

$y'' = \varphi(x)$

Dieser Typ ist durch zweimaliges Integrieren lösbar (vgl. 23.1., Weg-Zeit-Gesetz für den Wurf senkrecht nach oben).

BEISPIEL

1. Wie heißt die Gleichung der elastischen Linie eines Trägers auf zwei Stützen (Länge l), der mit einer konstanten Streckenlast q belastet ist (Bild 295)?

Lösung: Die Dgl. der elastischen Linie lautet (vgl. 23.2., Beisp. 3)

$$y'' = -\frac{M}{EI}.$$

Das Moment M im Abstand x errechnet sich aus der Gleichgewichtsbedingung für die Momente zu

$$M = \frac{q}{2}(lx - x^2).$$

Es ist also

$$y'' = -\frac{q}{2EI}(lx - x^2).$$

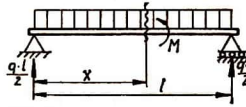


Bild 295

Zweimaliges Integrieren

$$y' = -\frac{q}{2EI}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1,$$

$$y = -\frac{q}{2EI}\left(l\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2.$$

An den Stellen $x = 0$ und $x = l$ muß $y = 0$ sein. Die beiden Bedingungen für das Belegen von C_1 und C_2 sind diesmal für zwei verschiedene Werte der unabhängigen Variablen vorgegeben. Man spricht in diesem Falle von *Randbedingungen*.

$x = 0,\ y = 0$ liefert $C_2 = 0$,

$x = l,\ y = 0$ liefert $C_1 = \frac{q}{24EI}l^3$.

Die Gleichung der elastischen Linie für den vorliegenden Belastungsfall lautet

$$y = \frac{q}{24EI}(l^3x - 2lx^3 + x^4).$$

$y'' = \varphi(y)$

Man multipliziert beide Seiten mit $2y'$

$$2y'y'' = 2\varphi(y)\,y',$$

denn dann kann auf der linken Seite $2y'y'' = \frac{\mathrm{d}(y'^2)}{\mathrm{d}x}$ gesetzt werden.

Aus

$$\frac{\mathrm{d}(y'^2)}{\mathrm{d}x} = 2\varphi(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}(y'^2) = 2\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

erhält man

$$y'^2 = 2\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y + C_1$$

$$y' = \pm\sqrt{2\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y + C_1}.$$

Damit ist die Dgl. 2. Ordnung auf eine Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen zurückgeführt worden.

BEISPIELE

2. $y'' = 2\mathrm{e}^y$; Anfangsbedingungen: $x = 0,\ y = 0,\ y' = -2$.

Lösung:

$$y'' = 2\mathrm{e}^y$$

$$2y'y'' = 4\mathrm{e}^y y'$$

$$\mathrm{d}(y'^2) = 4\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$$

$$y'^2 = 4\mathrm{e}^y + C_1.$$

$y = 0,\ y' = -2$:

$$C_1 = 0$$

$$y' = \pm 2\sqrt{\mathrm{e}^y}.$$

Wegen $y'|_{x=0} = -2$ scheidet das positive Vorzeichen auf der rechten Seite aus.

$$y' = -2\mathrm{e}^{\frac{y}{2}}$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y = -2\mathrm{d}x.$$

Integrieren

$$-2\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} = -2x + C_2.$$

$x = 0,\ y = 0$:

$$C_2 = -2$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} = 1 + x$$

$$-\frac{y}{2} = \ln(1+x)$$

$$y = -2\ln(1+x)$$

$$\underline{y = -\ln(1+x)^2}.$$

3. Schwingt in einer Ebene an einem Faden von der Länge l eine Masse m (die Masse des Fadens soll vernachlässigt werden), so spricht man von einem mathematischen Pendel. Es soll die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels berechnet werden.

Lösung: Zur Zeit t sei der Auslenkwinkel α (Bild 296).

Die Trägheitskraft tangential zur Bahn ist $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = ml\ddot{\alpha}$ (im folgenden sollen die Ableitungen nach der Zeit in der von NEWTON stammenden Schreibweise mit darübergesetzten Punkten dargestellt werden), sie wirkt im Abstand l vom Aufhängepunkt. Die Schwerkraft mg greift an einem Hebelarm $l\sin\alpha$ an. Die Momentengleichung bezüglich des Aufhängepunktes liefert die Dgl. der Pendelbewegung

$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\sin\alpha = 0.$$

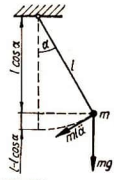


Bild 296

Vereinfacht

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0.$$

Mit $2\dot{\alpha}$ multipliziert

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -2\frac{g}{l}\dot{\alpha}\sin\alpha.$$

Integriert

$$\dot{\alpha}^2 = 2\frac{g}{l}\cos\alpha + C_1.$$

Bei der größten Auslenkung ist $\alpha = \alpha_{\max}$ und $\dot{\alpha} = 0$. Dies ergibt

$$C_1 = -2\frac{g}{l}\cos\alpha_{\max}.$$

$$\dot{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_{\max})}.$$

Betrachtet man nur den Ausschlag nach einer Seite, so kann eines der beiden Vorzeichen weggelassen werden. Den Radikanden formt man unter Verwendung der Beziehung $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ um.

$$\dot{\alpha} = 2\sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\sqrt{\dfrac{g}{l}\left(\sin^2\dfrac{\alpha_{\max}}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Die Integration führt auf ein elliptisches Integral, das durch Reihenentwicklung (vgl. Aufg. 734) gelöst werden kann, auf dessen Berechnung jedoch hier verzichtet werden soll. Für die Zeitdauer einer vollen Schwingung erhielte man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha_{\max}}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha_{\max}}{2} + \ldots\right).$$

Der aus der Physik bekannte Wert für die Schwingungsdauer ist ein Näherungswert, der sich durch Abbrechen der Reihe nach dem 1. Glied ergibt.
Die vollständige Berechnung soll unter der Voraussetzung kleiner Ausschlagwinkel α durchgeführt werden. Für kleine Winkel α gilt $\sin\alpha \approx \alpha$. Die Dgl. der Pendelbewegung vereinfacht sich damit zu

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\,\alpha$$

(damit ist die ursprünglich nichtlineare Dgl. linearisiert worden).

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -2\,\frac{g}{l}\,\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{\alpha}^2 = -\frac{g}{l}\,\alpha^2 + C_1.$$

Für die Anfangsbedingung $\alpha = \alpha_{\max}$, $\dot{\alpha} = 0$ wird

$$C_1 = \frac{g}{l}\,\alpha_{\max}^2$$

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{g}{l}\,(\alpha_{\max}^2 - \alpha^2).$$

Trennen der Variablen

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\alpha_{\max}^2 - \alpha^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\arcsin\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} + C_2.$$

$t = 0$, $\alpha = 0$ liefert

$$C_2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\arcsin\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}.$$

Bewegt sich das Pendel aus der Vertikallage bis zur größten Auslenkung, so wird $\alpha = \alpha_{\max}$ und $t = T/4$.

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\arcsin 1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.}}$$

$y'' = \varphi(y')$, $y'' = \varphi(x; y')$, $y'' = \varphi(y; y')$

In allen drei vorliegenden Fällen ist es möglich, die Dgl. mittels der Substitution

$$y' = \frac{dy}{dx} = u$$

$$y'' = \frac{du}{dx}$$

auf eine Dgl. 1. Ordnung zurückzuführen. Aus dieser wird zunächst u errechnet, anschließend durch eine zweite Integration y.

$y'' = \varphi(y')$

Die Substitution ergibt

$$\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

d. h. eine Dgl. 1. Ordnung mit trennbaren Variablen.

$y'' = \varphi(x; y')$

Durch die Substitution entsteht die Dgl. 1. Ordnung

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, u).$$

$y'' = \varphi(y; y')$

Kann vorausgesetzt werden, daß die 1. Ableitung der Lösung verschieden von Null ist, dann ist $y = f(x)$ eigentlich monoton, und es ist erlaubt die Substitution

$$y' = \frac{dy}{dx} = u$$

und

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$$

vorzunehmen. Damit wird aus der Dgl. $y'' = \varphi(y; y')$

$$\frac{du}{dy} u = \varphi(u; y).$$

Dies ist eine Dgl. 1. Ordnung mit u als abhängiger und y als unabhängiger Variabler, die auch in der Form

$$\frac{du}{dy} = \varphi(y; u)$$

geschrieben werden kann.

BEISPIELE

4. $y'' - y' = e^x$

Lösung: Mit $y' = u$, $y'' = \frac{du}{dx}$ wird die Dgl. zu

$$\frac{du}{dx} - u = e^x,$$

einer inhomogenen linearen Dgl. 1. Ordnung.

Homogene Dgl.

$$\frac{du}{dx} - u = 0.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{du}{u} = dx.$$

Integrieren

$$\ln|u| = x + \ln|K|.$$

Lösung der homogenen Dgl.

$$u_h = Ke^x.$$

Variation der Konstanten

$$u = K(x)\,e^x$$

$$\frac{du}{dx} = K'(x)\,e^x + K(x)\,e^x.$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$K'(x)\,e^x = e^x$$

$$K'(x) = 1$$

$$K(x) = x + C_1$$

$$u = (C_1 + x)e^x.$$

Rücksubstitution

$$\frac{dy}{dx} = (C_1 + x)\,e^x.$$

Integrieren

$$y = C_1e^x + xe^x - e^x + C_2 = e^x(x - 1 + C_1) + C_2.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{\underline{y = e^x(x + C_3) + C_2}}.$$

5. Für ein zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ausgespanntes Seil, das nur seinem Eigengewicht als Belastung unterworfen ist und keine Biegesteifigkeit aufweist, gilt die Dgl.

$$H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=q\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

(H Horizontalkomponente der Seilzugkraft, q Seilgewicht je Längeneinheit). Die vorgenannten Bedingungen sind bei einer Kette annähernd erfüllt, weshalb die Dgl. auch *Dgl. der Kettenlinie* heißt. Wie hängt der Ordinatenwert vom jeweiligen Abszissenwert x ab?

Lösung: Es liegt eine Dgl. vom Typ $y''=\varphi(y')$ vor. Setzt man $y'=u$ sowie $\frac{q}{H}=a$, so wird die Dgl. zu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a\sqrt{1+u^2}.$$

Trennen der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=a\,\mathrm{d}x.$$

Integrieren

$$\operatorname{arsinh}u=ax+C_1$$
$$u=\sinh(ax+C_1).$$

Nochmaliges Integrieren liefert als Lösung der Dgl.

$$y=\frac{1}{a}\cosh(ax+C_1)+C_2.$$

Die Integrationskonstanten können durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. Als Randbedingungen könnten z. B. die Koordinaten der Aufhängepunkte gegeben sein.

AUFGABEN

769. Wie heißt die Dgl. aller Tangenten an die Kurve mit der Gleichung $y=x^2$?

770. Von der Gleichung $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ausgehend soll die Dgl. aller Kreise aufgestellt werden (vgl. 23.3., Beispiel 3).

771. Gesucht ist die Dgl. der Kurvenschar mit der Gleichung $y=c^2/x$.

772. Wie heißt die Dgl. aller Kreise mit dem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen?

773. Die Dgl. aller Parabeln in der Ebene ist aufzustellen.

774. Gesucht ist die Gleichung der Kurven, für deren Tangenten gilt: Der Berührungspunkt teilt den durch die Schnittpunkte mit der y- und der x-Achse begrenzten Tangentenabschnitt im Verhältnis 1:2.

775. Die Dgl. aller Kurven, deren Subtangentenlänge das doppelte der Abszisse des Berührungspunktes ist, soll aufgestellt werden. Wie heißt die Gleichung der Kurven?

776. Mittels des Isoklinenverfahrens ist die durch den Punkt (1;1) gehende Lösungskurve der Dgl. $y'=\dfrac{x-y}{x}$ zu ermitteln.

777. Die Dgl. $T\dot{y}+y=K$ ist zu lösen ($t=0$, $y=0$). Wie groß ist y für $t\to\infty$? Wie groß ist y zur Zeit $t=T$? Zu welcher Zeit t (bezogen auf T) hat y 95% bzw. 99% von $y|_{t\to\infty}$ erreicht?

Man löse nach Trennen der Variablen:

778. $y' = \dfrac{x}{y}$

779. $y' = \dfrac{y}{x}$

780. $y' = \dfrac{e^x}{y}$

781. $xy' - ay' - y + b = 0$

782. $y' = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{y^2 - 9}$

783. $y' - xy + x\sqrt{y} = 0$

784. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = 0$

785. $\sqrt{a^2 - x^2}\, y' - x^2 \sqrt{(a^2 + y^2)^3} = 0$

786. Die Dgl. $y' \sin x = y \ln y$ ist zu lösen. Wie lautet die partikuläre Lösung, für die $x = \pi/2$, $y = 1$ gilt?

Für die Dgln. 787 bis 792 sind die partikulären Lösungen zu ermitteln, die die angegebenen Anfangsbedingungen erfüllen.

787. $\dfrac{y'}{x \sin x} + \dfrac{1}{y} = 0 \quad x = \pi, y = 11$

788. $y' y^3 + x^2 - 1 = 0 \quad x = 2, y = 1$

789. $y'(1 - x^2) - 1 - 2y^2 = 0 \quad x = \dfrac{1}{3}, y = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

790. $y'(2 + 3x) - 2(3 + 4y^2) = 0 \quad x = 110, y = 1{,}95$

791. $y'(x^2 - 28x + 160) - \dfrac{6}{y} = 0 \quad x = 40, y = 1{,}045$

792. $y'(1 + 11x^2) - \dfrac{1}{y} = 0 \quad x = \sqrt{11}, y = 16$

Die Dgln. 793 bis 798 sind durch Substitution zu lösen.

793. $y' = x - y$

794. $y' = x + y$

795. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

796. $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$

797. $y' = \dfrac{x^2 + 5y^2}{3xy}$

798. $y' = \dfrac{2x - 3y + 1}{6x - 9y - 1}$

799. Für ein System mit einfacher Speicherwirkung gilt die Dgl. $T\dot{x}_a + x_a = Kx_e$ (x_a Ausgangsgröße, x_e Eingangsgröße, T Zeitkonstante, K proportionaler Übertragungsfaktor mit $[K] = \dfrac{[x_a]}{[x_e]}$). Wie ändert sich die Ausgangsgröße x_a in Abhängigkeit von der Zeit t, wenn $x_e = ct$ ist ($c = \text{const.}$)?

800. $y' - xy + 2x = 0$

801. $y' + 2y = e^{3x}$

802. $y' - 2xy + e^{x^2} = 0$

803. $y' - y \tan x + \sin x = 0$

804. $y' = \dfrac{y}{\sin x \cos x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

805. $y' + 3xy - 2e^{-\frac{3}{2}x^2 - 4x} = 0 \quad x = 2, \ y = 40$

806. $y' - 2y + x = 0 \quad x = 0, y = 20$

807. $xy' + 2y = 3x^2 - 2x + 4 \quad x = 1, y = \dfrac{1}{12}$

808. $y' + y + e^x = 0 \quad x = 1, y = 0$

Die folgenden Dgln. 2. Ordnung sind auf Dgln. 1. Ordnung zurückzuführen und zu lösen.

809. $y'' + y = 0$

810. $y'' + y' = e^x$

811. $y'' + y = x^2$

812. $y'' + 2y = e^{ax}$

813. $y'' - y = e^x$

814. $y'' - y = -x \qquad x = 1 \begin{cases} y = 3 \\ y' = 5 \end{cases}$

815. $y'' - 10y' + x^2 = 0 \qquad x = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$

816. $y'' - 5y + 3x - 8 = 0 \qquad x = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y' = 3 \end{cases}$

817. $y'' + 3y' - 6x + 5 = 0 \qquad x = -1 \begin{cases} y = 1 \\ y' = 2 \end{cases}$

818. $y'' + y + x^2 + 6 = 0 \qquad \begin{matrix} x = 0, & y = 0 \\ x = \pi, & y' = 0 \end{matrix}$

819. Für einen Träger auf zwei Stützen mit der Länge l ist die Gleichung der elastischen Linie für folgende Belastungsfälle zu ermitteln:

a) Mittellast, $M = \dfrac{Fx}{2}$

b) Dreieckslast, $M = \dfrac{Fl}{3}\left[\dfrac{x}{l} - \left(\dfrac{x}{l}\right)^3\right]$.

25. Lineare Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

25.1. Einführen eines linearen Differentialoperators

Eine lineare Dgl. n-ter Ordnung besitzt die allgemeine Form (202)

$$g_n(x)\, y^{(n)} + g_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)\, y' + g_0(x)\, y = S(x).$$

Im folgenden sollen ausschließlich solche lineare Dgln. behandelt werden, in denen alle $g_i(x)$ konstante reelle Zahlen sind. Dividiert man die vorstehende Dgl. noch durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung, so erhält man mit $\dfrac{g_i}{g_n} = a_i$, $\dfrac{S(x)}{g_n} = s(x)$ als allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = s(x), \quad a_i \in R} \tag{213}$$

Im Falle $s(x) \equiv 0$ heißt die Dgl. homogen, für $s(x) \neq 0$ inhomogen.

Zum Bilden der linken Seite von (213) werden folgende Operationen angewendet:

a) n-maliges Ableiten einer Funktion f: $y = f(x)$ und Bestimmen der Funktionswerte $y, y', \ldots, y^{(n)}$;

b) Multiplizieren mit den Koeffizienten a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$;

c) Addieren der Produkte.

Das Ergebnis der Anwendung dieser Operationen auf eine Funktion $f\colon y = f(x)$ soll durch einen Operator L_n bezeichnet werden, d. h., es wird vereinbart

$$\boxed{L_n[y] \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y} \tag{214}$$

L_n heißt **linearer Differentialoperator**, $L_n[y]$ ein *linearer Differentialterm*.

Der lineare Differentialoperator besitzt folgende Eigenschaften:

1. Sind y_1 und y_2 die Funktionswerte zweier beliebiger, im betrachteten Intervall stetiger und n-mal differenzierbarer Funktionen $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$, so ist

$$\boxed{L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]} \tag{215}$$

Gemäß der Definition des Operators muß nämlich gelten

$$\begin{aligned} L_n[y_1 + y_2] &= (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots + \\ &\quad + a_1(y_1 + y_2)' + a_0(y_1 + y_2) = \\ &= y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 + \\ &\quad + y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_2' + a_0 y_2 = \\ &= L_n[y_1] + L_n[y_2]. \end{aligned}$$

Wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann, gilt die Beziehung (215) für beliebig viele Summanden.

2. Ist y_1 der Funktionswert einer beliebigen, im betrachteten Intervall stetigen und n-mal differenzierbaren Funktion $y_1 = f_1(x)$ und C eine Konstante, so ist

$$\boxed{L_n[Cy_1] = CL_n[y_1]} \tag{216}$$

denn es gilt

$$L_n[Cy_1] = Cy_1^{(n)} + Ca_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + Ca_1 y_1' + Ca_0 y_1 = CL_n[y_1].$$

Mit Hilfe der Relationen (215) und (216) ist es nunmehr möglich, die Richtigkeit folgender, für das Lösen von linearen Dgln. wichtiger Sätze zu beweisen:

Satz

Sind $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ Lösungen einer homogenen linearen Dgl., so ist auch $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ eine Lösung.

Beweis: Sind $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ Lösungen der Dgl. $L_n[y] = 0$, so ist $L_n[y_1] = 0$ und $L_n[y_2] = 0$. Wegen Gl. (215) wird dann aber auch $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] = 0$.

Satz

Ist $y_1 = f_1(x)$ Lösung einer homogenen linearen Dgl., so ist auch $Cy_1 = Cf_1(x)$ eine Lösung.

Beweis: Nach Gl. (216) ist $L_n[Cy_1] = CL_n[y_1]$. Da $y_1 = f_1(x)$ Lösung sein soll, muß $L_n[y_1] = 0$ und damit auch $L_n[Cy_1] = 0$ gelten.

Aus den vorstehenden beiden Sätzen folgt:

Liegen mit $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ n wesentliche[1]), voneinander nicht abhängige[2]) Lösungen einer homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung vor, so kann mit $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \cdots + C_ny_n$ die allgemeine Lösung angegeben werden.

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ ist nämlich nach der Aussage der obenstehenden beiden Sätze Lösung der Dgl.; da diese Lösung n Konstanten enthält, ist es die allgemeine Lösung.

Ist eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen x in der Form $y = f(x) = u(x) + \mathrm{j}\,v(x)$ Lösung einer homogenen linearen Dgl., so sind auch $y_1 = u(x)$ und $y_2 = v(x)$ Lösungen der Dgl.

Beweis: Ist $y = f(x)$ Lösung der Dgl., so muß $L_n[y] = L_n[u(x) + \mathrm{j}\,v(x)] = 0$ sein. Wegen (215) gilt dann auch $L_n[u(x) + \mathrm{j}\,v(x)] = L_n[u(x)] + \mathrm{j}\,L_n[v(x)] = 0$. Diese Gleichung wird aber nur durch $L_n[u(x)] = 0$ und zugleich $L_n[v(x)] = 0$ erfüllt, d. h., wenn $y_1 = u(x)$ und $y_2 = v(x)$ Lösungen der Dgl. sind.

BEISPIEL

Mit $y_1 = \mathrm{e}^x$ und $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$ liegen zwei Lösungen der Dgl. $y'' - y = 0$ vor. Wie heißt die allgemeine Lösung?

Lösung: Wie obenstehend bewiesen wurde, müssen auch $y = C_1\,\mathrm{e}^x$ und $y = C_2\,\mathrm{e}^{-x}$ Lösungen sein. Die allgemeine Lösung erhält man dann als Linearkombination der beiden Lösungen

$$\underline{\underline{y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}.}}$$

Probe: Es wird

$$y' = C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x}$$

$$y'' = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$$

$$y'' - y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - (C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}) = 0.$$

25.2. Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Wie in 25.1. dargelegt wurde, genügt für das Lösen der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$\boxed{y'' + a_1y' + a_0y = 0} \tag{217}$$

[1]) Wie leicht nachzuprüfen ist, besitzt jede homogene lineare Dgl. die triviale Lösung $y = 0$. Diese soll nicht als wesentliche Lösung gelten

[2]) Sind z. B. $y_1 = 1$ und $y_2 = \sin^2 x$ Lösungen einer Dgl., so ist $y_3 = \cos 2x$ keine unabhängige Lösung, da sie wegen $\cos 2x = 2\sin^2 x - 1$ eine Linearkombination der beiden erstgenannten Lösungen darstellt

zwei partikuläre, voneinander unabhängige Lösungen zu finden. Wie im folgenden gezeigt wird, ist dies allein mit Hilfe elementarer Funktionen und durch algebraische Operationen, also ohne Integrationen, möglich.
Eine elementare Funktion, die die Dgl. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ erfüllen soll, muß nach Einsetzen des Funktionswertes und der Werte der Ableitungen in die Dgl. eine Summe gleichartiger Glieder ergeben, die identisch Null sein kann. Eine Funktion, deren Ableitungswerte einander und auch dem Funktionswert selbst proportional sind, ist die Exponentialfunktion.

Zum Lösen einer homogenen linearen Dgl. verwendet man den Ansatz

$$y = e^{kx}$$

und bestimmt die Konstante k so, daß $y = e^{kx}$ die Dgl. erfüllt.

Aus $y = e^{kx}$ folgt $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Dies in die Dgl. (217) eingesetzt, ergibt

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_0) = 0.$$

Da e^{kx} für alle Werte der Variablen x verschieden von Null ist, muß

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_0 = 0} \tag{218}$$

sein. Man nennt (218) die der Dgl. (217) zugeordnete **charakteristische Gleichung.** (Wie man bemerkt, kann man die charakteristische Gleichung aus der Dgl. dadurch erhalten, daß man die Werte der Ableitungen durch Potenzen von k gleicher Ordnung ersetzt.)
Aus der charakteristischen Gleichung errechnet man für k die Werte

$$\boxed{k_{1;2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}} \tag{218a}$$

Je nachdem die Diskriminante $\frac{a_1^2}{4} - a_0$ größer, gleich oder kleiner Null ist, sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. *k_1 und k_2 sind reell und voneinander verschieden* $\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0\right)$.

   Dann sind nach 25.1. $y_1 = C_1 e^{k_1 x}$ und $y_2 = C_2 e^{k_2 x}$ Lösungen der Dgl. (217), und die allgemeine Lösung lautet

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}} \tag{219a}$$

2. *k_1 und k_2 sind gleich.*

   Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0$ ist. Wegen $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2}$ ergäbe sich nur eine unabhängige Lösung $y = Ce^{kx}$. Die allgemeine Lösung kann hier mit

Hilfe der *Variation der Konstanten* bestimmt werden:

$$y = C(x)\,e^{kx}$$

$$y' = C'(x)\,e^{kx} + C(x)\,k\,e^{kx} = e^{kx}[C'(x) + kC(x)]$$

$$y'' = C''(x)\,e^{kx} + C'(x)\,k\,e^{kx} + C'(x)\,k\,e^{kx} + C(x)\,k^2 e^{kx} =$$
$$= e^{kx}[C''(x) + 2kC'(x) + k^2 C(x)].$$

Die Terme für y, y' und y'' in die Dgl. (217) eingesetzt, liefert die Dgl.

$$e^{kx}[C''(x) + (2k + a_1)\,C'(x) + (k^2 + a_1 k + a_0)\,C(x)] = 0.$$

Wegen $e^{kx} \neq 0$, $k = -\frac{a_1}{2}$ und $a_0 = \frac{a_1^2}{4}$ folgt daraus

$$C''(x) = 0$$

$$C(x) = C_1 x + C_2.$$

Führt man noch $-\delta = -\frac{a_1}{2} = k$ ein, so ergibt sich als allgemeine Lösung der Dgl.

$$\boxed{y = (C_1 x + C_2)\,e^{-\delta x}} \tag{219b}$$

3. *k_1 und k_2 sind konjugiert-komplex* $\left(\frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0\right)$.

Mit $\frac{a_1}{2} = \delta$ und $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$ wird

$$k_1 = -\delta + \mathrm{j}\,\omega$$

$$k_2 = -\delta - \mathrm{j}\,\omega.$$

Die Lösung der Dgl. kann somit in der Form

$$y = C_1 e^{(-\delta + \mathrm{j}\omega)x} + C_2 e^{(-\delta - \mathrm{j}\omega)x} =$$
$$= e^{-\delta x}(C_1 e^{\mathrm{j}\omega x} + C_2 e^{-\mathrm{j}\omega x})$$

geschrieben werden. Mit Hilfe der Beziehungen $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$ und $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$ läßt sich die Lösung umformen zu

$$y = e^{-\delta x}[C_1(\cos \omega x + \mathrm{j}\sin \omega x) + C_2(\cos \omega x - \mathrm{j}\sin \omega x)] =$$
$$= e^{-\delta x}[(C_1 + C_2)\cos \omega x + \mathrm{j}(C_1 - C_2)\sin \omega x].$$

Wie in 25.1. gezeigt wurde, müssen Realteil und Imaginärteil dieser Lösung selbst Lösung der Dgl. sein. Setzt man noch $C_1 + C_2 = A$ und $C_1 - C_2 = B$ und bildet aus Realteil und Imaginärteil eine neue Lösung, so erhält man diese in der Form

$$\boxed{y = e^{-\delta x}(A\cos \omega x + B\sin \omega x)} \tag{219c}$$

BEISPIELE

1. Die Dgl. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ist für $a_1 = 4$ und
   a) $a_0 = 3$ b) $a_0 = 4$ c) $a_0 = 5$ zu lösen.

Lösung:

a) $y'' + 4y' + 3y = 0.$

Charakt. Gleichung

$$k^2 + 4k + 3 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -3.$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}}}$$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

Charakt. Gleichung

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = k_2 = k = -2.$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{y = e^{-2x}(C_1 x + C_2)}}.$$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0.$

Charakt. Gleichung

$$k^2 + 4k + 5 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = -2 + j, \; k_2 = -2 - j$$

$$y = e^{-2x}(C_1 e^{jx} + C_2 e^{-jx}).$$

Allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)}}.$$

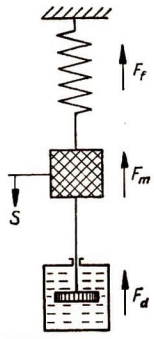


Bild 297

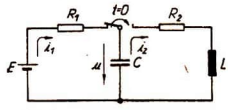


Bild 298

2. Eine Masse sei an einer elastischen Feder aufgehängt und starr mit einem in einer Flüssigkeit eingetauchten Dämpfungskolben verbunden (Bild 297).
   a) Die Dgl. der Bewegung der Gesamtmasse nach einmaligem Auslenken aus der Ruhelage ist aufzustellen.
   Das elektrische Analogon zu diesem Problem stellt der Reihenschwingungskreis dar (Bild 298), der zur Zeit $t = 0$ geschlossen wird.
   b) Das Strom-Zeit-Gesetz des Reihenschwingungskreises ist ebenfalls durch eine Dgl. anzugeben.
   c) Die Dgln. aus a) und b) sind unter Berücksichtigung der Annahme, der Dämpfungszylinder sei nicht vorhanden (Reibungskraft $F_d = 0$) bzw. der ohmsche Widerstand sei nicht vorhanden ($R = 0$), zu lösen: *ungedämpfte freie Schwingung.*

d) Die grundsätzlich möglichen Lösungen der Dgln. für $F_d \neq 0$ bzw. $R \neq 0$ sind zu ermitteln und zu diskutieren: *gedämpfte freie Schwingung.*

Lösung:

a) Bei einer Abwärtsbewegung der Masse tritt eine nach oben gerichtete Federkraft auf, die proportional der Auslenkung ist

$$F_f = fs \quad (f \text{ Federkonstante}),$$

außerdem eine geschwindigkeitsproportionale Reibungs- bzw. Dämpfungskraft

$$F_d = d\dot{s} \quad (d \text{ Dämpfungsfaktor}).$$

Die der Bewegung entgegengesetzt, also ebenfalls nach oben gerichtete Massenträgheitskraft ist

$$F_m = m\ddot{s} \quad (m \text{ Gesamtmasse}).$$

Die Gleichgewichtsbedingung liefert die Dgl.

$$m\ddot{s} + d\dot{s} + fs = 0$$

$$\ddot{s} + \frac{d}{m}\dot{s} + \frac{f}{m}s = 0,$$

eine homogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

b) Der Kondensator sei bis zur Zeit $t = 0$ durch den Strom i_1 aufgeladen worden. Die Spannung am Kondensator sei dann u_C. Wird zur Zeit $t = 0$ der Reihenschwingungskreis geschlossen, so beginnt ein Entladevorgang des Kondensators mit einem Stromfluß der Stärke i_2. Das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz ermöglicht den Ansatz

$$-u_C + i_2 R_2 + u_L = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung einmal nach der Zeit und setzt $u_C = u$, $i_2 = i$, so erhält man wegen $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ und $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0.$$

Dies ist wiederum eine homogene lineare Dgl. 2. Ordnung.

c) Nimmt man die Bewegung reibungsfrei an bzw. den ohmschen Widerstand mit Null (beides ist real nicht voll zu verwirklichen), so vereinfachen sich die beiden Dgln. zu

$$\ddot{s} + \frac{f}{m}s = 0$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}i = 0.$$

Da beide Gleichungen dieselbe Gestalt haben, genügt es, für eine die allgemeine Lösung zu bestimmen. Nimmt man die Dgl. der mechanischen Schwingung und setzt noch $\dfrac{f}{m} = \omega_0^2$, so erhält man

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung $k^2 + \omega_0^2 = 0$ hat die Lösungen $k_1 = \mathrm{j}\omega_0$ und $k_2 = -\mathrm{j}\omega_0$.
Damit ergibt sich für die Lösung der Dgl.

$$s = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} = C_1(\cos\omega_0 t + \mathrm{j}\sin\omega_0 t) + C_2(\cos\omega_0 t - \mathrm{j}\sin\omega_0 t).$$

Wie in 25.1. gezeigt wurde, kann aus Real- und Imaginärteil eine neue Lösung kombiniert werden. Mit $C_1 + C_2 = A$, $C_1 - C_2 = B$ lautet somit die allgemeine Lösung der Dgl.

$$s = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Ersetzt man noch A und B mittels der Substitutionen $A = K\sin\varphi$ und $B = K\cos\varphi$ durch die Konstanten K und φ, so erhält man nach Anwenden eines Additionstheorems als allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{s = K\sin(\omega_0 t + \varphi).}}$$

Dies ist die Gleichung einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude K, der Kreisfrequenz ω_0 und dem Phasenwinkel φ. Sowohl die Masse m des mechanischen Systems als auch der Strom i im Reihenschwingungskreis würden im angenommenen Falle eine harmonische Schwingung ausführen. $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$ bzw. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ heißt auch *Kennkreisfrequenz* (Eigenfrequenz des ungedämpften Systems).
Die Konstanten K und φ können auf Grund der Anfangsbedingungen berechnet werden. Im mechanischen System gilt: $t = 0$, $s = s_0$, $\dot{s} = v_0$.
Aus

$$s = K\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad \dot{s} = \omega_0 K\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

folgt

$$s_0 = K\sin\varphi \qquad v_0 = \omega_0 K\cos\varphi$$

$$K = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{\omega_0 s_0}{v_0}.$$

Damit erhält man als partikuläre Lösung

$$s = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\,\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\omega_0 s_0}{v_0}\right).$$

Für den Reihenschwingungskreis heißt die allgemeine Lösung der Dgl.

$$i = K\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Hier gelten die Anfangsbedingungen $t = 0$: $i = 0$, $u = u_C = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Durch Ableiten der Lösung der Dgl. bekommt man

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_0 K\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Die Lösung und die vorstehende Gleichung liefern nach Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\varphi = 0, \qquad K = \frac{u}{\omega_0 L}.$$

Die den Anfangsbedingungen gehorchende partikuläre Lösung ist

$$i = \frac{u}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t.$$

d) Ist $F_d \neq 0$ bzw. $R \neq 0$, so verläuft der Schwingungsvorgang gedämpft. Die Dgln. sind jetzt in der Form

$$\ddot{s} + \frac{d}{m}\dot{s} + \frac{f}{m} s = 0$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0$$

anzusetzen.

Statt dieser soll im folgenden mit der Dgl.

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

gerechnet werden (im mechanischen Beispiel ist $y = s$, $2\delta = \frac{d}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$, im elektrischen Beispiel $y = i$, $2\delta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$).

Die charakteristische Gleichung

$$k^2 + 2\delta k + \omega_0^2 = 0$$

hat die Lösungen

$$k_{1;2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Je nachdem $\delta < \omega_0$, $\delta = \omega_0$ oder $\delta > \omega_0$ ist, ergeben sich verschiedene Lösungen der Dgl. Die Berechnung dieser Lösungen soll unter Verwendung der in der Technik verwendeten Kenngröße, des **Dämpfungsgrades**

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

erfolgen.

α) $0 < D < 1$, d. h. $\delta < \omega_0$.

Dies ist der Fall, wenn im mechanischen System die Dämpfung oder im Reihenschwingungskreis der ohmsche Widerstand relativ klein ist $\left(d < 2\sqrt{f m}\right.$ bzw. $\left. R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$. k_1 und k_2 sind konjugiert-komplex:

$$k_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

oder, mit

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

$$k_1 = -\delta + \mathrm{j}\omega_e, \quad k_2 = -\delta - \mathrm{j}\omega_e.$$

Als allgemeine Lösung der Dgl. ergibt sich durch Kombination von Real- und Imaginärteil

$$y = e^{-\delta t}[C_1 e^{i\omega_e t} + C_2 e^{-i\omega_e t}] =$$

$$= e^{-\delta t}[A \cos \omega_e t + B \sin \omega_e t] \qquad (A = C_1 + C_2,\ B = C_1 - C_2)$$

$$y = e^{-\delta t} K \sin(\omega_e t + \varphi) \qquad \left(K = \sqrt{A^2 + B^2},\ \varphi = \arctan \frac{A}{B}\right).$$

Das System führt eine gedämpfte Schwingung aus. Die Amplituden $K \cdot e^{-\delta t}$ ändern sich in Abhängigkeit von t. $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ ist die Eigenfrequenz der freien Schwingung des gedämpften Systems, die um so mehr von der Kennkreisfrequenz ω_0 abweicht, je größer der Dämpfungsgrad D ist. Wegen $\omega_e < \omega_0$ ist die Schwingungsdauer T des gedämpften Systems stets größer als die Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften Systems (Bild 299a).

Für das mechanische System lautet die allgemeine Lösung der Dgl.

$$s = e^{-\frac{d}{2m}t} K \sin\left(\sqrt{\frac{l}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}\, t + \varphi\right),$$

für das elektrische

$$i = e^{-\frac{R}{2L}t} K \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t + \varphi\right).$$

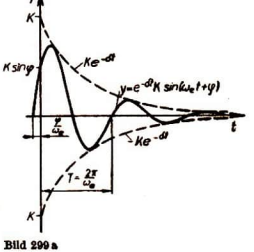


Bild 299a

$\beta)$ $D = 1$, d. h. $\delta = \omega_0$.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$k_1 = k_2 = -\delta.$$

Nach (219b) heißt dann die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\underline{\underline{y = (C_1 t + C_2) e^{-\delta t}}},$$

bzw. für das mechanische System

$$s = (C_1 t + C_2) e^{-\frac{d}{2m}t}$$

und für den Reihenschwingungskreis

$$i = (C_1 t + C_2) e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

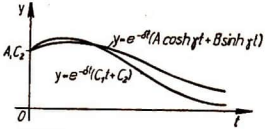


Bild 299b

Die Systeme führen keine Schwingungen, d. h. periodische Bewegungen, mehr aus. Wie man zeigen kann, hat die Funktion $y = (C_1 x + C_2) e^{-\delta t}$ höchstens eine Nullstelle (wenn $C_1 \neq 0$) und einen Extremwert. Der Fall $D = 1$ trennt die für $D > 1$ aperiodisch verlaufenden Vorgänge von den periodischen (für $0 < D < 1$), man nennt ihn deshalb den **aperiodischen Grenzfall** (Bild 299b).

$\gamma)$ $D > 1$, d. h. $\delta > \omega_0$.

Das schwingungsfähige System ist stark gedämpft. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$k_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},\quad k_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Mit $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ kann man die allgemeine Lösung der Dgl. in der Form

$$y = \mathrm{e}^{-\delta t}(C_1 \mathrm{e}^{\gamma t} + C_2 \mathrm{e}^{-\gamma t})$$

oder auch, mit $C_1 + C_2 = A$ und $C_1 - C_2 = B$,

$$\underline{y = \mathrm{e}^{-\delta t}(A \cosh \gamma t + B \sinh \gamma t)}$$

schreiben. Diese Funktion besitzt ebenfalls höchstens eine Nullstelle (wenn $C_1 \neq 0$ und $C_2 \neq 0$ sowie $C_1 C_2 < 0$) und einen Extremwert. Der durch diese Funktion beschriebene aperiodische Vorgang heißt der **Kriechfall** (Bild 299b).
Für die mechanische Schwingung nimmt die Lösung die Gestalt

$$s = \mathrm{e}^{-\frac{d}{2m}t}\left(A \cosh \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{f}{m}}\, t + B \sinh \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{f}{m}}\, t\right)$$

an, für den Reihenschwingungskreis

$$i = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left(A \cosh \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\, t + B \sinh \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\, t\right).$$

In allen drei betrachteten Fällen können die den technischen Problemstellungen entsprechenden partikulären Lösungen ermittelt werden, indem man die zu den Anfangsbedingungen gehörenden Werte für C_1 und C_2 bzw. A und B bestimmt.

25.3. Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Jede inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann in der Form

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x)} \tag{220}$$

geschrieben werden.
Wie bereits in 24.5. ausgeführt wurde, setzt sich die allgemeine Lösung einer linearen Dgl. n-ter Ordnung aus der allgemeinen Lösung (y_h) der zugehörigen homogenen Dgl. und einer partikulären Lösung (y_p) der inhomogenen Dgl. zusammen:

$$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}.$$

Damit ist — da der Lösungsweg bei einer homogenen linearen Dgl. bereits bekannt ist — für das Lösen einer inhomogenen linearen Dgl. nur noch erforderlich, ein Verfahren zum Bestimmen einer partikulären Lösung bereitzustellen. Dieses ist für den allgemeinen Fall das Verfahren der Variation der Konstanten. Bei gewissen speziellen Formen der Störfunktion $s(x)$ kann jedoch eine partikuläre Lösung wesentlich einfacher, ohne das (allgemeingültige) Verfahren der Variation der Konstanten anwenden zu müssen, gefunden werden. Der Vorteil dieses Weges besteht darin, daß er keine Integrationen erfordert. Dabei wird u. U. der folgende Satz angewendet werden müssen.

Satz

Besitzt eine inhomogene lineare Dgl. die Form

$$L_n[y] = s_1(x) + s_2(x)$$

und ist y_{p1} eine partikuläre Lösung der Dgl. $L_n[y] = s_1(x)$, y_{p2} eine partikuläre Lösung der Dgl. $L_n[y] = s_2(x)$, so ist

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

eine partikuläre Lösung der Dgl. $L_n[y] = s_1(x) + s_2(x)$.

Beweis: Nach (215) ist

$$L_n[y_{p1} + y_{p2}] = L_n[y_{p1}] + L_n[y_{p2}].$$

Wegen

$$L_n[y_{p1}] \equiv s_1(x) \quad \text{und} \quad L_n[y_{p2}] \equiv s_2(x)$$

ist auch

$$L_n[y_{p1} + y_{p2}] \equiv s_1(x) + s_2(x)$$

bzw.

$$L_n[y_p] \equiv s_1(x) + s_2(x),$$

was zu beweisen war.

Im weiteren sollen nun Dgln. mit folgenden Formen der Störfunktion gelöst werden:

$$s(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$$

[$P_m(x)$ ein Polynom m-ten Grades in x]

$$s(x) = P_{m1}(x) \cos \beta x + P_{m2}(x) \sin \beta x$$

[$P_{m1}(x)$ und $P_{m2}(x)$ zwei Polynome in x von höchstens m-tem Grad].

In beiden Fällen ist es möglich, eine partikuläre Lösung mittels eines Lösungsansatzes zu ermitteln. Die Richtigkeit der partikulären Lösung kann durch die Probe nachgewiesen werden.

$s(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$

mit

$$P_m(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m$$

Lösungsansatz:

$$y_p = B_m(x)\, e^{\alpha x}$$

mit

$$B_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,$$

wenn α nicht Lösungswert der charakteristischen Gleichung der zugehörigen homogenen Dgl. ist. Der Grad des Polynoms $B_m(x)$ ist der gleiche wie der des Polynoms $P_m(x)$ in der Störfunktion.

$$y_p = x^q B_m(x)\, e^{\alpha x},$$

wenn α der Wert einer q-fachen Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sind durch Koeffizientenvergleich nach Einsetzen von $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ in die zu lösende inhomogene lineare Dgl. $L_n[y] = s(x)$ zu bestimmen.

BEISPIELE

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1.$

Lösung:

Homogene Dgl.

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Charakt. Gleichung

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.}}$$

Mit $s(x) = 2x + 1$ liegt ein besonders einfacher Fall vor, da die Störfunktion nur ein Polynom in x ist, d. h., der Lösungsansatz $y_p = B_m(x)e^{\alpha x}$ vereinfacht sich mit $\alpha = 0$ und $m = 1$ zu

$$y_p = b_0 + b_1 x \quad \text{(denn } \alpha = 0 \text{ ist nicht Lösung der charakt. Gleichung)}$$

$$y_p' = b_1$$

$$y_p'' = 0.$$

In die Dgl. eingesetzt

$$0 - 3b_1 + 2(b_0 + b_1 x) = 2x + 1$$

$$2b_1 x + (2b_0 - 3b_1) = 2x + 1.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$b_1 = 1, \quad b_0 = 2.$$

Also ist

$$\underline{\underline{y_p = x + 2.}}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. erhält man mit $y = y_h + y_p$ zu

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2.}}$$

2. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$

Lösung:

Da die zugehörige homogene Dgl. die gleiche wie in Beisp. 1 ist, gilt

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.}}$$

Mit $s(x) = e^{3x}$ und weil $\alpha = 3$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Lösungsansatz

$$y_p = B_0(x)e^{\alpha x}$$
$$y_p = b_0 e^{3x}$$
$$y_p' = 3b_0 e^{3x}$$
$$y_p'' = 9b_0 e^{3x}.$$

In die Dgl. eingesetzt

$$9b_0 e^{3x} - 3 \cdot 3b_0 e^{3x} + 2b_0 e^{3x} = e^{3x}$$
$$b_0 = \frac{1}{2}$$
$$y_p = \frac{1}{2} e^{3x}$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

3. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x}$.

Lösung:
Auch hier ist wiederum

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$y_p = (b_0 + b_1 x)e^{3x}$$
$$y_p' = (3b_1 x + b_1 + 3b_0)e^{3x}$$
$$y_p'' = (9b_1 x + 6b_1 + 9b_0)e^{3x}.$$

Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich ergeben

$$b_1 = 1, \quad b_0 = -\frac{3}{2}$$
$$y_p = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{3x}$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{3x}.$$

4. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Lösung:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Der Wert $\alpha = 2$ in $s(x) = e^{2x} = P_m(x)e^{\alpha x}$ ist (einfache) Lösung der charakteristischen Gleichung der homogenen Dgl. Also muß der Lösungsansatz in der Form $y_p = xB_0(x)e^{2x}$ erfolgen

$$y_p = xb_0 e^{2x}$$
$$y_p' = b_0 e^{2x} + 2b_0 x e^{2x}$$
$$y_p'' = 4b_0 e^{2x} + 4b_0 x e^{2x}.$$

Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich liefert

$$b_0 = 1$$

$$\underline{\underline{y_p = x e^{2x}}}$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + (C_2 + x) e^{2x}.}}$$

5. $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1 + e^{2x}$

Lösung:

$$\underline{\underline{y_h = C_1 e^x + C_1 e^{2x}.}}$$

Die Störfunktion $s(x) = 2x + 1 + e^{2x}$ kann in zwei Summanden

$$s_1(x) = 2x + 1 \quad \text{und} \quad s_2(x) = e^{2x}$$

zerlegt werden. Eine partikuläre Lösung y_p kann hier — gemäß dem am Anfang des Abschnitts stehenden Satz — als Summe zweier partikulärer Lösungen y_{p1} und y_{p2} der Dgln.

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

und

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

ermittelt werden.

Aus Beispiel 1 kann man entnehmen

$$y_{p1} = x + 2,$$

aus Beispiel 4

$$y_{p2} = x e^{2x}.$$

Somit ist

$$\underline{\underline{y_p = x + 2 + x e^{2x}}}$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + (C_2 + x) e^{2x} + x + 2.}}$$

6. $y'' - 3y' = 2x + 1.$

Lösung:

Homogene Dgl.

$$y'' - 3y' = 0.$$

Charakt. Gleichung

$$k^2 - 3k = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 3.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$\underline{\underline{y_h = C_1 + C_2 e^{3x}.}}$$

Mit $s(x) = 2x + 1 = P_1(x)e^{\alpha x}$ liegt der Fall vor, daß $\alpha = 0$ auch (einfache) Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Also ist als Lösungsansatz zu verwenden

$$y_p = x(b_0 + b_1 x) = b_0 x + b_1 x^2$$
$$y_p' = b_0 + 2b_1 x$$
$$y_p'' = 2b_1$$

Durch Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich erhält man

$$b_0 = -\frac{5}{9}, \quad b_1 = -\frac{1}{3}$$
$$y_p = -\frac{x^2}{3} - \frac{5}{9}x$$
$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x}{9}(3x + 5).$$

$s(x) = P_{m1}(x)\cos\beta x + P_{m2}(x)\sin\beta x$

Lösungsansatz:

$$y_p = B_m(x)\cos\beta x + C_m(x)\sin\beta x$$

mit

$$B_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,$$
$$C_m(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m,$$

wenn $\pm j\beta$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung der zugehörigen homogenen Dgl. ist. Sind $P_{m1}(x)$ und $P_{m2}(x)$ Polynome von höchstens m-tem Grade, so sind für $B_m(x)$ und $C_m(x)$ Polynome m-ten Grades anzusetzen.

$$y_p = x^q [B_m(x)\cos\beta x + C_m(x)\sin\beta x],$$

wenn $j\beta$ und $-j\beta$ q-fache Lösungen der charakteristischen Gleichung sind. Die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_m$ und $c_0, c_1, \ldots, c_m$ sind durch Koeffizientenvergleich nach Einsetzen von $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ in die zu lösende inhomogene lineare Dgl. $L_n[y] = s(x)$ zu bestimmen.

BEISPIELE

7. $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$.

Lösung:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Da $j\beta = j2$ und $-j\beta = -j2$ nicht Lösungen der charakteristischen Gleichung sind, lautet mit $m = 0$, $\beta = 2$ der Lösungsansatz

$$y_p = b_0 \cos 2x + c_0 \sin 2x$$
$$y_p' = -2b_0 \sin 2x + 2c_0 \cos 2x$$
$$y_p'' = -4b_0 \cos 2x - 4c_0 \sin 2x.$$

Einsetzen in die Dgl.

$$(-2b_0 - 6c_0)\cos 2x + (6b_0 - 2c_0)\sin 2x = \cos 2x.$$

Der Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} -2b_0 - 6c_0 &= 1 \\ 6b_0 - 2c_0 &= 0 \end{aligned}$$

liefert

$$b_0 = -\frac{1}{20}, \quad c_0 = -\frac{3}{20}$$

$$y_p = -\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x.$$

8. $y'' - 3y' + 2y = x\cos 2x - 2\sin 2x.$

Lösung:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Wegen $m = 1$, $\beta = 2$ heißt der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p &= (b_0 + b_1 x)\cos 2x + (c_0 + c_1 x)\sin 2x \\ y_p' &= (b_1 + 2c_0)\cos 2x + 2c_1 x\cos 2x + (-2b_0 + c_1)\sin 2x - 2b_1 x\sin 2x \\ y_p'' &= (-4b_0 + 4c_1)\cos 2x - 4b_1 x\cos 2x + (-4b_1 - 4c_0)\sin 2x - 4c_1 x\sin 2x. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die Dgl. und durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2b_0 - 3b_1 - 6c_0 + 4c_1 &= 0 \\ -2b_1 \qquad\quad - 6c_1 &= 1 \\ 6b_0 - 4b_1 - 2c_0 - 3c_1 &= -2 \\ -6b_1 \qquad\quad - 2c_1 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$b_0 = -\frac{21}{50}, \quad b_1 = -\frac{1}{20}, \quad c_0 = \frac{13}{200}, \quad c_1 = -\frac{3}{20}.$$

Die partikuläre Lösung lautet

$$y_p = -\left(\frac{21}{50} + \frac{1}{20}x\right)\cos 2x + \left(\frac{13}{200} - \frac{3}{20}x\right)\sin 2x$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{21}{50} + \frac{1}{20}x\right)\cos 2x + \left(\frac{13}{200} - \frac{3}{20}x\right)\sin 2x.$$

9. $y'' + 4y = \cos 2x$

Lösung:

Homogene Dgl.

$$y'' + 4y = 0.$$

Charakt. Gleichung

$$k^2 + 4 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = \mathrm{j}2, \quad k_2 = -\mathrm{j}2.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$y_h = C_1 e^{\mathrm{j}2x} + C_2 e^{-\mathrm{j}2x} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Da $k_1 = \mathrm{j}2 = \mathrm{j}\beta$ (und damit $k_2 = -\mathrm{j}2 = -\mathrm{j}\beta$, da komplexe Lösungen nur paarweise konjugiert-komplex auftreten können) einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet mit $q = 1$, $m = 0$, $\beta = 2$ der Lösungsansatz

$$y_p = x b_0 \cos 2x + x c_0 \sin 2x$$

$$y_p' = b_0 \cos 2x - 2x b_0 \sin 2x + c_0 \sin 2x + 2x c_0 \cos 2x$$

$$y_p'' = -4 b_0 \sin 2x - 4x b_0 \cos 2x + 4 c_0 \cos 2x - 4x c_0 \sin 2x.$$

Durch Koeffizientenvergleich ermittelt man

$$b_0 = 0, \quad c_0 = \frac{1}{4}.$$

$$y_p = \frac{x}{4} \sin 2x$$

$$y = A \cos 2x + \left(B + \frac{x}{4}\right) \sin 2x.$$

Da bei dem zuletzt behandelten Lösungsansatz die Argumente der beiden trigonometrischen Funktionen gleich sind, könnte man diesen wegen

$$\cos \beta x + \mathrm{j} \sin \beta x = e^{\mathrm{j}\beta x}, \quad \cos \beta x - \mathrm{j} \sin \beta x = e^{-\mathrm{j}\beta x}$$

$$\cos \beta x = \frac{e^{\mathrm{j}\beta x} + e^{-\mathrm{j}\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{\mathrm{j}\beta x} - e^{-\mathrm{j}\beta x}}{2\mathrm{j}}$$

auch in der Exponentialform schreiben, z. B.

$$b_0 \cos \beta x + c_0 \sin \beta x = B_0 e^{\mathrm{j}\beta x} + C_0 e^{-\mathrm{j}\beta x} \quad (B_0, C_0 \text{ Konstanten}).$$

Das bedeutet, daß der 2. Lösungsansatz auf den 1. Lösungsansatz zurückgeführt werden kann. Man erkennt auch die Übereinstimmung der Bedingungen für α in $e^{\alpha x}$ und $\pm \mathrm{j}\beta$ in $P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x$.

Mit den beiden Lösungsansätzen können nunmehr lineare inhomogene Dgln. mit konstanten Koeffizienten für folgende Formen der Störfunktion gelöst werden:

a) $s(x)$ ist ein Polynom in x,

b) $s(x)$ ist ein Exponentialterm der Variablen x,

c) $s(x)$ ist ein aus Sinus- und Cosinusgliedern der Variablen x zusammengesetzter Term,

d) $s(x)$ ist eine Summe von Termen der Form a) ... c),

e) $s(x)$ ist ein Produkt von Termen der Formen a) und b) oder a) und c).

Es könnte noch interessieren, wie der Lösungsansatz lauten muß, wenn

f) $s(x)$ ein Produkt von Termen der Formen b) und c) oder a), b) und c) ist.

Ohne auf diesen Fall weiter einzugehen, sei dafür noch der Lösungsansatz gegeben. Dieser stellt eine Erweiterung der anderen beiden Lösungsansätze dar.

$$\boldsymbol{s(x) = e^{\alpha x}\,[P_{m1}(x)\cos\beta x + P_{m2}(x)\sin\beta x]}$$

Lösungsansatz:

$$\boldsymbol{y_p = e^{\alpha x}\,[B_m(x)\cos\beta x + C_m(x)\sin\beta x],}$$

wenn $\alpha \pm \mathrm{j}\beta$ nicht Lösung der charakteristischen Gleichung der zugehörigen homogenen Dgl. ist;

$$\boldsymbol{y_p = x^q e^{\alpha x}\,[B_m(x)\cos\beta x + C_m(x)\sin\beta x],}$$

wenn $\alpha \pm \mathrm{j}\beta$ q-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Auf die Richtigkeit dieses Lösungsansatzes kann auf Grund der oben dargestellten Möglichkeit, die trigonometrischen Terme des Argumentes βx durch Exponentialterme mit den Exponenten $\mathrm{j}\beta x$ und $-\mathrm{j}\beta x$ auszudrücken, geschlossen werden.

Von besonderer Bedeutung sind die Lösungsverfahren linearer inhomogener Dgln. mit konstanten Koeffizienten für die Behandlung von Schwingungsvorgängen. Auf diese soll im folgenden Beispiel näher eingegangen werden.

BEISPIEL

10. Eine an einer elastischen Feder aufgehängte und mit einem Dämpfungskolben starr verbundene Masse wird durch eine erzwungene periodische Bewegung des oberen Federaufhängepunktes (von außen einwirkende Kraft $F_a = F\sin\omega t$) zum Schwingen gebracht (in Annäherung durch einen Schubkurbeltrieb realisiert, Bild 300).
Das elektrische Analogon ist der durch eine Wechselspannungsquelle ($e = \hat{e}\cos\omega t$) gespeiste Reihenschwingungskreis (Bild 301).

a) Die Dgln. der erzwungenen mechanischen und der erzwungenen elektrischen Schwingung sind aufzustellen.

b) Die Dgln. sind für Reibungskraft $F_d = 0$ bzw. Widerstand $R = 0$ zu lösen: *ungedämpfte erzwungene Schwingung.*

c) Die Lösungen der Dgln. für $F_d \neq 0$ bzw. $R \neq 0$ sind zu ermitteln und zu diskutieren: *gedämpfte erzwungene Schwingung.*

Lösung:

a) Für die Systeme gelten die Dgln. (vgl. 25.2., Beisp. 2)

$$\ddot{s} + \frac{d}{m}\dot{s} + \frac{f}{m}s = \frac{F}{m}\sin\omega t$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = -\frac{\omega \hat{e}}{L} \sin \omega t.$$

Anstelle dieser beiden soll im folgenden die Dgl.

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = K_0 \sin \omega t,$$

worin

$$y = s, \quad 2\delta = \frac{d}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}, \quad K_0 = \frac{F}{m},$$

bzw.

$$y = i, \quad 2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad K_0 = -\frac{\omega \hat{e}}{L}$$

ist, gelöst werden.

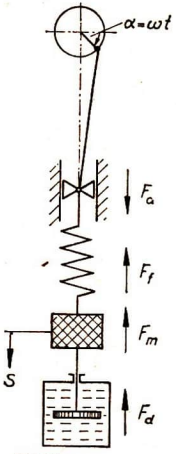


Bild 300

b) Die Lösung der homogenen Dgl. kann aus 25.2., Beisp. 2, übernommen werden

$$y_h = K_h \sin(\omega_0 t + \varphi_h).$$

Der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung

$$y_p = b_0 \cos \omega t + c_0 \sin \omega t$$

ergibt

$$y_p = \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Somit wird

$$y = K_h \sin(\omega_0 t + \varphi_h) + \frac{K_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

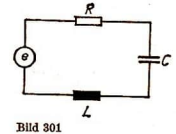


Bild 301

c) Die Lösungen der homogenen Dgl.

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

wurden in 25.2., Beisp. 2d, ermittelt. Sie sind

$\alpha)$ $y_h = \mathrm{e}^{-\delta t} K_h \sin(\omega_e t + \varphi_h)$ für $\delta < \omega_0$

$\beta)$ $y_h = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-\delta t}$ für $\delta = \omega_0$

$\gamma)$ $y_h = \mathrm{e}^{-\delta t}(A \cosh \gamma t + B \sinh \gamma t)$ für $\delta > \omega_0$.

Im folgenden soll nur der Fall α), der für ein schwingungsfähiges System gilt, weiter betrachtet werden.

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. ist der Lösungsansatz

$$y_p = b_0 \cos \omega t + c_0 \sin \omega t$$

aufzustellen, wenn $\mathrm{j}\omega \neq \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, d. h., wenn (wegen $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$) $\omega \neq \omega_e$ ist (die Frequenz der erregenden Schwingung ω ist nicht gleich der Eigenfrequenz des Systems ω_e).

Ableiten von y_p, Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich ergeben

$$b_0 = -\frac{2\delta\omega K_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}, \quad c_0 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) K_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}.$$

Also ist

$$y_p = -\frac{2\delta\omega K_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}\cos\omega t + \frac{(\omega_0^2-\omega^2)K_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}\sin\omega t,$$

oder, nach Zusammenfassen von Sinus- und Cosinusglied,

$$y_p = K\cos(\omega t+\varphi)^{1})$$

mit

$$K = \frac{-K_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega^2)}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\delta\omega}.$$

Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\underline{\underline{y = e^{-\delta t}K_h\sin(\omega_e t+\varphi_h) + K\cos(\omega t+\varphi).}}$$

Der erste Summand der allgemeinen Lösung strebt für $t\to\infty$ gegen Null. Man erkennt: Die gedämpfte erzwungene Schwingung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen,

1. einem *flüchtigen Anteil*, beschrieben durch die für die Anfangsbedingungen gültige Lösung der homogenen Dgl.,
2. einem *stationären Anteil*, beschrieben durch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl., deren Parameter von den Konstanten des schwingungsfähigen Systems und den von außen einwirkenden Größen abhängen.

Für den Reihenschwingungskreis ist der durch die partikuläre Lösung $y_p = K\cos(\omega t+\varphi)$ beschriebene stationäre Anteil des Stromes mit

$$K = \frac{-K_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} = \frac{\frac{\omega\hat{e}}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} = \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\delta\omega} = \arctan\frac{\frac{1}{LC}-\omega^2}{\frac{R}{L}\omega} = \arctan\frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R} =$$

$$= -\arctan\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\underline{\underline{i_p = \frac{\hat{e}}{R_s}\cos(\omega t+\varphi).}}$$

Dies ist das Ohmsche *Gesetz für Wechselstrom*, worin

$$R_s = \sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

den *Scheinwiderstand* darstellt.

---

[1]) y_p könnte auch in der Form $K\sin(\omega t+\bar{\varphi})$ angegeben werden. Die verwendete Darstellungsweise ist im vorliegenden Fall günstiger, da die Störfunktion mit $e=\hat{e}\cos\omega t$ angenommen wurde

Technisch interessant ist eine Untersuchung der Amplitude des stationären Anteils, dem sich die Schwingung des Systems mit wachsenden t immer mehr annähert. Für diese wurde

$$K = \frac{-K_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

errechnet. Es darf $K_0 \neq 0$ vorausgesetzt werden, da sonst keine Einwirkung von außen vorhanden wäre, also keine erzwungene Schwingung vorliegen würde. Auch ist $\delta \neq 0$, da sonst das System nicht gedämpft wäre. ω_0 ist die Kennkreisfrequenz (die Eigenfrequenz des dämpfungslos gedachten Systems). Bei einem bestimmten System hängt K von ω ab, d. h. $K = f(\omega)$.

K nimmt einen maximalen Wert an, wenn der Nenner des für K errechneten Ausdrucks ein Minimum wird. Jenes kann nur vorliegen für

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\delta^2\omega = 0$$

$\omega = 0$ scheidet als Lösung aus (es ergibt, wie sich nachprüfen läßt, ein Minimum für K). Also liegt ein Maximum vor bei

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - 2D^2}.$$

Man nennt $\omega = \omega_r$ die *Resonanzfrequenz*. Wie man erkennt, ist im gedämpften System ω_r immer kleiner als die Kennkreisfrequenz ω_0 (im ungedämpften System ist ω_r gleich der Kennkreisfrequenz) und auch kleiner als die Eigenfrequenz $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

25.4. Lineare Differentialgleichungen 3. und höherer Ordnung

Die in 25.1. bis 25.3. hergeleiteten Sätze und aufgestellten Lösungsansätze gelten für lineare Dgln. n-ter Ordnung. Demnach ist auch der Lösungsweg für lineare Dgln. 3. und n-ter Ordnung der gleiche wie bei den ausführlich behandelten Dgln. 2. Ordnung:

1. Bestimmen der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. mittels der Lösungen der charakteristischen Gleichung;
2. Bestimmen einer partikulären Lösung der inhomogenen Dgl. mittels eines Lösungsansatzes;
3. Addieren beider Lösungen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Dgl.

BEISPIELE

1. $y''' - 2y'' - 3y' = 2x + 1$.

   Lösung:

   Homogene Dgl.

   $$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

   Charakt. Gleichung

   $$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

   Lösungen der charakt. Gleichung

   $$k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 3.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Da $\alpha = 0$ einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der Lösungsansatz

$$y_p = x(b_0 + b_1 x)$$
$$y_p' = b_0 + 2b_1 x$$
$$y_p'' = 2b_1$$
$$y_p''' = 0.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$b_0 = \frac{1}{9},\ b_1 = -\frac{1}{3}$$

$$y_p = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{9}.$$

2. $y''' + y' + 10y = e^{-3x}$.

Lösung:

Homogene Dgl.

$$y''' + y' + 10y = 0.$$

Charakt. Gleichung

$$k^3 + k + 10 = 0.$$

Lösungen der charakt. Gleichung

$$k_1 = -2,\ k_2 = 1 + j2,\ k_3 = 1 - j2.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$y_h = C_1 e^{-2x} + e^x (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.

$$y_p = b_0 e^{-3x}$$
$$y_p' = -3b_0 e^{-3x}$$
$$y_p'' = 9b_0 e^{-3x}$$
$$y_p''' = -27b_0 e^{-3x}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$b_0 = -\frac{1}{20}$$

$$y_p = -\frac{1}{20} e^{-3x}$$

$$y = C_1 e^{-2x} + e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) - \frac{1}{20} e^{-3x}.$$

AUFGABEN

820. Die Dgl. $y'' - 7y' + 12y = 0$ ist zu lösen und die Gleichung der Lösungskurve zu bestimmen, die durch den Punkt (0; 2) geht.

821. $y'' + 2y' + y = 0$

822. $y'' + 6y' + 13y = 0$

823. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad x = 0 \begin{cases} y = 2 \\ y' = 1 \end{cases}$

824. $y'' - 5y' + 4y = x$

825. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{2x}$

826. $y'' - 3y' = (2x + 1)e^{3x}$

827. $y'' - 3y' = 2x + 1 + e^{3x}$

828. $y'' - 4y' + 3y = 7x^2 + 3$

829. $y'' + 6y' + 25y = e^{3x}$

830. $y'' - 4y' + 4y = \sin x$

831. $y'' + 2y' + 4y = \sin 2x$

832. $y'' - y' + \frac{5}{4}y = 5 \sin 5x - 23{,}75 \cos 5x$

833. $y'' - 10y' + 25y = 16e^x$

834. $y'' + y' + y = x^2 + 2x + 3$

835. $y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x$

836. $y'' + 3y' - 6y + 3 = 0, \quad x = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$

837. Für ein Energieübertragungssystem mit zweifacher Speicherwirkung gilt die Dgl.

$$T_2^2 \ddot{x}_a + T_1 \dot{x}_a + x_a = K x_e \quad \text{(vgl. Aufg. 799)}.$$

Man berechne x_a für $x_e = \text{const.}$ und $T_1 > 2T_2$, Anfangsbedingung: $x_e = 0 \begin{cases} x_a = 0 \\ \dot{x}_a = 0 \end{cases}$

838. $y''' - y'' + y' - y = \cos 2x$

839. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2$

840. $y^{(4)} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0$

LÖSUNGEN

1. a) m^2 b) mn

2. Vgl. Bild 302

3. a) Bild 303 b) Bild 304
c) Bild 305 d) Bild 306

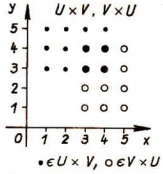


Bild 302 a

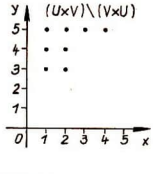


Bild 302 b

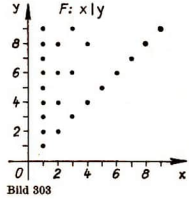


Bild 303

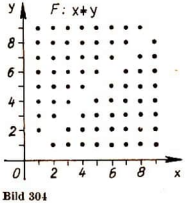


Bild 304

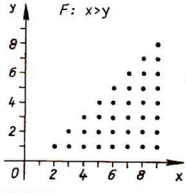


Bild 305

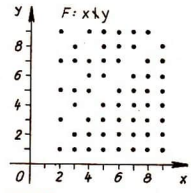


Bild 306

4. a) Bild 307 b) Bild 308 c) Bild 309

5. a) $F(3) = \{3, 6, 9\}$ b) $F(3) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c) $F(3) = \{1, 2\}$ d) $F(3) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

6. a) $F^{-1} = \{(x; y) \mid y \mid x\} \subset U \times U$
b) $F^{-1} = \{(x; y) \mid x \neq y\} \subset U \times U$
c) $F^{-1} = \{(x; y) \mid y > x\} \subset U \times U$
d) $F^{-1} = \{(x; y) \mid y \text{ teilt nicht } x\} \subset U \times U$

Die Punkte von F^{-1} liegen spiegelbildlich zu denen von F bezüglich der Spiegelachse $y = x$ des cartesischen Koordinatensystems.

7. a) $F^{-1} = \{(x; y) \mid x = 2y - 1\} \subset V \times V$
   b) $F^{-1} = \{(x; y) \mid (y + 1)x = 6\} \subset V \times V$
   c) $F^{-1} = \{(x; y) \mid x = y^2 + 1\} \subset V \times V$

8. a) eineindeutig b) eineindeutig c) eindeutig

9. Für $F = \{(x; y) \mid x \neq y\}$

10. a) Bild 310 b) Bild 311 c) Bild 312 d) Bild 313
    e) Bild 314 f) Bild 315 g) Bild 316 h) Bild 317

11. Bilder 318 bis 325

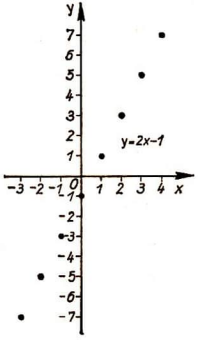


Bild 307

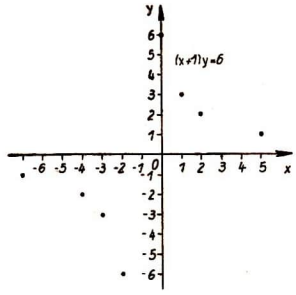


Bild 308

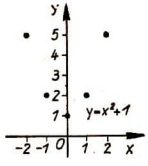


Bild 309

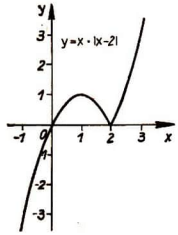


Bild 310

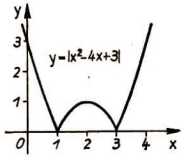


Bild 311

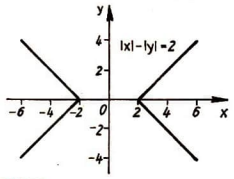


Bild 312

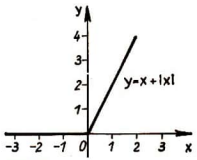


Bild 313

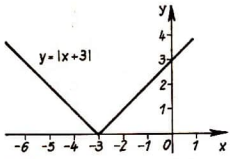


Bild 314

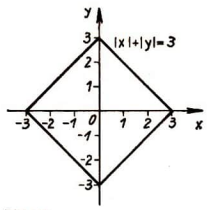


Bild 315

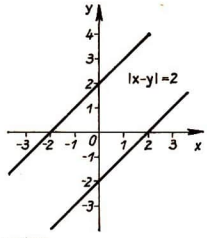


Bild 316

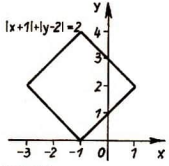


Bild 317

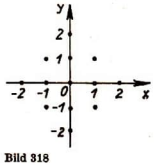


Bild 318

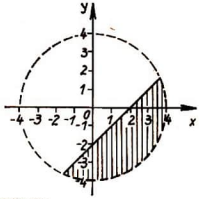


Bild 319

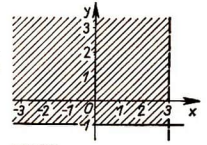


Bild 320

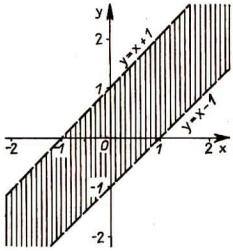


Bild 321

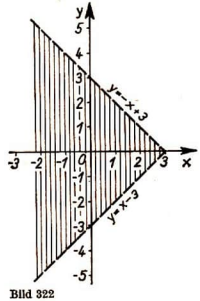


Bild 322

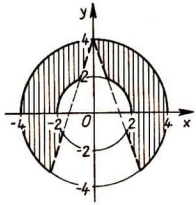


Bild 323

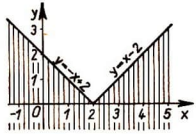


Bild 324

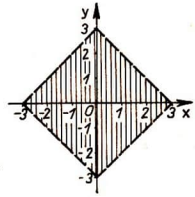


Bild 325

12. a) $F^{-1} = \{(x; y) \mid |x| = y + 2\}$, Bild 326
b) $F^{-1} = \{(x; y) \mid 2x = 2y^2 + 2|y| - 3\}$, Bild 327
c) $F^{-1} = \{(x; y) \mid |x| \geqq |y - 2|\}$, Bilder 328 a, b
d) $F^{-1} = \{(x; y) \mid |y - 1| + |x - 2| < 2\}$, Bilder 329 a, b

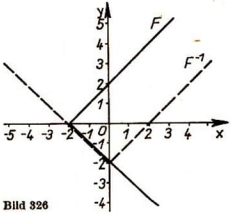


Bild 326

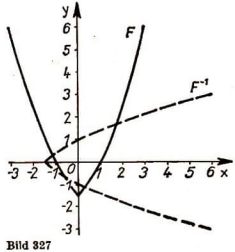


Bild 327

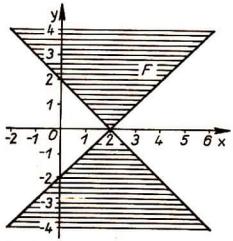


Bild 328 a

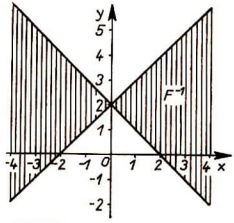


Bild 328 b

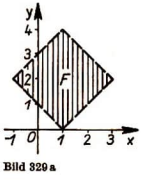


Bild 329 a

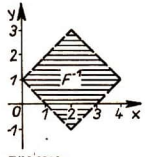


Bild 329 b

13.

	Definitionsbereich	Wertevorrat
a)	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
b)	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
c)	$\lvert x\rvert \leqq 1$	$0 \leqq y \leqq 1$
d)	$-2 \leqq x < +\infty$	$0 \leqq y < +\infty$
e)	$-\infty < x < +\infty$	$4 \leqq y < +\infty$
f)	$\lvert x\rvert \geqq 4$	$-2 \leqq y < +\infty$
g)	$-5 \leqq x < +\infty$	$-\infty < y \leqq 4$
h)	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq 1$
i)	$-\infty < x < +\infty$	$1 \leqq y \leqq 3$
k)	$1 < x < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
l)	$-\infty < x < +\infty$	$2 < y < +\infty$
m)	$x \geqq 0$	$1 \leqq y < +\infty$

14. a) $f \neq g$: $X_f = R \setminus \{-2\}$, $X_g = R$ b) $f = g$
c) $f = g$ d) $f \neq g$: $X_f = R \setminus \{0\}$, $X_g = (0, +\infty)$
e) $f \neq g$: $X_f = R \setminus \{0, \pm\pi/2, \pm 2\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots\}$ f) $f = g$
$X_g = R \setminus \{\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots\}$

15. a) Bild 330 b) Bild 331 c) Bild 332 d) Bild 333
e) Bild 334 f) Bild 335 g) Bild 336 h) Bild 337
i) Bild 338 k) Bild 339

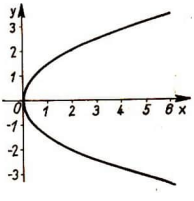


Bild 330

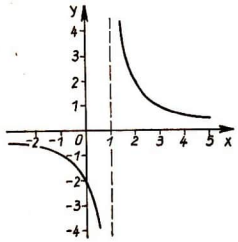


Bild 331

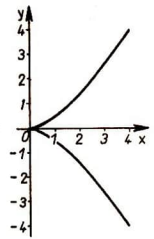


Bild 332

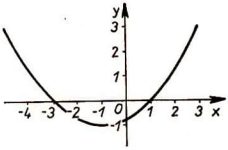


Bild 333

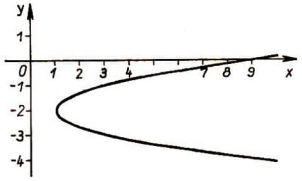


Bild 334

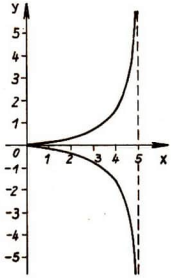


Bild 335

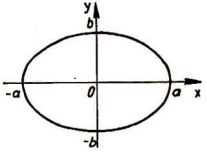


Bild 336

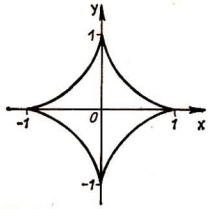


Bild 337

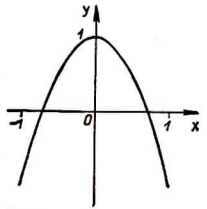


Bild 338

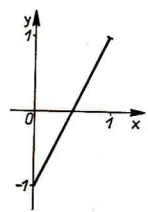


Bild 339

16. a) $y^2 = 2x$ b) $y = \dfrac{2}{x-1}$ c) $y^2 = \dfrac{1}{4}x^3$

d) $y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2x - 3)$ e) $(y+2)^2 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ f) $y^2 = \dfrac{x^3}{25(5-x)}$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ h) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

i) $y = 1 - 2x^2$ mit $|x| \leqq 1$ k) $y = 2x - 1$ mit $0 \leqq x \leqq 1$

17. a) $x_0 = 1$, $l_y \leqq \dfrac{100\text{ mm}}{\lg 10} = 100\text{ mm}$, $s(x) = 100\text{ mm} \lg x$ (Bild 340)

b) $x_0 = 1$, $l_y \leqq \dfrac{100\text{ mm}}{\lg 10000} = 25\text{ mm}$, $s(x) = 50\text{ mm} \lg x$ (Bild 340)

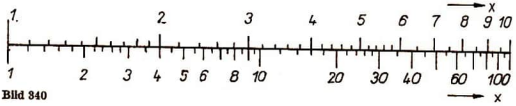


Bild 340

Bild 341

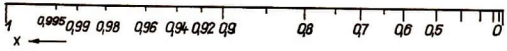


Bild 342

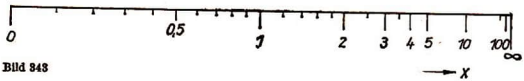


Bild 343

c) $x_0 = -5$, $l_y \leqq \dfrac{100\text{ mm}}{25} = 4\text{ mm}$, $s(x) = 4\text{ mm}\,(x^2 - 25)$
(Bild 341)

d) $x_0 = 0$, $l_y \leqq 100\text{ mm}$, $s(x) = 100\text{ mm}\,(\sqrt{1 - x^2} - 1)$
(Bild 342)

18. $s(x) = 1000\text{ mm}\,\dfrac{x}{1 + x}$ (Bild 343)

19. $y = \lg x = \lg \dfrac{\lambda}{\text{cm}}$ für $10^{-13} \leqq \dfrac{\lambda}{\text{cm}} \leqq 10^{6}$;

$l_y = \dfrac{190\text{ mm}}{19} = 10\text{ mm}$; $s(x) = 10\text{ mm}\left(\lg \dfrac{\lambda}{\text{cm}} + 13\right)$;
vgl. Bild 344.

20. a) $v = \dfrac{\pi}{60000} \cdot \dfrac{d}{\text{mm}} \cdot \dfrac{n}{\text{min}^{-1}}\,\text{m s}^{-1}$

b) $m = \pi/6 \cdot 10^{-3} \cdot \dfrac{\varrho}{\text{g cm}^{-3}} \cdot \dfrac{d^3}{\text{mm}^3}\,\text{g}$

c) $J = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \dfrac{m}{\text{kg}} \cdot \dfrac{r^2}{\text{mm}^2} \cdot \text{kg m}^2$

d) $F = 10^{-5} \cdot \dfrac{m}{\text{g}} \cdot \dfrac{b}{\text{cm s}^{-2}} \cdot \text{N}$

e) $P = 0{,}0981\,\dfrac{F}{\text{kp}} \cdot \dfrac{v}{\text{cm s}^{-1}} \cdot \text{W}$ f) $T = 0{,}0634\sqrt{\dfrac{l}{\text{mm}}}\,\text{s}$

21. a) gerade b) ungerade
c) weder gerade noch ungerade
d) gerade
e) weder gerade noch ungerade
f) weder gerade noch ungerade
g) gerade h) gerade
i) weder gerade noch ungerade
k) gerade
l) weder gerade noch ungerade
m) ungerade

22. a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0{,}6x + 0{,}3\Delta x + 2$

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 1$

c) $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t - 4$

23. a) 6,2; 4,7; 3,5; 3,23; 3,203
b) 343; 133;37; 24,22; 23,1202
c) 24; 14; 6; 4,2; 4,02

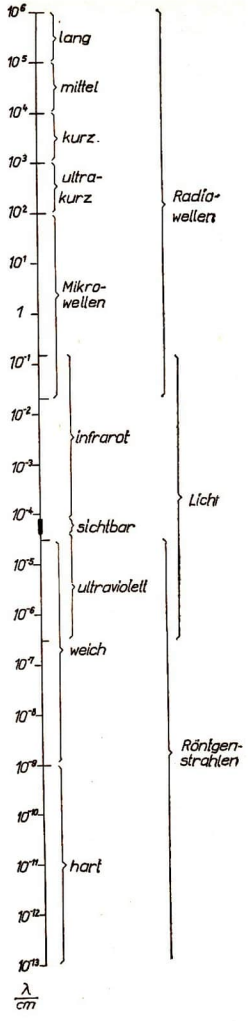


Bild 344

24. $-0{,}4;\ 0;\ 0{,}6;\ 1$ (Bild 345)

25. a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -4\,\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$

26. a) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ b) $y = -2x + 10$

c) $y = x + \dfrac{3}{2}$

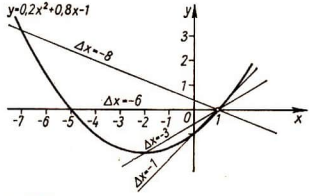


Bild 345

d) $y = -\dfrac{1}{2}x^3,\quad X = (-\infty;\ 0]$ e) $y = (4-x)^2,\quad X = (-\infty;\ 4]$

f) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ g) $y = \dfrac{3x}{2x-1}$ h) $y = +\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}$

i) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x}, & x \leqq 1 \\ -\sqrt[3]{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ k) $y = \log_3(x-1)$

l) $y = e^{x-1}$ m) $y = e^{e^x}$

27. a) π b) $\dfrac{2\pi}{k}$ c) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) 2π e) $\dfrac{2\pi}{3\omega}$

f) $\dfrac{2\pi}{\omega}$ g) $\dfrac{\pi}{\omega}$ h) $\dfrac{\pi}{2}$ i) $\dfrac{\pi}{\omega}$ k) $\dfrac{2\pi}{\omega}$

28. a) $y = f(t) = \begin{cases} A\sin 2(\omega t - k\pi), & k\pi \leqq \omega t < (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \leqq \omega t < (k+1)\pi \end{cases}$

$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

b) $y = f(t) = A\sin\left(\dfrac{\pi}{a}\omega t - k\pi\right),\ ka \leqq \omega t < (k+1)a,\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

29. a) $y = g_3(x) = -2x^3 + 15x + 12$ b) $y = g_3(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 5$
c) $y = g_3(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 2x - 4{,}21$ d) $y = g_3(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}72x + 6{,}28$
e) $y = g_4(x) = -1{,}2x^3 + 2{,}8x^2 - 1{,}8x + 8{,}4$

30. a) 4,75; $-5{,}536$ b) $-3{,}875$; $-6{,}28$ c) $-5{,}535$; $-3{,}5444$
d) 5,4825; $-4{,}60$ e) 10,15; $-8{,}0096$

31. a) $-2{,}0557$ (linear: $-2{,}0562$) b) $-2{,}0173$ (linear: $-2{,}0180$)

32. a) 7,91026 (linear: 7,91023) b) 7,92039 (linear: 7,92037)

33. $g_3(0{,}1t) = 0{,}09999t - 0{,}00017t^3$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ a) 0,04997 b) 0,11969

34. $g_3(0{,}4 + 0{,}1t) = 1{,}49182 + 0{,}14923t + 0{,}00739t^2 + 0{,}00029t^3$ $(0 \leqq t \leqq 3)$
a) 1,56832 b) 1,66530

35. $g_3(0{,}4 + 0{,}05t) = 0{,}91652 - 0{,}02185t - 0{,}00158t^2 - 0{,}00006t^3$ $(0 \leqq t \leqq 3)$
a) 0,88792 b) 0,85108

36. a) $k = \nu + 1$ b) $k = 4 - \nu$ c) $k = \nu - 2$ d) $k = \nu - 3$

37. a) $a_k = 3 - 2(k-1)$ b) $a_1 = 4, \quad a_k = 4$
c) $a_1 = 3{,}5, \quad a_k = 4 - 2^{k-2}$ d) $a_1 = 2, \quad a_k = 2^{k+1} - (k+1)$
e) $a_1 = 0{,}75, \quad a_k = 0{,}75 \cdot 2^{k-1}$ f) $a_1 = -5, \; a_k = -5 + (k-1) \cdot 3$
g) $a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_k = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & k \text{ ungerade} \\ -2, & k \text{ gerade} \end{cases}$
h) $a_1 = -16, \quad a_k = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

38. a) fallend b) konstant c) fallend d) wachsend
e) wachsend f) wachsend g) nicht monoton h) alternierend

39. a) $a_k = (k+1)^2 - 1$, wachsend b) $a_k = 4 - 2k$, fallend
c) $a_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, alternierend d) $a_k = (-1)^k - 1$ nicht monoton,
e) $a_k = \frac{k+2}{k+1}$, fallend f) $a_k = 2^{2-k}$, fallend

40. a) 10,5 b) 333,333 c) 8 d) 10,05 e) -5 f) 49

41. a) $a + a^2b^{-1} + a^3b^{-2} + a^4b^{-3} + a^5b^{-4} + a^6b^{-5}$
b) $x^3 - 2x^2 + 2x$ c) 31 d) 84 e) $-0{,}99$ f) $-2a + 2a^2 - a^3$

42. $(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$

43. a) $\sum_{\mu=1}^{6} \frac{\mu}{2}$ b) $\sum_{\mu=1}^{6} 3 \cdot 10^{3-\mu}$ c) $\sum_{\mu=1}^{4} (\mu-2)^3$ d) $\sum_{\mu=1}^{6} \frac{2\mu-5}{7-\mu}$
e) $\sum_{\mu=1}^{5} (-1)^{\mu}(\mu+2)$ f) $\sum_{\mu=1}^{7} (2\mu-1)$

44. Aufgabe 37: a) $d = -2$ b) $d = 0$ f) $d = 3$
Aufgabe 39: b) $d = -2$

45. a) $-2{,}5; \; -32{,}5$ b) $-6; \quad -78$ c) $-4{,}4; \; -57{,}2$
d) $-7{,}4; \; -96{,}2$ e) $-0{,}6; \; -7{,}8$ f) $-0{,}6; \; -7{,}8$
g) $-5; \quad -65$ h) 18; 234

46. a) $n = 13, \quad x_{13} = -13$ b) $n_1 = 16, \; x_{16} = -\frac{3}{4}; \quad n_2 = 17, \; x_{17} = 0$
c) Der Aufgabenstellung entspricht keine arithmetische Folge.

47. $\{y_k\}$: $y_k = m(k-1) + n$; arithmetische Folge mit $y_1 = n, \; d = m$

48. Vor.: $x_k = x_1 + (k-1)d, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$
Beh.: $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n}{2}[2x_1 + (n-1)d]$
Bew.: $n = 1$: $s_1 = x_1$
$n' = n+1$: $s_{n+1} = \frac{n}{2}[2x_1 + (n-1)d] + x_1 + nd$
$s_{n+1} = \frac{n+1}{2}(2x_1 + nd)$
$s_{n'} = \frac{n'}{2}[2x_1 + (n'-1)d]$

49. 70336 50. 4496955

51. a) $n = 1$: $s_1 = 1$

$n' = n + 1$: $s_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$

$$s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$s_{n'} = \frac{n'(n'+1)}{2}$$

b) $n = 1$: $s_1 = 1$

$n' = n + 1$: $s_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$

$$s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$s_{n'} = \frac{n'(n'+1)(2n'+1)}{6}$$

c) $n = 1$: $s_1 = 1$

$n' = n + 1$: $s_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$

$$s_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$s_{n'} = \frac{n'^2(n'+1)^2}{4}$$

52. n^2

53. Aufgabe 37: e) $x_1 = 0{,}75$, $q = 2$ h) $x_1 = -16$, $q = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 39: c) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ f) $x_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$

54. $q < 0$: alternierend; $0 < q < 1$: fallend;
$q = 1$: konstant; $q > 1$: steigend

55. a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{b}{2a}$ c) $-\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

56. $y_k = \lg x_1 q^{k-1} = \lg x_1 + (k-1)\lg q$; arithmetische Folge $\{y_k\}$ mit $y_1 = \lg x_1$ und $d = \lg q$

$x_1 q^{k-1}$	1	10	100	1000	10000
y_k	0	1	2	3	4

Die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Folge bilden eine arithmetische Folge.

57. a) $-0{,}2$; $-6{,}35$ b) $-2{,}56$; $-71{,}5456$ c) 2500; 11179
d) -5; -35 e) 0,256; 16,63936 f) $-6{,}4$; $-50{,}8$ (6,4; 17,2)

58. a) $n = 8$, $x_8 = 437{,}4$ b) $n = 9$, $x_9 = 0{,}75$

59. a) $n = 8$, $s_8 = 820$ b) $n = 6$, $s_6 = -26{,}6$

60. $2^{20} - 1 = 1048575$ 61. $\frac{1}{8}(2^{13} - 1) = 1023{,}875$

62. 11 Rohre; 8 Schichten

63. 440, 466, 494, 523, 554, 587, 622, 659, 698, 740, 784, 831, 880

64. a) 337965 b) 53261

65. $d = -4°20'$;
$55°30'$, $51°10'$, $46°50'$, $42°30'$, $38°10'$, $33°50'$, $29°30'$, $25°10'$, $20°50'$, $16°30'$

66. $l = 96{,}5$ m

67. 120, 135, 151, 170, 190, 213, 239, 269, 301, 338, 379, 426, 478, 536, 601, 675, 757, 850, 953, 1070, 1200

68. 751 Ω

69. a) $\frac{1+x^7}{1+x}$ b) $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$ c) $\frac{b^{n+1}-(-a)^{n+1}}{a+b}$

70. 15a (23a) 71. 2,29s 72. 7,6%

73. a) 5209,04 Mark b) 6783,52 Mark

74. 3637,7 Mark 75. $0{,}039\,a^{-1}$ 76. 16,1a

77. a) 24300a b) 0,18s c) 481d

78. 46,1s 79. 3,0 min 80. Auf das 1400fache

81. a) beschränkt: $0 < x_n \leqq 4$
b) beschränkt: $0 \leqq x_n \leqq 20$
c) n. u. beschränkt: $0 \leqq x_n < \infty$
d) beschränkt: $-1 < x_n \leqq 3$
e) n. u. beschränkt: $0 \leqq x_n < \infty$
f) n. o. beschränkt: $-\infty < x_n \leqq x_0$
g) unbeschränkt: $-\infty < x_n < \infty$
h) beschränkt: $-1/2 \leqq x_n \leqq 1$
i) beschränkt: $-1 \leqq x_n \leqq 1$
k) beschränkt: $-2 \leqq x_n \leqq 1$
l) beschränkt: $1 < x_n \leqq 3$
m) n. u. beschränkt: $8/9 \leqq x_n < \infty$

Die Folge wächst unbeschränkt, denn es ist

$$x_n = x_{n-1} \cdot 2\frac{n^2}{(n+1)^2} \quad \text{und} \quad 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 > 1{,}5 \text{ für } n \geqq 8.$$

Es gilt also $x_n > 1{,}5x_{n-1}$ für $n \geqq 8$. Das bedeutet: ab $n = 8$ wachsen die Glieder der Folge $\{x_n\}$ schneller als die der divergenten geometrischen Folge mit $q = 1{,}5$.

82. a) 0 b) ∞ c) 0 d) 0 e) $-\infty$ f) ∞

83. a) $N > -\frac{\lg \varepsilon}{\lg 2}$ $(N = 7)$ b) $N > \sqrt{\varepsilon^{-1}}$ $(N = 11)$

c) $N > \varepsilon^{-2}$ $(N = 10001)$ d) $N > \frac{\lg 3}{\lg(1+\varepsilon)}$ $(N = 111)$

e) $N > -\frac{\lg 2}{\lg(1-\varepsilon)}$ $(N = 70)$ f) $N > \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ $(N = 100)$

84. a) $c < 0$ b) $|c| < 1$ c) $c > 0$

85. a) konvergent: $g = 0$
b) konvergent: $g = 0$
c) bestimmt divergent: $g = \infty$
d) konvergent: $g = -1$
e) bestimmt divergent: $g = \infty$
f) bestimmt divergent: $g = -\infty$
g) unbestimmt divergent
h) konvergent: $g = 0$
i) unbestimmt divergent
k) unbestimmt divergent
l) konvergent: $g = 1$
m) bestimmt divergent: $g = \infty$

86. a) $g = 1, \quad N(\varepsilon) > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ b) $g = a, \quad N(\varepsilon) > \dfrac{a-\varepsilon}{\varepsilon}$

c) $g = \dfrac{a}{c}, \quad N(\varepsilon) > \dfrac{|bc-ad|-\varepsilon cd}{\varepsilon c^2}$ d) $g = 0, \quad N(\varepsilon) > \dfrac{\lg(1-\varepsilon)/\varepsilon}{\lg|c|}$

e) $g = 1, \quad N(\varepsilon) > \dfrac{\lg \varepsilon/(1-\varepsilon)}{\lg|c|}$ f) $g = 1, \quad N(\varepsilon) > (5 + \sqrt{25-24\varepsilon-\varepsilon^2})/\varepsilon$

87. a) $1{,}5x_1$ b) $0{,}75x_1$ c) $\dfrac{10}{9}x_1$ d) $\dfrac{5}{9}x_1$

88. $N(\varepsilon) > \dfrac{\lg|\varepsilon(1-q)|}{\lg|q|}$

a) $N = 7$ b) $N = 7$ c) $N = 4$ d) $N = 29$

89. $s = \dfrac{b}{a}\,(b + \sqrt{a^2+b^2})$ 90. a) $a_1(2+\sqrt{2})$ b) $2a_1^2$

91. a) $\dfrac{a_1(m+n)}{2mn}\,[m+n+\sqrt{m^2+n^2}]$ b) $\dfrac{(m+n)^2}{2mn}\,a_1^2$

92. a) $(4+\pi)\,(2+\sqrt{2})\,a_1$ b) $(2+\pi/2)\,a_1^2$

93. a) $\dfrac{7}{9}$ b) $\dfrac{1}{33}$ c) $6\dfrac{217}{505}$ d) $1\dfrac{5}{26}$

94. a) 1 b) $1\dfrac{1}{3}$ c) $1\dfrac{6}{7}$

95. a) -6 b) 3/4 c) $-7/9$ d) 4 e) 12 f) $4a^3$

96. Vgl. Aufgabe 95

97. a) 2 b) 5 c) $\dfrac{1}{2}$

98. a) 1 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) 0 g) $-\infty$ h) -1

99. a) $y = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$

Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$, denn $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x}{|x|} = 1, \quad \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{x}{|x|} = -1$

b) Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$. Es existiert weder links- noch rechtsseitiger Grenzwert für $x = 0$

c) Hebbare Unstetigkeit bei $x = 0$, denn wegen $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ für alle x ist

$$-|x| \leqq x \sin\frac{1}{x} \leqq |x| \text{ und deshalb } \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

d) Unstetigkeiten bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$

Unstetigkeit bei $x_1 = 0$ hebbar, da $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = 2$

Unstetigkeit bei $x_2 = -1$ nicht hebbar:

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$$

e) Hebbare Unstetigkeit bei $x = 4$: $\lim\limits_{x \to 4 \pm 0} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}} = 4$

f) Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1-0} \ln 2^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \ln 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

100. a) Hebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{x^2}{|x|} = 0$

b) Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $\lim\limits_{x \to +0} 2^{\frac{|x|}{x}} = 2$, $\lim\limits_{x \to -0} 2^{\frac{|x|}{x}} = \dfrac{1}{2}$

c) Hebbare Unstetigkeit bei $x = 0$: $\lim\limits_{x \to \pm 0} x\, 2^{\frac{|x|}{x}} = 0$

d) Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

Sei $k \in G$, dann ist $\lim\limits_{x \to k+0} (x - [x]) = 0$, $\lim\limits_{x \to k-0} (x - [x]) = 1$

e) Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$

f) Hebbare Unstetigkeit bei $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{1-x}{1-|x|} = 1$

Nichthebbare Unstetigkeit bei $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1-x}{1-|x|} = \infty, \quad \lim_{x \to -1-0} \frac{1-x}{1-|x|} = -\infty$$

101. a) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-4x + 2\Delta x) = -4x$ b) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-1{,}2\,x - 0{,}6\,\Delta x - 2) = -1{,}2x - 2$

c) $v' = \lim\limits_{\Delta u \to 0} (3{,}6\,u^2 + 3{,}6u\Delta u + 1{,}2\,\Delta u) = 3{,}6u^2$

d) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0{,}6\,x^2 + 0{,}6\,x\,\Delta x + 0{,}2\,(\Delta x)^2 + 0{,}5) = 0{,}6x^2 + 0{,}5$

e) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x - 12) = 8x - 12$ f) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-6x - 3\Delta x + 14) = -6x + 14$

102. a) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{-(x + \Delta x)} + \sqrt{-x}} \right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

c) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)\sqrt{x + \Delta x} + x\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

103. a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 8x$; f': $y' = 8x$ ist überall definiert, also f überall differenzierbar

b) $x < 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ $\qquad$ $x > 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

$x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$

$\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$

f ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar, da dort links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten voneinander verschieden sind.

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1}$; $\quad f' : y' = n x^{n-1}$ ist überall definiert, also f überall differenzierbar

d) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{2}{x^3}$; f' und f sind bei $x = 0$ nicht definiert, also ist f bei $x = 0$ unstetig und somit dort nicht differenzierbar

e) Die Funktion f ist bei $x = 0$ unstetig, daher dort nicht differenzierbar. Für $x \neq 0$ ist

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$; f also für $x \neq 0$ differenzierbar

f) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad f' : y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ist bei $x = 1$ und $x = -1$ nicht erklärt; f ist differenzierbar für $-1 < x < 1$

104. Vgl. Lösungen der Aufgabe 101!

105. a) $y' = 8x^3 - 6x - 5$ $\qquad$ b) $y' = -2{,}4x^2 + 2\sqrt{3}x + 1{,}9$

c) $y' = \dfrac{15}{4} x^5 + 8x^5 - \dfrac{8}{3} x^2 + 2$ $\qquad$ d) $y' = -4ax^3 + 6bx + c^2$

e) $y' = 32t - 8$ $\qquad$ f) $y' = 3x^2 - 2ax - a^2$

106. a) $y' = 10x^{-6} - 9x^{-4} + x^{-3}$ $\qquad$ b) $y' = 4x - x^{-2} + 4x^{-3} + 5x^{-6}$

c) $y' = 8x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}} - 4x^{-\frac{3}{5}}$ $\qquad$ d) $y' = -\dfrac{16}{3} x^{-\frac{7}{3}} + 14x^{-\frac{13}{6}} - 9x^{-2}$

107. a) $y' = 2 + \dfrac{6}{x^3}$ $\qquad$ b) $v'(s) = a + \dfrac{2b}{s^3} + \dfrac{3c}{s^4}$ $\qquad$ c) $y' = \dfrac{-2 + 6x - 8x^3}{x^3}$

d) $y' = 3(-x^{-2} + 2x^{-3})$ $\qquad$ e) $y' = -3x^{-4}$

108. a) $g' = \dfrac{3}{2}\sqrt{t}$ $\qquad$ b) $y' = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ $\qquad$ c) $y' = \dfrac{11}{4} x \sqrt[4]{x^3}$

d) $y' = -\dfrac{a}{2\sqrt{b}\, x^3} - \dfrac{1}{2\sqrt{bx}}$ $\qquad$ e) $y' = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ f) $y' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

g) $y' = \dfrac{1}{3}\left(8\sqrt[3]{x^2} + 13x\sqrt[6]{x} + \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\qquad$ h) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

i) $y' = -1 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad$ k) $y = -3x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2}$

109. a) $-25\frac{1}{3}$; 92°16′ b) 0; 0° c) -1; 135° d) -3; 108°26′

110. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

111. a) $\alpha_1 = 125°49'$, $\alpha_2 = 54°11'$ b) $\alpha = 92°23'$ c) $\alpha_1 = 85°14'$, $\alpha_2 = 0°$

112. a) $P_1(0;0)$, $\varphi_1 = 90°$; $P_2(1;1)$, $\varphi_2 = 53°8'$
b) $P_1(1;1)$, $\varphi_1 = 8°8'$; $P_2(0;0)$ (Berührungspunkt), $\varphi_2 = 0°$
c) $P(-1;-3)$, $\varphi = 20°14'$

113. a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$ b) $x_{1;2} = \pm\sqrt{0{,}5}$, $x_{3;4} = \pm\sqrt{0{,}1}$

114.

x	1	2	3	4	5	6
y	0	5	2	−3	−4	5
y'	11	0	−5	−4	3	16

(Bild 346)

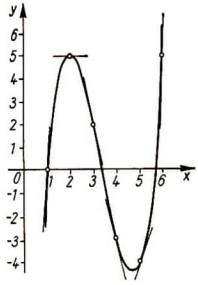


Bild 346

115. a) $y = -2x^3 + 5x^2 - 2$ b) $y = 2x^3 - 8x + 1$
c) $y = -x^3 - x^2 + x - 1$

116. a) 40 b) $-14{,}79$ c) 0
d) $-71{,}12$ e) 4,71

117. a) $y = -\frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ b) $x_0 = -\frac{4}{3}$

118. $y = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 - 6x + 8)$

119. $y = -\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2$

120. $y = \frac{1}{5}(3x^2 - 8x - 28)$

121. $y = -0{,}5x + 3{,}75$

122. $a^2 < 3b$

123. $b = \frac{1}{4}$

124. $a^2 + b = \frac{1}{4}$

125. $y = \frac{1}{4}(5x^3 - 7x + 10)$, $x_3 = 0$

126. a) $y' = (2 - x^2) - 2x(x - 1)$
b) $y' = (-1 - 2x)(x^3 + 2x) + (3x^2 + 2)(1 - x - x^2)$
c) $y' = (-3x^2 + 4)(x^2 - 6x + 5) + (2x - 6)(-x^3 + 4x - 1)$
d) $y' = 3x^2(x^2 - 2x + 1) + (2x - 2)(x^3 - 2)$
e) $y' = (8x - 3)(2 - x^3)x^3 - 3x^5(4x^2 - 3x) + 3x^2(4x^2 - 3x)(2 - x^3)$
f) $y' = 8x(2x^2 - 5)$
g) $y' = (x^2 - 1)(x^3 - 1) + 2x(x - 1)(x^3 - 1) + 3x^2(x - 1)(x^2 - 1)$
h) $y' = (-1 - 2x)(1 - \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - x - x^2)$

127. a) $y' = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right) + \frac{1}{4x\sqrt[12]{x}} = -\frac{4 + \sqrt[4]{x}}{12x\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[6]{x}}\right)\left(1 + \sqrt{5x} - \sqrt[6]{x^5}\right) +$
$+ \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[6]{x}}\right)$

c) $y' = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{8}{3x^2\sqrt[3]{x}}\right)\left(4 - \sqrt[3]{x}\right) - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}\right)$

d) $y' = \frac{-\frac{3}{4}\sqrt{x} + 1}{x^3}(1 + \sqrt{x})^2 + \frac{x-1}{2x^2\sqrt{x}}$

128. a) $y' = b(c - dx) - d(a + bx) + b(c + dx) - d(a - bx) = 2(bc - ad)$
b) $y' = 4(x-1)^3$
c) $y' = 12x(2x^2-1)^2(5 - 2x^3) - 6x^2(2x^2-1)^3$
d) $y' = 2a(ax + b)(b - ax)^2 - 2a(b - ax)(ax + b)^2 = 4a^2x(a^2x^2 - b^2)$
e) $y' = an(ax + b)^{n-1}$
f) $y' = 2(2ax - b)(ax^2 - bx + c)$

129. a) $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$ c) $y' = \frac{-2ab}{(ax-b)^2}$
d) $y' = \frac{6x^2 + 16x + 3}{(3x+4)^2}$ e) $y' = \frac{-12x^4 + 12x^3 - 4x^2 + 32x - 8}{(3x^3 - x + 4)^2}$
f) $y' = -\frac{12x^4 + 18x^2 + 10}{(5x - 2x^3)^2}$ g) $y' = \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 + x - 1)^2}$
h) $y' = 4\frac{8x^5 - 50x^4 - 8x^3 + 59x^2 + 10x - 2}{(5-x)^2}$
i) $y' = \frac{-4x^3 + 27x^2 - 24x + 5}{(3 - 2x)^2(x^2+1)^2}$ k) $y' = \frac{3x^4 + 11x^2 + 10x - 2}{(x^2+1)^2}$
l) $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$ m) $y' = -\frac{9x^2 - 8x - 6}{(x^2-2)^2(3x-4)^2}$

130. a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$ b) $y' = -\frac{2x^4 + 2x^3 - 10x\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{(2x^2+x)^2}$
c) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2}$ d) $y' = -\frac{a}{\sqrt{x}(a + \sqrt{x})^2}$
e) $y' = -\frac{a}{\sqrt{x}(a + \sqrt{x})^2}$
f) $y' = \frac{-6x^2\sqrt[3]{x^2} + 5x^2 - 4x - 6\sqrt[3]{x^2} + 1}{3\sqrt[3]{x^2}(x^2 - 2x - 1)^2}$ g) $y' = \frac{2x^2\sqrt{x} - 3x^2 + \sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - x)^2}$

131. Es ist $\frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$. Die Funktionswerte unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

132. a) Die Kurve steigt für $x^2 < 1$ und fällt für $x^2 > 1$ b) $x_{1;2} = \pm 1$

133. a) f nicht differenzierbar in $x_0 = -2, x_1 = 2$
$f'(-2-0) = -4,\ f'(-2+0) = 4,\ f'(2-0) = -4,\ f'(2+0) = 4$

b) f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$
$f'(-0) = 2,\ f'(+0) = -2$

c) f nicht differenzierbar in $x_0 = -1,\ x_1 = 3$
$f'(-1-0) = -4,\ f'(-1+0) = 4,\ f'(3-0) = -4,\ f'(3+0) = 4$

d) f nicht differenzierbar bei $x_0 = -3$
$f'(-3-0) = 5,\ f'(-3+0) = -5$

e) f überall differenzierbar f) f überall differenzierbar

134. a) $y' = \sin 2x$ b) $y' = -\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$ c) $y' = 4\cos t - t\sin t$

d) $y' = 2\cos x(x - \cot x) + 2\sin x\left(1 + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

e) $y' = \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 3\cos x\right)(\cot x - 2\cos x) + (2\tan x - 3\sin x)\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x} + 2\sin x\right)$

f) $y' = x\cos 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ g) $y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\dfrac{1}{1+\sin 2x}$

h) $y' = \dfrac{1+\sin x - \cos x}{(1+\sin x)^2}$ i) $y' = -\dfrac{x\sin 2x + 3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

k) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ l) $y' = \dfrac{2x\sin x\tan x + 2\sin x + \dfrac{2x}{\cos x}}{4x^2\tan^2 x}$

m) $y' = \dfrac{2x^2 - 1 + 4x\sin x}{1+\cos x}$

135. a) $y' = -\sin 2x$ b) $y' = 6\cos 2x + 2\sin 2x$
c) $y' = \cos 2x - \sin 2x$ d) $y' = 4\cos 4x$
e) $y' = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$ f) $y' = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$
g) $y' = 2\sin^2 x$ h) $y' = 2\cos^2 x$

136. a) $\varphi = 70°32'$ b) $\varphi = 53°8'$ c) $\varphi_1 = 63°26',\ \varphi_2 = 88°51'$

137. a) $\mathrm{d}y = (12x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x$ b) $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$
c) $\mathrm{d}y = -\dfrac{2\,\mathrm{d}x}{x^3}$ d) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$

138. a)

$\Delta x = \mathrm{d}x$	2	1	0,5	0,1
Δy	1,80	0,60	0,225	0,033
$\mathrm{d}y$	0,60	0,30	0,150	0,030
$\Delta y - \mathrm{d}y$	1,20	0,30	0,075	0,003
$\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$	2,00	1,00	0,500	0,100
$\dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}$	0,667	0,50	0,333	0,091

b)

$\Delta x = \mathrm{d}x$	2	1	0,5	0,1
Δy	0,80	0,700	0,462	0,1141
$\mathrm{d}y$	2,40	1,200	0,600	0,1200
$\Delta y - \mathrm{d}y$	−1,60	−0,500	−0,138	−0,0059
$\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$	−0,667	−0,417	−0,229	−0,0492
$\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta y}$	−2,00	−0,714	−0,297	−0,0517

Zeichnerische Darstellung: Bilder 347 und 348

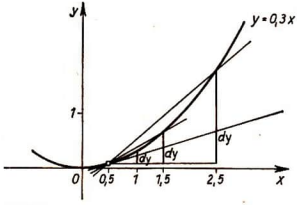


Bild 347

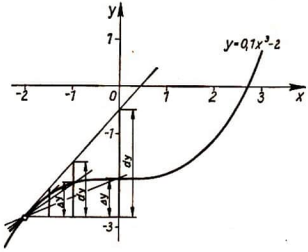


Bild 348

139. a) −49; −36; −12 b) 0,00; 0,00; −14,40; 24,00
c) 1,16; −8,81; −22,66; −1920 d) 378; −670; 860; −714; 288

140. a) −27,07 b) −1,98 c) 5,97

141. a) $y' = 40x(2x^2 - 1)^9$

b) $y' = (3x^2 - 2)(1 - x^3)^5 - 15x^2(1 - x^3)^4(x^3 - 2x)$

c) $y' = 8\left(6 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(6x - 2\sqrt[3]{x^3}\right)^7$

d) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

e) $x' = 2\cos 2t$

f) $y' = \frac{2}{\sin^2(1-2x)}$

g) $y' = -\frac{10(3 - 2\sqrt{2x})^4}{\sqrt{2x}}$

h) $y' = -\frac{6x(1 - \sqrt{1+x^2})^5}{\sqrt{1+x^2}}$

i) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$

k) $y' = -\frac{\sin\frac{1}{1-x}}{(1-x)^2}$

l) $y' = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$

m) $y' = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

n) $y' = \frac{2\sqrt{x^2-1}+2}{\sqrt{x^2-1}(1-\sqrt{x^2-1})^2}$

o) $y' = \frac{1-8x}{2\sqrt{1-x-x^2}(2x-3)^3}$

p) $y' = -\dfrac{\cos\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}$ q) $y' = \dfrac{3+x+2\sqrt{1+x}}{2(1-x)^2\sqrt{1+x}}$

r) $y' = 3x^2 - 3x\sqrt{x^2-1} - 1$ s) $y' = -\dfrac{2}{3(x-1)\sqrt[3]{4x^2(x-1)}}$

142. a) $v_x = -r\omega\sin\omega t$, $v_y = r\omega\cos\omega t$; $a_x = -r\omega^2\cos\omega t$, $a_y = -r\omega^2\sin\omega t$

b) $v_x = 0$: $t = \dfrac{1}{\omega}(0+n\pi)$ $a_x = 0$: $t = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$

$v_y = 0$: $t = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$ $a_y = 0$: $t = \dfrac{1}{\omega}(0+n\pi)$

143. a) $y' = \dfrac{6x^2+2y^2}{2-4xy}$ b) $y' = \dfrac{x(a^2-x^2)+ax^2}{y(a-x)^2}$

c) $y' = \dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$ d) $y' = \dfrac{(x^2+y^2)(2x-a)-2ax^2}{y(a^2+2ax)-2y(x^2+y^2)}$

e) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ f) $y' = \dfrac{\sin y}{1-x\cos y}$

g) $y' = -\dfrac{3(x+1)^2}{2y^3(x-1)^4}$ h) $y' = \dfrac{-2y}{3y^2(x-y)^2-2x}$

i) $y' = \dfrac{2x+2xy+y^2}{4y-2xy-x^2}$ k) $y' = \dfrac{4x^3-2y-y^3}{3xy^2-3y^2+2x}$

l) $y' = \dfrac{x^3-2xy}{x^2+y^3}$ m) $y' = \dfrac{y^2-5x^4}{5y^4-2xy}$

n) $y' = \dfrac{xy^2}{(y+1)(4-y^2)-y(y+1)^2-x^2y}$

144. a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ b) $y' = -\dfrac{x}{\pm\sqrt{r^2-x^2}}$

145. a) $xx_0 + yy_0 = r^2$ b) $yy_0 = p(x+x_0)$ c) $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

146. $f(x)\,v(x) = u(x)$

$f'(x)\,v(x) + f(x)\,v'(x) = u'(x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\,v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x) - \dfrac{u(x)}{v(x)}\,v'(x)}{v(x)}$$

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$$

147. $\tan\alpha_1 = \dfrac{4}{3}$, $\tan\alpha_2 = -\dfrac{4}{3}$

148. a) $y' = 1 + \ln x$ b) $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

c) $y' = -\dfrac{1}{2(1-x)}$ d) $y' = \dfrac{2}{\sin 2x}$

e) $y' = \dfrac{\log_3 e}{x} = \dfrac{1}{x \ln 2}$ f) $u' = \dfrac{\cot t \ln \cos t + \tan t \ln \sin t}{(\ln \cos t)^2}$

g) $y' = \dfrac{|\cot x|}{2\sqrt{|\ln \sin x|}}$ h) $y' = \dfrac{n \lg e}{x} = \dfrac{n}{x \ln 10}$

i) $y' = \dfrac{1}{1-t^2}$ k) $y' = -\dfrac{3}{x}(\log_a e \log_b x + \log_a x \log_b e)$

l) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ m) $y' = \dfrac{1}{x} - \tan x$

n) $y' = \dfrac{1}{x \ln x}$ o) $y' = \dfrac{4}{\sin 4x \cdot \ln \tan 2x}$

p) $y' = \dfrac{4(\ln u)^3}{u}$ q) $y' = \dfrac{1}{\sin x}$

r) $y' = \dfrac{1}{\cos x}$ s) $y' = -\cot^3 x$

149. a) $y' = 2^x \ln 2$ b) $y' = e^x(2x + x^2)$

c) $y' = \dfrac{\cos x - \sin x}{e^x}$ d) $y' = a^x x^{a-1}(x \ln a + a)$

e) $u' = \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ f) $y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$

g) $y' = 1$ h) $v' = e^u(\cos u - \sin u)$

i) $y' = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ k) $y' = \dfrac{4}{(e^t + e^{-t})^2}$

l) $y' = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ m) $y' = \omega \cdot \cos \omega t \cdot e^{\sin \omega t}$

n) $y' = \dfrac{a^x \ln a}{2\sqrt{1+a^x}}$ o) $y' = 2^x e^x(1 + \ln 2)$

p) $y' = 2$ q) $y' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

r) $y' = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ s) $y = \dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2\left(2 - e^{\frac{1}{1-x}}\right)^2}$

150. a) $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$

b) $y' = \sin x \cdot x^{\cos x}\left(\cot x - \sin x \ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$

c) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}\right]$

d) $y' = \sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ e) $y' = -\dfrac{e \ln 2}{x^2}\sqrt[x]{2}$

f) $y' = x^{1-\cos x}\left(\sin x \ln x + \dfrac{1-\cos x}{x}\right)$

g) $y' = x^{x\cos x}(\cos x \ln x - x \sin x \ln x + \cos x)$

h) $y' = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$ i) $y' = \dfrac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$

151. a) $y' = \cos 2x$, $y'' = -2\sin 2x$

b) $y' = -\sin 2x$, $y'' = -2\cos 2x$

c) $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

d) $y' = x^3(1 + 4\ln x)$, $y'' = x^2(7 + 12\ln x)$

e) $y' = 2a^{2x}\ln a$, $y'' = 4a^{2x}\ln^2 a$

f) $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$, $y'' = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3}$

g) $y' = 2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x$, $y'' = (2 - 4x^2)\sin 2x + 8x\cos 2x$

h) $y' = e^x(\sin x + \cos x)$, $y'' = 2e^x\cos x$

i) $y' = -e^{-x} - 2e^{-2x}$, $y'' = e^{-x} + 4e^{-2x}$

k) $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(1 - 2x - x^2)^2}$, $y'' = \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 18x + 14}{(1 - 2x - x^2)^3}$

l) $y' = \dfrac{a^2x^2 + 2abx}{(ax+b)^2}$, $y'' = \dfrac{2ab^2}{(ax+b)^3}$

m) $y' = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

n) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

o) $y' = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$, $y'' = \dfrac{(1 + \sin 2x)e^{\tan x}}{\cos^4 x}$

p) $y' = e^{\sqrt{x}}\left(1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)$, $y'' = e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4\sqrt{x}}\right)$

152. a) $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$

b) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{(4)} = \cos x$

c) $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y''' = \dfrac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\dfrac{6}{x^4}$

d) $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,
$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

e) $y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$, $y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$,
$y^{(4)} = u^{(4)} + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$

153. a) $y^{(n)} = n!$ b) $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$

c) $y^{(n)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$ d) $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

e) $y^{(n)} = a^n e^{ax}$ f) $y^{(n)} = 2^x (\ln 2)^n$

154. $x = \frac{x_0}{4}; \quad y = \pm \frac{x_0}{8}\sqrt{\frac{x_0}{a}}$

155. a) $y = 3x^3 - 2x + 1$ b) $y = 2x^3 - 2x^2 - 4$

c) $y = -4x^3 + x^2 - x + 2$

156. 2,4 157. Vgl. Abschnitt 3.9. 158. $t_1 = 1\,\mathrm{s}$; $a_1 = -0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$

159. Nullst. $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 3$; Max. bei $x_{E1} = 0$; Min. bei $x_{E2} = 2$; Wdp. bei $x_W = 1$

160. Min. bei $x_{E1} = 4$; Wdp. bei $x_W = 2$; Stufenp. bei $x = -2$

161. Nullst. $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 3$; $x_{N3} = -3$; Max. bei $x_{E1} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$;

$x_{E2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$; Min. bei $x_{E3} = 0$; Wdp. bei $x_{W1} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; $x_{W2} = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$

162. Nullst. $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 4$; $x_{N3} = -4$; Max. bei $x_{E1} = \frac{4}{5}\sqrt{15}$;

Min. bei $x_{E2} = -\frac{4}{5}\sqrt{15}$; Stufenp. bei $x = 0$; Wdp. bei $x_{W1} = \frac{2}{5}\sqrt{30}$;

$x_{W2} = -\frac{2}{5}\sqrt{30}$

163. Nullst. $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = \sqrt{10}$; $x_{N3} = -\sqrt{10}$; Max. bei $x_{E1} = -\frac{1}{3}\sqrt{30}$;

Min. bei $x_{E2} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$; Wdp. bei $x_W = 0$

164. Max. bei $x_{E1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$; Min. bei $x_{E2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$; Wdp. bei $x_W = \frac{1}{2}$

165. Nullst. $x_{N1} = 1$; $x_{N2} = -1$; Max. bei $x_{E1} = 0$; Min. bei $x_{E2} = 1$; $x_{E3} = -1$;

Wdp. bei $x_{W1} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $x_{W2} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

166. Nullst. $x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 1$; $x_{N3} = -1$; Max. bei $x_{E1} = -\sqrt{0{,}6}$;

Min. bei $x_{E2} = \sqrt{0{,}6}$; Stufenp. bei $x = 0$; Wdp. bei $x_{W1} = \sqrt{0{,}3}$; $x_{W2} = -\sqrt{0{,}3}$

167. Nullst. $x_{N1} = 0$; Min. bei $x_E = 0$; Wdp. bei $x_{W1} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$; $x_{W2} = -\frac{1}{3}\sqrt{30}$;

Asymptote $y = 1$

168. Nullst. $x_N = \frac{1}{2}$; Pol bei $x_P = 0$; Max. bei $x_E = 1$; Wdp. bei $x_W = 1{,}5$;

$x \to +\infty,\ y \to +0$; $x \to -\infty,\ y \to -0$

169. Pol bei $x_P = 3$; Min. bei $x_{E1} = 3 + \sqrt{15}$; Max. bei $x_{E2} = 3 - \sqrt{15}$;

Asymptote $y = x + 3$

170. Pole bei $x_{P1}=3$; $x_{P2}=-3$; Max. bei $x_{E1}=0$; Asymptote $y=2$

171. Nullst. $x_N=0$; Max. bei $x_{E1}=1$; Min. bei $x_{E2}=-1$; Wdp. bei $x_{W1}=\sqrt{3}$; $x_{W2}=-\sqrt{3}$; $x_{W3}=0$

172. Pol bei $x_P=-2$; Min. bei $x_{E1}=2$; Max. bei $x_{E2}=-6$; Asymptote $y=x-1$

173. Nullst. $x_N=-1$; Pol bei $x_P=1$; Min. bei $x_{E1}=-1$; Wdp. bei $x_W=-2$; Asymptote $y=1$

174. Nullst. $x_N=-3$; Pol bei $x_P=3$; Asymptote $y=1$

175. Max. bei $x_E=0$; Wdp. bei $x_{W1}=+1$; $x_{W2}=-1$

176. Nullst. $x_{N1}=1$; $x_{N2}=-1$; Polst. bei $x_P=0$; Wdp. bei $x_{W1}=\sqrt[4]{3}$, $x_{W2}=-\sqrt[4]{3}$

177. Nullst. $x_N=-2$; Polstelle bei $x_P=0$; Min. bei $x_E=2$; Wdp. bei $x_W=6$

178. Nullst. $x_{N1}=-3$; $x_{N2}=0$; $x_{N3}=3$; Max. bei $x_E=-\sqrt{3}$; Wdp. bei $x_W=4{,}404$

179. Nullst. $x_N=1$; Min. bei $x_E=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

180. Nullst. $x_N=1$; Min. bei $x_E=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; Wdp. bei $x_W=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}$

181. Nullst. $x_N=1$; Max. bei $x_E=\mathrm{e}$; Wdp. bei $x_W=\sqrt{\mathrm{e}^3}$

182. Definitionsbereich $0<x<\infty$, Nullst. $x_N=1$; Max. bei $x_E=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$; Wdp. bei $x_W=\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$;

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$$

183. Nullst. $x_N=\pi k$ für $k=0;\pm1;\pm2;\ \ldots$

Max. bei $x_{E1}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; Min. bei $x_{E2}=\pi k$; Wdp. bei $x_W=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$

184. Nullst. $x_N=0$; Max. bei $x_E=\dfrac{1}{b}$; Wdp. bei $x_W=\dfrac{2}{b}$; $x\to\infty$: $y\to0$

185. Nullst. $x_N=0$; Min. bei $x_E=-1$; Wdp. bei $x_W=-2$

186. Nullst. $x_N=0$; Max. bei $x_E=1$; Wdp. bei $x_W=2$

187. Nullst. $x_N=0$; Min. bei $x_{E1}=0$; Max. bei $x_{E2}=-2$; Wdp. bei $x_{W1}=-2-\sqrt{2}$, $x_{W2}=-2+\sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\mathrm{e}^x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^x=+\infty$

188. Nullst. $x_N=1$; Min. bei $x_E=0$; Wdp. bei $x_W=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\mathrm{e}^x=-0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\mathrm{e}^x=\infty$

189. Max. bei $x_E=0$; Wdp. bei $x_{W1}=1$, $x_{W2}=-1$; $x\to\infty$: $y\to0$; $x\to-\infty$: $y\to0$

190. Min. bei $x_E=1$; $x\to+0$: $y\to+\infty$; $x\to-0$: $y\to-\infty$; $x\to+\infty$: $y\to+\infty$

191. Nullst. $x_N=\dfrac{3}{2}\pi$; Min. bei $x_{E1}=\dfrac{\pi}{2}$; $x_{E2}=\dfrac{3}{2}\pi$; Max. bei $x_{E3}=\dfrac{\pi}{6}$, $x_{E4}=\dfrac{5}{6}\pi$

192. a) $x_E=1$ b) $m=\dfrac{1}{2}$; $\alpha=26°34'$

193. Max. bei $x_{E1} = \frac{\pi}{4}$; Min. bei $x_{E2} = \frac{5}{4}\pi$; Wdp. bei $x_{W1} = 0$, $x_{W2} = \pi$, $x_{W3} = 2\pi$

194. Min. $y_E = 0{,}0313$ bei $x_E = 3{,}32$

195. $y = -x + \frac{5}{3}$ 196. $y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1)$

197. $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{3}{8}$

198. $y = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2x$; $y = 0{,}5x + 0{,}5$

199. Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{4}$ 200. 7,5 cm 201. 7 cm

202. $\overline{OA} = x = 2x_1$; $\overline{OB} = y = 2y_1$

203. $b = \frac{d}{3}\sqrt{3}$; $h = \frac{d}{3}\sqrt{6}$; $b:h = 1:\sqrt{2}$ 204. $\tan\varphi = \mu$

205. $\tan\alpha = \frac{v_0^2}{s \cdot g}$; $\alpha \approx 80°55'$ 206. $d = h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

207. $\alpha = 45°$ 208. $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ 209. $\alpha = 31°43'$

210. $R_a = R_i$; $P_{max} = \frac{F^2}{4R_i}$ 211. $x_E = \frac{l}{3}\sqrt{3}$

212. $x_E = \frac{l}{3}\sqrt{3}$; $y_{max} = \frac{F}{EI} \cdot \frac{l^3 c\sqrt{3}}{27}$

213. $x_E \approx 0{,}525 \cdot l$; $y_{max} \approx 0{,}00262 \cdot \frac{Fl^3}{EI}$ 214. $\frac{1}{3}$

215. Die Schnittpunkte der Geraden mit den Schenkeln haben vom Scheitel die Entfernungen $2a$ und $2b$

216. $\overline{AP} = \sqrt{bc}$ 217. $r = \frac{a}{4}$; $b = \frac{a}{2}$

218. $\alpha_E = 45° - \frac{\varrho}{2}$ 219. $\varphi = 136°34'$

220. a) Seiten $a = b = \frac{l}{4}$; b) Seiten $a = \frac{l}{3}$; $b = \frac{l}{6}$; das Rechteck rotiert um die Seite b

221. $v = \frac{ds}{dt} = 15 - 0{,}15t$; $a = \frac{d^2s}{dt^2} = -0{,}15$. Wenn die Zeit t in Sekunden und der Weg s in Metern gemessen wird, so ist die Bremszeit 100 s und der Bremsweg 750 m

222. $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$; $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi''(t)$

223. $v = \frac{ds}{dt} = 1{,}05t - 0{,}15t^2$; $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 1{,}05 - 0{,}3t$

Die Geschwindigkeit nach 3 Sekunden ist 1,8 m/s

224. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 225. $\frac{1}{3}$ 226. 0 227. $-\frac{1}{2}$

228. 1 229. -1 230. $\frac{1}{2}$ 231. 1

232. e 233. 1 234. 1 235. n

236. $\frac{18}{55}$ 237. $\frac{1}{3}$ 238. 1 239. $\frac{4}{5}$

240. 0 241. -3 242. 4 243. 0

244. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 245. $y' = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$

246. $y' = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ 247. $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\operatorname{arccos}\frac{x}{a} - x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

248. $y' = \frac{a}{a^2 + x^2}$ 249. $y' = \frac{(a^2 + x^2)\operatorname{arccot}\frac{x}{a} - ax}{a^2 + x^2}$

250. $y' = nx^{n-1}\arcsin x + \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}}$ 251. $y' = 0$

252. $y' = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$ 253. $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ 254. $y' = \frac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}}$

255. $y' = \arctan x$ 256. $y' = 2\sqrt{1 - x^2}$ 257. $y' = \frac{(1 + x^2)\operatorname{arccot} x - x}{1 + x^2}$

258. $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 259. $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ 260. $y' = \frac{-1}{2(x^2 + 1)}$

261. $y' = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$

262. $y' = \cosh 2x$ 263. $y' = \frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x}$

264. $y' = \frac{-\cosh 2x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = -\frac{4\cosh 2x}{\sinh^2 2x} = -\frac{4\coth 2x}{\sinh 2x}$

265. $y' = x\sinh x + \cosh x$ 266. $y' = \coth x$

267. $y' = \frac{2[1 - \tanh^2(2x + 3)]}{\tanh(2x + 3)} = \frac{4}{\sinh(4x + 6)}$

268. $y' = a\tanh(ax + b)$ 269. $y' = 2\sinh x\cosh x = \sinh 2x$

270. $y' = \frac{-1}{\sinh^2 2x}$ 271. $y' = \sinh x\, e^{\cosh x}$

272. $y' = \cosh^2 x$ 273. $y' = x + \sinh x\cosh x$

274. $y' = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 275. $y' = \frac{1}{(1 - 4x^2)\sqrt{\operatorname{artanh} 2x}}$

276. $y' = \frac{2}{\sqrt{36x^2 - 1}}$

277. $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{2x - x^2}}$

278. $y' = \operatorname{artanh} x$

279. $y' = \operatorname{arsinh} x$

280. $y = \operatorname{arcoth} x$

281. $y' = \frac{-2}{2x + x^2}$

282. $y' = \frac{2}{1 - x^2}$

283. $y' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad |x| < 1$

284. $\frac{x^5}{5} - \frac{7x^2}{2} + 8x + C$

285. $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

286. $-2 \cos x + C$

287. $\frac{12}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$

288. $\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C$

289. $\ln |x| + C$

290. $\frac{4}{3} x^3 + 14x^2 + 49x + C$

291. $r \sin t + C$

292. $s^3 + C$

293. $\frac{1}{4} u^4 + 5u + C$

294. 0,3

295. $-\frac{218}{3}$

296. 0

297. $\frac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2} - 1\right)$

298. $-9\frac{1}{3}$

299. 6

300. $-0{,}9564$

301. $\frac{156}{5}$

302. $\frac{a}{2}(q^2 - p^2)$

303. 16

304. $3a\left(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_1}\right)$

305. $\frac{\pi\omega}{2}$

306. $\frac{243}{5} a$

307. $-4 \cos \varphi$

308. $3 \cosh x + \ln |x| + C$

309. $\frac{\pi}{4}$

310. $7 \tan x + C$

311. $\frac{1}{2} \operatorname{arcoth} x + C$ für $|x| > 1$ oder $\frac{1}{2} \operatorname{artanh} x + C$ für $|x| < 1$

312. $2 - 5\pi$

313. $2ax + bx^2 + C$

314. $\approx 0{,}4$

315. $-0{,}55$

316. $\frac{u^2}{2} - \operatorname{arcosh} u + C$ für $u > 1$

317. $\frac{r}{4+r} x^{\frac{4+r}{r}} + C$

318. $\frac{2}{3}\,x\sqrt{ax}+C$

319. $\frac{1}{\ln p}\cdot p^x+C$

320. 66

321. $\frac{\pi}{4}+1$.

322. $u\cos^2 x+C$

323. $\frac{2}{27}x^{\frac{9}{2}}-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{6}}-\frac{8}{5}x^{-\frac{5}{2}}+C$

324. $\frac{m^2}{2}-\ln|m|+C$

325. $\frac{x^{3-n}}{3-n}-bx+\frac{ax^{2-n}}{2-n}-\frac{nqx^{\frac{r-n^2+n}{n}}}{r-n^2+n}+C$

326. $\frac{anr^{\frac{k+n}{n}}}{k+n}+C$

327. $8x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{\ln r}\cdot r^x+C$

328. 12

329. $-x^{-6}+C$

330. $3(e^a-1)$

331. $7\ln|x|+\frac{2}{3}x^3+C$

332. $ab\pi(x_2-x_1)$

333. $\frac{r}{x^2+1}+C$

334. $\frac{8}{15}\,x\sqrt[8]{x^7}+C$

335. $\frac{\pi}{4}$

336. $\ln 10=2{,}30259$

337. $\frac{3x}{4}\sqrt[3]{\frac{Qr^2x}{l-1}}+C$

338. $x^3-3^x\frac{1}{\ln 3}+3^2x+\alpha^\beta x-\ln|x|+C$

339. $\frac{39}{40}$

340. $\frac{51}{2}$

341. 22

342. -288

343. 1,5 ($A_{\text{abs}}=2{,}5$)

344. $24\frac{1}{3}$

345. 0,2310

346. 4,5

347. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

348. $x=\frac{\pi}{6}$

349. $\frac{27}{32}$

350. $2\sqrt{2}$

351. $y=\frac{b^2}{2}\sqrt[3]{2}$

352. $A=2{,}08$

353. Die gleichseitige Hyperbel $y=\frac{1}{x}$ ist für $x=0$ unstetig. Die Integration kann deshalb mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht durchgeführt werden

354. $\frac{\pi b^2}{2a}$

355. $\frac{256\pi}{315}\approx 2{,}56$

356. $V_a=\frac{\pi h_a^2 a}{3}\qquad V_b=\frac{\pi h_b^2 b}{3}\qquad V_c=\frac{\pi h_c^2 c}{3}$

357. $V=\frac{27}{64}\pi\approx 1{,}33$

358. $\frac{\sqrt{3}}{2}s^2h$

359. $V_x=\frac{4\pi ab^2}{3}\qquad V_y=\frac{4\pi a^2 b}{3}$

360. $y = x^{\frac{1}{2}}$; Schicht eines Rotationsparaboloids; x-Achse ist Rotationsachse

361. $x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2y - 1)$

362. $y = \sqrt[4]{\frac{x}{\pi^2}}$

363. $\frac{3\pi}{11\sqrt[3]{a^2}} \left(x_2^{\frac{11}{3}} - x_1^{\frac{11}{3}} \right)$

364. $V_x = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_{x_1}^{x_2}$ x_1 und $x_2 \geqq a$ (zweischaliges Hyperboloid)

$V_y = \frac{\pi a^2}{b^2} \left[\frac{y^3}{3} + b^2 y \right]_{y_1}^{y_2}$ (einschaliges Hyperboloid)

365. $-\frac{2}{3b} \sqrt{(a - bx)^3} + C$

366. $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$

367. $\frac{1}{3} \coth(4 - 3x) + C$

368. $\frac{1}{12a} (2ax + b)^6 + C$

369. $\ln|x + a| + C$

370. $\frac{2}{3} (e^6 - 1)$

371. $\frac{\cos^2 \alpha}{-q^2} \sinh(a - q^2 x) + C$

372. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

373. $\frac{1}{2} (x + \sinh x \cosh x) + C$

374. $-\frac{1}{2} (x - \sinh x \cosh x) + C$

375. $\ln|\sin x| + C$

376. $\frac{1}{2} \ln|a^2 + x^2| + C$

377. $\ln|\operatorname{arcoth} m| + C$

378. $-0{,}1018$

379. $\frac{1}{12} \ln|3x^4 - 2| + C$

380. $-\frac{1}{12} \ln|\sinh(2 - 12x)| + C$

381. $\frac{1}{b} \ln\left|\frac{a + b}{a}\right|$

382. $-\frac{1}{a(k+1)} \ln|2 - ax^{k+1}| + C$

383. $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{3}{4} \sin^4 x - \frac{1}{4} \sin^2 x + 5 \sin x + C$

384. $\frac{2}{45} (3x^5 - 4)^{\frac{3}{2}} + C$

385. $\frac{1}{6} (\operatorname{artanh} 3u)^2 + C$

386. $\frac{1}{2} \sin x^2 + C$

387. $\approx 17{,}39$

388. $\frac{\cos^{1-k} x}{k - 1} + C$

389. $\frac{1}{2} (\ln|2a^2|)^2$

390. $-\sqrt{a^2 - x^2} + C$

391. $\frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$

392. $x \left[\frac{3}{2} \arcsin\frac{4 + u}{\sqrt{3}} + \frac{4 + u}{2} \sqrt{3 - (4 + u)^2} \right] + C$

393. $x\sqrt{a^2-x^2}+C$

394. $-\frac{\sqrt{m-x^2}}{mx}+C$

395. $\frac{1}{3}\sqrt{1+x^3}(x^3-2)+C$

396. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+29}+\frac{25}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+29}|+C$

397. $\frac{x}{16\sqrt{16+x^2}}+C$

398. $\frac{1}{3}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+5}|+C$

399. $\frac{1}{2}\left[(x-2)\sqrt{x^2-4x-12}-16\operatorname{arcosh}\frac{x-2}{4}\right]+C$

400. $-\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}}+C$

401. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{3x^3}(2x^2+1)+C$

402. $\frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(x-1)+C$

403. $2\operatorname{artanh}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C$

404. $\tan\frac{x}{2}+C$

405. $-\frac{1}{3}\cot(3x+b)+C$

406. $\ln\left|\frac{e^b+a}{e^a+a}\right|$

407. $\frac{\sqrt{a}}{a(n+1)}\left(x\sqrt{a}-13c\right)^{n+1}+C$

408. $\ln\left|\frac{\cosh 3}{\cosh 2}\right|\approx 0{,}978$

409. $\frac{1}{5\ln a}a^{5x-2}+C$

410. $\approx 0{,}53$

411. $\frac{\sqrt{b}}{b}\arcsin\frac{x\sqrt{b}}{a}+C$

412. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

413. $\frac{3x^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}+C$

414. $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C$

415. $-\frac{1}{5}$

416. $\sin x-\binom{n}{1}\frac{\sin^3 x}{3}+\binom{n}{2}\frac{\sin^5 x}{5}-+\cdots\pm\binom{n}{n-1}\frac{\sin^{2n-1}x}{2n-1}\mp\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1}+C$

417. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+9}{a+4}\right|$

418. $-\frac{1}{8}\cot^8 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C$

419. $\frac{b}{n+2}\left[\left(a+\frac{2}{b}\right)^{n+2}-a^{n+2}\right]$

420. $\frac{1}{5}\cosh^5 x-\frac{2}{3}\cosh^3 x+\cosh x+C$

421. $\frac{1}{b\ln a}(a^{bd}-a^{bc})$

422. $\frac{1}{2}[(\ln b)^2-(\ln a)^2]$

423. $2\left[\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right]\approx 1{,}08240$

424. $\frac{9\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$

425. $2\ln(x-2b)+C$

426. $-\frac{1}{4}\cot^4 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-7\cot x+C$

427. $\frac{1}{2}\left[9 \arcsin \frac{x+3}{3} + (x+3)\sqrt{-x^2-6x}\right] + C$

428. 0 429. $\ln(x^3 - 2x + 4) + C$ 430. $2 + \frac{2}{3}a^2$

431. $\frac{5}{2}\ln(x^2 - 3x + 7) + \frac{1}{\sqrt{19}} \arctan \frac{2x-3}{\sqrt{19}} + C$

432. $\ln(\arctan x) + C$

433. $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 16) - \frac{7}{\sqrt{15}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{15}} + C$

434. $\frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{artanh}\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\operatorname{artanh}\frac{1}{2}\right)^2\right] \approx 0{,}32$ 435. $\frac{1}{cn}\left|\ln\frac{b-ca^n}{b-cd^n}\right|$

436. $\frac{1}{2}(3x^3 + 9x^2 + 7)^2 + C$ 437. $\frac{1}{\ln a}\left(\frac{a^{3x}}{3} + \frac{3a^{2x}}{2} + a^x\right) + C$

438. $\ln\left|\frac{a+2}{a+1}\right|$ 439. $4\sin^3 x + 8\sin^2 x + 8\sin x + C$

440. $b^3 \sinh \frac{a}{b}$ 441. 12π 442. $\frac{1}{qm(s+1)}(r + qx^m)^{s+1} + C$

443. $\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\frac{x+2}{2} + C$ 444. 1,8515

445. $\approx 3{,}66$

446. $\frac{2\pi a^2 b}{e}\left(\arcsin\frac{e}{a} + \frac{eb}{a^2}\right)$, wobei $a^2 - b^2 = e^2$ ist.

447. Lösungen: a) $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$
b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1$

Die Resultate müssen gleich sein. Das beweist man, indem man unterschiedliche C-Werte beachtet und die beiden Ergebnisse gleichsetzt:

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{4}(\cos^2 x - \sin^2 x) + C_1$$

$$2\sin^2 x + \overline{C} = -\cos^2 x + \sin^2 x + \overline{C}_1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \overline{C}_1 - \overline{C}$$

$$1 = \overline{C}_1 - \overline{C}$$

Diese Bedingung ist aber mit dem Charakter der beiden Konstanten durchaus verträglich. Ein allerdings nicht exaktes Nachprüfen der beiden in der Form so unterschiedlichen Resultate benützt den Übergang zu einem bestimmten Integral.

448. 0,068 449. 0,204 450. 8/15

451. 1. $\frac{1}{27a^2}[(4 + 9a^2c)^{3/2} - (4 + 9a^2b)^{3/2}]$ 2. $\sqrt{1+Q^3}\ Q$

452. $V_x = 5{,}3305$; $V_y = 0{,}1396$

453. $\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{a+b^3}{a(1+ab)}\right|$ 454. $\pi(2+\sin 2)$ 455. $\arcsin(x-3)+C$

456. 0,2310 457. $\frac{4\pi}{3}$

458. $A_M = 2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ 459. $A = 3{,}53$ 460. 1

461. $\ln|\ln x|\Big|_2^8 = \ln 3 = 1{,}0986$ 462. $\sqrt{c}\sqrt{a+4c}+\frac{a}{2}\operatorname{arsinh}\frac{2\sqrt{ac}}{a}$

463. 1,1941 464. 2,3378

465. $\arcsin x - \sqrt{1-x^2}+C$ 466. $-\frac{1}{r}\ln|q-rx|+C$

467. $-\frac{1}{4e^{4x}}\left(x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{3}{32}\right)+C$

468. $a\left[\sinh\frac{x}{a}(x^2+2a^2)-2ax\cosh\frac{x}{a}\right]+C$

469. $t\arctan t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$ 470. $x\operatorname{arccos}\frac{ax}{b}-\frac{1}{a}\sqrt{b^2-a^2x^2}+C$

471. $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$

472. 8,8395

473. $\frac{1}{\omega^2}[\omega(b+cx)\sin(\omega x+\varphi)+c\cos(\omega x+\varphi)]+C$

474. $\frac{1}{2}\sinh u\cosh u-\frac{u}{2}+C$

475. $x[(\ln x)^5-5(\ln x)^4+20(\ln x)^3-60(\ln x)^2+120\ln x-120]+C$

476. $-\cos x\left[\frac{1}{6}\sin^5 x+\frac{5}{24}\sin^3 x+\frac{5}{16}\sin x\right]+\frac{5}{16}x+C$

477. $\frac{\ln a}{9}x^3[3\ln x-1]+C$

478. $\sin x\left[\frac{1}{8}\cos^7 x+\frac{7}{48}\cos^5 x+\frac{35}{192}\cos^3 x+\frac{35}{128}\cos x\right]+\frac{35}{128}x+C$

479. $\frac{16}{35}$ 480. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$

481. $\frac{1}{2n}\sinh x\cosh^{2n-1}x+\frac{2n-1}{2n}\int\cosh^{2n-2}x\,dx$

482. $x(\ln x)^m - m\int(\ln x)^{m-1}dx$

483. Nein! Aus $\int u\,dv$ folgt mit $u=u;\quad du=du$
$dv=dv;\quad v+C=v+C$

$$\int u\,dv = u(v+C)-\int(v+C)\,du = uv+Cu-\int v\,du-\int C\,du =$$
$$= uv+Cu-\int v\,du-Cu = uv-\int v\,du.$$

484. $20 - 18 \lg e = 12{,}1826$

485. $\dfrac{\pi}{2 \ln |a|}\left[a^2 + \dfrac{1-a^2}{2 \ln |a|}\right]$

486. Aus $\sin 2a = -2a + \dfrac{1}{2}$ folgt durch graphische Lösung für $a \approx 0{,}125$

487. ≈ 985 488. 1,80 489. 0,999

490. $\dfrac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) + C$

491. $-\dfrac{14}{x-3} + 3 \ln |x-3| + C$

492. $\dfrac{1}{2} \ln |x^2 + 2x - 1| + \sqrt{2}\, \operatorname{artanh} \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$ für $\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right| < 1$

und

$\dfrac{1}{2} \ln |x^2 + 2x - 1| + \sqrt{2}\, \operatorname{arcoth} \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$ für $\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right| > 1$

493. $\dfrac{11}{5-x} + 2 \ln |x-5| + C$

494. $\dfrac{3}{x-1} - \ln |x-1| + C$

495. $\dfrac{3}{2} x^2 + \dfrac{5}{2} \ln |x-4| + \dfrac{3}{2} \ln |x+2| + C$

496. $\ln |x| + \ln |x^2 + 4x + 29| - \dfrac{1}{5} \arctan \dfrac{x+2}{5} + C$

497. $6 \ln |x-1| - 2 \ln |x-10| + 8 \ln |x+3| + C$

498. $3 \ln |x-1| + 5 \ln |x-3| + \ln |x^2+1| + C$

499. $\ln |x| - 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x-2| - 4 \ln |x+3| + C$

500. $\ln |x-1| + 2 \ln |x+3| - 4 \ln |x+5| + C$

501. $\ln |(x-4)^{10}(x+2)| + C$

502. $\dfrac{1}{3(x+2)} - \dfrac{1}{9} \ln |x+2| + \dfrac{1}{9} \ln |x-1| + C$

503. $\ln \left|\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}\right| + \sqrt{3} \arctan \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

504. $-\dfrac{1}{2} \ln \left|\tan\left(\dfrac{3}{8}\pi - \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

505. 1,11

506. $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{3u^3} + \dfrac{1}{2} \ln |u^2+1| + \arctan u + C$

507. $-\dfrac{1}{4(x-1)^2} + \dfrac{2}{7(x-1)} + \dfrac{1}{14} \ln |x-1| + C$

508. $\dfrac{1}{3} \ln 2 + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}835$

509. 1,63

510. $9\left[\dfrac{u^5}{5} - \dfrac{2u^3}{9} + \dfrac{4}{9} u - \dfrac{4}{27}\sqrt{6} \arctan \dfrac{\sqrt{3}}{2} u\right] + C$

511. 0,1862

512. 0,1210

513. $a_m = \frac{1}{8}$ m min^{-2}

514. $y_m = \frac{3\pi}{4} \approx 2{,}3562$

Skizze: Viertelkreisfläche mit Radius $r = 3$. Rechteck der Höhe 2,3562, das somit dem Viertelkreis flächengleich ist.

515. $x_S \approx 2{,}69$; $y_S \approx 5{,}95$

516. $y_S = z_S = 0$; $x_S = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$

517. $y_S = z_S = 0$; $x_S = \frac{h}{4}$

518. $y_S = 0$; $x_S = \frac{4r}{3\pi}$

519. $\frac{\pi}{2}\, x_1 y_1^2$

520. $x_S = \frac{9}{20}$; $y_S = \frac{9}{20}$

521. $x_S = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$; 1) $b = 0$: $x_S = \frac{h}{3}$ (Dreieck); 2) $a = b$: $x_S = \frac{h}{2}$ (Rechteck)

522. $x_S = 2{,}04$; $y_S = 2{,}10$

523. $\frac{a}{3}$; $\frac{b}{3}$

524. $x_S = \frac{e-2}{2e-2}$; $y_S = \frac{e+1}{4e}$

525. $x_S = \frac{12}{7}$; $y_S = \frac{1}{4}$

526. $M_x = \frac{4}{27}$

527. $x_S = \frac{e^2-1}{4(e-2)}$; $y_S = 0$; $z_S = 0$

528. 1. Guldinsche Regel:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\pi d^2 h}{12} \\ V &= 2\pi\, y_S\, A \\ y_S &= \frac{d}{6} \\ A &= \frac{dh}{4} \end{aligned}\right\} \quad 0 \equiv 0$$

2. Guldinsche Regel:

$$\left.\begin{aligned} A_M &= \frac{\pi d\sqrt{r^2 + h^2}}{2} \\ A_M &= 2\pi\, y_S\, s \\ y_S &= \frac{d}{4} \\ s &= \sqrt{r^2 + h^2} \end{aligned}\right\} \quad 0 \equiv 0$$

529. $O = 4\pi r^2$

530. $x_S = \frac{5e^6 + 1}{2(e^6 - 1)}$; $y_S = e^6 + 1$

531. $y_S = z_S = 0$; $x_S = \frac{h}{4}\,\frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{b^2 + ab + a^2}$

532. $4\pi^2 r\,(R + r)$

533. $x_S = \frac{3}{4}\, x_1$; $y_S = \frac{3}{10}\, y_1 = \frac{3}{10a}\, x_1^2$

534. $x_S = 1{,}5$; $y_S = 0{,}9$

535. $x_S = \frac{x \sinh x - \cosh x + 1}{\sinh x}$; $y_S = \frac{x + \sinh x \cosh x}{4 \sinh x}$

536. $\frac{16h^3 l}{175}$

537. $I_x = \frac{\pi}{4}\, r^4$

538. a) $\frac{2}{5}\, mr^2$; b) $\frac{7}{5}\, mr^2$

539. 367000 kg m^2

540. $88569\pi\varrho \approx 278000\varrho$ (278000 muß demnach die Dimension $[L^5]$ haben)

541. $I_{S_x} = \frac{1}{12}[h_1^3 l_1 - h_2^3 (l_1 - l_2)]$; $I_x = I_{S_x} + \frac{h_1^2}{4}[l_1(h_1 - h_2) + l_2 h_2]$

$I_{S_y} = \frac{1}{12}[l_1^3 h_1 - h_2 (l_1^3 - l_2^3)]$; $I_y = I_{S_y} + \frac{l_1^2}{4}[l_1(h_1 - h_2) + l_2 h_2]$

542. $I_y = \frac{a}{3}(a^2 b + 2c^3)$; $I_\eta = \frac{a}{3}(2c^3 + 3bc^2 - 3abc + a^2 b)$

543. $I_y = \frac{a}{12}(c^3 + 8a^2 b)$; $I_x = \frac{2a}{3}\left[a^2\left(3b + \frac{c}{2}\right) + b^2(3a + b)\right]$

544. $I_x = \frac{1}{3}[b^3 d + a(c^3 - b^3)]$; $I_y = \frac{1}{3}[bd^3 + a^3(c - b)]$

545. $I_x = \frac{2}{9}$; $I_y = 1{,}1416$

546. $I_x = \frac{2}{3}(\ln 2)^3 - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 2 \approx 0{,}033$

$I_y = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} \approx 1{,}071$

547. $\frac{1}{48}\left[180 \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{360x - 90}{x^2 - 1} + \frac{27}{(x-1)^2} - \frac{125}{(x+1)^2}\right]_{x_1}^{x_2}$

548. $\frac{3\pi^2}{32}\varrho$ 549. $\frac{\pi a^2 h^3}{6}\varrho$ 550. 3,74

551. 94,66 552. 2,645 553. 0,292

554. 1,02 555. $0{,}5236 \approx \frac{\pi}{6}$

556. a) Die Horizontaltangente geht durch $P_1(3; -2)$, die Vertikaltangente durch $P_2(-1; 2)$.

b) $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y - 7 = 0$ (gedrehte Parabel).

c) Parameterbereich: $(-\infty; +\infty)$
Definitionsbereich: $(-1; +\infty)$
Wertebereich: $[-2; +\infty)$

557. a) $x^2 - y^2 = 1$ (Einheitshyperbel)
Parameterbereich: $(1; +\infty)$
Definitionsbereich: $|x| \geqq 1$
Wertebereich: $(0; +\infty)$

b) $x(y - 1) = 1$ (transformierte Einheitshyperbel)
Parameterbereich: $(-\infty; +\infty)$ mit $t \neq 0$ und $t \neq 1$
Definitionsbereich: $(-\infty; +\infty)$ mit $x \neq 0$
Wertebereich: $(-\infty; +\infty)$

558. $\frac{x^2}{(r+a)^2} + \frac{y^2}{(r-a)^2} = 1$ (Ellipsengleichung)

$x = 2r\cos\frac{t}{2}$; $y = 0$

559. $\frac{x^2}{(s-a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ (Ellipse)

560. $x^2-y^2=1$ (Einheitshyperbel)

561. $y'=\frac{a\cdot\sin t}{r-a\cdot\cos t}$

für $a<r$ ist $y'(0)=0$ (horizontale Tangente durch $P(0;r-a)$

für $a=r$ ist $y'(0)=\frac{0}{0}$ (unbestimmt; Spitze)

für $a>r$ ist $y'(0)=0$ (horizontale Tangente durch $P(0;r-a)$

562. a) $y'=\frac{\dot y}{\dot x}=2t^2;\quad y''=\frac{\dot x\ddot y-\ddot x\dot y}{\dot x^3}=4t^2$

b) $y'=-\cot t;\quad y''=\frac{1}{3\sin^4 t\cos t}$

563. $x=a\cos^3 t;\ y=a\sin^3 t$

Sternkurve. Durchlauf beginnt für $t=0$ bei $P(a;0)$ entgegen der Uhrzeigerbewegung

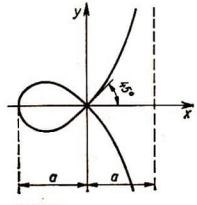


Bild 349

564. $r=\frac{a}{\cos\varphi}$ oder $r=\frac{a}{\sin\varphi}$

565. $y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}};\quad r=-\frac{a\cdot\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ (Bild 349)

Für x von $-a$ bis $+a$ wird die Kurve im dritten und ersten Quadranten durchlaufen.

Für t von $-\infty$ bis $+\infty$ wird die gesamte Kurve von $y=-\infty$ bis $y=+\infty$ durchlaufen.

Für φ von 45° bis 90°: Kurventeil im 1. Quadranten

135° bis 225°: Kurventeil im 2. und 3. Quadranten

270° bis 315°: Kurventeil im 4. Quadranten

566. a) $r=\frac{\sin 2\varphi}{\varphi}$ b) $r=\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$

567. Horizontaltangenten für $\varphi=0°;\ 60°;\ 180°;\ 240°$

Vertikaltangenten für $\varphi=30°;\ 90°;\ 210°;\ 270°$

$r(0°)=r(90°)=r(180°)=r(270°)=0$

$r(30°)=r(60°)=r(210°)=r(240°)=\sqrt[4]{3}$

$r_{max}=\sqrt{2}$ für $\varphi=45°$ und $\varphi=225°$.

$y'(45°)=y'(225°)=-1.$

568. $s=2\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=e^x-e^{-x}\Big|_0^a=e^a-e^{-a}$

569. $s=\frac{r\pi^2}{2}$

570. $s=6a$

571. $s=2\int_0^3\frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx=4\sqrt{3}$

572. $x = v_0 t \qquad x = v_0 \qquad y = H - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \dot{y} = -gt$

$$s = \int_0^{\sqrt{\frac{2H}{g}}} \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2Hv_0^2}{g} + 4H^2} + \frac{v_0^2}{g} \ln\left|\sqrt{2Hg} + \sqrt{v_0^2 + 2Hg}\right|\right]$$

573. $s = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\sqrt{5}$

Kreis um $M\,(4; -2)$ durch den Ursprung

574. $s = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\varphi^2}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \ln\left|\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right|$

575. $A_x = 3\pi a^2$; $A_x = 3A_{\text{Kreis}}$

576. $A = 4\pi a^2$

577. $A = \frac{8}{3} ab$

578. $A = \frac{57}{64} a^2 \pi^2$

579. $A = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$

580. $V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$V = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 t\, R \sin t\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} R^2 \sin^2 \varphi\, (-R \sin \varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

581. $V_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \sin^2 t\, (-a \sin t)\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi a b^2$

$$V_y = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\, b \cos t\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

582. $A_{Mx} = 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, \mathrm{d}t = 4\pi R^2$

$$A_{My} = 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi\, \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2$$

583. $A_{Ms} = 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \varphi^4) \sin\varphi \, d\varphi = 2\pi\,(12\pi^2 - \pi^4 - 22)$

584. $A_{Ms} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right)(1 + t^2)\, dt = 3\pi$

585. $r = p$

586. $\xi = -4x^3;\ \eta = 3x^2 + \frac{1}{2}$ (Evolute)

587. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2};\quad y = -\frac{1}{2}\ln 2;\quad r = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

588. $K = -\sin x;\quad K\left(\frac{\pi}{2}; -1\right);\quad r = -1$ (Bild 350)

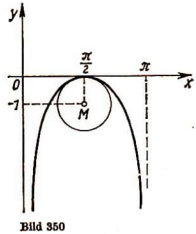


Bild 350

589. $K = \frac{1}{t}$ hat kein Extremum. $\xi = \cos t;\quad \eta = \sin t$ (Kreis)

590. Die Kurve ist der Kreis mit $M(4; -2)$ und $r = \sqrt{20}$; Evolute degeneriert zu $M(4; -2)$.

591. $|ds| = |dr| = 6t\sqrt{1 + 4t^2}\,dt$

592. $r = \frac{s}{2} = \frac{\sqrt{(c^4 + x^4)^3}}{2c^2x^3}$

593. $r = \frac{b^2}{a}$; Höhensatz

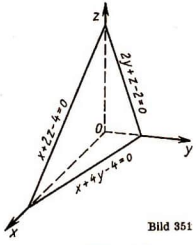


Bild 351

594. Ebene entsprechend Bild 351

595. Kegelfläche entsprechend Bild 352

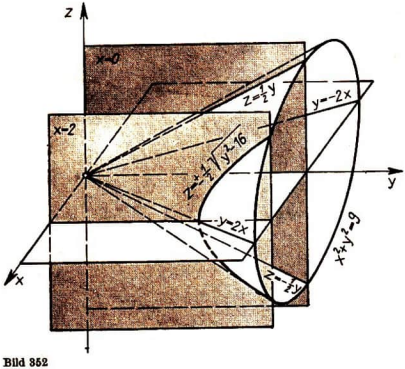


Bild 352

596. $f_x(1;1) = 2 = \tan\alpha, \quad \alpha = 63°26'$ (Bild 353)

597. $z_x = 3x^2 - 16xy + y^3 + 15 \qquad z_y = -8x^2 + 2xy - 20$

598. $u_x = 5x^4 + 18x^2y - 4xyz \qquad u_y = 6x^3 - 2x^2z + 3z^3 \qquad u_z = -2x^2y + 9yz^2$

599. $z_x = \dfrac{6x + 2y^2 - 3x^2}{(1-x)^2} \qquad z_y = \dfrac{4xy}{1-x}$

600. $z_x = y\,\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad z_y = x\,\dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

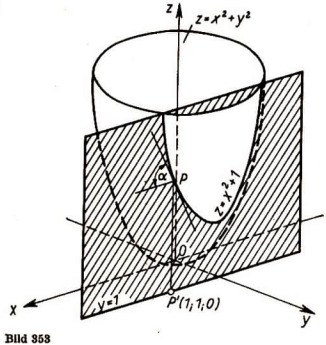


Bild 353

601. $u_x = 2x\,\dfrac{y^2 - z^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad u_y = -2y\,\dfrac{x^2 + z^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad u_z = \dfrac{2z}{x^2+y^2}$

602. $z_x = -\dfrac{x}{z} \qquad z_y = -\dfrac{y}{z}$

603. $z_x = -\sin 2x \qquad z_y = -\sin 2y$

604. $z_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \qquad z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

605. $z_x = y e^{\sin xy}\cos xy - e^{\cos(x+y)}\sin(x+y)$

$z_y = x e^{\sin xy}\cos xy - e^{\cos(x+y)}\sin(x+y)$

606. $u_x = e^z \ln y \qquad u_y = \dfrac{e^x}{y} - z^2\sin y \qquad u_z = 2z\cos y$

607. $\dfrac{\partial v}{\partial p} = -v_0\,\dfrac{p_0}{p^2}\,(1+\alpha t) \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{v_0 p_0}{p}\,\alpha$

608. $\dfrac{\partial T}{\partial l} = \dfrac{\pi}{\sqrt{gl}} \qquad \dfrac{\partial T}{\partial g} = -\dfrac{\pi\sqrt{gl}}{g^2}$

609. $\dfrac{\partial I_1}{\partial R_1} = -I\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)^2}$ $\dfrac{\partial I_1}{\partial R_2} = I\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)^2}$

610. $z_x = 5x^4 + 6x^2y^2$ $z_y = 4x^3y + 10y^4$

$z_{xx} = 20x^3 + 12xy^2$ $z_{xy} = z_{yx} = 12x^2y$ $z_{yy} = 4x^3 + 40y^3$

611. $u_x = y + z$ $u_y = x + z$ $u_z = y + x$ $u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = 0$

$u_{xz} = u_{zx} = 1$ $u_{xy} = u_{yx} = 1$ $u_{yz} = u_{zy} = 1$

612. $f_x(x;y) = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ $f_y(x;y) = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$

$f_{xx}(x;y) = -\dfrac{4y}{(x+y)^3}$ $f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = \dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$ $f_{yy}(x;y) = \dfrac{4x}{(x+y)^3}$

613. $z_x = \dfrac{2y}{(1-xy)^2}$ $z_y = \dfrac{2x}{(1-xy)^2}$

$z_{xx} = \dfrac{4y^2}{(1-xy)^3}$ $z_{xy} = z_{yx} = \dfrac{2(1+xy)}{(1-xy)^3}$

$z_{yy} = \dfrac{4x^2}{(1-xy)^3}$

614. $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z_{xx} = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$ $z_{xy} = z_{yx} = -\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$

$z_{yy} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$

615. $z_x = 2\cos 2x$ $z_y = 2\cos 2y$

$z_{xx} = -4\sin 2x$ $z_{xy} = z_{yx} = 0$ $z_{yy} = -4\sin 2y$

616. $z_x = \dfrac{1}{1+x^2}$ $z_y = \dfrac{1}{1+y^2}$

$z_{xx} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ $z_{xy} = z_{yx} = 0$ $z_{yy} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}$

617. $f_x(x;y) = -\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ $f_y(x;y) = \dfrac{2x}{x^2-y^2}$ $f_{xx}(x;y) = \dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = -\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$ $f_{yy}(x;y) = \dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$

618. $f_x(x;y) = -\cot x$ $f_y(x;y) = \cot y$ $f_{xx}(x;y) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y) = 0$ $f_{yy}(x;y) = -\dfrac{1}{\sin^2 y}$

619. $u_{xyz} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$

620. $u_{xyz} = u_{zyx} = (x-y)^{z-2}[1 - 2z + (z-z^2)\ln(x-y)]$

621. a) $u_{xyz} = u_{zyx} = \dfrac{2x}{\sin^2(y-z)}$ b) $u_{yyz} = u_{zyy} = \dfrac{-2x^2\cos(y-z)}{\sin^3(y-z)}$

622. $z_x = \dfrac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$ $z_y = e^y \arcsin(x-y) - \dfrac{e^y}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

623. $z_x = \dfrac{1}{y}$ $z_y = -\dfrac{x}{y^2}$ $xz_x + yz_y = \dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y} = 0$

624. $u_x = \dfrac{3x^2 - 3yz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ $u_y = \dfrac{3y^2 - 3xz}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

$u_z = \dfrac{3z^2 - 3xy}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$ $u_x + u_y + u_z = \dfrac{3}{x+y+z}$

625. Mit $z_x = \dfrac{2x}{y^2}\, e^{\frac{x^2}{y^2}}$ und $z_y = -\dfrac{2x^2}{y^3}\, e^{\frac{x^2}{y^2}}$ folgt die Behauptung

626. $\Delta u = 0{,}76;\ du = 0{,}8$ 627. $\Delta z = -5{,}16;\ dz = -4{,}8$

628. $dw = 4$ 629. $dz = 12x(x-y^2)\,dx + 12y(y-x^2)\,dy$

630. $dz = \dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}(y\,dx - x\,dy)$ 631. $dz = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy$

632. $du = 2e^{x^2+y^2+z^2}\cdot(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ 633. $dz = e^x(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$

634. $dw = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ 635. $dz = \dfrac{y\,dx + x\,dy}{1+x^2y^2}$

636. $\alpha = \arccos\dfrac{b}{c}$

$d\alpha = \dfrac{-\Delta b}{\sqrt{c^2-b^2}} + \dfrac{b\,\Delta c}{c\sqrt{c^2-b^2}} = -0{,}0062$

$d\alpha = -21' \approx \Delta\alpha$

637. $A = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

$dA = 2{,}95\ \text{m}^2 \approx 3\ \text{m}^2 \approx \Delta A$

638. $y_1 = 0$ $[y']_{\substack{x=0\\y=0}} = \dfrac{1}{3}$ 639. $x_1 = 0$ $[y']_{\substack{x=0\\y=0}} = 4$

$y_2 = \sqrt{3}$ $[y']_{\substack{x=0\\y=\sqrt{3}}} = -\dfrac{1}{6}$ $x_2 = 2$ $[y']_{\substack{x=2\\y=0}} = -8$

$y_3 = -\sqrt{3}$ $[y']_{\substack{x=0\\y=-\sqrt{3}}} = -\dfrac{1}{6}$ $x_3 = -2$ $[y']_{\substack{x=-2\\y=0}} = -8$

640. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y+2)\cos x}{\sin x - \cos y}$ $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 2$ 641. $y' = \dfrac{3x^2}{2ay}$

642. $y' = \dfrac{-yz+x}{xz+y}$ mit $z = \sqrt{1-x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}$

643. $y' = -\dfrac{y - y^x \ln y}{x - xy^{x-1}}$ 644. $y' = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

645. $y' = -\dfrac{2(x^2 + y^2)x - a^2x}{2(x^2 + y^2)y - b^2y}$

646. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

647. Schnittpunkt (im I. Quadranten): $P_1(6; 4)$
Schnittwinkel: $\delta = 76°52'$

648. Minimum $z_E = -3$ bei $x_E = -1; y_E = -2$

649. kein Extremwert

650. Minimum $z_E = -6$ bei $x_E = 2; y_E = 3$

651. kein Extremwert

652. Minimum $z_E = -59$ bei $x_E = 2;\ y_E = -3$

653. Maximum $z_E = -1$ bei $x_E = -3; y_E = 3$

654. Bei (0; 0) kein Extremwert, bei $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)$ ein Maximum $z_E = \dfrac{1}{432}$

655. Bei (0; 0) kein Extremwert, bei $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ ein Minimum $z_E = \dfrac{3}{4}$

656. Aus $f_x(x; y) = 0;\ f_y(x; y) = 0$ folgt $x = y$ und damit $\cos x = -\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{3}{4}$

Maximum $z_E = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ bei $x_E = y_E = \dfrac{\pi}{3}$

657. $f(x; y) = xy(l - x - y);\ x_E = y_E = \dfrac{l}{3}$, d. h., die Strecke ist in 3 gleiche Teile zu teilen.

658. Mit der Hesseschen Normalform erhält man

$$f(x; y) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\frac{y - x - 2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y + x - 3}{\sqrt{2}}\right)^2 + (x - 6)^2$$

Die gesuchten Koordinaten lauten $x = \dfrac{13}{4};\ y = \dfrac{5}{2}$

659. Sind K_1, K_2, K_3 die Kanten, dann ist

$$O = 2(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3) = f(K_1; K_2; K_3)$$

Es folgt $K_1 = K_2 = K_3 = \sqrt[3]{V}$, der Quader ist ein Würfel.

660. $U = 2\dfrac{h}{\sin\alpha} + \dfrac{A}{h} - h\cot\alpha = f(h; \alpha)$

Minimum bei $\alpha = \dfrac{\pi}{3},\ h = \sqrt{\dfrac{A}{3}\sqrt{3}}$

661. Minimum $z_{E1} = \frac{9}{8}$ bei $x_{E1} = \frac{9}{10}$, $y_{E1} = \frac{6}{5}$

Maximum $z_{E2} = \frac{39}{8}$ bei $x_{E2} = -\frac{9}{10}$, $y_{E2} = -\frac{6}{5}$ (Bild 354)

662. Maximum $z_{E1} = \frac{a^2}{2}$ bei $x_{E1} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_{E1} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Maximum $z_{E2} = \frac{a^2}{2}$ bei $x_{E2} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_{E2} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$

Minimum $z_{E3} = -\frac{a^2}{2}$ bei $x_{E3} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_{E3} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Minimum $z_{E4} = -\frac{a^2}{2}$ bei $x_{E4} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $y_{E4} = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$

663. Minimum $z_E = 2$ bei $x_E = y_E = 2$

664. Minimum $z_E = 36$ bei $x_E = 18$; $y_E = 27$

665. Minimum $z_E = 1$ bei $x_E = y_E = 1$

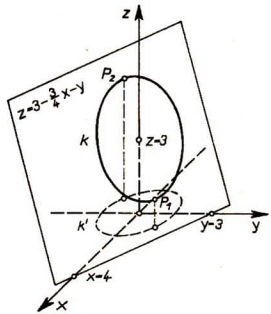


Bild 354

666. $x_E = y_E = z_E = \frac{2}{3}s$

667. $f(x;y) = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$,

$\varphi(x;y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

$x_{E1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $y_{E1} = \frac{1}{2}$

$x_{E2} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $y_{E2} = \frac{1}{2}$

668. $d^2 = f(x;y) = x^2 + y^2$,

$\varphi(x;y) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$

Maximum bei $x_{E1} = y_{E1} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, d. h. $a = 3$

Minimum bei $x_{E2} = -y_{E2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. $b = 1$

669. $A = f(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_5) = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_5)$

$\varphi(\alpha_1;\ldots;\alpha_5) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_5 - 2\pi = 0$ (Bild 355)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_5$ Das Fünfeck ist regelmäßig.

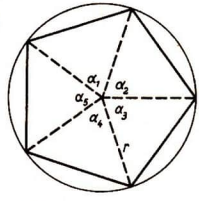


Bild 355

670. $U = f(r;b) = 2r + b$

$\varphi(r;b) = \frac{1}{2}rb - A = 0 \quad r_E = \sqrt{A} \quad b_E = 2\sqrt{A}$

671. $f(r;h) = r^2\pi h$

$\varphi(r;h) = 2r\pi h + 2r^2\pi - O = 0$

$r_E = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}; \quad h_E = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}$

672. $f(x;y;z)=xyz$

$\varphi(x;y;z)=x+y+z-a=0$

$x_S=y_S=z_S=\dfrac{a}{3}$

673. $A=4\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi ab$

674. Polarkoordinaten: $r=\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}$; $A=2\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=1$

675. $A=\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=cx^2}^{cx}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\mathrm{e}-1$

676. $A=2\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{\sin\varphi\cos\varphi}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{\pi}{16}$

677. $V=8\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{3}R^3$; $V=8\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4\pi}{3}R^3$

678. $V=4\int\limits_{x=0}^{R}\int\limits_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$; $V=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{z=\frac{H}{R}r}^{H}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$

679. $V=2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{z=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4}{3}ab^2\pi$

680. $V=2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\frac{R}{2}}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4\pi}{3}R^3\left(1-\dfrac{3}{8}\sqrt{3}\right)$

681. $V=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\frac{R}{\sqrt{5}}}\int\limits_{z=2r}^{\sqrt{R^2-r^2}}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2\pi R^3}{3}\left(1-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$

682. $V=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\int\limits_{\varrho=0}^{R}\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4\pi}{3}R^3$

683. $I_{p1}=2\pi R^3$; $I_{p2}=4\pi R^3$

684. $I_p=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\mathrm{e}^{6\pi}-1\right)$

685. $x_S=0$; $y_S=\dfrac{2R}{\pi}$

686. $x_S = -\frac{8}{5}$; $y_S = 0$

687. $x_S = \frac{2(\pi^2-6)}{\pi^2} R$; $y_S = \frac{6}{\pi} R$

688. $I_p = 2\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\int\limits_{r=0}^{1+\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{35\pi}{16}$

689. $A = 2\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi ab$; $x_S = \frac{4a}{3\pi}$; $y_S = 0$

690. $I_a = \frac{ab^3}{12}$

691. $I_{pM} = \frac{1}{2}\pi R^4$; $I_{pU} = \frac{3}{4}\pi R^4$

692. $I_p = \int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{a-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{a^4}{6} = \frac{c^4}{24}$

693. $I_A = \frac{1}{2}\pi R^4 h$; $J_M = \frac{3}{2}\pi R^4 h$

694. $I = \int\limits_{x=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sin x} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\pi^2$

695. $J = 2\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}\left[\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{4a}-\mathrm{e}^{-4a}) + \frac{3}{2}(\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{-2a}) + 6a\right]$

696. $I_p = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{h}}\int\limits_{z=0}^{h} (r^2+z^2) r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi h^3}{6}(3+2h)$

697. $z_S = \frac{2}{3}h$

698. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{F}\cdot\mathrm{d}\mathfrak{x} = -\left(\frac{1}{3}+\sqrt{3}\right)$

699. Parabelbogen $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\pi^2}{16}\right)$; $L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x} = \frac{1}{3}$

700. $W = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{F}\,\mathrm{d}\mathfrak{x} = 1$; Kurve klettert längs des parabolischen Zylinders $y = x^2 - 1$ von $A(\sqrt{2};1;0)$ bis $B(0;-1;1)$

701. $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \left(\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}+1\right)$

$W = \sqrt{x^2+y^2}+xy$; $W_{P1P2} = 17$; $\int\limits_0^3 \left(\frac{5}{3}+\frac{8x}{3}\right)\mathrm{d}x = 17$

702. $\int_{I}^{II'} \frac{mRT_1}{V}\,dV + \int_{II'}^{II} mc_v\,dT = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_v\,(T_2 - T_1)$

$$\int_{I}^{II'} mc_v\,dT + \int_{II'}^{II} \frac{mRT_2}{V}\,dV = mc_v(T_2 - T_1) + mRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

703. Das allgemeine Glied der Reihe ist $u_n = \frac{1}{3^n + 1}$. Die konvergente geometrische Reihe mit dem allg. Glied $u_n = \frac{1}{3^n}$ ist Majorante, deshalb ist die vorgelegte Reihe konvergent.

704. Diese Reihe ist bestimmt divergent, da die Divergenz der harmonischen Reihe als Vergleichsreihe bewiesen wurde.

705. Da $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, ist die Reihe konvergent. Ihr Summenwert ist $s = 13{,}591$.

706. Da $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, liegt Konvergenz vor.

707. Konvergent

708. Konvergent

709. Das Quotientenkriterium führt hier nicht eindeutig zum Ziel. Mit dem allg. Glied $u_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}$ wird mit Hilfe des Wurzelkriteriums

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2 + (-1)^n}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

somit ist die Reihe konvergent.

710. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$, da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist (Regel von DE L'HOSPITAL). Also liegt Konvergenz vor.

711. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$. Konvergenz für $-2 < x < 2$.

712. $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$, also konvergent für $-1 \leqq x < 1$.

713. Konvergiert für $-1 \leqq x < 1$.

714. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a}{a_{n+1}}\right| = \infty$, konvergiert für $-\infty < x < +\infty$.

715. $f(x + h) = x^5 + 6x^3 - 9x + 10 + (5x^4 + 18x^2 - 9)\cdot h + (10x^3 + 18x)\cdot h^2 + + (10x^2 + 6)\cdot h^3 + 5xh^4 + h^5$.

716. $f(2 + x) = -\frac{4}{5} + \frac{12}{25}x - \frac{36}{125}x^2 + \frac{54}{625}x^3 - + \cdots$.

717. Bild 356

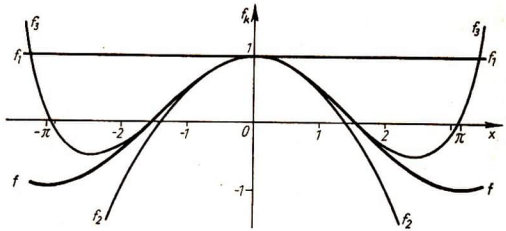


Bild 356

718. Man kann schreiben $a^x = e^{x \ln a} = e^z$, $z = x \ln a$. Da aber die Reihe für e^z beständig konvergent ist, so ist es auch die Reihe für a^x.

719. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$, ist beständig konvergent. Wird für den Kreissinus ein imaginäres Argument genommen, so lautet dann die Reihe

$$\sin \mathrm{j}x = \mathrm{j}x - \frac{\mathrm{j}^3 x^3}{3!} + \frac{\mathrm{j}^5 x^5}{5!} - \frac{\mathrm{j}^7 x^7}{7!} + - \ldots =$$

$$= \mathrm{j} \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

$\sin \mathrm{j}x = \mathrm{j} \sinh x$ (Bild 357)

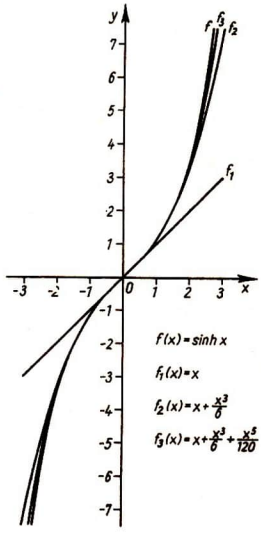


Bild 357

720. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + x - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{3}}{24} x^4 + - \ldots\right)$

721. a) $e^{-\frac{1}{3}x} = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{18} x^2 - \frac{1}{162} x^3 +$

$+ \frac{1}{1944} x^4 - + \cdots$

b) $a_n = \frac{1}{(-3)^n} \cdot \frac{x^n}{n!}$

722. $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{9} + \right.$

$\left. + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - + \ldots\right)$

723. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \cdots \quad |x| \leqq 1$

Sonderfall $x = 1$: $\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \cdots$

724. Die Multiplikation der beiden Klammern ergibt, nach Potenzen von λ geordnet:

$$1 + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \lambda^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \lambda^6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - + \cdots$$

$$|u_n| = \lambda^{2n}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lambda^{2n}\,\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$|u_{n+1}| = \lambda^{2n+2}\,\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\lambda^2\cdot\frac{2n-1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\lambda^2\cdot\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}},$$

d. h., die Reihe ist konvergent für alle $\lambda < 1$.

725. $\frac{1}{\sqrt[3]{(7-4x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}\left(1 + \frac{8}{21}x + \frac{80}{441}x^2 + \frac{2560}{27783}x^3 + \frac{28160}{583442}x^4 + \cdots\right) =$

$$= 0{,}2733 + 0{,}1041x + 0{,}0495x^2 + 0{,}0251x^3 + 0{,}0132x^4 + \cdots \quad |x| < \frac{7}{4}$$

726. $\sqrt[3]{9350} = 21{,}0671$

727. $\int_0^x \sqrt{10 - x^4}\,dx = \sqrt{10}\left(x - \frac{1}{100}x^5 - \frac{1}{7200}x^9 - \frac{1}{208000}x^{13} - \frac{1}{4352000}x^{17} - \cdots\right),$

$\left(|x| < \sqrt[4]{10}\right),$

$$\int_0^{1{,}100} \sqrt{10 - x^4}\,dx = \sqrt{10}\cdot 1{,}08355 \approx 3{,}4265$$

728. $\int_0^{0{,}350} \sqrt{3 - x^2}\,\sqrt{5 - x}\,dx = \sqrt{15}\left[x - \frac{1}{20}x^2 - \frac{103}{1800}x^3 + \frac{97}{24000}x^4 - \right.$

$$\left. - \frac{1889}{720000}x^5 + \frac{10537}{43200000}x^6 \mp \cdots\right]_0^{0{,}350} =$$

$$= \sqrt{15}\cdot 0{,}34148 \approx 1{,}324 \qquad \left(|x| < \sqrt{3}\right)$$

729. $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}\sin 2x\,dx = \left[x^2 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{13}{30}x^6 - \frac{407}{2520}x^8 + \frac{5281}{113400}x^{10} - + \cdots\right]_0^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}1014$

730. $$\int_0^{\frac{2}{3}} e^{-x}\cos x\,dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{5040}x^7 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{22680}x^9 \pm \cdots\right]_0^{\frac{2}{3}} \approx 0{,}457$$

731. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \frac{11}{1008}x^8 - + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}1297$$

732. $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 0{,}946$$

733. $$\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx = \left[\ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \frac{x^8}{8\cdot 8!} - + \cdots\right]_1^2 \approx 0{,}0855$$

734. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 k^8 + \cdots\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \frac{1225}{16384}k^8 + \cdots\right].$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}} \approx 1{,}0727\,\frac{\pi}{2} \approx 1{,}685.$$

735. a) $\Delta z_1 = \pi - z_1 \approx -1{,}3\cdot 10^{-3}$ b) $\Delta U_1 \approx -1{,}3$ cm
$\Delta z_2 = \pi - z_2 \approx -2{,}7\cdot 10^{-7}$ $\Delta U_2 \approx -0{,}00027$ cm

736. $A = \frac{d^2}{4}\pi = 0{,}0805, \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{2\Delta d}{d} = \pm 2{,}8\%$

737. $\Delta V = \pm(bc\,|\Delta a| + ac\,|\Delta b| + ab\,|\Delta c|) = \pm 68$ cm³

738. $f = \frac{ab}{a+b} = 16{,}35$ cm

$$\Delta f_{\max} = \pm\frac{|b^2\Delta a| + |a^2\Delta b|}{(a+b)^2} = \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

739. $\alpha = \arcsin\frac{a}{c}$

$$\Delta\alpha_{\max} = \pm\left(\left|\frac{\Delta a}{\sqrt{c^2-a^2}}\right| + \left|\frac{-a\Delta c}{c\sqrt{c^2-a^2}}\right|\right) = \pm 0{,}00038 = \pm 1{,}3'$$

740. $\Delta R_x = \pm\left(\left|\frac{x}{1000-x}\Delta R\right| + \left|\frac{1000R}{(1000-x)^2}\Delta x\right|\right) = \pm 8{,}7\,\Omega$

741. $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \dfrac{U}{R} = 0{,}5\,\mathrm{A}$

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I} = \pm\left(\left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \frac{1}{R}\left(|\Delta R_1| + |\Delta R_2| + |\Delta R_3|\right)\right) = \pm 0{,}02$$

742. $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 77{,}8\,\Omega$

$$\frac{\Delta R_{\max}}{R} = \pm\left(\left|\frac{R\Delta R_1}{R_1^2}\right| + \left|\frac{R\Delta R_2}{R_2^2}\right|\right) = \pm 0{,}9\%$$

743. $\Delta y = \cot\alpha \lg \mathrm{e}\, \Delta\alpha = \pm 6 \cdot 10^{-4}$

744. $E = 21100\ \mathrm{kp\ mm^{-2}}$

$$\frac{\Delta E_{\max}}{E} = \pm\left(\left|\frac{\Delta F}{F}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|\frac{2\Delta d}{d}\right| + \left|\frac{\Delta\delta}{\delta}\right|\right) = \pm 0{,}016$$

$$\Delta E_{\max} = \pm 340\ \mathrm{kp\ mm^{-2}}$$

745. $\Delta V = \pm 2{,}7\ \mathrm{cm^3} = \pm\left(|2r_1\pi h\, \Delta r_1| + |2r_2\pi h\, \Delta r_2| + |r_1^2 - r_2^2)\pi\, \Delta h|\right)$

$$\Delta r_1 = \pm 0{,}0012\ \mathrm{cm},\quad \Delta r_2 = \pm 0{,}0015\ \mathrm{cm},\quad \Delta h = \pm 0{,}008\ \mathrm{cm}$$

746. $\dfrac{\Delta n_{\max}}{n} = \pm 0{,}001 = \pm\left(|\cot\alpha\, \Delta\alpha| + |\cot\beta\, \Delta\beta|\right)$

$$\Delta\alpha = \pm 1' \qquad \Delta\beta = \pm 0{,}6'$$

747. a) $\dfrac{\Delta a_{\max}}{a} = \pm\left(\left|\dfrac{\Delta b}{b}\right| + |\cot\alpha \cdot \Delta\alpha| + |\cot\beta \cdot \Delta\beta|\right)$

b) $\Delta b = \pm 0{,}02\ \mathrm{m};\quad \Delta\alpha = \pm 0{,}6';\quad \Delta\beta = \pm 0{,}3'$

748. $d = 34{,}115\ \mathrm{mm};\quad m = \pm 0{,}042\ \mathrm{mm};\quad m_d = \pm 0{,}015\ \mathrm{mm}$

$$V = (20790 \pm 30)\ \mathrm{mm^3}$$

749. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 33{,}36\ \mathrm{m}$

$$m_b = \pm\sqrt{\left(\frac{c}{b}\, m_c\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\, m_a\right)^2} = \pm 0{,}03\ \mathrm{m}$$

750. $m_c = \pm 0{,}11\ \mathrm{m}$

751. $n = \dfrac{m^2}{m_{2t}^2} = \dfrac{0{,}02}{0{,}0009} \approx 23$

752. $m_A = \pm\sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\, m_c\right)^2 + \left(\dfrac{h}{2}\, m_h\right)^2} = \pm 0{,}21\ \mathrm{cm^2}$

753. $r = \dfrac{s^2}{8p} + \dfrac{p}{2} \approx \dfrac{s^2}{8p} \approx 590\ \mathrm{m}$

$$m_r = \pm\sqrt{\left(\frac{s}{4p}\, m_s\right)^2 + \left(\frac{-s^2}{8p^2}\, m_p\right)^2} = \pm\sqrt{0{,}4 + 48}\ \mathrm{m} = \pm 7\ \mathrm{m}$$

Der Fehler der Sehne hat also kaum Einfluß auf m_r.

754. $s = \frac{b}{2} \cot \frac{\gamma_1}{2} \cot \gamma_2 = 333{,}15 \text{ m}$

$$m_s = \pm \sqrt{\left(\frac{-b \cot \gamma_2}{4 \sin^2 \frac{\gamma_1}{2}} \cdot \Delta\gamma_1\right)^2 + \left(\frac{-b \cot \frac{\gamma_1}{2}}{2 \sin^2 \gamma_2} \cdot \Delta\gamma_2\right)^2}$$

$$\frac{m_s}{s} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sin 2\gamma_2}\right)^2} \cdot \Delta\gamma_1 = \pm 0{,}00095 \approx \pm 1 \cdot 10^{-3}$$

755. $m_\alpha = m_\beta = \frac{m_\gamma}{\sqrt{2}} = \pm 1{,}5'$

756. $m_h^2 = (\tan \alpha \cdot m_s)^2 + \left(\frac{e}{\cos^2 \alpha} \cdot m_\alpha\right)^2$

$m_s = \pm 2 \text{ dm} \qquad m_\alpha = \pm 0{,}8'$

757. $f = (98{,}3 \pm 0{,}3) \text{ cm}$

758. $x = l_i + v_i, \quad l_i$ hat das Gewicht p_i

$$[pvv] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x - l_i)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}[pvv]}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} 2 p_i (x - l_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i x - \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = 0$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{[pl]}{[p]}$$

759. $x = 245{,}0; \quad m_0 = \pm 1{,}8; \quad m_1 = \pm 0{,}8; \quad m_2 = \pm 0{,}6; \quad m_3 = \pm 0{,}9$
$m_4 = \pm 0{,}5; \quad m_x = +0{,}3$

760. $g = (981{,}2 \pm 0{,}8) \text{ cm} \cdot s^{-2}$

761. $a = R_0 \beta = 0{,}0056 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \qquad b = R_0 = 1{,}54\,\Omega$

$$\beta = \frac{a}{R_0} = 0{,}0037 \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$m = \pm 0{,}08\,\Omega; \quad m_a = \pm 0{,}0013 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}};$

$m_b = \pm 0{,}08\,\Omega; \quad m_\beta = \pm 0{,}0009 \frac{1}{^\circ\text{C}}$

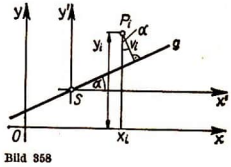


Bild 358

763. Für die Geradengleichung $y' = ax' = \tan \alpha \cdot x'$ folgt

$v_i = (ax_i' - y_i') \cos \alpha = x_i' \sin \alpha - y_i' \cos \alpha$ (Bild 358)

$[vv] = [x'x'] \sin^2 \alpha - 2\,[x'y'] \sin \alpha \cos \alpha + [y'y'] \cos^2 \alpha$

$$\frac{\partial [vv]}{\partial \alpha} = [x'x'] \sin 2\alpha - 2\,[x'y'] \cos 2\alpha - [y'y'] \sin 2\alpha = 0 \qquad \tan 2\alpha = \frac{2[x'y']}{[x'x'] - [y'y']}$$

764. $\alpha = 152°34'$

766. $y = -0{,}10x^2 + 1{,}68x - 1{,}60$ (s. Bild 275)

767. $y = 0{,}01x^2 - 0{,}24x + 0{,}26$

768. $w_1 = h_1 + h_2 + h_3 = -9$ mm
$w_2 = -h_2 + h_4 + h_5 = -10$ mm
$w_3 = h_1 + h_4 - (H_B - H_A) = -7$ mm

$$F = \sum_{i=1}^{5} v_i^2 + \lambda_1(v_1 + v_2 + v_3 - 9) + \lambda_2(-v_2 + v_3 + v_5 - 10) + \lambda_3(v_1 + v_4 - 7)$$

$v_1 = 3{,}4$ mm; $v_2 = -0{,}2$ mm; $v_3 = 5{,}9$ mm; $v_4 = 3{,}6$ mm; $v_5 = 6{,}1$ mm
$h_1 + v_1 = 8{,}056$ m, $h_2 + v_2 = -2{,}410$ m, $h_3 + v_3 = -5{,}646$ m,
$h_4 + v_4 = 6{,}496$ m, $h_5 + v_5 = -8{,}906$ m
$H_1 = 161{,}681$ m; $H_2 = 159{,}271$ m

769. $y'^2 - 4xy' + 4y = 0$

770. $y'''(1 + y'^2) - 3y''^2y' = 0$

771. $xy' + y = 0$

772. $y(1 + y'^2) = r^2$

773. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$

774. $xy^2 = C$

775. $y' = \dfrac{y}{2x}$; $y^2 = 2Cx$

776. vgl. 24.4., Beisp. 1: $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

777. $y = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$; $y|_{t\to\infty} = K$; $y|_{t=T} = 0{,}632K$; $t_{95\%} = T \ln 20 \approx 3{,}00\,T$;
$t_{99\%} = T \ln 100 \approx 4{,}61\,T$

778. $x^2 - y^2 = C$

779. $y = Cx$

780. $y = \sqrt{2e^x + C_1}$

781. $y = C(x - a) + b$

782. $y(y^2 - 27) = 2x^3 + \dfrac{21}{2}x^2 - 12x + C$

783. $y = \left(1 + Ce^{\frac{x^2}{4}}\right)^2$

784. $y = \dfrac{Cx}{1 + x}$

785. $\dfrac{y}{a^2\sqrt{a^2 + y^2}} = \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$

786. $y = e^{K\tan\frac{x}{2}}$, $y_p = 1$

787. $y = \sqrt{2(x\cos x - \sin x) + 127{,}3}$

788. $y = \sqrt[3]{3 + 3x - x^3}$

789. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x} + 0{,}295\right]$

790. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left[\dfrac{4}{\sqrt{3}}\ln(2 + 3x) - 12{,}25\right]$

791. $y = \sqrt{\ln\dfrac{x - 20}{x - 8} + 1{,}562}$

792. $y = \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{artcan}\sqrt{11}\,x + 255{,}1}$

793. $y = x - 1 + Ke^{-x}$

794. $y = Ke^x - x - 1$

795. $y = x\tan[\ln\sqrt{x^2 + y^2} + C]$
in Polarkoordinaten $r = Ke^{\varphi}$

796. $y = \dfrac{x}{K - \ln x}$

797. $y = x\sqrt{\dfrac{Kx^{\frac{4}{3}} - 1}{2}}$

798. $3x - 9y - 5 + K + 4\ln|6x - 9y - 5|$

799. $x_a = Kc(t - T) + \mathrm{Ce}^{-\frac{t}{T}}$

800. $y = 2 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$

801. $y = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-2x}$

802. $y = \mathrm{e}^{x^2}(K - x)$

803. $y = \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{C}{\cos x}$

804. $y = \sin x + K\tan x$

805. $y = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\left(16136 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{4x}\right)$

806. $y = \dfrac{1}{4}\,(1 + 2x + 79\mathrm{e}^{2x})$

807. $y = \dfrac{3}{4}\,x^2 - \dfrac{2}{3}\,x + 2 - \dfrac{2}{x^2}$

808. $y = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{2-x} - \mathrm{e}^{x})$

809. $y = A\sin(x + \varphi)$

810. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2} - C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2$

811. $y = A\sin(x + \varphi) + x^2 - 2$

812. $y = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-2x}$

813. $y = \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{x}{2} + C_1\right) + C_2\mathrm{e}^{-x}$

814. $y = x + 1{,}29\mathrm{e}^{x} - 4{,}08\mathrm{e}^{-x}$

815. $y = \dfrac{x}{500} + \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{x^3}{30} - \dfrac{1}{5000}\,(\mathrm{e}^{10x} - 1)$

816. $y = -1{,}60 + 0{,}60x + 1{,}34\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} + 0{,}264\mathrm{e}^{-\sqrt{5}x}$

817. $y = -\dfrac{7}{3}\,x + x^2 - 0{,}105\mathrm{e}^{-3x} - 0{,}22$

818. $y = 4\cos x - 2\pi\sin x - x^2 - 4$

819. a) $y = \dfrac{Fl^3}{16EI}\left(\dfrac{x}{l} - \dfrac{4x^3}{3l^3}\right)$ b) $y = \dfrac{Fl^3}{180EI}\left[7\,\dfrac{x}{l} - 10\left(\dfrac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\dfrac{x}{l}\right)^5\right]$

820. $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$; $y = C\mathrm{e}^{3x} + (2 - C)\mathrm{e}^{4x}$

821. $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 + C_2x)$

822. $y = A\,\mathrm{e}^{-3x}\sin(2x + \varphi)$

823. $y = 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-4x}$

824. $y = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{16}$

825. $y = C_1\mathrm{e}^{x} + (C_2 - 2x + x^2)\mathrm{e}^{2x}$

826. $y = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{x}{9} + \dfrac{x^2}{3}\right)\mathrm{e}^{3x}$

827. $y = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{x}{9}\,(3x + 5)$

828. $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \dfrac{7}{3}\,x^2 + \dfrac{56}{9}\,x + \dfrac{209}{27}$

829. $y = \mathrm{e}^{-3x}A\sin(4x + \varphi) + \dfrac{1}{52}\,\mathrm{e}^{3x}$

830. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{5}\sin\left(x + \arctan\frac{4}{3}\right)$

831. $y = Ke^{-x}\sin(\sqrt{3}x + \varphi) - \frac{1}{4}\cos 2x$

832. $y = e^{\frac{x}{2}} A\sin(x + \varphi) + \cos 5x$

833. $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x) + e^{x}$

834. $y = e^{-\frac{x}{2}} A\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}x + \varphi\right) + x^2 + 1$

835. $y = \frac{1}{13}\sin 2x + \frac{5}{13}\cos 2x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

836. $y = \frac{1}{2} - 0{,}381\, e^{1{,}37x} - 0{,}119\, e^{-4{,}37x}$

837. $x_2 = Kx_e\left\{1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\left[\frac{\tau_2 + \tau_1}{2\tau_1} e^{\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]\right\};\ \tau_1 = \frac{2T_2^2}{T_1},\quad \tau_2 = \frac{2T_2^2}{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}$

838. $y = C_1 e^{x} + K\sin(x + \varphi) - \frac{2}{15}\sin 2x + \frac{1}{15}\cos 2x$

839. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + \frac{26}{27}x - \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}x^3$

840. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{4x}$

Abbildung 20ff.
—, komplementäre 25
—, reelle 21
Ableitung 124ff., 126
—, höhere 160ff.
—, — partielle 373
—, links- und rechtsseitige 128
—, partielle 370, 372
— der Exponentialfunktion 158
— der logarithmischen Funktion 157
— der mittelbaren Funktion 151
— der Potenzfunktion 131
— einer Funktion in impliziter Darstellung 153ff., 380
— — — mit konstantem Faktor 135
— einer Summe 135
— eines Produktes 137
— eines Quotienten 139
— von sin x und cos x 145
— von tan x und cot x 146
Abszisse 17
abzählbar unendlich 24
d'ALEMBERT 433
allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 503
AMSLER, Polarplanimeter von 335
analytische Darstellung einer Funktion 30
Anfangsbedingung 501
angepaßte Koordinaten 395
aperiodischer Grenzfall 549
Arbeit des Wechselstromes 322
Arbeitsintegral 294, 421
arctan 450
Arcusfunktionen 200
Areafunktionen 210
Argument 26
— -bereich 22
arithmetisches Mittel, allgemeines 489
— —, einfaches 479
Ausflußzeit von Flüssigkeiten 324
ausgleichende Gerade 492
Ausgleichung bedingter Beobachtungen 478, 497
— direkter Beobachtungen 478, 487
— vermittelnder Beobachtungen 478, 492
Ausgleichungs-bedingung 477, 490
— -parabel n-ter Ordnung 496
— -rechnung 477

Beobachtungen, bedingte 497
—, direkte, gleicher Genauigkeit 478
—, —, verschiedener Genauigkeit 487
—, vermittelnde 492
Beschleunigung 195
beschränkt 77
bestimmt divergent 97
bestimmtes Integral 220
Bezugssystem 17
Bild 22
— einer Funktion $z = f(x; y)$ 366
Binomialreihe 448
Bogen-differential 345
— —, vektoriell 420
— -länge 244, 345
BRINELL 458

Cartesisches Blatt 345
— Koordinatensystem 17
CAUCHY 434
charakteristische Gleichung 543
cosh x 446
cos x 444

Dämpfungsgrad 548
Definitionsbereich 22, 26
— für Funktionen von mehreren Variablen 366
Differential, totales 376
— -gleichung, allgemeine Lösung 503
— —, Aufstellen 506
— —, Definition 502
— —, explizite 524
— —, geometrische Deutung 511
— —, gewöhnliche 510
— —, Grad 511
— —, homogene lineare 525
— —, implizite 513
— —, inhomogene lineare 524
— —, Integralkurve 503
— —, lineare 511
— —, — mit konstanten Koeffizienten 540

Differential-gleichung, lineare n-ter Ordnung 511
— —, Lösung 502
— —, Lösungs-ansatz 551
— —, — -kurve 503
— —, Ordnung 502
— —, 1. Ordnung 513
— —, 2. Ordnung 542
— —, partikuläre Lösung 503
— — einer Kurvenschar 511
— -operator, linearer 541
— -quotient 147 ff.
— -term, linearer 541
Differentiation, s. Ableitung
—, Grundregeln 133 ff.
— nach Logarithmieren 158
Differenz 65
— zweier Funktionen 133
— zweier Mengen 14
Differenzen, absteigende 66
— -folge 78
— -quotient 50, 125
— -schema 66
differenzierbar 127
disjunkt 14
divergent 96, 108
—, bestimmt und unbestimmt 97
Divergenz 430
Durchschnitt von Mengen 14

e 98 ff., 101
e^z 445
ebene Kurve, vektoriell 416
Eigenfrequenz 547, 561
Einschaltvorgang 527
Einslänge 36
elastische Linie 508, 532
Element einer Menge 13
Elliptisches Integral 465
Entropie 428
EULER 448
EULERsche Zahl 100
Evolute 359
Evolvente 359
Exponentialfunktion 44, 156
Extremwert 171
Extremwerte von Funktionen mehrerer Variabler 383, 385

Fadendifferential 394
Fehler, absoluter 470
—, durchschnittlicher 480
—, grober 469
Fehler, implizite Darstellung 378
—, mittlerer 480
—, — des allgemeinen arithmetischen Mittels 490
—, — des einfachen arithmetischen Mittels 483
—, relativer 470
—, scheinbarer 479
—, systematischer oder regelmäßiger 469
—, wahrer 470
—, zufälliger oder unregelmäßiger 469
— -fortpflanzungsgesetz für mittlere Fehler 484
— — für wahre Fehler 471
Fehler-gleichung 492
— -rechnung, Aufgaben 470
Feld, stationäres 418
— -vektor 418
Flächen-berechnung 393
— -differential 393
— -funktion 216
— -inhalt 232
— -trägheitsmoment 309
Folge, s. Zahlenfolge
Funktion 26 ff.
—, algebraische 44
—, allgemeiner Grenzwert einer 113
—, ganzrationale 41
—, gebrochenrationale 42, 121
—, gerade und ungerade 48
—, Stetigkeit einer 118 ff.
— mit n unabhängigen Variablen 365
— mit zwei unabhängigen Variablen 365
Funktionen, Gleichheit von 27
—, harmonische 57
—, innere und äußere 152
—, inverse 52
—, logarithmische 44, 156
—, mittelbare 34, 151
—, nichtrationale 44
—, periodische 56 ff.
—, rationale 41 ff.
—, rechts- und linksseitiger Grenzwert von 113
—, reelle 26
—, Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier 133
—, transzendente 44
—, trigonometrische 44, 145, 146
Funktionsgleichung 30
—, explizite und implizite Form 31
Funktions-leiter 39
— -wert 26

Gaussscher Fehlerintegral 464
Gegenbereich 22
Genauigkeit 480
Geschwindigkeit 195
Gewichte 488
Gewichts-einheit 489
— -einheitsfehler 490
Gitterpunkt 19
Gleichheit von Funktionen 27
— von Mengen 13
gleichmächtig 24
Glied einer Zahlenfolge 74, 75
graphische Differentiation 165
— Integration 330
Gregory-Newton, Interpolationsformel von 64ff., 69
Grenzwert 94ff., 116, 117
—, uneigentlicher 96
— einer Funktion 110ff.
— — —, allgemeiner 113
— — — für $x \to \pm\infty$ 120ff.
— einer Zahlenfolge 94ff., 96
— -sätze 103, 104
Größe 35
Grund-integrale 226
— -reihe 85, 86
Guldinsche Regel, 1. 307
— —, 2. 308

Halbwertszeit 103
hinreichende Bedingung 130
Hornersches Schema 140ff.
— —, vollständiges 162
Hyperbel 47
— -cosinus 206
— -cotangens 206
— -funktionen 205
— -sinus 206
— -tangens 206

Implizite Darstellung einer Funktion 378
infinitär 92
Inklusion 14
Integral, bestimmtes 220
—, unbestimmtes 218
— als Grenzwert einer Summe 221
— -funktion 217
— -kurve 503
— -sinus 463
Integrand 217
Integraph 336
Integration, graphische 330
Integration, maschinelle 335
—, näherungsweise 326
—, partielle 269
— durch Partialbruchzerlegung 276
— durch Substitution 248
Integrations-grenzen 219
— —, Vertauschung der 227
— -konstante 218
— -regeln 227
— -verfahren 247
Integrieren 217
Interpolation, Newtonsche 58ff.
Interpolationsformel von Gregory-Newton 64ff., 69
Intervall 15ff.
Isokline 514
Isoklinenverfahren 514

Jochpunkt 383

Kardioide 348
Kennkreisfrequenz 550
Ketten-linie 538
— -regel 152
Komplanation 246
konkav 170
Konstante 30
konvergent 96, 108
Konvergenz 430
—, absolute 432
—, bedingte 432
—, beständige 437
—, unbedingte 432
— -bereich 436
— -kriterium 431
— -radius 436
— -satz 436
konvex 170
Koordinate 17
Koordinaten-ebene 18
— -system, cartesisches 17
— —, Rechts-, Linkssystem 18
Kreis-abschnitt 457
— -bogen 450
— -evolvente 349, 363
— -frequenz 57
Kreuzprodukt 20
Kriechfall 550
Krümmung 357
Krümmungs-kreis 359
— -mittelpunkt 359
Kubatur 240, 352
Kurvendiskussion 177

Kurven-gleichung 30
— -schar 503

LAGRANGEsche Multiplikatorenregel 388, 390
LAGRANGEscher Multiplikator 388
Laufindex 75, 78
LEIBNIZ 432, 450
Leiter, reguläre 35
— -stufe 36
— -träger 36
Lemniskate 342
linearer Differentialoperator 541
Linienelement 514
Lösungs-ansatz 551
— -kurve 503
Lücke 178

MACLAURINsche Form 439
Mächtigkeit 24
Majorantenmethode 432
Mantelflächen 355
— -berechnung 246
Massenträgheitsmoment 313
Maßstab 39
Maximalfehler, absoluter 472
—, relativer 472
Maximum 171
— für Funktionen von zwei Variablen 382, 383
mehrfache Integrale 393
Menge 13
—, ebene Punkt- 17ff.
—, leere 13
—, lineare Punkt- 14ff.
—, räumliche Punkt- 17ff.
—, Zahlen- 14ff.
—, Zahlenpaar- 21
Mengen-operation 14
— -produkt 20
— -relation 13
Meßfehler 469
Methode der kleinsten Quadrate 478
Minimum 171
— für Funktionen von zwei Variablen 382, 383
Minoranten 433
Mittel, allgemeines arithmetisches 489
—, einfaches arithmetisches 479
— -wert durch Integration 291
Moment, statisches 297
—, Trägheits- 310
Momente von Bögen 402
— von Flächen 406
— von Volumina 411
Monotonie 48
— einer Zahlenfolge 77

Nachbereich 22
Näherungsfunktion 59
näherungsweise Integration 326
Nebenbedingungen 386
NEWTONsche Interpolation 58ff.
NEWTONsches Interpolationspolynom 60
Normalgleichungen 493
notwendige Bedingung 130
Null-folge 92
— -phasenwinkel 57
— -stelle 178

Ober-menge 14
— -reihe 433
— -summe 222
OHMsches Gesetz für Wechselstrom 560
Oktant 18
Ordinate 17
Ordnung einer arithmetischen Zahlenfolge 79
Ortsvektor 416

Parabel 45, 459
Parameter 31
— -darstellung 31, 338
Partial-bruchzerlegung 276
— -summen 106, 429
partielle Ableitungen 370, 372
— —, höhere 373
— Integration 269
Pendel, mathematisches 534
Periode 57
—, primitive 57
Phasenwinkel 57
Planimeter 335
Polar-koordinaten 339
— -planimeter 335
Polstelle 178
Potential-feld 425
— -funktion 425
Potenz-funktion 45
— -reihe 436
Produkt zweier Funktionen 133
— -regel 137
Punktmengen 14ff.
—, ebene 17ff.
—, lineare 14ff.
—, räumliche 17ff.

Quadrant 17
Quadratur 232
Quotient zweier Funktionen 133
Quotienten-kriterium 433
— -regel 139

radioaktiver Zerfall 103, 319
Raketenbewegung 509, 518
Randbedingung 532
Raum-inhaltsberechnung 240
—-kurve, vektoriell 417
Reaktionsgeschwindigkeit, chemische 323
Regel von de l'Hospital 197
Reihe 105ff., 108
—, alternierende 433
—, konvergente und divergente 108
—, Summe der unendlichen geometrischen 108
—, unendliche 429
—, unendliche geometrische 105ff., 107
Reihenresonanzkreis 558
Rektifikation 244
Rekursionsformeln 273
Resonanzfrequenz 561
Richtungsfeld 514
Rotations-körper 240, 305
— -paraboloid 369
rückläufige Skale 40
Rundwerte 87

Sattelpunkt 383
Scheibendifferential 396
scheinbarer Wert 478
Schmiegungsparabel 444
Schranke 77
Schubkurbelgetriebe 455
Schwarz, Satz von 373
Schwerpunkt 297
Schwerpunkte von Bögen 402
— von Flächen 406
— von Volumina 411
Schwingung, erzwungene 558
—, gedämpfte freie 546
—, harmonische 57
—, ungedämpfte freie 545
Sektorenformel 349
— von Leibniz 350
Simpsonsche Formel 326
sin x 443
sinh x 448
Skale 36
Spiegelablesung 451
Spirale des Archimedes 340
—, logarithmische 340

Stamm-funktion 217
— -kurve 165
statisches Moment 297
Steigung 62
—, mittlere 50
Steigung der Tangente 125
— einer Kurve 125
Steigungsspiegel 61
Steinerscher Satz 311
Stetigkeit 49, 118ff.
Streuungsmaß 480
Stromstärke, Effektivwert der 293
Strophoide 344
Stufen-punkt 176
— -sprung 86
Stütz-stelle 59
— -stellen, äquidistante 65
— -wert 59
Substitution hyperbolischer Funktionen 259
— trigonometrischer Funktionen 259
Substitutionsverfahren 247
Summe zweier Funktionen 133
Summen-regel 135
— -wert 431
— -zeichen 77
Symmetrie 178
symmetrische Kurven 47

Tangentenvektor 419
tan x 445
Taylor 439, 441
Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen 162
Teil-menge 14
— -summe 106, 429
Teilung 36, 39
Terrassenpunkt 176
totales Differential 376
Trägheitsmoment 310
—, äquatoriales 404
—, polares 405
Trapezformel 327
Trennen der Veränderlichen 516

Umgebung 16
Umkehr-abbildung 23
— -funktion 52
unbestimmt divergent 97
unbestimmtes Integral 218
unstetig 43, 118
Unter-menge
— -reihe 433
— -summe 222

Urbereich 22
Urbild 22

Variable 26
—, abhängige 26
Variation der Konstanten 525
Verbesserungsgleichung 492
Vereinigungsmenge 14
Verzinsung, stetige 101
Volumen-berechnung 396
— -bestimmung 240
Vorbereich 32
Vorzugszahlen 84ff., 86

Wahrscheinlichster Wert 478
Wechselstromarbeit 322
Wendepunkt 171, 174
Werte-bereich 22, 26
— — für Funktionen mehrerer Variabler 366
— -tabelle 28
Widerspruch 497
Wurf, senkrechter nach oben 321
Wurzel-ausdrücke 454
— -funktion 46
Wurzel-kriterium 434
— -ziehen 455

Zahlen-folge 74ff.
— —, alternierende 76
— —, arithmetische 78ff.
— —, beschränkte 77
— —, divergente und konvergente 96
— —, geometrische 81ff.
— —, Grenzwert einer 94ff., 96
— —, konstante 76
— —, Ordnung einer arithmetischen 79
— —, rekursive Darstellung 76
— —, Schranke einer 77
— —, Summe der Glieder einer 77
— —, unabhängige Darstellung 75
— —, wachsende, fallende 76
— -menge 14ff.
— -paar 17, 20
Zerfall, radioaktiver 103, 319
Zerfallskonstante 103
Zinsformel 87
Zugfestigkeit, Träger gleicher 320
Zuordnung 15, 21