Mathematik

Klasse 7

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 7

Autoren:
Horst Bruchhold, Günter Fanghänel, Lothar Flade, Manfred Gimpel, Elke Goldberg, Hartmut Knopf, Henry-Joachim Kühn, Hella Reichenbach, Winfried Schietrumpf, Jürgen Vortheil, Werner Walsch

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin 1989

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter der Leitung von Prof. Dr. sc. Werner Walsch

Autoren:
Prof. Dr. sc. Werner Walsch – Einleitung
Dr. sc. Günter Fanghänel, Prof. Dr. sc. Werner Walsch – Stoffgebiet 1
Dr. sc. Lothar Flade, Dr. sc. Hartmut Knopf – Stoffgebiet 2
Hella Reichenbach, Jürgen Vortheil – Stoffgebiet 3
Dr. Henry-Joachim Kühn, Prof. Dr. sc. Werner Walsch – Stoffgebiet 4
Dr. Horst Bruchhold, Prof. Dr. sc. Manfred Gimpel – Stoffgebiet 5
Dr. Elke Goldberg, Dr. Winfried Schietrumpf – Stoffgebiet 6
Prof. Dr. sc. Manfred Gimpel – Stoffgebiet 7

Gutachter und Berater:
Dr. Renate Blachowiak, Dr. sc. Günter Fanghänel, Reiner Franck, Ruth Hense, Christa Marks, Marga Niecke, Hans-Joachim Röder, Prof. Dr. sc. Siegfried Schneider, Rainer Schwebs, Wilfried Schwerin, Dr. Werner Tietz

Redaktion: Heinz Junge

Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 7 /
Autoren: Horst Bruchhold ... – 3. Aufl.
– Berlin : Volk u. Wissen, 1989. – 215 S.
NE: Bruchhold, Horst [Mitarb.]

ISBN 3-06-002159-7

3. Auflage

Lizenz-Nr. 203 · 1000/89 (DN 00 21 59–3)
Printed in the German Democratic Republic
Schrift: 9/10 p Times
Satz: Druckerei Neues Deutschland
Druck und Buchbinderei: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Einband: Erika Kerscher
Typographische Gestaltung: Atelier vwv
Redaktionsschluß: 5. Sept 1988
LSV 0671
Bestell-Nr. 709 139 2
01000

Inhalt

Einleitung

1. Hinweise zum Aufbau und zur Verwendung der Unterrichtshilfen

Die vorliegenden Unterrichtshilfen beziehen sich auf den mit dem Schuljahr 1985/86 in Kraft getretenen *Lehrplan für die Klasse 7.* Er enthält gegenüber dem davor gültigen eine Reihe qualitativer Veränderungen. Mit ihm wird die in den vorangegangenen Klassenstufen angelegte inhaltliche und methodisch-didaktische Linienführung kontinuierlich fortgesetzt.
Die Unterrichtshilfen geben *Hinweise* für die Gestaltung des Unterrichtsprozesses und *Empfehlungen,* die *nicht verbindlich* sind. Es ist in jedem Falle notwendig, die hier gemachten Vorschläge unter Berücksichtigung der jeweiligen Klassensituation zu prüfen und gegebenenfalls zu modifizieren.
Die Unterrichtshilfen sind so angelegt, daß *generelle* Zielstellungen, Orientierungen und Linienführungen in *Vorbemerkungen* umrissen werden (zum gesamten Jahreslehrgang, zu Stoffgebieten und Stoffabschnitten).
Ohne Kenntnis des dort Gesagten ist eine richtige Einordnung der Vorschläge und Hinweise zu den einzelnen Lerneinheiten nur schwer möglich. *Der Verwendung dieser Einzelhinweise sollte deshalb das Studium der jeweiligen Vorbemerkungen unbedingt vorangehen.*
In den Unterrichtshilfen findet man an verschiedenen Stellen *Aufgaben* oder Verweise auf Aufgaben, die im Lehrbuch enthalten sind. Dabei sind drei Kategorien zu unterscheiden:

a) „Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen", die absichtlich nicht einzelnen Stoffgebieten zugeordnet, sondern in der *Einleitung* enthalten sind. Jeder Lehrer muß in Abhängigkeit von der konkreten Situation in seiner Klasse entscheiden, welche Aufgaben er wann an die Schüler heranbringen wird.
(Die Anzahl der Aufgaben reicht natürlich nicht aus. Sie sind als Muster zu verstehen, nach denen der Lehrer sich weitere, ähnliche Aufgaben selbst bilden kann.)

b) „Kontrollaufgaben" in den *Vorbemerkungen* zu den Stoffgebieten (bzw. Stoffabschnitten), durch die das zu erreichende Niveau im Wissen und Können der Schüler wenigstens partiell charakterisiert werden soll. (Eine vollständige Beschreibung der angestrebten Bildungs- und Erziehungsergebnisse durch derartige Aufgaben ist *nicht* möglich. Wichtige allgemein-geistige Fähigkeiten beispielsweise sind durch Aufgaben allein kaum zu fixieren. Der Lehrer sei hierzu auf die verbalen Zielformulierungen hingewiesen.)

c) „Kontrollaufgaben", die den *Lerneinheiten* zugeordnet sind, durch die die vorangestellten Ziele der jeweiligen Lerneinheit eine zusätzliche Präzisierung erfahren. Diese Aufgaben sind oft auch als Vorschläge für die Erstfestigung im Unterricht oder in der häuslichen Arbeit gedacht. Sie stellen im allgemeinen Anforderungen dar, deren Bewältigung für ein erfolgreiches Weiterlernen wesentlich ist. (Gelegentlich werden darüber hinaus auch Aufgaben genannt, die zur Förderung leistungsstarker Schüler geeignet sind.)

In den Unterrichtshilfen werden einige Abkürzungen mit folgender Bedeutung gebraucht:
LP für Lehrplan; LB für Lehrbuch; LE für Lerneinheit; UH für Unterrichtshilfen.

Beispiele:
LP 55 heißt: Siehe Lehrplan, Seite 55;
LB 60 heißt: Siehe Lehrbuch, Seite 60;
UH 50 heißt: Siehe (diese) Unterrichtshilfen, Seite 50.

Dabei erfolgt die Angabe der Lehrbuchseite nur dann, wenn sich die zitierte Aufgabe, das zitierte Beispiel, Bild usf. *nicht* in der entsprechenden Lerneinheit des Lehrbuches befindet oder wenn es für die Eindeutigkeit des betreffenden Hinweises notwendig ist.

2. Zum Mathematikunterricht in Klasse 7

Die im Lehrplan enthaltenen sieben Stoffgebiete gruppieren sich im wesentlichen um folgende vier Schwerpunkte:

(1) *Weiterer Aufbau der Zahlenbereiche; Vervollkommnung des Rechnenkönnens*
Die Schüler lernen die *rationalen Zahlen* und das Rechnen mit ihnen kennen. Darüber hinaus wird ihnen deutlich gemacht, daß es relativ einfache mathematische Problemstellungen gibt (z. B. die Umkehrung des Quadrierens), zu deren Lösung die rationalen Zahlen nicht ausreichen.
Die Schüler lernen Beispiele für *irrationale Zahlen* kennen und erfahren, daß die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen die Menge der *reellen Zahlen* bilden. Damit findet der Aufbau des Zahlenbereichs einen vorläufigen Abschluß.
In der weiteren Vervollkommnung des *Rechnenkönnens* kommt der Klasse 7 besondere Bedeutung zu. Mit der Einführung und der folgenden Verwendung von *Taschenrechnern* steht den Schülern nunmehr ein leistungsfähiges Rechenhilfsmittel zur Verfügung, dessen sinnvolle Nutzung ein wesentliches Element des Rechnenkönnens darstellt. Seine Potenzen können aber nur dann voll zur Wirkung kommen, wenn andere Komponenten des Rechnenkönnens (z. B. Fertigkeiten im Kopfrechnen, Entwicklung des „Zahlengefühls", Streben nach rationellem Vorgehen, Angeben von Resultaten mit sinnvoller Genauigkeit, Fähigkeit und Bereitschaft zu kritischer Selbstkontrolle u. a.) nicht vernachlässigt werden. Sonst entsteht die Gefahr, daß die Schüler vom Taschenrechner abhängig werden und ihm blind vertrauen.

(2) *Arbeiten mit Gleichungen*
Die Schüler lernen erstmalig ein *System von Umformungsregeln* kennen (gestützt auf den Begriff der Äquivalenz von Gleichungen), mit dessen Hilfe sie lineare Gleichungen mit einer Variablen lösen können. Neben dieser kalkülmäßigen Seite kommt inhaltlichen Aspekten des Arbeitens mit Gleichungen und Ungleichungen nach wie vor große Bedeutung zu (z. B. Ausdrücken von Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen mit Hilfe von Gleichungen; Lösen von Gleichungen durch Anwenden von Definitionen oder Sätzen bzw. durch systematisches Probieren).

(3) *Ebene Geometrie*
Die schon in vorangegangenen Klassen enthaltene Behandlung von wesentlichen Elementen der *ebenen Kongruenzgeometrie* wird weitergeführt und zu einem relativen Abschluß gebracht. Die Schüler lernen ein System von Begriffen und Sätzen sowie einige darauf beruhende Konstruktionsverfahren zum Thema „Kreis" kennen.

Die Bedeutung dieses Stoffgebiets liegt dabei nicht so sehr in seinen inhaltlichen Details (sie sind für sich genommen von recht unterschiedlicher Gewichtigkeit), sondern mehr in den Möglichkeiten, die es für die Entwicklung allgemeinerer mathematischer Denk- und Arbeitsweisen bietet (z. B. Untersuchen von Existenz- und Eindeutigkeitsfragen; Fallunterscheidungen; Definieren, Beweisen). Dies ist bei der Gestaltung des Unterrichtsprozesses unbedingt zu beachten.

(4) *Körperdarstellung und Körperberechnung*
Die Behandlung von geometrischen Körpern erreicht in Klasse 7 vor allem dadurch eine neue Qualität, daß die Schüler lernen, einfache ebenflächig begrenzte Körper im Schrägbild bzw. im Zweitafelbild darzustellen. (Damit werden zugleich theoretische Grundlagen für das Fach „Technisches Zeichnen" vermittelt.)
Darüber hinaus erweitern die Schüler ihre Kenntnisse über geometrische Körper sowie ihr Können im Berechnen derselben durch die Betrachtung von Prismen und Kreiszylindern.

Im Zusammenhang mit der Behandlung der im Lehrplan vorgegebenen Inhalte ist großer Wert darauf zu legen, daß bei den Schülern wichtige fachspezifische und fachübergreifende Fähigkeiten weiterentwickelt und auch damit verbundene erzieherische Zielsetzungen angestrebt werden. Dazu gehören:

a) *Logische Fähigkeiten, kritische Denkhaltung*
Die Schüler sollen beispielsweise in der Lage sein, ihre Vorgehensweisen beim Lösen von Aufgaben zu begründen, indem sie sich auf Definitionen oder Sätze stützen; sie sollen auf den mathematischen Stoff bezogene Aussagen beurteilen, begründen bzw. widerlegen können; sie sollen einfache Beweisaufgaben bewältigen, wobei nicht unbedingt eine „normierte" Beweisdarstellung zu verlangen ist; sie sollen offensichtliche logische Fehler bemerken; sie sollen bemüht sein, Fehler zu vermeiden bzw. sie aufzudecken und zu korrigieren.

b) *Heuristische Fähigkeiten, aktives Lösungsverhalten*
Die Schüler sollen an das Lösen problemhafter Aufgaben (z. B. Anwendungsaufgaben, Konstruktionsaufgaben, Beweisaufgaben) möglichst planmäßig herangehen (nach dem Grobschema „Analyse – Erarbeitung des Lösungsweges – Durchführen der Lösung; begleitende Kontrolle"); sie sollen bestimmte „Hilfsschritte" für das Lösen derartiger Aufgaben kennen und nutzen (z. B. Einführen von Variablen, Anfertigen von Skizzen, Aufstellen von Tabellen); sie sollen beim Lösen von Aufgaben Ausdauer und Beharrlichkeit entwickeln.

c) *Funktionales Denken*
Die Schüler sollen funktionale Zusammenhänge und Abhängigkeiten verstehen; sie sollen daran gewöhnt sein, nach der Abhängigkeit einer Größe von anderen Größen zu fragen; sie sollen funktionale Vorstellungen für das Suchen oder Überprüfen von Aufgabenlösungen nutzen; sie sollen funktionale Abhängigkeiten beschreiben können.

d) *Fähigkeiten im räumlichen Vorstellen*
Die Schüler sollen einfache räumliche Gebilde skizzieren bzw. zeichnen können und sich dabei um Genauigkeit und Sauberkeit bemühen; sie sollen räumliche Vorstellungen aus Zeichnungen reproduzieren bzw. mit ihnen operieren können.

e) *Sprachliche Fähigkeiten*
Die Schüler sollen die mathematische Terminologie, Symbolik und Ausdrucksweise verstehen; sie sollen in der Lage sein, sich unter Benutzung fachsprachlicher Ausdrucksmittel angemessen über den mathematischen Stoff zu äußern und sich dabei um Klarheit und Präzision bemühen.

(Dabei darf die Entwicklung des fachsprachlichen Könnens der Schüler nicht durch überspitzte Forderungen hinsichtlich der formalen Strenge ihrer Formulierungen behindert werden.)

Das Hauptmittel zur Realisierung der im Lehrplan fixierten Ziele ist ein geeignetes **Arbeiten mit Aufgaben**. Es zielt darauf ab, solche Schülertätigkeiten zu organisieren, deren erfolgreiche und möglichst selbständige Ausführung das Erreichen der Ziele in hohem Grade wahrscheinlich macht.
Das Lehrbuch entspricht dieser Strategie durch seine tätigkeitsorientierte Gestaltung: Problemstellungen, Schüleraufträge und vielfältige Aufgaben zu den einzelnen Lerneinheiten sollen dazu anregen, die Schüler in *allen* didaktischen Funktionen zu aktiver Auseinandersetzung mit dem mathematischen Stoff zu führen. Große Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang auch den „Komplexen Übungen“ zu, die in besonderem Maße das *Analysieren* der Aufgaben und das *Suchen* nach geeigneten Lösungswegen erfordern (und nicht nur das Arbeiten nach einem bekannten Muster), wodurch entsprechende Fähigkeiten entwickelt werden können.

3. Zur Arbeit mit dem Lehrbuch

Das Lehrbuch ist das wichtigste Hilfsmittel zur Vorbereitung und Durchführung des Unterrichts. Bei den Überlegungen zu seiner Verwendung sind zwei Aspekte zu unterscheiden:
a) die Nutzung durch den Lehrer;
b) die Nutzung durch die Schüler.

Der *Lehrer* hat mit dem Lehrbuch eine Interpretation des Lehrplans in der Hand, die ihm Orientierungen sowohl über den zu vermittelnden Stoff als auch über das damit verbundene Anforderungsniveau gibt. Durch die „methodische Aufbereitung“ des Lehrbuchs kann der Lehrer aus ihm aber auch vielfältige Anregungen für die Gestaltung des Unterrichtsprozesses entnehmen, z. B. Problemstellungen, mögliche Schülertätigkeiten, Muster für Lösungsdarstellungen.
Dies sollte aber nicht so verstanden werden, daß das Lehrbuch Seite für Seite „abgearbeitet“ werden könnte. Der Lehrer muß stets unter Berücksichtigung der konkreten Situation entscheiden, was er dem Lehrbuch direkt entnehmen kann, welche Elemente (z. B. Schüleraufträge, Musterlösungen, Satzformulierungen) er besser abwandelt oder umordnet und welche er vielleicht übergeht.
Eine vom Lehrbuch *stark* abweichende Unterrichtsgestaltung ist allerdings *nicht* zu empfehlen, weil es dabei zu wesentlichen Abweichungen vom Lehrplan kommen kann. Außerdem besteht eine der Aufgaben des Mathematikunterrichts gerade darin, die Schüler an das Fachbuch *heranzuführen*.

Den *Schülern* dient das Mathematik-Lehrbuch als Aufgabensammlung sowie als Erkenntnisquelle. Es ist die Aufgabe des Lehrers, die Schüler zu vielseitiger Arbeit mit dem Lehrbuch anzuregen, aufzufordern und anzuleiten.
Dazu gehört zum Beispiel:
- das gemeinsame Aufsuchen von Definitionen, Sätzen, Musterlösungen usw., die im Unterricht behandelt worden sind (nicht unbedingt in der gleichen Formulierung, so daß auch Vergleiche möglich werden);
- das Ausgehen von einer (meist kurzen) Lehrbuchpassage, aus deren gemeinsamer Betrachtung sich eine Fragestellung oder ein Ziel ergibt, das im weiteren Unterricht verfolgt werden kann;

- die Vorbereitung auf kurze Schülervorträge, mündliche oder schriftliche Leistungskontrollen mit Hilfe ganz bestimmter Lehrbuchabschnitte;
- das Erarbeiten von kleineren Stoffelementen (z. B. einer Definition oder einer Rechenvorschrift) aus dem Lehrbuch durch die Schüler mit anschließender Anwendung beim Lösen von Aufgaben.

Die generelle Orientierung bei der Arbeit mit dem Lehrbuch muß für die Schüler sein, sich um inhaltlich richtiges *Erfassen* des Stoffes zu bemühen, nicht nur um ein formales (wörtliches) Übernehmen. Das Heranführen der Schüler an die Arbeit mit dem Lehrbuch erfordert im übrigen, das Schülerheft vorwiegend als *Arbeitsheft* zu verwenden. Natürlich besitzt es auch eine Funktion als Wissensspeicher, diese sollte aber stets in richtiger Abstimmung mit dem Lehrbuch gesehen werden. Ständiges *Abschreiben* von Definitionen, Sätzen usw. aus dem Lehrbuch in das Heft (auf dem Umweg über die Tafel) ist nicht nur unökonomisch, zeitaufwendig und wenig bildend, es orientiert die Schüler auch zu stark vom Lehrbuch weg. Wesentlich sinnvoller ist es, die Schüler über das Lehrbuch auch an *gedruckte* Wissensspeicher (z. B. [B3]) heranzuführen.

4. Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

Die folgenden Aufgaben repräsentieren *elementare Anforderungen* an das Wissen und Können von Schülern der Klasse 7. Die Bewältigung dieser Anforderungen (das *rasche und sichere Lösen* derartiger Aufgaben) ist eine wichtige Voraussetzung für das Erreichen der Lehrplanziele in Klasse 7 und auch in höheren Klassen.

Rechnen (vorwiegend im Kopf)

1. Berechne!

a) $-3+5$ **b)** $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{4}$ **c)** $15:\frac{1}{2}$ **d)** $(-16):(-4)$ **e)** $0{,}5-\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ **g)** $1{,}2:3$ **h)** 13^2 **i)** $0{,}3^2$ **k)** $\sqrt{121}$

2. Berechne!

a) $4\cdot(8+7)$ **b)** $9-6:3$ **c)** $(1{,}8-1{,}3):5$

d) $\sqrt{81}\cdot 0{,}5$ **e)** $12+8:\sqrt{16}$ **f)** $\sqrt{12\cdot 3}$

g) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt{0{,}04}$ **h)** $4+5^2$ **i)** $(4+5)^2$ **k)** $\sqrt{\frac{9}{4}}$

3. Ordne der Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

a) $0{,}4;\ -\frac{2}{5};\ -12;\ +1{,}6;\ \frac{7}{3}$ **b)** $1{,}7^2;\ -\sqrt{10};\ 4;\ -5;\ \sqrt{18}$

4. Berechne!

a) 7 % von 900 **b)** 15 % von 400

c) 25 % von 12 **d)** 300 % von 60

5. Wieviel Prozent sind

a) 18 von 300; **b)** 35 von 70;

c) 120 von 30; **d)** 42 von 600?

6. Berechne den Grundwert!

a) 12 % entsprechen 48 **b)** 20 % entsprechen 1,4

c) 150 % entsprechen 1500 **d)** 9 % entsprechen 27

Gleichungen und Ungleichungen

(Bei den meisten der folgenden Aufgaben ist vom Lehrer jeweils noch ein bestimmter Grundbereich festzulegen.)

1. Löse folgende Gleichungen!

a) $3{,}7 + x = 4{,}3$ **b)** $65 - a = 42$ **c)** $13 \cdot b = 52$ **d)** $8 : y = 16$
e) $z : 0{,}5 = 20$ **f)** $z : 6 = 8 : 12$ **g)** $5a - 9 = 11$ **h)** $6y + 13 = 10$
i) $3{,}5 - 2c = 4{,}3$ **k)** $\frac{3}{4} + 5z = -2{,}25$

2. Ermittle alle rationalen Zahlen, die folgende Gleichungen erfüllen!

a) $|x| = 1{,}5$ **b)** $|x| - 3 = 1$ **c)** $|x| + 2{,}5 = \frac{5}{2}$ **d)** $|x| + 6 = 3$
e) $|x - 2| = 5$ **f)** $2x + 0{,}6 = \frac{3}{5} + 2x$ **g)** $4 - 3x = 7 - 3x$ **h)** $x^2 = 16$
i) $x^2 - 6 = 19$ **k)** $x^2 + 2 = 1$

3. Welche natürlichen (gebrochenen; rationalen; ganzen) Zahlen erfüllen folgende Ungleichungen?

a) $x + 3 < 7$ **b)** $5 - a > 1$ **c)** $3 \cdot b < 10$ **d)** $18 : y > 3$
e) $z : 5 < 1$ **f)** $3 \cdot x < 0$ **g)** $y > y^2$ **h)** $|z| < 3$
i) $|a| + 7 < 5$ **k)** $4 : x > 4$

Berechnung ebener Figuren

1. Berechne den Flächeninhalt der angegebenen Figuren! (Bei den Größen soll es sich um Meßwerte handeln, so daß die Ergebnisse jeweils mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben sind!)

a) Rechteck mit $a = 4{,}8$ m und $b = 3{,}5$ m
b) Quadrat mit $a = 38$ cm
c) Trapez mit $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $c = 6$ cm, $d = 13$ cm und $h = 12$ cm
d) Kreis mit $d = 75$ m
e) Dreieck mit $a = 9{,}6$ cm und $h_a = 5{,}4$ cm

2. Berechne den Umfang der Figuren 1a) bis d)!

3. Berechne die jeweiligen Radien der Kreise, von denen bekannt sei:

a) $u = 20$ cm; **b)** $u = 295$ m; **c)** $u = 8{,}3$ km
d) $u = 1{,}00$ m; **e)** $A = 47\ \text{cm}^2$; **f)** $A = 3000\ \text{m}^2$;
g) $A = 7{,}5\ \text{km}^2$; **h)** $A = 1{,}00\ \text{m}^2$!

Berechnung von Körpern

1. Berechne das Volumen der im Schrägbild (Bild 0.1) skizzierten Körper! (Bei den Größen soll es sich um *genaue* Werte handeln.)

a) $a = 10$ cm; $b = 6{,}0$ cm; $c = 30$ cm
b) $a = 15$ cm; $b = 28$ cm; $c = 20$ cm; $d = 25$ cm
c) $a = 11{,}3$ m; $b = 20{,}0$ m; $c = 8{,}0$ m; $d = 8{,}0$ m

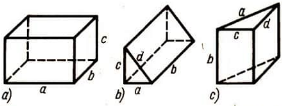


Bild 0.1

2. Berechne den Oberflächeninhalt der Körper 1a) bis c)!

3. Berechne das Volumen der geraden Kreiszylinder mit Hilfe der gegebenen Größen!

a) $r = 4{,}7$ cm; $h = 8{,}5$ cm **c)** $r = 25$ cm; $h = 0{,}55$ cm
b) $d = 6{,}3$ m; $h = 12{,}8$ m **d)** $A_G = 4{,}8\ \text{m}^2$; $h = 0{,}85$ m

4. Berechne den Oberflächeninhalt der Körper 3a) bis d)!

Ebene Geometrie

1. Bestimme bei den Figuren a) bis d) des Bildes 0.2 jeweils die Größe der Winkel β, γ und δ! Begründe!

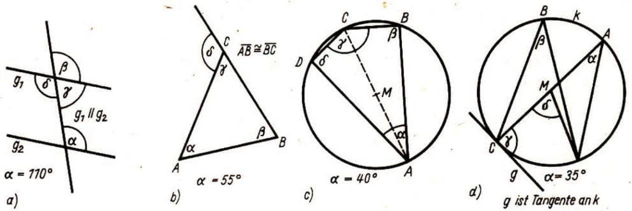


Bild 0.2

2. Konstruiere jeweils ein Dreieck ABC aus den gegebenen Stücken! In welchen Fällen ist die Konstruktion nicht eindeutig ausführbar? In welchen Fällen ist die Konstruktion unmöglich? Begründe!
   a) $a = 5$ cm; $b = 2$ cm; $c = 4$ cm
   b) $a = 6$ cm; $b = 8$ cm; $\gamma = 30°$
   c) $a = 6$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 20°$
   d) $a = 7$ cm; $b = 2$ cm; $c = 3$ cm
   e) $c = 5$ cm; $\alpha = 110°$; $\beta = 95°$
   f) $\alpha = 70°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 80°$

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\alpha = 120°$!
   Konstruiere den Umkreis dieses Dreiecks!
   Wie groß ist sein Radius?

4. Zeichne einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm!
   a) Konstruiere eine Tangente an diesen Kreis durch einen Punkt A des Kreises!
   b) Lege einen Punkt B fest, der vom Mittelpunkt des Kreises 7 cm entfernt sein soll! Konstruiere die Tangenten von B an den Kreis!

Darstellende Geometrie

1. Stelle im Schrägbild (mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$) dar
   a) einen Quader mit den Kantenlängen $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm;
   b) eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Grundkante $a = 5$ cm und deren Höhe $h = 7$ cm lang ist;
   c) ein dreiseitiges Prisma mit den Grundkanten $a = 4{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $c = 6$ cm und der Höhe $h = 8$ cm!

2. Stelle die Körper 1a) bis c) im Zweitafelbild dar! Bestimme anhand des Bildes von 1b) durch Konstruktion die wahre Länge einer Seitenkante!

Übersicht zur Jahresstoffverteilung

	Stoffabschnitte	Anzahl der Stunden
1.1.	Einführung in den Gebrauch eines Taschenrechners und Wiederholung des Rechnens mit Verhältnisgleichungen	15
1.2.	Prozentrechnung	23
2.1.	Der Begriff „rationale Zahl"	3
2.2.	Ordnung rationaler Zahlen	4
2.3.	Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	10
2.4.	Multiplikation und Division rationaler Zahlen	8
2.5.	Übungen mit dem Taschenrechner	3
2.6.	Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung	3
2.7.	Komplexe Übungen	6
3.1.	Äquivalente Gleichungen	6
3.2.	Übungen im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	15
4.1.	Quadrieren	3
4.2.	Die Quadratwurzel	8
4.3.	Komplexe Übungen	2
5.1.	Projektionsbegriff; Projektionsarten; schräge Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$)	5
5.2.	Senkrechte Eintafelprojektion	9
5.3.	Senkrechte Zweitafelprojektion	11
5.4.	Komplexe Übungen	5
6.1.	Definition des Kreises; Sätze über den Kreis	16
6.2.	Kreisberechnung	6
6.3.	Komplexe Übungen	7
7.1.	Prismen und Kreiszylinder	7
7.2.	Komplexe Übungen	5

Geplante Unterrichtswochen: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Stoffgebiet 1

Elektronischer Taschenrechner; Anwendung von Verhältnisgleichungen

Vorbemerkungen

Das Stoffgebiet 1 der Klasse 7 besteht aus zwei deutlich voneinander unterschiedenen Teilen, dem Stoffabschnitt 1.1., in dem die Einführung des elektronischen Taschenrechners im Zentrum steht, und dem Stoffabschnitt 1.2., der Prozentrechnung. Beide Stoffabschnitte sind durch das in Abschnitt 1.1. zu wiederholende Lösen von Verhältnisgleichungen miteinander verbunden.

Das **Schwergewicht des Stoffabschnittes 1.1.** liegt auf dem Vertrautmachen der Schüler mit dem Taschenrechner und ihrer Befähigung, mit diesem leistungsfähigen Hilfsmittel die Grundrechenoperationen mit natürlichen und gebrochenen Zahlen (in Dezimaldarstellung) schnell und sicher ausführen zu können. Dabei sollen sie Verständnis für die Arbeitsweise ihres Taschenrechners erwerben, seine Besonderheiten, seine Vorzüge und Grenzen genau kennenlernen. Das Lehrbuch führt in das Arbeiten mit dem Taschenrechner anhand des Schulrechners SR 1 ein. Auf seine Eigenheiten (Vorrang- und Konstantenautomatik, Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen, Abschneiden bzw. Runden von Ziffern bei Ergebnissen, die mehr als 5 bzw. 8 Ziffern haben) wird dabei hingewiesen.
Falls die Schüler im Unterricht mit Rechnern anderer Typen arbeiten, können an einigen Stellen Unterschiede zu den Lehrbuchdarstellungen auftreten. Hierauf muß der Lehrer achten. Für einige typische Fälle werden nachfolgend an entsprechender Stelle Hinweise gegeben, ohne daß es möglich ist, die Vielfalt der existierenden Rechnertypen im Auge zu behalten.
Von besonderer Bedeutung ist die Befähigung und Gewöhnung der Schüler zum Kontrollieren ihrer Ergebnisse, wozu Überschläge, Abschätzungen und Vergleiche mit der Erfahrung zu nutzen und die erforderlichen Rechnungen vorrangig im Kopf oder halbschriftlich auszuführen sind. Auf die Herausbildung der Gewohnheit, mit ihrem Rechner sorgsam umzugehen, ist besonderer Wert zu legen.
Die angestrebte – und von den Schülern meist gern praktizierte – umfassende Nutzung des Taschenrechners darf nicht zu wahllosem Probieren durch die Schüler führen, sondern muß einhergehen mit einer sorgfältigen Planung des Lösens der jeweiligen Aufgabe. Dabei hat sich das Aufstellen und Abarbeiten von Ablaufplänen, das wesentliche Züge einer algorithmischen Arbeitsweise beinhaltet, bewährt. Gleichzeitig sollten in diesem Stoffabschnitt auch genügend Aufgaben *ohne* Benutzung des Taschenrechners gelöst werden.

Das **Hauptanliegen des Stoffabschnitts 1.2.** besteht darin, die Schüler mit dem Prozentbegriff vertraut zu machen und sie zu vollem *inhaltlichem Verständnis* der Beziehungen zwischen Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert zu führen. Sie sollen *Prozentangaben richtig verstehen* und deuten können und darüber hinaus auch befähigt werden, *selbständig Prozentberechnungen auszuführen*. Von besonderer Bedeutung ist dabei das Bewältigen von Anwendungsaufgaben: das gründliche Analysieren der jeweiligen Aufgabenstellung durch die Schüler, das darauf basierende Bestimmen der zu berechnenden Größe und eines geeigneten Lösungsweges, das Ermitteln der Lösung, das Kontrollieren derselben sowie ihre Interpretation.

Die Schüler sind zu befähigen, für das Lösen von Prozentaufgaben auch den Taschenrechner zu benutzen, falls die auftretenden Zahlen dies als zweckmäßig erscheinen lassen. Genau so wichtig ist es aber, daß die Schüler Prozentaufgaben mit einfacheren Zahlen *im Kopf* lösen können. Dabei sollen sie sich u.a. auf Kenntnisse über die sogenannten „bequemen Prozentsätze" stützen, um beispielsweise Überschlagsrechnungen oder Abschätzungen rasch und sicher ausführen zu können.

Kontrollaufgaben

1. Berechne *ohne* Verwendung eines Taschenrechners!

a) $4300 + 850$ **b)** $458 - 63$ **c)** $56 \cdot 8$
d) $44{,}6 + 22{,}5$ **e)** $5{,}6 - 3{,}7$ **f)** $49 : 4$
g) $2{,}4 \cdot 7$ **h)** $0{,}35 : 7$ **i)** $17{,}4 - 7{,}04$
k) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ **l)** $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$ **m)** $\frac{4}{7} : \frac{10}{21}$

2. Berechne unter Verwendung des Taschenrechners!

a) $24{,}56 + 579{,}31 - 402{,}07$ **b)** $0{,}0073 + 0{,}068 - 0{,}00034$
c) $5673 \cdot 42{,}78$ **d)** $0{,}78 : 68{,}4$
e) $89563 \cdot 75891$ **f)** $0{,}0067 : 89534$

3. Berechne *ohne* Verwendung eines Taschenrechners!

a) $14 + 3 \cdot 7$ **b)** $(14 + 3) \cdot 7$ **c)** $14 \cdot 3 + 7$

4. Welche Operationszeichen müssen zwischen die Zahlen 5, 8 und 11 gesetzt werden, damit 5 8 11 = 51 zu einer wahren Aussage wird?

5. Setze zwischen die nachfolgend angegebenen Zahlen Klammern und Operationszeichen so, daß eine wahre Aussage entsteht!

a) 6 2 4 = 16 **b)** 17 5 3 = 66 **c)** 9 7 2 = 45

6. Berechne mit Hilfe des Taschenrechners!

a) $(67{,}97 - 32{,}5) \cdot 28{,}4$ **b)** $89{,}6 + 34{,}2 \cdot 0{,}52$ **c)** $17{,}8 \cdot 13{,}4 - 5{,}78$
d) $756 + 43 \cdot 0{,}67$ **e)** $22{,}3 : 87{,}4 - 0{,}06$ **f)** $(56{,}78 - 56{,}63) : 4$

7. Berechne *ohne* Verwendung eines Taschenrechners!

a) $\frac{14 \cdot 9}{8}$ **b)** $\frac{14 - 9}{8}$ **c)** $\frac{52 \cdot 18}{12 \cdot 13}$

8. Berechne mit Hilfe des Taschenrechners!

a) $\frac{2{,}89 \cdot 45{,}03}{14 \cdot 7}$ **b)** $\frac{0{,}0053 \cdot 0{,}0078}{0{,}067}$ **c)** $\frac{87{,}32 \cdot 30{,}75}{5{,}98 \cdot 7{,}33}$

9. Ein PKW verbraucht für eine 230 km lange Strecke 18 l Kraftstoff. Wieviel Kraftstoff würde er für eine 320 km lange Strecke verbrauchen, wenn der gleiche Durchschnittsverbrauch angenommen wird?

10. 30 dt Zuckerrüben ergeben 5 dt Zucker. Wieviel Zucker erhält man aus a) 120 dt, b) 200 dt, c) 5000 dt Zuckerrüben?
Wieviel Dezitonnen Zuckerrüben muß man verarbeiten, um a) 50 dt, b) 300 dt, c) 800 dt Zucker zu erhalten?

Die Aufgaben 11 bis 22 sollten die Schüler *im Kopf* (*ohne* Verwendung des Taschenrechners) lösen.

11. Berechne
a) 10 % von 3,5 kg; b) 18 % von 200 m!

12. Wieviel Prozent sind
a) 7,5 l von 10 l; b) 24 M von 600 M ?

13. Wie groß ist G, wenn man weiß:
a) 25 % von G sind 4 M; b) 7 % von G sind 21 kg ?

14. Berechne *näherungsweise*!
a) 9 % von 283 b) 48 % von 19

15. Wieviel Prozent *(näherungsweise)* sind
a) 2,2 von 23; b) 88 von 102 ?

16. Wie groß ist G *etwa*, wenn man weiß:
a) 11 % von G sind 53,6 cm; b) 24 % von G sind 15,20 M ?

17. Wieviel sind 36 % von G, wenn 12 % von G 54 M sind?

18. Ist es richtig, daß
a) 8,5 % von 150 l etwa 15 l; b) 29 M von 129 M etwa 10 %
sind?

19. Beim Mahlen von Roggen beträgt die Mehlausbeute 75 %. Wieviel Tonnen Roggen werden gebraucht, um 30 t Mehl zu gewinnen?

20. In einem Meßgerätewerk konnte durch technische Verbesserungen die Produktion von täglich 40 Geräten auf täglich 60 Geräte erhöht werden. Auf wieviel Prozent stieg die Produktion?

21. Überprüfe, welche der folgenden Ergebnisse von Überschlagsrechnungen richtig und welche falsch sind!
Korrigiere die falschen Ergebnisse!
a) 12 % von 2850 sind etwa 300.
b) 18 M von 35 M sind etwa 20 %.

22. Wie hoch sind die Jahreszinsen bei einem Guthaben von 8500 M bei einem Zinssatz von 3 %?

Bei den Aufgaben 23 bis 28 ist die Verwendung eines Taschenrechners angebracht.

23. Berechne!
a) 19 % von 463 b) 87 % von 0,81 c) 136 % von 513

24. Wieviel Prozent sind
a) 54 von 208; b) 0,93 von 49,5; c) 74 von 28 ?

25. Wie groß ist G, wenn man weiß:
a) 16 % sind 73; b) 71 % sind 2,9; c) 118 % sind 93 ?

26. In einer Schule mit 840 Schülern nehmen 45 % an Arbeitsgemeinschaften teil. Wie viele Schüler sind das?

27. Eine Familie verringerte durch sparsameres Umgehen mit Elektroenergie ihren Verbrauch im Vergleich zum Vorjahr von 1850 kWh auf 1680 kWh. Um wieviel Prozent ist der Verbrauch gesunken?

28. Die DDR ist rund 108 200 km^2 groß. Davon sind 63 000 km^2 landwirtschaftliche Nutzfläche und 29 500 km^2 Wald. Der Rest entfällt auf Städte, Siedlungen und andere Flächen.
Stelle die prozentualen Flächenanteile in einem Kreisdiagramm dar!

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 1.1.: Einführung in den Gebrauch des Taschenrechners und Wiederholung des Rechnens mit Verhältnisgleichungen (15 Std.)			
Eingeben und Ablesen von Zahlen bei einem elektronischen Taschenrechner (LE 1)	1	– Grundaufgaben der Addition und Multiplikation	– Allgemeine Erläuterung von Aufbau und Wirkungsweise eines Taschenrechners – Eingeben, Ablesen und Löschen von Zahlen
Variante 1			
Addieren und Subtrahieren (LE 2)	2	– Grundaufgaben der Addition und Multiplikation – Mündliches bzw. halbschriftliches Rechnen mit einfachen Zahlen – Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen – Regeln für Resultatsangaben mit sinnvoller Genauigkeit	– Addieren und Subtrahieren mit dem Taschenrechner (jeweils nur eine Operation) – Korrigieren falscher Eingaben – Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (Exponent positiv) – Konstantenautomatik
Multiplizieren mit dem Taschenrechner (LE 3)	1		– Multiplizieren mit dem Taschenrechner (nur zwei Zahlen) – Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen – Konstantenautomatik – Zeichen „E“ des Taschenrechners
Dividieren mit dem Taschenrechner (LE 4)	1		– Dividieren mit dem Taschenrechner (nur zwei Zahlen) – Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen (Exponent negativ) – Konstantenautomatik

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Variante 2			
Ausführen der Grundrechenoperationen (LE 2 bis 4)	4	– Grundaufgaben der Addition und Multiplikation – Mündliches bzw. halbschriftliches Rechnen mit einfachen Zahlen – Zahldarstellungen mit abgetrennten Zehnerpotenzen – Regeln für Resultatsangaben mit sinnvoller Genauigkeit	– Grundrechenoperationen mit Hilfe des Taschenrechners (jeweils nur eine Operation) – Durchführen von Kontrollen – Erklärung von Eigenheiten des Schulrechners SR 1 (Darstellung in Zehnerpotenzen, Konstantenautomatik)
Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist (LE 5)	1	– Grundaufgaben der Addition und Multiplikation – Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation	– Mehrfaches Ausführen der gleichen Grundrechenoperation mit verschiedenen Zahlen
Aufgaben, bei denen verschiedene Operationen auszuführen sind (LE 6)	3	– Wie in LE 2 bis 5 – Regeln für das Rechnen mit gebrochenen Zahlen – Anwenden des Distributivgesetzes – Vorrangregeln	– Lösen von Aufgaben mit verschiedenen Operationen, dabei Beachten von Vorrangregeln – Aufstellen und Abarbeiten von Rechenablaufplänen – Beachten von Eigenheiten des jeweiligen Taschenrechners
Umformen und Lösen von Verhältnisgleichungen (LE 7)	2	– Begriffe „direkte Proportionalität“, „indirekte Proportionalität“, „Verhältnisgleichung“ – Lösen von Verhältnisgleichungen (auch mündlich)	– Lösen von Verhältnisgleichungen mit Hilfe des Taschenrechners, dabei Durchführen von Kontrollen vor allem durch Abschätzungen und Überschläge
Aufgaben zur Übung und Wiederholung (LE 8)	3	– Wie LE 7 – Regeln für sinnvolle Genauigkeit	– Lösen von Anwendungsaufgaben, vor allem solcher, die auf Verhältnisgleichungen führen – Systematisieren des Rechnens mit dem Taschenrechner
Leistungskontrolle mit Auswertung	1		

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 1.2.: Prozentrechnung			(23 Std.)
Der Prozentbegriff (LE 9)	2	– Bestimmen einfacher Bruchteile von einem Ganzen $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots\right)$ – Bestimmen von Vielfachen (das Doppelte, Dreifache,...)	– Definition von „1 % von *G*" – Begriffe „Grundwert", „Prozentsatz", „Promille" – Zusammenhänge zwischen bestimmten Prozentsätzen und Bruchteilen (50 % von *G* ist $\frac{G}{2}$, ...)
Berechnungen mit beliebigen Prozentsätzen (LE 10)	4	– Multiplizieren als Vervielfachen – Dividieren als Enthaltensein bzw. Teilen – Direkte und umgekehrte Proportionalität	– Lösen beliebiger Prozentaufgaben durch Rückgang auf den Wert von 1 % – Begriff „Prozentwert" – Zusammenhang zwischen *G*, *p* und *W*
Lösen von Prozentaufgaben mit Hilfe von Verhältnisgleichungen (LE 11)	3	– Verhältnisgleichungen – Auflösen von Verhältnisgleichungen nach einer gesuchten Größe	– $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ – Aufstellen von Zuordnungstabellen und Gleichungen, Lösen derselben
Die Verwendung des Taschenrechners für Prozentberechnungen (LE 12)	2	– Multiplizieren und Dividieren mit dem Taschenrechner; sinnvolle Genauigkeit	– Lösen beliebiger Prozentaufgaben mit Hilfe des Taschenrechners – Verwenden der Taste %
Abschätzungen und Überschlagsrechnungen (LE 13)	2	– Runden; Multiplizieren und Dividieren (im Kopf)	– Näherungsweises Lösen von Prozentaufgaben (im Kopf) – Beurteilen von Ergebnissen durch Vergleichen mit Abschätzungen
Lösen weiterer Anwendungsaufgaben (LE 14)	3	– Vergleichen von Größen durch Bilden ihrer Differenz bzw. ihres Quotienten; sinnvolle Genauigkeit	– Prozentuale Größenvergleiche – Klärung der Redeweise „Steigerung/Senkung...auf/um..."
Grafische Darstellungen (LE 15)	2	– Kreis als Vollwinkel – Diagramme in rechtwinkligen Koordinatensystemen	– Darstellen von Prozentvergleichen in Kreis-, Streifen- und Liniendiagrammen
Berechnung von Zinsen (LE 16)	1	– Einteilung des Jahres in Monate; Anzahl der Tage eines Jahres bzw. eines Monats	– Begriffe „Guthaben", „Zinssatz", „Zinsen" – Berechnen von Zinsen
Übung und Wiederholung; Leistungskontrolle	4	Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung an Rechteck und Quadrat; Volumenberechnung des Quaders; Durchschnittsgeschwindigkeit	

Stoffabschnitt 1.1.

Einführung in den Gebrauch des Taschenrechners und Wiederholung des Rechnens mit Verhältnisgleichungen (15 Std.)

Dieser erste Stoffabschnitt ist von großer Bedeutung für die Entwicklung des Könnens der Schüler im Arbeiten mit einem elektronischen Taschenrechner. Die Schüler lernen den Taschenrechner kennen, sie erfahren, wie man ihn bedient, und sie erwerben Fertigkeiten in der Verwendung des Taschenrechners zum Ausführen der vier Grundrechenoperationen (mit natürlichen Zahlen und mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung). Da hierdurch eine entscheidende Grundlage für die Verwendung von Taschenrechnern im nachfolgenden Unterricht gelegt wird, ist besonderer Wert darauf zu legen, *alle* Schüler zur *sicheren Handhabung* ihres Rechners zu befähigen. Dazu gehört es auch, die Gewohnheit auszubilden, jede Eingabe in den Rechner und jedes Zwischenergebnis durch einen Blick auf die Anzeige zu kontrollieren. Gleichzeitig ist einer „blinden Rechnerabhängigkeit“, die sich hauptsächlich in einem unbedingten Vertrauen auf Richtigkeit der in der Anzeige des Taschenrechners erscheinenden Resultate äußert, ganz entschieden entgegenzuwirken. Den Schülern ist bewußtzumachen, daß jeder Taschenrechner nur die Zahlen und Befehle verarbeitet, die man ihm eingibt – und zwar in einer spezifischen, durch seinen Bau ein für allemal festgelegten Art und Weise.
Die Schüler sollten erkennen, daß es nützlich ist, für eine Aufgabe zunächst einen Ablaufplan aufzustellen und diesen dann mit dem Rechner „abzuarbeiten“ – besonders dann, wenn die Struktur der Aufgabe nicht mehr sofort erkennbar ist. Außerdem sollte den Schülern anhand geeigneter Beispiele sowie aufgetretener Fehler die Notwendigkeit von (möglichst rechnerunabhängigen) Kontrollen bewußtgemacht werden. Die Fähigkeit zu solchen Kontrollen ist dadurch weiterzuentwickeln, daß entsprechende Aufgaben im Kopf oder halbschriftlich gelöst werden und daß bei zahlreichen Aufgaben Überschläge bzw. Abschätzungen dem numerischen Lösen mit dem Taschenrechner vorangestellt werden. Die Schüler sind außerdem von Anfang an daran zu gewöhnen, die mit dem Taschenrechner erzielten Resultate durch Überschläge und Abschätzungen, durch Konfrontation mit ihrer Erfahrung bzw. ihrem theoretischen Wissen oder durch Nachrechnen (möglichst auf anderem Wege) zu kontrollieren. Von großer Bedeutung ist, daß jeder Schüler den von ihm verwendeten Taschenrechner genau kennt. Er muß also z. B. wissen, ob sein Gerät Vorrangautomatik (Hierarchie) hat, für welche Operationen es ggf. über Konstantenautomatik verfügt, wie die Darstellung der Zahlen im einzelnen erfolgt usw. Gleichzeitig sollte er auch in der Lage sein, bei einem Taschenrechner festzustellen, ob dieser Vorrang- oder Konstantenautomatik besitzt. (Entsprechende Hinweise werden in den nachfolgenden Abschnitten gegeben.)
Besonderes Gewicht erhalten Fragen der Resultatangabe mit sinnvoller Genauigkeit, wenn mit Näherungswerten gerechnet wird. Da bei vielen Anwendungsaufgaben der Taschenrechner mehr Stellen anzeigt, als dies von den Eingangswerten her sinnvoll ist, muß der Wiederholung und konsequenten Anwendung der aus Klasse 6 bekannten Regeln über die Anzahl zuverlässiger Ziffern bzw. Stellen besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden. Dabei sollte man auch den Sinn dieser Regeln verdeutlichen, indem bei einigen Aufgaben mit Hilfe des Taschenrechners das auf Grund der Eingangswerte größtmögliche bzw. kleinstmögliche Resultat berechnet wird. Dabei wird im Lehrbuch der Begriff „Wertschranke“ allerdings erst im Zusammenhang mit dem Stoffabschnitt „2.6. Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung“ verwendet.

Im Zusammenhang mit Aufgaben des Typs $\frac{a \cdot b}{c}$ ist das Lösen von Verhältnisgleichungen zu wiederholen. Diese sind dann zu verwenden, um entsprechende Anwendungsaufgaben (mit und ohne Benutzung des Taschenrechners) zu lösen.
Das Arbeiten mit dem Taschenrechner muß auch der Weiterentwicklung allgemein-geistiger Fähigkeiten der Schüler, ihrer Charakter- und Willenseigenschaften sowie ihrer weltanschaulichen Überzeugung dienen. Hierzu sind die im Lösen von Aufgaben liegenden Potenzen für die Denkentwicklung, die Entwicklung von Schöpfertum und geistiger Aktivität, die Stärkung von Selbstbewußtsein und Beharrlichkeit vorrangig zu nutzen. Ebenso kann und muß die Arbeit mit dem Taschenrechner genutzt werden, um die Einstellung der Schüler zum Fach Mathematik positiv zu beeinflussen, ihre Fähigkeit und Bereitschaft zur kritischen Beurteilung eigener Arbeitsergebnisse weiterzuentwickeln, ihr Verantwortungsbewußtsein für sorgfältigen Umgang mit hochentwickelten technischen Geräten zu vertiefen. Durch Einbeziehung aktuellen Zahlenmaterials sowie nicht zuletzt auch durch die Tatsache, daß hochwertige Geräte aus eigener Produktion nunmehr im Unterricht eingesetzt werden, sollte der Stolz auf die Leistungen der Werktätigen unserer Republik gestärkt und die Bedeutung der Rolle der Mathematik für den weiteren Aufbau der entwickelten sozialistischen Gesellschaft verdeutlicht werden.

Eingeben und Ablesen von Zahlen bei einem elektronischen Taschenrechner (1 Std.)

LE 1 (LB 7 bis 8)

In dieser ersten Unterrichtsstunde lernen die Schüler den Taschenrechner kennen, sie erfahren etwas über seine hauptsächlichen Bauteile und über die Notwendigkeit eines sorgfältigen Umgangs mit solchen hochwertigen Geräten. Ferner lernen die Schüler, wie man natürliche Zahlen und gebrochene Zahlen in Dezimalbruchschreibweise eingibt und wie man eingegebene Werte löscht. Obwohl davon ausgegangen werden kann, daß viele Schüler bereits einmal mit einem Taschenrechner gearbeitet (gespielt) haben, sollte auf eine systematisierende Zusammenstellung der in dieser Unterrichtseinheit zu vermittelnden Kenntnisse nicht verzichtet werden.

Ziele

Die Schüler
- können natürliche Zahlen ($n < 10^8$) und gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung (maximal 8 Stellen) eingeben und solche Zahlen vom Taschenrechner ablesen,
- können eingegebene Zahlen löschen und wissen, daß vor einer neuen Eingabe die evtl. noch im Rechner vorhandene Zahl gelöscht werden muß,
- wissen, daß der Rechner nach Beendigung der Arbeit abzuschalten ist und sind gewillt, die Taschenrechner sorgsam zu behandeln.

Schwerpunkte

- Allgemeine Erläuterung des Taschenrechners

– Übungen im Eingeben und Ablesen von natürlichen Zahlen und gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung, dabei Verwendung der Löschtaste
– Hinweise zum Umgang mit dem Taschenrechner

Methodische Hinweise

Allgemeine Erläuterung des Taschenrechners Sie sollte knapp gehalten werden. Es reicht z. B. völlig aus, wenn die hauptsächlichen Bauteile eines Taschenrechners (Anzeige, Tastatur, Schaltkreis, Leiterplatte) genannt werden und den Schülern mitgeteilt wird, daß der Schaltkreis das „eigentliche Gehirn“ des Rechners ist, in dem alle durch das Betätigen der Tasten gegebenen Befehle gespeichert und ausgeführt und dann an die Anzeige weitergegeben werden. Zur Demonstration kann ein Schulrechner SR 1 geöffnet werden, so daß die Schüler Leiterplatte, Schaltkreis und Batterien sehen können. Die Schüler sollten aber darauf hingewiesen werden, daß ein Öffnen der Geräte wegen der damit verbundenen Gefahr der Beschädigung auf den Fall eines eventuell notwendigen Batteriewechsels beschränkt werden sollte.
Die Schüler sind vertraut zu machen mit dem Ein- und Ausschalten ihres Taschenrechners, den Zifferntasten und der Kommataste. Das kann zweckmäßig dadurch geschehen, daß die Schüler zu selbständigem Experimentieren mit dem Rechner aufgefordert werden, wobei auch auf die Verwendung des Lehrbuches orientiert werden kann. Insgesamt ist für diesen Abschnitt genügend Zeit (10 bis 15 min) vorzusehen. (Ein planloses Betätigen der Tasten schadet einem Taschenrechner nicht.)
Fragen der Schüler, die sich aus dem Experimentieren mit dem Rechner ergeben, sollten nur insoweit beantwortet werden, wie sie zum Stoffabschnitt 1.1. gehören. Andernfalls sollten sie für langfristige Motivationen genutzt werden.

Übungen im Eingeben und Ablesen ... Sie sollten so gestaltet werden, daß ausgehend von den Erfahrungen, die die Schüler bei ihrem Experimentieren gewonnen haben, im Sinne einer *Systematisierung* hervorgehoben wird:

– Das Eingeben der Zahlen erfolgt ziffernweise (wie beim Schreiben) von links nach rechts, wobei natürliche und gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung eingegeben werden können. (Auf die mit Hilfe eines Taschenrechners natürlich leicht auszuführende Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche sollte hier aber noch nicht eingegangen werden.)
– Jede eingegebene Ziffer erscheint in der Anzeige, eine ständige Blickkontrolle ist erforderlich.
– Durch Betätigung der Löschtaste $\boxed{\text{CE}\cdot\text{C}}$ wird die eingegebene Zahl gelöscht. (Manche Taschenrechner haben an Stelle der kombinierten Taste $\boxed{\text{CE}\cdot\text{C}}$ zwei getrennte Löschtasten $\boxed{\text{C}}$ und $\boxed{\text{CE}}$.)

Bei diesen ersten Arbeiten mit dem Taschenrechner sollten nur Zahlen eingegeben werden, die schriftlich fixiert vorliegen.
Ein direktes Eingeben gesprochener Zahlen sollte wegen der Zehner-Einer-Inversion erst ab etwa der 4. Stunde des Stoffabschnittes 1.1. und auch dann nicht zu häufig gefordert werden. Eingabe- und Ableseübungen (z. B. mit in den Aufträgen 2a) und 3a) genannten Aufgaben) müssen gewährleisten, daß *alle* Schüler in der Lage sind, ihren Rechner fehlerlos und schnell zu bedienen. Hierbei ist ein zeitweiliges Arbeiten in gleicher Front genauso zu empfehlen wie stichprobenartige Kontrollen (auch durch die Schüler gegenseitig).
Auf die Tatsache, daß die Eingabe von Dezimalbrüchen, die nur eine Null vor dem

Komma besitzen, mit der Kommataste beginnen kann, ist an Hand geeigneter Aufgaben hinzuweisen. Hierbei sollte der Hinweis erfolgen, daß auch beim Arbeiten mit dem Taschenrechner ein möglichst rationelles Vorgehen (z. B. Vermeiden von überflüssigen Tastenbetätigungen) angestrebt wird.
Anhand der Aufträge 2b) und 3b) sollte noch erörtert werden, welches die größte Zahl und welches die kleinste von Null verschiedene Zahl ist, die so in den Schulrechner eingegeben werden können. Diese Zahlen (99 999 999, d. h. neunundneunzig Millionen neunhundertneunundneunzig Tausend neunhundertneunundneunzig, sowie 0, 000 0001, d. h. ein Zehnmillionstel) sollten die Schüler möglichst selbständig finden und auch sprechen. Danach wäre zu zeigen, was passiert, wenn man größere bzw. kleinere Zahlen eingibt. (Auf den an sich größeren Rechenbereich des Schulrechners SR 1, der ja von 10^{-99} bis 10^{99} reicht, sollte an dieser Stelle aber noch nicht eingegangen werden.)
Alle Erläuterungen sollten sich – analog zum Lehrbuch – vorrangig auf den Schulrechner SR 1 beziehen, allerdings muß gesichert werden, daß jeder Schüler seinen eigenen Taschenrechner richtig bedienen kann, auch wenn Anordnung der Tasten, Bezeichnungen (z. B. Punkt (·) statt (,)) oder Art des Ein/Ausschaltens (Tastendruck statt Schiebeschalter) anders als beim SR 1 sind.

Hinweise zum Umgang mit dem Taschenrechner Sie sollten sich vor allem auf seine pflegliche Behandlung (Schutz vor mechanischen Einwirkungen wie Stoß, Fall u. ä.) sowie auf das Abschalten nach Beendigung der Rechnung erstrecken.

Kontrollaufgaben

1. Aufgaben wie im Auftrag 3a)
2. Aufgaben, deren Darstellung als Wort gelesen werden kann, wenn man den Taschenrechner dreht, das heißt, die Anzeige von oben liest. Solche Zahlen sind z. B. 513, 1378, 1550, 7353, 1773, 0,717.
   (Dieses Prinzip, eine Kontrolle bzw. Selbstkontrolle zu ermöglichen, wurde im Lehrbuch an verschiedenen Stellen angewendet.)

Variante 1

Entsprechend der Darstellung im Lehrbuch folgen die Lerneinheiten mit den Themen „Addieren und Subtrahieren mit dem Taschenrechner“, „Multiplizieren mit dem Taschenrechner“, „Dividieren mit dem Taschenrechner“.
Der **Vorteil** dieser Variante liegt darin, daß das Arbeiten mit dem Taschenrechner sehr systematisch behandelt wird, daß auf die Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen, die für das Arbeiten mit dem Schulrechner SR 1 vor allem beim Dividieren unbedingt notwendig ist, bereits bei der Addition eingegangen wird und daß auf die Konstantenautomatik bei jeder Operation besonders hingewiesen wird (manche Taschenrechner haben – im Gegensatz zum Schulrechner SR 1 – eine solche Automatik nur für die Multiplikation/Division; nicht immer wird dabei – wie beim SR 1 – die zweite Zahl konstant gehalten).
Der **Nachteil** dieser Variante besteht darin, daß die gleiche Vorgehensweise (Eingeben der ersten Zahl, Drücken der Operationstaste, Eingeben der zweiten Zahl, Drücken der Ergebnistaste) dreimal erläutert werden muß, vor allem aber darin, daß einer abwechslungsreichen, die Schüler zu eigenen Überlegungen veranlassenden Gestaltung der Übungen relativ enge Grenzen gezogen sind.
Nachfolgend wird nur die Variante 2 näher erläutert, für die Variante 1 seien lediglich folgende Hinweise gegeben:

- Die für die Lerneinheit 2 (Variante 2, UH 25f.) genannten Ziele sind mit den drei Lerneinheiten der Variante 1 insgesamt zu erreichen;
- Besonderer Wert ist darauf zu legen, daß alle Schüler die Grundrechenoperationen mit ihrem Taschenrechner sicher ausführen können und Zahldarstellungen mit abgetrennten Zehnerpotenzen (mit positiven und mit negativen Exponenten) *verstehen* und in Normaldarstellung „übersetzen" können;
- Die Konstantenautomatik sollte verstanden sein, wobei den Schülern vor allem die Gefahr des Auftretens von Fehlern bei mehrmaligem unmotivierten Betätigen der Ergebnistaste bewußt ist.

Variante 2

Ausführen der Grundrechenoperationen (4 Std.)

LE 2 bis 4 (LB 8 bis 15)

In dieser Unterrichtseinheit lernen die Schüler, wie man mit Hilfe des Taschenrechners zwei Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert.
Dabei lernen sie *verstehen*, was eine Anzeige mit abgetrennten Zehnerpotenzen (speziell in der beim Schulrechner SR 1 auftretenden Art und Weise) bedeutet, und sie werden befähigt, derart angezeigte Zahlen in „normale" Schreibweise zu „übersetzen".
Im Gegensatz zum Lehrbuch wird das Ausführen der Grundrechenoperationen nicht nacheinander, sondern weitgehend parallel behandelt. Dabei dürfte es zweckmäßig sein, zunächst das Addieren ausführlich zu erläutern und dann die Schüler an Stelle der Operationstaste $\boxed{+}$ die für die jeweilige Aufgabe erforderliche Operationstaste selbständig verwenden zu lassen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Tasten für die Grundrechenoperationen (andere Symbolik für „mal" und „durch") und wissen, wie man mit einem Taschenrechner addiert, subtrahiert, multipliziert bzw. dividiert,
- können Zahlen, die in der Form $a,bcde + mn$ bzw. $a,bcde - mn$ ($a, b, c, d, e, m, n \in N$; kleiner 10) von einem Taschenrechner, speziell dem SR 1, angezeigt werden, in normaler Darstellung angeben,
- wissen, wie man nur die zuletzt eingegebene Zahl (z. B. zum Zwecke der Korrektur) bzw. die gesamte Aufgabe löscht,
- können die Grundrechenoperationen mit natürlichen Zahlen und mit gebrochenen Zahlen in Dezimalbruchdarstellung unter Verwendung eines Taschenrechners sicher und schnell ausführen, wenn nur eine Rechenoperation vorkommt,
- können „gesprochene Zahlen" richtig eingeben und sind an konzentriertes Arbeiten mit dem Taschenrechner gewöhnt,
- wissen, daß mit einem Taschenrechner ermittelte Ergebnisse zuweilen falsch sein können (bedingt durch Eingabefehler oder Funktionsmängel) und deshalb Kontrollen (vor allem Überschläge/Ausführen von Umkehroperationen) nötig sind; sie sind fähig und bereit, solche Kontrollen auszuführen,
- sind in der Lage, bei Anwendungsaufgaben die Ergebnisse mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben und in einfachen Fällen mit Hilfe des Taschenrechners den

größtmöglichen bzw. kleinstmöglichen Wert des Ergebnisses (Wertschranken) zu berechnen,
- sind gewöhnt, die in der ersten Stunde für das Arbeiten mit dem Taschenrechner genannten Forderungen zu beachten und mit ihrem Gerät sorgsam umzugehen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus (Grundaufgaben der Addition/Subtraktion bzw. Multiplikation/Division; einfache Kopfrechenaufgaben)
- Erläuterung des Addierens mit dem Taschenrechner
- Übungen zur Addition
- Erläuterung der Konstantenautomatik bei der Addition

2. Stunde
- Erläuterung des Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens mit dem Taschenrechner
- Übungen im Ausführen der vier Grundrechenoperationen (ohne Zahlendarstellungen mit abgetrennten Zehnerpotenzen)
- Hinweise auf Notwendigkeit der Kontrolle, Durchführen entsprechender Kontrollen (vor allem Überschläge, Umkehroperationen, Zweitrechnungen)

3. Stunde
- Additions- und Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnis größer als 10^8 ist
- Divisionsaufgaben, deren Ergebnis positiv, aber kleiner als 10^{-7} ist
- Weitere Aufgaben, deren Ergebnis in der Anzeige des Schulrechners SR 1 mit abgetrennten Zehnerpotenzen dargestellt wird

4. Stunde
- Lösen von Übungsaufgaben; Rundungsautomatik des Schulrechners SR 1
- Eingeben von Zahlen, die nur gesprochen werden
- Lösen einfacher Anwendungsaufgaben, dabei Beachten der sinnvollen Genauigkeit bei Resultatsangaben; einfache Wertschrankenberechnungen
- Kontrolle der Ergebnisse

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Zu Beginn der 1. Stunde (und später in erforderlichem Maße) sollten tägliche Übungen durchgeführt werden, in denen Grundaufgaben der Addition und der Multiplikation (kleines Einmaleins) im Kopf zu lösen sind. Dabei ist die notwendige gedächtnismäßige Beherrschung durch einen steten Wechsel der Operationen (einschließlich der jeweiligen Umkehroperation) zu sichern. Darüber hinaus sind die Fertigkeiten der Schüler im mündlichen Rechnen zu sichern, indem Aufgaben wie $96 + 132$, $413 - 28$, $45 \cdot 9$, $128 : 4$ geübt werden. Außerdem sollte das Umwandeln in Darstellungen mit abgetrennten Zehnerpotenzen wiederholt werden.

Erläuterung des Addierens mit dem Taschenrechner Sie kann anhand der LE 2 des Lehrbuches erfolgen. Besonderer Wert ist dabei darauf zu legen, daß alle Schüler die Reihenfolge der auszuführenden Handlungen sicher beherrschen. Hierzu sind Übungen in gleicher Front und Kontrollen durch Mitschüler zweckmäßig. Auf die Ausbildung der Ge-

wohnheit zu einer Blickkontrolle (jedesmal, nachdem die Eingabe einer Zahl abgeschlossen ist) muß zielstrebig hingearbeitet werden.
Auf die Doppelfunktion der Löschtaste $\boxed{\mathrm{CE \cdot C}}$ ist einzugehen, es ist mit den Schülern zu üben, wie mit Hilfe dieser Taste (einmalige Betätigung) nur die zuletzt eingegebene Zahl gelöscht und so eine Korrektur innerhalb einer Rechnung ermöglicht wird.

Übungen zur Addition Die Schüler sollten zunächst anhand einfacher, auch im Kopf lösbarer Aufgaben mit der Ausführung der Operation vertraut gemacht werden. Erst danach sind kompliziertere Aufgaben zu stellen.
Ausgehend vom Beispiel 11 bzw. vom Auftrag 7 ist auf das Problem der Konstantenautomatik einzugehen. Dabei ist weniger der Nutzen dieser Automatik zu betonen, als vielmehr vor ihrer unbeabsichtigten Anwendung bei mehrmaligem Drücken der Taste $\boxed{=}$ zu warnen. Diese Fehlerquelle und andere Eingabe- bzw. Ablesefehler sind zum Anlaß zu nehmen, die Notwendigkeit von Kontrollen hervorzuheben und auf die regelmäßige Durchführung von Kontrollen zu achten.

Erläuterung des Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens mit dem Taschenrechner Es sollte die Analogie zum Addieren hervorgehoben und dabei besonders auf die andere Gestaltung der Taste für die Multiplikation $\boxed{\times}$ und der Taste für die Division $\boxed{\div}$ eingegangen werden.

Übungen zur Subtraktion, Multiplikation und Division Auch hierbei sollte mit einfachen, im Kopf zu lösenden Aufgaben begonnen und erst danach zu komplizierteren Aufgaben übergegangen werden. Anhand der entsprechenden Aufträge 8, 11 und 15 ist wiederum auf das Problem der Konstantenautomatik einzugehen und vor unmotiviertem mehrfachen Drücken der Taste $\boxed{=}$ zu warnen.
Beispiele für Übungsaufgaben sind im Lehrbuch angegeben, z. B. Aufgaben 1 bis 4 (LB 11f.), Aufgaben 1 bis 7 (Lb 13), Aufgaben 1 bis 5 (LB 15).

Additions- und Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnis größer als 10^8 ist Sie sollten dann gestellt werden, wenn die Schüler die Ausführung der Addition bzw. Multiplikation im Prinzip beherrschen. Es empfiehlt sich, zunächst mit Additionsaufgaben (analog zum Beispiel 8) zu beginnen und dann zu Multiplikationsaufgaben (wie im Beispiel 14) überzugehen, wobei die Aufgaben in der Regel zum Vergleich die schriftliche Rechnung erfordern. Die Darstellung der Ergebnisse mit abgetrennten Zehnerpotenzen, die der Schulrechner SR 1 in derartigen Fällen liefert, sollte ausführlich erläutert werden, wobei allerdings das Verstehen der „Rechneranzeige“ und Umsetzen in „Normalschreibweise“ im Zentrum stehen sollten. Es muß aber auch gesichert werden, daß die Schüler das „Verhalten“ ihres eigenen Taschenrechners bei solchen Aufgaben kennenlernen.
So zeigen viele einfache Taschenrechner bei der Aufgabe 38495072 + 81004314 (Beispiel 8) als Ergebnis E 1.1949938 an, wobei das E (Zeichen für Irrtum/ERROR) auf die Überschreitung der Kapazität des Gerätes hindeutet, die Stellung des Punktes aber noch eine Abschätzung der Größenordnung gestattet. Analog zeigen solche Rechner bei der Aufgabe 87654321 · 100 (Beispiel 14b) als Ergebnis E 87.654321 an.
Auf die Überschreitung der Kapazität des Schulrechners SR 1 sollte anhand des Auftrages 11 eingegangen werden. Dabei kommt es aber vor allem darauf an, daß die Schüler das Zeichen „E“ kennenlernen. Hierzu sollte auch der Auftrag 14 genutzt werden.

Divisionsaufgaben Durch einfache Übungen (etwa analog zu Beispiel 18) sollte auf die Darstellung $a,bcde - mn$ ($a, b, c, d, e, m, n \in N$; kleiner 10) eingegangen werden. Dabei sollte aber jeder Vorgriff auf die Behandlung der Potenzgesetze in Klasse 9 vermieden werden, vielmehr sollte den Schülern in Form einer Regel verdeutlicht werden, daß die Angabe $a,bcde - x$ ($0 < x < 100$, $x \in N$) bedeutet, daß das Komma um x Stellen nach links verschoben werden muß. Da der Schulrechner SR 1 bei Divisionsaufgaben immer dann zur Anzeige mit abgetrennten Zehnerpotenzen übergeht, wenn das Ergebnis ein unendlicher Dezimalbruch mit dem Betrag kleiner 10 ist, muß besondere Aufmerksamkeit darauf verwendet werden, daß alle Schüler nach dieser Regel die vom SR 1 angezeigten Werte in „normaler“ Darstellung angeben können. (Hierbei können Beispiel 18 und Auftrag 13 genutzt werden.)

Lösen von Übungsaufgaben Das Lösen solcher Aufgaben sollte genutzt werden, die Schüler an zügiges und konzentriertes Arbeiten zu gewöhnen. Dabei können auch Aufgaben von Nutzen sein, die nur mündlich gestellt werden.
Ausgehend vom Beispiel 9 kann auf die Rundungsautomatik des Schulrechners SR 1 eingegangen werden. Dabei sollte gegebenenfalls auch darauf verwiesen werden, daß einfache Rechner keine Rundungsautomatik haben und als Ergebnis der Aufgabe 6,0000007 + 8,0000009 den Wert 14,000001 anzeigen.
Anhand eines Vergleichs der Ergebnisse von Beispiel 18a) und 18b) kann erörtert werden, daß der Schulrechner SR 1 bei der Zahldarstellung mit abgetrennten Zehnerpotenzen *nicht* rundet. Multipliziert man das Ergebnis vom Beispiel 18b) mit 10, so erkennt man aber, daß „intern“ mehr Stellen zur Verfügung stehen.

Lösen einfacher Anwendungsaufgaben Das Lösen solcher Aufgaben (etwa Aufg. 7 [LB 13] bzw. Aufg. 3 [LB 15]) sollte genutzt werden, um die Sicherheit der Schüler im Umgang mit ihrem Rechner weiter zu erhöhen. Dabei sollte – in der Art wie im Beispiel 15 – auf die Problematik der Resultatsangabe mit sinnvoller Genauigkeit eingegangen werden. Dazu müßten die entsprechenden Regeln aus Klasse 6 reaktiviert werden. Durch Berechnen des kleinst- bzw. größtmöglichen Wertes sollten das Verständnis der Schüler für die gesamte Problematik vertieft und die Zweckmäßigkeit der oben genannten Regeln weiter verdeutlicht werden.

Kontrolle der Ergebnisse Der Überprüfung der Ergebnisse durch die Schüler sollte von Anfang an große Aufmerksamkeit geschenkt werden, um die Herausbildung entsprechender Gewohnheiten zu fördern. Insbesondere sollte bei fehlerhaften „Rechnerergebnissen“ mit den Schülern erörtert werden, warum und wie der Fehler hätte bemerkt werden können.

Kontrollaufgaben

Besonders Aufgaben, bei denen die Ergebnisse bestimmte (auch vom Schüler zu bemerkende) Eigentümlichkeiten haben, z. B. Aufträge 6, 9 und 12, wobei das Ergebnis oftmals als Wort lesbar ist, wenn man den Taschenrechner auf dem Tisch um 180° dreht.

Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist (1 Std.)

LE 5 (LB 15 bis 16)

In dieser Lerneinheit lernen die Schüler, den Taschenrechner zum Lösen von Aufgaben anzuwenden, bei denen mehrmals die gleiche Operation auszuführen ist. Dabei werden ihre Fertigkeiten im Arbeiten mit dem Taschenrechner weiterentwickelt, sie verstehen zum Beispiel immer besser, Ablaufpläne aufzustellen und nach diesen zu arbeiten. An der Ausbildung von Fähigkeit und Bereitschaft der Schüler zum Kontrollieren der Ergebnisse und zum Beachten von Forderungen nach sinnvoller Genauigkeit der Resultatsangaben wird zielstrebig weitergearbeitet.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist, völlig analog zu ihrer schriftlichen Darstellung in den Taschenrechner eingegeben werden,
- wissen, daß der Taschenrechner bei jeder neuen Betätigung der Operationstaste das bis dahin erreichte Zwischenergebnis anzeigt,
- können derartige Aufgaben sicher lösen,
- sind daran gewöhnt, vor dem erneuten Drücken der Operationstaste durch eine Blickkontrolle die Richtigkeit der eingegebenen Zahl zu prüfen und ihre Ergebnisse zu kontrollieren,
- können bei Anwendungsaufgaben die Resultate mit sinnvoller Genauigkeit angeben.

Schwerpunkte

- Aufgaben, in denen dieselbe Operation mehrmals auszuführen ist
- Kontrolle von Eingaben und Ergebnissen, Resultatsangaben mit sinnvoller Genauigkeit

Methodische Hinweise

Ausgehend von dem in der vorangehenden Lerneinheit Gelernten ist den Schülern bewußtzumachen, daß Aufgaben, bei denen die gleiche Operation mehrmals auszuführen ist, „normal" von links nach rechts abgearbeitet werden können. Auf die Möglichkeit, Additions- und Multiplikationsaufgaben in beliebiger Reihenfolge „abzuarbeiten", sollte hingewiesen werden. Durch entsprechende Aufgaben können die Eigenschaften Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation wiederholt werden. (Hierauf kann, wenn es die Klassensituation erfordert, aber auch verzichtet werden.)
Wichtig ist, den Schülern zu verdeutlichen, daß beim Betätigen der Operationstaste das bis dahin vorliegende Zwischenergebnis angezeigt wird. In diesem Zusammenhang sollte an der Gewöhnung der Schüler an eine „Blickkontrolle" weitergearbeitet werden.
Ausgehend vom Beispiel 20 sollte eine vereinfachte Darstellung der Ablaufpläne erläutert und von da ab ständig verwendet werden.
Beispiel 21 kann genutzt werden, um das Verständnis der Schüler für die Problematik „sinnvolle Genauigkeit" weiterzuentwickeln.

Aufgaben, bei denen verschiedene Operationen auszuführen sind (3 Std.)

LE 6 (LB 16 bis 19)

In dieser Lerneinheit lernen die Schüler, den Taschenrechner zur Berechnung von Termen mit verschiedenen Operationen anzuwenden. Dabei kommt der weiteren Festigung der Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Taschenrechner genauso Bedeutung zu wie der Entwicklung der Bereitschaft und Fähigkeit der Schüler zu selbständiger Kontrolle der Ergebnisse und zur Beachtung einer sinnvollen Genauigkeit. Die Schüler lernen, daß der Schulrechner SR 1 über eine Vorrangautomatik (Hierarchie) verfügt. Sie erfahren, daß es Taschenrechner gibt, bei denen dies nicht der Fall ist. Sie lernen – falls sie einen solchen Taschenrechner besitzen – mit diesem richtig zu arbeiten. Die Schüler lernen, Ablaufpläne aufzustellen und diese mit ihrem Taschenrechner abzuarbeiten.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß beim Auftreten von Klammern oder unterschiedlichen Operationszeichen die Reihenfolge der Eingabe in den Taschenrechner gesondert bestimmt werden muß,
- können diese Reihenfolge der Eingaben in ihren Taschenrechner selbständig ermitteln, wobei sie ggf. auch die Vorrangautomatik (Hierarchie) ihres Gerätes kennen,
- können Terme der in den Schwerpunkten näher gekennzeichneten Form mit Hilfe des Taschenrechners sicher und schnell berechnen,
- sind in der Lage und bereit, von ihnen erzielte Rechenergebnisse selbständig zu kontrollieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Aufgaben, in denen nur Addition und Subtraktion (jeweils aber beide) auftreten
- Berechnen von einfachen Termen der Formen $a \cdot b + c$; $a + b \cdot c$; $(a + b) \cdot c$; $a \cdot (b + c)$, dabei Bestimmen der Reihenfolge der Operationen bzw. der Eingaben in den Taschenrechner
- Erklären der Vorrangautomatik (Hierarchie) des Schulrechners SR 1
- Berechnen einiger Terme der Form $a \cdot b + c \cdot d$

2. Stunde
- Übungen im Berechnen der o. g. Terme (auch mit komplizierterem Zahlenmaterial)
- Berechnen von Termen der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ und $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$, dabei Variieren der Reihenfolge in Abhängigkeit von den gegebenen Zahlen

3. Stunde
- Berechnen von Termen der Form $\frac{a \cdot (b + c)}{d}$ bzw. $\frac{(a + b) \cdot c}{d}$
- Übungen im Berechnen der o. g. Terme

Methodische Hinweise

Aufgaben, in denen nur Additionen und Subtraktionen (jeweils aber beide) auftreten Solche Aufgaben sollten – evtl. ausgehend vom Beispiel 22 bzw. von Aufg. 1 – dazu dienen, den Schülern bewußtzumachen, daß man in diesen Fällen (es tritt nur „Strichrechnung" auf) ganz normal von links nach rechts arbeiten kann.

Berechnen einfacher Terme Um die Problematik hervorzuheben, die entsteht, wenn die Aufgaben sowohl „Punkt- als auch Strichrechnung" erfordern, sollte man zunächst verschiedene einfache, im Kopf zu lösende Aufgaben gegenüberstellen (etwa wie im Beispiel 23). Die Schüler müssen dabei erkennen, daß beim Eingeben von Zahlen und Operationen in der (bisher gewohnten) Reihenfolge von links nach rechts nicht immer das richtige Ergebnis erzielt wird.
Als Ergebnis derartiger Aufgaben sollte deutlich die Erkenntnis herausgearbeitet werden: Beim Auftreten unterschiedlicher Operationszeichen oder von Klammern ist vor dem Einsatz des Taschenrechners zu klären, in welcher Reihenfolge die Operationen auszuführen sind, dabei sind Klammern bzw. die Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung" zu beachten.
Erst danach werden die Zahlen und Operationszeichen eingegeben – und zwar in der vorüberlegten Reihenfolge, die nicht immer „von links nach rechts" lauten wird. Dabei ist es zweckmäßig, jeweils einen entsprechenden Ablaufplan aufzustellen.
Falls bei den Schülern Schwierigkeiten auftreten, aus gegebenen Termen eine richtige Reihenfolge der Operationen zu erkennen, sollte dieses Problem gesondert erörtert werden. Dabei kann das Aufstellen sogenannter „Rechenbäume" gute Dienste leisten. Für die im Beispiel 23 genannten Aufgaben würden sich folgende Rechenbäume ergeben (Bild 1.1).

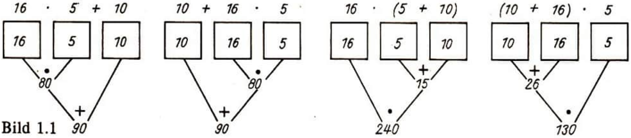


Bild 1.1

(Es sind also erst die Klammernzusammenfassungen, dann die „Punktrechnungen", dann die „Strichrechnungen" auszuführen.)
Zur Übung können die Aufgaben 3 und 4 dienen. (Terme der Form $a - b \cdot c$ sollten zunächst nicht vorkommen, da sie bei einem Rechner ohne Vorrangautomatik die Verwendung des Speichers oder der Vorzeichenwechseltaste bzw. das Notieren von Zwischenergebnissen erfordern würden.)

Vorrangautomatik eines Taschenrechners Anhand des Beispiels 23 bzw. ähnlicher Aufgaben ist auch auf diese Frage einzugehen. Hierzu können eventuell unterschiedliche Schülerergebnisse (bedingt durch die Benutzung von Taschenrechnern verschiedener Typen) bei den Aufgaben $10 + 16 \cdot 5$ und $(10 + 16) \cdot 5$ genutzt werden.

Der Ablaufplan $10\ \boxed{+}\ 16\ \boxed{\times}\ 5\ \boxed{=}$

führt je nach Rechnertyp zum richtigen Resultat 90 (Rechner mit Vorrangautomatik) oder zum falschen Resultat 130 (Rechner ohne Vorrangautomatik).
Bei der zweiten Aufgabe käme der Schüler vielleicht auf den gleichen Ablaufplan (falls er

nicht einen Rechner mit Klammertasten hat), hier wäre aber das Ergebnis des Taschenrechners ohne Vorrangautomatik richtig.
Aus der Betrachtung solcher Beispiele sollten folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

- Bei Aufgaben, in denen Klammern und (oder) verschiedene Rechenarten („Punktrechnung/Strichrechnung") vorkommen, ist es zweckmäßig, einen Ablaufplan (evtl. unter Verwendung eines „Rechenbaumes") aufzustellen, dabei sollte man eine evtl. vorhandene Vorrangautomatik (zunächst) unberücksichtigt lassen.
- Treten in einer Aufgabe Klammern auf, so sollte man stets den Ausdruck in der Klammer gesondert berechnen und dies im Ablaufplan entsprechend berücksichtigen.

Diese Betrachtungen sollten auch genutzt werden, um den Schülern die Überzeugung zu vermitteln, daß auch beim Arbeiten mit dem Taschenrechner gründlich gedacht werden muß, daß es sinnlos ist, wahllos irgendwelche Tasten zu betätigen. Die Einsicht in die Notwendigkeit rechnerunabhängiger Kontrollen und die Bereitschaft zu deren Durchführung sollten gleichfalls gestärkt werden.

Terme der Form $a \cdot b + c \cdot d$ Solche Terme sollten nur in wenigen Fällen berechnet werden, wobei auch hierbei zu Beginn die Werte für *a, b, c* und *d* so gewählt werden sollten, daß eine Kontrolle durch Kopfrechnen leicht möglich ist.
Mit derartigen Aufgaben sollte die Erkenntnis herausgearbeitet werden, daß bei einem Taschenrechner ohne Vorrangautomatik ein Teilergebnis gemerkt (besser schriftlich fixiert) werden muß, während z. B. mit dem Schulrechner SR 1 wegen der Vorrangautomatik solche Aufgaben einfach von links nach rechts abgearbeitet werden können. Auf die Bedeutung des Speichers sollte noch nicht eingegangen werden; falls die Schüler von selbst darauf kommen, ist seine Verwendung natürlich zu gestatten.

Berechnen von Termen der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ *bzw.* $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ Dabei sollte herausgearbeitet werden, daß die Reihenfolge der Operationen im Prinzip gleichgültig ist. Eine besondere Schwierigkeit besteht bei Aufgaben des Typs $\frac{z}{a \cdot b}$ für manche Schüler darin, daß sie nicht den richtigen Ablaufplan z $\boxed{\div}$ a $\boxed{\div}$ b $\boxed{=}$ erkennen, sondern als zweite Operation eine Multiplikation ausführen wollen. Selbstverständlich könnte zuerst der Nenner berechnet werden, dann müßte man sich aber dieses „Zwischenergebnis" merken bzw. notieren (eine Orientierung auf Benutzung des Speichers oder der Taste $\boxed{1/x}$ ist in dieser Phase des Unterrichtes nicht zu empfehlen). Merken bzw. Notieren von Zwischenergebnissen sollte aber – und dies müßten auch die Schüler erfahren – nach Möglichkeit vermieden werden, weil es eine zusätzliche Fehlerquelle darstellt. Es ist daher zweckmäßig, das Vorgehen bei solchen Aufgaben, die im Nenner mehrere Faktoren haben, hinreichend deutlich herauszuarbeiten.

Bei Aufgaben des Typs $\frac{a \cdot b}{c}$ kann es bei entsprechender Wahl des Zahlenmaterials zu unterschiedlichen Resultaten (Abweichungen in der letzten Stelle) bei Verwendung verschiedener Rechnertypen kommen. Solche Aufgaben (z. B. Aufg. 6) können genutzt werden, um die Grenzen eines Taschenrechners deutlich zu machen. Insbesondere ist Schülern, die mit solchen Taschenrechnern arbeiten, die bei Aufgabe 6h) als Ergebnis den Wert Null anzeigen, bewußtzumachen, daß sie hier an eine Grenze ihres Rechners stoßen, weil das Ergebnis mit von Null verschiedenen Dividend und Divisor nie Null sein kann. Es sollte aber auch darauf verwiesen werden, daß derartige Aufgaben in der Praxis recht selten vorkommen.

Zu beachten ist, daß Aufgaben wie $\frac{75 \cdot 7}{25}$, $\frac{0{,}8 \cdot 45}{9}$, $\frac{2{,}5 \cdot 4}{20}$ oder $\frac{12 \cdot 8 \cdot 9}{16 \cdot 3}$, $\frac{30 \cdot 14 \cdot 5}{7 \cdot 15}$ hauptsächlich ohne Verwendung eines Rechners gelöst werden. Durch geschicktes Kürzen geht das Lösen solcher Aufgaben möglicherweise schneller als mit dem Taschenrechner. Diese Erfahrungen können die Schüler evtl. selbst gewinnen, wenn man zwischen zwei Gruppen (mit bzw. ohne Taschenrechner) ein „Wettrechnen" durchführen läßt.

Übungen im Berechnen ... Sie sollten erst dann mit komplizierterem Zahlenmaterial erfolgen, wenn das prinzipielle Vorgehen von allen Schülern hinreichend sicher beherrscht wird. Für derartige Übungen eignen sich Aufgaben, die analog zu den Aufgaben 2 bis 4 gewählt werden können.

Kontrollaufgaben

1. Aufgaben wie im Auftrag 19
2. Aufgaben wie Aufg. 1 bis 6

Umformen und Lösen von Verhältnisgleichungen (2 Std.)

LE 7 (LB 19 bis 20)

Zu Beginn dieser Lerneinheit sollte eine Kurzkontrolle durchgeführt werden, die nach Möglichkeit noch im Verlauf des Stoffabschnitts mit den Schülern ausgewertet wird. (Hierfür könnten z. B. die Kontrollaufgaben 1 bis 3 [UH 16] verwendet werden, die in etwa 15 min zu bearbeiten wären.) Im Zentrum der Lerneinheit stehen (als unmittelbare Vorbereitung für den Stoffabschnitt 1.2.) die Wiederholung des Umstellens von Verhältnisgleichungen und Übungen im Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen, auch unter Verwendung des Taschenrechners.
Nachdem das prinzipielle Vorgehen anhand geeigneter Beispiele erörtert wurde (hier können entsprechende Aufgaben des Lehrbuches der Klasse 6 als Muster dienen), erfolgen umfangreiche Übungen in der nachfolgenden Unterrichtseinheit.

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „Verhältnisgleichung" und können vorgegebene Verhältnisgleichungen umstellen,
- können Verhältnisgleichungen aufstellen und lösen,
- können beim Lösen von Verhältnisgleichungen den Taschenrechner zweckmäßig und sicher verwenden,
- sind in hohem Maße selbständig in der Lage und bereit, Resultate mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben und zu kontrollieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Kurzarbeit
- Wiederholen des Begriffs „Verhältnisgleichung“ und des Umformens von Verhältnisgleichungen
- Übungen im Umformen von Verhältnisgleichungen

2. Stunde
- Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen, dabei Wiederholen der direkten und indirekten Proportionalität

Methodische Hinweise

Wiederholung Anhand einer geeigneten Aufgabe (z. B. Auftrag 22c)) sollten die Begriffe „direkte Proportionalität“ und „Verhältnisgleichung“ und die Regeln für das Lösen einer Verhältnisgleichung wiederholt werden. Beispiel 27 eignet sich, den Begriff „indirekte Proportionalität“ zu wiederholen und zu zeigen, daß auch hierbei eine Verhältnisgleichung zu lösen ist. Es sollte herausgearbeitet werden, daß das Lösen von Verhältnisgleichungen auf das Berechnen von Termen der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ führt. Bei diesen Termberechnungen kann der Taschenrechner verwendet werden.

Übungen Hierbei sollte nicht das Verwenden des Rechners, sondern das schnelle und sichere Umformen von Verhältnisgleichungen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nach jeder der Variablen (auch wenn sie im konkreten Fall mit gebrochenen Zahlen oder Summen belegt sind) im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen. Dabei sollten Aufgaben, bei denen die notwendigen Rechnungen im Kopf auszuführen sind, nicht vernachlässigt werden.

Aufstellen und Lösen von Verhältnisgleichungen Es ist Wert darauf zu legen, daß die Schüler die jeweilige Verhältnisgleichung selbständig aufstellen, sie richtig umformen und den Taschenrechner zweckmäßig einsetzen. Dabei ist auf sinnvolle Genauigkeit der Resultate und auf die Durchführung von Kontrollen besonders zu achten. Als Aufgaben eignen sich neben den im Lehrbuch auf Seite 21 f. angegebenen auch solche aus dem Lehrbuch der Klasse 6 (Seite 124ff.).

Aufgaben zur Übung und Wiederholung (3 Std.)

LE 8 (LB 21 und 22)

In dieser Lerneinheit verwenden die Schüler ihren Taschenrechner zum Lösen von Anwendungsaufgaben, die numerisch auf solche Aufgabentypen führen, wie sie in den vorangegangenen Lerneinheiten aufgetreten sind. Dabei stellt das erneute Aufgreifen und weitere Festigen der Grundkenntnisse über das Arbeiten mit Näherungswerten, insbesondere das Angeben von Resultaten mit sinnvoller Genauigkeit unter Verwendung der entsprechenden (aus Klasse 6 bekannten) Regeln ein zentrales Anliegen dar. Außerdem wird das Ausführen der Grundrechenoperationen mit dem Taschenrechner weiter geübt und – zusammen mit den o. g. Regeln – beim Lösen von Anwendungsaufgaben angewandt. Ein wichtiges Anliegen dieser Lerneinheit besteht darin, das Arbeiten mit dem Taschenrechner zu systematisieren und die Schüler weiter zu befähigen, Vorzüge und Grenzen ihres Taschenrechners zu erkennen und zu beachten.

Ziele

Die Schüler
- können ihren Taschenrechner zum Lösen von Anwendungsaufgaben, insbesondere solcher, die auf Verhältnisgleichungen führen, sicher und zweckmäßig einsetzen,
- kennen Vorzüge (z. B. Vorrang- und Konstantenautomatik beim SR 1) und Grenzen (z. B. Angabe von Resultaten mit abgetrennten Zehnerpotenzen beim SR 1 bei einfachen Divisionsaufgaben) ihres Rechners und sind in der Lage, diese zu beachten,
- wissen, daß beim Rechnen mit Näherungswerten (Schätzwerten, gerundeten Zahlen, Meßwerten) das Resultat mit einer sinnvollen Genauigkeit angegeben werden muß, kennen die Regeln für die Ermittlung der Anzahl der zuverlässigen Stellen (Ziffern) bei den Grundrechenoperationen und können diese anwenden,
- sind in der Lage und daran gewöhnt, ihre Ergebnisse zu kontrollieren.

Schwerpunkte

1. und 2. Stunde
- Lösen von Anwendungsaufgaben; dabei Verwendung der Regeln für die sinnvolle Genauigkeit von Resultatsangaben und besondere Beachtung der Ergebniskontrolle
- Verdeutlichen der Regeln durch Berechnung von größt- bzw. kleinstmöglichen Werten (Wertschranken) in einigen Fällen

3. Stunde
- Systematisieren des Arbeitens mit einem Taschenrechner

Methodische Hinweise

Lösen von Anwendungsaufgaben Ausgehend von den im Lehrbuch angebotenen Aufgaben sollten das selbständige Finden des Ansatzes, das zielstrebige Abarbeiten (unter Verwendung des Taschenrechners) und das kritische Werten der erzielten Resultate im Zentrum stehen. Dabei sind die in den vorangegangenen Lerneinheiten reaktivierten Kenntnisse über das Angeben von Resultaten mit sinnvoller Genauigkeit bewußt anzuwenden.

Berechnung von Wertschranken Hierbei sollte den Schülern verdeutlicht werden, daß man das Vorgehen stets genau überlegen muß, z. B. zur Berechnung des *größtmöglichen* Wertes des Ergebnisses den *kleinstmöglichen* Wert eines Subtrahenden oder Divisors einsetzen muß. Die Ergebnisse derartiger Überlegungen sind zu nutzen, um die Zweckmäßigkeit der oben genannten Regeln zu verdeutlichen. Dabei ist darauf hinzuweisen, daß die letzte der nach den Regeln noch anzugebende Ziffer im allgemeinen nicht mehr zuverlässig ist. Der Begriff „Wertschranke“ ist noch nicht zu verwenden.

Systematisierung des Arbeitens mit dem Taschenrechner Sie sollte dazu dienen, allen Schülern nochmals bewußtzumachen,
- wie der Taschenrechner zu bedienen und zu behandeln ist;
- wie die Grundrechenoperationen mit dem Taschenrechner ausgeführt werden;
- in welcher Reihenfolge bei „gemischten Aufgaben“ die Eingaben in den Taschenrechner erfolgen müssen;
- wie man feststellt, ob ein Taschenrechner Vorrang- bzw. Konstantenautomatik hat.

Hierzu eignen sich die Ausführungen in der Zusammenfassung im Lehrbuch (LB 22ff.). Diesen Abschnitt sollten die Schüler gegebenenfalls selbständig durcharbeiten. Im Anschluß daran könnten sie aufgefordert werden, das Arbeiten mit dem Taschenrechner zu erklären und von einem (ihnen möglicherweise vorher nicht bekannten) Gerät festzustellen, welche Besonderheiten es hat.

Kontrollaufgaben

1. **a)** $3{,}748 + 95{,}43$ **b)** $23{,}41 - 4{,}207$
   c) $3{,}793 + 19{,}7051 + 103{,}711$ **d)** $157 - 0{,}97 - 19{,}73 - 27{,}09$
   e) $292{,}7 - 9{,}77 - 28{,}23 + 23{,}04$
2. **a)** $19{,}2 \cdot 4{,}9$ **b)** $33 \cdot 0{,}072$ **c)** $7{,}9 : 2{,}3$
   d) $\dfrac{2{,}71 \cdot 1{,}27}{5 \cdot 7}$ **e)** $20 + 7{,}2 \cdot 4{,}48$ **f)** $39 \cdot (79 \cdot 111)$
   g) $44{,}2 \cdot 2{,}3 + 12{,}4 \cdot 8{,}1$
3. Gegeben sei ein Rechteck. Die Messung der Seitenlängen ergibt: $a = 6{,}11$ m; $b = 2{,}2$ m.
   Berechne Umfang und Flächeninhalt dieses Rechtecks!

Stoffabschnitt 1.2.

Prozentrechnung (23 Std.)

Die Prozentrechnung gehört zu jenen Teilen des mathematischen Schulstoffs, mit denen die Schüler nicht nur während ihrer weiteren Schulzeit (sowohl im Mathematikunterricht als auch im Unterricht anderer Fächer), sondern auch *danach* – im beruflichen, gesellschaftlichen und persönlichen Bereich – immer wieder konfrontiert werden. Prozentangaben und Prozentrechnung sind in einem solchen Maße in den Alltag eingedrungen, daß das im Lehrplan ausgewiesene Wissen und Können auf dem Gebiet der Prozentrechnung genauso als Bestandteil der *Elementarbildung* anzusehen ist wie die Beherrschung des Lesens, Schreibens und der Grundrechenoperationen mit natürlichen Zahlen.
Das Hauptziel in diesem Stoffabschnitt besteht somit darin, den Schülern feste, dauerhafte Kenntnisse über die in der Prozentrechnung auftretenden Größen und Zusammenhänge zu vermitteln und sie zu befähigen, prozentuale Angaben über Vergleiche sowohl in sprachlicher als auch in grafischer Form zu verstehen sowie Prozentaufgaben verschiedenster Art sicher und schnell zu lösen.
Dazu ist vor allem notwendig, daß die Schüler sich klare *inhaltliche Vorstellungen über den*

Prozentbegriff und *darauf aufbauende Verfahren zur Lösung* der verschiedenartigen *Aufgaben* aneignen.
Darüber hinaus sind auch wichtige Beiträge zur Entwicklung *allgemeinerer* Fähigkeiten, Denk- und Arbeitsweisen zu leisten (Fähigkeiten zum Lösen von Sachaufgaben, zum Arbeiten mit Gleichungen, funktionales Denken; Streben nach rationellem Vorgehen; Fähigkeit und Gewohnheit zur Selbstkontrolle u. a.).
Die Bedeutung der Prozentrechnung ergibt sich auch aus dem Umstand, daß sie besonders günstige Möglichkeiten bietet, Aufgaben und Problemstellungen zu betrachten, deren *erzieherische Potenzen* unmittelbar in ihrem *Inhalt* liegen. Dabei können erzieherische Wirkungen natürlich umso eher erzielt werden, je *aktueller* die Aufgabeninhalte sind bzw. je stärker man das *Interesse* der Schüler an ihnen entwickeln kann. Das Lehrbuch enthält hierzu eine Reihe von Aufgaben, die vor allem unter dem Gesichtspunkt einer *längerfristigen Aktualität* ausgewählt worden sind. Für nur *kurzzeitig* bedeutsame Aufgaben- und Problemstellungen, die natürlich ebenfalls im Unterricht Berücksichtigung finden sollen, sei der Lehrer auf Anregungen in der Zeitschrift „Mathematik in der Schule" sowie auf Zahlenmaterial aus dem Schulalltag, aus der Tagespresse, aus den Statistischen Jahrbüchern der DDR u. ä. verwiesen.
Der rein mathematische Gehalt der Prozentrechnung ist relativ begrenzt und auch nicht besonders schwierig. Er wird im Grunde durch eine einzige Verhältnisgleichung ausgedrückt, mit deren Hilfe man alle auftretenden Berechnungen bewältigen kann (vgl. LE 11).
Das generelle Anliegen von Prozentberechnungen besteht stets darin, Zahlen oder Größen in überschaubarer Form miteinander zu vergleichen. Dabei lassen sich zwei Grundsituationen unterscheiden:

a) Die eine Zahl bzw. Größe bezeichnet einen *Teil* der anderen, der Teil wird mit dem Ganzen verglichen.
   Beispiel: 6 von 24 Schülern einer Klasse sind Mitglieder einer Sportgemeinschaft (also 25 %).
   Diese *Anteilsituationen* werden durch die Redeweise „von" treffend ausgedrückt („Wieviel Prozent sind 18 M *von* 90 M?"; „Wieviel sind 28 % *von* 400 kg?"). Prozentsätze über 100 können hierbei nicht auftreten.
b) Die eine Zahl bzw. Größe wird mit einer anderen verglichen, der sie durch einen Sachbezug *zugeordnet* ist.
   Beispiel: Im Vergleich zum Vorjahr ist die Produktion von 5600 Stück auf 5824 Stück gestiegen (also *um* 4 %; bzw. *auf* 104 %).
   Diese *Zuordnungssituationen* werden vor allem durch die Redeweisen „Steigerung bzw. Senkung um bzw. auf" ausgedrückt („Der Export soll auf 108 % steigen"; „Um wieviel Prozent ist der Materialverbrauch gesenkt worden?"). Als Prozentsätze können beliebige nichtnegative Zahlen auftreten.

Anteilsituationen sind im allgemeinen leichter überschaubar als die Zuordnungssituationen, weil bei ersteren der Grundwert als „das Ganze" relativ einfach zu erkennen ist. Hinzu kommt, daß auch bei Zuordnungssituationen häufig die Redeweise „von" verwendet wird, obwohl *keine* „Teil-Ganzes-Beziehung" vorliegt (*Beispiel:* Die Ausgaben stiegen auf 5,3 Millionen Mark. Wieviel Prozent von 4,8 Millionen Mark sind das?).
Sobald für das Lösen von Prozentaufgaben *Taschenrechner* verwendet werden, treten rein rechnerische Probleme kaum noch auf, auch dann nicht, wenn in Anwendungsaufgaben relativ „schwieriges" Zahlenmaterial vorkommt.
Entscheidend für den Erfolg ist dann vor allem die richtige *Vorgehensweise,* die auf Dauer gesehen nur durch *inhaltliches Verständnis* gesichert werden kann. Den Schülern muß klarwerden: Das Verwenden der Prozenttaste auf dem Taschenrechner ist allein noch keine

Garantie für ein richtiges Resultat. Nur eine gründliche Analyse der jeweiligen Aufgabe führt zu einem richtigen Lösungsweg.
Um die Schüler von vornherein zu gründlichem Analysieren anzuregen und zu veranlassen, orientiert das Lehrbuch in starkem Maße auf Parallelbehandlung verschiedener Aufgabentypen, einschließlich solcher Aufgaben, in denen Prozentsätze über 100 auftreten. Aus diesem Grunde werden auch die Redeweisen „Steigerung/Senkung ... auf/um ...“ von Anfang an in Aufgaben verwendet.
Dem gleichen Anliegen dient der Aufbau des Lehrbuchs auch dadurch, daß zunächst nur relativ einfache Zahlen gewählt werden, um die Aufgaben im Kopf lösen zu können. Außerdem dominiert das auf die *Definition* des Prozentbegriffs gestützte Vorgehen, bei dem in der Regel zunächst der Wert von 1% ermittelt wird (falls man es nicht mit sogenannten „bequemen Prozentsätzen“ zu tun hat, bei denen man noch einfacher rechnen kann). Dieser Weg ist auch für die Verwendung des Rechners besonders rationell.
Ein zweiter Weg für das Lösen von Prozentaufgaben, der über das Aufstellen einer Verhältnisgleichung führt, wird im Lehrbuch absichtlich erst etwas später dargestellt, um der Gefahr einer zu frühen Formalisierung des Vorgehens und einer damit verbundenen Behinderung inhaltlichen Verstehens entgegenzuwirken. Das Arbeiten mit der Verhältnisgleichung ist dann aber durchaus als gleichberechtigt zum ersten Weg (über das Bestimmen von 1 %) anzusehen. Jedem Schüler sollte es letztlich freistehen, welchen Lösungsweg er wählen möchte – eben den, den er am sichersten beherrscht.
Es muß an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, daß die Abfolge der Lerneinheiten im Lehrbuch (die sich auch im Stoffverteilungsplan wiederfindet) nicht unbedingt als vollständig zwingend für die Reihenfolge der Stoffbehandlung im Unterricht anzusehen ist. Vor allem die Lerneinheiten 13, 14 und 15 können miteinander „verzahnt“ werden: Abschätzungen und Überschlagsrechnungen lassen sich auf *mehrere* Stunden *verteilen* und im Zusammenhang mit Sachaufgaben behandeln, grafische Darstellungen gehören sowieso zu den Anwendungen, so daß auch sie nicht unbedingt eine selbständige Lerneinheit bilden müssen. Möglichst wenige Veränderungen sollte dagegen die Stellung der Lerneinheit 12 erfahren: Ein *früheres* Verwenden des Taschenrechners kann die Entwicklung des inhaltlichen Verständnisses bei den Schülern behindern, eine *spätere* Benutzung wäre im Hinblick auf das Lösen von Anwendungsaufgaben unzweckmäßig.

Der Prozentbegriff (2 Std.)

LE 9 (LB 24 bis 26)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition von „1 % von *G*“,
- kennen die Begriffe „Grundwert“, „Prozentsatz“ und „Promille“ einschließlich der entsprechenden Symbole,
- können bestimmten Bruchteilen bzw. Vielfachen einer Größe die entsprechenden Prozentsätze zuordnen und umgekehrt,
- können Prozentaufgaben auf der Grundlage jener „bequemen Prozentsätze“ lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Prozentrechnung
- Klären der Redeweise „Prozent“ in einfachen Fällen
- Berechnungen mit „bequemen Prozentsätzen“

2. Stunde
- Erarbeitung der Definition von „1 % von G“ sowie der Begriffe „Grundwert“ und „Prozentsatz“
- Veranschaulichungen zu den „bequemen Prozentsätzen“

Methodische Hinweise

Motivierung der Prozentrechnung Man kann davon ausgehen, daß Schüler am Beginn von Klasse 7 die Redeweise „Prozent“ bereits kennen und auch schon weitgehend richtige, allerdings unterschiedlich umfassende Vorstellungen damit verbinden. Es ist deshalb zu empfehlen, am Beginn der Stoffbehandlung die Schüler zunächst einmal berichten zu lassen, was sie über die Redeweise „Prozent“ bereits wissen – in welchen Zusammenhängen sie sie kennengelernt haben, was sie bedeutet und wie man Prozentangaben ermitteln kann.
Daran anknüpfend kann man herausarbeiten:
a) Die Redeweise „Prozent“ ist in vielen Bereichen anzutreffen – sowohl im Alltag als auch in nahezu allen Berufszweigen;
b) um Prozentangaben richtig zu verstehen und auch selbst damit arbeiten zu können, ist es notwendig, sich mit diesem Thema gründlich zu beschäftigen.

Erste Erklärung des Prozentbegriffs – „bequeme Prozentsätze“ Erfahrungsgemäß ist es so, daß viele Schüler Beziehungen zwischen bestimmten Prozentsätzen und entsprechenden Bruchteilen eines Ganzen kennen (ohne deswegen eine Definition des Prozentbegriffs angeben zu können). Das gilt vor allem für die Beziehung „50 % von etwas ist dasselbe wie die Hälfte davon“, zum Teil aber auch für die entsprechenden Zusammenhänge bei 25 %, 10 %, 100 % und ähnlichen „bequemen“ Prozentsätzen.
Es ist naheliegend, an dieses Wissen der Schüler mit den Aufträgen 24 bis 26 anzuknüpfen.
Für ein gründliches Erfassen des Beziehungsgefüges zwischen Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert ist es wichtig, daß die Schüler von Anfang an mit *unterschiedlichen* Aufgabentypen konfrontiert werden. Man sollte dies möglichst schon in der 1. Stunde berücksichtigen (Aufg. 1, 3, 4, 5 u. a.).
Bereits in den Aufträgen 25 und 26 und auch in einigen Aufgaben kommen Prozentsätze über 100 vor. Diese Beispiele sollten möglichst *nicht* für später zurückgestellt werden, da sie eine bestimmte methodische Funktion besitzen. Es geht darum, daß die Schüler von Anfang an den Prozentbegriff nicht nur mit *Anteilsituationen* verknüpfen, sondern auch mit *Zuordnungssituationen* (vgl. die Vorbemerkungen zum Stoffabschnitt 1.2.), daß sie also nicht zu enge Vorstellungen entwickeln, die sie später beim Lösen von Anwendungsaufgaben behindern könnten.

Erarbeitung der Definition des Prozentbegriffs Das Lehrbuch ist so angelegt, daß die Schüler durch eine Analyse ihres schon vorhandenen Wissens über die Redeweise „Prozent“ zu dessen Erweiterung und Präzisierung geführt werden. Den Abschluß dieser

Phase bildet das Hervorheben und Bewußtmachen der Definition des Prozentbegriffs. Sie erfolgt dadurch, daß die Redeweise „1 % von G" definiert wird, und zwar als Funktion, die jedem Wert von G den Wert $\frac{G}{100}$ zuordnet. Auf Grund der vorangegangenen Überlegungen ist damit auch klar, daß p % von G gleich $p \cdot \frac{G}{100}$ ist.

Die Formulierung der Definition erinnert in erster Linie an *Anteilsituationen.* Es ist deshalb wichtig, sie sofort auch in Zusammenhang mit Beispielen zu bringen, bei denen Prozentsätze über 100 auftreten, um den *Zuordnungsaspekt* mit zu erfassen.

Die Einführung des Begriffs „Promille" ist lediglich als Ergänzung zum Prozentbegriff gedacht. In den weiteren Betrachtungen kommt er nicht vor.

Im Zusammenhang mit der Definition des Prozent- bzw. Promillebegriffs sollten die Schüler darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Zahlen 100 bzw. 1000 auch in anderer Hinsicht als „Vergleichszahlen" benutzt werden: Bei Angaben des Kraftstoffverbrauchs (je 100 km), der Säuglingssterblichkeit (je 1000 Neugeborener), dem Bestand an Fernsehgeräten (je 100 Haushalte) u. ä.

Um über Prozentaufgaben sprechen zu können, ist es angebracht, im Zusammenhang mit der Definition des Prozentbegriffs auch die Begriffe „Grundwert" und „Prozentsatz" einzuführen. Eigentlich gehört auch der Begriff „Prozentwert" hierher, um die Schüler aber nicht durch gleichzeitige Einführung zu vieler Begriffe zu verwirren, kann man „Prozentwert" bei späterer Gelegenheit nachholen (im Lehrbuch erfolgt das in LE 10).

Veranschaulichungen zu den „bequemen Prozentsätzen" Für die Entwicklung richtiger inhaltlicher Vorstellungen ist es nützlich, den Prozentbegriff auch mit bildhaften Darstellungen zu verknüpfen. Diesem Anliegen dienen die Aufgaben 5, 6, 9, 10. Sie bieten Gelegenheit, vor allem mit „bequemen Prozentsätzen" zu arbeiten, wobei alle drei Aufgabentypen der Prozentrechnung vorkommen – Bestimmen des Prozentsatzes (Aufg. 5), des Prozentwertes (Aufg. 6) und des Grundwertes (Aufg. 9). Darüber hinaus sollen die Aufgaben aber auch Einsichten in funktionale Zusammenhänge anbahnen, etwa: *Gleich großen* Flächenstücken können *unterschiedliche* Prozentsätze entsprechen – je nachdem, zu welcher Figur sie gehören (auf welchen Grundwert sie sich beziehen).

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1 bis 5; 7

Für leistungsstarke Schüler:

2. Uwe gibt für ein Buch 50 % seines monatlichen Taschengeldes aus. Vom Rest verbraucht er wiederum 50 % bei der Achterbahn. Er behält dann noch 5 M übrig. Wie hoch ist sein Taschengeld?

Berechnungen mit beliebigen Prozentsätzen (4 Std.)

LE 10 (LB 27 bis 30)

Das Anliegen dieser Lerneinheit besteht vor allem darin, den Schülern ein *einheitliches Verfahren* zur Lösung beliebiger Prozentaufgaben zu vermitteln, das auf *inhaltlichen Überlegungen* – letztlich auf der Definition des Prozentbegriffs – beruht.

Dieses Verfahren kann in verallgemeinerter Form durch die folgenden drei Schritte beschrieben werden:
a) Analysieren der Gegebenheiten und der Fragestellung;
b) Ermitteln des Wertes von 1 %;
c) Berechnen der gesuchten Größe mit Hilfe des Wertes von 1 %.
Gleichzeitig sollen die Schüler in dieser Lerneinheit erfassen, in welcher Weise G, p und W miteinander zusammenhängen, welchen Einfluß z. B. eine Änderung von p auf den Wert von W hat usw.
Es ist natürlich notwendig, die Lösungswege zur Berechnung des Prozentwertes, Prozentsatzes bzw. Grundwertes gesondert zu erarbeiten, es wäre aber falsch, jeden Typ für sich jeweils längere Zeit zu üben, den Lösungsvollzug zu automatisieren. Bei einer weitgehend getrennten Behandlung der drei Aufgabentypen hätten die Schüler kaum Gelegenheit, den außerordentlich wichtigen ersten Schritt des Lösungsverfahrens – das Analysieren – zu erlernen. Es kommt also darauf an, nach Erarbeitung und einer kurzen Erstfestigung der Lösungswege zu den drei Aufgabentypen möglichst bald das Gemeinsame (Rückgang auf den Wert von 1 %) bewußtzumachen und in der folgenden Festigungsphase die Aufgaben *nicht* nach Typen zu sortieren.

Ziele

Die Schüler
- kennen das prinzipielle Vorgehen zum Lösen von Prozentaufgaben (indem man zunächst den Wert von 1 % ermittelt),
- können mit einfachem Zahlenmaterial (z. T. auch unter Anleitung des Lehrers) Prozentwerte, Prozentsätze und Grundwerte berechnen,
- kennen den Begriff „Prozentwert“ und das entsprechende Symbol,
- kennen den funktionalen Zusammenhang von G, p und W und können dieses Wissen anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Berechnen von Prozentwerten
- Berechnen von Prozentsätzen

2. Stunde
- Wiederholung der Prozentwert- bzw. Prozentsatzberechnung
- Berechnen von Grundwerten

3. Stunde
- Vergleich der Lösungswege verschiedener Aufgabentypen
- Lösen unterschiedlicher Aufgaben

4. Stunde
- Bewußtmachen des funktionalen Zusammenhangs zwischen G, p und W
- Lösen von Anwendungsaufgaben

Methodische Hinweise

Berechnen von Prozentwerten Bei diesem Aufgabentyp handelt es sich um den einfachsten der drei vorkommenden. Meist bedarf es nach der Einführung des Prozentbegriffs kaum noch besonderer Erläuterungen, um die Schüler zur Lösung entsprechender Aufgaben zu befähigen. Man kann wahrscheinlich sofort Aufgabe 1 (bzw. analoge Aufgaben) von den Schülern lösen lassen.
Um nicht nur bei rein formalen Rechnungen zu bleiben, kann man Beispiel 28 heranziehen, wobei durch eine kurze Diskussion zum Sachproblem („Energieeinsparung") auch ein direkter Bezug zur Praxis herstellbar ist.
Für eine etwas verallgemeinerte Beschreibung der Vorgehensweise ist es angebracht, nunmehr den Begriff „Prozentwert" und das Symbol „W" einzuführen. (Früher wurde stattdessen der Buchstabe „P" benutzt. Das führte nicht selten zu Verwechslungen zwischen „P" und „p", die bei Verwendung von „W" nicht mehr vorkommen können.)
Nun kann festgehalten werden:

> „Man berechnet p % von G, indem man zunächst 1 % von G bestimmt und das Ergebnis dann mit dem Prozentsatz p multipliziert."

Es sollte den Schülern bewußtgemacht werden, daß diese Beschreibung des Lösungsweges auch durch die Gleichung $W = p \cdot \frac{G}{100}$ ausgedrückt wird (denn $\frac{G}{100}$ ist ja 1 % von G).

Berechnen von Prozentsätzen Durch eine Gegenüberstellung der gegebenen Werte in den Beispielen 28 und 29 kann noch einmal motiviert werden, daß man in der Lage sein muß, Prozentsätze zu berechnen.
Der Grundgedanke ist: Um festzustellen, wieviel Prozent des Grundwertes G ein gegebener Wert W darstellt, kann man ermitteln, wie oft 1 % von G in W enthalten ist.
Den Schülern ist diese Schlußweise im allgemeinen naheliegend. Wenn überschaubare Zahlen vorliegen (beispielsweise in Aufg. 2), finden sie meist selbständig und rasch die richtigen Lösungen. Man sollte sich aber mit dem Ergebnis allein nicht zufrieden geben, sondern die Schüler auffordern, ihr Vorgehen zu erläutern, etwa in folgender Weise:

> „Wenn $G = 500$ M ist, dann sind 35 M gerade 7 %, denn 1 % von 500 M sind 5 M und diese sind 7mal in 35 M enthalten; $35 : 5 = 7$."

Ausgehend von solchen Erläuterungen kann man dann eine verallgemeinerte Beschreibung der Vorgehensweise erarbeiten, etwa in folgender Form:

> „Man berechnet den Prozentsatz p, indem man zunächst 1 % von G bestimmt und danach feststellt, wie oft dieser Wert in W enthalten ist."

Den Schülern sollte verständlich gemacht werden, daß diese Beschreibung des Lösungsweges auch durch die Gleichung

$$p = W : \frac{G}{100}$$

ausgedrückt wird (Division von W durch den Wert von 1 %).

Berechnen von Grundwerten Zur *Motivierung* kann Beispiel 29 herangezogen werden. Für die *Erarbeitung des Lösungsweges* eignet sich Aufgabe 3. Die Schüler können sie weitgehend selbständig lösen (manchen Schülern wird man individuelle Hilfen geben), und aus der Erläuterung der Lösungswege gewinnt man eine verallgemeinerte Beschreibung der Vorgehensweise, etwa in folgender Form:

> „Man berechnet den Grundwert G, indem man zunächst mit Hilfe der Division $W : p$ den Wert von 1 % bestimmt und diesen dann mit 100 multipliziert."

Den Schülern sollte auch hierzu verständlich gemacht werden, daß die Gleichung

$G = \frac{W}{p} \cdot 100$ dasselbe ausdrückt.

Vergleich der Lösungswege verschiedener Aufgabentypen Den Schülern sollte vor allem bewußt werden, daß der erste Schritt immer darin besteht, den Wert von 1 % zu ermitteln. Ist G bekannt, so hat man dazu G durch 100 zu dividieren, sind W und p bekannt, so ergibt die Division $W:p$ den Wert von 1 %.
Mit Hilfe des bekannten Wertes von 1 % wird dann im zweiten Schritt die gesuchte Größe berechnet.
Folgende Übersicht könnte als *Zusammenfassung* erarbeitet werden:

Gesucht	1. Schritt Bestimmen des Wertes von 1 %	2. Schritt Berechnen der gesuchten Größe
W	Dividiere G durch 100!	Multipliziere $\frac{G}{100}$ mit p!
p	Dividiere G durch 100!	Dividiere W durch $\frac{G}{100}$!
G	Dividiere W durch p!	Multipliziere $\frac{W}{p}$ mit 100!

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die oben angegebenen Gleichungen *nicht* als „Merkstoff" anzusehen sind! Würde man die Schüler darauf orientieren, sie auswendig zu lernen und als „Lösungsformeln" für den jeweiligen Aufgabentyp zu benutzen, so könnte das zu sehr unerwünschtem Formalismus führen, bei dem das inhaltliche Verständnis für die Zusammenhänge bald verloren ginge. Das Angeben der Gleichungen soll den Schülern lediglich verdeutlichen, daß und wie im konkreten Fall der Lösungsweg in kurzer Form mit Hilfe von Variablen beschrieben werden kann.

Bewußtmachen des funktionalen Zusammenhangs zwischen G, p und W An der Gleichung $W = \frac{G}{100} \cdot p$ können die Schüler erkennen, daß W proportional zu p ist. Zur Erleichterung dieser Erkenntnis kann eine Darstellung wie im Bild 1.2 dienen, die an die Definition der Proportionalität in Klasse 6 erinnern soll.
Um die Schüler zu weiteren Überlegungen über den Zusammenhang zwischen G, p und W zu veranlassen, kann Auftrag 27 eingesetzt werden. Es ist aber auch möglich, entsprechende Betrachtungen nur an die Behandlung von Aufgaben (z. B. Aufg. 9, 10 und 11) zu knüpfen.

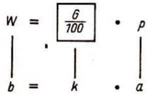


Bild 1.2

Lösen von Anwendungsaufgaben Bei den im Aufgabenteil zur LE 10 enthaltenen Anwendungsaufgaben geht es nicht in erster Linie darum, etwas auszurechnen, sondern um das richtige Verstehen und Beurteilen von Prozentangaben, um sachgemäßes Argumentieren – insgesamt um vertieftes Verstehen des Zusammenhangs zwischen G, p und W.
Im einzelnen sollen die Schüler erkennen:
- *Verschiedene* Prozentsätze können *denselben* Wert, *gleiche* Prozentsätze können *verschiedene* Werte bezeichnen, wenn sie sich auf unterschiedliche Grundwerte beziehen (Aufg. 9 bis 11).
- Man kann Prozentsätze nicht ohne weiteres addieren oder subtrahieren bzw. Durchschnitte von Prozentsätzen berechnen, wenn sie sich auf unterschiedliche Grundwerte beziehen (Aufg. 13 bis 15).
- Aus Prozentsätzen allein kann man nicht auf die zugrundeliegenden Größen schließen (Aufg. 12).

Falls man die Betrachtungen über die grafischen Veranschaulichungen hinaus (Aufg. 10 und 15) noch durch konkrete Zahlenbeispiele verdeutlichen will, können etwa folgende Werte gewählt werden:
Aufg. 9 – Der Mietbetrag sei 60 M;
Aufg. 11 – Frau X spende 4 M, Herr Y dagegen 6 M;
Aufg. 14 – Man betrachte folgende drei Fälle:

	Es beteiligen sich in Schule A	davon 40 %	in Schule B	davon 20 %	Prozentsatz insgesamt
1	90 Schüler	36	30 Schüler	6	35 %
2	80 Schüler	32	80 Schüler	16	30 %
3	40 Schüler	16	60 Schüler	12	28 %

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 5 bis 8

Für leistungsstarke Schüler:

2. Ein Zug benötigt bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $80 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ für eine bestimmte Strecke 2,5 h. Um wieviel Prozent verringert sich seine Fahrzeit, wenn seine Durchschnittsgeschwindigkeit um 25 % erhöht wird?
3. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Basiswinkeln $\alpha = \beta = 40°$. Um wieviel Prozent verringert sich die Größe von γ, wenn α und β um 50 % vergrößert werden?
4. In einer Schule mit 800 Schülern beteiligen sich 4 % aller Schüler an einem Zeichenwettbewerb. Bei der nächsten Veranstaltung konnte dieser Anteil noch um 25 % erhöht werden.
   Wieviel Schüler nahmen nun teil?

Es wird empfohlen, vor Behandlung der LE 11 eine schriftliche Kurzkontrolle (10 min) durchzuführen: Auswahl aus den Aufgaben 11, 12, 13, 17, 19, 20 (UH 17).

Lösen von Prozentaufgaben mit Hilfe von Verhältnisgleichungen (3 Std.)

LE 11 (LB 30 bis 31)

In dieser Lerneinheit sollen die Schüler erkennen, daß der Zusammenhang zwischen G, p und W durch eine Verhältnisgleichung ausgedrückt werden kann, und sie sollen lernen, beliebige Prozentaufgaben mit Hilfe dieser Verhältnisgleichung zu lösen. Es ist ihnen dabei bewußtzumachen, daß dies eine *zweite* Möglichkeit ist (neben dem schon bekannten Vorgehen über 1 %), derartige Aufgaben zu lösen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Verhältnisgleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$,
- können Prozentaufgaben mit Hilfe dieser Gleichung durch Auflösen nach der gesuchten Größe lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführen der Gleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$
- Lösen einfacher Aufgaben

2. und 3. Stunde
- Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Zuordnungstabellen

Methodische Hinweise

Einführen der Gleichung $\frac{W}{p} = \frac{G}{100}$ Am naheliegendsten dürfte es sein, an den in LE 10 schon hervorgehobenen Zusammenhang $W \sim p$ anzuknüpfen. Aus Klasse 6 ist den Schülern bekannt, daß im Falle der direkten Proportionalität die Verhältnisse einander zugeordneter Werte gleich sind, und zwar gleich dem Proportionalitätsfaktor. Aus dieser Überlegung erhält man unmittelbar die angegebene Verhältnisgleichung.
Durch Erarbeiten einer Wertetabelle (etwa für $G = 1200$) könnte die Überlegung noch einmal verdeutlicht werden.

Lösen einfacher Aufgaben Anknüpfend an das bereits in Klasse 6 eingeführte und im Stoffabschnitt 1.1. weiter gefestigte Verfahren des Auflösens einer Verhältnisgleichung nach der jeweils gesuchten Größe sollten verschiedenartige Aufgaben gelöst werden. Dabei kann auf Zahlenmaterial aus der LE 10 zurückgegriffen werden (Aufg. 1 bis 5). Es ist kein Nachteil, wenn die Schüler diese Aufgaben bereits früher gelöst haben. Jetzt geht es vor allem um die Anwendung des neuen *Verfahrens*, und früher gefundene Lösungen können sogar zur Kontrolle herangezogen werden.
Das Auflösen der Verhältnisgleichung ist nicht in allen Fällen gleich schwierig. Es fällt den Schülern meist leicht, wenn W oder G gesucht ist, nicht so einfach ist es dagegen, wenn p berechnet werden soll. Dieser Aufgabentyp ist deshalb besonders zu beachten.

Lösen von Anwendungsaufgaben Für das Finden eines richtigen Ansatzes kann es nützlich sein, daß die Schüler Zuordnungstabellen aufstellen, wie sie sie in Klasse 6 bereits kennengelernt haben. Dies erleichtert, die in der Aufgabe gegebenen Zahlen oder Größen in zutreffender Weise den Begriffen Grundwert, Prozentsatz bzw. Prozentwert zuzuordnen, den Sachverhalt also gründlich zu analysieren.
Für das Verständnis der im Lehrbuch gewählten Form dieser Tabellen ist wichtig, daß die Schüler den Grundwert als einen speziellen Prozentwert erkennen (eben den zum Prozentsatz 100 gehörigen).
Die Zuordnungstabelle entspricht in der Anordnung der eingeführten Verhältnisgleichung. Das bedeutet aber *nicht*, daß man *stets* zu *dieser* Verhältnisgleichung übergehen muß. Um die jeweilige Aufgabe möglichst *rationell* zu lösen, ist es vielmehr zweckmäßig,

das Aufstellen der Gleichung stets mit der Variablen für das *Gesuchte* zu beginnen (siehe Beispiele 31 und 32). Durch einen Pfeil kann dabei angezeigt werden, in welcher Richtung die Verhältnisse aus der Zuordnungstabelle aufgestellt werden.
Diese Vorgehensweise bedarf allerdings einer Rechtfertigung, sie sollte nicht als bloßes Rezept vermittelt werden. Die Schüler sollten erfahren (bzw. daran erinnert werden), daß aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ folgt, vor allem aber auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ – und umgekehrt. (Ein einfaches Zahlenbeispiel – etwa mit $a = 6$, $b = 18$, $c = 3$, $d = 9$ – könnte dies auch noch verdeutlichen.)
Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es nicht ratsam ist, Prozentaufgaben künftig ***nur*** noch mit Hilfe einer Verhältnisgleichung zu lösen! Ein solches Vorgehen könnte dazu führen, daß die in den vorangegangenen Stunden entwickelten inhaltlichen Vorstellungen wieder verlorengehen. Man sollte deshalb den Weg über 1 % vor allem bei einfachen Kopfrechenaufgaben üben, ihn aber auch sonst öfter benutzen. Im Endeffekt sollte jeder Schüler jeweils den Weg wählen, den er am sichersten beherrscht.

Kontrollaufgaben

1. LE 10, Aufg. 5
2. a) Bei einem Schießwettbewerb erreichte ein Schütze 129 von 150 möglichen Ringen. Wieviel Prozent sind das?
   b) Ein zweiter Schütze erreichte 78 % aller möglichen Ringe. Wieviel waren das?
   c) Bei einem anderen Wettbewerb erzielte ein Schütze 39 Treffer, das waren 65 % aller möglichen. Wieviel Treffer konnten erreicht werden?

Die Verwendung des Taschenrechners für Prozentberechnungen (2 Std.)

LE 12 (LB 31 bis 33)

Ziele

Die Schüler
- können zur Lösung von Prozentaufgaben den Taschenrechner sinnvoll nutzen,
- kennen die Handhabung der Prozenttaste bei ihrem Rechner,
- kontrollieren die mit dem Rechner ermittelte Lösung durch Abschätzungen oder Überschlagsrechnung.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeiten geeigneter Rechenablaufpläne
- Abschätzen, Überschlagen

2. Stunde
- Übungen zur Nutzung des Taschenrechners
- Lösen von Anwendungsaufgaben

Methodische Hinweise

Erarbeiten geeigneter Rechenablaufpläne Man sollte von Aufgaben ausgehen, die im Kopf gelöst werden können, und zwar auf dem *Wege über die Berechnung des Wertes von 1 %*. Das dabei angewandte Vorgehen wird dann mit dem Taschenrechner nachvollzogen (vgl. Beispiele 33 bis 35). Dabei sollte die Benutzung der Prozenttaste *nicht* im Vordergrund stehen! Sie wird im Grunde nicht gebraucht. Da die meisten Taschenrechner eine solche Taste aber aufweisen, wäre es andererseits lebensfremd, sie ignorieren zu wollen. Man wird also ihre Verwendung erläutern, wobei besonders darauf zu achten ist, daß die Schüler die Funktionsweise *ihres* Rechners kennen und berücksichtigen: Bei manchen Typen wird nach dem Drücken der Prozenttaste bereits das Endergebnis angezeigt, beim SR 1 muß anschließend noch die Gleichheitstaste betätigt werden!
Es versteht sich im übrigen wohl fast von selbst, daß der Lehrer die Schüler nicht veranlassen sollte, die erarbeiteten Rechenablaufpläne in verallgemeinerter Form auswendig zu lernen. Vielmehr ist wichtig, daß sie das jeweilige Vorgehen aus *inhaltlichem Verständnis* heraus immer wieder reproduzieren können.

Abschätzen, Überschlagen Mit der Verwendung des Taschenrechners gewinnt das Kontrollieren der Ergebnisse (vor allem durch rechnerunabhängige Methoden) besondere Bedeutung. Es soll in erster Linie dazu dienen, eventuelle Fehler in der Vorgehensweise zu erkennen und zu korrigieren, aber natürlich auch andere Irrtümer zu bemerken.
Auch wenn man an dieser Stelle noch keinen „Vorgriff" auf LE 13 machen möchte, sollten die Schüler zumindest angehalten werden, die mit dem Taschenrechner erzielten Resultate kritisch zu betrachten und zu überlegen, ob sie richtig sein können. Dabei können sie sich auf ihre Kenntnisse über „bequeme Prozentsätze" stützen.

Übungen zur Nutzung des Taschenrechners Ähnlich wie in LE 10 sollten auch beim Rechnen mit dem Taschenrechner die einzelnen Aufgabentypen nicht isoliert geübt werden. Es ist wichtig, daß die Schüler immer wieder neu überlegen müssen, welches Vorgehen bei der jeweils vorliegenden Aufgabe angewandt werden kann. Deshalb ist zu empfehlen, die im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben nicht in der dort gegebenen Reihenfolge zu stellen, sondern sie zu „mischen" – also beispielsweise Serien wie die folgende zu bilden: Löse die Aufgaben 1b), h); 3a); 2b), g); 3f); 1g); 3c) in der angegebenen Reihenfolge!

Lösen von Anwendungsaufgaben Um die Übungen mit dem Taschenrechner nicht zu formal und eintönig werden zu lassen, ist zu empfehlen, auch Aufgaben aus LE 14 einzubeziehen. Dabei sollten den Schülern Hinweise gegeben werden, wie sie die Lösung von Anwendungsaufgaben im Heft *darstellen* können.
Aus methodischer Sicht ist zu fordern, daß die Lösungsdarstellungen folgende Bedingungen erfüllen:

a) Prinzipielle Übereinstimmung mit entsprechenden Darstellungen in anderen Stoffgebieten und Klassenstufen;
b) schriftliche Fixierung der wesentlichsten Lösungsschritte;
c) Formulierung eines Antwortsatzes.

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen könnte die Lösungsdarstellung zur Aufgabe 5 der LE 14 etwa wie folgt aussehen:

Gegeben:	$G = 147{,}9$ Mill. km^2
	$W = 10{,}1$ Mill. km^2
Gesucht:	p
Abschätzung:	10 von 150 entspricht etwa 7 % ($10 : 1{,}5 \approx 7$)
Lösung:	1 % von G ist 1,479 Mill. km^2
	$p = 10{,}1 : 1{,}479$
	$p = 6{,}8289 \ldots$

Antwort: Auf Europa entfallen 6,83 % der Festlandfläche.
Es ist auch möglich, unter dem Stichwort „Lösung“ den verwendeten Rechenablaufplan anzugeben, der ja auch erkennen läßt, wie gerechnet wurde, also z. B.:

Lösung: **10,1** $\boxed{\div}$ **147,9** $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$

> *Kontrollaufgaben*
>
> 1. Aufg. 4
> 2. Gegeben sei ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 0,5 m.
>   Auf wieviel Prozent wächst dessen Flächeninhalt, wenn man seine Seitenlänge um 20 % vergrößert?
>   Um wieviel Prozent wächst dabei sein Umfang?

Abschätzungen und Überschlagsrechnungen (2 Std.)

LE 13 (LB 33 bis 34)

Unter Berücksichtigung einer möglichen Verzahnung der LE 13 und 14 (evtl. auch mit LE 15) wird darauf verzichtet, die Schwerpunkte bestimmten Stunden zuzuordnen. Es dürfte nämlich zweckmäßig sein, die Inhalte der LE 13 auf mehr als 2 Stunden zu verteilen und sie dabei von vornherein mit dem Lösen von Anwendungsaufgaben in Verbindung zu bringen.

> **Ziele**
>
> Die Schüler
> - können im Kopf Näherungslösungen für Prozentaufgaben bestimmen,
> - können vorliegende Lösungen durch Abschätzen oder Überschlagen daraufhin beurteilen, ob sie richtig sein könnten,
> - sind daran gewöhnt, ihre Ergebnisse zu kontrollieren.
>
> **Schwerpunkte**
>
> - Ermitteln von Näherungslösungen
> - Abschätzen

Methodische Hinweise

Ermitteln von Näherungslösungen Es kommt vor allen Dingen darauf an, daß die Schüler die notwendigen Überschlagsrechnungen *im Kopf* auszuführen vermögen. Dafür müssen sie unter anderem lernen:

a) Anwenden „bequemer Prozentsätze“
Dazu sind die Schüler schon von der 1. Stunde an zu befähigen (vgl. LE 9). Über die anfangs verwendeten Beziehungen (50 % $\triangleq \frac{1}{2}$; 10 % $\triangleq \frac{1}{10}$; ...) hinaus sollte man den Schülern weitere Zusammenhänge zwischen bestimmten Prozentsätzen und Bruchteilen bewußtmachen, etwa:
20 % von G ist ein Fünftel von G;
12,5 % von G ist ein Achtel von G;
5 % von G ist ein Zwanzigstel von G.

b) Wahl geeigneter Näherungswerte
Die Schüler müssen verstehen, daß es in erster Linie darauf ankommt, auf einfache Weise im Kopf rechnen zu können. Es ist deshalb im allgemeinen nicht angebracht, sich an die sogenannten Rundungsregeln zu halten. Man kann nur fordern:
„Wähle Näherungswerte, mit denen du leicht im Kopf rechnen kannst, aber nicht zu grobe, weil der Überschlag sonst zu wenig aussagekräftig ist!“

Dabei gibt es oft *verschiedene* Möglichkeiten. Das muß auch den Schülern klar sein, damit sie nicht unsicher werden, sondern lernen, sich jeweils selbständig für einen der möglichen Wege zu entscheiden. Es ist deshalb zu empfehlen, den Schülern an einigen Beispielen mehrere Varianten vor Augen zu führen, etwa:

– 43 % von 7,8 m	– sind ungefähr so viel wie 50 % von 7 m, also 3,5 m;
oder	– sind ungefähr so viel wie 40 % von 8 m, also etwa 3,2 m.
– 112 m von 425 m	– entsprechen etwa 100 m von 400 m, also rund 25 %;
oder	– entsprechen ungefähr 150 m von 450 m, also rund 33 %.

Abschätzen Man überlegt dabei, ob der gesuchte Wert größer oder kleiner als ein bereits bekannter (oder leicht zu ermittelnder) sein muß. Dabei schließt man z. B. wie folgt:
Wenn $p_1 < p_2$ und G konstant ist, muß $W_1 < W_2$ gelten
(oder konkreter: Wenn $p < 50\,\%$ ist, muß $W < \frac{G}{2}$ sein);
für $p < 100\,\%$ ist $W < G$ (siehe auch Beispiel 36).

Das Anwenden von Kontrollverfahren durch die Schüler ist natürlich nicht nur ein Problem des *Könnens*, sondern auch des *Wollens*, hat also eine starke *erzieherische* Komponente. Um ihr gerecht zu werden, ist es notwendig, die Schüler an die Durchführung von Kontrollen zu *gewöhnen* (natürlich nicht nur im Stoffabschnitt „Prozentrechnung“).
Dies erfordert:

a) *Motivierung* der Kontrollen (Bedeutung für die Arbeit im Unterricht und in der gesellschaftlichen Praxis);
b) ständiges *Fordern* von Kontrollen (dabei ist Schematismus zu vermeiden);
c) *Werten* von Kontrollen (z. B.: Ein als falsch *erkanntes* Ergebnis muß zu einer besseren Beurteilung führen als ein *nicht* erkannter Fehler).

Kontrollaufgaben

Aufg. 4

An dieser Stelle könnte eine schriftliche Kurzkontrolle (10 min) *ohne* Verwendung des Rechners erfolgen: Auswahl aus den Aufg. 14 bis 18, 21 (UH 17)

Lösen weiterer Anwendungsaufgaben (3 Std.)

LE 14 (LB 34 bis 37)

Wie schon an früherer Stelle bemerkt, wird es zweckmäßig sein, Anwendungsaufgaben in verschiedenen Lerneinheiten zu behandeln. Deshalb ist hier keine Aufteilung der Schwerpunkte auf einzelne Stunden angegeben.

Ziele

Die Schüler
- haben ihre Fähigkeiten im Analysieren von Anwendungsaufgaben und im Auffinden geeigneter Lösungswege weiterentwickelt,
- können angewandte Prozentaufgaben lösen,
- haben anhand der Aufgaben neue Einsichten in gesellschaftliche, ökonomische oder wissenschaftlich-technische Bereiche gewonnen und dadurch ihre weltanschauliche Bildung vertieft.

Schwerpunkte

- Analysieren der Gegebenheiten, Entwickeln geeigneter Lösungswege
- Diskussion der Aufgabeninhalte, Abheben von Erkenntnissen, Werten

Methodische Hinweise

Analysieren der Gegebenheiten, Entwickeln geeigneter Lösungswege Mit der Verwendung von Taschenrechnern ist der rein rechnerische Teil der Aufgabenlösungen im allgemeinen rasch und sicher zu bewältigen. Es entsteht die Möglichkeit, sich im Unterricht wesentlich ausführlicher und gründlicher als früher mit der „Ansatzfindung", mit dem Entwickeln des Lösungsplanes zu beschäftigen.
Dabei sind folgende Aspekte zu beachten:
a) Das Herangehen an Anwendungsaufgaben zur Prozentrechnung soll sich im Prinzip nicht vom Vorgehen bei anderen Anwendungsaufgaben unterscheiden.
b) Bei der Ansatzfindung wirkt sich das unterschiedliche mathematische Leistungsvermögen der Schüler erfahrungsgemäß relativ stark aus, so daß in dieser Phase differenziertes Arbeiten besonders notwendig ist.

Zu a):
Die Orientierungen, Impulse und Hilfen, die der Lehrer den Schülern geben kann, sollten darauf gerichtet sein, die Schüler an *heuristische Arbeitsweisen* heranzuführen, wie sie beispielsweise in [B 13, S. 75 f.] beschrieben sind. Sie zielen darauf ab, bei Aufgaben, deren Lösung bzw. Lösungsweg man nicht sofort angeben kann, dennoch *planmäßig* nach einem Lösungsansatz zu suchen und sich nicht nur auf zufällig auftauchende Ideen zu verlassen. In der *ersten Phase* der Aufgabenbearbeitung sollte man die Schüler deshalb immer wieder anregen, die Gegebenheiten gründlich zu *analysieren*.
Dazu eignen sich Fragen wie:

„Welche Größen sind gegeben? Was ist gesucht? Welche im Text formulierten Bedingungen sind zu beachten?"

Man sollte auch fragen, ob die Gegebenheiten durch eine Skizze oder durch eine Tabelle übersichtlich dargestellt werden können.
In der *zweiten Phase* geht es um das *Aufsuchen eines Lösungsweges*.
Dazu eignen sich Fragen wie:

„Kann man die gesuchte Größe direkt aus den gegebenen Werten berechnen? Wenn ja, wie? Wenn nein – welche Größen müssen noch ermittelt werden? Wie findet man diese?"

In der *dritten Phase* ist der gefundene *Lösungsweg durchzuführen und darzustellen*.
Begleitend zu diesem Vorgehen ist ständig zu prüfen, ob *richtig* gearbeitet wird. Man hat sich also immer wieder zu fragen:

„Sind die gegebenen und gesuchten Größen richtig bestimmt? Entspricht der jeweilige Lösungsschritt den Bedingungen der Aufgabe? Ist er mathematisch korrekt? Kann das Ergebnis überhaupt stimmen?"

Als *Beispiel* sei hierzu Aufgabe 9 betrachtet:
In der *ersten* Bearbeitungsphase wäre zu klären:
Gegeben ist die Zahl 8000. Was stellt sie in der Aufgabe dar? (Sie ist ein Grundwert.)
Außerdem sind zwei Prozentsätze gegeben. Worauf beziehen sie sich? (Es handelt sich um prozentuale Steigerungen. Die 15 % beziehen sich auf den Grundwert 8000, die 8 % auf einen noch nicht bekannten Grundwert.)
Gesucht ist die prozentuale Steigerung vom 1. zum 3. Monat.
Die Gegebenheiten können durch eine Tabelle verdeutlicht werden:

	1. Monat	2. Monat	3. Monat
Verkaufszahl	$G = 8000$	W_1 (G plus 15 % von G)	W_2 (W_1 plus 8 % von W_1)

In der *zweiten* Bearbeitungsphase muß bewußt werden:
Man kann die Lösung nicht direkt aus den gegebenen Werten berechnen. Insbesondere die Addition 15 % + 8 % wäre unangebracht, weil die Prozentsätze sich auf verschiedene Grundwerte beziehen. Man benötigt zur Lösung die Verkaufszahl im 3. Monat. Diese kann man aus der des 2. Monats berechnen, die dazu aber erst bestimmt werden muß.
Als Lösungsweg ergibt sich somit:
Zuerst 15 % von 8000 zu 8000 addieren – das ergibt W_1, dann 8 % von W_1 zu W_1 addieren – das ergibt W_2.
Anschließend ist zu berechnen, wieviel Prozent von 8000 die Differenz $W_2 - 8000$ entspricht.
Für die Lösungsdarstellung in der *dritten* Bearbeitungsphase kann die oben angegebene Tabelle mit benutzt werden, indem man die Werte für W_1 und W_2 einträgt ($W_1 = 9200$; $W_2 = 9936$; für die Steigerung erhält man 24,2 %).
Um den Schülern die Notwendigkeit einer gründlichen Analyse der Aufgabenstellung bewußtzumachen, ist es angebracht, gelegentlich auch eine Aufgabe zu stellen, zu deren Lösung man gar keine Prozentrechnung benötigt.

Zu b):
Um möglichst *alle* Schüler zum Lösen von Anwendungsaufgaben zu befähigen, muß der Lehrer dafür sorgen, daß sie auch alle hinreichend Gelegenheit erhalten, den *gesamten* Lösungsprozeß möglichst selbständig zu vollziehen und dadurch entsprechende Fähigkeiten auszubilden. Dies ist *nicht* gesichert, wenn die Aufgaben vorwiegend im Unterrichtsgespräch behandelt werden. Erfahrungsgemäß entwickeln dabei die leistungsstarken Schüler relativ rasch den Lösungsweg, so daß andere oft nur beim Ausführen dieses Weges (also in der dritten Bearbeitungsphase) aktiv werden können.

Für ein dem Leistungsvermögen der einzelnen Schüler angemesseneres, differenziertes Arbeiten sind u. a. folgende zwei methodische Varianten anwendbar:

1. Es werden Aufgaben (gleiche oder auch unterschiedliche) in selbständiger Arbeit durch die Schüler gelöst. Dabei nutzt der Lehrer die Gelegenheit, einzelnen Schülern individuelle Hilfen bei der Ansatzfindung zu geben.
2. Ein Teil der Schüler arbeitet selbständig im Heft, mit den übrigen führt der Lehrer ein Unterrichtsgespräch, das er dem Leistungsvermögen dieser Gruppe anpaßt.

(Bei beiden Varianten ist nicht unbedingt von vornherein gesagt, daß der Lehrer sich nur den Schülern besonders zuwendet, die noch Hilfen brauchen. Es tritt auch die Situation auf, daß ein Teil der Schüler noch einiger elementarer Übungen bedarf, während der Lehrer mit anderen Schülern etwas kompliziertere Aufgaben behandeln kann.)

Bei der Hilfe für manche Schüler sollte der Lehrer nicht nur an *wiederholtes* Erläutern von Vorgehensweisen auf gleichbleibendem Abstraktionsniveau denken, sondern immer wieder auch zu anschaulichem, bildhaftem Arbeiten, zu systematischem Probieren und ähnlichen Methoden greifen, um diesen Schülern den Zugang zu abstrakteren Vorgehensweisen zu erleichtern.

Beispiele:

1. Zu Aufgabe 2 wird an der Tafel ein Rechteck gezeichnet, das die 2,50 t Messing darstellt. Etwa ein Drittel davon wird weiß ausgemalt – als „Zinkanteil", knapp zwei Drittel rot – als „Kupferanteil".
   Den beiden Teilflächen werden die zu berechnenden Größen zugeordnet: „weiß" – 34 % von 2,50 t; „rot" – 64 % von 2,50 t.
2. Bei Beispiel 40 könnte man den gesuchten Grundwert auch durch systematisches Probieren zu ermitteln versuchen. Man beginnt vielleicht mit einem Schätzwert von $G = 200$ g. Davon 16 % sind 32 g, also *mehr* als 25 g.
   Man benötigt demnach *weniger* Frischmasse, vielleicht 150 g. Das würde 24 g Trockensubstanz ergeben. Nach eventuell noch ein oder zwei Versuchen könnte man herausarbeiten:
   Man sucht einen Wert G, für den gilt: $\frac{G}{100} \cdot 16 = 25$. Es muß also $\frac{G}{100} = \frac{25}{16}$ sein.
   G kann somit *berechnet* werden, indem man 25 durch 16 dividiert und das Ergebnis mit 100 multipliziert.

Diskussion der Aufgabeninhalte ... Die Anwendungsaufgaben sollten nach Möglichkeit so ausgewählt werden, daß ihr Inhalt fachübergreifende, weltanschauliche oder erzieherische Potenzen besitzt. Dazu ist notwendig,

- einigermaßen *belangvolle* Aufgabeninhalte auszuwählen, die den Schülern aber auch *verständlich* sein müssen;
- Aufgabenstellungen zu bilden, die sowohl hinsichtlich der vorkommenden Größen als auch in der Fragestellung *lebensnah* sind;
- Aufgaben einzubeziehen, deren Ergebnisse zu Wertungen und Stellungnahmen herausfordern.

Das Nutzen weltanschaulicher oder erzieherischer Potenzen von Anwendungsaufgaben bedeutet nicht, im Mathematikunterricht immer wieder umfangreiche Diskussionen über die verschiedensten außermathematischen Probleme zu führen. Oft genügt ein Aufmerksammachen der Schüler, das Aufwerfen einer Frage, der Austausch weniger Meinungen, um die genannten Potenzen zur Wirkung zu bringen, um bei den Schülern eigenes Nachdenken anzuregen.

Zu einigen Aufgaben aus dem Lehrbuch sollen Hinweise für ihre erzieherische Nutzung gegeben werden:

LE 14: Aufg. 7 – Bedeutung des Waldes; der Beitrag jedes einzelnen Schülers zur Erhaltung von Wald

Aufg. 8 – Hat die Erde Platz für immer mehr Menschen?

Aufg. 10 – Ist der Genuß von 3 Glas Bier „harmloser" als der von 3 Glas Wodka?

LE 15: Beispiel 44 – Müssen die Werktätigen in der Landwirtschaft heute viel mehr arbeiten als früher?

Aufg. 3 – Leistungsanstieg der Landwirtschaft in der DDR (wodurch?); volkswirtschaftliche Bedeutung (Einschränkung von Getreideimporten)

Aufg. 4 – Kann die Entwicklung immer so weitergehen? Was wäre vernünftig?

Kontrollaufgaben

Aufg. 1, 2, 3

Grafische Darstellungen (2 Std.)

LE 15 (LB 37 bis 39)

Das Hauptziel besteht darin, daß die Schüler grafische Darstellungen prozentualer Angaben (die in vielen gesellschaftlichen und beruflichen Bereichen verwendet werden) inhaltlich *verstehen* und *deuten* lernen. Dazu ist es u. a. notwendig, daß die Schüler einige solcher Darstellungen auch selbst anfertigen.
Aus schon dargelegten Gründen wird darauf verzichtet, einen Vorschlag für die Verteilung der Schwerpunkte auf einzelne Stunden anzugeben.

Ziele

Die Schüler
- verstehen grafische Darstellungen prozentualer Angaben,
- können prozentuale Angaben in Kreis-, Streifen- oder Liniendiagrammen darstellen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung von Kreisdiagrammen
- Erarbeitung von Streifendiagrammen
- Erarbeitung von Liniendiagrammen

Methodische Hinweise

Erarbeitung von Kreisdiagrammen Kreisdiagramme werden für die Darstellung von Anteilsituationen verwendet, bei denen sich die Angaben auf *ein und denselben Grundwert* beziehen.
Eigentlich ist es zu ihrer Herstellung nicht notwendig, Prozentsätze zu berechnen. Wenn

man dem gegebenen Grundwert den Wert von 360° (Maß des Vollwinkels) zuordnet, kann man die übrigen Winkelgrößen mit Hilfe der Proportion $\alpha : W = 360° : G$ errechnen. Nicht selten liegen aber bereits Prozentangaben vor, die dann in Winkelgrößen umzurechnen sind (vgl. Beispiel 42).

Erarbeitung von Streifendiagrammen Diese Darstellung verwendet man gewöhnlich, wenn *mehrere* Anteilsituationen (mit unterschiedlichen Grundwerten) miteinander zu *vergleichen* sind. Den Schülern sollte in diesem Zusammenhang klar werden, daß ein derartiges Streifendiagramm im allgemeinen keine Vergleiche der Grundwerte oder Prozentwerte ermöglicht, sondern nur die verschiedenen Prozent*sätze* veranschaulicht.

Erarbeitung von Liniendiagrammen Sie werden insbesondere verwendet, um Entwicklungen, Vergleiche mit einer Anfangs- oder Bezugsgröße darzustellen (also gewisse Zuordnungssituationen zu veranschaulichen).
Auch in diesem Fall ist es nicht unbedingt notwendig, Prozentsätze zu kennen. Es genügt, der Bezugsgröße irgendeine geeignete Streckenlänge zuzuordnen und die anderen Werte danach in entsprechende Streckenlängen umzurechnen. (Dieses Verfahren ist den Schülern bereits bekannt.)
Die Schüler sollen aber gerade lernen, wie man in dieser Weise auch Prozentangaben anschaulich darstellen kann.
In diesem Zusammenhang ist darauf zu achten, daß den Schülern klar ist: Das Verbinden der einzelnen Punkte, die den gegebenen Werten entsprechen, durch einen Streckenzug kann zwar die jeweilige Entwicklungstendenz deutlicher sichtbar werden lassen, hat darüber hinaus aber keinen Informationswert.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1
2. Erläutere, was man dem Bild A 8 (A 9, A 10, A 11) entnehmen kann!

Berechnung von Zinsen (1 Std.)

LE 16 (LB 39 bis 41)

Das Thema ist in die Anwendungen der Prozentrechnung einzuordnen, muß also auch nicht unbedingt am Schluß des Stoffabschnitts behandelt werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Guthaben“, „Zinssatz“ und „Zinsen“,
- wissen, daß man für Sparguthaben Zinsen erhält und für Kredite im allgemeinen Zinsen bezahlen muß,
- können einfache Zinsen berechnen.

Schwerpunkte

- Erläuterung der Begriffe „Zinsen" und „Zinssatz"
- Berechnung von Zinsen

Methodische Hinweise

Erläuterung der Begriffe „Guthaben", „Zinssatz" und „Zinsen" Es wird zweckmäßig sein, an bei den Schülern teilweise schon vorhandene Kenntnisse anzuknüpfen, sie zu ergänzen und zu präzisieren. Dabei sollten vor allem folgende Fragen geklärt werden:

1. Was sind „Zinsen"?
   (Im Falle von Sparguthaben: Geld, das man nach jeweils einem Jahr zu seinem Guthaben dazu bekommt)
2. Wo kommt das Geld für Zinsen her?
   (Die Sparguthaben werden u. a. zur Finanzierung volkswirtschaftlicher Vorhaben genutzt. Die Volkswirtschaft erzeugt wertmäßig mehr, als sie für die Produktion aufwendet. Aus diesem „Mehr" werden auch die Zinsen gewonnen.)
3. Wovon hängt die Höhe der Zinsen ab?
   (Von der Höhe des Guthabens bzw. des Kredits, vom Zinssatz und von der Dauer des „Lagerns" des Guthabens in der Sparkasse)

Berechnung von Zinsen Es genügt, sich im wesentlichen auf die Berechnung von Jahreszinsen zu beschränken und den Schülern nur an ein oder zwei Beispielen zu verdeutlichen, wie man beim Auftreten anderer Zeitabschnitte vorgehen kann.
Bei Aufgabenstellungen, die sich auf längere Zeiträume als 1 Jahr beziehen, muß klar gesagt werden, ob die Zinsen jeweils zum Guthaben hinzugefügt oder jährlich abgehoben werden (vgl. Aufg. 3).

Kontrollaufgaben

Aufg. 1

Aufgaben zur Übung und Wiederholung; Leistungskontrolle (4 Std.)

(LB 41 bis 42)

Die Aufgaben dieses Lehrbuchabschnitts geben Gelegenheit, Wissen und Können aus früheren Stoffgebieten im Zusammenhang mit der Prozentrechnung zu reaktivieren und anzuwenden. Für die Behandlung der Aufgaben gilt das zu LE 14 Gesagte.
Es wird empfohlen, nach einer zusammenfassenden Wiederholung (LB 41) das Stoffgebiet mit einer einstündigen Klassenarbeit und deren Auswertung abzuschließen; Aufgaben können den Kontrollaufgaben 22 bis 28 (UH 17f.) entnommen werden.

Stoffgebiet 2

Rationale Zahlen

Vorbemerkungen

Im Stoffgebiet „2. Rationale Zahlen“ lernen die Schüler einen neuen Zahlenbereich und das Rechnen in diesem Bereich kennen. Er stellt eine *Erweiterung* des den Schülern bisher bekannten Bereichs der gebrochenen Zahlen dar, indem zu diesem die *negativen* Zahlen neu *hinzugenommen* werden.

Man gewinnt die negativen Zahlen, indem man den Zahlenstrahl an einer Geraden, die senkrecht zur Zahlengeraden verläuft und durch den Punkt 0 geht, spiegelt. Bei dieser Spiegelung wird jeder gebrochenen Zahl a ($a \neq 0$) genau eine neue Zahl ($-a$) zugeordnet. (Die Zahl 0 wird sich selbst zugeordnet.)
Der fachwissenschaftliche Hintergrund dieser Vorgehensweise ist die Konstruktion der rationalen Zahlen durch „Symmetrisierung“:
Zu den gebrochenen Zahlen werden die Elemente einer geeigneten Menge (die man dann als zu den gebrochenen Zahlen „entgegengesetzte Zahlen“ bezeichnet) hinzugenommen (vgl. z. B. [B 17]). Eine Klassenbildung, wie sie beispielsweise zur Definition der gebrochenen Zahlen vorgenommen wurde (vgl. [B 10], S. 29), ist bei diesem Vorgehen nicht notwendig und (anders als bei den gebrochenen Zahlen!) auch für das praktische Rechnen nicht erforderlich. (Beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen in Bruchdarstellung *benötigt* man immer wieder den Übergang zu anderen Repräsentanten derselben Zahl – zu anderen Brüchen aus derselben Klasse – z. B. beim „Gleichnamigmachen“!)
Da die rationalen Zahlen nicht als vollkommen neuer Bereich konstruiert, sondern durch *Hinzunahme* der negativen Zahlen zu den gebrochenen gewonnen werden, entfallen auch die sonst anzustellenden *Isomorphiebetrachtungen* zwischen dem Bereich der gebrochenen und dem der nichtnegativen rationalen Zahlen – beide Mengen sind jetzt von vornherein identisch, so daß man das Rechnen mit den nichtnegativen Zahlen nicht neu zu erklären braucht und auch auf das Vorzeichen „+“ zur Kennzeichnung positiver Zahlen im allgemeinen verzichten kann.

Hauptanliegen dieses Stoffgebietes ist und bleibt – trotz und gerade wegen der Nutzung von Taschenrechnern in der Schule – die Weiterentwicklung des **Rechnenkönnens**. Sichere Kenntnisse über Vorschriften für das Ausführen von Grundrechenoperationen im Bereich der rationalen Zahlen und entsprechend sicher ausgebildete Fertigkeiten sind unverzichtbare Voraussetzungen für das *Arbeiten mit Variablen* als Bestandteil des Umformens von Termen, des Lösens von Gleichungen und Ungleichungen, des Arbeitens mit Funktionen, des Führens von Beweisen, des Beschreibens allgemeiner Lösungswege usw. Sichere Rechenfertigkeiten sind also notwendig, um tiefer in die Mathematik selbst einzudringen. Große Bedeutung haben insbesondere auch *Fertigkeiten im mündlichen Rechnen.* Sie sollen den Schülern die Durchführung von Kontrollrechnungen (z. B. Überschläge ohne Rechenhilfsmittel) erleichtern und einer „blinden Rechnerabhängigkeit“ entgegenwirken. Aus diesem Grunde sollte der Taschenrechner in dem Stoffgebiet erst relativ spät (nach der Behandlung aller Rechenregeln) zur Berechnung von Termen mit rationalen Zahlen herangezogen werden. Deshalb wird auch die Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$ im Lehrbuch erst in LE 14 eingeführt.

Nach der Einführung der Vorzeichenwechseltaste geht es vor allem um die weitere Erhöhung der Sicherheit im Umgang mit dem Taschenrechner, insbesondere um die sichere Eingabe negativer Zahlen. Die beim Arbeiten mit dem Taschenrechner durchzuführenden Kontrollrechnungen sollten vorrangig ohne Rechenhilfsmittel ausgeführt werden. Fehler, die die Schüler beim Arbeiten mit dem Taschenrechner machen (Eingabefehler, Ablesefehler usw.), sollten stets genutzt werden, um ihre *Kontrollbereitschaft* weiterzuentwickeln.
Neben der Entwicklung sicherer Rechenfertigkeiten ist in diesem Stoffgebiet u. a. zu erreichen, daß die Schüler in der Lage sind, rationale Zahlen zu vergleichen und zu ordnen. Da der Begriff „absoluter Betrag einer rationalen Zahl“ bei der Formulierung von Rechenregeln für rationale Zahlen, aber auch im weiteren Mathematikunterricht (z. B. beim Lösen quadratischer Gleichungen) gebraucht wird, ist auf eine sichere Beherrschung dieses Begriffes Wert zu legen.
Nach der Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden wird das rechtwinklige Koordinatensystem auf 4 Quadranten erweitert. Die Schüler sollen Fertigkeiten im Einzeichnen von Punkten in ein solches Koordinatensystem und im Ablesen von Koordinaten eingezeichneter Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem erlangen.
Durch das Lösen geeigneter Aufgaben sind den Schülern Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den behandelten Zahlenbereichen einschließlich der *ganzen Zahlen* (Z) zu verdeutlichen.

Beispiele:
Jede natürliche Zahl (ganze Zahl) hat genau einen Nachfolger. Im Bereich der gebrochenen (bzw. rationalen) Zahlen kann man jedoch nicht vom Nachfolger einer Zahl sprechen.
Die Aussage, daß die Summe nicht kleiner ist als jeder Summand, ist für natürliche und gebrochene Zahlen eine wahre Aussage. Für rationale (bzw. ganze) Zahlen ist die Aussage jedoch falsch.

Bedeutsam für das nachfolgende Stoffgebiet „3. Gleichungen“ ist das sichere Anwenden von Rechengesetzen beim *Umformen von Termen* (z. B. $2x + 4 - 5x = -3x + 4$). Entsprechende Fertigkeiten sind bei den Schülern auszubilden.
Der Stoffabschnitt „Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung“ dient der Vertiefung des in den Klassen 4 bis 6 erworbenen Wissens und Könnens im Umgang mit Näherungswerten und einer ersten Einführung in die Fehlerrechnung. Die Schüler sollen die Begriffe „absoluter Fehler“, „relativer Fehler“, „prozentualer Fehler“ und „Schranke für den absoluten Fehler“ erfassen und damit ihr Verständnis für die Begriffe „Näherungswert“ und „zuverlässige Ziffer“ erhöhen.
Obwohl der Lehrplan für das gesamte Stoffgebiet „Rationale Zahlen“ keinen *Beweis* fordert, sollten die Schüler auf die Beweisnotwendigkeit der zu behandelnden Sätze hingewiesen werden. Es ist zu empfehlen, für Rechengesetze (z. B. Kommutativgesetz der Multiplikation rationaler Zahlen) *Begründungen anhand spezieller Zahlenbeispiele* zu geben, die durch *Vollständigkeit* (Erfassen aller möglichen Fälle bezüglich der Vorzeichen) und *Übertragbarkeit* auf *beliebige* Zahlen volle *Beweiskraft* haben. (Man spricht in solchen Fällen von *beispielgebundenem Begründen.*) Dem Beweisen genügend Aufmerksamkeit zu schenken bedeutet auch, von den Schülern immer wieder Begründungen zu fordern.
Für die Unterrichtsgestaltung, insbesondere bei der Einführung der neuen Zahlen, ist zu beachten, daß rationale Zahlen im täglichen Leben nicht eine so große Rolle spielen wie natürliche und gebrochene Zahlen. Bei praktischen Sachverhalten kommt man im allgemeinen mit gebrochenen Zahlen aus, indem man z. B. Präpositionen wie „vor“, „unter“ oder Substantive wie „Minuspunkte“, „Kälte“, „Schulden“ usw. hinzufügt. Das Zeichen „–“ wird dann für eine verkürzte Schreibweise verwendet. Dieses Vorgehen in der Praxis ist den Schülern bekannt und läßt die Einführung der rationalen Zahlen und die Vermittlung von Rechenregeln (insbesondere der Multiplikation und Division) aus praktischen Erfordernissen allein nicht als notwendig erscheinen. Die Einführung neuer Zahlen sollte

deshalb *innermathematisch* motiviert, ihre Zweckmäßigkeit aber auch außermathematisch begründet und durch historische Betrachtungen zur Herausbildung rationaler Zahlen ergänzt werden.

Kontrollaufgaben

Aufgaben, zu deren Lösung *keine* Rechenhilfsmittel zugelassen sind

1. Ordne die folgenden rationalen Zahlen ihrer Größe nach! Beginne mit der kleinsten Zahl!

   a) $-\frac{7}{8}$; 0; 6; 0,3; 2,4; -10; $|-2|$ b) $-\frac{2}{3}$; 0; $|-0{,}7|$; 2; 0,1; $-0{,}6$

2. Gib alle rationalen Zahlen an, die die Gleichung erfüllen!

   a) $|x| = 2$ b) $|-3| = x$ c) $|2{,}5| = x$

   d) $|x| = \frac{1}{2}$ e) $|x| - 1 = 0$ f) $|x| = -1$

3. Welche der Zahlen 2; 0; -1; -3; $-0{,}5$ erfüllen die Ungleichung $|x| + 2 < 4$?

4. Gib alle ganzen Zahlen an, die zwischen -3 und 2 liegen!

5. Vervollständige die Tabelle!

   (Die eingeklammerten Ziffern kennzeichnen die auszufüllenden Leerstellen der Tabelle.)

m	$-m$	$\lvert m\rvert$	$-(-m)$
2	(-2)	(2)	(2)
$-0{,}5$	(0,5)	(0,5)	$(-0{,}5)$
$\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}\right)$
(0)	(0)	0	(0)
(1)	(-1)	(1)	1

6. Berechne!

   a) $2-5$; $-7-12$; $-6+10$; $1{,}2-0{,}8$; $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

   b) $8\cdot(-7)$; $-9\cdot(-8)$; $-11\cdot 11$; $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)$; $(-2)^3$

   c) $56:(-8)$; $-144:12$; $-2{,}7:(-0{,}3)$; $-\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$

7. Berechne!

   $3+5(-7)$; $-\frac{3}{4}-8:4$; $\left(\frac{1}{2}-0{,}5\right)\cdot 2$; $-12:4+6\cdot(-3)$

8. Fasse so weit wie möglich zusammen!

   a) $2x+3-3x+1$ b) $2r+s-2r+2s-5$

   c) $-y-3+3y+5$ d) $a+2a-b-5a+b$

9. Löse folgende Gleichungen!
 a) $-2 \cdot x = 8$ b) $x - 3 = -4$ c) $2x - 6 = -2$
 d) $|-2| \cdot x = 6$ e) $3 - x = 5$

10. Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
 a) Zu jeder rationalen Zahl x kann man eine rationale Zahl y angeben, so daß $x + y = 0$ ist.
 b) Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x \cdot x = x$ gilt.
 c) Für jede rationale Zahl y gilt: $y \cdot (-y) < 0$.

Aufgaben, zu deren Lösung Rechenhilfsmittel zugelassen sind

11. $306{,}79 - 372{,}17 + 272{,}9 - 721$; $-219 \cdot 80{,}7$; $-79{,}23 : (-0{,}072)$;
 $-2{,}37 + 0{,}72 \cdot (-2{,}93)$; $(-17{,}9 + 9{,}37 + 2{,}73) : 0{,}83$

12. Peter schätzt die Anzahl der Seiten eines Buches mit 520 Seiten. Ein Überprüfen ergab eine Seitenzahl von 603 Seiten.
 Berechne den absoluten, den relativen und den prozentualen Fehler!

13. Vervollständige die Tabelle!

Näherungswert	Bedingung für den genauen Wert
241 m	$240{,}5\ \text{m} \leqq l \leqq 241{,}5\ \text{m}$
1,3 kg	
	$0{,}65\ \text{l} \leqq V \leqq 0{,}75\ \text{l}$

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.1.: Der Begriff „Rationale Zahl“ (3 Std.)			
Rückblick auf die natürlichen und die gebrochenen Zahlen; Ausblick auf neue Zahlen (LE 1)	2	– Grundrechenoperationen in Q_+ – Konstruktion der gebrochenen Zahlen – Ausführbarkeit der Rechenoperationen in N und Q_+	
Rationale Zahlen (LE 2)	1	– Zahlenstrahl – Geordnetes Zahlenpaar – Koordinatensystem	– Begriff „negative Zahlen“ – Definition des Begriffs „rationale Zahl“ – „Zahlengerade“ – „Vorzeichen“ – „positive und nichtnegative rationale Zahl“ – Erweiterung des Koordinatensystems auf 4 Quadranten

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.2.: Ordnung rationaler Zahlen			(4 Std.)
Zueinander entgegengesetzte Zahlen – ganze Zahlen (LE 3)	1	– Mengenbeziehungen zwischen N, Q_+ – Vorgänger, Nachfolger einer natürlichen Zahl	– Definition von „zueinander entgegengesetzte Zahlen" und „ganze Zahl" – Mengenbeziehungen zwischen N, Q_+, Q, Z
Der absolute Betrag einer rationalen Zahl (LE 4)	1	– Zueinander entgegengesetzte Zahlen	– Definition von „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" – Lösen von Gleichungen der Form $\|x\|=a$
Ordnung der rationalen Zahlen (LE 5)	2	– Ordnung in den Zahlenbereichen N, Q_+; Vorgänger (bzw. Nachfolger) – Arithmetisches Mittel – „überall dicht liegen"	– Ordnung in Q
Stoffabschnitt 2.3.: Addition und Subtraktion rationaler Zahlen			(10 Std.)
Addieren rationaler Zahlen (LE 6)	1	– Addition unter Benutzung eines Additionsrechenstabes	– Nutzung eines Additionsrechenstabs für die Addition rationaler Zahlen – $a+(-a)=0$ $a+0=a; a \in Q$
Regeln für die Addition rationaler Zahlen (LE 7)	3	– Addition und Subtraktion gebrochener Zahlen	– Regel für die Addition negativer rationaler Zahlen – Regel für die Addition zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen und verschiedenen Beträgen
Eigenschaften der Addition rationaler Zahlen (LE 8)	2	– Eigenschaften der Addition gebrochener Zahlen	– Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen
Subtraktion rationaler Zahlen (LE 9)	4	– Operation, Umkehroperation – Term	– Regel für die Subtraktion rationaler Zahlen – Verallgemeinerung des Begriffs „Summe" – Übungen im Addieren und Subtrahieren

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.4.: Multiplikation und Division rationaler Zahlen (8 Std.)			
Multiplikation rationaler Zahlen (LE 10)	2	– Multiplikation gebrochener Zahlen	– Regeln für das Multiplizieren rationaler Zahlen
Eigenschaften der Multiplikation rationaler Zahlen (LE 11)	2	– Eigenschaften der Multiplikation gebrochener Zahlen	– Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation – Distributivgesetz – Umformen von Termen – $a \cdot b = ab$
Division rationaler Zahlen (LE 12)	3	– Division gebrochener Zahlen – Lösen von Aufgaben, die das Ausführen von zwei Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen erfordern (Vorrangregeln)	– Regeln der Division rationaler Zahlen – $a : 0$ ist in Q nicht erklärt – $\frac{a}{b} = a : b$ – Lösen von Aufgaben, die das Ausführen von zwei Rechenoperationen mit rationalen Zahlen erfordern
Übersicht über die Zahlenbereiche (LE 13)	1	– „Menge“, „Teilmenge“, „Nachfolger“ – Ausführbarkeit der Operationen in Q_+, Z bzw. N	– Teilbereiche der rationalen Zahlen – Die Darstellung $\frac{p}{q}$ ($p, q \in Z$; $q > 0$) für rationale Zahlen – Ausführbarkeit der Rechenoperationen
Stoffabschnitt 2.5.: Übungen mit dem Taschenrechner (3 Std.)			
Übungen mit dem Taschenrechner (LE 14)	3	– Ausführung der Grundrechenoperationen in Q_+ mit dem Taschenrechner	– Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$ – Ausführung der Grundrechenoperationen in Q mit dem Taschenrechner – Aufgaben mit zwei und mehr Rechenoperationen
Stoffabschnitt 2.6.: Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung (3 Std.)			
Fehler und Schranken für Fehler (LE 15)	3	– Ermitteln von Näherungswerten durch Messen und Schätzen von Größen, durch Runden und Überschlagen – Anwenden der Rundungsregeln – Anwenden der Regeln für die Anzahl zuverlässiger Ziffern beim Rechnen mit Näherungswerten	– „Absoluter Fehler“ – „Schranke für den absoluten Fehler“, „relativer Fehler“, „prozentualer Fehler“

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.7.: Komplexe Übungen			(6 Std.)
Komplexe Übungen	4	Abwechslungsreiche Übungen zum Rechnen mit rationalen Zahlen	
Leistungskontrolle und Auswertung	2		

Stoffabschnitt 2.1.

Der Begriff „Rationale Zahl" (4 Std.)

Anknüpfend an im Bereich Q_+ nicht immer lösbare Aufgaben der Form $a - b$ und an praktische Erfahrungen der Schüler (z. B. Temperaturangaben, Höhenangaben; Plus- und Minuspunkte; positive und negative Ladungen) werden die ***negativen Zahlen*** durch Spiegelung des Zahlenstrahls an einer Geraden g, die senkrecht zur Zahlengeraden verläuft und durch den Punkt 0 geht, gewonnen. Durch „Hinzufügen" der negativen Zahlen zu den bekannten gebrochenen Zahlen erhält man die Menge der rationalen Zahlen (Q).

Rückblick auf die natürlichen und die gebrochenen Zahlen; Ausblick auf neue Zahlen (2 Std.)

LE 1 (LB 43 bis 45)

Die erste Lerneinheit dient ausschließlich der Bereitstellung des Wissens und Könnens über bisher behandelte Zahlenbereiche. Das Hauptanliegen besteht darin,
- die praktische, aber auch innermathematische Notwendigkeit der Konstruktion gebrochener Zahlen rückblickend erneut herauszustellen;
- den Weg des Aufbaus der gebrochenen Zahlen nochmals zu verdeutlichen;
- Rechenfertigkeiten im Bereich der gebrochenen Zahlen weiterzuentwickeln;
- Grenzen des Bereichs der gebrochenen Zahlen deutlich zu machen und
- Anforderungen an einen neu zu konstruierenden Zahlenbereich zu formulieren.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß sich die Menschen Zahlen schufen, und zwar zunächst die natürlichen und später die gebrochenen Zahlen, um praktische Aufgaben lösen zu können,

- wissen, daß im Bereich der natürlichen Zahlen die Subtraktion und Division nicht immer ausführbar sind,
- wissen, daß im Bereich der gebrochenen Zahlen die Subtraktion nicht immer ausführbar ist,
- können mit gebrochenen Zahlen sicher rechnen,
- erkennen die Notwendigkeit einer abermaligen Zahlenbereichserweiterung,
- kennen Bedingungen, die der neue Bereich erfüllen soll.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Reaktivierung der Kenntnisse über die Ausführbarkeit der Grundrechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen bzw. im Bereich der gebrochenen Zahlen
- Weitere Entwicklung von Rechenfertigkeiten in Q_+, insbesondere des mündlichen Rechnens

2. Stunde
- Motivierung einer abermaligen Zahlenbereichserweiterung und Erarbeitung von Anforderungen an den neuen Zahlenbereich
- Wiederholung des Weges der Konstruktion gebrochener Zahlen

Methodische Hinweise

Reaktivierung der Kenntnisse über die Ausführbarkeit der Grundrechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen bzw. im Bereich der gebrochenen Zahlen Anhand der Aufträge 1 bis 3 können die bisher behandelten Bereiche der natürlichen bzw. gebrochenen Zahlen und die in ihnen erklärten Operationen und geltenden Rechengesetze wiederholend betrachtet werden. Dabei kann man u. a. herausstellen, welche praktischen Aufgabenstellungen mit dem jeweiligen Bereich bewältigt werden können und welche nicht und daß in der Menschheitsgeschichte schon sehr früh ein gesellschaftliches Bedürfnis bestand, mit gebrochenen Zahlen zu rechnen. Die Schüler sollten weitgehend selbständig herausfinden, welche Rechenoperationen in Abhängigkeit vom Zahlenbereich uneingeschränkt bzw. welche nur eingeschränkt ausführbar sind (vgl. LB 44).

Weitere Entwicklung von Rechenfertigkeiten in Q_+, insbesondere des mündlichen Rechnens An konkreten Aufgabenstellungen (z. B. Aufg. 1 und 2) sollten die Rechenregeln für gebrochene Zahlen in Bruch- bzw. Dezimalbruchdarstellung wiederholt werden. Es ist zu fordern, daß der Inhalt dieser Regeln zum festen, stets abrufbaren Kenntnisbesitz der Schüler gehört. Im allgemeinen genügt es, wenn sich die Schüler Kurzformulierungen der Regeln, die sich leichter merken lassen als die vollständig ausformulierten Vorschriften, fest einprägen.

Gebrochene Zahlen in Bruchdarstellung	**Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung**
Addition (Subtraktion)	
(1) Mache gleichnamig! (2) Behalte den gemeinsamen Nenner bei!	(1) Schreibe stellengerecht untereinander! (2) Addiere! (Subtrahiere, falls möglich!)

Gebrochene Zahlen in Bruchdarstellung	Gebrochene Zahlen in Dezimalbruchdarstellung
Addition (Subtraktion)	
(3) Addiere (Subtrahiere, falls möglich!) die Zähler!	(3) Setze Komma unter Komma!
Multiplikation	
(1) Zähler mal Zähler – (2) Nenner mal Nenner!	(1) Multipliziere wie mit natürlichen Zahlen! (2) Addiere die Dezimalstellen der Faktoren! (3) Setze das Komma!
Division	
(1) Bilde das Reziproke des Divisors! (2) Multipliziere!	(1) Erweitere so, daß der Divisor kommafrei ist! a) Dividend ist größer als Divisor (2) Dividiere bis zu den Einern des Dividenden! (3) Setze das Komma! (4) Dividiere weiter! b) Dividend ist kleiner als Divisor. (2') Der Quotient beginnt mit 0,... (3') Dividiere wie bei natürlichen Zahlen!

Vorschlag für **Hausaufgaben:** Aufg. 2

Motivierung einer abermaligen Zahlenbereichserweiterung und Erarbeitung von Anforderungen an den neuen Zahlenbereich Ausgehend von der eingeschränkten Ausführbarkeit der Subtraktion in Q_+ und dem Ziel, einen Zahlenbereich kennenzulernen, in dem es für die Grundrechenoperationen keine Einschränkung mehr gibt (außer der Division durch Null), ist die Notwendigkeit einer erneuten Zahlenbereichserweiterung herauszustellen.
Dieses innermathematische Motiv ist durch *außermathematische Motive* zu ergänzen. So kann z. B. am Auftrag 3b) erörtert werden, daß es nicht möglich ist, den vorgestellten Sachverhalt im Bereich der gebrochenen Zahlen zu lösen, da solche Zahlen wie -3, die die Schüler aus dem täglichen Leben längst kennen, in diesem Zahlenbereich gar nicht vorkommen.
Auch *historische Betrachtungen* zu den rationalen Zahlen können die Schüler für den neuen Zahlenbereich interessieren.

So wäre zu empfehlen, den Schülern zu erzählen, daß die negativen Zahlen in der indischen und chinesischen Mathematik des 6. Jh. u. Z. schon fester Bestandteil waren. Ihre Einführung verdanken sie, wie man aus ihrer ursprünglichen Bezeichnung als „Schulden" (beim Skat kommt noch heute das Wort „Miese" vor) ersehen kann, der kaufmännischen Praxis.
Als die Produktion und der Handel im 15. und 16. Jahrhundert in Europa einen raschen Aufschwung nahmen, insbesondere nach der Entdeckung Amerikas, gehörten negative Zahlen zum normalen Handwerkszeug eines Buchhalters. Allerdings lehnten führende Mathematiker (z. B. VIETA) negative Zahlen bis ins 16. Jahrhundert als „absurde" Zahlen ab. Erst Ende des 17. Jh. wurden die letzten Vorbehalte gegen die Anerkennung der negativen Zahlen als vollwertige Zahlen fallengelassen.

Nach diesen Vorbereitungen wird den Schülern die Orientierung gegeben, daß sie in den folgenden Stunden u. a. erfahren werden, wie man zu den rationalen Zahlen gelangt, mit ihnen rechnet und welche Rechengesetze in dem neuen Zahlenbereich gültig sind.
Weiterhin ist herauszustellen, daß der neue Zahlenbereich u. a. folgende Forderungen erfüllen soll:
- Jede Subtraktionsaufgabe ist lösbar;
- alle im Bereich Q_+ erklärten Rechenoperationen sind ausführbar.

Es ist zu empfehlen, die noch zur Verfügung stehende Zeit dieser Unterrichtsstunde zur Entwicklung von Rechenfertigkeiten in Q_+ zu nutzen und anhand der Aufgabe 3 zu wiederholen, was man unter einer gebrochenen Zahl versteht. Dabei kann der Einsatz der Projektionsfolie „Zahlenbereichserweiterung" genutzt werden.

Kontrollaufgaben

1. Berechne!
   $\frac{2}{6} - \frac{1}{3}$; $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$; $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
2. Berechne!
   $1{,}5 \cdot 0{,}3$; $7{,}5 : 0{,}5$; $2{,}3 + 27$
3. Berechne!
   $3\frac{1}{2} + 4{,}2$; $2 \cdot 3 - 5$; $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$
4. Stelle die Mengen N und Q_+ in einem Mengendiagramm dar!

Rationale Zahlen (1 Std.)

LE 2 (LB 45 bis 48)

Diese Lerneinheit dient vor allem der Definition der rationalen Zahlen, die als Elemente der Vereinigungsmenge der Menge der gebrochenen Zahlen und der Menge der negativen Zahlen erklärt werden. Die negativen Zahlen werden durch Spiegelung des Zahlenstrahls an einer Geraden g, die senkrecht zur Zahlengeraden verläuft und durch den Punkt 0 geht, gewonnen. Im Zusammenhang damit wird auch das rechtwinklige Koordinatensystem auf 4 Quadranten erweitert. Nun ist es möglich, auch geordnete Zahlenpaare mit negativen Zahlen als Punkte in einem Koordinatensystem darzustellen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition des Begriffs „rationale Zahlen",
- wissen, daß die Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ eine Teilmenge der rationalen Zahlen Q ist ($Q_+ \subset Q$),
- kennen die Begriffe „Zahlengerade", „positive rationale Zahl", „negative rationale Zahl" und „nichtnegative rationale Zahl" und können sie anwenden,
- können in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem (4 Quadranten) Koordinaten von Punkten ablesen und bei vorgegebenen Koordinaten $(x;y)$ den entsprechenden Punkt einzeichnen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Begriffs „rationale Zahl" (Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden)
- Erweiterung des Koordinatensystems auf 4 Quadranten

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffs „rationale Zahl" (Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden) Die Notwendigkeit einer Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden, das heißt die Notwendigkeit der Hinzunahme neuer Zahlen zu den bekannten gebrochenen Zahlen, kann im Zusammenhang mit der Behandlung des Auftrags 4 erneut herausgestellt werden. Dieser Auftrag führt nahezu zwangsläufig dazu, den Zahlenstrahl nach links zu erweitern.

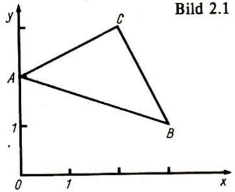


Bild 2.1

Ein anderer Einstieg in diese Problematik wäre durch folgende Aufgabe möglich:
„Spiegele das Dreieck *ABC* (Bild 2.1) an der *y*-Achse!
Versuche, die Koordinaten der Punkte *A'*, *B'*, *C'* anzugeben!"
Nach der Spiegelung des Zahlenstrahls an einer Geraden *g*, die senkrecht zur Zahlengeraden verläuft und durch den Punkt 0 geht, wird festgelegt, daß man den Bildpunkt jeder gebrochenen Zahl a mit $-a$ bezeichnet und man diese neuen Zahlen **negative Zahlen** nennt. Die durch Spiegelung entstandene Gerade wird **Zahlengerade** genannt.
Den Schülern ist nun mitzuteilen, daß
- man die gebrochenen Zahlen und die negativen Zahlen zusammen **rationale Zahlen** nennt (Definition 1);
- man Q als Symbol für die Menge der rationalen Zahlen verwendet;
- jedes Element von Q eine rationale Zahl ist;
- man die gebrochenen Zahlen auch als nichtnegative (rationale) Zahlen bezeichnet;
- man diejenigen rationalen Zahlen, die auf der Zahlengeraden (Bild B 4) rechts vom Punkt 0 liegen, „positive (rationale) Zahlen" nennt und sie zuweilen mit dem Vorzeichen „+" versieht. Statt 3,7 schreibt man auch +3,7 und umgekehrt. Aus diesem Grunde ist es auch gerechtfertigt, davon zu sprechen, daß das Vorzeichen einer positiven (rationalen) Zahl „+" ist, obwohl man das Zeichen „+" zur Kennzeichnung positiver rationaler Zahlen gar nicht immer angibt.

Mit der Bearbeitung des Auftrags 7 sollen die Schüler die Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen N, Q_+ und Q erkennen.

Erweiterung des Koordinatensystems auf 4 Quadranten Durch das Lösen der Aufgaben 6 und 7 (bzw. durch Spiegelung einer Figur, die im 1. Quadranten liegt, an der *x*-Achse (oder *y*-Achse)) kann die Erweiterung des Koordinatensystems auf 4 Quadranten mit den Schülern erarbeitet werden. Nachdem dies erfolgt ist, sollte die noch verbleibende Unterrichtszeit genutzt werden, bei den Schülern erste Fertigkeiten im Darstellen geordneter Paare rationaler Zahlen als Punkte im Koordinatensystem zu entwickeln.
(Die Aufgabe 10 dient der langfristigen Vorbereitung der Addition bzw. Subtraktion rationaler Zahlen und sollte unbedingt (z. B. als *Hausaufgabe*) von den Schülern gelöst werden.

Kontrollaufgaben

1. Nenne
   a) drei positive rationale Zahlen;
   b) drei negative rationale Zahlen!
   c) Stelle die unter a) und b) genannten Zahlen auf einer Zahlengeraden dar!
2. Aufg. 2
3. Aufg. 8, 9

Stoffabschnitt 2.2.

Ordnung rationaler Zahlen (4 Std.)

Neben den Begriffen „zueinander entgegengesetzte Zahlen“, „ganze Zahlen“ und „absoluter Betrag einer rationalen Zahl“ steht die Erklärung der Relation „ist kleiner (größer) als“ im Zentrum der Unterrichtsstunden.

Zueinander entgegengesetzte Zahlen – ganze Zahlen (1 Std.)

LE 3 (LB 48 bis 49)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition des Begriffs „zueinander entgegengesetzte Zahlen“ und können sie anwenden,
- kennen den Begriff „ganze Zahl“ einschließlich des Symbols „Z“ für die Menge der ganzen Zahlen,
- kennen die Beziehungen zwischen den Mengen N, Z, Q_+ und Q und können entsprechende Mengendiagramme zeichnen,
- wissen, daß jede ganze Zahl genau einen Nachfolger, aber auch genau einen Vorgänger hat.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Begriffs „zueinander entgegengesetzte Zahlen“
- Erarbeitung des Begriffs „ganze Zahl“

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffs „zueinander entgegengesetzte Zahlen“ Nach dem Abarbeiten des Auftrags 9 und dem Hervorheben der Tatsache, daß zwei verschiedene rationale Zahlen, die auf der Zahlengeraden symmetrisch zum Punkt 0 liegen, sich nur durch das

Vorzeichen unterscheiden, ist den Schülern mitzuteilen, daß man solche Zahlen als „zueinander entgegengesetzte Zahlen“ bezeichnet.
Die Festigung des Begriffs kann durch Realisierungsaufgaben (z. B. Aufg. 1) und Identifizierungsaufgaben erfolgen (z. B.: Bei welchen der Zahlenpaare *(a;b)* gilt $a = -b$?).
$\left[(3;-3),\ (0;0),\ (1;1),\ \left(-\frac{1}{2};\ 0{,}5\right),\ \left(-0{,}3;\ \frac{1}{3}\right)\right]$
Im weiteren Unterricht ist (etwa durch das Lösen der Aufg. 3 und 4) herauszustellen, daß sowohl a $(a \in Q)$ als auch $-a$ positiv, negativ oder 0 sein können. Die Aufgabe 2 kann zum Finden des Satzes 3 genutzt werden.

Im folgenden wird ein *zweiter Weg* zur Erarbeitung des Begriffs „zueinander entgegengesetzte Zahlen“ vorgestellt.
Folgende Tabelle zeigt, welche Werte eine „Rechenmaschine“ bei Eingabe bestimmter rationaler Zahlen ausgibt.

Eingabe	3,5	0,5	0	-2	$\frac{1}{4}$	$-2{,}7$		
Ausgabe	$-3{,}5$	$-0{,}5$	0	2			$-7{,}5$	12

a) Versuche, die Tabelle zu vervollständigen!
b) Beschreibe die Lage der Zahlen eines Zahlenpaares (z. B. (3,5; $-3{,}5$), (0,5; $-0{,}5$), (-2; 2)) auf einer Zahlengeraden!
Zu erwartende Antwort:
Die Zahlen eines Zahlenpaares liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zum Punkt 0.

Nun folgt die Definition 4.

Erarbeitung des Begriffs „ganze Zahl“ Die Definition des Begriffs „ganze Zahl“ ist den Schülern mitzuteilen, und die Mengenbeziehungen zwischen der Menge der ganzen Zahlen und den Mengen N, Q_+ und Q sind in Mengenbildern darzustellen. Die Schüler sollen in der Lage sein, Vorgänger und Nachfolger von beliebigen ganzen Zahlen anzugeben, nachdem man in Analogie zu den natürlichen Zahlen festgelegt hat, daß jede ganze Zahl, die unmittelbar linker (rechter) Nachbar von a $(a \in Z)$ auf einer Zahlengeraden (horizontal) ist, als „Vorgänger (Nachfolger)“ von a bezeichnet wird.

Die folgende Aufgabenstellung könnte den Begriff „ganze Zahl“ festigen helfen:
Gib alle ganzen Zahlen an, die auf der Zahlengeraden

a) zwischen -5 und 3; **b)** zwischen $-2{,}7$ und 3,4;
c) zwischen -1 und 0; **d)** zwischen $-2{,}7$ und $-1{,}9$

liegen!

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1, 3, 5
2. Gib den Nachfolger (Vorgänger) folgender ganzer Zahlen an!
   3; -4; 9; -9; -299; 0; -999

Der absolute Betrag einer rationalen Zahl (1 Std.)

LE 4 (LB 49 bis 50)

Der Begriff „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" (kurz: „Betrag einer Zahl") ist an verschiedenen Stellen des Mathematiklehrgangs von Bedeutung, z. B. beim Formulieren der Rechenregeln für rationale Zahlen, aber auch beim Lösen von Gleichungen der Form $|x| + a = b$ bzw. $|x + a| = b$ oder beim grafischen Darstellen von Funktionen mit der Gleichung $y = |x|$ bzw. $y = |x| + b$. Im Zusammenhang mit dem Lösen quadratischer Gleichungen wird dieser Begriff ebenfalls benötigt.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition des Begriffs „absoluter Betrag einer rationalen Zahl",
- können von einer beliebigen rationalen Zahl ihren Betrag angeben,
- wissen, daß Gleichungen der Form $|x| = a$ $(a > 0)$ zwei Lösungen haben, und können diese angeben.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des Begriffs „absoluter Betrag einer rationalen Zahl"
- Übungen zur Festigung des Begriffs „absoluter Betrag einer rationalen Zahl"

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffes „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" Erfahrungsgemäß haben Schüler zuweilen Schwierigkeiten, den Begriff „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" zu erfassen. Deshalb ist die Begriffseinführung sehr sorgfältig zu planen.

Im folgenden werden *zwei Varianten* zur Einführung des Begriffs vorgestellt.

Variante 1
(Diese Variante orientiert sich stark am Lehrbuch.)

Um bei der Begriffserarbeitung entsprechende Schüleraktivitäten auszulösen, sollte mit einem Schülerauftrag begonnen werden, der an den Begriff „zueinander entgegengesetzte Zahlen" anknüpft.
- Gib zwei zueinander entgegengesetzte Zahlen an! (z. B.: 3; −3)
- Trage sie auf einer Zahlengeraden ab!
- Wie groß ist jeweils ihre Entfernung vom Nullpunkt?
  (3 Einheiten)

Den Schülern muß mitgeteilt werden, daß man diesen Zahlenwert (in unserem Falle 3) **absoluten Betrag der rationalen Zahl 3**, aber auch **absoluten Betrag der rationalen Zahl −3** nennt.
Schreibweise: $|3| = 3$; $|-3| = 3$
Mit dem Ausfüllen folgender Tabelle soll die Definition des absoluten Betrages einer rationalen Zahl (Definition 5) vorbereitet werden:

x	3	-1	1,7	$-0,3$	0	$a\ (a > 0)$	$b\ (b < 0)$
$\lvert x\rvert$							

Nun erst werden die Schüler aufgefordert, selbständig eine Definition für den Begriff „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" anzugeben.
Mögliche Antwort:
Der absolute Betrag der Zahl 0 ist 0.
Der absolute Betrag einer positiven rationalen Zahl ist die Zahl selbst.
Der absolute Betrag einer negativen rationalen Zahl ist die zu dieser Zahl entgegengesetzte Zahl.

Variante 2

Diese Variante verzichtet bei der Einführung des Begriffs „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" auf eine geometrische Deutung und beginnt mit folgender Aufgabenstellung:
- Versuche, jeweils die Tabelle zu vervollständigen!
- Gib jeweils eine Vorschrift an, wie man aus den vorgegebenen x-Werten die zugehörigen y-Werte ermitteln kann!

a)

x	1	0	$-2,5$	$-\frac{1}{4}$	3		$-3,7$	
y	-1	0	2,5	$\frac{1}{4}$		-2		4

b)

x	3	1	-2	0	-3	-1	$-1,5$	$\frac{1}{3}$	-5	5	2	$-4,9$
y	3	1	2	0	3	1	1,5	$\frac{1}{3}$				

Bei der Tabelle a) müßten die Schüler schnell auf den Gedanken kommen, daß jeweils die entgegengesetzte Zahl zu bilden ist.
Für Tabelle b) wird folgende Erkenntnis erwartet:
Ist x eine positive Zahl, so gilt $y = x$.
Ist $x = 0$, so gilt $y = 0$.
Ist x eine negative Zahl, so gilt $y = -x$.
Nach diesen Betrachtungen, in die die Schüler aktiv einbezogen sind, geht es nur noch darum, dem vorgegebenen mathematischen Sachverhalt einen Namen zu geben. Den Schülern wird mitgeteilt, daß man die in der Tabelle b) angegebenen y-Werte auch als „absolute Beträge der jeweiligen x-Werte" bezeichnet.
Zum Beispiel ist 3 der absolute Betrag der rationalen Zahl 3, aber auch der absolute Betrag der rationalen Zahl -3.
Schreibweise: $|3| = 3$; $|-3| = 3$

Als **Zusammenfassung** dieses Stundenabschnittes wird empfohlen, die Schüler aufzufordern, einen Vorschlag für die Formulierung einer Definition des absoluten Betrages einer rationalen Zahl anzugeben. Danach sollte auch noch eine geometrische Deutung des Begriffs „absoluter Betrag" vorgenommen werden (vgl. LB 49).

Übungen zur Festigung des Begriffs „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" Nachdem der Begriff „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" definiert wurde, geht es zunächst um das Lösen von Aufgaben, die der Realisierung des Begriffs dienen:

1. Gib den Betrag folgender rationaler Zahlen an!
   $3;\ -7;\ 0;\ \frac{1}{7};\ -\frac{2}{3}$
2. Löse folgende Gleichungen!
   $|7| = x;\ |-2{,}5| = x;\ x = |0|;\ |5| = -x;\ x = -|2|$

Im Anschluß daran sind den Schülern Identifizierungsaufgaben zur Lösung vorzulegen.

3. Welche der folgenden Aussagen sind falsch?
   $|-12| = 12;\ |-19| = -19;\ |7{,}5| = 7{,}5;\ |-7{,}5| = 7{,}5;\ -|2| = -2;\ \left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4};$
   $-|-19| = 19$

Weiterhin ist (u. a. beim Lösen der Aufg. 3) herauszustellen, daß
- Gleichungen der Form $|x| = a$ $(a > 0)$ zwei Lösungen;
- Gleichungen der Form $|x| = 0$ genau eine Lösung;
- Gleichungen der Form $|x| = a$ $(a < 0)$ keine Lösung

haben.

Folgende weitere Aufgaben können der Festigung des Begriffs „Betrag einer rationalen Zahl" dienen:
- Berechne!
  $|-3| \cdot |-4|;\ |-4| : |2|;\ \left|-\frac{1}{2}\right| : \frac{2}{3};\ |-3| - \left|\frac{1}{2}\right|;\ 0{,}25 + \left|-\frac{1}{2}\right|$
- Löse folgende Gleichungen!
  $|x| + 3 = 6;\ 2 \cdot |x| = 8;\ 4 - |x| = 2;\ 4 \cdot |x| = 0$

Kontrollaufgaben

1. Gib den Betrag folgender rationaler Zahlen an!
   $3;\ -7{,}5;\ 0;\ \frac{1}{4}$
2. Gib alle rationalen Zahlen an, deren absoluter Betrag 26; 0,7; 0 ist!
3. Gib, falls möglich, alle rationalen Zahlen an, die die jeweilige Gleichung erfüllen!
   $|-5| = x;\ |x| = 2;\ |x| = -7;\ |x| = 0$

Ordnung der rationalen Zahlen (2 Std.)

LE 5 (LB 50 bis 52)

Ausgehend von der Definition der Relation „ist kleiner (größer) als" für gebrochene Zahlen wird auch für rationale Zahlen eine Ordnung festgelegt. Beim Vergleichen von rationalen Zahlen können Fehler auftreten, wenn das Vorzeichen „−" nicht beachtet wird $\left(\text{typischer Fehler } -\frac{3}{4} > -\frac{1}{2}\right)$. Aus diesem Grunde sollte in der Übungsphase das Vergleichen negativer Zahlen im Vordergrund stehen. Dabei sind immer wieder Betrachtungen an einer Zahlengeraden erforderlich.

Es ist herauszustellen, daß die negativen rationalen Zahlen auf Grund ihrer Konstruktion (Spiegelung!) wie die gebrochenen Zahlen überall dicht liegen. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach der Existenz des Nachfolgers (Vorgängers) einer rationalen Zahl aufzuwerfen und zu beantworten.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition der Relation „ist kleiner (größer) als" für rationale Zahlen und können sie anwenden,
- können zu zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b ($a < b$) eine weitere rationale Zahl c so angeben, daß gilt $a < c < b$,
- wissen, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus; Motivierung
- Erarbeitung des Begriffs „ist kleiner (größer) als" für rationale Zahlen
- Übungen zur Erstfestigung im Vergleichen rationaler Zahlen

2. Stunde
- Erarbeitung der Erkenntnis, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen
- Vielfältige Übungen im Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus; Motivierung Im Rahmen einer täglichen Übung sind Kenntnisse der Schüler über die Ordnung gebrochener Zahlen zu wiederholen und entsprechende Fähigkeiten zu aktualisieren.

Aufgabenvorschläge:
- Setze jeweils das richtige Zeichen ($<$, $=$, $>$)!

  $\frac{1}{2} \ldots \frac{3}{4}$; $\quad \frac{1}{8} \ldots 0{,}1$; $\quad \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{4}$;

  $2{,}7 \ldots 2{,}09$; $\quad \frac{1}{2} \ldots 0{,}5$; $\quad \frac{1}{3} \ldots 0{,}3$
- Nenne eine gebrochene Zahl, die zwischen

  0 und 2,9 (z. B.: 1; 1,2); 0 und 0,5 (z. B.: 0,2; 0,3);

  0 und 1 (z. B.: $\frac{1}{2}$; 0,7); 0,1 und 0,2 (z. B.: 0,11; 0,109)

  liegt!

Erarbeitung des Begriffs „ist kleiner (größer) als" für rationale Zahlen Anknüpfend an die Motivierung kann durch das Stellen des folgenden Auftrags den Schülern eine Zielorientierung für die Definition „ist kleiner (größer) als" gegeben werden.
- Zeichne eine Zahlengerade und gib auf ihr folgende rationale Zahlen an!

  $3; 2; 0; -5; -1$
- Versuche, jeweils zwischen die folgenden Zahlen eines der Zeichen $>$, $<$ so zu setzen, daß eine wahre Aussage entsteht!

a) 3 … 2 b) 0 … 2 c) 0 … −1 d) −1 … −5

Auf dem Zahlenstrahl ist von zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen diejenige die kleinere, die auf dem Zahlenstrahl links von der anderen liegt. Dieses Ordnungsprinzip wird analog auf die Zahlengerade übertragen.

Nach diesen Betrachtungen sind die Schüler aufzufordern, einen Vorschlag für eine Definition des Begriffes „ist kleiner (größer) als" für rationale Zahlen anzugeben.

Übungen zur Erstfestigung im Vergleichen rationaler Zahlen In dieser ersten Übung, die sich unmittelbar an die Erarbeitung der Definition anschließt, sind den Schülern vor allem folgende Aufgabentypen zur Lösung vorzulegen:

Setze das richtige Zeichen (<, >, =)!

$-3 \ldots 0;\ -\frac{1}{2} \ldots -20;$

$-2 \ldots 2;\ -0{,}25 \ldots -\frac{1}{4}$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$2 > -7;\ \frac{1}{2} > -\frac{3}{4};\ -13 < 5;\ -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4};$

$5 < -10;\ -0{,}125 = -\frac{1}{8};\ 0 > -2;\ -7 < -17$

Erarbeitung der Erkenntnis, daß die rationalen Zahlen überall dicht liegen Um den Begriff „liegt zwischen", den die Schüler schon aus Klasse 6 kennen, zu reaktivieren, kann der Auftrag 14 gestellt werden.

Der Auftrag 15 ist geeignet, die Schüler zu der Erkenntnis zu führen, daß zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ stets mindestens eine weitere rationale Zahl z existiert, die zwischen a und b liegt, für die also gilt $a < z < b$.

Es ist hervorzuheben, daß auf Grund der Dichtheit des Bereichs der rationalen Zahlen zu keiner rationalen Zahl ein Nachfolger bzw. Vorgänger existiert.

Vielfältige Übungen im Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen Das Lehrbuch bietet im Aufgabenteil der LE 5 eine Reihe von Aufgaben, die von den Schülern zu lösen sind. Neben dem Vergleichen und Ordnen sollten auch die Begriffe „entgegengesetzte Zahl" und „absoluter Betrag einer rationalen Zahl" gefestigt werden.

Es ist zu empfehlen, zum bisher behandelten Stoff eine Leistungskontrolle in Form einer Kurzarbeit durchzuführen.

Vorbereitende Hausaufgabe: Die Schüler fertigen einen Additionsrechenstab aus Pappe an (vgl. Bild B 15).

Kontrollaufgaben

1. Ordne die folgenden Zahlen nach ihrer Größe! Beginne mit der kleinsten Zahl!

   $-0{,}5;\ 2;\ \frac{1}{10};\ -1;\ |-8|;\ 0;\ -\frac{4}{3}$

2. Fülle die Tabelle aus!

m	$-m$	$\lvert m\rvert$
-1		
	-2	
0		
$0{,}5$		

3. Löse, falls möglich, jede der folgenden Gleichungen! (Gib alle Lösungen an!)
   a) $|x| = 2$ **b)** $|x| = -1$
4. Setze die richtigen Zeichen (<, >, =) in die Leerstellen!
   a) $-15 \ldots -22$ **b)** $3 \ldots -6$
   c) $-\frac{3}{2} \ldots -1{,}5$ **d)** $|-3| \ldots |-6|$
5. Gib drei rationale Zahlen an, die
   a) zwischen -1 und -2;
   b) zwischen 1 und 0,5
   liegen!

Stoffabschnitt 2.3.

Addition und Subtraktion rationaler Zahlen (10 Std.)

Die Addition ist bekanntlich die schwierigste Rechenoperation mit rationalen Zahlen, und unzureichend ausgebildete Fertigkeiten im Addieren rationaler Zahlen sind oft Ursache für Fehlleistungen der Schüler in anderen Stoffgebieten (z. B. Lösen von Gleichungen, Arbeiten mit Variablen), aber auch in anderen Unterrichtsfächern (z. B. Physik).
Deshalb ist die Entwicklung sicherer Rechenfertigkeiten Hauptanliegen dieses Stoffabschnitts.
Für die Addition rationaler Zahlen wird den Schülern eine algorithmische Vorschrift zur Ausführung des Verfahrens vermittelt. Bei ihrer Erarbeitung ist folgendes Vorgehen zu empfehlen:
I – Inhaltliches Erfassen des Sachverhalts;
II – Erarbeitung algorithmischer Vorschriften für die einzelnen Fälle der Addition;
III – Anwenden der algorithmischen Vorschrift.
In der Phase I kommt es vor allem darauf an, daß die Schüler zum Beispiel durch Betrachtungen am Thermometer (vgl. LE 2, Aufg. 10), durch das Arbeiten mit Plus- und Minuspunkten (vgl. Auftrag 12) oder durch das Arbeiten mit einem Additionsrechenstab (vgl. Bilder B 15 bis B 17) anschauliche Vorstellungen über die Addition rationaler Zahlen gewinnen.
Das Ziel besteht darin, die Schüler zu befähigen, auf der Basis dieser anschaulichen Vorstellungen rationale Zahlen addieren zu können und selbständig auch die Regeln für die Addition rationaler Zahlen zu finden.
Außerdem werden die Schüler mit wichtigen Eigenschaften der Addition rationaler Zahlen vertraut gemacht, und es wird das Hauptziel der Konstruktion des neuen Zahlenbereichs – nämlich die uneingeschränkte Ausführbarkeit des Subtrahierens – mit der Einführung der Subtraktion rationaler Zahlen erreicht.
Im Zusammenhang mit der Behandlung der Subtraktion wird der Begriff „Summe" auch auf Terme erweitert, in denen „–" als Operationszeichen auftritt. So faßt man z. B. $a - b$; $a + b - c$, aber auch Terme wie $2a - a \cdot b + \frac{x}{y}$ als *Summen* auf. Dagegen ist der Term $(a + b) \cdot (c - d)$ natürlich *keine* Summe, sondern ein *Produkt* (aus zwei Summen).

Addieren rationaler Zahlen (1 Std.)

LE 6 (LB 53 bis 54)

Ziele

Die Schüler
- sind in der Lage, mit und ohne Modell (z. B. Additionsrechenstab) „einfache" Additionsaufgaben zu lösen,
- wissen, daß die Summe zweier zueinander entgegengesetzter Zahlen Null ist, und können dies auch bei der Arbeit mit Variablen nutzen (z. B. in Aufg. 4),
- wissen, daß für alle rationalen Zahlen a gilt: $a + 0 = 0 + a = a$, und können diese Kenntnisse beim Lösen von Aufgaben anwenden.

Schwerpunkt

- Lösen „einfacher" Additionsaufgaben mit und ohne Additionsrechenstab

Methodische Hinweise

Lösen „einfacher" Additionsaufgaben mit und ohne Additionsrechenstab Die Schüler sollten zunächst mit dem in der vorbereitenden Hausaufgabe (UH 73) angefertigten Additionsrechenstab *gebrochene Zahlen* addieren (vgl. Bild B 15). Dann wäre ihnen mitzuteilen, daß diese Methode der Addition auch für *negative* rationale Zahlen genutzt werden kann (vgl. Bilder B 16 und B 17). Die Schüler werden aufgefordert, negative rationale Zahlen bzw. rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen zu addieren, ohne daß ihnen noch eine zusätzliche Regel mitgeteilt wird.
Durch diese Arbeit mit dem Additionsrechenstab soll einem zu frühen „formalen" Vorgehen entgegengewirkt werden. Auch Betrachtungen am Thermometer oder das Operieren mit Plus- und Minuspunkten *vor* Erarbeitung der Rechenregeln kann bei den Schülern anschauliche Vorstellungen über die Addition rationaler Zahlen erzeugen.
Im weiteren Verlauf der Stunde sind die Schüler aufzufordern, die Aufgaben möglichst ohne Additionsrechenstab zu lösen, und es sind schließlich auch solche Aufgaben zu stellen, für die – auf Grund des Zahlenmaterials – das Verfahren mit dem Additionsrechenstab nur noch gedanklich ausgeführt werden kann (z. B. Aufg. 1e)).
Auch Aufgaben folgender Art können die Vorstellung von der Addition festigen helfen:
- Schreibe die Zahl 35 als Summe zweier rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen!
- Schreibe die Zahl -50 als Summe rationaler Zahlen mit gleichen (bzw. verschiedenen) Vorzeichen (vgl. Aufg. 2)!

Ein anschließender Vergleich macht deutlich, daß viele verschiedene Lösungen möglich sind.
Der Auftrag 17 kann genutzt werden um herauszustellen, daß für alle rationalen Zahlen a gilt:

$$a + (-a) = 0; \qquad a + 0 = 0 + a = a.$$

Die Aufg. 5 könnte als **Hausaufgabe** gestellt werden, denn sie kann zum Finden von Rechenregeln für die Addition rationaler Zahlen herangezogen werden.

Kontrollaufgaben

Berechne!
$3 + 0$; $-3{,}2 + 3{,}2$; $-7 + 9$; $-9 + 3$; $-3 + (-7)$; $0 + (-3)$; $-11 + 8$

Regeln für die Addition rationaler Zahlen (3 Std.)

LE 7 (LB 55 bis 57)

In diesen 3 Stunden sind mit den Schülern die Regeln der Addition rationaler Zahlen zu formulieren und zu festigen. Es ist davon auszugehen, daß ihnen die Regeln für die Addition nichtnegativer rationaler Zahlen (gebrochener Zahlen) schon bekannt sind.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Regeln für die Addition rationaler Zahlen und können sie sicher anwenden,
- finden mit Hilfe des Lehrers sprachliche Verkürzungen der Regeln und prägen sich diese fest ein.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der Regel für die Addition negativer rationaler Zahlen

2. Stunde
- Erarbeitung der Regel für die Addition rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

3. Stunde
- Übungen zur Festigung der Addition rationaler Zahlen und Erarbeitung von verkürzten Regeln

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Regel für die Addition negativer rationaler Zahlen Um eine Regel für die Addition rationaler Zahlen zu finden, die unabhängig vom Modell des Additionsrechenstabes ist, können die Schüler aufgefordert werden, die Tabelle des Auftrages 18 zu vervollständigen. Ausgehend von dieser Tabelle und dem bisher erworbenen Wissen kann man herausstellen, daß
- die Summe zweier positiver rationaler Zahlen eine positive rationale Zahl ist (das ist nicht neu);
- die Summe zweier negativer rationaler Zahlen eine negative rationale Zahl ist;
- die Summe aus einer negativen und einer positiven rationalen Zahl entweder eine positive oder eine negative rationale Zahl oder Null ist.

Damit wird etwas über das **Vorzeichen** der Summe zweier rationaler Zahlen ausgesagt. Für die Addition negativer rationaler Zahlen, denen wir uns zunächst zuwenden, gilt also:
(1) Die Summe zweier negativer rationaler Zahlen ist eine negative rationale Zahl.
In Auswertung des Auftrages 18 b) können die Schüler zu folgender Erkenntnis gelangen:
(2) Man erhält den **Betrag der Summe**, indem man die Beträge der Summanden addiert.
(1) und (2) werden in der im Lehrbuch (LB 55) formulierten Regel zusammengefaßt.
An den nun zu lösenden Additionsaufgaben ist immer wieder herauszustellen, daß es bei der Addition rationaler Zahlen im wesentlichen auf zwei Dinge ankommt:

1. Bestimmen des *Vorzeichens* der Summe;
2. Bestimmen des *Betrages* der Summe.

Erarbeitung der Regel für die Addition rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen In Analogie zur Addition negativer rationaler Zahlen sind wieder zwei Fragen zu klären:

1. Wie erhält man das Vorzeichen der Summe?
2. Wie erhält man den Betrag der Summe?

Aus der ausgefüllten Tabelle des Auftrags 18 kann entnommen werden, daß die Summe zweier rationaler Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen positiv, negativ oder Null sein kann. Letzteres tritt genau dann auf, wenn zueinander entgegengesetzte Zahlen addiert werden, wenn die Beträge also *gleich* sind. Deshalb interessieren jetzt nur noch jene Fälle, bei denen die Beträge der Summanden *verschieden* sind. Aus den schon gelösten – und gegebenenfalls einigen weiteren – Aufgaben können die Schüler ablesen, wie man das Vorzeichen bzw. den Betrag der Summe ermitteln kann.
Das *Formulieren* der entsprechenden Regeln ist jedoch etwas schwierig, auch für jene Schüler, die die Aufgaben bereits fehlerfrei lösen können. Oft drücken sie sich etwa folgendermaßen aus:

Das Ergebnis hat dasselbe Vorzeichen wie der größere Summand.
Den Betrag erhält man durch Subtraktion der kleineren von der größeren Zahl.

Man sollte diese Formulierungen nicht einfach zurückweisen, sondern anhand von Beispielen möglichst von den Schülern selbst deren Fehlerhaftigkeit erkennen und sie dann korrigieren lassen, etwa:

Wir wissen (z. B. durch die Arbeit mit dem Additionsrechenstab), daß $-7 + 3 = -4$ ist. Das Vorzeichen der Summe stimmt mit dem von -7 überein, den Betrag erhält man durch die Subtraktion $7 - 3$. Vergleichen wir die Zahlen -7 und 3! Es gilt $-7 < 3$, also *ist 3 die größere* der beiden Zahlen. Für ihre *Beträge* gilt aber $|-7| > |3|$, also hat -7 den *größeren Betrag* der beiden Zahlen.

Es muß also richtig heißen:

Das *Vorzeichen* der Summe stimmt mit dem Vorzeichen des Summanden mit dem *größeren Betrag* überein.

Den *Betrag* der Summe erhält man, indem man die Beträge der Summanden subtrahiert (und zwar den kleineren Betrag vom größeren).
Man kann die Regel für die Addition rationaler Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen auch durch Verallgemeinerung aus der Aufgabenfolge in Aufg. 5 (LE 6) gewinnen.

Übungen zur Festigung der Addition rationaler Zahlen und Erarbeitung von verkürzten Regeln Schwerpunkt dieser Stunde ist die Entwicklung sicherer Rechenfertigkeiten im Addieren rationaler Zahlen. Bei aller Vielfalt der im Aufgabenteil angebotenen Aufgaben geht es darum, daß *alle* Schüler sicher und schnell Aufgaben folgenden Schwierigkeitsgrades lösen können:
Berechne!
$-8 + 3$; $-\frac{1}{2} + (-0{,}5)$; $-1{,}5 + (-1{,}3)$; $17 + (-9)$; $-1{,}1 + 0{,}9$; $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)$; $3 + (-8)$

Um bei den Schülern Fertigkeiten im Addieren rationaler Zahlen zu entwickeln, ist es erforderlich, ihnen in den folgenden Wochen und Monaten immer wieder (z. B. in täglichen Übungen) Additionsaufgaben zur Lösung vorzulegen. Dabei sollten gelegentlich auch einmal Aufgaben vorkommen, in denen das Zeichen „+“ als Vorzeichen auftritt (vgl. Aufg. 6).
Im Zusammenhang mit der Entwicklung von Rechenfertigkeiten im Addieren rationaler Zahlen ist es sinnvoll, die Formulierungen der Rechenregeln zu *verkürzen* (LB 58), so daß die Schüler sie leichter behalten und auch besser anwenden können.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1, 3, 10

Eigenschaften der Addition rationaler Zahlen (2 Std.)

LE 8 (LB 57 bis 58)

Anhand von repräsentativen Beispielen wird die Gültigkeit des Kommutativgesetzes sowie des Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen gezeigt.

Ziele

Die Schüler
- kennen das Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition rationaler Zahlen und können es mit Variablen angeben,
- haben die anhand von Beispielen gewonnenen Begründungen der Gesetze verstanden,
- können die Gesetze bei Berechnungen anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Überprüfen der Gültigkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen an repräsentativen Beispielen

2. Stunde
- Anwenden des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen

Methodische Hinweise

Überprüfen der Gültigkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes ... Durch den Auftrag 20 sollen die Schüler angeregt werden, die Gültigkeit des Kommutativ- bzw. Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen an Beispielen zu überprüfen.

Erwartet wird der Vorschlag, das Gesetz analog zum Vorgehen in Klasse 6 anhand einer Tabelle zu überprüfen.
Der Kopf der Tabelle sollte von den Schülern bei möglichst geringer Hilfe des Lehrers entworfen werden.

a	b	$a+b$	$b+a$

a	b	c	$(a+b)$	$(a+b)+c$	$(b+c)$	$a+(b+c)$

Dabei sollten die Schüler begreifen, daß für die Überprüfung des Kommutativgesetzes nur jeweils zwei, aber für die Überprüfung des Assoziativgesetzes für jedes Beispiel drei Summanden erforderlich sind.
Für den Fall, daß a, b bzw. a, b, c nichtnegative (also gebrochene) Zahlen sind, wissen die Schüler aus Klasse 6, daß die beiden Gesetze gelten.
Außerdem wissen sie schon, daß $a + 0 = 0 + a = a$ für alle rationalen Zahlen a gilt.
Zur Überprüfung etwa des Kommutativgesetzes müssen also nur noch folgende drei Fälle an Beispielen untersucht werden:

(1) $a > 0$; $b < 0$;
(2) $a < 0$; $b > 0$;
(3) $a < 0$; $b < 0$.

Gestützt auf die Beispiele sollten die Schüler dann zu folgender verallgemeinerten Erkenntnis geführt werden:

Da das *Vorzeichen* der Summe zweier rationaler Zahlen unabhängig von der Reihenfolge der Summanden ist und auch der *Betrag* der Summe von der Reihenfolge der Summanden nicht abhängt, muß *für alle* rationalen Zahlen a, b gelten:
$a + b = b + a$.

Damit ist das Kommutativgesetz *bewiesen.*

Anwenden des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen

Die im Lehrbuch angegebenen Aufgaben dienen vorrangig der Festigung und Anwendung des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen (Aufg. 1, 2) sowie der Festigung der Regeln für die Addition rationaler Zahlen (Aufg. 3).

Kontrollaufgaben

Berechne!
$-5 + (-7) + 27$; $-1{,}5 + 13 + (-1{,}5)$; $-12 + (-6{,}5) + (-8)$

Subtraktion rationaler Zahlen (4 Std.)

LE 9 (LB 58 bis 61)

Für die Behandlung der rationalen Zahlen ist die Subtraktion von besonderer Bedeutung, weil die eingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion *gebrochener* Zahlen als ein wichtiges (innermathematisches) Motiv für das Einführen der rationalen Zahlen und das Arbeiten mit ihnen benutzt worden ist. Daran sollte man die Schüler ausdrücklich erinnern.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß die Subtraktion auf die Addition rationaler Zahlen zurückgeführt wird,
- wissen, daß die Addition rationaler Zahlen uneingeschränkt ausführbar ist – also auch die Subtraktion,
- kennen den verallgemeinerten Begriff „Summe",
- können sicher und schnell rationale Zahlen addieren und subtrahieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der Regel für die Subtraktion rationaler Zahlen

2. Stunde
- Verallgemeinerung des Begriffs „Summe"

3. und 4. Stunde
- Vielfältige Übungen im Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen
- Leistungskontrolle

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Regel für die Subtraktion rationaler Zahlen

Variante 1
(Diese Variante orientiert sich stark am Lehrbuch.)

Bevor man sich der Erarbeitung einer Regel für die Subtraktion zuwendet, sollte man die Schüler fragen, welche *Bedingungen* die Subtraktion rationaler Zahlen erfüllen müßte. Das sind:
(1) Die Subtraktion soll die *Umkehroperation zur Addition* sein.
(2) Die Subtraktion soll *uneingeschränkt ausführbar* sein.
Aus der Bedingung (1) ergibt sich folgende Überlegung (vgl. Beispiel 8):
Die Differenz $4 - 9$ soll *diejenige* Zahl x sein, für die $x + 9 = 4$ gilt. Also muß $x = -5$ sein, denn $(-5) + 9 = 4$.

Um diese Schlußweise etwas an Aufgaben vorzubereiten, die den Schülern schon *vertraut* sind, sollte man erinnern z. B. an: $15 - 9 = 6$, denn $6 + 9 = 15$ (vgl. Beispiel 7).

Mit Hilfe derselben Überlegung sollten weitere Aufgaben gelöst werden, z. B.: $-8 - 2$; $6 - (-3)$; $-4 - (-7)$, damit die Schüler den Zusammenhang *inhaltlich erfassen* (Auftrag 23 a).
Um eine *Regel* für die Ausführung der Subtraktion zu gewinnen, empfiehlt es sich, die Ergebnisse von Subtraktionsaufgaben der Form $a - b$ mit denen von Additionsaufgaben der Form $a + (-b)$ zu vergleichen (Auftrag 23 b). Dies legt dann nahe zu definieren:
$a - b = a + (-b)$, $(a, b \in Q)$.
Die Bedingung (1) ist nunmehr erfüllt. Man sollte die Schüler jetzt prüfen lassen, ob auch Bedingung (2) erfüllt ist.
Dazu kann man u. a. die Schüler versuchen lassen, *nicht lösbare* Subtraktionsaufgaben zu stellen. Sie sollten dann begründen, *warum* es solche Aufgaben in Q nicht gibt (weil es zu

jeder rationalen Zahl eine entgegengesetzte gibt und weil die Addition in Q stets ausführbar ist).

Variante 2

Auch bei dieser Variante sollten die Bedingungen, die an die Subtraktion rationaler Zahlen zu stellen sind, am Anfang stehen. Um die *Regel* zu erarbeiten, wird die Tatsache genutzt, daß für *nichtnegative* rationale Zahlen a, b mit $a > b$ die Subtraktion schon erklärt ist. Die Schüler können folgende Aufgaben (z. B. im Rahmen einer Übung) lösen.

Berechne!

a) $47 - 9; 47 + (-9)$ **b)** $33 - 12; 33 + (-12)$
c) $22 - 19; 22 + (-19)$ **d)** $44 - 13; 44 + (-13)$

Durch Vergleich der Aufgaben und ihrer Ergebnisse finden die Schüler, daß für nichtnegative rationale Zahlen a, b mit $a > b \geqq 0$ offenbar gilt:

$a - b = a + (-b)$.

Das können sie sogar *begründen:*
Um die Summe $a + (-b)$; $a > b \geqq 0$ zu ermitteln, muß man

1. das Vorzeichen der Summe bestimmen
(wegen $a > b \geqq 0$ ist das Vorzeichen der Summe „+");
2. den Betrag der Summe ermitteln
(wegen $a > b \geqq 0$ gilt $|a| - |b| = a - b$ mit $a - b > 0$).

Es liegt nunmehr nahe, für *beliebige* rationale Zahlen a, b festzulegen, daß man die Differenz $a - b$ erhält, indem man die Summe aus a und $-b$ bildet, daß also $a - b = a + (-b)$ sein soll.
Nun muß aber noch geprüft werden, ob die so festgelegte Subtraktion rationaler Zahlen die Bedingungen (1) und (2) erfüllt:
Daß die so festgelegte Subtraktion die *Umkehroperation zur Addition* ist, kann an einigen repräsentativen Beispielen verdeutlicht werden.
Da die Subtraktion auf die Addition rationaler Zahlen zurückgeführt wurde und die Addition rationaler Zahlen stets ausführbar ist, ist auch die *Subtraktion stets ausführbar.*
Zur Erstfestigung sollten die Schüler Aufgaben vom Typ $6 - 13$; $7 - (-3)$; $-2{,}5 - 5$ (vgl. Aufg. 1) lösen.

Verallgemeinerung des Begriffs „Summe" Zu Beginn der Stunde sollte der Begriff „Term" durch das Lösen nachstehender Aufgaben wiederholt werden:

(1) Bilde Terme, in denen neben Ziffern und Klammern nur die Zeichen „+", „−" vorkommen, und berechne jeweils den Wert des Terms!
(2) Bei welchen der folgenden Terme kann man auf das Zeichen „+" (und die Klammern) verzichten, ohne den Wert des Terms zu verändern? Berechne jeweils den Term!

a) $3 + (-4)$ **b)** $4{,}5 + 2$ **c)** $-7 + (-2{,}5)$ **d)** $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

Nach dem Lösen der Aufgabe (2) ist herauszustellen, daß man einige Terme mit weniger Zeichen aufschreiben kann, ohne ihren Wert zu verändern.
Statt $3 + (-4)$ schreibt man kürzer $3 - 4$.
Statt $-7 + (-2{,}5)$ schreibt man kürzer $-7 - 2{,}5$.
Den Schülern ist mitzuteilen, daß man im Bereich der rationalen Zahlen Terme der Form $3 - 4$ als **Differenz** der Zahlen 3 und 4, aber auch als **Summe** der Zahlen 3 und -4 auffassen kann.
Deshalb wird festgelegt, im Bereich der rationalen Zahlen z. B. auch folgende Terme als Summen zu bezeichnen:

$3 - 4$; $-7 - 2{,}5$; $3 - s$; $x + y - t$.

Zur Erstfestigung können die Schüler die Aufgaben 4 und 5 lösen.

Vielfältige Übungen im Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen Nachdem die Regeln für die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen im Unterricht behandelt worden sind, sollten sich vielfältige Übungen anschließen. Ihr Inhalt wird wesentlich von der jeweiligen Klassensituation bestimmt. Hier sei nur auf einige Schwerpunkte hingewiesen:
- Entwicklung sicherer Rechenfertigkeiten im Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen;
- Anwenden des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Addition rationaler Zahlen;
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen;
- Rechnen mit Beträgen;
- Lösen von Aufgaben mit mehr als zwei Summanden.

Kontrollaufgaben

1. Berechne!

   $4 - 23$; $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; $3 - (-5)$; $-3 - (-6)$;

   $5 - 5$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$; $-25 - (-25)$; $16 - 20$
2. Schreibe -3 als Summe zweier Summanden mit verschiedenen Vorzeichen!
3. Berechne!

   a) $-0{,}2 + 7{,}2 - 8 + 1$ **b)** $-\frac{2}{5} + \frac{7}{10} - \frac{13}{10}$

   c) $-5 + (-2) - (-9)$ **d)** $3 - (4 - 7)$
4. Löse folgende Gleichungen!

   a) $x - 3 = -4$ **b)** $x - 1 = 2$
5. Fasse folgende Terme als Summe auf und gib jeweils die Summanden an!

   a) $14 - 4$ **b)** $2a - 3b$

   c) $r + 2m$

Stoffabschnitt 2.4.

Multiplikation und Division rationaler Zahlen (8 Std.)

Auch bei der Festlegung von Regeln für die Multiplikation und Division rationaler Zahlen geht es im Grunde um zwei Vorschriften: eine, mit deren Hilfe das **Vorzeichen** des Ergebnisses gewonnen wird, und eine andere, die festlegt, wie man den **Betrag** des Resultats ermittelt. Es ist zu empfehlen, diese zwei Schritte des Algorithmus den Schülern bewußtzumachen. Die Schüler sind wie bei der Addition darauf zu orientieren, erst das Vorzeichen und dann den Betrag des Resultats zu bestimmen.
Auch in diesem Unterrichtsabschnitt ist großer Wert auf die Weiterentwicklung der Rechenfertigkeiten zu legen.
Am Ende des Stoffabschnitts sollte eine zusammenfassende Übersicht über die bisher behandelten Zahlenbereiche erarbeitet werden.

Multiplikation rationaler Zahlen (2 Std.)

LE 10 (LB 61 bis 62)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Regeln für die Multiplikation rationaler Zahlen und können sie sicher anwenden,
- finden mit Hilfe des Lehrers Verkürzungen der Regeln und prägen sich diese fest ein.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Multiplikation rationaler Zahlen
- Erarbeitung einer Regel für die Multiplikation rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen

2. Stunde
- Erarbeitung einer Regel für die Multiplikation negativer rationaler Zahlen

Methodische Hinweise

Motivierung der Multiplikation rationaler Zahlen Für die Einführung der Multiplikation rationaler Zahlen eignet sich eine innermathematische Motivierung. Diese ist einfach und naheliegend:
„Wir wissen schon, wie man rationale Zahlen addiert und subtrahiert. Mit den natürlichen bzw. nichtnegativen rationalen Zahlen (gebrochenen Zahlen) können wir auch multiplizieren. Es wird sicher notwendig sein, diese Rechenoperation mit allen rationalen Zahlen ausführen zu können. Beispielsweise ist sie erforderlich, um solche Gleichungen wie $\frac{x}{3} = -12$ zu lösen. Das ist ein Gleichungstyp, den wir im Bereich der gebrochenen Zahlen $\left(\frac{x}{a} = b; \quad a, b \in Q_+, a \neq 0\right)$ bereits in Klasse 6 bewältigt haben."

Erarbeitung einer Regel für die Multiplikation rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen Nach der einführenden Motivierung und der anschließenden Behandlung des Auftrags 24 wird festgelegt, daß für alle rationalen Zahlen $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ gilt.
Nun wird das weitere Ziel präzisiert:
(1) Wie erhält man *Vorzeichen* und *Betrag* eines Produktes, wenn die Faktoren *verschiedene* Vorzeichen haben?
(2) Wie erhält man *Vorzeichen* und *Betrag* eines Produktes, wenn *beide* Faktoren *negative* rationale Zahlen sind?
In dieser Stunde steht die Beantwortung der Frage (1) im Zentrum, und zwar soll zunächst überlegt werden, wie man zwei Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen im Bereich der ganzen Zahlen miteinander multipliziert.
Ausgehend von den Beispielen gemäß Auftrag 25 und durch Verallgemeinerung sollen

die Schüler möglichst selbständig zu einer Regel für die Multiplikation rationaler Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen (LB 62) gelangen.
In Abhängigkeit von der Klassensituation wäre die Erarbeitung eines Blockdiagramms denkbar (Bild 2.2).

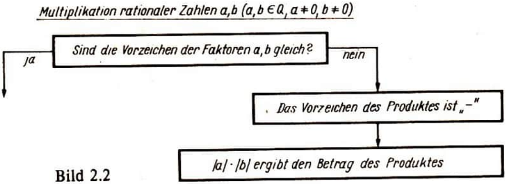


Bild 2.2

Der weitere Unterrichtsverlauf dient der Festigung der gewonnenen Regel durch das Lösen entsprechender Aufgaben (z. B. Aufg. 1, 2).

Erarbeitung einer Regel für die Multiplikation negativer rationaler Zahlen Nach einer täglichen Übung wird die noch offene Frage aus LE 9 aufgegriffen:

Wie erhält man **Vorzeichen** und **Betrag** eines Produktes, wenn die Faktoren *verschiedene* Vorzeichen haben?

Für den **Betrag** des Produktes $a \cdot b$ ($a < 0$, $b < 0$) wird naheliegend folgende Festlegung getroffen: $|a| \cdot |b|$ ergibt den Betrag des Produktes.
Ob das Produkt $a \cdot b$ positiv oder negativ ist, muß noch festgelegt werden.
Folgt man dem Weg des Lehrbuches, so sollte man den Auftrag 26 gemeinsam mit den Schülern in Angriff nehmen. Dabei kommt es insbesondere darauf an zu begründen, warum es nicht sinnvoll ist, -6 als Ergebnis der Aufgabe $-2 \cdot (-3)$ zuzulassen.
Argumentation:
Angenommen, wir würden uns für die Festlegung $-2 \cdot (-3) = -6$ entscheiden, dann hätte zum Beispiel die Gleichung $-2 \cdot x = -6$ außer der Lösung $x_1 = -3$ noch die Lösung $x_2 = 3$, denn es gilt $-2 \cdot 3 = -6$. Da die Division wieder als Umkehroperation zur Multiplikation festgelegt werden soll, hätte die Aufgabe $-6 : (-2)$ somit auch zwei Lösungen:

$-6 : (-2) = 3; \quad -6 : (-2) = -3$.

Das kann man aber nicht zulassen, denn Rechenoperationen sollen *eindeutig* ausführbar sein. (Der Eindeutigkeit von Rechenoperationen wird im Zusammenhang mit der Definition der Quadratwurzel erneut Beachtung geschenkt.)
Würden wir festlegen, daß $-2 \cdot (-3) = 6$ gilt, dann hätte die Gleichung $-2 \cdot x = 6$ genau eine Lösung ($x = -3$). Damit wäre auch die Eindeutigkeit der Division $6 : (-2)$ gewährleistet: $6 : (-2) = -3$.
Will man diesen etwas anspruchsvollen Weg nicht gehen, so ist zu empfehlen, von den Schülern folgende Aufgabe lösen zu lassen.

$-2 \cdot 3 = -6$
$-2 \cdot 2 = -4$
$-2 \cdot 1 = -2$
$-2 \cdot 0 = 0$

Wir erkennen, daß das Produkt jeweils um 2 größer wird und setzen in gleicher Weise die Folge der Produkte fort:

$-2 \cdot (-1) = 2$
$-2 \cdot (-2) = 4$
$-2 \cdot (-3) = 6$

Die Festlegung, daß das Produkt zweier negativer rationaler Zahlen eine positive rationale Zahl ist, erscheint nun sinnvoll.
Nach Ergänzung des in der vorigen Unterrichtsstunde begonnenen Blockdiagramms für die Multiplikation rationaler Zahlen sind die Regeln für die Multiplikation durch das Lösen entsprechender Aufgaben zu festigen.
Dabei sind die Schüler auf eine Verkürzung der Regeln zu orientieren. Da das Ermitteln der Beträge von Produkten rationaler Zahlen den Schülern im allgemeinen keine Schwierigkeiten bereitet, genügt es, sich bei den Kurzfassungen der Regeln auf das Bestimmen des Vorzeichens zu konzentrieren.
Es ist zu empfehlen, daß sich die Schüler folgende Verkürzungen fest einprägen:

„Minus mal minus gleich plus“;

„plus mal minus gleich minus“ bzw. „minus mal plus gleich minus“.

Die Schüler müssen allerdings wissen, daß diese stark verkürzten Fassungen nur etwas über das Vorzeichen des Produktes aussagen.
Zur Vorbereitung der LE 11 könnte zum Beispiel der Auftrag 27 (LE 11) als **Hausaufgabe** gestellt werden.

Kontrollaufgaben

1. Berechne!

   $-7\cdot(-8)$; $12\cdot(-12)$; $(-2)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

   $-0{,}5\cdot 2$; $-6+2\cdot(-3)$; $-2\cdot(-3)-1$

2. Löse folgende Gleichungen!

   $3\cdot x=-12$; $-2\cdot x=6$; $-\frac{1}{4}\cdot x=1$;

   $|-9|\cdot(-8)=x$; $|-7|\cdot|8|=x$

Eigenschaften der Multiplikation rationaler Zahlen (2 Std.)

LE 11 (LB 63 bis 65)

Sowohl im Bereich der natürlichen Zahlen als auch im Bereich der gebrochenen Zahlen wurde die Gültigkeit der Kommutativ- und Assoziativgesetze für die Addition und Multiplikation sowie des Distributivgesetzes erörtert. Nachdem die Schüler in der LE 8 die Gültigkeit des Kommutativ- und Assoziativgesetzes auch für die Addition rationaler Zahlen kennengelernt haben, soll nunmehr überprüft werden, ob auch für die Multiplikation rationaler Zahlen das Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten.
Ebenso ist zu verdeutlichen, daß im Bereich der rationalen Zahlen auch das Distributivgesetz gültig ist.

Ziele

Die Schüler
- kennen das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation rationaler Zahlen sowie das Distributivgesetz,

- haben die anhand von Beispielen erarbeiteten Begründungen der Gesetze verstanden,
- können die genannten Gesetze beim Rechnen und Umformen von Termen anwenden,
- wissen, daß man Terme wie $3 \cdot a$; $a \cdot b$; $-2 \cdot a$ auch ohne Malpunkt schreiben kann.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Überprüfung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes der Multiplikation rationaler Zahlen sowie des Distributivgesetzes anhand von Beispielen

2. Stunde
- Anwendung des Distributivgesetzes beim Umformen von Termen

Methodische Hinweise

Überprüfung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes der Multiplikation rationaler Zahlen sowie des Distributivgesetzes Das Überprüfen der Gesetze an repräsentativen Beispielen (Auftrag 27) könnte als *vorbereitende Hausaufgabe* erfolgen (vgl. LE 10).
Für den Fall, daß a, b nichtnegative (also gebrochene) Zahlen sind, wissen die Schüler schon, daß z. B. das *Kommutativgesetz der Multiplikation* gilt. Außerdem wissen sie, daß für beliebige rationale Zahlen a gilt:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
Zur Überprüfung des Gesetzes müssen demnach lediglich noch folgende drei Fälle betrachtet werden:
(1) $a > 0; b < 0$, **(2)** $a < 0; b > 0$, **(3)** $a < 0; b < 0$.
Jeder dieser Fälle kann anhand eines Beispiels begründet werden. Dabei wird herausgestellt, daß das Vorzeichen, aber auch der Betrag des Produkts zweier rationaler Zahlen auf Grund der Rechenregel *unabhängig* von der Reihenfolge der Faktoren ist. Es gilt also *für alle* rationalen Zahlen a, b: $a \cdot b = b \cdot a$.
In ähnlicher Weise können auch die anderen Gesetze begründet werden.
Im folgenden Unterricht gilt es, die Gesetze zur Vereinfachung von Rechnungen zu nutzen und die Rechenfertigkeiten der Schüler weiter zu erhöhen.
Dabei steht in dieser Stunde die Anwendung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes der Multiplikation im Vordergrund (Auftrag 28). Anhand von Aufgaben sind folgende Erkenntnisse herauszustellen und zu festigen:
- Ein Produkt rationaler Zahlen ist positiv (negativ), falls die Anzahl der negativen Faktoren gerade (ungerade) ist und kein Faktor Null ist (Auftrag 29).
- Für alle rationalen Zahlen a gilt: $a \cdot 1 = a$ und $a \cdot (-1) = -a$ (Auftrag 30).

Den Schülern ist mitzuteilen, daß man – falls keine Mißverständnisse auftreten können – Terme wie $2 \cdot x$; $a \cdot b$; $-2 \cdot (a + b)$ ohne den Malpunkt schreiben kann (Beispiel 15).

Anwendung des Distributivgesetzes beim Umformen von Termen Im Zentrum der Stunde steht die Festigung des Distributivgesetzes durch Anwenden beim Umformen von Termen (Aufg. 5 bis 9). Dabei soll der Schüler begreifen, daß das Distributivgesetz etwas über die Gleichheit einer Summe und eines Produktes aussagt und damit – auf Grund des Distributivgesetzes – die Möglichkeit besteht, eine Summe in ein Produkt $[ax + bx = (a + b)x]$ bzw. ein Produkt in eine Summe zu überführen

$[(a + b)x = ax + bx]$. Allerdings brauchen bei derartigen Aufgaben in Klasse 7 noch keine Fertigkeiten entwickelt zu werden.
Dagegen ist es für das folgende Stoffgebiet „3. Gleichungen“ notwendig, daß die Schüler Aufgaben folgender Art sicher lösen können (vgl. Aufg. 7):

Fasse soweit wie möglich zusammen!

$3x + 17 - 7x$

Der erstmaligen Lösung dieser Aufgabe ist ein Unterrichtsgespräch voranzustellen, in dem herausgearbeitet wird, daß man Summen der Form $3x - 7x$ als Produkt schreiben kann:

$$\begin{aligned} 3x - 7x &= (3 - 7)x \\ &= -4x \end{aligned}$$

In Abhängigkeit vom Leistungsstand der Klasse kann man auch Terme der Form $5x + 3x + 2y - 7y$ betrachten. Im Unterrichtsgespräch gelangen die Schüler zu der Feststellung, daß es in diesem Term zwei Gruppen von Produkten mit gleichen Faktoren gibt. Die eine Gruppe enthält die Variable x und die andere die Variable y als Faktor. Faßt man die Produkte mit gleichen Faktoren zusammen, so erhält man

$$5x + 3x + 2y - 7y = 8x - 5y.$$

Kontrollaufgaben

1. Rechne vorteilhaft!
   $-2 \cdot 0{,}73 \cdot 0{,}5$; $-4 \cdot 17{,}9 \cdot (-25)$; $3{,}72 \cdot (-8) \cdot \frac{1}{8}$
2. Fasse zusammen!
   $3x - 7x$; $-2a + 3a$; $-7c + 4 - 3c$
3. Berechne!
   $-7 \cdot (-3) \cdot (-1)$; $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 0$; $(-1)^3$; $(-2)^4$

Division rationaler Zahlen (3 Std.)

LE 12 (LB 65 bis 67)

Das Hauptanliegen dieser Lerneinheit besteht darin, bei den Schülern sichere Fertigkeiten beim Dividieren und Multiplizieren rationaler Zahlen zu entwickeln.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Regeln für die Division rationaler Zahlen und können sie sicher anwenden,
- wissen, daß auch im Bereich der rationalen Zahlen die Division durch 0 nicht erklärt ist,
- kennen die Beziehung $\frac{a}{b} = a : b$ $(a, b \in Q;\ b \neq 0)$,
- können das Reziproke einer rationalen Zahl bilden,

- können Aufgaben lösen, die das Ausführen von zwei und mehr Rechenoperationen (gleicher und verschiedener Stufe) mit rationalen Zahlen erfordern.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der Regeln für die Division rationaler Zahlen

2. und 3. Stunde
- Vielfältige Übungen zur Festigung der Rechenregeln in Q (insbesondere der Multiplikation und Division)

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Regeln für die Division rationaler Zahlen Daß nach der Addition, Subtraktion und Multiplikation rationaler Zahlen nun die Division zu behandeln ist, liegt auf der Hand und bedarf kaum einer Motivierung.
Wird noch die Bedingung angegeben, daß wie in allen bisher behandelten Zahlenbereichen auch im Bereich der rationalen Zahlen die Division die Umkehroperation zur Multiplikation sein soll, müßte es den Schülern leicht fallen, selbständig Regeln für die Division rationaler Zahlen zu formulieren.[1] Schüler mit entsprechendem Leistungsstand könnte man beauftragen, analog zur Multiplikation ein Blockdiagramm für die Division rationaler Zahlen (u. U. auch noch nachträglich für die Addition rationaler Zahlen) zu erstellen und dies in einem Schülervortrag allen Schülern ihrer Klasse darzubieten.
Im Verlaufe des Unterrichts ist es unbedingt erforderlich zu erörtern, daß auch im Bereich der rationalen Zahlen die Division durch Null nicht erklärt ist (Auftrag 31).

Als Begründung ist anzuführen, daß jede Rechenoperation ein eindeutig bestimmtes Ergebnis haben muß und daß die Division die Umkehroperation zur Multiplikation ist.
Die Divisionsaufgabe $x = a : 0$ $(a \in Q)$ würde verlangen, eine eindeutig bestimmte rationale Zahl x zu finden, für die $0 \cdot x = a$ gilt. Eine solche Zahl gibt es nicht, denn für $a \neq 0$ hat die Gleichung $0 \cdot x = a$ keine Lösung und für $a = 0$ unendlich viele Lösungen. (Für jede rationale Zahl x gilt $0 \cdot x = 0$.) Das heißt, die Division durch 0 ist nicht erklärt. In Abhängigkeit von der Klassensituation kann man die Betrachtungen allgemein (s. o.) oder aber für konkrete a (z. B. $a = 4$; $a = 0$; $a = -2{,}5$) durchführen.

Als Gegenüberstellung sollte man darauf hinweisen, daß für $a \neq 0$ stets $0 : a = 0$ gilt.
Den Schülern ist noch mitzuteilen, daß man – wie im Bereich der gebrochenen Zahlen – auch im Bereich der rationalen Zahlen den Bruchstrich als Divisionszeichen auffassen kann und umgekehrt.

$$\frac{a}{b} = a : b \ \ (b \neq 0);\ a, b \in Q)$$

Vielfältige Übungen zur Festigung der Rechenregeln in Q Neben der Multiplikation und Division sind auch die Regeln für die Addition rationaler Zahlen zu festigen. Insbesondere sollen die Schüler Sicherheit im Lösen von Aufgaben erlangen, die das Ausführen von zwei Rechenoperationen (gleicher und verschiedener Stufe) mit rationalen Zahlen erfordern.

1) Bezüglich der Regeln für die Vorzeichen kann für die Division folgende Sprechweise verwendet werden:
„plus durch plus gleich plus",
„minus durch minus gleich plus", usw.

Bei letzterem Aufgabentyp sollten die Schüler vor der Rechnung einen „Rechenbaum" anfertigen.
Das sind schematische Darstellungen, die den jeweiligen Rechenweg in Abhängigkeit von der Struktur des betreffenden Terms angeben.
Beispiel (Bild 2.3): $-3 - 4 \cdot (-7)$
Das Anfertigen eines Rechenbaumes zwingt die Schüler, sich die Struktur des Terms klarzumachen. Der fertige Rechenbaum zeigt dann, was in welcher Reihenfolge zu rechnen ist.
(Der Term selbst gibt dies natürlich auch an, aber nicht in so anschaulicher Form wie der zugehörige Rechenbaum.)
Die so wichtige geistige Operation des Analysierens wird gewissermaßen materialisiert.

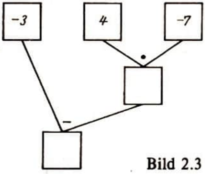


Bild 2.3

In der zweiten Übungsstunde kann der Lehrer eine Kurzarbeit schreiben lassen.

Kontrollaufgaben

1. Berechne!
   $-24 : (-4)$; $8 : (-4)$; $4{,}8 : (-2)$; $-3 + 4 : 2$
2. Löse folgende Gleichungen!
   a) $x \cdot 7 = -14$ **b)** $-2x = -6{,}6$
   c) $|x| \cdot (-1) = -4$ **d)** $-12 : |x| = -6$ **e)** $\frac{x}{3} = -9$
3. Nenne drei rationale Zahlen, für die gilt:
   a) $2x < -7$; **b)** $x : (-2) > -2$!

Übersicht über die Zahlenbereiche (1 Std.)

LE 13 (LB 67 bis 68)

Ziele

Die Schüler
- können verschiedene Zahlenbereiche in einem Mengendiagramm darstellen,
- wissen, welche Rechenoperationen in Abhängigkeit vom Grundbereich stets ausführbar sind,
- wissen, daß sich jede rationale Zahl in der Form $\frac{p}{q}$ ($p, q \in Z$; $q > 0$) darstellen läßt.

Schwerpunkte

- Erarbeitung einer Übersicht über die behandelten Zahlenbereiche (N, Z, Q_+, Q)
- Darstellung jeder rationalen Zahl in der Form $\frac{p}{q}$ ($p, q \in Z$; $q > 0$)

Methodische Hinweise

Erarbeitung einer Übersicht über die behandelten Zahlenbereiche Die Aufträge 32 und 33 können genutzt werden, um den Schülern einen systematisierenden Überblick über die behandelten Zahlenbereiche und die in ihnen uneingeschränkt ausführbaren Rechenoperationen zu geben. Der Einsatz der Projektionsfolie „Zahlenbereiche" kann diese Systematisierung unterstützen. Anstelle des Auftrags 32 kann auch mit der Lösung der Aufgaben 1 und 2 begonnen werden.

Darstellung rationaler Zahlen in der Form $\frac{p}{q}$ ($p, q \in Z; q > 0$) Anknüpfend an die Tatsache, daß sich jede gebrochene Zahl a ($a \neq 0$) in der Form $\frac{p}{q}$ ($p, q \in N; q > 0; p, q$ teilerfremd) darstellen läßt $\left(\text{z. B. } 0{,}\overline{3} = \frac{1}{3};\ 0{,}25 = \frac{1}{4}\right)$, wird den Schülern der Satz 7 mitgeteilt und mit Hilfe der Beispiele 19 a) bis c) „illustriert". Zur Festigung des Satzes sollten die Schüler die Aufgabe 4 lösen.

In Vorbereitung auf die Lerneinheit 15 wäre es nützlich, einem Schüler mit entsprechendem Leistungsstand die Aufgabe 5 als Hausaufgabe zu geben. Den Beweis könnte der Schüler dann in einer der folgenden Stunden vortragen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1 und 2; **2.** Aufg. 4

Stoffabschnitt 2.5.

Übungen mit dem Taschenrechner (3 Std.)

Neben der Einführung der **Vorzeichenwechseltaste** stehen Übungen mit dem Taschenrechner im Vordergrund. Im Interesse rationellen Arbeitens und auch des Vermeidens von Eingebefehlern sind die Schüler vor allem beim Lösen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben darauf zu orientieren, das Vorzeichen des Resultats *ohne* Rechner zu bestimmen und mit ihm nur den Betrag des Ergebnisses zu ermitteln.
Die Übungsphasen mit dem Taschenrechner sollten immer wieder durch vielfältige Übungen im mündlichen Rechnen „aufgelockert" werden.

Übungen mit dem Taschenrechner (3 Std.)

LE 14 (LB 69 bis 70)

In dieser Lerneinheit sollen die Schüler ihre Fertigkeiten im Umgang mit dem Rechenhilfsmittel „Taschenrechner" vervollkommnen. Zugleich sollen die 3 Unterrichtsstunden dazu dienen, die Fertigkeiten der Schüler im mündlichen Rechnen (z. B. durch das Ausführen von Kontrollrechnungen beim Arbeiten mit dem Taschenrechner, aber auch durch spezielle Übungen im Kopfrechnen) weiterzuentwickeln.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Funktion der Vorzeichenwechseltaste,
- können mit und ohne Taschenrechner die vier Grundrechenoperationen im Bereich der rationalen Zahlen sicher ausführen,
- sind gewillt und fähig, Kontrollrechnungen durchzuführen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung der Vorzeichenwechseltaste

2. und 3. Stunde
- Vielfältige Übungen im Addieren, Multiplizieren und Dividieren rationaler Zahlen mit einem Taschenrechner
- Lösen von Aufgaben, die das Ausführen von zwei Rechenoperationen verschiedener Stufe mit rationalen Zahlen erfordern

Methodische Hinweise

Einführung der Vorzeichenwechseltaste Eine besondere Motivierung der Nutzung eines Taschenrechners für das Ausführen der vier Grundrechenoperationen mit rationalen Zahlen ist nicht erforderlich.
Das erste Teilziel der Stunde besteht darin, daß die Schüler lernen, wie man negative rationale Zahlen mit Hilfe der Vorzeichenwechseltaste in einen Taschenrechner eingibt. Dazu kann das Beispiel 20 genutzt werden.
Um zum Beispiel die Zahl −2 in den Rechner einzugeben, muß nach Eingabe der Zahl 2 die Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$ gedrückt werden (nicht umgekehrt!). Also −2 : 2 $\boxed{+/-}$, aber nicht: $\boxed{+/-}$ 4.

Man könnte annehmen, daß die negative Zahl −2 auch mit der Tastenfolge $\boxed{-}$ 2 eingegeben werden kann. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die negative Zahl als *erste* Zahl eines zu berechnenden Terms eingegeben wird. In diesem Fall rechnet der Taschenrechner $0 - 2 = -2$. Wird eine negative Zahl nicht als erste Zahl eingegeben, kann die Eingabe in der Regel *nicht* mit der Taste $\boxed{-}$ erfolgen.

So rechnet z. B. der Schulrechner SR 1 mit der Tastenfolge

$$15\ \boxed{\times}\ \boxed{-}\ 3\ \boxed{=}$$

nicht $15 \cdot (-3)$, sondern $15 - 3$. Bei der Tastenfolge

$$15\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ 3\ \boxed{=}$$

rechnet der Taschenrechner nicht $15 - (-3)$, sondern $15 - 3$.

Übungen im Addieren, Multiplizieren und Dividieren rationaler Zahlen In der zweiten Hälfte der 1. Stunde dieser Lerneinheit sind die Schüler zu befähigen, Aufgaben wie

$-329 + 192{,}7;\ 79{,}2 - 937{,}2;\ -9{,}32 \cdot 27{,}1;\ -79{,}7 : (-2{,}91)$
mit einem Taschenrechner sicher zu lösen und einen entsprechenden Ablaufplan für die Tastenfolge des Rechners aufzustellen.
Bei Multiplikations- bzw. Divisionsaufgaben ist es im allgemeinen sinnvoll, das **Vorzeichen im Kopf** und nur den Betrag des Resultats mit einem Taschenrechner zu ermitteln. Dann kann auf die Nutzung der Vorzeichenwechseltaste verzichtet werden, und der Rechenablaufplan wird kürzer.
Bei allen Berechnungen mit einem Taschenrechner ist von den Schülern eine Kontrollrechnung (z. B. Überschlag, zweimaliges Rechnen mit dem Taschenrechner, Ermitteln eines Intervalls, in dem das Ergebnis liegen muß u. ä.) zu fordern.
Der Hauptteil der 2. Stunde dieser Lerneinheit besteht im Lösen von Aufgaben (z. B. Aufg. 3, 4) mit einem Taschenrechner.

Lösen von Aufgaben, die das Ausführen von zwei Rechenoperationen verschiedener Stufe mit rationalen Zahlen erfordern Werden Aufgaben, des Typs $4{,}72 + 3{,}7 \cdot (-2{,}9)$ mit einem Taschenrechner gelöst, der wie der Schulrechner SR 1 über eine Vorrangautomatik verfügt, so kann der Term von links nach rechts (ohne Beachtung der Vorrangregeln) in den Rechner eingegeben werden.

Ablaufplan: $4{,}72\ \boxed{+}\ 3{,}7\ \boxed{\times}\ 2{,}9\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$

oder kürzer: $4{,}72\ \boxed{-}\ 3{,}7\ \boxed{\times}\ 2{,}9\ \boxed{=}$

Die Leistungsfähigkeit des Schulrechners darf allerdings nicht dazu führen, daß man auf Strukturbetrachtungen von Termen gänzlich verzichtet. Im Gegenteil, um z. B. Überschläge durchzuführen, ist das Beachten der Vorrangregeln erforderlich. Es ist deshalb zu empfehlen, von den Schülern Strukturbetrachtungen zu fordern, z. B. durch das Stellen folgender Aufgabe:
– Ermittle ohne Rechenhilfsmittel den Wert des jeweiligen Terms! Entwirf zunächst einen Rechenbaum (Bild 2.4)!

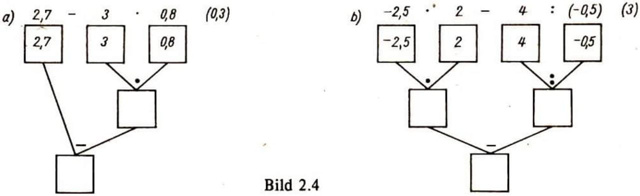


Bild 2.4

Kontrollaufgaben

Berechne mit Hilfe eines Taschenrechners!

1. a) $372{,}7 - 982 + 13{,}9$ −595,4 b) $-29{,}74 + 97{,}21 - 98{,}07$ −30,6
   c) $-29{,}7 \cdot (-37{,}2) \cdot (-7{,}5)$ −8286 d) $0{,}7 \cdot (-3{,}72) \cdot (-7{,}9)$ 20,5716
2. a) $27{,}9 : (-3{,}3)$ −8,45 ≈ −8,5 b) $-8{,}154 : (-2{,}7)$ 3,02
   c) $-7{,}8 + 2{,}9 \cdot 0{,}7$ −5,77 d) $-23{,}04 : 7{,}2 - 7{,}2$ −10,4

Stoffabschnitt 2.6.

Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung (3 Std.)

Fehler und Schranken für Fehler (3 Std.)

LE 15 (LB 70 bis 74)

Die Lerneinheit 15 wurde so angelegt, daß in ihr eine Weiterführung der Arbeit mit Näherungswerten, die vor allem im Unterricht der Klassen 4 bis 6 vorbereitet wurde, erfolgen kann. Zum anderen dient der Stoffabschnitt 2.6. der unmittelbaren Anwendung des Rechnens mit rationalen Zahlen. Gleichzeitig bietet sich hier die Möglichkeit, mathematisches Wissen und Können beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben aus der Praxis anzuwenden.
Im Mittelpunkt des Stoffabschnitts steht das Kennenlernen der Begriffe „absoluter Fehler", „relativer Fehler" und „prozentualer Fehler" sowie „Schranke für den absoluten Fehler". In Vorbereitung dazu ist der Begriff des Näherungswertes (Schätzwerte; Zahlen, die beim Runden entstehen; Meßwerte; Ergebnisse von Rechnungen, in die mindestens ein Näherungswert eingeht) anhand von vielfältigen Beispielen zu wiederholen. Zum anderen kann mit Hilfe der Grundbegriffe der Fehlerrechnung das Verständnis für die Begriffe „Näherungswert" und „zuverlässige Ziffer" erhöht werden.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß Näherungswerte mit Ungenauigkeiten (Fehlern) in bezug auf den genauen Wert einer Größe oder Zahl behaftet sind,
- wissen, daß sich, wenn der genaue Wert einer Größe oder Zahl bekannt ist, der Fehler des Näherungswertes als absoluter, relativer oder prozentualer Fehler bestimmen läßt, und können diese Fehlerarten berechnen,
- wissen, daß dann, wenn der genaue Wert einer Größe oder Zahl nicht bekannt ist, eine Schranke für den absoluten Fehler angegeben werden kann.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Reaktivierung des Begriffs „Näherungswert"
- Wiederholung der Rundungsregeln und der Regeln für die Anzahl der zuverlässigen Ziffern beim Rechnen mit Dezimalbrüchen
- Erarbeitung der Begriffe „absoluter Fehler" und „Schranke für den absoluten Fehler"

2. Stunde
- Erarbeitung der Begriffe „relativer Fehler" und „prozentualer Fehler"
- Übungen im Berechnen von absoluten, relativen und prozentualen Fehlern

3. Stunde
- Systematisierung von Begriffen aus der Fehlerrechnung

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Hierzu können die Schüler zunächst aufgefordert werden, selbst eine Reihe von Schätzungen solcher Größen vorzunehmen, deren genaue Werte bekannt sind (z. B. Anzahl von Buchseiten, Preise von Gegenständen, Altersangaben, ...). Der Vergleich der Schätzwerte mit den genauen Werten zeigt, daß häufig Abweichungen bestehen. Nachdem die Schüler nach weiteren Entstehungsmöglichkeiten von Näherungswerten befragt wurden, könnte die folgende Übersicht (Tafelbild oder Folie) als *Zusammenfassung* gegeben werden.

Näherungswerte

entstehen durch

Schätzen oder Messen von Zahlen und Größen	Runden	Überschlagen

In die Übersicht könnte auch einbezogen werden, daß Ergebnisse von Rechnungen, in die mindestens ein Näherungswert eingeht, ebenfalls Näherungswerte darstellen. Der Lehrer könnte – ohne dies in jedem Falle näher zu erörtern – darauf hinweisen, daß es noch andere Entstehungsmöglichkeiten für Näherungswerte gibt (gedacht werden könnte zum Beispiel an endliche Dezimalbrüche, die beim Rechnen z. B. mit dem Taschenrechner anstelle von periodischen Dezimalbrüchen verwendet werden, oder an die Angabe irrationaler Zahlen durch endliche Dezimalbrüche (vgl. Stoffgebiet 4 „Quadratzahl und Quadratwurzel“)).

Erarbeitung der Begriffe „absoluter Fehler“ und „Schranke für den absoluten Fehler“ Um den Begriff „absoluter Fehler“ zu erarbeiten, können verschiedene Schüler aufgefordert werden, ein und dieselbe Größe zu schätzen. Durch das Hervorrufen einer Wettbewerbssituation kann die Mitarbeit stimuliert werden. Um das jeweils beste Schätzungsergebnis ermitteln zu können, werden die Schüler in der Regel von sich aus die Differenzen der einzelnen Schätzwerte vom mitgeteilten genauen Wert bestimmen. Der Lehrer teilt mit, daß diese Differenzen in der Mathematik **Fehler** genannt werden. Im Prinzip wäre es an dieser Stelle nicht notwendig, von *absoluten Fehlern* zu sprechen. Um die später notwendige Differenzierung zu ermöglichen, empfiehlt sich jedoch, von Beginn an von **absoluten Fehlern** zu sprechen und dies den Schülern auch so zu erklären. Nach der Begriffsbestimmung sind die Schüler auf folgendes hinzuweisen:
- Der absolute Fehler eines Näherungswertes in bezug auf den genauen Wert einer Größe oder Zahl kann nur bestimmt werden, wenn der genaue Wert bekannt ist.
- Der absolute Fehler kann positiv oder negativ sein und hat dieselbe Einheit wie die betrachtete Größe (nach Erfüllen des Auftrages 34).
- Der absolute Fehler darf nicht mit dem absoluten Betrag verwechselt werden.

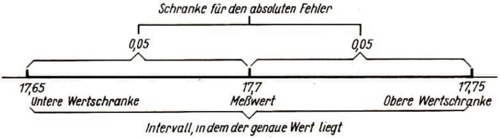
Mit Hilfe des Auftrages 35 können Aussagen über die Güte von Näherungswerten getroffen werden.
Nun müßte noch erklärt werden, wie zu verfahren ist, wenn der genaue Wert nicht bekannt ist. Hier kann an die Kenntnisse über die Genauigkeit von Näherungswerten aus Klasse 6 angeknüpft werden. So wissen die Schüler, daß mit einem Näherungswert stets ein ganzes Intervall gegeben ist, in dem der genaue Wert liegt. Bei der Bestimmung der Grenzen dieses Intervalls gibt man eine Schranke für den absoluten Fehler an (vgl. Bei-

spiele 22, 23). Die Schranke ergibt sich bei den Meßwerten aus der Genauigkeit der Meßinstrumente und wird häufig mitgeteilt.
So findet man solche Angaben auf den Meßinstrumenten, aber auch auf den Verpackungen von Waren des täglichen Bedarfs sowie auf den verschiedensten Maschinen und Bauelementen. Beispielsweise steht auf einer Haushaltswaage:

Bei 0 g bis 500 g: ±10 g;
über 500 g bis 2 000 g: ±20 g;
über 2 000 g bis 10 000 g: ±30 g.

Das Erarbeiten des Begriffs könnte durch ein *Tafelbild* (Bild 2.5) unterstützt werden.

Bild 2.5



Die Schüler werden daran erinnert, daß dann, wenn keine Angaben über die Genauigkeit des Näherungswertes (keine Schranke für den absoluten Fehler) mitgeteilt werden, die Vereinbarung gilt, daß der Näherungswert durch richtiges Runden entstanden ist. Die Schranke für den absoluten Fehler ist dann also nicht größer als 0,5 Einheiten des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer. Das bedeutet zugleich – und das sollte den Schülern verdeutlicht werden –, daß Näherungswerte Werte sind, deren Schranke für den absoluten Fehler 0,5 Einheiten der letzten gegebenen Stelle beträgt.
Als **Hausaufgabe** eignen sich die Aufgaben 1 bis 4.

Beispiel für einen möglichen Verlauf der 2. Stunde

Ziele: Die Schüler kennen die Begriffe „relativer" und „prozentualer Fehler" und können sie anwenden.

Gliederung:

(1) 5 min Kontrolle der Hausaufgabe: Berechnen des absoluten Fehlers; Angeben von Intervallen, in denen der genaue Wert liegt
(2) 12 min Erarbeiten des Begriffs „relativer Fehler"
(3) 6 min Herausarbeiten der Einsicht, daß diejenige Schätzung am besten ist, bei der der relative Fehler am kleinsten ist
(4) 8 min Ermitteln von relativen Fehlern (einfache Zahlenbeispiele)
(5) 8 min Einführen des Begriffs „prozentualer Fehler"
(6) 6 min Zusammenfassung – Fehlerarten

Variante zu (4) bis (6):

(4′) 13 min Ermitteln von relativen Fehlern (einfache Zahlenbeispiele und solche, die mit dem Taschenrechner zu lösen sind)
(5′) 9 min Zusammenfassung – Erarbeiten eines Tafelbildes zu den Fehlerarten

Methodische Hinweise zu

(1) Vergleich der Ergebnisse der Hausaufgaben im Unterrichtsgespräch. Ein Beispiel für das Berechnen des absoluten Fehlers beim Runden kann an die Tafel geschrieben werden.
(2) Zur Motivierung der Einführung des Begriffs „relativer Fehler" eignet sich der Auftrag

37 oder eine ähnliche Problemstellung. Zwei Schüler können aufgefordert werden, *verschiedene* Größen (allerdings Größen derselben Art) zu schätzen. Die Schüler sollen bestimmen, wer besser geschätzt hat. Werden stark voneinander abweichende Größen zum Schätzen vorgegeben, ist es für die Schüler ziemlich offensichtlich, daß der Betrag des absoluten Fehlers kein Maßstab für die Güte der Schätzungen sein kann. In der Regel schlagen sie selbst vor, daß die zu schätzenden Größen berücksichtigt werden müssen. Dies führt auf die Bildung des Quotienten aus absolutem Fehler und genauem Wert. Dieser Quotient kann positiv oder negativ sein. Als Maß für die „Güte" eines Näherungswertes interessiert jedoch nur sein absoluter Betrag. Deshalb bestimmen wir den relativen Fehler von vornherein als Betrag des Quotienten aus dem absoluten Fehler und dem genauen Wert.

(3) Am Auftrag 37 wird gezeigt, daß diejenige Schätzung am besten ist, bei der der relative Fehler am kleinsten ist.

(4) Das Ermitteln des relativen Fehlers kann an Aufgaben mit dem Taschenrechner (z. B. Aufg. 6, 7) oder auch an noch einfacherem Zahlenmaterial ohne Rechner geübt werden. Es empfiehlt sich, auch hier eine Tabelle folgender Form zu verwenden:

Genauer Wert	Absoluter Fehler	Relativer Fehler

(5) Da der Begriff „prozentualer Fehler" keine neue Problemstellung erfordert, kann der Lehrer den Schülern mitteilen, daß der relative Fehler gewöhnlich in Prozenten ausgedrückt wird. Zur weiteren Erläuterung können die Ausführungen im Lehrbuch (LB 72) sowie die Beispiele 24 und 25 genutzt werden. Verwendet man zum Berechnen des prozentualen Fehlers den Taschenrechner, so sollte die Nutzung der Prozenttaste wiederholt werden.

(6) Als Zusammenfassung wiederholen die Schüler die Begriffsbestimmungen des absoluten, relativen und prozentualen Fehlers.

Wenn der genaue Wert einer Größe nicht bekannt ist, kann der relative Fehler natürlich auch nicht berechnet werden. Die Bestimmung der dann notwendigen Schranke für den relativen Fehler wird zwar im Unterricht nicht behandelt, dennoch könnte der Schüler über die Interpretation von Angaben, wie sie z. B. auf technischen Produkten zu finden sind, informiert werden.

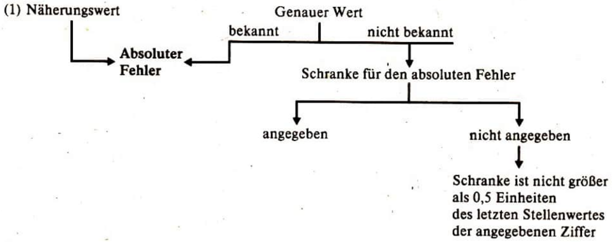
$$m = 70\text{ g} \pm 10\,\% \text{ bedeutet: } \left(70 - \frac{70{,}10}{100}\right)\text{g} \leqq m \leqq \left(70 + \frac{70{,}10}{100}\right)\text{g}; \quad 63\text{ g} \leqq m \leqq 77\text{ g}$$

Vorschlag für **Hausaufgaben**: Aufg. 13, 15

Variante zu (4) bis (6):
Nach dem Lösen einfacher Übungsaufgaben zum relativen Fehler wird nur mitgeteilt, daß der relative Fehler gewöhnlich in Prozenten angegeben wird. Nähere Betrachtungen erfolgen erst in der folgenden Stunde. Dafür wird die Zusammenfassung ausgedehnt und mit folgendem Tafelbild abgeschlossen:

Fehlerart	Kurzfassung
Absoluter Fehler	Näherungswert – Genauer Wert
Relativer Fehler	$\left\lvert \frac{\text{Absoluter Fehler}}{\text{Genauer Wert}} \right\rvert$
Prozentualer Fehler	Relativer Fehler in Prozent

Systematisierung von Begriffen aus der Fehlerrechnung Hier sollte versucht werden, einen Überblick über die behandelten Begriffe zu geben. Die folgenden Darstellungen (1) bis (3) könnten genutzt werden. Es ist auch möglich, diese Darstellungen zu koppeln.



(2) **Fehlerarten**

Näherungswert a — **Genauer Wert x**

Beispiel: $a = 3$ — $x = 2{,}5$

Absoluter Fehler: $a - x$

$3 - 2{,}5 = \underline{\underline{0{,}5}}$

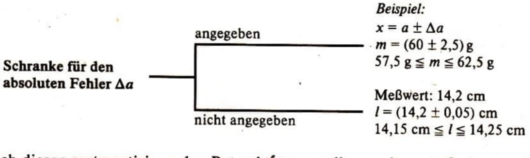
Relativer Fehler: $\left|\dfrac{a-x}{x}\right|$

$\left|\dfrac{0{,}5}{2{,}5}\right| = \underline{\underline{0{,}2}}$

Prozentualer Fehler: $\left|\dfrac{a-x}{x}\right| \cdot 100\,\%$

$0{,}2 \cdot 100\,\% = \underline{\underline{20\,\%}}$

(3)



Nach diesen systematisierenden Betrachtungen sollten weitere Aufgaben zur Berechnung von Fehlern und zur Angabe von Schranken für den absoluten Fehler bzw. von Intervallen, in denen der genaue Wert liegt, gelöst werden.
Anhand der Aufgabe 8 könnte diskutiert werden, ob hier die Güte der Arbeit mit dem relativen Fehler bestimmt werden kann. Dieser Aufgabentyp ist gleichzeitig für die Erziehung zur Genauigkeit bei der praktischen Arbeit zu nutzen. Ein Werkstück, das 2 mm zu lang ist (Aufg. 8), ist gewiß ungenauer hergestellt worden als eines, das nur 1 mm zu lang ist. Zum anderen können beide Werkstücke noch auf die richtige Länge gebracht werden. Hier bietet sich noch eine Aufgabe an, bei der ein Werkstück zu lang und ein Werkstück zu kurz ist (letzteres ist dann als Ausschuß zu betrachten).

Weitere Aufgaben sind vor allem aus dem polytechnischen Unterricht sowie aus dem Physikunterricht heranzuziehen.
Mit der Aufgabe 5 können die Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten reaktiviert werden. Aufgabe 14 ist geeignet, den Schülern zu zeigen, daß auch beim Taschenrechner Näherungswerte entstehen. Werden die beiden Faktoren eingegeben, so ergibt sich als Produkt 2.2014 09, d. h. 2201400000. Der genaue Wert 2201410942 könnte durch schriftliche Multiplikation ermittelt werden. Der absolute Fehler (−10942) ist zahlenmäßig relativ groß. Mit Hilfe des relativen Fehlers (0,00000497) bzw. des prozentualen Fehlers (0,000497 %) kann den Schülern die Leistungsfähigkeit des SR 1 verdeutlicht werden.

Kontrollaufgaben

Aufg. 2, 3, 6, 10, 11, 13

Stoffabschnitt 2.7.

Komplexe Übungen (6 Std.)

(LB 74 bis 75)

4 Stunden sind als **zusammenfassende und abwechslungsreiche Übungen zum Rechnen mit rationalen Zahlen** mit, aber auch ohne Taschenrechner zu gestalten.
Dabei kommt es darauf an, daß einerseits die wesentlichen Begriffe wiederholt sowie die Grundrechenoperationen gefestigt werden und daß andererseits solche Aufgaben gerechnet werden, zu deren Lösung erforderlich sind:
- das Ordnen rationaler Zahlen und ihre Darstellung auf der Zahlengeraden,
- die Kombination der verschiedenen Grundrechenoperationen mit rationalen Zahlen in verschiedener Darstellung (Dezimalbrüche, gemeine Brüche),
- das Anwenden der Kommutativ- und Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation sowie des Distributivgesetzes,
- das Bilden des absoluten Betrages.

Gleichzeitig sind das Runden und Überschlagen sowie das Angeben einer sinnvollen Genauigkeit und das Errechnen des absoluten, relativen und prozentualen Fehlers sowie das Angeben von Schranken für den absoluten Fehler bzw. von Intervallen, in denen der genaue Wert liegt, zu üben.
Darüber hinaus können die Schüler im Zusammenhang mit dem Koordinatensystem (4 Quadranten) ihre Kenntnisse über geometrische Bewegungen reaktivieren und festigen. Eigenschaften der Bewegungen sowie der Begriff „Kongruenz“ können wiederholt werden.

Für eine **Leistungskontrolle mit Auswertung** (2 Stunden) wird empfohlen, solche Aufgaben zu wählen, die ohne Taschenrechner gelöst werden können. Inhaltlich können die in den Kontrollaufgaben ausgewiesenen Aufgabentypen herangezogen werden.
Fertigkeiten im Umgang mit dem Taschenrechner könnten in einer Kurzkontrolle überprüft werden.

Stoffgebiet 3

Gleichungen

Vorbemerkungen

Hauptanliegen dieses Stoffgebiets ist die Entwicklung sicherer Fertigkeiten der Schüler im Lösen linearer Gleichungen.
Anknüpfend an das bisher erworbene Wissen und Können im Aufstellen und Lösen von Gleichungen lernen die Schüler *Sätze* kennen, deren Anwendung es ermöglicht, gegebene lineare Gleichungen schrittweise so weit zu vereinfachen, daß ihre Lösungsmenge im jeweiligen Grundbereich unmittelbar abgelesen werden kann. Diese Sätze besagen etwas über die *Äquivalenz von Gleichungen* (bezüglich eines bestimmten Grundbereiches) in Abhängigkeit von der *Ausführung bestimmter Operationen* (z. B. Addition derselben Zahl auf beiden Seiten der Gleichung). Man spricht in diesem Zusammenhang gewöhnlich auch vom *Umformen* der jeweiligen Gleichung und von *Umformungsregeln,* um den in den genannten Sätzen enthaltenen *Handlungsaspekt* hervorzuheben.
Die Kenntnis des Begriffs „Äquivalenz von Gleichungen" und der zugehörigen Sätze reicht aber noch nicht aus, um die angestrebten Fertigkeiten im Lösen linearer Gleichungen bei den Schülern zu erzielen. Sie müssen darüber hinaus lernen, in Abhängigkeit von der Struktur der jeweils vorliegenden Gleichung *solche* Umformungsschritte auszuwählen und anzuwenden, die tatsächlich zu einer *Vereinfachung* der Gleichung führen.
Die Beherrschung des Umformens von Gleichungen und ihres „Auflösens" nach einer bestimmten Variablen ist nicht nur für das Fach Mathematik von großer Bedeutung, sondern vor allem auch für solche Fächer wie Physik, ESP und Chemie, in denen ebenfalls Gleichungen auftreten.
Zur Erweiterung und Vertiefung des Wissens über Gleichungen gehört, den Schülern den Einfluß des Grundbereichs der Variablen auf die jeweilige Lösungsmenge bewußtzumachen und sie auch mit Gleichungen zu konfrontieren, die keine oder mehrere Lösungen haben bzw. für die jede Zahl des Grundbereichs Lösung ist. In diesen Rahmen gehört auch das Lösen von Ungleichungen, das zu Vergleichen und Gegenüberstellungen zum Lösen von Gleichungen Anlaß geben soll.
Die Schüler sollen ihre Fertigkeiten im Lösen linearer Gleichungen auch beim Lösen von *Sachaufgaben anwenden* können. Dabei geht es u. a. auch darum, das *Sprachverständnis* und die *Sprachbeherrschung* der Schüler weiterzuentwickeln, insbesondere ihre Fähigkeit, die in einem Text enthaltenen Bedingungen und Beziehungen mit Hilfe von Termen bzw. Gleichungen auszudrücken und dann die mathematische Lösung in eine der Aufgabenstellung adäquate Antwortformulierung zu „übersetzen". Dies ist einzuordnen in allgemeinere heuristische Orientierungen (z. B. in das Nutzen von Skizzen, Tabellen, Formeln), in die weitere Befähigung, problemhafte Aufgaben zu lösen.

Kontrollaufgaben

1. Welche der folgenden Terme sind Summen, welche sind Produkte?

a) $7x$ **b)** $8 - 5m$ **c)** $ab + cd$

d) $3 + 4y \cdot 5$ **e)** $(3 + 4y) \cdot 5$ **f)** $\frac{3 + x}{4}$

2. Bilde aus den folgenden Termen sowohl ein Produkt als auch eine Summe!

a) x und -3 **b)** $-3y$ und $-2z$ **c)** $(2 + 3a)$ und $4a$

3. Welche der folgenden Beispiele sind Gleichungen, welche sind Ungleichungen?

a) $5x + 0{,}7 = 1{,}2$ **b)** $4z + 3 > 19$ **c)** $A = a \cdot b$

d) $-3 > -5$ **e)** $3x + x = 2x + 2x$ **f)** $2a + 5$

4. Welche der vorgegebenen Gleichungspaare sind bezüglich N jeweils zueinander äquivalent, welche sind es bezüglich Q?

a) $0{,}25x = 2$; $10 = x + 2$ **b)** $x + 4 = 5$; $|x| + 4 = 5$ **c)** $3 - 3x = 1$; $3x = 2$

d) $x - 7 = 5$; $x - 3 = -8$ **e)** $x^2 + 1 = 26$; $x = 5$ **f)** $\frac{x}{3} = 2$; $14 = 2x + 2$

5. Gib zu folgenden Gleichungen eine dazu in Q äquivalente Gleichung an!

a) $2x - 6 = 5$ **b)** $7x = \frac{x}{3} - 7$ **c)** $\frac{12}{x} = 4$; $(x \neq 0)$

d) $5x^2 = 15x$ **e)** $x + 2x = 3x$ **f)** $2x + 3 = 3x - x$

6. Löse die folgenden Gleichungen durch Anwendung von Umformungsregeln!

a) $\frac{3}{4}a = \frac{1}{2}$; $a \in Q$ **b)** $\frac{16}{x} = 8$; $x \in N$ **c)** $1{,}2 = 2b - 0{,}6$; $b \in Q$

d) $11 - 3m = -5m - 13$; $m \in N$ **e)** $\frac{2}{3}x + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} + \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}$; $x \in Q$

f) $2{,}5y + 1{,}6 - 0{,}9y = 1{,}8 - 1{,}6y + 1{,}4$; $y \in Q$

7. Löse folgende Gleichungen in Q!

a) $|x| - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ **b)** $|x + 3| = 5$ **c)** $|x - 1{,}2| = -1{,}7$ **d)** $|3x| + 4 = 4$

8. Löse folgende Ungleichungen!

a) $x + 4 > 9$; $x \in Q$ **b)** $\frac{1}{2}x > 3$; $x \in N$

c) $10 - x > 6$; $x \in Q$ **d)** $3 < x + 5$; $x \in N$

e) $4x - 5 < 20$; $x \in N$ **f)** $7 > 2x - 3$; $x \in Q_+$

9. Was könnten die folgenden Gleichungen bedeuten, wenn x den Zahlenwert
- der Länge einer Rechteckseite bedeutet,
- der Zeit bedeutet, die jemand mit dem Fahrrad unterwegs ist,
- des Preises eines bestimmten Kleidungsstücks bedeutet?

Suche weitere Bedeutungen für die Gleichungen!

a) $12x = 1000$ **b)** $x + 880 = 900$

10. Die Summe dreier Zahlen ist 40. Die erste ist doppelt so groß wie die zweite, und die dritte ist um 8 kleiner als die zweite. Wie heißen diese drei Zahlen?

11. Wie groß sind die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze um 20° größer als ein Basiswinkel ist?

12. Ein LKW fährt auf der Autobahn mit einer Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h nach einem 150 km entfernten Ort. Wann holt ihn ein PKW frühestens ein, der eine Viertelstunde später abfährt, aber höchstens 100 km/h zurücklegt? Könnte er den LKW vor dem Ziel noch einholen, wenn dieser eine halbe Stunde Vorsprung hätte?

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 3.1.: Äquivalente Gleichungen (6 Std.)			
Wiederholung (LE 1)	2	– Begriffe „Term“, „Gleichung“, „Ungleichung“, „Lösung“, „Aussage“, „erfüllen“, „Lösungsmenge“, „Variablengrundbereich“ – Umformen von Termen – Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen	– Einführung des Begriffs „Koeffizient einer Variablen“
Umformungsregeln für Gleichungen (LE 2)	4	– Lösen einfacher Gleichungen und Ungleichungen in verschiedenen Grundbereichen – Rechenoperationen in Q	– Definition des Begriffs „zueinander äquivalente Gleichungen“ – Sätze über Äquivalenz von Gleichungen – Regeln zum Umformen einer Gleichung in zu ihr äquivalente
Stoffabschnitt 3.2.: Übungen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (15 Std.)			
Lösen von Gleichungen durch Umformen (LE 3)	5	– Struktur von Termen – Umformen von Termen – Lösen von Gleichungen durch Umformen (Typ $ax = b$ und $a : x = b$) in Q_+ – Probe – Rechnen in Q – Begriff „Koeffizient von ...“	– Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungen in Q mit Hilfe von Umformungsregeln
Lösungsmengen bei Gleichungen und Ungleichungen (LE 4)	3	– Einfluß des Grundbereichs auf die Lösungsmenge einer Gleichung – Lösen einfacher Ungleichungen – Betrag einer rationalen Zahl	– Nutzung des Verfahrens zum Lösen von Gleichungen in N bzw. Q_+ – Anwendung des Verfahrens auf Gleichungen mit der Lösungsmenge $\emptyset$ oder Q – Anwendung des Verfahrens auf Gleichungen mit Beträgen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Lösen von Anwendungsaufgaben (LE 5)	5	– Vorgehen beim Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungen – Aufstellen von Gleichungen zu Aufgabentexten (dabei Verwendung von Skizzen, Tabellen und Formeln), Deuten der Lösung, Probe am Text, Antwortsatz (sinnvolle Genauigkeit) – Rechnen mit Größen	
Kontrollarbeit und Auswertung	2		

Stoffabschnitt 3.1.

Äquivalente Gleichungen (6 Std.)

In diesem Stoffabschnitt geht es um die *Erarbeitung* eines vollständigen *Systems von Umformungsregeln* für lineare Gleichungen auf der Grundlage der Definition des Begriffs „zueinander *äquivalente Gleichungen*".
Das geschieht mit der Zielstellung, ein *allgemeines Lösungsverfahren* für lineare Gleichungen kennenzulernen.
Die Reaktivierung bereits vorhandenen Wissens und Könnens bezüglich des Arbeitens mit Gleichungen soll durch entsprechende Stoffauswahl und Schwerpunktsetzung das inhaltliche Verständnis für diese Umformungsregeln bei den Schülern vorbereiten helfen.

Wiederholung (2 Std.)

LE 1 (LB 76 bis 79)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Gleichung", „Ungleichung" und „Lösung einer Gleichung (bzw. Ungleichung)",
- können einfache, verbal gegebene Sachverhalte mit Hilfe von Gleichungen beschreiben,
- können einfache Gleichungen und Ungleichungen lösen,
- wissen, daß Terme sowohl Zahlen als auch Größen bedeuten können,
- kennen den Begriff „Koeffizient einer Variablen".

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung des Stoffgebiets
- Wiederholung der Begriffe „Gleichung", „Ungleichung" und „Term" (in Identifizierungs- und Realisierungsübungen)

2. Stunde
- Wiederholung des Umformens von Termen; Einführung des Begriffs „Koeffizient"
- Wiederholung des Lösens von Gleichungen
- Wiederholung der Begriffe „Aussage", „Lösung", „Lösungsmenge", „erfüllen", „Variablengrundbereich"

Methodische Hinweise

Motivierung des Stoffgebietes Anknüpfend an eine Sachaufgabe (etwa an Auftrag 1a)) kann herausgestellt werden, daß das Aufstellen und Lösen von Gleichungen oft eine geeignete Methode ist, um die in der Aufgabe enthaltenen Fragen beantworten zu können. Die Schüler kennen diese Methode bereits, vor allem im Zusammenhang mit solchen Sachaufgaben, die auf Verhältnisgleichungen führen. Um auch andere Aufgaben mit Hilfe von Gleichungen lösen zu können (z. B. Auftrag 1b) und 1c)), ist es notwendig, das Wissen über Gleichungen zu erweitern und auch neue Lösungsverfahren kennenzulernen.
Dieser Gedankengang könnte sich auch aus einem kurzen Vortrag über die geschichtliche Entwicklung des Arbeitens mit Gleichungen ergeben (siehe Lehrbuch, 2. Umschlagseite).
Es ist zu empfehlen, an der Tafel Beispiele für Gleichungen mit bereits bekannten Lösungsverfahren solchen gegenüberzustellen, für die Lösungsverfahren erst erarbeitet werden sollen.

Wiederholung der Begriffe „Gleichung", „Ungleichung" und „Term" Die Begriffe „Gleichung" und „Ungleichung" sollten an Beispielen wiederholt werden, die erkennen lassen, daß sowohl Gleichungen als auch Ungleichungen aus zwei Termen bestehen, zwischen denen das Zeichen „=" (bei Gleichungen) bzw. „<", „>" oder „≠" (bei Ungleichungen) steht. Als Gegenbeispiele können erstens Ausdrücke wie „$7 \mid 35$", „$n + 1$ ist der Nachfolger von n" herangezogen werden, in denen zwar auch zwei Terme auftreten, die aber trotzdem keine Gleichungen oder Ungleichungen sind, und zweitens Zeichenreihen wie „$5 + 2 = 7 \mid 35$" oder „$4 = 3 + 1$ ist Nachfolger von 3", bei denen nicht auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Terme stehen. Damit könnte auch die Wiederholung des Begriffs „Term" motiviert werden, nach der die Schüler wissen sollen:

Terme können Zeichen für *Zahlen* sein, z. B. $5; \frac{x}{3}; 7 - y$;

Terme können auch Zeichen für *Größen*[1] sein, z. B.: 2,5 km; $v \cdot t$.
Terme können aus anderen Termen zusammengesetzt sein, z. B. zu „Summen" wie $a + b; 3 + n$; aber auch $7 - y; 4a - 1{,}7a - \frac{a}{2} + a$ oder zu „Produkten" wie $v \cdot t; 6y$; aber auch $\frac{x}{3}; 5(a + 2)$.

1) Der Gleichungsbegriff umfaßt somit auch *Größengleichungen*, die beim Lösen von Anwendungsaufgaben eine Rolle spielen. Bei der späteren Behandlung der Umformungsregeln werden allerdings nur Zahlenwertgleichungen betrachtet, um die Darstellung nicht zu kompliziert werden zu lassen.

Als Identifizierungsübungen könnte sich Auftrag 2 anschließen, der auch als schriftliche Kurzkontrolle eingesetzt werden kann. Anschließende Realisierungsübungen sollten auch das Wiedergeben einfacher verbal gegebener Sachverhalte durch Gleichungen (bzw. Terme) reaktivieren. Geeignet wären die Beispiele 2 und 3. Es empfiehlt sich dabei, die Texte auf *P-Folie* zu notieren, damit farbiges Unterstreichen oder Unterlegen bestimmter Textteile im Unterricht möglich wird und gleichzeitig die zugehörigen Gleichungen (bzw. Terme) von den Schülern genannt bzw. notiert werden können. Im Zusammenhang mit der Behandlung des Beispiels 3b) und c) könnte auch folgendes *Tafelbild* entstehen:

Sportwettkampf		
Insgesamt 80 Jungen und Mädchen	10 Mädchen weniger als Jungen	
Jungen: j	j	$m + 10$
Mädchen: m	$j - 10$	m
Gleichung: $j + m = 80$	$j + j - 10 = 80$	$m + 10 + m = 80$

Bei der Bearbeitung der Beispiele und Aufträge ist stets darauf zu achten, daß *vor* dem Aufstellen der Gleichung *die Bedeutung der Variablen* festgelegt wird.
Als **Hausaufgabe** hierzu wird der Auftrag 4b) empfohlen.

Das Aufstellen von Gleichungen aus Texten bedarf wiederholter Übungen, die aber nicht in wenigen Stunden konzentriert, sondern in „kleinen Portionen" über einen längeren Zeitraum verteilt werden sollten. Denkbar wären sie als *tägliche Übungen* im Rahmen der Lerneinheiten 3 und 4. Mögliche Schwerpunkte könnten dabei sein:
1. Terme sind gesucht (Auftrag 3, evtl. mit Beispiel 2);
2. „Wörtliches Übersetzen" (Auftrag 4a), Aufg. 3a));
3. „Zusammen" – Summe oder Produkt? (Aufg. 2b) bis d));
4. Zwei Texte, dieselbe Gleichung (Aufg. 2a) und b) oder Varianten);
5. Eine Gleichung – verschiedene Texte (Aufträge 4c) und 5);
6. Zwei Unbekannte – nur eine Variable (Aufg. 3b) bis d));
7. Zahlen gesucht (LE 5; Aufg. 1 bis 3).

Hierdurch werden Fähigkeiten der Schüler weiterentwickelt, die für das Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungen (z. B. in LE 5) bedeutsam sind.

Wiederholung des Umformens von Termen; Einführung von „Koeffizient" Es sollten zunächst nur solche Terme betrachtet werden, die rationale *Zahlen* bedeuten. Mit ihnen kann deshalb auch nach den in diesem Zahlbereich erklärten Rechengesetzen gerechnet werden. Im Vordergrund steht dabei die Anwendung des Distributivgesetzes zum „Auflösen" einfacher Klammern, vor allem aber zum „Zusammenfassen", z. B.:
(1) $5(a + 2) = 5a + 10$
(2) $4a - 1{,}7a - \frac{a}{2} + a = (4 - 1{,}7 - \frac{1}{2} + 1) \cdot a = 2{,}8a$

An Beispielen wie (2) kann der Begriff „Koeffizient einer Variablen" erklärt werden. Beim Kommentieren ist er dann als Vereinfachung der Redeweisen zu nutzen, z. B.: Gib den Koeffizienten von ... an! Addiere die Koeffizienten ...!

Übungsbeispiele liefert Aufgabe 1, die sich auch als **Hausaufgabe** eignet.
Ohne auf theoretische Begründungen zum Rechnen in Größenbereichen einzugehen, werden die gewonnenen Erkenntnisse später auch auf Terme angewandt, die *Größen* bezeichnen.

Wiederholung des Lösens von Gleichungen Das Lösen von Gleichungen sollte ge-

meinsam mit dem Lösen von Ungleichungen an Beispielen wiederholt werden. Es könnte z. B. an der Tafel $x + 3 = 2$ (mit $x \in Q$) gemeinsam gelöst und dabei die Definition von „Lösung einer Gleichung“ (bzw. „... Ungleichung“), die Probe und die Darstellung der Lösungsmenge wiederholt werden. Anschließend könnten die Schüler selbständig die Ungleichung $2x < 5$; $x \in N$ (und eventuell auch die Gleichungen $x + 3 = 2$; $x \in N$ und $x + x = 2x$; $x \in Q$) lösen. Die Lösungsmengen zu jedem Beispiel sollten verglichen und das Vorgehen begründet werden. (Werden alle vier Aufgaben bearbeitet, sollten sie nebeneinander an der Tafel notiert werden, damit sie bezüglich der Anzahl der Lösungen und des Einflusses des Grundbereichs der Variablen auf die Lösungsmenge miteinander verglichen werden können.)
Anschließend sollte das Lösen von Gleichungen (Typ $ax = b$ und $a : x = b$) durch Umformen wiederholt werden. Die Aufgaben 4a) bis c) eignen sich für eine schriftliche **Übung** hierzu.
Im Auftrag 6 wird das reaktivierte Wissen auf eine für die Schüler neue Art miteinander verknüpft und somit auch vertieft. (Ein Abheben der entsprechenden Umformungsregel ist hier aber noch nicht beabsichtigt. Das geschieht in LE 2.) Mit diesem Auftrag und auch mit Aufgabe 5 (eventuell als **Hausaufgabe**) kann darüber hinaus der Begriff der Äquivalenz zweier Gleichungen vorbereitet werden.

Wiederholung der Begriffe „Aussage“, „Lösung“, „Lösungsmenge“, „erfüllen“, „Variablengrundbereich“ Diesen Begriffen sollte man keine besonderen Stundenabschnitte widmen, sondern sie bei ihrem Auftreten als wichtige Begriffe hervorheben und gegebenenfalls erläutern. Im weiteren Verlauf des Lösens von Gleichungen sollten die Schüler reichlich Gelegenheit haben, beim Begründen und Kommentieren diese Begriffe sachgerecht zu verwenden. Wichtige Redeweisen wie „... ist Lösung der Gleichung in ...“, „... erfüllt die Gleichung, denn ...“, „... hat keine Lösung, weil ...“ usw. sind auch später immer wieder zu festigen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1, 4, 5
2. Aufg. 2, 3

Umformungsregeln für Gleichungen (4 Std.)

LE 2 (LB 79 bis 81)

Als Schwerpunkt dieser Lerneinheit ist auf der Grundlage der Definition von „zueinander äquivalenten Gleichungen“ schrittweise ein System von Umformungsregeln anhand von Beispielen aufzubauen.

Ziele

Die Schüler
- wissen, wann zwei Gleichungen zueinander äquivalent sind,
- können die Regeln für das Umformen einer Gleichung in eine dazu äquivalente anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung des Begriffs „zueinander äquivalente Gleichungen“
- Festigung des Begriffs „zueinander äquivalente Gleichungen“

2. und 3. Stunde
- Erarbeitung von Sätzen für das Umformen von Gleichungen

4. Stunde
- Vervollständigung des Systems von Regeln zur Umformung von Gleichungen
- Übung im Umformen von Gleichungen

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Begriffs „zueinander äquivalente Gleichungen“

1. Variante

Nachdem entsprechend dem Lehrbuch nacheinander die Gleichungen

(1) $15x = 60$, (2) $x = -3$ und (3) $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 4$

an die Tafel geschrieben wurden, könnten die Schüler aufgefordert werden, die Lösungsmengen dieser Gleichungen zu finden. Die Schüler wissen bereits, wie man die Gleichung (1) durch Umformen löst und daß die Lösung bei Gleichung (2) sofort abgelesen werden kann. Sie erkennen aber auch, daß sie Gleichung (3) noch nicht durch Umformen lösen können. Es wäre deshalb anschließend folgende Zielorientierung möglich:
Wir wollen untersuchen, wie man auch kompliziertere Gleichungen als bisher durch Umformen lösen kann. Dabei interessieren nur solche Umformungen, die auf Gleichungen führen, die in demselben Grundbereich dieselbe Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung haben.
Anschließend sollte Auftrag 7 selbständig durch die Schüler gelöst werden. Da noch keine Umformungsregeln bekannt sind, müssen die Lösungen der einzelnen Gleichungen durch inhaltliche Überlegungen und Berechnungen ermittelt werden.
Ausgehend vom Auftrag 7 wird dann der Begriff „zueinander äquivalente Gleichungen bezüglich eines Grundbereiches“ eingeführt. An dieser Stelle wäre es nützlich, an die Schüler die Fragen zu richten: In welchen Definitionen kam die Redeweise „zueinander“ auch schon vor? Was ist das Gemeinsame in allen diesen Beispielen? (Z. B.: Zueinander proportionale Zahlenfolgen, zueinander entgegengesetzte Zahlen, zueinander parallele Geraden, zueinander kongruente Flächen; es wird immer eine Beziehung zwischen *zwei* mathematischen Objekten zum Ausdruck gebracht.)

2. Variante

Ausgehend von den Ergebnissen der in LE 1 gelösten Aufgabe 5 wird der Auftrag 7 selbständig durch die Schüler bearbeitet. Anschließend ist es möglich, die Definition den Schülern vorzugeben.

Festigung des Begriffs „zueinander äquivalente Gleichungen“ Als Identifizierungsübung eignet sich die Aufgabe 1. Beim Ermitteln der Lösungen zu den Gleichungen steht inhaltliches Arbeiten im Vordergrund.

Erarbeitung von Sätzen für das Umformen von Gleichungen Am Anfang könnte entsprechend dem Vorgehen im Lehrbuch noch einmal Bezug auf den Auftrag 7, Beispiel (1), genommen und herausgestellt werden:

- Bei Gleichungen der Form $x = a$ kann die Lösung sofort abgelesen werden;
- bei den anderen Gleichungen muß durch inhaltliche Überlegungen und Berechnungen die Lösung erst ermittelt werden.

Es ist zu empfehlen, den Schülern anhand der Gleichung $3{,}6x - 0{,}8 = 0{,}7x + 2{,}8 + 0{,}5x$, die sie kaum durch inhaltliche Überlegungen lösen können, folgende Zielstellung zu motivieren: Wir wollen *Regeln* kennenlernen, mit deren Hilfe wir eine Gleichung schrittweise in eine dazu äquivalente umformen können, an der man die Lösungsmenge sofort erkennen kann.

Durch das Lösen der Gleichung $\frac{0{,}2x}{5} = 0{,}6 \quad (x \in Q_+)$ könnte man die aus Klasse 6 bekannte Umformungsregel nochmals bereitstellen, um danach durch das Anwenden dieser Regel beim Lösen der Gleichung $-1{,}6x = 4{,}4 \quad (x \in Q)$ zu zeigen, daß sie auch im Zahlenbereich Q anwendbar ist.

Die Erarbeitung der weiteren Erkenntnisse zur Multiplikation mit der Zahl 0 bzw. mit der Variablen auf beiden Seiten der Gleichung kann sich im Unterrichtsgespräch schrittweise nach dem methodischen Vorgehen des Lehrbuches vollziehen. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse können nacheinander festgehalten werden, um die Formulierung eines entsprechenden Satzes zu erleichtern.

Die anschließende Bearbeitung des Auftrages 13 in selbständiger Schülertätigkeit würde die für die Multiplikation herausgearbeiteten Erkenntnisse auch für die Division bestätigen. Als Zusammenfassung dieser Teilerkenntnisse könnte der Satz 3 formuliert werden.

Danach kann die Frage gestellt werden, ob für die Addition bzw. Subtraktion auf beiden Seiten der Gleichung ein ähnlicher Satz gilt wie für die Multiplikation und Division. Beim Suchen nach der Antwort auf diese Frage ist ein hoher Grad von selbständiger Schülertätigkeit möglich (Aufträge 8 bis 10). Es sollte jedoch darauf geachtet werden, daß die dabei schrittweise erarbeiteten Teilerkenntnisse nach jedem Auftrag verallgemeinert und herausgestellt werden.

Als **Zusammenfassung** dieser Teilerkenntnisse kann der Satz 2 formuliert werden.
Als erste **Übung** wäre die Aufgabe 2 möglich.

Vervollständigung des Systems von Regeln zur Umformung von Gleichungen Es sollte die Frage aufgeworfen werden, welche Umformungen man an einer Gleichung *noch* vornehmen kann (außer den durch die Sätze 2 und 3 begründeten), wenn man eine zu ihr äquivalente haben will. Dazu könnte man an den Auftrag 6 erinnern, bei dem das Auflösen der Klammern und das anschließende Zusammenfassen auf eine Gleichung mit derselben Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung führte. Die Schüler sollen erkennen, daß *Termumformungen* nur auf *einer* Seite der Gleichung erfolgen können, während das Anwenden von *Rechenoperationen* stets auf *beiden* Seiten der Gleichung durchgeführt werden muß. Das Ziel der Betrachtungen sollte eine dem Lehrbuch entsprechende Zusammenfassung der Umformungsregeln sein.

Übung im Umformen von Gleichungen Im Mittelpunkt soll das Festigen der Umformungsregeln stehen, noch nicht so sehr das Lösen von Gleichungen. Dafür eignet sich die Aufgabe 3, aber beispielsweise auch folgende:

Es sollten zueinander äquivalente Gleichungen aufgeschrieben werden. Welche Fehler wurden gemacht?

a) $0{,}5x - 3 = 1{,}5x - 8$
$2x - 3 = -8$

b) $4x - 3 = 7x + 9$
$-12 = 3x$

c) $\frac{3}{4}x - 2 = -\frac{1}{2}x - 7$
$\frac{3}{4}x = -\frac{1}{2}x - 7$

d) $2x + 3 - 5x = 7$
$7x + 3 = 7$

e) $\frac{1}{2}x = 6$
$x = 3$

f) $\frac{x}{0,5} = 4$
$x = 8$

Kontrollaufgaben

Aufg. 1c); 2b), c); 3

Stoffabschnitt 3.2.

Übungen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

(15 Std.)

Während im Stoffabschnitt 3.1. die Erarbeitung eines Systems von Umformungsregeln im Vordergrund stand, geht es im Stoffabschnitt 3.2. hauptsächlich um das *Anwenden der Umformungsregeln* und um das *Entwickeln entsprechender Fertigkeiten* beim Lösen von Gleichungen.
Die Schüler müssen entscheiden lernen, in welcher Reihenfolge die Umformungsregeln jeweils anzuwenden sind. Dabei haben sie sich nach der Struktur der Terme zu richten. Sicheres Beherrschen des Lösens von Gleichungen erfordert, daß die Schüler eine ausreichende Anzahl von Aufgaben selbständig gelöst haben. Die Mehrzahl der Stunden dieses Stoffabschnittes wird deshalb Übungscharakter tragen, wobei immer wieder auch Aufgaben vorkommen sollten, die nicht durch kalkülmäßiges Arbeiten lösbar sind, sondern inhaltliches Arbeiten erfordern. Art und Zusammenstellung der zu bearbeitenden Übungsaufgaben sollen außerdem zusätzlich Gelegenheit zum Gewinnen neuer Einsichten und zur Vertiefung vorhandener Kenntnisse geben.
In diesem Zusammenhang sind auch Sachaufgaben zu berücksichtigen, bei deren Behandlung auch die Fähigkeiten der Schüler im Lösen solcher Aufgaben weiterentwickelt werden sollen. Neben dem Anwenden des vorher erarbeiteten Kalküls geht es dabei um das *Finden* einer geeigneten Gleichung, um das Deuten der Lösung dieser Gleichung am Sachverhalt und um die treffende Formulierung eines *Antwortsatzes* nach einer „Probe am Text“.

Lösen von Gleichungen durch Umformen (5 Std.)

LE 3 (LB 82 bis 84)

Ziele

Die Schüler
- können einfache lineare Gleichungen lösen,
- erkennen die Nützlichkeit der Probe.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung einer erweiterungsfähigen Schrittfolge für das Lösen des Gleichungstyps $ax + b = c$
- Durchführen der Probe

2. Stunde
- Übungen im Lösen von Gleichungen des Typs $ax + b = c$

3. und 4. Stunde
- Lösen von Gleichungen des Typs $ax + b = cx + d$

5. Stunde
- Lösen komplizierterer linearer Gleichungen

Methodische Hinweise

Erarbeitung einer erweiterungsfähigen Schrittfolge Anhand des Beispiels 5 wäre es möglich, folgende Zielstellung anzugeben: Wir wollen vorgegebene Gleichungen schrittweise mit Hilfe der Umformungsregeln in die Form $x = a$ umwandeln. Das schrittweise Umformen nennen wir „Auflösen" der Gleichung nach der Variablen.
Das Lösen des Beispiels 5 kann nun nach dem methodischen Vorgehen des Lehrbuchs an der Tafel kommentierend durchgeführt werden. In diesem Zusammenhang ist es möglich, mit den Schülern eine erweiterungsfähige Schrittfolge zum Lösen von Gleichungen dieses Typs als Orientierungshilfe zu erarbeiten (LB 83f.). Es ist wichtig, den Schülern bewußtzumachen, daß *Art* und *Reihenfolge* der anzuwendenden Umformungen wesentlich von der *Struktur* der jeweiligen *Gleichung* abhängt.
Für die Beschreibung der einzelnen Schritte gibt es im allgemeinen zwei Möglichkeiten. Wenn man beispielsweise von $5x + 2 = 6$ zu $5x = 4$ übergeht, kann man sagen entweder: „Es wurde auf beiden Seiten der Gleichung *2 subtrahiert*" oder: „Auf beiden Seiten der Gleichung wurde die *zu 2 entgegengesetzte Zahl addiert*". Beim Übergang zu $x = \frac{4}{5}$ kann man sagen: „Es wurde auf beiden Seiten *durch 5 dividiert*" oder: „Es wurde auf beiden Seiten *mit dem Reziproken von 5 multipliziert*".

Durchführen der Probe Beim Anwenden der Umformungsregeln zur Lösung von Gleichungen könnte man vom logischen Standpunkt aus auf eine Probe verzichten, da diese Regeln zu einander äquivalenten Gleichungen führen.
Um jedoch mögliche Rechenfehler oder andere Irrtümer zu entdecken, ist die Durchführung einer Probe stets zweckmäßig. Die Schüler sind deshalb zu befähigen, Proben gewissenhaft durchzuführen: Die ermittelte Zahl ist für die Variable in die Ausgangsgleichung einzusetzen, und beide Terme sind unabhängig voneinander zu berechnen. Damit entsteht entweder eine wahre oder eine falsche Aussage, und man kann einen Schluß ziehen: Wahre Aussage – die eingesetzte Zahl ist eine Lösung der Gleichung; falsche Aussage – die eingesetzte Zahl ist keine Lösung der Gleichung.
In LE 4 werden auch Gleichungen betrachtet, die keine oder unendlich viele Lösungen haben. Hier ist eine Probe in der oben beschriebenen Form *nicht* möglich. Dennoch kann das Resultat überprüft werden, z. B. durch Wiederholung der Rechnungen oder durch stichprobenartige Verfahren (Einsetzen einzelner Zahlen).
Die Durchführung einer Probe und die daraus gezogenen Schlußfolgerungen sollten auch auf die Bewertung der Schülerleistungen Einfluß haben.

Zur **Übung** eignet sich der Auftrag 14. Dabei ist sehr zu empfehlen, die ersten Gleichungen dieses Typs auf der Grundlage der erarbeiteten Schrittfolge *kommentierend* durch die Schüler lösen zu lassen.
Dazu gibt es folgende Möglichkeiten:
- Die Gleichung wird im Unterrichtsgespräch an der Tafel gelöst, einzelne Schüler kommentieren die Schritte.
- Ein Schüler löst kommentierend die Gleichung an der Tafel.
- Ein Schüler gibt den notwendigen Schritt an, alle Schüler führen diesen Schritt im Heft aus.

Als **Hausaufgabe** eignen sich die Aufgaben 1 und 2.

Übungen im Lösen von Gleichungen des Typs $ax + b = c$ Einige Gleichungen (z. B. aus der Aufg. 3) können durch die Schüler mit Hilfe der Schrittfolge aus der vorangegangenen Stunde kommentierend mit dem Ziel gelöst werden, größere Sicherheit im Lösen solcher Gleichungen zu erreichen. Ein anschließendes selbständiges Lösen von Gleichungen der Aufgabe 4 (auch als Hausaufgabe) bietet die Möglichkeit der Festigung im Lösen von Gleichungen durch bewußte Anwendung der Schrittfolge. Da bei dieser Aufgabe alle bisher behandelten Gleichungstypen vorkommen, sind die Schüler gezwungen, jede Gleichung gewissenhaft zu analysieren. Damit kann ein schablonenhaftes Arbeiten vermieden werden.
In den nächsten Stunden sollte folgendes Vorgehen berücksichtigt werden:
Schrittweise weitere Erhöhung des Schwierigkeitsgrades der Gleichungen bezüglich der Struktur ihrer Terme. Dabei sollte den Schülern bewußtgemacht werden, daß das Anwenden einer erweiterten Schrittfolge (Zusammenfassen bzw. Ordnen) stets auf einen schon bekannten Gleichungstyp führt.

Lösen von Gleichungen des Typs $ax + b = cx + d$ Das im Lehrbuch gewählte Beispiel $5x + 3 = 2x + 7$ $(x \in Q)$ kann wie dort gelöst werden (an der Tafel im Unterrichtsgespräch). Beim Kommentieren der einzelnen Umformungsschritte ist ein Zurückgreifen auf die bereits erarbeitete Schrittfolge möglich. Den Schülern muß natürlich bewußtgemacht werden, daß bei diesem Gleichungstyp auf *beiden* Seiten der Gleichung ein Term der Form $ax + b$ vorkommt.
Um den Schülern ein schnelleres und besseres Einprägen der Schrittfolge zu erleichtern, können im Unterrichtsgespräch die wichtigsten Schlagworte herausgearbeitet und z. B. an die Tafel geschrieben werden:

Ordnen – Umformungsregel: Addition bzw. Subtraktion;
Isolieren – Umformungsregel: Division bzw. Multiplikation.

An dieser Stelle ist eine erste Orientierung auf die „Schritte beim Lösen einer Gleichung" (LB 83 f.) zu empfehlen.
Im Auftrag 15 b) sollten die Schüler erkennen, daß man nicht jeden Umformungsschritt einzeln vollziehen muß.

Zum **Üben** und als **Hausaufgabe** eignen sich die Aufgaben 5 bis 7. Von besonderer Bedeutung sind die Gleichungen der Aufgabe 7, da hier alle bisher behandelten Gleichungstypen vorkommen. Bei einigen Übungsaufgaben sollten die Schüler veranlaßt werden, die entsprechenden Schlagworte der Schrittfolge neben die Lösungsschritte zu schreiben, z. B.:

$$\begin{aligned} 12x + 15 &= 15x + 9 && \text{Ordnen } / -12x \; -9 \\ 6 &= 3x && \text{Isolieren } / :3 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Lösen komplizierterer linearer Gleichungen Man kann von der im Lehrbuch aufgeführten Gleichung

$$7x + 5 - 2x - 6 = -16 + 9x - 9 - 12x \quad (x \in Q)$$

ausgehen und sie wie dort angegeben an der Tafel lösen. Im Zusammenhang damit sollte als Erweiterung der bisherigen Schrittfolge erarbeitet werden: Wir vereinfachen die Gleichung zunächst durch *Zusammenfassen* der Glieder mit der Variablen bzw. der rationalen Zahlen in jedem der beiden Terme. Den Schülern muß bewußtgemacht werden, daß *nach* dem Zusammenfassen ein Gleichungstyp entstanden ist, der schon *bekannt* ist und gelöst werden kann.
Die hier vorgeschlagene Reihenfolge der Lösungsschritte ist natürlich nicht zwingend. Rein mathematisch sind auch etwas andere Vorgehensweisen möglich und den Schülern zu gestatten – z. B. *erst* Ordnen und *danach* Zusammenfassen. Es empfiehlt sich aber, die Schüler stärker auf den im Lehrbuch dargestellten Weg zu orientieren, da er im allgemeinen auf übersichtlichere Gleichungen führt.

Zum **Üben** und als **Hausaufgabe** eignen sich die Aufgaben 8 und 9.
An dieser Stelle wäre zu empfehlen, die aus dem Mathematik-, Physik- und ESP-Unterricht bekannten Formeln umzuformen (Auflösen nach einer vorgegebenen Variablen), z. B.:

a) $v = \frac{s}{t}$ nach t; b) $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ nach a; c) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ nach β .

Kontrollaufgaben

1. $\frac{2}{3}d = -\frac{4}{9}$ $(d \in Q)$
2. $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x$ $(x \in Q)$
3. $\frac{3 \cdot 9}{x} = 1{,}3$ $(x \in Q)$
4. $8a + 20 - 4a + 7 = 98 - 9a + 7$ $(a \in Q)$
5. $3{,}6a + 4{,}5 = -0{,}54$ $(a \in Q)$

Lösungsmengen bei Gleichungen und Ungleichungen (3 Std.)

LE 4 (LB 84 bis 86)

Das Anliegen dieser Lerneinheit ist aus zwei Gründen bedeutsam:

a) Beim Lösen von Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungen wird man im allgemeinen zunächst den Grundbereich Q annehmen, um den Gleichungskalkül unbeschränkt anwenden zu können. Die gefundenen „Lösungen" sind dann aber daraufhin zu überprüfen, ob sie in dem durch den *Sachverhalt* gegebenen Grundbereich der Variablen liegen (das kann z. B. auch Q_+ oder N sein), ob es sich also wirklich um *Lösungen der Aufgabe* handelt.
Die Schüler sollen wissen: Ob eine Zahl Lösung einer Gleichung ist, hängt im allgemeinen auch vom vorgegebenen *Grundbereich* ab.

b) Bei Übungen im Lösen linearer Gleichungen im Grundbereich Q kann für die Schüler leicht der Eindruck entstehen, solche Gleichungen (oder Gleichungen überhaupt) hätten stets genau eine Lösung. Um dieser irrigen Vorstellung von vornherein entgegenzuwirken, sollen die Schüler einige Beispiele von Gleichungen kennenlernen, die in Q *keine* Lösung haben, und auch Gleichungen, für die *jede* rationale Zahl Lösung ist. Darüber hinaus lernen sie bei Gleichungen mit Beträgen auch den Fall kennen, daß es *genau zwei* Lösungen gibt (oder auch eine oder keine).

Ziele

Die Schüler
- kennen den Einfluß des Grundbereiches der Variablen auf die Lösungsmenge einer Gleichung,
- wissen, daß die Lösungsmenge einer Gleichung leer sein oder auch alle Elemente des Grundbereichs enthalten kann, und erkennen derartige Fälle,
- können durch inhaltliche Überlegungen die Lösungen einfacher Ungleichungen ermitteln,
- können einfache Gleichungen mit Beträgen lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Lösungen von Gleichungen in Abhängigkeit vom Grundbereich der Variablen

2. Stunde
- Lösen von Gleichungen mit Beträgen

3. Stunde
- Lösungsmengen bei linearen Gleichungen
- Lösen von Ungleichungen

Methodische Hinweise

Lösungen von Gleichungen in Abhängigkeit vom Grundbereich der Variablen Am Anfang dieser Stunde kann durch Hinweis auf praktische Sachverhalte die Notwendigkeit motiviert werden, den Grundbereich jeweils sinnvoll festzulegen.

Beispiel:
Wenn ermittelt werden soll, wie viele Flaschen Limonade man für einen bestimmten Geldbetrag erhält, dann kommt nur eine *natürliche* Zahl als Lösung in Frage. Wenn es dagegen um das Verteilen von Schokoladentafeln in einem Kinderheim geht, dann kann die Lösung auch aus dem Bereich der *gebrochenen Zahlen* sein. *Rationale* (also auch *negative*) Zahlen muß man als Grundbereich heranziehen, wenn beispielsweise Temperaturen oder auch Zeiten berechnet werden sollen.

Die anschließende Untersuchung zur Lösbarkeit einer Gleichung in Abhängigkeit vom jeweiligen Grundbereich der Variablen kann durch weitgehend selbständige Schülertätigkeit etwa zu folgender Übersicht führen:

	Lösungen aus N	Q_+	Q
$6 + x = 9$	3	3	3
$2x = 5$	–	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{7}{5}x = \frac{7}{2}$	–	–	$-\frac{5}{2}$
$3x + 3 = 7x + 11$	–	–	-2
$x \cdot x = -4x$	0	0	0 und -4

Bei der Auswertung dieser Übersicht könnten folgende Erkenntnisse wiederholt und vertieft werden:
- Die Festlegung des Grundbereichs der Variablen hat Einfluß auf die Lösungsmenge der Gleichung.
- Jede Gleichung, die in einem Grundbereich lösbar ist, ist auch in jedem umfassenderen Grundbereich lösbar, aber nicht umgekehrt.

Zur **Übung** und als **Hausaufgabe** wären die Aufgaben 1 und 2 möglich.

Lösungsmengen bei linearen Gleichungen Es ist den Schülern zu verdeutlichen, daß es lineare Gleichungen gibt, die auch im Bereich Q *keine* Lösung haben, sowie Gleichungen, die von *allen* Elementen des jeweiligen Grundbereichs erfüllt werden. Dabei ist herauszuarbeiten, wie man den jeweiligen Fall *erkennen* kann, denn im Unterschied zu den anderen linearen Gleichungen führt das Anwenden der erarbeiteten Schrittfolge hier *nicht* zu einer Gleichung der Form $x = a$.
Anhand der Beispiele 7 und 8 (oder analoger) ist deshalb herauszustellen:
- Führt die Schrittfolge zu $0 = 0$ (oder zu einer anderen *wahren Aussage*), so zeigt die *vorhergehende* Gleichung – z. B. $2x + 3 = 2x + 3$ – daß *jedes* Element des Grundbereichs die Gleichung erfüllt.
- Führt die Schrittfolge zu einer Gleichung wie etwa $0 = -8$ (also zu einer *falschen Aussage*), so zeigt die *vorhergehende* Gleichung – z. B. $2x + 3 = 2x - 5$ – daß *kein* Element des Grundbereichs die Gleichung erfüllen kann, denn die Addition von 3 zu einer bestimmten Zahl ($2x$) ergibt *stets etwas anderes* als die Subtraktion von 5 von dieser Zahl.

Zur **Übung** und als **Hausaufgabe** wäre Aufgabe 3 geeignet.

Lösen von Gleichungen mit Beträgen Am Anfang dieser Stunde sollten durch entsprechende Aufgaben die Begriffe „entgegengesetzte Zahl" und „Betrag einer Zahl" wiederholt werden. Anschließend könnte die Gleichung $|x| = 2$ gelöst werden, wobei der Zusammenhang zur Betragsdefinition hergestellt werden sollte (siehe Tafelbild a)).

Tafelbild a)

$|x| = 2$

1. Fall	*2. Fall*
$\lvert x\rvert = x$ (für $x \geqq 0$)	$\lvert x\rvert = -x$ (für $x < 0$)
	$-x = 2$
$\underline{\underline{x = 2}}$	$\underline{\underline{x = -2}}$

Tafelbild b)

$$|x| + 3 = 5$$
$$|x| = 2$$

$\underline{\underline{x = 2}}$ $\underline{\underline{x = -2}}$

Probe:

$\lvert 2\rvert + 3 = 5$	$\lvert -2\rvert + 3 = 5$
$2 + 3 = 5$	$2 + 3 = 5$
$5 = 5$	$5 = 5$

$$|x| + 5 = 3$$
$$|x| = -2$$
$$L = \varnothing$$

Danach ist zu empfehlen, einige Gleichungen der Form $|x| + a = b$ zu lösen. Durch Anwenden einer Umformungsregel werden sie auf den Typ $|x| = a$ zurückgeführt (siehe Tafelbild b)). Hauptinhalt dieser Stunde sollte jedoch das Lösen von Gleichungen des Typs $|x + a| = b$ sein.

Anhand des Beispiels 9 kann den Schülern erläutert werden, daß – genau wie bei den anderen Gleichungen mit Beträgen – auf die Betragsdefinition zurückgegriffen wird. Damit sind zwei Fälle zu unterscheiden.
Es entstehen *zwei* Gleichungen *ohne* Beträge und deshalb i. a. auch *zwei Lösungen* (siehe Tafelbild c)).

Tafelbild c)

$$|x - 1{,}5| = 0{,}7$$
$$|z| = 0{,}7$$

$z = 0{,}7$	$z = -0{,}7$
$x - 1{,}5 = 0{,}7$	$x - 1{,}5 = -0{,}7$
$x = 2{,}2$	$x = 0{,}8$

Probe:

$\lvert 2{,}2 - 1{,}5\rvert = 0{,}7$	$\lvert 0{,}8 - 1{,}5\rvert = 0{,}7$
$\lvert 0{,}7\rvert = 0{,}7$	$\lvert -0{,}7\rvert = 0{,}7$
$0{,}7 = 0{,}7$ (wahr)	$0{,}7 = 0{,}7$ (wahr)

Zur **Übung** eignen sich die Aufgaben 5 und 6 (auch als **Hausaufgaben**).

Lösen von Ungleichungen Für das Lösen von Ungleichungen haben die Schüler *keine* Umformungsregeln kennengelernt. Es erfolgt durch *inhaltliche* Überlegungen und kann nach dem methodischen Vorgehen des Lehrbuchs (Beispiel 10) vorgenommen werden.

Zur **Übung** eignet sich die Aufgabe 4 (auch als **Hausaufgabe**).

Kontrollaufgaben

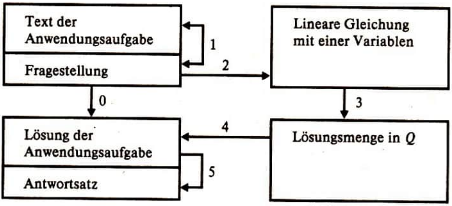
1. $8x + 20 - 4x = -58 - 9x \quad (x \in Q_+)$
2. $9(m - 5) = 4m + 12 + 5m \quad (m \in Q)$
3. $3a + 5 - 5a - 2 = 3 - 3a + 10 \quad (a \in N)$
4. $12x + 20 - 6x - 8 = 18x + 42 - 6x \quad (x \in Q)$
5. $2x + 4 + 3x = 5x + 4 \quad (x \in Q)$
6. $|x - 2{,}5| = 3{,}7 \quad (x \in Q_+)$
7. $|x| - 6{,}2 = -4{,}7 \quad (x \in Q)$
8. $x + 2 > 6 \quad (x \in Q)$
9. $2x - 3 < 9 \quad (x \in N)$

Lösen von Anwendungsaufgaben (5 Std.)

LE 5 (LB 87 bis 90)

Im Mittelpunkt dieser Lerneinheit steht das Festigen des Lösungsverfahrens für lineare Gleichungen durch seine Anwendung beim Lösen von Sachaufgaben.
Wichtige Teilschritte beim Lösen solcher Anwendungsaufgaben veranschaulicht die folgende Übersicht. (Sie ist zum Selbstverständnis des Lehrers gedacht und sollte in Klasse 7 *nicht* Unterrichtsgegenstand sein!)

Die Ziffern stehen für folgende Tätigkeiten:
0: Lösen der Aufgabe ohne Gleichungen
1: Aufgabe verstehen
2: Gleichung finden
3: Lösungsmenge bestimmen
4: Lösung der Aufgabe ermitteln
5: Antwort formulieren



Die Übersicht macht deutlich, daß es beim Lösen von Anwendungsaufgaben neben dem Entwickeln von *Fertigkeiten im Lösen von Gleichungen,* hier Schritt 3, auch um ein Weiterentwickeln jener Fähigkeiten der Schüler geht, die für die Bewältigung der Teilschritte 1, 2, 4 und 5 bedeutsam sind.

Ziele

Die Schüler
- können zu verbal gegebenen Anwendungsaufgaben geeignete Gleichungen finden (die möglichst nur eine Variable enthalten) und diese lösen,
- können aus der Lösungsmenge der jeweiligen Gleichung (im Grundbereich Q) Schlußfolgerungen für die Lösung der gestellten Aufgabe ziehen,
- wissen, wie Aufgabenlösungen überprüft werden können, und verfahren auch entsprechend,
- können einen zur Aufgabenstellung adäquaten Antwortsatz formulieren.

Schwerpunkte

1. bis 3. Stunde
- Wiederholung des Lösens von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen
- Finden geeigneter Gleichungen
- Probe am Text
- Richtiges Formulieren von Antwortsätzen

4. und 5. Stunde
- Differenzierte Übungen

Methodische Hinweise

Wiederholung des Lösens von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen Die ersten Anwendungsaufgaben sollten gemeinsam mit den Schülern so behandelt werden, daß sie gleichzeitig der Reaktivierung des Wissens über das Lösen von Sachaufgaben dienen. Beispiel 11 zeigt eine dem Vorgehen in Klasse 6 entsprechende Möglichkeit, Lösungswege aufzuschreiben. Es ist zweckmäßig, beim Lösen von Sachaufgaben eine gewisse Reihenfolge von Teilschritten beizubehalten. Man kann sich dabei an der im Stoffgebiet 1 entwickelten Strategie orientieren und sie als Impulse wie in den Beispielen 12 und 13 anfangs als Teilüberschriften fixieren. Später sollten sie nur mündliche Orientierung für das Vorgehen bei anderen Aufgaben bilden.

Finden geeigneter Gleichungen Durch die vorangegangenen täglichen Übungen (vergl. die Hinweise zu LE 1) sollten den Schülern die Grundgedanken des Vorgehens schon vertraut sein, nämlich: Unbekannte Zahlen oder Größen werden durch *Variable* bezeichnet, bestimmte im Aufgabentext enthaltene Informationen oder Bedingungen werden durch entsprechende *Terme* und schließlich durch eine *Gleichung* ausgedrückt.
Die Interpretation eines Aufgabentextes läßt im allgemeinen *verschiedene* Möglichkeiten für das Aufstellen einer Gleichung offen. So kann man im Beispiel 12 von der *Gleichheit der Wege* ausgehen und erhält $5x = 3(x + 1)$. Die Überlegung, daß Zeit und Geschwindigkeit bei konstanter Wegstrecke zueinander *umgekehrt proportional* sind, führt auf die Gleichung

$$\frac{x}{x+1} = \frac{3}{5}.$$

Erinnert man sich dagegen an die bekannte *Formel* $t = \frac{s}{v}$, dann kommt man auf die Gleichung

$$x = \frac{3(x+1)}{5}.$$

Alle drei Ansätze können auf der Grundlage der im Lehrbuchbeispiel dargestellten *Tabelle* gefunden werden. Den Schülern sind Tabellen als Hilfsmittel für die Ansatzfindung nicht neu, ihre Nützlichkeit sollte dennoch wieder hervorgehoben werden.

Man sollte deshalb nicht zu eng nur auf einen einzigen Weg orientieren, sondern auch andere von den Schülern vorgeschlagene Ideen aufgreifen.
Bei verschiedenen Aufgaben kann es vorkommen, daß die Schüler zunächst eine Gleichung aufstellen, die *mehr* als nur eine Variable enthält, z. B. zu Aufgabe 3 die Gleichung $x + y = 56$. Es wäre falsch, einen solchen Ansatz einfach abzulehnen, etwa mit der Bemerkung: „Das Lösen solcher Gleichungen lernen wir erst in Klasse 9." Es kommt vielmehr darauf an, mit diesem Ansatz weiterzuarbeiten und durch erneute Analyse des Textes für alle Variablen außer einer einen geeigneten Term zu finden. Dabei kann es nützlich sein, als Zwischenschritt eine Gleichung mit *Leerfeldern* zu zeichnen, die anschließend ausgefüllt werden, etwa:

$$\boxed{} \quad + \quad \boxed{} \quad = 56$$

$$\boxed{\quad x \quad} \quad + \quad \boxed{x-2} \quad = 56$$

Manche Aufgabenformulierungen legen es nahe, als Ansatz *keine Gleichung* aufzustellen, sondern eine *Ungleichung*. Das Beispiel 13 ist von dieser Art. Durch die Frage „Wie lange können sie *höchstens* bleiben?" kann man zu der Ungleichung $25x + 2x + 150 \leqq 600$ gelangen, wobei die größte *natürliche Zahl* gesucht ist, die diese Ungleichung erfüllt. Man kann sie durch *systematisches Probieren* ermitteln, aber auch durch das Lösen der entsprechenden Gleichung (wie im Lehrbuch).
Beim Übergang von einer Größengleichung zu einer Zahlenwertgleichung sollte so zwanglos wie in den Lehrbuchbeispielen vorgegangen werden (z. B. LE 1, Beispiel 4). Es ist jedoch darauf zu achten, daß die Aufgabenstellung noch keine Umrechnungen von Einheiten nötig macht.

Probe am Text Man gewinnt die Lösung einer Anwendungsaufgabe aus der Lösungsmenge einer entsprechenden Gleichung in Q, indem man sich auf die Bedeutung der Variablen besinnt, alle Einschränkungen ihres Grundbereichs beachtet und gegebenenfalls

noch weitere Berechnungen, Vergleiche oder ähnliches ausführt, bis man die *gestellte Frage* beantworten kann. Durch geeignete Beispiele sollen die Schüler dies nach und nach berücksichtigen lernen. Sie gewinnen damit auch Verständnis für die Notwendigkeit, durch eine Probe am Sachverhalt (anhand des Textes) zu entscheiden, ob die ermittelten Werte tatsächlich *Lösungen der Aufgabe* sind oder nicht.
Auftrag 19 könnte z. B. zu der vorschnellen Antwort verleiten, daß die Familie nach 3 h eingeholt wird, der Sachverhalt zeigt aber, daß sie dann nicht mehr unterwegs ist. Hier hat zwar die Gleichung in Q eine Lösung, die Sachaufgabe hat jedoch keine.
Ein anderer Aspekt der Probe am Text ist der, daß eine nur an der Gleichung durchgeführte Probe nicht erkennen läßt, ob diese Gleichung dem Sachverhalt überhaupt entspricht. Das zeigt auch Beispiel 13: Gesucht ist eine größtmögliche *Anzahl,* also eine *natürliche Zahl.* Die Lösung der Gleichung ist aber $16{,}\overline{6}$. Trotzdem wäre die Antwort „nicht lösbar" *falsch*! Der Sachverhalt läßt erkennen, daß die Antwort „16 Tage" lauten muß.
Wegen der zum Teil umfangreichen Betrachtungen, die zu einer „Probe am Text" gehören, sollte man sie von Schülern im allgemeinen nicht schriftlich verlangen. Im Unterrichtsgespräch sind die Schüler aber zu entsprechenden Argumentationen und Begründungen anzuhalten.

Richtiges Formulieren von Antwortsätzen Die Formulierung eines richtigen Antwortsatzes ist keine nur *formale* Forderung. Das wird den Schülern am ehesten dadurch deutlich, daß die Fragestellungen der Sachaufgaben variieren und man nicht immer nur die als Lösung der Gleichung gefundene Zahl als Antwort angeben kann. Der Antwortsatz sollte in einigen Beispielen sinnvoll gerundete Größenangaben erfordern, Aussagen über die Lösbarkeit eines Problems machen usw. Beispiel 13, Auftrag 19 und die Aufgaben 1 bis 4, 6 und 10 bis 13 geben Anlaß, über ein der Fragestellung entsprechendes Formulieren der Antwortsätze zu sprechen.

Differenzierte Übungen Für das Entwickeln von Fähigkeiten im Lösen von Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen ist es sehr wichtig, daß jeder Schüler wenigstens bei einigen Aufgaben *alle* Lösungsschritte *selbständig* bewältigt. Das erfordert, auch solche Schüler, die noch individueller Hilfen bedürfen, gezielt schon in die Ansatzfindung einzubeziehen (und sie nicht erst beim „Ausrechnen" aktiv werden zu lassen). Notwendig ist aber auch, gelegentlich durch differenzierte Aufgabenstellungen, die dem individuellen Leistungsvermögen der Schüler angepaßt sind, alle Schüler zu fördern.
Ein Aspekt der Differenzierung besteht ferner darin, die Schüler auch zum Beschreiten eigener Lösungswege zu ermuntern, die nicht unbedingt über das Aufstellen von Gleichungen führen müssen. Zu diesem Zweck sollten gelegentlich auch solche Aufgaben gestellt werden, bei denen das Aufstellen einer Gleichung nicht zweckmäßig oder nicht möglich ist (z. B. Aufgaben zur Übung, Vertiefung und Wiederholung: Aufg. 14 bzw. 15).

Kontrollaufgaben

Aufg. 3, 6, 7, 10, 11, 12

Kontrollarbeit (2 Std.)

In den Kontrollaufgaben zu diesem Stoffgebiet (UH 100f.) findet man Aufgabenbeispiele, die in einer abschließenden Klassenarbeit eingesetzt werden können. Dabei sollten vor allem die Aufgaben 6 bis 8 und 10 bis 12 Beachtung finden.

Stoffgebiet 4

Quadratzahl und Quadratwurzel

Vorbemerkungen

Im Mittelpunkt dieses Stoffgebietes steht die Weiterentwicklung des *Rechnenkönnens* der Schüler, verbunden mit der Vermittlung bestimmter *theoretischer Einsichten,* die sich auf den Begriff der *irrationalen* (bzw. reellen) *Zahlen* beziehen.
Anknüpfend an ihr bereits vorhandenes Wissen und Können in bezug auf das Quadrieren (das jetzt vor allem durch die Einbeziehung von Rechenhilfsmitteln erweitert wird) werden die Schüler mit einer *neuen* Rechenoperation,dem **Quadratwurzelziehen**, vertraut gemacht. Die sichere Beherrschung des Quadrierens und des Quadratwurzelziehens ist sowohl für das Bewältigen von später zu behandelndem mathematischen Stoff (z. B. Kreisberechnung, Satzgruppe des PYTHAGORAS) als auch für das Fach Physik (z. B. gleichmäßig beschleunigte Bewegung) bedeutsam. Dabei spielen Fertigkeiten im Kopfrechnen eine ebensolche Rolle wie Fähigkeiten im Abschätzen und Überschlagen von Ergebnissen sowie im rationellen Nutzen von Rechenhilfsmitteln (Taschenrechner, Tabellen).
Als grundlegendes Ziel ist deshalb anzusehen, daß die Schüler wissen, was die Schreibweisen a^2 und $\sqrt{a}$ *bedeuten,* daß sie Quadrate von bzw. Quadratwurzeln aus gegebenen Zahlen zweckmäßig, sicher und schnell *berechnen* können und daß sie in der Lage sind, ihre Rechenergebnisse kritisch zu *überprüfen.*
Um dieses Ziel auf einem möglichst hohen Niveau zu erreichen, ist es wichtig, daß die Schüler sich die Quadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis 20 fest einprägen, um beispielsweise den Wert von $\sqrt{169}$ sofort aus dem Kopf angeben zu können bzw. in der Lage zu sein, den Wert von $16{,}3^2$ oder von $\sqrt{300}$ ohne Rechenhilfsmittel abzuschätzen.
Bedeutsam für das Rechnenkönnen ist auch die Kenntnis des funktionalen Zusammenhangs zwischen a und a^2, verbunden mit der Fähigkeit, daraus bestimmte Schlüsse zu ziehen, z. B.: Wenn man den Wert von a verdreifacht, so wächst a^2 auf das Neunfache.
Als wichtige *theoretische Einsichten* sollen die Schüler erfassen, daß Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen vielfach *nicht* rational sind, sondern irrationale Zahlen darstellen (daß man aber zu jeder irrationalen Zahl rationale Näherungswerte nennen kann, die ihr beliebig nahe kommen) und daß Taschenrechner bzw. Zahlentafel in diesen Fällen stets nur rationale Näherungswerte angeben.
Die Schüler werden in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß es außer den irrationalen Quadratwurzeln noch viele weitere irrationale Zahlen gibt. Sie lernen den Begriff „reelle Zahlen“ als Bezeichnung für die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen kennen. Damit findet zugleich der Aufbau des Zahlenbereichs einen vorläufigen Abschluß.
Es dürfte schwierig sein, für den Beginn des Stoffgebiets eine den Schülern verständliche Motivierung zu finden, aus der eine *durchgehende Zielorientierung* entwickelt werden kann (wie etwa im Stoffgebiet „2. Rationale Zahlen“). Die im Lehrbuch am Anfang verschiede-

ner Lerneinheiten zur Motivierung aufgeworfenen Fragen sind in der Regel erst verständlich und naheliegend, wenn der vorangehende Stoff bereits behandelt wurde. Es ist deshalb zu empfehlen, auch im Unterricht diese etwas kurzschrittigere Art der Motivierung und Zielorientierung anzuwenden.

Kontrollaufgaben

Aufgaben, die die Schüler *ohne* Verwendung von Rechenhilfsmitteln lösen können sollen (möglichst im Kopf!)

1. Berechne!

a) 12^2 **b)** $0{,}4^2$ **c)** 30^2 **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

e) $\sqrt{81}$ **f)** $\sqrt{0{,}25}$ **g)** $\sqrt{400}$ **h)** $\sqrt{\frac{9}{16}}$

2. Welche Aufgaben wurden falsch gelöst? Berichtige diese!

a) $6^2 = 36$ **b)** $8^2 = 16$ **c)** $0{,}3^2 = 0{,}9$

d) $\sqrt{64} = 32$ **e)** $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ **f)** $\sqrt{16} = -4$

3. Gib Näherungswerte an für

a) $13{,}4^2$; **b)** $0{,}38^2$; **c)** $52{,}7^2$; **d)** $\sqrt{27}$; **e)** $\sqrt{0{,}5}$; **f)** $\sqrt{250}$!

4. Welche der folgenden Zahlen sind rational, welche sind irrational?

a) $\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{0}$ **c)** $\sqrt{1000}$ **d)** $\sqrt{0{,}81}$

5. Setze das richtige Zeichen $<$, $=$, $>$, ohne die Werte auszurechnen!

a) $8{,}9^2\ (<)\ 9{,}8^2$ **b)** $0{,}53^2\ (>)\ 0{,}35^2$ **c)** $(-6{,}5)^2\ (>)\ 5{,}8^2$

d) $17{,}4^2\ (>)\ (-4{,}9)^2$ **e)** $(-3{,}7)^2\ (=)\ 3{,}7^2$ **f)** $(-8{,}5)^2\ (<)\ (-15{,}4)^2$

6. Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man seine Seitenlänge verdoppelt?

7. Bei welchen der folgenden Beispiele ist das Wurzelziehen nicht ausführbar? Begründe!

a) $\sqrt{0{,}01}$ **b)** $\sqrt{-49}$ **c)** $\sqrt{\frac{3}{4}}$ **d)** $\sqrt{-1}$

Aufgaben, zu deren Lösung Rechenhilfsmittel zugelassen sind (und auch benutzt werden sollten!)

8. Berechne!

a) $0{,}73^2$ **b)** $246{,}3^2$ **c)** $\sqrt{28}$ **d)** $\sqrt{0{,}94}$ **e)** $12{,}7^2 - 3{,}6^2$ **f)** $(48{,}7 - 23{,}9)^2$

g) $\sqrt{17{,}36 + 28{,}64}$ **h)** $\sqrt{9{,}8^2 - 4{,}9^2}$ **i)** $\sqrt{57} + \sqrt{43}$ **k)** $19{,}3 \cdot \sqrt{20}$

9. Eine quadratische Tischfläche für einen Konferenzraum soll einen Flächeninhalt von 5,5 m^2 haben. Wie lang muß die Seitenkante dieser Tischfläche sein?

10. Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 4,2 m soll so vergrößert werden, daß sein Flächeninhalt sich verdreifacht. Wie groß muß die Seitenlänge des neuen Quadrats sein?

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 4.1.: Quadrieren			(3 Std.)
Wiederholung des Quadrierens (LE 1 und 2)	1	– Rechteck, Quadrat; Berechnung des Flächeninhalts dieser Figuren – Bedeutung der Schreibweise a^2; Quadratzahl – Rationale Zahlen: Vorzeichen, Ordnung, Rechenoperationen	– Begriff des Quadrierens rationaler Zahlen – Existenz und Eindeutigkeit des Quadrats einer rationalen Zahl – $a^2 \geqq 0$ – Beziehungen zwischen a und a^2
Bestimmen von a^2 durch Überschlagsrechnung; Abschätzen von a^2 (LE 3)	1	– Runden, Überschlagsrechnen – Quadrate der Zahlen von 1 bis 20	– Bestimmen von Näherungswerten für a^2 – Bestimmen eines Intervalls, in dem a^2 liegt
Quadrieren mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel (LE 4)	1	– Verfahren der schriftlichen Multiplikation – Faktor, Produkt	– Quadrieren beliebiger rationaler Zahlen mit dem Taschenrechner – Quadrieren von Zahlen zwischen 1 und 10 mit der Quadrattafel
Stoffabschnitt 4.2.: Die Quadratwurzel			(8 Std.)
Das Wurzelziehen (LE 5)	2	– Quadrate der Zahlen 1 bis 20 – Flächeninhaltsberechnung von Quadraten – $a^2 \geqq 0$ für beliebiges a; Definition von $\|a\|$	– Quadratwurzelziehen als Umkehrung des Quadrierens – Festlegung, daß $\sqrt{a} \geqq 0$ gilt – Für *beliebiges* a gilt $\sqrt{a^2} = \|a\|$
Ausführbarkeit des Wurzelziehens (LE 6)	1	– Ausführbarkeit von Rechenoperationen – Jede rationale Zahl ist als Bruch darstellbar – Kürzen, gekürzter Bruch	– $\sqrt{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert – Es gibt positive rationale Zahlen, die keine rationale Zahl als Quadratwurzel haben
Nichtrationale Quadratwurzeln (LE 7)	2	– Dichtheit der rationalen Zahlen – Näherungswert – Entgegengesetzte Zahl – Endliche bzw. periodische Dezimalbrüche – Kleiner- bzw. Größer-Relation für Dezimalbrüche	– Begriff „irrationale Zahl" – Beispiele für irrationale Zahlen – Rationale Näherungswerte für irrationale Quadratwurzeln – Begriff „reelle Zahlen" als Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Quadratwurzeln auf der Zahlengeraden (LE 8)	1	– Anordnung der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden – Dichtheit der rationalen Zahlen	– Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos aus – Definition der Quadratwurzel
Wurzelziehen mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel (LE 9)	2	– Quadrieren mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel	– Handhabung von Taschenrechner und Quadrattafel zum Wurzelziehen – Handhabung des Taschenrechners bei Verknüpfungen des Wurzelziehens mit anderen Rechenoperationen
Stoffabschnitt 4.3.: Komplexe Übungen			(2 Std.)
(LE 10)	2	– Begriff „Lösung einer Gleichung bzw. Ungleichung" – Lösen von Prozentaufgaben – Absoluter Fehler, prozentualer Fehler	

Stoffabschnitt 4.1.

Quadrieren (3 Std.)

Den Schülern ist das Quadrieren (einschließlich der Schreibweise a^2) bereits aus dem Unterricht vorangegangener Klassenstufen bekannt. Es wurde insbesondere im Zusammenhang mit dem Berechnen des Flächeninhalts von Quadraten angewandt.
Die Behandlung des Stoffabschnitts 4.1. sollte vor allem darauf gerichtet sein, das entsprechende Wissen und Können der Schüler nicht nur zu reaktivieren, sondern mit Blick auf das folgende Wurzelziehen gezielt zu vertiefen und zu ergänzen. Dies betrifft insbesondere das Herausarbeiten des funktionalen Zusammenhangs zwischen a und a^2 sowie die Entwicklung von Fähigkeiten im Abschätzen von a^2.
Außerdem sind die Schüler mit der Verwendung von Rechenhilfsmitteln (Taschenrechner, Zahlentafel) für das Quadrieren vertraut zu machen.

Wiederholung des Quadrierens (1 Std.)

LE 1 und 2 (LB 93 bis 95)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Quadrat einer Zahl", „Quadratzahl", „Quadrieren" und die Schreibweise a^2,

- können die Quadrate der natürlichen Zahlen 1 bis 20 aus dem Kopf angeben,
- wissen, daß das Quadrieren stets ausführbar und das Ergebnis immer eine positive Zahl oder Null ist,
- kennen den funktionalen Zusammenhang zwischen a und a^2 und können daraus Schlüsse ziehen.

Schwerpunkte

- Wiederholung des Quadrierens
- Erarbeitung der eindeutigen Ausführbarkeit des Quadrierens und der Beziehung $a^2 \geqq 0$
- Untersuchung des Zusammenhangs von a und a^2

Methodische Hinweise

Eindeutigkeit und Ausführbarkeit des Quadrierens; $a^2 \geqq 0$ Die vom geometrischen Sachverhalt her bekannten Erklärungen und Redeweisen sind auf die Arithmetik zu übertragen, soweit das möglich ist. Dabei muß deutlich werden:
Man kann *jede beliebige* rationale Zahl quadrieren. Die Redeweise „a Quadrat" erinnert zwar noch an ihre geometrische Herkunft, besitzt aber einen rein arithmetischen Sinn. Eine geometrische Deutung als Quadratflächeninhalt ist nur für positive Zahlen möglich. Zuweilen beobachtet man bei Schülern, daß sie a^2 im Sinne von $2 \cdot a$ deuten, also beispielsweise $3^2 = 6$ rechnen. Um dem von vornherein entgegenzuwirken, sollte man im Unterricht immer wieder ausführliche Sprechweisen benutzen bzw. von Schülern auch verlangen, z. B.:
„7^2 bedeutet $7 \cdot 7$, also ist $7^2 = 49$."
„Eine Zahl quadrieren heißt, sie mit sich selbst zu multiplizieren, deshalb ist $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$."
„Man berechnet das Quadrat einer Zahl, indem man sie mit sich selbst multipliziert."

Die in den Sätzen 1 und 2 formulierten Erkenntnisse können die Schüler weitgehend selbst finden, etwa in Auswertung der Aufträge 3 und 4. Es ist allerdings überlegenswert, den Auftrag 3 eventuell noch etwas anzureichern:

Erstens durch Aufgaben wie 8^2; $0{,}5^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 0^2, um die Formulierung „Zu *jeder* rationalen Zahl ..." besser vorzubereiten;
zweitens durch die Frage, ob beim Quadrieren einer Zahl auch einmal *zwei verschiedene* Ergebnisse richtig sein können, um den Sinn der Formulierung „... gibt es *genau eine* rationale Zahl ..." bewußtzumachen.
(Letzteres kann natürlich auch geschehen, indem man die Lehrbuchformulierung mit den Schülern gemeinsam analysiert.)

Zusammenhang von a und a^2 Durch Bearbeitung der Aufträge 5 und 6 oder ähnlicher Aufgabenstellungen können Beziehungen zwischen a und a^2 bewußtgemacht werden, deren Kenntnis für funktionale Betrachtungen oder für Abschätzungen nützlich ist. (Zunächst sollte man aber prüfen, ob die Schüler im *Vergleichen* rationaler Zahlen sicher sind, damit in dieser Beziehung keine Schwierigkeiten auftreten.)
Die Führung durch den Lehrer sollte dabei nicht stärker als nötig sein. Beispielsweise könnte der Auftrag 6 auch „offener" formuliert werden, als *Frage:* „Ist *immer* $a^2 > a$, oder gibt es auch Gegenbeispiele?".

Es wäre auch möglich, mit dem „Sandkastenproblem“ (LB 95) zu beginnen, also mit einer praxisorientierten Fragestellung, und erst *nach* Bearbeitung des Auftrages 7 die Frage aufzuwerfen, welche *weiteren* Zusammenhänge zwischen a und a^2 man finden kann.

Es kann sein, daß Schüler nach der *Lösung* des „Sandkastenproblems“ fragen. Im Lehrbuch erfolgt sie erst in LE 7, man muß die Schüler also auf später vertrösten. Das schließt aber nicht aus, daß man insbesondere leistungsstarke Schüler anregt, eine (näherungsweise) Lösung durch systematisches Probieren zu versuchen.

Es ist empfehlenswert, auch die Sätze 1 und 2 (LB 94) anschaulich zu deuten. Dazu eignet sich eine grafische Darstellung in einem Koordinatensystem, dessen Achsen mit a bzw. a^2 bezeichnet werden können. Auf der Grundlage einer vorher angefertigten Wertetabelle werden entsprechende Punkte eingetragen. (Es ist nicht notwendig, die Punkte durch einen Kurvenzug zu verbinden.) Ihre Abstände von den Achsen können dann verglichen werden. Man *sieht* dann, daß z. B. $a^2 < a$ für $0 < a < 1$ gilt usw.
Als **Hausaufgabe** sollte u. a. der Auftrag 2 gestellt werden.

Kontrollaufgaben

1. Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seiten 12 m lang sind?
2. Wie berechnet man das Quadrat einer Zahl?
3. Berechne die Quadrate folgender Zahlen!
   $3;\ -8;\ 0{,}6;\ -\frac{4}{5};\ 40;\ 100$
4. Wie hast du das Quadrat von 0,6 berechnet?
5. Welche der folgenden Zahlen sind Quadratzahlen?
   $0;\ 4;\ 12;\ 16;\ 17;\ -25;\ 400;\ 0{,}25;\ 0{,}9;\ -81$
6. Läßt sich von jeder rationalen Zahl das Quadrat bilden?
7. Welches Vorzeichen haben die Quadrate positiver (bzw. negativer) Zahlen?
8. Warum kann das Quadrat einer Zahl nicht negativ sein?
9. LE 2, Aufg. 1, 2, 4

Bestimmen von a^2 durch Überschlagsrechnung; Abschätzen von a^2 (1 Std.)

LE 3 (LB 96)

Das hauptsächliche Anliegen dieser Lerneinheit besteht in der Weiterentwicklung des *Rechnenkönnens* der Schüler, vor allem hinsichtlich ihrer Befähigung und Erziehung zur Selbstkontrolle.
Durch die Aneignung des Stoffes lernen sie, sowohl beim Quadrieren als auch später beim Wurzelziehen Überschlagsrechnungen und Abschätzungen vornehmen sowie erhaltene Ergebnisse kritisch beurteilen zu können.
Damit diese Kontrollmethoden *genutzt* werden, kommt es aber auch darauf an (und zwar nicht nur in dieser Stunde!), bei den Schülern die *Bereitschaft* weiterzuentwickeln (zu einer Gewohnheit werden zu lassen), derartige Kontrollen wirklich anzuwenden und aus deren Ergebnissen Schlußfolgerungen zu ziehen.

Ziele

Die Schüler
- können auf der Grundlage ihrer Kenntnis von Quadratzahlen den Wert von a^2 für beliebiges a näherungsweise bestimmen,
- können angemessen enge Intervalle bestimmen, in denen a^2 jeweils liegt.

Schwerpunkte

- Überschlagen des Wertes von a^2
- Abschätzen von a^2

Methodische Hinweise

Überschlagen des Wertes von a^2 Zur Ermittlung eines Näherungswertes von a^2 durch Überschlagsrechnung sollen die Schüler sich vor allem auf ihre Kenntnis der Quadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis 20 stützen. Sie sind deshalb darauf zu orientieren, für Überschlagsrechnungen die gegebenen Zahlen auf eine oder höchstens zwei Ziffern zu runden, z. B.: $38{,}4 \approx 40$; $12{,}6 \approx 13$.
Bei der Gestaltung des Unterrichts ist darauf zu achten, daß die Aufgabenstellungen methodisch vielseitig und abwechslungsreich angelegt sind.
Folgende Möglichkeiten könnten zur Anwendung kommen:
- Angeben von Näherungswerten durch die Schüler – anschließend wird ermittelt, welcher Schüler dem richtigen Wert am nächsten gekommen ist (eventuell können auch relative bzw. prozentuale Fehler berechnet werden)
- Beurteilen und gegebenenfalls Korrigieren *vorgegebener* Näherungswerte durch die Schüler (siehe Aufg. 2)
- Ermitteln von Näherungswerten mit Hilfe einer grafischen Darstellung, die die Schüler in der LE 2 angefertigt haben

Abschätzen von a^2 Dabei wird nach zwei Zahlen gefragt, zwischen denen die Zahl a^2 liegt (also nach einem *Intervall*).
Die Schüler sollen sich bei Abschätzungen auf die in der LE 2 erkannten Beziehungen zwischen a und a^2 sowie auf ihre Kenntnis von Quadratzahlen stützen. Die Anforderungen an die „Güte" einer Abschätzung – an die zulässige Länge des Intervalls – ergeben sich aus dem jeweiligen Zweck und aus dem für erträglich gehaltenen Rechenaufwand. Feste Regeln können den Schülern somit nicht gegeben werden. Auch das Abschätzen sollte in abwechslungsreichen Formen geübt werden, u. a.:
- „Einfangen" von Quadraten mit Intervallen vorgegebener Länge, z. B.: „Gib Intervalle der Länge 3 an, in denen die Werte von $3{,}8^2$; $5{,}3^2$; $7{,}5^2$; $8{,}8^2$ liegen!"
- „Treffen" von vorgegebenen Intervallen mit Quadraten, z. B.: „Gib jeweils eine Zahl an, deren Quadrat zwischen 1 und 3; 5 und 7; 11 und 15; 70 und 80 liegt!"

Kontrollaufgaben

Aufg. 1 bis 3

Quadrieren mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel (1 Std.)

LE 4 (LB 96 bis 97)

Ziele

Die Schüler
- können mit dem Taschenrechner die Quadrate beliebiger Zahlen ermitteln (innerhalb der Grenzen des Rechners),
- können aus der Quadrattafel die Quadrate aller Zahlen zwischen 1 und 10 (näherungsweise) bestimmen.

Schwerpunkte

- Quadrieren mit dem Taschenrechner
- Quadrieren mit der Quadrattafel

Methodische Hinweise

Quadrieren mit dem Taschenrechner Es ist ratsam, bei der Einführung nicht sofort die Taste $\boxed{x^2}$ zu benutzen, sondern – an die *Definition* von a^2 anknüpfend – zunächst mit der Multiplikationstaste zu arbeiten (vgl. LB 96). Die Schüler sollen erkennen, daß die Benutzung der Quadrattaste *unmittelbar* das Ergebnis der Multiplikation $a \cdot a$ liefert. (Später wird ihnen auch der Vorteil der Quadrattaste bei der Berechnung größerer Terme – z. B. der Form $\sqrt{a^2 - b^2}$ – deutlich zu machen sein.)
Die Schüler sind von vornherein darauf zu orientieren, bei negativen Zahlen nur deren Betrag zu quadrieren, da das Ergebnis vom Vorzeichen unabhängig ist.
Es ist empfehlenswert, das Quadrieren mit dem Taschenrechner bald nach dessen Erläuterung mit dem Abschätzen zu verknüpfen. Dafür eignen sich beispielsweise Aufgaben folgender Art („Zielrechnen"):
„Gib in den Rechner eine Zahl ein und quadriere sie! Das Ergebnis soll zwischen 5 und 6; 30 und 32; 55 und 60; 330 und 340 liegen. Wer das jeweilige Intervall nicht getroffen hat, kann neue Versuche machen, bis er Erfolg hat."(Alle Versuche sind zu notieren. Welcher Schüler benötigt die wenigsten?)

Quadrieren mit der Quadrattafel Das Quadrieren mit Hilfe der Quadrattafel wird bei Vorhandensein eines Taschenrechners sicher eine untergeordnete Rolle spielen. Es ist aber dennoch anzustreben, daß die Schüler mit der Quadrattafel arbeiten können. Allerdings erfolgt dabei eine Beschränkung auf Zahlen zwischen 1 und 10.
Für Zahlen zwischen 0 und 1 bzw. über 10 ist den Schülern an wenigen Beispielen zu zeigen, wie man die Quadrattafel nutzen kann, indem man geeignete Zehnerpotenzen abtrennt.
Verallgemeinerte Regeln sind *nicht* zu behandeln.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1 und 2

Stoffabschnitt 4.2.

Die Quadratwurzel (8 Std.)

Während der Stoffabschnitt 4.1. mehr der Wiederholung und Vertiefung von früher vermitteltem Wissen und Können dient, sollen die Schüler im Stoffabschnitt 4.2. eine Reihe neuer Begriffe und Verfahren kennenlernen sowie Einsichten in Existenz- und Eindeutigkeitsprobleme gewinnen, die mit dem Begriff der Quadratwurzel zusammenhängen.

Das Wurzelziehen (2 Std.)

LE 5 (LB 98 bis 99)

Ziele

Die Schüler
- haben anhand von einfachen Zahlenbeispielen erste Vorstellungen davon gewonnen, was die Redeweise „Quadratwurzel aus ..." bzw. das Zeichen „$\sqrt{\ }$ " bedeuten,
- können (ohne Rechenhilfsmittel) Quadratwurzeln aus Zahlen bestimmen, die das Quadrat „überschaubarer" Zahlen sind,
- haben anhand von Beispielen verstanden, daß für *nichtnegative* rationale Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = a$, während für *beliebige* rationale Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Schwerpunkte

- Erklärung des Quadratwurzelziehens als Umkehrung des Quadrierens
- Bestimmen von Quadratwurzeln (im Kopf – mit Hilfe der Kenntnis von Quadratzahlen)

Methodische Hinweise

In dieser Lerneinheit sollen die Schüler mit dem *Grundgedanken* des Quadratwurzelziehens – als *Umkehrung des Quadrierens* – vertraut gemacht werden, ohne sie sofort mit dem Problem der Ausführbarkeit zu konfrontieren.
Im Lehrbuch wird deshalb von praktischen bzw. geometrischen Fragestellungen ausgegangen (Aufträge 9 und 10), deren Beantwortung auf das Quadratwurzelziehen führt. Da Quadrate (als geometrische Figuren) keine negativen Seitenlängen haben können, ist die Frage nach negativen Werten von a (in der Gleichung $a^2 = b$) – und damit die Frage nach der Eindeutigkeit des Quadratwurzelziehens – zunächst gegenstandslos.
An einem reinen Zahlenbeispiel (etwa Beispiel 7) sollte dann aber bewußtgemacht werden, daß es *zwei* Zahlen a geben kann (eine *positive* und eine *negative*), deren Quadrat gleich einer vorgegebenen Zahl b ist. Um die Quadratwurzel aus b *eindeutig* festzulegen, werden *negative* Werte von *a ausgeschlossen.*
Mit anderen Worten: Die Gleichung $x^2 = 16$ hat *zwei* Lösungen, nämlich 4 und -4, aber die Gleichung $x = \sqrt{16}$ hat nur die *eine* Lösung 4.

Zu welchen Komplikationen es führen würde, wenn man beim Wurzelziehen *zwei* Werte zuließe, kann den Schülern an einer einfachen Aufgabe verdeutlicht werden:

$\sqrt{16} + \sqrt{9}$ hätte dann schon *vier* Ergebnisse, nämlich
$4 + 3 = 7, \quad -4 + 3 = -1, \quad 4 - 3 = 1$ und $-4 - 3 = -7$.

Die Festlegung, die zur Eindeutigkeit des Quadratwurzelziehens führt, hat zur Folge, daß es *nicht generell die Umkehrung* des Quadrierens ist.

Nur für *nichtnegative* Zahlen a gilt $\sqrt{a^2} = a$. Quadriert man eine *negative* Zahl a und zieht anschließend die Quadratwurzel, so erhält man als Ergebnis die *positive* Zahl $-a$. Für *beliebige* rationale Zahlen a gilt also $\sqrt{a^2} = |a|$.
Zu dieser Erkenntnis sollten die Schüler unbedingt geführt werden, etwa durch die Bearbeitung des Auftrags 11. Dies ist vor allem auch für spätere Stoffgebiete von Bedeutung, z. B.: Wenn man beim Lösen der Gleichung $(x-4)^2 = 36$ durch Wurzelziehen zu $|x-4| = 6$ übergeht, führt das *Vergessen* der Betragsstriche zum Wegfall einer Lösung; die Gleichung $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, die man aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gewinnt, wäre ohne Betragsstriche nicht allgemeingültig.

Mit den bisherigen Betrachtungen ist die Frage nach Eindeutigkeit des Quadratwurzelziehens eigentlich noch nicht voll geklärt. Es müßte noch untersucht werden, ob es eventuell positive Zahlen a geben kann, zu denen es wenigstens *zwei verschiedene positive* Zahlen x_1 und x_2 gibt, für die gilt:
$x_1^2 = a$ und $x_2^2 = a$.
Derartige Überlegungen werden im Unterricht aber nicht angestellt.

Durch die geometrische Ausgangsposition (im Zusammenhang mit Flächeninhalten kommen nur *positive* Zahlen als Radikanden vor) sowie durch geschickte Wahl der Zahlen in den Aufgaben tritt das Problem der *Ausführbarkeit* des Quadratwurzelziehens vorerst nicht auf. (Man betrachtet in dieser Stunde nur Zahlen, deren Quadratwurzel sofort im Kopf bestimmt werden kann.)
In Anbetracht der Lücken, die diese erste Einführung in das Wurzelziehen notwendigerweise offen läßt, wäre es natürlich unangebracht, in der Stunde eine *Definition* der Quadratwurzel anzustreben. Die im Lehrbuch enthaltenen Beispiele und Erläuterungen reichen auf dieser Stufe der Begriffsbildung völlig aus.

Zur Vorbereitung auf die *nächste* Lerneinheit wäre zu empfehlen, in die **Hausaufgabe** ein oder zwei Beispiele einzubeziehen, die die Schüler an das Problem der Ausführbarkeit heranführen, etwa:
„Überlege, ob $\sqrt{-16} = -4$ eine wahre Aussage ist!"
„Versuche, eine Zahl zu finden, deren Quadrat 10 ist!"

Kontrollaufgaben
Aufg. 1 bis 4

Ausführbarkeit des Wurzelziehens (1 Std.)

LE 6 (LB 99 bis 100)

Das Thema „Ausführbarkeit des Quadratwurzelziehens" stellt an die Schüler relativ hohe Anforderungen im theoretischen Denken. Es ist deshalb besonders wichtig, sie durch geeignete Aufgabenstellungen an die Probleme heranzuführen und auch an der Lösung derselben aktiv zu beteiligen. Anregungen zu einer in diesem Sinne problemhaften Unterrichtsgestaltung können dem Lehrbuch (LB 99f.) entnommen werden.

Ziele

Die Schüler
- haben erkannt, daß es keine rationalen Zahlen geben kann, die Quadratwurzel aus einer *negativen* Zahl sind,
- wissen, daß es auch *positive* rationale Zahlen gibt, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel haben, und können dies an Beispielen erläutern.

Schwerpunkte

- Ausschließen negativer Radikanden
- Nachweis, daß es positive rationale Zahlen gibt, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel haben

Methodische Hinweise

Das Thema hat zwei Aspekte:
a) Zu negativen Zahlen gibt es keine Quadratwurzel.
Zu dieser Erkenntnis können die Schüler weitgehend selbständig gelangen, indem sie den Auftrag 12 bearbeiten.
b) Es gibt *positive* rationale Zahlen, die keine rationale Zahl als Quadratwurzel haben.
Damit die Schüler zu dieser Einsicht gelangen, sollte man im Unterricht zunächst von der Aufgabe ausgehen, die Quadratwurzel zu einer positiven (zweckmäßigerweise ganzen) Zahl *bestimmen* zu wollen.
Im Lehrbuch ist dafür die Zahl 8 gewählt worden. Die Schüler werden sicher rasch erkennen, daß es keine *natürliche* Zahl a gibt, deren Quadrat 8 ist. Ebenso einfach ist die Feststellung zu gewinnen, daß $\sqrt{8}$ nur zwischen 2 und 3 liegen kann. (Dies folgt aus der für das Quadrieren positiver Zahlen gültigen Monotonie.)
Die weiteren Überlegungen sind etwas komplizierter.
Zunächst versuchen die Schüler, durch systematisches Probieren eine Lösung zu finden. Sie quadrieren rationale Zahlen (in Bruchdarstellung), die zwischen 2 und 3 liegen. Ist das Quadrat größer als 8, so wählt man im nächsten Versuch eine kleinere Zahl; ist es kleiner – eine größere. Dabei sind die schon betrachteten Zahlen in der Weise zu berücksichtigen, daß das zu untersuchende Intervall immer kleiner wird. (Für diese Berechnungen kann auch der Taschenrechner benutzt werden.)
An der Tafel könnte in diesem Zusammenhang eine Übersicht (UH 129) entstehen.
Die Schüler finden natürlich keinen Bruch, dessen Quadrat *gleich* 8 ist.
Daraus allein kann man aber noch keinen Schluß ziehen. Deshalb wird im Lehrbuch (LB 99f.) die Frage untersucht, wie ein Bruch $\frac{p}{q}$ beschaffen sein müßte, wenn sein Quadrat gleich 8 sein soll. Es zeigt sich, daß es einen derartigen Bruch nicht geben kann.
Die im Lehrbuch verwendete Schlußweise kann im Unterricht auch anhand der oben angegebenen Übersicht erarbeitet werden. Aus ihr wird deutlich: Wenn man einen (nicht kürzbaren) Bruch quadriert, dann kann man auch *nach* dem Quadrieren nicht kürzen, der Nenner kann also nie 1 und das Ergebnis somit nie gleich 8 werden. (Man benutzt bei

Gesucht a, so daß $a^2 = 8$ ist, also $a = \sqrt{8}$

a	a^2	$a^2 = 8$?	Vergleich von a mit $\sqrt{8}$	
2	$2 \cdot 2 = 4$	nein	$2 < \sqrt{8}$	
3	$3 \cdot 3 = 9$	nein		$\sqrt{8} < 3$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6{,}25$	nein	$\frac{5}{2} < \sqrt{8}$	
$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} = \frac{121}{16} = 7{,}5 \ldots$	nein	$\frac{11}{4} < \sqrt{8}$	
$\frac{29}{10}$	$\frac{29}{10} \cdot \frac{29}{10} = \frac{841}{100} = 8{,}41$	nein		$\sqrt{8} < \frac{29}{10}$

dieser Schlußweise stillschweigend die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen, aus der folgt, daß p^2 bzw. q^2 keine anderen Primfaktoren enthalten können als p bzw. q selbst.)
Für die Anwendbarkeit dieser Schlußweise ist wesentlich, daß die Schüler mit *gemeinen Brüchen* arbeiten und *nicht* mit Dezimalbrüchen. Außerdem ist zu beachten, daß die Schlußfolgerung „Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 8 ist" für die Schüler nur dann wirklich einsichtig ist, wenn sie wissen, daß man *jede* rationale Zahl als Bruch darstellen kann.

Als Vorbereitung für LE 7 kann die **Hausaufgabe** gestellt werden, aus zwei ausgeschnittenen Quadraten mit jeweils 4 cm² Flächeninhalt durch Zerschneiden und Neuzusammensetzen ein Quadrat mit 8 cm² Flächeninhalt herzustellen.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1 und 2

Nichtrationale Quadratwurzeln (2 Std.)

LE 7 (LB 100 bis 102)

Ziele

Die Schüler
- kennen den Begriff „irrationale Zahl" und seine Definition als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch,
- können Beispiele für irrationale Zahlen angeben,
- wissen, daß die Gesamtheit der rationalen und der irrationalen Zahlen als die Menge der reellen Zahlen bezeichnet wird,
- wissen, daß irrationale Zahlen beim Rechnen oft durch rationale Näherungswerte ersetzt werden, und können Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführen des Begriffs „irrationale Zahl“ am Beispiel $\sqrt{8}$
- Ermitteln rationaler Näherungswerte; $\sqrt{8}$ als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch

2. Stunde
- Definieren des Begriffs „irrationale Zahl“; Einführen des Terminus „reelle Zahlen“

Methodische Hinweise

Einführen des Begriffs „irrationale Zahl“ am Beispiel $\sqrt{8}$ Mit der Feststellung, daß es beispielsweise keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 8 ist, erhebt sich die Frage, ob das Symbol $\sqrt{8}$ *überhaupt* etwas bezeichnet. Man sollte die Schüler daran erinnern, daß *vor* der Einführung der rationalen Zahlen beispielsweise der Term $2 - 5$ *keine* Zahl bezeichnete (die entsprechende Aufgabe war „nicht lösbar“). Erst durch die Einführung negativer Zahlen haben Terme wie $2 - 5$ einen Sinn bekommen.
Aus diesem Rückblick heraus kann man die Zielstellung motivieren, nach einer möglichen Bedeutung von $\sqrt{8}$ suchen zu wollen.
Im Lehrbuch (LB 100f.) wird von einer etwas anderen, ebenfalls möglichen Problemstellung ausgegangen („Verdoppeln einer Quadratfläche“), die auch auf die Frage führt, ob das Symbol $\sqrt{8}$ einen Sinn hat, und wenn ja, welchen.
In jedem Falle ist es naheliegend – weil der ursprünglichen Einführung des Quadratwurzelziehens entsprechend –, daß man das Problem durch die Angabe eines Quadrates löst, dessen Flächeninhalt 8 Flächeneinheiten beträgt. Daß dieses Quadrat auch *eine ganz bestimmte Seitenlänge* hat (nämlich $\sqrt{8}$ Längeneinheiten), wird als anschaulich unmittelbar einleuchtend angesehen. Mit anderen Worten: die *Existenz* von $\sqrt{8}$ (und analog dazu aller anderen irrationalen Quadratwurzeln) wird bei diesem auf die Anschauung gestützten Vorgehen als *offensichtlich* angesehen, es erfolgt keine weitere Begründung dafür.
Da nun geklärt ist, daß $\sqrt{8}$ *eine ganz bestimmte Zahl* ist, die Schüler aber auch schon wissen, daß $\sqrt{8}$ *keine rationale* Zahl darstellt, ist ihnen nunmehr mitzuteilen, daß man $\sqrt{8}$ als eine „irrationale Zahl“ bezeichnet.
Es ist übrigens sehr zu empfehlen, daß die zeichnerische Herstellung eines Quadrates mit einem Flächeninhalt von 8 Flächeneinheiten nicht nur an der Tafel erfolgt (mit 8 dm^2), sondern auch in den Heften der Schüler (mit 8 cm^2), damit sie selbst anschließend Näherungswerte für $\sqrt{8}$ durch Messen bestimmen können. Dazu kann auch die zur LE 6 empfohlene Hausaufgabe genutzt werden.

Ermitteln rationaler Näherungswerte; $\sqrt{8}$ als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch Im Lehrbuch (LE 7) wird am Beispiel $\sqrt{8}$ dargestellt, wie man durch systematisches Probieren immer genauere Näherungswerte für $\sqrt{8}$ ermitteln kann. Die Schüler sollen sehen (indem sie dieses Beispiel selbst bearbeiten), wie man den genauen Wert schrittweise immer besser durch Dezimalbrüche annähern kann und daß dieses Verfahren *nicht abbricht* – kein endlicher Dezimalbruch ist *genau* gleich dem irrationalen Wurzelwert.

Sie sollen ferner verstehen, daß auch *kein periodischer* Dezimalbruch entstehen kann, weil periodische Dezimalbrüche *rationale* Zahlen sind. Es wird also die Erkenntnis gewonnen: $\sqrt{8}$ ist ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch.

Definieren des Begriffs „irrationale Zahl", Einführen des Terminus „reelle Zahlen" Mit $\sqrt{8}$ haben die Schüler zunächst nur *ein Beispiel* einer irrationalen Zahl kennengelernt. Um eine *allgemeine Definition* vorzubereiten, empfiehlt es sich, einige weitere Beispiele zu betrachten. Dazu kann man etwa die Zahl $\sqrt{18}$ analog wie $\sqrt{8}$ untersuchen („Verdoppeln eines Quadrats mit der Seitenlänge 3 cm"; „Einschachteln" von $\sqrt{18}$ usw.). Vor allem sollte man aber auch unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche angeben bzw. von den Schülern „konstruieren" lassen, die eine leicht erkennbare Bildungsvorschrift besitzen – wie beispielsweise die im Lehrbuch angeführte Zahl $a_3 = 1{,}49162536496481100121\ldots$ („Folge der Quadratzahlen"). An solchen Beispielen ist gut erkennbar, daß trotz des Fehlens einer Periode jeder Stelle des Dezimalbruchs eindeutig eine ganz bestimmte Ziffer zugeordnet ist.
Erst nach einer solchen „Anreicherung" der Vorstellungen über unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche sollte die darauf gestützte Definition des Begriffs „irrationale Zahl" den Schülern mitgeteilt werden.
Die Einführung des Terminus „reelle Zahlen" für die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen ist lediglich als *Namensgebung* zu verstehen. Auf tieferliegende Fragen wird nicht eingegangen.

Kontrollaufgaben

1. Welche der folgenden Zahlen sind rational, welche sind irrational?
   a) $\sqrt{81}$ **b)** $-\sqrt{5}$ **c)** $-1{,}\overline{6}$ **d)** $0{,}27356$ **e)** $\sqrt{0{,}64}$
2. Aufg. 2

Quadratwurzeln auf der Zahlengeraden (1 Std.)

LE 8 (LB 102 bis 103)

Ziele

Die Schüler
- kennen Beispiele für nichtrationale Punkte der Zahlengeraden,
- wissen, daß die reellen Zahlen die Zahlengerade lückenlos ausfüllen,
- kennen die Definition der Quadratwurzel aus einer nichtnegativen reellen Zahl.

Schwerpunkte

- Bestimmen nichtrationaler Punkte auf der Zahlengeraden
- Erarbeiten der endgültigen Definition der Quadratwurzel

Methodische Hinweise

Bestimmen nichtrationaler Punkte auf der Zahlengeraden Es empfiehlt sich, wie im Lehrbuch von der Aufgabe auszugehen, *den* Punkt der Zahlengeraden zu bestimmen, dem die irrationale Zahl $\sqrt{8}$ zugeordnet ist.
Zur Motivierung des *Vorgehens* – nämlich *konstruktiv* statt durch Messen – ist den Schülern zu erläutern, daß das Messen hier keine exakte Methode wäre, weil man mit dem Lineal prinzipiell keine Länge bestimmen kann, deren Zahlenwert ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch wie $\sqrt{8}$ ist.

Der Grund dafür liegt nicht in Unzulänglichkeiten des Messens, sondern in der Tatsache, daß die Einheitsstrecke zur Strecke der Länge $\sqrt{8}$ *inkommensurabel* ist. Eine exakte Lösung ist deshalb nur möglich, indem man eine Strecke *konstruiert*, deren Länge $\sqrt{8}$ Einheiten beträgt – etwa so, wie es im Lehrbuch dargestellt ist. Diese Lösung ist natürlich nur in einem *idealisierten, theoretischen* Sinne „exakt". *Praktisch* kann sie durchaus ungenauer sein als bei einfachem Abmessen unter Verwendung des Näherungswertes 2,83.

Die *Lückenlosigkeit* der Ausfüllung der Zahlengeraden durch die reellen Zahlen kann den Schülern nur mitgeteilt werden.

Erarbeiten der endgültigen Definition der Quadratwurzel Das Einführen der endgültigen Definition der Quadratwurzel (Definition 5) könnte im Zusammenhang mit einer *zusammenfassenden Rückschau* geschehen, bei der folgende Fragen mit den Schülern zu klären wären:

- Für welche Zahlen b ist $\sqrt{b}$ definiert, für welche nicht?
  Antwort: Für *negative* Werte von b ist $\sqrt{b}$ *nicht* definiert, wohl aber für alle anderen reellen Zahlen. (Daß $\sqrt{b}$ tatsächlich auch für *irrationale* Werte von b erklärt ist, kann den Schülern nur *mitgeteilt*, aber nicht näher erläutert werden.)
- Wie kann man *entscheiden*, welche der folgenden Gleichungen wahre Aussagen darstellen?
  a) $\sqrt{36} = 18$ b) $\sqrt{36} = -6$ c) $\sqrt{36} = 6$
  Antwort: Damit $\sqrt{b} = a$ gilt, muß erstens $a^2 = b$ und zweitens $a \geqq 0$ sein.
  Im Beispiel a) ist die erste Bedingung nicht erfüllt,
  im Beispiel b) ist die zweite Bedingung nicht erfüllt.
  Nur im Beispiel c) sind beide Bedingungen erfüllt.

Aus der Antwort auf die erste Frage gewinnt man die Bedingung $b \geqq 0$, aus den Überlegungen zur zweiten die Definition der Quadratwurzel.

Wurzelziehen mit dem Taschenrechner und der Quadrattafel (2 Std.)

LE 9 (LB 104 bis 105)

Ziele

Die Schüler
- können mit dem Taschenrechner beliebige Quadratwurzeln bestimmen,
- können mit der Quadrattafel Wurzeln vor allem aus solchen Zahlen ermitteln, die im Bereich von 1 bis 100 liegen,

- wissen, daß Taschenrechner bzw. Quadrattafel oft nur Näherungswerte für die Wurzeln angeben,
- können mit dem Taschenrechner auch zusammengesetzte Terme, in denen Wurzeln vorkommen, richtig berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Verwenden der Wurzeltaste des Taschenrechners
- Aufstellen von Rechenablaufplänen für zusammengesetzte Terme

2. Stunde
- Verwenden der Quadrattafel für das Bestimmen von Wurzeln aus Zahlen, die zwischen 1 und 100 liegen
- Erläutern der Vorgehensweise bei Zahlen zwischen 0 und 1 bzw. über 100

Methodische Hinweise

Verwenden des Taschenrechners Es empfiehlt sich, mit den Schülern die Arbeitsweise des Taschenrechners an Aufgaben zu verdeutlichen, die man auch im Kopf lösen kann.

Beispiel: $9 \cdot \sqrt{4} = 18$

Vergleich von Rechenablaufplänen:

$9 \ \boxed{\times} \ \boxed{\sqrt{\ }} \ 4 \ \boxed{=}$ – Anzeige: 36 (also falsch)

$9 \ \boxed{\times} \ 4 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ \boxed{=}$ – Anzeige: 18 (also richtig)

Die Schüler müssen vor allem beachten lernen, daß stets *erst* der Radikand eingegeben bzw. berechnet sein muß, bevor die Wurzeltaste betätigt wird.

In vielen Fällen – insbesondere bei irrationalen Quadratwurzeln – zeigt der Taschenrechner nur *Näherungswerte* an. Quadriert man diese anschließend, so erscheint dennoch oft der Radikand in der Anzeige. Zum Beispiel erhält man mit dem SR 1 für $\sqrt{97}$ den Wert 9,8488578. Quadrieren dieser Zahl ergibt 97. Die Schüler könnten denken, daß der Taschenrechner den *genauen* Wert von $\sqrt{97}$ angezeigt hätte. In Wirklichkeit kommt dieser Effekt jedoch durch die Rundungsautomatik des Rechners und die Tatsache zustande, daß er mit mehr Ziffern rechnen kann, als er im Ergebnis anzeigt. Das wird deutlich, wenn man 97 subtrahiert:

$97 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ \boxed{x^2} \ \boxed{-} \ 97 \ \boxed{=}$

Der SR 1 zeigt jetzt *nicht* 0 als Ergebnis an, sondern $-0{,}0000001$.

Beim Berechnen zusammengesetzter Terme (wie in den Beispielen 10 und 11 oder in Aufg. 1) ist es zweckmäßig, zunächst gemeinsam mit den Schülern Rechenablaufpläne zu entwickeln und zu notieren, um sie zu befähigen, solche Terme zunehmend selbständig zu analysieren und entsprechende Rechenablaufpläne aufzustellen.

Verwenden der Quadrattafel Das Bestimmen von Quadratwurzeln mit der Quadrattafel wird bei Vorhandensein eines Taschenrechners zweifellos nicht die dominierende Ar-

beitsweise sein. Es sollte aber gesichert werden, daß die Schüler das prinzipielle Verfahren kennenlernen, vor allem für Zahlen von 1 bis 100, deren Quadratwurzeln unmittelbar der Tafel entnommen werden können. (Auf Interpolieren wird natürlich verzichtet.)
Für Zahlen zwischen 0 und 1 bzw. über 100 soll den Schülern an einigen Beispielen gezeigt werden, wie man auch in diesen Fällen die Quadratwurzel mit der Quadrattafel bestimmen kann. Dabei ist die Methode des Abtrennens geeigneter Zehnerpotenzen anzuwenden. Verallgemeinerte Regeln sind *nicht* anzustreben.

> *Kontrollaufgaben*
>
> Aufg. 1 und 4

Stoffabschnitt 4.3.

Komplexe Übungen (2 Std.)

LE 10 (LB 106 bis 107)

Methodische Hinweise

Es kommt in erster Linie darauf an, nicht nur formale Lösungsverfahren anzuwenden, sondern die Aufgaben auf der Grundlage einer *inhaltlichen* Analyse zu lösen, die in einigen Fällen (z. B. bei den Aufgaben 4 bis 6) auch zum Aufstellen eines Lösungsplanes führen sollte.

Bei der Aufgabe 2 c) beispielsweise könnten die Lösungsüberlegungen wie folgt aussehen:
Wenn $\sqrt{x : \sqrt{x}} = 1$ sein soll, muß $x : \sqrt{x} = 1$ sein; das ist nur möglich, wenn $x = \sqrt{x}$ ist. Letzteres ist nur der Fall für $x = 0$ und für $x = 1$. Der Fall $x = 0$ scheidet aus, weil $0 : \sqrt{0}$ nicht erklärt ist. Also bleibt nur $x = 1$ als mögliche Lösung. Die Probe bestätigt, daß $x = 1$ die Lösung der Gleichung ist.

Damit die Schüler in der Handhabung des Taschenrechners – vor allem in der Analyse von Termstrukturen und ihrer „Übersetzung" in Rechenablaufpläne – hinreichend sicher werden, ist zu empfehlen, dazu auch im Rahmen der „Komplexen Übungen" noch weitere Aufgaben zu stellen, z. B.:

1. Berechne!

   a) $\sqrt{939} - 4{,}1^2$ b) $6{,}35^2 + \sqrt{5{,}4}$

   c) $3{,}8^2 + 6{,}9^2$ d) $\sqrt{9{,}8^2 - 8{,}5^2}$

2. Welcher Term (welche Aufgabe) gehört zu folgenden Rechenablaufplänen?

   a) $7\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 13\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

   b) $3\ \boxed{\times}\ 10\ \boxed{\div}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

   c) $3\ \boxed{\times}\ 10\ \boxed{\div}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}$

d)* 10 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 6 $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\div}$ 1000 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$

(Solche Rechenablaufpläne wie in Aufg. 2 treten später z. B. bei Körperberechnungen tatsächlich auf:

a) Länge einer Pyramidenkante;
b) Radius eines Kreiskegels;
c) Höhe eines Kreiskegels;
d)* Höhe eines Hohlzylinders.)

Kontrollaufgaben

Aufg. 1, 3, 5, 8

Stoffgebiet 5

Darstellende Geometrie

Vorbemerkungen

Der Lehrplan fordert: „Das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler ist ... verstärkt zu entwickeln“ (LP 26).
Raumvorstellungen entwickeln sich durch das **Raumwahrnehmen** und können über das **Raumdarstellen** kontrolliert werden. Beide Tätigkeiten sind an die drei Darstellungsformen räumlicher Gegebenheiten gebunden: die räumlich-gegenständliche, die eben-bildhafte und die sprachlich-begriffliche Darstellungsform.

Einige Schülertätigkeiten in diesem Stoffgebiet:

	Raumwahrnehmen	**Raumdarstellen**
Räumlich-gegenständliche Darstellungsform	Betrachten von und Hantieren mit Demonstrationsmodellen, Modellen des Stereometrie-Baukastens und Aufbauten in der Maniperm-Klapptafel	Bauen von Körpern aus Netzen oder aus Stäbchen und Knetmasse Darstellen in einer Schüler-Klapptafel
Eben-bildhafte Darstellungsform	Betrachten von Bildern (Fotografien und Zeichnungen) auf unterschiedlichen Trägern (Lehrbuch, Wandtafel, Folie, Dia, usw.)	Konstruieren oder Skizzieren von Schräg-, Eintafel- und Zweitafelbildern
Sprachlich-begriffliche Darstellungsform	Lesen (und Hören) von Texten (Beschreibungen, Aufgaben usw.) auf unterschiedlichen Trägern (Lehrbuch, Wandtafel, Folie, Dia, usw.)	Beschreiben von räumlichen Sachverhalten und von Lösungen von Aufgaben

Der Lehrer sollte sich bemühen, sowohl alle drei Darstellungsformen dem Schüler zum Raumwahrnehmen vorzulegen als auch vom Schüler das Raumdarstellen in möglichst allen drei Darstellungsformen ausführen zu lassen. Dabei sollte sich jedoch im Laufe des Unterrichts die räumlich-gegenständliche Darstellungsform mehr und mehr überflüssig machen.
Das Veranschaulichen hat gerade in diesem Stoffgebiet eine sehr große Bedeutung. Dafür stehen unterschiedliche **Unterrichtsmittel** zur Verfügung, die möglichst aufeinander abgestimmt genutzt werden sollten. Auch die Unterrichtsmittel zur Rationalisierung der Lehrer- und Schülertätigkeiten (Arbeitsblätter, Lochschablone, ...) sollten genutzt wer-

den, da ohne sie die Ziele des Lehrplans in diesem Stoffgebiet nicht erreicht werden. Durch sie werden geeignete und auch einheitliche Sachverhaltsvorgaben zur Verfügung gestellt. Beim Arbeiten mit der Lochschablone sollten die Vorgaben auch an die Tafel gezeichnet werden. Dazu projiziere man ein Schülergerät mit dem Polylux an die Tafel.
Beim **Zeichnen** sollte beachtet werden, daß die Schüler die Zeichengeräte rationell nutzen (z. B. Verwenden von Zeichendreieck und Lineal) und auch zum Skizzieren anzuleiten und anzuhalten sind. Dabei ist auf eine hinreichende und zweckmäßige Genauigkeit großer Wert zu legen. Konstruieren und Skizzieren sollten nie in ein und derselben Zeichnung gemischt angewendet werden. Die Schüler haben im Geometrieunterricht und im Unterricht im technischen Zeichnen bereits Grundfertigkeiten im Konstruieren erlangt. Der Weiterentwicklung und Vervollkommnung der Zeichenfertigkeiten ist große Aufmerksamkeit zu schenken.

In diesem Stoffgebiet wird auf **Vorleistungen des Stereometrieunterrichts** aufgebaut, und neue stereometrische Inhalte werden eingeführt, z. T. ohne ihre Darstellungen in der Zeichenebene zu behandeln (z. B. Lagebeziehungen zwischen Punkt und Ebene). Der Begriff „Prisma“ muß an Modellen erläutert werden, weil er erst im Stoffgebiet „7. Stereometrie“ dieser Klasse behandelt wird. Die richtige Verwendung von Begriffen, z. B. „dreiseitiges Prisma“, ist für das Verstehen der Aufgabenstellungen von großer Bedeutung. „Prisma“ bedeutet in diesem Stoffgebiet stets – wie in Stoffgebiet 7 – „gerades Prisma“.

Auch in diesem Stoffgebiet sollte den Schülern die **Anwendbarkeit** der mathematischen Theorie in der Praxis gezeigt werden. Meist bezieht man sich dabei auf das technische Zeichnen und meint das im Maschinenbau benutzte. Es gibt aber auch andere wichtige Anwendungen, die genannt werden sollten, weil sie dem Schüler bekannt sind, z. B. die Darstellung des Geländes in Landkarten, die Architektur oder das Darstellen von Molekülmodellen in Schrägbildern. Da die Schüler in Klasse 7 auch im technischen Zeichnen unterwiesen werden, sollte der Mathematiklehrer auf eine saubere Unterscheidung zwischen Mathematik und technischem Zeichnen Wert legen. Darstellende Geometrie und technisches Zeichnen unterscheiden sich z. B. durch die darzustellenden Objekte (geometrische Gebilde des Raumes – technische Gegenstände) und die verschiedenen Darstellungsverfahren (Risse – Ansichten). Wenn im Unterricht der darstellenden Geometrie Bilder von Gegenständen (z. B. Verpackungsschachteln) gezeichnet werden, so sind das Anwendungsaufgaben. Man kann im Unterricht der darstellenden Geometrie z. B. die Aufgabe stellen: „Zeichne das Schrägbild dieses (vorgelegten) Spee-Pakets (eigentlich: … der Quaderform, die das Spee-Paket hat) im Maßstab 1:4!“. Als Lösung soll aber keine technische Zeichnung vom Spee-Paket angefertigt werden!
Die Standards für das technische Zeichnen sollten bis auf die Anwendung der Linienarten nicht übernommen werden. Wie im technischen Zeichnen werden dargestellt:

- breite Vollinie : „sichtbare“ Körperkanten,
- (breite) Strichlinie : „verdeckte“ Körperkanten,
- schmale Vollinie : Hilfslinien,
- schmale Strich-Punkt-Linie : Körper-, Symmetrieachsen.

Die Strichstärke wird nicht wie im technischen Zeichnen in Abhängigkeit vom Blattformat gewählt, da in der darstellenden Geometrie grundsätzlich nur mit Bleistift gezeichnet wird.

Kontrollaufgaben

1. Konstruiere das Schräg-, Eintafel- und Zweitafelbild
   a) eines Quaders ($a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm), wenn er
      - auf einer größten,
      - auf einer kleinsten

      Begrenzungsfläche steht;

   b) einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ($a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $h = 6$ cm)!
2. Beschreibe
   a) die Lage von Strecken bzw. die Stellung von Flächen der Körper aus Aufg. 1;
   b) die gegenseitige Lage von Eckpunkten und Kanten der Körper aus Aufg. 1!
3. Bestimme die wahre Größe und Gestalt der einzelnen Begrenzungsflächen aus den Eintafel- und Zweitafelbildern der Körper aus Aufg. 1!
4. Arbeitsblatt 32

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 5.1.:	Projektionsbegriff; Projektionsarten; schräge Parallelprojektion $\left(\alpha = 45°; q = \frac{1}{2}\right)$		(5 Std.)
Projektions-begriff; Parallel-projektion (LE 1 und 2)	2	– Optischer Projektionsbegriff – Begriffe „Original“, „Bild“, „eindeutig“ – Körperformen Quader, Würfel, Pyramide	– Projektion als eindeutige Abbildung – Zentralprojektion, Parallelprojektion, senkrechte Projektion – „Projektion“, „projizieren“, „Projektionsgerade“, „Bildebene“ – Einige Eigenschaften der Abbildung durch Parallelprojektion – „Verzerrungswinkel α“, „Verzerrungsverhältnis q“
Schrägbilder (LE 3)	3	– Parallelverschieben mit Zeichendreieck und Lineal	– Schräge Parallelprojektion $\left(\alpha = 45°, q = \frac{1}{2}\right)$ – Konstruieren und Skizzieren von Schrägbildern von Quadern und von Körpern ohne Kanten in Höhen- oder Tiefenrichtung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 5.2.:	Senkrechte Eintafelprojektion		(9 Std.)
Eintafelbilder (LE 4 und 5)	4	– Abbildung durch schräge Parallelprojektion – „umkehrbar eindeutig" bzw. „eineindeutig"	– „Senkrechte Eintafelprojektion" – Senkrechte Eintafelprojektion als eineindeutige Abbildung bei Verwendung eines Höhenmaßstabes – Eintafelbilder geometrischer Gebilde – Fallunterscheidungen bzgl. der Lage von Strecken und der Stellung ebener Figuren zur Bildebene
Wahre Länge und Neigungswinkel einer Strecke – (Grundaufgabe) (LE 6)	2	– Eigenschaften der Parallelprojektion – Eintafelbilder von Strecken und Körpern – Grundkonstruktionen der Planimetrie aus Klasse 6	– „Wahre Länge", „Neigungswinkel α (einer Geraden gegen die Bildebene)" – Konstruktion der wahren Länge einer Strecke und des Neigungswinkels α – Anwendungen
Wahre Größe und Gestalt ebener Figuren (LE 7)	3	– Eigenschaften der Parallelprojektion – Konstruktion der wahren Länge einer Strecke – Eintafelbild eines Körpers – Begriff „Höhenlinie" aus der Geographie	– Konstruktion der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren – „Höhenlinie", „Fallinie", „Stützdreieck", „Neigungswinkel β (einer Ebene gegen die Bildebene)" – Konstruktion des Neigungswinkels β
Stoffabschnitt 5.3.:	Senkrechte Zweitafelprojektion		(11 Std.)
Zweitafelbilder (LE 8 und 9)	5	– Eintafelbilder von geometrischen Gebilden – Bedeutung des Höhenmaßstabes zum Erzielen der Eineindeutigkeit bei der senkrechten Eintafelprojektion – Eigenschaften der Parallelprojektion	– Erreichen der Eineindeutigkeit durch Nutzen einer zweiten Bildebene – „Grundrißebene", „Grundriß", „Aufrißebene", „Aufriß", „Ordnungslinie", „Rißachse", „senkrechte Zweitafelprojektion" – Zweitafelbilder geometrischer Gebilde
Lagebeziehungen im Raum (LE 10)	1	– Lagebeziehungen in der Ebene – Zweitafelbild einer Geraden	– Lagebeziehungen zwischen Punkt – Gerade, Punkt – Ebene, Gerade – Gerade und Gerade – Ebene im Raum (ohne Projektionen) – Zweitafelbilder zweier Geraden

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Wahre Länge einer Strecke und ebener Schnitt durch ein Prisma (LE 11)	4	– Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke aus dem Eintafelbild – Grundkonstruktionen der Planimetrie aus Klasse 6 – Zweitafelbilder von Strecken – Eigenschaften der Parallelprojektion – Zweitafelbilder von Prismen – Höhenlinie, nullte Höhenlinie – Neigungswinkel β einer Ebene	– Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke – Anwendung dieser Konstruktion – Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur beim ebenen Schnitt eines Prismas
Zur Auswertung der Klassenarbeit			(1 Std.)
Stoffabschnit 5.4.: Komplexe Übungen			(5 Std.)
Dabei u. a.:	– Verwenden weiterer Aufrißebenen – Berechnen von Umfängen und Inhalten von Schnittfiguren und Begrenzungsflächen		
Klassenarbeit			(1 Std.)

Unterrichtsmittel

Bestellnummer

Filme:
- K-F 161 Darstellende Geometrie I, Bildentstehung — 24 6225
- K-F 162 Darstellende Geometrie II, Projektionsarten — 24 6233

Lichtbildreihe:
- R 1117 Sachverhalte, Stereometrie — 24 5031

Tonbildreihe:
- T-R 137 Zur Bedeutung der darstellenden Geometrie — 24 5433

Projektionsfolien:
- Ein- und Zweitafelprojektion *(Tafelprojektion)* — 25 7381
- Konstruktion der wahren Größe und Gestalt der Seitenfläche einer geraden Pyramide *(Wahre Größe)* — 25 7605
- Ebener Schnitt durch ein gerades dreiseitiges Prisma und durch einen geraden Kreiszylinder *(Ebener Schnitt)* — 25 7613
- Höhendarstellung in der Karte — 05 7413

Geräte und Modelle:

Lochschablone (Schülergerät)	04 0212
Stereometriemodelle (Fadenmodelle)	24 0197
Maniperm-Klapptafel	24 0068
Stereometriebaukasten I	04 0261
Stereometriebaukasten II	04 0278
Stereometriebaukasten III	04 0286

Stoffabschnitt 5.1.

Projektionsbegriff; Projektionsarten; schräge Parallelprojektion $\left(\alpha = 45°,\ q = \frac{1}{2}\right)$ (5 Std.)

Projektionsbegriff; Parallelprojektion (2 Std.)

LE 1 und 2 (LB 108 bis 111)

In der 1. Stunde sollte den Schülern die Bedeutung der darstellenden Geometrie (für die Praxis und damit auch für den Schüler selbst) bewußtgemacht werden. Die Projektionsarten werden nur kurz behandelt. Dabei sind Beziehungen zum Bewegungsbegriff aus Klasse 6 herzustellen.
Das Zeigen der räumlichen Sachverhalte mit Hilfsmitteln, z. B. mit einem Bleistift als Modell einer Strecke, einem Blatt Papier, der Tafel oder dem Tisch als Modell für eine Ebene u. a., hat im gesamten Unterricht der darstellenden Geometrie sehr große Bedeutung. Deshalb sollten diese Hilfsmittel für Lehrer und Schüler stets griffbereit liegen. Das ist vor allem in der 2. Stunde notwendig, da Begriffe behandelt werden, für die eine ausreichende anschauliche Basis zu schaffen ist.

Ziele

Die Schüler
- lernen die Bedeutung der darstellenden Geometrie kennen,
- erkennen die Projektion als eindeutige Abbildung der Punkte des Raumes auf eine Ebene,
- kennen die Zentralprojektion und Parallelprojektion sowie die senkrechte Projektion als Sonderfall der Parallelprojektion,
- kennen die Bilder von Strecken und ebenen Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, bei Parallelprojektion,
- kennen die bestimmenden Größen der Bilder bei schräger Parallelprojektion (Verzerrungswinkel α, Verzerrungsverhältnis q).

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Behandlung der darstellenden Geometrie
- Erarbeitung der Projektion als eindeutige Abbildung
- Erarbeitung der Projektionsarten und ihrer Zusammenhänge

2. Stunde
- Erarbeitung des Satzes über die Abbildung zur Bildebene paralleler Strecken und ebener Figuren bei Parallelprojektion
- Erarbeitung der Bilder bei schräger Parallelprojektion und ihrer bestimmenden Größen (Verzerrungswinkel α, Verzerrungsverhältnis q)

Methodische Hinweise

Motivierung der Behandlung der darstellenden Geometrie Es kann folgender Ablauf gewählt werden:
- Vorführen der T-R 137 (1. Teil), zu der Beobachtungsaufgaben gestellt werden (s. Beiheft).
- Austeilen von Würfelmodellen aus dem Stereometrie-Baukasten; die Schüler werden aufgefordert, ein Bild davon zu zeichnen. Daraus wird sich die Notwendigkeit ergeben, einheitliche Darstellungsverfahren zu behandeln.
- Besprechen der praktischen Bedeutung dieser (einheitlichen) Darstellungen; dazu können einzelne Dias des 2. Teils der T-R 137 gezeigt werden.

Auf Einzelheiten der mathematischen Begründung der Anwendungen wird noch nicht eingegangen; das erfolgt erst bei der späteren Behandlung der Darstellung in den einzelnen Projektionsarten.

Es kann auch vom einführenden Text des Lehrbuches ausgegangen werden. Die Beispiele können durch einzelne Dias aus T-R 137 unterstützt werden.

Erarbeitung der Projektion als eindeutige Abbildung Der Lehrplan fordert, vom optischen Projektionsbegriff auszugehen. In den Lichtkegel des Polylux sollte ein Kantenmodell eines Quaders gehalten werden. An diesem Sachverhalt werden die Begriffe „Original", „Bild", „Bildebene", „Projektionsgerade", „Projektion", „projizieren" (auch rechtschreiblich sichern!) erarbeitet, die Bezeichnung von Original- und Bildpunkten vereinbart (Zurückgehen auf das Bezeichnen bei der Bewegung in Klasse 6) und schließlich die Eindeutigkeit (Satz 1, Auftrag 1) der Abbildung durch einen Holzstab mit angebrachten Kugeln aus Knetmasse (siehe UH 148) veranschaulicht (oder an Dia 10 aus R 1117). Das kann auch an Bild E 2 erfolgen.

Erarbeitung der Projektionsarten ... Diese Betrachtungen erfolgen nur sehr kurz. Die Veranschaulichungen mittels Glühlampe (Polylux) und Sonnenlicht sollten möglichst demonstriert werden.

Da direktes Sonnenlicht im allgemeinen nicht zur Verfügung steht, bleibt oft nur ein Gedankenexperiment zur Erläuterung des Wesens der Parallelprojektion übrig. Auch wenn man einen Projektor weit von der Bildebene entfernt, erhält man nur annähernd paralleles Licht. Die oft verwendete Redeweise „Wenn die Lampe weit genug weg wäre, hätten wir paralleles Licht" ist, auf den betrachteten affinen Raum bezogen, falsch, denn in ihm sind alle Geraden, die einander in einem Punkt schneiden, nicht zueinander parallel. Wir vereinbaren, daß das Sonnenlicht bei kleinen Abständen zwischen Original und Bildebene als annähernd paralleles Licht angesehen werden soll.

Eine Projektion ist (im affinen Raum) entweder eine Zentralprojektion oder eine Parallelprojektion. Die Zusammenhänge zwischen den betrachteten Projektionsarten werden erarbeitet und als Mengenbeziehungen formuliert. Es kann folgende Übersicht als *Tafelbild* entstehen:

- Projektion
  - Zentralprojektion
  - Parallelprojektion
    - schräge Parallelprojektion
    - senkrechte Projektion

Ebenso können mit der Folie „Projektionsarten" die Begriffe und deren Zusammenhänge erarbeitet werden. Vor dem Einklappen der Überdeckfolien sollte der Ausgangssachverhalt durch die Wandtafel als Bildebene und einen Gegenstand (Klassenbuch), der als Original vor der Bildebene liegt, veranschaulicht werden. Man kann auch das Bild E 3 einsetzen.

Zur **Übung** können Teile des Arbeitsblattes 1 bearbeitet werden, das als **Hausaufgabe** zu vervollständigen ist. Eine Teilaufgabe der Aufgabe 1 des Arbeitsblattes wird gemeinsam gelöst. Die Vorgaben der Aufgabe 2 skizziert der Lehrer an die Wandtafel und hält einen Zeigestock in der Lage der Originalstrecke. Die Schüler zeigen diese Lagen mit einem Bleistift. Eine Originalstrecke der Aufgabe 2 wird eingetragen.

Erarbeitung des Satzes ... Aus den Lösungen des Arbeitsblattes 1 kann gefolgert werden, welche Gesetzmäßigkeiten die Abbildung durch Parallelprojektion auszeichnen. Mit Modellen sollten die Festlegungen zur Lage von Kanten und Strecken erarbeitet werden. Die Schüler sollten unbedingt mit den Hilfsmodellen veranschaulichen, denn hiermit werden Grundlagen für den gesamten weiteren Unterricht in darstellender Geometrie behandelt.

Übungen entsprechend den Aufträgen 2 und 3 sollten durchgeführt werden, wobei auf die verschiedenen Richtungen besonders eingegangen wird, in denen Körperkanten bei unterschiedlicher Stellung des Körpers zur Bildebene liegen können. Der Lehrer achte darauf, daß es an einem Quader zum Beispiel nicht *die* Kante in Breitenrichtung gibt, es muß auch nicht die längste Kante des Körpers sein. Der Satz 2 wird durch Veranschaulichung gewonnen und kann bewiesen werden (Auftrag 4). Auf die verschiedenen Bezeichnungen der zum Original kongruenten Bilder wird verwiesen; im folgenden Unterricht werden beide (wahre Länge – wahre Größe und Gestalt) erst genauer erklärt.

Erarbeitung der Bilder bei schräger Parallelprojektion Das Demonstrieren der schrägen Parallelprojektion ist sehr aufwendig und sollte deshalb nur andeutungsweise (wenn überhaupt) erfolgen.

Ein Fadenmodell eines Würfels wird mit dem Stativmaterial (Physik) vor einer haftbaren Wandtafel befestigt. Man lege mit einem Gummifaden, der am Modell und an einem Magneten befestigt ist, eine Projektionsrichtung fest und markiere mit Hilfe eines Zeigestockes einige weitere Punkte. Das endgültige (Schräg-)Bild sollte der Lehrer als Skizze ergänzen. An dieser Skizze kann die Abbildung von Körperkanten und die Erhaltung der Parallelität bei schräger Parallelprojektion (LB 110f.) erarbeitet werden.

Andere Möglichkeiten der Demonstration sind das Schattenbild eines (Faden-)Modells im Sonnenlicht oder der Film K-F 161.

Die Abhängigkeit des Bildes von der Projektionsrichtung kann durch den Film K-F 162 demonstriert werden. Die weitere Arbeit sollte am Bild E 6 erfolgen. Es werden die bestimmenden Größen eines Bildes bei schräger Parallelprojektion herausgearbeitet: der Verzerrungswinkel α und das Verzerrungsverhältnis q (in Bild E 6 messen!).

Da im weiteren Unterricht die Namen für spezielle Prismen und Pyramiden benötigt werden, sollte der Lehrer, in dieser Stunde beginnend, diese den Schülern mitteilen und danach festigen. Jeder Schüler sollte angeben können, welches Modell oder welche Zeichnung (Schrägbild) zum Beispiel ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma oder eine quadratische Pyramide darstellt. Für Übungen eignen sich neben Modellen des Stereometriebaukastens die Dias 19 und 20 aus R 1117.

Übungen Sie sollten mit Arbeitsblatt 2 durchgeführt werden (Aufg. 3 und 4 haben einen höheren Schwierigkeitsgrad). Bereits an dieser Stelle kann der Begriff „Schrägbild" und seine Schreibweise (z. B. „Schrägbild ($\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$)") eingeführt werden.

Kontrollaufgaben

1. Auftrag 3; **2.** Arbeitsblatt 2

Schrägbilder (3 Std.)

LE 3 (LB 111 bis 114)

Im Mittelpunkt steht zwar das *Konstruieren* von Schrägbildern beliebiger Prismen und Pyramiden, doch sollte dem *Skizzieren* ebenfalls Aufmerksamkeit geschenkt werden. Die „einfache Lage" der Körper (möglichst viele Kanten oder Flächen sind parallel oder senkrecht zur lotrechten Bildebene) wird bevorzugt.
Der sichere Umgang mit Zeichengeräten, zügiges und genaues Zeichnen (Konstruieren und Skizzieren) und richtige Platzaufteilung sind wesentliche Anliegen dieses Abschnittes. Die Fähigkeiten dazu sollten bei allen Schülern ausgebildet werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Konstruktion eines Schrägbildes,
- können Schrägbilder von Körpern zeichnen, auch von solchen, die nicht nur Kanten in den sogenannten Hauptrichtungen (Breite, Höhe, Tiefe) haben; sie finden geeignete Strecken in diesen Richtungen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes eines Quaders

2. Stunde
- Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes von Körpern ohne Tiefenkanten

3. Stunde
- Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes von Körpern ohne Höhenkanten
- Übungen (in allen 3 Stunden)

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes eines Quaders Wenn im Zusammenhang mit LE 2 noch nicht geschehen, wird der Begriff „Schrägbild" eingeführt. Der Lehrer sollte mit seiner Klasse vereinbaren, für die speziellen Schrägbilder mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$ die Schreibweise zu vereinfachen. Die Auswahl dieser Werte erfolgt aus Gründen der Anschaulichkeit und Einfachheit der Konstruktion.
Nach dieser Begriffserklärung werden die Konstruktionsschritte erarbeitet. Dazu sollte ein Quader genutzt werden, dessen Schrägbild schrittweise an der Tafel (durch Lehrer oder Schüler) und im Heft entsteht (Maße wähle der Lehrer selbst).
Auf zwei Dinge sei hingewiesen:

1. Es wird verabredet, die Bildpunkte in Schrägbildern wie Originalpunkte, also ohne Strich, zu bezeichnen.
2. Die Schüler sind zum richtigen Gebrauch der Bleistifte (hart – weich) anzuhalten. Das kann im Tafelbild unterstützt werden, indem dünn vorgezeichnet und mit dicken Kreidelinien nachgezeichnet wird (an der Tafel ruhig etwas übertreiben!).

Das Muster in Beispiel 1 sollte als **Teilzusammenfassung** genutzt werden.

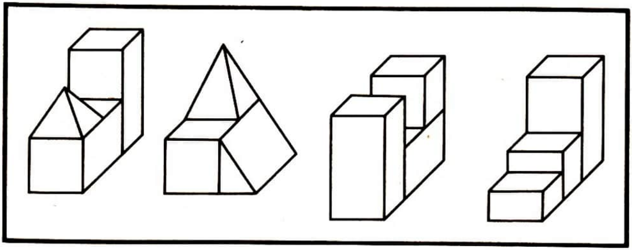
Zur **ersten Übung** können Arbeitsblatt 3 und Aufgabe 1 (auch an der Tafel) gelöst werden.

Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes von Körpern ohne Kanten in Tiefenrichtung Es ist zu empfehlen, an einem *Modell* eines dreiseitigen Prismas das Problem zu erläutern und die Schüler eine (Hilfs-)Strecke in Tiefenrichtung suchen zu lassen, die die Lösung ermöglicht. Bevor Körper dargestellt werden, können die Schüler im Arbeitsblatt 4/1 das Festlegen geeigneter Strecken in Tiefenrichtung an (Grund-)Flächen üben und so deren Schrägbilder konstruieren. Danach können folgende Aufgaben genutzt werden: Arbeitsblatt 4/2, 5/1 und 6/1; Aufg. 2, 4. Das Muster im Beispiel 1 sollte genutzt werden.

Erarbeitung der Konstruktion des Schrägbildes von Körpern ohne Kanten in Höhenrichtung Wieder sollte erst an einem Pyramiden*modell* eine (Hilfs-)Strecke in Höhenrichtung gesucht und deren Fußpunkt im Schrägbild der Grundfläche bestimmt werden. (Die Pyramidenhöhe wird von Schülern oft fälschlicherweise vom Mittelpunkt des Bildes der vorderen Grundkante aus abgetragen!)

Bei den **ersten Übungen** kann das Muster im Beispiel 1 genutzt werden.
Folgende Aufgaben stehen zur Verfügung: Arbeitsblätter 5/2 und 6/2; Aufg. 3.

Bild 5.1



Übungen Die Übungen sollte der Lehrer in jeder Stunde je nach dem erreichten Stand der Fertigkeiten im Konstruieren von Schrägbildern gestalten. Es ist unbedingt darauf zu achten, daß der Schüler auch Schrägbilder nach Maßen und nach Modellen (Aufg. 7) konstruieren kann, nicht nur nach Arbeitsblatt-Vorgaben.
Übungen zum Bezeichnen von Prismen nach Modellen oder Schrägbildern (aus dem Lehrbuch oder aus Arbeitsblättern) werden eingefügt, z. B. als tägliche Übung.
Aufgaben zum Skizzieren (Aufg. 8) und zum Bestimmen von Kantenlängen aus einem Schrägbild (Aufg. 5 und 6) lockern den Unterrichtsablauf auf und nehmen ihm die Einseitigkeit. Der Lehrer sollte auf eine Projektionsfolie einige Schrägbilder von zusammengesetzten Körpern zeichnen (Bild 5.1, UH 145), die aus Modellen des Stereometrie-Baukastens „nachgebaut" werden.
An den Dias 22, 23 und 24 aus R 1117 können die Beziehungen zwischen den realen Gegenständen (auf Fotografien) und den Schrägbildern der entsprechenden Körperform betrachtet werden (einander entsprechende Punkte sollten gezeigt werden).
Schüler mit entsprechendem Leistungsstand sollten Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades erhalten:
- Schrägbilder mit anderen Werten für α und q,
- Schrägbilder „nach links" ($90° \leqq \alpha < 180°$),
- Schrägbilder zusammengesetzter Körper (nach Modellen).

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1 und 5; **2.** Arbeitsblatt 5/1

Stoffabschnitt 5.2.

Senkrechte Eintafelprojektion (9 Std.)

Die senkrechte Projektion bildet den Gegenstand des weiteren Unterrichts in darstellender Geometrie der Klasse 7.
Aus methodischen Gründen ist die Festlegung wichtig, die *Bildebene horizontal* zu legen. Das Heft des Schülers oder die waagerechte Ebene der Manipermklapptafel liegen in der gewünschten Lage. Damit verlaufen alle Projektionsgeraden „von oben nach unten", also lotrecht. Die Manipermklapptafel kann selbstverständlich auch durch eine andere Blechtafel ersetzt werden, die, leicht geneigt aufgestellt, eine waagerechte Bildebene darstellen soll. Man umgeht damit das Vorhandensein der Aufrißebene. Die leichte Neigung sollte die Bildebene wegen des „Hineinsehens" der Schüler erhalten. Sie sollte dazu hoch genug aufgestellt sein.
Die Arbeit mit Modellen, Schrägbildern und Eintafelbildern sowie das Beschreiben der dargestellten Inhalte unterstützen die weitere Herausbildung der Raumvorstellungen.
Das Skizzieren sollte weiterhin geübt werden (auch bei Eintafelbildern).

Eintafelbilder (4 Std.)

LE 4 und 5 (LB 114 bis 117)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Festlegungen bezüglich der Lage der Bildebene und der Richtung der Projektionsgeraden,
- erkennen Notwendigkeit und Bedeutung des Höhenmaßstabes,
- kennen die Abhängigkeit der Eintafelbilder geometrischer Gebilde von deren Lage oder Stellung zur Bildebene,
- können Eintafelbilder nach verschiedenen Vorgaben konstruieren sowie im Eintafelbild gegebene Körper erkennen,
- kennen einige Anwendungen, die auf der senkrechten Eintafelprojektion beruhen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der senkrechten Eintafelprojektion

2. Stunde
- Erarbeitung der Eintafelbilder von Strecken, Geraden und ebenen Figuren

3. und 4. Stunde
- Erarbeitung der Eintafelbilder von Körpern und Übungen dazu

Methodische Hinweise

Erarbeitung der senkrechen Eintafelprojektion Nach einer Wiederholung der bisher betrachteten Parallelprojektion wird nun auf die im weiteren Unterricht zu verwendende Abbildung übergeleitet. Es sollte wiederholt werden, *wie* bisher die Bildebene aufgestellt wurde und *wo* das Original zur Bildebene lag. Zum gesamten Problem kann nochmals der Film K-F 162 genutzt werden. Gemeinsam wird erarbeitet, daß die senkrechte Projektion ein Sonderfall der Parallelprojektion ist und daß bei dieser die Lage des Originals im Raum (Abstand von der Bildebene) keinen Einfluß auf das Bild hat. Dieser Sachverhalt sollte unbedingt demonstriert werden.

Bei schräger Parallelprojektion wurde nicht darauf hingewiesen, daß eine Verschiebung des Originals in Projektionsrichtung das Bild unverändert läßt. Die Untersuchung der Raumlage des Originals bei gegebenem Schrägbild unterblieb.

Nun folgen die Festlegungen für den weiteren Unterricht:
Lage der Bildebene: *horizontal,*
Richtung der Projektionsgeraden: *lotrecht* („von oben nach unten"),
Lage des Originals: *über der Bildebene,*
Name des Bildes: *Riß,*
Bezeichnung des Risses eines Punktes P: P'.

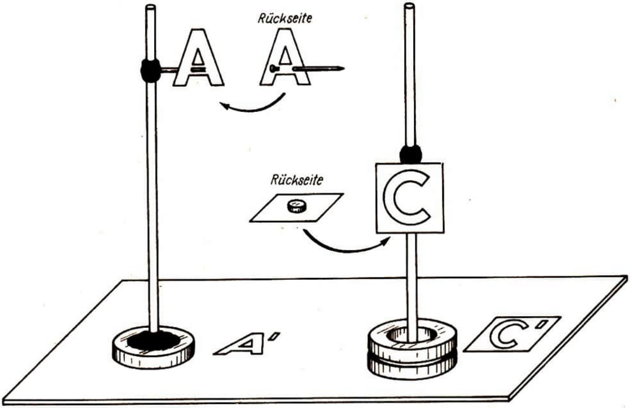


Bild 5.2

Zur Veranschaulichung wird vorgeschlagen (Bild 5.2):
1 Magnetring gefüllt mit Knetmasse, in die ein Holzstab gesteckt wird;eine Kugel aus Knetmasse am Holzstab; Bezeichnungselemente (Pappscheiben mit Buchstaben und einer Nadel zum Anbringen am Holzstab); oder:
2 Magnetringe; ein Eisenstab mit angelöteter, runder Platte, die zwischen die beiden Magnete gelegt wird; eine Kugel aus Knetmasse; Bezeichnungselemente (Pappscheiben mit Buchstaben auf einen kleinen Magneten geklebt).

Die Schüler zeichnen in ihr Heft Punkte entsprechend der Anzahl der aufgebauten Stäbe und bezeichnen diese Bildpunkte (zur Punktvorgabe kann die Lochschablone genutzt werden). Eine gleiche Darstellung entsteht an der Wandtafel. An dem oben beschriebenen Aufbau (Bild 5.2) können Notwendigkeit und Bedeutung des *Höhenmaßstabes* erarbeitet werden. Dazu werden weitere Stäbe mit Kugeln aus Knetmasse (in verschiedenen Höhen) aufgestellt (mit Bezeichnungselementen) und auch mehrere solcher Kugeln an einem Stab angebracht.
Es wird festgestellt, daß aus dem Riß nur dann auf das Original und seine Raumlage geschlossen werden kann, wenn man dessen *Abstand zur Bildebene* bzw. dessen *Höhe* kennt. Jetzt können die Höhen gemessen und auf einem Höhenmaßstab abgetragen werden.

Auch entgegengesetzte **Übungen** sind möglich, wobei jedoch die Lage des Risses nicht genau angegeben werden kann. Die Aufgabe sollte deshalb nur lauten: „Von einem Punkt M kennt man seine Höhe $h = 3{,}7$ cm. Lege einen Punkt als Riß und einen Punkt auf dem Höhenmaßstab fest!“

Es sollte Auftrag 6 bearbeitet werden. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß von dem Körper das angegebene Bild entsteht.
Der Begriff „Eintafelbild“ wird als eine vereinfachte Sprechweise festgelegt. Die Schüler müssen erkennen, daß der Riß allein in unserem Sinne *kein* Eintafelbild eines geometrischen Objektes ist, sondern nur der *Riß mit dem zugehörigen Höhenmaßstab.* Es wird herausgearbeitet, daß bei der senkrechten Eintafelprojektion jedem Originalpunkt genau ein

Punktpaar (Riß des Punktes – Punkt auf dem Höhenmaßstab) zugeordnet wird und umgekehrt (eineindeutige Abbildung).
Die Begriffe sollten wie folgt verwendet werden:
Senkrechte Eintafelprojektion – Abbildung von geometrischen Objekten des Raumes auf eine (horizontale) Bildebene durch senkrechte Projektion (Vorgang);
Riß – Bild bei der senkrechten Eintafelprojektion in der Bildebene;
Eintafelbild – Riß und zugehöriger Höhenmaßstab.

Mit der Folie „Tafelprojektion" kann eine **Zusammenfassung** erfolgen. Der Inhalt der linken Hälfte (räumliche Darstellung – ÜF 1a)) wird parallel an einem Pyramidenmodell in der Maniperm-Klapptafel erörtert. Die ebene Darstellung in der rechten Hälfte bleibt verdeckt und wird erst in den folgenden Stunden betrachtet. Gleichzeitig wird das bei der Einführung des Höhenmaßstabes entstandene Tafelbild verwendet.
Zur **Übung** kann Aufgabe 1 (LE 4) gelöst werden.

Zum Abschluß kann kurz auf einige Anwendungen der senkrechten Eintafelprojektion an den Dias 18 bis 21 der T-R 137 eingegangen werden. Dabei werden andere Möglichkeiten, die Höhen von Punkten anzugeben, genannt und eventuell Landkarten betrachtet.

Hinweis: In Schrägbildern und auch in Eintafelbildern sollten anfangs die Punkthöhen farbig gezeichnet werden. Später kann man sich – vor allem bei Körpern – auf wichtige Punkte beschränken. Das erleichtert den Schülern die Analyse von Eintafelbildern.

Behandeln der Eintafelbilder von Strecken, Geraden und ebenen Figuren In einer **Wiederholung** sollte ausführlich das Eintafelbild eines Punktes behandelt werden, insbesondere die Bedeutung des Höhenmaßstabes. Das sollte durch Zeichenübungen an der Tafel und im Heft unterstützt werden. Weiterhin wird wiederholt, daß eine Strecke genau festgelegt ist, wenn man deren Endpunkte kennt. Hilfsmodelle für Strecken sollten genutzt und bereitgehalten werden.
Die **Erarbeitung** der Eintafelbilder von Strecken und ebenen Figuren kann an den Bildern E 13 und E 15 (Aufträge 7 und 9) als selbständige Schülerarbeit durchgeführt werden. Für das erste Beispiel sollte die Wenn-so-Form gemeinsam erarbeitet werden; also: „Wenn die Strecke parallel zur Bildebene liegt, so ist der Riß eine zum Original kongruente Strecke".

Bei diesen Übungen wird nicht das Eintafelbild der Strecke betrachtet, sondern nur der jeweilige Riß, da durch die sonst nötige Beschreibung der Punkte auf dem Höhenmaßstab sehr komplizierte Formulierungen entstehen würden. Es kommt jedoch darauf an, die Schüler die ausgezeichneten Lagen von Strecken und ebenen Figuren erkennen zu lassen, weil diese später wichtig werden.

Bei der **Erarbeitung** der Eintafelbilder von Geraden ist darauf zu achten, daß als Bilder nur Geraden und Punkte auftreten können, damit nicht bei schräger Lage der Geraden von einer „verkürzten Geraden" als Bild gesprochen wird.

Für **Übungen** und **Hausaufgaben** können folgende Aufgaben genutzt werden:
- Aus den Vorgaben der Arbeitsblätter 8 und 10 werden
  - Kanten und Flächen zu vorgegebener Lage oder Stellung als Beispiele gesucht,
  - Kanten und Flächen ausgewählt, deren Lage oder Stellung zur Bildebene bestimmt wird.

  Stets wird das Eintafelbild der Kanten bzw. Flächen ins Heft und an die Tafel skizziert, aber nicht das Arbeitsblatt (entsprechend dessen Aufgabenstellung) bearbeitet. Das erfolgt erst bei der Behandlung des nächsten Schwerpunktes.
- Das Arbeitsblatt 11 wird eingesetzt. Zuerst wird bei Strecken die Raumlage bestimmt. Im Schrägbild werden
  - Hilfslinien in Tiefenrichtung und deren zugeordnete Linien in der Zeichenebene eingetragen,

- die Tiefen im Schrägbild gemessen und in die Zeichenebene eingetragen,
- die Höhen der Punkte gemessen und in den Höhenmaßstab eingetragen.

– An die Wandtafel werden Eintafelbilder von Strecken und ebenen Figuren skizziert, zu denen die Raumlagen der Originale angegeben werden (Hilfsmodelle verwenden!). Bei ebenen Figuren beschränke man sich auf Dreiecke. Ebenso können zu Raumlagen mögliche Eintafelbilder skizziert werden, wobei stets mehrere Eintafelbilder entstehen sollten.
– Die Bilder 5.3 und 5.4 werden auf je eine Folie übertragen.

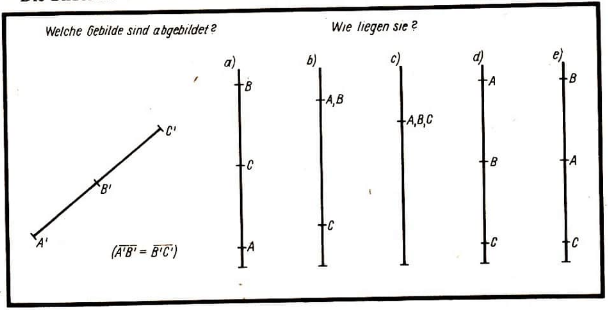


Bild 5.3

Die Bilder 5.3 und 5.4 können auch als Arbeitsblatt (Format A 5) vom Lehrer hergestellt werden. Zum Bearbeiten nutzen die Schüler Überhängefolien; dann kann das Arbeitsblatt mehrere Jahre verwendet werden.
Es werden im Bild 5.4 gleiche Risse (a), b)) und gleiche Höhenmaßstäbe (b), c) bzw. d), e)) vorgegeben. Die Lösungen zu den Aufgaben a) bis e) sind vom Schüler zu begründen, während bei f) nur eine Vermutung ausgesprochen werden kann. Eine Begründung kann der Schüler erst nach der Behandlung der Konstruktion der wahren Länge einer Strecke geben. Für einen analytischen Beweis sind die Kenntnisse aus der Ähnlichkeitslehre (erst in Klasse 8) notwendig.

Hinweis: Aus drucktechnischen Gründen wurde im Lehrbuch der Teil zu ebenen Figuren *nach* dem zu Körpern angeordnet, ist aber *vor* jenem zu behandeln.

Erarbeitung der Eintafelbilder von Körpern und Übungen dazu In dem Bild E 14 sind drei Eintafelbilder von Körpern angegeben. Zunächst wird die vereinbarte Punktbezeichnung an Körpern, die schon beim Schrägbild verwendet wurde, wiederholt (siehe Bild E 8, LE 3).
Sodann werden die in dieser Lerneinheit gewonnenen Erkenntnisse über das Abbilden von Punkten, Strecken und ebenen Figuren angewandt, um die Bilder von Körpern zu gewinnen. Die Schüler können dem Bild E 14 entsprechende Modelle des Stereometrie-Baukastens (Maße stimmen nicht überein, nur die Form) erhalten. Der Riß wird durch Umfahren des auf dem Zeichenblatt liegenden Modells erhalten; die Höhen werden am Modell gemessen und in einen Höhenmaßstab eingetragen.

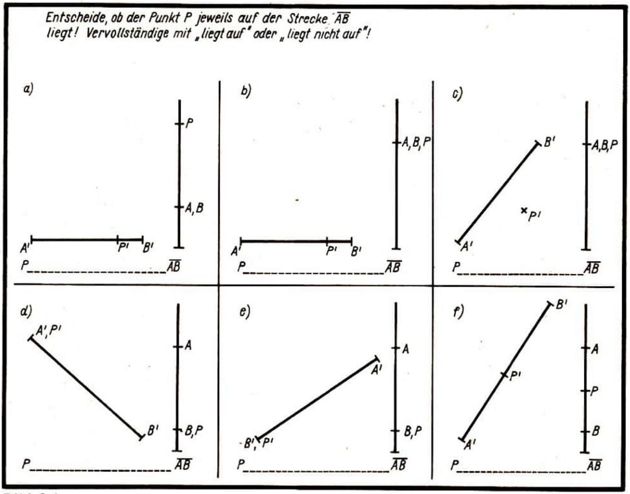


Bild 5.4

In den **Übungen** werden folgende Aufgabentypen berücksichtigt:

Vorgabe der Aufgabe	**Auftrag**	**Beispiel**
Modelle des Stereometrie-Baukastens	Konstruiere das Eintafelbild!	analog Aufg. 7 (LE 3)
Maße des Körpers		analog Aufg. 1 (LE 3)
Schrägbild eines Körpers		Arbeitsblätter 7 und 9; Aufg. 1 (LE 5)
Eintafelbild eines Körpers	Erkenne den Körper! Stelle ihn durch Modelle dar!	Aufg. 2 (LE 5)
	Konstruiere das Schrägbild!	Arbeitsblätter 8 und 10
	Bestimme die Maße des Körpers!	analog Aufg. 5 (LE 3)

Bereits an dieser Stelle können einzelne Schüler beauftragt werden, nach Eintafelbildern Netze und daraus Modelle anzufertigen. Dazu eignet sich vor allem Aufgabe 2, da einige Eintafelbilder relativ hohe Anforderungen stellen.

Als **Hausaufgabe** zur Vorbereitung der LE 6 kann das Ausfüllen folgender Tabelle zum Körper im Bild E 11a) gefordert werden (in den Klammern die Lösungen):

Lage der Kanten zur Bildebene (s. Bild E 13)	Bezeichnungen aller Kanten mit dieser Lage	Länge der Bilder der Kanten im Vergleich zum Original
(parallel) (geneigt) (senkrecht)	($\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{EF}, \overline{GH}$) ($\overline{EH}, \overline{FG}$) ($\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}, \overline{DH}$)	(kongruent, wahre Länge) (verkürzte Strecke) (Punkt)

Kontrollaufgabe

Aufg. 2 (Arbeitsblätter 8 und 9)

Wahre Länge und Neigungswinkel einer Strecke – (Grundaufgabe) (2 Std.)

LE 6 (LB 117 bis 120)

In dieser Lerneinheit lernen die Schüler ein Verfahren kennen, mit dem die tatsächliche (wahre) Länge von Strecken sowie ihr Neigungswinkel bestimmt werden können, wenn diese nicht sofort angebbar sind.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke,
- arbeiten rationell, d. h., sie wenden die Konstruktion nur bei geneigter Lage der Strecke an,
- können den Neigungswinkel α einer Geraden (Strecke) durch Konstruktion bestimmen,
- erwerben weitere Sicherheit im Konstruieren.

Schwerpunkte

- Erarbeitung der Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer (geneigten) Strecke – Grundaufgabe
- Erarbeitung der Konstruktion zur Bestimmung des Neigungswinkels α einer Geraden (Strecke) gegen die Bildebene – Grundaufgabe

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge ... Liegt eine Strecke parallel oder senkrecht zur Bildebene, kann die *wahre Länge* dieser Strecke sofort angegeben werden (ohne Konstruktion). Es soll nun eine Konstruktion gefunden werden,

die die Bestimmung der wahren Länge auch einer *geneigten* Strecke ermöglicht. (Neben dieser innermathematischen Motivierung kann die im Lehrbuch (LB 117) angegebene außermathematische herangezogen werden.)
Die Bedingung – geneigte Strecke – sollte von Anfang an als wesentlich herausgestellt werden, weil der Schüler stets erst die Lage der Strecke feststellen soll, um danach zu entscheiden, ob eine Konstruktion überhaupt notwendig ist oder nicht.

Zum **Erarbeiten** der Konstruktionsschritte kann in der Maniperm-Klapptafel ein dem Bild E 17 entsprechendes Modell der Strecke $\overline{PQ}$ aus Stäben aufgebaut werden. Aus Pappe wird ein zum Modell passendes Trapez hergestellt. Die „Höhenstäbe" des Modells und die entsprechenden Seiten des Trapezes werden farbig dargestellt. Aus dem Klappen des Trapezes gewinnt man die Konstruktionsschritte, die im Beispiel 2 ausführlich dargelegt sind. Die Konstruktion sollte parallel dazu an der Wandtafel entstehen.
Jeder Schüler sollte in einer Schüler-Klapptafel und mit Hilfsmodellen (ein Stift, vielleicht sogar ein Trapez aus Pappe) mitarbeiten und möglichst selbständig den Konstruktionsweg finden (Bild E 18).

Bauanleitung für eine Schüler-Klapptafel (nach KNUTH):
2 Pappen A 5; Leukoplast als „Scharnier", doppelt, trocken pudern; auf beiden Seiten Zeichenkarton oder Folie aufkleben (zum Skizzieren, evtl. Überhängefolie nutzen). Dazu Hilfsmodelle nutzen.
Diese Schüler-Klapptafel sollte bereits bei der Behandlung der senkrechten Eintafelprojektion möglichst umfassend genutzt werden (hier noch ohne Aufrißebene), später unbedingt.
Der Lehrer sollte sich die Folie „Wahre Länge einer Strecke" [3] selbst herstellen und bei der Erarbeitung, Übung und Anwendung einsetzen. Das lohnt sich insofern, da sie bei der Behandlung der senkrechten Zweitafelprojektion noch einmal zum Einsatz kommen kann.

Die **erste Übung** sollte parallel im Heft und an der Tafel erfolgen (Aufg. 1a)), wobei an der Tafel mehrere Schüler schrittweise die Konstruktion durchführen.
Weitere Übungen: Arbeitsblatt 12, Aufg. 1b) bis g), Aufg. 2. Auch die Umkehrung der Aufgabenstellung (gegeben: Strecke; gesucht: Eintafelbild) wird betrachtet (Aufg. 3).

Erarbeitung der Konstruktion zur Bestimmung des Neigungswinkels α... Zunächst sollte der Neigungswinkel α einer Geraden gegen die Bildebene eingeführt werden (Bild E 19a)). Genau genommen müßte dieser Winkel „Neigungswinkel α der durch die Strecke $\overline{PQ}$ gehenden Geraden PQ gegen die Bildebene" genannt werden. Das sollte am Bild E 19a) erklärt werden, wobei der Beweis (Auftrag 11) geführt werden kann. Im folgenden sollte dann der Neigungswinkel Strecken (und Kanten) zugeordnet werden, ohne jedesmal auf die Gerade Bezug zu nehmen. Nach der Begriffsklärung wird die Größe von α in Abhängigkeit von der Lage der Strecke zur Bildebene (Auftrag 12) betrachtet.
Die Konstruktion des Neigungswinkels α (Beispiel 3) sollte nicht gesondert herausgestellt werden, sondern nur als Ergänzung zu der vorher behandelten Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke.

Aufgaben für **Übungen** und **Anwendungen:** Arbeitsblatt 13, Aufg. 1; Arbeitsblätter 14 und 15, Aufg. 5
Mit der Bearbeitung der Aufgabe 4 wird eine Verbindung zur Abbildung von Punkten hergestellt. Der Lehrer sollte aber unbedingt vorher an dem Streckenmodell, das zur Einführung in diese Lerneinheit genutzt wurde, und mit einem Punktmodell den Sachverhalt demonstrieren (in der Schüler-Klapptafel mitarbeiten lassen).

Kontrollaufgabe

Aufg. 1a); (Arbeitsblatt 13)

Wahre Größe und Gestalt ebener Figuren (3 Std.)

LE 7 (LB 120 bis 122)

Diese Lerneinheit weist bereits vom Lehrbuch her die Besonderheit auf, daß zwei Wege zur Lösung angegeben sind. Während der erste Konstruktionsweg unmittelbar an die LE 6 anknüpft, wird beim zweiten die Klappung der Seitenfläche in die Bildebene um die in dieser Ebene liegende Kante verwendet. Die Erklärungen erfolgen alle an Pyramiden. Beide Wege verlangen ein relativ gut entwickeltes Raumvorstellungsvermögen der Schüler. Deshalb muß dem Veranschaulichen der Konstruktionswege und ihrer Gewinnung sowie dem Beschreiben und Ausführen der Konstruktionen große Aufmerksamkeit gewidmet werden.
Am Ende der Lerneinheit sollte eine Kurzkontrolle zum bisher vermittelten Stoff der darstellenden Geometrie geplant werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Höhenlinie", „Fallinie", „Stützdreieck einer Ebene", „Neigungswinkel β einer Ebene gegen die Bildebene",
- können die Konstruktionen zur Bestimmung des Neigungswinkels β und zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt von geneigten Begrenzungsflächen eines Körpers ausführen,
- vervollkommnen ihre Zeichenfertigkeiten,
- vertiefen ihre Raumvorstellungen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung des 1. Konstruktionsweges
- Einführung von „Höhenlinie" und „Fallinie"
- Einführung von „Neigungswinkel β einer Ebene gegen die Bildebene" und dessen konstruktive Bestimmung
- Erarbeitung des 2. Konstruktionsweges
- Übungen

Methodische Hinweise

Erarbeitung des 1. Konstruktionsweges Der Lehrer kann diesen Weg durch die Schüler selbst erarbeiten lassen. Die Schüler bestimmen an verschiedenen Prismen- und Pyramidenmodellen, welche Flächen in wahrer Größe und Gestalt abgebildet werden (mit Satz 2 begründen) und welche nicht. Da im folgenden nur Seitenflächen von Pyramiden (Auftrag 13) betrachtet werden, wird erarbeitet, wann ein Dreieck konstruiert werden kann (Wiederholung der Kongruenzsätze aus Klasse 6, insbesondere (sss)).
Die Bestimmung der wahren Länge der Seitenkanten erfolgt mit der Konstruktion aus LE 6 (Auftrag 14). Die Schüler sollten erkennen, daß das Bestimmen der wahren Größe und Gestalt einer Pyramidenseitenfläche eine (innermathematische) Anwendung der Konstruktion zum Bestimmen der wahren Länge einer Strecke ist. Durch das Bewußtmachen der Zusammenhänge kann das Erfassen der neuen Aufgabe erleichtert werden.

Der Lehrer achte darauf, daß jeder Schüler im Eintafelbild der Pyramide den Riß der fraglichen Kante (es kann bekanntlich jede benutzt werden) findet, die Höhe richtig vom Bild der Pyramidenspitze aus anträgt und die Kreise um die richtigen Punkte (B', C') mit dem richtigen Radius $\overline{(B'(S)_1)}$ zeichnet (Bild E 21).

Einführung von „Höhenlinie" und „Fallinie" Bei der Einführung der *Höhenlinie* sollte an die Kenntnisse aus dem Geographieunterricht angeknüpft werden, in dem die Schüler (auch bereits im Heimatkundeunterricht) kennengelernt haben, wie man in Landkarten die Höhen von Geländepunkten angibt. Dazu sollten Landkarten mit Höhenlinien und die Folie „Höhendarstellung auf der Karte" genutzt werden. In gleicher Weise werden nun die Höhenlinien auf (geneigten) Ebenen erklärt. Es wird als Besonderheit herausgestellt, daß alle Höhenlinien einer Ebene (oder einer ebenen Figur) zueinander parallel sind. Die gleiche Eigenschaft haben deren Bilder. Für die späteren Anwendungen ist die nullte Höhenlinie h_0 von Bedeutung. Sie liegt in der Bildebene und fällt deshalb mit ihrem Bild zusammen ($h_0 = h_0'$).
Die *Fallinie* sollte an einem Modell eingeführt werden.

Auf ein Stück Pappe werden einige Höhenlinien aufgetragen. Eine Kugel wird in Kreidestaub gewälzt und von einem Punkt der leicht geneigt liegenden Ebene rollen gelassen. Dabei markiert die Kugel ihren Weg.

Die Eigenschaft der Fallinie, senkrecht zu den Höhenlinien der Ebene zu liegen, erkennen die Schüler aus dem Experiment; die Lage der Bilder der Fallinien zu den Bildern der Höhenlinien wird mitgeteilt (Bild E 22).

Zur **Übung** kann zu den Körpern in den Bildern E 16b) bis d) (LE 5) die Tabelle ausgeführt werden. Die Körper sollen dabei auf der Bildebene stehen.

Körper	Begrenz.-fläche	Folgende Kanten des Körpers liegen auf einer Höhenlinie	nullten Höhenlinie	Fallinie
b)	*BED*	($\overline{DE}$)	(–)	($\overline{EB}$)
c)	*ABE*	($\overline{AB}$)	($\overline{AB}$)	($\overline{AE}$)
d)	*AEF*	($\overline{EF}$)	(–)	(durch A')

Einführen von „Neigungswinkel β ..." Der Begriff „Neigungswinkel β einer Ebene" sollte aus Veranschaulichungen gewonnen und in Verbindung mit dem oben beschriebenen Versuch (Kugel-Fallinie) eingeführt werden. Er kann **motiviert** werden, indem die Stärke des Gefälles einer Ebene angegeben werden soll. Daß diese Angabe auch praktische Bedeutung hat, kann an den Beispielen in [B 6; S. 28 ff.] und an Bild A 3 (LB 24) erklärt werden. Allerdings wird in der Praxis der Neigungswinkel oft indirekt angegeben, z. B. in Prozent oder als Verhältnis.
Aus Bild E 23a) sollen die Schüler erkennen, daß beide Schenkel des Neigungswinkels β zur Höhenlinie h_0 senkrecht stehen. An Modellen sollten nun Neigungswinkel geneigter Begrenzungsflächen gesucht und – wenn möglich – gemessen werden. Besonders geeignet ist hierzu das Fadenmodell der rechteckigen Pyramide, da durch Fäden die Fallinien angegeben sind und Modelle der Stützdreiecke der Seitenflächen zur Verfügung stehen. Damit ist der Übergang zum Begriff „Stützdreieck einer Ebene" gegeben. Vor dessen Konstruktion wird herausgearbeitet, daß zwei Vorgaben nötig sind:
1. eine Höhenlinie der Ebene (z. B. h_0) und
2. ein Punkt dieser Ebene (durch sein Eintafelbild).

Der Konstruktionsweg (Beispiel 4) sollte aus Veranschaulichungen gewonnen werden, z. B.:
- Umklappen eines Stützdreiecks im Fadenmodell der rechteckigen Pyramide
- Mit einem Zeichendreieck stützt jeder Schüler eine Platte in der Schüler-Klapptafel (siehe UH 153) ab, hält diese in dieser Lage fest und klappt nun das Zeichendreieck in die Bildebene (darauf achten, daß der rechte Winkel des Zeichendreiecks richtig liegt!).
- In der Folie „Wahre Größe" wird in der Überdeckfolie 1 die Konstruktion des Stützdreiecks gezeigt.

Nach dem Gewinnen der Konstruktion sollten nach freien Vorgaben (beliebig vom Schüler auf dem Zeichenblatt festgelegt) einige Stützdreiecke konstruiert und darin der Neigungswinkel β gemessen werden.

Erarbeitung des 2. Konstruktionsweges Die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt einer Pyramidenseitenfläche ist eine (innermathematische) Anwendung der vorigen. Es kommt also hauptsächlich darauf an, die notwendigen Vorgaben (Höhenlinie – Punkt der Ebene) im Eintafelbild des Körpers zu suchen und zu markieren. Das wird zunächst an Modellen und an Eintafelbildern geübt. Erst danach erarbeiten sich die Schüler nach Auftrag 16 die Konstruktion (Beispiel 5). Zur Unterstützung kann die Folie „Wahre Größe" genutzt werden. In den Überdeckfolien 1 (Stützdreieck) und 2 werden die Konstruktionsschritte komplex gezeigt.

Übungen Zunächst sollten an verschiedenen Vorgaben die wahre Größe und Gestalt von Pyramidenseitenflächen bestimmt werden: Aufg. 1, Arbeitsblatt 16; Aufg. 3 aus LE 3, Arbeitsblätter 10 und 14, Vorgaben der Eintafelbilder mit der Lochschablone. Die Neigungswinkel können gemessen werden.
Das Übertragen auf Prismen (Arbeitsblatt 17) sollte zunächst an entsprechenden Modellen aus dem Stereometriebaukasten erfolgen, ehe konstruiert wird.
Einen gewissen Höhepunkt der Schülertätigkeit stellt das Lösen der Aufgabe 2 dar, die, als **Hausaufgabe** vollendet, zu weiteren Bastelarbeiten von Modellen für den Mathematikunterricht anregen sollte.

Kontrollaufgabe Aufg. 1

Stoffabschnitt 5.3.

Senkrechte Zweitafelprojektion (11 Std.)

Die Behandlung der senkrechten Zweitafelprojektion erfolgt in Analogie zur senkrechten Eintafelprojektion. Dabei sollten der im Prinzip gleichartige Aufbau (Abbilden von Punkten, Strecken, ebenen Figuren, Körpern; Bestimmen von zu Originalen kongruenten Figuren), die relativ gleichen Konstruktionsschritte zum Bestimmen der wahren Längen von Strecken, aber auch einige Unterschiede hervorgehoben werden. Die Bedeutung der zweiten Bildebene anstelle eines Höhenmaßstabes für das Erzielen der Eineindeutigkeit sollte besonders bewußtgemacht werden. Die Häufung vieler neuer Begriffe beim Einführen der senkrechten Zweitafelprojektion erfordert intensive Übungen, damit sie recht schnell richtig verwendet werden. Neben den Verbindungen innerhalb des Stoffgebietes sind die Anwendungen hervorzuheben. Dabei sollte aber kein Unterricht im technischen Zeichnen erteilt werden. Das betrifft die Begriffsbildung in gleicher Weise wie die Normungen bezüglich der Anfertigung von Zeichnungen.

Zweitafelbilder (5 Std.)

LE 8 und 9 (LB 124 bis 127)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Angabe der Punkthöhen mittels einer zweiten Bildebene senkrecht zur Grundrißebene,
- kennen die Begriffe „Grundrißebene", „Grundriß", „Aufrißebene", „Aufriß", „Rißachse", „Ordnungslinie",
- können aus dem Zweitafelbild eines geometrischen Objektes seine Raumlage angeben (z. T. durch normierte Redewendungen) und umgekehrt (sofern möglich),
- kennen Anwendungen, die auf der senkrechten Zweitafelprojektion beruhen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung in die senkrechte Zweitafelprojektion (einschl. eines Punktes)

2. Stunde
- Erarbeitung der Zweitafelbilder von Strecken und Geraden
- Erarbeitung der Zweitafelbilder ebener Figuren

3. Stunde
- Erarbeitung der Zweitafelbilder von Körpern

4. und 5. Stunde
- Übungen

Methodische Hinweise

Einführung in die senkrechte Zweitafelprojektion Es sollte zunächst wiederholt werden, wie der Riß eines geometrischen Objektes zustandekommt und welche Bedeutung der Höhenmaßstab hat. Dazu sollte das bei der Einführung der senkrechten Eintafelprojektion verwendete Punktmodell (UH 148), allerdings in der Maniperm-Klapptafel, eingesetzt werden. Es können auch einige Eintafelbilder wiederholend betrachtet und analysiert werden, z. B. Bild E 14 (LB 116).

Erarbeitung Das Punktmodell sollte wieder genutzt werden. Ein weiterer Stab auf einem Magneten stellt die Projektionsgerade zur Aufrißebene dar und ergänzt es. Die Punkte werden bezeichnet und die Begriffe „Grundrißebene", „Grundriß", „Aufrißebene" und „Aufriß" festgelegt (siehe Bild E 25). Alle Modelle werden entfernt und die untere

Tafel hinuntergeklappt, um beide Bilder in einer Ebene zu erhalten. Der Lehrer beachte, daß dabei anders geklappt wird, als im Lehrbuch beschrieben ist (hier: Klappen der Grundrißebene in die Aufrißebene; im Lehrbuch: Klappen der Aufrißebene in die Grundrißebene). Jetzt werden noch die „Rißachse" und die „Ordnungslinien" sowie deren gegenseitige Lage eingeführt.
Wie bei der senkrechten Eintafelprojektion wird eine vereinfachende Sprechweise eingeführt, wobei jetzt der Grundriß und der zugeordnete Aufriß mit dem Begriff „Zweitafelbild" benannt werden. An der Wandtafel werden Zweitafelbilder einiger Punkte gezeigt. Zum Grundriß eines Punktes wird der zugeordnete Aufriß gesucht und umgekehrt. Danach wird die Raumlage von Punkten gezeigt, deren Zweitafelbilder in der Maniperm-Klapptafel (auch in der Schüler-Klapptafel) skizziert werden. Die Schüler sollen erkennen, in welcher Bildebene entsprechende Abstände abgelesen werden können. Die neuen Begriffe sollten von den Schülern dabei stets angewandt werden.

Da die Höhe von besonderer Bedeutung ist, wird sie in der Aufrißebene farbig gezeichnet. Diese schon in der senkrechten Eintafelprojektion benutzte farbige Darstellung von Punkthöhen wird im weiteren Unterricht angewandt und – wie dort – später auf wesentliche Punkte beschränkt.

Nach wenigen Beispielen in der Maniperm-Klapptafel sollten dazu **Übungen** im Heft erfolgen. Dazu werden die Maße angegeben, die wie in Aufgabe 1 aus LE 8 formuliert werden.
Mit der Lochschablone kann die Aufgabe gestellt werden, die Zweitafelbilder von Punkten zu konstruieren, wenn die Lage des Grundrisses und die Punkthöhen bekannt sind.
Vorgabe: Rißachse (18,2 – Lochschablone drehen; vorher eine Gerade als Rißachse zeichnen); A' (15), B' (11), C' (6), D' (2); Punkthöhen: A – 4,0 cm; B – 2,8 cm; C – 1,4 cm; D – 4,0 cm
Kontrolle: A'' (14), B'' (9), C'' (5), D'' (1)
Mit dieser Aufgabe können weitere Übungen erfolgen, indem festgestellt wird, welcher von zwei Punkten z. B. höher oder weiter vorn liegt. Dadurch können die Beschreibungen der Lage von Strecken und Geraden vorbereitet werden.
Als **Hausaufgabe** können die Schüler Aufgabe 1 aus LE 8 lösen und die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C beschreiben.

Erarbeitung der Zweitafelbilder von Strecken und Geraden In Analogie zur Bildentstehung bei der senkrechten Eintafelprojektion sollte das Zweitafelbild einer Strecke aus den Zweitafelbildern der Endpunkte entwickelt werden.

Zur Beschreibung der Raumlagen einer Strecke gibt es drei Möglichkeiten:
1. Es werden die Endpunkte der Strecke betrachtet. Die gegenseitige Lage bezüglich jeder Bildebene wird beschrieben.
   Beispiel: Beispiel 6, Bild E 26
2. Die Lage der Strecke zu jeder Bildebene wird beschrieben. Die Beschreibung erfolgt nach Auftrag 7 und Bild E 13.
   Beispiel: (zu Bild E 26): „$\overline{AB}$ liegt geneigt zur Grundrißebene und geneigt zur Aufrißebene."
3. Der Bezug erfolgt auf die beim Schrägbild verwendeten sogenannten Hauptrichtungen, die durch die Wortpaare links – rechts (Breite), vorn – hinten (Tiefe) und unten – oben (Höhe) zum Ausdruck kommen.
   Beispiel: (zu Bild E 26): „$\overline{AB}$ verläuft von links – vorn – oben nach rechts – hinten – unten."

Die 2. und 3. Möglichkeit können auch bei Geraden angewandt werden, deshalb sollte eine von beiden möglichst genutzt werden.

Übungen Auftrag 17 kann bearbeitet werden. Bei Schwierigkeiten sollten die Inhalte in der Schüler-Klapptafel veranschaulicht werden.

Der Übergang zum Zweitafelbild einer Geraden erfolgt wie im Lehrbuch angegeben; die Strecke wird als Träger einer Geraden aufgefaßt, und die Bilder werden – wenn möglich

– verlängert. Die Veranschaulichung (Auftrag 18) kann in der Maniperm-Klapptafel durch Gummifäden an Magneten, die auf den Bildebenen haften, oder durch einen Zeigestock erfolgen.

Beim Zweitafelbild einer Geraden sollte folgendes beachtet werden:
Jedes Bild (Grundriß und Aufriß) einer Geraden wird in der jeweiligen Bildebene nur bis zur Rißachse gezeichnet. Der dann in der anderen Ebene liegende Spurpunkt wird nicht beachtet, auch wenn dann die Gerade hinter bzw. unter der Bildebene verläuft und eigentlich das Bild nicht mehr gezeichnet werden dürfte. Das betrifft auch die zu einer Bildebene orthogonal liegenden Geraden, die in dieser als Punkt, in der anderen als ein von der Rißachse ausgehender Strahl dargestellt werden. In aufgeschlossenen Klassen sollte das betrachtet, jedoch nicht zu weit ausgebaut werden.

Das Beschreiben der Raumlage einer Geraden sollte stets mit dem Zeigen im Raum gekoppelt werden. Es sollte auch geübt werden, zu einer Raumlage (durch Modell oder Beschreibung gegeben) ein Zweitafelbild zu zeichnen (eventuell als Skizze).

Erarbeitung der Zweitafelbilder ebener Figuren Zur Vorbereitung dieses Inhalts kann am Bild E 15 (LB 117) wiederholt werden, welche (Grund)-Risse eine ebene Figur haben kann. Mit Flächenapplikationen läßt sich das veranschaulichen. Die Lagen werden danach genutzt, die Zweitafelbilder zu gewinnen. Das Bild E 30 zeigt einige Möglichkeiten. Die besonderen Lagen und damit die speziellen Bilder sowie die kongruenten Abbildungen der Originale werden besonders herausgestellt.
Zur **Übung** kann der untere Teil des Arbeitsblattes 21 genutzt werden.

Erarbeitung der Zweitafelbilder von Körpern Dem Erarbeiten des Zweitafelbildes von Körpern wird man nicht so großen Aufwand widmen müssen, da sehr viele Analogien zum Zeichnen der Ansichten von vorn und von oben im technischen Zeichnen vorhanden sind. Trotzdem wird an einer Pyramide die Entstehung des Zweitafelbildes ausführlich behandelt. Dazu können genutzt werden: Pyramiden-Fadenmodell in der Maniperm-Klapptafel (Pyramidenmodell aus dem Stereometrie-Baukasten in der Schüler-Klapptafel) und Folie „Tafelprojektion".
Wenn die Zweitafelbilder von Körpern gewonnen wurden, werden die Zweitafelbilder ihrer Kanten und Begrenzungsflächen genutzt, die Erkenntnisse zur Abbildung von Strekken und Flächen anzuwenden (Auftrag 20). Diese wichtigen, meist mündlichen und durch Modelle unterstützten Übungen zur Beschreibung der Raumlage sind ein Mittel, das Raumvorstellungsvermögen der Schüler zu fördern. Die Modelle treten dabei zunehmend in den Hintergrund.

Übungen Der Lehrer wähle so aus, daß ein abwechslungsreicher Ablauf entsteht:

- Übungen im Konstruieren nach gegebenen Größen (diese wähle der Lehrer selbst aus oder nutze die Maße der Aufg. 1, 2 und 3 aus LE 3);
- Übungen im Konstruieren des zweiten Risses: Aufg. 2 aus LE 9, Dias 34 und 35 aus R 1117;

  Die Dias 34 und 35 aus R 1117 können genutzt werden, Phantasie und Schöpfertum der Schüler zu entwickeln. Sie werden auf eine Tafel projiziert, auf der in das Projektionsbild skizziert wird. Einige der Zweitafelbilder aus diesen Dias sollten mit Modellen des Stereometrie-Baukastens realisiert werden (grundsätzliche Form).

- Übungen im Bezeichnen gegebener Zweitafelbilder: Dias 23, 30 und 31 aus R 1117;
- Übungen im Lesen (Erkennen des Dargestellten) von Zweitafelbildern: Dia 33 aus R 1117, Arbeitsblätter 19, 20, 27, 28, 29, 30, 31 und 32 (die Aufgabenstellungen der Arbeitsblätter werden dabei nicht bearbeitet);
- Übungen im Analysieren von Zweitafelbildern, einschließlich der Bestimmung der Raumlage und der Bilder von Kanten und Flächen: Auftrag 20, Arbeitsblätter wie oben (nicht bearbeiten, s. o.);

- Übungen im Übertragen einer Darstellungsart in die andere: Arbeitsblätter 18, 19, 20; Aufg. 1 aus LE 9, Dias 27, 28, 29, 30 und 31 (Vorgaben für Aufgaben) aus R 1117; Basteln von Körpermodellen nach Zweitafelbildern.

Das Skizzieren sollte bei allen Übungsformen auftreten. In allen Übungen werden die vorher in dieser Lerneinheit behandelten Inhalte berücksichtigt. Es können Aufgaben gestellt werden, die vom Zweitafelbild ausgehen (der Lehrer gibt z. B. eine Kante an einem Körper vor – die Schüler zeigen sie im Zweitafelbild und beschreiben deren Lage im Raum) oder solche, die von der Lage ausgehen (Aufgabe: „Suche Kanten, die von vorn – oben nach hinten – unten verlaufen!"; die Schüler zeigen solche Kanten – sofern es solche gibt – im Zweitafelbild und nennen deren Bezeichnung).
Wurde in der Einführungsstunde zur senkrechten Zweitafelprojektion noch nicht auf einige Anwendungen eingegangen, so sollte das ausführlich nach der Erarbeitung der Zweitafelbilder von Körpern erfolgen. Wurden dort schon einige Hinweise gegeben, wird noch einmal auf diese kurz eingegangen. An den Bildern 13 bis 16 aus T-R 137 werden Beziehungen zum technischen Zeichnen erörtert.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1 aus LE 8; Aufg. 1 aus LE 9; Arbeitsblätter 18, 19

Lagebeziehungen im Raum (1 Std.)

LE 10 (LB 127 bis 128)

Ziele

Die Schüler
- kennen die Lagebeziehungen zwischen Punkt – Gerade, Punkt – Ebene, Gerade – Gerade und Gerade – Ebene im Raum,
- können Lagebeziehungen im Raum veranschaulichen und beschreiben,
- können die Zweitafelbilder von zwei Geraden analysieren.

Schwerpunkte

- Betrachtung der Lagebeziehungen zwischen Punkt – Gerade, Punkt – Ebene, Gerade – Gerade und Gerade – Ebene im Raum (ohne Projektionen)
- Erarbeitung der Zweitafelbilder zweier Geraden

Methodische Hinweise

Betrachtung der Lagebeziehungen ... Durch Auftrag 21 und die Bilder auf der 3. Umschlagseite des Lehrbuches wird der Inhalt der Erarbeitung recht genau vorgegeben.
Der Lehrer achte unbedingt auf folgendes:
- Es liegen Hilfsmodelle für Lehrer und Schüler bereit, mit denen die einzelnen Lagebe-

ziehungen veranschaulicht werden. Die Lagebeziehungen Punkt – Gerade, Punkt – Ebene und Gerade – Ebene werden sowohl mit „liegt auf" als auch mit „geht durch" formuliert.
- Die gegenseitige Lage zweier Geraden wird zunächst durch „einander schneiden" (möglichst *nicht: sich* schneiden) oder „einander nicht schneiden" beschrieben, bevor danach das Nichtschneiden durch „zueinander parallel" bzw. „zueinander windschief" charakterisiert wird.
- Erst nach der Veranschaulichung mit Hilfsmodellen werden die Lagebeziehungen der geometrischen Gebilde an einem Quadermodell gezeigt. Dazu wird die übliche Eckpunktbezeichnung verwendet (Bild E 8, LB 113).

Obwohl der Lehrplan die Behandlung der Lagebeziehungen ohne Projektion fordert, kann zur **Übung** im Arbeitsblatt 23 untersucht werden, wie man aus einem Zweitafelbild erkennen kann, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht. Die Bedingung für die Entscheidung über die Lage muß angegeben werden. („Wenn ein Punkt P auf der Geraden g liegt, dann liegt sowohl P' auf g' als auch P'' auf g''.")

Erarbeitung der Zweitafelbilder zweier Geraden Diese Zweitafelbilder zweier Geraden sollten parallel zum Bild auf der 3. Umschlagseite des Lehrbuches in der Maniperm-Klapptafel (Schüler-Klapptafel) erarbeitet werden. Zwei (verschiedenfarbige) Gummifäden (Stäbe) und zwei in Magnete (Knetmasse) gesteckte Holzstäbe als Modelle der Projektionsgeraden lassen sehr schnell die Probleme lösen.
Für **Übungen** stehen Arbeitsblatt 24, Auftrag 21 und Aufgabe 1 zur Verfügung.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1

Wahre Länge einer Strecke; ebener Schnitt durch ein Prisma (4 Std.)

LE 11 (LB 128 bis 130)

In dieser Lerneinheit lernen die Schüler zwei wichtige Konstruktionen kennen. Es sollte – wie schon bei der senkrechten Eintafelprojektion – herausgearbeitet werden, daß eine zum Original kongruente Figur konstruiert werden soll und daß die Lage des Originals bestimmt, ob diese Figur in einer der Bildebenen oder durch eine Konstruktion (Klappung) zu finden ist. Auf Veranschaulichungen, saubere Konstruktionen und eine einwandfreie sprachliche Darstellung der Lösungen sollte besonders geachtet werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke und die entsprechende Lage der Strecke,
- arbeiten rationell, d. h. wenden die Konstruktion nur bei „allgemeiner Lage" der Strecke an,
- können die Konstruktion bei unterschiedlichen Vorgaben ausführen und beschreiben,

- kennen die Konstruktion zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur bei einem ebenen Schnitt durch ein Prisma,
- können bei verschiedenen geraden Prismen die Schnittfigur bestimmen.

Schwerpunkte

1. und 2. Stunde
- Erarbeitung der Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer (zu beiden Bildebenen geneigten) Strecke – Grundaufgabe
- Übungen und Anwendungen

3. und 4. Stunde
- Erarbeitung der Konstruktion zum Bestimmen der wahren Größe und Gestalt der Schnittfigur bei einem ebenen Schnitt durch ein gerades Prisma
- Übungen

Methodische Hinweise

Erarbeiten der Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge ... Die Erarbeitung dieser Konstruktion könnte in selbständiger Schülerarbeit erfolgen. Dabei sollten drei Etappen geplant werden, nach denen jeweils eine Kontrolle des Erarbeiteten vorgenommen werden sollte (siehe Lehrbuch).

1. Etappe: Bestimmen der Lage der Strecke, die eine Konstruktion nötig macht
Dazu arbeiten die Schüler den Lehrbuchtext bis vor Auftrag 24 durch.
In der Kontrollphase werden die Aufträge 22 und 23 durch ein Unterrichtsgespräch bearbeitet. Als Erkenntnis wird gewonnen (Beispiel 7): Liegt eine Strecke parallel zu einer Bildebene, so ist *keine* Konstruktion notwendig. Die Strecke wird in dieser Bildebene kongruent abgebildet (nach Satz 2). Nur bei *geneigter Lage zu beiden Bildebenen* muß eine Konstruktion angewendet werden.

2. Etappe: Wiederholen der Konstruktion zur Bestimmung der wahren Länge einer (geneigten) Strecke aus dem Eintafelbild (Auftrag 24)
Die Schüler arbeiten Beispiel 2 (LB 118) durch und lösen Aufgabe 1a) aus LE 6 (LB 119). Ein Schüler skizziert danach an der Wandtafel diese Konstruktion und erläutert ausführlich den Konstruktionsweg bei der senkrechten Eintafelprojektion.

3. Etappe: Erarbeiten der Konstruktionsschritte, Formulieren der Konstruktionsbeschreibung (Auftrag 25) und Lösen der Aufgabe 1
Die Schüler arbeiten wie in LE 6 in der Schüler-Klapptafel. Zur Kontrolle benutzt der Lehrer den Aufbau zur Maniperm-Klapptafel aus LE 6 (Streckenmodell und Trapez) und läßt einen Schüler den Weg erläutern. Ein anderer Schüler trägt die Beschreibung vor, und ein dritter Schüler führt die Konstruktion an der Tafel (nicht als Skizze!) aus. In dieser werden die Punkthöhen nachträglich farbig gezeichnet.

Zur **Zusammenfassung** sollte der Lehrer die Folie „Wahre Länge einer Strecke“, die bereits in LE 6 zum Selbstbau empfohlen wurde, einsetzen. Mit ihr kann die Analogie zur Konstruktion in der senkrechten Eintafelprojektion sehr gut herausgestellt werden.

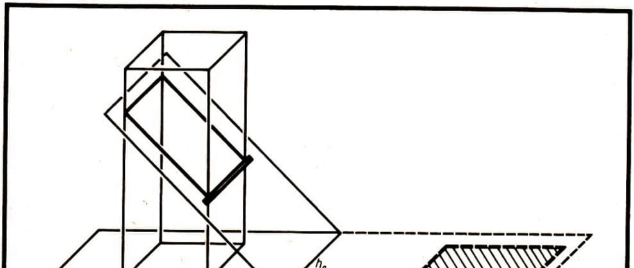
Dem Lehrer wird empfohlen, eine Anschauungstafel (evtl. durch Schüler) herzustellen, die diese Konstruktionsschritte in Gegenüberstellung zeigt. Dabei kann entweder eine Fließbilddarstellung wie in Bild E 18 (LB 118) genutzt werden, oder die Reihenfolge der Schritte wird durch Zahlen angegeben. Die Höhen werden bei jeder Darstellung farbig gezeichnet.

Übungen und Anwendungen Dafür stehen Aufgabe 2 und die Arbeitsblätter 25 bis 28 zur Verfügung. Es sollte auch in freien Vorgaben an der Wandtafel skizziert werden. Dazu kann der Lehrer mehrere Zweitafelbilder von Strecken vorgeben, und die Schüler arbeiten parallel. Weiterhin findet man zur Aufgabe 1 bei der angegebenen Rißachse (Punkte 3 und 23 der Lochschablone) noch viele Punktpaare, die Zweitafelbilder von Strecken ergeben, so daß etwa 40 Aufgaben gestellt werden könnten.
Bei allen Übungen und Anwendungen achte der Lehrer sehr darauf, daß stets *vor* dem Konstruieren die Lage der Originalstrecke (oder Kante) zu *beiden* Bildebenen angegeben wird. Die Konstruktion sollte tatsächlich nur im Falle der geneigten Lage zu beiden Bildebenen ausgeführt werden.
Zur Hilfe kann bei den Übungen und Anwendungen nochmals die Folie „Wahre Länge einer Strecke" (Selbstbau, siehe UH 153) genutzt werden, da die Vorgabe dieser Projektionsfolie neben dem Zweitafelbild einer Strecke auch das Zweitafelbild eines Körpers (dreiseitiges gerades Prisma mit aufgesetzter dreiseitiger Pyramide) zeigt.
Das Einbinden von Punkten (siehe Aufg. 4 aus LE 6) kann auch in dieser Lerneinheit geübt werden. Das kann zum Beispiel im Arbeitsblatt 26 erfolgen: „Konstruiere in die Zweitafelbilder der Strecken das Zweitafelbild je eines Punktes *P*, der 3 cm hoch und auf den Strecken liegt!" (bei Strecke $\overline{CD}$ nicht lösbar).

Erarbeitung der Konstruktion zum Bestimmen der wahren Größe und Gestalt Die Erarbeitung der Konstruktion ist im allgemeinen deshalb etwas schwierig, weil eine geeignete Veranschaulichung nicht ohne einen gewissen Aufwand zu realisieren ist. Allein aus Zeichnungen (z. B. Bild E 34) und einem erläuternden Text den Weg zu gewinnen, ist für manchen Schüler doch etwas zu unanschaulich.

Es wird zunächst ein relativ einfaches Modell (Bild 5.5) beschrieben, das sich der Lehrer (gemeinsam mit Schülern) herstellen sollte.
Für dieses Modell benötigt man zwei Pappen im Format A 4 (Rückdeckel eines Schreibblockes) und Zeichenkarton zum Herstellen der zwei Teilkörper eines Quaders. Die eine Pappe stellt die Grundrißebene dar, auf der der Quader (der Unterteil) steht, die andere die Schnittebene. Beide Pappen werden an einer kürzeren Seite mit einem Klebeband beweglich verbunden, so daß die Schnittebene geklappt werden kann.
Die Klappachse beider Pappen wird mit h_0 bezeichnet. Der untere Teilkörper wird auf die Grundrißebene aufgeklebt.

Bild 5.5



Es wird empfohlen:
- den Neigungswinkel β der Schnittebene mit 45° zu wählen,
- den Quader mit den Maßen $b = 10$ cm, $t = 15$ cm und $h = 25$ cm herzustellen,
- den unteren Teilkörper 10 cm von h_0 entfernt aufzukleben,
- auf beiden Seiten der Schnittebene die Schnittfigur zu kennzeichnen (farbiges Buntpapier aufkleben),
- auf die Oberseite der hochgeklappten Schnittebene einen schmalen Pappestreifen zu kleben, der ein Abrutschen des Quaderoberteiles verhindert.

Wer handwerklich geschickt ist, kann das Modell auch aus Holz oder Plast bauen.

Das Demonstrieren des Klappvorganges muß die „Bahnen" in den Bildebenen bewußtmachen: Parallele Strecken zur Rißachse in der Grundrißebene – Kreise um P (Schnittpunkt von h_0' mit der Rißachse; ein Stück Kreide auf die Schnittebene legen, das die Kreisbögen beim Klappen auf die Aufrißebene zeichnet) in der Aufrißebene. Wichtig erscheint noch die Erkenntnis, daß die Schnittfigur einen größeren Flächeninhalt als die Körpergrundfläche, aber gleiche Eckenzahl hat. Schnitte, die zugleich die Deckfläche des Körpers teilen, werden nicht betrachtet.
Das Modell wird auf die hochgeklappte Tafel und an die obere Tafel der Maniperm-Klapptafel gelegt. Nach dem Erarbeiten der Konstruktionsschritte am Modell werden diese parallel im Heft und an der Tafel ausgeführt. Unter Anleitung des Lehrers werden die einzelnen Schritte realisiert. Dazu wird Arbeitsblatt 29 genutzt, weil bei dieser Vorgabe für jeden Punkt je eine eigene Konstruktionslinie in der Grundriß- und Aufrißebene auftritt (Vorgabe des Arbeitsblattes 29 vor der Stunde auf die Wandtafel übertragen). Der Lehrer achte darauf, daß zunächst alle Schnittpunkte der Ebene mit den Kanten bezeichnet, danach alle Konstruktionslinien konstruiert und nun erst die geklappten Punkte durch Verfolgen der Konstruktionslinien gesucht und bezeichnet werden. Die wahre Größe der Schnittfigur kann auch farbig hervorgehoben werden.

Mit der Folie „Ebener Schnitt" kann eine **Zusammenfassung** erfolgen. Die einzelnen Überdeckfolien werden nacheinander aufgelegt, die Schüler beschreiben den Inhalt jeder Folie bzw. die dabei auszuführenden Konstruktionen und zeigen diese zugleich im Projektionsbild, am Modell und evtl. in der Konstruktion an der Wandtafel. Es wird nur das dreiseitige Prisma vorgeführt, der Schnitt des Kreiszylinders ist erst in Klasse 10 zu behandeln.

Übungen Neben den Arbeitsblättern 30 und 31 kann noch die Aufgabe 3 bearbeitet werden.

Weitere Übungen ergeben sich, wenn die Grundfolie von Folie „Ebener Schnitt" auf eine Wandtafel projiziert und vom Lehrer an der Tafel zu einer entsprechenden Aufgabenstellung ergänzt wird (Grundriß hinzufügen und Aufriß evtl. ergänzen). Das kann auch auf einer Überdeckfolie erfolgen (oben oder unten an der Grundfolie anbringen). Es werden beliebige gerade Prismen gewählt. Nun wird durch eine Skizze (hierzu können auch Zeichengeräte verwendet werden) die Lösung der Aufgabe gefunden, wobei die Schüler nicht mitarbeiten sollten.

Kontrollaufgaben

Arbeitsblätter 25 und 29

Stoffabschnitt 5.4.

Komplexe Übungen

(5 Std.)

(LB 132 bis 133)

Ziele

Die Schüler
- vertiefen ihre Kenntnisse zu den betrachteten Abbildungen,
- entwickeln Fertigkeiten und erlangen Sicherheit im Ausführen der behandelten Konstruktionen,
- können sicher und exakt beschreiben (Inhalt von Zeichnungen, Konstruktionen),
- entwickeln ihr Raumvorstellungsvermögen weiter.

Schwerpunkte

1. Variante

1. Stunde
- Herstellen von Bildern in den betrachteten Abbildungen
- „Lesen“ solcher Bilder

2. und 3. Stunde
- Verfahren zur Bestimmung kongruenter Bilder geometrischer Gebilde (wahre Länge von Strecken, wahre Größe und Gestalt ebener Figuren)

4. Stunde
- Weitere Aufrißebenen als ein Mittel, zu Originalen kongruente Bilder zu erlangen (Strecken, ebene Figuren)

2. Variante

1. und 2. Stunde
- Punkte, Strecken und Geraden – ihre Bilder bei den betrachteten Abbildungen
- Punkte und Strecken an Körpern
- Lagebeziehungen
- Bestimmen wahrer Längen von Strecken (Kanten)
- Weitere Aufrißebenen als ein Mittel zur Bestimmung der wahren Länge von Strecken (Kanten)

3. und 4. Stunde
- Ebene Figuren – ihre Bilder bei den betrachteten Abbildungen
- Begrenzungsflächen an Körpern
- Lagebeziehungen
- Bestimmung der wahren Größe und Gestalt und Berechnung des Umfangs und Inhalts von Begrenzungsflächen
- Weitere Aufrißebenen als ein Mittel zur Bestimmung der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren
- Ebener Schnitt durch ein Prisma mit Berechnung des Inhalts der Schnittfigur

Klassenarbeit

5. Stunde
(Die Stunde zur Auswertung wird dem Stoffabschnitt 5.3. entnommen.)

Methodische Hinweise

Die Gestaltung der 1. Variante folgt einer gewissen fachsystematischen Logik, indem zunächst das Abbilden und danach die Verfahren zur Bestimmung kongruenter Bilder geometrischer Gebilde betrachtet werden. Die 2. Variante stellt das Abbilden der einfachen geometrischen Gebilde in den Vordergrund, wobei neben der Betrachtung der Gebilde an sich sehr stark deren Bindung an Körper berücksichtigt wird.
Durch vielseitige Vorgaben kann einem gleichförmigen Unterricht vorgebeugt werden:
- Wechsel in der Art der Vorgabe (Modell, Zeichnung, Beschreibung, Größen),
- Wechsel der Abbildungsart, wobei die schräge Parallelprojektion und die senkrechte Zweitafelprojektion bevorzugt werden.

Beim Bestimmen der wahren Längen von Strecken und der wahren Größe und Gestalt ebener Figuren sollte beim Schüler relative Sicherheit in der Auswahl der Verfahren vorhanden sein. Stets sollte darauf geachtet werden, daß nur bei den „allgemeinen Lagen" konstruiert wird.
Die Betrachtungen zu weiteren Aufrißebenen werden in der 1. Variante als Abschluß und Höhepunkt des Unterrichts in darstellender Geometrie eingeordnet, während bei der 2. Variante ein direktes Verbinden mit den anderen Inhalten erfolgt. Es ist stets als Ergänzung und (innermathematische) Anwendung zur senkrechten Zweitafelprojektion zu behandeln. Diese Inhalte sollten gut motiviert und sehr anschaulich erarbeitet werden. Für Übungen stehen zur Verfügung: Arbeitsblatt 22, Aufgaben 2c) und 8.

Ein Modell entsprechend Bild E 33 kann von Schülern im Rahmen der MMM-Bewegung gebaut werden (durchsichtige, klappbare Aufrißebenen verwenden!).

Allgemeine Stellungen von Körpern bezüglich der Bildebenen sollten als Aufgabeninhalte insbesondere beim Schrägbild und beim Zweitafelbild berücksichtigt werden. Beim letzteren beschränke man sich auf die allgemeine Lage bezüglich der Aufrißebene.
Neben Grundanforderungen an alle Schüler sollte jeder Lehrer spezielle Aufgaben für fortgeschrittene Schüler zur Verfügung stellen, um dadurch einem Nachlassen des Interesses einiger Schüler entgegenzuwirken.
Der Lehrer achte darauf, daß möglichst viele Schülertätigkeiten ausgeführt werden: Konstruieren, Skizzieren, Beschreiben von Bildern, Modellieren (Netze), Berechnen, usw.
Unterrichtsmittel sollten relativ sparsam eingesetzt werden, um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler zu nutzen. Das betrifft insbesondere das räumliche Veranschaulichen von Aufgabenstellungen, die in sprachlich-begrifflicher Form gegeben sind.
Bezüglich Arbeitstempo, Genauigkeit und Sauberkeit bei Konstruktionen sollten höhere Anforderungen als im vorhergehenden Unterricht zu diesem Stoffgebiet gestellt werden.
Das Nutzen vielfältiger Kontrollen (Vergleichen von Maßen, Einsatz transparenter Kontrollblätter, Übertragen auf Folien u. a.) hilft den Schülern beim Erkennen ihrer Fehler und sollte Anlaß zu differenzierter Unterrichtsgestaltung sein, wobei die gegenseitige Hilfe genutzt werden sollte.
Das Berechnen von Umfängen und Inhalten (nach Messungen und auch nach gegebenen Größen) von Begrenzungsflächen und Schnittfiguren festigt den Stoff aus Klasse 6. Berechnungen von Strecken-(Kanten-)Längen aus dem Eintafel- oder Zweitafelbild können erst in Klasse 8 im Stoffabschnitt „Satzgruppe des PYTHAGORAS" erfolgen.

Stoffgebiet 6

Der Kreis

Vorbemerkungen

Im Stoffabschnitt „6.1. Definition des Kreises; Sätze über den Kreis“ werden die Schüler mit einem relativ geschlossenen System von Begriffen und Sätzen vertraut gemacht. Dadurch soll ein weiterer Beitrag geleistet werden, sie an Denk- und Arbeitsweisen heranzuführen, die für die Mathematik typisch sind: das *Definieren von Begriffen* (z. B. „Kreis“), das *Formulieren von Sätzen* (z. B. über das Sehnenviereck) und das *Beweisen* derselben, das *Anwenden* von Begriffen und Sätzen (insbesondere beim Lösen von Konstruktionsaufgaben), das Entwickeln algorithmischer *Verfahren* (z. B. zur Konstruktion von Kreistangenten), das Untersuchen vonn *Existenz-* und *Eindeutigkeitsfragen* (z. B. beim Begriff „Umkreis“), das Aufdecken *funktionaler Zusammenhänge* (z. B. zwischen Peripherie- und Zentriwinkeln), das Durchführen *vollständiger Fallunterscheidungen* (z. B. bei Lagebeziehungen zwischen Kreisen) und ähnliche. Dabei sollen besonders die Fähigkeiten der Schüler im Erfassen und Lösen von Problemstellungen, im Argumentieren, Schließen und Beweisen sowie im Formulieren mathematischer Sachverhalte weiterentwickelt werden. *Stoffübergreifende Zielsetzungen* stehen hier also stärker als in anderen Stoffgebieten im Vordergrund.

Die von den Schülern in Klasse 6 erworbenen Kenntnisse bei der Berechnung der Flächeninhalte und Umfänge der geometrischen Figuren Dreieck und Viereck werden im Stoffabschnitt „6.2. Kreisberechnung“ zielstrebig weitergeführt. Die inhaltlichen Forderungen und der Grad der Schwierigkeiten sind in Klasse 7 allerdings größer als in Klasse 6, denn mit dem Kreis wird die erste nicht geradlinig begrenzte ebene Figur behandelt. Das hat Konsequenzen insbesondere für die Erarbeitung der Formeln zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Kreises. Die genannten Formeln werden gemäß Lehrplanforderung auf empirischem Wege gewonnen. Dabei kommt dem Verallgemeinerungsprozeß eine besondere Rolle zu.
Die Kenntnis der Formeln zur Kreisberechnung ermöglicht es, praxisnahe Aufgaben zu lösen, wobei die Verwendung des Taschenrechners und der Zahlentafel ein wichtiges Mittel zur Rationalisierung der geistigen Arbeit darstellt.
Gesonderte Formeln zur Berechnung von Kreisring, Kreisbogen und Kreisausschnitt werden nicht entwickelt. Die Thematik wird an geeigneten Stellen an entsprechenden Übungsaufgaben besprochen.

Kontrollaufgaben

1. – Wie nennt man
   a) g_1, g_2 und $\overline{AC}$, b) α und β
   bezüglich des Kreises k im Bild 6.1?
   – Nenne eine Strecke, die für k (Bild 6.1)
   a) ein Durchmesser, b) ein Radius ist!

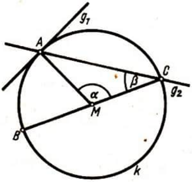


Bild 6.1

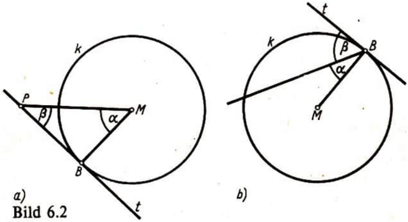


Bild 6.2

   – Zeichne einen Kreis k und in ihm
   a) einen Peripheriewinkel und einen Zentriwinkel über demselben Bogen,
   b) eine möglichst lange Sehne!

2. Wie groß ist jeweils α, wenn $\beta = 40°$ ist? Begründe!
   (t sei Tangente an den Kreis k) (Bild 6.2)

3. a) Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere seinen Umkreis!
   b) Zeichne einen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht gegeben ist! (Zylindermodell aus dem Stereometriebaukasten umzeichnen!). Konstruiere dann den Mittelpunkt M dieses Kreises!
   c) Begründe jeweils die Konstruktion!

4. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 4$ cm und einen Punkt P, der
   a) außerhalb des Kreises, b) auf dem Kreis liegt!
   Konstruiere alle Tangenten an den Kreis, die durch P verlaufen! Wie viele solcher Tangenten gibt es?

5. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $P(14)$; $Q(15)$; $R(17)$ und $B(18)$! Zeichne die Gerade PB!
   a) Konstruiere einen Kreis, der die Gerade PB im Punkt B berührt! Wie viele solcher Kreise gibt es?
   b) Konstruiere einen Kreis k mit P als Mittelpunkt, der durch R verläuft!
   Wie viele solcher Kreise gibt es?
   c) Konstruiere eine Tangente an k, die durch Q verläuft! Wie viele solcher Tangenten gibt es?

6. Zeichne mit der Lochschablone die Punkte $B(10)$ und $P(12)$!
   a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der durch die Punkte P und B verläuft!
   b) Konstruiere an diesen Kreis eine Tangente, die durch P verläuft! Wie viele solcher Tangenten gibt es?
   c) Zeichne einen Punkt Q, durch den man keine Tangente des Kreises k zeichnen kann!

7. Es sei $\alpha = 50°$. Ermittle jeweils β!
Begründe! (Bild 6.3)

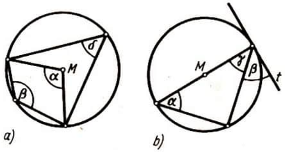


Bild 6.3

8. Zeichne ein Sehnenviereck, in dem
   a) beide Diagonalen Durchmesser sind,
   b) eine Diagonale Durchmesser ist und die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen!
   Was für ein besonderes Viereck ist jeweils entstanden? Begründe!

9. a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $c = \overline{AB} = 5$ cm, $\gamma = 90°$, $h_c = 2$ cm ist!
   b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem $a = \overline{BC} = 6$ cm, $\alpha = 50°$, $h_a = 2{,}5$ cm ist!
   c) Wie viele solcher Dreiecke gibt es jeweils?

10. a) Zeichne um einen Punkt M zwei Kreise k_1 und k_2 mit unterschiedlichen Radien! Zeichne dann einen Durchmesser $d_1 = \overline{AC}$ zu k_1 und einen Durchmesser $d_2 = \overline{BD}$ zu k_2!
    Beweise: $\overline{AB} = \overline{CD}$!
    b) Zeichne einen Kreis k um M und in ihn zwei Durchmesser $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$!
    Beweise: $ABCD$ ist ein Rechteck!

11. Eine Ringermatte hat eine kreisförmige Kampffläche. Der Durchmesser des Kreises beträgt bei nationalen Wettkämpfen 6 m, bei internationalen 9 m.
    Um wieviel Quadratmeter Kampffläche unterscheiden sich diese beiden Mattentypen?

12. Man hat ein Stück Bandeisen von 336 cm Länge. Welchen Radius hat der Kreis, den man daraus fertigen kann (für die Überlappung rechne man 10 cm)?

13. Der Durchmesser eines Rades beträgt 1,9 m.
    Welchen Weg legt das Rad bei 10, 15, 20, …, 100 Umdrehungen zurück, und wie oft dreht sich das Rad bei einer Weglänge von 500 km?

14. In den Spielregeln für Tischtennis wird festgelegt, daß der Umfang des Balles nicht weniger als 11,430 cm und nicht mehr als 12,065 cm betragen soll.
    Stelle aus diesen Angaben den mittleren Durchmesser eines Tischtennisballes fest!

15. Beim Walzen von Aluminium unterscheiden wir zwischen Arbeits- und Stützwalzen. Die Arbeitswalze habe einen Durchmesser von 240 mm, die Stützwalze habe einen von 560 mm. Die Bandgeschwindigkeit betrage $350 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.
    Wie viele Umdrehungen je Minute machen in diesem Falle Arbeits- bzw. Stützwalze (Bild 6.4)?

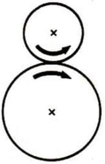


Bild 6.4

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 6.1.: Definition des Kreises; Sätze über den Kreis (16 Std.)			
Definition des Kreises (LE 1)	1	– Zeichnen von Kreisen – „Radius“, „Durchmesser“, „Mittelpunkt“ – Axialsymmetrie, Drehung, Spiegelung	– Definition des Kreises – $d = 2 \cdot r$ – Axialsymmetrie des Kreises
Lagebeziehungen (LE 2)	1	– Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden sowie zwischen Punkten und Kreisen	Lagebeziehungen: – zwischen Gerade und Kreis, „Tangente“, „Sekante“, „berühren“ – zwischen zwei Kreisen, „konzentrisch“
Tangenten (LE 3)	2	– Bestimmtheit einer Geraden durch 2 Punkte oder 1 Punkt und die Richtung – Konstruieren von Punkten mit Hilfe von Geraden und Kreisen – Satz und Umkehrung – Konstruktion von Senkrechten zu einer Geraden	– „Berührungsradius“ – Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius (Satz und Umkehrung) – Konstruktion der Tangente, die durch einen Kreispunkt verläuft
Sehne, Bogen, Winkel am Kreis (LE 4)	1	– Kongruenz – Bewegung (Begriffe, Begründen der Kongruenz mit Hilfe von Bewegungen)	– „Sehne“, „Bogen“, „Zentriwinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$“, „Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$“ – Ausgewählte Eigenschaften von Sehnen, Bögen und Zentriwinkeln
Das Beweisen von Sätzen (LE 5)	1	– Kongruenzsätze – Kenntnisse über das Beweisen – Satz und Umkehrung	– Finden einfacher geometrischer Beweise
Umkreis von Dreiecken (LE 6)	2	– Mittelsenkrechte einer Strecke – Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander immer in genau einem Punkt – Dreieckskonstruktionen	– Konstruktion von Kreisen durch einen, zwei bzw. drei gegebene Punkte „Umkreis“ – Existenz und Eindeutigkeit des Dreiecksumkreises
Sehnenviereck (LE 7)	1	– Eigenschaften von Vierecken	– „Sehnenviereck“ – Eigenschaften von Sehnenvierecken

<table>
<tr><th>Thema</th><th>Std.</th><th>Zu reaktivierender Stoff</th><th>Zu erarbeitender Stoff</th></tr>
<tr><td>Winkel im Sehnenviereck (LE 8)</td><td>1</td><td>– Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck
– Winkelsumme im Viereck</td><td>– Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck (mit Beweis)</td></tr>
<tr><td>Peripheriewinkelsatz (LE 9)</td><td>1</td><td>– Umkehrung eines Satzes</td><td>– Peripheriewinkelsatz (mit Beweis)</td></tr>
<tr><td>Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz (LE 10)</td><td>1</td><td>– Außenwinkelsatz für Dreiecke</td><td>– Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz (mit Beweis)</td></tr>
<tr><td>Satz des THALES (LE 11)</td><td>2</td><td>– Winkelsumme im Dreieck</td><td>– Satz des THALES (mit Beweis)
– Umkehrung des Satzes</td></tr>
<tr><td>Konstruktionen (LE 12)</td><td>2</td><td>– Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius
– Dreieckskonstruktionen</td><td>– Konstruktion von Tangenten eines Kreises durch einen gegebenen Punkt außerhalb des Kreises
– Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken</td></tr>
<tr><td colspan="4">Stoffabschnitt 6.2.: Kreisberechnung (6 Std.)</td></tr>
<tr><td>Kreisumfang (LE 13)</td><td>3</td><td>– Umfang von Rechtecken und Dreiecken
– Proportion und Proportionalität
– Umformen von Gleichungen</td><td>– Die Zahl π und die Formeln $u = \pi \cdot d$ bzw. $u = 2\pi \cdot r$
– Berechnen von Kreisumfängen unter Verwendung von Taschenrechner und Zahlentafel</td></tr>
<tr><td>Inhalt von Kreisflächen (LE 14)</td><td>3</td><td>– Flächeninhalt von Rechtecken und Dreiecken</td><td>– Die Formeln $A = \pi r^2$ und $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$
– Berechnen von Kreisflächeninhalten unter Verwendung von Taschenrechner und Zahlentafel</td></tr>
<tr><td colspan="4">Stoffabschnitt 6.3.: Komplexe Übungen (7 Std.)</td></tr>
<tr><td>Komplexe Übungen</td><td>4</td><td colspan="2">– Systematisierung der Sätze und Begriffe aus dem Stoffabschnitt 6.1.
– Anwenden der Sätze in Konstruktions- sowie Begründungs- und Beweisaufgaben
– Lösen von Sachaufgaben</td></tr>
<tr><td>Leistungskontrolle und Auswertung</td><td>3</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Stoffabschnitt 6.1.

Definition des Kreises; Sätze über den Kreis (16 Std.)

Die im folgenden genannten Ziele charakterisieren das grundlegende Wissen und Können, das am Ende dieses Stoffabschnitts sicher beherrscht werden sollte.
Die Schüler sind mit dem Begriff „Kreis" und mit damit zusammenhängenden Begriffen (insbesondere „Tangente", „Bogen", „Peripheriewinkel", „Zentriwinkel") vertraut und kennen Zusammenhänge zwischen diesen, wie sie im Satz des Thales, im Satz über Tangente und Berührungsradius u. a. Sätzen zum Ausdruck gebracht werden.
Neben Konstruktionsaufgaben (Tangentenkonstruktion sowohl in einem Kreispunkt als auch von einem Punkt außerhalb des Kreises; Konstruktion des Kreises durch drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte) können die Schüler Beweis- bzw. Begründungsaufgaben mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken oder mit Hilfe von Sätzen aus diesem Stoffabschnitt lösen. (Es sollte Wert darauf gelegt werden, daß die Begründungen nicht normiert und auswendig gelernt werden, sondern wirklich das Ergebnis eigener Denkleistung der Schüler sind.)

Definition des Kreises (1 Std.)

LE 1 (LB 134 bis 135)

Das Hauptanliegen dieser Lerneinheit besteht darin, daß die Schüler auf der Grundlage ihres bisherigen Wissens über Kreise die wesentlichen Eigenschaften eines Kreises erkennen, beschreiben und daraus *selbständig eine Definition formulieren.*

Ziele

Die Schüler
- kennen praktische Sachverhalte, in denen Kreise eine Rolle spielen,
- können eine Definition des Kreises mit eigenen Worten formulieren und benutzen dabei das Merkmal „gleicher Abstand aller Punkte von *M*",
- kennen die Beziehung $d = 2r$ und wissen, daß jeder Kreis axialsymmetrisch bezüglich jedes seiner Durchmesser ist.

Schwerpunkte

- Motivierung der Behandlung des Kreises
- Erarbeitung der Definition des Kreises
- Erarbeitung der Axialsymmetrie des Kreises

Methodische Hinweise

Motivierung Es gibt zwei Möglichkeiten, die auch miteinander kombiniert werden können:

(1) Man stellt den Schülern in der 1. Stunde einen ganzen Katalog von Aufgaben vor, der möglichst zu allen Schwerpunkten des Stoffgebietes „Der Kreis“ Aufgaben enthält. Die Aufgaben werden mit den Schülern diskutiert, mögliche Lösungen eventuell geschätzt. Damit erreicht man eine Motivation für das gesamte Stoffgebiet.
Für einen solchen Aufgabenkatalog sind neben Aufgaben aus dem Lehrbuch (Aufg. 1 und 2, LE 1; Aufg. 3, LE 6; Aufg. 19, Komplexe Übungen) die Probleme aus dem Lehrbuch für LE 9 (LB 146) und für LE 13 (LB 152) sowie aus den Unterrichtshilfen für LE 6 (UH 180) geeignet.
(2) Anhand des Auftrages 1a) werden im Unterrichtsgespräch praktische Sachverhalte genannt, in denen Kreise eine Rolle spielen (z. B. Räder, Wellen, Rollen, Riemenantrieb, Zahnradgetriebe, Bewegung eines Kranes, Beispiele aus der Architektur).

Erarbeitung der Definition Anhand der Aufgabe: „Zeichne einen Kreis mit einem Durchmesser $d = 6$ cm!“ können die Begriffe „Radius“, „Durchmesser“, „Mittelpunkt“ wiederholt werden. Zur Lösung der Aufgabe muß der Radius ermittelt und somit die Beziehung $d = 2r$ erkannt werden.
Die Lösung des Auftrages 1b) zeigt den Schülern, daß sie zwar anhand von Beispielen zeigen können, welche Figuren Kreise sind und welche nicht, daß ihnen aber andererseits eine exakte Begriffserklärung die Begründungen erleichtern würde.

In dem im folgenden skizzierten Unterrichtsgespräch geht es nicht vorrangig um die Identifizierung der Figuren im Bild F 2, sondern die Schüler sollen anhand dieser Beispiele die *wesentlichen* Eigenschaften des Kreises erkennen und mit Hilfe der mathematischen Terminologie ausdrücken, um im Anschluß daran eine exakte Definition formulieren zu können.

Schülerantwort	Impuls des Lehrers
Die Figur ist kein Kreis, weil sie Ecken hat (bzw. ..., weil sie nicht rund ist; ..., weil sie oval ist).	Versuche einmal, auch für diese Figur einen Mittelpunkt einzuzeichnen! Kannst du dann auch einen Radius bestimmen? Warum nicht? (⇒ *„gleicher Abstand* aller Punkte vom Mittelpunkt“)
Die Figur ist kein Kreis, weil sie unterbrochen ist (bzw. ... nicht vollständig ist; ... nicht durchgezeichnet ist).	Wie können wir dieses Merkmal exakter formulieren? Benutze dazu die Eigenschaft, daß eine geometrische Figur eine *Punktmenge* mit bestimmten Merkmalen ist! (⇒ „Menge *aller* Punkte der Ebene ...“)

Die Schüler sollen erkennen:
Alle Kreispunkte haben denselben Abstand vom Mittelpunkt, und es gibt in der Zeichenebene keine weiteren Punkte mit dieser Eigenschaft. Eine endgültige Formulierung für die Definition kann z. B. anhand eines Lückentextes erarbeitet werden: Als Kreis um M mit dem ... bezeichnet man die Menge ... Punkte einer Ebene, die von dem Punkt ... dieser Ebene ... haben.

Durch die Aufträge 2a) bis c) sowie die Aufgaben 1 und 3 werden die Begriffe gefestigt. Es ist nützlich, u. a. auch die Aufgabe 4 lösen zu lassen, weil dadurch Kenntnisse aus Klasse 6 wiederholt werden, die in diesem Zusammenhang im Stoffabschnitt 6.1. immer wieder als Beweismittel benötigt werden.

Erarbeitung der Axialsymmetrie des Kreises Anhand des Auftrages 2d) kann herausgearbeitet werden, daß jeder Durchmesser Symmetrieachse des Kreises ist und daß der Kreis auch bei jeder Drehung um M auf sich abgebildet wird.

Als **Hausaufgabe** können die Schüler zur Vorbereitung der nächsten Stunde 3 Kreise ($r_1 = r_2 = 4$ cm; $r_3 = 2{,}5$ cm) zeichnen und ausschneiden.

Kontrollaufgabe

Aufg. 3

Lagebeziehungen (1 Std.)

LE 2 (LB 135 bis 136)

Als Weiterführung der Betrachtungen über Punkte und Geraden in Klasse 3 bzw. 4 werden die Untersuchungen am Kreis mit seinen möglichen Lagebeziehungen zu anderen schon bekannten geometrischen Objekten (Punkt, Gerade und andere Kreise) begonnen. Diese Stunde sollte dazu beitragen, daß die Schüler lernen, *selbständig und systematisch vollständige Fallunterscheidungen zu erarbeiten.*

Ziele

Die Schüler
- kennen die möglichen Lagebeziehungen zwischen Kreis und Geraden sowie die entsprechenden Bezeichnungen dafür („Tangente", „Sekante"),
- können nach einem vorgegebenen Kriterium (Anzahl der gemeinsamen Punkte) selbständig eine vollständige Fallunterscheidung für die Möglichkeiten der gegenseitigen Lage zweier Kreise erarbeiten und alle Fälle beschreiben.

Schwerpunkte

- Sicherung des Ausgangsniveaus, Motivierung
- Erarbeitung der Lagebeziehungen von Kreis und Gerade sowie der Begriffe „Sekante", „Tangente"
- Erarbeitung der Lagebeziehungen zwischen Kreisen

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus; Motivierung Anhand der folgenden Aufgabe können die Kenntnisse der Schüler über die gegenseitige Lage von Kreis und Punkten reaktiviert werden.

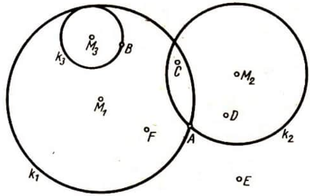
a) Welche der im Bild 6.5 gekennzeichneten Punkte liegen

– auf k_1;	– außerhalb von k_1 und innerhalb von k_2;
– innerhalb von k_1, aber nicht auf k_3;	– auf k_1 und auf k_2;
– innerhalb von k_2 und auf k_3?	– weder auf k_1 noch außerhalb von k_3?

b) Welche der Kreise schneiden einander, welche nicht?

Man sollte die Termini „innerer/äußerer Punkt des Kreises“ vermeiden, da der Kreis als Linie und nicht als Fläche definiert wurde. Aus der Sicht der Topologie sind demnach alle Punkte, die man als „innerhalb des Kreises liegend“ bezeichnet, *äußere Punkte.* In diesem Zusammenhang sollte den Schülern mitgeteilt werden, daß die Menge, die aus allen Punkten auf dem Kreis und allen Punkten innerhalb des Kreises besteht, als *Kreisfläche* bezeichnet wird. Zur Unterscheidung davon nennt man den Kreis auch *Kreislinie* oder *Peripherie der Kreisfläche.* Die Punkte der *Kreislinie* sind dann *Randpunkte der Kreisfläche,* die Punkte innerhalb (bzw. außerhalb) der Kreislinie sind *innere* (bzw. *äußere*) Punkte der Kreisfläche.

Bild 6.5



Neben der durch diese Aufgabe gegebenen innermathematischen Motivation könnte die Bedeutung der gegenseitigen Lage von kreisförmigen Teilen in der Technik (Kettentrieb, Zahnradgetriebe, Flaschenzug, ...; Bild F 7) zur Motivation herangezogen werden.

Erarbeitung der möglichen Lagebeziehungen Den Ansatzpunkt für das Kriterium „Anzahl der gemeinsamen Punkte“ für die Fallunterscheidungen bei Kreis/Gerade bzw. Kreis/Kreis liefert der Teil b) der Aufgabe zur Sicherung des Ausgangsniveaus.

Beim Erarbeiten des Begriffs „Tangente“ ist zu beachten, daß dieser Begriff nicht nur im Zusammenhang mit dem Kreis eine große Rolle spielt. Betrachtet man andere Figuren (z. B. einen Halbkreis), so reicht das Merkmal „Genau ein gemeinsamer Punkt“ zur Charakterisierung einer Geraden als Tangente nicht aus. Deshalb wurde das Wort „berühren“ gewählt, das anhand einer funktionalen Betrachtung (siehe Bild F 8) plausibel erklärt werden kann.

Die Lagebeziehungen zwischen zwei Kreisen können die Schüler anhand des o. a. Kriteriums mit Hilfe der drei in der Hausaufgabe angefertigten Kreisscheiben selbständig systematisch und vollständig erarbeiten.
Eine andere Variante bietet die Projektionsfolie „Lagebeziehungen zweier Kreise“. Dort wird als Ausgangspunkt für das systematische Suchen aller möglichen Fälle die Verschiebung des Kreises k_2 in Richtung des Kreises k_1 gewählt.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 2
2. Wann heißt eine Gerade bezüglich eines Kreises Tangente (bzw. Sekante)?

Tangenten (2 Std.)

LE 3 (LB 137 bis 138)

In dieser Lerneinheit wird begonnen, die praktisch bedeutsamen Fälle der gegenseitigen Lage von Kreis und Gerade (Tangente, Sekante) systematisch zu untersuchen und diesbezügliche Sätze zu formulieren. Dieser fachlich-logische Aufbau, dem die Stoffverteilung folgt, kann als Motivation für die einzelnen Lerneinheiten dienen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Bedeutung von Tangenten in der Praxis,
- kennen die Sätze über Tangente und Berührungsradius und können sie anwenden,
- können die Tangente an einen Kreis in einem vorgegebenen Punkt sauber und exakt konstruieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus für die Erarbeitung des Satzes
- Motivierung für die Untersuchung von Tangenten
- Erarbeitung des Satzes über Orthogonalität von Tangente und Berührungsradius sowie der Umkehrung dieses Satzes (mit Begründungen)

2. Stunde
- Anwendung des Satzes über Tangente und Berührungsradius in Konstruktions- und Berechnungsaufgaben

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Es sollte herausgearbeitet werden: Um eine bestimmte Gerade zeichnen zu können, muß man zwei Punkte oder einen Punkt und die Richtung der Geraden kennen. Die Richtung der Geraden kann man durch deren Lage zu einer anderen Geraden (z. B. parallel oder senkrecht) beschreiben.
Dazu eignet sich folgende Aufgabe:
a) Zeichne zwei Punkte A und B sowie die vier Geraden $g_1, \ldots, g_4$ folgendermaßen:
g_1 verläuft durch A und B;
g_2 verläuft senkrecht zu g_1 und nicht durch A;
g_3 verläuft durch A, aber nicht durch B und nicht parallel zu g_2;
g_4 verläuft durch B und parallel zu g_3.
Welche der Geraden sind eindeutig bestimmt?
b) Durch die Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2 und g_3 ist ein Dreieck entstanden. Welche Dreiecksseite ist die größte? Begründe!

Motivierung Neben einer möglichen innermathematischen Motivation sollten unbedingt Beispiele für das Auftreten von Tangenten in der Praxis erörtert werden, z. B. Bahn eines auf einer Kreisbahn bewegten Körpers nach dem Loslassen (Diskus- oder Hammerwerfer; dabei muß man sehr stark abstrahieren, da sich der Vorgang nicht in einer Ebene abspielt); Funkenflug beim Schleifen (Arbeitsschutz!); lose oder feste Rolle und Seil- bzw. Kraftverlauf; Formänderung durch Walzen; Rad und Schiene bzw. Straße; Riementrieb oder Kettenantrieb (Fahrrad).

Erarbeiten des Satzes und seiner Umkehrung Bei dem Vorgehen im Lehrbuch (LB 137) wird die Motivation durch den Versuch geliefert, eine Tangente zu konstruieren. Der Satz 2(1.) liefert jedoch noch keine Grundlage für die Konstruktion. In diesem Satz wird von der Tangente ausgegangen und festgestellt, daß diese senkrecht auf dem Berührungsradius steht. Zur Konstruktion brauchen wir aber die Umkehrung des Satzes 2(1.), deren Untersuchung dadurch motiviert werden kann.

Eine mögliche Begründung für die Umkehrung des Satzes ist:
Da $\sphericalangle MPB = 90°$, ist die Seite $\overline{MB}$ des Dreiecks MBP für alle Punkte $B \neq P$ der Tangente die größte Dreiecksseite. (Sie liegt dem größten Winkel gegenüber.) Also gilt $\overline{MB} > \overline{MP}$, also $\overline{MB} > r$. D. h: Alle Punkte $B \neq P$ der Geraden t liegen außerhalb des Kreises, also ist t Tangente.

Anwendung des Satzes Die Konstruktion einer Tangente eines Kreises in einem vorgegebenen Kreispunkt diente als Motivation für die Erarbeitung des Satzes und seiner Umkehrung und sollte deshalb auch möglichst noch in dieser Stunde ausgeführt werden. Die Projektionsfolie „Tangentenkonstruktionen“ kann sowohl der Erarbeitung als auch der Festigung der Konstruktion dienen.
Beim Bearbeiten der Aufgaben sollte die Aufgabe 1 unbedingt vor der Aufgabe 2 gelöst werden. Die Aufgabe 4 ist als Aufgabe mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad zur differenzierten Unterrichtsgestaltung geeignet.

Kontrollaufgabe

Zeichne einen Kreis k und auf ihm den Punkt Q!
Konstruiere in Q die Tangente an k !
Begründe die Konstruktion!

Sehne, Bogen, Winkel am Kreis; das Beweisen von Sätzen (2 Std.)

LE 4 und 5 (LB 138 bis 142)

Das Anliegen dieser Lerneinheiten besteht darin, daß die Schüler Zusammenhänge zwischen Sehne, Bogen und Zentriwinkel erkennen und diese selbständig begründen bzw. beweisen können.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Begriffe „Sehne“, „Bogen“, „Zentriwinkel“, „Peripheriewinkel“,
- können Zusammenhänge zwischen der Sehne, den Bögen sowie den Zentriwinkeln, die durch den Schnitt einer Sekante mit einem Kreis entstehen, erkennen, beschreiben und begründen,

– können anhand von Orientierungshilfen einfache Beweise selbständig führen und darstellen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung der Begriffe „Sehne“, „Bogen“, „Peripheriewinkel“, „Zentriwinkel“
- Erarbeitung und Begründung von Zusammenhängen
- Wiederholung von Kongruenzbeweisen

2. Stunde
- Bewußtmachen von Fragestellungen, die beim Finden von Beweisen helfen können
- Übungen im Lösen von Beweisaufgaben

Methodische Hinweise

Einführung der Begriffe

Im Lehrbuch werden die Begriffe „Zentriwinkel“ und „Peripheriewinkel“ mit Hilfe des **Bogens** erklärt. Man kann zur Charakterisierung dieser Winkel auch die **Sehne** benutzen. Das hat aber den Nachteil, daß durch eine Sehne *zwei* – im allgemeinen verschiedene – Zentri- (bzw. Peripherie-) Winkel bestimmt werden und man zusätzlich vereinbaren muß, welchen dieser Winkel man jeweils meint. Diese Erklärungen sind sprachlich recht kompliziert und widersprechen z. T. auch der umgangssprachlichen Bedeutung der verwendeten Begriffe.

Erarbeitung und Begründung von Zusammenhängen Die Schüler sollten selbständig Zusammenhänge zwischen Sehne, Bogen und Zentriwinkel durch Messen und Vergleichen erkennen und durch Angabe entsprechender Bewegungen begründen. Das kann durch das Lösen der Aufgabe 1 aus LE 4 erfolgen. Je nach Klassensituation wird es nötig sein, aus den Fragen (1) bis (3) einige auszuwählen bzw. durch Zuordnung der verschiedenen Fragen zu verschiedenen Schülergruppen ein differenziertes Arbeiten zu ermöglichen. Die Ergebnisse können dann jeweils in der ganzen Klasse diskutiert werden.

Wiederholung von Kongruenzbeweisen Anhand der Aufgabe 1 (3) kann das Wissen über Beweise und ihre Darstellung aus Klasse 6 wiederholt werden (Beweisfigur siehe Bild F 13):

Vor. $\overline{AB} = \overline{CD}$

Beh. $\triangle AMB \cong \triangle CMD$

Bew.

(1)	$\overline{AM} = \overline{CM}$	(Radien)
(2)	$\overline{BM} = \overline{DM}$	(Radien)
(3)	$\overline{AB} = \overline{CD}$	(Voraussetzung)

Daraus folgt:

(4) $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (sss), w. z. b. w.

Hervorheben von Fragestellungen zum Finden von Beweisen Die im Lehrbuch (LB 140) aufgeführten Orientierungshilfen sollten den Schülern als *beim Suchen eines Beweises immer wieder auftretende Fragestellungen* anhand einiger Beweisaufgaben bewußtgemacht, nicht aber als selbständiger Unterrichtsstoff behandelt werden. Je nach Klassensituation werden mehr oder weniger Beweisaufgaben gelöst werden müssen (Aufg. 1 bis 4, LE 5), bevor die das Vorgehen lenkenden Fragestellungen „abgehoben“ werden können.
In dem zweiten im Lehrbuch (LB 141) erarbeiteten Beweis werden die Fragen so weit er-

gänzt, daß sie eine ausreichende Grundlage für die in Klasse 7 zu behandelnden Beweise bilden.

Übungen im Lösen von Beweisaufgaben Die Zusammenfassung auf LB 142 kann den Schülern als Hilfe für das Lösen von Beweisaufgaben im zweiten Teil der Stunde sowie für das Finden der im weiteren Verlauf des Stoffabschnittes geforderten Beweise dienen. Je nach Klassensituation sollte in diesem Schwerpunkt auch das Umkehren von Sätzen mehr oder weniger intensiv wiederholt werden. Auch dafür bietet das Lehrbuch (LB 141) eine Möglichkeit.

Kontrollaufgaben

1. Auftrag 10
2. Aufg. 1 (LE 4)
3. Aufg. 3a) (LE 5)

Umkreis von Dreiecken; Sehnenvierecke (3 Std.)

LE 6 und 7 (LB 142 bis 144)

In diesen Lerneinheiten werden Kreise und Vielecke betrachtet, und zwar speziell dem Kreis einbeschriebene Vielecke. Dazu wird es nötig sein, das aus Klasse 6 vorhandene Wissen systematisch zu reaktivieren. Entsprechende Aufgaben sind in den „Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen" formuliert (UH 13, Aufg. 1 bis 3).

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß es durch je drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte genau einen Kreis gibt und daß damit die Aussage „Jedes Dreieck hat genau einen Umkreis" identisch ist,
- wissen, daß nicht jedes Viereck einen Umkreis hat und kennen den Begriff „Sehnenviereck",
- können Umkreise von Dreiecken konstruieren,
- können zu gegebenen Kreisen den Mittelpunkt konstruieren.

Schwerpunkte

1. und 2. Stunde
- Erarbeitung des Satzes: „Jedes Dreieck hat genau einen Umkreis"
- Konstruktion von Dreiecksumkreisen
- Konstruktion des Mittelpunktes von vorgegebenen Kreisen

3. Stunde
- Erarbeitung des Begriffs „Sehnenviereck" und von Eigenschaften von Sehnenvierecken
- Festigung: Untersuchung ausgewählter Vierecksarten (z. B. Quadrat, Rechteck, Trapez, Drachenviereck) auf die Eigenschaft „Sehnenviereck"

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Satzes Dieser Satz eignet sich gut zur problemhaften Erarbeitung, wie sie im Lehrbuch (LB 142) dargestellt ist. Statt des Auftrages 11 kann man als Ausgangsproblem auch wählen:

(1) „Stellen wir uns vor, in einem ebenen Parkgelände stehen drei besonders schön gewachsene Bäume – ein Ahorn, eine Buche und eine Kastanie. Ein Landschaftsgestalter kommt nun auf die etwas ausgefallene Idee, einen kreisförmigen Weg anlegen zu wollen, der an diesen drei Bäumen unmittelbar vorüberführt. Wird das wohl gehen? Und wenn ja, könnte er die Aufgabe auf einem Plan des Geländes vielleicht mit Zirkel und Lineal konstruktiv lösen?"

(2) „Wir haben bisher Kreise stets durch Angabe des Mittelpunktes M und des Radius r festgelegt. Ist es auch anders möglich, z. B. durch Angabe von Kreispunkten?
Durch einen Kreispunkt allein gewiß nicht, aber durch 2, 3, 4 Kreispunkte?"

Das Problem der Konstruktion eines Kreises durch drei auf einer Geraden liegende Punkte (Auftrag 13b)) kann in der 2. Stunde diskutiert werden.

Konstruieren von Dreiecken und ihren Umkreisen Je nach der Klassensituation und der noch zur Verfügung stehenden Zeit muß man entscheiden, wie weit man das Konstruieren von Dreiecken – etwa anhand der folgenden Aufgaben – hier wiederholen will.
Von einem Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ sind die folgenden Stücke gegeben. Konstruiere jeweils das Dreieck und seinen Umkreis!

a) $a = 6{,}2$ cm; $b = 40$ mm **b)** $c = 5{,}1$ cm; $a = 0{,}32$ dm
c) $b = 36$ mm; $\beta = 40°$ **d)** $c = 5{,}0$ cm; $\alpha = 57°$

Konstruieren des Mittelpunktes von vorgegebenen Kreisen Ausgangspunkt für die Erarbeitung der Konstruktionsschritte kann die Aufgabe 3 (LE 6) sein. Möglichkeiten für die Vorgabe von Kreisen ohne ihre Mittelpunkte sind:

- Arbeitsblätter;
- Umzeichnen der Grundfläche eines Zylinders oder Kegels aus dem Stereometriebaukasten.

Erarbeitung der Definition und der Eigenschaften von Sehnenvierecken Außer der Tatsache, daß manche Vierecke einen Umkreis haben und manche nicht, sollte – an einem speziellen Beispiel – eine Begründung dafür erarbeitet werden, warum es z. B. für das Viereck $ABCD_2$ im Bild F 17 keinen Umkreis geben kann.
Das Suchen nach einer Begründung für die Wahl des Namens „Sehnenviereck" führt auf die Eigenschaft: „Die Seiten eines Sehnenvierecks sind Sehnen des Vierecksumkreises".
Es ist nun naheliegend, auch die anderen Stücke (Eckpunkte, Innenwinkel, Diagonalen, Mittelsenkrechten) auf besondere Eigenschaften zu untersuchen.
Indem man mit Hilfe dieser Eigenschaften andere (gleichwertige) Definitionen für das Sehnenviereck formuliert, kann man die Fähigkeit der Schüler zum Definieren schulen.

Beispiele:
Ein Viereck heißt Sehnenviereck, wenn es einen Kreis gibt,
- in dem die Seiten des Vierecks Sehnen sind;
- in dem die Diagonalen des Vierecks Sehnen sind;
- in dem die Innenwinkel des Vierecks Peripheriewinkel sind;
- auf dem die Eckpunkte des Vierecks liegen.

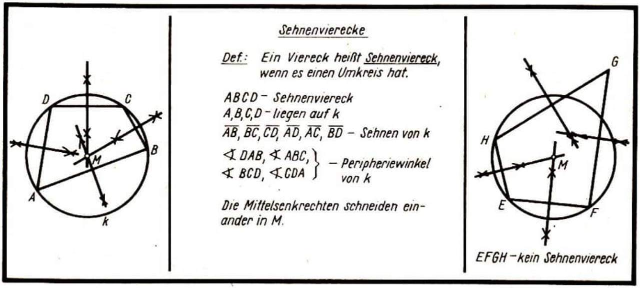
Ein Viereck heißt Sehnenviereck, wenn sich die Mittelsenkrechten der Vierecksseiten in genau einem Punkt schneiden.
Um zu zeigen, daß diese Definitionen gleichwertig mit der o. a. sind, muß jeweils gezeigt werden (je nach Klassensituation durch plausibles Begründen oder durch exaktes Folgern aus der ursprünglichen Definition), daß die Mengen der jeweils beschriebenen Vierecke identisch sind.

Festigung Möglichkeiten zur Festigung sind:
- Begründen, warum Quadrate, Rechtecke und gleichschenklige Trapeze immer Sehnenvierecke sind
- Aufgaben 1 bis 3 (LE 7)
- Systematisieren des in diesen Lerneinheiten erworbenen Wissens durch Erarbeiten der folgenden Übersicht

Gegebene Punkte in einer Ebene	**Anzahl der Kreise durch diese Punkte**	**Lage der Kreismittelpunkte**
A	unendlich viele	alle Punkte $M \neq A$ der Ebene
A, B	unendlich viele	alle Punkte der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$
A, B, C (nicht auf einer Geraden)	genau ein Kreis (Umkreis des $\triangle ABC$)	*M* ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des $\triangle ABC$.
A, B, C, D (jeweils drei Punkte nicht auf einer Geraden)	– genau ein Kreis, falls *ABCD* ein Sehnenviereck ist – kein Kreis, falls *ABCD* kein Sehnenviereck ist	*M* ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Vierecks *ABCD*.

Dabei sollte herausgearbeitet werden, daß die gleichen Worte „unendlich viele" für die beiden Fälle sehr unterschiedliche Mengen beschreiben (alle Punkte $M \neq A$ einer *Ebene* im ersten und einer *Geraden* im zweiten Fall). Außerdem kann eine Erweiterung auf 5 und mehr Punkte diskutiert werden.

Tafelbild (Bild 6.6) (3. Stunde)



Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1 (LE 6)
2. Konstruieren des Mittelpunktes eines vorgegebenen Kreises
3. Auftrag 15   4. Aufg. 2 (LE 7)

Sätze über Winkel am Kreis (3 Std.)

LE 8 bis 10 (LB 144 bis 148)

In diesen Lerneinheiten besteht ein Hauptanliegen darin, die Beweisfähigkeiten der Schüler weiterzuentwickeln und mit Hilfe der Beweise Zusammenhänge zwischen den behandelten Sätzen deutlich zu machen.

Ziele

Die Schüler
- kennen den Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck, den Peripherie- und den Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz und können diese Sätze beim Beweisen weiterer Sätze anwenden,
- verstehen den Beweis des Satzes über Gegenwinkel im Sehnenviereck, können den Peripheriewinkel-Satz selbständig und den Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz mit Hilfe beweisen,
- können die Sätze in Konstruktionen bzw. Berechnungen anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck und seines Beweises

2. Stunde
- Erarbeitung des Peripheriewinkel-Satzes und seines Beweises
- Festigung: „Lokales Ordnen“

3. Stunde
- Reaktivierung der benötigten Sätze
- Erarbeitung des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes und seines Beweises

Methodische Hinweise

Erarbeitung des Satzes über Gegenwinkel im Sehnenviereck Der Lehrer kann eine der beiden folgenden Möglichkeiten auswählen.

(1) Mit Hilfe des Auftrages 16 oder funktionaler Betrachtungen (anhand eines beweglichen Modells) wird zunächst die Vermutung erarbeitet, daß die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck konstant ist. (Beim Verschieben des Punktes D wird einer der Winkel α bzw. γ größer und einer kleiner (siehe Sehnenviereck im Bild F 18).)
Durch Messen an gezeichneten Sehnenvierecken wird die Vermutung präzisiert: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

(2) Für die 2. Variante ist es sinnvoll, wenn in der vorhergehenden Stunde festgestellt wird, daß alle Quadrate, Rechtecke und gleichschenkligen Trapeze Sehnenvierecke sind. Als Hausaufgabe sollten die Schüler die Eigenschaften dieser Viereckstarten anhand folgender Aufgaben wiederholen.

a) Was folgt für die Seiten, Winkel, Diagonalen eines Vierecks, wenn das Viereck ein Quadrat (Rechteck, Rhombus, ...) ist?
b) Woraus würde folgen, daß das Viereck *ABCD* ein Quadrat (Rechteck, ...) ist?

Der Satz 5 kann dann folgendermaßen als Vermutung erarbeitet werden:
Wir wollen untersuchen, ob wir über Sehnenvierecke ähnliche Aussagen finden können wie in Klasse 6 über andere Vierecksarten, z. B.:

- Rechtecke haben *parallele* und *gleichlange Gegenseiten*.
- In Parallelogrammen sind die *gegenüberliegenden Winkel gleich groß*.
- In gleichschenkligen Trapezen beträgt die *Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel* jeweils 180°.
- Die Diagonalen von Drachenvierecken stehen *senkrecht aufeinander* und wenigstens eine *halbiert* die andere.

In der Lerneinheit 6 haben wir festgestellt, daß alle Quadrate, alle Rechtecke und alle gleichschenkligen Trapeze Sehnenvierecke sind, daß es aber auch unregelmäßige Sehnenvierecke gibt.

- Nenne gemeinsame Eigenschaften der Seiten, Winkel und Diagonalen von Quadraten, Rechtecken und gleichschenkligen Trapezen!
- Zeichne drei unregelmäßige Sehnenvierecke und überprüfe, welche der oben genannten Eigenschaften auch auf diese Sehnenvierecke zutreffen (Bild 6.7)!

Erarbeitung des Beweises Dieser Beweis wird im allgemeinen nicht von den Schülern selbst gefunden werden. Er kann
(1) im Unterrichtsgespräch mit Hilfe der Fragen aus Lerneinheit 5 oder
(2) anhand der Darstellung im Lehrbuch (LB 145)
erarbeitet werden. Wählt man den Weg (2), sollten die Schüler dabei folgende Aufgaben lösen (die Zeilenangaben beziehen sich auf die Darstellung im Lehrbuch):

- Fertige eine Beweisskizze an, bezeichne die im Satz vorkommenden Größen!
- Aus welchen Winkeln setzen sich α, β, γ und δ jeweils zusammen?
- Warum muß in der ersten Zeile des Beweises das Doppelte jedes der farbig gekennzeichneten Winkel gebildet werden?
- Was muß man tun, um aus der ersten die zweite (und aus der zweiten die dritte) Zeile des Beweises zu erhalten?
- An welcher Stelle im Beweisschema wurde die Voraussetzung benutzt?
- Wie gelangt man von der zweiten Zeile des Beweises zur Behauptung $\beta + \delta = 180°$?
- Haben wir den Satz schon für alle möglichen Fälle bewiesen?

Zur Vorbereitung der nächsten Lerneinheit sollte die Aufgabe 4, z. B. als **Hausaufgabe**, bearbeitet werden.

Tafelbild (Bild 6.7) (1. Stunde [1. Schwerpunkt, Außentafeln])

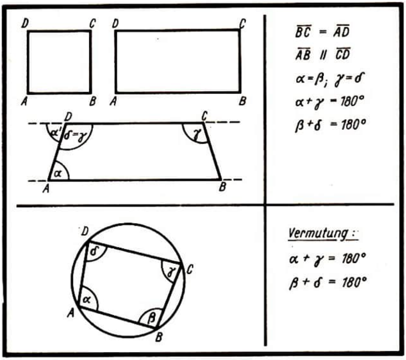


Bild 6.7

Erarbeitung des Peripheriewinkel-Satzes und seines Beweises Es seien hier zwei Möglichkeiten für die Satzfindung genannt:

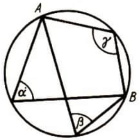
(1) Problemhafte Erarbeitung des Satzes anhand der im Lehrbuch (LB 146) diskutierten Aufgabe und des Auftrages 17

(2) Da im Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck eine Aussage über Peripheriewinkel, die zu verschiedenen Bögen eines Kreises gehören, gemacht wird, ist es naheliegend, nach einem Zusammenhang zwischen den Peripheriewinkeln zu suchen, die über demselben Bogen eines Kreises liegen.
Durch funktionale Betrachtungen (bewegliches Modell) oder Messungen wird der Satz als Vermutung erarbeitet.

Da zum Beweis des Peripheriewinkel-Satzes nur der – gerade behandelte – Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck benötigt wird, werden die Schüler mit Hilfe der Fragen aus LE 5 den Beweis selbständig finden. Die Darstellung des Beweises wird man im Unterrichtsgespräch erarbeiten oder anhand des Lehrbuches (LB 146) diskutieren.

Anmerkung zum Peripheriewinkelsatz und zum Auftrag 18
Genaugenommen besitzt der Peripheriewinkelsatz in der vorliegenden Formulierung zwei Voraussetzungen: Die zwei betrachteten Winkel sind Peripheriewinkel (1.) und liegen über ein und demselben Bogen (2.). Durch den Zusammenhang mit der vorhergehenden Lerneinheit wird jedoch deutlich, daß hier Peripheriewinkel betrachtet werden und damit die Voraussetzung (1.) als gegeben angenommen wird. Die im Auftrag 18 erwartete Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes lautet deshalb: Sind zwei Peripheriewinkel eines Kreises gleich groß, so liegen sie über ein und demselben Bogen dieses Kreises.

Tafelbild (Bild 6.8)



Beispiel:

Geg.: $\alpha = 30°$

Daraus folgt:

$\gamma = 150°$ $(\alpha + \gamma = 180°)$
$\beta = 30°$ $(\beta + \gamma = 180°)$

Also: $\beta = \alpha$

Peripheriewinkel-Satz

Satz: *Liegen zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen eines Kreises, so sind sie gleich groß.*

Vor.: α, β – *Peripheriewinkel über* $\widehat{BA}$

Beh.: $\alpha = \beta$

Bew.: $\left.\begin{array}{l} \boxed{\alpha} + \gamma = 180° \\ \boxed{\beta} + \gamma = 180° \end{array}\right\}$ *(Gegenwinkel im Sehnenviereck)*

Also: $\alpha = \beta$ *w.z.b.w.*

Festigung: „Lokales Ordnen“ Anhand eines Satzbaumes (LB 146) können die Schüler sowohl den Zusammenhang zwischen dem Peripheriewinkel-Satz und anderen Sätzen und Definitionen als auch die Struktur der Beweise des Peripheriewinkel-Satzes und des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck erkennen.
Dieser Satzbaum kann im Unterrichtsgespräch entwickelt und mit Hilfe einer Projektionsfolie („Sätze zur Planimetrie“, einzelne Pictogramme ausschneiden und entsprechend anordnen) oder von Applikationen dargestellt werden.

Beispiel für einen möglichen Stundenverlauf
Thema: Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz

Ziele

Die Schüler
- kennen den Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz und können ihn mit Hilfe beweisen.

Gliederung der Stunde

(1) 10′ Wiederholung der als Beweismittel benötigten Sätze (Auftrag 19)
(2) 20′ Erarbeitung des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes und seines Beweises (Bild F 27)
(3) 15′ Festigung und Kontrolle: Teilweises Wiedergeben des Beweises, Berechnungen von Winkeln (letzter Abschnitt der LE 10; Aufg. 1 und 4, LE 10)

Methodische Hinweise zu den Stundenabschnitten

(1) Mit Hilfe des Auftrages 19 wird u. a. der Außenwinkelsatz für Dreiecke wiederholt. Je nach Klassensituation wird es evtl. notwendig sein, die folgende Aufgabe noch voranzustellen: Berechne α und begründe (Bild 6.9)!

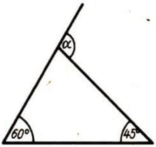
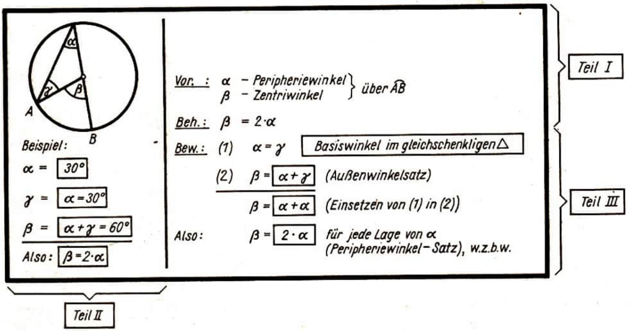


Bild 6.9

(2) Die Schüler erhalten den Auftrag: „Beschreibe die Lage der Winkel im Bild F 27 in bezug auf den Kreis! Überlege, ob es einen Zusammenhang zwischen α und β gibt!"
Sie erkennen: Der Peripheriewinkel α und der Zentriwinkel β liegen über ein und demselben Bogen.
Der Zusammenhang zwischen α und β kann zunächst mit Hilfe eines beweglichen Modells (an Magneten befestigte Gummis) veranschaulicht werden: Wird der Bogen größer, so vergrößern sich sowohl α als auch β.
Auf die Frage „Hat jemand bereits eine Vermutung, *wie* α und β zusammenhängen? Denkt an die Lösung des Auftrages 19!" werden einige Schüler schon antworten, daß β immer doppelt so groß ist wie α (Tafelbild [Bild 6.10], Teil I).
Die Schüler werden aufgefordert, den Satz an einem Beispiel zu begründen (Tafelbild [Bild 6.10], Teil II).
Um *allen* Schülern Gelegenheit zu geben, die Begründung richtig zu erfassen, sollte man weitere Beispiele begründen lassen. (Dabei kann man die Schüler etwa provozieren: „Wenn α aber ganz klein ist, z. B. 0,1°, dann glaube ich nicht, daß β genau doppelt so groß ist. Das kann man doch gar nicht mehr genau zeichnen.")
Die Antwort auf die Frage „Warum *muß* β *immer* doppelt so groß sein wie α, unabhän-

Tafelbild (Bild 6.10)



gig davon, welchen Wert *a* annimmt?" liefert den *Beweis* des Satzes, wenn sie eine lückenlose Folgerungskette enthält, die sich nicht auf spezielle Beispiele stützt. Im Zusammenhang mit der Beantwortung dieser Frage wird Teil III des Tafelbildes (Bild 6.10) entwickelt.

(3) Eine Kontrolle darüber, ob die Schüler den Beweis richtig verstanden haben, erhält man durch ein teilweises Wiedergeben des Beweises. Bevor die Schüler das Tafelbild (Bild 6,10, Teile II und III) ins Heft übernehmen, werden die durch Einrahmen gekennzeichneten Teile weggewischt und im Beispiel für *a* ein anderer Wert eingesetzt.

Als **Hausaufgabe** eignet sich die Aufgabe 1. Zur Vorbereitung sollte man den letzten Abschnitt der LE 10 diskutieren.

Zum Abschluß wird die Aufgabe 4 als Kontrollaufgabe gelöst.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 2 (LE 8) **2.** Aufg. 3 (LE 9)
3. Aufg. 4 (LE 10)

Satz des Thales (2 Std.)

LE 11 (LB 148 bis 149)

Mit dem Satz des Thales wird ein Spezialfall des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes behandelt, der aus historischen Gründen und wegen seiner häufigen Anwendbarkeit in diesem Stoffgebiet eine besondere Bedeutung hat.
Der Beweis dieses Spezialfalles ist in der Lerneinheit 9 noch nicht mit geführt worden (siehe letzter Abschnitt zu LE 10).

Ziele

Die Schüler
- kennen den Satz des THALES und können ihn mit eigenen Worten formulieren,
- können den Beweis anhand von Orientierungshilfen relativ selbständig finden und verstehen,
- können Voraussetzung und Behauptung des Satzes bestimmen und die Umkehrung bilden; sie wissen, daß auch die Umkehrung des Satzes eine wahre Aussage ist,
- können Satz und Umkehrung in einfachen Berechnungs- und Begründungsaufgaben anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Erarbeitung des THALESsatzes und seines Beweises

2. Stunde
- Festigung: Umformulierung des Satzes, Berechnungen
- Erarbeitung der Umkehrung des THALESsatzes
- Festigung des Satzes und seiner Umkehrung

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Wählt man die Variante des Lehrbuchs (LB 148) für den Beweis, so sollten – z. B. in Form von täglichen Übungen – die folgenden Aufgaben gelöst werden.
Berechne jeweils die angegebenen Winkel! Begründe! (Bild 6.11)

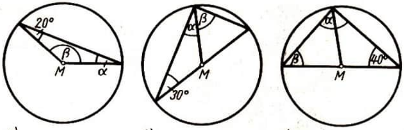
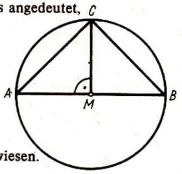


Bild 6.11 a) b) c)

Erarbeitung des THALESsatzes und seines Beweises

Es seien hier drei weitere Beweismöglichkeiten für den Satz des THALES angedeutet, die für Klasse 7 geeignet sind.



a) (1) $\sphericalangle AMC = 90°$ (nach Konstruktion)
(2) $\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MB}$ (Radien)

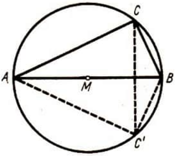
$\Rightarrow$ (3a) $\sphericalangle MCA = 45°$
und (3b) $\sphericalangle MCB = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck)

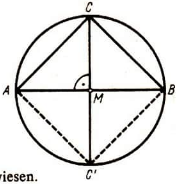
$\Rightarrow$ $\sphericalangle ACB = 90°$

Wegen des Peripheriewinkelsatzes ist damit der Satz des THALES bewiesen.

b) (1) Spiegelung an $AB \Rightarrow$ $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B$
(2) $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AC'B = 180°$ (Gegenwinkel im Sehnenviereck)

$\Rightarrow \sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B = 90°$, w. z. b. w.





c) (1) Spiegelung an $AB \Rightarrow$ $AC'BC$ ist ein Quadrat (Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren einander)

$\Rightarrow \sphericalangle ACB = 90°$

Wegen des Peripheriewinkelsatzes ist damit der Satz des THALES bewiesen.

Möglichkeiten zur Erarbeitung des Satzes und seines Beweises sind:

(1) Wählt man die Lehrbuchvariante (LB 148), sollte man den Schülern genügend Zeit geben, damit sie anhand der Fragen aus LE 5 versuchen, den Beweis selbständig zu finden. Die Darstellung des Beweises wird der Lehrer wieder sehr stark lenken müssen.

(2) Der Satz kann auch im engen Zusammenhang mit seinem Beweis analog dem Vorgehen bei der Behandlung des Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satzes erarbeitet werden.

Bemerkung: Dieser Weg zur Satz- und Beweisfindung ermöglicht eine recht große Schüleraktivität beim Beweisen. Trotzdem sollte man nicht ausschließlich (also bei Peripherie-, Peripherie-Zentriwinkel- *und* THALESsatz) diesen Weg wählen, weil die Schüler dabei das systematische Suchen nach Beweismitteln *nicht* lernen!

Festigung Möglichkeiten für die Festigung:

- Berechne β, wenn $\alpha = 15°$ (Bild 6.12)!
- Wiederholen des Beweises mit Hilfe eines Lückentextes (andere Variable wählen!)
- Umformulieren des Satzes (siehe LB 148)
- Begründungs- und Beweisaufgaben (Aufg. 1, 2 und 3)
- In der Aufgabe 3 wird die *Umkehrung* des THALESsatzes angewendet:
  3a) Der Punkt C_1 (Bild 6.13 a)) liegt auf dem Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, weil $\sphericalangle AC_1B = 90°$.
  3b) $\sphericalangle A_1CB_1 = 90°$, also liegt C auf dem Kreis mit $\overline{A_1B_1}$ als Durchmesser. Das heißt, wir können auf diese Art mehrere Durchmesser des Kreises bestimmen, deren Schnittpunkt der gesuchte Mittelpunkt ist (Bild 6.13 b)).

Bild 6.12

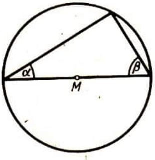
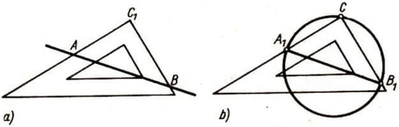


Bild 6.13



a) b)

Umkehrung des THALESsatzes Ausgehend von einer wiederholenden Analyse des Satzes (Zerlegen in Voraussetzung und Behauptung) können die Schüler selbständig die Tabelle im Lehrbuch (LB 149) erarbeiten.
Auf dieser Grundlage wird die sprachliche Formulierung der Umkehrung erarbeitet.

> *Kontrollaufgabe*
>
> Berechne β, wenn $\alpha = 30°$! (Bild 6.12)

Konstruktionen (2 Std.)

LE 12 (LB 150 bis 151)

Das Anliegen dieser Lerneinheit besteht einerseits darin, daß die Schüler ihre Kenntnisse über den THALESsatz und seine Umkehrung konstruktiv anwenden. Andererseits soll ein systematischer Überblick geschaffen werden über Tangenten- und Dreieckskonstruktionen, die durch das jetzige Wissen der Schüler ermöglicht werden.
Die Schüler sollten dazu angehalten werden, für *jede* Aufgabe eine Planfigur anzufertigen, zu überlegen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, welche Bestimmungslinien sich daraus ergeben und – nach Beenden der Konstruktion – wie viele Lösungen existieren. Außerdem sollten häufig mündliche und ab und zu schriftliche Konstruktionsbeschreibungen verlangt werden.
Die Zusammenfassung (LB 151) kann dabei den Schülern zur Konstruktionsfindung nützlich sein.

> **Ziele**
>
> Die Schüler
> - können Tangenten an einen Kreis a) durch einen vorgegebenen Kreispunkt, b) durch einen vorgegebenen Punkt außerhalb eines Kreises konstruieren,
> - können Kreise zu vorgegebenen Tangenten konstruieren,
> - können rechtwinklige Dreiecke konstruieren.
>
> **Schwerpunkte**
>
> *1. Stunde*
> - Konstruieren von Tangenten
>
> *2. Stunde*
> - Konstruieren rechtwinkliger Dreiecke

Methodische Hinweise

Konstruieren von Tangenten Die Konstruktion einer Tangente an einen Kreis durch einen Punkt außerhalb des Kreises kann anhand der Zusammenfassung (LB 151) oder mit

Hilfe der Projektionsfolie „Tangentenkonstruktionen" erarbeitet und durchgeführt werden. Im Anschluß daran können die folgenden Aufgaben, die eine Zusammenfassung der Tangentenkonstruktionen liefern, von den Schülern relativ selbständig gelöst werden.

1. Zeichne einen Kreis k um M mit $r = 3{,}2$ cm und einen Punkt P, der
   a) auf dem Kreis, **b)** außerhalb des Kreises, **c)** innerhalb des Kreises
   liegt! Konstruiere jeweils alle möglichen Tangenten an k, die durch P verlaufen!

2. Fülle die Tabelle aus!

Lage des Punktes P	Anzahl der Tangenten durch P an k

3. Zeichne
   a) eine Gerade g_1;
   b) zwei einander schneidende Gerade g_2 und g_3!
   Konstruiere dann einen Kreis mit $r = 3$ cm, der die Gerade g_1 (bzw. die Geraden g_2 *und* g_3) berührt!

Ein Vorschlag zum differenzierten Arbeiten:
Erhöhter Schwierigkeitsgrad: Aufg. 2a) bis c); 3 b)
Geringerer Schwierigkeitsgrad: Aufg. 1; 3a)

Konstruieren rechtwinkliger Dreiecke Mögliche Aufgabenstellungen finden sich in Aufgabe 2. Je nach Klassensituation (Fertigkeiten im Konstruieren, noch vorhandene Zeit, Vorkenntnisse der Schüler) wird man im Zusammenhang damit die Dreieckskonstruktionen mit Hilfe von Kongruenzsätzen mehr oder weniger ausführlich wiederholen können, z. B. könnten die folgenden Stücke gegeben sein:

a) $a = 4$ cm; $b = 50$ mm; $c = 0{,}6$ dm **b)** $b = 32$ mm; $\beta = 45°$; $\gamma = 37°$
c) $a = 5$ cm; $b = 40$ mm; $\alpha = 55°$ **d)** $c = 3{,}4$ cm; $a = 48$ mm; $\gamma = 32°$

Kontrollaufgaben

Aufg. 1 und 2

Stoffabschnitt 6.2.

Kreisberechnung (6 Std.)

Im Stoffabschnitt 6.2. sind die Schüler mit der Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Kreises bekanntzumachen. Die Berechnungen von Kreisbogen, Kreisring und Kreisausschnitt werden als Anwendung der Kreisberechnung gesehen und nach inhaltlichen Überlegungen durchgeführt.
Das Lösen von vielfältigen Sach- und Anwendungsaufgaben in diesem Stoffabschnitt trägt zur weiteren Entwicklung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen bei. (Dabei sollte man immer wieder auf die große Bedeutung des Arbeitens mit dem Durchmesser in der Praxis hinweisen.) Auf die Herausbildung einer kritischen Haltung zu den gewonnenen Ergebnissen ist großer Wert zu legen. In diesem Zusammenhang bietet sich an, Grundbegriffe der Fehlerrechnung zu wiederholen und anzuwenden.
Historische Betrachtungen zur Kreisberechnung und insbesondere zur Zahl π sollten genutzt werden, um die Schüler zur Achtung vor den Leistungen bedeutender Mathematiker zu erziehen.

Auch im Stoffabschnitt „Kreisberechnung“ sollte daran gearbeitet werden, bei den Schülern richtige Vorstellungen darüber zu entwickeln, was bei praktischen Messungen und Anwendungsaufgaben sinnvolle Genauigkeit bedeutet. *Es gilt nicht:* Je mehr Dezimalstellen, desto genauer das Ergebnis! Vielmehr sind die in Klasse 6 gelernten Regeln für das Rechnen mit Näherungswerten anzuwenden.

Umfang von Kreisen (3 Std.)

LE 13 (LB 152 bis 154)

Nachdem sich die Schüler in den vorhergehenden Lerneinheiten längere Zeit mit dem Kreis und seinen Eigenschaften beschäftigt haben, lernen sie jetzt die Kreis*berechnung* kennen.

Ziele

Die Schüler
- erkennen die Notwendigkeit von Kreisberechnungen,
- erkennen die Proportionalität zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises,
- kennen die Zahl π als irrationale Zahl,
- kennen die Formel zur Berechnung des Umfangs eines Kreises,
- können Umfangsberechnungen mit Hilfe des Taschenrechners und der Zahlentafel durchführen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Kreisberechnung
- Gewinnen der Formel zur Berechnung des Kreisumfanges auf empirischem Wege

2. Stunde
- Einfache Übungen zur Berechnung von Kreisumfängen
- Arbeit mit der Zahlentafel und der π-Taste am Taschenrechner

3. Stunde
- Bestimmen von Radius und Durchmesser bei vorgegebenem Umfang
- Berechnung von Kreisbögen

Methodische Hinweise

Motivierung der Kreisberechnung Es erscheint sinnvoll, dem Schüler eine Problemstellung (etwa das zu Beginn der LE 13 gestellte Problem) zu geben, die er mit seinen bisherigen Mitteln noch nicht lösen kann. Daraus leiten sich Motivierung und Zielorientierung ab. Nach Erarbeitung der Formel für den Kreisumfang kann das gestellte Problem im Unterricht oder auch zu Hause gelöst werden.

Gewinnen der Formel zur Berechnung des Kreisumfanges auf empirischem Wege Es bietet sich an, den im Lehrbuch ausführlich beschriebenen Weg einzuschlagen. Deshalb sollte am Anfang die Bearbeitung des Auftrages 23 stehen (natürlich kann man auch aus Pappe gefertigte Kreisflächen, die auf einem Lineal abgerollt werden, nutzen). In jedem Falle sollte sich der Lehrer überlegen, welchen Teil des Auftrages die Schüler bereits in einer vorbereitenden Hausaufgabe erledigen können. Die Schüler werden aufgefordert, die gemessenen Umfänge und Durchmesser, die in einer Tabelle erfaßt sind, miteinander zu vergleichen.
Sie stellen fest: Je größer der Durchmesser ist, um so größer ist auch der Umfang. Sie vermuten: Zwischen beiden Größen besteht (direkte) Proportionalität. Nun wird der Proportionalitätsfaktor k ermittelt, indem die Quotienten $\frac{u}{d}$ gebildet werden. Da die Quotienten $\frac{u}{d}$ für alle Wertepaare angenähert gleich sind, kann die vermutete Proportionalität angenommen werden.
Die Schüler sollten bis hierher weitgehend selbständig arbeiten. Die notwendigen Bemerkungen zur Zahl π werden im Lehrervortrag dargeboten. Ergebnis dieser Arbeitsphase ist die Formel zur Berechnung des Kreisumfanges, wie sie im Satz 10 ausgedrückt ist. Die Formel ist sowohl für den Durchmesser als auch für den Radius zu behandeln. Übungen mit formalen Aufgaben (etwa wie die Aufg. 1 und 2) schließen die Stunde ab.

Einfache Übungen zur Berechnung von Kreisumfängen Nachdem die Formel zur Berechnung von Kreisumfängen wiederholt wurde, können zunächst weitere formale Aufgaben gelöst werden. Dabei sind die Schüler anzuhalten, mit geeigneten Näherungswerten für die Zahl π zu rechnen. Es ist darauf zu achten, daß in korrekter Weise mit den auftretenden Einheiten gearbeitet wird und daß bei jeder Aufgabe stets ein Überschlag erfolgt.

Arbeit mit der Zahlentafel und der π-Taste am Taschenrechner Die Zahlentafel hat der Schüler bereits beim Ermitteln von Quadratzahlen und Quadratwurzeln kennengelernt. Ihn jetzt mit dem neuen Verwendungszweck der Zahlentafel bekanntzumachen, ist nicht besonders schwierig.
Beim Arbeiten mit dem Taschenrechner ist der Schüler zunächst auf die π-Taste aufmerksam zu machen. Alle Schüler sollten sich von dem auf ihrem Rechner ausgewiesenen Wert für die Zahl π überzeugen. Der Schulrechner SR 1 liefert beim Drücken der π-Taste einen Näherungswert auf 8 Stellen genau. Ein Vergleich mit eventuell anderen in der

Klasse verwendeten Rechnern erscheint sinnvoll. Der Rechenablaufplan ist dem Beispiel 6 zu entnehmen.

Bestimmen von Radius und Durchmesser bei vorgegebenem Umfang Es eignen sich die Aufgaben 6 und 7, aber auch die Aufgaben 7 und 9 aus den komplexen Übungen. Die Schüler sollten darauf hingewiesen werden, daß Aufgaben dieser Art besonders zweckmäßig mit der Zahlentafel gelöst werden können.

Berechnung von Kreisbögen Hierzu eignen sich die Aufgaben 2 bis 4. Ausgehend von der Länge eines Halbkreises bzw. eines Viertelkreises können die Schüler durch inhaltliche Überlegungen zur Berechnung eines Kreisbogens mit einem bestimmten Zentriwinkel geführt werden. Sie müssen dabei erkennen, der wievielte Teil der jeweilige Zentriwinkel vom Vollwinkel ist, und können dann auf Grund der bestehenden Proportionalität zwischen Kreisbogen und Zentriwinkel auf die Länge des Kreisbogens schließen.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1, 3, 5 und Aufg. 14 der komplexen Übungen (LB 158 f.)

Inhalt von Kreisflächen (3 Std.)

LE 14 (LB 155 bis 158)

Diese Lerneinheit stellt etwas höhere Anforderungen an die Schüler, da der Zusammenhang zwischen Durchmesser (bzw. Radius) und Flächeninhalt nicht so leicht zu erkennen ist wie der zwischen Durchmesser und Umfang. Es ist deshalb besonders wichtig, die einzelnen Schritte zur Erarbeitung der Berechnungsformel einleuchtend zu motivieren.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Formel zur Berechnung des Inhaltes von Kreisflächen,
- können Flächeninhaltsberechnungen mit Hilfe von Taschenrechner und Zahlentafel sicher ausführen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der Formel für den Inhalt einer Kreisfläche

2. Stunde
- Einfache Übungen zur Berechnung von Kreisflächeninhalten
- Arbeit mit Zahlentafel und Taschenrechner

3. Stunde
- Bestimmen von Radius und Durchmesser bei vorgegebenem Flächeninhalt
- Berechnen von Kreisring und Kreisausschnitt

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Formel für den Inhalt einer Kreisfläche Dem Vorgehen im Lehrbuch liegt folgender Gedankengang zugrunde, den auch die Schüler erfassen sollten:

1. Es ist kein Weg erkennbar, wie man die gesuchte Formel durch *Zurückführung* auf schon bekannte Berechnungsformeln gewinnen könnte (wie dies beispielsweise in Klasse 6 beim Herleiten der Formeln für das Dreieck oder das Trapez möglich war – siehe [B 10, S. 194ff.]). Deshalb liegt es nahe, sich auf das *Messen* (Auszählen) des Flächeninhalts mit Hilfe von *Einheitsquadraten* zu besinnen, wie es am Beginn der Flächeninhaltsbestimmung beim Rechteck praktiziert worden ist (vgl. [B 9, S. 99ff.]).
2. Das Auszählen mit Einheitsquadraten führt beim Kreis natürlich nur zu *Näherungswerten.* Um den Flächeninhalt damit möglichst genau zu bestimmen, kann man zweierlei tun: Man „verfeinert" die Meßeinheit (zunächst etwa cm^2, dann mm^2) und schätzt den genauen Wert nach oben und unten ab (durch den Inhalt von „innerer" und „äußerer" Vielecksfläche, A_a und A_i) – vgl. das Bild F 40. Das arithmetische Mittel A_m von A_a und A_i ist dann ein brauchbarer Näherungswert für den Inhalt der Kreisfläche.
3. Da man nicht immer auszählen will (und meist auch gar nicht könnte), sucht man nach einem *rechnerischen Zusammenhang* zwischen dem Flächeninhalt des Kreises und seinem Radius. Dieser Zusammenhang kann gefunden werden (zumindest annähernd), wenn man verschiedene Wertepaare $(r; A_m)$ miteinander vergleicht. Es zeigt sich, daß beispielsweise das Verdoppeln des Radius zu einer Vervierfachung (etwa) des Flächeninhalts führt, daß offenbar $A \sim r^2$ gilt. Das Berechnen mehrerer Quotienten A_m: r^2 bekräftigt diese Vermutung und ergibt als Proportionalitätsfaktor ungefähr 3.
4. Abschließend wird *mitgeteilt,* daß *tatsächlich* $A \sim r^2$ und der Proportionalitätsfaktor die schon bekannte Zahl π ist, daß also $A = \pi \cdot r^2$ gilt.

Es ist wichtig, die Schüler möglichst aktiv in die Erarbeitung einzubeziehen. Dazu können insbesondere die Aufträge 25 bis 27 genutzt werden. (Bei den Aufträgen 25 und 27 sind arbeitsteilige Verfahren zweckmäßig.)

Es sei noch ein **anderer Weg** zur Erarbeitung der Formel angedeutet:
Ein Kreis wird in gleich große Sektoren zerlegt. Diese Sektoren werden zu einer neuen Figur zusammengesetzt (Bild 6.14), die sich umso besser einem Parallelogramm annähert, je größer die Anzahl der Kreissektoren ist. Daraus ergibt sich:

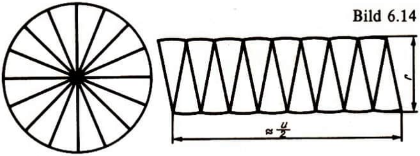
$$A_{\text{Kreis}} \approx A_{\text{Parallelogramm}}$$

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{u}{2} \cdot r$$

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot r$$

$$A_{\text{Kreis}} \approx \pi \cdot r^2$$

Bild 6.14



Die Gültigkeit der *Gleichung* $A_K = \pi \cdot r^2$ muß wieder *mitgeteilt* werden.

Aus der gewonnenen Formel für den Kreisflächeninhalt ist durch Einsetzen von $\frac{d}{2}$ *für r* auch die Formel $A_K = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ herzuleiten. Sie hat besondere Bedeutung, weil die Zahlentafel auf ihrer Basis aufgebaut ist und bei Überschlagsrechnungen wegen $\frac{\pi}{4} \approx 1$ dann nur noch Quadrieren erforderlich wird.

Einfache Übungen zur Berechnung von Kreisflächeninhalten Zunächst sollten formale Aufgaben mit relativ einfachem Zahlenmaterial gelöst werden. Dabei kommt Kopfrechenübungen und Überschlagsrechnungen eine besondere Bedeutung zu.
Unabhängig davon, ob die Eingangsgrößen Radius oder Durchmesser sind, muß der Schüler die erarbeiteten Formeln sicher anwenden können.

Arbeit mit Zahlentafel und Taschenrechner Beim weiteren Lösen von Aufgaben zur Kreisflächenberechnung wird von den Rechenhilfsmitteln Zahlentafel und Taschenrechner Gebrauch gemacht.

Bei der Verwendung der Zahlentafel ist zunächst die Technik des Ablesens zu klären. Dabei ist an einigen Beispielen die Problematik der „Kommaverschiebung" zu erläutern, und zwar durch Abtrennen geeigneter Zehnerpotenzen (in Analogie zur Handhabung der Quadrattafel; vgl. Stoffgebiet 4). Ein Vergleich mit dem Ablesen bei der Umfangsbestimmung bietet sich an. Es ist auch der umgekehrte Gebrauch der Zahlentafel zu üben, bei dem aus gegebenem Flächeninhalt eines Kreises sein Durchmesser zu bestimmen ist.

Für die Arbeit mit dem Taschenrechner ist im Lehrbuch jeweils ein Rechenablaufplan angegeben. Fragen der sinnvollen Genauigkeit in Abhängigkeit von den Eingangswerten sollten besonders beachtet werden.

Bestimmen von Radius und Durchmesser bei vorgegebenem Flächeninhalt Dem Schüler ist deutlich zu machen, daß beim Lösen solcher Aufgaben die Zahlentafel besonders vorteilhaft ist. Dennoch ist aber *auch* der Weg über das Auflösen der Gleichung nach r bzw. d zu behandeln.
Als Übungsmaterial eignen sich besonders Aufgabenstellungen wie in Aufgabe 7 der komplexen Übungen.

Berechnen von Kreisring und Kreisausschnitt Die Berechnungen sind als Anwendungen zur Kreisberechnung zu sehen. Hierbei spielen inhaltliche Überlegungen und Veranschaulichungen durch Skizzen eine große Rolle. Zur Realisierung der anzustrebenden Ziele eignen sich die Aufgaben 2 bis 4.

Kontrollaufgaben

Aufg. 1, 3, 6, 7 und Aufg. 11 der komplexen Übungen (LB 158 f.)

Stoffabschnitt 6.3.

Komplexe Übungen (7 Std.)

Komplexe Übungen (4 Std.)

(LB 158 bis 160)

Das in den Stoffabschnitten 6.1. und 6.2. erworbene Wissen und Können wird wiederholt, systematisch in komplexen Zusammenhängen angewendet und schließlich in einer zweistündigen Klassenarbeit kontrolliert.

Die Auswahl der Aufgaben wird sehr stark durch die erreichte Klassensituation bestimmt. Dabei sollte jedoch immer gewährleistet werden, daß die Aufgabenstellungen vielseitig sind und u. a. komplexe Aufgaben bearbeitet werden, die auch Elemente aus weiter zurückliegenden Stoffgebieten enthalten.

Schwerpunkte

- Systematisierung der Sätze und Begriffe aus dem Stoffabschnitt 6.1.
- Anwendung der Sätze durch Konstruktionen sowie in Begründungs- und Beweisaufgaben
- Bearbeitung von komplexen Sachaufgaben

Methodische Hinweise

Die Aufgaben zum ersten Schwerpunkt „Systematisieren der Sätze und Begriffe" wurden so ausgewählt, daß ein Wechsel von Identifizieren und Realisieren des Begriffes „Kreis" sowie von Berechnung und Begründung beim Anwenden der Sätze gewährleistet ist.
In den Hinweisen zu den anderen Schwerpunkten wurde dieser Wechsel bei der Anordnung der Aufgaben nicht berücksichtigt. Zur Gestaltung von **abwechslungsreichen Übungen** sollte man aber jeweils Aufgaben zu mehreren Schwerpunkten in derselben Stunde stellen.

Systematisieren der Sätze und Begriffe Die Darstellung in der Zusammenfassung (LB 158) kann anhand folgender bzw. dazu ähnlicher Aufgaben erarbeitet werden. (Je nach Klassensituation müssen statt der Aufgabe 2 eventuell mehrere einfachere und weniger komplexe Aufgaben gestellt werden.)

1. a) Jemand will um einen Baum herum einen Kreis von 16 m Durchmesser abstecken. Er befestigt dazu eine 8 m lange Leine mit einem Nagel am Baum und markiert beim Herumlaufen seinen Weg mit dem anderen Ende der Leine. Erhält er einen Kreis?

b) Aufg. 1 zu LE 1

2. Ermittle jeweils α, β, γ, δ (Bild 6.15) – mit Begründungen!

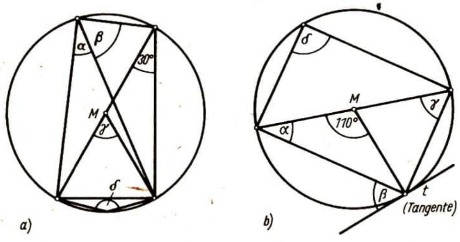


Bild 6.15

Anwenden der Sätze durch Konstruktionen Die Übersicht aus LE 12 über mögliche Konstruktionen wird erweitert durch Wiederholung
- der Konstruktion von Dreiecksumkreisen,
- der konstruktiven Anwendung des Peripheriewinkel-Satzes sowie des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes, z. B. durch folgende Aufgaben:

1. Auf einer Geraden g liegen die Strecken $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm. Konstruiere alle Punkte, von denen aus sowohl die Strecke $\overline{AB}$ als auch die Strecke $\overline{BC}$ unter einem Winkel von 50° erscheint!
2. Konstruiere Dreiecke ABC, für die die folgenden Stücke gegeben sind!
   a) $c = 3{,}5$ cm; $\gamma = 42°$; $s_c = 25$ mm
   b) $b = 37$ mm; $\beta = 104°$; $h_b = 21$ mm

Begründungs- und Beweisaufgaben Sie können schon in die anderen beiden Schwerpunkte mit einbezogen werden. Neben den Aufgabenstellungen in den einzelnen Lerneinheiten sind z. B. die folgenden Aufgaben geeignet:

1. Beweise die folgenden Sätze sowie ihre Umkehrungen!
   a) Jedes einem Kreis einbeschriebene gleichseitige Vieleck hat gleichgroße Innenwinkel.
   b) Jedes einem Kreis umbeschriebene gleichseitige Vieleck hat gleichgroße Innenwinkel.
2. Für jedes Drachenviereck gilt: Wenn es ein Sehnenviereck ist, so hat es mindestens zwei rechte Winkel.
   a) Beweise diese Aussage!
   b) Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? Begründe deine Antwort!
3. Welche der Innenwinkel der Dreiecke ABC, ABD und ABE sind einander kongruent (Bild 6.16)? Begründe!

Lösen komplexer Aufgaben Hier sollte das Aufgabenangebot im Lehrbuch (LB 158ff.) genutzt werden.
Bei den Aufgaben 5, 6, 10, 13, 18
wird die Kreisberechnung mit der Anwendung von Sätzen über den Kreis bzw. mit Elementen aus zurückliegenden Stoffgebieten (insbesondere aus der Prozentrechnung) verknüpft.
Die Aufgaben 5, 6, 7, 10, 12, 13, 17, 19, 20
eignen sich besonders zum Einsatz des Taschenrechners (Beachten von sinnvoller Genauigkeit).
Bei den Aufgaben 1 bis 6, 8, 9, 11 bis 14, 16, 17, 19
wird besonders das Erkennen des mathematischen Kerns eines Problems gefordert.

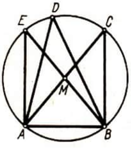


Bild 6.16

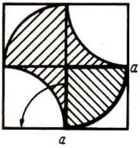


Bild 6.17

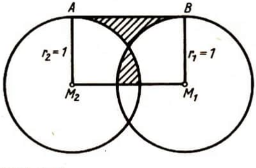


Bild 6.18

Einige Aufgaben – wie etwa Aufgabe 14 – eignen sich zur Diskussion von Lösungsvarianten.

Beispiel: Gesucht sind der Flächeninhalt und der Umfang der im Bild 6.17 schraffierten Figur.

Lösungsvariante A
Die Schüler arbeiten in jedem Teilquadrat und ermitteln durch Differenzbildungen den gesuchten Flächeninhalt. Den Umfang der schraffierten Figur können sie durch relativ einfache Überlegungen erhalten.

Lösungsvariante B
Durch entsprechende Anregungen des Lehrers – Hinweis auf Drehung eines Teilquadrates um 90° – wird das gestellte Problem zu einer Überlegungsaufgabe. Man kann danach sofort erkennen, daß der Flächeninhalt sich zu $A = \frac{a^2}{2}$ und der Umfang sich zu $u = a \cdot \pi$ ergeben.

Solche Aufgabenstellungen eignen sich gut für differenziertes Arbeiten, fordern die leistungsstarken Schüler und tragen in hohem Maße zur Denkentwicklung bei.
Etwas anders geartet ist das folgende Problem, durch welches Variabilität, Kombinationsfähigkeit und Vorstellungsvermögen beim Schüler entwickelt werden können:
Wie groß ist die Strecke $\overline{M_1M_2}$ in dem im Bild 6.18 dargestellten geometrischen Problem, wenn die schraffierten Flächen gleich groß sind und der Radius der Kreise jeweils $r = 1$ ist?
Bei der Lösung des Problems ist es ganz entscheidend, daß der Schüler den Sachverhalt vollständig erfaßt. Dann wird er relativ leicht erkennen, daß der Flächeninhalt des Rechtecks ABM_1M_2 gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Viertelkreise ist, und der Lösungsweg wird deutlich.

Abschließend sei bemerkt, daß innerhalb von komplexen Übungen auch Aufgabenstellungen Platz haben, die das Interesse der Schüler nicht nur von der mathematischen Seite her wecken.

Beispiel
Im folgenden Text haben sich sieben Begriffe bzw. Namen versteckt, die bei der Behandlung der Kreislehre oft benutzt werden. Finde sie heraus!

Lieber Thomas!
Kurz vor unserer Rüc**kreise** aus **Thale** sende ich Dir herzliche Grüße. Gestern waren wir im Kino und sahen „**Tecumseh**".
Nebenbei: Ich bitte Dich dar**um, fang** gleich an, unseren Zaunbau vorzubereiten. Du mußt die **Stangen t**eilen und dies**e Kanten** abschrägen.
Führe alles gewissenhaft **durch. Messer**, Säge und Feile liegen im Schrank.

Dein Klaus

An solche Aufgabenstellungen kann man sehr gut entsprechende Wiederholungen oder Systematisierungen anknüpfen.

Leistungskontrolle und Auswertung (3 Std.)

Die schriftliche Leistungskontrolle sollte neben Aufgaben aus dem gesamten Stoffgebiet „Der Kreis“ auch solche aus den Stoffgebieten 1. bis 5. enthalten. Dabei können in einigen Aufgaben die Kreisberechnungen mit besonders wichtigen Problemen des Stoffgebietes, speziell mit Konstruktionen und Beweisen, verbunden werden.
Aufgaben für den Stoffabschnitt 6.1. können u. a. aus den Kontrollaufgaben (UH 168 f.) entnommen werden. Die Aufgliederung dieser Aufgaben in jeweils a) und b) ermöglicht eine Einteilung in zwei etwa gleichwertige Gruppen. (Eine Ausnahme bilden die Aufgaben 5 und 6, die insgesamt jeweils einer Gruppe zugeordnet werden müßten.)

Stoffgebiet 7

Stereometrie

Vorbemerkungen

Das Stoffgebiet Stereometrie bietet sowohl vom Gegenstand her als auch durch das Lösen von Anwendungsaufgaben in besonderem Maße Gelegenheit, einen lebensverbundenen Unterricht zu gestalten. Prismatische und zylindrische Körper treten uns im täglichen Leben und in der Technik als Gegenstände, entsprechend geformte Materialien, Behälter, Werkstücke, Verpackungen u. ä. entgegen. Beispiele aus der Technik dienen deshalb zur Motivierung, werden zur Erarbeitung herangezogen und bilden eine Basis für vielfältige Anwendungsaufgaben.
Im Mittelpunkt der Behandlung dieses Stoffgebietes stehen folgende Ziele:
a) Definieren des geraden Prismas und des geraden Kreiszylinders in Verbindung mit einer Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens;
b) Herleiten der Formeln für das Berechnen des Oberflächeninhalts und des Volumens von Prisma und Zylinder durch Zurückführen auf bereits Bekanntes;
c) Anwenden der Kenntnisse über Prismen und Zylinder unter Verwendung von Rechenhilfsmitteln (Taschenrechner und Tafelwerk) beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben.

Mit der Behandlung von Prismen und Zylindern wird also ein Beitrag zur Realisierung der Leitlinie „Definieren“ geleistet und die Körperberechnung aus Klasse 5 (Quader und Würfel) fortgesetzt. Wichtige Voraussetzungen dafür sind
- das Umrechnen von Größen (Klasse 5);
- das Umformen von Gleichungen bzw. Formeln (Klassen 6 und 7) und die
- Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung von Vielecken und Kreisen (Klasse 6 bzw. 7).

Neben dem Definieren der Begriffe „Prisma“ und „Zylinder“ steht das Berechnen von deren Oberflächeninhalten und Volumen im Vordergrund. Hierbei ist der Einsatz des Taschenrechners angebracht.
Das Verwenden des Taschenrechners ermöglicht es, den Zeitaufwand für Berechnungen wesentlich herabzusetzen. Allerdings sind die Ergebnisse im Rechner oft achtstellig, obwohl meist nur grobe Näherungszahlen in die Rechnung eingingen. Das Ergebnis kann nicht mehr zuverlässige Grundziffern haben als die Ausgangswerte. Deshalb gewinnt das Bestimmen einer sinnvollen Genauigkeit an Bedeutung. Um Größen- und Zahlenvorstellungen zu festigen, ist vor der Berechnung mit Hilfe des Taschenrechners ein Überschlag durch Kopfrechnen zu verlangen, der auch zur Kontrolle des Ergebnisses dient. Die Verwendung von Zahlentafeln sollte durch den Einsatz des Rechners nicht vernachlässigt werden.
Obwohl in diesem Stoffgebiet das Berechnen im Vordergrund steht, sollte auch keine Gelegenheit versäumt werden, um stereometrische Lagebeziehungen im Hinblick auf eine Weiterentwicklung des Raumvorstellungsvermögens zu behandeln. Bei Prisma und Zylin-

der bieten sich an die **Parallellage** von Grund- und Deckfläche und die **Orthogonalität** von Grund- und Seitenflächen bzw. Mantellinien.
Neben vielfältigen Übungen im **Erkennen** von Körpern, wobei an Hand der Definitionen deren Eigenschaften zu überprüfen sind, sollte besonderes Augenmerk auf das räumlich-gegenständliche und das eben-bildhafte **Darstellen** von Körpern gelegt werden. Auch noch in Klasse 7 können die Schüler beim **Anfertigen von Körpermodellen** wertvolle Kenntnisse gewinnen, die sich positiv auf ihre Lernleistungen auswirken.
Unter Anwendung ihrer Kenntnisse aus der darstellenden Geometrie sollten die Schüler aus Körpernetzen Modelle herstellen (Hausaufgabe!), was nicht nur zur Belebung des Unterrichts, sondern auch zum inhaltlichen Verständnis der stereometrischen Begriffe und Formeln beiträgt.
Eben-bildhafte Darstellungen können als Schrägbilder oder Bilder in Ein- oder Zweitafelprojektion konstruiert werden (Lochschablone!). Daneben sollte auch das Skizzieren (Freihandzeichnen) von Prismen und Zylindern gepflegt werden.
Anschauungsmaterial ist zwar in beträchtlichem Umfang zu verwenden, doch sollte man darauf hinarbeiten, daß der Schüler schließlich ohne Anschauungsmittel auskommt. Speziell sollten Unterrichtsmittel in Form von prismatischen und zylindrischen Gegenständen, Werkstücken, Körpermodellen, Abbildungen und Zeichnungen als Vorgaben für die selbständige Arbeit der Schüler beim Erkennen, Schätzen, Messen, Berechnen und Darstellen verwendet werden und damit zur Weiterentwicklung des Raumvorstellungsvermögens beitragen.
In Klasse 7 werden Berechnungen nur an geraden Prismen und geraden Kreiszylindern vorgenommen. Lediglich für die Begriffsbildung werden auch schiefe Prismen und schiefe Zylinder betrachtet. Man kann deshalb festlegen, daß im Unterricht einfach von „Prismen“ und „Zylindern“ gesprochen wird, wenn damit die geraden gemeint sind.
Von den beiden Möglichkeiten, nämlich Prismen und Zylinder nacheinander oder parallel zu behandeln, ist im Lehrbuch die letztere gewählt worden, um durch Vergleich und Gegenüberstellung Gemeinsamkeiten und Unterschiede besser herausarbeiten zu können. Die bei dieser Variante erzielte Zeiteinsparung soll der Behandlung von Anwendungsaufgaben zugute kommen.
Obwohl die Lerneinheiten 2 und 3 austauschbar sind, wird im Lehrbuch zuerst der Oberflächeninhalt behandelt, da sich der Begriff der Oberfläche nahtlos an die Definitionen anschließt und diese festigt.

Kontrollaufgaben

1. Ermittle die Masse des im Bild 7.1 dargestellten Maschinenteils aus Kupfer $\left(\varrho = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$!
2. Wie verändert sich das Volumen eines Quaders, wenn man alle seine Kantenlängen verdreifacht?
3. Die Grundfläche eines Quaders soll quadratisch sein. Berechne seine Oberfläche, wenn außerdem folgendes gegeben ist: $V = 478\ \text{cm}^3$; $h = 5{,}9$ cm!

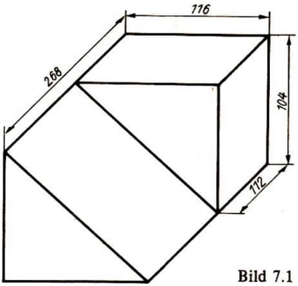


Bild 7.1

4. Im Bild 7.2 ist der Querschnitt einer Erdaufschüttung dargestellt.
   a) Wieviel Kubikmeter Erde entfallen auf einen laufenden Meter der Aufschüttung?
   b) Wie viele Fahrten mit 6 m³ fassenden Lastkraftwagen sind erforderlich, wenn die Erde für eine Aufschüttung von 324 m Länge transportiert werden soll?

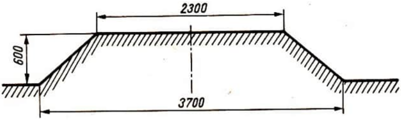


Bild 7.2

5. Ein zylindrisches Werkstück aus Grauguß $\left(\varrho = 7{,}2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$ mit einem Durchmesser von 145 mm und einer Höhe von 66 mm erhält eine konzentrische Bohrung von 35 mm Durchmesser. Berechne Masse und Oberfläche dieses Werkstücks!

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 7.1.: Prismen und Kreiszylinder			(7 Std.)
Prismen und Zylinder (LE 1)	2	– Ebene Figuren – Würfel und Quader – Darstellen von Körpern in senkrechter Zweitafelprojektion und im Schrägbild	– Definitionen von „Prisma" und „Zylinder" – die Begriffe „Grundfläche", „Deckfläche", „Seitenfläche" und „Mantel" – Würfel und Quader als spezielle Prismen – Abgrenzung gerader von schiefen Prismen und Zylindern – Erkennen spezieller Lagen („liegende" Prismen und Zylinder)
Oberflächeninhalt von Prisma und Zylinder (LE 2)	3	– Umrechnungen von Größen (Flächeninhalte) – Umformen von Gleichungen (Formeln) – Umfang und Flächeninhalt – Oberflächeninhalt von Würfel und Quader	– Herleiten der Formeln für den Oberflächeninhalt von Prismen, Zylindern und Hohlzylindern – Berechnen des Oberflächeninhalts dieser Körper
Volumen von Prisma und Zylinder (LE 3)	2	– Umrechnungen von Größen (Volumen) – Umformen von Gleichungen (Formeln)	– Herleiten der Formeln für das Volumen gerader Prismen, gerader Kreiszylinder und gerader Hohlzylinder

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Flächeninhaltsformeln – Volumen von Würfel und Quader – Prisma und Zylinder	– Volumenberechnungen
Stoffabschnitt 7.2.: Komplexe Übungen (5 Std.)			
Komplexe Übungen	3	– Vielfältige Anwendungen zum Berechnen und Darstellen von Prismen, Zylindern und Hohlzylindern	
Leistungskontrolle und Auswertung	2		

Stoffabschnitt 7.1.

Prismen und Kreiszylinder (7 Std.)

Prismen und Zylinder (2 Std.)

LE 1 (LB 161 bis 164)

Im Mittelpunkt der Behandlung stehen die beiden Definitionen für das gerade Prisma und den geraden Zylinder, die Grundlage für das Erkennen und Darstellen prismatischer und zylindrischer Körper sind.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definitionen für das gerade Prisma und den geraden Zylinder mit den Begriffen „Grund- bzw. Deckfläche", „Seitenflächen" und „Mantel" und können prismatische und zylindrische Körper unabhängig von ihrer Lage erkennen,
- wissen, daß Würfel und Quader Prismen sind,
- erweitern ihr Raumvorstellungsvermögen im Hinblick auf zueinander parallel liegende und aufeinander senkrecht stehende ebene Flächen bzw. Geraden,
- können Bilder in senkrechter Ein- und Zweitafelprojektion und Schrägbilder von Prismen und Zylindern konstruieren und skizzieren.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Zielorientierung und Motivierung zum Stoffgebiet

- Einführung von Definitionen für gerades Prisma und geraden Zylinder in Gegenüberstellung
- Übungen im Erkennen prismatischer und zylindrischer Körper (einschließlich Würfel und Quader)

2. Stunde
- Einführung der Begriffe „schiefes Prisma“ und „schiefer Zylinder“
- Übungen im Erkennen von Grund- und Deckflächen „liegender“ Prismen und Zylinder
- Übungen im Darstellen von Prismen und Zylindern

Methodische Hinweise

Zielorientierung und Motivierung zum Stoffgebiet Als relativ langfristige Problemstellung kann folgende Aufgabe dienen:

Gegeben sei eine zylindrische Konservendose mit Deckel, deren Durchmesser gleich der Höhe ist, und eine zweite, deren Durchmesser doppelt so groß, die Höhe aber nur halb so groß wie bei der ersten ist (Bild 7.3).

a) Welche Dose hat das größere Volumen?

b) Für welche Dose ist der Materialverbrauch geringer?

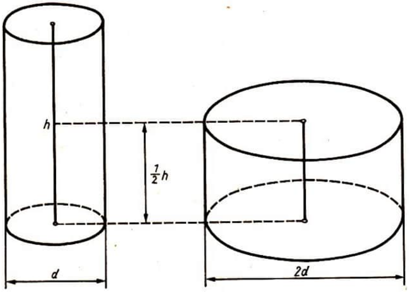


Bild 7.3

An dieser Stelle kann man das Ergebnis nur schätzen lassen und versprechen, in den nächsten Stunden die Antwort exakt geben zu können. Der Lehrer erklärt, daß solche Aufgaben in der Stereometrie gelöst werden, was so viel wie „räumliche Geometrie“ bedeutet, so wie man unter Planimetrie die „ebene Geometrie“ versteht. Den Schülern sind die Namen „Prisma“ und „Zylinder“ bereits bekannt. Prismen spielen in der Technik, aber auch im täglichen Leben eine große Rolle, und man muß wissen, wie ihr Oberflächeninhalt (Materialverbrauch) und ihr Volumen (Rauminhalt) berechnet werden können.

Einführung von Definitionen für „gerades Prisma“ und „gerader Zylinder“ in Gegenüberstellung Es gibt eine ganz einfache genetische Definition, die für Prismen und Zylinder gleichermaßen gilt:

Verschiebt man ein ebenes Vieleck bzw. einen Kreis senkrecht zur Vielecks- bzw. Kreisfläche, so entsteht ein gerades Prisma bzw. ein gerader Kreiszylinder.

Der Grundgedanke dieser genetischen Definition wird in der Technik zur Herstellung prismatischer oder zylindrischer Materialien oft angewendet, zum Beispiel beim Stranggußverfahren. Preßt man teigiges Material durch eine Öffnung, die die Form eines Vielecks oder eines Kreises hat, und schneidet in geeigneter Weise den entstehenden Strang in Stücke, so entstehen prismatische oder zylindrische Körper. Auf diese Weise werden Stahlstücke, Glasstäbe, Plastestangen, Briketts produziert. Auch „Spritzgebäck" wird so geformt. Dieses Prinzip ist für das Verständnis der Volumenformel von großem Nutzen.

Im Lehrplan wird für den geraden Zylinder eine andere genetische Definition gefordert, die auf der Rotation eines Rechtecks um eine seiner Seiten oder Symmetrieachsen beruht. Dies kann man veranschaulichen, indem man

1. ein Rechteckmodell aus Karton wie eine Fahne fest an einem Holzstab befestigt und diesen in schnelle Drehung versetzt,
2. eine Gummischlaufe entlang einer Symmetrieachse des Rechteckmodells durch den Karton zieht und verdrillt, so daß durch Zug das Drehen erzeugt wird oder
3. eine Schwungmaschine und Stativmaterial aus der Physik benutzt, um die Rotation eines Rechteckmodells zu demonstrieren.

Die Anwendung dieses Prinzips findet man beim Produzieren zylindrischer Werkstücke durch spanabhebendes Verformen an Drehmaschinen wieder, während prismatische Werkstücke oft durch Hobelmaschinen bearbeitet werden, was den Schülern aus dem polytechnischen Unterricht bekannt ist.

Im Hinblick auf das Wiedererkennen bzw. auf das Berechnen der Oberfläche von Prisma und Zylinder ist es zweckmäßig, eine Definition zu formulieren, die von der Gestalt der Begrenzungsflächen ausgeht, so wie es im Lehrbuch geschieht. Es empfiehlt sich deshalb, an Hand des Lehrbuchs beide Definitionen den Schülern vorzustellen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Prisma und Zylinder herauszuarbeiten unter Zuhilfenahme von Modellen gerader Prismen und eines geraden Zylinders. Dabei werden die Namen „Grundfläche", „Deckfläche" und „Mantel" eingeführt. Normalerweise liegt die Grundfläche „unten" und die Deckfläche „oben". Das Wort „Mantel" ist, wie oft in der Mathematik, der Umgangssprache entlehnt. Die Schüler verbinden damit eine feste Vorstellung. Der Lehrer erklärt ihnen, weshalb man diesen Namen gewählt hat, und grenzt den mathematischen Begriff gleichzeitig von der umgangssprachlichen Bedeutung des Wortes „Mantel" ab. Der Begriff „Mantel", der ursprünglich auf den Zylinder beschränkt war, kann als „Gesamtheit der Seitenflächen" auf das Prisma übertragen werden.

Gemeinsamkeiten von Prisma und Zylinder kann man als Tafelbild zusammenstellen:

1. Beide sind geometrische Körper.
2. Beide haben eine Grund- und eine Deckfläche.
3. Grund- und Deckfläche sind zueinander kongruent.
4. Grund- und Deckfläche liegen zueinander parallel.
5. Beide haben einen Mantel.
6. Die Abwicklung des Mantels ist ein Rechteck.

Unterschiede zwischen Prisma und Zylinder:

1. Grund- und Deckflächen sind beim
   a) Prisma ebene Vieleckflächen (n-Eckflächen, $n \geqq 3$),
   b) Zylinder Kreisflächen.
2. Der Mantel ist beim
   a) Prisma die Gesamtheit der rechteckigen Seitenflächen,
   b) Zylinder eine gekrümmte Fläche.

Aber auch Gegenbeispiele sollte man finden lassen, nämlich geometrische Körper,

1. die keine Deckfläche haben,

2. deren Grund- und Deckfläche nicht kongruent zueinander sind,
3. deren Grund- und Deckfläche nicht parallel zueinander liegen.

Ein solches methodisches Vorgehen kann wesentlich zur Realisierung der Leitlinie „Definieren" beitragen.

Übungen im Erkennen prismatischer und zylindrischer Körper (einschließlich Würfel und Quader) Anhand einiger gut ausgewählter Beispiele (Demonstrationskörpermodelle, Modelle des Stereometriebaukastens, Gegenstände wie ein Glasprisma, ein Buch, ein ungespitzter Bleistift, ein Stück Profilstahl, Rundstäbe, ein Stück Draht, eine runde Dose) wird geprüft, ob die in den Definitionen genannten Merkmale auf sie zutreffen, insbesondere ob

1. Grund- und Deckfläche kongruent zueinander sind,
2. Grund- und Deckfläche parallel zueinander liegen,
3. a) die Seitenflächen Rechteckflächen sind,
   b) die Abwicklung des Mantels eine Rechteckfläche ist.

Dabei sollte man beachten, daß auch Objekte gezeigt werden, die

1. keine Prismen oder Zylinder sind,
2. Extremfälle darstellen (Blatt Papier, Schallplatte, lange dünne Leiste, Perlonfaden),
3. würfel- oder quaderförmig sind (Margarinewürfel, Streichholzschachtel), so daß festgestellt werden kann, daß Würfel und Quader auch Prismen sind.

Solche Erkennungsübungen sollten auch anhand von Zeichnungen durchgeführt werden (Auftrag 4; Aufg. 1 und 2; Lichtbildreihe R 1117). Ziel dieser Übungen ist unter anderem, daß sich die Definitionen vom Inhalt her auch gedächtnismäßig einprägen.

Einführung der Begriffe „schiefes Prisma" und „schiefer Zylinder" Das Lehrbuch weist darauf hin, daß es Prismen und Zylinder gibt, deren Mantelabwicklung nicht rechteckig ist (Fadenmodelle verwenden!). Die Kanten zwischen Grund- und Deckfläche bzw. die Mantellinien stehen dann nicht senkrecht auf Grund- und Deckfläche, verlaufen aber auch parallel zueinander. Es ist darauf zu verweisen, daß die Seitenflächen des schiefen Prismas Parallelogramme sind und der schiefe Zylinder nicht durch Rotation erzeugt werden kann. Da in Klasse 7 nur gerade Prismen und gerade Zylinder behandelt werden, wird vereinbart, von jetzt ab nur von „Prismen" bzw. „Zylindern" zu sprechen, wenn es sich nicht um schiefe handelt.

Übungen im Erkennen von Grund- bzw. Deckflächen „liegender" Prismen und Zylinder Obwohl „Grund- und Deckflächen" normalerweise „unten" bzw. „oben" liegen, können diese Namen bei Prisma und Zylinder auch dann verwendet werden, wenn das nicht zutrifft. Erfahrungsgemäß bereitet das manchen Schülern Schwierigkeiten. Bei Würfel und Quader können beliebig zwei einander gegenüberliegende Begrenzungsflächen als Grund- und Deckfläche angesehen werden. Bei den übrigen Prismen und beim Zylinder werden die Begrenzungsflächen, deren Parallelschnitte („Querschnitte") kongruente Flächen ergeben, Grund- bzw. Deckfläche genannt, unabhängig davon, ob die Körper „stehen" oder „liegen". Man sollte deshalb von einigen prismatischen und zylindrischen Körpern (Stereometriebaukasten) in unterschiedlicher Lage Grund- bzw. Deckfläche bestimmen lassen. (Beim „Haus mit Satteldach" als Prisma sind die „Giebel" Grund- bzw. Deckfläche!)

Übungen im Darstellen von Prismen und Zylindern Um den vorigen Stundenabschnitt mit diesem zu verbinden, sollte man (auch aus Zeitgründen) „liegende" Prismen und Zylinder wie in den Bildern G6 bis G8 als Schrägbilder zeichnen lassen (Grundfläche bzw. „Querschnitt" in Frontlage, also in wahrer Größe, die „Höhen" als Tiefenstrecken mit $a = 45°$ und $q = \frac{1}{2}$).

Schrägbilder von Prismen können durch Vorgaben mit Hilfe der Lochschablone rasch gezeichnet werden. Aus den Darstellungen können dann die Schüler auf Grund ihrer Kenntnisse über die Konstruktion von Schrägbildern die für eine Berechnung notwendigen Maße entnehmen.

Beispiele für Prismenschrägbilder:

	Deckfläche	Grundfläche
Würfel	1,3,7,10	– 17,19,22,24
Quader	1,2,7,9	– 17,18,22,23
Quader	1, 3, 4, 6	– 17, 19, 20, 21
Prisma		
mit dreieckiger Grundfläche	1,7,9	– 17,22,23
mit dreieckiger Grundfläche	1,7,10	– 17,22,24
mit dreieckiger Grundfläche	2,7,10	– 18,22,24
mit trapezförmiger Grundfläche	1,2,7,10	– 17,18,22,24
mit trapezförmiger Grundfläche	1,2,4,9	– 17,18,20,23
mit sechseckiger Grundfläche	1,2,4,6,9,10	– 17,18,20,21,23,24

Es wird nachdrücklich empfohlen, als Hausaufgabe von allen Schülern zu fordern, das Netz eines Prismas bzw. Zylinders mit Klebefalzen aus Zeichenkarton herzustellen und zu einem Körper zusammenzukleben. Dabei kann man nach Anforderungsgraden differenzieren:

a) Quader- oder Würfelnetz,
b) Netz für ein drei- oder sechsseitiges regelmäßiges Prisma,
c) Zylindernetz.

(Zur Anleitung können die Bilder G 8 und G 9 (LB 165) dienen.)

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 2 (LB 164)
2. Aufg. 3 (LB 164)

Oberflächeninhalt von Prisma und Zylinder (3 Std.)

LE 2 (LB 164 bis 167)

In dieser Lerneinheit konzentriert sich der Unterricht auf das Herleiten und Anwenden von Formeln für den Oberflächeninhalt von Prismen, Zylindern und speziell Hohlzylindern.

Ziele

Die Schüler
- kennen die allgemeine Formel für die Berechnung des Inhalts der Oberfläche von Prisma und Zylinder als Gesamtheit der Grund- und Deckfläche und des Mantels,
- können aus der allgemeinen Formel für die Berechnung des Inhalts der Oberfläche von Prisma und Zylinder die speziellen Formeln für prismatische und zylindrische Körper, auch für Hohlzylinder, herleiten,

- können die Formeln für das Berechnen von Oberflächeninhalten von Prismen und Zylindern im Zusammenhang mit der zeichnerischen Darstellung der Körper beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben anwenden,
- kennen die in der Stereometrie übliche Symbolik und können sie exakt anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der allgemeinen Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts von Prisma und Zylinder
- Übungen im Spezialisieren der allgemeinen Formel zu Formeln für n-seitige Prismen ($n \geqq 3$) und Zylinder

2. Stunde
- Anwendung der Formeln beim Berechnen von Oberflächeninhalten

3. Stunde
- Erarbeitung und Anwendung der Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Hohlzylinders
- Anwendung der erarbeiteten Formeln zur Berechnung verschiedener Größen

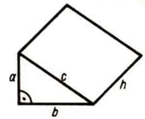
Methodische Hinweise

Erarbeitung der allgemeinen Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts von Prisma und Zylinder Da in den Definitionen die Formen der Begrenzungsflächen angegeben sind, bereitet es nach dem Herstellen eines Modells durch die Schüler keine Schwierigkeiten mehr, die Summe der Inhalte der Begrenzungsflächen als Oberflächeninhalt zu erkennen. Auf Grund der Kongruenz von Grund- und Deckfläche geben die Schüler schließlich als allgemeine Formel für den Oberflächeninhalt von Prisma und Zylinder die Summe des doppelten Grundflächeninhalts und des Inhalts der Mantelfläche an: $A_O = 2 \cdot A_G + A_M$. (In Darstellungen sollte man für Grund- und Deckfläche ein und dieselbe Farbe verwenden!)

Übungen im Spezialisieren der allgemeinen Formel zu Formeln für n-seitige Prismen ($n \geqq 3$) und Zylinder Die konkreten geometrischen Körper, die Prismen oder Zylinder sind, unterscheiden sich durch die Form ihrer Grundfläche. Das Wesen dieser Spezialisierung sollte an Hand zweier typischer Beispiele, dem dreiseitigen Prisma und dem Zylinder, erarbeitet werden. Die Spezialisierung muß an zwei Stellen vorgenommen werden:
1. Für A_G wird die entsprechende Flächeninhaltsformel für das Dreieck bzw. den Kreis eingesetzt.
2. Die Art der Grundfläche hat auch Einfluß auf die Mantelfläche, denn eine Seite des Rechtecks, das die Mantelfläche darstellt, ist genau so lang wie der Umfang der Grundfläche. Dies ist die entscheidende Klippe im Verständnis der Schüler. Man hebe deshalb in der Darstellung an der Tafel (LB 165) die Umfangslinie der Grundfläche und eine entsprechende Rechteckseite der Mantelfläche durch ein und dieselbe Farbe hervor.

An dieser Stelle muß sich der Lehrer vergewissern, daß alle Schüler verstanden haben, wie man die Seiten des Rechtecks der Mantelfläche ermittelt. Die Flächeninhaltsformel für den Mantel $A_M = u \cdot h$ ist besonders herauszuarbeiten. Unter Verwendung der Lehrbuchdarstellung (Bild G 9) empfiehlt sich das folgende *Tafelbild* (Bild 7.4).

Rechtwinklig – dreiseitiges Prisma



$$A_0 = 2 \cdot A_G + A_M$$

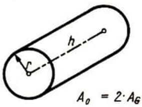
$$A_G = \frac{a \cdot b}{2}\,; \quad A_M = u \cdot h$$

$$u = a + b + c$$

$$A_0 = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a+b+c) \cdot h$$

$$A_0 = a \cdot b + (a+b+c) \cdot h$$

Zylinder



$$A_0 = 2 \cdot A_G + A_M$$

$$A_G = \pi \cdot r^2\,; \quad A_M = u \cdot h$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A_0 = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_0 = 2 \cdot \pi \cdot r\,(r+h)$$

Bild 7.4

Den Beispielen entsprechend sollten weitere Übungen im Spezialisieren für die Fälle folgen, in denen die Grundfläche ein Quadrat, Rechteck, beliebiges Dreieck, Parallelogramm oder Trapez ist. Hier zeigt sich, daß man die Formeln für die Berechnung des Flächeninhalts und des Umfangs ebener Figuren beherrschen muß, um die Formeln für das Berechnen des Oberflächeninhalts von Prisma und Zylinder herleiten zu können.

Erarbeitung und Anwendung der Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Hohlzylinders Auf der Grundlage des Auftrages 6 und des Bildes G 10 ist auch die Formel für die Berechnung des Oberflächeninhalts eines Hohlzylinders durch Spezialisierung aus der allgemeinen Formel für Prismen und Zylinder leicht zu gewinnen. Zur Veranschaulichung kann man die Modelle 26 und 27 (Hohlzylinder mit Kern) aus dem Stereometriebaukasten benutzen. Diese Thematik eignet sich für die Vergabe eines Schülervortrags. Entscheidend sind dabei die beiden Feststellungen:

1. Der Flächeninhalt des Kreisringes ist die Differenz der Flächeninhalte des äußeren und inneren Kreises.
2. Zur Oberfläche gehört nicht nur der äußere, sondern auch der innere Mantel.

Die Schüler berechnen den Oberflächeninhalt eines Hohlzylinders durch Einsetzen der Größen nach Aufgabe 6 mit Hilfe des Taschenrechners.

Anwendung der Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhalts von Prismen und Zylindern auf das Berechnen einzelner Größen Aus den Aufgaben 5e) bis k) könnten die allgemeine Lösung einer Aufgabenstellung ausführlich besprochen und eventuell die spezielle Lösung als Hausaufgabe gestellt werden. Dabei sind Hinweise zum Runden auf eine sinnvolle Genauigkeit des Ergebnisses zu geben.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 1b) bis d)
2. Aufg. 6a)

Volumen von Prisma und Zylinder (2 Std.)

LE 3 (LB 168 bis 171)

Im Mittelpunkt stehen das Herleiten und das Anwenden der Formeln für die Volumenberechnung von Prismen und Zylindern (einschließlich Hohlzylindern).

Ziele

Die Schüler
- kennen die allgemeine Formel für die Volumenberechnung von Prismen und Zylindern und können sie für konkrete prismatische und zylindrische Körper (auch für Hohlzylinder) spezialisieren,
- können die Volumenformel für Prismen und Zylinder im Zusammenhang mit der zeichnerischen Darstellung dieser Körper beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben anwenden,
- kennen die in der Stereometrie übliche Symbolik und können sie exakt anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Erarbeitung der allgemeinen Volumenformel für Prismen und Zylinder
- Spezialisierung der allgemeinen Volumenformel zu Formeln für n-seitige Prismen ($n \geqq 3$) und Zylinder
- Anwendung der Volumenformel beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

2. Stunde
- Spezialisierung der allgemeinen Volumenformel auf den Hohlzylinder
- Anwenden der Volumenformeln für das Berechnen einzelner Größen (Höhe, Durchmesser u. ä.)

Methodische Hinweise

Erarbeiten der allgemeinen Volumenformel für Prismen und Zylinder Nachdem in den Klassen 6 und 7 die Flächeninhaltsformeln für n-Ecke ($n \geqq 3$) und den Kreis erarbeitet wurden, sollte auf diesen Kenntnissen aufgebaut werden.
Durch die Überlegungen, wie sie im Lehrbuch (LB 168ff.) dargestellt sind, erspart man sich, den komplizierten Zerlegungsprozeß, wie er bei der Flächeninhaltsberechnung in Klasse 6 bzw. 7 bereits erläutert wurde, bei der Volumenberechnung noch einmal durchzuführen.

Spezialisierung der allgemeinen Volumenformel zu Formeln für n-seitige Prismen ($n \geqq 3$) und Zylinder Da das Spezialisieren allgemeiner Formeln bereits an der komplizierten Oberflächenformel ausgiebig praktiziert worden ist, bereitet es bei der einfachen Volumenformel kaum noch Schwierigkeiten. Man ersetzt A_G durch die entsprechenden Ausdrücke für den Flächeninhalt von Dreiecken, speziell rechtwinkligen Dreiecken, Quadraten, Rechtecken, Parallelogrammen, Trapezen, Rhomben, weiteren regelmäßigen und unregelmäßigen n-Ecken ($n \geqq 3$) und Kreisen. Es wird gezeigt, daß die Volumenformel für Würfel und Quader aus der Volumenformel für Prismen hergeleitet werden kann.

Anwenden der Volumenformeln von Prisma und Zylinder beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben Der Lehrer sollte anfangs Aufgaben wählen, in denen lediglich das Volumen von Prismen und Zylindern zu berechnen ist, ein Auflösen der Formeln nach anderen Variablen also nicht notwendig wird. Durch Verwendung des Taschenrechners kann die Arbeit rationell gestaltet werden, wobei die Lösung mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben ist.

Spezialisierung der allgemeinen Volumenformel für den Hohlzylinder Diese Aufgabe eignet sich wieder für einen Schülervortrag. Dabei könnte folgendes Tafelbild (Bild 7.5) entstehen.

Tafelbild (Bild 7.5)

<u>*Volumen eines Hohlzylinders*</u>

$$\begin{aligned} V &= A_G \cdot h \\ &= (A_{G_2} - A_{G_1}) \cdot h \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) \cdot h \\ &= (r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi \cdot h \end{aligned}$$

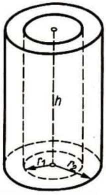


Bild 7.5

Anwendung der Volumenformeln beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben Neben Aufgaben, in denen das Volumen zu berechnen ist, sollten vor allem solche gestellt werden, in denen u. a. das Volumen gegeben ist und bestimmte Stücke des Körpers zu berechnen sind, so daß das Auflösen der Formeln nach bestimmten Variablen notwendig wird. Vor jeder Lösung sollten die Schüler eine Skizze als Vorstellungsstütze anfertigen, einen Überschlag vornehmen und Fragen der sinnvollen Genauigkeit des Ergebnisses klären.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 4a) (LB 171)
2. Aufg. 5c) (LB 171)

Stoffabschnitt 7.2.

Komplexe Übungen (5 Std.)

Komplexe Übungen (3 Std.)

(LB 172 bis 174)

Es sollten möglichst praxisnahe Anwendungsaufgaben zum Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen und Zylindern gelöst werden.

Ziele

Die Schüler
- können große Teile ihres gesamten bisher im Mathematikunterricht erworbenen Wissens und Könnens, insbesondere die Formeln für das Berechnen des Oberflächeninhalts und Volumens von Prismen und Zylindern beim Lösen von komplexen Sach- und Anwendungsaufgaben anwenden.

Schwerpunkte

1. bis 3. Stunde
- Lösen komplexer Anwendungsaufgaben, in denen das Berechnen des Oberflächeninhalts, des Volumens, der Länge einzelner Stücke und der Masse von prismatischen und zylindrischen Objekten verlangt wird

Methodische Hinweise

Die Schüler benötigen große Teile ihres gesamten bisher im Mathematikunterricht erworbenen Wissens und Könnens bei der Lösung komplexer Anwendungsaufgaben.
Es ist großer Wert darauf zu legen, daß die Schüler den konkreten Sachverhalt der Aufgabe inhaltlich voll erfassen. Dabei sind erzieherische Potenzen zu nutzen, die sich aus dem Text der Aufgaben ergeben. Mitunter ist die Oberflächeninhalts- und Volumenberechnung ein Mittel, um ökonomische Probleme zu lösen, wie die Forderung nach minimalem Materialverbrauch, nach einem Maximum an Fassungsvermögen, nach Minimierung der Masse usf., so daß die Bedeutung der Mathematik für Anwendungen in Technik und Produktion zum Nutzen unserer Volkswirtschaft zwanglos gezeigt werden kann.
In komplexen Anwendungsaufgaben werden nicht nur Oberflächeninhalte und Volumina von Prismen und Zylindern berechnet, sondern auch deren Masse oder die Länge einzelner Stücke, was ein Umstellen der Formeln nötig macht.
Die Schüler sollten besonders beim Finden des allgemeinen Lösungsweges dazu angehalten werden, durch Anfertigen von Skizzen und Tabellen den Ansatz selbständig zu erarbeiten und nicht nur fertige Lösungsvorschläge zu übernehmen.
Die spezielle Lösung sollte mit Hilfe von Größengleichungen erfolgen, um Fehler in der Verwendung von Einheiten zu vermeiden.

Schließlich sei wieder auf die Problematik des Rechnens mit Näherungswerten hingewiesen, die durch das Verwenden von Taschenrechnern besonders deutlich wird! Bei multiplikativen Rechnungen kann das Ergebnis nicht mehr zuverlässige Grundziffern haben als die Eingangswerte. Ein Vergleich mit dem Überschlag deckt möglicherweise Rechenfehler auf und sollte deshalb in keinem Falle fehlen.

Kontrollaufgaben

1. Aufg. 11 (LB 173)
2. Aufg. 16 (LB 173)
3. Aufg. 23 (LB 174)

Literatur

Abkürzung VWV: Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Grundsatzdokumente

[G 1] XI. Parteitag der SED, 17. bis 21. April 1986 in Berlin. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den XI. Parteitag der SED, Berichterstatter: Genosse Erich Honecker. Dietz Verlag, Berlin 1986

[G 2] X. Parteitag der SED, 11. bis 16. April 1981 in Berlin. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den X. Parteitag der SED, Berichterstatter: Genosse Erich Honecker. Dietz Verlag, Berlin 1981

[G 3] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978. Protokoll. VWV, Berlin 1979

[G 4] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965. Gesetzblatt der DDR, I, 1965, Nr. 6

[G 5] Offener Brief an alle Pädagogen der Deutschen Demokratischen Republik. Deutsche Lehrerzeitung, VWV, Berlin 28 (1981), Nr. 21

[G 6] Referat des Ministers für Volksbildung, Margot Honecker. Auch wir Pädagogen stellen uns der Herausforderung dieses Jahrzehnts. Für jeden Schüler den besten Start ins Leben sichern. In: Protokoll der Zentralen Direktorenkonferenz des Ministeriums für Volksbildung vom 10. bis 12. Mai 1982. VWV, Berlin 1982

[G 7] Lehrplan Mathematik, Klasse 7. VWV, Berlin 1985 (Titel-Nr. 00 30 22)

Bücher und Broschüren

[B 1] Adelt, L./Bruchhold, H./Flade, L.: Projektionsfolien im Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht, VWV, Berlin 1977

[B 2] Autorenkollektiv: Kleine Enzyklopädie – Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965

[B 3] Autorenkollektiv: Mathematik in Übersichten. 11. Auflage, VWV, Berlin 1984

[B 4] Autorenkollektiv: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1975

[B 5] Böhm, J./Börner, W./Hertel, E./Krötenheerdt, O./Mögling, W./Stammler, L.: Geometrie. Bände I und II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974, 1975

[B 6] Fehringer, K.: Näherungsrechnen – Gleichungen – Ungleichungen. Einige Probleme der praktischen Mathematik. VWV, Berlin 1978

[B 7] Gellert, W. (Hrsg.): Lexikon der Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977

[B 8] Hilbert, A. (Hrsg.): Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8. 2. Auflage, VWV, Berlin 1983

[B 9] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 5. VWV, Berlin 1983

[B 10] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6. VWV, Berlin 1984

[B 11] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. VWV, Berlin 1985

[B 12] Mathematik Klasse 7, Arbeitsheft Darstellende Geometrie. VWV, Berlin 1985

[B 13] Methodik – Mathematikunterricht. Hrsg. von der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik. Ausgearbeitet von einem Autorenkollektiv unter Leitung von Werner Walsch und Karlheinz Weber. VWV, Berlin 1975

[B 14] Physik, Lehrbuch für Klasse 7. VWV, Berlin 1984
[B 15] Tafelwerk Mathematik – Physik – Chemie, Klassen 7 bis 10. VWV, Berlin 1983
[B 16] WALSCH, W. (Hrsg.): Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10. Beiträge zum Mathematikunterricht. 2. Auflage, VWV, Berlin 1983
[B 17] WISLICENY, J.: Grundbegriffe der Mathematik II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1983
[B 18] WUSSING, H./ARNOLD, W. (Hrsg.): Biographien bedeutender Mathematiker. 3. Auflage, VWV, Berlin 1983

Beiträge aus „Mathematik in der Schule", VWV

[1] BEHREND, W.: Anregungen zur sozialistischen Wehrerziehung im Mathematikunterricht. Jg. 22 (1984), H. 5, S. 331
[2] BREUER, W.: Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen in den Klassen 6, 7 und 8. Jg. 17 (1979), H. 2/3, S. 102
[3] BRUCHHOLD, H.: Selbstbau von Unterrichtsmitteln – Projektionsfoliensatz „Wahre Länge einer Strecke". Jg. 19 (1981), H. 6, S. 456
[4] BRUCHHOLD, H.: Zur Gestaltung von Schülertätigkeiten im Unterricht der darstellenden Geometrie. Jg. 20 (1982), H. 11, S. 827
[5] DENNERT, M./ILGNER, K.: Zum Zeichnen und Konstruieren im Mathematikunterricht unserer Oberschule. Jg. 20 (1982), H. 7/8, S. 537
[6] DENNERT, M./LORENZ, G.: Zu einigen Fragen der Terminologie und Symbolik im Geometrieunterricht unserer Schule. Jg. 20 (1982), H. 7/8, S. 606
[7] ELFERS, H.: Zielgerichtete Gestaltung der Schülertätigkeit. Jg. 18 (1980), H. 7/8, S. 375
[8] FANGHÄNEL, G.: Zu einigen Problemen der didaktisch-methodischen Gestaltung des Aufgabenlösens. Jg.13 (1975), H. 8, S. 443
[9] FANGHÄNEL, G./NAUCK, H.: Zum Arbeiten mit Näherungswerten. Jg. 18 (1980), H. 11, S. 589
[10] FANGHÄNEL, G./WEBER, K.: Wie wichtig ist das Rechnenkönnen? – Zum Abschluß einer aktuellen Diskussion. Jg. 21 (1983), H. 6, S. 422
[11] FEIN, B.: Zu einigen Aspekten der Weiterentwicklung der Qualität des Mathematikunterrichts und seiner Ergebnisse nach dem X. Parteitag der SED. Jg. 19 (1981), H. 11, S. 801
[12] FLADE, L./KNOPF, H.: Zur Herausbildung der Bereitschaft und Fähigkeit zur Selbstkontrolle im Mathematikunterricht. Jg. 19 (1981), H. 9, S. 680
[13] FRANK, E./WEBER, N.: Grundlegendes geometrisches Wissen und Können – ein entscheidender Bestandteil mathematischer Allgemeinbildung. Jg. 20 (1982), H. 7/8, S. 481
[14] GIESE, B./LEHMANN, K.: Einige Gedanken zur Vorbereitung der Schüler auf das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben. Jg. 22 (1984), H. 4, S. 245
[15] ILGNER, K.: Anregungen für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Stereometrieunterricht. Jg. 20 (1982), H. 7/8, S. 490
[16] LORENZ, G.: Zur Entwicklung von sicheren Fertigkeiten im Beweisen im Geometrieunterricht der Klassen 6 bis 8. Jg. 16 (1978), H. 10, S. 534; H. 11, S. 600
[17] MASKE, K.: Zur vollen Berücksichtigung des SI im Mathematikunterricht. Jg. 18 (1980), H. 9, S. 453
[18] THAMM, H.: Aufgabenkomplexe für tägliche Übungen zur Festigung des Raumwahrnehmungs- und des Raumvorstellungsvermögens. Jg. 19 (1981), H. 7/8, S. 487
[19] WALSCH, W.: Zur Veranschaulichung logischer Zusammenhänge zwischen Sätzen – dargestellt am Stoffgebiet „Der Kreis". Jg. 13 (1975), H. 5/6, S. 305