45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 3/4
Aufgaben

Hinweis: *Lies den Text der einzelnen Aufgaben und überlege dir den Lösungsweg! Schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf! Erklärst du deine Lösungswege, so formuliere sie in Sätzen!*

450411

Die Summe 100

Aus den Zahlen 16, 12, 18, 25, 21, 11, 13, 36 wähle einige so aus, dass deren Summe 100 ergibt. Beachte, dass du keine Zahl doppelt nehmen darfst.

Finde alle Lösungen.

450412

Die Flächenzerlegung

Die in der in der Abbildung A 450412 gezeichneten Flächen sollen jeweils durch genau eine Gerade zerlegt werden. Dabei sollen die darunter angegebenen Flächen entstehen.

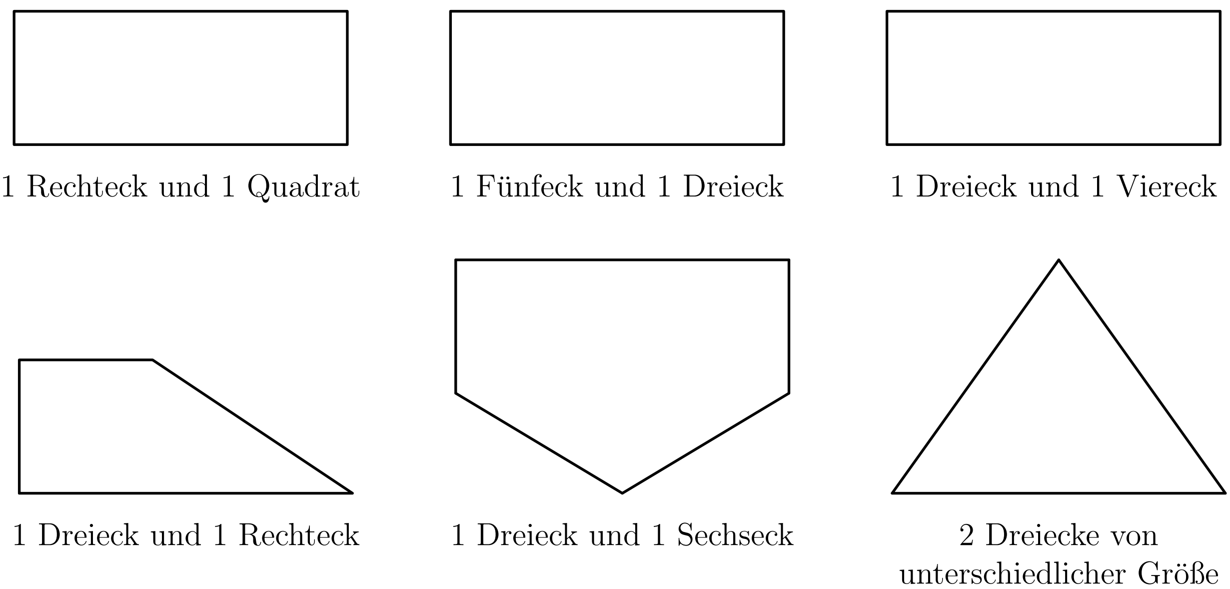


Abbildung A 450412

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450413

Die Musterfindung

Beim Verlegen von 16 Fliesen kann man rechteckige Flächen legen. Zwei Beispiele sind in nebenstehender Abbildung A 450413 gegeben.

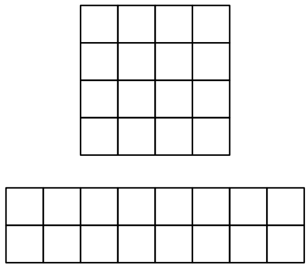


Abbildung A 450413

Wie viele verschiedene rechteckige Flächen kann man

a) aus 12 Fliesen,

b) aus 18 Fliesen

legen? Zeichne alle Flächen auf.

450414

Paulas Geburtstagsvorbereitung

Paula hat bald Geburtstag. Ihre fünf Freundinnen, Maxi, Steffi, Jana, Anja und Kati kann sie nicht alle zur Feier einladen. Zum Geburtstag darf sie nur zwei Freundinnen einladen. Sie muss sich entscheiden.

Wie viele Auswahlmöglichkeiten hat sie? Schreibe alle Möglichkeiten auf.

450415

Die Laufstrecke

Ein Spielplatz ist 32 m lang und 11 m breit. In einer Entfernung von einem Meter vom Rand führt ein Gehweg um den Spielplatz herum. Heike und Thomas wollen auf diesem Weg eine Runde um den Spielplatz laufen.

Wie lang ist die Laufstrecke? Eine Zeichnung kann dir dabei hilfreich sein.

450416

Das Zahlenreihenspiel

In der folgenden Zahlenreihe fehlen ganz bestimmte Zahlen. Finde diese Zahlen und erkläre.

4 8 7 14 13 26 ... ...

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 3/4
Aufgaben

Hinweis: *Lies den Text der einzelnen Aufgaben und überlege dir den Lösungsweg! Schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf! Erklärst du deine Lösungswege, so formuliere sie in Sätzen!*

450421

Die Summe 100

Fünf Zahlen werden nach der Größe geordnet aufgeschrieben. Zwischen benachbarten (nebeneinander stehenden) Zahlen besteht immer eine Differenz von drei. Die Summe aller Zahlen ist 100.

Welche Zahlen sind es und wie hast du sie gefunden?

450422

Wettkampftraining

Igor und Holger trainieren für einen Wettkampf. Vom Parkplatz laufen sie los und sind in 3 Minuten am Wald. Nach weiteren 9 Minuten erreichen sie eine Pferdekoppel. Dann brauchen sie noch mal 3 Minuten um zum See zu kommen und von dort dauert der Lauf weitere 6 Minuten, bis sie wieder am Parkplatz ankommen, wo ihr Auto steht.

Sie wollen diese Rundstrecke im gleichen Tempo mehrmals laufen. Igor will insgesamt genau eine Stunde laufen und dann sofort mit dem Auto nach Hause fahren. Holger protestiert: „Das geht doch gar nicht.“

Wer hat Recht? Begründe.

450423

Pizzabäckerei

In der Pizzeria Alfredo gibt es heute ein Sonderangebot:

1 Pizza mit drei verschiedenen Belägen nach freier Wahl für nur 2,50 €.

Als Belag bietet Alfredo an: Thunfisch, Champignons, Salami, Peperoni und Zwiebeln.

Wie viele verschiedene Pizzas mit jeweils drei verschiedenen Belägen kann Alfredo zubereiten?

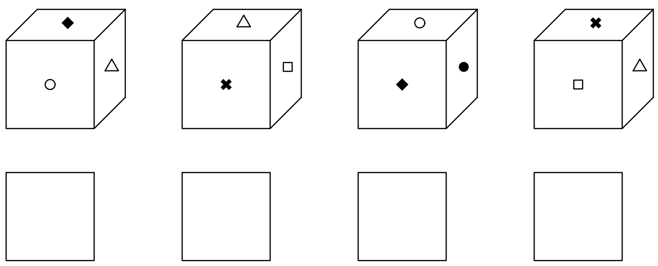
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450424

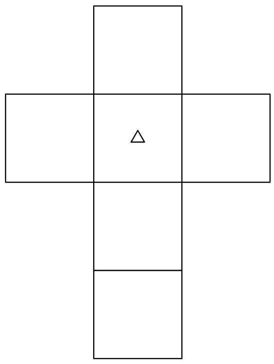
Würfelnetze

Hier ist derselbe Würfel viermal abgebildet.

a) Welches Zeichen liegt jeweils unten?
b) Vervollständige die Zeichen im Würfelnetz?



Teil a)



Teil b)

450425

Regatta

An einer kleinen Segelregatta nehmen vier Kinder aus Bremen, Hamburg, Kiel und Rostock teil. Von ihnen und den Booten ist Folgendes bekannt.

1. Kai kommt nicht aus Bremen.
2. Die Farbe des Bootes aus Rostock ist weiß.
3. Ein Mädchen erreicht den dritten Platz.
4. Der Gewinner der Regatta kommt aus Kiel.
5. Kai und Paul fahren nicht mit dem blauen Boot.
6. Marion und Ulrike kommen nicht aus Hamburg.
7. Das blaue Boot ist das Schnellste und das rote Boot wird leider Letzter.
8. Ulrike kommt nicht aus Kiel.
9. Die Farbe des Bootes aus Hamburg ist grün.

Bestimme für jeden der vier Teilnehmer an der Regatta den erreichten Platz, die Stadt und die Farbe des Bootes.

450426

Adventszeit

Am ersten Advent sitzt Familie Puck um den Adventskranz. Frau Puck zündet die erste Kerze an und blickt sorgenvoll in die Runde. In diesem Jahr habe ich nur eine Ersatzkerze. Sie fragt: „Reichen die fünf Kerzen, wenn an jedem Adventssonntag bei jeder brennenden Kerze eine halbe Kerze abgebrannt wird?“

Christine und Lars überlegen. Plötzlich ruft Christine: „Ich weiß wie. Wir zünden die Kerzen so an, dass am 4. Advent alle Kerzen gleichzeitig herunterbrennen.“

Wie ist dies möglich?

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 3/4
Aufgaben

Hinweis: *Lies den Text der einzelnen Aufgaben und überlege dir den Lösungsweg! Schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf! Erklärst du deine Lösungswege, so formuliere sie in Sätzen!*

450431

Zahlen gesucht

Die Buchstaben im Quadrat sollen durch Zahlen ersetzt werden. Folgende Bedingungen musst du beachten:

Die Summe der Zahlen ist in jeder der beiden Diagonalen 135. Die Zahl C ist das Dreifache der Zahl A. Die Zahl D ist das Fünffache der Zahl B.

A		B
	C	
D		A

450432

Zeitdauer

Von zwei Uhren geht die erste Uhr genau und die zweite Uhr stündlich eine Minute vor. Angenommen, beide Uhren zeigen 12 Uhr an.

Wie viel Tage vergehen, bis beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit anzeigen

450433

Langeweile

Martin langweilt sich im Unterricht. Das Einmaleins mit 3 kann er schon lange. Doch seine Freunde müssen immer noch üben. Um sich zu beschäftigen, teilt er die Produkte der Dreierreihe durch 5. Beim Rest fällt ihm etwas auf und er flüstert Felix zu:

„Wetten, dass ich nicht jedes Mal dividieren muss, um den Rest herauszufinden. Ich weiß zum Beispiel, was als Rest übrig bleibt, wenn ich 29-mal dividieren würde.“

Wie ist Martin vorgegangen? (Sein erstes Produkt ist 3.)

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450434

Die unbekannten Zahlen

Vor der Unterrichtsstunde stand eine Aufgabe an der Tafel (siehe rechte Abbildung).

$$\begin{array}{rcccc} & & & & \mathtt{A} \\ + & & \mathtt{B} & \mathtt{B} & \mathtt{B} \\ + & & \mathtt{B} & \mathtt{B} & \mathtt{B} \\ + & & \mathtt{B} & \mathtt{B} & \mathtt{B} \\ + & & \mathtt{B} & \mathtt{B} & \mathtt{B} \\ \hline & \mathtt{A} & \mathtt{B} & \mathtt{B} & \mathtt{B} \end{array}$$

Dabei stehen hier gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern (Ziffer = einstellige Zahl).

Ralf und Katharina finden nach dieser Regel Lösungen. Sie vergleichen ihre Ergebnisse und stellen fest, dass sie zwei voneinander verschiedene Lösungen gefunden haben.

Gelingt es dir, sogar drei Lösungen zu finden?

450435

Die Schlüsselsuche

Tom hat fünf Schlüssel, die zu fünf verschiedenen Schranktüren passen, durcheinander gebracht. Er weiß aber, dass jeder Schlüssel nur an einen Schrank passt.

Wenn Tom Pech hat, wie oft muss er dann die Schlüssel in ein Schloss stecken, damit er wieder jeden Schlüssel im richtigen Schloss hat?

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweise: 1. *Bitte wähle dir mindestens vier der folgenden sechs Aufgaben aus*! (*Wenn du mehr bearbeitest, ist es um so besser.*)

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450511

Setze folgende Zahlenreihen fort:

a)	4	6	9	13	18	24	__	__
b)	4	6	10	18	34	66	__	__
c)	3	6	5	10	9	18	__	__
d)	3	4	8	11	44	49	__	__

450512

Die Abbildung zeigt zwei Dreiecke, die genau zwei Punkte gemeinsam haben. Kann man zwei Dreiecke so zeichnen, dass sie genau

a) einen Punkt,
b) drei Punkte,
c) vier Punkte,
d) fünf Punkte,
e) sechs Punkte,
f) sieben Punkte

gemeinsam haben?

Zeichne für die Fälle, die möglich sind, je ein Beispiel.

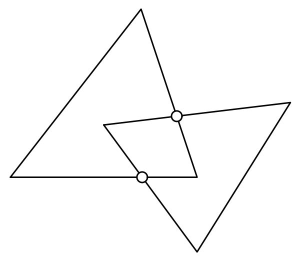


Abbildung A 450512

450513

Eine Treppe hat 12 Stufen. Auf jeder Stufe liegen viele Erbsen. Ganz oben wird eine Erbse in Bewegung gesetzt und rollt über die Kante. Jede Erbse, die einmal rollt, rollt bis ganz unten. Jedes Mal, wenn eine Erbse über eine Kante rollt, setzt sie auf der nächsten Stufe zusätzlich eine Erbse in Bewegung.

Wie viele Erbsen kommen insgesamt unten an?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450514

Du siehst in der Abbildung fünf aufeinander aufbauende Muster auf Kästchenpapier. Zeichne diese Figuren in einem Zug nach. Dabei beginnst du immer am schwarzen Punkt, gehst zunächst nach unten – und du darfst in den Ecken stets nur nach links abbiegen. Schließlich endest du an der Pfeilspitze.

a) Zeichne die nächste Figur F6, die nach diesem Verfahren erzeugt wird!
b) Beschreibe, wie sich diese Figur in einem Zug zeichnen lässt, indem du aufschreibst, wie viele Kästchenlängen die einzelnen Züge nacheinander haben. Erkennst du Gesetzmäßigkeiten?
c) Wie viele Kästchen umschließen die Figuren F1, F2, F3, F4, F5 und F6?
d) Wie viele Kästchen umschließt die siebzehnte Figur in dieser Reihe, also F17? Begründe deine Aussage.

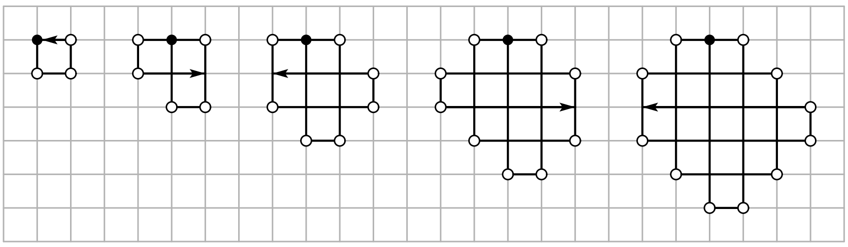


Abbildung A 450514

450515

Ein Frosch sitzt an einem Ufer eines Bachs. Er will zum anderen Ufer, aber das ist viel zu weit weg für einen Sprung. Glücklicherweise liegen im Wasser hintereinander sechs Steine, die er als Zwischenstation verwenden kann. Nun kann er immer von einem Stein zum nächsten springen; er kann aber auch Sprünge auf den übernächsten und den über-übernächsten Stein machen. Allerdings schafft er nicht mehr als zwei von diesen langen Sprüngen, bei denen er einen oder zwei Steine auslässt.

Als einen „Weg“ bezeichnen wir eine Folge von Sprüngen. Wie viele verschiedene Wege gibt es für den Frosch über den Bach?

450516

René ist in einem Mathematik-Zirkel und denkt sich für die anderen eine Knobelaufgabe aus. Sie sollen die Buchstaben im Wort `MATHEMATIK` so durch Ziffern ersetzen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
(2) Die zweistellige Zahl aus der 1. und 2. Ziffer ist fünfmal so groß wie die 3. Ziffer.
(3) Die zweistellige Zahl aus der 9. und 10. Ziffer ist um 25 größer als die zweistellige Zahl aus der 1. und 2. Ziffer.
(4) Die zweistellige Zahl aus der 4. und 5. Ziffer ist dreimal so groß wie die 9. Ziffer.
(5) Die 9. Ziffer ist ungerade.

Wie heißt die gesuchte Zahl?

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>450521</u>

Nach dem Abschluss eines Sportfests vergleichen Arne, Bert, Carsten, Daniel, Erik und Felix ihre Ergebnisse im Hochsprungwettbewerb. Dabei stellten sie fest:

(1) Bert sprang höher als Daniel.
(2) Erik sprang höher als Bert.
(3) Arne war in der Endwertung unmittelbar vor Felix.
(4) Daniel blieb länger im Wettbewerb als Carsten.
(5) Felix ist vor Carsten ausgeschieden.

a) Bestimme aus diesen Angaben die Reihenfolge der sechs Jungen beim Hochsprung!

b) Die Ergebnisliste sagt aus, dass Arne, Bert und Carsten zusammen genauso hoch gesprungen sind wie Daniel, Erik und Felix zusammen. Der Schiedsrichter ist sich aber nicht ganz sicher, ob die Liste stimmt, er weiß aber genau, dass jeder der Schüler eine andere Höhe erreicht hat.
Zeige, dass die Aussage der Ergebnisliste stimmen kann, indem du für jeden der Schüler eine passende Höhe angibst!

<u>450522</u>

Eine alte Aufgabe lautet:

Wenn man ein Kilogramm Rosenöl herstellen will, dann benötigt man dazu eine halbe Tonne an Rosenblüten. Zur Herstellung von einem Liter Parfüm braucht man zwölf Tropfen Rosenöl. Dabei wiegen 36 Tropfen Rosenöl genau ein Gramm.

Auf den Feldern von Moldawien wurden 1500 kg Rosenblüten geerntet. Wie viel Liter Parfüm kann man daraus herstellen?

Hinweis: Berechne zunächst, wie viele Liter Parfüm man mit einem Kilogramm Rosenöl herstellen kann!

Zu den Einheiten: Ein Kilogramm hat 1000 Gramm ($1\,\mathrm{kg} = 1000\,\mathrm{g}$). Eine Tonne hat 1000 Kilogramm ($1\,\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$).

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450523

Familie Fröhlich möchte heute zur 17:30-Uhr-Vorstellung ins Kino gehen. Weil alle am Nachmittag etwas anderes zu tun haben, treffen sie sich vor dem Kino.

(1) Rico wartet doppelt so lange auf den Vater, wie die Mutter auf Nadine.
(2) Auf die Mutter braucht Rico nur 20 Minuten zu warten, sie kommt eine Viertelstunde vor der Zeit.
(3) Nadine kommt eine Viertelstunde nach dem Vater.
(4) Nadine kommt so viele Minuten vor der Zeit, wie Rico auf den Vater wartet.

a) In welcher Reihenfolge treffen die Familienmitglieder vor dem Kino ein?
b) Gib zu jedem Familienmitglied die Uhrzeit an!

450524

Du siehst in der Abbildung A 450524 a drei Stufen einer Entwicklung, in der immer größere Quadrate gefärbt werden. (Die Seitenlänge wächst immer um 2 Kästchen.)

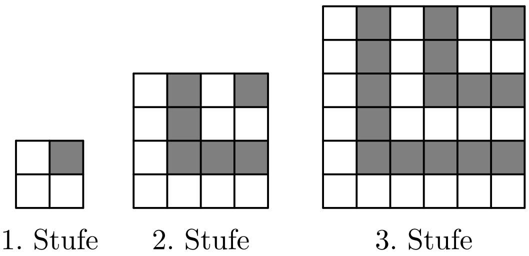


Abbildung A 450524 a

a) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitsquadrate enthält die vierte Stufe?
b) Wie viele Einheitsquadrate umfasst die Gesamtfläche des Quadrats in der siebenten Stufe, und wie viele graue und weiße Einheitsquadrate sind hier vorhanden?

Nun betrachten wir das Entsprechende im Raum. In der ersten Stufe beginnen wir mit dem kleinen Würfel (1. Stufe), der in Abbildung A 450524 b gezeigt ist. Angebaut wird immer auf den drei Seiten, die dem einzelnen grauen Würfel vom Anfang gegenüberliegen, also auf der linken Seite, hinten und oben. In einer Stufe wird immer erst eine Schicht grauer Würfel angeklebt, dann eine Schicht weißer Würfel. Der so erzeugte Würfel der 2. Stufe ist ebenfalls in Abbildung A 450524 b zu sehen.

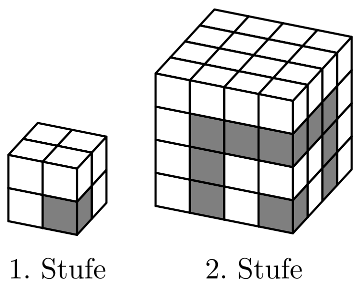


Abbildung A 450524 b

c) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitswürfel bilden den Würfel der 2. Stufe?
d) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitswürfel bilden den Würfel der 3. Stufe?

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450531

Am Wandertag geht die Klasse zu einem alten Bergwerk.

a) Ein Vater bringt mit seinem Auto Spielgeräte und Grillgut zum Ziel. Er braucht von der Schule bis zum Bergwerk 20 min bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 66 km/h. Wie lang ist der Weg zwischen Schule und Bergwerk?

b) Die Schüler gehen zu Fuß und gehen denselben Weg wie der Vater. Sie starten um 7:30 Uhr, machen eine Pause von 20 Minuten und eine zweite Pause von 25 Minuten, ehe sie um 12:15 Uhr im Bergwerk ankommen. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen die Schüler?

c) Der Sportlehrer der Klasse ist ein trainierter Langläufer und schafft ohne Mühe eine Geschwindigkeit von 12 km/h. Holt er die Klasse vor dem Bergwerk ein, wenn er erst um 10:00 Uhr von der Schule losläuft und denselben Weg nimmt?

Hinweis: Eine Durchschnittsgeschwindigkeit von z. B. 5 km/h bedeutet, dass in einer Stunde (1 h) ein Weg von 5 km zurückgelegt wird.

450532

In der abgebildeten Figur sind Dreiecke und Trapeze direkt sichtbar oder versteckt zu finden. Man kann diese Figuren durch ihre Eckpunkte beschreiben, zum Beispiel gibt es das Dreieck ACF und das Trapez $ABCH$.

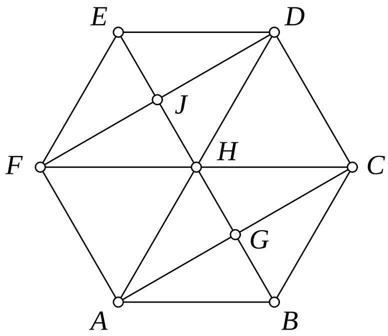


Abbildung A 450532

a) Es gibt verschiedene Dreiecksformen, die sich auch in der Größe unterscheiden. Gib zu jeder verschiedenen Dreiecksform ein Dreieck durch seine Eckpunkte an und ermittle, wie viele von dieser Form in der Figur vorhanden sind.

b) Es gibt auch verschiedene Trapezformen in der Figur. Gib zu jeder Trapezform ein Trapez durch die Eckpunkte an und ermittle, wie viele von dieser Form in der Figur vorhanden sind.

Hinweis: Ein Viereck mit mindestens einem Paar paralleler Seiten heißt Trapez. Parallelogramme, Rauten (Rhomben), Rechtecke und Quadrate sind auch Trapeze.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450533

Der Herbststurm rüttelt an den Blättern eines Baumes. In der ersten halben Stunde fallen die Hälfte der Blätter ab, in der nächsten halben Stunde die Hälfte der verbliebenen Blätter, in der nächsten halben Stunde wiederum die Hälfte der verbliebenen Blätter usw., bis eine Böe nach fünf Stunden die letzten zehn Blätter auf einmal abreißt und der Baum völlig kahl dasteht.

a) Wie viele Blätter hatte der Baum zu Beginn des Sturmes?
b) Stellen wir uns nun vor: Nach drei Stunden war der Wind so weit abgeflaut, dass er in den nächsten beiden halben Stunden nur jeweils ein Viertel der verbleibenden Blätter abriss; nach dieser Stunde wurde der Wind wieder etwas stärker, so dass er in den nächsten halben Stunden nun jeweils ein Drittel der verbleibenden Blätter abriss. Wie viel Blätter musste dann die letzte Böe nach fünf Stunden entfernen?

450534

Drei Freundinnen haben alle verschiedene Haarfarben (rot, schwarz, braun) und verschiedene Frisuren (lang, kurz, Locken). Es ist gerade große Pause.

(1) Mareike unterhält sich mit dem rothaarigen Mädchen, als die Kurzhaarige dazu kommt.
(2) Jenny hätte gerne lange, schwarze Haare.
(3) Nina bewundert die Locken von Mareike, die aber keine braunen Haare hat.

Welches Mädchen hat welche Haarfarbe und welche Frisur trägt sie?

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweise: 1. *Bitte wähle dir mindestens vier der folgenden fünf Aufgaben aus*! (*Wenn du alle fünf bearbeitest, ist es um so besser.*)
2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450611

Wie viele verschiedene Schnittpunkte können folgende Figuren höchstens haben?

a) ein Kreis und zwei Geraden,
b) ein Kreis und ein Dreieck,
c) zwei Kreise und zwei Geraden,
d) drei Kreise und zwei Geraden.

Fertige dazu Zeichnungen an.

450612

Birka hat vier Karten mit den Ziffern 6, 7, 8 und 9. Sie möchte daraus dreistellige und vierstellige Zahlen bilden.

a) Wie viele solcher Zahlen kann sie insgesamt bilden? Wie viele sind davon vierstellig?
b) Gib von den dreistelligen Zahlen alle an, die durch 3 *und* durch 4 teilbar sind!
c) Gib unter den vierstelligen Zahlen die kleinste und die größte durch 8 teilbare Zahl an!

450613

Anne und David spielen mit Gummibärchen. Sie fangen damit an, dass sie 11 Gummibärchen vor sich auf den Tisch legen und jetzt abwechselnd am Zug sind.

Ein Zug besteht darin,

– entweder *ein* Gummibärchen vom Tisch zu nehmen
– oder *die Hälfte* der Gummibärchen, die auf dem Tisch liegen. (Wenn die Anzahl der Gummibärchen auf dem Tisch ungerade ist, geht dies nicht. In diesem Fall wird abgerundet: Zum Beispiel bei 9 Gummibärchen auf dem Tisch darf man nur vier nehmen.)

Wer das letzte Gummibärchen wegnehmen muss, hat verloren.

Anne fängt an. Kann sie den Sieg erzwingen? Oder kann David sicher gewinnen?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450614

a) Bestimme den Flächeninhalt des gezeigten Buchstabens A in den unterlegten (quadratischen) Flächeneinheiten (siehe Abbildung A 450614 a)!

b) Zerlege das A so in fünf Teilflächen, dass du daraus ein flächengleiches Quadrat zusammenlegen kannst!

c) Bestimme den Flächeninhalt des gezeigten Buchstabens F in den unterlegten (quadratischen) Flächeneinheiten (siehe Abbildung A 450614 b)!

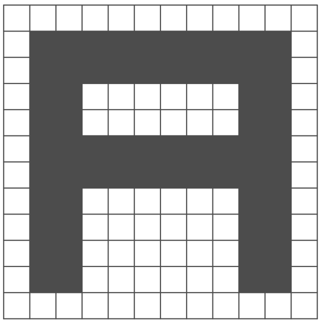


Abbildung A 450614 a

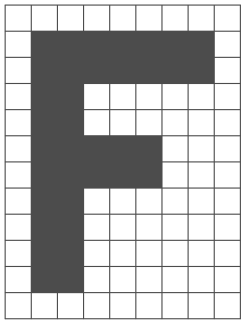


Abbildung A 450614 b

d) Zerlege das F so in vier Teilflächen, dass du daraus ein flächengleiches Quadrat zusammenlegen kannst!

450615

Letzte Woche hat die Vorschulklasse von Frau Müller einen Ausflug zum Basar gemacht. Sie erzählt: „In der Klassenkasse befanden sich 200 Kronen; sie wurde für den Ausflug geplündert. Ich habe das Geld zu gleichen Teilen unter den Jungen verteilt und sie angewiesen, davon Geschenke für die Mädchen in der Gruppe zu kaufen. Jeder Junge kaufte für jedes Mädchen ein Geschenk."

„Aha, und wie viele Kinder sind in deiner Klasse?" „Warte doch einen Augenblick. Auf dem Basar gab es einen Stand, an dem alle Geschenke eine Krone kosteten, einen, an dem alle Geschenke zwei Kronen kosteten, einen, wo es nur Geschenke für drei Kronen gab, und so weiter. Insgesamt hatte der Basar zwölf Stände. Ich habe beobachtet, dass kein Junge mehr als ein Geschenk pro Stand kaufte. Als die Jungen ihre Geschenke verglichen, stellten sie fest, dass niemals zwei von ihnen an denselben Ständen eingekauft hatten. Die Jungen hatten übrigens alle Kronen ausgegeben."

„Kannst du mir noch etwas über die Zahl deiner Kinder sagen?" „Ja, ich habe mehr Jungen als Mädchen. Und noch eine Hilfe: Die Zahl der Jungen lässt sich durch 5 teilen."

„Hm … Ich weiß nicht, ob ich jetzt wirklich genau herausfinden kann, wie viele Jungen und wie viele Mädchen in deiner Klasse sind …"

Finde alle Lösungen, die sich aus den Angaben von Frau Müller ergeben!

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450621

Frank fragt Jan, wie viele Schüler in seiner Klasse sind. Jan antwortet nicht ganz direkt:

„Multipliziert man die Schülerzahl in meiner Klasse mit 5, so ist die Quersumme dieses Produktes doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Ach ja, in meiner Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen, und jeder Schüler kann mindestens eins von beidem.“

Wie viele Schüler sind in Jans Klasse?

450622

Samuel und seine vier Freunde sitzen im Strandbad nebeneinander und haben vor sich die folgenden Getränke hingestellt:

Cola	Fanta	Limo	Apfelsaft	Wasser

Folgende Sachverhalte sind bekannt:

(1) Tobias sitzt neben dem Limo-Trinker.
(2) Mario hat nur einen Nachbarn und ein farbiges Getränk.
(3) Frank trinkt keine Limo.
(4) Robert hat einen der beiden Außenplätze.
(5) Tobias isst gerne Äpfel, trinkt aber nicht den Apfelsaft.

Wer sitzt wo und trinkt welches Getränk?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450623

Erbsen rollen über die Treppe ...

Überall auf den Treppenstufen liegen viele Erbsen. Die Treppe hat 14 Stufen. Jede Erbse, die über eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe eine weitere Erbse in Bewegung. Sie bleibt aber auf der übernächsten Stufe liegen, nachdem sie auch dort eine Erbse in Bewegung gesetzt hat. Oben beginnt das Ganze mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., 3. und 4. Stufe ankommen!

b) Wie viele Erbsen kommen schließlich ganz unten, auf der 14. Stufe, an?

450624

a) Bestimme den Flächeninhalt des gezeigten Buchstabens Z in den unterlegten (quadratischen) Flächeneinheiten!

b) Zerlege das Z so in sechs Teilflächen, dass du daraus ein flächengleiches Quadrat zusammenlegen kannst!

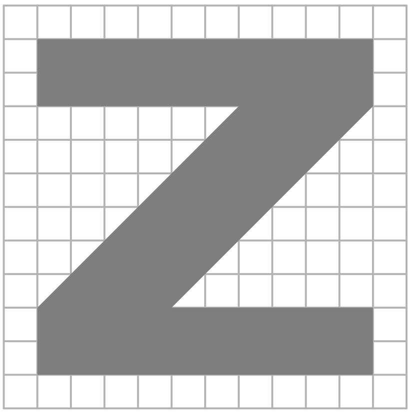


Abbildung A 450624

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450631

Die Geschwister Xaver, Yvonne und Zacharias sammeln für die Futterstelle im Wildpark Bucheckern, Eicheln und Kastanien. Als sie nach Hause kommen fragt die Mutter, ob sie erfolgreich waren. Die Geschwister antworten: „Ja, wir haben sehr viel gesammelt!

(1) Es sind siebenmal so viele Bucheckern wie Eicheln, leider weniger als 800, aber mehr als 750.
(2) Außerdem haben wir halb so viele Kastanien wie Eicheln gesammelt."

Die Mutter überlegt einen Augenblick und sagt dann:

(3) „Ich gebe euch noch 48 Walnüsse mit. Dann habt ihr ein ganz besonders rundes Ergebnis."

Wie viele Bucheckern, Eicheln und Kastanien haben die Geschwister gesammelt?

450632

Rubin, Sarah, Omar und Viola malen im Kunstunterricht eine Wand mit gelber Farbe an. Plötzlich wird der Farbeimer (von einem der vier) umgestoßen und die Farbe breitet sich im ganzen Kunstraum aus. Wer war es nun?

(1) Rubin sagt: „Sarah hat die Farbe verschüttet. Ich war es nicht!"
(2) Daraufhin sagt Sarah: „Omar hat es getan; Rubin war es wirklich nicht."
(3) Omar meint: „Sarah war es nicht; ich habe die Farbe umgestoßen."
(4) Viola sagt: „Omar war es nicht, aber Rubin hat die Farbe umgekippt."

Bei jedem Schüler ist eine der Aussagen wahr und eine falsch. Wer war es denn nun?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450633

Erbsen rollen über die Treppe ...

Überall auf den Treppenstufen liegen viele Erbsen. Die Treppe hat 14 Stufen. Jede Erbse, die zum ersten Mal über eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe zwei weitere Erbsen in Bewegung. Sie bleibt dann auf der übernächsten Stufe liegen, ohne dort noch einmal Erbsen in Bewegung zu setzen. Oben beginnt das Ganze mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., 3. und 4. Stufe, von oben gezählt, ankommen!

b) Wie viele Erbsen kommen unten an?

c) Wie viele Erbsen würden unten ankommen, wenn die Treppe 20 Stufen hätte? (Zusatzfrage – ohne Wertung: Kannst du eine allgemeine Formel für eine noch längere Treppe mit n Stufen angeben?)

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450634

Beim Murmelspielen: Uwe verliert beim ersten Spiel zwei Murmeln mehr als ein Drittel seiner Murmeln. Beim zweiten Spiel verliert er drei Murmeln mehr als ein Viertel der ihm verbliebenen Murmeln. Nach diesen beiden Spielen hat Uwe noch 21 Murmeln, die er seinem Bruder schenkt.

Wie viele Murmeln besaß Uwe vor dem ersten Spiel?

Mache eine Probe am Text!

450635

a) Bestimme den Flächeninhalt des gezeigten Buchstabens M (siehe nebenstehende Abbildung) in den unterlegten (quadratischen) Flächeneinheiten!

b) Zerlege das M so in acht Teilflächen, dass du daraus ein flächeninhaltsgleiches Quadrat zusammenlegen kannst!

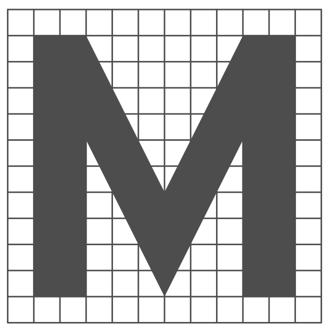


Abbildung A 450635

450636

Im Weinkeller stehen ein 12-ℓ-Krug, ein 7-ℓ-Krug und ein 5-ℓ-Krug. Der 12-ℓ-Krug ist voll mit gutem Wein; die anderen beiden Krüge sind leer.

Wie kann die Weinmenge durch (mehrfaches) Umfüllen in zwei gleiche Hälften geteilt werden?

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450711

Drei Freunde Hans, Karl und Peter fahren mit dem Rad von Lüneburg nach Winsen/Luhe, um dort an der Kletterwand zu klettern.

Hans fährt dabei in je 10 Minuten zwei Kilometer. Karl benötigt für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegt und Winsen nach genau 100 Minuten erreicht.

Wie viele Minuten nach Peter treffen Hans und Karl in Winsen ein, wenn alle drei zur gleichen Zeit in Lüneburg abgefahren sind?

450712

Löse die folgende Aufgabe, die aus einem alten Rechenbuch stammt:

„Eine Griechin ging in den Tempel Jupiters und bat, er möge ihre Barschaft verdoppeln. Er tat es und sie opferte zum Dank drei Drachmen. Dann ging sie in den Tempel Apollos und brachte die gleiche Bitte vor. Weil sie Erhörung fand, opferte sie wieder drei Drachmen. Nun besaß sie zweiundeinhalb-mal so viel Geld wie anfangs. Wie viele Drachmen hatte sie anfangs?“

450713

a) In einem Rechteck ist die eine Seite doppelt so lang wie die andere. Zerlege das Rechteck in 4 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke.

b) Ein Quadrat soll in 12 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerschnitten werden. Dabei soll von dem Quadrat nichts übrig bleiben. Wie ist das möglich?

c) Wie lässt sich das Quadrat aus der Teilaufgabe b) in 10 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerlegen?

d) Wie lässt sich das Quadrat aus der Teilaufgabe b) in 11 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerlegen?

Als Lösungen sind Zeichnungen anzugeben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450714

Als der 7-jährige Carl Friedrich Gauß, der später „Fürst der Mathematik“ genannt wurde, auf seiner Schiefertafel die lange Rechnung $1+2+3+4+\cdots+99+100$ ausführen, d. h. die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen berechnen sollte, schrieb er nach kurzem Nachdenken 5050 als Ergebnis auf. Er hatte die Summanden geschickt zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+\cdots+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)\\
&= 101+101+\cdots+101 \qquad \text{(50 Summanden)}\\
&= 50\cdot 101\\
&= 5050.
\end{aligned}$$

Dieses Vorgehen führt aber nur dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Beschreibe je ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich auch folgende Aufgaben lösen lassen:

a) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 5 bis 97!

b) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 97!

c) Berechne die Summe S_2 der zweistelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!

d) Berechne die Summe S_4 der vierstelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!

Zusatzaufgabe: Gib einen allgemeinen Term S_n für die Summe der n-stelligen Zahlen an, deren Ziffern alle ungerade sind!

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450721

a) Martin hat fünf Kugeln: eine blaue, zwei rote und zwei weiße. Er will die Kugeln so auf zwei Schalen verteilen, dass in einer Schale zwei und in der anderen drei Kugeln liegen. In beiden Schalen sollen dabei mindestens zwei Kugeln unterschiedliche Farbe haben. Schreibe alle Möglichkeiten für eine derartige Verteilung auf!

b) Martina hat neun Kugeln: drei blaue, drei rote und drei weiße. Sie verteilt ihre Kugeln auf drei Schalen. In die erste legt sie zwei Kugeln, in die mittlere drei und in die letzte vier. In jeder Schale sollen aber mindestens zwei Kugeln verschiedenfarbig sein. Wie viele unterschiedliche Verteilungen sind jetzt möglich?

Hinweis: Beachte, in dieser Aufgabe sind Kugeln gleicher Farbe nicht unterscheidbar!

450722

Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik veranstalten ein Wettrechnen. Sie wollen ohne Verwendung von Taschenrechnern Summenwerte ermitteln.

Es werden folgende Aufgaben gestellt:

a) Berechne die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 100 !

b) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 2005 !

c) Berechne die Summe mit dem ersten Summanden 533 und dem letzten Summanden 866, wobei die Differenz zweier aufeinander folgender Summanden stets 3 beträgt!

450723

Ein Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C und D hat die Seitenlänge 54 mm. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ heißen H bzw. K.

a) Begründe, warum die Dreiecke ABH, AHC, ACK und AKD den gleichen Flächeninhalt F haben!

b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck HKA?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450724

Mit einer zweistelligen Zahl werden nacheinander die folgenden drei (Rechen-) Operationen ausgeführt:

(1) An das Ende der Ausgangszahl wird ihre Quersumme gehängt, wenn dadurch eine dreistellige Zahl entsteht.
(2) Von der so entstandenen Zahl wird die Ausgangszahl subtrahiert.
(3) Zu der nun entstandenen Zahl wird das Neunfache der Zehnerziffer der Ausgangszahl addiert.

a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für welche die drei Operationen nacheinander ausführbar sind! Wie viele Zahlen sind das?
b) Zeige: Die am Ende erhaltene Zahl ist stets das Zehnfache der Ausgangszahl!

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450731

Eine Firma stellt Ziegel her, jeden Tag eine bestimmte, gleichbleibende Stückzahl.

a) Um wie viel Prozent würde die Stückzahl sinken, wenn von einer achtstündigen Arbeitszeit auf eine siebenstündige übergegangen wird, ohne die bisherige Arbeitsweise zu verändern?

b) Um wie viel Prozent müsste die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Stückzahl bei siebenstündiger Arbeitszeit die gleiche wie bei achtstündiger ist?

Hinweis: Die Prozentangaben sind auf eine Stelle nach dem Komma zu runden.

450732

Gegeben sind folgende vier Aussagen über zwei positive ganze Zahlen a und b:

(1) Die Summe $(a + b)$ ist ein Vielfaches von 3.
(2) Die Summe $(a + 4b)$ ist eine Primzahl.
(3) Die Zahl a lässt sich wie folgt darstellen: $a = 8b + 5$.
(4) Die Zahl b ist ein Teiler von $(a + 1)$.

Es ist bekannt, dass genau eine dieser Aussagen falsch ist. Finde die falsche Aussage heraus und ermittle alle Zahlenpaare $(a; b)$, welche die wahren Aussagen erfüllen!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>450733</u>

a) Zwei deckungsgleiche, rechteckige Bögen Papier liegen, wie in Abbildung A 450733 angegeben, aufeinander. Insbesondere darf vorausgesetzt werden, dass die Ecke A' auf der Seite $\overline{AD}$ liegt und dass die Seite $\overline{B'C'}$ über die Ecke B verläuft.
Untersuche, ob der „sichtbare“ Teil des Rechtecks $ABCD$ kleiner, größer oder gleich dem „abgedeckten“ Teil ist!

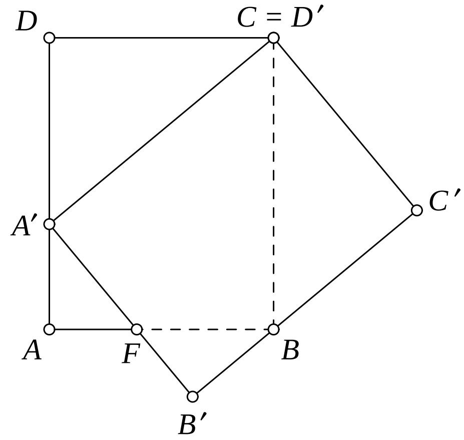


Abbildung A 450733

b) Von zwei Vierecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ wird gefordert:
   (1) Die Vierecke sind kongruente Rechtecke und es gilt $C = D'$.
   (2) A' liegt auf der Seite $\overline{AD}$.
   (3) $\overline{AB}$ und $A'B'$ schneiden einander im Punkt F.

Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen $A'FBC$ stets ein Drachenviereck ist und B stets auf der Seite $\overline{B'C'}$ liegt!

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450734

Die Gemeinden A und B sowie die Stadt C liegen in dieser Reihenfolge an einer Landstraße. Die Gemeinden A und B sind genau 5 km voneinander entfernt. Von B aus fährt ein Traktor morgens um 6 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 10 km/h nach C. Am gleichen Tag fährt von A aus ein Radfahrer um 7 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h nach C und überholt den Traktor vor der Stadt C.

a) Zu welcher Uhrzeit und in welcher Entfernung von B überholt der Radfahrer den Traktor?
b) Wie viele Kilometer sind B und C voneinander entfernt, wenn der Radfahrer genau 40 Minuten früher in C ankommt als der Traktor?

450735

Auf einem Parkstreifen stehen 8 Autos hintereinander. Florian läuft in Fahrtrichtung vorbei und stellt fest:

(1) Ein Ford steht zwischen einem VW und einem Opel.
(2) Ein Audi steht vor einem VW und nach einem Opel.
(3) Ein Opel steht zwischen einem Audi und einem Opel.
(4) Ein VW steht zwischen einem Ford und einem VW.
(5) Ein Opel steht zwischen einem Ford und einem Opel.

Gunter behauptet, dass es höchstens zwei verschiedene Reihenfolgen der 8 Autos gibt, welche die Bedingungen (1) bis (5) erfüllen. Heinz dagegen behauptet, dass es mehr als zwei derartige Reihenfolgen gibt.

Welcher der beiden Jungen hat Recht?

Hinweis: In dieser Aufgabe sind „zwischen“, „vor“ und „nach“ stets im Sinne von „unmittelbar zwischen“, „unmittelbar vor“ und „unmittelbar nach“ zu verstehen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450736

Ein Korb mit Nüssen soll unter Kindern wie folgt verteilt werden:

Das erste Kind bekommt 5 Nüsse, das zweite Kind eine Nuss mehr, das dritte zwei Nüsse mehr als das erste Kind usw. Dann ist der Korb leer.

a) Wie viele Nüsse müssen in dem Korb sein, wenn sie an 21 Kinder verteilt werden sollen und keine Nuss übrigbleiben soll?
   Wie viele Nüsse aus diesem Korb würde jedes der 21 Kinder bekommen, wenn alle Kinder gleich viele Nüsse erhalten („Gleichverteilung“)?
b) Gib eine Anzahl k von Kindern an, für welche eine Gleichverteilung der Nüsse im Korb nicht möglich ist und begründe dies!

Wir betrachten jetzt eine andere Art der Verteilung:

Das erste Kind erhält n Nüsse. Jedes folgende Kind erhält die gleiche gerade Anzahl $2 \cdot m$ von Nüssen mehr als das vorhergehende.

c) Wie viele Nüsse müssen im Korb sein, wenn sie an 21 Kinder verteilt werden sollen und $m = 3$ ist?
   Wie viele Nüsse würde jetzt jedes der 21 Kinder bei Gleichverteilung bekommen?
d) Zeige, dass bei dieser Verteilung für alle Anzahlen k von Kindern alle Kinder auch gleich viele Nüsse bekommen könnten.
   Wie viele Nüsse erhält jedes Kind bei Gleichverteilung (ausgedrückt durch k, m und n)?

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450811

Eine Aufgabe von Leonhard Euler aus dem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“:

Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 8 abzähle, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 10 abzähle, so bleiben mir auch 7 übrig.“

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben ermitteln lässt, wie viele Eier jede der beiden Bäuerinnen hat!

Wenn dies nicht der Fall ist, dann füge eine Bedingung hinzu, damit die Aufgabe eindeutig lösbar wird!

450812

Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die Folgendes gilt: Addiert man zum ersten Summanden 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets die gleiche Zahl.

Wie lauten die vier Summanden?

450813

Wir betrachten ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte mit den Seitenmittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 so verbunden sind, wie in Abbildung A 450813 angegeben. Man kann nachweisen, dass das so entstandene Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist.

Ermittle, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt von $PQRS$ zum Flächeninhalt von $ABCD$ steht!

Zusatzaufgabe: Beweise, dass das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist.

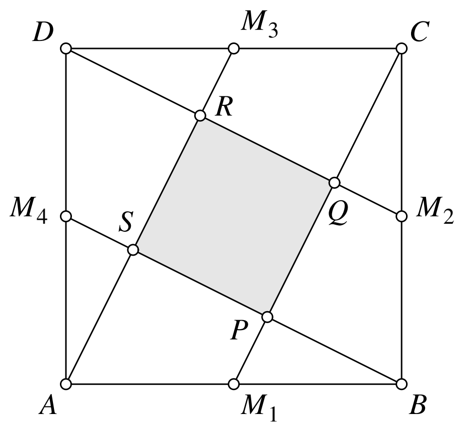


Abbildung A 450813

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450814

Als der 7-jährige Carl Friedrich Gauß, der später „Fürst der Mathematik" genannt wurde, auf seiner Schiefertafel die lange Rechnung $1+2+3+4+\cdots+99+100$ ausführen, d. h. die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen berechnen sollte, schrieb er nach kurzem Nachdenken 5050 als Ergebnis auf. Er hatte die Summanden geschickt zusammengefasst:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+\cdots+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51) \\ &= 101+101+\cdots+101 \qquad \text{(50 Summanden)} \\ &= 50\cdot 101 \\ &= 5050. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen führt aber nur dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Beschreibe je ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich auch folgende Aufgaben lösen lassen:

a) Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 5 bis 97!

b) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 97!

c) Berechne die Summe S_2 der zweistelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!

d) Berechne die Summe S_4 der vierstelligen Zahlen, deren Ziffern alle ungerade sind!

Zusatzaufgabe: Gib einen allgemeinen Term S_n für die Summe der n-stelligen Zahlen an, deren Ziffern alle ungerade sind!

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450821

a) Marie geht einkaufen. Ihre Mutter gibt ihr dazu etwas Geld mit. Marie bezahlt für Wurstwaren an der Theke 30 %, für Milch 5 % und für Obst und Gemüse 35 % des ihr zur Verfügung stehenden Betrags. Zu Hause erhält Marie von der Mutter ein Drittel des Restbetrags als Taschengeld. Das sind 1,42 €. Wie viel Geld hatte Marie ursprünglich dabei?

b) Marie und ihr Bruder Robert vergleichen den Inhalt ihrer Sparbüchsen: 18 % von Roberts Ersparnissen ergeben denselben Geldbetrag wie 45 % des Gesparten von Marie. Wenn Robert ein Viertel so viel ausgäbe, wie Marie gespart hat, dann blieben ihm noch 146,25 € in seiner Büchse. Wie viel Geld haben Marie und Robert jeweils gespart?

450822

Alfons und Bertram spielen mit einer 5-Cent-Münze und einem Würfel. Als zufällig die „5“ auf der Münze und auch auf dem Würfel erscheint, fängt Alfons zu Grübeln an: „Tritt die Zahl 5 häufiger beim Werfen der Münze oder beim Würfeln auf?“ Bertram meint: „Sicherlich wird die Münze öfter mit der Zahl 5 nach oben auftreffen, da es ja nur zwei Möglichkeiten gibt“. „Dann müsste man den Würfel eben mehrmals nacheinander werfen dürfen“, sagt Alfons.

Beide vereinbaren schließlich das folgende Spiel: Alfons wirft die Münze einmal, Bertram würfelt dreimal hintereinander. Gewinnen soll, wer mindestens eine „Fünf“ wirft.

Ermittle die Gewinnchancen und entscheide, ob die vereinbarte Regel für Alfons oder für Bertram vorteilhafter ist!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450823

Die Abbildung A 450823 zeigt ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$, die einander in H schneiden. Die Winkelhalbierende $\overline{AD}$ des Winkels BAC schneidet $\overline{BE}$ in M und $\overline{CF}$ in N.

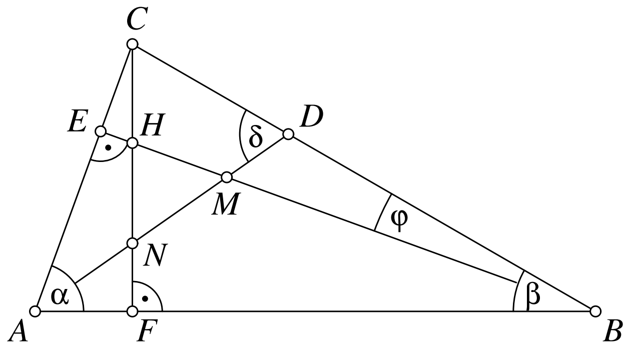


Abbildung A 450823

Aus der Grafik ist außerdem zu ersehen, dass die Größen der Winkel BAC, CBA, CDA und CBE in dieser Reihenfolge mit α, β, δ bzw. φ bezeichnet sind.

a) Drücke β durch α und φ aus!

b) Drücke δ durch α und φ aus!

c) Untersuche, ob das Dreieck MHN gleichschenklig ist!

450824

Ein Künstler soll in einer Eingangshalle einen Mosaikboden gestalten. Das Muster, das er auf den Boden legen will, besteht aus gleichseitigen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen n, gemessen in cm. Der Künstler experimentiert zunächst mit lauter gleichen, kleineren Mosaiksteinen in Form gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge 1 cm, die er vorher auf Papier zeichnet. Ein größeres gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n cm soll dabei vollständig und lückenlos mit den kleineren Mosaiksteinen ausgelegt werden.

a) Wie viele kleine Mosaiksteine braucht der Künstler für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5?
Stelle eine Vermutung für die Anzahl benötigter Mosaiksteine auf, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist und begründe deine Vermutung!

b) Den Künstler befriedigen seine ersten Zeichenversuche aus ästhetischen Gründen noch nicht. Er hat auch viele gleiche trapezförmige Mosaiksteine zur Verfügung und will mit ihnen gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge n cm vollständig und lückenlos auslegen (parkettieren). Jeder Trapezstein hat die Form wie in Abbildung A 450824 mit den Kantenlängen 1 cm, 1 cm, 1 cm sowie 2 cm. Zeichne eine mögliche Parkettierung für $n = 3$!

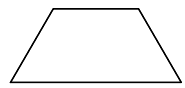


Abbildung A 450824

c) Gibt es jeweils Parkettierungen mit Trapezsteinen für $n = 4$ und $n = 5$? Welche Seitenlängen sind für das gleichseitige Dreieck nur möglich? Begründe auch hier deine Antwort!

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450831

Axel, Bruno, Dieter und Ernst sind die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hat jeder gegen jeden zweimal zu spielen – ein Spiel und ein Rückspiel. Für eine gewonnene Partie wird 1 Punkt, für eine unentschiedene $\frac{1}{2}$ Punkt, für eine verlorene kein Punkt vergeben. Nach Abschluss des Turniers stellte sich heraus:

(1) Bruno und Dieter erzielten zusammen einen Punkt mehr als Axel und Ernst zusammen erreichten.
(2) Dieter und Ernst erkämpften zusammen 7 Punkte.
(3) Axel und Dieter erreichten zusammen 5 Punkte weniger als Bruno und Ernst zusammen.

Wie viele Punkte errang nach diesen Angaben jeder der vier Teilnehmer?

Zeige durch eine Probe, dass deine Ergebnisse die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

450832

Von einem geordneten Tripel $(x; y; z)$ ganzer Zahlen wird gefordert:

(1) Die Summe der drei Zahlen dieses Tripels beträgt 6.
(2) Der Quotient aus dem Produkt der beiden ersten Zahlen und der dritten Zahl beträgt 6.
(3) Die Differenz aus dem Quadrat der ersten Zahl und der Summe aus den beiden anderen Zahlen beträgt ebenfalls 6.

Ermittle alle Tripel, die diese drei Forderungen gleichzeitig erfüllen!

450833

Drei kongruente Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und dem Radius r verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt D. Diese Kreise schneiden einander außerdem in weiteren Punkten, die mit A, B und C bezeichnet werden.

a) Beweise, dass man einen Punkt S konstruieren kann, der von diesen drei Schnittpunkten den gleichen Abstand besitzt!
b) Vergleiche den Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt S, auf dem A, B und C liegen, mit dem Radius r!

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450834

Es ist zu untersuchen, ob man die Kanten eines Würfels so mit den Zahlen $4, 5, 6, \ldots, 13, 14$ und 15 durchnummerieren kann, dass für jeden Eckpunkt des Würfels die Summe aus den Zahlen, die zu den drei in diesem Eckpunkt zusammenstoßenden Kanten gehören, stets die gleiche ist.

450835

Zwei Punkte P und Q bewegen sich entgegen dem Uhrzeigersinn auf einem Dreieck ABC, dessen Umfang 154 cm beträgt. Beide starten zum gleichen Zeitpunkt und zwar P in A und Q in B. Der Punkt Q bewegt sich von B aus mit einer konstanten Geschwindigkeit v. Wenn P die Geschwindigkeit $2{,}25\,v$ hat, so holt er Q nach 15 Sekunden in C ein. Hat P aber nur die Geschwindigkeit $1{,}75\,v$, so holt er Q nach 25 Sekunden in A ein.

Berechne aus diesen Angaben die Längen a, b und c der Seiten des Dreiecks ABC und die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 von P!

450836

Über sechs Punkte A, B, C, D, E und M wird vorausgesetzt:

(1) A, B, C bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in C.
(2) M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.
(3) D liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und $\overline{DC}$ ist kürzer als $\overline{AD}$.
(4) E ist der Schnittpunkt der Geraden BC und MD.
(5) Die Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{AB}$ sind gleich lang.

Die Größe des Winkels CBA ist mit β, die des Winkels CED mit ε bezeichnet (siehe Abbildung A 450836).

a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\beta = 3\,\varepsilon$ folgt!
b) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Der Winkel CMA ist dreimal so groß wie der Winkel CME.

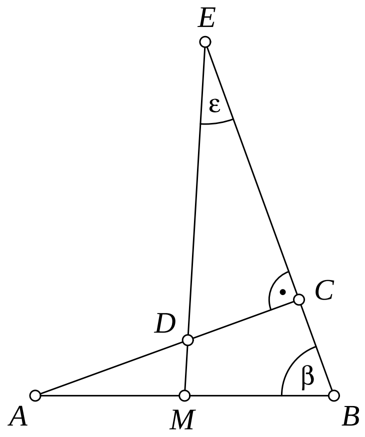


Abbildung A 450836

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450841

Löse folgende Aufgabe, die einem alten Rechenbuch entnommen wurde:

Von zwei Kapitalien trägt das eine 80 Gulden Jahreszins, das andere bei gleichem Zinssatz 100 Gulden Jahreszins. Wird nun das erste Kapital zu 3,5 %, das zweite zu 3,75 % ausgeliehen, so vermindert sich die ganze jährliche Einnahme um 16,25 Gulden. Berechne die Kapitalien.

450842

Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde in einem Biergarten am Waldesrand. Plötzlich fällt ein Schuss. Sie schauen zur Uhr, und kurz darauf sagt einer von ihnen: „Der Schuss fiel genau h Stunden, m Minuten und s Sekunden vor Mitternacht und merkwürdig: h, m und s sind Primzahlen, die der Gleichung $3s = h + m$ genügen.“ Darauf antwortet der zweite: „Auch die Anzahl der vollen Minuten bis Mitternacht ist eine Primzahl.“ Und der dritte sagt nach kurzer Prüfung mit dem Taschenrechner: „Sogar die Anzahl der Sekunden bis Mitternacht ist eine Primzahl.“

Weise nach, dass man aus diesen (etwas kuriosen) Angaben eindeutig ermitteln kann, wann die Mathematiker den Schuss hörten und gib diesen Zeitpunkt an.

Hinweis: In dieser Aufgabe muss die Feststellung, dass eine Zahl Primzahl ist, nicht begründet bzw. bewiesen werden. Zur Ermittlung weiterer Primzahlen kann die folgende Liste aller Primzahlen unter 100 verwendet werden:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450843

In einem ebenen Punktegitter (gemeint sind alle Punkte in einem Koordinatensystem mit ganzzahligen Koordinaten) wird schrittweise ein Punktmuster aufgebaut:

1. Schritt: Ein beliebiger Punkt wird ausgewählt. Wir beschreiben die Anzahl der im 1. Schritt $A(1)$ festgelegten Punkte mit der Gleichung $A(1) = 1$.

2. Schritt: Zu diesem Punkt fügen wir genau diejenigen vier Gitterpunkte hinzu, die zum ersten Punkt den Abstand 1 haben. Folglich gilt $A(2) = 1 + 4 = 5$.

3. Schritt: Nun fügen wir zu diesen fünf Punkten genau diejenigen acht Gitterpunkte hinzu, die den Abstand 1 haben und bisher noch nicht im Muster erfasst sind. Folglich gilt $A(3) = 5 + 8 = 13$.

a) Berechne in der angegebenen Weise die Anzahl $A(7)$ der Punkte, die das Punktmuster nach Ausführung des 7. Schrittes hat.

b) Philipp will wissen, wie viele Punkte nach dem 2006. Schritt auf die angegebene Weise erfasst sind. Leite eine geeignete Formel her und berechne mit deren Hilfe $A(2006)$.

c) Betrachte nun dieses Muster im Raum, wobei $B(1) = 1$ bedeutet, dass im 1. Schritt ein beliebiger Punkt ausgewählt wurde. Ermittle die Anzahlen $B(2)$ und $B(3)$ dieses räumlichen Punktmusters.

d) Gib eine Beziehung an, die es gestattet, die Anzahl $B(n)$ aus den bereits ermittelten Anzahlen $A(n)$ zu berechnen und berechne mit deren Hilfe $B(6)$. (Eine Herleitung oder ein Beweis wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.)

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450844

Wir betrachten Quadrate, die in neun kleinere, untereinander kongruente Quadrate unterteilt sind. In diese Quadrate werden die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 eingetragen, zum Beispiel wie in Abbildung A 450844 a.

In derartige Quadrate lassen sich auf verschiedene Weise „(2×2)-Quadrate“ einzeichnen, zum Beispiel wie in Abbildung A 450844 b. Nun bilde man die Summe S der dort eingetragenen vier Zahlen. In unserem Beispiel erhält man $S = 2 + 9 + 5 + 4 = 20$.

Zeige, dass es unter den „(2×2)-Quadraten“ unabhängig davon, wie man die neun Zahlen anfangs eingetragen hat, stets eines gibt, dessen Summe S größer oder gleich 16 ist.

1	7	8
2	9	3
5	4	6

Abbildung A 450844 a

1	7	8
2	9	3
5	4	6

Abbildung A 450844 b

450845

Als *erste* Quersumme $Q_1(n)$ einer natürlichen Zahl n sei die in bekannter Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist $Q_1(n)$ eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, dann sei deren Quersumme als *zweite* Quersumme $Q_2(n)$ bezeichnet. Entsprechend wird $Q_3(n)$ definiert.

a) Ermittle die kleinste Zahl n, für die $Q_3(n) = 11$ gilt.

b) Ermittle die größte Zahl, die als *dritte* Quersumme einer 2005-stelligen Zahl auftreten kann und gib die kleinste 2005-stellige Zahl an, die diese maximale dritte Quersumme besitzt.

c) Ermittle $Q_3(3^{1000})$, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zahl $z = 3^{1000}$ genau 478 Ziffern besitzt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450846

Gegeben sei ein Kreissektor, der von zwei Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ sowie dem Bogen AB begrenzt wird.

a) Es werde vorausgesetzt, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ aufeinander senkrecht stehen. Von einem beliebigen Punkt P des Kreisbogens AB werden die Lote auf $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ gezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte P des Kreisbogens gleich lang sind und ermittle deren Länge.

b) Beweise: Auch unter der Voraussetzung, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ einen spitzen Winkel einschließen, sind die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte P des Kreisbogens gleich lang.

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9/10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451011

Aus der Menge M der natürlichen Zahlen von 1 bis 120 wählt man 13 Zahlen, welche paarweise verschieden sind, aus.

a) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, die sich um höchstens 9 unterscheiden.

b) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, deren Differenz ein Vielfaches von 10 ist.

c) Kann man bei b) mit weniger als 13 auszuwählenden Zahlen auskommen?

451012

Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen gibt es, deren letzte Ziffer eine 4 ist und die durch 6 teilbar sind?

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie mit n Ziffern im dekadischen System dargestellt werden kann, wobei die 1. Ziffer ungleich null ist.

451013

Die Felder eines Quadrats aus 4×4 Teilquadraten sollen mit je einer von 4 Farben eingefärbt werden. Die Färbung soll so erfolgen, dass bei Drehung des Quadrats um 90°, 180° und 270° um den Quadratmittelpunkt je zwei Felder gleicher Farbe auf zwei Felder gleicher Farbe abgebildet werden; letztgenannte Farbe soll aber von der erstgenannten verschieden sein.

Wie viele solche Möglichkeiten gibt es? Möglichkeiten, die durch Drehung auseinander hervorgehen, sollen nicht als verschieden gelten.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

451014

Peter versucht spitzwinklige Dreiecke zu finden, mit denen sich ein weiteres Dreieck zusammenlegen lässt. Nach vielen Versuchen meint er: „Mit 4 Dreiecken kann man die Aufgabe lösen, mit weniger als 4 Dreiecken aber nicht.“ Hat Peter recht?

451015

In einer Ebene liegen zwei Strecken. Man zeige, dass es möglich ist, unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade zu konstruieren, so dass die senkrechten Projektionen der Strecken auf diese Gerade gleich lang sind.

Hinweis: Ist die Projektion ein einzelner Punkt, so ist ihre Länge 0.

451016

Es seien x, y reelle Zahlen mit $y \geq 0$ und $y \cdot (y+1) \leq (x+1)^2$. Zeigen Sie, dass dann $y \cdot (y-1) \leq x^2$ gilt.

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450921

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

450922

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}\,?$$

450923

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen z größer als 9, für die gilt: Wenn man die erste Ziffer von z wegstreicht, erhält man $\frac{z}{57}$.

450924

In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2 \ldots A_6$ mit dem Flächeninhalt A schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$, $\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2 \ldots B_6$ mit dem Flächeninhalt B aus.

Berechnen Sie den Flächeninhalt B in Abhängigkeit von A.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450931

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

450932

Es sei $ABCDE$ eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$, in der die Seitenkante $\overline{EA}$ senkrecht auf der Grundfläche steht (siehe nebenstehende Abbildung). Ferner seien F der Fußpunkt des Lotes von A auf $\overline{BE}$ und G der Fußpunkt des Lotes von F auf $\overline{CE}$.

Zeigen Sie, dass $\overline{AG}$ senkrecht auf $\overline{CE}$ steht!

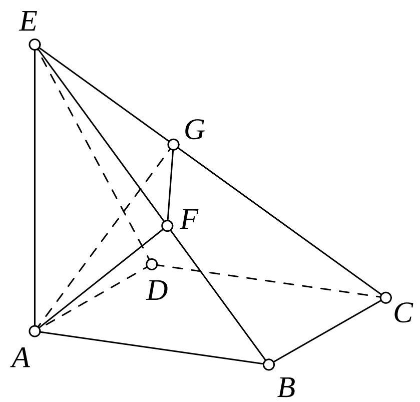


Abbildung A 450932

450933

Für welche reellen Zahlen x gilt

$$\frac{x}{\lfloor x \rfloor} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} < \frac{x}{\lceil x \rceil} + \frac{\lceil x \rceil}{x} \ ?$$

Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$ und $\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl l mit $l \geq x$.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450934

Finden Sie alle ganzen Zahlen a, für die auch $\dfrac{69-6a}{2a+1}$ eine ganze Zahl ist!

450935

Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen dieser Familien transportierten gerne Briefe.

Die Fürsten des Landes planten ein landesweites Postsystem. Bei der Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden. Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen wegen der Aufteilung derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren.

Nun waren die Fürsten in einer verzwickten Lage: Zum Ersten wollten sie die Ausschreibung des hohen Verwaltungsaufwandes wegen nicht wiederholen, zum Zweiten beharrte jede Drachenfamilie auf alleinige Bedienung der ihr zugeteilten Direktverbindungen, zum Dritten konnte aber keinem Städtchen zugemutet werden, sich von beiden Drachenfamilien anfliegen zu lassen. Hätten sich nämlich zwei Drachen aus unterschiedlichen Familien bei der Postzustellung in einem der Städtchen getroffen, also in Ausübung gerade der Tätigkeit, die die Feindschaft ausgelöst hatte, hätte schnell wieder ein Streit entbrennen können, bei dem womöglich das Städtchen in Schutt und Asche gelegt worden wäre.

Also setzten sich die klugen Fürsten zusammen und beratschlagten, ob die Post mit nur einer Drachenfamilie transportiert werden und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein könnte.

Man zeige, dass es möglich war, mit einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie ursprünglich zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden. (Umwege über solche Direktverbindungen waren natürlich zugelassen.)

450936

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Außerdem seien P ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$, U der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und V der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Der Bildpunkt von P

bei der Spiegelung an U sei Q und R wiederum sei der Bildpunkt von P bei der Spiegelung an V. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Die Gerade PM zerlegt also das Dreieck PRQ in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.

Wie muss P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen, damit die Gerade PM auch das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt?

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450941

Wie viele ganze Zahlen n mit $\frac{2^{2005}}{45} < n \leq 2^{2005}$ gibt es, welche sich in der Form $2^a \cdot 45^b$ mit ganzen Zahlen a, b darstellen lassen?

450942

Man finde alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, so dass

$$p = x^2 - y$$
$$q = y^2 + 3x - 7$$

gilt.

450943

Im einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei H der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes. Ferner seien P und Q die Fußpunkte der von H auf AC bzw. BC gefällten Lote.

Es gelte außerdem: Die Umkreise der Dreiecke AHP und HBQ schneiden die Strecke $\overline{PQ}$ in von P und Q verschiedenen Punkten S bzw. T (siehe Abbildung).

Man zeige, dass der Umkreis des Dreiecks HTS die Gerade AB berührt.

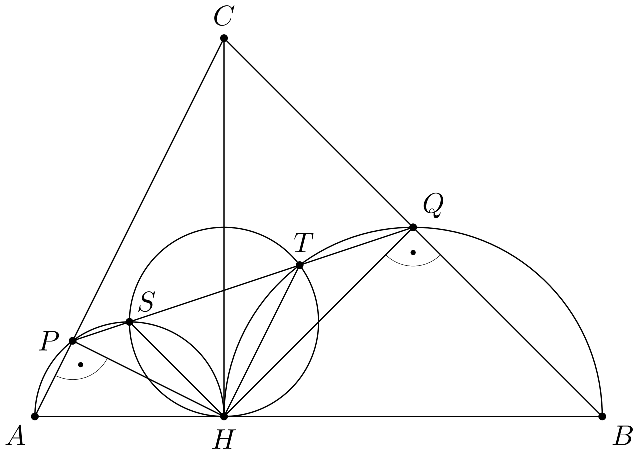


Abbildung A 450943

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450944

Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen, die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + \mathrm{ggT}(n; 90))^4 = Q(Q(n)).$$

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt neunstellig, wenn sie mit 9 Ziffern im Zehnersystem dargestellt werden kann, wobei die erste Ziffer ungleich Null ist. $Q(n)$ bezeichnet die Quersumme der natürlichen Zahl n (und damit $Q(Q(n))$ die Quersumme der Quersumme von n). Mit ggT wird *größter gemeinsamer Teiler* abgekürzt.

450945

Bestimmen Sie alle reellen Tripel $(x; y; z)$, welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \frac{1}{y} = 3.$$

450946

In der Zeichenebene sei eine Folge $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ von Punkten derart gegeben, dass gilt:

- Für alle positiven ganzen Zahlen i hat das Dreieck $D_i = A_iA_{i+1}A_{i+2}$ einen rechten Winkel bei A_{i+2}.
- Der Punkt A_{i+3} liegt im Inneren der Strecke $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Wie kann man in endlich vielen Konstruktionsschritten aus den Punkten A_1, A_2 und A_3 alle Punkte konstruieren, die im Inneren jedes der Dreiecke D_i $(i = 1, 2, \ldots)$ liegen?

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451021

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

451022

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}\,?$$

451023

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen z größer als 9, für die gilt: Wenn man die erste Ziffer von z wegstreicht, erhält man $\frac{z}{57}$.

451024

In der Mitte des regelmäßigen Achtecks $A_1A_2\ldots A_8$ mit der Seitenlänge a und dem Flächeninhalt A schneiden die acht Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, ..., $\overline{A_6A_8}$, $\overline{A_7A_1}$ und $\overline{A_8A_2}$ ein kleineres Achteck $B_1B_2\ldots B_8$ mit der Seitenlänge b und dem Flächeninhalt B aus. Dabei bleibt ein eckiger Ring mit dem Flächeninhalt C übrig.

Beweisen Sie: $B = C\sqrt{2}$.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451031

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

451032

Unter einer Höhe in einem Tetraeder verstehen wir eine Gerade, die durch einen der Eckpunkte geht und zur Ebene der gegenüberliegenden Seitenfläche senkrecht ist. Jedes Tetraeder hat genau vier Höhen. Im Gegensatz zu den Höhen eines Dreiecks müssen sich nicht einmal zwei dieser Höhen schneiden.

Zeigen Sie, dass in einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder gilt: Wenn zwei der Höhen durch einen gemeinsamen Punkt gehen, dann gehen die beiden anderen Höhen auch durch einen gemeinsamen Punkt.

451033

Für welche reellen Zahlen x gilt

$$\frac{x}{\lfloor x\rfloor} + \frac{\lfloor x\rfloor}{x} < \frac{x}{\lceil x\rceil} + \frac{\lceil x\rceil}{x} \text{ ?}$$

Hinweis: $\lfloor x\rfloor$ ist die größte ganze Zahl k mit $k \leq x$ und $\lceil x\rceil$ ist die kleinste ganze Zahl l mit $l \geq x$.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451034

Finden Sie alle ganzen Zahlen a, für die auch $\dfrac{69-6a}{2a+1}$ eine ganze Zahl ist!

451035

Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen dieser Familien transportierten gerne Briefe.

Die Fürsten des Landes planten ein landesweites Postsystem. Bei der Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden. Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen wegen der Aufteilung derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren.

Nun waren die Fürsten in einer verzwickten Lage: Zum Ersten wollten sie die Ausschreibung des hohen Verwaltungsaufwandes wegen nicht wiederholen, zum Zweiten beharrte jede Drachenfamilie auf alleinige Bedienung der ihr zugeteilten Direktverbindungen, zum Dritten konnte aber keinem Städtchen zugemutet werden, sich von beiden Drachenfamilien anfliegen zu lassen. Hätten sich nämlich zwei Drachen aus unterschiedlichen Familien bei der Postzustellung in einem der Städtchen getroffen, also in Ausübung gerade der Tätigkeit, die die Feindschaft ausgelöst hatte, hätte schnell wieder ein Streit entbrennen können, bei dem womöglich das Städtchen in Schutt und Asche gelegt worden wäre.

Also setzten sich die klugen Fürsten zusammen und beratschlagten, ob die Post mit nur einer Drachenfamilie transportiert werden und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein könnte.

Man zeige, dass es möglich war, mit einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden, auch wenn die Post unterwegs nur höchstens zwei zusätzliche Orte passieren durfte.

451036

In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei ein Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ derart gewählt, dass $|AP| : |PB| = |AD| : |DC|$ und zusätzlich $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle DCB|$ gilt.

Beweisen Sie, dass dann $|\sphericalangle ADC| = 2 \cdot |\sphericalangle PDB|$ gilt!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann konvex, wenn die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegen.

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451041

Wie viele ganze Zahlen n mit $\frac{2^{2005}}{45} < n \leq 2^{2005}$ gibt es, welche sich in der Form $2^a \cdot 45^b$ mit ganzen Zahlen a, b darstellen lassen?

451042

Man finde alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die es ganze Zahlen x und y gibt, so dass

$$p = x^2 - y$$
$$q = y^2 + 3x - 7$$

gilt.

451043

Sei k ein Kreis, $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises und zu jedem Punkt C sei D_C der Fußpunkt des Lotes von C auf AB und E_C der Fußpunkt des Lotes von D_C auf AC. Sei X der geometrische Ort aller Punkte E_C, wenn C alle Punkte der Kreislinie k durchläuft. Man beweise, dass X tatsächlich wie im Bild zu sehen außer AB keine Symmetrieachsen besitzt.

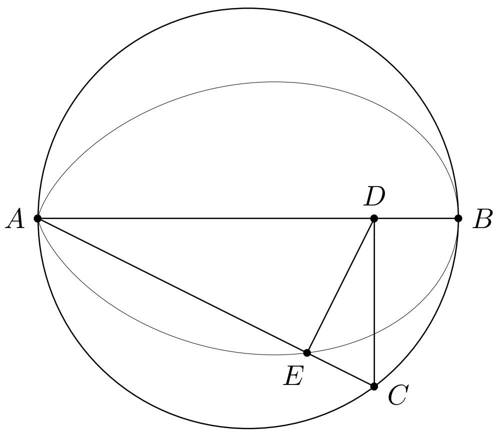


Abbildung A 451043

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451044

In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne $*$ durch die Ziffern von 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht.

$$\begin{array}{cccc} & * & * & * \\ & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & * & * & * \\ & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

451045

In der Zeichenebene sei eine Folge $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ von Punkten derart gegeben, dass gilt:

– Für alle positiven ganzen Zahlen i hat das Dreieck $D_i = A_iA_{i+1}A_{i+2}$ einen rechten Winkel bei A_{i+2}.
– Der Punkt A_{i+3} liegt im Inneren der Strecke $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Wie kann man in endlich vielen Konstruktionsschritten aus den Punkten A_1, A_2 und A_3 alle Punkte konstruieren, die im Inneren jedes der Dreiecke D_i $(i = 1, 2, \ldots)$ liegen?

451046

Bestimmen Sie alle reellen Tripel $(x; y; z)$, welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \frac{1}{y} = 3.$$

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451131

Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, die das Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 82 \quad (1)$$
$$x + y = 2 \quad (2)$$

erfüllen.

451132

Man untersuche jeweils, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Quadratzahlen gibt, für die die Summe der Ziffern in ihrer Dezimaldarstellung

a) gleich 2006,
b) gleich 451132

ist.

451133

In einem Tetraeder $QRST$ seien A der Mittelpunkt der Kante $\overline{QR}$, B der Mittelpunkt der Kante $\overline{ST}$, C der Mittelpunkt der Kante $\overline{QS}$, D der Mittelpunkt der Kante $\overline{RT}$, E der Mittelpunkt der Kante $\overline{QT}$ und F der Mittelpunkt der Kante $\overline{RS}$. Man zeige, dass es einen Punkt gibt, in dem sich die drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ schneiden.

Hinweis: Ein Tetraeder ist ein Körper, der von genau vier Dreiecken begrenzt wird.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451134

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichungen

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} < \sqrt{x^2+1} < x + \frac{1}{2x} \tag{1}$$

gelten.

451135

Man beweise, dass für jede nichtnegative ganze Zahl n die Zahl

$$z_n = 100^{n+2} + 101^{2n+1}$$

a) durch 7,
b) durch 10101

teilbar ist.

451136

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreis k. Es sei t die Tangente an k im Punkt C. Die Tangenten an k in den Punkten A und B schneiden die Tangente t in den Punkten M beziehungsweise N und der Fußpunkt des Lotes von C auf $\overline{AB}$ sei mit P bezeichnet. Man beweise, dass die Strecke $\overline{CP}$ den Winkel $\sphericalangle NPM$ halbiert.

45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451311

Man ermittle alle im Dezimalsystem 8-stelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die aus den ersten vier Ziffern gebildete Zahl ist dreimal so groß wie die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl.
(2) Die Zahl ist gerade.
(3) Die sechste Ziffer der Zahl ist gleich der zweiten Ziffer.
(4) Die Zahl ist durch fünf teilbar.
(5) Die siebente Ziffer der Zahl ist doppelt so groß wie die dritte Ziffer.

Die Zählung der Stellen erfolgt dabei von links nach rechts, die erste Ziffer wird als von Null verschieden vorausgesetzt.

451312

Im Wirtshaus „Zur lustigen Fliege“ werden Koordinaten in Bierdeckeleinheiten gemessen. In der Ecke eines Tisches liegt ein quadratischer Bierdeckel mit der Kantenlänge 1. Ein Gast bewegt diesen so, dass zwei benachbarte Ecken entlang der beiden Tischkanten gleiten (vgl. Abbildung A 451312). Kann eine im Punkt $F(0{,}8; 1{,}4)$ sitzende Fliege bei dieser Bewegung getroffen werden? (Die Ecke des Tisches stelle den Koordinatenursprung dar.)

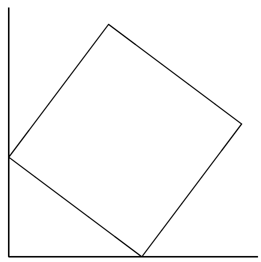


Abbildung A 451312

451313

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$(x+y)^2 - 3(x+y) = 4 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \qquad (2)$$

erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

451314

Wiebke und Stefan trainieren für Northcotts Spiel. Dazu zeichnen sie nebeneinander eine Reihe von Quadraten und stellen einen schwarzen Stein auf das erste Feld sowie einen weißen auf das letzte. Die Abbildung A 451314 zeigt die Ausgangsstellung für eine Reihe von sieben Quadraten.

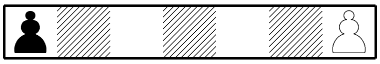


Abbildung A 451314

Gezogen wird abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den eigenen Spielstein um ein Feld oder um zwei Felder vorwärts oder rückwärts zu versetzen, ohne den gegnerischen Spielstein zu überspringen. Wiebke führt den weißen Stein und beginnt. Verloren hat derjenige, der keinen Zug mehr machen kann.

Man untersuche, ob einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen kann, und beschreibe, auf welche Weise dies möglich ist.

45. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451321

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{|x^2-1|}{x-2}=x$$

erfüllen.

451322

Man beweise, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 eine Quadratzahl ergibt.

451323

Zwei Rechtecke verschiedener Größe haben das gleiche Seitenverhältnis. Sie liegen so übereinander, dass auf dem Inneren jeder Seite des größeren Rechtecks ein Eckpunkt des kleineren Rechtecks liegt. Für welche Seitenverhältnisse ist dies möglich?

451324

Stefan und Wiebke spielen Northcotts Spiel. Es wird auf einem Schachbrett gespielt, auf dem sich in jeder waagerechten Reihe je ein schwarzer und ein weißer Spielstein befinden. Gezogen wird abwechselnd, wobei Wiebke die weißen und Stefan die schwarzen Steine führt. Ein Zug besteht darin, einen Spielstein innerhalb seiner Reihe beliebig zu versetzen, ohne den gegnerischen Spielstein zu überspringen. Verloren hat derjenige, der keinen Zug mehr machen kann.

Welcher der beiden Spieler kann den Sieg erzwingen, wenn die Spielsteine wie in der Abbildung gezeigt aufgestellt sind und Wiebke am Zug ist?

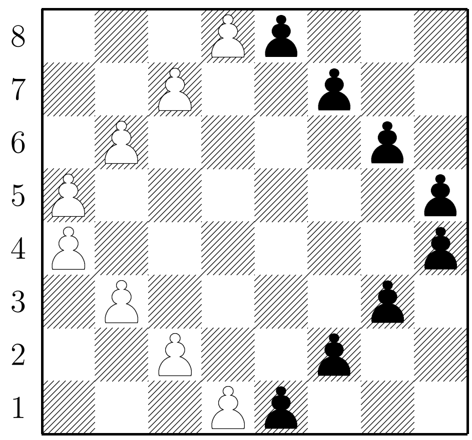


Abbildung A 451324

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12/13
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451331

Man ermittle alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen x und y, die das Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 82 \qquad (1)$$
$$x + y = 2 \qquad (2)$$

erfüllen.

451332

Man untersuche jeweils, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Quadratzahlen gibt, für die die Summe der Ziffern in ihrer Dezimaldarstellung

a) gleich 2006,
b) gleich 451332 ist.
c) Man löse Teilaufgabe b) unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die letzte Ziffer der Zahl keine Null sein darf.

451333

In einem Tetraeder $QRST$ seien A der Mittelpunkt der Kante $\overline{QR}$, B der Mittelpunkt der Kante $\overline{ST}$, C der Mittelpunkt der Kante $\overline{QS}$, D der Mittelpunkt der Kante $\overline{RT}$, E der Mittelpunkt der Kante $\overline{QT}$ und F der Mittelpunkt der Kante $\overline{RS}$. Man zeige, dass es einen Punkt gibt, in dem sich die drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ schneiden.

Hinweis: Ein Tetraeder ist ein Körper, der von genau vier Dreiecken begrenzt wird.

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

45. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12/13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451334

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichungen

$$x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} < \sqrt{x^2+1} < x + \frac{1}{2x} \tag{1}$$

gelten.

451335

Man beweise, dass für jede nichtnegative ganze Zahl n die Zahl

$$z_n = 100^{n+2} + 101^{2n+1}$$

a) durch 7,
b) durch 10101

teilbar ist.

451336

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreis k. Es sei t die Tangente an k im Punkt C. Die Tangenten an k in den Punkten A und B schneiden die Tangente t in den Punkten M beziehungsweise N und der Fußpunkt des Lotes von C auf $\overline{AB}$ sei mit P bezeichnet. Man beweise, dass die Strecke $\overline{CP}$ den Winkel $\sphericalangle NPM$ halbiert.

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451341

Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die

$$z_n = \underbrace{1\,0\,1\ldots1\,0\,1}_{2n+1\text{ Ziffern}}$$

Primzahl ist.

451342

Fünf Punkte liegen auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1. Mit $a_{\min}$ werde der kleinste Abstand (geradlinig im Raum gemessen) zweier dieser Punkte bezeichnet. Was ist bei allen möglichen Anordnungen der Punkte auf der Kugeloberfläche der größtmögliche Wert, den $a_{\min}$ annehmen kann?

451343

Man untersuche, für welche positiven ganzen Zahlen n es möglich ist, die Punkte $1, 2, 3, \ldots, 2n$ der Zahlengeraden so mit n Farben zu färben, dass jede Farbe genau zweimal vorkommt und jede positive ganze Zahl von 1 bis n genau einmal als Abstand gleichfarbiger Punkte auftritt.

45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451344

Im Inneren eines Dreiecks ABC liege ein Punkt D derart, dass sowohl $|AC| - |AD| \geq 1$ als auch $|BC| - |BD| \geq 1$ gilt. Man beweise, dass dann für jeden Punkt E der Strecke $\overline{AB}$ gilt

$$|EC| - |ED| \geq 1.$$

451345

Eine von null verschiedene reelle Zahl x erfülle die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a, b und c ganze Zahlen mit $|a| + |b| + |c| > 1$ seien. Man zeige, dass dann

$$|x| \geq \frac{1}{|a| + |b| + |c| - 1}$$

gilt.

451346

Ein Kreis durch die Ecken B, C eines Dreiecks ABC schneide die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ in den Punkten Y, Z. Es sei P der Schnittpunkt von BZ mit CY und X der Schnittpunkt von AP mit BC.

Sei M der von X verschiedene Schnittpunkt des Umkreises von $\triangle XYZ$ mit BC. Man beweise, dass M Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist.