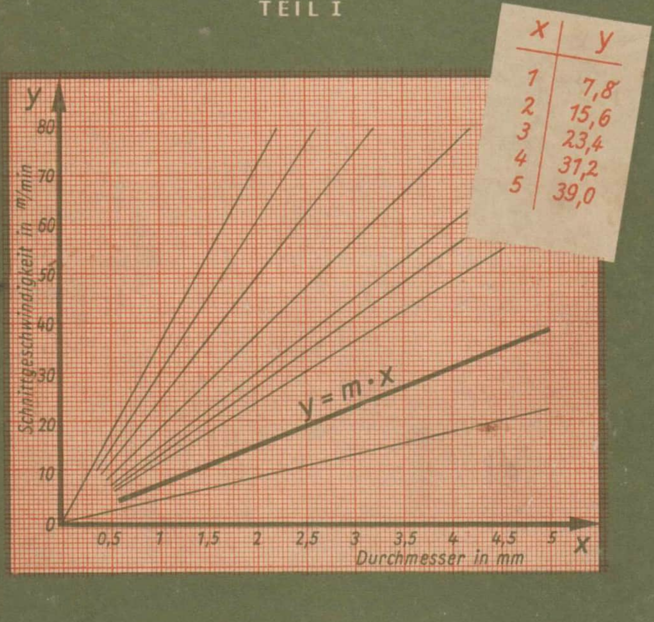
LEHR- UND FACHBÜCHER FÜR DIE BERUFSAUSBILDUNG

MATHEMATIK

FÜR BERUFSSCHULEN

TEIL I



x	y
1	7,8
2	15,6
3	23,4
4	31,2
5	39,0

LEHR- UND FACHBÜCHER FÜR DIE BERUFSAUSBILDUNG

MATHEMATIK
FÜR BERUFSSCHULEN

TEIL I

AUSGABE 1954

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1960

Das Manuskript dieses Buches schrieb mit Unterstützung der Redaktion
und von Berufsschullehrern Erich Weis, Leipzig

Berater:
Dr. W. Lange, Dresden
Karl-Heinz Höhner, Hennigsdorf
Heinz Graff, Berlin
Ernst-Heinrich Berwig, Berlin

Durchgesehener Nachdruck der achten, bearbeiteten Auflage

Typographie und Umschlaggestaltung: Graphische Abteilung des Verlages
Redaktionsschluß: 28. 12. 1959

ES 19 B 2 Bestell-Nr. 420 40-9 · Lizenz Nr. 203 · 1000/60 (DN)
Satz: B. G. Teubner, Leipzig III/18/154
Druck: Leipziger Volkszeitung III/18/138

VORWORT ZUR 9. AUFLAGE

Die Mathematik ist für die Fachausbildung der meisten Berufe eine wichtige Grundlage. Nur wer die in seinem Beruf vorkommenden Berechnungen selbst ausführen, wer mit wichtigen Formeln sicher umgehen und wer das in der Mathematik geschulte logische Denken in der Praxis anwenden kann, ist in der Lage, an der Weiterentwicklung seiner Berufsarbeit und damit am Aufbau des Sozialismus aktiv mitzuarbeiten.

Die Gliederung dieses Buches wurde in Zusammenarbeit mit dem früheren Staatssekretariat für Berufsausbildung festgelegt und sie ist vor dem im Jahre 1953 verbindlich erklärten Lehrplan „Mathematik“ entstanden. In den Thesen des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands über die sozialistische Entwicklung des Schulwesens in der DDR heißt es in der These 19 u. a.: *„Für den sozialistischen Aufbau sind Mathematik und Naturwissenschaften von großer Bedeutung. Die überwiegende Mehrzahl der Berufe erfordert eine gründliche mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung. Es ist deshalb notwendig, daß in der sozialistischen Schule der Umfang und die Qualität mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts erhöht und zugleich in allen diesen Fächern die Grundlagen der wissenschaftlichen Weltanschauung vermittelt werden.“*

Die neue zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule wird einen starken Einfluß auf die Grundsätze und Lehrpläne der Berufsausbildung nehmen. Mit der Herausgabe der 8. bearbeiteten Auflage, in der Fehler beseitigt sind und neues Aufgabenmaterial hinzugekommen ist, so lange zu warten, bis endgültige Lehrpläne im Hinblick dieser entscheidenden Veränderungen im Schulwesen der DDR vorliegen, wäre verfehlt gewesen. Man muß dann zu einem späteren Zeitpunkt über den Inhalt und den Umfang dieses Buches diskutieren und festlegen, was in ihm, entsprechend den neuen schulischen Gegebenheiten, zu verändern ist. Solange sollte der Mathematiklehrer dieses Lehrbuch nach dem Entwicklungsstand der einzelnen Berufsschulklassen unterschiedlich benutzen. Während in der einen Klasse nur die einfachsten Aufgaben behandelt werden können, wird es in anderen Klassen möglich sein, auch schwierigere Aufgaben zu lösen; dabei muß vermieden werden, das Gedächtnis mit auswendig gelernten Rechenvorschriften zu belasten. Vielmehr sollen sichere Grundlagen im mathematischen Wissen geschaffen werden, die zu wirklichem Können führen.

Übungsaufgaben sind jeweils nach größeren Abschnitten zusammengefaßt und, soweit es möglich war, nach Schwierigkeitsgraden unterteilt.

Der vorgesehene Teil II der „Mathematik für Berufsschulen“ ist unter dem Titel „Mathematik für junge Facharbeiter“ erschienen, und er ist ebenfalls für den Gebrauch an den Berufsschulen gedacht. Beide Bücher sind für das Selbststudium und für die Erwachsenenqualifizierung geeignet.

Die Verlagsredaktion

INHALTSVERZEICHNIS

I. Arithmetik und Algebra

II. Geometrie

I.

Arithmetik und Algebra

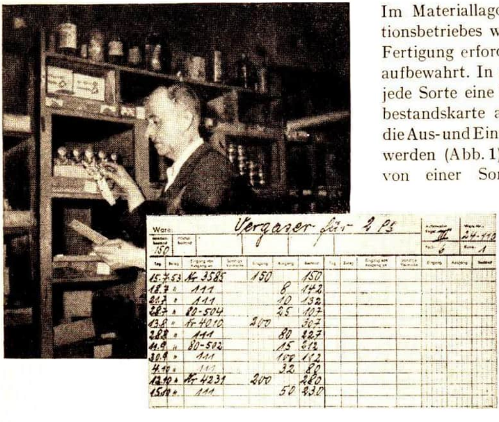
Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen (*arithmos* griech. „Zahl"). Aus dem dringenden Bedürfnis der Menschen heraus, gleichartige Dinge abzuzählen, wurde bereits in vorgeschichtlicher Zeit der Zahlenbegriff gebildet. Die immer komplizierter werdende Tätigkeit ließ den Zahlenbegriff erweitern und gleichzeitig Rechenregeln finden, nach denen schnell und sicher gerechnet werden kann. Das Wort Algebra stammt aus dem Arabischen (*al dschebr* bedeutet Ergänzung, Verbindung getrennter Teile); es diente ursprünglich als Bezeichnung der Lehre von den Gleichungen und wird in diesem Buch auch so verwendet.

A. WIEDERHOLUNG DES GRUNDWISSENS

1. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen

a) Zählen als Grundlage des Rechnens

Im Materiallager eines Produktionsbetriebes werden die für die Fertigung erforderlichen Vorräte aufbewahrt. In der Kartei ist für jede Sorte eine besondere Lagerbestandskarte angelegt, auf der die Aus- und Eingänge eingetragen werden (Abb. 1). Die Menge der von einer Sorte vorhandenen



Ware: Vergaser für 2 PS

III | 24-110 | 6 | 1 | 150

Tag	Beleg	Eingang von Ausgang an	Sonstige Vermerke	Eingang	Ausgang	Bestand
15.7.53		Nr 3585		150		150
18.7	"	111			8	142
21.7	"	111			10	132
28.7	"	80-504			25	107
13.8	"	Nr 4010		200		307
28.8	"	111			80	227
11.9	"	80-502			15	212
30.9	"	111			100	112
4.10	"	111			32	80
12.10	"	Nr 4231		200		280
15.10	"	111			50	230

Abb. 1. Gewissenhaft und sorgsam muß mit dem Volkseigentum umgegangen werden! Nur eine gut geführte Lagerkartei läßt jederzeit erkennen, wieviel Stück von der gelagerten Ware im Augenblick vorhanden sind.

Vertauschbarkeit der Summanden

Berechnet man

$$25 + 13 + 5$$
$$\text{und}\quad 25 + \ 5 + 13,$$

so zeigt sich, daß beide Summen, die nur durch die Reihenfolge der Summanden voneinander verschieden sind, den Wert 43 haben. Allgemein gilt:

Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig; die Summanden sind untereinander vertauschbar.

Durch sinnvolles Anwenden dieses Gesetzes kann man das Addieren vereinfachen. In unserem Beispiel ist es einfacher, die Summanden in der zweiten Reihenfolge zu addieren, weil sich die Einer der beiden ersten Glieder zu 10 ergänzen.

Beim Addieren ist diejenige Zahl zu bestimmen, die so viele Einheiten enthält wie alle Summanden zusammen.

Subtrahieren

Wird von einem Bankguthaben ein Betrag abgehoben, so muß der Buchhalter subtrahieren.

altes Guthaben		abgehobener Betrag		neues Guthaben
1850 DM		350 DM		1500 DM
1850	—	**350**	=	**1500**
Minuend	**minus**	**Subtrahend**	**gleich**	**Wert der Differenz**
	Differenz			

Die Zahlen 1850 und 350 werden ebenfalls Glieder genannt; 1850 ist der **Minuend**[1]), 350 der **Subtrahend**[2]). 1850 — 350 ist eine **Differenz**, deren Wert 1500 ist.

Die Subtraktion kann als die der Addition entgegengesetzte Rechenart bezeichnet werden:

Wird von 1850 die Zahl 350 subtrahiert, so ergibt sich 1500. Wird zu 1500 die Zahl 350 addiert, so ergibt sich wieder 1850. Die Addition einer Zahl wird durch die Subtraktion der gleichen Zahl aufgehoben. Addition und Subtraktion werden deshalb *entgegengesetzte Rechenarten* genannt.

Beim Subtrahieren ist diejenige Zahl zu bestimmen, die man zum Subtrahenden addieren muß, um den Minuenden zu erhalten.

Multiplizieren

Die Multiplikation kann als abgekürzte Form der Addition gleicher Summanden angesehen werden. In der Aufgabe $6 + 6 + 6 + 6$ sind die vier gleichen Summanden 6 zu addieren. Abgekürzt schreibt man dafür $4 \cdot 6$.

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \cdot 6$$

Zu demselben Wert kommt man, wenn man die sechs gleichen Summanden 4 addiert. Man schreibt dann

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 6 \cdot 4.$$

---

[1] lat. *minuendus numerus*, ,die zu vermindernde Zahl!''.

[2] lat. *subtrahendus numerus* ,,die abzuziehende Zahl''.

In $4 \cdot 6$ bzw. $6 \cdot 4$ ist die erste Zahl der **Multiplikator**[1], die zweite der **Multiplikand**[2]. Der Ausdruck

$$4 \cdot 6 \text{ bzw. } 6 \cdot 4$$

ist das **Produkt**[3], sein Wert ist in beiden Fällen 24.

Multiplikator und Multiplikand erhalten die gemeinsame Bezeichnung **Faktoren.** Faktoren eines Produktes können vertauscht werden, ohne daß sich der Wert des Produktes ändert.

Sollen für 4 Laboranten einer chemischen Fabrik je 6 Erlenmeyerkolben ausgegeben werden, so findet man die Gesamtzahl 24 der benötigten Geräte, indem man multipliziert.

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \mathbf{4} & \cdot & \mathbf{6} \\ \textbf{Faktor} & \textbf{mal} & \textbf{Faktor} \\ \textbf{(Multiplikator)} & & \textbf{(Multiplikand)} \end{array}}_{\textbf{Produkt}} \begin{array}{cc} = & \mathbf{24} \\ \textbf{gleich} & \textbf{Wert des Produkts} \\ & \end{array}$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig, die Faktoren sind untereinander vertauschbar.

Ein Produkt kann auch aus mehr als zwei Faktoren bestehen:

$$4 \cdot 7 \cdot 5 = 28 \cdot 5 = 140.$$

Auch bei Vorhandensein von mehr als zwei Faktoren ist der Wert des Produktes von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig. Man wählt die Reihenfolge so, daß sich die Berechnung vereinfacht; z. B. wird die Aufgabe $4 \cdot 7 \cdot 5$ einfacher in der Reihenfolge $4 \cdot 5 \cdot 7$ berechnet, weil das Produkt der beiden ersten Faktoren jetzt ein Vielfaches von 10 ergibt.

$$4 \cdot 7 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot 7 = 20 \cdot 7 = 140$$

Beim Multiplizieren zweier Zahlen ist die eine so oft als Summand zu setzen, wie die andere Einheiten hat.

Potenzschreibweise

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren wird in abgekürzter Form geschrieben und **Potenz** genannt.

Man schreibt den sich wiederholenden Faktor nur einmal und gibt durch eine kleine hochgestellte Zahl an, wievielmal er als Faktor stehen soll.

Der sich wiederholende Faktor ist die Grundzahl oder **Basis.** Die hochgestellte Zahl, die die Anzahl der Faktoren angibt, wird Hochzahl oder **Exponent**[4] genannt.

$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{3}}$ **Exponent** **Basis** (lies: zwei hoch drei, zwei zur dritten Potenz oder dritte Potenz von zwei)

$3 \cdot 3 = 3^{2}$ (lies: drei hoch zwei, zweite Potenz von drei oder drei Quadrat)

Der Bedeutung der Kurzformen entsprechend ist $2^{3} = 8$ und $3^{2} = 9$.

---

[1] lat. *multiplicator* ,,Vervielfacher''.

[2] lat. *multiplicandus numerus* ,,die zu vervielfachende Zahl''.

[3] lat. *producere* ,,hervorbringen''.

[4] lat. *exponere* ,,herausstellen''.

Wurzelschreibweise

Umgekehrt bezeichnet man die Zahl, deren dritte Potenz 8 ergibt, durch $\sqrt[3]{8}$.

Wurzelexponent $\sqrt[3]{8}$ (lies: dritte Wurzel aus acht)

Basis oder Radikand

Man erhält $\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ebenso bezeichnet $\sqrt[2]{9}$ die Zahl 3, da deren zweite Potenz 9 gibt. Man läßt die 2 auch weg und schreibt

$\sqrt{9}$ (lies: zweite Wurzel aus 9 oder Quadratwurzel aus 9).

$\sqrt{9} = 3$; denn $3 \cdot 3 = 9$.

Dividieren

Das Dividieren zweier Zahlen kann als abgekürzte Form des Subtrahierens gleicher Subtrahenden betrachtet werden. Danach ist bei der Aufgabe $20 : 4$ zu bestimmen, wievielmal die Zahl 4 von der Zahl 20 subtrahiert werden kann oder, wie man auch sagt, wievielmal die Zahl 4 in der Zahl 20 enthalten ist.

$$20 - \underbrace{4 - 4 - 4 - 4 - 4}_{}$$

5mal läßt sich die 4 von der 20 abziehen.

Man kann die Division auch als Umkehrung der Multiplikation auffassen. In der Aufgabe $20 : 4$ ist die Zahl gesucht, mit der man 4 multiplizieren muß, um 20 zu erhalten. Die gesuchte Zahl ist 5. Die Zahl 20 ist der **Dividend**[1], 4 der **Divisor**[2] oder Teiler, der Ausdruck $20 : 4$ der **Quotient**[3] und 5 sein Wert.

Sollen z. B. von 20 Arbeitern Brigaden zu je 4 Mann gebildet werden, so ergibt die Division $20 : 4$, daß 5 Brigaden aufgestellt werden können.

$$20 : 4 = \mathbf{5}, \quad \text{denn} \quad \mathbf{5} \cdot 4 = 20$$

$$\underbrace{\underset{\textbf{Dividend}}{\mathbf{20}}\ \ \underset{\textbf{durch}}{\mathbf{:}}\ \ \underset{\textbf{Divisor}}{\mathbf{4}}}_{\textbf{Quotient}}\ \ \underset{\textbf{gleich}}{\mathbf{=}}\ \ \underset{\textbf{Wert des Quotienten}}{\mathbf{5}}$$

Beim Dividieren ist diejenige Zahl zu bestimmen, mit der der Divisor multipliziert werden muß, damit sich der Dividend ergibt.

c) Zusammengesetzte Zahlenausdrücke

Einen Ausdruck wie $10 + 2 \cdot 3 - 15 : 5$ nennt man **zusammengesetzten Zahlenausdruck.** Er besteht aus einzelnen Gliedern, die durch Rechenzeichen verknüpft sind.

---

[1] lat. *dividendus numerus* „die zu teilende Zahl".

[2] lat. *divisor* „der Teiler".

[3] lat. *quotiens* „wie oft".

Reihenfolge der Rechenarten

Stehen zwischen benachbarten Gliedern an einer Stelle Additions-(Subtraktions)zeichen, an anderen Multiplikations-(Divisions)zeichen, so gilt für die Reihenfolge, in der die einzelnen Rechenoperationen auszuführen sind, die folgende Vorschrift:

Das Multiplizieren und Dividieren ist zuerst auszuführen, danach das Addieren und Subtrahieren unter Verwendung der berechneten Produkt- und Quotientwerte, wenn nicht ausdrücklich eine andere Reihenfolge vorgeschrieben wird.

Z. B. ist in der Aufgabe:

$$8 + 3 \cdot 4$$

zunächst das Produkt $3 \cdot 4 = 12$ zu berechnen, sodann die Summe $8 + 12 = 20$ zu bilden; in der Aufgabe:

$$8 + 12 : 4$$

ist zunächst der Quotient $12 : 4 = 3$ zu berechnen, sodann die Summe $8 + 3 = 11$ zu bilden.

Es gilt die Regel: Sind die Glieder eines Zahlenausdrucks außer durch Additions- und Subtraktionszeichen auch noch durch Multiplikations- und Divisionszeichen verknüpft, so müssen erst die Produkt- und Quotientwerte errechnet werden, ehe die Additionen und Subtraktionen ausgeführt werden dürfen.

Multiplikation und Division gehen der Addition und Subtraktion voran.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 12 + \underbrace{8 : 4} + 9 - \underbrace{2 \cdot 3} \\ = & 12 + \quad 2 \quad + 9 - \quad 6 \\ = & \underline{\underline{17.}} \end{aligned}$$

Ist keine Rechenreihenfolge vorgeschrieben, so werden Rechenvorteile ausgenutzt. Z B. berechnet man $187 + 225 + 13$ in der Reihenfolge $187 + 13 + 225$ und $75 \cdot 13 : 25$ in der Reihenfolge $75 : 25 \cdot 13$.

Klammern

Klammern, die Glieder eines Zahlenausdrucks zusammenschließen, bringen besondere Vorschriften für die Reihenfolge der Berechnung zum Ausdruck. Die in Klammern eingeschlossenen Glieder sind zunächst zu berechnen. Ihre Werte werden dann an Stelle der Klammerausdrücke für die weitere Berechnung des Zahlenausdrucks verwendet. Fügt man in dem obigen Beispiel Klammern ein, so ändert sich das Ergebnis. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} & \underbrace{(12 + 8)} : 4 + \underbrace{(9 - 2)} \cdot 3 \\ = & \underbrace{20 \quad : 4} + \underbrace{7 \quad \cdot \quad 3} \\ = & \quad 5 \quad + \quad 21 \\ = & \underline{\underline{26.}} \end{aligned}$$

Dagegen ergibt

$$\begin{aligned} & (12 + \underbrace{8:4} + 9 - 2)\cdot 3 \\ = & \underbrace{(12 + \;2\; + 9 - 2)}\cdot 3 \\ = & \quad 21 \cdot 3 \\ = & \underline{\underline{63.}} \end{aligned}$$

Man erhält für

$$\begin{aligned} & \underbrace{(15 + 10)} : 5 + 3 \cdot \underbrace{(5 - 1)} \\ = & \underbrace{25 : 5} + \underbrace{3 \cdot 4} \\ = & \quad 5 + 12 \\ = & \underline{\underline{17.}} \end{aligned}$$

Läßt man die Klammern weg, so ergibt sich nach der Regel über die Reihenfolge der Rechenarten

$$\begin{aligned} & 15 + \underbrace{10:5} + \underbrace{3\cdot 5} - 1 \\ = & 15 + \;2\; + \;15\; - 1 \\ = & \underline{\underline{31.}} \end{aligned}$$

AUFGABEN

1. Bei der Inventur des Lagerbestandes wird eine Brigade von 5 Lagerarbeitern zum Zählen eingesetzt. Die Zählergebnisse der einzelnen Lagerarbeiter sind folgende:

Schrauben Norm	Lagerarbeiter					Schrauben-bestand
	1	2	3	4	5	
M 1,2	48 736	589	2 706	50 009	12 060	?
M 1,7	209	38 072	54 022	8 672	7 047	?
M 2	1 234	567	89	10 111	21 314	?
M 2,6	15 087	26 109	7 321	67 089	806	?
M 3	8 417	5 020	31 248	876	30 412	?
Summe	?	?	?	?	?	?

a) Wie groß ist der Schraubenbestand der einzelnen Sorten?

b) Wieviel Schrauben insgesamt wurden von jedem einzelnen Lagerarbeiter gezählt?

c) Wieviel Schrauben, alle Sorten insgesamt, sind am Lager?

2. In einem Laboratorium werden an 5 Arbeitsplätzen folgende Glasgeräte benötigt:

Arbeitsplatz Nr.	3	4	7	9	11
Reagenzgläser, normal	12	85	18	16	125
Reagenzgläser, schwer schmelzbar	150	20	20	170	220
Bechergläser 250 ml	18	23	17	28	19
Bechergläser 500 ml	15	—	25	30	6
Büretten	7	4	2	6	9

a) Wieviel Stück werden von jeder Sorte benötigt?

b) Wieviel Glasgeräte werden insgesamt benötigt?

3. In einem Speicher zeigen die Mengen der einzelnen Getreidesorten innerhalb eines Monats folgende Veränderungen (Mengenangaben in Tonnen; „+“ bedeutet Eingang, „—“ bedeutet Ausgang):

Roggen $375 - 236 + 165 - 175 + 336$
Weizen $453 - 178 + 122 - 253 + 378$
Gerste $719 + 687 + 181 - 587 - 908$

Wieviel Tonnen weist der Speicher von jeder Getreidesorte am Monatsende auf?

4. Berechne

a) $5 \cdot 7 \cdot 14$
b) $25 \cdot 19 \cdot 4$
c) $18 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 3$
d) $12 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 21$
e) $50 : 13 : 5 \cdot 26$
f) $135 \cdot 4 : 12 : 9$
g) $175 : 9 \cdot 18 : 25$
h) $760 \cdot 23 : 92 : 19$

5. Eine Maschinen-Traktoren-Station bestellt folgende Feilen:

3 Dtz. Flachfeilen 300 mm, Hieb-Nr. 0, Preis je Dtz. 38,— DM
2 „ „ 300 „ „ 1 „ „ „ 41,— „
4 „ „ 300 „ „ 2 „ „ „ 47,— „
5 „ „ 300 „ „ 3 „ „ „ 52,— „

Es ist der Gesamtpreis der Feilen zu berechnen.

6. Berechne

a) $1205 + 7560 \cdot 45 - 9828 : 378$
b) $(1205 + 7560) \cdot 45 - 9828 : 378$
c) $1205 + (7560 \cdot 45 - 9828) : 378$
d) $1205 + 7560 \cdot (45 - 9828 : 378)$
e) $(1205 + 7560) \cdot (45 - 9828 : 378)$
f) $1502 + 7650 \cdot 43 - 9288 : 387$
g) $(1502 + 7650) \cdot 43 - 9288 : 387$
h) $1502 + (7650 \cdot 43 - 9288) : 387$
i) $1502 + 7650 \cdot (43 - 9288 : 387)$
k) $(1502 + 7650) \cdot (43 - 9288 : 387)$
l) $1768\,536 : 231 - 31 \cdot 75 + 35 - 1083 : 57 + 43 \cdot 76 - 46$
m) $(1768\,536 : 231 - 31) \cdot 75 + 35 - (1083 : 57 + 43) \cdot 76 - 46$
n) $1768\,536 : 231 - 31 \cdot (75 + 35) - (1083 : 57 + 43) \cdot (76 - 46)$
o) $(1768\,536 : 231 - 31) \cdot (75 + 35) - (1083 : 57 + 43) \cdot (76 - 46)$

7. Von den in Thüringen anläßlich der demokratischen Bodenreform enteigneten Flächen erhielten Land: 6157 Landarbeiter und landlose Bauern 38 529 ha, 10 319 landarme Bauern 31 992 ha, 10 688 Kleinpächter 6629 ha, 2256 Umsiedler 17 588 ha, 7876 Industriearbeiter und Angestellte 5870 ha, 695 Landgemeinden 25 444 ha, 34 Lehr- und Zuchtgüter 17 044 ha und das Land Thüringen 28 240 ha.

a) Wieviel Hektar Land wurden aufgeteilt?
b) Wieviel Hektar Land wurden auf Einzelbetriebe aufgeteilt?
c) Wieviel Einzelbetriebe bekamen Land?

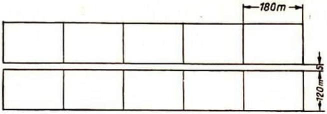
8. Die Schafzucht bringt Wolle, Fleisch, Fett, Milch und hochwertigen Dünger.
In einer Gemeinde mit 50 landwirtschaftlichen Betrieben verpflichten sich 20 Bauern, 1 Schaf mehr zu halten, 30 Bauern verpflichten sich, 2 Schafe mehr als bisher zu halten.
Wieviel Kilogramm Rohwolle werden dadurch in dieser Gemeinde jährlich mehr als bisher erzeugt, wenn weißköpfige Fleischschafe mit einer Jahreswolleleistung von 5 kg gehalten werden?

9. Nach folgender Skizze soll eine Weide für Rinder angelegt werden:

a) Wieviel Meter Weidedraht werden benötigt, wenn alle Zäune dreifach gespannt werden?
b) Wieviel Pfosten mit 12 cm Durchmesser braucht man bei 4 Meter Abstand?

c) Wieviel Meter Spezialdraht werden für dieselbe Anlage benötigt, wenn bei Verwendung des Elektrozaunes der Draht an den Außenzäunen doppelt und an den Trennzäunen einfach gespannt wird?

d) Wieviel Pfähle mit 6 bis 8 cm Durchmesser braucht man beim Elektrozaun, wenn nur alle 15 Meter ein Pfahl gesetzt wird?



10. Ein Dampfer braucht für die Bergfahrt auf einer 48 km langen Strecke 4 h und für die Talfahrt 3 h. Welche Geschwindigkeit hat der Dampfer und welche der Strom?

11. Ein im VEB Elbtalwerk Heidenau entwickelter Synchrongenerator DGB 17/8a hat eine Antriebsdrehzahl von 750/min. Der Generator gibt eine Spannung mit einer Frequenz von 50 Hz ab. Wieviel Polpaare hat der Generator? $\left(\text{Polzahl} = \frac{f \cdot 60 \cdot 2}{n}\right)$

12. Die Braunkohle ist zur Zeit die größte Energiequelle der DDR. Die sicheren und die wahrscheinlichen Braunkohlenvorräte betragen ungefähr 50 Milliarden t. In etwa wieviel Jahren würde dieser Vorrat erschöpft sein, wenn durch technische Neuerungen und Verbesserung der Arbeitsorganisation eine jährliche Fördermenge von 400 Millionen t erreicht ist?

13. a) Die Produkte $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $5 \cdot 5 \cdot 5$; $7 \cdot 7$; $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ sind als Potenzen zu schreiben.

b) Welche Werte haben die Potenzen
2^5; 5^2; 3^3; 10^2; 2^{10}; 3^4; 4^3; 10^5?

c) Die Zahlenwerte
1000; 10000; 1000000; 1 Milliarde; 1 Billion
sind als Potenzen mit der Basis 10 zu schreiben.

d) Welche Werte haben die zweiten Potenzen der Zahlen von 1 bis 20?

e) Welche Potenz mit der Basis 2 ergibt den Wert 16?

f) Welche Potenz mit dem Exponenten 2 ergibt den Wert 16?

14. a) Die folgenden aus Tabellen entnommenen Angaben sind als Zahlen des dekadischen Zahlensystems zu schreiben.

$3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ (Lichtgeschwindigkeit),

$2 \cdot 10^6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ (Elastizitätsmodul des Stahls),

$27 \cdot 10^{18}$ (Anzahl der in einem Kubikzentimeter enthaltenen Gasmoleküle).

b) Berechne
$5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$;
$3^2 + 4^2$;
$3^2 - 2^3$;
$5 \cdot 2^5 + 2 \cdot 5^2$?

15. Was ergibt

a) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt[4]{81}$.

b) $2 \cdot \sqrt{9}$; $3 \cdot \sqrt[3]{8}$; $4 \cdot \sqrt{25}$; $5 \cdot \sqrt[3]{27}$; $\sqrt{100} \cdot \sqrt[3]{8}$; $\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt{36}$; $\sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{216}$.

16. a) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt $25\,\text{cm}^2$; $169\,\text{cm}^2$; $900\,\text{cm}^2$; $16\,\text{m}^2$; $10000\,\text{m}^2$; $62500\,\text{m}^2$ beträgt?

b) Was ergibt

$\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $\sqrt[3]{27}-\sqrt[4]{16}$; $4\cdot\sqrt[4]{256}-5\cdot\sqrt[5]{243}$.

17. Die Geschwindigkeit, mit der ein Stein aufschlägt, der die Höhe h durchfallen hat, wird durch die Formel $v=\sqrt{2\cdot g\cdot h}$ berechnet, wobei g die Fallbeschleunigung bedeutet. Wie groß ist v (in m/s) für $h=45$ m und $g=10\,\text{m/s}^2$?

2. Gemeine Brüche

Die Nennweite von Gasrohren und die Gewindesteigung bei Gewindeverbindungen werden in Zoll (″) gemessen. Der Rohrinstallateur schneidet z. B. auf ein Gasrohr mit dem inneren Durchmesser $\frac{1}{4}$″ ein Gewinde mit der Ganghöhe $\frac{1}{19}$″. Hier treten Rechengrößen auf, die keine ganzen Zahlen sind, sondern *gebrochene Zahlen* oder *Brüche* (Abb. 2).

Gebrochene Zahlen werden also in der Praxis benötigt und sollen deshalb näher untersucht werden.

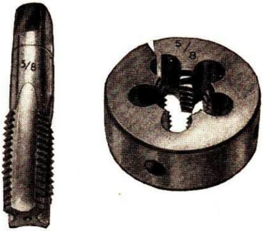


Abb. 2. Der Nenndurchmesser dieser Gewindeschneidwerkzeuge beträgt $\frac{5}{8}$ Zoll.

a) Grundbegriffe

Der Wert des Quotienten zweier natürlicher Zahlen gehört nur dann zur Folge der natürlichen Zahlen, wenn der Divisor im Dividenden aufgeht, z. B. bei 8 : 4. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist das Dividieren im Bereiche der natürlichen Zahlen nicht ausführbar, z. B. bei 7 : 5. Wenn jeder Quotient zweier Zahlen in der Zahlenreihe enthalten sein soll, muß die Folge der natürlichen Zahlen durch neue Zahlen ergänzt werden. Diese neuen Zahlen stellt man folgendermaßen her. Man teilt die Einheit der natürlichen Zahlen, die 1, in so viele gleiche Teile, wie jeweils der Divisor angibt, und nennt jeden einen Bruchteil der Einheit. Der zu dem Divisor 7 gehörende Bruchteil der Einheit ist $\frac{1}{7}$ (gelesen: ein Siebentel). Aus ihm entstehen die neuen Zahlen, indem man für 1 der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen setzt, z. B.

$$\frac{1}{7};\quad \frac{2}{7};\quad \frac{3}{7};\quad \frac{4}{7};\quad \frac{5}{7};\quad \frac{6}{7};\quad \frac{7}{7};\quad \frac{8}{7}\;\ldots$$

Diese neuen Zahlen werden Brüche genannt. Um also die Division stets ausführen zu können, ist man gezwungen, gebrochene Zahlen einzuführen.

Jeder Quotient kann als Bruch geschrieben werden, $3:8=\frac{3}{8}$. Den Dividenden nennt man Zähler, den Divisor Nenner des Bruches. Der Bruchstrich hat dieselbe Bedeutung wie das Divisionszeichen; er ist das Kennzeichen eines *gemeinen Bruches.*

Gemeiner Bruch

$\frac{3}{8}$ **Zähler,** er zählt die Anzahl der Teile (drei)

Nenner, er nennt die Art der Teile (Achtel)

Nenner stehende Faktor 2 ist also weggefallen. Auch bei anderen Brüchen werden zur Vereinfachung der Bruchform Faktoren weggelassen, die dem Zähler und dem Nenner gemeinsam sind.

Der Bruchwert bleibt unverändert, wenn Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert werden.

Der Bruch wird dabei um die sowohl im Zähler als auch im Nenner als Faktor enthaltene Zahl **gekürzt.** Die Zahl wird *Kürzungsfaktor* genannt.

$\boxed{\frac{12}{32} = \frac{12:4}{32:4} = \frac{3}{8}}$ **Kürzen heißt, Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren.**

Erweitern

Beim Wettlaufen ging der beste Läufer $\frac{1}{2}$ Sekunde vor dem zweiten durch das Ziel. Diesem folgte der dritte Läufer $\frac{3}{10}$ Sekunden später.

Das Vergleichen der Zwischenzeiten wird durch die Verwendung gleichnamiger Brüche erleichtert. Sagt man deshalb für $\frac{1}{2}$ Sekunde hier $\frac{5}{10}$ Sekunde, so wird der Unterschied der Zwischenzeiten besonders gut deutlich.

Wie der Bruchwert $\frac{5}{10}$ durch Kürzen mit 5 die Form $\frac{1}{2}$ annimmt, so entsteht aus $\frac{1}{2}$ die Form $\frac{5}{10}$, wenn zugleich Zähler und Nenner mit 5 multipliziert werden.

Bei jedem Bruch verändert sich nur die Form, nicht der Wert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Diese Veränderung der Bruchform nennt man **Erweitern,** die Zahl selbst *Erweiterungsfaktor*.

$\boxed{\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}}$ **Erweitern heißt, Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren. Der Bruchwert bleibt beim Erweitern unverändert.**

Das Erweitern ist stets ausführbar, das Kürzen nur, wenn Zähler und Nenner gleiche Faktoren enthalten.

Auf den Hauptnenner bringen

Ungleichnamige Brüche, deren Werte zu vergleichen sind, werden durch Erweitern gleichnamig gemacht. Sollen z. B. die Brüche

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{11}{15}$$

der Größe nach geordnet werden, so wird zunächst jeder so erweitert, daß alle Brüche denselben Nenner erhalten. Er muß ein gemeinsames Vielfaches der einzelnen Nenner sein, z. B. ihr Produkt $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 15 = 2880$. Da dies jedoch bei der Berechnung im allgemeinen zu unnötig großen Zahlen führt, wählt man das **kleinste gemeinsame Vielfache.** Das ist die kleinste Zahl, in der alle einzelnen Nenner enthalten sind. Sie wird **Hauptnenner** genannt.

Gewöhnlich erhält man den Hauptnenner dadurch, daß man prüft, welches Vielfache des größten Nenners die übrigen Nenner enthält.

Der größte Nenner des Beispiels ist 15, aufeinanderfolgende Vielfache von 15 sind

$$2 \cdot 15 = 30, \quad 3 \cdot 15 = 45, \quad 4 \cdot 15 = 60 \quad \text{usf.};$$

$8 \cdot 15 = 120$ ist das kleinste Vielfache von 15, in dem die einzelnen Nenner des Beispiels aufgehen. Man erhält so 120 als Hauptnenner.

Es ergibt sich

$$\frac{3}{4} \overset{\cdot 30}{\overset{\smile}{=}} \frac{90}{120} \qquad \text{(Erweiterungszahl 30),}$$

$$\frac{5}{6} \overset{\cdot 20}{\overset{\smile}{=}} \frac{100}{120} \qquad \text{(„ 20),}$$

$$\frac{7}{8} \overset{\cdot 15}{\overset{\smile}{=}} \frac{105}{120} \qquad \text{(„ 15),}$$

$$\frac{11}{15} \overset{\cdot 8}{\overset{\smile}{=}} \frac{88}{120} \qquad \text{(„ 8).}$$

Nun lassen sich die gegebenen Brüche der Größe nach ordnen:

$$\frac{11}{15}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{7}{8}.$$

Sind Zahlen gegeben, für die man das kleinste gemeinsame Vielfache nicht unmittelbar erkennt, so geht man folgendermaßen vor.
Die gegebenen Zahlen sind entweder nur durch 1 und durch sich selbst teilbar und heißen dann *Primzahlen*, oder sie sind Vielfache anderer Zahlen und können dann als Produkte von Primzahlen dargestellt, d. h. in Primfaktoren zerlegt werden. Für die Nenner der Brüche $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}$ ergibt das Zerlegen in Primfaktoren

$$4 = 2^2,$$
$$6 = 2 \cdot 3,$$
$$8 = 2^3,$$
$$15 = 3 \cdot 5.$$

In dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner müssen die höchsten Potenzen der in den Nennern auftretenden Primzahlen als Faktoren enthalten sein.
Als kleinstes gemeinsames Vielfaches entsteht

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

c) Rechenregeln

Die folgenden Regeln gelten in gleicher Weise für Rechnungen, die mit Brüchen, und für Rechnungen, die mit ganzen Zahlen ausgeführt werden, wenn man sich letztere als Brüche mit dem Nenner 1 vorstellt (vgl. S. 17, uneigentliche Brüche). Kommen gemischte Zahlen vor, so sind diese in unechte Brüche umzurechnen.

Addieren und Subtrahieren

Die *Summe* oder *Differenz* gleichnamiger Brüche ist ein Bruch mit demselben Nenner, dessen Zähler durch Addieren oder Subtrahieren der einzelnen Zähler gewonnen wird.

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{7}{13}+\frac{5}{13}=\frac{7+5}{13}=\frac{12}{13}\\[4pt] \frac{7}{13}-\frac{5}{13}=\frac{7-5}{13}=\frac{2}{13}\end{array}}$$

Ungleichnamige Brüche als Glieder von Summen oder Differenzen müssen vor dem Addieren oder Subtrahieren gleichnamig gemacht werden, indem man sie in der auf S. 18 f. angegebenen Weise auf den Hauptnenner bringt.

1. *Beispiel:* $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$

Hier geht der kleinere Nenner in dem mit 2 multiplizierten größeren Nenner auf, der Hauptnenner ist also 36.

$$\frac{7}{12}\overset{\cdot 3}{\overset{\smile}{=}}\frac{21}{36},\quad \frac{5}{18}\overset{\cdot 2}{\overset{\smile}{=}}\frac{10}{36}$$

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{18}=\frac{21}{36}+\frac{10}{36}=\underline{\underline{\frac{31}{36}}}$$

2. *Beispiel:* $3+\frac{7}{10}=\frac{3}{1}+\frac{7}{10}=\frac{30}{10}+\frac{7}{10}=\underline{\underline{\frac{37}{10}}}$

Die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch ergibt sich also durch Ausführen der Addition: $3\frac{7}{10}=3+\frac{7}{10}=\frac{37}{10}$.

Multiplizieren

Bei der Multiplikation von Brüchen ist die für das Multiplizieren ganzer Zahlen gegebene Erklärung (vgl. S. 10) verwendbar, wenn der *Multiplikator eine ganze Zahl* ist. Es gilt dann

$$3\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{2+2+2}{7}=\frac{3\cdot 2}{7}=\frac{6}{7}.$$

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man seinen Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält.

Sind nur Brüche die Faktoren eines Produktes, so macht sich eine Erklärung nötig, wie für diesen Fall das Multiplizieren auszuführen ist; sie muß so beschaffen sein, daß sich auf jeden Fall in der Praxis damit etwas anfangen läßt: man berechnet beispielsweise die Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten 5 und 8 Längeneinheiten messen, indem man 5 und 8 miteinander multipliziert; es ergeben sich 40 Flächeneinheiten. Messen die Seiten eines Rechtecks $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ Längeneinheiten, dann soll sich natürlich die Fläche eines Rechtecks in gleicher Weise dadurch ergeben, daß man $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ miteinander multipliziert.

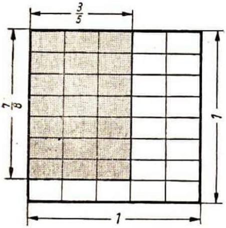


Abb. 3. Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird durch das Produkt der beiden Seiten bestimmt.

Abb. 3 zeigt ein Quadrat mit einer Längeneinheit als Seite. Es umschließt demnach eine Flächeneinheit.

Die waagerechte Quadratseite ist in 5, die senkrechte in 8 gleiche Abschnitte geteilt. Die durch die Teilpunkte gehenden Waagerechten und Senkrechten zerlegen das Quadrat in 40 deckungsgleiche Rechtecke. Jedes dieser Rechtecke ist demnach $\frac{1}{40}$ des Quadrats und hat $\frac{1}{40}$ Flächeneinheit als Flächeninhalt.

Die graue Rechtecksfläche mit den Seiten $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$ enthält 21 Rechtecke mit je $\frac{1}{40}$ Flächeneinheit Inhalt, hat also $\frac{21}{40}$ Flächeneinheiten Inhalt.

Da $3 \cdot 7 = 21$, $5 \cdot 8 = 40$ ist, gilt

$$\boxed{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}}$$

Allgemein gilt:

Das Produkt gemeiner Brüche ist ein neuer Bruch. Sein Zähler wird gewonnen, indem man alle Zähler multipliziert, sein Nenner, indem man alle Nenner multipliziert.

1. Beispiel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{10}{21}}}$$

2. Beispiel (Ganze Zahl als Bruch mit Nenner 1 schreiben!):

$$\frac{5}{17} \cdot 3 = \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 3}{17 \cdot 1} = \underline{\underline{\frac{15}{17}}}$$

Multiplizieren eines Bruches mit seinem Kehrwert

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3} = \underline{\underline{1}}$$

$$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \underline{\underline{1}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{1}}$$

Wir erkennen:

Wird ein Bruch mit seinem Kehrwert multipliziert, so ergibt sich 1.

Dividieren

Das Dividieren mit Brüchen kann auf das Dividieren mit ganzen Zahlen zurückgeführt werden.

Beispiel: $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$ ist zu berechnen.

Man erweitert diesen Quotienten mit dem Produkt $5 \cdot 8 = 40$ aus dem Nenner 5 des Dividenden $\frac{3}{5}$ und dem Nenner 8 des Divisors $\frac{7}{8}$.

Man erhält, weil sich beim Erweitern der Wert des Quotienten nicht ändert,

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 40}{5} : \frac{7 \cdot 40}{8} = (3 \cdot 8) : (7 \cdot 5) = \frac{24}{35},$$

also auch

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{24}{35}.$$

4. **a)** $\frac{16}{19} - \frac{9}{19}$ **b)** $\frac{693}{787} - \frac{487}{787}$ **c)** $1 - \frac{14}{15}$ **d)** $2 - \frac{5}{13}$

5. **a)** $6\frac{3}{7} - 4\frac{1}{7}$ **b)** $15\frac{1}{11} - \frac{7}{11}$ **c)** $6\frac{7}{13} - 4\frac{9}{13}$ **d)** $8\frac{5}{17} - 7\frac{12}{17}$

6. Auf unebenem Gelände waren die Ziegel unsachgemäß gestapelt. Beim Abtransport der Ziegel zum Arbeitsplatz der Maurer stürzten einige Stapel um. Durch diese Stockung im Materialnachschub erreichte die Maurerbrigade nur $\frac{6}{7}$ ihrer sonstigen Tagesleistung (11 900 Ziegel). Wieviel Ziegel wurden an diesem Tage verlegt?

7. **a)** $\frac{4}{5} + \frac{1}{10} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} + \frac{11}{24}$ **b)** $\frac{3}{7} + \frac{8}{15} + \frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{5}{6} + \frac{19}{30}$

c) $\frac{5}{11} + \frac{5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{13}{15} + \frac{19}{30} + \frac{9}{10}$ **d)** $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} + \frac{5}{9} + \frac{17}{36} + \frac{11}{18} + \frac{5}{12}$

8. Ein Personenkraftwagen verbrauchte vor der Generalüberholung $14\frac{1}{2}$ l Kraftstoff je 100 km Fahrt. Danach verbraucht er nur noch $11\frac{3}{4}$ l je 100 km Fahrt.

Wieviel Liter Kraftstoff werden durch die Generalüberholung für je 100 km eingespart?

9. **a)** $\frac{5}{8} - \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3} - \frac{2}{9}$ **c)** $\frac{11}{12} - \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{3}{5} - \frac{4}{15}$

10. **a)** $\frac{5}{8} - \frac{8}{15}$ **b)** $\frac{7}{12} - \frac{7}{18}$ **c)** $\frac{1}{15} - \frac{1}{16}$ **d)** $\frac{20}{39} - \frac{33}{65}$

11. Die Leistung, die ein Elektromotor aufnimmt, beträgt $1\frac{3}{4}$ kW. Wieviel Kilowattstunden verbraucht der Motor in einer Woche (6 Tage), wenn er täglich 8 Stunden läuft?

12. **a)** $\frac{17}{18} \cdot 13$ **b)** $\frac{15}{16} \cdot 15$ **c)** $37 \cdot \frac{11}{19}$ **d)** $75 \cdot \frac{25}{26}$

13. **a)** $\frac{23}{36} \cdot 48$ **b)** $\frac{19}{45} \cdot 54$ **c)** $72 \cdot \frac{31}{32}$ **d)** $85 \cdot \frac{35}{51}$

14. Die stündliche Produktion eines Schraubenautomaten beträgt $1\frac{1}{4}$ kg Muttern M 3. Wie groß ist die Produktion in $8\frac{1}{2}$ Stunden?

15. **a)** $\frac{9}{17} \cdot \frac{7}{11}$ **b)** $\frac{15}{23} \cdot \frac{12}{13}$ **c)** $\frac{18}{35} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{11}$ **d)** $\frac{5}{7} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{9}{14}$

16. **a)** $\frac{77}{85} \cdot \frac{51}{55}$ **b)** $\frac{35}{54} \cdot \frac{45}{56}$ **c)** $\frac{32}{39} \cdot \frac{65}{72} \cdot \frac{27}{80}$ **d)** $\frac{7}{12} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{14}$

17. Eine elektrische Handbohrmaschine verbraucht in 3 Stunden $2\frac{1}{4}$ kWh. Wie groß ist ihre Leistung (Energieverbrauch in 1 Stunde)?

18. Für die Anfertigung von 25 Flügelschrauben wurden $6\frac{1}{4}$ Stunden benötigt. Wieviel Zeit war für die Fertigung einer Flügelschraube erforderlich?

19. **a)** $\frac{90}{91} : 45$ **b)** $\frac{54}{55} : 18$ **c)** $\frac{68}{71} : 17$ **d)** $\frac{91}{97} : 13$

20. **a)** $\frac{3}{7} : 14$ **b)** $\frac{1}{24} : 6$ **c)** $\frac{12}{13} : 13$ **d)** $\frac{7}{16} : 8$

21. **a)** $65 : \frac{39}{41}$ **b)** $95 : \frac{76}{85}$ **c)** $56 : 3\frac{15}{37}$ **d)** $72 : 5\frac{13}{19}$

22. **a)** $\frac{28}{37} : \frac{29}{31}$ **b)** $\frac{21}{26} : \frac{35}{39}$ **c)** $13\frac{1}{5} : \frac{11}{12}$ **d)** $\frac{34}{45} : 6\frac{25}{27}$

23. a) $482\frac{6}{7} : 24 - 1\frac{11}{14} \cdot 1\frac{23}{45} + 63\frac{1}{3} : 5\frac{2}{11}$ **b)** $\left(3\frac{1}{4} : 1\frac{5}{6} - 4\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} - \frac{8}{9} : 11\right) \cdot 8\frac{15}{16}$

c) $$\frac{\left(\frac{3}{4} \cdot 9\frac{5}{12} - 6\frac{5}{12} : 1\frac{5}{6} - 5\frac{1}{4} : 16\frac{4}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{15}}{\left(16\frac{2}{3} + 3\frac{13}{15}\right) : 4 - 1\frac{2}{3}}$$

3. Dezimalbrüche

In vielen Berufen, besonders in der metallverarbeitenden Industrie (z. B. Dreher, Fräser, Feinmechaniker), wird die Schraublehre benötigt. Mit ihr können Längen bis auf hunderstel Millimeter genau gemessen werden. Abb. 4 zeigt eine Schraublehre für den Meßbereich von 150mm bis 175mm. Man liest z. B. für den Durchmesser eines Werkstückes an der Meßhülse 160 mm, an der Trommel $\frac{35}{100}$ mm ab. Das Ergebnis schreiben wir „160,35 mm“.

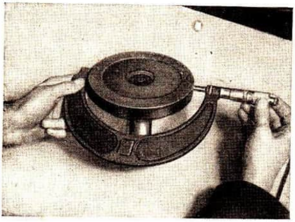


Abb. 4. Für den Durchmesser des gemessenen Werkstücks lesen wir an der Schraublehre 160,35 mm ab; der Meßbereich dieser Schraublehre liegt zwischen 150 mm und 175 mm.

Brüche, deren Nenner Potenzen von 10 sind, heißen **Dezimalbrüche**. Für sie wird (durch die Stellenwertordnung des dekadischen Zahlensystems) die besondere Schreibweise unter Verwendung des Kommas ermöglicht, die das Rechnen mit Dezimalbrüchen meist einfacher als das Rechnen mit gemeinen Brüchen gestaltet.

Mit wenigen Ausnahmen sind unsere gesetzlich festgelegten Maßeinheiten dezimal unterteilt und ihre nach dem Dezimalsystem fortschreitenden Vielfachen und Bruchteile mit besonderen Benennungen versehen. Es ist z.B.

$$\begin{array}{lllll} 1\ \text{m} & = 10\ \text{dm} & = 100\ \text{cm} & = 1\,000\ \text{mm}, \\ 1\ \text{km}^2 & = 100\ \text{ha} & = 10\,000\ \text{a} & = 1\,000\,000\ \text{m}^2, \\ 1\ \text{t} & = 10\ \text{dz} & = 1\,000\ \text{kg}, & \\ 1^{\text{g}} & = 100^{\text{c}} & = 10\,000^{\text{cc}}. & \end{array}$$

a) Stellenwert im dekadischen Zahlensystem

Die Zahl 742 enthält 7 Hunderter, 4 Zehner, 2 Einer. 7, 4 und 2 sind die **Ziffern** der Zahl 742.

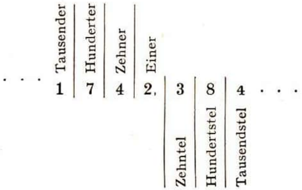
Jede Ziffer einer Zahl hat außer ihrem **Nennwert** noch einen **Stellenwert**.

Im dekadischen Stellenwertsystem ist die Einheit einer Stelle das Zehnfache der Einheit der rechten und ein Zehntel der Einheit der linken Nachbarstelle. Deshalb kommt man beim schriftlichen Darstellen von Zahlen mit den zehn Ziffern

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

aus.

Die von den Indern stammende Schreibweise der Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem war etwa im 13. Jahrhundert den gelehrten und klösterlichen Kreisen Europas bekannt geworden. Es lag jedoch noch kein praktisches Bedürfnis vor, diese Schreibweise einzuführen, und man rechnete vorerst weiterhin mit römischen Ziffern. Erst die starke Ausbreitung des Handels nach den Kreuzzügen erforderte eine bessere, schnellere Zahlenschreibweise, als es mit den römischen Ziffern möglich war. Die Ziffernfolge setzen wir nun nicht nur nach links, sondern auch nach rechts fort. Von der Einerstelle ausgehend, haben wir dann für die Nachbarstellen die Stellenwerte Zehner bzw. Zehntel, für die übernächsten Stellen die Stellenwerte Hunderter bzw. Hundertstel usw. Die Einerstelle kennzeichnen wir durch ein **Komma**.



Da die Stellenwertordnung über die Einerstelle hinaus nach rechts fortgesetzt wird, können Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 usw. in die Schreibweise des dekadischen Zahlensystems eingeordnet werden, indem lediglich ihre Zählerziffern in die entsprechenden Stellen eingesetzt werden. Wir haben also

$3\frac{5}{10} = 3{,}5$ (gelesen: drei Komma fünf)

$6\frac{25}{100} = 6{,}25$ (gelesen: sechs Komma zwei fünf)

$\frac{3}{10} = 0{,}3$ (gelesen: null Komma drei)

$\frac{5}{100} = 0{,}05$ (gelesen: null Komma null fünf)

$\frac{28}{1000} = 0{,}028$ (gelesen: null Komma null zwei acht)

usw.

Umgekehrt ist: $25{,}417 = 25 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000} = 25 + \frac{417}{1000}$

$0{,}381 = \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{381}{1000}$ $0{,}006 = \frac{6}{1000}$

Der Divisor ist ein Dezimalbruch. Enthält der Divisor ein Dezimalkomma, so verwandelt man ihn durch Erweitern des Quotienten mit einer geeigneten Potenz von 10 in eine ganze Zahl und führt danach die Division aus.

$$0{,}9789 : 1{,}3 = \frac{0{,}9789}{1{,}3} = \frac{0{,}9789 \cdot 10}{1{,}3 \cdot 10} = \frac{9{,}789}{13} = 9{,}789 : 13$$

$$\begin{array}{l} 9{,}789 : 13 = 0{,}753 \\ \;\;68 \\ \;\;\;39 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Die Division geht auf, und es ergibt sich eine **endlicher Dezimalbruch**, wenn die aus der Ziffernfolge des Divisors bestehende Zahl außer den Faktoren 2 und 5 nur solche Primfaktoren enthält, die auch in der aus der Ziffernfolge des Dividenden gebildeten Zahl als Faktoren enthalten sind:

$$\begin{array}{l} 0{,}168 : 10{,}5 = 1{,}68 : 105 \\ 1{,}68 : 105 = 0{,}016 \\ \;\;630 \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Dividend $\widehat{=} 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Divisor $\widehat{=} 105 = 5 \cdot 3 \cdot 7$

Die Division geht auf, da die Faktoren 3 und 7 der Zahl 105 auch in der Zahl 168 enthalten sind.

Geht die Division nicht auf, so ergibt sich ein Dezimalbruch, dessen **Ziffernfolge beliebig weit fortsetzbar** ist. Das ist der Fall, wenn die aus der Ziffernfolge des Divisors bestehende Zahl außer den Faktoren 2 und 5 Primfaktoren enthält, die nicht gleichzeitig Faktoren der aus der Ziffernfolge des Dividenden bestehenden Zahl sind:

$$\begin{array}{l} 16{,}8 : 1{,}65 = 1680 : 165 \\ 1680 : 165 = 10{,}1818\ldots \\ \;\;300 \\ \;\;1350 \\ \;\;\;\;300 \\ \;\;\;\;1350 \end{array}$$

Dividend $\widehat{=} 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Divisor $\widehat{=} 165 = 5 \cdot 3 \cdot 11$

Die Division geht nicht auf, da der Faktor 11 der Zahl 165 nicht in der Zahl 168 enthalten ist.

c) Runden

Wieviel Ziffern hinter dem Komma eines Dezimalbruches für das Rechenergebnis Bedeutung haben, richtet sich nach der geforderten oder möglichen Genauigkeit. Oft genügen wenige Stellen. Man führt eine Berechnung nicht mit mehr Dezimalstellen aus, als nötig ist. Soll eine Summe auf zwei Dezimalstellen genau berechnet werden, so kann man die Summanden vor dem Zusammenzählen auf drei Dezimalstellen runden. Man rundet oder kürzt die Dezimalzahl dann nach folgenden Rundungsregeln ab:

1. Ist die erste weggelassene Ziffer kleiner als 5, so bleiben die mitgeführten Ziffern unverändert.

Beispiel: Kürze auf 2 Dezimalstellen ab! $3{,}14\,159 \approx \underline{\underline{3{,}14}}$

2. Ist die erste weggelassene Ziffer größer als 5, so wird die vorangehende Ziffer um 1 erhöht.

Beispiel: Kürze auf 4 Dezimalstellen ab! $3{,}1415\,9 \approx \underline{\underline{3{,}1416}}$

3. Ist die erste weggelassene Ziffer eine 5, so wird die letzte mitgeführte Ziffer erhöht, wenn der 5 Ziffern folgen, die von Null verschieden sind.
Folgen der 5 nur Ziffern Null, so pflegt man die letzte mitgeführte Ziffer nur dann um 1 zu erhöhen, wenn sie ungerade ist. Die Zahl endet dann immer mit einer geraden Ziffer.

Beispiel: $0{,}47\,5123 \approx \underline{\underline{0{,}48}}$ $\qquad \frac{1}{8} = 0{,}12\,5000\ldots \approx \underline{\underline{0{,}12}}$

$3{,}26\,5001 \approx \underline{\underline{3{,}27}}$ $\qquad \frac{7}{40} = 0{,}17\,5000\ldots \approx \underline{\underline{0{,}18}}$

Kennzeichnung der letzten Ziffern

Beim Abkürzen der Zahl 3,146 auf Zehntel erhält man verschiedene Resultate, je nachdem, ob man unmittelbar auf Zehntel oder erst auf Hundertstel und dann auf Zehntel abrundet:

$$3{,}1\,46 \approx 3{,}1$$

$$3{,}14\,6 \approx 3{,}1\,5 \approx 3{,}2$$

Will man die hier vorliegende Zweideutigkeit vermeiden, so muß man jede nach dem Runden als letzte mitgeführte Ziffer auftretende 5 so kennzeichnen, daß man ihr ansieht, ob sie durch Aufrunden oder durch Abrunden entstanden ist. Dabei ist folgende Kennzeichnung üblich: Ist die 5 durch Aufrunden aus der 4 entstanden, so wird sie überstrichen. Man setzt über sie einen Punkt, wenn die nachfolgenden Ziffern abgeworfen sind. Beim weiteren Runden sieht man nun die $\overline{5}$ als eine Zahl an, die kleiner als 5 ist und $\dot{5}$ als eine Zahl, die größer als 5 ist.

$$5{,}614\,9 \approx 5{,}61\,\overline{5} \approx 5{,}61$$

$$7{,}065\,1 \approx 7{,}06\,\dot{5} \approx 7{,}07.$$

AUFGABEN

1. a) 20,047 + 0,806 + 37 + 6,02 + 0,089 + 1,23 + 19,765 + 5,043
   b) 4,78 + 0,0066 + 5,947 + 16,039 + 0,8714 + 6,7089 + 4,56 + 26,5192
   c) 0,47 + 2,084 + 6,09 + 42,623 + 1,41 + 0,587 + 4,308 + 2,603

2. Vor dem Addieren ist jeder Summand auf 3 Dezimalstellen, das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen zu runden.
   a) 6,3287 + 0,03921 + 0,45035 + 2,87049 + 0,00357
   b) 0,07982 + 0,18948 + 2,0065 + 0,9997 + 3,0096
   c) 19,80958 + 17,58946 + 8,79591 + 2,89996 + 10,10269

3. a) 66,0343 — 31,1475 **b)** 532,463 — 482,57 **c)** 0,6032 — 0,06897

4. Mit Parallel-Endmaßen wird der Kontaktabstand eines Unterbrechers gemessen. Den Abstand füllen folgende Meßblättchen: Ein Meßblättchen von 0,8 mm, eines von 0,3 mm und eines von 0,25 mm.

Wie groß ist der gemessene Kontaktabstand?

5. Für eine Bohrung wurden in der Zeichnung Nennmaß und Toleranz angegeben. Das Maß lautet: $30^{+0,05}$. Bestimme das Größtmaß der Bohrung!

6. An einem Wohnhaus ist eine Blitzschutzanlage (Blitzableiter) anzubringen. Die verzweigte Dachleitung hat die Streckenlängen 19,15 m, 2,05 m, 6,85 m, 3,08 m und die Gebäudeleitung die Streckenlängen 4,36 m, 11,24 m, 2,85 m, 11,3 m. Wie viele Meter verzinkter Rundstahl werden für die Anlage benötigt?

7. Im Laboratorium eines Schmelzwerkes wird für Versuchszwecke eine Legierung Rg 4 (Rotguß mit 4% Zinngehalt) zusammengestellt. Die Legierungsbestandteile sind:

117,6985 g Cu (Kupfer); 5,058 g Sn (Zinn); 2,529 g Zn (Zink) und 1,2645 g Pb (Blei). Wieviel wiegt das Legierungsstück?

8. Der Durchmesser einer Welle soll nach der Zeichnung $50^{-0,06}$ betragen. Wie groß ist das Kleinstmaß der Welle?

9. In jede Ecke einer quadratischen Abschlußplatte von 110 mm Seitenlänge wurde ein Loch von 3,2 mm mit einem Randabstand von 5,5 mm gebohrt. Der Kontrolleur mißt mit der Schieblehre den Abstand zwischen den beiden inneren Bohrlochwänden parallel zur Plattenkante. Wie groß muß dieser Abstand sein?

10. a) 486 · 0,879 **b)** 0,00785 · 9672 **c)** 0,056 · 0,35 · 0,475

11. a) 5275,31 : 937 **b)** 30950,4 : 768
c) 41,586 : 478 **d)** 0,567 : 756

12. a) 494,887 : 7,31 **b)** 0,211491 : 0,0373
c) 0,45 : 0,576 **d)** 87 : 2,32

13. a) 601,92 — 200,64 : (246,08 — 193,28)
b) (10,6927 + 63,3973) : (9,0234 — 8,6359) + 0,1158 : 0,000375

14. Für einen Arbeitsauftrag werden folgende Mengen Stahl benötigt:

	Länge in m	Bezeichnung	Abmessungen in mm	Gewicht in kp/m
a)	14,25	Bandstahl	95 · 3	2,237
b)	8,75	,,	20 · 4	0,628
c)	8,05	,,	170 · 4	5,338
d)	4,65	Flachstahl	20 · 18	2,826
e)	5,70	,,	32 · 12	3,014
f)	0,65	,,	120 · 6	5,652
g)	0,08	,,	10 · 1	0,079
h)	12,05	Rundstahl	34 ⌀	7,127
i)	0,55	,,	325 ⌀	651,218
k)	7,60	Winkelstahl	35 · 35 · 4	2,1
l)	0,35	,,	65 · 100 · 7	8,77
m)	3,95	,,	100 · 200 · 10	23,0

1. Wieviel wiegt jede Profilsorte?

2. Wieviel wiegt das gesamte benötigte Material?

15. Auf einem Stück Flachstahl von 28 000 mm Länge sollen 13 Löcher angerissen werden, so daß ihre Mitten unter sich und die Mitten der beiden äußeren Löcher von den Enden gleiche Entfernungen haben. Wie groß ist der Abstand von Mitte zu Mitte Loch?

16. Der Sachbearbeiter für technisch begründete Arbeitsnormen eines volkseigenen Betriebes legt mit Aktivisten eine Arbeitsnorm fest. Für die Fertigung von 12 Arbeitsstücken werden folgende Zeiten gemessen:

für Maschinenzeiten 273,5 min; für Handzeiten 164,3 min; für Verlustzeiten 62,6 min.
Wie hoch liegt der Preis des Arbeitsstückes in DM, wenn für eine Stunde Arbeitszeit ein Grundlohn von 1,10 DM und ein Leistungszuschlag von 0,22 DM festgesetzt wird?

17. In einer Schafzuchtgenossenschaft ist folgende Regelung getroffen worden: für jedes Schaf ist vom 10. Tage nach der Geburt an 0,10 DM Haltungsgeld zu zahlen. Das Deckgeld beträgt je geborenes Lamm 5,— DM.

Wieviel DM hat ein Bauer jährlich zu zahlen, der 5 Mutterschafe in der Genossenschaftsherde hat, von denen geboren wurden:

1) am 18. 3. Zwillinge

2) am 20. 3. 1 Lamm

3) am 10. 4. 1 Lamm

4) am 15. 4. 1 Lamm

5) am 12. 4. Zwillinge?

18. Zur Bekämpfung des Kartoffelkäfers verwendet man meistens 35 kg/ha Stäube-Gesarol oder 800 l/ha 0,4%iges Spritzgesarol.

a) Berechne die Menge Stäube- oder Spritz-Gesarol, die für 14,32 ha Kartoffelanbaufläche benötigt wird!

b) Welche Unkosten entstehen (ohne das Spritzen), wenn 1 kg Stäube-Gesarol 1,10 DM und 1 kg Spritz-Gesarol 2,05 DM kosten?

19. Ein Chemiefacharbeiter soll 187,5 l Salzsäure (HCl) in Tongefäße abfüllen. Wieviel Gefäße benötigt er, wenn 1 Gefäß 7,5 l faßt?

20. Der VEB Fahrzeugausrüstung Berlin stellt Spezialbatterien für Zugbeleuchtung her. Bei Reihenschaltung von 86 dieser alkalischen Elemente ergibt sich eine Gesamtspannung von 110 V. Wieviel Volt erzeugt jedes Element?

21. Ein landwirtschaftlicher Betrieb verbraucht in einem Jahr (365 Tage) für 2 Pferde 2190 kg Streustroh, für 12 Rinder 17 520 kg und für 16 Schweine 4940 kg.
Wieviel Kilogramm Stroh werden täglich je Tier der einzelnen Tierarten eingestreut?

22. Im Jahre 1950 entfielen in der DDR auf 10 000 Einwohner 15, im Jahre 1956 36,3 Studenten. In Westdeutschland waren es 23,6 und 26,8 Studenten.
Wieviel mehr Studenten als in der DDR entfielen 1950 in Westdeutschland auf 10 000 Einwohner und wieviel weniger im Jahre 1956?

23. Vier Schaltstufen hat ein stationärer Elektro-Lufterhitzer, der im VEB Elektrowärme Döbeln gefertigt wird. Er wird an 380 V Drehstrom angeschlossen und nimmt bei den verschiedenen Schaltstufen die Leistungen 6, 12, 18 und 24 kW auf. Welcher Strom fließt bei den genannten Leistungen? $\left(J = \frac{N}{U}\right)$

24. Bei der Renovierung eines Lichtspieltheaters ist der Vorraum neu zu verputzen. Das Ausmaß der Wandflächen ergibt 315,60 m². Für die Wandöffnungen sind folgende Einzelflächen abzuziehen: 3,35 m²; 2 · 3,80 m² und 12,50 m².
Wie groß ist die Putzfläche im Vorraum?

25. Zum Bau eines Rinderoffenstalles werden 306,05 m³ Mauerwerk benötigt. Der Preis für 1 m³ Mauerwerk beträgt 18,65 DM.
Wieviel DM muß die LPG für das Mauerwerk des Stalles aufbringen?

26. Mauerwerk aus Hochlochziegeln ist durchschnittlich 1,20 DM je m³ billiger als Mauerwerk aus Vollziegeln. Wieviel DM Baukosten werden bei einem Wohnhaus mit 300 m³ Mauerwerk eingespart, wenn Hochlochziegel statt der ursprünglich vorgesehenen Vollziegel verlegt werden?

27. In 8 Stunden können zwei Maurer eine Ziegelwand mit 3,5 m³ Rauminhalt aufführen. In der gleichen Zeit montieren zwei Arbeiter eine Wand aus Großblöcken mit 25 m³ Rauminhalt.

a) Wieviel Kubikmeter Ziegelmauerwerk errichten zwei Maurer in einer Arbeitswoche (48 Stunden)?

b) Wieviel Kubikmeter Mauerwerk aus Großblöcken können zwei Montagearbeiter in der gleichen Zeit herstellen?

28. Um eine sumpfige Wiese zu entwässern, wird eine Dränage angelegt. Dazu werden für den Hauptstrang 185 Röhren mit einem Durchmesser von je 12 cm und für die Seitenstränge 850 Röhren mit je 6 cm Durchmesser gebraucht.
Wieviel laufende Meter Röhrenstränge müssen verlegt werden, wenn jede Röhre 35 cm lang ist?

29. Ein sowjetischer Thermoelektrogenerator TGK-3 setzt die Wärme einer Petroleumlampe in elektrische Energie um. Er dient als Spannungsquelle für Rundfunkgeräte. Er liefert eine Heizspannung von 1,8 ··· 2,2 V bei 0,5 A oder 1,1 ··· 1,4 V bei 0,52 A. Zwischen welchen Grenzen liegt die von dem Thermoelektrogenerator abgegebene Leistung? ($N = U \cdot J$)

30. Im Institut für Hochspannungstechnik der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau wurde ein Bandgenerator für 2,4 MV und 1 mA gebaut. Welche Leistung kann der Generator abgeben? ($N = U \cdot J$)

31. Merino-Fleischschafe bringen jährlich 4 bis 5 kg Wolle mit AB-Feinheit und einem Reinwollgehalt von 35%.
Wieviel Kilogramm Reinwolle werden von 260 Merino-Fleischschafen im Jahre gewonnen, wenn im Durchschnitt je Schaf 4,5 kg Wolle anfallen?

32. Verteile 157,5 kg Kunstdünger auf 3 Gärten, die 8 a, 12,5 a und 9,5 a groß sind!

33. Eine im VEB Lokomotivbau Elektrotechnische Werke Hennigsdorf entwickelte Güterzuglokomotive 120 t Co — Co besitzt sechs Reihenschlußmotoren mit einer Leistung von je 530 kW. Welcher Gesamtstrom fließt bei einer Fahrdrahtspannung von 3000 V? $\left(J = \frac{N}{U}\right)$

34. In der Rumänischen Volksrepublik wird ein Umformer für Hochfrequenzerwärmung gebaut. Er besteht u. a. aus einem Asynchronmotor, der 130 kW abgibt. Sein Wirkungsgrad beträgt 0,9. Wie groß ist die von dem Motor aufgenommene Leistung? $\left(N_{\text{zu}} = \frac{N_{\text{ab}}}{\eta}\right)$

35. Eine im VEB Transformatoren- und Röntgenwerk Dresden entwickelte Wechselspannungsprüfanlage gibt eine Drehstromscheinleistung von 4950 kVA ab. Welcher Strom fließt bei der Spannung von 1,3 MV? $\left(J = \frac{N}{U}\right)$

36. In einer Lehrwerkstatt befinden sich 17 Arbeitsplätze. Über jeden Arbeitsplatz wirkt als Oberlicht eine Leuchte mit einer Glühlampe von 75 Watt Leistung. In der einstündigen Mittagspause werden die Leuchten nicht abgeschaltet. Wieviel DM spart der Betrieb in einem Jahr (360 Tage) ein, wenn in der Mittagspause die Leuchten abgeschaltet werden? (1 kWh kostet 0,08 DM).

B. RELATIVE UND ALLGEMEINE ZAHLEN

1. Relative Zahlen

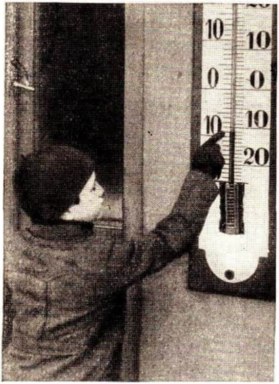


Abb. 5. Am Thermometer ist das Ablesen noch möglich, wenn die Temperatur unter den Nullpunkt sinkt.

Temperaturen können über oder unter dem Gefrierpunkt des Wassers liegen (Abb. 5), Geldbeträge entweder ein Vermögen oder eine Schuld sein. Geländepunkte liegen über oder unter dem Meeresspiegel. Geographische Breiten werden vom Äquator aus nach Norden oder Süden gezählt. Schnelldreher spannen den Drehstahl so ein, daß der Spanwinkel gegenüber dem Freiwinkel und dem Keilwinkel entgegengesetzt zu zählen ist.

Um Größen zu zählen, die wie die genannten in gegenseitiger Beziehung stehen, wird die Reihe der natürlichen Zahlen zweimal gebraucht. Die eine Reihe zählt z. B. die Temperaturgrade über, die zweite die unter dem Gefrierpunkt. Zur Unterscheidung *dient ein vor die Zahlen gesetztes* **Vorzeichen**. Man schreibt $+20°$ und spricht „plus 20°" für 20° über dem Gefrierpunkt, $-20°$ (minus 20°) für 20° unter dem Gefrierpunkt. Da sich die Vorzeichen von den **Rechenzeichen** für Addition und Subtraktion nicht unterscheiden, ist auf die verschiedene Bedeutung zu achten. Man erhält die ursprüngliche Zahlenreihe als Reihe der **positiven Zahlen**, die zweite Zahlenreihe als Reihe der **negativen Zahlen**. Gewöhnlich verwendet man bei positiven Zahlen das Vorzeichen nur, wenn der Gegensatz besonders hervorgehoben werden soll, betrachtet also die Angabe 20° als gleichbedeutend mit $+20°$.

Wir erweitern damit den Zahlenbereich. Die Unterscheidung von positiven und negativen Zahlen erlaubt, die Wirklichkeit besser zahlenmäßig zu erfassen, weil auch gegenseitige Beziehungen bestimmter Art wiedergegeben werden können.

Weil in Zahlen, die mit einem Vorzeichen versehen sind, solche Beziehungen zum Ausdruck kommen, nennt man sie auch **relative**[1] **Zahlen**. Die vorzeichenlose Zahl, die den zwei entgegengesetzten relativen Zahlen gemeinsam ist, bildet den **absoluten**[2] **Wert** (Betrag) der relativen Zahl. Die Zahlen $+20$ und -20 haben also den absoluten Wert 20, die Zahlen $+3{,}5$ und $-3{,}5$ den absoluten Wert 3,5.

Als relative Zahl wird in der Metallbearbeitung die Größe des Spanwinkels ausgedrückt. Werkzeuge mit positivem Spanwinkel haben im allgemeinen schneidende, Werkzeuge mit negativem Spanwinkel schabende Wirkung.

---

1) lat. *relatio* „Beziehung".

2) lat. *absolutus* „losgelöst".

a) Vom Zahlenstrahl zur Zahlengeraden

Ist die Temperatur in einem Kühlschrank, die anfangs der Außentemperatur 18°C gleich war, durch die Wirkung der Kältemaschine um 10°C gefallen, so ergibt sich als neue Temperatur 18°C — 10°C = 8°C. Der Differenzwert ist eine natürliche Zahl. Bei einem Temperaturrückgang um 18°C kommt die Temperatur im Kühlschrank auf 18°C — 18°C. Dieser Differenzwert gehört nicht mehr zu den natürlichen Zahlen, man schreibt dafür 0°C. Sinkt die Temperatur weiter, insgesamt etwa um 24°C, so wäre die Endtemperatur durch 18°C — 24°C zu errechnen. Diese Subtraktion kann im Gebiete der natürlichen Zahlen nicht ausgeführt werden. Die Temperaturskala wird unterhalb des Nullpunkts in derselben Weise fortgesetzt, in der sie oberhalb des Nullpunkts festgelegt ist. Die Endtemperatur wird als 6°C unter Null oder als —6°C bezeichnet.

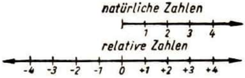


Abb. 6. Veranschaulichung der natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl und der relativen Zahlen auf der Zahlengeraden

Nachdem die Reihe der natürlichen Zahlen durch das Anfügen der Null ergänzt worden ist, wird der zur Veranschaulichung der natürlichen Zahlen verwendete **Zahlenstrahl** über den Nullpunkt hinaus zur **Zahlengeraden** verlängert (Abb. 6).

Auf der Zahlengeraden wird die Darstellung der relativen Zahlen möglich.

Legt man die Zahlengerade waagerecht, so stellt man auf ihr gewöhnlich nach rechts die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen dar. Somit ist einem Punkt der Zahlengeraden, der rechts von einem anderen Punkt liegt, immer die größere von beiden Zahlen zugeordnet. Die Richtung nach rechts wird die positive Richtung der Zahlengeraden genannt.

Der absolute Wert einer relativen Zahl erscheint auf der Zahlengeraden als ihr Abstand vom Nullpunkt. Zwei Zahlen, die rechts und links vom Nullpunkt liegen und gleichen Abstand von diesem haben, heißen entgegengesetzt gleiche Zahlen, so sind z. B. + 5 und — 5 **entgegengesetzt gleiche Zahlen**.

Im Gegensatz zu den relativen Zahlen der Zahlengeraden nennt man die durch den Zahlenstrahl veranschaulichten Zahlen auch *absolute Zahlen*.

Beim Rechnen mit relativen Zahlen treten die Zeichen + und — einmal als Rechenzeichen, einmal als Vorzeichen auf. Um den Unterschied sichtbar zu machen, schließt man die mit einem Vorzeichen versehenen relativen Zahlen in Klammern ein, schreibt also z. B. (+ 5) + (+7), (— 5) · (— 3).

b) Addieren

Zur Einführung in das Addieren relativer Zahlen nehmen wir an, daß von zwei Brüdern der eine in einem Falle 5 DM besitzt, in einem anderen Falle 5 DM schuldet, der zweite in einem Falle 7 DM besitzt, in einem anderen Falle 7 DM schuldet. Alle Möglichkeiten, die dabei eintreten können, sind aufzuschreiben, und es ist anzugeben, was beiden zusammen gehört. Beim Aufschreiben ist Geldbesitz durch das Vorzeichen „+“, Schulden sind durch das Vorzeichen „—“ kenntlich zu machen.

Die Lösung läßt sich angeben, ohne daß man besondere Regeln für das Rechnen mit relativen Zahlen kennt.

Die verschiedenen Formen der Summen sind

$(+5)+(+7)=+12$; beide zusammen haben 12 DM Geldbesitz;
$(+5)+(-7)=-\ 2$; ,, ,, ,, 2 DM Schulden;
$(-5)+(+7)=+\ 2$; ,, ,, ,, 2 DM Geldbesitz;
$(-5)+(-7)=-12$; ,, ,, ,, 12 DM Schulden.

Für das Addieren relativer Zahlen ergeben sich folgende Regeln:

1. Relative Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Werte addiert und dem Summenwert das gemeinsame Vorzeichen gibt.

$$\boxed{\begin{array}{l}(+4)+(+5)=+(4+5)=+9\\(-2)+(-6)=-(2+6)=-8\end{array}}$$

2. Zwei relative Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Werte subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der absolut größeren Zahl gibt.

$$\boxed{\begin{array}{l}(+2)+(-8)\ =-6\\(-5)+(+12)=+7\end{array}}$$

Der Summenwert ist auch für relative Zahlen von der Reihenfolge der Summanden unabhängig.

c) *Subtrahieren*

Da die Subtraktion die Umkehrung der Addition ist (vgl. S. 3), erhält man z. B.

$(+7)-(+5)=(+2)$, denn $(+2)$, zum Subtrahenden $(+5)$ hinzugefügt, ergibt den Minuenden $(+7)$;

$(+7)-(-5)=(+12)$, denn $(+12)$, zum Subtrahenden (-5) hinzugefügt, ergibt den Minuenden $(+7)$.

Auch unmittelbare Überlegung läßt uns dieses Ergebnis als richtig erkennen, wenn wir wieder positive Zahlen als Geldbesitz (bzw. als „mehr"), negative Zahlen als Schuld (bzw. als „weniger") und den Differenzwert als Unterschied ansehen, den das Vermögen von A (erste Klammer) gegenüber dem von B (zweite Klammer) zeigt.

Es bedeutet

$(+7)-(+5)=(+2)$ A hat gegenüber B 2 DM mehr,
$(+5)-(+7)=(-2)$ A hat gegenüber B 2 DM weniger,
$(-7)-(-5)=(-2)$ A hat gegenüber B 2 DM weniger,
$(-5)-(-7)=(+2)$ A hat gegenüber B 2 DM mehr,
$(+7)-(-5)=(+12)$ A hat gegenüber B 12 DM mehr,
$(-5)-(+7)=(-12)$ A hat gegenüber B 12 DM weniger,
$(+5)-(-7)=(+12)$ A hat gegenüber B 12 DM mehr,
$(-7)-(+5)=(-12)$ A hat gegenüber B 12 DM weniger.

Als Regel für die Subtraktion relativer Zahlen erkennt man:

Das Subtrahieren einer relativen Zahl kann durch das Addieren der entgegengesetzt gleichen Zahl ersetzt werden.

$$\boxed{\begin{array}{l}(+7)-(+5)=(+7)+(-5)=(+2)\\(-7)-(-5)=(-7)+(+5)=(-2)\end{array}}$$

Die Subtraktionsregel zeigt, daß z. B. $+(-5)$ dieselbe Bedeutung wie $-(+5)$ und $+(+5)$ dieselbe Bedeutung wie $-(-5)$ hat.

So ist auch

$$\begin{aligned}&(+7)-(-9)-(+5)+(-8)\\=\;&(+7)+(+9)-(+5)-(+8).\end{aligned}$$

Nun entsprechen die positiven Zahlen der Zahlengeraden den natürlichen Zahlen des Zahlenstrahls. Man schreibt deshalb zur Abkürzung der Schreibform an Stelle von $(+9)$ oft 9. Man erhält dann

$$(+7)+(+9)-(+5)-(+8)=\mathbf{7+9-5-8=3}.$$

Entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned}&(+2)-(+13)+(-14)-(-15)\\=\;&(+2)-(+13)-(+14)+(+15)\\=\;&\mathbf{2-13-14+15=17-27}\\&=(+17)-(+27)=-10.\end{aligned}$$

Nach einiger Übung im Addieren und Subtrahieren relativer Zahlen wird auch noch die Zwischenzeile, in der alle Glieder als positive Zahlen geschrieben sind, weggelassen. Man rechnet dann z. B.

$$(-5)-(+3)+(-7)-(-9)+(+2)=\mathbf{-5-3-7+9+2=-4}.$$

d) Multiplizieren

Die Aufgabe $3\cdot(+5)$ mit der natürlichen Zahl 3 als Multiplikator kann in die Additionsaufgabe $(+5)+(+5)+(+5)$ umgewandelt werden und ergibt $(+15)$. Dagegen lassen sich Aufgaben wie $(+3)\cdot(+5)$ oder $(-3)\cdot(+5)$, bei denen beide Faktoren relative Zahlen sind, nicht als wiederholte Addition gleicher Summanden auffassen.

Wir erinnern uns, daß wir in der Bruchrechnung das Produkt zweier Faktoren als Flächeninhalt eines Rechtecks deuteten, dessen Seitenlängen den beiden Faktoren entsprechen. Diese Vorstellung wollen wir auch jetzt verwenden.

In Abb. 7 kann man die Abschnitte $(+3)$ und $(+5)$ der beiden im gemeinsamen Nullpunkt aufeinander senkrechtstehenden Zahlengeraden zugleich als Abschnitte 3 und 5 im Nullpunkt beginnender Zahlenstrahlen auffassen.

Das Rechteck I hat somit den Flächeninhalt $3\cdot5=15$, und wir setzen auch $(+3)\cdot(+5)=(+15)$.

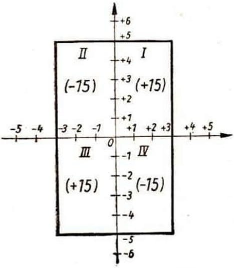


Abb. 7. Veranschaulichung der Multiplikation relativer Zahlen

Vermindern wir jetzt den ersten Faktor jeweils um eine Einheit, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (+3) \cdot (+5) &= (+15), \\ (+2) \cdot (+5) &= (+10), \\ (+1) \cdot (+5) &= (+5), \\ (0) \cdot (+5) &= 0. \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte der Rechtecke werden durch Zahlen ausgedrückt, von denen jede um 5 kleiner als die vorhergehende ist.
Ihre Darstellung auf der Zahlengeraden führt durch das Fortsetzen der Produktenbildung in den Bereich der negativen Zahlen.

Wir setzen also

$$\begin{aligned} (-1) \cdot (+5) &= (-5), \\ (-2) \cdot (+5) &= (-10), \\ (-3) \cdot (+5) &= (-15). \end{aligned}$$

Die Faktoren (-3) und $(+5)$ stellen die Seiten des Rechtecks II dar. Sein Inhalt erscheint als negative Größe. Der Inhalt des Rechtecks I wurde durch eine positive Zahl ausgedrückt. Wir erhalten somit

$$\boxed{(+3) \cdot (+5) = (+15)} \qquad \boxed{(-3) \cdot (+5) = (-15)}$$

Wir fahren in analoger Weise in der Produktbildung fort, indem wir den zweiten Faktor jeweils um eine Einheit vermindern. Das ergibt

$$\begin{array}{ll} (+3) \cdot (+5) = (+15), & (-3) \cdot (+5) = (-15), \\ (+3) \cdot (+4) = (+12), & (-3) \cdot (+4) = (-12), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ (+3) \cdot (+1) = (+3), & (-3) \cdot (+1) = (-3), \\ (+3) \cdot \ (0) \ = \ (0), & (-3) \cdot \ (0) \ = \ (0), \\ (+3) \cdot (-1) = (-3), & (-3) \cdot (-1) = (+3), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\boxed{(+3) \cdot (-5) = (-15)} \qquad \boxed{(-3) \cdot (-5) = (+15)}$$

Dem Rechteck IV mit den Seiten $(+3)$ und (-5) wird also der Inhalt (-15), dem Rechteck III mit den Seiten (-3) und (-5) der Inhalt $(+15)$ zugeordnet.

Die Festsetzungen lassen sich auch folgendermaßen deuten: Umlaufen wir die vier Rechtecke vom Nullpunkt aus auf der waagerechten Zahlengeraden beginnend, so liegen die Rechtecke I und III zur Linken, die Rechtecke II und IV zur Rechten. Sie haben paarweise einen verschiedenen „Umlaufsinn", der sich in den paarweise verschiedenen Vorzeichen ihrer Inhalte widerspiegelt.

Für das Multiplizieren relativer Zahlen werden somit folgende Vorzeichenregeln aufgestellt:

Multipliziert man zwei relative Zahlen miteinander, die gleiche Vorzeichen haben, so ergibt sich eine positive Zahl.

Multipliziert man zwei relative Zahlen miteinander, die verschiedene Vorzeichen haben, so ergibt sich eine negative Zahl.

Bei wiederholtem Anwenden dieser Regel erkennt man, daß ein Produkt aus mehr als zwei relativen Zahlen eine positive Zahl ergibt, wenn es keine oder eine gerade Anzahl von negativen Faktoren enthält, eine negative Zahl, wenn es eine ungerade Anzahl negativer Faktoren enthält.

Beispiele:

$$(+3) \cdot (-2) \cdot (-5) = (+3) \cdot (+10) = \underline{\underline{+30}}$$

$$(-3) \cdot (+2) \cdot (+5) = (-3) \cdot (+10) = \underline{\underline{-30}}$$

$$(+2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (+5) = (-6) \cdot (-20) = \underline{\underline{+120}}$$

e) Dividieren

Sind Dividend und Divisor relative Zahlen, so entsteht als Wert des Quotienten wieder eine relative Zahl. Man erhält

$$\boxed{\begin{array}{l} (+12) : (+4) = (+3) \\ (+12) : (-4) = (-3) \\ (-12) : (-4) = (+3) \\ (-12) : (+4) = (-3) \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{weil} \quad (+4) \cdot (+3) = (+12), \\ \text{weil} \quad (-4) \cdot (-3) = (+12), \\ \text{weil} \quad (-4) \cdot (+3) = (-12), \\ \text{weil} \quad (+4) \cdot (-3) = (-12). \end{array}$$

Dividiert man zwei relative Zahlen miteinander, die gleiche Vorzeichen haben, so ergibt sich eine positive Zahl. Wenn die beiden relativen Zahlen ungleiche Vorzeichen haben, so ist der Wert des Quotienten negativ.

Demnach ist auch ein Bruch positiv, wenn Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen haben, er ist negativ, wenn die Vorzeichen des Zählers und Nenners verschieden sind.

$$\frac{+2}{+3} = +\frac{2}{3}; \quad \frac{+2}{-3} = -\frac{2}{3}; \quad \frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}; \quad \frac{-2}{+3} = -\frac{2}{3}.$$

AUFGABEN

1. Ein Stück Werkzeugstahl wird beim Anlassen um 212 °C erwärmt. Wie hoch ist die Anlaßtemperatur, wenn der Stahl vorher eine Temperatur von + 32 °C hatte?
2. Der Dampfkessel einer Dampfheizungsanlage wird einer Druckprüfung unterzogen. Die erste Druckprobe fand mit einem Kessel-Innendruck von 30 at statt. Nachdem die Schweißnähte untersucht und ohne Fehler befunden wurden, steigerte man den Innendruck um weitere 14 at. Mit welchem Überdruck fand die zweite Prüfung statt?
3. In der Gefrieranlage einer Fleischfabrik herrscht eine Temperatur von — 8°C. Welche Temperatur stellt sich ein, wenn durch Ausfall einer Kältemaschine die Temperatur um 6 °C steigt?
4. Im Chemiekombinat Bitterfeld wurden Versuche mit dem neuen Werkstoff Vinidur durchgeführt, um seine Haltbarkeit bei Untertemperaturen zu erforschen. Nachdem bei einer Temperatur von — 4°C keine Veränderungen festgestellt wurden, wurde die Temperatur für den zweiten Versuch um weitere 15°C gesenkt. Bei welcher Temperatur fand die zweite Untersuchung statt?

5. Beim Härtevorgang wird ein Stück Werkzeugstahl auf +750°C erwärmt und in der Abschreckflüssigkeit um 730°C abgekühlt. Wie hoch ist die Temperatur des Stahles nach dem Härtevorgang?

6. Der Siedepunkt von Glyzerin beträgt 290°C. Sein Erstarrungspunkt liegt 272°C tiefer. Der Erstarrungspunkt von Quecksilber liegt 57°C tiefer als der von Glyzerin. Der Erstarrungspunkt der Luft liegt 174°C tiefer als der des Quecksilbers, während ihr Siedepunkt 20°C höher liegt als der Erstarrungspunkt. Berechne die einzelnen Temperaturen!

7. Ein Flugzeug fliegt bei starkem Gegenwind, der mit einer Geschwindigkeit von 65 km/h dem Flugzeug entgegenströmt. Dadurch erreicht das Flugzeug nur eine Reisegeschwindigkeit von 430 km/h. Wie groß wäre die Reisegeschwindigkeit des Flugzeuges bei Windstille?

8. a) $(+27) + (+19)$ **b)** $(+27) + (-19)$ **c)** $(-27) + (+19)$ **d)** $(-27) + (-19)$

9. a) $(+27) - (+19)$ **b)** $(+27) - (-19)$ **c)** $(-27) - (+19)$ **d)** $(-27) - (-19)$

10. a) $(+417) - (-217)$ **b)** $(-549) + 87$ **c)** $96 - 487$ **d)** $-556 - (-655)$

11. a) $3\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3}$ **b)** $-\frac{5}{7} + \frac{3}{8}$ **c)** $-6\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{8} - 6\frac{1}{2}$

12. a) $3,59 + (-7,20)$ **b)** $(-27,3) + (+72,3)$ **c)** $8,06 - (-17,26)$ **d)** $0,9 - 0,15$

13. a) $(+13) \cdot (+18)$ **b)** $(+16) \cdot (-27)$ **c)** $(-12) \cdot (+39)$ **d)** $(-15) \cdot (-15)$

14. a) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+4\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-5\frac{1}{4}\right)$ **b)** $\left(+\frac{15}{16}\right) \cdot \left(-\frac{8}{35}\right) \cdot \left(+4\frac{2}{3}\right)$ **c)** $\left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-7\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{9}\right)$

15. a) $(+23,8) \cdot (+14,2) \cdot (-0,625)$ **b)** $(-431,12) \cdot (-0,025) \cdot (+7,5)$

c) $(+0,45) \cdot (-0,058) \cdot (-0,72)$

2. Allgemeine Zahlen

a) Begriff der allgemeinen Zahlen

Ein Mauerziegel hat eine Höhe von 6,5 cm, eine Breite von 12 cm und seine Länge beträgt 25 cm. Der Rauminhalt dieses Ziegels läßt sich errechnen, indem man die unbenannten Zahlen miteinander multipliziert: $6,5 \cdot 12 \cdot 25 = 1950$; Höhe, Breite und Länge sind hier mit Zentimeter benannt, daher ergibt sich der Rauminhalt in Kubikzentimetern als 1950 cm^3. Man zieht meist das Ausrechnen mit der Angabe der Benennung zusammen und bestimmt das Volumen aus $6,5\ cm \cdot 12\ cm \cdot 25\ cm = 6,5 \cdot 12 \cdot 25 \cdot cm \cdot cm \cdot cm = 1950\ cm^3$.

In gleicher Weise wird das Volumen eines jeden Quaders berechnet.

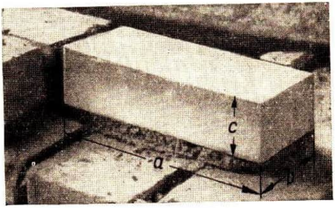


Abb. 8. Der Quader gehört zu den Körpern, deren Rauminhalt durch einfache Berechnung ermittelt werden kann. Die Formel lautet: $V = a \cdot b \cdot c$.

Um das kurz und für alle Quader gültig auszudrücken, führt man Buchstaben ein. Man bezeichnet z. B. die Länge mit a, die Breite mit b, die Höhe mit c, den Rauminhalt mit V und hat dann in dem Ausdruck $V = a \cdot b \cdot c$ die Formel für den Rauminhalt des Quaders. Ohne bestimmte Werte festzulegen, bringt sie zum Ausdruck, nach welcher Rechenvorschrift der Rauminhalt aus den Seitenlängen zu berechnen ist.

Wiederum wurde von den einzelnen Merkmalen der Gegenstände, bei diesem Beispiel von den unterschiedlichen Abmessungen der einzelnen Quader, abgesehen und nur das Gemeinsame und Wesentliche, nämlich die Abhängigkeit des Volumens von der Länge, der Breite und der Höhe herausgestellt. Dies ist der Weg, der zu allgemeinen Aussagen und Regeln führt, die der Mensch für seine Tätigkeit in steigendem Maße benötigt.

Überall in Wirtschaft und Technik treten Größen auf, deren Werte für jeden Einzelfall verschieden sind, die aber immer dieselben rechnerisch erfaßbaren Zusammenhänge haben. Die Größen werden durch Buchstaben bezeichnet, und der Zusammenhang wird durch Formeln wiedergegeben.

So gibt die Formel $w = \frac{p \cdot g}{100}$ den Zusammenhang zwischen Prozentwert w, Grundwert g und Prozentsatz p, die Formel $\gamma = \frac{P}{V}$ den Zusammenhang zwischen Wichte γ, Gewicht P und Rauminhalt V eines Körpers an.

Die Buchstaben vertreten dabei alle Größen, die in die betreffende Formel eingesetzt werden können. Die so verwendeten Buchstaben werden **allgemeine Zahlen** genannt.

Schreibweise

Grundsätzlich kann jeder Buchstabe jede beliebige Zahl bedeuten. Im Verlaufe einer Berechnung dürfen jedoch die gleichen Buchstaben nur zum Bezeichnen gleicher Werte verwendet werden.

Nur für einige Zahlen von besonderer Bedeutung sind ganz bestimmte Buchstaben festgelegt worden. So bezeichnet man die in der Formel für den Kreisumfang auftretende Zahl, deren gerundeter Wert 3,14 beträgt, mit dem griechischen Buchstaben π (gelesen: „pi") und schreibt $U = \pi \cdot d$.

Allgemeine Zahlen werden meist durch kleine Buchstaben bezeichnet, z. B. a, b, c, x, y, z.

Mitunter bringt man die Verwandtschaft von mehreren verschiedenen Größen dadurch zum Ausdruck, daß man für sie den gleichen Buchstaben verwendet, als Unterscheidungsmerkmal aber an den Buchstaben unten rechts eine Nummer anfügt (Index). Mit d_1 (gelesen: „de eins") und d_2 (gelesen: „de zwei") bezeichnet man z. B. die Durchmesser von Grund- und Deckfläche eines Kegelstumpfes.

Das zwischen zwei Zahlen stehende Zeichen „=" (Gleichheitszeichen) bringt kurz die Gleichheit zum Ausdruck, z. B. $3{,}5 = 3\frac{1}{2}$ (gelesen: „3,5 gleich $3\frac{1}{2}$"). Das Zeichen $\neq$ (Ungleichheitszeichen) bringt die Ungleichheit zweier Zahlen zum Ausdruck, $a \neq b$ (gelesen: „a ungleich b"). Soll angegeben werden, daß von zwei Zahlen die eine größer bzw. kleiner als die andere ist, so verwendet man das Zeichen $>$ bzw. $<$:

$a > b$ (gelesen: „a größer als b")
$a < b$ (gelesen: „a kleiner als b")

Der Winkel ist also immer nach der größeren Zahl zu geöffnet.

b) Addieren und Subtrahieren

Eine aus allgemeinen Zahlen gebildete Summe, z. B. $a + b$, läßt sich nicht „ausrechnen“, in vielen Fällen jedoch vereinfacht darstellen. Man kann für den Summenwert wiederum eine allgemeine Zahl einführen und z. B. schreiben $a + b = c$. Das Zusammenfassen der Summanden a und b zu einer Zahl wird jedoch auch durch Einschließen der Summe in Klammern ausgedrückt. Den Summenwert gibt dann die Zahl $(a + b)$ an.

Die Verwendung allgemeiner Zahlen setzt zwar dem Ausrechnen Grenzen, hat aber den Vorzug, Gesetzmäßigkeiten in knapper Form deutlich zum Ausdruck zu bringen. Das Gesetz der Vertauschbarkeit zweier Glieder einer Summe läßt sich, wenn man die Glieder mit a und b bezeichnet, jetzt in der allgemeingültigen Form schreiben:

$$\boldsymbol{a + b = b + a}$$

Das Gesetz ist, wie wir bereits wissen, auch für Summen von mehr als zwei Summanden gültig. Für drei Summanden lautet es:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a.$$

Man kann den Wert einer Differenz $a - b$ entweder durch eine allgemeine Zahl c ausdrücken oder ihn als $(a - b)$ angeben. Das Gesetz der Vertauschbarkeit gilt für eine Differenz nicht. Das schreibt man in der Form

$$\boldsymbol{a - b \neq b - a}$$

Als Differenzwert ergibt sich Null, wenn Minuend und Subtrahend gleich sind. Es gilt

$$\boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{a - a = 0,} \\ \boldsymbol{a + 0 = a, \quad a - 0 = a} \end{matrix}}$$

Ferner ist $b + a - b = a + b - b = a.$

c) Multiplizieren

Eine Summe, die aus 5 gleichen Summanden a besteht, wird zur Abkürzung als Produkt $5 \cdot a$ geschrieben.

$$\boxed{\underbrace{\boldsymbol{a + a + a + a + a}}_{\text{5 gleiche Summanden } a} \boldsymbol{= 5 \cdot a}}$$

Entsprechend schreibt man für eine Summe, die aus c gleichen Summanden b besteht, das Produkt $c \cdot b$.

$$\boxed{\underbrace{\boldsymbol{b + b + b + \cdots + b + b}}_{c \text{ gleiche Summanden } b} \boldsymbol{= c \cdot b}}$$

Treten allgemeine Zahlen als Faktoren eines Produktes auf, so wird der Malpunkt oft weggelassen, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind. Es ist also

$$\boxed{5 \cdot a = 5a, \qquad c \cdot b = cb}$$

Man kann den Wert des Produktes $c \cdot b = p$ schreiben oder den Produktwert als $(c \cdot b)$ angeben. Die Faktoren eines Produktes können auch gebrochene und negative Zahlen sein.

Auch mehr als zwei Faktoren können ein Produkt bilden. Immer ist der Wert eines Produktes von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig. Es ist also

$$\mathbf{c \cdot b = b \cdot c}$$

und

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a\,.$$

Für $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ wird der Produktwert berechnet, indem das Produkt aus zwei der Faktoren mit dem dritten Faktor multipliziert wird. Es gibt also folgende Möglichkeiten:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 15 \cdot 7 = 21 \cdot 5 = 3 \cdot 35\,,$$
$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)\,.$$

Die Faktoren Null und Eins

Es ist $1 \cdot a = a$, $a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b$.

Der Faktor 1 eines Produktes hat keinen Einfluß auf den Produktwert. $\boxed{a \cdot 1 = a}$

Dagegen ist $0 \cdot a = 0$ und $a \cdot b \cdot 0 = 0$.

Jeder Produktwert wird 0, wenn ein Faktor des Produktes 0 ist. $\boxed{a \cdot 0 = 0}$

Potenzschreibweise

Sind die Faktoren eines Produktes einander gleiche allgemeine Zahlen, so wendet man zur Abkürzung die Potenzschreibweise an.

Es ist z. B. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 Faktoren } a} = a^5$ (gelesen: a hoch 5)

und

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} = a^n}$$ (gelesen: a hoch n)

d) Dividieren

Den Wert des Quotienten $a : b$ kann man ebenfalls durch eine allgemeine Zahl, z. B. c, bezeichnen und $a : b = c$ bzw. $\frac{a}{b} = c$ setzen oder in der Form $(a : b)$ oder $\left(\frac{a}{b}\right)$ schreiben. Der als Bruch dargestellte Quotient kann oft durch Kürzen oder Erweitern vereinfacht werden. Man erhält

$$5a : 15a = \frac{5a}{15a} \overset{:(5a)}{=} \frac{1}{3}\,; \qquad (5rst) : (10st) = \frac{5rst}{10st} \overset{:(5st)}{=} \frac{r}{2} = 0{,}5r\,;$$

$$(0{,}35\,a^2) : (0{,}05\,ab) = \frac{0{,}35\,a^2}{0{,}05\,ab} \overset{\cdot 100}{=} \frac{35a^2}{5ab} \overset{:(5a)}{=} \frac{7a}{b}\,.$$

Besondere Fälle

Sind Dividend und Divisor gleich, so hat der Quotient den Wert 1.

Ist der Divisor 1, so ergibt sich als Quotientwert der Dividend.

Ist der Dividend 0, der Divisor aber nicht, so ergibt sich der Quotientwert 0.

$$\boxed{a : a = 1} \qquad \boxed{a : 1 = a} \qquad \boxed{0 : a = 0}$$

Die Division $a : 0$ ist **nicht ausführbar**. Um das zu erkennen, betrachten wir die Quotienten $1:10 = 0{,}1$, $1:1 = 1$, $1:0{,}1 = 10$, $1:0{,}01 = 100$ usw. Der Wert des Quotienten ist um so größer, je kleiner der Divisor ist. Geht dieser gegen Null, so wird der Wert des Quotienten größer als jede Zahl, ist also selbst keine Zahl mehr. Daran ändert sich auch nichts, wenn der Dividend 1 durch eine andere positive Zahl ersetzt wird. Mit einem solchen Quotienten kann man nicht rechnen, deshalb ist die Division mit Null nicht statthaft.

Der Ausdruck $0 : 0$ hat keinen Sinn. Wie in $21 : 7 = 3$ der Wert des Quotienten angibt, wie oft 7 in 21 enthalten ist, so müßte der Wert des Quotienten $0 : 0$ angeben, wie oft 0 in 0 enthalten ist. Während 21 gleich $7 + 7 + 7$ ist, also genau dreimal die Sieben enthält, ist $0 = 0 + 0$ oder $0 = 0 + 0 + 0$ oder $0 = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0$. Es ist ganz gleich, wie groß die Zahl der zueinander addierten Nullen ist. Deshalb kann für $0 : 0$ kein bestimmter Wert angegeben werden; $0 : 0$ ist also ein sinnloser Ausdruck!

3. Allgemeine Zahlen in zusammengesetzten Zahlenausdrücken

Die Formel $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$, nach der die Oberfläche des Quaders von der Länge a, der Breite b und der Höhe c berechnet wird, zeigt einen aus der bestimmten Zahl 2 und den allgemeinen Zahlen a, b und c durch Addition und Multiplikation *zusammengesetzten Zahlenausdruck*.

Formelsammlungen enthalten mannigfaltige Arten solcher Ausdrücke.
Die Kraft

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{d_1}$$

hält bei einem Differentialflaschenzug einer Last Q das Gleichgewicht; d_1 ist der Durchmesser des großen, d_2 der Durchmesser des kleinen Kettenrades. Der als Kraftgröße angegebene Zahlenausdruck verknüpft die Zahlen 2, d_1, d_2 und Q durch Subtraktion, Multiplikation und Division.

Mehrere durch Rechenzeichen in einem Zahlenausdruck vereinigte Buchstabengrößen ordnet man, wenn ihre Reihenfolge nicht an Vorschriften gebunden ist, der Übersichtlichkeit wegen gewöhnlich nach dem Alphabet. Man gibt also $a + b + c$ als Summe, $a \cdot b \cdot c$ als Produkt der Zahlen a, b und c an, obwohl die Werte für die Summe und das Produkt von der Reihenfolge der Glieder unabhängig sind. Kommen als Faktoren eines Produktes neben allgemeinen auch bestimmte Zahlen vor, so schreibt man die bestimmten Zahlen an den Anfang; y mit a und 3 multipliziert, ergibt $3ay$, für $x \cdot 2 \cdot z \cdot 3 \cdot 5 \cdot y$ schreibt man $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot z = 30xyz$.
Eine bestimmte Zahl, z.B. 30, als Faktor vor einer allgemeinen Zahl, z.B. xyz, wird **Koeffizient** (Beizahl, Vorzahl) genannt. Mit Koeffizient wird auch eine allgemeine Zahl bezeichnet, die einen bekannten oder unveränderlichen Wert darstellt und als Faktor neben einer unbekannten oder veränderlichen Zahl steht. So ist in $a \cdot x$ die bekannte

Zahl a der Koeffizient der Unbekannten x, in $(a + b) \cdot y$ die unveränderliche Größe $(a + b)$ der Koeffizient der veränderlichen Größe y. In $\frac{4}{5}ab$ ist $\frac{4}{5}$ der Koeffizient von $a \cdot b$, in $\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{n}$ ist $\frac{1}{3}$ der Koeffizient von $\frac{z}{n}$. *Gleichartig* nennt man Zahlenausdrücke, die bis auf ihre Koeffizienten aus denselben allgemeinen Zahlen in gleicher Weise zusammengesetzt sind. So sind

$3ab$ und $5ab$, $2a(b + c)$ und $a(b + c)$ **gleichartige** Größen

$3ab$ und $5bc$, $2a(b + c)$ und $a(c + d)$ **ungleichartige** Größen.

a) Addition und Subtraktion

1. Beispiel: $3a + 2a$

Aus $3a = a + a + a$ und $2a = a + a$ folgt für die Summe

$$3a + 2a = a + a + a + a + a = \underline{\underline{5a}}$$

2. Beispiel: $3ab + 5bc + 2ab + 7bc$

Hier erhält man durch Verändern der Reihenfolge der Summanden

$$3ab + 2ab + 5bc + 7bc = \underline{\underline{5ab + 12bc}}$$

Wie man bei der Subtraktion allgemeiner Zahlen verfährt, zeigen folgende Beispiele.

1. $7a - 4a = \underline{\underline{3a}}$
2. $7bc - 3ab + 5ab - 2bc = 7bc - 2bc + 5ab - 3ab = \underline{\underline{5bc + 2ab}}$
3. $3a(b + c) - 2a(b + c) = \underline{\underline{a(b + c)}}$

Die gleichartigen Glieder einer Summe bzw. Differenz können durch Addition bzw. Subtraktion ihrer Koeffizienten vereinigt werden.

$$\boxed{\begin{aligned} 3ab + 2ab &= 5ab \\ 7bc - 4bc &= 3bc \end{aligned}}$$

Zusammengesetzte Zahlenausdrücke, deren Glieder durch Additions- und Subtraktionszeichen verknüpft sind, werden **algebraische Summen** genannt. Eine algebraische Summe aus zwei Gliedern heißt **Binom**[1]), aus drei Gliedern **Trinom**[2]), aus mehreren Gliedern, deren Anzahl beliebig sein kann, **Polynom**[3]).

Aus dem Polynom

$3ab + 2ac - 5 + ab - 3ac + 8$ ergibt sich durch Veränderung der Reihenfolge der Glieder der Ausdruck

$3ab + ab + 2ac - 3ac - 5 + 8$, durch Zusammenfassen der gleichartigen Glieder das Trinom

$4ab - ac + 3$.

---

[1]) lat. *bis* „zweimal", griech. *nomos* „das Zugeteilte". [2]) griech. *tri-* „drei-". [3]) griech. *polys* „viel".

Auflösen von Klammern in algebraischen Summen

Klammern in zusammengesetzten Zahlenausdrücken geben eine Vorschrift für die Reihenfolge des Rechnungsganges an. Diese Vorschrift kann meist nicht befolgt werden, wenn in den Klammern allgemeine Zahlen eingeschlossen werden. Die Klammern kennzeichnen dann nur, daß der eingeschlossene Zahlenausdruck als ein Zahlenwert zu betrachten ist.

In den Ausdrücken

$$(a+b)+c, \quad (a-b)+c, \quad (a+b)-c, \quad (a-b)-c$$

ändert das Weglassen der Klammern den Gang der Berechnung nicht, es ist also

$$(a+b)+c=a+b+c, \qquad (a-b)+c=a-b+c, \qquad (a+b)-c=a+b-c,$$
$$(a-b)-c=a-b-c.$$

Ebenso ist $a+(b+c)=(b+c)+a=b+c+a=a+b+c$

und $a+(b-c)=(b-c)+a=b-c+a=a+b-c:$

Dagegen ist

$$a-(b+c)=a-b-c \text{ und } a-(b-c)=a-b+c,$$

wie man durch Einsetzen bestimmter Zahlen nachweisen kann:

$$15-(7+3)=15-10=5=15-7-3; \quad 11-(4-1)=11-3=8=11-4+1.$$

Hieraus ergeben sich für das Weglassen oder **Auflösen der Klammern** folgende Regeln:

1. Eine Klammer, die ein Polynom als Glied einer Summe einschließt, kann ohne weiteres wegfallen, wenn vor der Klammer das Additionszeichen oder kein Rechenzeichen steht.

$$\boxed{\begin{array}{l} a+(b+c+d)=a+b+c+d \\ (a+b+c)+d=a+b+c+d \end{array}}$$

2. Wenn man dagegen eine Klammer auflöst, vor der das Subtraktionszeichen steht, so hat man die vor den einzelnen Gliedern der Klammer stehenden Zeichen jeweils durch das gegenteilige zu ersetzen.

$$\boxed{a-(b-c+d)=a-b+c-d}$$

$$a-(-b+c-d)=a-(c-b-d)=a-c+b+d=a+b-c+d.$$

Durch das Auflösen von Klammern können algebraische Summen vereinfacht werden.

Beispiel 1: $(5a+3b)-3a=5a+3b-3a=\underline{\underline{2a+3b}}$

Beispiel 2: $6xy-(5xy+2)=6xy-5xy-2=\underline{\underline{xy-2}}$

Beispiel 3: $(2y-z)-\{[y-(2x+3y)]-[(5x-3y)-7z]\}$

In dem Ausdruck umschließen Klammern wieder Klammerausdrücke. Die zusammengehörenden Klammerpaare werden durch die gleiche Klammerform kenntlich gemacht. Man verwendet () als „runde“, [] als „eckige“, {} als „geschwungene“ Klammern. Das Auflösen ineinandergeschachtelter Klammern bleibt übersichtlich, wenn man dabei eine bestimmte Reihenfolge einhält, also etwa mit dem Auflösen der innersten Klammern beginnt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} & 2y - z - \{[y - 2x - 3y] - [5x - 3y - 7z]\} \\ = {} & 2y - z - \{y - 2x - 3y - 5x + 3y + 7z\} \\ = {} & 2y - z - \{y - 7x + 7z\} \\ = {} & 2y - z - y + 7x - 7z \\ = {} & \underline{\underline{7x + y - 8z}} \end{aligned}$$

Einfügen von Klammern

Umgekehrt dürfen aufeinanderfolgende Glieder einer algebraischen Summe in Klammern eingeschlossen werden. Aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt sich durch Vertauschen der Seiten:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und}$$
$$a - b + c = a - (b - c); \quad a - b - c = a - (b + c).$$

Wenn Glieder eines Polynoms in eine Klammer eingeschlossen werden, so behalten sie die vor ihnen stehenden Zeichen, wenn vor die Klammer das Additionszeichen geschrieben wird; dagegen ist vor die eingeschlossenen Glieder jeweils das gegenteilige Zeichen zu setzen, wenn vor die Klammer das Subtraktionszeichen geschrieben wird.

$$\begin{aligned} 2a + 3b - 4c - 5d + 6f &= (2a + 3b - 4c) - 5d + 6f, \\ &= 2a + (3b - 4c - 5d) + 6f, \\ &= 2a + 3b - (4c + 5d - 6f). \end{aligned}$$

b) Multiplikation von Polynomen

Ein Polynom als Faktor eines Produktes muß in Klammern eingeschlossen werden. Ist z. B. 3 mit der Summe aus a und b zu multiplizieren, so ergibt sich als Produkt $3 \cdot (a + b)$. Nun ist

$$\begin{aligned} 3 \cdot (a + b) &= (a + b) + (a + b) + (a + b) \\ &= a + b + a + b + a + b \\ &= a + a + a + b + b + b \\ &= 3a + 3b. \end{aligned}$$

Das Produkt $3 \cdot (a + b)$ hat also einen anderen Wert als der ohne Klammern geschriebene Zahlenausdruck $3a + b$.

Entsprechend ist

$$x \cdot (a + b) = xa + xb; \quad 2a \cdot (4b - 5c) = 8ab - 10ac;$$
$$d \cdot (a + b - c) = da + db - dc.$$

Eine algebraische Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Summe mit der Zahl multipliziert.

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

Ausdrücke der Form

$$5x \cdot (2y - 5z) - 3y \cdot (3x - 2z) - 2z \cdot (5x + 4y)$$

werden vereinfacht, wenn man die Klammerausdrücke ausmultipliziert. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned} 5x \cdot (2y - 5z) &= 10xy - 25xz, \\ 3y \cdot (3x - 2z) &= 9xy - 6yz, \\ 2z \cdot (5x + 4y) &= 10xz + 8yz, \end{aligned}$$

dann für den ursprünglichen Ausdruck

$$(10xy - 25xz) - (9xy - 6yz) - (10xz + 8yz)$$

und nach Auflösen der Klammern

$$\begin{aligned} &10xy - 25xz - 9xy + 6yz - 10xz - 8yz \\ &= xy - 35xz - 2yz. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung des Rechenweges wird das Multiplizieren und das Klammernauflösen in einem Rechengang ausgeführt. Vor einen Summanden, der bei dem Ausmultiplizieren der Klammern entsteht, kommt das Additionszeichen, wenn vor den zugehörigen Faktoren zwei gleiche, das Subtraktionszeichen, wenn vor ihnen ungleiche Zeichen stehen.

Produkte der Form $\mathbf{(a + b) \cdot (c + d)}$ können durch wiederholtes Anwenden der oben aufgestellten Regel umgeformt werden. Bezeichnet man zur Abkürzung $(a + b)$ mit k, so gilt

$$\mathbf{(a + b) \cdot (c + d)} = k \cdot (c + d) = k \cdot c + k \cdot d.$$

Nun wird für k wieder $(a + b)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = c\,(a + b) + d\,(a + b) &= (ac + bc) + (ad + bd) \\ &= \mathbf{ac + bc + ad + bd.} \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} \mathbf{(a + b) \cdot (c - d)} &= (a + b) \cdot c - (a + b) \cdot d = (ac + bc) - (ad + bd) \\ &= \mathbf{ac + bc - ad - bd,} \\ \mathbf{(a - b) \cdot (c - d)} &= (a - b) \cdot c - (a - b) \cdot d = (ac - bc) - (ad - bd) \\ &= \mathbf{ac - bc - ad + bd.} \end{aligned}$$

Das Produkt zweier Binome läßt sich in eine algebraische Summe verwandeln, deren Glieder die Produkte aus je einem Glied der beiden Binome sind. Das geometrische Bild der Abb. 9 macht die arithmetisch begründeten Zusammenhänge anschaulich.

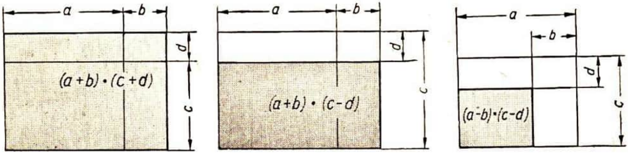


Abb. 9. Veranschaulichung der Multiplikation zweier Binome

Auch wenn als Faktoren eines Produktes Polynome mit beliebig vielen Gliedern auftreten, führt dasselbe Verfahren zum Ziel.

$$\begin{aligned}
&(a-b+c)(x-y+z)\\
&=(a-b+c)\cdot x-(a-b+c)\cdot y+(a-b+c)\cdot z\\
&=(ax-bx+cx)-(ay-by+cy)+(az-bz+cz)\\
&=ax-bx+cx-ay+by-cy+az-bz+cz.
\end{aligned}$$

Sind zwei Polynome miteinander zu multiplizieren, so hat man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Glied des anderen zu multiplizieren. Die dabei entstehenden Produkte werden addiert, wenn sie aus Gliedern mit gleichen Rechenzeichen, subtrahiert, wenn sie aus Gliedern mit ungleichen Rechenzeichen errechnet sind.

$$\begin{aligned}
&(3a+5b-2)\cdot(7c-4d-1)\\
&=21ac-12ad-3a+35bc-20bd-5b-14c+8d+2.
\end{aligned}$$

Wenn auch die Reihenfolge der Summanden beliebig ist, so hält man beim Ausmultiplizieren doch eine bestimmte Ordnung ein. Hier wurden die Glieder der ersten Klammer in der gegebenen Reihenfolge mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert. Das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken ermöglicht oft das Vereinfachen zusammengesetzter Ausdrücke. Man erhält zum

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&25xy-(4x-5y)\cdot(3y-2x)+(3x+5y)\cdot(x-2y)\\
&=25xy-(12xy-8x^2-15y^2+10xy)+(3x^2-6xy+5xy-10y^2)\\
&=25xy-(22xy-8x^2-15y^2)+(3x^2-xy-10y^2)\\
&=25xy-22xy+8x^2+15y^2+3x^2-xy-10y^2\\
&=\underline{\underline{11x^2+2xy+5y^2}}
\end{aligned}$$

Die Schreibarbeit wird in diesem Beispiel verkürzt, wenn man unter Beachtung der Zeichenregeln Multiplizieren und Klammernauflösen in einem Rechengang ausführt. Das Zusammenfassen wird erleichtert, wenn man gleichartige Glieder untereinander schreibt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{array}{rrr}
25xy & +\ 8x^2 & +15y^2\\
-12xy & +\ 3x^2 & -10y^2\\
-10xy & & \\
-\ 6xy & & \\
+\ 5xy & & \\
\hline
2xy & +11x^2 & +\ 5y^2.
\end{array}$$

Durch Weglassen von Klammern entsteht aus dem eben betrachteten Zahlenausdruck ein neuer, der einen anderen Wert hat.

$$\begin{aligned}
&25xy-4x-5y\cdot(3y-2x)+(3x+5y)\cdot x-2y\\
&=25xy-4x-15y^2+10xy+3x^2+5xy-2y\\
&=3x^2+40xy-15y^2-4x-2y.
\end{aligned}$$

Wichtige Formeln

Besonders wichtig sind die folgenden Ergebnisse:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2,\\ (a+b)&\cdot(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = ([a+b]+c)^2 &= [a+b]^2+2\cdot[a+b]\cdot c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,\\ (a+b-c)^2 = ([a+b]-c)^2 &= [a+b]^2-2\cdot[a+b]\cdot c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc,\\ (a-b-c)^2 = ([a-b]-c)^2 &= [a-b]^2-2\,[a-b]\cdot c+c^2\\ &= a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc.\end{aligned}$$

Von diesen Beziehungen werden die drei zuerst angegebenen häufig verwendet und sind deshalb als Formeln einzuprägen:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ergibt die um ihr doppeltes Produkt vermehrte Summe der Quadrate beider Zahlen.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ergibt die um ihr doppeltes Produkt verminderte Summe der Quadrate beider Zahlen.

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2}$$

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ergibt die Differenz der Quadrate beider Zahlen.

Danach ergibt z. B.

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1; \qquad (2z-3)^2 = (2z)^2-2\cdot 2z\cdot 3+3^2 = 4z^2-12z+9;$$
$$(3u-4v)\cdot(3u+4v) = 9u^2-16v^2.$$

Auch beim Rechnen mit bestimmten Zahlen bringt die Verwendung der Formeln Vorteile.

Beispiele:

$$\begin{aligned}75^2 &= (70+5)^2 = 70^2+2\cdot 70\cdot 5+5^2 = 70^2+5^2+2\cdot 70\cdot 5 = 4900+25+700\\ &= \underline{\underline{5625}}\\ 68^2 &= (70-2)^2 = 70^2-2\cdot 70\cdot 2+2^2 = 70^2+2^2-2\cdot 70\cdot 2 = 4900+4-280\\ &= \underline{\underline{4624}}\\ 72\cdot 68 &= (70+2)\cdot(70-2) = 70^2-2^2 = 4900-4\\ &= \underline{\underline{4896}}\end{aligned}$$

In jedem Falle kann aus der vorletzten Form das Ergebnis ohne Zwischenrechnung im Kopfe ausgerechnet werden.

c) *Binomische Formeln*

Potenzen von $(a + b)$

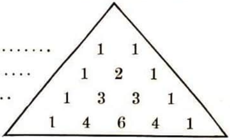
Aus $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ergibt sich

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und
$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a+b)$$
$$= a^4 + a^3b + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Auf diesem Wege kann jede Potenz des Binoms $(a+b)$, deren Exponent eine natürliche Zahl ist, als Summe dargestellt werden. Die Summanden zeigen ein einfaches Bildungsgesetz. Als erster Summand steht die Potenz von a mit dem Exponenten des Binoms, als letzter dieselbe Potenz von b. Als Zwischenglieder ergeben sich Produkte aus einer bestimmten Zahl, einer Potenz von a und einer Potenz von b. Die Exponenten von a nehmen von Glied zu Glied um 1 ab, während die Exponenten von b gleichzeitig um 1 steigen. Bei jedem Glied ergibt die Summe der beiden Exponenten den Exponenten des Binoms. Wie man die Zahlenkoeffizienten bestimmt, zeigt folgende Aufstellung, die man **Pascalsches Dreieck** nennt.

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \dots\dots\dots\dots$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \dots\dots$$
$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$



Die Folge der Koeffizienten beginnt und endet jedesmal mit 1. Die Summe zweier benachbarter Koeffizienten einer Zeile ergibt den zwischen ihnen stehenden Zahlenkoeffizienten der nächsten Zeile. Man erhält als Koeffizientenfolge für

$(a+b)^5$ .... 1 5 10 10 5 1, somit

$$(a+b)^5 = a^5 + 5 \cdot a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Potenzen von $(a - b)$

Die Potenzen von $(a-b)$ können in derselben Weise wie die von $(a+b)$ berechnet werden. Schneller führt jedoch folgende Überlegung zum Ziel.

Da $a - b = a + (-b)$ ist, erhält man die für Potenzen von $(a-b)$ geltenden Ausdrücke aus den für $(a+b)$ entwickelten, wenn man jedesmal $(-b)$ an die Stelle von b setzt.

Nun ist
$$(-b)^2 = (-b) \cdot (-b) = +b^2,$$
$$(-b)^3 = (+b^2) \cdot (-b) = -b^3,$$
$$(-b)^4 = (-b^3) \cdot (-b) = +b^4,$$
$$(-b)^5 = (+b^4) \cdot (-b) = -b^5.$$

Potenzen von $(-b)$ werden demnach bei geradzahligen Exponenten positive, bei nicht geradzahligen Exponenten negative Zahlen.

Man erhält somit
$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\\ (a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4,\\ (a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.\end{aligned}$$

Vor den aufeinanderfolgenden Gliedern der Polynome stehen abwechselnd positive und negative Rechenzeichen.

d) Division von Polynomen

Anstatt eine Zahl durch eine andere zu dividieren, kann man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multiplizieren. Nach dieser Regel gilt

$$\begin{aligned}(a+b-c):d &= (a+b-c)\cdot\frac{1}{d} = a\cdot\frac{1}{d}+b\cdot\frac{1}{d}-c\cdot\frac{1}{d}\\ &= \frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d} = a:d+b:d-c:d.\end{aligned}$$

Eine algebraische Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert.

$$\boxed{(a+b-c):d = \frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}}$$

Beispiel 1: $(6ab-12ac+18ad):(6a) = \underline{\underline{b-2c+3d}}$

Beispiel 2: $(12abc+bcd-15acd):(3ad)$

$$= \frac{12abc}{3ad}+\frac{bcd}{3ad}-\frac{15acd}{3ad} = \frac{4bc}{d}+\frac{bc}{3a}-\frac{5c}{1} = \underline{\underline{\frac{4bc}{d}+\frac{bc}{3a}-5c}}$$

Division eines Polynoms durch ein Polynom

1. Beispiel: $(85a+51b):(5a+3b)$

Der Wert dieses Quotienten ist eine Zahl, die, mit $(5a+3b)$ multipliziert, $(85a+51b)$ ergibt. Da $5a$, mit 17 multipliziert, $85a$ ergibt und $17\cdot(5a+3b) = 85a+51b$ ist, erhalten wir

$$(85a+51b):(5a+3b) = \underline{\underline{17}}$$

2. Beispiel: $(6a^2+23ab+20b^2):(3a+4b)$

Wir suchen eine Zahl, die, mit $(3a+4b)$ multipliziert, $(6a^2+23ab+20b^2)$ ergibt. Man kommt hier zunächst auf $2a$, weil $3a\cdot 2a$ den ersten Summanden $6a^2$ des Dividenden ergibt. Macht man die Probe durch die Berechnung des Produktes

$$2a(3a+4b) = 6a^2+8ab,$$

so erkennt man, daß für den Quotientwert $(2a)$ als Rest

$$(6a^2+23ab+20b^2)-(6a^2+8ab) = 15ab+20b^2$$

bleibt. Es gilt somit

$$(6a^2+23ab+20b^2):(3a+4b) = 2a+\frac{15ab+20b^2}{3a+4b}.$$

Für den Quotienten $(15ab + 20b^2) : (3a + 4b)$ stellt man aus $(15ab) : (3a)$ den Wert $(5b)$ fest. Da $(5b) \cdot (3a + 4b) = 15ab + 20b^2$ ist, gilt $\frac{15ab + 20b^2}{3a + 4b} = 5b$. Durch Einsetzen dieses Wertes erhält man

$$(6a^2 + 23ab + 20b^2) : (3a + 4b) = \underline{\underline{2a + 5b}}$$

Das Divisionsverfahren läßt sich kürzer darstellen, wenn man die von dem Dividieren mehrstelliger bestimmter Zahlen geläufige Schreibform anwendet.

Kurzform:

$$\begin{array}{l}
(6a^2 + 23ab + 20b^2) : (3a + 4b) = \underline{\underline{2a + 5b}} \\
\underline{-(6a^2 + 8ab)} \\
\qquad\quad 15ab + 20b^2 \\
\qquad \underline{-(15ab + 20b^2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Nach der Ermittelung des ersten Summanden $2a$ des Ergebnisses wird der durch die Probe $2a \cdot (3a + 4b)$ entstehende Zahlenausdruck so unter den Dividenden gesetzt, daß gleichartige Glieder untereinander stehen, und dann der Rest errechnet. Der Rest dient als Dividend zum Feststellen des nächsten Summanden des Ergebnisses. Wenn der Divisor ein Faktor des Dividenden ist, führt das Verfahren schließlich auf den Rest 0; die Division geht auf.

3. Beispiel: Das Divisionsverfahren bleibt nur übersichtlich, wenn Dividend und Divisor geordnet sind, z. B. so, daß die Potenzen von a fallen, die von b steigen.

$$\begin{array}{l}
(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b) = \underline{\underline{3a^2 - 7ab + 5b^2}} \\
\underline{-(21a^3 + 15a^2b)} \\
\qquad\quad -49a^2b + 25b^3 \\
\underline{\quad -(-49a^2b \qquad -35ab^2)} \\
\qquad\qquad\quad 35ab^2 + 25b^3 \\
\qquad\qquad \underline{-(35ab^2 + 25b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die Division geht auf, weil $(7a + 5b)$ als Faktor im Dividenden enthalten ist. Es ist

$$\begin{aligned}
(7a + 5b) \cdot (3a^2 - 7ab + 5b^2) &= 21a^3 - 49a^2b + 35ab^2 + 15a^2b - 35ab^2 + 25b^3 \\
&= 21a^3 - 34a^2b + 25b^3.
\end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel geht die Division nicht auf.

4. Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
(a^2 - ab + b^2) : (a - b) = a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} \quad \text{Rest } \frac{b^4}{a^2} & \\
\underline{-(a^2 - ab)} & \\
\qquad\qquad b^2 & = \underline{\underline{a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^2 \cdot (a - b)}}} \\
\qquad \underline{-\left(b^2 - \frac{b^3}{a}\right)} & \\
\qquad\qquad \frac{b^3}{a} & \\
\qquad\quad \underline{-\left(\frac{b^3}{a} - \frac{b^4}{a^2}\right)} & \\
\qquad\qquad\qquad \frac{b^4}{a^2} &
\end{array}$$

e) Verwandeln von Summen in Produkte — Einführen von Klammern

Ausheben

Alle Glieder des Polynoms haben gemeinsame Faktoren.

Wir betrachten die von Seite 46 her bekannte Beziehung

$$(a+b-c)\cdot d = ad + bd - cd.$$

In dieser Gleichung vertauschen wir beide Seiten:

$$\boxed{ad + bd - cd = (a+b-c)\cdot d}$$

Für das Polynom $ad+bd-cd$ der linken Seite steht auf der rechten Seite das Produkt $(a+b-c)\cdot d$. Der den Gliedern des Polynoms gemeinsame Faktor d bildet den einen Faktor des Produkts. Der andere Faktor entsteht, wenn jedes Glied des Polynoms durch d dividiert wird. Man sagt, d ist aus dem Polynom *ausgehoben* worden.

Der ausgehobene Faktor kann selbst ein Produkt sein oder auch Klammerausdrücke enthalten.

1. Beispiel: $6abx - 9aby + 12abz$

Die Glieder des Polynoms haben das Produkt $(3ab)$ als gemeinsamen Faktor. Es ist

$$6abx - 9aby + 12abz = \underline{\underline{3ab(2x - 3y + 4z)}}$$

Wird $(-3ab)$ ausgehoben, so ergibt sich

$$6abx - 9aby + 12abz = \underline{\underline{(-3ab)\cdot(-2x + 3y - 4z)}}$$

2. Beispiel: $25(a+b)x + 35(a+b)y$

Der gemeinsame Faktor ist das Produkt $5(a+b)$.

$$5(a+b)\cdot 5x + 5(a+b)\cdot 7y = \underline{\underline{5(a+b)\,(5x+7y)}}$$

Gruppen von Gliedern des Polynoms haben gemeinsame Faktoren.

Schreibt man

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd),$$

so enthalten die Glieder der ersten Klammer den gemeinsamen Faktor a, die der zweiten Klammer den gemeinsamen Faktor b. Durch Ausheben des gemeinsamen Faktors erhält man $a(c+d) + b(c+d)$. Die beiden Glieder dieses Binoms haben den Faktor $(c+d)$ gemeinsam. Wird dieser noch ausgehoben, so ergibt sich

$$\boxed{ac + ad + bc + bd = (c+d)\cdot(a+b)}$$

Das aus 4 Summanden bestehende Polynom ist in ein Produkt verwandelt worden, dessen Faktoren $(a+b)$ und $(c+d)$ heißen. Das Umwandeln von Summen in Produkte durch zweifaches Ausheben ist nur in speziellen Fällen möglich.

1. Beispiel:
$$\begin{aligned} 2ac - 5ad - 2bc + 5bd &= (2ac - 5ad) - (2bc - 5bd)\\ &= a\cdot(2c - 5d) - b\cdot(2c - 5d)\\ &= \underline{\underline{(2c - 5d)\cdot(a - b)}} \end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned}&6ax - 4bx - 9ay + 6by + 12az - 8bz\\ &= (6ax - 4bx) - (9ay - 6by) + (12az - 8bz)\\ &= 2x(3a - 2b) - 3y(3a - 2b) + 4z(3a - 2b)\\ &= \underline{\underline{(3a - 2b)(2x - 3y + 4z)}}\end{aligned}$$

Anwenden der Binomischen Formeln

Ein Trinom, das die Form

$$a^2 + 2ab + b^2 \text{ oder } a^2 - 2ab + b^2$$

hat, wird ein vollständiges Quadrat genannt, weil

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \text{ und } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

ist.

Für $a = x$ und $b = 7$ ergibt sich

$$\begin{aligned}a^2 &= x^2,\\ 2ab &= 2 \cdot x \cdot 7 = 14x,\\ b^2 &= 7^2 = 49; \quad x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2 = (x+7) \cdot (x+7).\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für $a = 3u$ und $b = 2v$

$$\begin{aligned}a^2 &= (3u)^2 = 9u^2,\\ 2ab &= 2 \cdot 3u \cdot 2v = 12uv,\\ b^2 &= (2v)^2 = 4v^2; \quad 9u^2 - 12uv + 4v^2 = (3u - 2v)^2 = (3u - 2v) \cdot (3u - 2v).\end{aligned}$$

Vertauscht man die zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehenden Ausdrücke in der Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2,$$

so entsteht

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

d.h., für die Differenz der Quadrate zweier Zahlen kann das Produkt aus der Summe und der Differenz der Zahlen gesetzt werden.

Beispiel: $25x^2 - 36y^2 = (5x + 6y) \cdot (5x - 6y)$.

Wir haben hier also weitere Möglichkeiten gezeigt, Polynome in Faktoren zu zerlegen, d.h. Summen in Produkte zu verwandeln.

4. Allgemeine Zahlen in Brüchen

Die Regeln für das Rechnen mit Brüchen, deren Zähler und Nenner aus bestimmten Zahlen bestehen, gelten ebenso für Brüche, die mit allgemeinen Zahlen gebildet sind. Im folgenden soll daher nur auf einige Besonderheiten hingewiesen werden, die sich beim Bruchrechnen aus der Verwendung allgemeiner Zahlen ergeben.

a) Umformen

Da der Bruchstrich mit dem Divisionszeichen gleichbedeutend ist, ergibt sich

$$\frac{a+b}{a} = (a+b) : a = 1 + \frac{b}{a}.$$

Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividiert:

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} \overset{:a}{=} \frac{b}{c}.$$

Das Kürzen eines Bruches ist nur ausführbar, wenn man seinen Zähler und seinen Nenner in Produkte mit der Kürzungszahl als Faktor verwandeln kann. Die Kürzungszahl als größter gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner wird oft erst erkennbar, wenn Zähler und Nenner in Faktoren zerlegt sind.

$$\frac{10x^2 \cdot y}{15x \cdot y^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}{3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y} \overset{:(5xy)}{=} \frac{2x}{3y};$$

$$\frac{2a-2b}{5a-5b} = \frac{2 \cdot (a-b)}{5 \cdot (a-b)} \overset{:(a-b)}{=} \frac{2}{5};$$

$$\frac{3ab}{3a+3b} = \frac{3ab}{3 \cdot (a+b)} \overset{:3}{=} \frac{ab}{a+b}.$$

Der Bruch $\frac{a \cdot b}{a+b}$ ist weder durch a noch durch b kürzbar. Hier sind a und b zwar Faktoren des Zählers, aber nicht Faktoren des Nenners.

Man **erweitert** einen Bruch, indem man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{a}{b} \overset{\cdot c}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \qquad \frac{a+b}{c \cdot d} \overset{\cdot x}{=} \frac{(a+b) \cdot x}{c \cdot d \cdot x} = \frac{ax+bx}{c \cdot d \cdot x};$$

$$\frac{x+1}{x-1} \overset{\cdot(x+1)}{=} \frac{(x+1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}.$$

Das **Gleichnamigmachen** ungleichnamiger Brüche wird durch Erweitern ausgeführt. Als Hauptnenner wird das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Nenner gewählt. Das Zerlegen der Nenner in Faktoren, die selbst nicht weiter zerlegt werden können, zeigt, aus welchen Faktoren der Hauptnenner zu bilden ist und welche Erweiterungszahlen für die einzelnen Brüche gelten.

Für $\frac{5a}{12xy^2}$, $\frac{2b}{15x^2y}$ und $\frac{7}{18xy}$ ergibt die Faktorenzerlegung der Nenner

$$\begin{aligned} 12xy^2 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y, \\ 15x^2y &= 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y, \\ 18xy &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y. \end{aligned}$$

Als kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner ergibt sich

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = 180x^2y^2.$$

Aus $\frac{5a}{12xy^2}$ entsteht durch Erweitern mit $(3 \cdot 5 \cdot x)$ der Bruch $\frac{75ax}{180x^2y^2}$,
aus $\frac{2b}{15x^2y}$ entsteht durch Erweitern mit $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y)$ der Bruch $\frac{24by}{180x^2y^2}$,
aus $\frac{7}{18xy}$ entsteht durch Erweitern mit $(2 \cdot 5 \cdot x \cdot y)$ der Bruch $\frac{70xy}{180x^2y^2}$.

b) *Addition und Subtraktion*

Sind *gleichnamige Brüche* zu addieren und zu subtrahieren, so ergibt sich durch Addieren und Subtrahieren ihrer Zähler der Zähler des Ergebnisses; sein Nenner ist der den Gliedern gemeinsame Nenner.

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{d}; \qquad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1;$$
$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{(x+y)-(x-y)}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y.$$

Um die Summe oder Differenz *ungleichnamiger Brüche* als einen Bruch darzustellen, müssen die Glieder gleichnamig gemacht werden.

$$\frac{\overbrace{5a}^{\cdot(15x)}}{12xy^2} + \frac{\overbrace{2b}^{\cdot(12y)}}{15x^2y} - \frac{\overbrace{7}^{\cdot(10xy)}}{18xy} = \frac{75ax + 24by - 70xy}{180x^2y^2}$$

c) *Multiplikation und Division*

Multipliziert man Brüche miteinander, so ergibt sich ein Bruch, dessen Zähler aus dem Produkt der Zähler und dessen Nenner aus dem Produkt der Nenner der einzelnen Faktoren besteht.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \frac{ace}{bdf}$$

Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

In beiden Fällen wird vor dem Ausrechnen der im Zähler und Nenner des Ergebnisses stehenden Produkte möglichst gekürzt, wenn im Zähler und Nenner gleiche Faktoren enthalten sind:

$$\frac{5a^2b}{14x^2y} \cdot \frac{7xy^2}{10ab^2} = \frac{5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot 7 \cdot x \cdot y \cdot y}{2 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b} \overbrace{\qquad = \qquad}^{:(5 \cdot 7 \cdot a \cdot b \cdot x \cdot y)} \frac{ay}{4xb};$$

$$\frac{3a}{a+b} : \frac{15ab}{a^2-b^2} = \frac{3a}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{15ab} = \frac{3a(a+b)(a-b)}{(a+b) \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b} \overbrace{\qquad = \qquad}^{:[3a \cdot (a+b)]} \frac{a-b}{5b}.$$

d) Doppelbrüche

Das Umformen von Doppelbrüchen kann auf verschiedene Weise erfolgen.

1. Die im Zähler stehenden Brüche und die im Nenner stehenden Brüche werden zu je einem Bruch vereinigt:

$$\frac{\frac{\overbrace{8}^{\cdot 8}}{x}+\frac{\overbrace{x}^{\cdot x}}{8}}{\frac{\overbrace{x}^{\cdot x}}{4}-\frac{\overbrace{4}^{\cdot 4}}{x}} = \frac{\frac{64+x^2}{8x}}{\frac{x^2-16}{4x}} = \frac{(64+x^2)\cdot 4x}{(x^2-16)\cdot 8x} \overbrace{=}^{:(4x)} \frac{64+x^2}{2\cdot(x^2-16)}.$$

2. Erweitert man den Doppelbruch mit dem Hauptnenner der in seinem Zähler und seinem Nenner stehenden Brüche, so erhält man

$$\frac{\frac{8}{x}+\frac{x}{8}}{\frac{x}{4}-\frac{4}{x}} \overbrace{=}^{\cdot(8x)} \frac{\left(\frac{8}{x}+\frac{x}{8}\right)\cdot 8x}{\left(\frac{x}{4}-\frac{4}{x}\right)\cdot 8x} = \frac{64+x^2}{2x^2-32}.$$

AUFGABEN

1. Die Ausdrücke

a) $p-q+r+s$ **b)** $q-p-r+s$

c) $p-q-r-s$ **d)** $r-p-q+s$

sind zu berechnen für

	1.	2.	3.	4.
$p =$	$+1$	-12	-8	$+5$
$q =$	-3	-7	-13	$+9$
$r =$	$+4$	$+10$	$+12$	-16
$s =$	$+8$	-15	$+7$	$+2$

2. Welche Zahlenwerte erhält y für $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ in

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x+1$ **c)** $y = 2x-1$ **d)** $y = 3x-5$ **e)** $y = \frac{2}{3}x+4$.

3. Welchen Wert hat $a + b\cdot c$ für

	1.	2.	3.	4.	5.
$a =$	18	$+19$	-6	$+2$	-8
$b =$	12	-5	$+5$	-12	-7
$c =$	11	$+7$	-1	-9	-3

4. Der Wert des Produktes $x \cdot y \cdot z$ ist für

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$x =$	$+2$	$-\frac{2}{3}$	-6	$+7$	$0{,}8$	-12	$+\frac{5}{7}$	$-3\frac{1}{6}$
$y =$	$+3$	$-\frac{3}{4}$	$+2$	-4	-5	-8	$-2\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{19}$
$z =$	$+5$	-6	$+1$	-1	9	0	$+\frac{1}{2}$	0

in sämtlichen Reihenfolgen der Faktoren zu berechnen.

5. Bezeichnet σ_{zul} die zulässige Normalspannung für einen Stab vom Querschnitt F, so berechnet man die Zugkraft, mit der man den Stab beanspruchen darf, nach der Formel

$$P = F \cdot \sigma_{\text{zul}}.$$

Wie groß ist P für einen Stahlstab mit der zulässigen Normalspannung 34 kp/mm² und 400 mm² Querschnitt?

6. Für

	1.	2.	3.
$u =$	$+3$	-10	12
$v =$	$+5$	-3	6
$w =$	$+7$	-9	-2

ist

a) u mit der Summe der Zahlen v und w zu multiplizieren;

b) zur Zahl u das Produkt der Zahlen v und w zu addieren;

c) die Differenz der Zahlen u und v mit der Zahl w zu multiplizieren;

d) von w das Produkt der Zahlen u und v zu subtrahieren;

e) die Summe der Zahlen v und w durch die Zahl u zu dividieren.

7. Der Ausdruck $a + b : c - d : e$ ist zu berechnen für

	1.	2.	3.	4.
$a =$	18	-3	$+19$	$+10$
$b =$	42	-24	-21	0
$c =$	6	$+2$	-3	-9
$d =$	54	$+60$	-32	-6
$e =$	9	-4	$+8$	-1

8. a) Wie heißt der Quotient, dessen Dividend die Summe der Zahlen x und y und dessen Divisor z ist?

b) Welchen Wert hat dieser Quotient für

	1.	2.	3.	4.	5.
$x =$	10	$+19$	-6	$+2$	-8
$y =$	12	-5	$+5$	-29	-7
$z =$	11	$+7$	-1	$+9$	-3

9. a) Wie heißt der Quotient, dessen Dividend u und dessen Divisor die Differenz $v - w$ ist?

b) Welchen Wert hat dieser Quotient für

	1.	2.	3.	4.	5.
$u =$	15	+12	0	$\frac{2}{3}$	0,3
$v =$	7	−13	−11	$\frac{1}{2}$	1,17
$w =$	4	− 9	−19	$\frac{1}{3}$	1,14

10. Für die Produktion werden Führungsklötze aus Messing benötigt. Jeder hat die Länge l und als Querschnitt ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h. Bei der Dichte ϱ wiegt ein Führungsklotz

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b) \cdot h \cdot l \cdot \varrho$$

Für $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $h = 2{,}5$ cm, $l = 3{,}5$ cm, $\varrho = 8{,}6$ g/cm³ ist

a) die Masse von einem Führungsklotz in g,

b) die Masse von 250 Führungsklötzen in kg

zu berechnen.

11. Aus Zinkblech von der Stärke $s = 0{,}2$ cm ist ein Rechtkant mit der Breite $b = 7{,}5$ cm, der Länge $l = 15$ cm, der Höhe $h = 3{,}5$ cm anzufertigen. Die Masse des Hohlkörpers wird nach der Formel

$$m = 2\,(lb + lh + bh) \cdot s \cdot \varrho$$

berechnet, wobei ϱ die Dichte bezeichnet. Sie beträgt für Zinkblech 6,95 g/cm³. Wieviel wiegt der Hohlkörper?

12. Durch Zusammenfassen gleichartiger Glieder sind zu vereinfachen

a) $3x + 7x + 12x + 5x + 9x + 4x$ **b)** $14m - 2m$

c) $5a + 9a - 3a - 7a$ **d)** $a - 10a + 6a$

e) $10a + 7b - 3a + 2b$ **f)** $9x - 8y - 5y - 6x$

g) $p + 3q - 7p - 7q$ **h)** $2u + 11v + u - 12v$

i) $-4k + 8 - 5 - 2k$ **k)** $13z + 6 + 5z - 18z$

l) $4ab + 13xy + 7ab - 8xy$ **m)** $2xy - 5yz - 5xy + 9yz + 3xy$

n) $\frac{4}{5}uv - \frac{3}{5}uv$ **o)** $15\frac{a}{bc} - 12\frac{a}{bc}$

p) $7(a + b) - 5(a + b) + 3(a + b)$ **q)** $8u(5x + y - 3z) - u(5x + y - 3z)$

r) $5a(b + 2c) + 3a(2d + e) - 2a(b + 2c) - 7a(2d + e)$

s) $8(a - b + c) - 11a(d + e - f) + 6(a - b + c) - a(d + e - f)$.

13. Die Ausdrücke **a)** $(x + y) - z$, **b)** $(x - y) + z$, **c)** $(x - y) - z$, **d)** $x + (y + z)$, **e)** $x + (y - z)$, **f)** $x - (y + z)$, **g)** $x - (y - z)$ sind

1) in der durch die Klammern vorgeschriebenen Reihenfolge,

2) nach dem Auflösen der Klammern

zu berechnen für $x = 25$, $y = 8$, $z = 7$.

14. Die Ausdrücke **a)** $(a - b) - (c + d)$ **b)** $a - (b - c) + d$, **c)** $a - (b - c + d)$, **d)** $(a - b - c) + d$ sind

1) in der durch die Klammern vorgeschriebenen Reihenfolge,

2) nach dem Auflösen der Klammern

für $a = 50$, $b = 30$, $c = 7$, $d = 3$ zu berechnen.

15. Das Volumen eines Obelisken, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a_1 und b_1, dessen Deckfläche ein Rechteck mit den Seiten a_2 und b_2 und dessen Höhe h ist, wird nach der Formel

$$V = \frac{h}{6}\,[(2a_1 + a_2)\cdot b_1 + (2a_2 + a_1)\cdot b_2]$$

berechnet.

Wie groß ist V für $a_1 = 3$ m, $b_1 = 2$ m, $a_2 = 1{,}5$ m, $b_2 = 1$ m, $h = 12$ m?

16. In den Ausdrücken

a) $[(a - b) - c] - d$

b) $[a - (b - c)] - d$

c) $a - [(b - c) - d]$

d) $a - [b - (c - d)]$

sind die Klammern aufzulösen.

17. Nach dem Auflösen der Klammern sind durch Zusammenfassen gleichartiger Glieder zu vereinfachen

a) $(7a + 9b) + 4a$

b) $15a + (5a - 3b)$

c) $6b - (3c + 2b)$

d) $(8x - 5y) + 7y$

e) $7 - (3z - 5)$

f) $5u - (3 - 2u)$

g) $3u - (4u + 3v)$

h) $9 - (8 - 6x)$

i) $5a - (3a + 2c) + (7a - 4c)$

k) $(8x - 3y) - 5x - (3y + 2x)$

l) $(7p + 8q) - (10p + 2q) + p$

m) $c + (8d - 4c) - 7d - (d - 3c)$

n) $(9r - 11s) + (10s - 4r) - 5r$

o) $(6a + 5b) - (7a + 4b) + a$

p) $x - (2y + 3z) + (5z - 8x + y)$

q) $(12b - 7c) - (3a + 11b + 2c) + 8a$

r) $6d + (2a + 8b - 3d) - (8a + 10b)$

s) $(17p - 3q + 7s) - (5q - 3s) - 7p$

t) $(3a - 4) + (2a + 7) - (4a + 10) - (a - 1)$

u) $(4ab + 2bc - 3ac) + (5ab - 4bc + 9ac) - (6ab - 5bc + 2ac)$

v) $(5x^2 + 3xy + 8y^2) - (2x^2 - 2xy - 4y^2) + (x^2 - 5xy + y^2)$

w) $(3u^2v - 4uv^2 - 7v^3) - (u^2v + uv^2 + 4u^3) - (2u^2v - 5uv^2) + 11v^3$.

18. Nach dem Auflösen der Klammern sind durch Zusammenfassen gleichartiger Glieder zu vereinfachen

a) $10a - [7b - (3a + 5b)] + [(4b - 9a) + 3b]$

b) $[(2x + 3y) - (x - 5y)] - [(6x - 7y) + (3x + y)]$

c) $(5u - 3v) - [(2u - v) + (3u - 8v)] + (u - v)$

d) $[5x - (7 - 2x)] - [(3x + 5) - 8x] + [2 + (7x - 9)]$

e) $(3xy - 7xz) - \{yz - [2xy - (4xz + 5yz) + 6yz] - xy\}$

f) $a^2 - \{[(b^2 - 3ab) - (a^2 + 2ab)] - (5a^2 - 3b^2)\}$

g) $3m - \{4 - [n + (2m + 3)] - [(5m - 6) - 2n] + m\} - 5n$

h) $\{[5c^2 - (6cd + d^2)] - [8d^2 - (2c^2 - 3cd)]\} - (c^2 + d^2)$.

19. In dem Ausdruck $a - b + c - d$ sind

a) je zwei

b) je drei

aufeinanderfolgende Glieder in Klammern einzuschließen.

20. Der Ausdruck $(x + y - z) + (x + y - z) + (x + y - z)$ ist

a) nach dem Auflösen der Klammern zu vereinfachen,

b) als Produkt zu schreiben.

21. Für die Zahlen

	1.	2.	3.	4.
$x =$	3	+10	−3	12
$y =$	5	− 3	4	0
$z =$	4	+ 8	1	− 9
$u =$	2	− 9	−5	7
$v =$	6	+ 7	−2	− 1

sind die Ausdrücke zu berechnen

a) $x + y \cdot z - u \cdot v$

b) $(x + y) \cdot z - u \cdot v$

c) $x + y(z - u \cdot v)$

d) $(x + y) \cdot (z - u \cdot v)$

e) $x + (y \cdot z - u) \cdot v$

f) $x + y \cdot (z - u) \cdot v$

g) $(x + y) \cdot (z - u) \cdot v$.

22. Die folgenden Produkte sind in Summen zu verwandeln

a) $(x + y) \cdot z$

b) $(u - v) \cdot w$

c) $a(b + c)$

d) $e(f - g)$

e) $(5x + 3y) \cdot 2$

f) $(4a - 5b) \cdot 7$

g) $13 \cdot (5c + 2d)$

h) $9 \cdot (4u - 7v)$

i) $(2a + 3b) \cdot 5c$

k) $3z(8x - 7y)$

l) $(-9) \cdot (12x - 13)$

m) $(2y - z) \cdot (+5)$

n) $5 \cdot (2a - b) \cdot c$

o) $3x(4y - 7) \cdot z$

p) $2 \cdot (u + 3v) \cdot 2w$

q) $(x - y + z) \cdot 3$

r) $5x(3x - 2y + 7)$

s) $4(2a - 3b + 5c) \cdot d$

t) $(8u + 7v - 3) \cdot (-3)$

u) $(+5) \cdot (12a - 7b + c)$

v) $17xy \cdot (x - 3y - 8)$

w) $(2x^2 - 3x - 1) \cdot 3x$

x) $(ay^2 + by - c) \cdot y^2$

y) $(-3) \cdot (k + lz + mz^2) \cdot z$

z) $a^2(2ab - 3b^2 - a^2) \cdot (-1)$.

23. Nach dem Auflösen der Klammern sind möglichst zu vereinfachen

a) $4 \cdot (a - b) + 7 \cdot (b - a)$

b) $(a + b) \cdot 8 - 9 \cdot (a - b)$

c) $3 \cdot (x - y) + (x + y) \cdot 10$

d) $5 \cdot (a - b + c) + 3(c - a - b)$

e) $(x + y - z) \cdot 13 - 2 \cdot (z - y - x)$

f) $6 \cdot (3a + 2b + 5c) - (5a - b - 3c) \cdot 9$

g) $8(9u - 10v + 3) - 2 \cdot (u + 2v - 5)$

h) $5a(a - b) + 3b(a + b)$

i) $(2x - 6y) \cdot 3x - (3x - 7y) \cdot 5y$

k) $(7a + 1) \cdot 3b - 2b(10a - 13)$

l) $8d(5 - 7c) - (3d + 8) \cdot 6c$

m) $2 \cdot (a + 3b) - 3 \cdot (2a - b) + 5 \cdot (4a + 5b)$

n) $(3x + 2y) \cdot 4 + 6 \cdot (2x + 3y) - (x - y) \cdot 9$

o) $(+5) \cdot (2u - 7v) + (u - 5v) \cdot (-3) - 2 \cdot (9v - 4u)$

p) $(c + d) \cdot (+12) - 11 \cdot (c - 5d) + (c - d) \cdot (-13)$

q) $3x(x-2) - x \cdot (7-3x) + 5x(2x-3)$
r) $(2a-5b) \cdot 3c + (b-3c) \cdot 5a - 2b(4c-a)$
s) $5 \cdot (y+3) \cdot x - y(2x+7) \cdot 4 - 7(x-4) \cdot y$
t) $a(7a+2) \cdot 3 + 5(2-4a) \cdot a - a(a+6)$
u) $(7x^2-8x+3) \cdot 2x - 2x \cdot (5x^2+3x-6) - (x^2-12x+5) \cdot 4x$
v) $6c \cdot (3a-7b+5d) - 5a(2b+6c+d) + 7b(3a+7c) - 5d(8c-a)$
w) $6a^2b^2 - (6b^2-7a^2) \cdot 10ab - 5ab \cdot (14a^2+11ab-12b^2)$.

24. Nach dem Ausmultiplizieren sind möglichst zu vereinfachen

a) $(x+y)(a+b)$
b) $(x+y)(a-b)$
c) $(x-y)(a+b)$
d) $(x-y)(a-b)$
e) $(x+3)(x+7)$
f) $(x+5)(x-8)$
g) $(x-7)(x+6)$
h) $(x-2)(x-1)$
i) $(2a+5b)(3a+2b)$
k) $(6a+b)(a-7b)$
l) $(3a-8b)(2a+b)$
m) $(7a-3b)(4a-5b)$
n) $(5y+1)(3+2y)$
o) $(7+4u)(2u-9)$
p) $(8z-5)(1+z)$
q) $(9-2v)(8-7v)$
r) $(0{,}5x+7{,}2y)(1{,}2x+0{,}3y)$
s) $(1{,}3a-0{,}4)(0{,}2a-1{,}6)$
t) $(0{,}9m-2{,}4)(1{,}1m+0{,}4)$
u) $(0{,}2u-0{,}3v)(0{,}4u-0{,}5v)$

25. Nach dem Ausmultiplizieren sind möglichst zu vereinfachen

a) $(a+b+c)(x+y)$
b) $(x+y)(a-b-c)$
c) $(a+b+c)(x-y)$
d) $(6c-d)(8-3c-5d)$
e) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$
f) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
g) $(4u^2+6uv+9v^2)(2u-3v)$
h) $(3x-7)(5x^2+2x+3)$
i) $(1-y-y^2)(7-6y)$
k) $(5u-7v)(8u^2-6uv+4v^2)$
l) $(3a-7b-c)(a-4b-5c)$
m) $(x^2+3x+2)(x^2+3x-10)$
n) $(35a+4b-15)(5a-2b-3)$
o) $(2x+y-3)(2x-y+3)$.

26. Durch Anwenden der Formeln auf S. 49 sind umzuwandeln

a) $(a+2b)^2$
b) $(2x-y)^2$
c) $(2c+3)^2$
d) $(5-2d)^2$
e) $(2x+3y)^2$
f) $(5a-4b)^2$
g) $(ab+c)^2$
h) $(x-6y)^2$
i) $(u-5v)(u+5v)$
k) $(3x-7y)(3x+7y)$
l) $(10+3x)(10-3x)$
m) $(4x-5y)(4x+5y)$
n) $(x+y+3)^2$
o) $(x-2y-3)^2$
p) $(3a-b+2c)^2$
q) $(5+4x-3y)^2$
r) $(2x-3y+z)^2$
s) $(x+2y)^3$
t) $(2x-y)^3$
u) $(3a+2b)^3$
v) $(a-3b)^3$
w) $(5-2c)^3$
x) $(3u+4v)^3$
y) $(x+1)^3$
z) $(x-2)^3$.

27. Zu berechnen sind mit Hilfe der Formel

a) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ die Ausdrücke
31^2; 52^2; 73^2; 104^2; 205^2; 301^2; 402^2; 503^2; 122^2; 155^2

b) $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ die Ausdrücke
39^2; 28^2; 47^2; 59^2; 68^2; 77^2; 86^2; 98^2; 107^2; 119^2; 249^2

c) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2-b^2$ die Ausdrücke
$28 \cdot 32$; $43 \cdot 37$; $51 \cdot 49$; $62 \cdot 58$; $79 \cdot 81$; $93 \cdot 87$; $116 \cdot 104$; $249 \cdot 251$; $298 \cdot 302$; $388 \cdot 412$

28. Nach dem Ausmultiplizieren der Klammern sind möglichst zu vereinfachen

a) $(x+3)(x+5)-(x+2)(x+4)$
b) $(x+6)(x-5)+(x-1)(2-x)$
c) $(2a-3b)(a-b)+(3a+2b)(a+b)$
d) $(5-3x)(7-2x)-(3x-4)(1-2x)$
e) $(x-3)^2+(x+1)^2$
f) $(2x-3y)^2-(3x-2y)^2$
g) $(5a-2)^2+(4a+3)(4a-3)$
h) $(a+b-c)(x+y)+(a-b-c)(x-y)$
i) $(5x+2y)(3x+7y+10)-(6x+5y+3)(2x+3y-1)$
k) $(3a-4b)(a+5b+1)-(a-b+1)(3a-2b+1)$
l) $(x+1)(x+2)(x+3)$
m) $(x-1)(x+2)(x-3)$
n) $(x-1)(x-2)(x-3)$
o) $(3a+1)(2-a)(5a-2)$
p) $(2x-3y)(3x-y)(x-2y)$
q) $(5z-1)(2z+3)(3z+4)$
r) $(5a-2b)(a-3b)(4a-b)+ab(73a-41b)$
s) $xy(5x-4y)-(x-y)(2x+y)(x+3y)$
t) $(a+b)^3-a(a+b)(a-b)$
u) $7x^3-(2x-y)^3+x(x-2y)^2$
v) $[5a(a-2)-(a-3)(a+2)](3a+1)$
w) $(5x-7y)(5x+7y)[(5x+7y)^2-(5x-7y)^2]$.

29. Folgende Divisionen sind auszuführen

a) $(18x+12y):6$
b) $(26a-39b):13$
c) $(45u+60v):15$
d) $(3ab+6ac):(3a)$
e) $(27xy-18yz):(9y)$
f) $(56a^2-49ab):(7a)$
g) $(27x^2-24xy+39xz):(3x)$
h) $(8ab+2ac-6ad):(2a)$
i) $(3x+4y-z):(12z)$
k) $(2ab+3bc-4ac):(6abc)$
l) $(ax^2+bxy+cy^2):(x\cdot y)$
m) $(x^3-2x^2+3x-4):x^3$.

30. Durch Ausführen der Division sind zu vereinfachen

a) $(a^2+8a+15):(a+3)$
b) $(x^2-5xy+6y^2):(x-2y)$
c) $(u^2-2uv-15v^2):(u+3v)$
d) $(z^2-z-56):(z-8)$
e) $(10x^2+x-21):(5x-7)$
f) $(12a^2-47ab+40b^2):(3a-8b)$
g) $(21u^2+16uv-16v^2):(3u+4v)$
h) $(35x^2-86xy+48y^2):(7x-6y)$
i) $(6a^3-a^2b-18ab^2+5b^3):(3a-5b)$
k) $(6x^3+19x^2y+xy^2+28y^3):(2x+7y)$
l) $(10x^3+x^2-x-28):(2x^2+3x+4)$
m) $(6a^3b+a^2b^2-17ab^3+3b^4):(3a^2b+5ab^2-b^3)$
n) $(21a^3-34a^2b+25b^3):(7a+5b)$
o) $(15x^3-26x^2y-49y^3):(3x-7y)$
p) $(16x^4-81y^4):(2x-3y)$
q) $(81a^4-256b^4):(3a+4b)$.

31. Die folgenden Summen sind durch Ausheben eines Faktors in Produkte zu verwandeln

a) $5x+5y$
b) $2a-2b$
c) $x\cdot a+x\cdot b$
d) $p\cdot m-q\cdot m$
e) $r\cdot s-s\cdot t$
f) $3ax+6bx$
g) $xy-y^2$
h) $14ab-21bc$
i) $3a^2-9ab$
k) $4ac-4a$
l) $5a^2+10ab+15ac$
m) $2x^2+6xy-8xz$
n) $ab-2b^2+4b$
o) $24a^2-12ab+48a$
p) $51xy+17y^2-34ay$
q) $x^3-x^2y+x^2$.

32. Glieder der folgenden Summen sind gruppenweise zu vereinigen und die Summen durch wiederholtes Ausheben in Produkte zu verwandeln.

a) $ax+ay+bx+by$
b) $ax-ay+bx-by$
c) $ax+ay-bx-by$
d) $ax-ay-bx+by$

e) $8ac+10ad+12bc+15bd$
f) $xy-7x+8y-56$
g) $15pq+3p-10q-2$
h) $14ax-49ay-6bx+21by$
i) $21a^2-14ac-15ab+10bc$
k) $24xz+30xy-12yz-15y^2$
l) $p^2-p+3pq-3q$
m) $12xy+3x-4y-1$
n) $84ac-7bc+24ad-2bd$
o) $10ax+8bx-2cx-15ay-12by+3cy$
p) $35a^2-42ac-10ab+12bc+15a-18c$
q) $ac-a-bc+b-c+1$
r) $15xz-10xy+3yz-2y^2-3z+2y.$

33. Durch Anwenden der Formeln auf S. 49 sind in Produkte zu verwandeln

a) $x^2+2xy+y^2$
b) $u^2-2uv+v^2$
c) r^2-s^2
d) $a^2+6ab+9b^2$
e) $4x^2-4xy+y^2$
f) $4u^2-12uv+9v^2$
g) $4a^2-9b^2$
h) $25x^2+10x+1$
i) $1-16a^2$
k) $36a^2+60ab+25b^2$
l) $49x^2-1$
m) x^4-y^4
n) $1-16a^4$
o) $(4a+5b)^2-4b^2$
p) $9a^2-(3b-2a)^2.$

34. Folgende Brüche sind soweit wie möglich zu kürzen

a) $\frac{5x+5y}{7x+7y}$
b) $\frac{ax-ay}{bx-by}$
c) $\frac{ac+ad}{bc+bd}$
d) $\frac{a^2-ab}{ab-b^2}$
e) $\frac{2xy}{6x^2-8xy}$
f) $\frac{ab}{ab-b^2}$
g) $\frac{z}{za+zb}$
h) $\frac{y^2}{y^2-xy}$
i) $\frac{5a^2b-4ab^2}{7a^2b-3ab^2}$
k) $\frac{12x^2y-16xy^2}{15x^2y-20xy^2}$
l) $\frac{5u^2-7uv}{(5u-7v)^2}$
m) $\frac{(x+y)^2}{3x+3y}$
n) $\frac{xy+7x-2y-14}{xy+7x+3y+21}$
o) $\frac{15ab-6a-20b+8}{6ab+15a-8b-20}$
p) $\frac{7ax+13ay-7bx-13by}{7ax+13ay+7bx+13by}$
q) $\frac{xy-x-y+1}{xz+x-z-1}$
r) $\frac{5a+5b}{5a^2-5b^2}$
s) $\frac{3x^2+3y^2}{x^4-y^4}$
t) $\frac{x^3-y^3}{(x-y)^3}$
u) $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$
v) $\frac{8a^3-27b^3}{4a^2-9b^2}.$

35. Vereinfache die Ausdrücke

a) $\frac{a}{k}+\frac{b}{k}$
b) $\frac{c}{n}-\frac{d}{n}$
c) $\frac{2x}{7}+\frac{3x}{7}-\frac{x}{7}$
d) $\frac{5a}{9c}-\frac{4a}{9c}+\frac{7a}{9c}$
e) $\frac{3a+2b}{a+b}+\frac{5a+6b}{a+b}$
f) $\frac{a+b}{c}-\frac{a-b}{c}$
g) $\frac{x+y}{z}+\frac{x-y}{z}$
h) $\frac{3x+4y}{x-y}-\frac{6x-7y}{x-y}+\frac{4x-10y}{x-y}$
i) $\frac{2a+b+5c}{a+c}-\frac{a+b+4c}{a+c}$
k) $\frac{x-2}{15x}-\frac{7-3x}{15x}+\frac{9+5x}{15x}$
l) $\frac{ax-bx}{x^2-y^2}-\frac{ay-by}{x^2-y^2}$
m) $\frac{ax+bx}{a^2+b^2}+\frac{ay+by}{a^2+b^2}$
n) $\frac{5x}{x^2+2xy+y^2}+\frac{5y}{x^2+2xy+y^2}$
o) $\frac{ab}{a^2-2ab+b^2}-\frac{b^2}{a^2-2ab+b^2}$
p) $\frac{a}{a^2+2ab+b^2}+\frac{b}{a^2+2ab+b^2}.$

36. Fasse zu einem Bruch zusammen

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$ **b)** $\frac{a}{3}-\frac{b}{4}$ **c)** $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}$

d) $\frac{x}{2}-\frac{x}{5}$ **e)** $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}$ **f)** $\frac{a}{12}+\frac{a}{8}+\frac{a}{6}+\frac{a}{3}$

g) $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}+\frac{x}{3}-\frac{y}{12}$ **h)** $\frac{2a}{3}+\frac{3b}{5}-\frac{7a}{10}-\frac{5b}{6}$

i) $\frac{x}{10}+\frac{1-x}{15}$ **k)** $\frac{a}{2}-\frac{a-2}{3}$

l) $\frac{4b-3a}{12}-\frac{5b-2a}{16}+\frac{a+b}{8}$ **m)** $\frac{2x+3y}{26}+\frac{5x-6y}{39}-\frac{3x-y}{13}.$

37. Zu einem Bruch sind zusammenzufassen

a) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ **b)** $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}$ **c)** $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$ **d)** $\frac{p}{m}-\frac{q}{n}$

e) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$ **f)** $\frac{2}{3a}+\frac{3}{a}$ **g)** $\frac{5}{ab}-\frac{3}{bc}$ **h)** $\frac{3}{ab^2}-\frac{2}{a^2b}$

i) $\frac{b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}$ **k)** $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}$ **l)** $\frac{5a+3b}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{a+b}$

m) $\frac{a^2}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a}{a-b}$ **n)** $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{y}$ **o)** $\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}.$

38. Vereinige zu einem Bruch

a) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$ **b)** $\frac{a-4}{a+3}-\frac{a+3}{a-4}+\frac{a^2+20a+2}{a^2-a-12}$

c) $\frac{x+2y}{3x-4y}-\frac{x-2y}{3x+4y}$ **d)** $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-1}{x-2}-\frac{3x^2-4x}{x^2-3x+2}$

e) $\frac{5z-3}{5z+4}-\frac{5z-4}{5z+3}$ **f)** $\frac{7}{2x+6}-\frac{4}{3x+6}-\frac{2x+3}{x^2+5x+6}$

g) $\frac{y}{x-5}-\frac{y}{x-4}$ **h)** $\frac{z}{z+1}+\frac{2z}{z+2}-\frac{3z}{z+3}.$

39. Vereinfache so weit wie möglich

a) $25xy\cdot\frac{3}{35y^2}$ **b)** $(3a+5b)\cdot\frac{5b}{(3a+5b)^2}$ **c)** $\frac{x}{y\cdot z}\cdot z^2$

d) $\frac{a}{a^2-b^2}\cdot(a-b)$ **e)** $\frac{3a}{4b}\cdot\frac{16b^2}{9a^2}$ **f)** $\frac{u^2\cdot v}{w^3}\cdot\frac{w^2}{uv}$

g) $\frac{3x}{4y}\cdot\frac{7y}{8z}\cdot\frac{16z}{63x}$ **h)** $\frac{5u}{7v}\cdot\frac{u^2-v^2}{15u^2}\cdot\frac{14uv}{(u+v)^2}$ **i)** $\frac{3a-6}{4b+2}\cdot\frac{5+10b}{a^2-4}\cdot\frac{2a+4}{6b-3}$

k) $\frac{3b}{5a}:\frac{21b}{15a}$ **l)** $\frac{16xz}{27y^2}:\frac{24yz}{9x^2}$ **m)** $\frac{19c^2}{23cd}:\frac{57d^2}{46cd}$

n) $\frac{a+b}{c}:\frac{a^2-b^2}{c^2}$ **o)** $\frac{a^2+3a+2}{a^2+8a+15}:\frac{a+1}{a+5}$

p) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-6x-16}:\frac{3x+9}{2x-16}$ **q)** $\frac{4x^2-9y^2}{9x^2-12xy+4y^2}:\frac{2x-3y}{3x-2y}$

r) $\frac{a^2-3a+2}{a^2-a-12}:\frac{5a-5}{2a+8}$ **s)** $\frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$ **t)** $\frac{\frac{a}{3}+\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{b}{5}}.$

Übersicht der verwendeten Zahlenarten

natürliche	Zahlen	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …
allgemeine	Zahlen	a, b, c, f, x, y, z, …
unbenannte	Zahlen	$1, 2, \dots \frac{1}{4}, \dots 0{,}3, \dots -7, +12, \dots$
benannte	Zahlen	$\frac{1}{2}$ kg, … 5 m, … 9 Feilen, … $n\frac{1}{\text{min}}, \dots$
absolute	Zahlen	$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots 1\frac{1}{2}, \frac{1}{8}a, b, \dots$
relative	Zahlen	$-3, +5, \dots +a, -x, \dots +\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \dots$
positive	Zahlen	$+3, +7, \dots +b, +f, +y, \dots +\frac{1}{7}, \dots +\frac{4}{9}, \dots$
negative	Zahlen	$-3, -5, \dots -a, -d, -z, -\frac{2}{3}, \dots -\frac{3}{7}, \dots$
ganze	Zahlen	1, 2, 3, 4, 10, 24, 105, 765, …
gerade	Zahlen	2, 4, 6, 8, 68, 84, 106, 456, …
ungerade	Zahlen	1, 3, 5, 7, 9, …
Primzahlen		1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …
gebrochene	Zahlen	$\frac{1}{3}, \frac{11}{16}, \dots \frac{1}{a}, \frac{4}{b}, \dots 0{,}6, 0{,}08, \dots$

Gemeine Brüche

Stammbruch	$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \dots \frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{1}{x}, \dots$
echter Bruch	$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{13}, \dots \frac{a}{b}\ (a < b), \dots$
unechter Bruch, gemischte Zahl	$\frac{11}{6}, 1\frac{5}{6}, \frac{7}{3}, 2\frac{1}{3}, \frac{a}{b}\ (a > b), \dots$
uneigentlicher Bruch	$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{12}{4}, \frac{14}{7}, \dots \frac{a}{a}\ \ \frac{2x}{x}, \dots$

Dezimalbrüche

endlicher	Dezimalbruch	0,25, 0,50, 0,75, …
periodischer	Dezimalbruch	0,6363636363636 …
nicht periodischer	Dezimalbruch	3, 141 59 …

Aus dieser Übersicht der verwendeten Zahlenarten kann man feststellen, daß die begriffliche Zuordnung einer Zahl an den Zusammenhang gebunden ist, in dem diese Zahl auftritt: z. B. kann 5 als natürliche Zahl, als ganze Zahl, als unbenannte Zahl, als absolute Zahl, als ungerade Zahl oder als Primzahl betrachtet werden.

C. GLEICHUNGEN

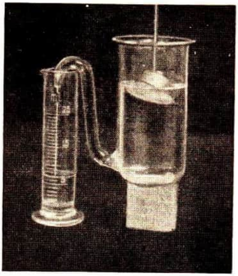


Abb. 10. Bestimmung des Rauminhalts V eines unregelmäßig geformten Körpers. Wird außerdem seine Masse m mit der Waage bestimmt, so läßt sich seine Dichte ϱ aus der Gleichung $\varrho = m : V$ berechnen. Durch Umformen erhält man z. B. die Gleichung $m = V \cdot \varrho$ und kann hieraus m berechnen, wenn V und ϱ gegeben sind.

Um den Zinngehalt eines Gußstückes aus Bronze zu prüfen, soll die Dichte ϱ festgestellt werden (Abb. 10). Seine Masse beträgt $m = 1548\,\text{g}$, es verdrängt beim Eintauchen in ein mit Wasser gefülltes Überlaufgefäß 180 cm³ Wasser und hat demnach einen Rauminhalt von $V = 180\,\text{cm}^3$.
Die Abhängigkeit der Dichte ϱ von der Masse m und vom Volumen V gibt die Formel

$$\varrho = m : V$$

an, nach der ϱ berechnet wird, wenn m und V bekannt sind. Es ergibt sich $\varrho = 1548\,\text{g} : 180\,\text{cm}^3 = 8{,}6\,\text{g/cm}^3$. Für den Fall, daß m gesucht und ϱ und V gegeben sind, erfolgt das Berechnen nach der Formel

$$m = V \cdot \varrho .$$

Wird V gesucht, während m und ϱ gegeben sind, so wird nach der Formel

$$V = m : \varrho$$

gerechnet. Alle drei Formeln stellen denselben Zusammenhang zwischen Masse, Volumen und Dichte irgendeines Körpers dar und es muß doch möglich sein, aus einer der drei Formeln die beiden anderen herzuleiten! Tatsächlich kann man durch die Lehre von den Gleichungen erkennen, wie z. B. aus der Formel $\varrho = m : V$ mit Hilfe bereits bekannter Rechenregeln die beiden anderen Formeln hergeleitet werden können. Dies gilt auch bei anderen Formeln, wie sie in der Naturwissenschaft und Technik ständig benötigt werden.

1. Begriff der Gleichung und ihre Arten

a) Allgemeines

Die Beziehung $a + b + c = a + c + b$ stellt in der mathematischen Schreibform einen Fall des Vertauschungsgesetzes der Addition dar, der, in Worten ausgedrückt, lauten könnte: Sind zwei Zahlen b und c zu einer Zahl a zu addieren, so ist es für den Summenwert gleichgültig, in welcher Reihenfolge addiert wird.
Daß beide Zahlenausdrücke trotz der veränderten Form gleiche Werte haben, wird durch das Gleichheitszeichen „=“ (gelesen: „gleich“) ausgedrückt.
Allgemein wird die Verbindung zweier wertgleicher Zahlenausdrücke durch das Gleichheitszeichen eine **Gleichung** genannt. Die auf beiden Seiten neben dem Gleichheitszeichen stehenden Zahlenausdrücke bilden die **Seiten** der Gleichung. Man spricht auch von einer linken und einer rechten Seite der Gleichung. Die Seiten der Gleichung dürfen vertauscht werden: Aus $a = b$ folgt $b = a$.

b) Identische Gleichungen

Die Gleichungen werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt. Nach der Art der in der Gleichung auftretenden Zahlengrößen unterscheidet man identische Gleichungen und Bestimmungsgleichungen.

In der Gleichung

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ist die eine Seite eine nach bestimmten Rechengesetzen ausgeführte Umformung der anderen Seite. Die Gleichung ist für alle Zahlen gültig, die man für a und b einsetzt. Gleichungen dieser Art werden **identische Gleichungen** genannt.

Beispiele:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a+b=b+a,}\\ &\boldsymbol{\frac{c}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{6}=c,}\\ &\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b),}\\ &\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3} \end{aligned}\right\}$$

Solche mathematischen Formeln sind identische Gleichungen, gültig für alle Werte von a, b, c.

c) Bestimmungsgleichungen

In einer **Bestimmungsgleichung** kommt neben Zahlen, die bekannt sind oder für bekannte Werte stehen, wenigstens eine allgemeine Zahl vor, deren Wert unbekannt ist. Die Gleichung wird als Bestimmungsgleichung bezeichnet, weil sie zum **Bestimmen der Unbekannten** dienen soll; das Gleichheitszeichen einer Bestimmungsgleichung **schreibt** also **vor,** Werte der Unbekannten zu ermitteln, für die beide Seiten gleich werden.

Zum Bezeichnen unbekannter Größen einer Bestimmungsgleichung werden gewöhnlich die letzten Buchstaben x, y, z verwendet, während man für die allgemeinen Zahlen, die für bekannte Werte stehen, die ersten Buchstaben $a, b, c \ldots$ des Alphabets zu schreiben pflegt. Grundsätzlich darf auch in Bestimmungsgleichungen jeder Buchstabe zum Bezeichnen einer allgemeinen Zahlengröße herangezogen werden, gleichgültig, ob sie bekannt oder unbekannt ist. So wird die in technischen Formeln festgelegte Bezeichnung beibehalten.

Formeln der Technik werden gewöhnlich als *Rechenvorschriften* angesehen, nach denen aus bekannten Größen eine unbekannte ermittelt werden kann.

Man berechnet die Schnittgeschwindigkeit einer Hubsäge nach der Formel

$$v = 4 \cdot r \cdot n.$$

Bei dem Kurbelradius $r = 0{,}12$ m und der Drehzahl $n = 80 \frac{1}{\text{min}}$ ergibt sich für die Unbekannte

$$v = 4 \cdot 0{,}12\,[\text{m}] \cdot 80 \left[\frac{1}{\text{min}}\right] = 38{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Die Formel ist demnach eine Bestimmungsgleichung.

Der Verwendungsbereich technischer Formeln beschränkt sich aber nicht darauf, bestimmte Zahlen an die Stelle von Buchstabengrößen einzusetzen und die unbekannte Größe auszurechnen. Die Formel gibt vielmehr einen bestimmten Zusammenhang der in ihr vorkommenden Größen wieder. Für jede dieser Größen kann sie eine Bestimmungsgleichung sein.

1. Beispiel:

Man stellt z.B. die als Hebelgesetz bezeichnete Gleichgewichtsbedingung für zwei an einem Hebel angreifende Kräfte P und Q mit den Hebelarmen a und b durch die Momentengleichung

$$P \cdot a = Q \cdot b$$

dar (Abb. 11). Die Gleichung kann zum Berechnen einer Größe dienen, wenn die anderen in ihr vorkommenden Größen bekannt sind. Ist z.B. $a = 12$ cm, $Q = 6$ kp, $b = 8$ cm, so erhält man

$$P \cdot 12\,\text{cm} = 6\,\text{kp} \cdot 8\,\text{cm}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt den Wert 48 kpcm, die linke Seite ergibt denselben Wert nur für $P = \underline{\underline{4\,\text{kp}}}$.

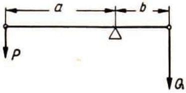


Abb. 11. Das Hebelgesetz lautet: $P \cdot a = Q \cdot b$.

2. Beispiel:

Die Momentengleichung kann auch zum Bestimmen der unbekannten Größe in der folgenden Aufgabe dienen:

An welchem Hebelarm muß eine Kraft von 15 kp angreifen, die bei einem Hebel das Gleichgewicht gegen eine am Hebelarm 10 cm wirkende Kraft von 6 kp herstellen soll?

Bezeichnet a hier die Unbekannte, so gilt

$$15\,\text{kp} \cdot a = 6\,\text{kp} \cdot 10\,\text{cm}.$$

$$a = \underline{\underline{4\,\text{cm}}}.$$

$$\left.\begin{aligned} G &= V \cdot \gamma \\ v &= 4 \cdot r \cdot n \\ P \cdot a &= Q \cdot b \end{aligned}\right\}$$

Solche physikalischen Formeln sind Bestimmungsgleichungen. Sie dienen zum Bestimmen einer Unbekannten.

d) *Grad der Gleichung*

Nach den Exponenten der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten richtet sich der Grad der Gleichung.

In der Gleichung

$$4x = 12$$

kommt die Unbekannte x nur in der 1. Potenz vor.

Man nennt die Gleichung deshalb eine **Gleichung 1. Grades** oder **lineare Gleichung.**

Die Gleichung

$$5 \cdot x^2 = 20$$

ist eine **Gleichung zweiten Grades.**

Die Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 54$$

wird als Gleichung **dritten Grades** bezeichnet.

Allgemein gilt:

Der Grad einer Gleichung wird durch die höchste Potenz der in ihr vorkommenden Unbekannten bestimmt.

Da die Aufgabe, die Quadratseite x aus einem gegebenen Flächeninhalt F zu errechnen, auf eine Gleichung zweiten Grades ($x^2 = F$) führt, nennt man allgemein die Gleichungen 2. Grades auch **quadratische Gleichungen.**
Ebenso heißen die Gleichungen 3. Grades auch **kubische Gleichungen,** weil die Kante x des Würfels (lat. *cubus* „Würfel") mit dem Volumen V aus einer Gleichung 3. Grades ($x^3 = V$) bestimmt wird.

$$\left.\begin{aligned} 4x &= 12 \\ U &= 3{,}14\,x \end{aligned}\right\}\ \text{Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen)}$$

$$\left.\begin{aligned} 5x^2 &= 20 \\ x^2 &= F \end{aligned}\right\}\ \text{Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen)}$$

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 6 &= 70 \\ x^3 &= V \end{aligned}\right\}\ \text{Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen)}$$

2. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

a) Das Auflösen von Gleichungen

Das Gleichheitszeichen einer Bestimmungsgleichung stellt eine Forderung: Es sollen die Werte der Unbekannten ermittelt werden, die aus der Bestimmungsgleichung eine identische Gleichung machen. Das Verfahren der Bestimmung solcher Werte heißt **Auflösen** der Gleichung. Die gefundenen Werte nennt man **Lösungen** oder **Wurzeln**:

Bestimmungsgleichung $x + 3 = 10$
Identische Gleichung $7 + 3 = 10$
$x = 7$ ist die Lösung der Bestimmungsgleichung.

Die Lösung einer Bestimmungsgleichung wird durch **Umformen** ermittelt. Man verwandelt die gegebene Gleichung durch Rechenoperationen so, daß auf der einen Seite allein die Unbekannte und auf der anderen Seite nur bekannte Größen stehen. Die Gleichung ist dann nach der Unbekannten **aufgelöst** worden.
Welche Rechnungsarten zum Auflösen einer Gleichung nötig sind, richtet sich nach den vorkommenden Zahlenausdrücken. Die Rechnungsarten müssen bewirken, daß die **Unbekannte isoliert** wird. Bei jedem Umformen muß wieder eine richtige Gleichung entstehen. Wird also durch eine Rechenoperation der Wert des auf einer Seite der Gleichung stehenden Zahlenausdrucks verändert, so muß durch die gleiche Rechenoperation auch der Wert des auf der anderen Seite stehenden Zahlenausdrucks entsprechend geändert werden.

> **Eine Gleichung bleibt richtig, wenn beide Seiten durch gleiche Rechnungsarten mit gleichen Zahlen verändert werden.**

Man darf z. B. beide Seiten einer Gleichung

um dieselben Zahlen vermehren,
um dieselben Zahlen vermindern,
mit denselben Zahlen multiplizieren,
durch dieselben Zahlen dividieren.

Einfache Beispiele

1. Beispiel: $x - 5 = 7$

Addiert man auf der linken Seite 5, so wird x isoliert. Auf der rechten Seite muß ebenfalls **5** addiert werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} x - 5 \quad &= 7 \\ x - 5 + \mathbf{5} &= 7 + \mathbf{5} \\ x \quad &= \underline{\underline{12}} \end{aligned} \qquad \textit{Probe: } 12 - 5 = 7$$

2. Beispiel: $x + 7 = 22$

In diesem Fall muß auf beiden Seiten 7 subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} x + 7 \quad &= 22 \\ x + 7 - \mathbf{7} &= 22 - \mathbf{7} \\ x \quad &= \underline{\underline{15}} \end{aligned} \qquad \textit{Probe: } 15 + 7 = 22$$

3. Beispiel: $4x = 20$

In dieser Aufgabe kann x nicht durch Addieren oder Subtrahieren von seinem Koeffizienten 4 befreit werden; x wird aber isoliert, wenn man beide Seiten mit 4 dividiert:

$$\begin{aligned} 4x &= 20 \\ \frac{4x}{\mathbf{4}} &= \frac{20}{\mathbf{4}} \\ x &= \underline{\underline{5}} \end{aligned} \qquad \textit{Probe: } 4 \cdot 5 = 20$$

4. Beispiel: $\frac{x}{7} = 9$

Die linke Seite $\frac{x}{7}$ wird durch Multiplizieren mit 7 in die neue Form x gebracht.

Für die rechte Seite ist ebenfalls der 7fache Betrag zu setzen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{7} \quad &= 9 \\ \frac{x}{7} \cdot \mathbf{7} &= 9 \cdot \mathbf{7} \\ x \quad &= \underline{\underline{63}} \end{aligned} \qquad \textit{Probe: } \frac{63}{7} = 9$$

Will man kurz angeben, durch welche Rechenoperationen die Gleichung umgeformt werden soll, so schreibt man hinter einem senkrechten Strich am Ende der Gleichung mit den üblichen Rechenzeichen auf, was auf beiden Seiten der Gleichung zu rechnen ist:

$$\begin{aligned} x - 5 &= 7 \quad | + 5 \\ x &= \underline{\underline{12}} \\ 4x &= 20 \quad | : 4 \\ x &= \underline{\underline{5}} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + 7 &= 22 \; | - 7 \\ x &= \underline{\underline{15}} \\ \frac{x}{7} &= 9 \; | \cdot 7 \\ x &= \underline{\underline{63}} \end{aligned}$$

5. Beispiel: $19 - x = 8$

Für das Auflösen dieser Gleichung gibt es verschiedene Möglichkeiten:

entweder

$$\begin{aligned} 19 - x &= 8 \quad | + x \\ 19 \quad &= 8 + x \; | - 8 \\ 11 \quad &= x \\ x &= \underline{\underline{11}} \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 19 - x &= 8 \quad | - 19 \\ -x &= -11 \; | \cdot (-1) \\ x &= \underline{\underline{11}} \end{aligned}$$

$$\textit{Probe: } 19 - 11 = 8$$

6. Beispiel: Wird eine technische Formel als Bestimmungsgleichung verwendet, so werden die Formelgrößen ebenfalls nach den oben besprochenen Regeln so umgestellt, daß die Unbekannte isoliert wird. $\gamma = \frac{V}{G}$ ist nach G aufzulösen (vgl. S. 67).

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{G}{V} \quad | \cdot V \\ V \cdot \gamma &= G \\ G &= \underline{\underline{V \cdot \gamma}} \end{aligned}$$

7. Beispiel: Welchen Querschnitt F muß ein kurzer Pfeiler haben, wenn seine zulässige Beanspruchung $\sigma = 7 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$ betragen und er eine Belastung $P = 12{,}6$ Mp aufnehmen soll?

$\left(\text{Formel: } \sigma = \frac{P}{F}\right)$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F} \quad | \cdot F \\ \sigma \cdot F &= P \quad | : \sigma \\ F &= \frac{P}{\sigma} \end{aligned}$$

$$F = \frac{12600\,\text{kp}}{7\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}} = \frac{12600}{7}\,\frac{\text{kp}}{\text{kp}} \cdot \text{cm}^2$$

$$F = \underline{\underline{1800\,\text{cm}^2}}$$

b) Gleichungen in Verbindung mit algebraischen Summen und Klammerausdrücken

1. Beispiel: $3x + 5 = 26$

Das Isolieren der Unbekannten x erfolgt durch zwei Umformungen. Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 5, so ergibt sich $3x = 21$; werden nun beide Seiten durch 3 dividiert, so erhält man $x = 7$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 26 \quad | - 5 \\ 3x &= 21 \quad | : 3 \\ x &= \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

Probe: $3 \cdot 7 + 5 = 21 + 5 = 26$

2. Beispiel: $11x - 21 = 3x + 19$

Glieder mit x treten auf beiden Seiten auf. Man ordnet die Gleichung so, daß alle Glieder, die den Faktor x enthalten, auf der einen, die übrigen auf der anderen Seite stehen. Subtrahiert man auf beiden Seiten $3x$, so erhält man $8x - 21 = 19$. Addiert man auf beiden Seiten 21, so entsteht $8x = 40$; dividiert man beide Seiten durch 8, so ergibt sich $x = 5$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} 11x - 21 &= 3x + 19 \quad | - 3x \\ 8x - 21 &= 19 \quad | + 21 \\ 8x &= 40 \quad | : 8 \\ x &= \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 11 \cdot 5 - 21 &= 55 - 21 = 34 \\ 3 \cdot 5 + 19 &= 15 + 19 = 34 \end{aligned}$$

3. Beispiel: $53 - 5x - 21 + 22x = 18x + 17 - 4x - 51$

Beide Seiten der Gleichung können vereinfacht werden, bevor das Auflösen der Gleichung beginnt. Man erhält durch Zusammenfassen $17x + 32 = 14x - 34$. Subtrahiert man auf beiden Seiten $14x$, so entsteht $3x + 32 = -34$. Subtrahiert man auf beiden Seiten 32, so ergibt sich $3x = -66$; dividiert man beide Seiten durch 3, so erhält man $x = -22$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} 53 - 5x - 21 + 22x &= 18x + 17 - 4x - 51 && |\ \text{zusammenfassen} \\ 17x + 32 &= 14x - 34 && |-14x \\ 3x + 32 &= -34 && |-32 \\ 3x &= -66 && |:3 \\ x &= \underline{\underline{-22}} \end{aligned}$$

Probe:

$$53 - 5 \cdot (-22) - 21 + 22 \cdot (-22) = 53 + 110 - 21 - 484 = -342$$
$$18 \cdot (-22) + 17 - 4(-22) - 51 = -396 + 17 + 88 - 51 = -342$$

4. Beispiel: $ax + bx = c$

Sind a, b und c bekannte Zahlen, so hebt man auf der linken Seite der Gleichung den gemeinsamen Faktor x aus und erhält $x \cdot (a + b) = c$. Nun isoliert man x, indem man beide Seiten der Gleichung durch $(a + b)$ dividiert. Es ergibt sich $x = \frac{c}{a+b}$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} ax + bx &= c && |\ x \text{ ausheben} \\ x \cdot (a + b) &= c && |:(a+b) \\ x &= \underline{\underline{\frac{c}{a+b}}} \end{aligned}$$

Probe:

$$a \cdot \frac{c}{a+b} + b \cdot \frac{c}{a+b} = \frac{ac + bc}{a+b} = \frac{c \cdot (a+b)}{a+b} = c$$

5. Beispiel: $4x + (12 - 7x) = 15 - (4x - 2)$

Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Klammerausdrücke, in denen die Unbekannte x vorkommt. Erst nach dem *Auflösen der Klammern* wird das Vereinfachen möglich.

Kurzform:

$$\begin{aligned} 4x + (12 - 7x) &= 15 - (4x - 2) && |\ \text{Klammern auflösen} \\ 4x + 12 - 7x &= 15 - 4x + 2 && |\ \text{zusammenfassen} \\ 12 - 3x &= 17 - 4x && |+4x \\ 12 + x &= 17 && |-12 \\ x &= \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Probe:

$$4 \cdot 5 + (12 - 7 \cdot 5) = 20 + 12 - 35 = -3$$
$$15 - (4 \cdot 5 - 2) = 15 - (20 - 2) = -3$$

6. Beispiel: $6a^2 - 3b(x + 2a) = 3b(2a - 3x) - 4a(b - 2x)$

Die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Klammerausdrücke enthalten die Unbekannte x. Wir erhalten zunächst durch Ausmultiplizieren der Klammern

$$6a^2 - 3bx - 6ab = 6ab - 9bx - 4ab + 8ax$$

und durch Zusammenfassen

$$6a^2 - 3bx - 6ab = 2ab - 9bx + 8ax.$$

Die Gleichung ordnen wir so, daß auf der linken Seite nur Glieder stehen, die x als Faktor enthalten, auf der rechten Seite nur Glieder, die x nicht als Faktor enthalten. Zu dem Zwecke müssen wir auf beiden Seiten der Gleichung einen Ausdruck addieren, der auf der linken Seite die Summanden $6a^2$ und $-6ab$, auf der rechten die Summanden $-9bx$ und $+8ax$ aufhebt. Es ist also auf beiden Seiten der Ausdruck $(-6a^2+6ab+9bx-8ax)$ zu addieren. Er enthält mit entgegengesetzten Vorzeichen alle Glieder der linken Seite, die x nicht enthalten, und alle Glieder der rechten Seite, die x enthalten. Beim Addieren fallen links die Glieder ohne x, rechts die Glieder mit x weg, und somit ist die Gleichung im gewünschten Sinne geordnet. Wir erhalten dabei

$$\left.\begin{array}{r} 6a^2-3bx-6ab \\ -6a^2+9bx+6ab-8ax \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 2ab-9bx+8ax \\ -6a^2+6ab+9bx-8ax \end{array}\right.$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich $6bx-8ax=8ab-6a^2$.

Jeder Summand dieser Gleichung enthält den Faktor 2. Wir dividieren daher jede Seite der Gleichung, d.h. jeden einzelnen Summanden, durch 2 und erhalten

$$3bx-4ax=4ab-3a^2.$$

Hebt man aus den Summanden der linken Seite den gemeinsamen Faktor x aus, so wird

$$x\cdot(3b-4a)=4ab-3a^2.$$

Die Division durch $(3b-4a)$ ergibt

$$x=\frac{4ab-3a^2}{3b-4a}.$$

Kurzform:

$$\begin{aligned}
6a^2-3b(x+2a)&=3b(2a-3x)-4a(b-2x) && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren}\\
6a^2-3bx-6ab&=6ab-9bx-4ab+8ax && \mid \text{zusammenfassen}\\
6a^2-3bx-6ab&=2ab-9bx+8ax && \mid +(-6a^2+6ab+9bx-8ax)\\
6bx-8ax&=8ab-6a^2 && \mid :2\\
3bx-4ax&=4ab-3a^2 && \mid x \text{ ausheben}\\
x\cdot(3b-4a)&=4ab-3a^2 && \mid :(3b-4a)\\
x&=\underline{\underline{\frac{4ab-3a^2}{3b-4a}}}
\end{aligned}$$

Probe: $6a^2-3b\left(\frac{4ab-3a^2}{3b-4a}+2a\right)=6a^2-3b\cdot\frac{10ab-11a^2}{3b-4a}=\frac{51a^2b-24a^3-30ab^2}{3b-4a}$;

$$3b\left(2a-3\frac{4ab-3a^2}{3b-4a}\right)-4a\left(b-2\cdot\frac{4ab-3a^2}{3b-4a}\right)$$

$$=3b\cdot\frac{-6ab+a^2}{3b-4a}-4a\cdot\frac{3b^2-12ab+6a^2}{3b-4a}=\frac{-30ab^2+51a^2b-24a^3}{3b-4a}$$

7. Beispiel: $5a(x+b)-2b(x-a)+3c(2x+b)-a(3x+7b)+b(5x-3c)-2cx$
$=5(2a+3b+4c)$

Kurzform:

$$\begin{aligned}
&5a(x+b)-2b(x-a)+3c(2x+b)-a(3x+7b)+b(5x-3c)-2cx\\
&\qquad=5(2a+3b+4c) && \mid \text{Klammern links ausmultiplizieren}\\
&5ax+5ab-2bx+2ab+6cx+3bc-3ax-7ab+5bx-3bc-2cx\\
&\qquad=5(2a+3b+4c) && \mid \text{zusammenfassen}\\
&2ax+3bx+4cx=5(2a+3b+4c) && \mid x \text{ ausheben}\\
&x\cdot(2a+3b+4c)=5\cdot(2a+3b+4c) && \mid :(2a+3b+4c)\\
&x=\underline{\underline{5}}
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} & 5a(5+b)-2b(5-a)+3c(2\cdot 5+b)-a(3\cdot 5+7b)+b(5\cdot 5-3c)-2\cdot 5\cdot c \\ &= 25a+5ab-10b+2ab+30c+3bc-15a-7ab+25b-3bc-10c \\ &= 10a+15b+20c; \\ & 5\cdot(2a+3b+4c)=10a+15b+20c \end{aligned}$$

Klammern, in denen die Unbekannte vorkommt, müssen beim Auflösen der Gleichung beseitigt werden.

Andere Klammern werden nur dann beseitigt, wenn sich dadurch die Gleichung vereinfacht. Das Ausmultiplizieren des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Produkts hätte im 7. Beispiel zu keiner Vereinfachung geführt, es hätte im Gegenteil das Bestimmen der Unbekannten erschwert.

c) Bruchgleichungen

Gleichungen, in denen Dezimalbrüche als Faktoren oder Summanden vorkommen, werden unter Beachtung der Regeln für das Rechnen mit Dezimalbrüchen wie die Gleichungen behandelt, in denen nur ganze Zahlen auftreten. In den folgenden Beispielen ist die Probe wegen Platzmangels weggelassen worden, sie muß jedoch in jedem Falle durchgeführt werden.

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} 5{,}7\cdot(7x-20{,}7)+1{,}7\cdot(10{,}4-2{,}7x) &= 3{,}7\cdot(15{,}4-4{,}7x)-(x-3{,}81) && \mid \text{Klammern auflösen} \\ 39{,}9x-117{,}99+17{,}68-4{,}59x &= 56{,}98-17{,}39x-x+3{,}81 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 35{,}31x-100{,}31 &= 60{,}79-18{,}39x && \mid +100{,}31+18{,}39x \\ 35{,}31x+18{,}39x &= 60{,}79+100{,}31 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 53{,}7x &= 161{,}1 && \mid :53{,}7 \\ x &= \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Wie von der Bruchrechnung her bekannt ist, werden gemeine Brüche vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht. Sie werden also durch Erweitern auf den – beiden Seiten der Gleichung gemeinsamen – Hauptnenner gebracht. Wenn man jedes Glied der Gleichung mit diesem Hauptnenner multipliziert, kann gekürzt werden, so daß bei allen Brüchen der Gleichung der Nenner wegfällt. Die Darstellung wird vereinfacht, wenn nur die Produkte aus den Zählern und den zugehörigen Erweiterungszahlen aufgeschrieben werden.

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\cdot x+\frac{9-7x}{3} &= 5\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot(x-8) && \mid \text{auf Hauptnenner 12 bringen} \\ \frac{3}{12}x+\frac{4\cdot(9-7x)}{12} &= \frac{6\cdot 11}{12}-\frac{2}{12}\cdot(x-8) && \mid \cdot 12 \\ 3x+4\cdot(9-7x) &= 6\cdot 11-2\cdot(x-8) && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 3x+36-28x &= 66-2x+16 && \mid -36+2x \\ 3x-28x+2x &= 66+16-36 && \mid \text{zusammenfassen} \\ -23x &= 46 && \mid :(-23) \\ x &= \underline{\underline{-2}} \end{aligned}$$

Man kann die vorgegebene Gleichung auch unmittelbar mit dem Hauptnenner multiplizieren. Stellt man das Auflösen in der Kurzform dar, so ist es zweckmäßig, den zu jedem Bruch gehörenden Erweiterungsfaktor zu notieren und den Lösungsgang etwa in folgender Form zu schreiben:

$$\begin{aligned}
\overset{\cdot 3}{\frac{1}{4}}\cdot x + \overset{\cdot 4}{\frac{9-7x}{3}} &= 5\overset{\cdot 6}{\frac{1}{2}} - \overset{\cdot 2}{\frac{1}{6}}\cdot(x-8) && \mid \cdot 12\\
3x + 36 - 28x &= 66 - 2x + 16 && \mid +(2x-36)\\
-23x &= 46 && \mid :(-23)\\
x &= \underline{\underline{-2}}
\end{aligned}$$

Gleichungen, bei denen die Unbekannte x in Nennern von Brüchen vorkommt, werden zweckmäßig mit dem Hauptnenner multipliziert, so daß die Nenner beseitigt werden.

3. Beispiel: $\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)} = \frac{2b}{x+b} + \frac{5a}{3x-a}$ | mit Hauptnenner $(3x-a)(x+b)$ multiplizieren

$$\begin{aligned}
\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)}\cdot(3x-a)(x+b) &= \frac{2b}{x+b}\cdot(3x-a)(x+b) + \frac{5a}{3x-a}\cdot(3x-a)(x+b) && \mid \text{kürzen}\\
10ax &= 2b(3x-a) + 5a(x+b) && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
10ax &= 6bx - 2ab + 5ax + 5ab && \mid \text{ordnen und zusammenfassen}\\
5ax - 6bx &= 3ab && \mid x \text{ ausheben}\\
x(5a-6b) &= 3ab && \mid :(5a-6b)\\
x &= \frac{3ab}{5a-6b}
\end{aligned}$$

Kurzform:

$$\begin{aligned}
\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)} &= \overset{\cdot(3x-a)}{\frac{2b}{x+b}} + \overset{\cdot(x+b)}{\frac{5a}{3x-a}} && \mid \cdot(x+b)\cdot(3x-a)\\
10ax &= 6bx - 2ab + 5ax + 5ab && \mid +(-5ax-6bx)\\
5ax - 6bx &= 3ab && \mid \text{ausheben}\\
x(5a-6b) &= 3ab && \mid :(5a-6b)\\
x &= \underline{\underline{\frac{3ab}{5a-6b}}}
\end{aligned}$$

Bruchgleichungen vereinfacht man vor dem Auflösen, indem man jedes Glied mit dem Hauptnenner multipliziert. Dann fallen durch Kürzen bei allen Brüchen der Gleichung die Nenner weg.

d) Textgleichungen

In der folgenden Aufgabe ist die aufzulösende Gleichung nicht unmittelbar gegeben sondern in Text eingekleidet, aus dem sich eine Gleichung aufstellen läßt.

Das 7fache einer Zahl, um 11 vermindert, ergibt das 5fache der um 3 vermehrten Zahl. Wie findet man die Zahl aus diesen Angaben? Die Frage soll mit Hilfe einer Gleichung beantwortet werden.

Lösung: Die gesuchte Zahl wird mit x bezeichnet und die für x geltende Bestimmungsgleichung aufgestellt. Man bringt deshalb zunächst zum Ausdruck, was nach der Aufgabe für die Unbekannte x gefordert wird. Ihr 7faches heißt $7x$, das um 11 verminderte 7fache ergibt $7x-11$, die um 3 vermehrte Zahl x heißt $x + 3$, ihr 5faches $5 \cdot (x + 3)$. Die Ausdrücke $7x - 11$ und $5 \cdot (x + 3)$ sind gleichwertig, es ergibt sich somit als Bestimmungsgleichung für x

$$7x - 11 = 5 \cdot (x + 3).$$

Das Auflösen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 7x - 11 &= 5x + 15 \qquad &&| -5x + 11 \\ 2x &= 26 &&| : 2 \\ x &= \underline{\underline{13}} \end{aligned}$$

Probe: Das 7fache von 13 ist 91. Diese Zahl, um 11 verkleinert, ergibt $91 - 11 = 80$; 13, um 3 vermehrt, ergibt 16. Das 5fache von 16 ist $5 \cdot 16 = 80$. Die Zahl 13 erfüllt die in der Aufgabe gestellten Forderungen.

Auch in der nächsten Aufgabe ist die aufzulösende Gleichung nicht unmittelbar gegeben. Statt dessen wird ein Problem geschildert, wie es in der Praxis auftreten kann; es muß erst in die Sprache der Mathematik übersetzt und in Form einer Gleichung niedergeschrieben werden. Gerade durch Lösen von Textaufgaben wird geübt, mathematische Begriffe und Regeln, die aus Problemen der Umwelt entwickelt werden, wieder auf die Praxis anzuwenden, um neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Wieviel Kilogramm Zink (Dichte 7 kg/dm³) sind mit 53,4 kg Kupfer (Dichte 8,9 kg/dm³) zu legieren, damit man Messing mit der Dichte 8,4 kg/dm³ erhält?

Lösung: Ist die Masse des Zinks x kg, so werden aus 53,4 kg Kupfer durch Zusatz von x kg Zink insgesamt $(53{,}4 + x)$ kg Messing hergestellt. Nach der Formel $V = \frac{m}{\varrho}$ sind das $\frac{53{,}4}{8{,}9}$ dm³ Kupfer und $\frac{x}{7}$ dm³ Zink, die zu $\frac{53{,}4 + x}{8{,}4}$ dm³ Messing verarbeitet werden. Das Gesamtvolumen ergibt sich als Summe der Volumen der Bestandteile. Man erhält für das Gesamtvolumen also die beiden Ausdrücke

$$\left(\frac{53{,}4}{8{,}9} + \frac{x}{7}\right)\text{dm}^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{53{,}4 + x}{8{,}4}\,\text{dm}^3$$

und zum Berechnen der Unbekannten x die Gleichung

$$\frac{53{,}4}{8{,}9} + \frac{x}{7} = \frac{53{,}4 + x}{8{,}4}.$$

Das Auflösen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 6 + \frac{x}{7} &= \frac{53{,}4 + x}{8{,}4} \qquad &&| \cdot 8{,}4 \\ 50{,}4 + 1{,}2x &= 53{,}4 + x &&| -(50{,}4 + x) \\ 0{,}2x &= 3 &&| : 0{,}2 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Den 53,4 kg Kupfer müssen demnach $\underline{\underline{\text{15 kg Zink}}}$ zugesetzt werden.

Probe: Fügt man 15 kg Zink zu 53,4 kg Kupfer, so erhält man 68,4 kg Messing.

$\frac{68{,}4}{8{,}4}$ dm³ oder $8\frac{1}{7}$ dm³ Messing enthalten

$\frac{53{,}4}{8{,}9}$ dm³ oder 6 dm³ Kupfer und $\frac{15}{7}$ dm³ oder $2\frac{1}{7}$ dm³ Zink.

$8\frac{1}{7} = 6 + 2\frac{1}{7}$.

Für Textgleichungen lassen sich folgende Regeln angeben:

Das Aufstellen einer Bestimmungsgleichung

1. Die genaue Bezeichnung der Unbekannten wird festgelegt.
2. Alle Beziehungen der in der Aufgabe genannten Größen werden mit mathematischen Rechenzeichen aufgeschrieben, die Unbekannte wird dabei wie eine bekannte Größe behandelt.
3. Ein durch zwei verschiedene Zahlenausdrücke darstellbarer Wert wird aufgesucht. Enthält wenigstens der eine Ausdruck die Unbekannte, so bildet er die eine Seite, der andere Ausdruck die andere Seite der Bestimmungsgleichung.

Das Auflösen der Bestimmungsgleichung

1. Jede Seite der Gleichung wird für sich soweit wie möglich vereinfacht.
2. Die Gleichung wird geordnet und danach wieder soweit wie möglich vereinfacht.
3. Die Unbekannte wird isoliert.

Probe

1. Die Lösung wird an Stelle der Unbekannten in die Ausgangsgleichung eingesetzt.
2. Es ist zu prüfen, ob der errechnete Wert den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Zur Prüfung der Richtigkeit der Lösung von Textaufgaben genügt es nicht, daß die gefundenen Werte in die Gleichung eingesetzt werden; es könnte ja schon beim Aufstellen der Gleichung ein Fehler unterlaufen sein. Deshalb muß die Lösung anhand des wirklichen Sachverhalts überprüft werden. Allgemein spricht man vom **Kriterium der Praxis,** wenn durch mathematische Operationen oder theoretische Überlegungen gewonnene Ergebnisse am wirklichen Sachverhalt überprüft werden.

AUFGABEN

1. a) $x + 3 = 8$ **b)** $8 + x = 3$ **c)** $x + 0{,}7 = 2$ **d)** $2\frac{1}{3} + x = 5$ **e)** $x + a = b$

2. a) $x - 6 = 8$ **b)** $x - 5\frac{1}{7} = 2$ **c)** $7{,}5 - x = 2{,}1$ **d)** $3 - x = 7\frac{2}{3}$ **e)** $x - c = d$

3. a) $4x = 28$ **b)** $35x = 7$ **c)** $1{,}4x = 42$ **d)** $3\frac{1}{3}x = 5\frac{5}{9}$ **e)** $p \cdot x = q$

4. a) $\frac{x}{5} = 2$ **b)** $\frac{x}{4} = 2{,}4$ **c)** $\frac{x}{3} = 1$ **d)** $\frac{x}{2} = 3\frac{1}{7}$ **e)** $\frac{x}{a} = b$

5. a) Im 2. Quartal produzierte eine Maschinenfabrik monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr, als der Monatsdurchschnitt des 1. Quartals ergab. So wurden im 1. Halbjahr insgesamt 282 Maschinen fertiggestellt. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt des 1. Quartals?

b) In einen Spülkessel wurden 160 l Wasser von 62°C gefüllt. Wieviel Liter Leitungswasser von 12°C müssen zugegossen werden, um eine Temperatur von 32°C zu erhalten?

6. In der Formel $t = t_2 - t_1$ bedeuten t Temperaturzunahme, t_1 Anfangstemperatur, t_2 Endtemperatur. Die Gleichung ist aufzulösen nach

a) t_1 (Zahlenbeispiel: $t_2 = 33{,}5°$, $t = 25{,}8°$)

b) t_2 (Zahlenbeispiel: $t_1 = 18°$, $t = 7{,}1°$).

Anmerkung: Hier wie in den folgenden Aufgaben sollen die Zahlenwerte erst eingesetzt werden, wenn die Gleichung aufgelöst worden ist.

7. Der Spanquerschnitt F wird aus der Spanbreite b und der Spantiefe t nach der Formel $F = b \cdot t$ berechnet. Die Gleichung ist aufzulösen nach

a) b (Zahlenbeispiel: $F = 0{,}16\ \mathrm{mm}^2$, $t = 0{,}2\ \mathrm{mm}$)

b) t (Zahlenbeispiel: $F = 0{,}36\ \mathrm{mm}^2$, $b = 1{,}2\ \mathrm{mm}$).

8. Die Masse m eines Körpers wird aus dem Volumen V und der Dichte ϱ nach der Formel $m = V \cdot \varrho$ berechnet. Die Gleichung ist nach V aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $m = 24{,}03\ \mathrm{kg}$, $\varrho = 8{,}9\ \mathrm{kg/dm}^3$).

9. Bei gleichförmiger Bewegung wird der Weg s, der mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t zurückgelegt wird, nach der Formel $s = v \cdot t$ berechnet. Die Gleichung ist nach t aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $s = 66\ \mathrm{km}$, $v = 27{,}5\ \mathrm{m/s}$)

10. Die Umfangsgeschwindigkeit v eines Schwungrades wird aus dem Durchmesser d und der Drehzahl n nach der Formel $v = \pi \cdot d \cdot n$ berechnet. Die Gleichung ist nach n aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $v = 15{,}4\ \mathrm{m/s}$, $d = 500\ \mathrm{mm}$, $\pi = 3\frac{1}{7}$)

11. Eine Kraft P erzeugt an einer Kurbel vom Radius r das Drehmoment $M = P \cdot r$. Die Gleichung ist nach P aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $M = 13{,}42\ \mathrm{kpm}$, $r = 305\ \mathrm{mm}$).

12. Durchfließt ein elektrischer Strom mit der Stärke I ein Stück eines Leiters, das den Widerstand R hat, so berechnet man die Spannungsdifferenz U zwischen den Enden des Leiterstücks nach dem Ohmschen Gesetz $U = I \cdot R$. Die Gleichung ist nach R aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $U = 220$ Volt, $I = 0{,}55$ Ampere)

13. Der Widerstand R eines elektrischen Leiters wird aus seinem spezifischen Widerstand ϱ, seiner Länge l und seinem Querschnitt F nach der Formel $R = \varrho \cdot \frac{l}{F}$ berechnet. Die Gleichung ist nach F aufzulösen. $\left(\text{Zahlenbeispiel: } R = 143\,\Omega,\ \varrho = 0{,}0286\,\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}},\ l = 2\ \mathrm{km}\right)$

14. a) $8x + 7 = 39$ **b)** $3x - 11 = 16$ **c)** $15 + 2x = 25$ **d)** $51 - 7x = 2$

15. a) $px + q = r$ **b)** $a - bx = c$ **c)** $4d + nx = 7d$ **d)** $5mx - n = p$

16. a) $13x - 19 = 9x + 5$ **b)** $29 + 14x = 5x + 2$

c) $14 - 7x = 15 - 8x$ **d)** $21x + 17 = 11x + 7$

17. a) $2 - 9x + 3 - 7x = 12 - 16x + 13 - 10x$

b) $11 - x = 5x + 12 - 8x + 7$

c) $13x - 43 = 11x + 77 - 2x + 8$

d) $6x + 7 - 14x + 23 - 37x = 0$.

18. a) $ax - 5b = 3bx + 2a$ **b)** $ax + b = cx + d$

c) $4ax + 3b - 5bx = 3bx + 8a - b$ **d)** $3ax - 6a^2 = 14ab - 7bx$

19. $12x - (5x + 4) = 7 - (23x - 19)$

20. $37x - [59 - (25 - 4x) - 7x] = 47 - (9x - 17)$

21. $11x - 6(x - 3) = 3 \cdot (9 - x) + 47$

22. $4ax - 6a(x - b) = 7bx - 3b(4x - 5b)$

23. $7{,}3x - (17{,}8x + 2{,}6) = 19{,}3x - [15{,}6 - (5{,}2x + 20{,}1)] - 6{,}4$

24. $2{,}8 \cdot (x - 2{,}6) + 22{,}97 + 5{,}2 \cdot (0{,}7 - 2x) = 2{,}1 \cdot (x + 2{,}6) - 27{,}84$

25. $(3{,}4 + 2{,}3a) \cdot x = 2{,}2a - (x + 2{,}6) \cdot (2.3a - 3{,}4)$

26. $1{,}7 \cdot x - (x - 3{,}4) \cdot m = m \cdot (5{,}1 - m)$

27. $\frac{x}{4} - \frac{7x - 9}{3} = 5\frac{1}{2} - \frac{x - 8}{6}$

28. $\frac{x + 1}{10} + \frac{3 - x}{30} - \frac{x + 1}{12} = \frac{2x + 3}{20} - \frac{x - 4}{15}$

29. $\frac{1}{5} - \frac{7 - 4x}{4} + \frac{3x - 5}{10} = \frac{1 - 16x}{5} - \frac{3}{4}$

30. $\frac{4x - 3}{4} - \frac{3x + 2}{9} = \frac{x + 1}{3} - \frac{5}{12}$

31. $\frac{2x + b}{22} - \frac{15b - 8a}{33} = \frac{13x - a}{33} - \frac{2a - 3b}{6}$

32. $\frac{a}{2b} = \frac{2a - x}{2a} - \frac{b - 2x}{3b}$

33. $\frac{1}{3a} + \frac{3}{5bx} = \frac{1}{ax} + \frac{1}{5b}$

34. $\frac{7x + 9}{10x} - 2\frac{1}{3} - \frac{19}{6x} = 1\frac{2}{5} - \frac{2x + 3}{2x} - 2\frac{5}{12}$

35. $\frac{23}{56} = \frac{2}{x - 3} + \frac{1}{8}$

36. $\frac{7}{2x - 14} - \frac{13}{24} + \frac{1}{12x - 84} = \frac{7}{3x - 21} - \frac{3}{8x - 56}$

37. $\frac{2}{x + 4} + \frac{3}{x + 3} = \frac{43}{x^2 + 7x + 12}$

38. $\frac{2}{3 \cdot (x + 2)} = \frac{40}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2x - 6}$

39. Der Flächeninhalt F eines Kreisabschnitts wird nach der Formel

$$F = \tfrac{1}{2}[r(b - s) + s \cdot h]$$

berechnet; dabei bezeichnet r den Radius des Kreisbogens, b seine Bogenlänge, s die Sehnenlänge und h die Höhe des Kreisabschnitts. Die Formel ist nach

a) r, **b)** b, **c)** s, **d)** h

aufzulösen.

40. Das Gewicht G eines Keiles wird nach der Formel

$$G = \frac{a_1 + 2a_2}{6} \cdot b \cdot h \cdot \gamma$$

berechnet; dabei bezeichnet a_1 die Länge der Keilschneide, a_2 die Länge des Keilfußes, b die Breite des Keilfußes, h die Höhe des Keiles, γ die Wichte. Die Formel ist nach

a) a_1, **b)** a_2, **c)** b, **d)** h, **e)** γ

aufzulösen.

41. Der Widerstand R einer Stromverzweigung mit dem Widerstand R_1 des einen, R_2 des anderen Zweiges wird nach der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

berechnet. Die Formel ist

a) nach R_1, **b)** nach R_2

aufzulösen.

42. Die Kapazität C der in Reihe geschalteten 3 Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2 und C_3 wird nach der Formel $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ berechnet. Die Formel ist nach den Kapazitäten C, C_1, C_2, C_3 aufzulösen.

43. Aus der Gegenstandsweite g und der Bildweite b wird die Brennweite f einer Linse nach der Formel $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ berechnet. Die Formel ist nach f aufgelöst zu schreiben.

44. Zwei Dreher A und B, die zusammen 55 Werkstücke anzufertigen haben, beginnen gleichzeitig mit der Fertigung. Nach wieviel Stunden haben sie ihren gemeinsamen Arbeitsauftrag erfüllt, wenn A in der Stunde 5 und B 6 Werkstücke anfertigt?

45. Um wichtige Zeichen (Herstellungsnummern u.a.) in polierte Maschinenteile aus Stahl einzuätzen, verwendet man verdünnte Salpetersäure. Wieviel Liter Wasser sind in $\frac{1}{8}$ l konzentrierte Salpetersäure von der Dichte 1,5 g/cm³ zu schütten, damit Ätzflüssigkeit von der erforderlichen Dichte 1,1 g/cm³ entsteht?

46. Für den Gesamtwiderstand (R_{ges}) zweier parallelgeschalteter Widerstände (R_1 und R_2) gilt die Beziehung $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
Wie groß ist der eine der parallelgeschalteten Widerstände, wenn der andere 50 Ω und der Gesamtwiderstand 27 Ω beträgt?

47. Durch Kalidüngung konnte die Kartoffelernte eines Bauern um 13,4% erhöht werden und betrug nun 22,68 t je ha. Wie hoch war sie auf ungedüngtem Feld?

48. In einer LPG sind zwei Brigaden für das Einbringen der Getreideernte eingesetzt. Durch bessere Arbeitsorganisation benötigt die eine Brigade nur $\frac{3}{7}$ der Gesamtzeit. Wieviel Stunden benötigt die andere Brigade, wenn je Doppelzentner Getreide vom Mähen bis zum Drusch für beide Brigaden eine Zeit von 14 Stunden festgestellt wurde?

49. Wie wichtig es ist, im Straßenverkehr aufzupassen und sich umsichtig zu verhalten, zeigen folgende Zahlen: 1957 und in den drei ersten Quartalen 1958 ereigneten sich im demokratischen Sektor von Groß-Berlin 7800 Unfälle, dabei im ersten Dreivierteljahr 1958 312 mehr als 1957. Wieviel Unfälle hatten wir 1957 und wieviel im Januar bis September 1958?

50. Das Stahlschrottaufkommen soll bis 1965 um 50% gesteigert werden. Die volkswirtschaftliche Bedeutung ersieht man daraus, daß eine Tonne Roheisen 6,5 mal so teuer ist, als eine Tonne Schrott. Beide zusammen kosten 300,— DM. Wieviel kostet eine Tonne Schrott?

51. Buntmetalle sind für uns sehr wichtige Grundstoffe und es muß sparsam mit ihnen umgegangen werden, denn für eine Tonne Kupferschrott und eine Tonne Elektrolytkupfer werden zusammen 5310,— DM gezahlt. Der Preis des Kupferschrotts beträgt aber nur 18% von dem des Elektrolytkupfers. Wieviel kostet die Tonne Kupferschrott, wieviel die Tonne Elektrolytkupfer?

52. Eine Baugrube ist durch einen Platzregen vollgelaufen und soll durch 3 Pumpen schnellstens entleert werden. Die erste Pumpe allein benötigt für diese Arbeit 3 h, die zweite allein 4 h und die dritte allein sogar 6 h. In welcher Zeit ist die Baugrube entleert, wenn alle drei Pumpen zugleich in Tätigkeit sind?

53. Durch Einführung technischer Verbesserungen konnte die Produktionsauflage eines volkseigenen Werkes um 60 Werkzeugmaschinen gegenüber dem Vorjahre erhöht werden. Die Produktionsauflage konnte um $\frac{1}{4}$ übererfüllt werden, wodurch eine Produktion erreicht wurde, die 50% über der des Vorjahres lag.

Wie groß ist:

a) die Vorjahrsproduktion gewesen?

b) die Produktion des neuen Jahres?

54. Eine Brigade verpflichtet sich, Handwagen als Massenbedarfsartikel zusätzlich herzustellen. Es wurden im 2. Quartal 36 Wagen mehr hergestellt, als der Monatsdurchschnitt des 1. Quartals ergab. So wurden im 1. Halbjahr insgesamt 510 Wagen hergestellt. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt des 1. Quartals?

55. In jedem Jahr, kurz vor Weihnachten, gehen die Helfer der Nationalen Front und verkaufen Solidaritätsmarken, um unseren alten, verdienten Menschen eine kleine Freude zum Fest zu bereiten. Ein Helfer hatte Marken zu —,50 DM und 1,— DM; zusammen 23 Stück im Werte von 15,50 DM. Wieviel Marken zu —,50 DM und zu 1,— DM hatte er?

56. Für den Bau des Müggelturmes sammelte eine Schulklasse Altmaterial und verkaufte es. Als der Betrag dem Lehrer übergeben wurde, legte dieser 2,— DM zu, „um den Betrag abzurunden". Ein Schüler brachte das Geld zur Post. Er mußte —,20 DM Porto zahlen. Als er zurückkam, sagte er: „Trotzdem ich von dem Geld das Porto zahlen mußte, habe ich noch $\frac{1}{10}$ mehr abschicken können als der Betrag war, den die Klasse gesammelt hat."
Wieviel hatte die Klasse gesammelt?

57. Die bessere Ausstattung mit Maschinen und die Anwendung neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse in der sozialistischen Landwirtschaft führen zu einer wesentlichen Steigerung der tierischen und pflanzlichen Produktion. So konnte z. B. das Eieraufkommen im Bezirk Schwerin im Jahre 1957 im Gegensatz zu 1953 um die Hälfte und noch 8 Mill. gesteigert werden. In den beiden Jahren war der Ertrag zusammen 308 Mill. Eier. Wie hoch war das Eieraufkommen 1957?

58. Der Warenumsatz mit der Sowjetunion, unserem größten Handelspartner, betrug in den Jahren 1958 und 1959 13176 Md. Rubel, d. h. 1959 um 976 Mill. Rubel mehr als 1958. Wie groß war der Umsatz 1958 und wie groß war er 1959?

59. Durch den ständigen Aufschwung der Volkswirtschaft ist es unserem Staate möglich, immer größere Investitionsmittel für den Wohnungsbau bereitzustellen. So wurden 1954 $\frac{1}{5}$, 1955 ebenfalls $\frac{1}{5}$, 1956 $\frac{1}{3}$, 1957 die Hälfte der 1958 hergestellten Wohnungseinheiten gebaut. Zusammen waren es 402000. Wieviel Wohnungseinheiten entfallen auf die einzelnen Jahre?

60. Eine 350 ccm Jawa, das 100000. Motorrad, seitdem wir diese Maschinen aus der ČSR einführen, wurde in der Tschechoslowakischen Botschaft einer Gruppe Junger Pioniere aus Anlaß des 10. Jahrestages als Geschenk überreicht. Wie stark die Einfuhrkurve für diesen Maschinentyp steigt, ist daraus zu ersehen, daß in den Jahren 1957 und 1958 2400 Maschinen mehr eingeführt wurden als von 1948 bis 1956. Wieviel Maschinen wurden von 1948 bis 1956 und von 1957 bis 1958 (bis zur 100 000. Maschine) eingeführt?

61. In einem VE-Betrieb sollen drei Arbeiter, die Verbesserungsvorschläge eingereicht haben, ausgezeichnet werden. Da der Wert der Vorschläge unterschiedlich ist, muß die Höhe der einzelnen Prämien unterschiedlich sein. Der erste Arbeiter soll 100 DM mehr bekommen als der zweite, der dritte die Hälfte des ersten. Zusammen stehen 900 DM zur Verfügung. Wie hoch ist die Prämie jedes einzelnen Arbeiters?

62. Ein Elektrizitätswerk berechnet für die kWh 0,40 DM und als monatliche Zählermiete 0,60 DM. Wählt der Abnehmer aber den sogenannten Haushaltstarif, so muß er eine Grundgebühr von 3,80 DM im Monat zahlen, während die kWh mit 0,08 DM berechnet wird.
Von welchem Verbrauch an lohnt sich der Haushaltstarif?

3. Proportionen

a) Verhältnis zweier Zahlen und Proportionalitätsfaktor

Zum Herstellen von Mörtel für Mauerwerk aus Ziegelsteinen werden gelöschter Kalk und Sand im *Verhältnis* 4 : 9 (gelesen „vier zu neun") gemischt. Man braucht zum Beispiel für 120 *l* Kalk 270 *l* Sand. Man spricht vom Übersetzungs*verhältnis* 1 : 3 eines Fahrrades, wenn das Kettenrad mit den Pedalen eine Umdrehung, das Hinterrad durch den Zahnkranz gleichzeitig drei Umdrehungen macht. Zeigt die Anzeigetafel bei einem Handballspiel 6 : 8, so sagt man, das Tor*verhältnis* ist 6 zu 8. Das Verhältnis zweier Zahlen ermöglicht einen Vergleich der beiden Zahlen. Für Zeichnungen wird das Verhältnis einer gezeichneten zur wirklichen Länge als Maßstab der Zeichnung verwendet.

Die Maße für die Herstellung eines Werkstücks sind aus der Werkstattzeichnung abzulesen. Die Zeichnung kann in natürlicher Größe ausgeführt werden, wenn das Zeichenblatt dazu ausreicht und die Maße übersichtlich angegeben werden können. Man sagt dann, die Zeichnung ist im „Maßstab eins zu eins" angefertigt und schreibt dafür „M 1 : 1". Die Werkstücksabmessungen stimmen dabei mit denen der Zeichnung überein. Oft müssen aber große Werkstücke verkleinert gezeichnet werden. In einer Zeichnung vom „Maßstab eins zu fünf" (geschrieben M 1 : 5) betragen die gezeichneten Abmessungen ein Fünftel ($\frac{1}{5}$) der entsprechenden Abmessungen am Werkstück. Umgekehrt werden kleine Werkstücke, wie Erzeugnisse der Feinmechanik und Optik, vergrößert dargestellt, damit die Maße deutlich eingetragen werden können. Sind gezeichnete Längen doppelt so groß wie die natürlichen, so sagt man, die Zeichnung ist im „Maßstab zwei zu eins" ausgeführt und schreibt dafür „M 2 : 1".

Die Maßstäbe für technische Zeichnungen sind genormt.

Alle Längen derselben technischen Zeichnung sind bei Verkleinerung ein bestimmter Bruchteil, bei Vergrößerung ein bestimmtes Vielfaches der entsprechenden Längen des Werkstücks. Bild und Original stehen jedesmal in dem durch den Maßstab angegebenen Verhältnis (Abb. 12).

Unter dem Verhältnis zweier Größen a und b versteht man den Quotienten $\frac{a}{b}$.

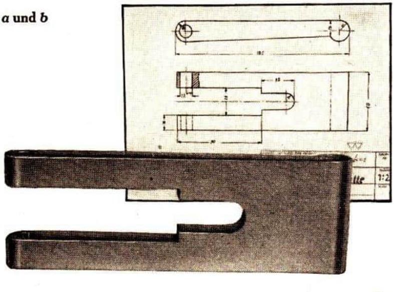


Abb. 12.

Werkstück neben technischer Zeichnung mit dem Maßstab 1 : 2. In der Zeichnung sind alle Längen halb so groß wie am Werkstück.

Jedes Verhältnis von zwei gleichartigen Größen läßt sich als Verhältnis von unbenannten Zahlen schreiben und durch Erweitern oder Kürzen umformen, z. B. 2 cm : 30 cm oder 2 : 30 oder 1 : 15. Jedes Verhältnis wird von zwei Gliedern gebildet, dem Vorderglied und dem Hinterglied.

$$a : b$$
/ \
Vorderglied Hinterglied
des Verhältnisses von a und b

Die genormten Verhältnisse der Maßstäbe werden bei verkleinerter Darstellung mit dem Vorderglied 1, bei vergrößerter mit dem Hinterglied 1 geschrieben.
Ist zum Beispiel eine in der Zeichnung 150 mm lange Strecke in Wirklichkeit 375 mm lang, so ergibt das Verhältnis 150 : 375 mit dem Wert $\frac{2}{5}$ als Maßstab der Zeichnung M 1 : 2,5.

Längen einer in einem bestimmten Maßstab ausgeführten Zeichnung stehen zu den ihnen entsprechenden natürlichen Längen im gleichen Verhältnis. Bezeichnet man mit $a_1, a_2, a_3 \dots$ Längen der Bildstrecken, mit $b_1, b_2, b_3 \dots$ die zugehörigen wirklichen Längen und mit m den Maßstab, so ist $a_1 : b_1 = m$, $a_2 : b_2 = m$, $a_3 : b_3 = m \dots$, also auch $a_1 = m \cdot b_1$, $a_2 = m \cdot b_2$, $a_3 = m \cdot b_3 \dots$; dabei ist für Verkleinerungen $m < 1$, für Vergrößerungen $m > 1$.

Allgemein gilt für eine im Maßstab m ausgeführte Zeichnung:

Ist x die Länge am Werkstück, so ist die Länge in der Zeichnung $y = m \cdot x$.

Wenn eine Folge von Größen $a_1, a_2, a_3 \dots$ aus einer Folge von Größen b_1, b_2, b_3 durch Multiplizieren mit dem gleichen Faktor m entsteht, sagt man, die Größen $a_1, a_2, a_3 \dots$ sind zu den Größen $b_1, b_2, b_3 \dots$ **proportional,** und nennt m den **Proportionalitätsfaktor.**

1. Beispiel: Für eine im Maßstab 1 : 2,5 ausgeführte Zeichnung ist $m = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5}$. Zwischen den Längen des Werkstückes und den Längen der Zeichnung ergeben sich folgende Beziehungen:

Länge am Werkstück	Länge in der Zeichnung
375 mm	$\frac{2}{5} \cdot 375$ mm = 150 mm
275 mm	$\frac{2}{5} \cdot 275$ mm = 110 mm
175 mm	$\frac{2}{5} \cdot 175$ mm = 70 mm

Die drei Längen 150, 110, 70 sind zu den drei Längen 375, 275, 175 proportional, $\frac{2}{5}$ ist Proportionalitätsfaktor.

2. Beispiel: Nach dem Ohmschen Gesetz gilt für den Spannungsabfall U auf einem Leiter vom Widerstand R bei der Stromstärke I die Formel $U = R \cdot I$.

Der Spannungsabfall in einem Leiter ist der Stromstärke proportional, $U \sim I$.
Der Spannungsabfall in einem Leiter ist dem Widerstand proportional, $U \sim R$.

b) Die Verhältnisgleichung

Sind a_1 und a_2 Längen zweier Strecken auf der Landkarte, b_1 und b_2 die Längen der entsprechenden Strecken in der Natur, so ist das Verhältnis $a_1 : a_2$ gleich dem Verhältnis $b_1 : b_2$. Liegt z. B. ein Meßtischblatt (Maßstab 1 : 25 000) vor, und ist $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 5$ cm, dann ist $b_1 = 1$ km und $b_2 = 1{,}25$ km. Es gilt also $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; eine solche Gleichung heißt Verhältnisgleichung oder Proportion.

Sind R_1, R_2 die hintereinandergeschalteten Widerstände eines Stromkreises und U_1, U_2 die an ihnen liegenden Teilspannungen (Abb. 13a), so ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2 .$$

Die Widerstände und die Teilspannungen haben demnach das *gleiche Verhältnis* und das wird durch die Verhältnisgleichung zum Ausdruck gebracht. Die Einführung des Begriffes „Verhältnisgleichung" bietet Vorteile. In Form der Verhältnisgleichung läßt sich z. B. die Beziehung zwischen hintereinandergeschalteten Widerständen und den dazugehörigen Teilspannungen besonders gut merken.

Ergibt sich für zwei Zahlenpaare a, b und c, d jeweils das gleiche Verhältnis, so kann man beide Verhältnisse durch ein Gleichheitszeichen verbinden.

$$a : b = c : d$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Wir merken uns:

Werden zwei gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbunden, so entsteht eine Verhältnisgleichung oder eine Proportion.

$$\mathbf{a : b = c : d}$$

Dividiert man die linken Seiten und die rechten Seiten der Gleichungen $a = m \cdot c$ und $b = m \cdot d$ durcheinander, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{m \cdot c}{m \cdot d}$$

oder

$$a : b = c : d .$$

In der Verhältnisgleichung sind also nach S. 84 die Größen a und b zu c und d proportional. Insbesondere nennt man d die *vierte Proportionale* zu a, b und c.

Direktes und indirektes Verhältnis

Die oben aufgestellte Gleichung

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2$$

besagt, daß bei Hintereinanderschalten von Widerständen die an ihnen liegenden Spannungen den Widerständen **proportional** sind (Abb. 13a).

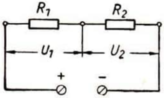


Abb. 13a.
Widerstände in Reihenschaltung

Schaltet man die Widerstände R_1 und R_2 parallel (Abb. 13b), so ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1 \,.$$

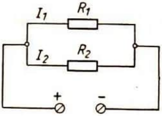


Abb. 13b.
Widerstände in Parallelschaltung

Das Verhältnis der Stromstärken I_1 und I_2 ist hier dem Verhältnis der Widerstände R_2 und R_1 gleich.

Da $\frac{R_2}{R_1}$ der reziproke Wert von $\frac{R_1}{R_2}$ ist, sagt man, daß die Stromstärken der Zweige zu ihren Widerständen **umgekehrt proportional** sind. Die Stromstärken stehen zu den zugehörigen Widerständen im *umgekehrten* oder *indirekten* (ungeraden) Verhältnis. Dementsprechend spricht man bei Hintereinanderschaltung auch von dem *direkten* (geraden) Verhältnis der Spannungen und der zugehörigen Widerstände.

Proportionen sowohl mit direkten als auch mit indirekten Verhältnissen begegnen uns bei unserer Arbeit häufig. Direkt proportional sind zum Beispiel Fahrpreis und Fahrstrecke bei der Reichsbahn, Arbeitslohn und Arbeitszeit, Gasdichte und Gasdruck, zurückgelegter Weg und Geschwindigkeit, Durchmesser zueinander passender Zahnräder und ihre Zähnezahlen, Höhe von Gegenständen und zur gleichen Zeit gemessene Schattenlängen dieser Gegenstände, weil hier die eine Größe mit der anderen im gleichen Verhältnis zu- oder abnimmt. Indirekt proportional sind Arbeitszeit und Arbeiterzahl bei Fertigstellen eines Arbeitsauftrags, Fahrtdauer und Geschwindigkeit, Volumen und Druck einer Gasmenge, Drehzahlen und Raddurchmesser bei Rädertrieb, Strömungsgeschwindigkeit und Rohrquerschnitte, weil hier die eine Größe zunimmt, wenn die andere abnimmt und umgekehrt.

Direktes Verhältnis:

1. **Zunahme entspricht Zunahme,**
2. **Abnahme entspricht Abnahme**

Indirektes Verhältnis:

1. **Zunahme entspricht Abnahme,**
2. **Abnahme entspricht Zunahme**

Als *Beispiel für direkte Proportionalität* sei noch die Federwaage angeführt.

Auf der Skala einer Federwaage zeigen die in Abständen von je 2,2 mm aufeinanderfolgenden Eichstriche eine Belastungsänderung von 200 p an (vgl. Abb. 30 auf S. 107). Die Schraubenfeder dehnt sich beim Belasten mit 1 kp um 11 mm, beim Belasten mit 2 kp um 22 mm, bei dreifacher Last um 33 mm usw. Solange die Elastizitätsgrenze des Federstahls nicht erreicht wird, bleiben die Belastungszunahmen mit den zugehörigen Dehnungen im gleichen Verhältnis. Es ist 2 kp : 3 kp = $\frac{2}{3}$ und 22 mm : 33 mm = $\frac{2}{3}$, also 2 kp : 3 kp = 22 mm : 33 mm oder, wenn man von den Maßbezeichnungen absieht, $2 : 3 = 22 : 33$.

Ein *Beispiel für indirekte Proportionalität* ist in Abb. 14 dargestellt. Bei einer Handblechschere ist die entsprechend dem Widerstand Q des Werkstücks aufzuwendende Kraft P von dem Längenverhältnis der Hebelarme der Schere abhängig. Je größer der Kraftarm im Verhältnis zum Lastarm ist, um so kleiner ist die aufzuwendende

Kraft im Verhältnis zum Schnittdruck. Ist a der Kraftarm, b der Lastarm, so gilt die Proportion $P:Q=b:a$, oder anders geschrieben $\frac{P}{Q}=\frac{b}{a}$. Das Verhältnis von Kraft zu Last ist hier dem reziproken Wert (Kehrwert) des Verhältnisses der zugehörigen Hebelarme gleich.

In der Proportion $a:b=c:d$ sind a und c Vorderglieder, b und d Hinterglieder; a und d Außenglieder, b und c Innenglieder; a und c, b und d sind sich entsprechende Glieder.

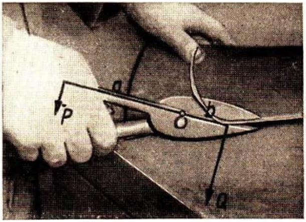


Abb. 14.
Handblechschere. Hebelarme (a, b) und wirkende Kräfte (P, Q) sind umgekehrt proportional.

Bezeichnung bei der viergliedrigen Proportion

Hinterglieder
$\boldsymbol{a : b = c : d}$
Vorderglieder

$\boldsymbol{a : b = c : d}$
Innenglieder
Außenglieder

$\boldsymbol{a : b = c : d}$
vierte Proportionale
zu a, b, c

Die mittlere Proportionale

Gilt für drei Zahlen a, b und c die Proportion $a:b=b:c$, so nennt man b die *mittlere Proportionale* zu a und c. Die Proportion, deren Innenglieder einander gleich sind, heißt **stetige Proportion.** Da $2:4=4:8$, ist 4 die mittlere Proportionale zu 2 und 8.

	$\boxed{\boldsymbol{a : b = b : c}}$	$\boldsymbol{b}$	**ist mittlere**	**Proportionale**	**zu**	$\boldsymbol{a}$	**und**	$\boldsymbol{c}$
z. B.	$2:4=4:\ 8$	4	,,	,,	,,	2	,,	8
oder	$1:5=5:25$	5	,,	,,	,,	1	,,	25

Die mittlere Proportionale zu zwei Größen nennt man auch ihr **geometrisches Mittel.** Im rechtwinkligen Dreieck z. B. erscheint jede Kathete als mittlere Proportionale zu ihrer Projektion auf die Hypotenuse und zu der Hypotenuse; die Höhe ist die mittlere Proportionale zu den beiden Hypotenusenabschnitten (vgl. S. 194). Haben sich bei einer zweimal durchgeführten Messung die Werte m_1 und m_2 ergeben, so nimmt man in besonderen Fällen als Mittelwert oder Durchschnittswert nicht wie üblich das arithmetische Mittel $\frac{m_1+m_2}{2}$, sondern die mittlere Proportionale aus m_1 und m_2 (vgl. auch S. 89).

c) Umformen von Proportionen

Proportionen lassen sich auf viele Arten umformen. Aus

$$a : b = c : d \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ergibt sich, wenn die linke Seite mit f, die rechte mit g erweitert wird,

$$\frac{a \cdot f}{b \cdot f} = \frac{c \cdot g}{d \cdot g}.$$

Der Bruchwert ändert sich nicht, wenn man den Bruch mit einer Zahl erweitert. Die Proportion

$$a : b = c : d \quad \text{kann also in} \quad (a \cdot f) : (b \cdot f) = (c \cdot g) : (d \cdot g)$$

umgewandelt werden.

Wenn man die beiden Glieder des einen Verhältnisses einer Proportion mit einer Zahl, die beiden Glieder ihres zweiten Verhältnisses mit einer anderen Zahl multipliziert, bilden die Produkte wieder eine Proportion.

Produktengleichung

Multipliziert man beide Seiten der Verhältnisgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

mit dem Produkt $b \cdot d$, so entsteht

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d,$$

also

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Die Gleichung besagt:

Für jede Proportion ergibt das Produkt der Außenglieder denselben Wert wie das Produkt der Innenglieder.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{Aus} & \overgroup{\mathbf{a : \undergroup{b = c} : d}} \\ \textbf{folgt} & \mathbf{a \cdot d = b \cdot c} \end{array}}$$

Die zweite Gleichung wird auch die zu der Proportion gehörende **Produktengleichung** genannt. Durch die Produktengleichung kann die Richtigkeit einer Proportion geprüft werden. Die Proportion $2 : 3 = 22 : 33$ ist richtig, denn $2 \cdot 33 = 3 \cdot 22$.

Dient eine Verhältnisgleichung als Bestimmungsgleichung für eine der Größen, die in der Verhältnisgleichung vorkommen, so erfolgt das Auflösen der Gleichung nach der betreffenden Unbekannten am einfachsten mit Hilfe der zugehörigen Produktengleichung. Man erhält aus

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$a = \frac{b \cdot c}{d}, \qquad b = \frac{a \cdot d}{c}, \qquad c = \frac{a \cdot d}{b}, \qquad d = \frac{b \cdot c}{a},$$

indem man beide Seiten der Produktengleichung jedesmal durch den Faktor der zu berechnenden Größe dividiert.

Beispiele:

$a:3=4:6;\ a\cdot 6=3\cdot 4;\ a=\frac{3\cdot 4}{6}=\underline{\underline{2}}\qquad 3:b=0{,}9:1{,}2;\ b\cdot 0{,}9=3\cdot 1{,}2;\ b=\frac{3\cdot 1{,}2}{0{,}9}=\underline{\underline{4}}$

$5:6=c:9;\ c\cdot 6=5\cdot 9;\ c=\frac{5\cdot 9}{6}=\underline{\underline{7\frac{1}{2}}}\qquad 6:7=1\frac{1}{5}:d;\ d\cdot 6=7\cdot 1\frac{1}{5};\ d=\frac{7\cdot 6}{5\cdot 6}=\underline{\underline{1\frac{2}{5}}}$

Umgekehrt kann das Aufstellen von Proportionen mit Hilfe der Produktengleichung erfolgen.

Beispiel:

Für das Gleichgewicht zweier an einem Hebel angreifenden Kräfte P und Q mit den Hebelarmen a und b gilt die Momentengleichung

$$P\cdot a=Q\cdot b.$$

Aus ihr folgt, wenn beide Seiten der Gleichung durch $a\cdot Q$ dividiert werden, die Proportion

$$P:Q=b:a,$$

d.h., die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Hebelarme.

Gleichgewicht herrscht z.B., wenn $P=15$ kp, $Q=25$ kp, $a=0{,}75$ m, $b=0{,}45$ m.

Dann ist

$$15\text{ kp}\cdot 0{,}75\text{ m}=11{,}25\text{ kpm},\quad 25\text{ kp}\cdot 0{,}45\text{ m}=11{,}25\text{ kpm}$$

und

$$\frac{15\,\text{kp}}{25\,\text{kp}}=\frac{0{,}45\,\text{m}}{0{,}75\,\text{m}}=\frac{3}{5}.$$

Als Produktengleichung gehört $a\cdot d=b\cdot c$ gleichzeitig zu folgenden Proportionen:

$$a:b=c:d,\quad d:b=c:a,\quad b:a=d:c,\quad c:a=d:b,$$
$$a:c=b:d,\quad d:c=b:a,\quad b:d=a:c,\quad c:d=a:b.$$

Demnach bleibt eine Proportion richtig, wenn man

ihre Seiten miteinander, ihre Innenglieder miteinander,
ihre Außenglieder miteinander, die Außenglieder mit den Innengliedern

vertauscht.

Für die stetige Proportion $a:b=b:c$ heißt die Produktengleichung $b\cdot b=a\cdot c$ bzw. $b^2=a\cdot c$. Für die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel b folgt daraus $b=\sqrt{a\cdot c}$.

Die Proportion $3:b=b:12$ ergibt $b^2=36$, $b=\sqrt{36}=6$ (vgl. S. 87).

Die mittlere Proportionale (geometrisches Mittel) zu zwei Größen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Größen[1]**.**

Mittlere Proportionale zu a_1 und a_2: $\boxed{m=\sqrt{a_1\cdot a_2}}$

---

[1] Vom geometrischen Mittel ist das *arithmetische Mittel* zu unterscheiden. Zu zwei gegebenen Größen a_1, a_2 ist das arithmetische Mittel die halbe Summe: $m=\frac{a_1+a_2}{2}$. Ob man zur Mittelbildung das arithmetische oder das geometrische Mittel nimmt, entscheidet der jeweilige Sachverhalt.

Fortlaufende Proportionen

Haben mehr als zwei Zahlenpaare gleiche Verhältniswerte, gilt also etwa für die 6 Zahlen $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

so ist nach dem Vertauschungsgesetz für Proportionen auch

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}, \qquad \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3}.$$

Man bringt derartige Zusammenhänge zwischen den 6 Größen durch die als *fortlaufende Proportion* bezeichnete Schreibform

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

zum Ausdruck. Haben z. B. drei ähnliche Dreiecke die Grundlinien g_1, g_2, g_3 und die zugehörigen Höhen h_1, h_2, h_3, so gilt die Beziehung $g_1 : g_2 : g_3 = h_1 : h_2 : h_3$.

Für die Schwingungszahlen n_1, n_2, n_3 der Töne des Dur-Dreiklangs gilt die Proportion

$$n_1 : n_2 : n_3 = 4 : 5 : 6.$$

Haben die Riemenscheiben eines Deckenvorgeleges die Durchmesser 320 mm, 440 mm und 560 mm, so gilt für die entsprechenden Riemengeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 die Proportion

$$v_1 : v_2 : v_3 = 8 : 11 : 14.$$

Bei Maschinenbronze gilt für die Bestandteile x an Kupfer, y an Zinn und z an Zink die Proportion

$$x : y : z = 43 : 5 : 2.$$

Wie aus fortlaufenden Proportionen viergliedrige Proportionen entstehen, zeigen die oben angegebenen Formen.

Wie man aus zwei verschiedenen Proportionen, in denen ein gemeinsames Glied vorkommt, eine fortlaufende Proportion aufstellt, zeigt das folgende

Beispiel:

Die Proportionen $a_1 : a_2 = 2 : 3$ und $a_2 : a_3 = 4 : 5$ sollen zu einer fortlaufenden Proportion vereinigt werden.

Es gilt $\frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{3}$ und $\frac{a_2}{4} = \frac{a_3}{5}$.

Nun werden beide Verhältnisgleichungen mit geeigneten Faktoren multipliziert, so daß die beiden Glieder, die a_2 enthalten, gleich werden.

Man multipliziert beide Seiten der ersten Verhältnisgleichung mit $\frac{1}{4}$, der zweiten mit $\frac{1}{3}$ und erhält dann $\frac{a_1}{8} = \frac{a_2}{12}$ und $\frac{a_2}{12} = \frac{a_3}{15}$, d.h.

$$\frac{a_1}{8} = \frac{a_2}{12} = \frac{a_3}{15} \text{ und } a_1 : a_2 : a_3 = 8 : 12 : 15.$$

Betrachtet man die erste Proportion in der ursprünglichen Form, so erkennt man, daß ihre rechte Seite mit 4 erweitert werden muß und die rechte Seite der zweiten Proportion mit 3, damit die der gemeinsamen Zahl a_2 entsprechenden Glieder gleich werden.

Für einen Proportionalitätsfaktor m erhält man aus

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

$$a_1 = m \cdot b_1, \quad a_2 = m \cdot b_2, \quad a_3 = m \cdot b_3,$$

da $$\frac{a_1}{b_1} = m, \quad \frac{a_2}{b_2} = m, \quad \frac{a_3}{b_3} = m \quad \text{ist.}$$

d) Schlußrechnung

Eine Proportion bringt die Verhältnisgleichheit von Größen zum Ausdruck und dient als Bestimmungsgleichung, wenn eine der Größen unbekannt ist.

Der Aufbau des Sozialismus in der DDR bringt auf vielen Gebieten große technische Umwälzungen mit sich. So werden z. B. in der Bauindustrie neue Verfahren eingeführt, mit denen schneller und billiger gebaut werden kann. Ein neues Verfahren ist die Serienfertigung nach Takten, bei dem die Arbeitsproduktivität erheblich gesteigert werden kann. Nach Berechnungen der Deutschen Bauakademie wird die Pro-Kopf-Produktion an schlüsselfertigen Häusern im Jahre 1962 im Vergleich zum Jahre 1957 um fast das Zweifache gestiegen sein. Nach diesen Berechnungen würde eine Brigade von 10 Bauarbeitern im Jahre 1961 17 Wohnungseinheiten bauen. Wieviel Wohnungseinheiten würden 45 Brigaden mit jeweils 10 Bauarbeitern nach der angegebenen Arbeitsproduktivität im Jahre 1961 bauen?

Lösung:

Die Anzahl der im Jahre 1961 zu bauenden Wohnungseinheiten ergibt sich aus der Proportion

$1 : 45 = 17 : x$, indem man die Produktengleichung
$x \cdot 1 = 17 \cdot 45$ bildet und nach x auflöst: $x = \underline{\underline{765}}$

Auch ohne die Proportion aufzuschreiben, kommt man durch folgende Überlegung zum Ziel. Um die einander zugeordneten Größen übersichtlich darzustellen, schreibt man in einer Zeile die in dem Aufgabentext stehende Aussage so auf, daß die der gesuchten Größe entsprechende an das Satzende kommt **(Aussagesatz)**. In der nächsten Zeile schreibt man die in dem Fragesatz genannten Größen mit derselben Reihenfolge wie im Aussagesatz als Antwort auf die gestellte Frage auf **(Antwortsatz)**. Man *schließt* dabei von dem gegebenen Verhältnis auf den gesuchten Wert. Deshalb wird dieses Rechenverfahren *Schlußrechnung* genannt.

Für die vorliegende Aufgabe lautet der Schlußrechnungssatz:

1 Brigade baut 1961	17 Wohnungseinheiten	(Aussagesatz)
45 Brigaden bauen 1961	$17 \cdot 45$ Wohnungseinheiten	(Antwortsatz)
die 45fache Anzahl	die 45fache Menge	

Es werden 1961 von 45 Brigaden 765 Wohnungseinheiten gebaut.

Ist der Proportionalitätsfaktor, der zu den einander entsprechenden Größen gehört, nicht so leicht erkennbar wie bei der vorangehenden Aufgabe, so führt man die Schlußrechnung in einzelnen Schritten aus, die vom Aussagesatz ausgehend über einen Hilfssatz zum Antwortsatz führen.

2. Beispiel mit **direktem Verhältnis**:

Das größte Wasserkraftwerk der Welt entsteht in der Nähe von Stalingrad an der Wolga. Es wird im Jahre 1960 fertiggestellt sein und dann jährlich eine Energie von 14 Milliarden Kilowattstunden abgeben. Der mittlere Bedarf für die Haushalte von 5 Großstädten (je 500000 Einw.; der Anteil der Haushalte am Elektroenergieverbrauch liegt bei 7%) beträgt 350 Megawattstunden. Wieviel Großstädte könnte dieses Kraftwerk nach seiner Fertigstellung versorgen?

Lösung:

350 Megawattstunden reichen für die Versorgung von 5 Großstädten. (Aussagesatz)

10 Megawattstunden reichen für die Versorgung von $\frac{5}{35}$ Großstädten. (Hilfssatz)

$\boxed{\text{der 35. Teil}}$ $\boxed{\text{dem 35. Teil}}$

14 Milliarden Kilowattstunden reichen für Versorgung von $\frac{5}{35} \cdot 1{,}4 \cdot 10^6$ Großstädten. (Antwortsatz)

$\boxed{\text{das } 1{,}4 \cdot 10^6\text{fache}}$ $\boxed{\text{dem } 1{,}4 \cdot 10^6\text{fachen}}$

Es ergibt sich $\frac{5}{35} \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 = \frac{1}{7} \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 = \underline{\underline{200000}}$,

also könnte dieses Kraftwerk <u>200 000 Großstädte</u> versorgen.

3. Beispiel mit **indirektem Verhältnis:**

Eine Brigade von 8 Arbeitern erfüllt ihre Norm in 35 Stunden. In wieviel Stunden würden bei derselben Arbeitsweise 7 Arbeiter diese Norm erfüllen?

Die Ausführung eines Auftrages mit weniger Arbeitskräften als ursprünglich vorgesehen verlängert bei ungeänderter Arbeitsweise die Arbeitszeit; die Vermehrung der Arbeitskräfte würde die Arbeitszeit verkürzen. Wenn die Arbeitsweise bleibt, muß das Zahlenverhältnis der Arbeiter dem reziproken Wert des Verhältnisses ihrer Stundenzahlen gleichgesetzt werden.

Lösung: Hier stehen Arbeiterzahlen und ihre Arbeitszeiten im umgekehrten Verhältnis. Wird die gesuchte Stundenzahl mit x bezeichnet, so gilt die Proportion

$$8 : 7 = x : 35$$

und ergibt als Produktengleichung $7 \cdot x = 35 \cdot 8$, also $x = \frac{35 \cdot 8}{7}$, $\underline{\underline{x = 40.}}$

Der Schlußrechnungsansatz heißt:

8 Arbeiter .... brauchen .... 35 Stunden.

1 Arbeiter (der 8te Teil) braucht (8mal so lange) .... $35 \cdot 8$ Stunden.

7 Arbeiter (das 7fache) brauchen (den 7ten Teil der Zeit) $\frac{35 \cdot 8}{7}$ Stunden.

7 Arbeiter erfüllen, da $\frac{35 \cdot 8}{7} = 40$ ist, die Norm in <u>40 Stunden.</u>

Verlangt die Praxis die Lösung einer derartigen Aufgabe, so kann ihr rechnerisches Ergebnis oft nur als grobe Näherung für den tatsächlichen Sachverhalt gelten. Inwieweit die veränderte Anzahl der Arbeiter die geforderte Leistung erreicht, ist nicht zuletzt von Fragen der Arbeitsweise, der Anzahl der vorhandenen Maschinen und Geräte, des vorhandenen Platzes usw. abhängig.

Zusammengesetzte Schlußrechnungsaufgaben enthalten mehr als zwei Paare proportionaler Größen. Der gesuchte Wert wird durch Zerlegen der Aufgabe in einfache

Schlußrechnungsaufgaben berechnet, die jedesmal nur zwei Paare proportionaler Größen enthalten.

4. Beispiel:

Bei einer Dampfkesselanlage mit 6 Feuerungen reicht der Kohlenvorrat von 148,5 t für 315 Tage. Wieviel Tage reichen 110 t bei 5 Feuerungen?

Lösung: Bei 6 Feuerungen reichen 148,5 t für .... 315 Tage.

Bei 1 Feuerung reichen 148,5 t für $\boxed{\text{die 6fache Zeit}}$ .... $315 \cdot 6$ Tage.

$\boxed{\text{der 6te Teil}}$

Bei 5 Feuerungen reichen 148,5 t für $\boxed{\text{den 5ten Teil der Zeit}}$ .... $\frac{315 \cdot 6}{5}$ Tage.

$\boxed{\text{das 5fache}}$

Bei 5 Feuerungen reicht 0,1 t für $\boxed{\text{den 148,5ten Teil der Zeit}}$ $\frac{315 \cdot 6}{5 \cdot 148{,}5}$ Tage.

$\boxed{\text{der 148,5te Teil}}$

Bei 5 Feuerungen reichen 110 t für $\boxed{\text{das 110fache der Zeit}}$ $\frac{315 \cdot 6 \cdot 110}{5 \cdot 148{,}5}$ Tage.

$\boxed{\text{das 110fache}}$

Man erhält $\frac{315 \cdot 6 \cdot 110}{5 \cdot 148{,}5} = 280$. Der Kohlenvorrat 110 t reicht für 5 Feuerungen 280 Tage.

Die Darstellung kann verkürzt werden, indem nur die erste und die letzte Zeile des Ansatzes aufgeschrieben werden. Die für den Übergang von 6 auf 5 Feuerungen und von 148,5 t auf 110 t nötigen Schlüsse sind dann im Kopfe auszuführen.

e) *Proportion und Schlußrechnung beim Interpolieren*

Der Techniker wendet das Rechnen mit Proportionen bzw. die Schlußrechnung an, wenn er mit Zahlentafeln arbeitet und **Zwischenwerte ermitteln** muß. Er interpoliert dann (*interpolare* lat. „übermalen, abändern“). Abb. 15 zeigt eine Tabelle der Quadrate für die Zahlen 1,00, 1,01, 1,02 usw. Wir stellen uns die Aufgabe, den Wert für $2{,}346^2$ zu ermitteln. Aus der Tafel ergibt sich

$$2{,}34^2 = 5{,}476\,,$$
$$2{,}35^2 = 5{,}523\,.$$

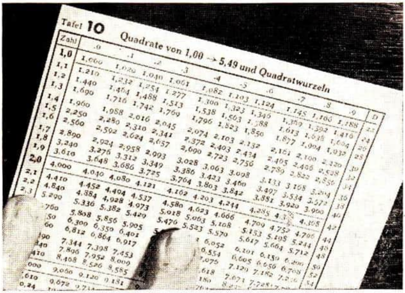

Tafel 10 Quadrate von 1,00 → 5,49 und Quadratwurzeln

Abb. 15. Ein Facharbeiter muß beim Benutzen einer Zahlentafel schnell und sicher interpolieren können.

Den Wert für $2{,}346^2$ enthält die Tafel nicht, man kann ihn aus den Tafelwerten angenähert finden, wenn man das in dem Bereich von 2,340 bis 2,350 vorhandene Anwachsen der Grundzahlen mit dem der zugehörigen Quadratzahlen vergleicht.
Von 2,340 auf 2,350 wachsen die Grundzahlen um *10 Einheiten* ihrer 3. Dezimale, gleichzeitig wachsen die zugehörigen Quadratzahlen von 5,476 auf 5,523 um *47 Einheiten* ihrer 3. Dezimale. Von 2,340 auf 2,346 wächst die Grundzahl 2,340 um *6 Einheiten* ihrer 3. Dezimale. Welchen Zuschlag x die 3. Dezimale von $2{,}340^2 = 5{,}476$ erhalten muß, um den Wert für $2{,}346^2$ zu ergeben, kann aus der Proportion

$$10 : 6 = 47 : x$$

berechnet werden. Dabei wird zur Vereinfachung angenommen, daß in dem Bereich von 2,34 bis 2,35 das Anwachsen der Grundzahl dem der zugehörigen Quadratzahl proportional ist. Man erhält aus der Produktengleichung

$$10 \cdot x = 47 \cdot 6$$

$$x = \frac{47 \cdot 6}{10}, \qquad x = 28{,}2 \approx 28\,,$$

somit $2{,}346^2 = 5{,}476 + 0{,}028 = \underline{\underline{5{,}504}}$.

Der *Schlußrechnungsansatz* zum Berechnen des Zuschlags x heißt:

10 Einheiten Grundzahl-Zuwachs ergeben ..... 47 Einheiten Quadratzahl-Zuwachs
1 Einheit Grundzahl-Zuwachs ergibt ...... 4,7 Einheiten Quadratzahl-Zuwachs
6 Einheiten Grundzahl-Zuwachs ergeben .. $4{,}7 \cdot 6$ Einheiten Quadratzahl-Zuwachs

$4{,}7 \cdot 6 = 28{,}2 \approx 28$; zu 5,476 kommt 0,028, also ist $2{,}346^2 = \underline{\underline{5{,}504}}$ (genauerer Wert 5,503 716)

AUFGABEN

1. Das in Abb. 16 skizzierte Knotenblech für eine Trägerverbindung ist im Maßstab 1 : 2,5 zu zeichnen.

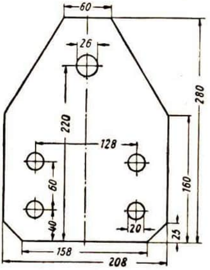


Abb. 16. Knotenblech

2. Für den im Maßstab 1 : 5 gezeichneten Querschnitt eines Maschinenrahmens (Abb. 17) ist die Bemaßung einzutragen.

3. Die Verhältnisse

a) 78 mm : 52 mm, **b)** 2,4 kp : 7,8 kp,
c) 3 : 0,25, **d)** 0,4 : 4,
e) 1,5 : 1,25, **f)** $\frac{3}{7} : \frac{2}{3}$, **g)** $5\frac{1}{7} : 1\frac{1}{2}$

sind durch kleinste ganze Zahlen auszudrücken.

4. Aus einer rechteckigen Führungsplatte von 250 mm Länge, 125 mm Breite und 20 mm Dicke ist parallel zu ihren Seiten in Flächenmitte ein quadratischer Durchbruch mit 25 mm Seitenlänge herauszuarbeiten. Außerdem erhält die Führungsplatte in den vier Ecken mit gleichem Abstand vom Rand noch je eine Bohrung von 12 mm Durchmesser. Die Abstände der Bohrungen betragen 60 mm (Breitseite) und 160 mm (Längsseite).
Es sind die Maße für eine Zeichnung M 1 : 5 zu errechnen.

5. An Hand von kleinen Werkstücken aus der Feinmechanik und Optik sind die Maße für Vergrößerungen im Maßstab M 2 : 1, M 5 : 1, M 10 : 1 zu berechnen.

6. Der Tisch einer Hobelmaschine verschiebt sich in 2,5 s um 67,5 cm, in 7,2 s um 194,4 cm. Sind Dauer und Größe der Verschiebung proportional?

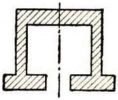


Abb. 17. Maschinenrahmen

7. Aus den Proportionen

a) $x:12 = 15:45$ **b)** $2\frac{1}{2}:y = 3:1\frac{1}{2}$ **c)** $0{,}14:1{,}14 = z:57$

d) $32{,}5:0{,}39 = 250:w$

sind die durch Buchstaben bezeichneten Zahlenwerte zu ermitteln.

8. Eine Glühlampe, die (kalt) 240 Ohm Widerstand hat, und eine Heizspirale werden hintereinandergeschaltet an eine Taschenlampenbatterie angeschlossen. Ein Voltmeter zeigt als Spannung an der Glühlampe 3,3 Volt, an der Heizspirale 1,2 Volt an. Welchen Widerstand hat die Heizspirale?

9. Welche Kraft hält an einem Hebel der Last $Q = 35$ kp das Gleichgewicht, wenn sich der Lastarm zum Kraftarm wie $2:7$ verhält?

10. Die Riemenscheibe eines Motors hat 150 mm Durchmesser und macht 1200 Umdrehungen in jeder Minute. Bei welchem Durchmesser macht die getriebene Riemenscheibe in der Minute 240 Umdrehungen?

11. 5 m Flachstahl von 16 mm Breite und 7 mm Dicke wiegen 4,395 kp. Wieviel wiegen 8 m Flachstahl von 40 mm Breite und 8,5 mm Dicke?

12. Welchen Wert hat die mittlere Proportionale zu

a) 4,2 und 2,29 **b)** 0,42 und 2,29 **c)** 0,42 und 0,229 **d)** 21,8 und 2,91

e) 21,8 und 29,1 **f)** 32,7 und 194 **g)** 327 und 194?

13. Aus der fortlaufenden Proportion $a:b:c = 12:14:15$ sind

a) drei viergliedrige Proportionen abzuleiten

b) Werte für a, b, c mit dem Proportionalitätsfaktor $m = 1{,}5$ zu bestimmen.

14. Aus **a)** $x:y = 3:4$, $y:z = 5:7$

b) $x:y = 2:3$, $x:z = 3:4$

c) $x:z = 10:21$, $y:z = 8:9$

ist $x:y:z$ als fortlaufende Proportion zu schreiben.

15. Wieviel Kupfer, Zinn und Zink werden für 1000 kg Maschinenbronze gebraucht, wenn sich die Anteile dieser Metalle an der Legierung wie $43:5:2$ verhalten?

16. Welche Schwingungszahlen haben die zum Dur-Dreiklang gehörenden Töne, wenn der Grundton (n_1) durch den Kammerton a mit 440 Hz gebildet wird? ($n_1:n_2:n_3 = 4:5:6$).

17. Beim Auflegen des Riemens auf eine Scheibe eines Deckenvorgeleges mit dem Durchmesser 320 mm ist die Riemengeschwindigkeit 1,256 m/s. Welche Riemengeschwindigkeiten entstehen, wenn man Scheiben mit den Durchmessern 440 mm und 560 mm verwendet, die gleiche Drehzahl der Vorgelegewelle vorausgesetzt?

18. Für die tägliche Erzeugung von 1600 t Roheisen werden in einem Eisenhüttenkombinat 5300 t Eisenerz gebraucht. Wieviel t Eisenerz werden für einen Monat (30 Tage) bei einer täglichen Erzeugung von 4800 t Roheisen benötigt?

19. Eine Eisenbahnstrecke steigt auf 240 m um 3 m an. Wie groß ist bei gleicher Steigung der Höhenunterschied nach 3,6 km?

20. In einem Betrieb werden täglich 220 kg Mangan verarbeitet. Mangan ist ein Bestandteil des Braunsteins. In 250 g Braunstein sind nach analytischen Bestimmungen 140 g Mangan enthalten. Wieviel kg Braunstein benötigt der Betrieb täglich?

21. Mit einem Bagger von 50 PS Leistung werden in 8 Stdn. 560 m^3 Erde bewegt. Wieviel m^3 Erde bewegt ein 60-PS-Bagger in 12 Stdn.?

22. Zum Pflastern einer Straße von 1500 m Länge und 12 m Breite benötigten 36 Steinsetzer bei 8stündiger Arbeitszeit insgesamt 30 Tage. In welcher Zeit wird bei gleichen Arbeitsbedingungen eine 1200 m lange und 16 m breite Straße von einer Brigade, der 24 Steinsetzer angehören, fertiggestellt?

23. Um die Arbeitsproduktivität durch Ausnutzen innerer Reserven zu steigern, wurde im VEB Schwermaschinenbau Leipzig eine Drehmaschine älteren Typs zum Kernlochbohren eingerichtet. Vorher wurde bei einem Werkstück eine Bohrung von 150 mm voll ausgebohrt, dabei ergab sich ein Späneabfall von 4,8 kg. Nun blieb ein Kernstück von 120 mm Durchmesser für weitere Bearbeitung übrig.
Wieviel Prozent Abfall des Materials wurden für die Produktion gewonnen?

24. Ein großer Reichtum im Gebiet der DDR ist die Braunkohle. Im Jahre 1936 wurden 101 Mill. Tonnen gefördert; im Jahre 1957 ist die Produktion auf 216 Mill. Tonnen gestiegen. Eng verbunden damit ist die Erzeugung von Elektrizität: so wurden z. B. 1936 14 Milliarden kW erzeugt; 1960 wird diese Zahl bedeutend größer sein, und zwar wird dann das Verhältnis wie 28 : 83 sein. Wieviel Milliarden kW werden 1960 erzeugt werden?

25. Ein Behälter wird durch 3 gleich starke Zuleitungsrohre in 4 Stunden mit Wasser gefüllt. Wie lange dauert das Füllen, wenn eine Röhre geschlossen wird, die Auslaufgeschwindigkeit der beiden anderen Röhren aber konstant bleibt?

26. Wieviel g Natriumsulfat (Na_2SO_4) sind in 370 ml 3,5%iger Natriumsulfatlösung enthalten?

27. Die im VEB Synthesewerk Schwarzheide verwendete Kontaktmasse enthält in 100 g 5 g Thoriumoxyd (ThO_2). Wieviel Thoriumoxyd sind in einer Ofenfüllung von 3,5 t enthalten?

28. Ein äußerst gefährlicher und gefräßiger Schädling, der überall bekämpft werden muß, ist die Ratte, durch die auch Seuchen übertragen werden. Beobachtungen haben ergeben, daß 10 Ratten bei Getreideernährung jährlich 375 kg Getreide fressen.

a) Errechne den volkswirtschaftlichen Schaden, den eine Jahresnachkommenschaft von 12 Ratten in einem Weizenspeicher verursachen kann, wenn jede sechsmal 8 Junge wirft?

b) Wieviel Kilogramm Weizenmehl gehen dadurch der Volksernährung verloren, wenn 100 kg Weizen 80 kg Mehl ergeben?

c) Wieviel Menschen könnten damit ihren Jahresbedarf decken, wenn er je Kopf der Bevölkerung 55 kg beträgt?

29. Die Melkmaschine erleichtert das Melken und spart Zeit ein. Die Maschinen können von Arbeitskräften bedient werden, die nicht melken können. Nur das Nachmelken muß von einem geübten Melker ausgeführt werden.
Beim Handmelken rechnet man mit 0,6 kg Milch je Minute.

a) Wieviel kg Milch melken 3 Melkerinnen in $\frac{3}{4}$ Stunden?

b) In welcher Zeit werden von 2 Personen täglich 18 Kühe gemolken, deren durchschnittliche Tagesleistung 12 kg Milch beträgt?

30. Beim Rübenhacken leistet ein Arbeiter bei Handarbeit im Durchschnitt 0,03 ha je Stunde. Welche Zeit benötigen 4 Arbeiter zum Hacken eines 1,86 ha großen Rübenfeldes?

31. Das Vereinzeln der Rüben ist eine der mühsamsten und zeitraubendsten Arbeiten. Außerdem fällt es zeitlich oft mit der Heuernte zusammen. Es kommt deshalb gerade bei dieser Arbeit darauf an, durch Auswahl geeigneter Geräte und Arbeitsverfahren den Bedarf an Handarbeit zu verringern. Nach der veralteten Methode werden die Rüben zunächst mit der Hacke „verhackt" und dann in einem zweiten Arbeitsgang verzogen. Wesentlich vorteilhafter ist es, beide Arbeitsgänge zu vereinen und mit dem Krehl die Rüben zu vereinzeln. Ein Arbeiter erreicht folgende Stundenleistungen:

1. Verhacken mit der Blatthacke	3 a
2. Verziehen	$1\frac{1}{2}$ a
3. Vereinzeln mit dem Krehl	$1\frac{3}{10}$ a

a) Wieviel Stunden brauchen 4 Arbeiter zum Vereinzeln von $\frac{1}{2}$ ha Rüben nach diesen beiden Methoden?

b) Setze die Arbeitszeit bei den Verfahren 1. und 2. gleich 100% und berechne den prozentualen Zeitbedarf bei dem anderen Verfahren!

32. Folgende Quadratzahlen sind durch Interpolieren zu bestimmen:

$738{,}4^2$; $490{,}7^2$; $683{,}6^2$; $340{,}3^2$.

Gegeben ist

$738^2 = 544\,644$	$490^2 = 240\,100$	$683^2 = 466\,489$	$340^2 = 115\,600$
$739^2 = 546\,121$	$491^2 = 241\,081$	$684^2 = 467\,856$	$341^2 = 116\,281$

33. Bestimme durch Interpolieren

$\sqrt{97{,}8}$; $\sqrt{49{,}5}$; $\sqrt{567{,}3}$; $\sqrt{0{,}174}$

aus den gegebenen Werten

$\sqrt{97} = 9{,}849$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{567} = 23{,}812$	$\sqrt{0{,}17} = 0{,}412$
$\sqrt{98} = 9{,}899$	$\sqrt{50} = 7{,}071$	$\sqrt{568} = 23{,}833$	$\sqrt{0{,}18} = 0{,}424$

D. DIE FUNKTION

1. Graphische Darstellungen zum Vergleichen von Größen

a) Darstellung durch Strecken

Die ständige Weiterentwicklung der Industrie in der Deutschen Demokratischen Republik führt zur Steigerung unseres Außenhandels und damit gleichzeitig zur Erhöhung des Lebensniveaus der Bevölkerung. Im Jahre 1954 wurde Handelsware im Werte von 4,7 Md. Rubel ausgeführt. 1958 stieg unser Export auf den Wert von 7,6 Md. Rubel an.

Den Exportanteil einiger Länder zeigt folgende Tabelle:

	1954 (1000 Rubel)	1958 (1000 Rubel)
Bulgarien	95 409	145 689
China	390 981	532 953
Frankreich	11 150	33 726
Indien	19 327	37 478
Tschechoslowakei	291 875	602 511
Sowjetunion	2 346 992	3 383 817
Ungarn	187 571	244 959
Vereinigte Arabische Republik	12 875	107 404

Die vielen Zahlen der Tabelle erschweren das Vergleichen; dazu kommt, daß die Länder alphabetisch geordnet sind und nicht ihrer Bedeutung nach für unseren Außenhandel. Die Übersicht wird erleichtert, wenn die Zahlen durch Streckenlängen dargestellt werden. In Abb. 18 sind die dem Millionen-Rubel-Wert der Handelsware entsprechenden Strecken auf waagerechten Geraden so aufgetragen, daß alle auf einer Senkrechten anfangen. Bei dieser Anordnung sind die zu den Strecken gehörenden Bezeichnungen davor leicht leserlich angegeben.

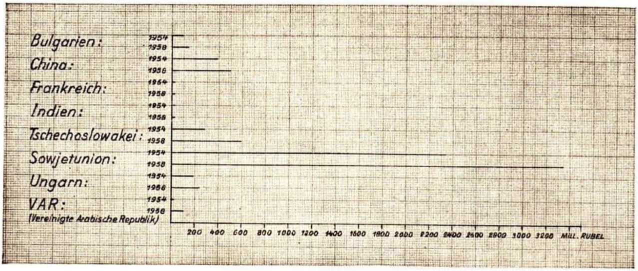


Abb. 18. In verschiedene Länder exportierte Handelsware (in Mill. Rubel), graphische Darstellung durch Strecken

Die folgende Tabelle enthält Werte der *Scherfestigkeit* von Schweißstellen einer Aluminiumlegierung, die durch Versuche in dem Werkslaboratorium ermittelt worden sind. Auch hier wird die Übersicht durch die große Anzahl erschwert.

Versuch	Scherfestigkeit kp/cm²
1	380
2	380
3	420
4	390
5	425
6	395
7	410
8	390
9	440
10	420
11	420
12	415
13	410
14	390
15	460
16	440
17	380
18	415
19	355
20	430

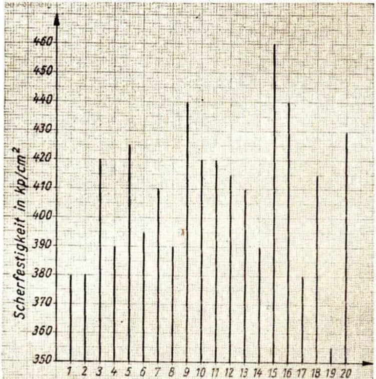


Abb. 19. Graphische Darstellung von Festigkeitswerten einer Aluminiumlegierung durch Strecken

Die Festigkeitswerte schwanken. Diese Schwankungen können bildlich übersichtlicher dargestellt werden als durch Zahlen. In Abb. 19 sind Strecken in gleichen Abständen senkrecht zu einer Geraden nebeneinander gezeichnet. Ihre Längen sind den Überschüssen proportional, um die die beobachteten Festigkeitswerte über dem Wert 350 liegen.

b) Darstellung durch Flächen

Zum Darstellen von Größen kann man mannigfaltige Arten der Veranschaulichung wählen. Sind z. B. Ländergrößen zu vergleichen, so stellen Quadrate mit entsprechenden Flächeninhalten den Unterschied deutlicher dar als Landkarten, die mit ihren vielfach gegliederten Grenzen in gleichem Maßstab gezeichnet sind.

Zur Veranschaulichung von Lagerbeständen eignen sich gleich breite Rechtecke, deren Länge der Menge entspricht. Unterschiedliche Schraffierung der aneinandergrenzenden Streifen oder der wie Säulen nebeneinandergestellten Rechtecke (Abb. 20) kann die Art der Bestände kennzeichnen.

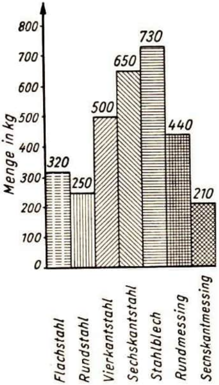


Abb. 20. Darstellung von Lagerbeständen durch Flächenstreifen

Die Zusammensetzung eines Werkstoffs zeigt meist ein in Sektoren aufgeteilter Kreis an. Die Größe der Sektoren entspricht dem Prozentgehalt der Bestandteile (Abb. 21). Veranschaulichungen dieser Art lassen sich leicht deuten und prägen sich darum besser als die nackten Zahlen ein.

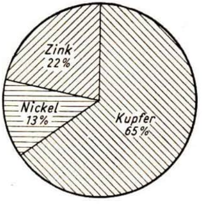


Abb. 21. Darstellung von Bestandteilen einer Legierung durch Sektoren

Zeichnungen, die zum Veranschaulichen von Größen dienen, werden **graphische Darstellungen** oder **Diagramme** genannt. Je nach der Darstellungsweise spricht man von *Punktdiagrammen* (Abb. 22 a), *Streckendiagrammen* (Abb. 18 und 19), *Liniendiagrammen* (Abb. 22 b und c), *Streifendiagrammen*, *Säulendiagrammen* (Abb. 20) und *Kreisdiagrammen* (Abb. 21). Außer der Art der Darstellung ist für die Anlage eines Diagramms die Wahl zweckmäßiger Einheiten zu überlegen, damit auch größte und kleinste Werte auf der Zeichenfläche angegeben werden können.

2. Graphische Darstellungen empirischer Funktionen

a) Darstellung des Verlaufs der Tagestemperatur nach Beobachtungsreihen

An einem Ort werden während eines Apriltages folgende Lufttemperaturen beobachtet:

Uhrzeit h:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatur °C:	7,6	6,0	5,6	7,4	10,0	12,4	13,8	14,2	14,0	12,4	10,2	9,6	9,2

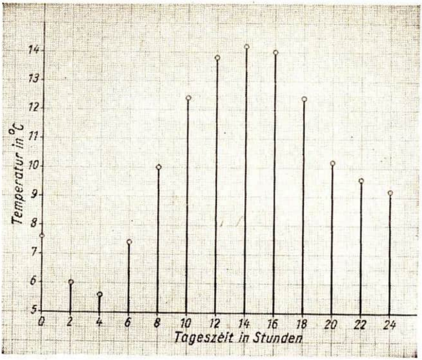


Abb. 22a. Abhängigkeit der Temperatur von der Tageszeit (Punktdiagramm)

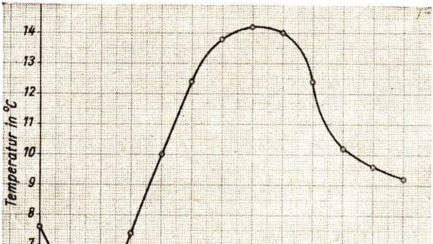


Abb. 22b. Ergänzung des Punktdiagramms zu einem Kurvendiagramm

Die Tabelle läßt wohl erkennen, daß sich die Temperatur je nach der Tageszeit ändert. Den Zusammenhang zwischen Temperatur und Tageszeit gibt aber die graphische Darstellung deutlicher wieder (Abb. 22 a). Um Platz zu sparen, sind in der Abbildung nur die Überschüsse der Temperaturen über 5° C durch Strecken entsprechender Länge dargestellt. Die Strecken stehen senkrecht auf der waagerechten Ausgangsgeraden. Sie haben voneinander gleiche Abstände und bringen damit zum Ausdruck, daß in gleichen Zeitabständen beobachtet wurde. Die Endpunkte der Strecken ergeben ein **Punktdiagramm,** das das Ansteigen und Sinken der Lufttemperatur für den Verlauf eines Tages deutlich anzeigt.

Das Diagramm gibt aber trotzdem den Zusammenhang von Temperatur und Tageszeit nur unvollkommen wieder, da die Temperaturen nur in Abständen von zwei Stunden abgelesen wurden und die Temperaturwerte sich sprungweise ändern. In Wirklichkeit ändern sie sich innerhalb dieses Zeitraumes allmählich.

Um die Temperaturen zu erfassen, die zwischen den angegebenen liegen, wären weitere Beobachtungen nötig. Je mehr Beobachtungen erfolgen, um so dichter liegen die Diagrammpunkte nebeneinander. Sie ordnen sich zu einer gekrümmten Linie. In Abb. 22 b ist diese gekrümmte Linie skizziert. Die Kurve bringt zum Ausdruck, daß zu verschiedenen Tageszeiten in der Regel verschiedene Lufttemperaturen herrschen. Das Ergänzen eines Punktdiagramms zu einem **Kurvendiagramm** erscheint gerechtfertigt, wenn die sich ändernden Größen von einem Wert zum nächsten nicht sprungweise, sondern fließend übergehen.

Oft verbindet man, um die Zeichnung zu vereinfachen, bzw. um die ermittelten Temperaturen als Punkte im Diagramm hervortreten zu lassen, je zwei Nachbarpunkte durch Strecken (Abb. 22c). Der gebrochene **Streckenzug** weicht dann vielfach von der Kurve ab. Er würde zum Beispiel um 4^h die tiefste Temperatur mit 5,6 °C angeben, während der Kurvenverlauf gegen 3^h30^m die tiefste Temperatur mit 5,5 °C erwarten läßt.

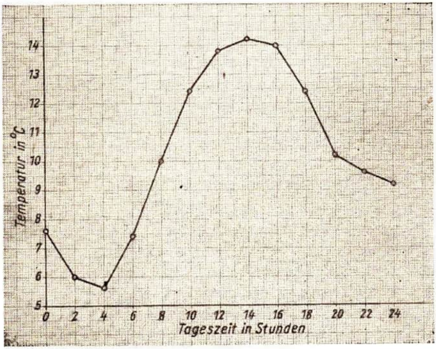


Abb.22c. Gebrochener Streckenzug

Je häufiger die Beobachtungen einander folgen, die zum Anfertigen des Diagramms ausgewertet werden, um so richtiger wird die als Ergänzung des Punktdiagramms gezeichnete Kurve den Zusammenhang der dargestellten Größen angeben und um so sicherer lassen sich aus dem Kurvenverlauf die zusammengehörigen Werte ablesen.

b) Registrierkurven

Auch bei dichter Beobachtungsfolge sprechen die ermittelten Temperaturen die Abhängigkeit der Tagestemperatur von der Tageszeit nur lückenhaft aus. Um diese Zusammenhänge laufend zu erfassen, wurden besondere Geräte konstruiert. So registriert z. B. der *Barograph* jede Veränderung des Luftdruckes, der *Thermograph* die der Temperaturen in Abhängigkeit von der Zeit.

Beim **Thermograph** (griech. *thermos* „warm“, *graphein* „schreiben“) ist das freie Ende eines Bimetallstreifens mit einem Schreibstift verbunden. Je nach der Temperatur verändert der Schreibstift seine Lage. Er gleitet dabei auf einem Papierstreifen, der um eine Trommel gelegt ist. Die Trommel wird durch ein Uhrwerk gleichmäßig gedreht, und der Schreibstift zeichnet seine jeweilige Stellung ununterbrochen in einer Temperaturkurve auf (Abb. 23a). Durch Diagramme selbstregistrierender Geräte können auch Vorgänge erfaßt werden, deren rascher Ablauf von uns selbst wertmäßig nicht genau erfaßt werden kann. Als weiteres Beispiel sei das **Indikatordiagramm** zum Berechnen der Arbeit einer Dampfmaschine genannt

(Abb. 23b). Den Schreibstift verschiebt der Indikatorkolben durch eine Geradführung in der Längsrichtung einer Trommel. Diese dreht sich gleichzeitig im Takt der Hin- und Rückbewegung des sich im Dampfzylinder bewegenden Kolbens vor- und rückwärts. Jeder Punkt des Diagramms gibt den bei einer bestimmten Kolbenstellung im Dampfzylinder herrschenden Druck an.

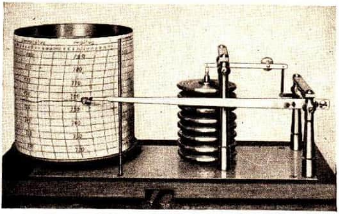


Abb.23a. Der Thermograph zeichnet Schwankungen der Temperatur auf einer durch ein Uhrwerk bewegten Schreibtrommel auf.

c) Der Funktionsbegriff

Läßt man bei der Betrachtung der in Abschnitt *b)* besprochenen Kurvendiagramme beiseite, was die Beispiele unterscheidet und hebt das ihnen Gemeinsame hervor, so erkennt man, daß jedesmal eine veränderliche Größe von einer anderen abhängt. Eine Beziehung dieser Art zwischen zwei veränderlichen Größen nennt man einen funktionalen Zusammenhang. Man sagt: Der Luftdruck ist eine Funktion der Zeit, die Tagestemperatur ist eine Funktion der Zeit, der Zylinderdruck ist eine Funktion der Kolbenstellung.

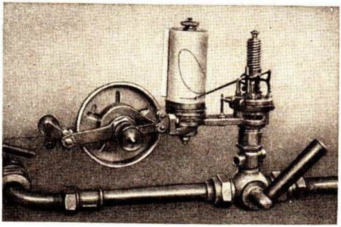


Abb.23b. Der Indikator zeichnet den im Zylinder einer Kolbendampfmaschine herrschenden Druck auf eine Trommel, die mit der Kolbenbewegung um ihre Achse gedreht wird.

In anderen Fällen wird eine veränderliche Größe durch mehrere andere bestimmt. So ist der Rauminhalt V einer abgesperrten Gasmenge sowohl von ihrem Druck p als auch von ihrer Temperatur T abhängig. Ihr Rauminhalt V ist eine *Funktion der beiden Veränderlichen* p und T.

Nach der Zahl der Größen, die zur Bestimmung des Wertes einer Funktion willkürlich wählbar sind, unterscheidet man zwischen Funktionen, die von einer Veränderlichen, und Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängig sind.

Funktionen, bei denen die Art der Abhängigkeit nur durch Beobachtung einzelner Wertepaare oder durch selbstregistrierende Apparate erfaßbar ist, heißen **empirische** (d. h. durch Erfahrung gewonnen) **Funktionen**. Wird z. B. die Abhängigkeit der Lufttemperatur y von der Tageszeit x untersucht, so betrachtet man y als empirische Funktion der veränderlichen Größe x. Durch Beobachten wird festgestellt, wie hoch die Lufttemperatur y bei einer willkürlich gewählten Tageszeit x ist.

Der Funktionsbegriff enthält zwei wesentliche Merkmale der Wirklichkeit, die Veränderung und den Zusammenhang, und hat daher große Bedeutung für die Praxis. Die Darstellung des funktionalen Zusammenhangs durch eine Formel vereinfacht und erleichtert die Verwendung. Beispielsweise ergibt sich aus der Formel $y = 4{,}9x^2$, daß ein im luftleeren Raum x Sekunden lang fallender Körper die Strecke y Meter zurücklegt. Aus der Funktionsgleichung können weitere Erkenntnisse über die Fallbewegung abgeleitet werden. Man bemüht sich deshalb, auch in anderen Fällen zu einer empirischen Funktion die zugehörige Funktionsgleichung zu finden.

3. Lineare Funktionen

a) Funktionsgleichungen

Gibt die Gleichung $y = \frac{2}{3}x - 4$ den Zusammenhang zwischen den veränderlichen Größen x und y an, so versteht man unter x eine willkürlich wählbare Zahl. Zu jedem gewählten x-Wert gehört ein ganz bestimmter y-Wert, den man aus der gegebenen Gleichung errechnet. Man gewinnt aus der Funktion $y = \frac{2}{3}x - 4$ z. B. folgende Wertetabelle, wenn für x nacheinander die angegebenen Werte eingesetzt werden:

x	y
-3	-6
0	-4
$+3$	-2
$+6$	0
$+9$	$+2$

Die allgemeinen Zahlen x und y sind hier nicht Unbekannte einer Bestimmungsgleichung, sondern veränderliche Größen (Variable) einer **Funktionsgleichung.**

Die Veränderliche (x), die willkürlich gewählt werden kann, wird die **unabhängige**, die Veränderliche (y), deren Wert sich nach dem Wert der anderen richtet, die **abhängige Variable** genannt.

x ist also ein Zahlenwert, der willkürliche Einzelwerte in beliebiger Reihenfolge annehmen bzw., wenn man von irgendeinem Wert ausgeht, wachsen oder abnehmen kann. In der Funktionsgleichung erscheinen die Zeichen x und y als Sammelbezeichnungen für beliebig viele zusammengehörige Einzelwerte.

Funktion
(Funktionsgleichung)

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x - 4}$$

unabhängige Veränderliche

abhängige Veränderliche

b) Geometrische Darstellung

Die Werte der unabhängigen Veränderlichen x einer Funktion sind beliebige positive oder negative Zahlen und können durch eine Zahlengerade veranschaulicht werden; auf einer zweiten Zahlengeraden lassen sich die Werte der abhängigen Veränderlichen y darstellen. Nun ordnet die Funktionsgleichung den x-Werten bestimmte y-Werte zu. Der Zusammenhang kommt bei der bildlichen Darstellung am einfachsten zum Ausdruck, wenn die beiden Zahlengeraden mit einem gemeinsamen Nullpunkt O rechtwinklig zueinander gezeichnet werden, so daß sie die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems bilden.

Gewöhnlich legt man die Gerade der x-Werte waagerecht und nennt sie die **x-Achse** der Zeichenebene. Die Gerade der y-Werte steht auf der x-Achse senkrecht als **y-Achse** der Zeichenebene. Auf jeder dieser Achsen wird eine Richtung als positive Richtung festgesetzt und durch eine Pfeilspitze angedeutet (Abb. 24). Die beiden Achsen zerlegen die Zeichenebene in **vier Quadranten**. Den 1. Quadranten begrenzen die positiven Teile beider Achsen, den 2. Quadranten grenzen der negative Teil der x-Achse und der positive der y-Achse, den 3. Quadranten die negativen Teile beider Achsen und den 4. Quadranten der positive Teil der x-Achse und der negative Teil der y-Achse ab. Die Quadranten folgen aufeinander entgegen dem Uhrzeigerdrehsinn.

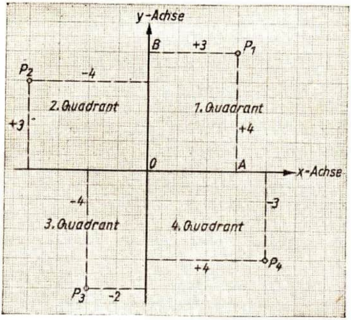


Abb. 24. Das rechtwinklige Koordinatensystem

Durch jeden Punkt der Zeichenebene läßt sich eine Parallele zur x-Achse ziehen, die die y-Achse schneidet, und eine Parallele zur y-Achse, die die x-Achse schneidet. Die auf den Achsen entstehenden Abschnitte werden vom Nullpunkt aus gemessen und mit einem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem, ob der Schnittpunkt auf dem positiven oder negativen Teil der Achse entsteht. Durch die Parallelen wird jedem Punkt der Zeichenebene ein Wertepaar x, y und umgekehrt jedem Wertepaar x, y ein Punkt der Zeichenebene zugeordnet. Weil jeder Punkt der Zeichenebene den Abständen von den Achsen zugeordnet wird, nennt man die Abstände auch **Koordinaten** (lat. *coordinare* „zuordnen") des Punktes, die Achsen *Koordinatenachsen*, den Achsenschnittpunkt *Koordinatenanfang*. Insbesondere bezeichnet man den Abstand eines Punktes von der y-Achse als die **Abszisse**, den Abstand von der x-Achse als die **Ordinate** des Punktes und unterscheidet zwischen der x-Achse als Abszissenachse und der y-Achse als Ordinatenachse. In Abb. 24 ist OA Abszisse, OB Ordinate des Punktes P_1.

Zur Darstellung von Punkten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem verwendet man gewöhnlich *Millimeterpapier*. Dieses ist mit Geraden bedruckt, die sich im Abstand von je 1 mm rechtwinklig schneiden.

Die Zuordnung ermöglicht, jedes einer Funktionsgleichung genügende Wertepaar x, y durch einen Punkt der Zeichenebene darzustellen; die einzelnen Punkte gehören zu dem Diagramm der Funktion. Ergeben sich in einem Bereich von x-Werten zu diesen stets bestimmte y-Werte, so liegen die zugehörigen Punkte auf einer **Kurve**, deren Form sich nach der Art der Funktion richtet.

Linien, die Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen zum Ausdruck bringen, werden *Kurven* genannt. Die *Fieberkurve* eines Kranken erhält man, wenn man bei der graphischen Darstellung der Körpertemperaturen die beobachteten Werte durch eine Zickzacklinie verbindet. Im eigentlichen Sinn bedeutet Kurve eine krumme Linie (lat. *curvus* „krumm").

Zum Zeichnen von Kurven steht nur in einzelnen Fällen ein besonderes Gerät (Zirkel) zur Verfügung. Im allgemeinen können Kurven meist nur angenähert richtig gezeichnet werden. Man verwendet dabei *Kurvenlineale* (Abb. 25). An einem Kurvenlineal wählt man eine Stelle des Randes so aus, daß der Linealrand möglichst vier aufeinanderfolgende Kurvenpunkte trifft. Dann verbindet man aber nur die beiden inneren Punkte, indem man dem Linealrand folgt, und verschiebt danach das Lineal so weit, daß der nächste Punkt am Linealrand liegt.

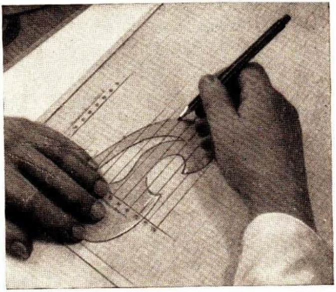


Abb. 25. Beim Zeichnen von Kurven leistet das Kurvenlineal gute Dienste.

c) *Die Funktion $y = mx$*

Die Schnittgeschwindigkeit v, mit der ein Werkstück auf einer Werkzeugmaschine bearbeitet wird, bildet bei jeder Drehzahl n eine Funktion des Werkstückdurchmessers d (Abb. 26). Den arithmetischen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen v und d liefert eine einfache Überlegung. Nach jeder Drehung der Spindel hat ein Punkt am Umfang des Werkstücks einen Kreis beschrieben.

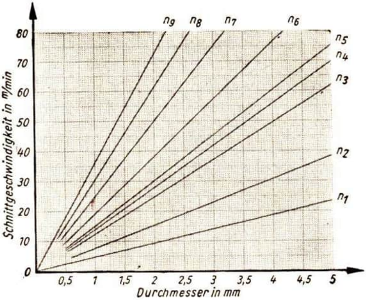


Abb. 26. Schnittgeschwindigkeitsdiagramm einer Tisch-Schnelllauf-Bohrmaschine. Der Zusammenhang zwischen dem Werkstückdurchmesser und der Schnittgeschwindigkeit bei bestimmten Drehzahlen wird durch gerade Linien wiedergegeben.

Die Kreislinie hat die Länge πd, wenn das Werkstück den Durchmesser d hat. Ist n die Anzahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit, so beträgt der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg das n-fache von πd. Als Schnittgeschwindigkeit ergibt sich

$$v = \pi d \cdot n\,.$$

Wird der Durchmesser d in Millimeter und für n die Drehzahl je Minute angegeben, so ergibt sich die Geschwindigkeit v in mm/min. Will man v in m/min angeben, wie es in der Technik üblich ist, so muß man die rechte Seite der Gleichung durch 1000 dividieren und erhält die

Schnittgeschwindigkeitsformel $v = \frac{\pi n}{1000} \cdot d$

d in mm
n in $^1/\text{min}$
v in m/min

Hier ist d die unabhängige Variable, v die abhängige Variable und $\frac{\pi \cdot n}{1000}$ konstant. Bezeichnen wir zur besseren Übersicht die unabhängige Variable d mit x, die abhängige Variable v mit y und die Konstante $\frac{\pi \cdot n}{1000}$ mit m, so erhalten wir die Funktionsgleichung in der allgemeinen Form

$$\boxed{y = mx}$$

Graphische Darstellung

Die graphische Darstellung der Funktionsgleichung $y = mx$ findet man durch folgende Überlegung. Gehört zu einem Wert x_1 der Wert y_1 durch die Gleichung $y_1 = m \cdot x_1$ und ist in Abb. 27 auf der x-Achse die Strecke $OA_1 = x_1$, auf der y-Achse die Strecke $OB_1 = y_1$ abgetragen, so schneiden die zu den Achsen durch A_1 und B_1 gezogenen Parallelen einander in P_1. Der Punkt P_1 gehört dem gesuchten Diagramm an.
Es bezeichne ebenso y_2 den Wert, den die Gleichung $y_2 = mx_2$ dem Wert x_2 zuordnet. Zeichnet man die Gerade OP_1, gibt auf der x-Achse A_2 so an, daß $OA_2 = x_2$ ist, und zieht durch A_2 die Parallele zur y-Achse, die OP_1 in P_2 schneidet, so gilt nach dem Strahlensatz die Proportion

$$\frac{A_2P_2}{OA_2} = \frac{A_1P_1}{OA_1}.$$

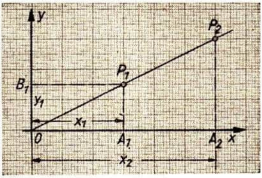


Abb. 27. Diagramm der Funktionsgleichung $y = mx$

Nun ist $\frac{A_1P_1}{OA_1} = \frac{y_1}{x_1} = m$, also ist auch $\frac{A_2P_2}{OA_2} = m$.

Lösen wir diese Gleichung nach A_2P_2 auf, so ergibt sich $A_2P_2 = m \cdot OA_2$.

Da ferner $OA_2 = x_2$, wird $A_2P_2 = m \cdot x_2$, d. h., $A_2P_2 = y_2$.

P_2 ist ein zweiter Punkt des Diagramms. Auch jedes weitere Wertepaar x, y, das der Gleichung $y = mx$ genügt, ergibt Diagrammpunkte auf der Geraden OP_1.

Das Bild der Funktion $y = mx$ ist eine durch O gehende, unbegrenzte gerade Linie, deren Richtung gegen die Achsen durch den Wert m bestimmt wird (Abb. 28).

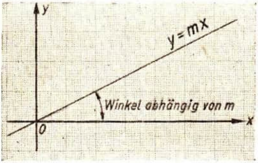


Abb. 28. Bild der Funktion $y = mx$

Zeigt umgekehrt ein Diagramm ein Stück einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden, so besteht in diesem Bereich Proportionalität zwischen den Koordinaten der Diagrammpunkte. Als Beispiel diene das *Spannungs–Dehnungs-Schaubild:*

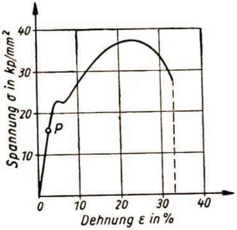


Abb. 29. Spannungs–Dehnungs-Schaubild

Die Untersuchung der Zugfestigkeit von Stahl ergibt Diagramme der in Abb. 29 dargestellten Art. Ein Probestab wird in eine Zerreißmaschine eingespannt und gedehnt, bis er zerreißt. Die Größe der jeweiligen Zugkraft und die erzielte Längenänderung werden an Meßinstrumenten abgelesen oder selbsttätig aufgezeichnet. Durch die senkrecht zu einem Quadratmillimeter des Querschnitts wirkende Kraft ergibt sich die Zugspannung σ, durch die Längenänderung der Längeneinheit die Dehnung ε. Zusammengehörige Werte sind die Koordinaten der Diagrammpunkte.
Von O bis P verläuft das Diagramm der empirischen Funktion geradlinig, Spannung und Dehnung zeigen sich in diesem Bereich proportional, und es gilt die Funktionsgleichung $y = m \cdot x$. Man schreibt die Gleichung als Ausdruck für das *Hookesche Gesetz* $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Der Proportionalitätsfaktor E ist eine dem Werkstoff eigentümliche Konstante und wird *Elastizitätsmodul* genannt.

d) *Die Funktion* $y = mx + b$

Bereits auf S. 86 wurde darauf hingewiesen, daß bei einer Federwaage innerhalb ihres Meßbereichs die Längenänderung der Schraubenfeder der Belastungsänderung proportional ist, also dem Hookeschen Gesetz folgt. In Abb. 30 ist dieselbe Federwaage viermal mit verschiedenen Belastungen skizziert. Die Aufhängepunkte O, A_1, A_2, A_3 haben gleiche Abstände auf einer waagerechten Geraden. F bezeichnet das Ende der unbelasteten Feder. P_1, P_2 und P_3 bezeichnen die Federenden, wenn die Waage mit 1 kp, 2 kp, 3 kp belastet ist. Die Federenden P_1, P_2 und P_3 ragen um die Verlängerungen $A_1P_1 - OF$, $A_2P_2 - OF$, $A_3P_3 - OF$ unter die durch F gezeichnete waagerechte Gerade, und es ist $(A_1P_1 - OF)$: $(A_2P_2 - OF) : (A_3P_3 - OF) = 1 : 2 : 3$. Da auch $OA_1 : OA_2 : OA_3 = 1 : 2 : 3$ ist, gilt

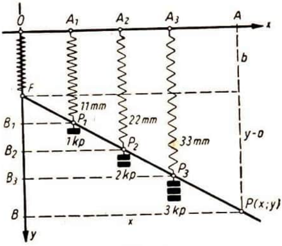


Abb. 30.
Belastung und Längenänderung einer Federwaage

$$\frac{A_1P_1 - OF}{OA_1} = \frac{A_2P_2 - OF}{OA_2} = \frac{A_3P_3 - OF}{OA_3} = m,$$

wenn m den Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Somit liegen die Punkte F, P_1, P_2 und P_3 nach dem Strahlensatz auf einer Geraden. Setzt man $OF = b$ und betrachtet die Gerade OA_3 als Abszissenachse, die Gerade OF als Ordinatenachse (deren positive Richtung der Richtung der Zugkraft entsprechend nach unten gezeichnet ist), so erfüllen die Koordinaten $OA = x$ und $OB = y$ eines an beliebiger Stelle der Geraden FP_3 liegenden Punktes P die Gleichung

$$\frac{y-b}{x} = m\,.$$

Durch Umformen entsteht daraus

$$y - b = m \cdot x\,, \quad y = m \cdot x + b\,.$$

Die Funktionsgleichung $y = mx + b$ liefert als Diagramm eine gerade Linie (Abb. 31). Sind m und b von Null verschiedene feste Werte, so hat der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse vom Nullpunkt den Abstand b (denn für $x = 0$ ergibt sich $y = b$), und ihre Richtung gegen die Koordinatenachsen bestimmt der Wert m.
Die zu der Funktionsgleichung $y = \frac{2}{3}x - 4$ gehörende Gerade (vgl. S. 103) schneidet die x-Achse im Punkte mit den Koordinaten $x = +6$, $y = 0$ und die y-Achse in dem Punkte mit den Koordinaten $x = 0$, $y = -4$. Bei dieser Geraden ist $m = \frac{2}{3}$ und $b = -4$.

Eine Gleichung, in der neben konstanten Größen nur die **ersten Potenzen** der beiden Veränderlichen x und y vorkommen, kann stets auf die Form $y = mx + b$ gebracht werden. Wertepaare x, y, die derartigen Gleichungen genügen, können als Koordinaten von Punkten gedeutet werden, die auf einer Geraden liegen. Funktionen, deren Diagramme gerade Linien ergeben, werden **lineare Funktionen** genannt.

Das Bild der Funktion

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

ist eine gerade Linie, deren Richtung gegen die Koordinatenachsen vom Wert m und deren Schnittpunkt mit der y-Achse vom Wert b bestimmt wird.

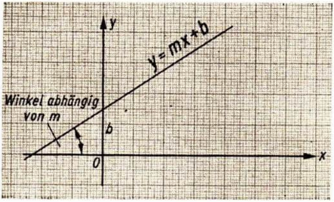


Abb. 31. Bild der Funktion $y = mx + b$

Graphische Auflösung von Gleichungen

Die graphische Darstellung der Funktionen kann zum Lösen von Gleichungen verwendet werden.
In der Bestimmungsgleichung $\frac{3}{2}x - 6 = 0$ ist mit x ein bestimmter, zunächst unbekannter Wert bezeichnet. Dagegen bedeutet x in der Funktionsgleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$ eine willkürlich wählbare Größe, zu der im allgemeinen ein von Null verschiedener Wert y gehört:

x	y
0	-6
1	$-\frac{9}{2}$
2	-3
4	0
5	$+\frac{3}{2}$
6	$+3$

Der Wert $x = 4$, der $y = 0$ ergibt, erscheint in dem Bild der Funktion (Abb. 32) als Abszisse des Schnittpunktes der Geraden $y = \frac{3}{2}x - 6$ mit der x-Achse.

Zur graphischen Lösung der Gleichung

$$ax + b = 0$$

zeichnet man mit Hilfe von zwei Wertepaaren für x und y, die der Gleichung $y = ax + b$ genügen, eine Gerade. Sie ist das Bild der Funktion. Der gesuchte x-Wert ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse.

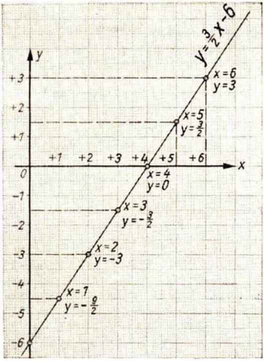


Abb. 32. Graphische Lösung einer Gleichung

e) Graphische Fahrpläne

Funktionszusammenhänge, die einer Folge bestimmter Zahlen eine zweite Folge zuordnen, werden je nach dem Verwendungszweck durch Tabellen oder Diagramme dargestellt. Die tabellarische Anordnung verwendet man, wenn viele der Funktion genügende Zahlenpaare gebraucht werden, das Diagramm läßt man sprechen, wenn es auf eine Übersicht über den Funktionsverlauf ankommt.

Beide Darstellungsweisen zeigen ihre Vorteile bei Fahrplänen. Kursbücher verzeichnen zusammengehörende Orts- und Zeitangaben der Fahrt eines Zuges in Tabellenform.

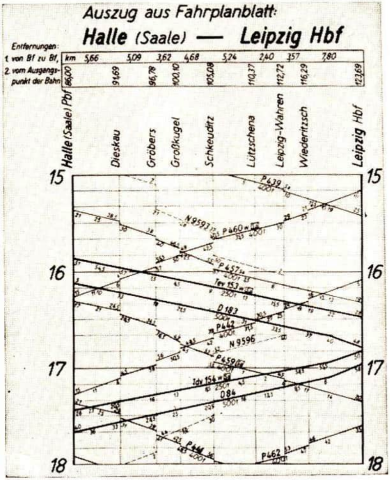


Abb. 33. Auszug aus einem Fahrplanblatt der Reichsbahn

Für den Betriebsablauf sind *graphische Fahrpläne* notwendig, die durch ein geometrisches Bild Übersicht über den Lauf der Züge einer Bahnstrecke gewähren (Abb. **33**).
Im Kursbuch steht z. B. folgende Tabelle als Fahrplan eines Eilzuges, der zwischen Leipzig und Cottbus verkehrt:

	Weg in km	Zeit
Leipzig Hbf. .	0,0	ab 6.28
Eilenburg . . .	24,7	an 6.54 ab 6.58
Torgau	52,4	an 7.22 ab 7.24
Falkenberg . .	70,4	an 7.42 ab 8.00
Doberlug-Kirchhain usw.	93,0	an 8.22

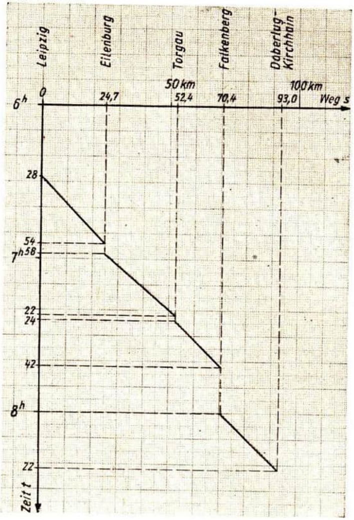


Abb. 34. Prinzipskizze zum graphischen Fahrplan

Die graphische Darstellung des Planes ist dem Prinzip nach in Abb. **34** wiedergegeben. Auf einer waagerechten Geraden, die sich vom Abfahrtsort des Zuges als Koordinatenanfang nach rechts erstreckt, sind aneinanderstoßend die von Haltepunkt zu Haltepunkt durchfahrenen Strecken aufgetragen. Die Koordinatenachse für die Uhrzeiten der Abfahrt und Ankunft ist als abwärtsgerichtete Senkrechte gezeichnet. Bei dieser Darstellung ist angenommen, daß der Zug zwischen zwei Stationen mit konstanter Geschwindigkeit fährt, so daß das Weg–Zeit-Gesetz

$$s = v \cdot t$$

gilt. Die Strecke s wird mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t durchfahren. Bezeichnet man die Zeit t mit x, den Weg s mit y und die konstante Geschwindigkeit v mit m, so erkennt man die bekannte Funktionsgleichung

$$y = m \cdot x,$$

deren graphisches Bild eine gerade Linie ist. Es ergibt sich in jedem Abschnitt als Weg–Zeit-Diagramm ein Stück einer geraden Linie. Wegen des Aufenthalts auf den verschiedenen Stationen erscheinen diese Stücke voneinander getrennt.

Da aus dem graphischen Fahrplan Entfernungen zwischen einzelnen Stationen und Minutenzahlen für Abfahrt oder Ankunft kaum mit der nötigen Genauigkeit erkennbar sind, werden diese besonders angegeben. Die Entfernungen stehen am Kopfe des Planes, die Minutenzahlen für Abfahrt oder Ankunft bei jedem Abschnitt des Diagramms (vgl. Abb. 33).

4. Beispiele für nichtlineare Funktionen

Die Formel für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Körpers lautet

$$s = \tfrac{1}{2} b \cdot t^2.$$

Darin bedeutet s die Länge des Weges, der in der Zeit t zurückgelegt wird, und b den Wert der bei dieser Bewegung unveränderlichen Beschleunigung. Für $b = 0{,}2\ \mathrm{cm/s^2}$ ergibt sich die Wertetabelle

t [in s]	s [in cm]
0	0
1	0,1
2	0,4
3	0,9
4	1,6
5	2,5
6	3,6
7	4,9
8	6,4
9	8,1

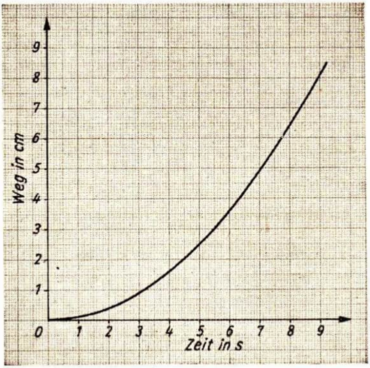


Abb. 35. Weg–Zeit-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Das Diagramm zeigt Abb. 35. Es ergibt sich eine *gekrümmte Linie*. In der zugehörigen Funktionsgleichung $s = \frac{1}{2} b \cdot t^2$ tritt die Veränderliche t in der *zweiten Potenz* auf. Hier begegnet uns ein Beispiel für nichtlineare Funktionen, von denen im folgenden die Rede ist.

a) Die Funktion $y = x^2$

Ein Quadrat von der Seitenlänge x hat den Flächeninhalt x^2. Die zu einer beliebigen Quadratseite x gehörende Quadratfläche y wird somit durch die Funktionsgleichung $y = x^2$ angegeben. Da die Gleichung die zweite Potenz der unabhängigen Veränderlichen x enthält, höhere Potenzen von x in ihr aber nicht vorkommen, heißt $y = x^2$ eine **Funktion zweiten Grades** oder auch eine **quadratische Funktion.**

Durchläuft die Quadratseite eine Reihe von x-Werten, so nimmt die Quadratfläche Größen an, die jeweils den Quadraten der x-Werte entsprechen (obere Tabelle).

x	$y = x^2$
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
3	9

x	$y = x^2$
$-0,5$	$+0,25$
-1	$+1$
$-1,5$	$+2,25$
-2	$+4$
-3	$+9$

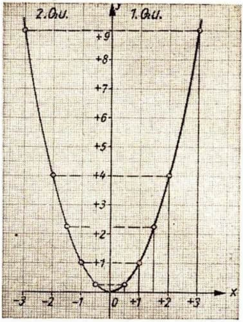


Abb.36. Die Parabel $y = x^2$

Die graphische Darstellung der zusammengehörenden Werte ergibt als Bild eine gekrümmte Linie. Sie beginnt bei $x = 0$ mit $y = 0$, entfernt sich von der x-Achse zunächst nur wenig und verläuft dann steil aufwärts (Abb. 36, 1. Quadrant).

Läßt man die einschränkende Vorstellung fallen, daß die x-Werte Quadratseiten, die y-Werte Quadratflächen darstellen, und setzt für x auch negative Zahlen ein, so erhält man z. B. die zusammengehörigen Werte der unteren Tabelle (Abb. 36, 2. Quadrant).

Als Diagramm der quadratischen Funktion $y = x^2$ entsteht die Kurve der Abb. 36. Man nennt sie **Parabel.**

Die Parabel verläuft in den ersten beiden Quadranten und berührt die x-Achse im Koordinatenanfang. Er bildet den **Scheitel** der Parabel. Zu jedem x-Wert erhält man einen Parabelpunkt mit positivem y-Wert. Umgekehrt gehören zu jedem positiven y-Wert zwei entgegengesetzt gleiche x-Werte. Die auf Millimeterpapier gezeichnete Parabel $y = x^2$ ist zur angenäherten Ermittlung von Quadratzahlen und Quadratwurzeln verwendbar.

In dem Bild der Funktion $y = x^2$ erscheint das Quadrat der Zahl x, zu der ein Punkt auf der x-Achse gehört, jedesmal als y-Wert des entsprechenden Parabelpunktes. Umgekehrt ist der jedem y-Wert eines Parabelpunktes entsprechende x-Wert die Quadratwurzel dieses y-Wertes.

Das Bild der Funktion $y = x^2$ ist eine Parabel.

Die Funktion $y = c\,x^2$

Jede Kurve der Abbildung 37 (I, II und III) zeigt das zu $y = x^2$ gehörende Diagramm für den Bereich von $x = -2$ bis $x = +2$. Da die Längeneinheit für die Darstellung der Koordinatenwerte bei Abb.37a die Hälfte, bei Abb.37c das Doppelte der für Abb.37b gewählten Längeneinheit ist, erscheint der Parabelbogen I gegen II im Maßstab M 1 : 2 verkleinert, der Parabelbogen III im Maßstab M 2 : 1 vergrößert.

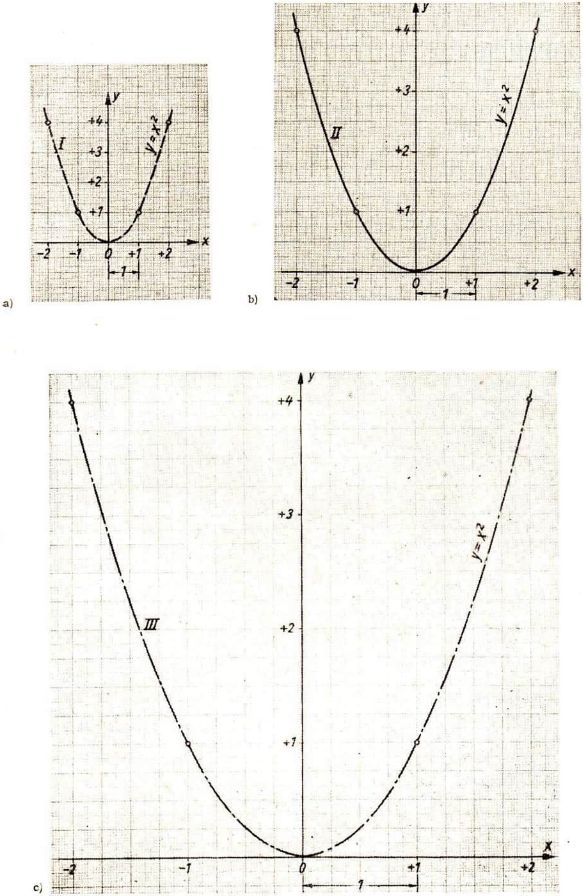


Abb. 37. Die Parabel $y=x^2$ in verschiedenen Koordinatensystemen

Man denke sich jetzt die Kurven I und III auf das Koordinatensystem der Abb. 37 b gelegt (Abb. 38). Während in Abb. 38 der Kurve II die Funktionsgleichung $y = x^2$ entspricht, lauten für I und III in diesem Koordinatensystem die Funktionsgleichungen nicht mehr $y = x^2$. Vielmehr heißt die Funktionsgleichung zu I jetzt $y = 2x^2$, die zu III $y = \frac{1}{2}x^2$. In beiden Fällen kann die Richtigkeit durch Ausrechnen von bestimmten Wertepaaren nachgeprüft werden. Wir erkennen:
Das Auftreten der Faktoren 2 bzw. $\frac{1}{2}$ in den Gleichungen $y = 2x^2$ bzw. $y = \frac{1}{2}x^2$ verändert die Art der zu $y = x^2$ gehörenden Kurve nicht.

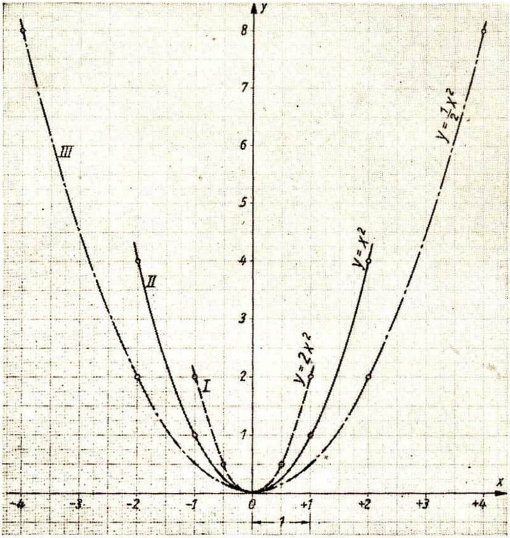


Abb. 38. Die Parabeln I und III der Abb. 37 nehmen andere Funktionsgleichungen an, wenn sie im Koordinatensystem der Parabel II gezeichnet werden.

Dasselbe gilt für jeden konstanten Faktor c, der von 0 verschieden ist. Die Funktionsgleichung $y = c \cdot x^2$ ergibt als Diagramm eine Parabel. Ihre Gestalt richtet sich nach dem Wert des Faktors c. Dieser kann auch negativ sein. Für $c = -1$ entsteht aus $y = -x^2$ folgende Wertetabelle:

x	y
$+4$	-16
$+3$	-9
$+2$	-4
$+1$	-1
0	0
-1	-1
-2	-4
-3	-9
-4	-16

Das zugehörige Diagramm kann aus der in demselben Koordinatensystem gezeichneten Parabel $y=x^2$ durch Umklappen um die x-Achse hergestellt werden. $y=-x^2$ stellt dann die zur x-Achse symmetrische Parabel von $y=x^2$ dar (Abb. 39).

Das Bild der Funktion $y=c\,x^2$ ist eine Parabel (Abb. 40).

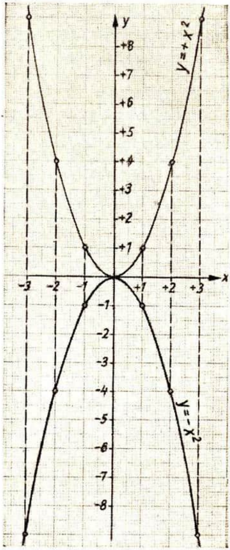


Abb. 39. Die Parabeln $y=cx^2$ für $c=\pm 1$

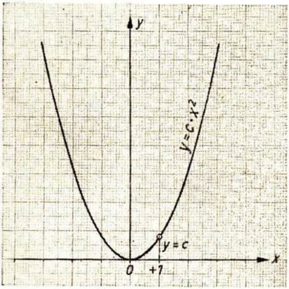


Abb. 40. Bild der Funktion $y=cx^2$

b) Die Funktion $y=\frac{1}{x}$

Für eine eingeschlossene Gasmenge, deren Temperatur sich nicht verändert, besteht zwischen Gasdruck und Gasvolumen ein Zusammenhang, der rechnerisch durch das *Boyle-Mariottesche Gesetz* ausgedrückt wird. Sind p_1 und V_1 zusammengehörende Werte für Druck und Volumen bei einem Zustand einer Gasmenge, p_2 und V_2 die entsprechenden Werte bei einem anderen Zustand derselben Gasmenge, so gilt nach diesem Gesetz

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2\,,$$

d.h., das Produkt aus Druck und Volumen ergibt für jeden Zustand, den die eingeschlossene Gasmenge annimmt, den gleichen Wert.

Danach würde Sauerstoff, der mit einem Druck von 150 at in eine Stahlflasche von 40 l Inhalt gepreßt wurde, bei einem Druck von 15 at einen Raum von 400 l beanspruchen und einen Raum von 6000 l bei einem Druck von 1 at füllen. In jedem Zustand der eingeschlossenen Sauerstoffmenge ergibt das Produkt aus Druck und Volumen den Wert 6000 Literatmosphären.

Bezeichnet man das Gasvolumen mit V, den Druck mit p und den konstanten Produktwert $p \cdot V$ mit c, so gilt

$$p \cdot V = c\,.$$

Hieraus ergibt sich durch Umformen die Funktionsgleichung

$$p = c \cdot \frac{1}{V}\,,$$

die p als Funktion von V darstellt.

Die Gleichung bringt zum Ausdruck, daß *indirekte Proportionalität* zwischen zusammengehörigen Werten von Druck und Volumen besteht. Verdoppelt man z. B. das Volumen, so sinkt der Druck auf die Hälfte.

Für eine Gasmenge, die 1 cm³ Rauminhalt bei dem Druck 1 kp/cm² hat, ist $c = 1$ kp·cm. Zusammengehörende Werte sind in der folgenden Tabelle aufgestellt:

V [in cm³]	p [in kp/cm²]
5	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{5}$	5

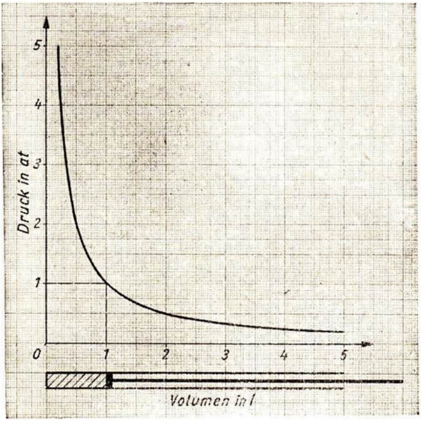


Abb. 41. Abhängigkeit zwischen Druck und Volumen eines Gases

Es ergibt sich das in Abb. 41 dargestellte Diagramm. Die entstehende Kurve weicht von der Parabel ab; sie wird **Hyperbel** genannt.

Die gleiche Kurve gehört zu der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{x}$ für positive x-Werte, bei der die Veränderlichen nicht mehr an eine bestimmte Bedeutung gebunden sind. Der unabhängigen Veränderlichen x dürfen außer Null (vgl. S. 118) alle Werte der Zahlengeraden beigelegt werden; die abhängige Veränderliche y ergibt sich als ihr Kehrwert.

Für die Funktion $y = \frac{1}{x}$ zeigt Abb. 42 das Diagramm, das der folgenden Wertetafel entspricht:

x	y	x	y
-5	$-\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{5}$	$+5$
-4	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+4$
-3	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$+2$
-2	$-\frac{1}{2}$	$+1$	$+1$
-1	-1	$+2$	$+\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$+3$	$+\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}$	-4	$+4$	$+\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{5}$	-5	$+5$	$+\frac{1}{5}$

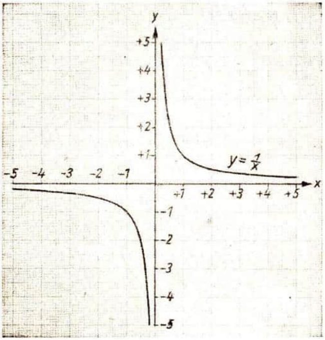


Abb. 42. Bild der Funktion $y = \frac{1}{x}$

Das Bild der Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist eine (gleichseitige) Hyperbel.

Kurvendiskussion

Jedes Paar zusammengehörender Werte der Tabelle bestimmt einen Punkt der Hyperbel. Die Kurve besteht aus **zwei** getrennten **Ästen.** Der eine Ast verläuft im ersten Quadranten, der zweite im dritten. Das Vertauschen der x-Achse mit der y-Achse ändert den Kurvenverlauf nicht. Jeder Ast hat die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten als Symmetrieachse. Die beiden Äste liegen symmetrisch zur Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten. Wegen dieser **doppelten Symmetrie** bringt eine Drehung um 180°, die in der Zeichenebene um den Koordinatenanfang als Drehpunkt ausgeführt wird, den einen Hyperbelast mit dem anderen zur Deckung. Die Hyperbel liegt hier zentrisch-symmetrisch zum Koordinatenanfang.

Weitere Besonderheiten der Kurve ergeben sich, wenn die x-Werte über den gezeichneten Bereich hinaus wachsen oder abnehmen. Der im ersten Quadranten liegende Ast nähert sich mit wachsendem und der im dritten Quadranten liegende mit abnehmendem x der x-Achse, fällt aber auch dann nicht mit der x-Achse zusammen, wenn der Betrag von x größer wird als jede noch so große Zahl. Man erhält folgende Wertetabellen:

x	y
$+10$	$+\frac{1}{10}$
$+100$	$+\frac{1}{100}$
$+1000$	$+\frac{1}{1000}$
$+10000$	$+\frac{1}{10000}$
usw	

x	y
-10	$-\frac{1}{10}$
-100	$-\frac{1}{100}$
-1000	$-\frac{1}{1000}$
-10000	$-\frac{1}{10000}$
usw.	

Man sagt, die Äste der Hyperbel nähern sich **asymptotisch** der x-Achse, und nennt die x-Achse auch **Asymptote** der Hyperbel.

Für $x = 0$ ist aus $y = \frac{1}{x}$ kein Funktionswert berechenbar, weil man nicht durch Null dividieren kann. Somit ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ überhaupt **nicht erklärt.** Daß die Beträge der Funktionswerte um so mehr anwachsen, je mehr sich die x-Werte der Stelle $x = 0$ nähern, geht aus der folgenden Tabelle hervor:

x	y
0,1	10
0,01	100
0,001	1 000
usw.	usw.

x	y
$-0,1$	-10
$-0,01$	-100
$-0,001$	$-1\,000$
usw.	usw.

Wird der Betrag von x immer kleiner gewählt, so erhält man für den Betrag von y eine immer größere Zahl. Die Hyperbeläste nähern sich also auch asymptotisch der y-Achse; die y-Achse bildet die zweite Asymptote der gleichseitigen Hyperbel.

Der Verlauf der Funktion $y = \frac{1}{x}$ zeigt, daß die Division für den Divisor 0 ihren Sinn verliert.

AUFGABEN

1. Den Kaloriengehalt von je 100 g kochfertigem Gemüse veranschaulicht Abb. 43. Wieviel Kalorien kommen auf die einzelnen Sorten?

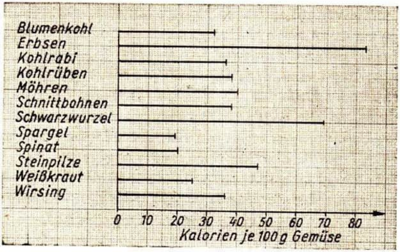


Abb. 43. Zu Au'gabe 1

2. Die Steigerung der Kalisalzgewinnung in der Deutschen Demokratischen Republik ist durch ein Säulendiagramm darzustellen.

Sie betrug in 1 000 t (K_2O):

1945	176	1952	1346
1946	685	1953	1378
1947	737	1954	1463
1948	950	1955	1552
1949	1170	1956	1556
1950	1336	1957	1604
1951	1409	1958	1650

3. Die Erdölförderung in Rumänien seit der Gründung der Sowjetisch-Rumänischen Erdölgesellschaft ist durch ein Diagramm zu veranschaulichen. Sie betrug in Millionen Tonnen

1945 4,6; 1946 4,1; 1947 3,8; 1948 4,3;
1949 4,7; 1950 5,3; 1951 6,5; 1952 8,3.

4. Letternmetall für Handsatz enthält 28% Antimon, 67% Blei und 5% Zinn, für Maschinensatz (Linotype) 12% Antimon, 83% Blei, 5% Zinn, für Maschinensatz (Monotype) 19% Antimon, 72% Blei, 9% Zinn.
Die Zusammensetzung ist durch Kreisdiagramme zu veranschaulichen (100% ≙ 360°)!

5. Die Braunkohle ist für viele Industriezweige ein wichtiger Grundstoff. Die DDR steht in der Braunkohlenförderung an erster Stelle in der Welt und steigert die Förderung ständig (s. Tabelle).

Jahr	Braunkohleförderung in Mill. Tonnen
1950	137,0
1951	151,2
1952	158,5
1953	172,7
1954	181,9
1955	200,6
1956	205,9
1957	212,6
1958	215,0

Die Tabelle zeigt, daß die Förderung des Jahres 1957 — setzt man die Leistung des Jahres 1950 gleich 100% — bereits um 55% höher lag.

a) Fertige zum Vergleich der Förderleistungen ein Säulendiagramm an!

b) Errechne die jährliche prozentuale Erhöhung der Förderung und stelle die Ergebnisse in einem Kreisdiagramm (100% = 360°) dar!

6. Durch die Arbeiten der Nationalpreisträger Prof. Dr. Rammler und Dr. Bilkenroth ist es gelungen, zur Verkokung Braunkohle anstatt der bisher notwendigen Steinkohle zu verwenden. Das ist für uns von besonderer Bedeutung, denn dieser sogenannte Braunkohlenhochtemperaturkoks macht uns von Steinkohleneinfuhren unabhängiger.

Bisher wurden produziert:

1955 .... 458000 t
1956 .... 732000 t
1957 .... 782000 t
1958 .... 995000 t

Zeichne ein Diagramm!

7. In der Nahrungs- und Genußmittelindustrie betrug im Jahre 1955 der Anteil der volkseigenen Produktion 64,8% und der der privaten Produktion 11,5%. Die genossenschaftliche Produktion war mit 23,7% beteiligt.
Im Jahre 1957 waren die Anteile folgendermaßen verteilt:

volkseigene Produktion	66,1%
private Produktion	10,5%
genossenschaftliche Produktion	23,4%

Im Sektor der volkseigenen Produktion entfielen auf zentral geleitete Betriebe 36,5%, auf die örtlich geleiteten 29,6%. Diese Verteilung ist in 2 Kreisdiagrammen zu veranschaulichen!

8. In der DDR setzt sich immer mehr die Großblockbauweise durch und ihr Anwendungsbereich wird ständig größer (s. Tabelle) 1950=100%.

Jahr	Produktion von Betonfertigteilen	Jahr	Produktion von Betonfertigteilen
1951	142%	1955	513%
1952	207%	1956	954%
1953	259%	1957	1300%
1954	383%	1958	1568%

Fertige zur Veranschaulichung ein Diagramm an!

9. Der Vorteil moderner Maschinen und Geräte besteht im Erleichtern und besseren Ausführen der Arbeiten sowie im Ersatz menschlicher und tierischer Arbeitskräfte.
Bei der Getreideernte ist in den letzten 100 Jahren durch die Entwicklung neuer Erntemaschinen und -methoden eine wesentliche Erleichterung der Arbeit eingetreten.

Mit einer Sense können 2 Personen in einer Stunde 6a mähen und binden.
Mit einem Ableger und 2 Pferden können 2 Personen in einer Stunde 32 a mähen und binden.
Mit einem Mähbinder und einem Traktor können 2 Personen in einer Stunde 45 a mähen und binden.
Mit einem Zapfwellenbinder können 2 Personen in einer Stunde 50 a mähen und binden.

a) Berechne die Steigerung der Arbeitsproduktivität in Prozenten von Maschine zu Maschine!

b) Fertige ein Kurvendiagramm mit den Ergebnissen der Aufgaben an!

10. In den Jahren 1955, 1956, 1957 und 1958 wurden insgesamt 1620 Millionen Einheiten Insulin hergestellt. Die jährliche Produktion ist in einem Diagramm darzustellen. Es sind die Werte der folgenden Tabelle zu verwenden.

Jahr	Mill. Einheiten Insulin	Jahr	Mill. Einheiten Insulin
1955	360	1957	390
1956	410	1958	460

11. Die DDR als Land des Maschinenbaues produziert auch Revolverdrehmaschinen und ist in der Lage, jährlich davon eine bestimmte Anzahl zu exportieren. Es wurden je Monat durchschnittlich hergestellt:

Jahr	monatliche Produktion in Stück	Jahr	jährlicher Export in Stück
1952	23	1952	126
1953	19	1953	103
1954	30	1954	167
1955	44	1955	58
1956	49	1956	153
1957	47	1957	123
1958	50	1958	134

In einem Diagramm soll gezeigt werden, wieviel der hergestellten Revolverdrehmaschinen alljährlich unserer Industrie zur Verfügung gestellt wurden.

12. Zu unseren wichtigsten und begehrtesten Außenhandelsartikeln gehören die Erzeugnisse der Fotoindustrie. So wird in großen Mengen Fotopapier exportiert.

Jahr	Export an Fotopapier in 1000 m²	Jahr	Export an Fotopapier in 1000 m²
1953	563	1956	2546
1954	1314	1957	2622
1955	1853	1958	2583

Stelle die Werte der Tabelle zeichnerisch in einem Säulendiagramm dar!

13. Die Zahlen der folgenden Tabelle zeigen die Steigerung der Elektroenergieerzeugung in den Jahren 1951 bis 1958 (in Mill. kWh). Veranschauliche die Steigerung durch Zeichnen eines Diagramms!

Jahr	Energieerzeugung in Mill. kWh	Jahr	Energieerzeugung in Mill. kWh
1951	21 463	1955	28 695
1952	23 183	1956	31 182
1953	24 247	1957	32 735
1954	26 044	1958	34 874

14. Auf einer Wetterstation wurden folgende Monats-Durchschnittstemperaturen festgestellt:

Jan.	8 °C	Apr.	16 °C	Juli	28 °C	Okt.	18 °C
Febr.	10 °C	Mai	20 °C	Aug.	27 °C	Nov.	12 °C
März	12 °C	Juni	25 °C	Sept.	24 °C	Dez.	10 °C

Ein Temperatur-Zeit-Schaubild ist anzufertigen.

15. Die folgenden Temperaturreihen sind von einer landwirtschaftlichen Forschungsanstalt 1. an der Erdoberfläche im Freien, 2. im Abstand von 15 cm über der Erdoberfläche im Freien an einem Junitag festgestellt worden.

0^h	16,7 °C	19,4 °C	10^h	22,6 °C	18,8 °C	20^h	19,7 °C	21,6° C
2^h	15,6 °C	18,4 °C	12^h	25,0 °C	20,5 °C	22^h	17,8 °C	20,5 °C
4^h	15,1 °C	17,8 °C	14^h	26,4 °C	22,0 °C	24^h	15,9 °C	19,5 °C
6^h	15,9 °C	17,4 °C	16^h	25,9 °C	22,9 °C			
8^h	17,5 °C	17,5 °C	18^h	22,4 °C	22,6 °C			

Temperaturkurven für beide Meßreihen sind in einem Koordinatennetz zu zeichnen.

16. Nach dem Kursbuch ist für die zwischen Halle und Leipzig verkehrenden Personenzüge ein graphischer Fahrplan aufzustellen.

17. Die Geschwindigkeit, die ein frei fallender Körper nach der Zeit t erreicht, wird nach der Formel $v = g \cdot t$ berechnet ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). Stelle v als Funktion von t graphisch dar und lies ab, wie groß v für $t = 2\frac{1}{2}$s und t für $v = 30$m/s ist!

18. Die Umfangsgeschwindigkeit eines sich drehenden Rades ergibt sich aus der Formel

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \text{ in m/s,}$$

wenn der Durchmesser d (in m) beträgt und das Rad in jeder Minute n Umdrehungen macht. Für **a)** $n = 26$, **b)** $n = 37$, **c)** $n = 53$ sind die zu $d = 0{,}1$ m; 0,2 m; 0,3 m gehörenden Werte für v zu berechnen und in einem Koordinatennetz zur graphischen Darstellung des Zusammenhangs zwischen v und d zu verwenden.

19. Das zur Funktionsgleichung

a) $y = x + 2$, **b)** $y = 2x - 1$, **c)** $y = \frac{2}{3}x + 1$, **d)** $y = -x + 3$

gehörende Diagramm ist zu zeichnen.

20. Aus der Gleichung $360° = 400^g$ ist ein Diagramm aufzustellen, das zur Umwandlung von Altgrad in Neugrad dient.

21. Aus der Gleichung 1 PS = 0,736 kW ist ein Diagramm aufzustellen, das zur Umwandlung von PS in kW dient.

22. Der in der Zeit t durchfallene Weg errechnet sich aus $s = \frac{1}{2}gt^2$ ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). s ist als Funktion von t graphisch so darzustellen, daß aus dem Diagramm

a) die zu $t = 1{,}2$ s gehörende Fallstrecke,

b) die für die Fallstrecke $s = 30$ m nötige Zeit entnommen werden kann.

23. Das zur Funktionsgleichung

a) $y = 0{,}2x^2$ **b)** $y = 1{,}2x^2$ **c)** $y = -0{,}1x^2$ **d)** $y = -1{,}1x^2$

gehörende Diagramm ist im Bereich von $x = -3$ bis $x = +3$ zu zeichnen.

24. Die zu

a) $y = \frac{1}{x}$, **b)** $y = \frac{2}{x}$, **c)** $y = \frac{3}{x}$, **d)** $y = \frac{4}{x}$

gehörenden Diagramme sind zwischen $x = -5$ und $x = +5$ in einem Koordinatennetz darzustellen.

E. GLEICHUNGEN ERSTEN GRADES MIT ZWEI UNBEKANNTEN

1. Zur Einführung

Die Verwertung von Altmaterial stellt dem Techniker oft Aufgaben, zu deren Lösung Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten herangezogen werden.

Beispiel:

Aus zwei Sorten Altbronze, und zwar

Altbronze Sorte 1	mit 80% Kupfer und 20% Zinn (Gußbronze 20),
Altbronze Sorte 2	mit 90% Kupfer und 10% Zinn (Gußbronze 10),

sollen hergestellt werden

1500 kg Gußbronze	mit 86% Kupfer und 14% Zinn (Gußbronze 14).

(Die genormte Benennung der Bronze nach DIN 1705 richtet sich nach ihrem Zinngehalt.)

Lösung:

Die erforderlichen Mengen der Sorten 1 und 2 sind unbekannt. Wir bezeichnen sie mit x und y und versuchen, aus der Aufgabenstellung einen Zusammenhang zwischen beiden Größen zu gewinnen. Es findet sich sofort eine einfache Beziehung: Beide Mengen, d.h. x kg der Sorte 1 und y kg der Sorte 2, sollen zusammen 1500 kg der Gußbronze ergeben. Es besteht also die Gleichung

$$x + y = 1500.$$

Sie reicht zum Bestimmen der Werte für x und y nicht aus, da alle möglichen Wertepaare x und y die Summe 1500 ergeben, z.B.

$$\begin{aligned} x &= 500, \quad y = 1000 \\ x &= 600, \quad y = 900 \\ x &= 700, \quad y = 800 \end{aligned}$$

Um aus diesen Wertepaaren das richtige herauszufinden, suchen wir nach einem weiteren Zusammenhang zwischen x und y. Ein solcher zeigt sich uns, wenn wir den vorgegebenen Zinn- oder Kupfergehalt der drei Legierungen in Rechnung setzen. Die erste Sorte enthält 80% Kupfer, die Menge x kg also $x \cdot \frac{80}{100}$ kg Kupfer. Die Menge y kg der zweiten Sorte enthält entsprechend $y \cdot \frac{90}{100}$ kg Kupfer. In den 1500 kg der herzustellenden Gußbronze müssen dagegen 86% Kupfer, das sind $1500 \cdot \frac{86}{100}$ kg Kupfer, enthalten sein. Es ergibt sich hieraus die Beziehung

$$x \cdot \frac{80}{100} + y \cdot \frac{90}{100} = 1500 \cdot \frac{86}{100}.$$

Auch diese Gleichung gibt nur einen Zusammenhang zwischen x und y an.

Für $x = 500$ wird $500 \cdot \frac{80}{100} + y \cdot \frac{90}{100} = 1500 \cdot \frac{86}{100}$,

$$\begin{aligned} 40\,000 + 90y &= 129\,000, \\ 90y &= 89\,000. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also für $x = 500 \quad y = \frac{8900}{9}$,

Entsprechend wird für $x = 600 \quad y = 900$

und für $x = 700 \quad y = \frac{7300}{9}$.

Ein Vergleich mit den möglichen Wertepaaren der ersten Gleichung zeigt, daß das Wertepaar $x = 600$, $y = 900$ für die beiden Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x \cdot \frac{80}{100} + y \cdot \frac{90}{100} = 1500 \cdot \frac{86}{100} \end{array} \right|$$

gleichzeitig gilt. Dieses Wertepaar ist daher die Lösung der Aufgabe. Für 1500 kg der geforderten Gußbronze werden 600 kg der ersten Sorte und 900 kg der zweiten Sorte gebraucht.

Auch auf anderen Gebieten treten Fragen auf, die mit Hilfe von Gleichungen mit mehreren Unbekannten beantwortet werden können. In der Ernährungswirtschaft soll beispielsweise festgestellt werden, wieviel Hammelfleisch und Bohnen ein Werksküchenessen enthalten muß, um den Bedarf an Eiweiß und Fett zu decken. In der Hauswirtschaft soll berechnet werden, wie in einem Zweifamilienhaus die Kosten für den jährlichen Bedarf an Heizmaterial zu verteilen sind, wenn im Erdgeschoß 3, im Obergeschoß 4 Heizkörper im Betrieb sind.

2. Graphisches Lösungsverfahren

Gegeben sind zwei Gleichungen ersten Grades

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{array} \right|$$

Aus ihnen sollen die Unbekannten x und y bestimmt werden. Das Ermitteln soll jetzt nicht durch Aufstellen von Wertetabellen erfolgen, wobei der Zufall bestimmt, ob in beiden Tabellen ein gemeinsames Wertepaar erscheint, sondern mit Hilfe der graphischen Darstellung.

Jede der beiden Gleichungen kann als Funktionsgleichung betrachtet werden, die die veränderlichen Größen x und y miteinander verknüpft. Bringt man sie auf die uns bekannte Form linearer Funktionsgleichungen, bei der y für sich auf der linken Seite steht, so ergibt sich

$$\left| \begin{array}{l} y = -\tfrac{1}{2}x + 4 \\ y = 3x - 3 \end{array} \right|$$

Als zugehörige Diagramme entstehen gerade Linien. Es genügen jedesmal zwei Wertepaare für x und y, um diese Geraden zu zeichnen. Man erhält für

$x + 2y = 8$ die Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 = 0$, $y_1 = 4$
und P_2 mit den Koordinaten $x_2 = 8$, $y_2 = 0$, für

$3x - y = 3$ die Punkte P_3 mit den Koordinaten $x_3 = 0$, $y_3 = -3$
und P_4 mit den Koordinaten $x_4 = 1$, $y_4 = 0$.

Abb. 44 zeigt die beiden geraden Linien. Ihr Schnittpunkt S hat nach der Figur die Koordinaten $x = 2$, $y = 3$; er gehört sowohl zu der Geraden P_1P_2 als auch zu der Geraden P_3P_4.
Für das Wertepaar $x = 2$, $y = 3$ sind die beiden Gleichungen richtig. Es ist somit die durch graphische Darstellung ermittelte Lösung der Aufgabe.

Probe: Wenn man für x den Wert 2, für y den Wert 3 einsetzt, erhält man aus der ersten Gleichung $2 + 2 \cdot 3 = 8$, aus der zweiten $3 \cdot 2 - 3 = 3$.
Das graphische Lösungsverfahren setzt peinlich genaues Zeichnen der Diagramme voraus. Die Genauigkeit der graphisch ermittelten Werte hängt von der Genauigkeit der Zeichnung ab.

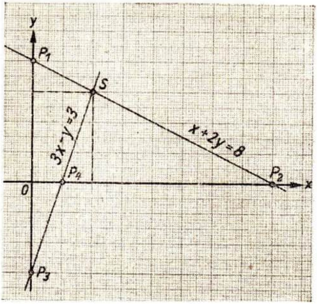


Abb. 44. Graphische Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten

Um zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten graphisch zu lösen, zeichnet man die geraden Linien, die den gegebenen Gleichungen entsprechen. Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden ergeben die Werte der Unbekannten.

3. Arithmetische Lösungsverfahren

Dienen zwei Gleichungen zum Bestimmen zweier unbekannter Größen x und y, so bezeichnet in beiden Gleichungen sowohl x eine bestimmte Zahl als auch y. Jeder dieser unbekannten Werte wird einzeln berechnet. Man leitet dazu aus den vorgelegten Gleichungen eine neue ab, die nur noch eine der unbekannten Größen enthält. Das Berechnen jeder Unbekannten wird auf das Auflösen einer Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt. Das Aussondern einer Unbekannten aus den Gleichungen des Systems wird *Eliminieren* (lat. *eliminare* „über die Schwelle schaffen“) genannt. Die Elimination läßt sich durch drei Verfahren erreichen.

a) Einsetzungsverfahren

1. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y = 19 \\ 3x - 4y = 1 \end{array} \right|$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = 19 - 2x$. Setzt man den Ausdruck $19 - 2x$ an die Stelle von y in die zweite Gleichung, so erhält die zweite Gleichung die neue Form

$$3x - 4 \cdot (19 - 2x) = 1.$$

Sie enthält nur noch die eine Unbekannte x und ergibt

$$\begin{aligned} 3x - 76 + 8x &= 1 && | + 76 \\ 11x &= 77 && | : 11 \\ x &= \underline{\underline{7}} \end{aligned}$$

Wird dieser Wert in $y = 19 - 2x$ an die Stelle von x gesetzt, so entsteht

$$\begin{aligned} y &= 19 - 2 \cdot 7 \\ y &= 19 - 14 \\ y &= \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Die *Probe* ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7 + 5 &= 19 \text{ für die erste Gleichung,} \\ 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 &= 1 \text{ für die zweite Gleichung.} \end{aligned}$$

2. Beispiel

$$\left| \begin{aligned} 5x + 2y &= 61 \\ x - 3y &= 2 \end{aligned} \right|$$

Aus der zweiten Gleichung folgt nach demselben Verfahren

$$x = 2 + 3y,$$

durch Einsetzen des Ausdrucks $2 + 3y$ an die Stelle von x in der ersten Gleichung entsteht

$$\begin{aligned} 5 \cdot (2 + 3y) + 2y &= 61 \\ 10 + 15y + 2y &= 61 && | - 10 \\ 17y &= 51 && | : 17 \\ y &= \underline{\underline{3}} \\ x &= 2 + 3 \cdot 3 \\ x &= \underline{\underline{11}} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 11 + 2 \cdot 3 &= 61 \\ 11 - 3 \cdot 3 &= 2 \end{aligned}$$

Bei dem **Einsetzungsverfahren** wird eine der Gleichungen des Systems nach einer der in ihr vorkommenden Unbekannten aufgelöst und der sich ergebende Ausdruck an Stelle dieser Unbekannten in die zweite Gleichung eingesetzt. Es entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten.

b) Gleichsetzungsverfahren

Beispiel:

$$\left| \begin{aligned} 5x - y &= 56 \\ 2x + y &= 35 \end{aligned} \right|$$

1. Weg: Werden beide Gleichungen nach y aufgelöst, so erhält man

$$\begin{aligned} y &= 5x - 56, \\ y &= 35 - 2x. \end{aligned}$$

In beiden Gleichungen soll y den gleichen Zahlenwert haben, d. h., die beiden linken Seiten sind einander gleich, also auch die beiden rechten Seiten. Setzen wir sie gleich, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 5x - 56 &= 35 - 2x && | + (2x + 56) \\ 7x &= 91 && | : 7 \\ x &= \underline{\underline{13}} \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert für x in $y = 5x - 56$ ein, so ergibt sich

$$y = 5 \cdot 13 - 56$$
$$y = 65 - 56 \qquad \textit{Probe:} \quad 5 \cdot 13 - 9 = 56$$
$$\underline{\underline{y = 9}} \qquad\qquad 2 \cdot 13 + 9 = 35$$

2. Weg: Durch Auflösen nach x ergibt die erste Gleichung

$$x = \frac{56 + y}{5},$$

die zweite

$$x = \frac{35 - y}{2}.$$

Die durch Gleichsetzen der rechten Seiten gewonnene neue Gleichung heißt jetzt

$$\frac{56 + y}{5} = \frac{35 - y}{2}. \qquad | \cdot 10$$

Multipliziert man beide Seiten mit 10, so ergibt sich

$$112 + 2y = 175 - 5y \qquad | + (5y - 112)$$
$$7y = 63 \qquad | : 7$$
$$y = \underline{\underline{9}}$$

Daraus

$$x = \frac{56 + 9}{5}$$
$$x = \frac{65}{5}, \; x = \underline{\underline{13}}$$

Bei dem **Gleichsetzungsverfahren** werden die Ausdrücke einander gleichgesetzt, die sich durch Auflösen der beiden Gleichungen nach derselben Unbekannten ergeben. Es entsteht eine neue Gleichung mit einer Unbekannten.

c) Additionsverfahren

1. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{r} 15x - 8y = 29 \\ 5x + 4y = 23 \end{array} \right|$$

Das Eliminieren einer Unbekannten gelingt auch, indem man nach geeignetem Umformen die beiden linken und die beiden rechten Seiten der Gleichungen addiert. Die beiden Summen sind einander gleich, da Gleiches zu Gleichem addiert wurde.
Läßt man z. B. die erste Gleichung unverändert und multipliziert die zweite Gleichung mit **2**, so entsteht

$$\left| \begin{array}{r} 15x - \mathbf{8y} = 29 \\ 10x + \mathbf{8y} = 46 \end{array} \right|$$

Werden die linken Seiten und die rechten Seiten der Gleichungen addiert, so ergibt sich

$$25x = 75, \quad \text{also}$$
$$x = \underline{\underline{3}}$$

Diesen Wert setzt man etwa in die zweite Gleichung ein:

$$5 \cdot 3 + 4y = 23$$
$$4y = 8$$
$$y = \underline{\underline{2}}$$

Probe:

$$15 \cdot 3 - 8 \cdot 2 = 29$$
$$5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 23$$

2. Beispiel:

Um den Wert für y auf die gleiche Art zu bestimmen, die den Wert für x geliefert hat, multipliziert man die zweite Gleichung mit (-3) und erhält so

$$\left|\begin{array}{l} +15x - 8y = 29 \\ -15x - 12y = -69 \end{array}\right|$$

Die Addition der linken und der rechten Seiten ergibt

$$-20y = -40$$
$$y = 2 \quad \text{usw.}$$

Die Gleichungen wurden in beiden Beispielen durch das Additionsverfahren aufgelöst.

3. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{7x-5y}{y-4} = 7 \\ \dfrac{3x+2y}{x+11} = 2 \end{array}\right|$$

Diese Gleichungen können erst nach dem Additionsverfahren aufgelöst werden, nachdem beide Gleichungen möglichst vereinfacht worden sind. Auf einer Seite sollen jedesmal nur zwei Summanden stehen, von denen der eine den Faktor x, der zweite den Faktor y enthält, während die andere Seite von den Unbekannten befreit ist.

Aus $\dfrac{7x-5y}{y-4} = 7$ entsteht $7x - 5y = 7y - 28$, $7x - 12y = -28$;

aus $\dfrac{3x+2y}{x+11} = 2$ entsteht $3x + 2y = 2x + 22$, $x + 2y = 22$.

Kurz dargestellt, erhält man nun folgenden Auflösungsgang:

$$\begin{array}{rcl|l|l|l|l}
7x - 12y & = & -28 & & + & & + \\
x + 2y & = & 22 & \cdot 6 & & \cdot(-7) & \\
\hline
6x + 12y & = & 132 & & + & & \\
\hline
13x & = & 104 \;|:13 & & & & \\
x & = & \underline{\underline{8}} & & & & \\
\hline
-7x - 14y & = & -154 & & & & + \\
\hline
\end{array}$$

$$-26y = -182 \;|\; :(-26)$$
$$y = \underline{\underline{7}}$$

Probe:

$$\frac{7\cdot 8 - 5\cdot 7}{7-4} = \frac{21}{3} = 7, \qquad \frac{3\cdot 8 + 2\cdot 7}{8+11} = \frac{38}{19} = 2.$$

Nachdem die eine Unbekannte ermittelt ist, kann auch durch Einsetzen ihres Wertes die andere bestimmt werden. Man erhält hier, wenn an die Stelle von x in der zweiten Gleichung des vereinfachten Systems der Wert 8 eingesetzt wird,

$$8 + 2y = 22 \;|\; -8$$
$$2y = 14 \;|\; :2$$
$$y = 7.$$

Bei dem **Additionsverfahren** werden die Gleichungen zunächst möglichst vereinfacht und geordnet. Dann werden die Koeffizienten der einen Unbekannten durch Umformen in beiden Gleichungen entgegengesetzt gleichgemacht, so daß durch Addieren der Gleichungen diese Unbekannte eliminiert wird.

Jedes der drei Verfahren führt zum Ziel. Welches Verfahren im einzelnen Falle den geringsten Rechenaufwand erfordert, richtet sich nach der Form der gegebenen Gleichungen. Unter Umständen wird man auch das zum Berechnen der einen Unbekannten verwendete Verfahren wechseln, wenn die andere Unbekannte dabei einfacher ermittelt wird.

4. Lösbarkeit

Die Zahl der Wertepaare x und y, die eine einzige Gleichung mit den beiden Unbekannten x und y befriedigen, ist unbegrenzt. Lassen sich Zusammenhänge zwischen den beiden unbekannten Größen x und y durch mehrere Gleichungen ausdrücken, so genügen zwei dieser Gleichungen zum Bestimmen der beiden Unbekannten. Allerdings müssen die Gleichungen zwei Bedingungen erfüllen.

1. Es läßt sich z. B. kein Wertepaar finden, das gleichzeitig für die beiden Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{array} \right|$$

richtig ist.

Es gibt kein Zahlenpaar x und y, dessen Summe sowohl 3 als auch 4 ergibt. Diese beiden Gleichungen **widersprechen** einander. In allgemeiner Form geschrieben, sind

$$\left| \begin{array}{l} ax + by = c \\ ax + by = d \end{array} \right|$$

zwei einander widersprechende Gleichungen, wenn c und d voneinander verschieden sind.

Bei der graphischen Darstellung (Abb. 45) schneidet die zu der Gleichung

$$x + y = 3$$

gehörende Gerade die Koordinatenachsen in den Punkten P_1 und Q_1, die im Abstand $+3$ vom Koordinatenanfangspunkt liegen. Die zu der Gleichung

$$x + y = 4$$

gehörende Gerade schneidet die Achsen in den Punkten P_2 und Q_2 mit dem Abstand $+4$ vom Koordinatenanfangspunkt.

Die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 verlaufen **parallel** und haben keinen Schnittpunkt. Deshalb gibt es kein den beiden Geraden gemeinsames Wertepaar. Ebenso gehören zu den Gleichungen

$$\begin{array}{ll} ax + by = c & \text{und} \\ ax + by = d & \end{array}$$

als Bilder parallele gerade Linien.

Erste Lösbarkeitsbedingung: Die Gleichungen dürfen sich nicht widersprechen.

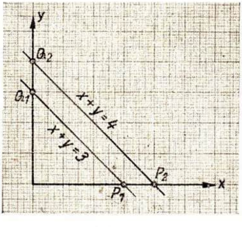


Abb. 45. Parallele Geraden im Koordinatensystem

2. Auch zu dem Gleichungspaar

$$\left|\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}\right|$$

gehört kein bestimmtes Wertepaar als Lösung. Jedes Wertepaar x, y, für das die eine Gleichung richtig ist, erfüllt zugleich die andere. Hier entsteht aus der ersten Gleichung die zweite, wenn ihre beiden Seiten mit 2 multipliziert werden. Die eine Gleichung ist also von der anderen **abhängig**.

Allgemein ausgedrückt, sind die beiden Gleichungen

$$\left|\begin{aligned} ax \quad + by \quad &= c \\ ax \cdot f + by \cdot f &= c \cdot f \end{aligned}\right|$$

voneinander abhängig. Die zweite Gleichung ist aus der ersten durch Multiplizieren mit dem Faktor f hervorgegangen, und deshalb können beliebig viele Wertepaare angegeben werden, die beiden Gleichungen genügen. Zu beiden Gleichungen gehört bei der graphischen Darstellung **dieselbe Gerade**. Deshalb entsteht kein Schnittpunkt.

Zweite Lösbarkeitsbedingung: Die Gleichungen dürfen nicht voneinander abhängig sein.

Aus den Gleichungen

$$\left|\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right|$$

die widerspruchsfrei und voneinander unabhängig sind, kann ein Wertepaar für x und y bestimmt werden. Die beiden Gleichungen bilden ein System von Gleichungen zum Bestimmen der Unbekannten x und y.

5. Textaufgaben mit zwei Unbekannten

Bestimmungsgleichungen zum Berechnen mehrerer unbekannter Werte in Textaufgaben werden aufgestellt, wie wir es bei den Gleichungen mit einer Unbekannten gelernt haben.

Man setzt zunächst Bezeichnungen für die unbekannten Größen fest und bildet dann aus den Angaben des Textes so viele Gleichungen, wie Unbekannte zu bestimmen sind.

Um Gleichungen aufzustellen, die voneinander unabhängig sind, muß man darauf achten, daß zu jeder Gleichung andere Zusammenhänge zwischen den Unbekannten verwendet werden.

Beispiel:

Ein Wasserbecken kann durch zwei Pumpen gefüllt werden. Fördert die erste Pumpe 2 Stunden und die zweite 9 Stunden, so werden $\frac{4}{5}$ des Beckens gefüllt. Fördert aber die erste Pumpe 5 Stunden und die zweite 6 Stunden, so fehlt $\frac{1}{10}$ an der Füllung des Beckens. In welcher Zeit kann das Becken durch jede Pumpe allein gefüllt werden?

Lösung:

Die erste Pumpe braucht x Stunden, die zweite y Stunden zum Füllen des Beckens. Das Becken faßt die Wassermenge 1.

Erste Aussage des Textes:

Die erste Pumpe fördert in x Stdn. die Wassermenge 1,

in 1 Stde. die Wassermenge $\frac{1}{x}$,

in 2 Stdn. die Wassermenge $\frac{2}{x}$.

Die zweite Pumpe fördert in y Stdn. die Wassermenge 1,

in 1 Stde. die Wassermenge $\frac{1}{y}$,

in 9 Stdn. die Wassermenge $\frac{9}{y}$.

Aus der ersten Aussage des Textes ergibt sich die erste Gleichung:

$$\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{4}{5}.$$

Zweite Aussage des Textes:

Die erste Pumpe fördert in 5 Stdn. die Wassermenge $\frac{5}{x}$,

die zweite Pumpe fördert in 6 Stdn. die Wassermenge $\frac{6}{y}$.

Aus der zweiten Aussage des Textes ergibt sich die zweite Gleichung

$$\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{9}{10}.$$

Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{9}{10} \end{array}\right|$$

ist nach x und y aufzulösen. Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ und erhalten

$$\left|\begin{array}{r} 2u + 9v = \frac{4}{5} \\ 5u + 6v = \frac{9}{10} \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{r} 10u + 45v = 4 \\ -10u - 12v = -\frac{9}{5} \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

$$33v = \frac{11}{5} \quad \Big| :33$$

$$v = \frac{1}{15};$$

$$10u + 45 \cdot \frac{1}{15} = 4$$

$$10u = 1$$

$$u = \frac{1}{10}.$$

Führen wir wieder x und y ein, so wird

$$v = \frac{1}{y} = \frac{1}{15}, \text{ also } y = \underline{\underline{15}}$$

$$\text{und } u = \frac{1}{x} = \frac{1}{10}, \text{ also } x = \underline{\underline{10}}.$$

Die erste Pumpe kann das Becken in 10 Stdn allein füllen, die zweite in 15 Stdn.

Probe:

Die erste Pumpe braucht zum Füllen des Beckens 10 Stunden, sie füllt in 1 Stde. $\frac{1}{10}$ des Beckens; die zweite Pumpe braucht zum Füllen des Beckens 15 Stunden, sie füllt in 1 Stde. $\frac{1}{15}$ des Beckens.

Im *ersten Falle* fördert die erste Pumpe 2 Stdn. und füllt dabei $\frac{2}{10}$ des Beckens; die zweite Pumpe fördert 9 Stdn. und füllt $\frac{9}{15}$ des Beckens.

$$\frac{2}{10} + \frac{9}{15} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Das Ergebnis stimmt mit der ersten Aussage überein, daß $\frac{4}{5}$ des Beckens gefüllt werden.

Im zweiten Falle fördert die erste Pumpe 5 Stdn. und füllt $\frac{5}{10}$ des Beckens; die zweite Pumpe fördert 6 Stdn. und füllt $\frac{6}{15}$ des Beckens.

$$\frac{5}{10} + \frac{6}{15} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

Das Ergebnis stimmt mit der zweiten Aussage überein, daß $\frac{9}{10}$ des Beckens gefüllt werden.

Zusammenfassung

Enthalten Gleichungen ersten Grades **zwei Unbekannte**, so sind zum Bestimmen ihrer Werte **zwei Gleichungen** nötig, welche die Zusammenhänge zwischen den unbekannten und bekannten Größen zum Ausdruck bringen. Diese Gleichungen ergeben nur dann eine Lösung, wenn sie widerspruchsfrei und voneinander unabhängig sind.
Die Lösung kann *graphisch* gefunden werden. Dann ergeben sich die Werte der Unbekannten als Koordinaten des Schnittpunkts der beiden geraden Linien, die den gegebenen Gleichungen entsprechen. Die *arithmetische Lösung* liefert nach der Elimination einer Unbekannten die gesuchten Werte einzeln durch Auflösen einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten. Zur Kontrolle der Richtigkeit sind die errechneten Werte in die Ausgangsgleichungen einzusetzen; bei Textaufgaben genügt das Einsetzen in die aufgestellten Gleichungen nicht. Um zu prüfen, ob Fehler beim Aufstellen der Gleichungen gemacht wurden, muß kontrolliert werden, ob die Rechenergebnisse die Vorschriften des Aufgabentextes erfüllen.

AUFGABEN

Die Aufgaben 1. und 2. sind graphisch und rechnerisch zu lösen. Für die rechnerischen Lösungen ist ein Lösungsweg zu wählen, der möglichst wenig Rechenaufwand erfordert.

1. a) $\left| \begin{array}{r} x + y = 23 \\ x = y + 5 \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{r} x - y = 5 \\ y = 7 - x \end{array} \right|$ **c)** $\left| \begin{array}{r} 9x - 5y = 3 \\ y = 8x - 13 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{r} 2x + 3y = 45 \\ 2x = 59 - 5y \end{array} \right|$ **e)** $\left| \begin{array}{r} 7x - 9y = 11 \\ 3y = 4x - 17 \end{array} \right|$ **f)** $\left| \begin{array}{r} 6x - 7y = 43 \\ 14y = 5x + 5 \end{array} \right|$

2. a) $\left| \begin{array}{l} x = 7y - 19 \\ x = 17 - 5y \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{l} y = 1 + x \\ y = 13 - 2x \end{array} \right|$ **c)** $\left| \begin{array}{l} 2x = 3y - 9 \\ 2x = y + 5 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} 6y = 8 - 13x \\ 6y = 5x - 28 \end{array} \right|$ **e)** $\left| \begin{array}{r} 12x = 9 - 11y \\ 4x = 3y - 17 \end{array} \right|$ **f)** $\left| \begin{array}{r} 6y = 7x - 4 \\ 18y = 4 + 29x \end{array} \right|$

3. a) $\left| \begin{array}{l} x + y = 24 \\ x - y = 10 \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 23 \\ 3x + 2y = 22 \end{array} \right|$ **c)** $\left| \begin{array}{l} 12x + 5y = 19 \\ 4x + 5y = 3 \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} 8x + 15y = 101 \\ 12x - 5y = 69 \end{array} \right|$ **e)** $\left| \begin{array}{l} 14x - 39y = -92 \\ 21x + 26y = +31 \end{array} \right|$ **f)** $\left| \begin{array}{l} 33x + 28y = -155 \\ 22x - 35y = +4 \end{array} \right|$

4. a) $\left| \begin{array}{l} 7x + 4y = 10{,}3 \\ 6x - 5y = 0{,}4 \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{l} 1{,}3x - 2y = 2{,}4 \\ 0{,}9x - 5y = 1{,}3 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 0{,}5x + 0{,}2y = 0{,}58 \\ 0{,}7x - 0{,}3y = 0{,}29 \end{array} \right|$ **d)** $\left| \begin{array}{l} 0{,}4x - 0{,}5y = 0{,}03 \\ 1{,}1x + 0{,}2y = 0{,}87 \end{array} \right|$

5. a) $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 9 \\[2ex] \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 10 \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{l} \frac{y}{8} - \frac{x}{9} = 1 \\[2ex] \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 9 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 3x - 2\frac{5}{7}y = 10 \\[2ex] \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -4\frac{1}{2} \end{array} \right|$ **d)** $\left| \begin{array}{l} 1\frac{5}{7}x + y = 4 \\[2ex] x - \frac{5}{8}y = 12 \end{array} \right|$

6. a) $\left| \begin{array}{l} 3 - 5 \cdot (3y - 2x) = 3 \cdot (3x - 2y) \\ 5 \cdot (5y - 2x) = 49 - 3 \cdot (5x - 2y) \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} 10 \cdot (5y - x) = 64 + 11 \cdot (3x + 7) \\ 2x + 7y = 36 + 8 \cdot (3x - 2y) \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \frac{4x - 5y + 12}{6} - \frac{7x - 8y + 4}{7} = 1 \\[2ex] \frac{5x - 4y + 7}{4} = 7 - \frac{6x + y - 4}{10} \end{array} \right|$

d) $\left| \begin{array}{l} \frac{x - 2y}{4} - \frac{5x + 2y}{3} + 8 = \frac{7x + 6y}{4} - \frac{3x + 4y}{5} + y \\[2ex] \frac{4x + 2y}{5} - \frac{7x + 1}{3} + x = \frac{9x + 2y}{10} - \frac{5x - 2y}{2} + 1 \end{array} \right|$

7. a) $\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 5a + b \\ 3x + 2y = 5a - b \end{array} \right|$ **b)** $\left| \begin{array}{l} 5x - 4y = a + 9b \\ -4x + 5y = a - 9b \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} ax - by = a^2 - 2ab - b^2 \\ bx + ay = a^2 + 2ab - b^2 \end{array} \right|$ **d)** $\left| \begin{array}{l} ax - by = a^3 - 2a^2b - b^3 \\ -bx + ay = a^3 + 2ab^2 - b^3 \end{array} \right|$

e) $\left| \begin{array}{l} ax = 2by + 5b \\[1ex] x + y = \frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} \end{array} \right|$ **f)** $\left| \begin{array}{l} ay = 2bx - 5b \\[1ex] x - y = \frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} \end{array} \right|$

8. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthält 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

9. Wieviel Kilogramm Stahl mit 0,5% Kohlenstoffgehalt und wieviel Tonnen Grauguß mit 2,5% Kohlenstoffgehalt ergeben — zusammengeschmolzen — 12 Tonnen mit 1,45% Kohlenstoffgehalt?

10. Die Welle einer einfachen Seilwinde hat 20 cm Durchmesser, die Kurbel 55 cm Länge. Die zum Heben einer Last erforderliche Kraft ist um 50 kp kleiner als die Last. Wie groß sind Kraft und Last? (Anleitung: Hebelgesetz $P \cdot a = Q \cdot b$)

11. Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird mit einer Emulsion geschmiert und zugleich gekühlt. Die Emulsion wird durch Mischen von gefettetem Mineralöl (Dichte 0,8 g/cm³) und möglichst weichem Wasser hergestellt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,98 g/cm³, für Schneidwerkzeuge niederer Festigkeit die Dichte 0,992 g/cm³, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,996 g/cm³ haben.
Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser kommen für die einzelnen Bearbeitungsarten auf 10 Liter Emulsion?

12. Zum Herstellen von Rädern legiert man 189,2 kg Kupfer (Dichte 8,8 g/cm³) mit Zinn (Dichte 7,2 g/cm³) zu Bronze mit der Dichte 8,6 g/cm³.
Wieviel Kilogramm Zinn sind nötig, und wieviel Kilogramm Bronze ergeben sich?

13. Dem Kühlwasser eines Kraftfahrzeugmotors setzt man ein flüssiges Frostschutzmittel von der Dichte 1,129 g/cm³ zu, um das Einfrieren zu verhindern. Die Mischung bleibt bis zu — 30°C flüssig, wenn ihre Dichte mindestens 1,06 g/cm³ ist.
Wieviel Liter Frostschutzmittel und wieviel Liter Wasser kommen auf 20 Liter Kühlflüssigkeit bei niedrigster Dichte?

14. Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 5 : 11 werden durch zwei andere Zahnräder ersetzt, die je 5 Zähne mehr haben. Das Übersetzungsverhältnis ist nun 1 : 2.
Wieviel Zähne hat jetzt jedes Zahnrad?

15. Von zwei zweizifferigen Zahlen ist die zweite um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl. Setzt man die erste vor die zweite, so entsteht eine vierziffrige Zahl, die um 5 größer ist als das 52fache der zweiten Zahl. Wie heißen die Zahlen?

16. Teilt man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Einerziffer, so erhält man 12 Rest 2. Vertauscht man die Ziffern der Zahl und teilt die so entstandene Zahl durch ihre Einerziffer, so ergibt sich 9 Rest 8. Wie heißt die Zahl?

17. Trennt man eine vierziffrige Zahl in der Mitte in zwei zweiziffrige Zahlen und teilt die ursprüngliche Zahl durch die Summe dieser beiden zweiziffrigen Zahlen, so ergibt sich 38 Rest 36. Subtrahiert man von der ersten der zweiziffrigen Zahlen 4 und addiert zur zweiten 4, so verhalten sich die so entstandenen Zahlenwerte wie 1 : 2. Wie heißt die Zahl?

18. Spiritus enthält Alkohol und Wasser. Aus zwei Sorten Spiritus von verschiedenem Alkoholgehalt und Wasser wird Spiritus vom Gehalt 40% hergestellt. Man mischt entweder 48 l der ersten Sorte und 16 l der zweiten mit 56 l Wasser oder 50 l der ersten Sorte mit 10 l der zweiten und 60 l Wasser. Wieviel Prozent Alkohol enthalten die beiden Sorten?

19. Salpetersäure mit der Dichte 1,5 g/cm³ ist mit Wasser so zu verdünnen, daß 10 l mit einer Dichte 1,1 g/cm³ entstehen. (Lösung rechnerisch und graphisch!)

20. Aus Schwefelsäure von der Dichte 1,833 g/cm³ ist durch Zusetzen von Wasser 27,5 kg Säure mit der Dichte 1,1 g/cm³ herzustellen. Wieviel Liter Wasser und konzentrierte Säure sind zu vermischen? (Lösung rechnerisch und graphisch!)

21. Verlängert man die kleinere Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt die größere um 2 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 22 cm² größer ist als der Inhalt des Rechtecks. Wie groß sind die Rechteckseiten?

22. Schachten 2 Arbeiter gemeinsam 4 Tage lang, so wird $\frac{1}{5}$ eines Fundamentgrabens ausgehoben. Arbeitet der erste 6 Tage und der zweite 15 Tage, so wird die Hälfte des Grabens fertig. Wieviel Zeit brauchte jeder Arbeiter allein, um den Graben auszuschachten?

23. Vermindert man die Spannung U eines Stromkreises um 50 Volt und den Widerstand um 20 Ohm, so fließen im Stromkreis 5 Amp. Vermehrt man die Spannung um 20 Volt und den Widerstand um 60 Ohm, so fließen 2 Amp. Wie groß sind die ursprüngliche Spannung und der ursprüngliche Widerstand? ($I \cdot R = U$)

24. Seit 1945 und besonders seit Beginn des 1. Fünfjahrplanes erfolgt ein systematischer Aufbau der Universitäten und der Hochschulen. In den Jahren 1951 und 1958 studierten insgesamt 119 822 junge Menschen. Die Zahl der Studenten des Jahres 1956 läßt sich leicht errechnen; sie ist nämlich zufällig gleich der Differenz der Jahre 1958 und 1951 und beträgt 64 178. Wieviel Studenten hatten wir in den Jahren 1951 und 1958?

25. Groß ist die Schar der freiwilligen Aufbauhelfer in der DDR, weil unsere Menschen wissen, daß wir alles das, was wir uns aufbauen, für uns schaffen. So betrug z. B. die Summe, die 1957 und 1958 in Berlin durch freiwillige Arbeit aufgebracht wurde, rund 32 Mill. DM. Das Verhältnis von 1957 zu 1958 war wie 9 : 16. Wie groß waren die Summen 1957 und 1958?

26. Zu einer Geburtstagsfeier kaufte eine Hausfrau 6 Flaschen Rotwein und 4 Flaschen Weißwein und bezahlte 88,— DM. Zwei Tage später trat eine Preissenkung ein, und zwar wurden die Preise pro Flasche um 2,— DM gesenkt. Sie hätte jetzt für dasselbe Geld 8 Flaschen Rotwein und 5 Flaschen Weißwein erhalten können.
Wieviel DM kostete ursprünglich 1 Flasche Rotwein und 1 Flasche Weißwein?

27. Im Rahmen des Nationalen Aufbauwerkes soll eine rechteckige Grünfläche mit Bäumen gesetzt werden. Hätte man zwei Reihen mehr genommen und je Reihe einen Baum mehr gesetzt, wären 23 Bäume mehr nötig gewesen. Hätte man aber eine Reihe mehr genommen und pro Reihe zwei Bäume mehr gesetzt, wären sogar 29 Bäume zuwenig gewesen.
Wieviel Bäume und wieviel Reihen waren vorhanden?

28. Dem Aufruf des Berliner Tierparks folgend machte sich eine Klasse einer Berufsschule, die aus 10 Jungen und 12 Mädchen bestand, auf einem Ausflug daran, Kastanien zu sammeln. Es wurden 56 kg Kastanien gesammelt. Die Mädchen hatten besser abgeschnitten als die Jungen. Beim nächsten Ausflug wollten die Jungen das bessere Ergebnis erreichen. Aber obwohl sie ihr altes Ergebnis um die Hälfte steigern konnten, die Mädchen nur den 4. Teil mehr hatten als beim ersten „Sammelausflug“, hatten sie doch gewonnen. Zusammen hatten sie diesmal 75 kg Kastanien gesammelt. Wieviel Kilogramm Kastanien hatte jeder Junge und jedes Mädchen gesammelt?

29. Um die Steckenpferdbewegung zu unterstützen, verpflichteten sich zwei Abteilungen einer Schleiferei für optische Geräte — in der ersten Abteilung waren 18, in der zweiten 20 Personen beschäftigt — ihre Norm überzuerfüllen. Im ersten Monat wurden es 246 Stück. Im zweiten Monat erarbeitete die erste Abteilung durch Zufall soviel wie die zweite im ersten Monat und umgekehrt. Diesmal brachten es beide Abteilungen auf 248 Stück. Wieviel produzierte jede Abteilung im ersten und im zweiten Monat?

30. Die schnelle Entwicklung der Industrie in den sozialistischen Ländern zeigt folgendes Beispiel: Steinkohle ist bekanntlich ein wichtiger Rohstoff. In den Jahren 1938 und 1956 wurden in der Sowjetunion zusammen 4 185 Mill. Tonnen Steinkohlen gefördert; 1950 betrug die Förderung die Differenz beider Zahlen, nämlich 1889 Mill. Tonnen. Wieviel Tonnen wurden 1938 und wieviel Tonnen 1956 gefördert?

31. In einem Großbetrieb ergaben in einem Monat die Reparaturkosten an Maschinen und der Betrag der Ausschußware zusammen 22 800 DM. Bei einer Produktionsbesprechung verpflichteten sich die Werktätigen, ihre Maschinen sorgfältiger zu behandeln und sorgfältiger zu arbeiten. Im nächsten Monat konnten die Unkosten für Reparaturen um $\frac{1}{5}$, der Betrag für Auschußware sogar um $\frac{1}{3}$ gesenkt werden, so daß die Gesamtunkosten nur noch 17 680 DM. betrugen. Wie hoch waren die Unkosten der beiden Positionen in den beiden Monaten?

32. Im demokratischen Sektor von Groß-Berlin wurden für Feierabend- und Pflegeheime in den beiden Jahren 1953 und 1957 13 546 000 DM ausgegeben. Im Jahre 1957 waren es 5 104 000 DM mehr als 1953. Wieviel DM wurden 1953 und 1957 ausgegeben und wie hoch war die prozentuale Steigerung?

33. In welchem Maße Wissenschaftler in den sozialistischen Ländern ausgebildet werden, zeigt folgendes Beispiel: In der Sowjetunion und in den USA beenden jährlich von 1 Million Menschen 416 das Studium als Ingenieure, und zwar im Verhältnis 35 zu 17. Wieviel Ingenieure verlassen jährlich in der Sowjetunion und in den USA die Hochschulen?

34. Von einer Berufsschule gehen die FDJler zweier Klassen Altstoff sammeln. Das Geld, das sie beim Verkauf der Altstoffe erhalten, spenden die FDJler für den Neuaufbau des Müggelturmes. Wenn zu dem Geld, das die Klasse A für ihre Altstoffe bekommen hat noch 4 DM hinzukämen, hätte sie dreimal so viel als die Klasse B. Wenn aber die Klasse B zu ihrem Geld noch 1 DM bekäme, hätte sie halb so viel wie die Klasse A. Wieviel Geld erhält jede Klasse für die gesammelten Altstoffe beim Verkauf?

35. Im Rahmen des Austausches von Studenten zwischen der Sowjetunion und der DDR betrug die Anzahl der Studenten aus der SU und der DDR 410 in einem Semester. Im folgenden Semester schickte die DDR 10% mehr, die SU dagegen 5% weniger, zusammen waren es jetzt 424 Studenten. Wieviel Studenten wurden im ersten, wieviel im zweiten Semester ausgetauscht?

II.

Geometrie

Die Geometrie (griech. *ge* „Erde“, *metrein* „messen“), ursprünglich die Lehre von der Landvermessung, ist in Ägypten aus der Notwendigkeit hervorgegangen, die jedesmal durch Überschwemmung des Nils verwischten Flurgrenzen wiederherzustellen. Darüber hinaus verfügten die Ägypter schon vor 5000 Jahren über das notwendige Wissen, gewaltige Bauwerke (z. B. die Cheopspyramide), zu errichten. Diese Tatsachen sind ein treffendes Beispiel, wie die produktive Tätigkeit der Menschen zum Ausgangspunkt aller Erkenntnisse der Außenwelt wird.

Heute versteht man unter Geometrie die mathematische Wissenschaft, die ebene und räumliche Gebilde zu beschreiben, vergleichen, konstruieren und messen lehrt.

Der Zweig der Geometrie, der sich auf das Untersuchen von Gebilden beschränkt, die vollständig in einer Ebene verlaufen, wird *Planimetrie* (lat. *planum* „Ebene“) oder auch *ebene Geometrie* genannt (Dreieck, Viereck, Kreis u.a.).

Als *Stereometrie* (griech. *stereos* „fest“) bezeichnet man den Zweig der Geometrie, der Gebilde behandelt, die man nicht in einer Ebene unterbringen kann, die sich also in den außerhalb einer Ebene liegenden Raum erstrecken (Quader, Kugel, Kegel, Zylinder u.a.).

Trigonometrie (griech. *trigonon* „Dreieck“) wird das besondere Gebiet der Geometrie genannt, das Zusammenhänge zwischen den Größen von Seiten und Winkeln der Dreiecke erfaßt.

Die genannten Zweige der Geometrie haben in der modernen Wissenschaft und Technik eine hervorragende Bedeutung. So ist in der Industrie, besonders in den metallverarbeitenden Zweigen, die Schaffung neuer Elemente, Maschinen oder Formen ohne die Geometrie undenkbar. In der Geodäsie, der Lehre von der Erdvermessung, ist die Trigonometrie als wichtiges Hifsmittel unentbehrlich. Auch die Nautik, die Astronomie und verschiedene Gebiete der Physik benutzen als Grundlage ihrer Berechnungen und Forschungen vorzugsweise die Geometrie oder eines ihrer Teilgebiete.

A. WIEDERHOLUNG DES GRUNDWISSENS

1. Geometrische Grundbegriffe

a) Allgemeines

Will man z. B. die Größe eines Zimmers bestimmen, dann benötigt man drei Angaben: seine Länge, seine Breite und seine Höhe. Man sagt auch, das Zimmer besitzt drei Ausdehnungen oder Dimensionen (lat. dimensio „Abmessung“). Fassen wir das Zimmer als einen Körper auf, dann werden wir viele ähnliche Körper feststellen: Ziegelstein, Zigarrenkiste und Streichholzschachtel haben ähnliche Gestalt. Diese und auch alle anderen Körper sind drei-dimensional.

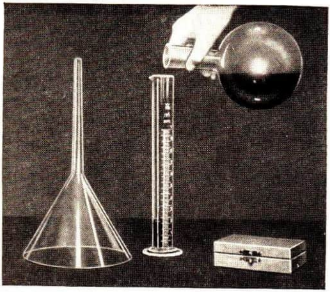


Abb. 46. Geometrische Grundformen im chemischen Labor. Wir erkennen Kegel, Zylinder, Kugel und Quader.

Betrachten wir Werkstücke, Geräte oder Maschinen eines Betriebes, so stellen wir fest, daß diese Gegenstände bei aller Verschiedenheit immer wiederkehrende Formen zeigen oder aus Teilen bestehen, die bestimmte Grundformen erkennen lassen (Abb. 46).

Die stofflichen Eigenarten (Farbe, Gewicht usw.) dieser Gegenstände interessieren uns jetzt nicht, denn für die folgenden Betrachtungen sind es unwesentliche Merkmale. Die immer wiederkehrenden Grundformen der Gegenstände, also bestimmte gemeinsame Merkmale, werden für uns wesentlich. Indem wir die stoffliche Eigenart der uns umgebenden Körper beiseitelassen, befassen wir uns nur mit ihrer **Form;** dabei bilden wir den Begriff des geometrischen Körpers:

Ein geometrischer Körper ist ein abgegrenzter Teil des Raumes. Einfache geometrische Körper sind Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel (Abb. 47).

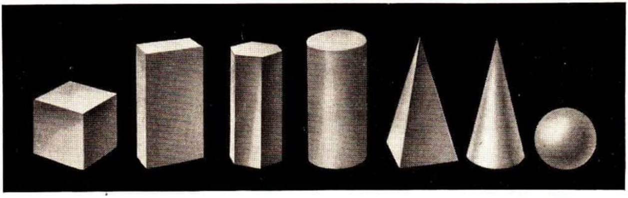


Abb. 47. Modelle geometrischer Grundformen: Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel

Ein Körper wird durch seine *Oberfläche* abgegrenzt. Bei der Kugel besteht die Oberfläche aus einer in sich geschlossenen gekrümmten Fläche, bei anderen Körpern, z. B. beim Quader, setzt sie sich aus mehreren ebenen **Flächen** zusammen. Von den Flächen, die den Körper begrenzen, stoßen je zwei in *Kanten* aneinander. Sie werden als Abgrenzung der Flächen **Linien** genannt. Die Kanten des Körpers enden in seinen *Ecken*. Jede Kante wird durch zwei Ecken begrenzt. Sie werden als Abgrenzung einer Linie auch Eckpunkte genannt oder als **Punkte** bezeichnet. Aus diesen Vorstellungen entstehen als geometrische Grundbegriffe
der **Punkt** ohne Ausdehnung,
die **Linie** mit nur einer Ausdehnung, der Länge,
die **Fläche** mit den zwei Ausdehnungen Länge und Breite,
der **Körper** mit den drei Ausdehnungen Länge, Breite und Höhe.

Der Punkt hat keine Ausdehnung, das einzige Kennzeichen ist seine Lage.
Die Linie hat eine Ausdehnung, die Fläche hat zwei Ausdehnungen, der Körper hat drei Ausdehnungen.

Man unterscheidet gerade und krumme Linien, ebene und gekrümmte Flächen.
Eine gerade Linie wird auch kurz eine **Gerade** genannt, eine ebene Fläche **Ebene**.
Durch Zeichnungen oder Modelle werden geometrische Gebilde anschaulich dargestellt. Dabei sollen in der Regel Punkte mit großen, Linien mit kleinen Buchstaben der Druckschrift, Flächen durch große Buchstaben der lateinischen Schreibschrift bezeichnet werden.

b) Die gerade Linie

Abb. 48 zeigt ein Stück der in der Zeichenebene $\mathcal{E}$ verlaufenden Geraden g, die selbst nach beiden Seiten unbegrenzt ist. Man bezeichnet die Gerade auch durch zwei auf ihr an beliebigen Stellen liegende Punkte P und Q als die Gerade PQ.

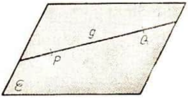


Abb. 48. Gerade in einer Ebene

Ein durch einen Punkt A abgegrenzter Teil einer Geraden heißt **Strahl.** Liegt an beliebiger Stelle des Strahls der Punkt X, so bezeichnet man ihn als den Strahl AX (Abb. 49).

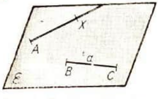


Abb. 49. Strahl und Strecke

Ein beiderseits durch Punkte abgegrenztes Stück einer Geraden wird als **Strecke** bezeichnet. Strecken werden entweder durch kleine Buchstaben oder durch die Angabe ihrer Endpunkte bezeichnet. Durch die Schreibform $BC = a$ wird zum Ausdruck gebracht, daß die in Abb. 49 gezeichnete Strecke BC oder a heißt. Wenn es notwendig wird, in der Bezeichnung die Strecke BC von der durch B und C gehenden Geraden zu unterscheiden, schreibt man $\overline{BC}$ für die Strecke und BC für die Gerade.

Ein durch einen Punkt abgegrenzter Teil einer Geraden heißt Strahl.

Ein durch zwei Punkte abgegrenztes Stück einer Geraden heißt Strecke.

Durch einen Punkt einer Ebene können unzählig viele gerade Linien gelegt werden, die vollständig in diese Ebene fallen. Außerdem sind ungezählte gerade Linien denkbar, die durch denselben Punkt gehen, aber außerhalb der Ebene verlaufen. Alle diese Geraden unterscheiden sich durch ihre Richtung.

Durch zwei Punkte läßt sich nur eine Gerade legen. Sie ist von allen zwischen den beiden Punkten möglichen Verbindungslinien die kürzeste Verbindung der beiden Punkte. Die Strecke mißt die Entfernung oder den Abstand ihrer beiden Endpunkte.

Die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten ist die Gerade.

Zwei in verschiedenen Richtungen verlaufende gerade Linien g und l, die in einer Ebene $\mathcal{E}$ liegen, schneiden einander in einem Punkt S (Abb. 50). Gehören sie nicht derselben Ebene an, so schneiden sie einander nicht. Man sagt dann, die geraden Linien sind **windschief,** sie verfehlen oder kreuzen einander. In Abb. 51 liegt die Gerade g in der Ebene $\mathcal{E}$, die Gerade l in der Ebene $\mathcal{H}$. Beide Geraden schneiden sich nicht. Die Schnittlinie s zwischen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ schneidet g in G und l in L.

Gleichgerichtete Geraden haben keine Schnittpunkte, sie werden parallele Geraden oder kurz **Parallelen** genannt. Von mehreren parallelen Geraden liegen je zwei immer in einer Ebene.

Diese Beziehung nutzt der Maurer aus, wenn er mit Hilfe zweier paralleler Anschlaglatten eine ebene Wand verputzt.

In Abb. 52 liegen a und b in $\mathcal{C}$, a und c in $\mathcal{B}$, b und c in $\mathcal{A}$.

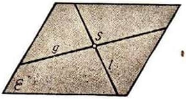


Abb. 50. Zwei sich schneidende Geraden g und l

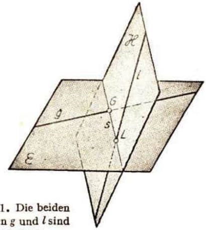


Abb. 51. Die beiden Geraden g und l sind windschief

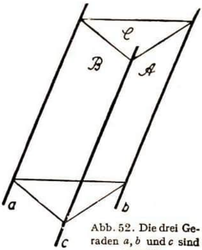


Abb. 52. Die drei Geraden a, b und c sind parallel

c) Die Ebene

Die Lage einer Ebene ist durch zwei einander schneidende oder zwei parallele Geraden bestimmt. Auch durch eine Gerade und einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt oder durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte ist eine Ebene festgelegt (Abb. 53).

Diese verschiedenen Möglichkeiten hängen zusammen. Durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt. Deshalb kann eine der Lagebestimmung dienende Gerade durch zwei Punkte ersetzt werden. Für zwei einander schneidende Geraden sind nicht vier Punkte zu zählen, sondern nur drei, weil die beiden Geraden den Schnittpunkt gemeinsam haben. An die Stelle der beiden parallelen Geraden treten ebenfalls nur drei Punkte, weil eine Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt eindeutig festgelegt ist. Die ersten drei Möglichkeiten der Lagebestimmung für eine Ebene sind also gleichwertig damit, daß die Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte geht.

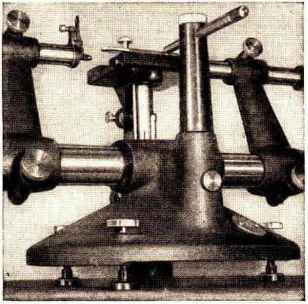


Abb. 53. Längenmeßgerät von Abbé mit Dreipunktlagerung. Ein Feinmeßgerät erhält in der Regel drei Stellschrauben als Füße, so daß es ohne zu wackeln auf der Unterlage steht

Da jede Ebene allseitig unbegrenzt ist, sind für die Lage zweier Ebenen zwei Fälle möglich. Entweder schneiden zwei Ebenen einander in einer Geraden, oder die Ebenen treffen nicht zusammen, sind also parallele Ebenen. Die Zwischendecken eines Wohnhauses z. B. sind parallele Ebenen.

Liegt in einer Ebene $\mathcal{E}_1$, die zu anderen Ebenen $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ parallel ist, eine Gerade g_1, so ist diese Gerade zu den Parallelebenen parallel. Jede weitere Ebene $\mathcal{H}$, die diese Gerade enthält, schneidet die Parallelebenen $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ in Parallelen g_2, g_3 zu der Geraden g_1 (Abb.54).

Eine Gerade kann zugleich in vielen Ebenen liegen. Diese gehen durch Drehen um die Gerade ineinander über. Man nennt deshalb die gemeinsame Schnittlinie der Ebenen auch ihre Achse (Abb. 55).

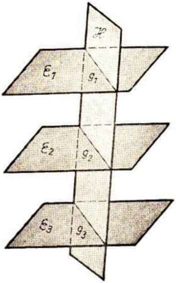


Abb. 54. Die Schnittgeraden g_1, g_2, g_3 zwischen der Ebene $\mathcal{H}$ und den Parallelebenen $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ sind parallel

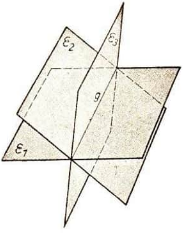


Abb. 55. Die Gerade g liegt in den drei Ebenen $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$

Abb. 56. Gerade Linien, die auf einem Kegelmantel liegen

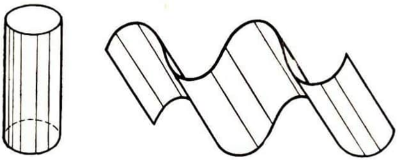


Abb. 57. Gerade Linien auf gewölbten Flächen

In ebene Flächen kann man gerade Linien legen, die in beliebigen Richtungen verlaufen. In gekrümmte Flächen kann man im allgemeinen keine Geraden legen. Nur einzelne krumme Flächen können gerade Linien, die in bestimmter Richtung verlaufen. ganz in sich aufnehmen. Die Mantellinien eines Kegels sind z. B. von der Spitze des Kegels ausgehende und auf der Mantelfläche liegende gerade Linien (Abb.56); auf Walzenflächen und Wellbleche lassen sich in einer Richtung gerade Linien legen (Abb. 57).

AUFGABEN UND WIEDERHOLUNGSFRAGEN

1. Ein Stück Flachstahl hat die Form eines Quaders.

- **a)** Skizziere den Quader und bezeichne seine Eckpunkte durch die Buchstaben $A, B, C, \dots$
- **b)** Welche Kanten und Ecken gehören zu den einzelnen Quaderflächen?
- **c)** Welche Kanten und Flächen stoßen in der Quaderecke A zusammen?
- **d)** Welche Kanten gehören Geraden an, die zu AE parallel sind?
- **e)** Welche Kanten gehören Geraden an, die zu AE windschief sind?
- **f)** Welche Quaderflächen gehören zu parallelen Ebenen?
- **g)** Welche Quaderflächen schneiden einander in der Quaderkante AB?
- **h)** Welche Quaderecken liegen einander in den Begrenzungsflächen gegenüber, welche liegen sich im Raum gegenüber?
- **i)** Welche Quaderflächen sind zur Kante AE parallel?

2. Wieviel Ecken, Kanten, Flächen hat ein Quader?

3. Aus wieviel Einzelflächen setzt sich die Oberfläche eines Quaders zusammen?

4. Welche Lagen zueinander können zwei gerade Linien haben?

5. Wie unterscheiden sich Gerade, Strahl und Strecke?

6. Welche Kanten einer Pyramide gehören zu windschiefen Geraden?

7. Warum steht ein dreibeiniger Tisch stets fest, während ein vierbeiniger häufig „wackelt“?

8. Wie kann eine Ebene festgelegt werden?

9. Welche Lagen zu einander können

a) zwei **b)** drei Ebenen haben?

10. Auf welchen gekrümmten Flächen können gerade Linien gezeichnet werden?

2. Winkel

a) Meßgeräte

Zwischen zwei Strahlen, die von einem gemeinsamen Ausgangspunkt nach verschiedenen Richtungen verlaufen, liegt ein Winkel. Der Richtungsunterschied der Strahlen ist für die Größe des Winkels bestimmend.

Beim Bearbeiten eines Werkstückes ist es häufig notwendig, Winkel festzustellen und nachzuprüfen. Für Winkelgrößen, die sich oft wiederholen, gibt es **feste Meßwinkel.** Man verwendet einen solchen z. B., um beim Anfertigen eines Sechskants die Winkel zwischen den Seitenflächen zu kontrollieren. Feste 90°-Winkel dienen im Maschinenbau und beim technischen Zeichnen zum Festlegen und Prüfen rechter Winkel. Winkel von 90°, 60°, 45°, 30° und Winkel, die sich durch Addition oder Subtraktion daraus ergeben, werden oft mit Hilfe der **Winkellineale** (Zeichendreiecke) aufgezeichnet.

Winkel, die beim Herstellen eines Werkstücks einzuhalten sind, für die aber keine festen Meßwinkel zur Verfügung stehen, werden z. B. mit einer Schmiege nachgemessen; die Schenkel der Schmiege sind beweglich und können an einem **Winkelmeßgerät** oder nach dem Muster des Werkstücks eingestellt werden. Winkelmeßgeräte dienen zum Messen beliebiger Winkel (Abb. 58). Bei besonderen Ansprüchen an die Genauigkeit der Messung wird die Winkelgröße mit dem Nonius abgelesen.

Ein einfacher Winkelmesser ist der **Transporteur** mit einem Halbkreis, der vom Mittelpunkt aus durch Radien in 180 Teile geteilt ist. Mit ihm wird die Winkelgröße bei geometrischen Figuren auf ganze Grad genau abgelesen; Bruchteile werden geschätzt. Beim Zeichnen von Winkeln vorgeschriebener Größe kann man die Schenkelrichtung mit dem Transporteur festlegen.

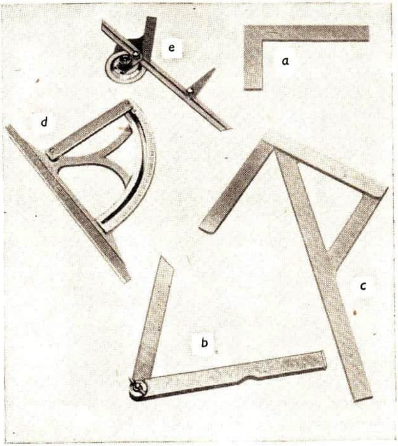


Abb. 58. Feste Meßwinkel und Winkelmeßgeräte: a) Schlosserwinkel, b) Schmiege, c) Mittenwinkel, d) Winkelmesser, e) Universalwinkelmesser

Sehr genaue Winkelmessungen müssen bei der Landvermessung durchgeführt werden. Der Landmesser legt von seinem Standort aus Richtungen nach oft weit entfernten Geländepunkten fest. Das dabei verwendete Winkelmeßgerät heißt **Theodolit.** Der Theodolit trägt ein Fernrohr, das sowohl um eine senkrechte als auch um eine waagerechte Achse drehbar ist, so daß mit ihm Winkel in der Waagerechten und in der Senkrechten gemessen werden können.

b) Bezeichnungen

Durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen entsteht ein Winkel, die Strahlen heißen seine **Schenkel**, ihr Ausgangspunkt wird **Scheitel** des Winkels genannt.
Zum Bezeichnen von Winkeln verwendet man meist kleine Buchstaben des griechischen Alphabets, vor die das Zeichen $\sphericalangle$ (gelesen: Winkel) gesetzt wird. Man bezeichnet einen Winkel mit dem Scheitelpunkt A oft auch kurz durch $\sphericalangle A$ (gelesen: Winkel bei A) oder durch $\sphericalangle XAY$ (gelesen: Winkel ix-a-ypsilon), wobei mit X ein beliebiger Punkt auf dem einen, mit Y ein beliebiger Punkt auf dem anderen Winkelschenkel benannt wird (Abb.60). Die Größe des Winkels richtet sich nach dem Richtungsunterschied der Schenkel.
Wird ein Schenkel eines Winkels in einer Ebene festgehalten, während sich der andere in der Ebene um den Scheitel dreht, so verändert sich die Winkelgröße. Wenn der bewegliche Schenkel von der Richtung des festen Schenkels aus so weit gedreht wird, bis die Ausgangsrichtung wieder erreicht ist, so hat er einen **Vollwinkel** überstrichen. Der Vollwinkel wird bei der alten Winkelteilung (Altgradteilung) in 360 gleiche Teile eingeteilt, die man Grade nennt. 1 Grad (abgekürzt 1°) wird in 60 Minuten (abgekürzt $60'$), 1 Minute in 60 Sekunden (abgekürzt $60''$) unterteilt. Nach der neuen Winkelteilung (Neugradteilung) hat ein Vollwinkel 400 Neugrad (abgekürzt 400^g), 1 Neugrad hat 100 Neuminuten (abgekürzt 100^c), 1 Neuminute hat 100 Neusekunden (abgekürzt 100^{cc}).

Altgrad:

$$1^\circ = 60' = 3600''$$
$$1' = 60''$$

Neugrad:

$$1^g = 100^c = 10000^{cc}$$
$$1^c = 100^{cc}$$

Man gibt im allgemeinen die Winkelgröße als positive Zahl an, wenn der Winkel durch Drehen des Schenkels gegen den Uhrzeigerdrehsinn entstanden ist, bei Drehen des Schenkels im Uhrzeigerdrehsinn als negative Zahl.

Bei der Landvermessung wird als Neigung oder Azimut einer in einer waagerechten Vermessungsebene verlaufenden Strecke AB der Winkel angegeben, den ein vom Punkt A aus nach Norden zeigender Strahl im Sinne der Uhrzeigerdrehung überstreicht, bis er in die Richtung AB kommt.

Beträgt dieser Winkel 60°, so beträgt das Azimut der in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Strecke BA 240°, weil der von B ausgehende und nach Norden weisende Strahl durch eine Rechtsdrehung um B von 240° in die Richtung der Strecke BA gebracht wird (Abb. 59).

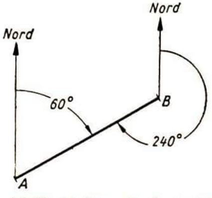


Abb. 59. Das Azimut der Strecke AB beträgt 60°, das der Strecke BA 240°

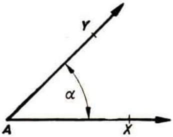


Abb.60. Spitzer Winkel

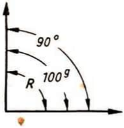


Abb.61. Rechter Winkel

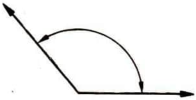


Abb.62. Stumpfer Winkel

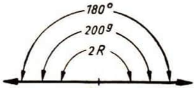


Abb.63. Gestreckter Winkel

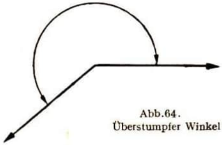


Abb.64.
Überstumpfer Winkel

Die Hälfte des Vollwinkels wird **gestreckter Winkel**, ein Viertel des Vollwinkels **rechter Winkel** (abgekürzt R) genannt. Ein gestreckter Winkel hat also die Größe $180^\circ = 200^g = 2R$ (Abb.63), ein rechter Winkel hat die Größe $90^\circ = 100^g = 1R$ (Abb.61). Entstehen am Schnittpunkt von zwei Geraden rechte Winkel, so sagt man auch, die geraden Linien stehen **rechtwinklig, senkrecht** oder **lotrecht** aufeinander. Die eine Gerade ist dabei die in einem Punkt auf der anderen Geraden errichtete Senkrechte; auf der einen Geraden liegt auch das von einem ihrer Punkte auf die andere Gerade gefällte Lot. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist sein Fußpunkt.
Winkel, die zwischen 0° und 90° liegen, heißen **spitze** Winkel (Abb. 60), solche zwischen 90° und 180° **stumpfe** (Abb. 62) und Winkel zwischen 180° und 360° **überstumpfe** bzw. **erhabene** Winkel (Abb. 64).

c) Winkel an Ebenen, Geraden und in Kreisen

Winkel zwischen zwei Ebenen

Soeben dachten wir uns den Winkel entstanden durch zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen. Winkel entstehen aber auch zwischen zwei einander schneidenden Ebenen. So liegt z. B. zwischen einer schiefen Ebene und der (gedachten) Horizontalebene der Neigungswinkel.

Der Keilwinkel ist ein Neigungswinkel. Er liegt zwischen den Ebenen, die in der Schneide zusammentreffen und den Keil begrenzen. Er ist gleich dem Winkel, den zwei in einem Punkt der Schneide errichtete Senkrechte bilden, die in den Begrenzungsebenen des Keils verlaufen (Abb. 65).

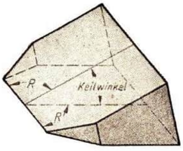


Abb.65.
Der Keilwinkel beim Kreuzmeißel

Winkel zwischen Ebenen und Geraden

Ist z. B. mit einem Meißel ein Span von einem Werkstück abzutrennen, so ist für die Wirkung außer der Größe des Keilwinkels am Meißel auch die Richtung des Meißels bestimmend. Die Neigung seines Schaftes gegen das Werkstück kann als Winkel einer Geraden gegen eine Ebene angesehen werden. Der eine Schenkel dieses Winkels ist diese Gerade, sein Scheitel ist ihr Schnittpunkt mit der Ebene. Den anderen Schenkel erhält man, wenn man den Fußpunkt des von einem Punkt der Geraden auf die Ebene gefällten Lotes mit dem Scheitelpunkt verbindet. Ist in Abb. 66 S der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene $\mathscr{E}$, F der Fußpunkt des vom Punkt P der Geraden auf $\mathscr{E}$ gefällten Lotes, so ist $\sphericalangle PSF = \alpha$ der Neigungswinkel der Geraden g gegen die Ebene $\mathscr{E}$.

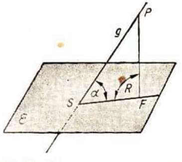


Abb. 66. Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene

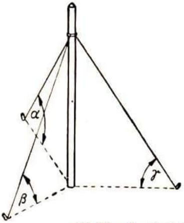


Abb. 67. α, β und γ sind Winkel zwischen Ebene (Erdoberfläche) und Geraden (Spannseil)

Auch die Verspannung eines Mastes bildet mit dem Erdboden den Winkel einer Geraden gegen eine Ebene. Das Spannseil ist der eine Winkelschenkel, den anderen Schenkel ergibt die Verbindung zwischen den Füßen des Mastes und des Spannseils (Abb. 67).

Winkel an Geraden einer Ebene

Verlängert man einen Schenkel eines Winkels α über seinen Scheitel hinaus, so entsteht zwischen dieser Verlängerung und dem anderen Schenkel des Winkels α ein neuer Winkel β; α und β heißen **Nebenwinkel** und ergeben zusammen 2 R (Abb. 68).

Die Summe zweier Nebenwinkel ist 180°.

Als *Kurs* eines Schiffes wird der Winkel α bezeichnet, den seine Fahrtrichtung mit der nach Norden zeigenden Kompaßnadel bildet. Sein Nebenwinkel ist der zwischen der Fahrtrichtung und der Südrichtung liegende Winkel, in Abb. 69 der Winkel β.

Werden beide Schenkel eines Winkels α über den Scheitel hinaus verlängert, so entsteht zwischen den Verlängerungen ein dem Winkel α gleichgroßer Winkel γ, der mit α den Scheitel gemeinsam hat. α und γ heißen **Scheitelwinkel** (Abb. 70). Jeder Winkelschenkel ergibt mit seiner Verlängerung über den Scheitel hinaus eine Gerade. Dreht man den einen Schenkel des Winkels α um den Scheitel S so weit, daß er auf den anderen Schenkel fällt, so kommt auch seine Verlängerung mit der Verlängerung des anderen Schenkels zur Deckung. Die Größe der Drehung wird sowohl durch α als auch durch γ gemessen.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

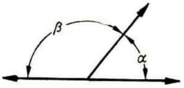


Abb. 68. α und β sind Nebenwinkel; $\alpha + \beta = 180°$

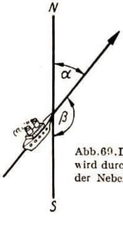


Abb. 69. Der Kurs des Schiffes wird durch α gemessen; β ist der Nebenwinkel des Kurses

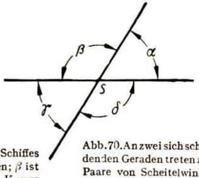


Abb. 70. An zwei sich schneidenden Geraden treten zwei Paare von Scheitelwinkeln auf, $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$

Zwei Winkel in beliebiger Lage, deren Summe **2 R** ergibt, heißen **Supplementwinkel**; zwei Winkel werden **Komplementwinkel** genannt, wenn ihre Summe **1 R** ergibt. Nebenwinkel gehören mit zu den Supplementwinkeln.

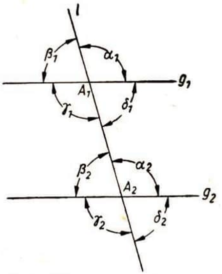


Abb. 71. Winkel an zwei Geraden, die von einer Geraden geschnitten werden

Abb. 71 zeigt zwei in einer Ebene liegende Gerade g_1 und g_2, die von einer dritten Geraden l in den Punkten A_1 und A_2 geschnitten werden. Jeder Schnittpunkt ist Scheitel von 4 Winkeln, A_1 von α_1, β_1, γ_1, δ_1 und A_2 von α_2, β_2, γ_2, δ_2. Nach ihrer Lage werden diese Winkel zu Paaren aus je einem Winkel am ersten und zweiten Schnittpunkt geordnet und bezeichnet. Winkelpaare, die in bezug auf die geschnittenen Geraden g_1 und g_2 und zugleich in bezug auf die schneidende Gerade l gleichartig liegen, werden **Stufenwinkel**, Gegenwinkel oder gleichliegende Winkel genannt, also

α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, δ_1 und δ_2.

Winkelpaare, die in bezug auf die geschnittenen Geraden g_1 und g_2 ungleichartig, in bezug auf die schneidende Gerade l aber gleichartig liegen, heißen **entgegengesetzte Winkel**, also

α_1 und δ_2, β_1 und γ_2, γ_1 und β_2, δ_1 und α_2.

Winkelpaare, die in bezug auf die geschnittenen Geraden g_1 und g_2 und in bezug auf die schneidende Gerade l ungleichartig liegen, heißen **Wechselwinkel**, also

α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2, δ_1 und β_2.

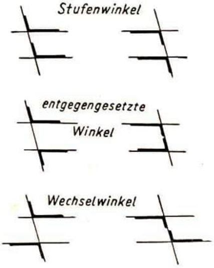


Abb. 72. Beispiele für Stufenwinkel, entgegengesetzte Winkel und Wechselwinkel an Parallelen

Parallele gerade Linien sind gleichlaufend. Die an ihren Schnittpunkten mit einer weiteren Geraden entstehenden vier Winkel haben daher bei gleicher Lage jedesmal dieselbe Größe.

Wenn die beiden Geraden g_1 und g_2 parallel liegen (Abb. 72), so sind je zwei Stufenwinkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, je zwei entgegengesetzte Winkel sind Supplementwinkel.

An zwei geschnittenen Parallelen sind je zwei Stufenwinkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, die Summe je zweier entgegengesetzter Winkel ergibt 180°.

Umgekehrt verlaufen die von der Geraden l geschnittenen Geraden g_1 und g_2 parallel, wenn

je zwei Stufenwinkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich und
je zwei entgegengesetzte Winkel Supplementwinkel sind.

Trägt man also den gleichen Winkel in zwei Punkten einer Geraden als Stufenwinkel an, so bilden die nicht auf der Geraden liegenden Winkelschenkel ein Parallelenpaar.

Winkel im Kreise

Abb. 73. Zentriwinkel

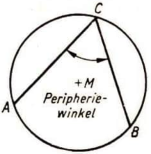


Abb. 74. Peripheriewinkel

Zieht man vom Mittelpunkt M eines Kreises nach zwei beliebigen Punkten A und B der Kreislinie Strahlen, so entsteht ein **Zentriwinkel** oder Mittelpunktswinkel (Abb. 73).
Von einem Punkt C der Kreislinie nach zwei beliebigen Punkten A und B der Kreislinie gezogene Strahlen bilden einen **Peripheriewinkel** oder Umfangswinkel (Abb. 74).
In beiden Fällen sagt man, der Winkel *steht über dem Kreisbogen*, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

d) Rechnen mit Winkelgrößen

Für das Rechnen mit Winkelgrößen ist die Altgradteilung etwas unbequem. In den folgenden Beispielen wird zur Übung bis auf Sekunden gerechnet, obwohl Meßergebnisse nur selten diese Genauigkeit erreichen.

Die Addition der gleichbenannten Zahlen in der Aufgabe

$$45^\circ\,28'\,34'' + 42^\circ\,37'\,48''$$

ergibt zunächst die Summe $87^\circ\,65'\,82''$.

Nun ist $82'' = 1'\,22''$, also $87^\circ\,65'\,82'' = 87^\circ\,66'\,22''$,

weiter ist $66' = 1^\circ\,6'$, also $87^\circ\,66'\,22'' = \underline{\underline{88^\circ\,6'\,22''}}$.

Bei der Aufgabe

$$45^\circ\,28'\,34'' - 42^\circ\,37'\,48'',$$

wird die Subtraktion der Sekundenzahlen ausführbar, wenn man $1'$ von den im Minuenden stehenden $28'$ in $60''$ verwandelt und zu den $34''$ des Minuenden hinzufügt, als Minuend demnach $45^\circ\,27'\,94''$ betrachtet. Durch ein entsprechendes Verfahren wird auch das Subtrahieren der Minutenzahlen möglich. Man verwandelt 1° der im Minuenden stehenden 45° in $60'$ und zählt diese zu den $27'$ des Minuenden. Die Aufgabe nimmt dann die Form an

$$44^\circ\,87'\,94'' - 42^\circ\,37'\,48'' = \underline{\underline{2^\circ\,50'\,46''}}.$$

Die Multiplikation der einzelnen Winkeleinheiten in der folgenden Aufgabe ergibt zunächst

$$(45^\circ\,28'\,34'') \cdot 7 = 315^\circ\,196'\,238''.$$

Nun ist $238'' = 3'\,58''$, also $315^\circ\,196'\,238'' = 315^\circ\,199'\,58''$.

Da $199' = 3^\circ\,19'$, ergibt sich durch Verwandeln $315^\circ\,199'\,58'' = \underline{\underline{318^\circ\,19'\,58''}}$.

Auch bei Divisionsaufgaben der Form

$$(42^\circ\ 37'\ 48'') : 9$$

werden die einzelnen Winkeleinheiten dividiert. Man beginnt das Dividieren bei der höchsten Einheit, verwandelt den etwa verbleibenden Rest in die nächstniedere Einheit, addiert ihn dann zur gleichen Einheit des Dividenden und führt die Division dieser Summe aus.

So ergibt sich

$$\begin{array}{l} \underline{42^\circ}\ 37'\ 48'' : 9 = \underline{\underline{4^\circ\ 44'\ 12''}} \\ \ \ 6^\circ \\ \underline{\ \ 397'} \\ \ \ \ \ 1' \\ \underline{\ \ \ \ 108''} \\ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Der Rest 6° ergibt 360′. Zählt man die 37′ des Dividenden dazu, so erhält man 397′. Bei der Division 397′ : 9 bleibt der Rest 1′ oder 60″. Zusammen mit 48″ des Dividenden ergeben sich 108″, so daß schließlich die Divisionsaufgabe 108″ : 9 auszuführen ist.

Umrechnungen

Werden bei Winkelgrößen in Altgrad statt Altminuten und Altsekunden *dezimale Teile des Altgrades* geschrieben oder werden Winkelgrößen in *Neugrad* verwendet, so vereinfachen sich die Berechnungen nach den Regeln der Dezimalbruchrechnung. Sind Winkelgrößen, die in Altgrad angegeben sind, in Neugrad umzuschreiben, so folgt aus $360^\circ = 400^g$ die Gleichung $1^\circ = (\frac{10}{9})^g$. Entsprechend ergibt sich $1^g = (\frac{9}{10})^\circ$.

$$\begin{aligned} \mathbf{360^\circ} &= \mathbf{400^g} \\ \mathbf{1^\circ} &= \left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{g}} \approx \mathbf{1{,}1^g} \\ \mathbf{1^g} &= \quad \mathbf{0{,}9^\circ} \end{aligned}$$

Das Umrechnen wird an folgenden Beispielen erläutert.

1. Umrechnung von Altminuten und Altsekunden in Dezimalteile des Altgrads.
   Für 45° 28′ 34″ verwandelt man zunächst 28′ 34″ in Sekunden.
   Man erhält, da $28' = 28 \cdot 60'' = 1680''$, $28'\ 34'' = 1714''$.

   Aus $1'' = \frac{1^\circ}{3600}$ folgt $1714'' = \frac{1714^\circ}{3600}$. Nun ist

   $$\begin{array}{l} 1714 : 3600 = 17{,}14 : 36 \text{ und } \underline{17{,}1}4 : 36 = 0{,}476. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\ 2\ 74} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{220} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4 \end{array}$$

   Man erhält somit $45^\circ\ 28'\ 34'' = \underline{\underline{45{,}48^\circ}}$.

2. Umrechnung von Dezimalteilen des Altgrads in Altminuten und Altsekunden.

   Bei $42{,}63^\circ$ ist $0{,}63^\circ = \frac{63^\circ}{100} \overset{\cdot 0{,}6}{\overset{\smile}{=}} \frac{37{,}8^\circ}{60} = 37{,}8'$, da $\frac{1^\circ}{60} = 1'$ ist.

   Also ist $42{,}63^\circ = 42^\circ\ 37{,}8'$.

Weiter gilt $0{,}8' = \frac{8'}{10} \overset{\overset{\cdot 6}{\smile}}{=} \frac{48'}{60} = 48''$, weil $\frac{1'}{60} = 1''$ ist.

Man erhält daher $42{,}63^\circ = \underline{\underline{42^\circ\, 37'\, 48''}}$.

3. Umrechnung von Altgrad in Neugrad.

Aus $63^\circ 41' 51''$ erhält man (wie in **1.**) $63^\circ + \left(\frac{41 \cdot 60 + 51}{3600}\right)^\circ = 63^\circ + \frac{2511^\circ}{3600}$. Nun ist

$$63^\circ = 63 \cdot \frac{10^g}{9}, \quad \frac{2511^\circ}{3600} = \frac{2511}{3600} \cdot \frac{10^g}{9}, \quad 63 \cdot \frac{10^g}{9} = 70^g, \quad \frac{2511 \cdot 10^g}{3600 \cdot 9} \overset{\overbrace{}^{:(10 \cdot 9 \cdot 9)}}{=} \frac{31^g}{40} = 0{,}7750^g .$$

Es ergibt sich also $63^\circ\, 41'\, 51'' = 70{,}7750^g = \underline{\underline{70^g\, 77^c\, 50^{cc}}}$.

4. Umrechnung von Neugrad in Altgrad.

$$37^g\, 68^c\, 75^{cc} = 37{,}6875^g = \left(37{,}6875 \cdot \frac{9}{10}\right)^\circ = 33{,}91875^\circ = \underline{\underline{33^\circ\, 55'\, 7{,}5''}}.$$

In neueren Tabellenbüchern sind Umrechnungstafeln für Altgrad in Neugrad und umgekehrt enthalten.

AUFGABEN

1. Ein **a)** spitzer, **b)** stumpfer, **c)** erhabener Winkel ist zu zeichnen. Seine Größe soll zunächst geschätzt, dann mit dem Winkelmesser bzw. mit dem Transporteur gemessen werden.

2. Mit dem Winkelmesser bzw. mit dem Transporteur sind Winkel von 27°, 73°, 100°, 132°, 206°, 254° und 320° zu zeichnen.

3. Mit den Zeichendreiecken sind Winkel von

a) 90°, 60°, 45°, 30°;

b) 15°, 75°, 105°, 135°, 315°

zu zeichnen.

4. Zu $\varphi = 63^\circ$ ist ein **a)** Komplementwinkel, **b)** Supplementwinkel, **c)** Nebenwinkel, **d)** Scheitelwinkel zu zeichnen und zu berechnen.

5. Für $\alpha = 112^\circ\, 30'$ und $\beta = 37^\circ\, 50'$ ist **a)** die Summe, **b)** die Differenz zu berechnen.

6. Welcher Winkel 1. in Altgrad, 2. in Neugrad liegt zwischen den Mittellinien zweier benachbarter Zähne eines Zahnrads mit **a)** 50, **b)** 80, **c)** 160 Zähnen?

7. Welche Beziehungen zwischen den Winkeln ergeben sich, wenn

a) zwei gerade Linien g_1 und g_2 einander,

b) zwei Parallelen p_1 und p_2 eine Gerade l so schneiden, daß ein Winkel von 56° entsteht?

8. Beim Schruppen von Flußstahl ist der Hobelstahl unter dem Freiwinkel $\alpha = 12^\circ$ gegen die Schnittfläche eingespannt, der Keilwinkel mißt $\beta = 68^\circ$. Wie groß sind der Spanwinkel γ und der Schnittwinkel δ? [$\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ und $\delta = \alpha + \beta$]

9. Auf der Drehbank wird ein Kegel gedreht. Der Oberschlitten der Drehbank ist um 12° 40′ aus der Nullstellung verdreht. Welche Größe hat der Kegelwinkel?
(Formel: Kegelwinkel = 2 · Einstellwinkel).

10. Es sind je 2 Flachstähle auf Gehrung zu einem Flachwinkel von **a)** 90°, **b)** 76° 30′, **c)** 45° zusammenzuschweißen.
Unter welchem Winkel sind jeweils 2 Flachstahlstücke abzuschrägen?

11. Das Azimut der in einer horizontalen Vermessungsebene liegenden Strecke AB beträgt **a)** 56,48°, **b)** $144{,}35^{g}$. Welches Azimut gilt für BA?

12. An die in der horizontalen Vermessungsebene liegende Strecke AB mit dem Azimut α schließt sich die Strecke BC mit dem Azimut β. Wie groß ist der „Brechungswinkel“ ABC für

a) $\alpha = 76{,}23^{g}$, $\beta = 151{,}30^{g}$;

b) $\alpha = 122{,}64^{g}$, $\beta = 240{,}46^{g}$.

13. Nach einer Meldung der Wetterwarte dreht sich der Wind von

a) ONO über O nach SO, **b)** SW über W nach WNW.

Wieviel Grad beträgt die Drehung?

3. Einfache geometrische Konstruktionen

a) Zeichengeräte

Zum Ausführen geometrischer Konstruktionen sind an Geräten grundsätzlich nur **Zirkel** und **Lineal** erforderlich. Leichter und schneller führt man die Konstruktionen jedoch aus, wenn man auch **Zeichendreiecke** (Winkellineale) verwendet. Diese sind so hergestellt, daß an einer Ecke ein 90°-Winkel, an den beiden anderen Ecken Winkel von 45° oder an der zweiten ein Winkel von 30°, an der dritten ein Winkel von 60° liegen.

Zum Herstellen technischer Zeichnungen dienen **Zeichenmaschinen**, die mit einer Parallelführung für eine *Reißschiene* und mit einem *Teilkopf* zum Zeichnen von Winkeln vorgeschriebener Größe versehen sind (Abb. 75).

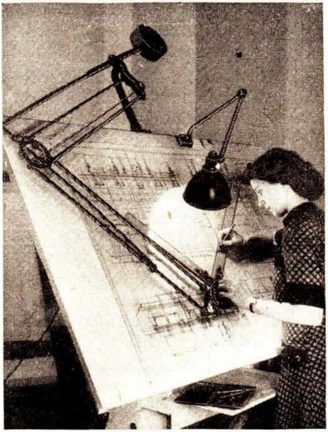


Abb. 75. Mit der Zeichenmaschine können auch schwierige technische Zeichnungen schnell und sicher ausgeführt werden

In der Werkstatt werden beim Übertragen von Maßen aus einer Werkstattzeichnung auf ein Werkstück besondere Geräte verwendet. Mit der *Reißnadel* am Parallelreißer werden von der waagerechten Reißplatte aus Maße des Höhenmaßstabes auf das Werkstück übertragen. Der *Spitzzirkel* oder, wenn seine Spannweite nicht ausreicht, der *Stangenzirkel* dient zum Übertragen von Entfernungen, die am Stahlbandmaß abgegriffen sind, auf das Werkstück und zum Schlagen von Kreisen. Der *Zentrierwinkel* ermöglicht durch zweimaliges Anlegen, die Mitten von Wellen zu bestimmen. Das *Streichmaß* wird zum Anreißen von geraden Linien verwendet, die parallel zu den Kanten des Werkstücks verlaufen.

b) Das Konstruieren von Senkrechten mit Zeichendreiecken

1. Aufgabe: **Auf einer gegebenen Geraden g ist in einem ihrer Punkte F die Senkrechte zu errichten.**

Man legt den einen der beiden Ränder des Zeichendreiecks, die den 90°-Winkel einschließen, so an die gegebene Gerade g daß sein Scheitel nicht auf den Punkt F zu liegen kommt. Dann legt man ein Lineal mit einem Rand l an den Rand des Zeichendreiecks, der dem 90°-Winkel gegenüber liegt. Während man das Lineal festhält, verschiebt man das Zeichendreieck, an dem Lineal gleitend, so weit, daß der zweite zum 90°-Winkel gehörende Rand ein Stück einer durch F gehenden Geraden wird (Abb. 76). Diese Gerade steht auf g senkrecht.

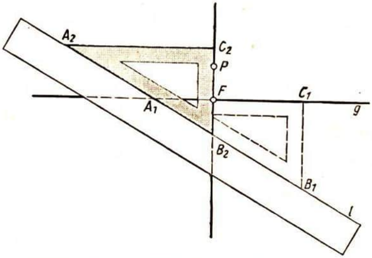


Abb. 76. Auf der Geraden g wird im Punkte F die Senkrechte errichtet

Beweis: Sind die Ecken des Zeichendreiecks in der ersten Lage mit A_1, B_1 und C_1, in der zweiten Lage mit A_2, B_2 und C_2 bezeichnet, so ist $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$, denn sie bilden Stufenwinkel an der geschnittenen Geraden l. B_1C_1 und B_2C_2 liegen somit auf parallelen Geraden. Diese werden von der Geraden g in C_1 und F geschnitten. Als Stufenwinkel an Parallelen sind demnach $\sphericalangle B_1C_1A_1$ und $\sphericalangle B_2FA_1$ gleich. Nun ist $\sphericalangle B_1C_1A_1 = 90°$; also ist auch $\sphericalangle B_2FA_1 = 90°$, d.h. die Gerade B_2C_2 steht auf g senkrecht.

2. Aufgabe: **Auf eine gegebene Gerade g ist von einem außerhalb gelegenen Punkt P das Lot zu fällen.**

Diese Aufgabe wird wie Aufgabe 1 ausgeführt. Ist die erste Lage des Zeichendreiecks passend gewählt, so wird das Zeichendreieck so verschoben, daß in der zweiten Lage B_2C_2 durch P geht (Abb. 76).

c) Das Konstruieren paralleler Geraden mit Zeichendreiecken

Aufgabe: **Gegeben ist eine Gerade g und außerhalb ein Punkt P. Die durch P gehende zu g parallele Gerade p ist zu konstruieren.**

Man legt einen Rand des Zeichendreiecks an die Gerade g und den Rand l eines Lineals an den zweiten oder dritten Rand des Zeichendreiecks. Man hält das Lineal fest und verschiebt an ihm das Zeichendreieck, bis sein ursprünglich an g liegender Rand durch P geht; er bildet dann ein Stück der Parallelen p (Abb. 77a–c).

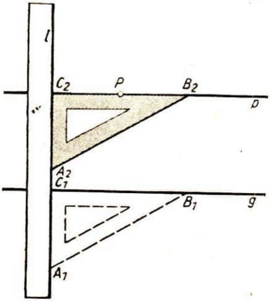


Abb. 77a.

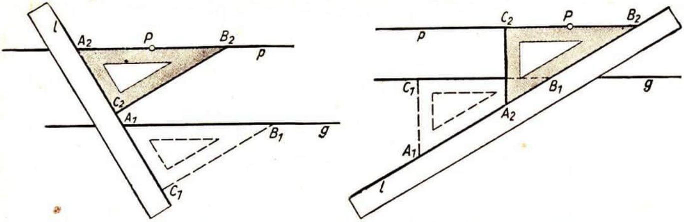


Abb. 77b. Abb. 77 a bis c. Zur Geraden g wird die durch den Punkt P gehende Parallele konstruiert Abb. 77c.

Beweis: In jedem Falle entstehen an der Geraden l gleiche Stufenwinkel; der eine liegt zwischen l und g (erste Lage des Zeichendreiecks), der andere zwischen l und p (zweite Lage des Zeichendreiecks); deshalb ist $p \parallel g$.

d) Das Konstruieren von Winkeln bestimmter Größe

Zwischen je zwei Rändern der gebräuchlichen Zeichendreiecke liegt entweder ein Winkel von 90° oder ein Winkel von 30°, 45° oder 60°.

1. Aufgabe: **Ein Winkel von 30° (45°, 60°) ist an eine gegebene Gerade g in einem auf ihr liegenden Punkt P anzutragen.**

Lösung: Es wird verlangt, daß ein Schenkel des Winkels auf der Geraden g, der Scheitel des Winkels im Punkt P liegt. Die Ecken des Winkellineals sollen wegen ihrer unvermeidlichen Abnutzung nicht verwendet werden. Man zieht zunächst zur gegebenen Geraden g eine beliebige Parallele p und legt das Zeichendreieck mit dem einen den vorgeschriebenen Winkel begrenzenden Rand A_1B_1 an die Parallele p. Dann legt man an p ein Lineal l, hält dieses fest und verschiebt das Zeichendreieck, bis der andere den Winkel einschließende Rand A_2C_2 durch P geht. Diesem Rand entlang wird der zweite Schenkel des Winkels gezeichnet (Abb. 78).

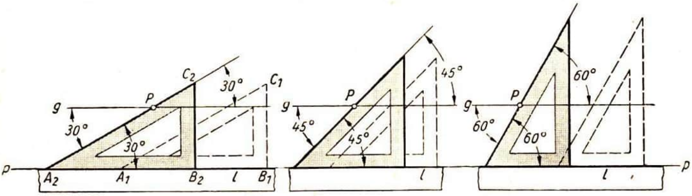


Abb. 78. An die Gerade g werden im Punkte P Winkel von 30°, 45° und 60° angetragen

Beweis: Die durch A_2C_2 bestimmte Gerade schneidet die parallelen Geraden g und p. Die an A_2C_2 liegenden Stufenwinkel und Wechselwinkel sind einander gleich.

Durch das Antragen der Winkel von 30°, 45°, 60° sind gleichzeitig die Nebenwinkel 150°, 135°, 120° an g in P angetragen.

Durch verschiedenes Anlegen des Zeichendreiecks entstehen vier Lagen des in P an g angetragenen Winkels.

2. Aufgabe: **Ein Winkel von 30°, (45°, 60°) ist so an eine gegebene Gerade g anzutragen, daß ein Schenkel durch den außerhalb der Geraden liegenden Punkt P geht.**

Lösung: Der eine Winkelschenkel des Zeichendreiecks liegt auf der zu g gezogenen Parallelen p. Der andere geht durch den Punkt P, und der Winkelscheitel ist ein Punkt der Geraden p. Die Konstruktion erfolgt wie bei der vorhergehenden Aufgabe (Abb. 79).

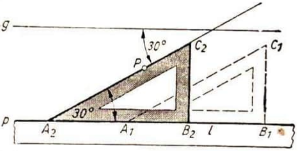


Abb. 79. Durch den Punkt P wird eine Gerade gelegt, die mit der Geraden g einen Winkel von 30° bildet

Weitere Aufgaben:

1. Welche weiteren Winkelgrößen entstehen durch Addieren oder Subtrahieren je zweier Winkel der Zeichendreiecke?

Lösung:

a) 30° + 45° = 75° (Abb. 80 a) b) 45° + 60° = 105° (Abb. 80 b) c) 45° − 30° = 15° (Abb. 80 c)

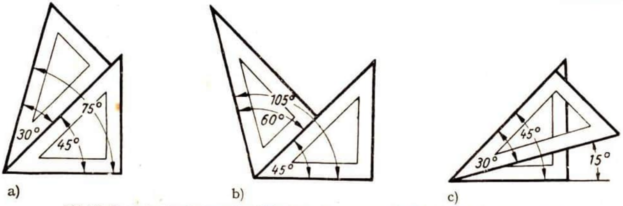


Abb. 80. Durch Aneinanderlegen der Zeichendreiecke entstehen die Winkel von 75°, 105° und 15°

2. Es sind Winkel zwischen 0° und 90° aufzuzeichnen, die mit Hilfe der Zeichendreiecke in zwei gleiche Winkel geteilt werden können.

Lösung:

a) 30° = 2 · 15° (Abb. 81 a), b) 60° = 2 · 30° (Abb. 81 b), c) 90° = 2 · 45° (Abb. 81 c)

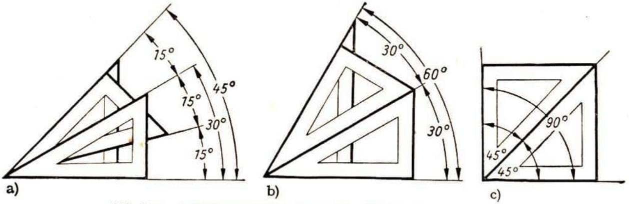


Abb. 81 a — d. Halbieren und Dritteln spezieller Winkel mit Zeichendreiecken

3. Es sind Winkel zwischen 0° und 90° aufzuzeichnen, die mit Hilfe der Zeichendreiecke in drei gleiche Winkel geteilt werden können.

Lösung:

a) $45^\circ = 3 \cdot 15^\circ$ (Abb. 81 a),

b) $90^\circ = 3 \cdot 30^\circ$ (Abb. 81 d).

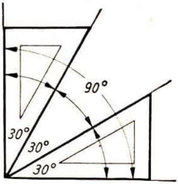


Abb. 81 d.

B. PLANIMETRIE

Der Feldmesser zeichnet am Meßtisch auf ein mit Zeichenpapier bespanntes Reißbrett Linien, die nach festgelegten Geländepunkten weisen und von der Gestalt eines Geländestücks ein geometrisch richtiges Bild ergeben. Der Kartograph verarbeitet die Meßtischaufnahmen zu Geländeplänen und Landkarten (Abb. 82). Die Teile der Erdoberfläche werden auf ebene Kartenblätter abgebildet. Die Bilder gehören somit zu den Figuren der Planimetrie (vgl. S. 135).

Abb. 82. Kartograph bei der Arbeit

1. Die Dreiecke

a) Arten

Drei in einer Ebene gezeichnete gerade Linien können zueinander vier verschiedene Lagen einnehmen.

1. Die drei Geraden sind zueinander parallel und haben keinen Schnittpunkt;

2. die drei Geraden gehen durch einen Schnittpunkt;
3. von den drei Geraden verlaufen zwei zueinander parallel, sie werden beide von der dritten Geraden geschnitten; es entstehen zwischen den drei Geraden zwei Schnittpunkte;
4. keine der Geraden verläuft zu einer der beiden anderen parallel; es entstehen drei Schnittpunkte.

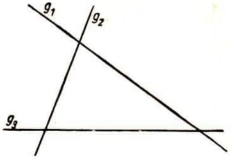


Abb. 83. Drei Gerade einer Ebene, die untereinander nicht parallel sind, bilden ein Dreieck

Im vierten Fall bilden die drei geraden Linien ein Dreieck (Abb. 83). Ihre Schnittpunkte sind die Ecken, die Strecken zwischen den Schnittpunkten sind die Dreieckseiten. Zwischen den Seiten liegen die Winkel des Dreiecks.

Werden die Eckpunkte eines Dreiecks mit den Buchstaben A, B, C bezeichnet, so bezeichnet man abgekürzt mit $\triangle ABC$ das Dreieck, mit a die Seite BC, mit b die Seite AC und mit c die Seite AB, mit α den Winkel BAC, mit β den Winkel ABC und mit γ den Winkel ACB des Dreiecks. Es gilt der Satz:

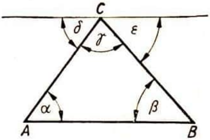


Abb. 84. Die drei Winkel eines Dreiecks ergeben zusammen 180°

In jedem Dreieck ergibt die Winkelsumme 2R.

Wird nämlich in einem Dreieck ABC zu AB die Parallele durch C gezogen, so entstehen neben dem Dreieckswinkel γ die beiden Winkel δ und ε (Abb. 84).

δ, γ und ε ergeben zusammen einen gestreckten Winkel, es ist also

$$\delta + \gamma + \varepsilon = 180^\circ .$$

Nun ist $\delta = \alpha$ (Wechselwinkel an Parallelen),
$\varepsilon = \beta$ (Wechselwinkel an Parallelen);

man erhält also auch

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ .$$

Deshalb können in einem Dreieck zwar zugleich drei spitze Winkel, aber höchstens ein rechter oder ein stumpfer Winkel vorkommen. Man unterscheidet zwischen **spitzwinkligen, rechtwinkligen** und **stumpfwinkligen** Dreiecken (Abb. 85).

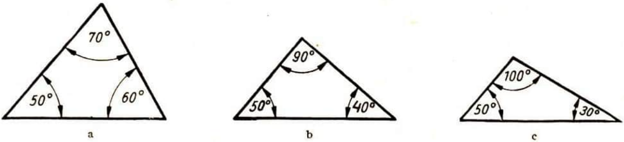


Abb. 85. Spitzwinkliges Dreieck (a), rechtwinkliges Dreieck (b), stumpfwinkliges Dreieck (c)

Verlängert man eine Seite eines Dreiecks über eine Ecke hinaus, so entsteht zwischen der Verlängerung und der anderen Seite, die denselben Endpunkt hat, ein **Außenwinkel** des Dreiecks. Zu jedem Dreieck gehören demnach sechs Außenwinkel, die in Abb. 86 mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 bezeichnet sind. α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 sind als Scheitelwinkel je einander gleich.

Jeder Außenwinkel ist Nebenwinkel zu dem Dreieckswinkel mit demselben Scheitel und ergänzt ihn zu 180°. Nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck wird ein Dreieckswinkel auch durch die Summe der beiden anderen Innenwinkel zu 180° ergänzt. Daraus folgt der Satz (Abb. 87):

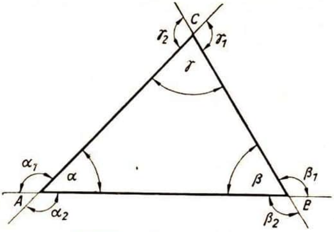


Abb. 86. Die Außenwinkel eines Dreiecks

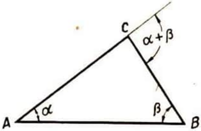


Abb. 87. Der Außenwinkel bei C ist gleich der Summe der Innenwinkel bei A und B

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel gleich.

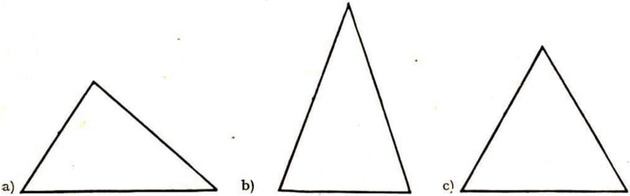


Abb. 88. Ungleichseitiges Dreieck (a), gleichschenkliges Dreieck (b), gleichseitiges Dreieck (c)

Nach der Länge der Seiten unterscheidet man **ungleichseitige** Dreiecke, in denen alle drei Seiten verschieden lang sind (Abb. 88 a), **gleichschenklige** Dreiecke mit einem Paar gleich langer Seiten (Abb. 88 b), und **gleichseitige** Dreiecke mit drei gleich langen Seiten (Abb. 88 c).

Man erkennt die Richtigkeit folgender Sätze:

1. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite, die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.
2. In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel, dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

3. In jedem Dreieck liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Deshalb liegen in gleichschenkligen Dreiecken, in denen die gleichen Seiten *Schenkel*, die ungleiche Seite *Grundlinie* oder *Basis* und die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke *Spitze* genannt werden, an der Grundlinie zwei gleiche Basiswinkel. Jeder Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist daher doppelt so groß wie ein Basiswinkel.

Wird in Abb. 89 der Schenkel BC des gleichschenkligen Dreiecks ABC über die Spitze C hinaus um $CD = BC$ verlängert und D mit A verbunden, so sind A, B und D von C gleichweit entfernte Punkte und liegen auf dem um C über BD geschlagenen Halbkreis. Bei jeder Größe, die $\sphericalangle ACB$ annehmen kann, gilt $\sphericalangle BAD = 90°$.

Es ist nämlich (Abb. 89) $\sphericalangle ACD = 2\alpha$ als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ABC, $\sphericalangle ACB = 2\delta$ als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ADC.

$$2\alpha + 2\delta = 180° \text{ (Nebenwinkel), also}$$
$$\alpha + \delta = 90°.$$

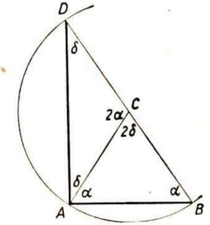


Abb. 89. Der Peripheriewinkel BAD über dem Durchmesser BD beträgt 90°

Man kann z. B. die Strecke DB als festliegend ansehen und den Punkt A auf dem Halbkreis, der BD als Durchmesser hat, verschieben. Der Winkel BAD ist immer ein Rechter.
Da seine Schenkel durch die Endpunkte B und D des Kreisdurchmessers gehen, sagt man auch, der Peripheriewinkel BAD liegt im Halbkreis, und es ergibt sich der Satz:

Jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

Dieser Satz stammt von dem Griechen *Thales* aus *Milet*, der etwa 600 Jahre vor unserer Zeitrechnung gelebt hat (vgl. S. 202).

In gleichseitigen Dreiecken beträgt jeder Winkel 60°.
Im rechtwinkligen Dreieck heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten **Katheten,** die ihm gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse.** Die an der Hypotenuse liegenden Winkel betragen zusammen 90°.

b) Kongruenz von Dreiecken

Gleichsinnige und ungleichsinnige Kongruenz

Der Facharbeiter auf dem Bauplatz oder in der Werkstatt arbeitet nach Lichtpausen der im Konstruktionsbüro gezeichneten Pläne. Jede Pause stimmt mit dem Original in Gestalt und Größe genau überein. Figuren, die wie diese durch Aufeinanderlegen vollständig zur Deckung gebracht werden können, nennt man **deckungsgleich** oder **kongruent**.

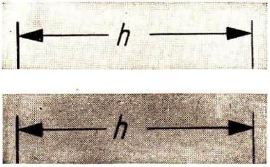


Abb. 90. Originalzeichnung und Lichtpause sind deckungsgleich

Beim Herstellen der Lichtpause wird die Rückseite des durchsichtigen Zeichenblattes auf die lichtempfindliche Schicht gelegt. So entsteht ein Bild, das *durch bloßes Verschieben in der Bildebene* mit dem Original zur Deckung gebracht werden kann. Man spricht in diesem Falle von **gleichsinniger Kongruenz** (Abb 90).

Würde man die Vorderseite des Zeichenblattes auf die lichtempfindliche Schicht legen, so entstünde als Kopie das Spiegelbild des Originals. Original und Bild würden erst zur Deckung kommen, wenn das eine *umgeklappt und verschoben* würde. Dieser Fall der Kongruenz zweier Figuren wird als **ungleichsinnige Kongruenz** bezeichnet. Will man ein Originalschriftstück fotokopieren, so fertigt man zunächst ein Negativ an. Negativ und Original sind ungleichsinnig kongruent (Abb. 91).

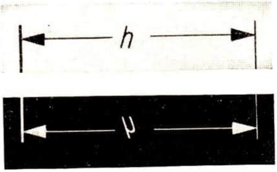


Abb. 91. Original und Negativ einer Fotokopie zeigen in der Linienführung ungleichsinnige Kongruenz

Punkte, Strecken und Winkel kongruenter Figuren, die beim Aufeinanderlegen zur Deckung kommen, entsprechen einander. Bezeichnet man Strecken und Winkel einer geometrischen Figur als ihre Stücke, so gilt:

Entsprechende (homologe) Stücke kongruenter Figuren sind einander gleich.

Kongruente Figuren können geometrisch konstruiert werden. Kreise mit gleichen Radien, Quadrate mit derselben Seitenlänge sind kongruent.

Zum Konstruieren von Dreiecken benötigt man von den drei Seiten und den drei Winkeln nur insgesamt drei Stücke; dabei muß ein Stück eine Seite sein. Im allgemeinen sind alle aus den gleichen drei vorgegebenen Stücken konstruierten Dreiecke kongruent, und zwar gleichsinnig oder ungleichsinnig kongruent. Es sind hinsichtlich der vorgegebenen Stücke folgende vier Fälle möglich.

1. Die drei Seiten sind gegeben.

Beispiel: $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.

Ausführung:

Man zeichnet die Strecke $AB = c$, schlägt um A den Kreis mit dem Radius b, um B den Kreis mit dem Radius a. Beide Kreise schneiden einander in C (bzw. C_1). Durch Verbinden von C (bzw. C_1) mit A und B entsteht das Dreieck ABC (bzw. ABC_1) (Abb. 92).

Die Schnittpunkte C und C_1 der Kreise entstehen nur, wenn $a + b > c$, d.h. $a > c - b$ ist. Die Dreiecke ABC und ABC_1 sind ungleichsinnig kongruent und kommen nur zur Deckung, wenn das eine um AB umgeklappt wird.

Es gilt allgemein:

1. Kongruenzsatz
Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent (Merkzeichen: SSS).

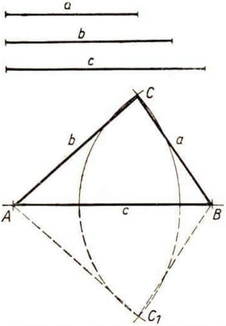


Abb. 92. Konstruktion eines Dreiecks aus drei Seiten (SSS)

Anwendung:

An eine gegebene Gerade g ist in einem Punkte P ein gegebener Winkel $XAY = \alpha$ unter Verwendung von Zirkel und Lineal anzutragen.

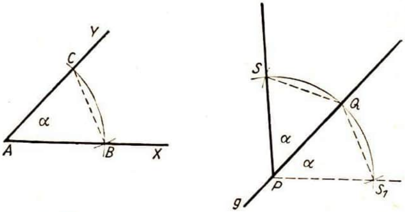


Abb. 93. An einer Geraden in einem Punkte einen Winkel antragen

Ausführung (Abb. 93): Um den Scheitel A des gegebenen Winkels α wird ein Kreis mit beliebigem Radius geschlagen, der den Schenkel AX in B, den Schenkel AY in C schneidet. Mit demselben Radius wird der Kreis um P geschlagen, der g in Q schneidet. Dann schlägt man um Q den Kreis mit dem Radius BC, der den um P geschlagenen Kreis in S bzw. S_1 schneidet. Der Strahl PS (bzw. PS_1) bildet mit g den Winkel α. Da $\triangle ABC$ mit $\triangle PQS$ bzw. $\triangle PQS_1$ in den drei Seiten übereinstimmt, sind die Dreiecke kongruent, ihre entsprechenden Winkel also gleich.

2. Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel sind gegeben:

Beispiel: $b = 4$ cm, $c = 7$ cm, $\alpha = 70°$.

Ausführung:

Man zeichnet die Strecke $AB = c$, trägt an AB in A den Winkel BAX (bzw. BAX_1) $= \alpha$ an, schlägt um A den Kreis mit dem Radius b, der AX in C (bzw. AX_1 in C_1) schneidet, und verbindet B mit C (bzw. C_1). Es entsteht das Dreieck ABC (bzw. ABC_1), das die verlangten Eigenschaften hat (Abb. 94).

Für die Größe der Seiten besteht keine Beschränkung, der Winkel muß aber kleiner als 180° sein.

Allgemein gilt:

2. Kongruenzsatz

Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent (Merkzeichen: SWS).

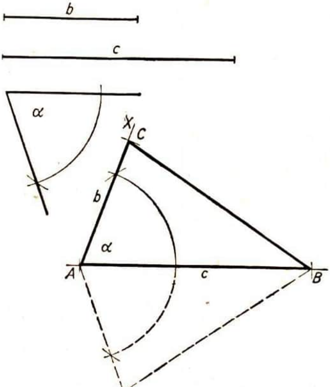


Abb. 94. Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (*SWS*)

3. Zwei Seiten sind gegeben und der Winkel, der der größeren von beiden Seiten gegenüberliegt.

Beispiel: $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 60°$.

Ausführung:

Man zeichnet die Strecke $BC = a$, trägt an BC in B den Winkel CBX (bzw. CBX_1) $= \beta$ an und schlägt um C mit dem Radius b den Kreis, der BX in A (bzw. BX_1 in A_1) schneidet. Verbindet man A (bzw. A_1) mit C, so entsteht das Dreieck ABC (bzw. A_1BC), das die gegebenen Stücke enthält (Abb. 95).

Außer der Bedingung $b > a$ besteht für die Größe der beiden Seiten keine Beschränkung. Der Winkel muß kleiner als 180° sein.

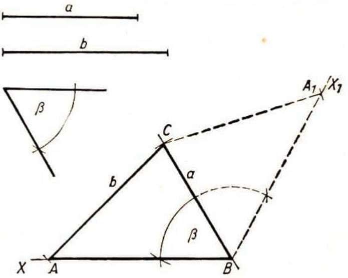


Abb. 95. Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (*SSW*)

Allgemein gilt:

3. Kongruenzsatz

Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren von beiden Seiten übereinstimmen, sind kongruent (Merkzeichen: SSW).

4. Eine Seite und zwei Winkel sind gegeben.

1. Beispiel:

$c = 6$ cm, $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$.

Ausführung:

Man zeichnet die Strecke $AB = c$, trägt an AB in A den Winkel BAX (bzw. BAX_1) $= \alpha$, in B den Winkel ABY (bzw. ABY_1) $= \beta$ an und erhält als Schnittpunkt von AX mit BY (bzw. AX_1 mit BY_1) den Punkt C (bzw. C_1). Das Dreieck ABC (bzw. ABC_1) hat die verlangten Eigenschaften (Abb. 96).

2. Beispiel:

$c = 6$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

Ausführung:

Die Konstruktion ist auf zwei Arten möglich. Wird zunächst aus den Größen der gegebenen Winkel nach dem Satz von der Summe der Dreieckswinkel der dritte ermittelt ($\alpha = 180° - \beta - \gamma$), so wird die Konstruktion wie im ersten Beispiel ausführbar. Verwendet man

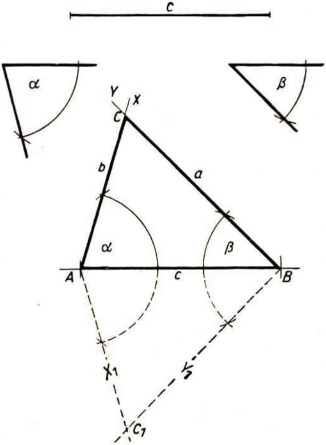
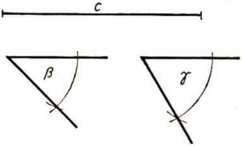


Abb 96. Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite (*WSW*)

aber die gegebenen Stücke zu der Konstruktion, so zeichnet man die Strecke $AB = c$, trägt an AB in B den Winkel ABX (bzw. $ABX_1) = \beta$, an BX (bzw. BX_1) in einem beliebigen Punkt P (bzw. P_1) den Winkel BPY (bzw. $BP_1Y_1) = \gamma$ an und zieht zu PY (bzw. PY_1) durch A die Parallele, die BX in C (bzw. BX_1 in C_1) schneidet. Das Dreieck ABC (bzw. ABC_1) hat die verlangten Eigenschaften (Abb. 97).



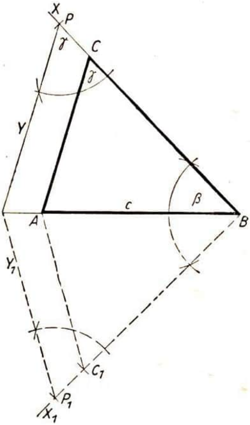


Abb. 97. Konstruktion eines Dreiecks aus einer Seite und zwei Winkeln (*SWW*)

Für die Größe der Seite besteht keine Beschränkung; die Summe der beiden Winkel muß aber kleiner als 180° sein.

Allgemein gilt:

4. Kongruenzsatz

Dreiecke, die in einer Seite und zwei zu ihr gleichartig liegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent (Merkzeichen: WSW oder SWW).

5. *Sonderfall:*

Zwei Seiten sind gegeben und der Winkel, der der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegt.

Beispiel: $a = 3$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 30°$

Ausführung:

Man zeichnet die Strecke $AB = c = 5$ cm. In A trägt man an $AB \sphericalangle BAX$ $(BAX_1) = \alpha$ an, schlägt um B mit dem Radius a den Kreis, der AX in C_1 und C_2 (bzw. AX_1 in C_3 und C_4) schneidet, und verbindet B mit C_1 und C_2 (bzw. mit C_3 und C_4). Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 (bzw. ABC_3 und ABC_4) haben die verlangten Eigenschaften. Sie haben die beiden Seiten a und c sowie den Winkel α gemeinsam, sind aber nicht kongruent (Abb. 98).

Wenn $c > a$ ist, schneidet der um B mit Radius a geschlagene Kreis den Schenkel AX des in A angetragenen Winkels α nur, wenn α ein spitzer Winkel und a größer als das von B auf AX gefällte Lot ist. Es ergeben sich zwei verschiedene Dreiecke, von denen das eine bei C_2 einen spitzen, das andere bei C_1 einen stumpfen Winkel hat.

Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind nur kongruent, wenn der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel bei beiden spitz oder bei beiden stumpf ist.

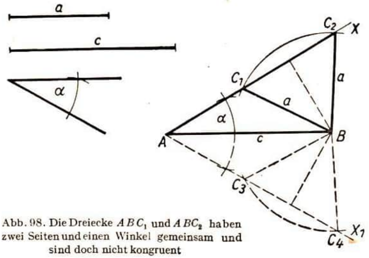


Abb. 98. Die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 haben zwei Seiten und einen Winkel gemeinsam und sind doch nicht kongruent

Die Kongruenz zweier Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ bringt man kurz durch die Schreibform $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ (gelesen: Dreieck $A_1B_1C_1$ kongruent Dreieck $A_2B_2C_2$) zum Ausdruck.

Anwendungen

Die Kongruenz von Dreiecken läßt oft besondere Eigenschaften geometrischer Figuren erkennen. Werden z. B. in dem gleichschenkligen Dreieck ABC von den Eckpunkten A und B aus die Lote AD und BE auf die Schenkel BC bzw. AC gefällt, so entstehen die Dreiecke ADC und BEC (Abb. 99). Da die Schenkel AC und BC gleich lang sind, außerdem die Winkel ADC und BEC als Winkel an den Fußpunkten D und E der Lote je die Größe 90° und beide Dreiecke den Winkel bei C gemeinsam haben, gilt $\triangle ADC \cong \triangle BEC$ (SWW), also auch $AD = BE$.

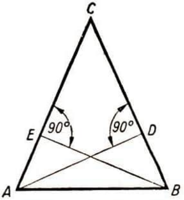


Abb. 99. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die auf den Schenkeln senkrechten Höhen gleich lang

Wie die Kongruenz von Dreiecken bei bestimmten Konstruktionen benutzt wird, zeigt auch folgendes

Beispiel: *Der gegebene Winkel XAY ist zu halbieren.*

Man schlägt um den Scheitel A mit beliebigem Radius einen Kreis, der AX in P, AY in Q schneidet. Dann schlägt man um P und Q mit ebenfalls beliebigem, aber gleichem und genügend großem Radius Kreise, die sich in S schneiden. Der von A nach S gezogene Strahl halbiert $\sphericalangle XAY$.

Verbindet man S mit P und Q, so gilt $AP = AQ$, $SP = SQ$. Die Dreiecke APS und AQS, die AS als Seite gemeinsam haben, stimmen in den drei Seiten überein und sind deshalb kongruent (SSS). In ihnen sind $\sphericalangle PAS$ und $\sphericalangle QAS$ entsprechende Stücke; also gilt $\sphericalangle PAS = \sphericalangle QAS$, d. h. AS halbiert $\sphericalangle XAY$ (Abb. 100).

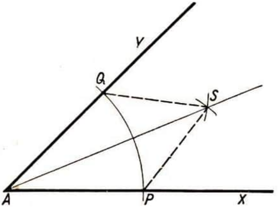


Abb. 100. Das Halbieren eines Winkels

c) *Axiale Symmetrie*

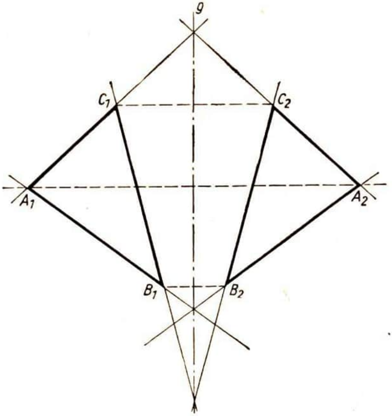


Abb. 101. Die Dreiecke $A\ B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ liegen symmetrisch zur Geraden g

Ein Original und sein Negativ zeigen in der Linienführung ungleichsinnig kongruente Bilder (vgl. Abb. 91). Das eine Bild muß umgeklappt werden, ehe es mit dem anderen zur Deckung gebracht werden kann. Zwei Figuren, die so in einer Ebene liegen, daß die eine mit der anderen durch Umlegen um eine Gerade derselben Ebene zur Deckung kommt, nennt man in bezug auf die Gerade **symmetrisch** oder **spiegelbildlich**. Die Gerade heißt ihre **Symmetrieachse** (Abb. 101 und 102).

Stellt man ein Stück Spiegelglas mit einem geradlinigen Rand senkrecht auf ein Blatt Papier, auf das eine Figur gezeichnet ist, so erscheint als Spiegelbild eine symmetrische Figur. Der Rand der Spiegelfläche ist die Symmetrieachse.

Zwei Punkte oder Gerade symmetrischer Figuren, die beim Umklappen um die Symmetrieachse zur Deckung kommen (z. B. A_1 und A_2 oder A_1B_1 und A_2B_2 in Abb. 101), werden auch *einander entsprechend* oder *zugeordnet* genannt.

Für axiale Symmetrie gelten folgende Sätze:

1. Die Verbindungsstrecke zweier zugeordneter Punkte (z. B. C_1, C_2) steht auf der Achse senkrecht und wird durch diese halbiert. Die Achse ist also die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke.

2. Schneidet eine Gerade die Symmetrieachse (z. B. A_1C_1), so geht auch die zugeordnete Gerade (A_2C_2) durch diesen Schnittpunkt. Der von beiden Geraden gebildete Winkel wird durch die Achse halbiert. Einer Parallelen zur Achse entspricht eine Parallele zur Achse im gleichen Abstand; eine zur Achse senkrechte Gerade fällt mit der zugeordneten zusammen.

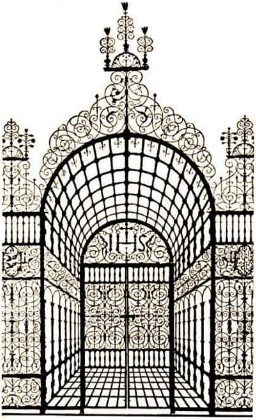


Abb. 102. Axiale Symmetrie bei einem schmiedeeisernen Chorgitter (Ausschnitt).
An welcher Stelle ist die axiale Symmetrie gestört?

3. Jeder Punkt der Symmetrieachse hat von zwei zugeordneten Punkten gleiche Entfernungen, jeder Punkt der Symmetrieachse ist sich selbst zugeordnet.

Aus den angeführten Sätzen folgen eine Reihe weiterer Gesetzmäßigkeiten z. B.: Punkte auf den Schenkeln eines Winkels, die vom Scheitel gleich weit entfernt sind, liegen zur Halbierungslinie des Winkels symmetrisch. Oder: Die Spitzen gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie liegen auf der Symmetrieachse der Dreiecke.

Durch Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften benötigt man für manche Konstruktionen nur Zirkel und Lineal:

Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

1. Zu zwei Punkten A und B ist die Symmetrieachse zu konstruieren. Eine Strecke AB ist zu halbieren. Zu einer Strecke AB ist die Mittelsenkrechte zu konstruieren.

Ausführung:

Um A und B sind mit gleichen Halbmessern, die größer als $\frac{AB}{2}$ sind, Kreise zu schlagen. Sie schneiden einander in C und D Die Gerade CD ist die Symmetrieachse zu den Punkten A und B. Sie halbiert die Strecke AB in E und ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB (Abb.103).

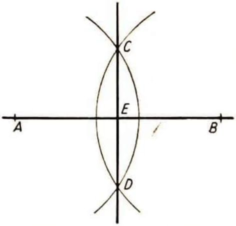


Abb. 103. Konstruktion der Mittelsenkrechten

2. In einem Punkt E einer Geraden g ist die Senkrechte zu errichten.

Ausführung:

Ein um E mit einem beliebigen Radius geschlagener Kreis schneidet g in A und B. Um A und B sind Kreise zu schlagen, deren Radien einander gleich und größer als AE sind. Sie schneiden sich in C. Die Gerade CE steht senkrecht auf g (Abb. 104).

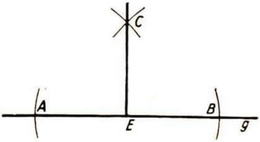


Abb. 104. Auf einer Geraden wird eine Senkrechte errichtet

3. Von einem Punkt C aus ist auf eine Gerade g das Lot zu fällen.

Ausführung:

Ein mit genügend großem Radius um C geschlagener Kreis schneidet g in A und B. Um A und B sind Kreise zu schlagen, deren Radien einander gleich und größer als $\frac{AB}{2}$ sind. Sie schneiden einander in D. Die Gerade CD schneidet g in E. CE ist das von C auf g gefällte Lot (Abb. 105).

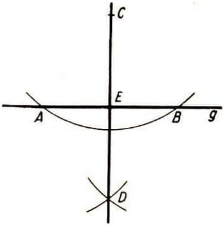


Abb. 105. Auf eine Gerade wird ein Lot gefällt

4. Der Mittelpunkt eines Kreises ist zu bestimmen.

Ausführung:

Auf der Kreislinie sind drei beliebige Punkte A, B und C zu markieren. Nach 1. ist zu A und B und zu B und C jeweils die Symmetrieachse zu konstruieren. Beide Symmetrieachsen schneiden einander im Kreismittelpunkt M (Abb. 106).

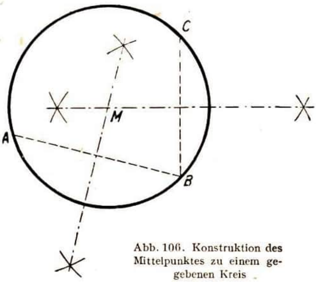


Abb. 106. Konstruktion des Mittelpunktes zu einem gegebenen Kreis

AUFGABEN

1. In einer Ebene sind vier gerade Linien so zu zeichnen, daß **a)** 0, **b)** 1, **c)** 3, **d)** 4, **e)** 5, **f)** 6 Schnittpunkte entstehen.

2. In einer Ebene liegen **a)** 2, **b)** 3, **c)** 4, **d)** 5, **e)** n Punkte so, daß eine Gerade nie mehr als zwei dieser Punkte enthält. Wieviel gerade Linien lassen sich zeichnen, die je zwei der Punkte verbinden?

3. Aus

a) $a_1 = 4{,}5$ cm, $b_1 = 5{,}2$ cm, $c_1 = 6{,}3$ cm
b) $b_2 = 5{,}5$ cm, $c_2 = 4{,}8$ cm, $\alpha_2 = 53°$
c) $a_3 = 4{,}6$ cm, $\beta_3 = 47°$, $\gamma_3 = 95°$
d) $c_4 = 6{,}2$ cm, $\alpha_4 = 35°$, $\gamma_4 = 100°$
e) $a_5 = 6{,}0$ cm, $b_5 = 5{,}0$ cm, $\alpha_5 = 60°$
f) $a_6 = 4{,}4$ cm, $c_6 = 6{,}4$ cm, $\alpha_6 = 40°$

sind Dreiecke zu konstruieren.

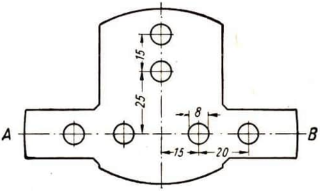


Abb. 107. Bohrungen eines Gußstückes

4. Zu einem gegebenen Dreieck ABC ist ein Dreieck zu zeichnen, das symmetrisch liegt in bezug auf

a) AB als Achse,
b) die auf AB in B errichtete Senkrechte s als Achse,
c) eine beliebige, die Verlängerungen der Seiten AB, BC, CA schneidende Gerade g als Achse.

5. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ist die Spitze C mit dem Mittelpunkt der Grundlinie D verbunden. Durch Eigenschaften kongruenter Dreiecke ist zu begründen, daß

a) CD den Winkel ACB halbiert,
b) CD auf AB senkrecht steht.

6. In ein Gußstück mit unbearbeiteten Kanten sind nach Zeichnung (Abb. 107) Löcher zu bohren. Wie wird das Werkstück angerissen?

7. Es ist eine Abdeckplatte mit Führungsschlitz anzufertigen. Die Maße sind aus Abb. 108 zu entnehmen. Wie ist die Platte anzureißen?

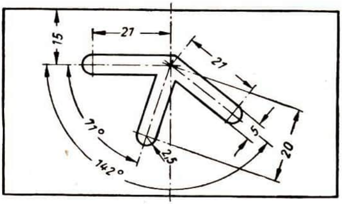


Abb. 108. Führungsschlitz einer Abdeckplatte

8. In der Stirnfläche eines Stückes Rundstahl vom Durchmesser $d = 120$ mm ist der Mittelpunkt anzureißen. Ein Zentrierwinkel ist nicht vorhanden.
Wie wird das Anreißen ausgeführt?

9. Zwischen zwei Geländepunkten A und B steht ein Haus so, daß die Punkte gegenseitig nicht sichtbar sind. Ein Landvermesser hat die Entfernung AB festzustellen und auf der Verlängerung von AB über A hinaus einen Punkt G abzustecken, der von A die Entfernung e hat. Er wählt einen Geländepunkt C, von dem aus A und B sichtbar sind, und mißt die Strecken AC und BC. Dann steckt er auf der Verlängerung von AC den Punkt D so ab, daß $CD = AC$ ist, und auf der Verlängerung von BC den Punkt E so, daß $CE = BC$ ist. Er mißt die Strecke ED. Auf der Geraden ED steckt er, von D aus gemessen, die Strecke $DF = e$ ab, mißt CF und verlängert die Strecke CF über C hinaus um $CG = CF$ (Abb. 109).

a) Warum gibt die Länge der Strecke ED zugleich die Länge AB an?

b) Warum erfüllt der Punkt G die gestellte Bedingung?

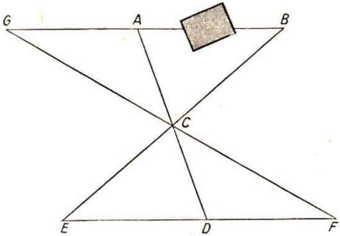


Abb. 109. Geländeskizze, zu Aufgabe 9 und 10

10. Durch eine Zeichnung in verkleinertem Maßstab (1 : 1000) ist die Entfernung der Punkte A und B der Abb. 109 für folgende Angaben zu ermitteln: $AC = 590$ m, $BC = 430$ m, $\sphericalangle ACB = 73°$.

11. Von den Endpunkten einer 460 m langen Standlinie AB aus sind nach einem unzugänglichen Punkte C die Winkel $BAC = 32°$ und $ABC = 70°$ festgestellt worden. Durch eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 sollen die Entfernungen AC und BC ermittelt werden.

2. Die Vierecke

a) Allgemeines

Häufiger als Dreiecke begegnen uns im täglichen Leben Flächenstücke, die von 4 Seiten begrenzt sind, deren Ränder also Vierecke bilden. Man denke z. B. an die Formen der Häuser (Abb. 110), an unsere Wohnräume oder an die Querschnitte von Profilstählen. Wir werden die in der Praxis erforderlichen

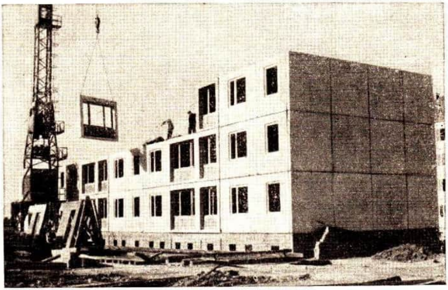


Abb. 110. Bei den Formen der Häuser überwiegen die Vierecke. Das Bild zeigt einen Wohnungsneubau in Großplattenbauweise.

Berechnungen ausführen können, wenn wir die Gesetzmäßigkeiten der Vierecke beherrschen.

Zwischen vier in eine Ebene gelegten geraden Linien w, x, y, z, von denen nicht zwei untereinander parallel sind und sich nicht mehr als zwei in einem Punkte schneiden, entstehen sechs Schnittpunkte, die in Abb. 111 mit A, B, C, D, E und F bezeichnet sind. Vier dieser Schnittpunkte, die so ausgewählt sind, daß nur jedesmal zwei auf einer der vier Geraden liegen, bilden die Ecken des Vierecks $ABCD$. Die vier Strecken $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $DA = d$, die zwei aufeinanderfolgende Ecken verbinden, heißen Seiten. Die Strecken $AC = e$ und $BD = f$, die je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, sind die **Diagonalen** des Vierecks. Zwischen je zwei in einer Ecke zusammentreffenden Seiten liegen die Winkel des Vierecks.

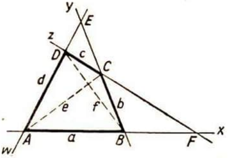


Abb. 111. Das allgemeine Viereck

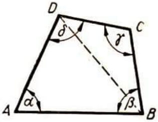


Abb. 112. Die Winkel eines Vierecks ergeben zusammen 360°

In jedem Viereck ergibt die Winkelsumme
$4R = 360°$. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R = 360°$

Zerlegt man das Viereck $ABCD$ etwa durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD und BDC (Abb. 112), so ergeben die Dreieckswinkel zusammen einerseits die Größe $2 \cdot 2R$ und anderseits die Summe aller Viereckswinkel.

Nach der Lage der gegenüberliegenden Seiten zueinander unterscheidet man folgende Arten von Vierecken:

Das **Parallelogramm** (im weiteren Sinne) hat zwei Paare paralleler Seiten,

das **Trapez** hat ein Paar paralleler Seiten,

das **Trapezoid** hat keine parallelen Seiten.

Im gewöhnlichen Sprachgebrauch versteht man unter Parallelogramm das Viereck, das zwei verschieden lange Paare paralleler Seiten hat und schiefwinklig ist (Rhomboid). Das Trapezoid wird gewöhnlich als allgemeines Viereck bezeichnet.

b) Parallelogramme

Nach den Winkeln und der Größe der Seiten unterschieden, bezeichnet man

das rechtwinklig-gleichseitige Parallelogramm als **Quadrat** (Abb. 113a),

das schiefwinklig-gleichseitige Parallelogramm als **Rhombus** oder **Raute** (Abb. 113b),

das rechtwinklig-ungleichseitige Parallelogramm als **Rechteck** (Abb. 113c),

das schiefwinklig-ungleichseitige Parallelogramm als **Rhomboid** (im gewöhnlichen Sprachgebrauch Parallelogramm) (Abb. 113d).

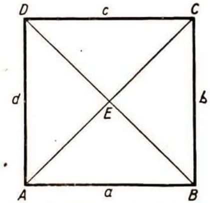


Abb. 113a. Das Quadrat: $a=b=c=d$

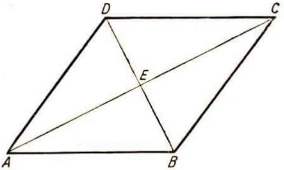


Abb. 113b. Der Rhombus oder die Raute: $a=b=c=d$

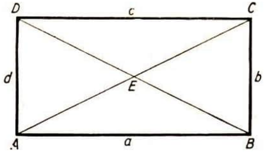


Abb. 113c. Das Rechteck $a=c$, $b=d$

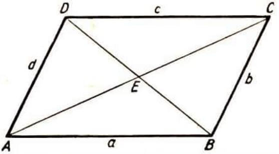


Abb. 113d. Das Rhomboid oder (im gewöhnlichen Sprachgebrauch) Parallelogramm: $a=c$, $b=d$

Alle Parallelogramme haben die folgenden Eigenschaften:

1. Je zwei benachbarte Winkel ergeben zusammen 180°.

Beweis:

Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel; deshalb sind je zwei benachbarte Parallelegrammwinkel (in Abb. 114 α und β) zugleich entgegengesetzte Winkel (an den Parallelen AD und BC) und ergeben zusammen 180°.

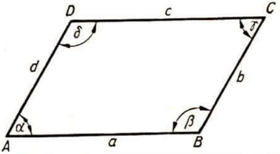


Abb. 114. Im Parallelogramm ist die Summe zweier benachbarter Winkel 180°; zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß

2. Je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Beweis:

Jeder Parallelogrammwinkel wird durch seinen benachbarten Winkel auf 180° ergänzt (Abb. 114). Die beiden Winkel α und γ liegen einander gegenüber und sind gleich groß, weil beide Supplementwinkel des Winkels β (und δ) sind.

3. Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

Beweis:

Die in Abb. 115 eingezeichnete Diagonale AC zerlegt das Parallelogramm $ABCD$ in die Dreiecke ABC und CDA. Die Dreiecke haben die Seite AC gemeinsam. Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten parallel. Aus $AB \parallel CD$

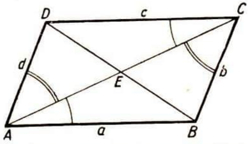


Abb. 115. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang. Die Diagonalen halbieren sich

folgt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ (Wechselwinkel an Parallelen), und aus $BC \parallel DA$ folgt $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ (Wechselwinkel an Parallelen). Nach dem Kongruenzsatz *WSW* gilt $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, demnach $AB = CD$, $BC = DA$ (homologe Stücke).

4. Die Diagonalen halbieren einander.

Beweis:

Die in Abb. 115 eingezeichneten Diagonalen AC und BD schneiden einander in E und zerlegen das Parallelogramm $ABCD$ in die beiden Paare von Dreiecken $\triangle ABE$ und $\triangle CDE$, $\triangle BCE$ und $\triangle DAE$. Es gilt $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CED$ (Scheitelwinkel) und, wie bereits bewiesen, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DCE$, $AB = CD$. Nach dem Kongruenzsatz *SWW* ergibt sich $\triangle ABE \cong CDE$, somit $AE = CE$, $BE = DE$ (homologe Stücke).

5. In rechtwinkligen Parallelogrammen (Quadrat, Rechteck) sind die Diagonalen gleich lang.

Beweis:

In Abb. 116 sind durch Einzeichnen der Diagonalen $\triangle ABC$ und $\triangle BAD$ entstanden.
Die beiden Dreiecke haben die Seite AB gemeinsam; außerdem gilt $BC = AD$ (gegenüberliegende Parallelogrammseiten), $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle BAD = 90°$ (Winkel im Rechteck), also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Daraus folgt $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ (*SWS*), $AC = BD$ (homologe Stücke).

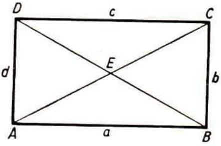


Abb. 116. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang

6. In gleichseitigen Parallelogrammen (Quadrat, Rhombus) stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren die Parallelogrammwinkel.

Beweis:

Die durch Einzeichnen der Diagonalen AC und BD in Abb. 117 entstandenen Dreieckspaare ABC und CDA, ABD und CDB sind kongruent. Das ist als Parallelogrammeigenschaft bereits bewiesen. Da $AB = BC = CD = DA$ ist, sind A und C zugeordnete Punkte zur Symmetrieachse BD und B und D zugeordnete Punkte zur Symmetrieachse AC. Deshalb gilt $AC \perp BD$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DCA$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$.

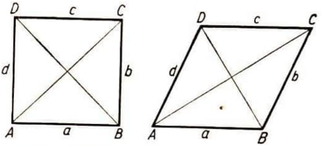


Abb. 117. Die Diagonalen eines Quadrats (*a*) und eines Rhombus (*b*) stehen aufeinander senkrecht. Sie halbieren die Parallelogrammwinkel

c) *Weitere Vierecke*

Im **Trapez** (Abb. 118) werden die beiden parallelen Seiten *Grundlinien* ($AB = a$, $CD = c$) und die nichtparallelen Seiten *Schenkel* ($AD = d$, $BC = b$) genannt.

Die an einem Schenkel eines Trapezes liegenden Winkel ergänzen sich als entgegengesetzte Winkel an Parallelen zu 180°.
($\alpha + \delta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$)

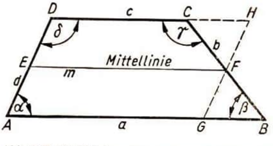


Abb. 118. Die Mittelparallele im Trapez ist genau so lang wie die halbe Summe der beiden parallelen Seiten

Die Strecke $EF = m$ zwischen den Schenkelmitten E und F heißt **Mittellinie** des Trapezes.

Die Mittellinie des Trapezes verläuft parallel zu den Grundlinien und wird daher auch Mittelparallele genannt. Sie ist gleich der halben Summe der beiden Grundlinien (das arithmetische Mittel der beiden Grundlinien).

$$\boldsymbol{m = \frac{a + c}{2}}$$

Beweis:

1. Die durch F zum Trapezschenkel d gezogene Parallele schneidet a in G und die Verlängerung von c in H. Es wird

$$\triangle GBF \cong \triangle HCF \text{ (SWW), also auch}$$

$$GF = HF \text{ (homologe Stücke kongruenter Dreiecke), also}$$

$$GF = \frac{GH}{2}.$$

Wegen $AG \parallel DH$ und $AD \parallel GH$ ist $AGHD$ ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten also ein Parallelogramm. In ihm sind gegenüberliegende Seiten einander gleich, mithin gilt

$$AD = GH$$

und, da

$$AE = \frac{AD}{2}, \qquad GF = \frac{GH}{2},$$

$$AE = GF.$$

In $AGFE$ ist demnach ein Seitenpaar gleich und parallel, $AGFE$ ist ein Parallelogramm. Somit gilt

$$AB \parallel EF \parallel CD, \quad \text{d. h.}$$

die Mittellinie des Trapezes verläuft zu den Grundlinien parallel.

2. Da gegenüberliegende Parallelogrammseiten einander gleich sind, ergibt sich weiter

$$AG = EF = DH.$$

Aus

$$AG = AB - BG$$

und

$$DH = DC + CH$$

folgt durch Addieren

$$AG + DH = AB - BG + DC + CH.$$

Nun ist

$$BG = CH \quad \text{(homologe Stücke kongruenter Dreiecke)}$$

und

$$AG = DH = EF,$$

also

$$2 \cdot EF = AB + DC,$$

$$m = \frac{a + c}{2}.$$

Die Mittellinie des Trapezes ist halb so groß wie die Summe seiner Grundlinien.

Im **gleichschenkligen Trapez** (Abb. 119) sind die Schenkel gleich lang, die an jeder Grundlinie liegenden Winkel einander gleich und die Diagonalen gleich lang.

Anleitung zum Beweis:

Die durch den Eckpunkt C des Trapezes zum Schenkel AD gezogene Parallele CE ist ein Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks EBC, dessen Basiswinkel den Winkeln an der Trapezgrundlinie AB gleich sind. Die beiden Diagonalen des Trapezes sind homologe Stücke kongruenter Dreiecke, die eine Grundlinie gemeinsam haben.

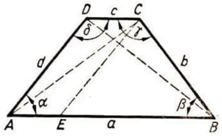


Abb. 119. Das gleichschenklige Trapez; $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$; $b = d$; $AC = BD$

Als Viereck besonderer Art ist das **Deltoid** (Drachenviereck; Abb. 120) zu nennen. Es hat zwei Paare gleicher Seiten, die in einander gegenüberliegenden Ecken zusammenstoßen, und zwei gleiche Winkel, deren Scheitel die anderen Ecken sind; es ist also eine axialsymmetrische Figur.

In der folgenden Übersicht sind die verschiedenen Arten von Vierecken zur vergleichenden Betrachtung zusammengestellt.

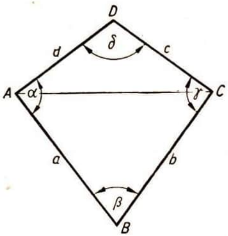
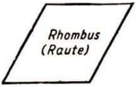


Abb. 120. Das Drachenviereck (Deltoid): $a=b,\ c=d,\ \alpha=\gamma$

Übersicht über die Arten des Vierecks

Unregelmäßiges Viereck	*Besondere Formen des Vierecks*	*Besondere Formen des Parallelogramms*
	 (Eine Diagonale zerlegt das Viereck in gleichschenklige Dreiecke.)	 (Gleichseitiges Parallelogramm)
 (Jede Diagonale zerlegt das Viereck in Dreiecke beliebiger Gestalt und Größe.)	 (Ein Seitenpaar ist parallel.)	 (R[illegible]twinkliges Parallelogramm)
	 (Ein Seitenpaar ist parallel, das andere gleich lang.)	 (Gleichseitig-rechtwinkliges Parallelogramm)
	 (Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.)	

3. Das Berechnen geradlinig begrenzter Flächen

Als Profil bezeichnet man die Umrißlinien des ebenen Querschnitts eines Werkstücks (Abb. 121). Form und Größe des Querschnitts spielen in der Technik eine wichtige Rolle. So hängt z. B. die Durchbiegung eines Freiträgers bei einer bestimmten Belastung von der Form und Größe des Querschnitts ab. Die Berechnung des Gewichts geht bei vielen Körpern auch vom Querschnitt aus. Für das Ermitteln technisch begründeter Arbeitsnormen bilden Flächengrößen bei Fräszeiten, Hobelzeiten, Zeiten für das Feilen u. a. die Berechnungsgrundlagen.

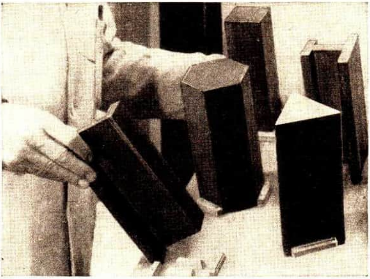


Abb. 121. Modelle verschiedener Profilstähle

a) Quadrat und Rechteck

Sind die mit a bezeichneten Längen der Seiten eines **Quadrates** oder die mit a und b bezeichneten Längen der Seiten eines **Rechtecks** ganzzahlige Vielfache einer Längeneinheit, so passen an eine Seite genau a Quadrate, deren Seiten gleich dieser Längeneinheit sind und die deshalb der Längeneinheit entsprechende *Flächeneinheiten* heißen. Diese a Flächeneinheiten setzen sich zu einem Streifen zusammen, der eine Längeneinheit breit ist. Deshalb sind a solcher Streifen bzw. $a \cdot a$ Flächeneinheiten nötig, um das Quadrat (Abb. 122), und b solcher Streifen bzw. $b \cdot a$ Flächeneinheiten nötig, um das Rechteck (Abb. 123) zu bedecken.

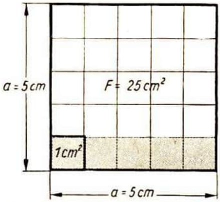


Abb. 122. Flächeninhalt des Quadrats: $F = a^2$

Das Quadrat mit der Seitenlänge a enthält $a \cdot a = a^2$ Flächeneinheiten.

$$\boxed{F = a^2}$$

Das Rechteck mit den Seiten a und b enthält $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

$$\boxed{F = a \cdot b}$$

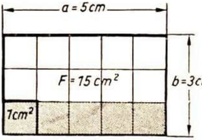


Abb. 123. Flächeninhalt des Rechtecks: $F = a \cdot b$

Die Seitenlängen des Quadrats der Abb. 122 und des Rechtecks der Abb. 123 sind mit 5 cm bzw. 5 und 3 cm so gewählt, daß 1 cm als Längeneinheit paßt und 1 cm² die entsprechende Flächeneinheit bildet.

Seitenlängen 5,1 cm und 3,2 cm würden, als ganze Vielfache der Längeneinheit 1 mm geschrieben, 51 mm und 32 mm heißen. Die entsprechende Flächeneinheit wäre 1 mm² und der Flächeninhalt des Quadrats $(51 \cdot 51)$ mm² $= 2601$ mm² $= 26{,}01$ cm², der Flächeninhalt des Rechtecks $(51 \cdot 32)$ mm² $= 1632$ mm² $= 16{,}32$ cm².

In ähnlicher Weise läßt sich dieser Gedankengang zum Bestimmen des Flächeninhalts von Quadraten und Rechtecken durchführen, wenn die Seitenlängen in Form gemeiner Brüche gegeben sind, nicht jedoch, wenn sie als Zahlen wie $\sqrt{2}$, π (unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen) angegeben sind. Man gibt dann die Seitenlängen mit beliebiger Annäherung an ihren wirklichen Wert in dezimalgeteilten Einheiten an und berechnet daraus nach der obigen Vorschrift den Flächeninhalt mit entsprechender Genauigkeit.

Um zeitraubendes Ausrechnen zu ersparen, werden die zu gegebenen Seitenlängen gehörenden Flächeninhalte von Quadraten als sogenannte Quadratzahlen in Zahlentafeln zusammengestellt. Aus den Tabellen kann auch die Länge der Seite eines Quadrates abgelesen werden, dessen Flächengröße gegeben ist.

b) Rhomboid

In Abb. 124 sind zu dem **Rhomboid** $ABCD$ die von C und D auf die Gerade AB gefällten Lote CG und DH gezeichnet. Da im Rhomboid gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke CGB und DHA. Es zeigt sich, daß das Rhomboid $ABCD$ mit dem Rechteck $CDHG$ flächengleich ist. In diesem bildet eine Rhomboidseite die eine Rechteckseite; die andere Rechteckseite mißt die zu dieser Rhomboidseite gehörende Höhe des Rhomboids.

Man erhält somit den Flächeninhalt des Rhomboids sowie aller Parallelogramme als das Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

$$\boxed{F = a \cdot h_a = b \cdot h_b}$$

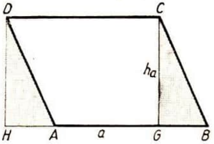


Abb. 124. Flächeninhalt des Parallelogramms: $F = a \cdot h_a$

c) Dreieck und Trapez

Ein Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, die in den drei Seiten übereinstimmen und deshalb kongruent sind. So wird in Abb. 125 das Parallelogramm $ABDC$ durch die Diagonale BC in die kongruenten Dreiecke ABC und CDB zerlegt. Jedes der Dreiecke ist halb so groß wie das Parallelogramm. Da dessen Flächeninhalt gleich dem Produkt aus Grundlinie und zugehöriger Höhe ist, ergibt sich für den Flächeninhalt des **Dreiecks** $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.

Nach Abb. 125 finden wir in analoger Weise $F = \frac{a \cdot h_a}{2}$ und $F = \frac{b \cdot h_b}{2}$, unter h_a und h_b die zu den Seiten a und b gehörigen Höhen verstanden.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist das halbe Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2} a \cdot h_a = \tfrac{1}{2} b \cdot h_b = \tfrac{1}{2} c \cdot h_c}$$

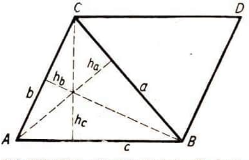


Abb. 125. Flächeninhalt des Dreiecks: $F = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Die besonderen Parallelogramme werden durch Einzeichnen einer Diagonale in Paare von besonderen Dreiecken zerlegt, so z. B. ein Quadrat in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, ein Rechteck in zwei ungleichseitig-rechtwinklige Dreiecke.
Die Diagonale eines Rhombus die die spitzen Rhombuswinkel halbiert, teilt den Rhombus in zwei gleichschenklig-stumpfwinklige Dreiecke, die andere Diagonale, die die stumpfen Rhombuswinkel halbiert, teilt ihn in zwei gleichschenklig-spitzwinklige Dreiecke. Mißt in diesem Falle ein Rhombuswinkel 60 Grad, so entstehen als Rhombushälften gleichseitige Dreiecke.
Verbindet eine Diagonale eines Rhomboids die Scheitel der spitzen Rhomboidwinkel, so erhält man ungleichseitig-stumpfwinklige Dreiecke, verbindet sie die Scheitel der stumpfen Winkel, so sind ungleichseitig-spitzwinklige Dreiecke Hälften des Rhomboids.

Das **Trapez** $ABCD$ mit den Grundlinien $AB = a$ und $CD = c$ zerfällt durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD und CDB (Abb. 126). Für das Dreieck ABD ist DE die zu a gehörende Höhe, für das Dreieck CDB ist BG die zu c gehörende Höhe. Da die Seiten AB und DC auf parallelen Geraden liegen, ist $DE = BG = h$. Als Flächeninhalt ergibt sich $\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ und $\triangle CDB = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$.

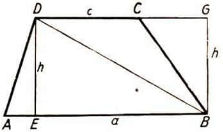


Abb. 126.
Flächeninhalt des Trapezes: $F = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$

Durch Zusammensetzen findet man als Flächeninhalt des Trapezes

$$F = \frac{ah}{2} + \frac{ch}{2} = \frac{(a+c) \cdot h}{2}.$$

Da $\frac{1}{2}(a+c)$ die Mittelparallele m des Trapezes ergibt, gilt auch $F = m \cdot h$.

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist das Produkt aus seiner Mittelparallele und seiner Höhe.

$$\boxed{F = m \cdot h}$$

d) Drachenviereck (Deltoid) und allgemeines Viereck (Trapezoid)

In Abb. 127 sind die Punkte A und C die zur Diagonale $BD = f$ symmetrisch liegenden Ecken des **Drachenvierecks** $ABCD$. Es zerfällt durch f in die kongruenten Dreiecke BDA und BDC. $AE = \frac{e}{2}$ ist die zur Seite f gehörende Höhe des Dreiecks BDA. Deshalb ist sein Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{e}{2} = \frac{1}{4} f \cdot e,$$

der des Deltoids das Doppelte, also $F = \frac{1}{2} f \cdot e$.

Der Flächeninhalt eines Deltoids ist gleich dem halben Produkt der beiden Diagonalen.

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2} e \cdot f}$$

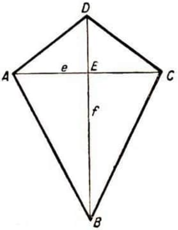


Abb. 127. Flächeninhalt des Drachenvierecks: $F = \frac{1}{2} e \cdot f$

Quadrat und Rhombus können als Sonderfälle des Deltoids angesehen werden. Man findet dann aus der Diagonale e eines Quadrats den Quadratinhalt $\frac{1}{2}e^2$, aus den Diagonalen e und f eines Rhombus den Rhombusinhalt $\frac{1}{2}e \cdot f$.

Wird ein **allgemeines Viereck** durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, so kann die Vierecksfläche F als Summe der beiden Dreiecksflächen berechnet werden. In Abb. 128 zerteilt die Diagonale AC das Trapezoid $ABCD$ in die beiden Dreiecke ABC und ACD. Ist BE das von B auf AC, DG das von D auf AC gefällte Lot, so ist

$$F = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DG = \frac{1}{2}\, AC\,(BE + DG).$$

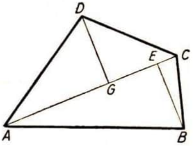


Abb. 128. Flächeninhalt des allgemeinen Vierecks

AUFGABEN

1. Die Parallele durch einen gegebenen Punkt C zu einer gegebenen Geraden AB ist nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und zwar

a) mit Hilfe gleicher Stufenwinkel,

b) mit Hilfe eines Parallelogramms.

2. Es ist zu begründen, daß ein Parallelogramm vorliegt, wenn in einem Viereck

a) je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind,

b) je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind,

c) ein Paar gegenüberliegender Seiten gleich und parallel ist,

d) die Diagonalen einander halbieren.

3. Es ist zu begründen, daß die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten zur dritten Seite parallel verläuft und halb so lang wie diese ist. (Anleitung: Als Hilfslinien ziehe man die Parallele durch den Mittelpunkt einer der beiden Seiten zur anderen Seite und die Parallele durch den Schnittpunkt der beiden Seiten zur dritten.)

4. Von einem Würfel, dessen Kante 5 cm lang ist, wird durch einen in bestimmter Weise geführten ebenen Schnitt ein Teil abgetrennt. Als Schnittfigur soll entstehen 1. ein Rechteck, von dem eine Seite die Würfelkante, die andere Seite die Diagonale der Würfelseitenfläche ist, 2. ein Rhombus.

a) Die Restkörper sind in einer Skizze darzustellen.

b) Die Oberfläche des Restkörpers einschließlich der Schnittfläche ist auf einem Zeichenblatt als zusammenhängende Figur zu zeichnen, so daß ein Modell angefertigt werden kann.

5. Der Flächeninhalt eines Quadrates von der Seitenlänge **a)** $3\frac{1}{2}$ cm **b)** $7\frac{2}{3}$ mm **c)** 15,23 m ist

1. zu berechnen,

2. aus einer Quadratzahlentabelle zu entnehmen.

Um wieviel % weicht der Tabellenwert von dem berechneten Wert ab?

6. Bis zu welcher Höchstlast kann man einen Quadratstahl 14 mm · 14 mm auf Zug beanspruchen, wenn seine Zugfestigkeit $\sigma_B = 34$ kp/mm² beträgt?

7. Ein Stück Quadratstahl von der Zugfestigkeit $\sigma_B = 70$ kp/mm² wird mit der Gesamtbelastung 20 230 kp beansprucht. Wie groß sind die Maße des Querschnitts zu wählen?

8. Berechne die Flächeninhalte folgender Quadrat- und Flachstahlquerschnitte (Maße in mm):

1.	6 · 6	16 · 1,5
2.	8 · 8	18 · 1,5
3.	10 · 10	25 · 2,5
4.	11 · 11	30 · 2,5
5.	12 · 12	18 · 4
6.	15 · 15	50 · 2,5
7.	16 · 16	35 · 5
8.	20 · 20	30 · 15
9.	25 · 25	40 · 12
10.	30 · 30	18 · 8

9. Für ein Einfahrtstor sollen gemauerte Pfeiler mit quadratischem Querschnitt und folgenden Seitenlängen hergestellt werden:

a) 103 cm, **b)** 116 cm, **c)** 129 cm.

Wieviel Quadratzentimeter enthält die Querschnittsfläche des Pfeilers?

10. Eine Verstrebung, die zur Versteifung eines Krangerüstes dient, hat einen quadratischen Querschnitt mit 14 mm Seitenlänge. Mit welcher Kraft darf die Strebe belastet werden, wenn die zulässige Belastung 7 kp auf 1 mm² Querschnitt beträgt?

11. Eine E-Lok besitzt eine Zugkraft von 30 t. Welche Abmessungen muß der quadratische Querschnitt des Zughakens besitzen, wenn 1 mm² Zughakenwerkstoff 8 kp bei 6facher Sicherheit aufnimmt?

12. Berechne die Größen der Scherfläche für folgende Bleche (Maße in mm):

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Breite	480	550	175	380	225	405	530
Stärke	2,5	0,52	0,22	1,13	0,44	0,2	2,25

13. Berechne folgende Winkelstahlquerschnitte (Maße in mm; vgl. Abb. 129):

	a	b	d
1.	20	20	3
2.	35	35	4
3.	55	55	6
4.	75	75	12
5.	65	100	7
6.	100	150	14
7.	30	60	7
8.	65	130	12

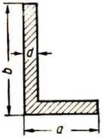


Abb. 129. Querschnitt von Winkelstahl

14. Die Giebelflächen eines Hauses, das bis zum Dachrand 6,6 m und bis zum Dachfirst 10,8 m hoch ist, sollen von 3 Maurern geputzt werden. Wieviel m² Putzfläche muß jeder Maurer schaffen, wenn die Breite des Hauses 9,2 m beträgt?

15. Der Fußboden einer Theaterbühne hat die Form eines Trapezes. Die vordere Breite ist 10,5 m, die hintere 8,3 m. Wieviel m² sind zu dielen, wenn die Bühne 9,2 m tief ist?

16. Es gilt, in unseren VE-Betrieben sparsam mit Material und Werkzeugen umzugehen. Deshalb muß jede Arbeit vor Beginn von dem Facharbeiter sorgsam durchdacht und sorgfältig vorbereitet werden. Wie kann man in folgender Aufgabe Material und Arbeitszeit durch gute Anordnung einsparen?
Aus einem Stahlblech 700 mm · 1200 mm · 2 mm sind gleichseitige Dreiecke auszuschneiden, die als Warnschilder verwendet werden sollen. Die Seitenlänge eines Dreiecks beträgt 200 mm. Wieviel Dreiecke erhält man bei günstigster Anordnung? Wieviel Prozent beträgt der Verlust?

17. Berechne folgende **I**-Stahlquerschnitte (Maße in mm; vgl. Abb. 131):

	h	*b*	*d*	*t*
1.	550	200	19	30
2.	120	120	7	11
3.	400	300	14	26
4.	200	200	6	15

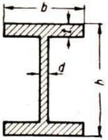


Abb. 131. Querschnitt von I-Stahl

18. Für das in Abb. 132 dargestellte Stanzstück ist die Fläche zu errechnen.

19. Bei einem Schwungrad ist der Kranz mit der Nabe durch eine massive Scheibe verbunden. Welchen Flächeninhalt hat der in Abb. 133 schraffierte Querschnitt (oberhalb der Welle) für die angegebenen Abmessungen?

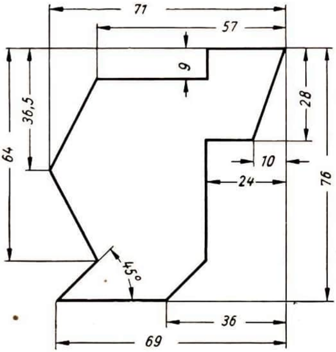


Abb. 132. Stanzstück; zu Aufg. 15

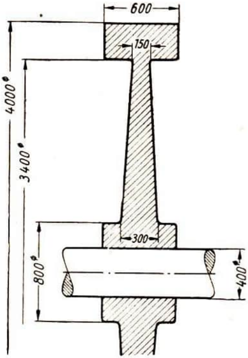


Abb. 133. Querschnitt eines Schwungrades

20. Die Grenzen eines Grundstücks bilden das Viereck $ABCD$ (Abb. 134). Seine Diagonale AC ist 153,7 m, das von B auf AC gefällte Lot BB' ist 47,2 m, das von D auf AC gefällte Lot DD' 63,5 m lang. Wie groß ist der Flächeninhalt des Grundstücks?

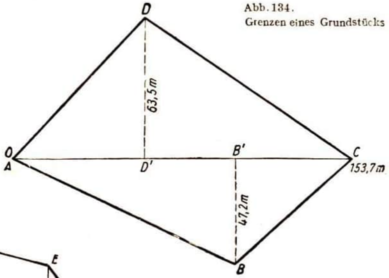


Abb. 134.
Grenzen eines Grundstücks

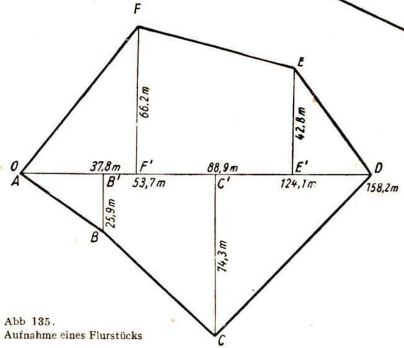


Abb 135.
Aufnahme eines Flurstücks

21. Die Abb. 135 ist der Lageplan von 6 Feldern kleinbäuerlicher Betriebe. Durch Zusammenschluß zu einer LPG konnte der bestehende Feldrain von 0,5 m Breite mitgepflügt werden. Wie groß ist der Flächeninhalt des ganzen Feldes?

4. Der Lehrsatz des Pythagoras

Rechtwinklige Dreiecke werden in der technischen Praxis vielfach verwendet. Der Maurer setzt aus Meßlatten bestimmter Längen ein rechtwinkliges Dreieck zusammen und prüft damit rechte Winkel (Abb. 136). Die besonderen Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke waren schon im Altertum bekannt. Wahrscheinlich benutzten bereits die alten Ägypter fast 2000 Jahre vor Anfang unserer Zeitrech-

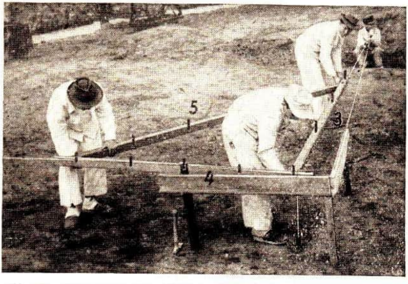


Abb. 136. Prüfen eines rechten Winkels mit Meßlatten, deren Längen sich wie 3 : 4 : 5 verhalten

nung bei Erd- und Bauarbeiten eine in 12 gleiche Abschnitte unterteilte Schnur zum Abstecken rechter Winkel.

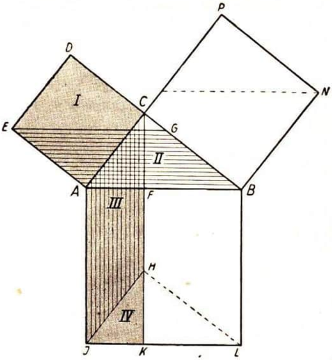


Abb. 137. Beziehungen am Kathetenquadrat

a) Das Kathetenquadrat

In Abb. 137 ist $ACDE$ (I) ein Quadrat, dessen Seite AC eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist. Durch den Eckpunkt E ist die Parallele zur Hypotenuse AB gezogen, die BC in G schneidet. $ABGE$ (II) ist als Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten ein Parallelogramm (waagerecht schraffiert).

Da AE als gemeinsame Grundlinie g, AC als zugehörige Höhe h für I und II betrachtet werden können, sind beide Figuren entsprechend der Inhaltsformel $F = g \cdot h$ flächengleich.

Dreht man II mit A als Drehpunkt so um 90°, daß sich AE mit AC deckt, so kommt AB auf die Seite AJ des über der Hypotenuse gezeichneten Quadrates zu liegen, EG als CH auf das von C auf AB gefällte Lot, das AB in F und die Quadratseite JL in K schneidet. Das schraffierte Parallelogramm geht aus der Lage II in die Lage III über. Das Parallelogramm III hat mit dem Rechteck $AJKF$ (IV) die Grundlinie $g = AJ$ gemeinsam; $h = AF$ kann als zugehörige Höhe für beide angesehen werden. Daher sind III und IV entsprechend der Inhaltsformel $F = g \cdot h$ flächengleiche Figuren.

Aus $\mathrm{I} = \mathrm{II}$, $\mathrm{II} = \mathrm{III}$, $\mathrm{III} = \mathrm{IV}$ folgt

$$\mathrm{I} = \mathrm{IV}.$$

Für $AC = b$, $AB = AJ = c$, $AF = q$ ergibt sich

$$b^2 = q \cdot c\,.$$

Die entsprechenden Überlegungen ergeben für das mit der Kathete BC gezeichnete Quadrat $BNPC$

$$BNPC = FKLB, \quad \text{also für} \quad BC = a \quad \text{und} \quad BF = p$$

$$a^2 = p \cdot c\,.$$

Beide Fälle sind in dem **Satz des Euklid** zusammengefaßt (Abb. 138 und 139):

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks hat denselben Flächeninhalt wie das aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse gebildete Rechteck.

$$\boxed{a^2 = p \cdot c} \qquad \boxed{b^2 = q \cdot c}$$

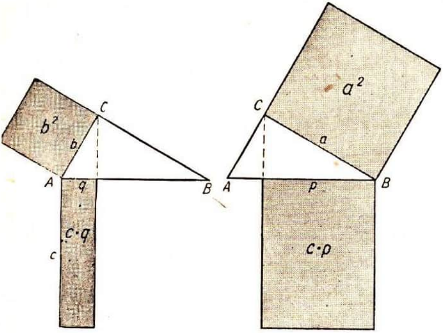


Abb. 138 und 139 .Satz des Euklid: $b^2=q\cdot c$; $a^2=p\cdot c$

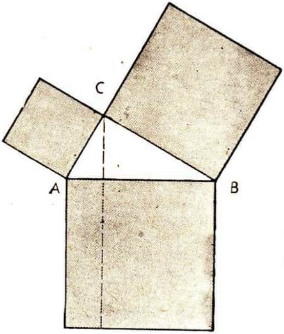


Abb. 140. Satz des Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

b) Das Hypotenusenquadrat

Bringt man die beiden Dreiecke ABC in Abb. 138 und 139 zur Deckung (Abb. 140), so erkennt man:

Während sich die beiden Hypotenusenabschnitte q und p zur Hypotenuse $AB = c$ zusammenfügen, bilden das rechte und linke Rechteck zusammen ein Quadrat, dessen Seite die Hypotenuse c ist. Das Entsprechende ergibt sich auch, wenn man die linken und die rechten Seiten der Gleichungen $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ jeweils addiert. Man erhält als Summe der linken Seiten $a^2 + b^2$, als Summe der rechten Seiten $pc + qc = c(p + q) = c \cdot c = c^2$.

Weil Gleiches zu Gleichem addiert wieder Gleiches ergibt, gilt die neue Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$. Dieser Zusammenhang zwischen den Katheten a und b und der Hypotenuse c rechtwinkliger Dreiecke wird **Satz des Pythagoras** genannt. In Worten:

Im rechtwinkligen Dreieck ergibt die Summe der Quadrate über den Katheten das Quadrat über der Hypotenuse.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Der Lehrsatz des Pythagoras wird vielfach angewendet. Er läßt sich auch in der Form $a^2 = c^2 - b^2$ schreiben und besagt dann:

Im rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat gleich der Differenz aus Hypotenusenquadrat und anderem Kathetenquadrat.

$$\boxed{a^2 = c^2 - b^2} \qquad \boxed{b^2 = c^2 - a^2}$$

1. Beispiel:
Es ist ein Quadrat zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt wie die Summe von drei gegebenen Quadraten mit den Seiten a, b und c hat.

Lösung (Abb. 141): Man zeichnet $P_1P_2 = a$, errichtet auf P_1P_2 in P_2 die Senkrechte $P_2P_3 = b$, errichtet auf P_1P_3 in P_3 die Senkrechte $P_3P_4 = c$ und zeichnet das Quadrat mit der Seite P_1P_4. In $\triangle P_1P_2P_3$ ist $a^2 + b^2 = \overline{P_1P_3}^2$, und in $\triangle P_1P_3P_4$ ist $\overline{P_1P_3}^2 + c^2 = \overline{P_1P_4}^2$, also

$$a^2 + b^2 + c^2 = \overline{P_1P_4}^2.$$

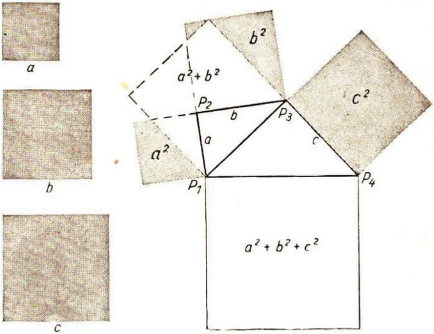


Abb. 141. Zu Beispiel 1

2. Beispiel:
Es ist ein Quadrat zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt wie die Differenz zweier gegebener Quadrate mit den Seiten a und b hat.

Lösung (Abb. 142): Man zeichnet $P_1P_3 = a$, trägt an P_1P_3 in P_3 $\sphericalangle P_1P_3X = 90°$ an und schlägt um P_1 mit dem Radius b den Kreis, der P_3X in P_2 schneidet. Da $\overline{P_2P_3}^2 + a^2 = b^2$, gilt $\overline{P_2P_3}^2 = b^2 - a^2$.

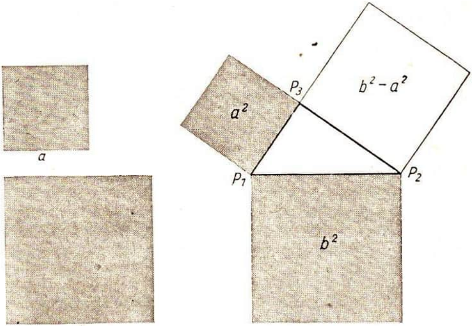


Abb. 142. Zu Beispiel 2

3. Beispiel:
Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist zu berechnen.

Lösung (Abb. 143): Der Fußpunkt D der Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC ist zugleich der Mittelpunkt der Dreieckseite AB. In dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADC gilt $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$ oder $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, d.h.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\,a^2}{4}, \quad h = \underline{\underline{\frac{a}{2}\sqrt{3}}}$$

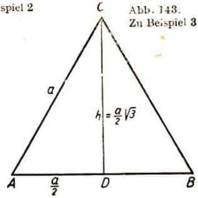


Abb. 143. Zu Beispiel 3

c) *Das Höhenquadrat*

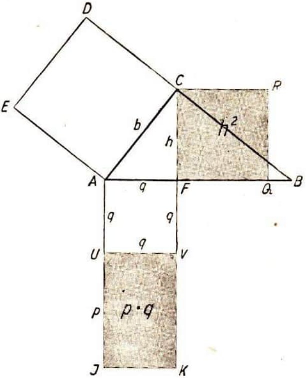


Abb. 144. Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Zu dem rechtwinkligen Dreieck ABC der Abb. 144 wird das Quadrat $ACDE$ über der Kathete $AC = b$ gezeichnet, sowie das Rechteck $AJKF$, dessen Seiten $AJ = c$ die Länge der Hypotenuse und $JK = q$ die Länge des Hypotenusenabschnitts AF haben. Ferner zeichnet man das Quadrat $FQRC$ über der Höhe $CF = h$. Auf der Rechteckseite AJ ist die Strecke $AU = q$, auf der Rechteckseite FK die Strecke $FV = q$ abgetragen; $AUVF$ ist demnach ein Quadrat mit der Seitenlänge q und $UJKV$ ein Rechteck mit den Seiten $UJ = p$ und $JK = q$.
Das Dreieck AFC hat bei F einen rechten Winkel. Seine Katheten haben die Längen h und q, seine Hypotenuse hat die Länge b.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt in diesem Dreieck

$$b^2 = h^2 + q^2,$$

nach dem Satz des Euklid gilt im Dreieck ABC

$$b^2 = c \cdot q\,.$$

Da $c = p + q$, ist $\quad b^2 = (p + q) \cdot q = p \cdot q + q^2$, mithin gilt

$$h^2 + q^2 = p \cdot q + q^2,$$

$$h^2 = p \cdot q\,.$$

h^2 gibt den Flächeninhalt des Quadrats an, dessen Seite die Länge h hat, $p \cdot q$ den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten p und q. Es gilt der Satz:

Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mit dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten flächengleich.

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

d) *Das Verwandeln eines Rechtecks in ein Quadrat*

Soll ein Rechteck in ein Quadrat verwandelt werden, so ist die Seite eines Quadrats so zu bestimmen, daß sein Flächeninhalt dem des gegebenen Rechtecks gleich ist.
Zur Konstruktion der Quadratseite kann der Satz des Euklid verwendet werden (Abb. 145). Ist a die größere Seite des gegebenen Rechtecks, b die kleinere, so hat man ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu zeichnen, in dem die Hypotenuse $AB = a$, ein Hypotenusenabschnitt $AD = b$ ist. Der Scheitel C des rechten Winkels entsteht als

Verwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat

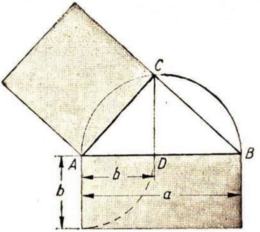


Abb. 145. . . . nach dem Satz des Euklid

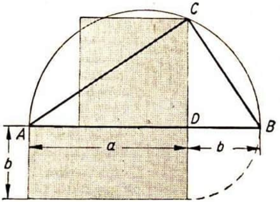


Abb. 146. . . . nach dem Höhensatz

Schnittpunkt der auf AB in D errichteten Senkrechten mit dem über AB geschlagenen Halbkreis. Die Kathete AC ist dann die verlangte Quadratseite.
Sie kann auch durch Anwendung des Höhensatzes konstruiert werden (Abb. 146). Wenn dabei $AD = a$ und $DB = b$ als Hypotenusenabschnitte gezeichnet werden, und C, wie oben beschrieben, konstruiert wird, so ergibt CD die gesuchte Quadratseite.

AUFGABEN

1. Der Querschnitt eines Quadratstahls beträgt 40 mm · 40 mm. Es ist die Querschnittsseite eines Quadratstahls

a) von doppelter, **b)** von halber Querschnittsfläche

zu berechnen und zu konstruieren.

2. Eine Raumdiagonale eines Quaders, der 12 cm lang, 4 cm breit und 3 cm hoch ist, soll berechnet werden.

3. Die Seitenlänge s eines Quadrates, das

a) den dreifachen, **b)** den fünffachen Flächeninhalt

eines gegebenen Quadrats mit der Seitenlänge a hat, ist auf verschiedene Arten zu konstruieren.

4. Auf der Drehbank wird ein spitzer Kegel gedreht, dessen Höhe 150 mm und dessen großer Durchmesser 100 mm beträgt. Wieviel mm lang ist der Weg, den der Drehmeißel zurücklegt?

5. Die Spitze eines kegelförmigen Daches soll 7,5 m über der Grundfläche liegen, die 5,4 m Durchmesser hat. Wie lang muß der Zimmerer die Dachsparren schneiden?

6. a) Bestimme den Anlauf x des Fräsers aus der Frästiefe a und dem Durchmesser D des Fräsers (Abb. 147)!
(Anleitung: x ist die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABC.)

b) Wie groß ist der Anlauf, wenn 5 mm tief gefräst wird und der Fräser einen Durchmesser von 120 mm hat?

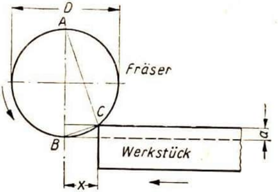


Abb. 147. Anlauf eines Fräsers

7. Nach Abb. 148 soll mit den Schenkeln einer Spezialschieblehre der nicht unmittelbar meßbare Durchmesser d einer Riemenscheibe bestimmt werden.

a) Zeige, daß Dreieck ABC rechtwinklig ist!

b) Zeige, daß BD und AD bekannt sind!

c) Berechne zuerst CD und dann $AC = d$!

8. Die Schenkelenden eines rechtwinklig gebogenen Abdeckbleches mit den Schenkellängen 200 mm und 150 mm sollen durch gerade Schienen miteinander verbunden werden. Auf welche Längen müssen die Schienen zugeschnitten werden, wenn die Verbindung durch Lichtbogenschweißen erfolgt?

9. Ein Pultdach hat 6 m lange Dachbalken und 7,50 m lange Sparren. Berechne die Dachhöhe (Abb. 149).

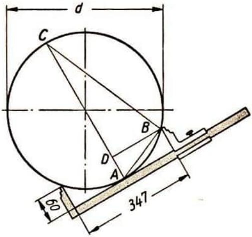


Abb. 148. Messen einer Riemenscheibe

10. Die Volkspolizei-Abteilung Feuerwehr verwendet zur Bekämpfung eines Brandes in 18,5 m Höhe eine Leiter von 20 m Länge. Wie weit steht die Leiter unten von der Wand ab?

11. Die Seite eines Quadrates ist zu konstruieren, das die Größe der Oberfläche eines Würfels von der Kantenlänge a hat.

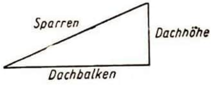


Abb. 149. Pultdach

12. Die Spannweite A_1A_2 eines Dachbinders (Abb. 150) beträgt 9,25 m. Er hat ein gleichseitiges und zwei stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel 3,25 m lang sind. Wie hoch über A_1A_2 liegen

a) die Punkte B_1 und B_2 des Untergurts?

b) der Punkt S am Dachfirst?

Wie lang sind

c) die Sparren A_1S und A_2S,

d) die Stützstreben nach den Mitten C_1 und C_2 der Sparren A_1S und A_2S?

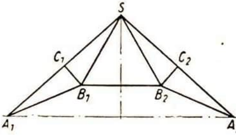


Abb. 150. Dachbinder

13. Ein Antennenmast soll in 15 m Höhe durch 4 gleichlange Drahtseile verankert werden. In der Erde bilden die Anker die 7 m vom Mast entfernten Ecken eines Quadrates. Wie lang ist ein Drahtseil, wenn der Dnrchhang nicht berücksichtigt wird?

5. Verhältnisgleichheit und Ähnlichkeit

a) Der Parallelensatz

Sind die Fundamentalpunkte eines Thermometers durch den Schmelzpunkt des Eises und den Siedepunkt des Wassers festgelegt, so kann der Fundamentalabstand in 100 Grade mit Hilfe einer Schar von Paralellen eingeteilt werden, die voneinander genügend kleine gleiche Entfernungen haben (Abb. 151). Das Thermometer wird dabei so auf die Parallelenschar gebracht, daß sein Nullpunkt 0 °C auf der mit 0 bezeichneten Parallelen, der Siedepunkt 100 °C auf der mit 100 bezeichneten liegt. Die Parallelen zwischen diesen teilen den Abstand von 0 °C bis 100 °C in 100 gleiche Abschnitte. Den geometrischen Sachverhalt zeigt Abb. 152.

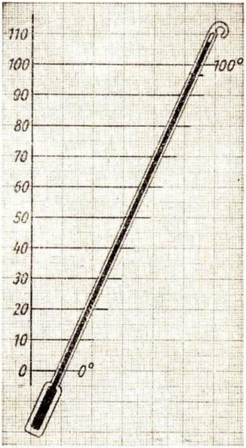


Abb. 151. Anfertigen einer Thermometerskala

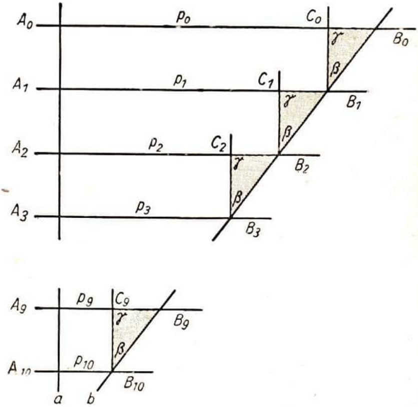


Abb. 152. Zum Beweis des Parallelensatzes

Auf einer Geraden a sind die Punkte A_0, A_1, ... A_{10} in gleichen Abständen abgetragen. Die durch diese Punkte zu a gezogenen Senkrechten p_0, p_1 . . . p_{10} sind parallele Geraden, die in gleichen Abständen verlaufen und die Gerade b in B_0, B_1, . . . B_{10} schneiden. Man zieht nun durch B_1, B_2, . . . B_{10} Parallelen zu a, die jeweils p_0 in C_0, p_1 in C_1, . . . p_9 in C_9 schneiden und dabei auf diesen Geraden senkrecht stehen. Es gilt $A_0A_1 = C_0B_1$, $A_1A_2 = C_1B_2$, . . . $A_9A_{10} = C_9B_{10}$, weil Gegenseiten von Rechtecken einander gleich sind.

Somit ist auch $C_0B_1 = C_1B_2 = \cdots = C_9B_{10}$. Außerdem sind in den grauen Dreiecken die mit γ bezeichneten Winkel alle einander gleich, weil jeder dieser Winkel als Nebenwinkel eines Rechteckswinkels 90° mißt.

Auch die mit β bezeichneten Winkel sind gleich groß, weil sie gleichliegende Winkel an Parallelen sind. Nach dem Kongruenzsatz WSW folgt daraus, daß die grauen rechtwinkligen Dreiecke $C_0B_0B_1$, $C_1B_1B_2$, . . . $C_9B_9B_{10}$ kongruent sind. Insbesondere sind ihre Hypotenusen als homologe Seiten kongruenter Dreiecke einander gleich.

$$B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \cdots = B_{n-1}B_n$$

Das Ergebnis dieser Überlegung kann in dem Satz ausgesprochen werden:

Schneidet eine Schar von Parallelen, die voneinander gleiche Abstände haben, eine beliebige gerade Linie, so entstehen auf dieser zwischen benachbarten Parallelen gleiche Abschnitte.

Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt:

Zeichnet man durch Punkte einer Geraden, die voneinander gleich weit entfernt sind, in beliebiger Richtung parallele gerade Linien, so haben die benachbarten Parallelen gleiche Abstände. (Führe den Beweis nach dem vorangehenden Vorbild durch.)

Den Parallelensatz verwendet man z. B. zum Lösen der folgenden

Aufgabe:

Die gegebene Strecke PQ ist in 5 gleiche Teile zu teilen.

Lösung (Abb. 153): Man trägt auf einem Strahl PX 5 gleiche Strecken $PA_1, A_1A_2, \ldots, A_4A_5$ ab und zieht durch $A_1, A_2, \ldots A_4$ zu A_5Q die Parallelen. Sie schneiden PQ in T_1, T_2, T_3, T_4.

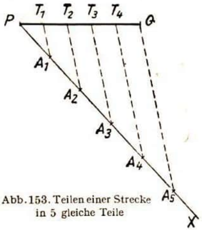


Abb. 153. Teilen einer Strecke in 5 gleiche Teile

b) *Strahlensätze*

Werden zwei gerade Linien a und b, die einander in einem Punkt S schneiden, von den Parallelen p_1, p_2 und p_3 geschnitten, die voneinander nicht gleiche Abstände haben, so entstehen sowohl auf den Geraden als auch auf den Parallelen Strecken verschiedener Länge (Abb. 154). Die zwischen S und derselben Parallelen oder zwischen denselben zwei Parallelen liegenden Strecken werden **einander entsprechende Abschnitte der Geraden** genannt, z.B. A_1S und B_1S, A_2S und B_2S oder A_3S und B_3S, auch A_1A_2 und B_1B_2, A_1A_3 und B_1B_3 oder A_2A_3 und B_2B_3. Abschnitte der Geraden a sind den entsprechenden Abschnitten der Geraden b **proportional**, d.h., es verhält sich z. B. A_1A_2 zu A_2S wie B_1B_2 zu B_2S. Kann nämlich bei zwei Abschnitten der einen Geraden, z. B. A_1A_2 und A_2S dieselbe Strecke auf A_1A_2 m-mal, auf A_2S n-mal abgetragen werden, so entstehen auf der Geraden Teilpunkte, die voneinander gleich weit entfernt sind. Die durch diese Teilpunkte zu p_1, p_2 oder p_3 gezogenen Parallelen zerlegen die entsprechenden Abschnitte B_1B_2 und B_2S der anderen Geraden ebenfalls in m bzw. n gleiche Teile. Somit gilt

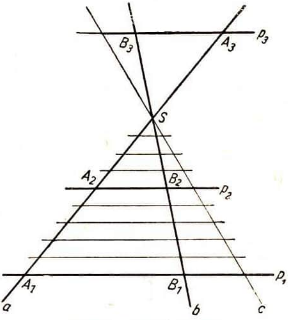


Abb. 154. Zum 1. Strahlensatz

$$A_1A_2 : A_2S = m : n \quad \text{und} \quad B_1B_2 : B_2S = m : n, \quad \text{also}$$

$$A_1A_2 : A_2S = B_1B_2 : B_2S.$$

Haben A_1A_2 und A_2S kein gemeinsames Maß, so kann mit beliebiger Annäherung eine Strecke bestimmt werden, die das gemeinsame Maß ersetzt. Dann ist auch für diesen Fall die Gültigkeit der Proportion gerechtfertigt.

Beispiele für weitere Proportionen aus Abschnitten der Geraden:

$$A_1S : A_2S = B_1S : B_2S, \quad A_1S : A_3S = B_1S : B_3S, \quad A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3.$$

Das Ergebnis wird zusammengefaßt im

1. Strahlensatz

> **Werden gerade Linien, die einander in einem Punkt schneiden, von Parallelen geschnitten, so verhalten sich zwei Abschnitte auf einer Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf jeder der anderen Geraden.**

Auch die zwischen den Geraden a und b entstehenden Abschnitte A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 können zum Bilden von Proportionen herangezogen werden. Dabei entspricht der zwischen zwei Geraden liegende Parallelenabschnitt dem Abschnitt auf jeder der Geraden, der **von S bis zum Schnittpunkt** mit der betreffenden Parallelen reicht.

Wird etwa durch B_2 die Parallele zu a gezogen, die A_1B_1 in C schneidet, so entsteht das Parallelogramm $A_1CB_2A_2$, in dem $A_1C = A_2B_2$ ist (Abb. 155).

Die beiden Geraden B_1A_1 und B_1S werden von den Parallelen A_1S und CB_2 in A_1 und C bzw. S und B_2 geschnitten. Somit ist $SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_1C$. Nun ist $A_1C = A_2B_2$, man erhält also $SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2$. Da $SB_1 : SB_2 = SA_1 : SA_2$ ist, gilt auch $SA_1 : SA_2 = A_1B_1 : A_2B_2$. Auf dieselbe Weise kann die Gültigkeit folgender Proportionen gezeigt werden:

$$SA_1 : SA_3 = A_1B_1 : A_3B_3,$$
$$SB_1 : SB_3 = A_1B_1 : A_3B_3,$$
$$SA_2 : SA_3 = A_2B_2 : A_3B_3,$$
$$SB_2 : SB_3 = A_2B_2 : A_3B_3.$$

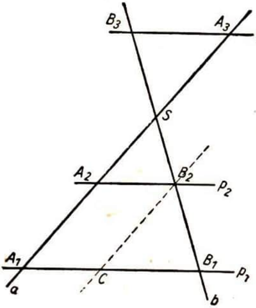


Abb. 155. Zum 2. Strahlensatz

Die Zusammenfassung ergibt den

2. Strahlensatz

> **Werden gerade Linien, die einander in einem Punkt S schneiden, von Parallelen geschnitten, so verhalten sich zwei zwischen denselben Geraden liegende Parallelenabschnitte wie die ihnen entsprechenden von S aus gemessenen Abschnitte jeder der Geraden.**

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Wenn angenommen wird, daß in Abb. 154 die Punkte A_1 und A_2 auf a und die Punkte B_1 und B_2 auf b so zu S gleichartig liegend gezeichnet sind, daß $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2$ ist, so sind die Verbindungsstrecken A_1B_1 und A_2B_2 parallel. Wäre nämlich A_2B_2 nicht zu A_1B_1 parallel, so könnte durch A_2 zu A_1B_1 die Parallele gezeichnet werden, die SB_1 in einem Punkt B_2' neben B_2 schneiden würde. Dann würde außer der Proportion $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2$ noch die Proportion $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2'$ bestehen. Ein Vergleich beider Proportionen lehrt, daß $SB_2 = SB_2'$ sein muß, B_2' also mit B_2 zusammenfällt.

Somit ergibt sich der

3. Strahlensatz

Werden gerade Linien, die einander in einem Punkt schneiden, von anderen Geraden so geschnitten, daß je zwei Abschnitte auf einer geschnittenen Geraden sich wie die entsprechenden Abschnitte auf einer anderen geschnittenen Geraden verhalten, so sind die schneidenden Geraden einander parallel, vorausgesetzt, daß die entsprechenden Abschnitte zum Schnittpunkt gleichartig liegen.

Werden durch den Schnittpunkt S der Geraden a und b andere Gerade gelegt, von denen die Parallelen geschnitten werden (in Abb. 154 die Gerade c), so entstehen durch die Schnittpunkte weitere Abschnitte. Einander entsprechende Abschnitte sind proportional. Die für die Geraden a und b durchgeführten Überlegungen gelten bei jedem durch S gehenden Geradenpaar, das die Parallelen p_1, p_2 und p_3 schneidet. Die Strahlensätze werden z. B. angewendet beim Lösen der folgenden

Aufgabe:

Zu drei gegebenen Strecken a, b und c ist die vierte Proportionale d zu konstruieren.

Lösung (Abb. 156): Man trägt auf dem einen Schenkel SX eines beliebigen Winkels XSY die Strecken $SA_1 = a$ und $A_1A_2 = b$, auf dem anderen Schenkel SY die Strecke $SB_1 = c$ ab und zieht zu A_1B_1 die Parallele durch A_2, die SY in B_2 schneidet. Dann ist $B_1B_2 = d$.

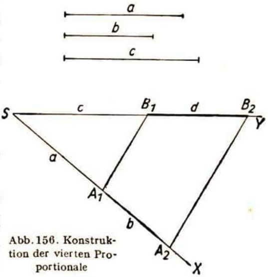


Abb. 156. Konstruktion der vierten Proportionale

Teilung einer Strecke

Ein zwischen den Endpunkten P und Q einer Strecke liegender Punkt T_i zerlegt die Strecke PQ in die Teilstrecken PT_i und QT_i (Abb. 157a). Der Quotient $\frac{PT_i}{QT_i}$ ist das **Teilungsverhältnis** der Strecke PQ für den Punkt T_i. Fällt T_i mit der Mitte M der Strecke PQ zusammen, so nimmt das Teilungsverhältnis den Wert 1 an, weil dann $PM = QM$ ist (Abb. 157b). Wird PQ durch die Punkte T_1, T_2, T_3, T_4 in fünf gleiche Teile geteilt, so gilt

$$\frac{PT_1}{QT_1} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{PT_2}{QT_2} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{PT_3}{QT_3} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{PT_4}{QT_4} = \frac{4}{1} \quad \text{(Abb. 157c).}$$

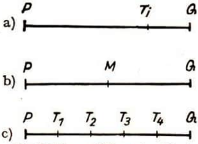


Abb. 157. Innere Teilung einer Strecke

Das Teilungsverhältnis nimmt für Punkte zwischen P und der Mitte M der Strecke PQ Werte an, die kleiner als 1 sind, es ist also ein echter Bruch. Für Punkte zwischen Q und M wird es größer als 1, ist also ein unechter Bruch (Abb. 158). Zu **jedem** Wert des Quotienten $\frac{PT_i}{QT_i}$ gehört zwischen P und Q ein Teilungspunkt T_i.

Bildet man für einen Punkt T_a, der auf der Geraden PQ außerhalb der Strecke PQ liegt, den Quotienten

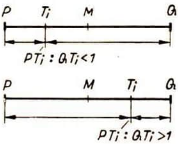


Abb. 158. Jeder Lage des Teilungspunktes entspricht ein bestimmter Wert des Teilungsverhältnisses

$\frac{PT_a}{QT_a}$, so ergibt sich ein echter Bruch, wenn T_a auf der Verlängerung von PQ über P hinaus liegt. Zum Beispiel ist in Abb. 159a $\frac{PT_a}{QT_a} = \frac{2}{7}$. Liegt T_a dagegen auf der Verlängerung von PQ über Q hinaus, so wird $\frac{PT_a}{QT_a}$ ein unechter Bruch, in Abb. 159b der Wert $\frac{8}{3}$. Auch in dem Gebiet der Verlängerungen der Strecke PQ wird jedem Wert des Quotienten $\frac{PT_a}{QT_a}$ ein bestimmter Punkt T_a zugeordnet. Der Punkt T_a wird deshalb auch Teilungspunkt der Strecke PQ genannt, und zwar **äußerer Teilungspunkt T_a** im Unterschied zu dem **inneren Teilungspunkt T_i**.

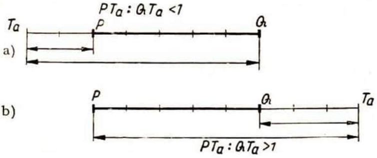


Abb. 159. Äußere Teilung einer Strecke

Jedem Wert des Teilungsverhältnisses entsprechen zwei Teilungspunkte; der eine teilt die Strecke innen, der andere außen in dem angegebenen Verhältnis.

Konstruiert man die Teilungspunkte einer gegebenen Strecke für ein vorgeschriebenes Teilungsverhältnis, so verwendet man die Strahlensätze.

Beispiel:

Eine gegebene Strecke PQ ist innen und außen im Verhältnis $m : n = 5 : 2$ zu teilen.

Lösung (Abb. 160): Man zeichnet durch P und Q parallele Gerade in beliebiger Richtung und trägt auf ihnen $PC = PD = m$ (5 gleiche beliebige Teilstrecken) und $QE = n$ (2 Teilstrecken derselben Größe) ab. Die Gerade DE schneidet PQ in J, die Gerade CE die Verlängerung von PQ in A. J teilt PQ innen, A teilt PQ außen im Verhältnis $m : n = 5 : 2$ von P aus. J ist der innere, A der äußere Teilungspunkt.

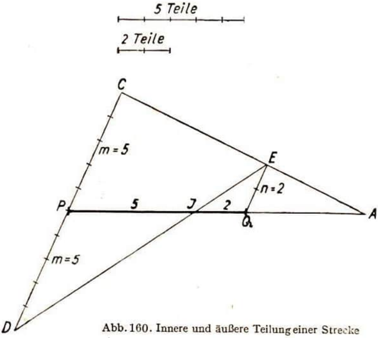


Abb. 160. Innere und äußere Teilung einer Strecke

c) Ähnlichkeit

Die Ausfräsungen am Rand und die Öffnungen verschiedener Formen und Weiten im Inneren eines Fahrradschraubenschlüssels passen zu den zahlreichen Köpfen und Muttern der Halteschrauben, die zum Aufbau eines Fahrrades nötig sind. Die verschieden großen Sechskantlöcher haben alle die gleiche Form regelmäßiger Sechsecke (Abb. 161). Sie sind einander ähnlich.

Geometrische Figuren werden ähnlich genannt, wenn sie die gleiche Form haben. Ihre Größe kann verschieden sein.

Ähnliche geometrische Figuren von gleicher Größe sind kongruent. Ähnlichkeit besteht beispielsweise zwischen allen gleichseitigen Dreiecken sowie zwischen allen Quadraten oder allen regelmäßigen Sechsecken verschiedener Größe. Auch alle Kreise sind einander ähnlich.

Ähnlichkeitslage

In Abb. **162** a bis d sind jedesmal zwei Quadrate so angeordnet, daß die Verbindungslinien einander entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen. Die beiden Quadrate liegen bei Abb. **162** a, b und c

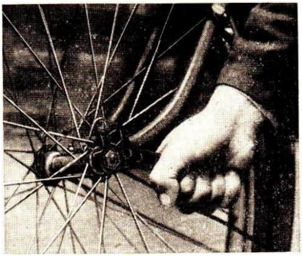
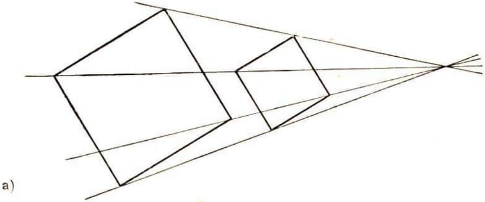
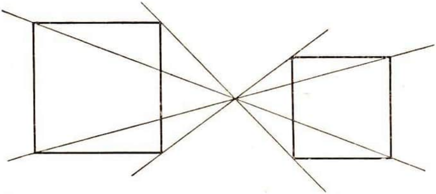


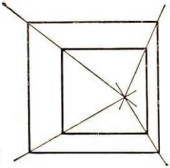
Abb. 161. Ähnliche Sechsecke im Fahrradschlüssel



a)

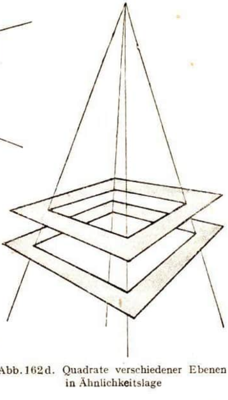


b)



c)

Abb. 162 a bis c. Quadrate einer Ebene in Ähnlichkeitslage



d)

Abb. 162 d. Quadrate verschiedener Ebenen in Ähnlichkeitslage in einer Zeichenebene, bei Abb. 162 d in verschiedenen Zeichenebenen. Man bezeichnet in allen vier Fällen die Lage der Quadrate zueinander als *Ähnlichkeitslage.* Den Schnittpunkt der geraden Linien, die entsprechende Eckpunkte verbinden, nennt man den **Ähnlichkeitspunkt** beider Quadrate, die geraden Linien selbst **Ähnlichkeitsstrahlen.** Man erkennt, daß die entsprechenden Seiten der ähnlich liegenden Quadrate parallel verlaufen. Bei der Anordnung im Raum sind die Ebenen, in denen die Quadrate liegen, parallel zueinander.

In entsprechender Weise lassen sich alle regelmäßigen Vielecke gleicher Eckenzahl in Ähnlichkeitslage bringen.

Um zu einem beliebigen Viereck $ABCD$ ein ähnliches in Ähnlichkeitslage zu erhalten, zeichnet man von einem beliebigen Ähnlichkeitspunkt S aus nach den Ecken Ähnlichkeitsstrahlen (Abb. 163), nimmt auf einem, z. B. SA, den Punkt A_1 an und zieht durch A_1 die Parallele zu AB bis zum Schnittpunkt B_1 mit SB, durch B_1 die Parallele zu BC bis zum Schnittpunkt C_1 mit SC, durch C_1 die Parallele zu CD bis zum Schnittpunkt D_1 mit SD und verbindet D_1 mit A_1. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$SA : SA_1 = SB : SB_1$$
$$SB : SB_1 = SC : SC_1$$
$$SC : SC_1 = SD : SD_1$$

Folglich gilt auch $SD : SD_1 = SA : SA_1$,

und nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes ist $DA \parallel D_1A_1$.

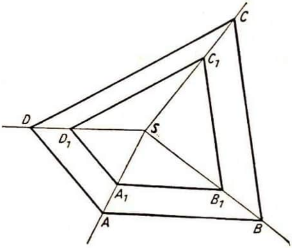


Abb. 163. Zwei ähnliche Vierecke in Ähnlichkeitslage

Für die beiden Vierecke in Ähnlichkeitslage ergeben sich daraus folgende Eigenschaften:

1. $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DA : D_1A_1$ (2. Strahlensatz), d. h., die sich entsprechenden Seiten stehen alle in dem gleichen Verhältnis.
2. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$
   $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$
   $\sphericalangle CDA = \sphericalangle C_1D_1A_1$
   $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D_1A_1B_1$ (Winkel mit paarweise parallelen und gleichgerichteten Schenkeln)
   d. h., die sich entsprechenden Winkel sind gleich.

Die Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ werden auch ähnliche Vierecke in Ähnlichkeitslage genannt. Jedes dem Viereck $A_1B_1C_1D_1$ kongruente Viereck in anderer Lage ist dem Viereck $ABCD$ ebenfalls ähnlich.

Wird die entsprechende Überlegung mit einem Vieleck beliebiger Eckenzahl durchgeführt, so ergibt sich allgemein:

Ähnliche Vielecke stimmen im Verhältnis der einander entsprechenden Seiten überein, sie haben gleiche Winkel zwischen einander entsprechenden Seiten.

Umgekehrt gilt der Satz:

Vielecke, bei denen einander entsprechende Seiten das gleiche Verhältnis haben und gleiche Winkel einschließen, sind einander ähnlich; sie können in Ähnlichkeitslage gebracht werden.

Um die Ähnlichkeit zweier Figuren kurz zum Ausdruck zu bringen, schreibt man zwischen ihre Bezeichnungen ein liegendes s (Anfangsbuchstabe von lat. *similis* „ähnlich"). So wird $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ gelesen „Dreieck $A_1B_1C_1$ ähnlich Dreieck $A_2B_2C_2$".

Ähnliche Dreiecke

Schneidet die Parallele zur Seite AB eines Dreiecks ABC die Seite AC in A_1, die Seite BC in B_1, so befinden sich $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C$ vom Ähnlichkeitspunkt C aus in Ähnlichkeitslage.

Es ist
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C,$$
und es gelten die Beziehungen
$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1,$$
$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

Umgekehrt sind zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in beliebiger Lage ähnlich, wenn zwei von diesen sechs Bedingungen erfüllt sind. Es sind dabei folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1. Die beiden Dreiecke stimmen in zwei Seitenverhältnissen überein, z.B. $a : b = a_1 : b_1$ und $a : c = a_1 : c_1$ (Abb. 164a).

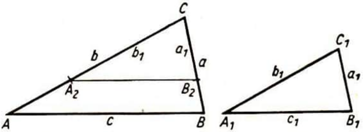


Abb. 164a. Ähnliche Dreiecke ($a : b = a_1 : b_1$, $a : c = a_1 : c_1$)

Um zu beweisen, daß $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ist, trägt man von C aus auf CA die Strecke $CA_2 = b_1$, auf CB die Strecke $CB_2 = a_1$ ab und verbindet A_2 mit B_2. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt aus $a : b = a_1 : b_1$, daß $AB \parallel A_2B_2$. Es ergibt sich somit $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C$.

Ferner ist $A_2B_2 : c = a_1 : a$ oder $A_2B_2 = \frac{a_1 \cdot c}{a}$ und $c_1 : c = a_1 : a$ nach Voraussetzung oder $c_1 = \frac{a_1 \cdot c}{a}$, d.h. $A_2B_2 = c_1$.

Es ist also $\triangle A_2B_2C \cong \triangle A_1B_1C_1$ und $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

2. Die beiden Dreiecke stimmen im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, z.B. $a : b = a_1 : b_1$, $\gamma = \gamma_1$ (Abb. 164b).

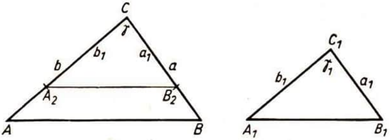


Abb. 164b. Ähnliche Dreiecke ($a : b = a_1 : b_1$, $\gamma = \gamma_1$)

Da $\gamma = \gamma_1$ ist, läßt sich $\triangle A_1B_1C_1$ so auf $\triangle ABC$ legen, daß C_1 auf C, C_1A_1 als CA_2 auf CA, C_1B_1 als CB_2 auf CB zu liegen kommt. Wegen $CB_2 : CA_2 = CB : CA$ ist $A_2B_2 \parallel AB$, d.h. $\triangle A_2B_2C \sim \triangle ABC$, also auch $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

3. Die beiden Dreiecke stimmen im Verhältnis zweier Seiten und dem Winkel überein, der der größeren Seite gegenüberliegt, z.B. $a : c = a_1 : c_1$, $\gamma = \gamma_1$ und $c > a$ (Abb. 164c).

Da $\gamma = \gamma_1$ ist, läßt sich $\triangle A_1B_1C_1$ so auf $\triangle ABC$ legen, daß C_1 auf C, $CB_2 = a_1$ auf CB und A_2 so auf CA liegt, daß $A_2B_2 = c_1$ wird. Es gilt dann $CB : BA = CB_2 : B_2A_2$ und, da A_2 mit A auf CA gleichartig liegt, $AB \parallel A_2B_2$ (Umkehrung des 1. Strahlensatzes).

Folglich ist $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C$, also auch $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

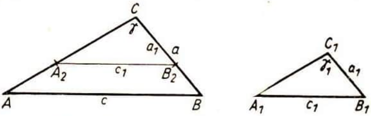


Abb. 164c. Ähnliche Dreiecke ($a : c = a_1 : c_1$, $\gamma = \gamma_1$, $c > a$)

4. Die beiden Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein, z. B. $\alpha = \alpha_1$, $\gamma = \gamma_1$ (Abb. 164 d).

Da $\gamma = \gamma_1$ ist, läßt sich $\triangle A_1B_1C_1$ so auf $\triangle ABC$ legen, daß C_1 auf C, A_1 nach A_2 auf CA und B_1 nach B_2 auf CB zu liegen kommt. Dabei ist $\sphericalangle CA_2B_2 = \alpha_1$ und wegen $\alpha = \alpha_1$ auch $\sphericalangle CA_2B_2 = \sphericalangle CAB$, d. h. $A_2B_2 \parallel AB$ (gleiche Stufenwinkel).

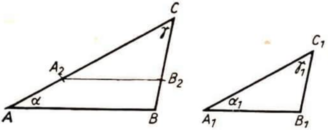


Abb. 164d. Ähnliche Dreiecke ($\alpha = \alpha_1$, $\gamma = \gamma_1$)

Somit gilt $\triangle A_2B_2C \sim \triangle ABC$ und wegen $\triangle A_2B_2C \cong \triangle A_1B_1C_1$
auch $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

So ergeben sich für Dreiecke die **vier Ähnlichkeitssätze:**

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen

1. in zwei Seitenverhältnissen,

2. im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,

3. im Verhältnis zweier Seiten und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt,

4. in zwei Winkeln.

d) Proportionen im Dreieck

Mit Hilfe der Strahlen- und Ähnlichkeitssätze lassen sich weitere Gesetzmäßigkeiten am Dreieck ermitteln.

Mittelparallele

Ist im Dreieck ABC der Mittelpunkt der Seite AC mit D, der Mittelpunkt der Seite BC mit E bezeichnet (Abb. 165), so gilt $CD : CA = 1 : 2$ und $CE : CB = 1 : 2$. Es sind also die Verhältnisse der Abschnitte einander gleich, die durch die Geraden DE und AB auf den Geraden CA und CB entstehen. Demnach sind DE und AB parallele gerade Linien, und für die auf ihnen entstehenden Abschnitte gilt

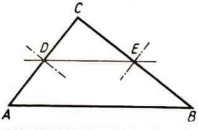


Abb. 165. Mittelparallele im Dreieck

$$DE : AB = 1 : 2 \quad \text{(Umkehrung des 2. Strahlensatzes).}$$

Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreieckseiten ist zur dritten Seite parallel und halb so groß wie diese; sie wird Mittelparallele genannt.

Schwerlinie

Die Strecke, die den Mittelpunkt einer Dreiecksseite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet, heißt **Schwerlinie** oder **Mitteltransversale** des Dreiecks (sie verläuft durch den „Schwerpunkt" der Dreieckfläche).

In Abb. 166 sind die beiden Schwerlinien AE und BD eingezeichnet. Sie schneiden einander in dem Schwerpunkt S. AE und BD bilden ein Geradenpaar, das durch die Parallelen AB und DE geschnitten wird. Demnach gelten die Proportionen $AS:ES = AB:DE$ und $BS:DS = AB:DE$. Nun ist $AB:DE = 2:1$, also auch

$$AS:ES = 2:1 \quad \text{und} \quad BS:DS = 2:1\,.$$

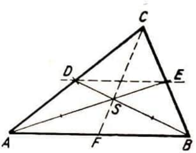


Abb. 166. Die drei Schwerlinien eines Dreiecks gehen durch S

Wird die Mitte von AB mit F bezeichnet, so ergibt dieselbe Überlegung, daß die Schwerlinien BD und CF von ihrem Schnittpunkt im Verhältnis $2:1$ geteilt werden. Dieser Schnittpunkt fällt auf S, da nur ein Teilpunkt die Strecke BD von der Ecke B aus in dem Verhältnis $2:1$ teilt.

Die drei Schwerlinien eines Dreiecks gehen durch einen gemeinsamen Punkt. Dieser teilt jede Schwerlinie vom Eckpunkt aus im Verhältnis 2:1.

Winkelhalbierende

Im Dreieck ABC der Abb. 167 sei CD die Halbierungslinie des Winkels $ACB = \gamma$. Die zu CD durch B gezogene Parallele schneidet die Verlängerung von AC über C hinaus in E. Es gilt die Proportion

$$AD:DB = AC:CE\,.$$

Nun ist $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CEB = \frac{1}{2}\gamma$ (Stufenwinkel an Parallelen)

und $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EBC = \frac{1}{2}\gamma$ (Wechselwinkel an Parallelen),

folglich $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BEC$

und $BC = CE.$

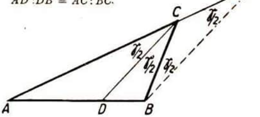
(Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber, vgl. S. 156, Satz 3).

Wird in der oben angegebenen Proportion CE durch BC ersetzt, so erhält man

$$AD:DB = AC:BC\,.$$

Die Halbierungslinie eines Innenwinkels teilt die ihm gegenüberliegende Seite eines Dreiecks innen im Verhältnis der den Winkel einschließenden Seiten.

Abb. 167. Der Innenwinkel bei C wird halbiert. Es ist $AD:DB = AC:BC$.



Ist zur Halbierungslinie CG des Außenwinkels $BCX = \delta$ (Abb. 168) die Parallele durch B gezogen, die AC in H schneidet, so ergibt sich $\sphericalangle CBH = \sphericalangle CHB = \frac{1}{2}\delta$ und $HC = BC$. Es gilt $AG:BG = AC:HC$, somit auch

$AG:GB = AC:BC$ (Abb. 168).

Die Halbierungslinie eines Außenwinkels teilt die ihm gegenüberliegende Seite eines Dreiecks außen im Verhältnis der den zugehörigen Innenwinkel einschließenden Seiten.

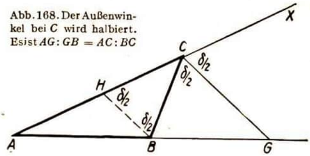


Abb. 168. Der Außenwinkel bei C wird halbiert. Es ist $AG:GB = AC:BC$

Proportionen im rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten $AC = b$, $BC = a$ und der Hypotenuse $AB = c$ wird von C auf AB das Lot $CD = h$ gefällt. Es zerlegt das Dreieck ABC in die bei D rechtwinkligen Dreiecke ADC und CDB (Abb. 169). Die Dreiecke ABC, ACD und CBD sind einander ähnlich, weil sie in den Winkeln übereinstimmen. Sie enthalten alle einen rechten Winkel. Ferner ist $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC = \beta$, weil beide vom Winkel BCD zu 90° ergänzt werden. Der Winkel β kommt also in allen drei Dreiecken vor, somit stimmen sie auch im dritten Winkel überein.

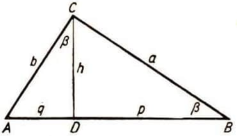


Abb. 169. Proportionen im rechtwinkligen Dreieck. Es ist $q:h = h:p$ und $q:b = b:c$

Für die beiden Teildreiecke ADC und BDC gilt daher die Proportion

$$AD:DC = CD:DB.$$

In Worten: Die kleinere Kathete verhält sich zur größeren Kathete in dem einen Dreieck wie die kleinere Kathete zur größeren Kathete im anderen Dreieck.

Bezeichnet man die Hypotenusenabschnitte AD und BD mit q und p, so erhält man

$$\boxed{q:h = h:p} \quad \text{oder} \quad h^2 = p \cdot q.$$

Das heißt:

Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Porportionale zu den beiden Hypotenusenabschnitten (Höhensatz).

Für die beiden Dreiecke ACD und ABC läßt sich die Proportion

$$AD:AC = AC:AB \quad \text{bzw.} \quad \boxed{q:b = b:c}$$

ablesen (kleinere Kathete zur Hypotenuse).

Da man für die beiden Dreiecke CBD und ABC die Proportion $\boxed{p:a = a:c}$ erhält, kann man zusammenfassend sagen:

Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und dem unter der Kathete liegenden Hypotenusenabschnitt (Kathetensatz).

AUFGABEN

1. *Die Konstruktion der vierten Proportionalen d zu drei gegebenen Strecken $a = 1{,}5$ cm, $b = 6{,}2$ cm und $c = 3{,}5$ cm ist auf verschiedene Arten auszuführen.*

2. Teile eine gegebene Strecke PQ im Verhältnis 7 : 3 nach dem 1. Strahlensatz!

3. Erläutere die am Ende des 3. Strahlensatzes (S. 187) stehende Voraussetzung!

4. Welche Proportion gilt für zwei Höhen eines beliebigen Dreiecks und die zugehörigen Seiten? (Die Höhen sind zugleich Seiten rechtwinkliger Dreiecke, die in den Winkeln übereinstimmen.)

5. Ein Pultdach hat 6 m lange Dachbalken AB, 7,50 m lange Sparren AS und daher eine Höhe BS von 4,5 m (Aufg. 9 auf S. 183). Nach den auf AS in gleichen Abständen liegenden Punkten C und D gehen von der Mitte E des Balkens AB bzw. von B die Streben EC, ED und BD (Abb. 170). Die Längen der Streben sind zu berechnen. (Anleitung: Als Hilfslinien sind die von C und D auf AB gefällten Lote CF und DG zu verwenden.)

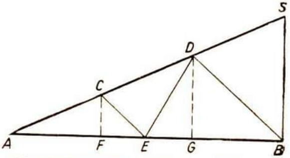


Abb. 170. Stützstreben im Binder eines Pultdachs; zu Aufg. 5

6. Zwischen zwei Punkten A und B steht in ebenem Gelände ein Haus und verdeckt die gegenseitige Sicht (Abb. 171). Der Feldmesser legt, um die Strecke AB von den Endpunkten bis zum Gebäude abstecken zu können, eine Hilfsgerade AC, auf die von B aus das Lot BF gefällt werden kann. Er mißt $AF = 665{,}3$ m und $BF = 383{,}1$ m. Dann gibt er auf AC die Punkte D und E so an, daß die auf AC in D und E errichteten Senkrechten von der gedachten Geraden AB in den nahe am Haus liegenden Punkten G und H geschnitten werden. Er mißt $AD = 232{,}4$ m und $AE = 411{,}2$ m. Ermittle die zum Festlegen von G und H erforderlichen Längen DG und EH!

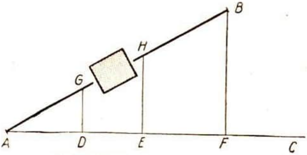


Abb. 171. Geländeskizze; zu Aufg. 6

7. Zu den gegebenen Strecken $a = 7$ cm und $c = 3{,}5$ cm ist die mittlere Proportionale b zu konstruieren.

6. Aus der Kreislehre

Jeder Punkt der Kurbel einer im Betrieb befindlichen Seilwinde beschreibt eine Kreisbahn. Die Kurbel selbst überstreicht eine Kreisfläche. Kreislinien werden auch von allen Punkten eines Maschinenteils beschrieben, der sich um eine Achse dreht (Abb 172). Kreisflächen treten bei Materialquerschnitten häufig auf.

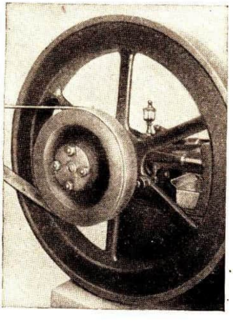


Abb. 172. Jeder Punkt eines rotierenden Maschinenteils führt eine Kreisbewegung aus

a) Entstehung und Eigenschaften des Kreises

Kreisfläche und Kreislinie

Eine **Kreislinie** wird von dem Endpunkt A einer Strecke AM beschrieben, die in einer Ebene um ihren festen Endpunkt M gedreht wird. Die Strecke AM überstreicht bei der Bewegung eine **Kreisfläche.** Die Kreislinie schließt sich, wenn die

Strecke AM wieder in ihrer Ausgangslage anlangt. Die geschlossene Kreislinie wird kurz Kreis oder **Peripherie** des Kreises genannt. Sie bildet den Umfang des Kreises und die Abgrenzung der Kreisfläche. Auch die Kreisfläche bezeichnet man oft kurz als Kreis. M wird **Kreismittelpunkt** oder **Zentrum** genannt, die Strecke AM bestimmt den **Radius** oder Halbmesser r des Kreises (Abb. 173).

Jeder Punkt der Peripherie eines Kreises hat vom Kreismittelpunkt die gleiche Entfernung.

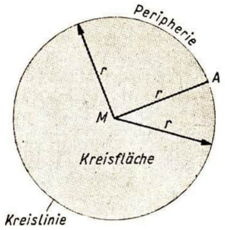


Abb. 173. Kreisfläche und Kreislinie

Kreisbogen und Sehne

Ein Stück der Kreislinie heißt **Kreisbogen** (Abb. 174). Zwei an verschiedenen Stellen der Peripherie liegende Punkte P und Q sind zugleich Endpunkte zweier Kreisbögen, die zusammen den Kreisumfang ergeben. Man nennt deshalb den einen der Kreisbogen den *Ergänzungsbogen* des anderen.
Die Strecke, die zwei Endpunkte eines Kreisbogens verbindet, heißt **Sehne** des Kreises. Um Kreisbogen und Sehne zwischen den Punkten P und Q zu unterscheiden, schreibt man für den Kreisbogen $\widehat{PQ}$, für die Sehne $\overline{PQ}$. Jede durch den Kreismittelpunkt M gehende Sehne CD heißt **Durchmesser** des Kreises. Der Durchmesser d hat die doppelte Länge wie der Radius r. Es ist

$$d = 2r.$$

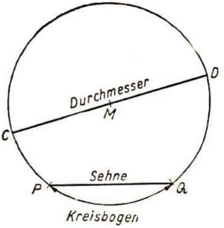


Abb. 174. Kreisbogen und Sehnen

Jeder Kreisdurchmesser zerlegt den Kreis in zwei zu ihm symmetrisch liegende Halbkreise.

Zentriwinkel und Peripheriewinkel

Jeder zwischen zwei Radien liegende Winkel heißt **Zentriwinkel** (Mittelpunktswinkel) des Kreises. Wie die Endpunkte der Radien zugleich Endpunkte zweier Kreisbögen sind, bilden auch die Radien zwei Zentriwinkel. Jeder gehört zu dem Kreisbogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt, man sagt auch „über dem er steht“. In Abb. 175 steht der Zentriwinkel ω über dem Kreisbogen b, der Zentritriwinkel ω' über dem Ergänzungsbogen b'. Dabei ist $\omega + \omega' = 360°$.

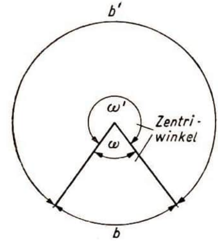


Abb. 175. Zentriwinkel

Die Verbindungslinien eines Punktes der Kreislinie mit zwei anderen Kreispunkten bilden die Schenkel eines **Peripheriewinkels.** In Abb. 176 steht der Peripheriewinkel φ_1 über dem Bogen b. Da jeder Punkt des Ergänzungsbogens Scheitel eines solchen Peripheriewinkels sein kann, ist die Zahl der über einem Kreisbogen stehenden Peripheriewinkel (φ_2, φ_3, . . .) unbegrenzt.

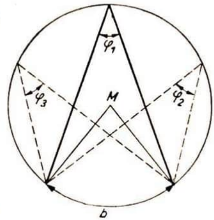


Abb.176. Peripheriewinkel

Tangente und Sekante

Zu einem Kreis können gerade Linien drei verschiedene Lagen einnehmen (Abb.177):

1. Die gerade Linie (g) verläuft außerhalb des Kreises und hat mit ihm keinen Punkt gemeinsam.

2. Die gerade Linie (t) berührt den Kreis und hat mit ihm einen Punkt gemeinsam, den **Berührungspunkt** (B).

   Die gerade Linie t wird **Tangente** des Kreises genannt.

3. Die gerade Linie (s) schneidet den Kreis, sie hat mit ihm zwei Punkte (P und Q) gemeinsam.

   Die gerade Linie s heißt **Sekante** des Kreises. Der im Innern des Kreises liegende Abschnitt der Sekante heißt Sehne.

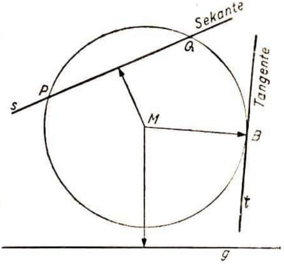


Abb. 177. Gerade Linien in verschiedenen Lagen zu einem Kreis

Kreisabschnitt und Kreisausschnitt

Das von zwei Radien eines Kreises und dem zwischen ihren Endpunkten liegenden Kreisbogen abgegrenzte Stück einer Kreisfläche wird **Kreisausschnitt** (Kreissektor) genannt (Abb. 178). Das von einer Sehne und dem Kreisbogen zwischen ihren Endpunkten begrenzte Stück wird **Kreisabschnitt** (Kreissegment) genannt.

Segmente findet man z.B. als Querschnitte von Scheibenfedern, auch bei Querschnitten von Wellen mit ausgearbeiteten Sitzflächen für Mitnehmerteile, die der sicheren Übertragung der Drehbewegung dienen (Abb. 179).

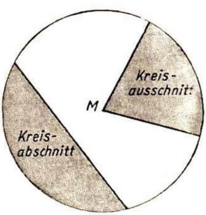


Abb.178. Kreisausschnitt und Kreisabschnitt

Der Form von Kreissektoren angenähert sind oft Ventilatorenflügel. Auch Blechstücke, die für Trichtermäntel und Spitzhauben zugeschnitten sind, haben die Form von

Kreissektoren. Die Statistik verwendet zur graphischen Darstellung von prozentualen Anteilen häufig Sektoren (Abb. 21 auf S. 99).

Abb. 179. Werkstück mit segmentförmigem Querschnitt

b) Kreissehne

Da die Endpunkte A und B einer Kreissehne AB auf der Kreislinie liegen, sind ihre Entfernungen vom Kreismittelpunkt M gleich groß, und zwar gleich dem Radius r. Deshalb liegt M auf der Symmetrieachse von AB. Diese halbiert die Sehne AB, die beiden Zentriwinkel AMB, den Kreisbogen AB sowie seinen Ergänzungsbogen. Außerdem steht sie auf AB senkrecht (Abb. 180). Die Länge s der Sehne AB ist abhängig von ihrem Abstand a vom Kreismittelpunkt. Da das von M auf AB gefällte Lot MF, das diesen Abstand a angibt, auf der Symmetrieachse von AB liegt, gilt für $\triangle AFM$ nach dem Satz des Pythagoras

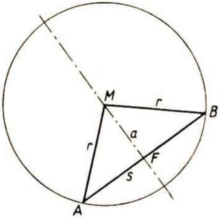


Abb. 180. Die Symmetrieachse der Kreissehne

$$\overline{AF}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MF}^2,$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - a^2,$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - a^2},$$

$$s = 2 \cdot \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Aus $r = \frac{d}{2}$ bzw. $r^2 = \frac{d^2}{4}$ folgt

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} - a^2, \qquad \frac{s^2}{4} = \frac{1}{4}(d^2 - 4a^2); \qquad s^2 = d^2 - 4a^2,$$

$$s = \sqrt{d^2 - 4a^2}.$$

Die Ergebnisse zeigen, daß alle Sehnen eines Kreises, die den gleichen Abstand a vom Mittelpunkt haben, gleich lang sind. Je größer der Abstand a ist, um so kleiner ist die Länge s der Sehne. Umgekehrt haben zwei gleich lange Sehnen eines Kreises den gleichen Abstand vom Kreismittelpunkt.

Es gelten somit für einen Kreis bzw. für Kreise mit gleichen Durchmessern folgende Sätze:

1. **Sehnen mit gleichen Abständen vom Kreismittelpunkt haben gleiche Längen.**
2. **Haben Sehnen verschiedene Abstände vom Kreismittelpunkt, so hat die Sehne mit dem kleineren Abstand die größere Länge.**

Auch die Umkehrungen dieser Sätze gelten:

1. Gleich lange Sehnen haben gleiche Abstände vom Kreismittelpunkt.
2. Von verschieden langen Sehnen hat die größere den kleineren Abstand vom Kreismittelpunkt.

c) Kreistangente

Zu parallelen Sehnen eines Kreises gehört als gemeinsame Symmetrieachse der zur Sehnenrichtung senkrechte Kreisdurchmesser. Die Mittelpunkte der Sehnen, die ein Kreis auf parallelen Sekanten ausschneidet, liegen demnach auf dem zur Sehnenrichtung senkrechten Durchmesser $B_1 B_2$ (Abb. 181).

Je mehr sich die Abstände, die die Sekanten vom Kreismittelpunkt haben, der Größe des Kreisradius nähern, um so mehr nähern sich die Sekanten den auf $B_1 B_2$ in B_1 und B_2 errichteten Senkrechten t_1 und t_2. Die Geraden t_1 und t_2 sind Grenzlagen dieser Sekanten. Sie berühren den Kreis in B_1 bzw. B_2, also jede nur in einem Punkte. Offensichtlich bilden sie mit dem Durchmesser $B_1 B_2$ rechte Winkel. Die Geraden t_1 und t_2 heißen **Tangenten** des Kreises. B_1 und B_2 sind die **Berührungspunkte,** $M B_1$ und $M B_2$ die **Berührungsradien.** Kreistangenten liegen in der Ebene des Kreises.

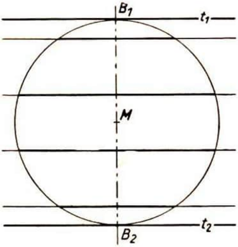


Abb. 181. Kreistangente als Grenzlage paralleler Sekanten

Für Kreistangenten gelten folgende Sätze:

1. **Der nach dem Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius steht auf der Tangente senkrecht.**

2. **Die auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Kreismittelpunkt.**

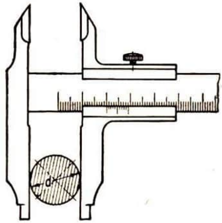


Abb. 182. Die Backen einer Schieblehre berühren den Rundstahl

Die Backen einer Schieblehre werden an ein Stück Rundstahl als parallele Tangenten seines kreisförmigen Querschnitts angelegt (Abb. 182) und ergeben durch ihren Abstand den Kreisdurchmesser.

Wir halten fest:

Eine in der Ebene eines Kreises liegende Gerade **schneidet** den Kreis in zwei Punkten, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner als der Kreisradius ist.

Sie **berührt** den Kreis in einem Punkt, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt gleich dem Kreisradius ist.

Sie verläuft außerhalb des Kreises oder **verfehlt** den Kreis, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt größer als der Kreisradius ist.

Es kommen folgende Aufgaben vor:

1. In einem Punkt des Kreisumfangs ist an den Kreis die Tangente zu legen (Abb. 183).

Lösung: Man verbindet den gegebenen Punkt B der Kreisperipherie mit dem Kreismittelpunkt M und erhält als Tangente die auf MB in B errichtete Senkrechte.

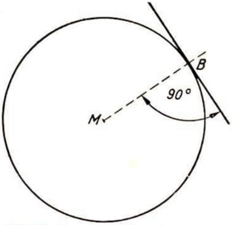


Abb. 183. Tangente an den Kreis in einem Punkte der Peripherie

2. Von einem Punkt außerhalb des Kreises ist an den Kreis die Tangente zu legen (Abb. 184).

Lösung: Man verbindet den außerhalb des Kreises liegenden Punkt P mit dem Kreismittelpunkt M und konstruiert den Kreis, der MP als Durchmesser hat. Dieser schneidet den gegebenen Kreis in B_1 und B_2. Die Geraden PB_1 und PB_2 sind die beiden möglichen Tangenten, weil nach dem Satz des Thales $\sphericalangle MB_1P$ und $\sphericalangle MB_2P$ rechte Winkel sind.

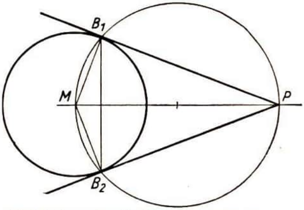


Abb. 184. Tangente an den Kreis von einem Punkte aus

Aus Abb. 184 ersieht man, daß MP die gemeinsame Symmetrieachse der gezeichneten Kreise ist. B_1 und B_2 liegen symmetrisch zu MP, und es gilt $B_1B_2 \perp MP$. Die Strecke B_1B_2 wird **Berührungssehne** der Tangenten PB_1 und PB_2 genannt.

Die Berührungspunkte der von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten liegen zur Verbindungslinie des Punktes mit dem Kreismittelpunkt symmetrisch.

Weiter folgt aus der Symmetrie, daß $PB_1 = PB_2$ ist.

Für die von einem Punkt an einen Kreis gelegten Tangenten sind die vom Tangentenschnittpunkt bis zu den Berührungspunkten reichenden Abschnitte einander gleich.

Wegen der Symmetrie gilt außerdem
$\sphericalangle MPB_1 = \sphericalangle MPB_2$.

Der Mittelpunkt eines Kreises, der gleichzeitig zwei gegebene gerade Linien berührt, liegt auf der Halbierenden des Winkels der beiden Geraden.

Diese Beziehung findet beim Zentrierwinkel Verwendung.

Der eine Rand der Mittelschiene eines Zentrierwinkels (Abb. 185) halbiert den Winkel zwischen seinen Schenkeln. Legt man ihn mit seinen Schenkeln in zwei verschiedenen Lagen an den kreisförmigen Querschnitt eines Rundstahls und reißt jedesmal längs des Randes der Mittelschiene auf der Querschnittsfläche eine Gerade an, so ergibt ihr Schnittpunkt den Kreismittelpunkt.

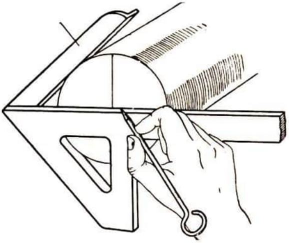


Abb. 185. Bestimmen des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises mit dem Zentriwinkel

d) Winkel am Kreis

Außer *Zentriwinkeln* und *Peripheriewinkeln* betrachtet man als Winkel am Kreis noch **Sehnentangentenwinkel**. Sie liegen zwischen einer Kreistangente und einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne.

Zu demselben Bogen AB gehören in Abb. 186 der Peripheriewinkel $APB = \alpha$, der Zentriwinkel $AMB = \beta$ und der Sehnentangentenwinkel $ABT = \gamma$.

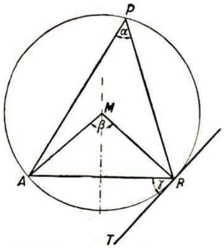


Abb. 186. Peripheriewinkel, Zentriwinkel und Sehnentangentenwinkel über dem Kreisbogen AB

Zusammenhang zwischen Zentriwinkel und Peripheriewinkel

Der Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel $AMB = \beta$ und dem über demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel $APB = \alpha$ ist leicht zu erkennen, wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels durch den Kreismittelpunkt geht. In Abb. 187a ist der Scheitel P des Peripheriewinkels APB der Schnittpunkt des Kreises mit der Verlängerung von AM. Das Dreieck BMP ist gleichschenklig, weil MB und MP Kreisradien sind. Daher ist auch $\sphericalangle BPM$ ein Basiswinkel, $\sphericalangle AMB$ ein Außenwinkel an der Spitze.

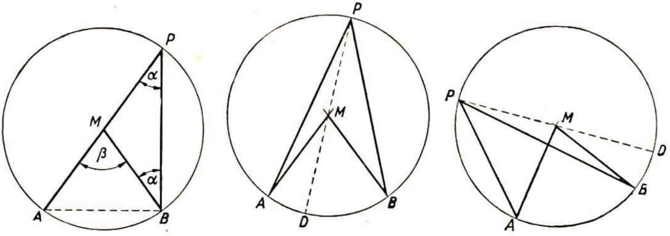
Deshalb ist
$$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle APB\,.$$

Wie wir erkennen werden, gilt diese Gesetzmäßigkeit nicht nur für den besonderen Fall der Abb. 187a, sondern allgemein.

Wird der Scheitel P des Peripheriewinkels APB so gelegt, daß der Scheitel M des Zentriwinkels zwischen den Schenkeln AP und BP des Peripheriewinkels (Abb. 187b) oder außerhalb des Peripheriewinkelraumes (Abb. 187c) liegt, so ergibt der Durchmesser PD die Zentriwinkel AMD und BMD und die Peripheriewinkel APD und BPD, für die nach der vorangehenden Überlegung jeweils gilt

$$\sphericalangle AMD = 2 \cdot \sphericalangle APD$$

und
$$\sphericalangle BMD = 2 \cdot \sphericalangle BPD.$$



a) b) c)

Abb. 187. Der Zentriwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen

Daher ist auch in Abb. 187b:

$$\sphericalangle AMD + \sphericalangle BMD = 2 \cdot (\sphericalangle APD + \sphericalangle BPD)\,,$$

d.h. $$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle APB\,,$$

und in Abb. 187c:

$$\sphericalangle AMD - \sphericalangle BMD = 2 \cdot (\sphericalangle APD - \sphericalangle BPD)\,,$$

d.h. $$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle APB\,.$$

In jedem Falle gilt der Satz:

1. Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder über demselben Kreisbogen stehende Peripheriewinkel.

Hieraus folgt unmittelbar:

2. Die über demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel eines Kreises sind einander gleich

Als Sonderfall ist der bereits auf S. 156 abgeleitete Satz des Thales zu merken:

Steht ein Peripheriewinkel über einem Halbkreis (Abb. 188), so ist der zugehörige Zentriwinkel ein gestreckter Winkel, der Peripheriewinkel selbst also 90°.

Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

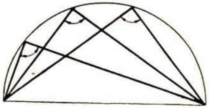


Abb. 188. Zum Lehrsatz des Thales

Zusammenhang zwischen Zentri-, Peripherie- und Sehnentangentenwinkel

Verschiebt man den Scheitel P_1 des Peripheriewinkels AP_1B auf dem Kreis so, daß er in die Lagen P_2 und P_3 kommt (Abb. 189), so bleibt die Winkelgröße unverändert. Je dichter P_1 an B rückt, um so mehr nähert sich die durch P_1 und B bestimmte Gerade der durch die Tangente BT in B gegebenen Grenzlage; der Sehnentangentenwinkel ist dabei die Grenzlage des Peripheriewinkels. Es läßt sich vermuten, daß der Sehnentangentenwinkel dieselbe Größe hat wie die Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen. Den Beweis dafür bringt folgende Überlegung:

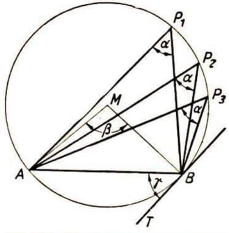


Abb. 189. Peripheriewinkel α und Sehnentangentenwinkel γ sind gleich und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel β

In Abb. 189 berührt die Tangente BT den Kreis um M in B. Deshalb gilt $\sphericalangle MBT = 90°$. Durch B geht die Sehne AB, und es ist $\sphericalangle ABT = 90° - \sphericalangle ABM$. Da $AM = BM$ und $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB$ ist, ergibt sich

$$\sphericalangle AMB = 180° - 2 \cdot \sphericalangle ABM = 2 \cdot (90° - \sphericalangle ABM) = 2 \cdot \sphericalangle ABT\,.$$

In Worten:

1. Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß wie ein über demselben Kreisbogen stehender Sehnentangentenwinkel.

Oder:

2. Ein Sehnentangentenwinkel ist jedem Peripheriewinkel gleich, der über demselben Kreisbogen steht.

Mit Hilfe dieser Sätze löst man z. B. folgende

Aufgabe:

Gegeben ist die Strecke AB und die Gerade BT (Abb. 190). Es soll ein Kreis konstruiert werden mit der Strecke AB als Sehne und der Geraden BT als Tangente.

Lösung: $\sphericalangle ABT$ ist Sehnentangentenwinkel. Man findet den Kreismittelpunkt M als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB mit der auf BT in B errichteten Senkrechten. Der Kreisradius ist MB.
Auf dem Bogen BA des Kreises (Abb. 189), der nicht zwischen den Schenkeln des Winkels ABT verläuft, liegen die Scheitel von allen Winkeln, deren Schenkel durch A und B gehen und die dieselbe Größe wie $\sphericalangle ABT$ haben. Man sagt deshalb, dieser Kreisbogen faßt Winkel der gegebenen Größe als Peripheriewinkel.

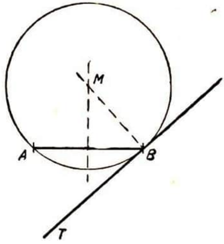


Abb. 190. Kreis, der die Strecke AB als Sehne und die Gerade BT als Tangente hat

e) Lage zweier Kreise zueinander

Werden Getriebe, die eine kreisende Bewegung mit parallelen Wellen übertragen, in Draufsicht gezeichnet – und das ist bei der Konstruktion eines solchen Getriebes erforderlich – so erhält man Kreise, die je nach Art des Getriebes verschiedene gegenseitige Lage haben.
Zum Beispiel zeigt eine zweistufige Riemenscheibe (Abb. 191) zwei um einen gemeinsamen Mittelpunkt M mit verschiedenen Radien geschlagene **konzentrische** Kreise. Bei einem Exzenter liegen die beiden Kreismittelpunkte M_1 und M_2 zwar innerhalb des großen Kreises, fallen aber nicht zusammen. Man nennt die Kreise **exzentrisch** (Abb. 192).

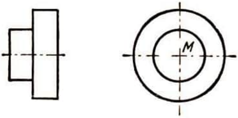


Abb. 191. Konzentrische Kreise bei einer zweistufigen Riemenscheibe

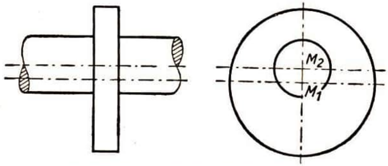


Abb. 192. Exzentrische Kreise bei einem Exzenter

Im Planetengetriebe läuft ein außenverzahntes kleines Stirnrad in einem größeren innenverzahnten Zahnrad (Abb. 193). Das Bild zeigt deshalb einen kleinen Kreis um M_2, der den großen um M_1 **von innen berührt.** Bei einem Rädertrieb mit Mehrfachübersetzung zeigt die Zeichnung neben konzentrischen und sich berührenden Kreisen auch zwei Kreise, die sich in zwei Punkten **schneiden** (Abb. 194).

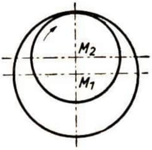


Abb. 193. Kreise, die sich von innen berühren, beim Planetengetriebe

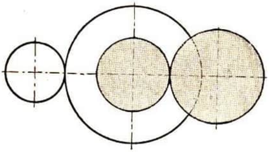


Abb. 194. Kreise, die sich schneiden, beim Rädertrieb mit Mehrfachübersetzung

Entsprechend sind für zwei Stirnräder, die ineinandergreifen, oder für einen Reibungstrieb zwei einander **von außen berührende** Kreise gezeichnet (Abb. 195).

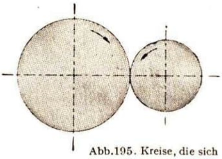


Abb. 195. Kreise, die sich von außen berühren, beim Reibungstrieb

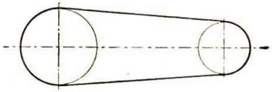


Abb. 196. Kreise, die sich verfehlen, beim Riementrieb

Erfolgt die Kraftübertragung von der treibenden zur getriebenen Welle durch Riemen, so zeigen sich Kreise, von denen der eine ganz außerhalb des anderen verläuft (Abb. 196). Die Lage zweier Kreise zueinander ist durch die Größe ihrer Radien r_1 und r_2 und die **Zentrale,** das ist die Verbindungsstrecke $M_1M_2 = c$ der Kreismittelpunkte, bestimmt. Ist $r_1 > r_2$, so ergibt sich folgende Übersicht:

c gleich 0:	Die Kreise sind konzentrisch (Abb. 191).
c kleiner als $r_1 - r_2$:	Die Kreise sind exzentrisch (Abb. 192).
c gleich $r_1 - r_2$:	Die Kreise berühren sich von innen (Abb. 193).
c größer als $r_1 - r_2$ und kleiner als $r_1 + r_2$:	Die Kreise schneiden sich (Abb. 194).
c gleich $r_1 + r_2$:	Die Kreise berühren sich von außen (Abb. 195).
c größer als $r_1 + r_2$:	Die Kreise verfehlen sich (Abb. 196).

Die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte ist zugleich die Symmetrieachse für beide Kreise. Sie geht deshalb durch den Berührungspunkt, wenn beide Kreise einander berühren, und ist die Mittelsenkrechte der gemeinsamen Sehne, wenn die Kreise einander schneiden.

f) Gemeinsame Tangenten zweier Kreise

Bei offenem Riementrieb wird die Drehung der einen Welle auf die andere durch Riementeile übertragen, die als **äußere Tangenten** an zwei Kreisen erscheinen (Abb. 197).

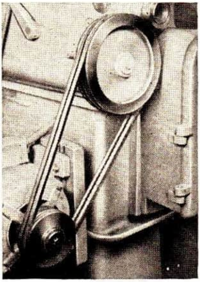


Abb. 197. Beim offenen Riementrieb begegnen uns äußere Tangenten an zwei Kreisen.

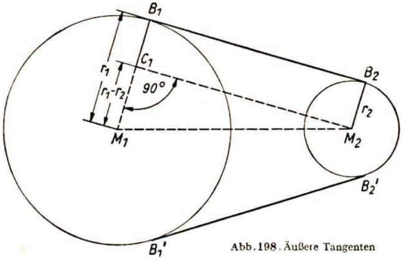


Abb. 198. Äußere Tangenten

Abb. 198 zeigt zwei Kreise um M_1 bzw. M_2 mit den äußeren Tangenten $B_1 B_2$ und $B_1' B_2'$. Außer den Berührungsradien $M_1 B_1 = r_1$ und $M_2 B_2 = r_2$ ist noch die Parallele zu $B_1 B_2$ durch M_2 gezeichnet, die $M_1 B_1$ in C_1 schneidet. Da die Berührungsradien auf ihren Tangenten senkrecht stehen, ist $B_1 C_1 M_2 B_2$ ein Rechteck und die Seite $B_1 C_1 = r_2$, also $M_1 C_1 = r_1 - r_2$; C_1 ist Scheitel des rechten Winkels $M_1 C_1 M_2$.

Bei gekreuztem Riementrieb erscheinen die Riementeile als **innere Tangenten.** In Abb. 199 sind die Berührungsradien $M_1 D_1 = r_1$ und $M_2 D_2 = r_2$, dazu die Parallele zu $D_1 D_2$ durch M_2 eingezeichnet, die die Verlängerung von $M_1 D_1$ in E_1 schneidet. Es entsteht das Rechteck $D_1 D_2 M_2 E_1$, in dem $D_1 E_1 = r_2$ wird. Deshalb gilt $M_1 E_1 = r_1 + r_2$, und E_1 wird Scheitel des rechten Winkels $M_1 E_1 M_2$.

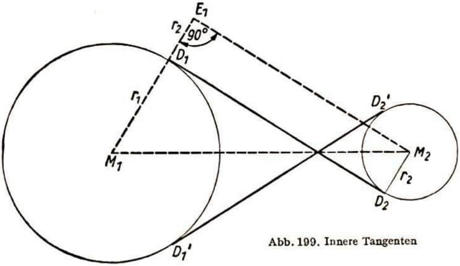


Abb. 199. Innere Tangenten

Konstruktion der gemeinsamen Tangenten

Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich ein Weg zur Konstruktion der gemeinsamen Tangenten beider Kreise.

Äußere Tangenten (Abb. 200): Man zeichnet den Kreis, der $M_1 M_2$ als Durchmesser hat (Thaleskreis), und schlägt um M_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ einen Hilfskreis, der den „Thaleskreis" in C_1 und C_1' schneidet. Durch M_1 und C_1, M_1 und C_1' legt man Gerade. Sie schneiden den Kreis um M_1 in den Berührungspunkten B_1 und B_1'. Zu $M_1 C_1$ und $M_1 C_1'$ zieht man Parallelen durch M_2, sie schneiden den Kreis um M_2 in den Berührungspunkten B_2 und B_2'; $B_1 B_2$ und $B_1' B_2'$ sind die *äußeren Tangenten.*

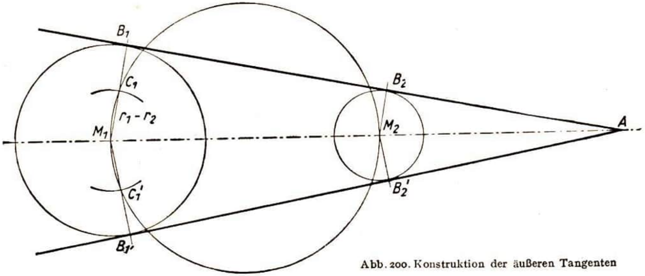


Abb. 200. Konstruktion der äußeren Tangenten

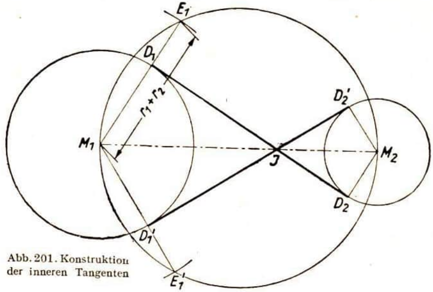


Abb. 201. Konstruktion der inneren Tangenten

Innere Tangenten (Abb. 201): Man zeichnet wieder den Kreis, der M_1M_2 als Durchmesser hat, und schlägt um M_1 mit dem Radius $r_1 + r_2$ einen Hilfskreis, der den Kreis über M_1M_2 in E_1 und E_1' schneidet. Durch M_1 und E_1, M_1 und E_1' legt man Geraden. Sie schneiden den Kreis um M_1 in den Berührungspunkten D_1 und D_1'. Zu M_1D_1 und M_1D_1' zieht man Parallelen durch M_2, sie schneiden den Kreis um M_2 in den Berührungspunkten D_2 und D_2'; D_1D_2 und $D_1'D_2'$ sind die *inneren Tangenten.*

Aus der Tatsache, daß die Mittelpunkte der bei der Konstruktion verwendeten Kreise auf der Geraden M_1M_2 liegen, geht hervor, daß beide Tangentenpaare symmetrisch zu M_1M_2 liegen und einander auf der Symmetrieachse in A bzw. J schneiden.

Die in Abb. 200 auf B_1B_2 senkrecht stehenden Berührungsradien M_1B_1 und M_2B_2 bilden ein Parallelenpaar, das die Geraden M_1M_2 und B_1B_2 schneidet. Deshalb gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{M_1B_1}{M_2B_2} = \frac{M_1A}{M_2A}.$$

Entsprechend gilt in Abb. 201 für die Berührungsradien M_1D_1 und M_2D_2, die auf D_1D_2 senkrecht stehen,

$$\frac{M_1D_1}{M_2D_2} = \frac{M_1J}{M_2J}.$$

Die Zentrale M_1M_2 wird von J innen, von A außen im Verhältnis der Radien der gegebenen Kreise geteilt. Die Abschnitte der äußeren Tangenten zwischen den Berührungspunkten sind einander gleich, ebenso die entsprechenden Abschnitte der inneren Tangenten.

Die hier ausgeführte Konstruktion setzt voraus, daß $r_1 > r_2$ und $M_1M_2 > r_1 + r_2$ ist. Liegen die Kreise so, daß $c = r_1 + r_2$ ist, so erhält man 2 äußere Tangenten und eine innere, die im Berührungspunkt der beiden Kreise auf M_1M_2 senkrecht steht. Für $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$ ergeben sich nur die beiden äußeren Tangenten, für $c = r_1 - r_2$ nur eine äußere, die im Berührungspunkt der beiden Kreise auf M_1M_2 senkrecht steht. Ist $c < r_1 - r_2$, so sind weder innere noch äußere Tangenten möglich.

AUFGABEN

1. Bei einem Kurbeltrieb ist die Schubstange $l = 2300$ mm, die Kurbel $r = 315$ mm lang.

- **a)** Wie groß ist der Hub?
- **b)** Welchen Abstand hat der Kreuzkopfzapfen von der Achse der Kurbelwelle, wenn die Richtung der Kurbel zur Richtung 1. der Schubstange, 2. der Kolbenstange rechtwinklig ist?

2. Wie weit ist das Blatt einer Schrotsäge von der Achse eines 1 m dicken Fichtenstammes entfernt, wenn der Schnitt in dem Stamm die Länge $s = 80$ cm erreicht hat?

3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Peripheriewinkeln, die über Ergänzungsbogen eines Kreises stehen?

4. Gegeben sind eine Gerade g, auf ihr ein Punkt B, außerhalb von g ein Punkt A. Der Kreis ist zu konstruieren, der g in B berührt und durch A geht.

5. An einen gegebenen Kreis sind Tangenten zu legen, die zu einer gegebenen Geraden

a) parallel, **b)** senkrecht verlaufen.

6. Mit gegebenem Radius r sind alle Kreise zu zeichnen, die gleichzeitig zwei einander schneidende Geraden g_1 und g_2 berühren.

7. Man konstruiere die gemeinsamen Tangenten zweier verschieden großer Kreise, die einander

a) von außen berühren, **b)** schneiden.

8. Aus Pappstreifen werden wie in Abb.202 drei Reihen kreisförmiger Scheiben gestanzt, die als Einlagen in Schraubdeckel verwendet werden. Der Scheibendurchmesser ist $d = 55$ mm.

a) Welche Breite muß der Pappstreifen wenigstens haben?

b) Ein Stück des Streifens mit drei aufeinanderfolgenden Scheiben in jeder Reihe ist im Maßstab M 1 : 2 zu zeichnen.

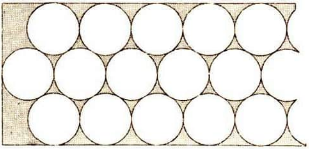


Abb.202. Pappstreifen, aus dem Kreisscheiben gestanzt sind

9. Um einen gegebenen Punkt P sind alle Kreise zu zeichnen, die einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt M berühren. P liege

a) außerhalb, **b)** innerhalb des um M geschlagenen Kreises.

10. Gegeben sind Kreise um M_1 mit dem Durchmesser $d_1 = 6$ cm und um M_2 mit dem Durchmesser $d_2 = 4$ cm, deren Mittelpunkte den Abstand $c = 7$ cm haben. Mit dem Durchmesser $d = 5$ cm sind Kreise zu zeichnen, die beide gegebenen Kreise berühren.

7. Sehnen- und Tangentenvielecke

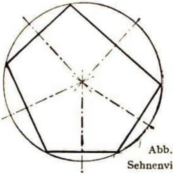


Abb. 203
Sehnenvieleck

Die Seiten von Vielecken, deren Ecken auf der Peripherie eines Kreises liegen, sind Sehnen dieses Kreises. Deshalb werden derartige Vielecke **Sehnenvielecke** genannt. Sehnenvielecke sind einem Kreis einbeschrieben; der Kreis (Umkreis) ist dem Vieleck umbeschrieben. Der Mittelpunkt des Kreises ist von allen Ecken gleichweit entfernt; er ist deshalb der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten aller Seiten des Vielecks (Abb. 203). Einem Vieleck kann nur dann ein Kreis umbeschrieben werden, wenn die Mittelsenkrechten aller Seiten einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

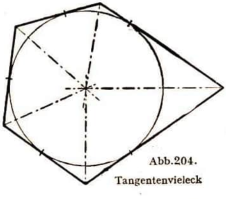


Abb.204.
Tangentenvieleck

Vielecke, deren Seiten Tangenten desselben Kreises sind, heißen **Tangentenvielecke.** Das Tangentenvieleck ist diesem Kreis umbeschrieben, der Kreis (Inkreis) dem Tangentenvieleck einbeschrieben. Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises hat von allen Seiten des Vielecks denselben Abstand und ist deshalb der Schnittpunkt der Halbierenden aller Winkel des Vielecks (Abb. 204). Einem Vieleck kann nur dann ein Kreis einbeschrieben werden, wenn die Halbierungslinien aller Vieleckswinkel denselben Schnittpunkt haben.

a) Umkreis und Inkreis des Dreiecks

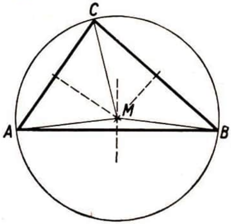


Abb. 205. Umkreis eines Dreiecks

Im Dreieck ABC (Abb. 205) ist M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seite AB mit der Mittelsenkrechten der Seite BC. Dann ist $AM = BM$ und $BM = CM$, daher auch $AM = CM$. M ist zugleich ein Punkt der Mittelsenkrechten von AC, also ist M der Mittelpunkt des Umkreises. Das heißt:

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

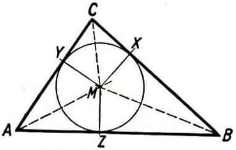


Abb. 206. Inkreis eines Dreiecks

In Abb. 206 ist M der Schnittpunkt der Halbierungslinien der Winkel BAC und ABC des Dreiecks ABC. Da jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels von seinen Schenkeln gleiche Abstände hat, gilt für die von M auf die Seiten AB, BC und CA gefällten Lote MZ, MX und MY zunächst $MZ = MY$ und $MZ = MX$, folglich auch $MX = MY$. Da nur die Punkte der Winkelhalbierenden von den Schenkeln gleiche Abstände haben, ist M auch ein Punkt der Halbierungslinie des Winkels ACB. Also ist M Mittelpunkt des Inkreises, der AB in Z, BC in X und AC in Y berührt.

In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis einbeschreiben.

Die von demselben Eckpunkt des Dreiecks bis zum Berührungspunkt mit dem Inkreis reichenden Seitenabschnitte sind einander gleich (Tangentenabschnitte). Es gilt also

$$AZ = AY, \quad BZ = BX \quad \text{und} \quad CX = CY$$

und $(AZ + BZ) + (BX + CX) + (CY + AY) = AB + BC + CA$

oder $2 \cdot AZ + 2 \cdot BZ + 2 \cdot CX = 2 \cdot s,$

wenn der halbe Dreiecksumfang mit s bezeichnet wird.

Es ergibt sich $(AZ + BZ) + CX = s$

oder, da $AZ + BZ = c$ ist, $CX = s - c.$

Ebenso erhält man aus $(BX + CX) + AY = s,$

$$AY = s - a$$

und aus $(CY + AY) + BZ = s,$

$$BZ = s - b.$$

Für die Abschnitte der Seiten des Dreiecks vom Eckpunkt bis zu den Berührungspunkten des Inkreises gilt

$$AZ = AY = s - a, \quad BZ = BX = s - b, \quad CX = CY = s - c;$$

b) Sehnenvierecke, Tangentenvierecke

In einem **Sehnenviereck** $ABCD$ (Abb. 207) sind je zwei gegenüberliegende Ecken – etwa B und D – zugleich Scheitel von Peripheriewinkeln des Umkreises, die über Ergänzungsbogen stehen. Da die Summe der zugehörigen Zentriwinkel 360° ergibt, ist

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ,$$

ebenso $$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

In jedem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.

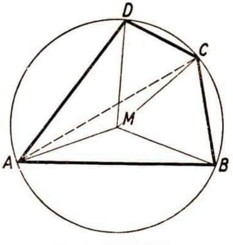


Abb 207. Sehnenviereck

Umgekehrt gilt:

Um ein Viereck, in dem zwei gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind, läßt sich ein Kreis beschreiben.

Zu den Sehnenvierecken gehören Drachenvierecke, deren ungleiche Seiten rechte Winkel einschließen, gleichschenklige Trapeze, Rechtecke und Quadrate.

Im **Tangentenviereck** $ABCD$ (Abb. 208) berühren die vier Seiten einen Kreis. Mit E ist der Berührungspunkt auf AB, mit F der auf BC, mit G der auf CD und mit H der auf DA bezeichnet. Da die Abschnitte zweier Kreistangenten von ihrem Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten einander gleich sind, ist

$$AE = AH, \quad BE = BF, \quad CF = CG, \quad DG = DH.$$

Der Umfang des Tangentenvierecks läßt sich deshalb durch $2 \cdot AE + 2 \cdot BE + 2 \cdot CG + 2 \cdot DG$ oder durch $2 \cdot AH + 2 \cdot DH + 2 \cdot BF + 2 \cdot CF$ ausdrücken. Es ergibt sich $AB + CD = BC + AD$.

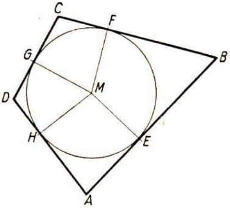


Abb. 208. Tangentenviereck

Im Tangentenviereck ergeben je zwei gegenüberliegende Seiten die gleiche Summe.

Umgekehrt gilt:

Einem Viereck läßt sich ein Kreis einbeschreiben, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten die gleiche Summe ergeben.

Zu den Tangentenvierecken gehören die Drachenvierecke, die Rhomben, die Quadrate sowie solche Trapeze, bei denen die Summe der Schenkel gleich der Summe der Grundlinien ist.

c) Regelmäßige Vielecke

Ein Vieleck, das lauter gleiche Seiten und zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Seiten gleiche Winkel hat, wird ein **regelmäßiges Vieleck** genannt.

Teilt man einen Vollwinkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt M eines Kreises ist, durch Radien in n gleiche Winkel und verbindet je zwei benachbarte Schnittpunkte zwischen Winkelschenkel und Kreislinie geradlinig, so ergeben die Verbindungslinien die n Seiten des regelmäßigen n-Ecks, das dem Kreis um M einbeschrieben ist. Man sagt auch, der Kreis ist dem Vieleck umbeschrieben.

Jede Seite und die beiden durch ihre Endpunkte gehenden Radien bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze M, das als **Bestimmungsdreieck** des regelmäßigen n-Ecks bezeichnet wird (in Abb. 209 a schraffiert).

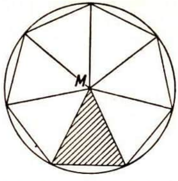


Abb. 209 a. Regelmäßiges Vieleck mit Bestimmungsdreieck

Das Bestimmungsdreieck

In jedem Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen n-Ecks beträgt der Winkel an der Spitze $\frac{360^\circ}{n}$. Umgekehrt können nur gleichschenklige Dreiecke Bestimmungsdreiecke regelmäßiger Vielecke sein, bei denen ein ganzes Vielfaches des Winkels an der Spitze 360° ergibt. Diese Einschränkung muß bei der Wahl der zwei Bestimmungsstücke für ein Bestimmungsdreieck berücksichtigt werden.

Wenn der Winkel an der Spitze nicht so einfach wie bei 30°, 45°, 60°, 90° hergestellt werden kann, bestimmt der Techniker die zu einem gegebenen Umkreisradius gehörende Seitenlänge des Vielecks meist mit Hilfe einer Kreisteilungstabelle.

Aus dem Bestimmungsdreieck eines Vielecks erhält man durch Halbieren seines Winkels an der Spitze das Bestimmungsdreieck für das Vieleck mit der doppelten Eckenzahl. Ist die Eckenzahl gerade, so kann durch Verdoppeln des Winkels an der Spitze das Vieleck mit der halben Eckenzahl hergestellt werden. Zum Beispiel ist beim regelmäßigen Achteck an der Spitze des Bestimmungsdreiecks ein Winkel von $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ vorhanden. Der entsprechende Winkel beträgt $\frac{360^\circ}{16} = 22{,}5^\circ$ für das regelmäßige Sechzehneck und $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ für das Quadrat (Abb. 209 b).

Die einzelnen Bestimmungsdreiecke eines regelmäßigen Vielecks sind kongruent.

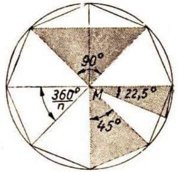


Abb. 209 b. Bestimmungsdreiecke

Jeder Vieleckswinkel setzt sich aus je einem Basiswinkel von zwei benachbarten Bestimmungsdreiecken zusammen. Da alle Basiswinkel der Bestimmungsdreiecke gleich groß sind und die beiden Basiswinkel eines Bestimmungsdreiecks seinen Winkel an der Spitze auf 180° ergänzen, hat jeder Winkel des regelmäßigen n-Ecks die Größe $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Für Werte von n, die nur mit Zirkel und Lineal konstruierbare Winkel $\frac{360^\circ}{n}$ ergeben, ist auch die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks mit diesen Zeichengeräten möglich.

Umkreis und Inkreis regelmäßiger Vielecke

Der zur Konstruktion des regelmäßigen Vielecks $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ mit dem Radius $\boldsymbol{r}$ um den Punkt M geschlagene Kreis ist der **Umkreis** des Vielecks (Abb. 210). Die kongruenten gleichschenkligen Dreiecke A_1A_2M, A_2A_3M, A_3A_4M ... sind die Bestimmungsdreiecke des Vielecks. Die von M auf A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 ... gefällten Lote MB_1, MB_2, MB_3 ... fallen aufeinander, wenn die Bestimmungsdreiecke zur Deckung gebracht werden. $MB_1 = MB_2 = MB_3 \ldots$ sind deshalb Radien $\boldsymbol{\varrho}$ eines Kreises um M, der die Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 ... in B_1, B_2, B_3 ... berührt. Er wird **Inkreis** des regelmäßigen Vielecks genannt.

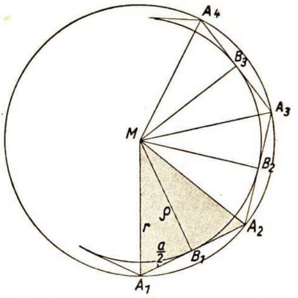


Abb. 210. Umkreis und Inkreis eines regelmäßigen Vielecks

Jedes regelmäßige Vieleck hat einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen Kreis; beide Kreise haben denselben Mittelpunkt.

Bezeichnet a die Seite eines regelmäßigen n-Ecks, r den Radius seines Umkreises, ϱ den Radius des Inkreises, so ist im Dreieck A_1MB_1 (Abb. 210) die Hypotenuse $A_1M = r$, die Kathete $B_1M = \varrho$, die Kathete $A_1\,B_1 = \frac{a}{2}$. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt also

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad r = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

oder

$$\varrho^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad \varrho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

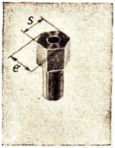


Abb. 211. Eckenmaß e und Schlüsselweite s eines Sechskantkopfbolzens

Eckenmaß und Schlüsselweite

Für regelmäßige Vielecke mit gerader Eckenzahl, die Querschnitte von Muttern sind (Abb. 211), beträgt das **Eckenmaß $\boldsymbol{e = 2r}$**, die **Schlüsselweite $\boldsymbol{s = 2\varrho}$**. Ein Durchmesser des dem Vieleck umbeschriebenen Kreises verbindet zwei gegenüberliegende Ecken. Verbindet man diese Ecken mit einer Nachbarecke, so entsteht ein Dreieck, das nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist (Abb. 212). Eine Kathete ist die Schlüsselweite s, die andere die Seitenlänge a und die Hypotenuse das Eckenmaß e. Deshalb gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$e^2 = s^2 + a^2 \qquad \text{oder} \qquad e = \sqrt{s^2 + a^2}.$$

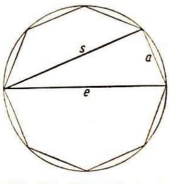


Abb. 212. Eckenmaß e und Schlüsselweite a bei einem regelmäßigen Achteck

Das regelmäßige Vieleck als Tangentenvieleck

Legt man an den Kreis, der mit dem Radius r um M geschlagen ist, in den Eckpunkten A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ des einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks Tangenten, so entsteht

das dem Kreis umbeschriebene Tangentenvieleck $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ (Abb. 213).
Die Tangenten in A_1 und A_2 schneiden einander in C_1, die in A_2 und A_3 in C_2 usw. Für die Tangentenabschnitte gilt $C_1A_1 = C_1A_2$, $C_2A_2 = C_2A_3$, $C_3A_3 = C_3A_4$ usw. C_1 liegt deshalb auf der Symmetrieachse von $\overline{A_1A_2}$, C_2 auf der Symmetrieachse von $\overline{A_2A_3}$ usw. Die Dreiecke C_1MA_1, C_1MA_2, C_2MA_2, C_2MA_3 usw. stimmen in den Seiten A_1M, A_2M, A_3M usw., in den rechten Winkeln C_1A_1M, C_1A_2M, C_2A_2M, C_2A_3M usw. und in den Winkeln A_1MC_1, A_2MC_1, A_2MC_2, A_3MC_2 usw., von denen jeder die Größe $\frac{360°}{2 \cdot n}$ hat, überein.

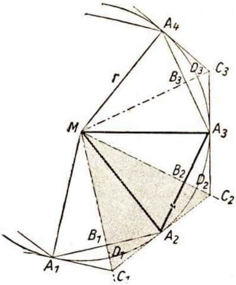


Abb. 213. Regelmäßiges Vieleck als Tangentenvieleck

Die Dreiecke sind also kongruent und ergeben paarweise zusammengesetzt die kongruenten gleichschenkligen Dreiecke C_1MC_2, C_2MC_3 usw. Das Tangentenvieleck $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ setzt sich aus kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Spitze M zusammen, es ist demnach regelmäßig.

Wird die Peripherie eines Kreises in *n* gleiche Teile geteilt, so sind die Teilpunkte Ecken eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen *n*-Ecks und auch Berührungspunkte eines dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen *n*-Ecks.

Läßt man das n-Eck $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ eine Drehung von $\frac{360°}{2 \cdot n}$ um M ausführen und kommt dabei der Berührungspunkt A_2 von C_1C_2 auf den Punkt D_2, in dem MC_2 den Kreis schneidet, C_1 nach E_1 auf der Verlängerung von MA_2, C_2 nach E_2 auf der Verlängerung von MA_3, so wird (Abb. 214)

$E_1E_2 \parallel A_2A_3$, weil $E_1E_2 \perp MD_2$ und $A_2A_3 \perp MB_2$ ist.
Demnach gilt die Proportion

$$E_1E_2 : A_2A_3 = MD_2 : MB_2 .$$

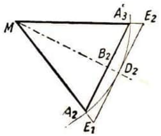


Abb. 214. Jeder Kreis hat ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes n-Eck

Wird die Seite des umbeschriebenen n-Ecks mit c bezeichnet, so erhält man

$$c : a = r : \varrho; \qquad c = a \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot$$

Bei einem Rollenlager (Abb. 215) berühren die Querschnitte der n Rollen einen Kreis von innen in den Eckpunkten $A_1, A_2 \ldots A_n$ eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Die den Rollenquerschnitten und dem Kreis gemeinsamen Tangenten ergeben ein umbeschriebenes regelmäßiges n-Eck $C_1C_2C_3 \ldots C_n$.
Wenn sich zwei aufeinanderfolgende Rollen berühren, liegen die Berührungspunkte der Rollenquerschnitte $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ so auf MC_1, MC_2, $MC_3 \ldots MC_n$, daß $C_1F_1 = C_1A_1$,

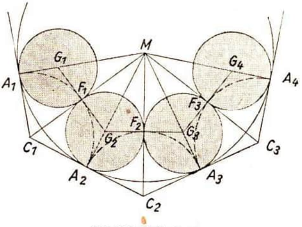


Abb. 215. Rollenlager

$C_2F_2 = C_2A_2$, $C_3F_3 = C_3A_3 \dots C_nF_n = C_nA_n$ ist. Die Mittelpunkte $G_1, G_2, G_3 \dots G_n$ der Rollenquerschnitte ergeben sich als Schnittpunkte der in $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ auf $C_1M, C_2M, C_3M \dots C_nM$ errichteten Senkrechten mit $A_1M, A_2M, A_3M \dots A_nM$ oder auch als Schnittpunkte der Winkelhalbierenden zu $\sphericalangle A_1C_1M$ mit A_1M, zu $\sphericalangle A_2C_2M$ mit A_2M usw.

Das regelmäßige Viereck (Quadrat)

Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks für ein regelmäßiges Viereck $A_1A_2A_3A_4$ (Quadrat) mißt $\frac{360°}{4} = 90°$. Man erhält also die Eckpunkte eines Quadrates, das einem um M mit dem Radius r geschlagenen Kreis einbeschrieben ist, als Endpunkte zweier senkrecht aufeinanderstehender Durchmesser (Abb. 216). Da das Bestimmungsdreieck A_1A_2M in diesem Falle rechtwinklig ist, ergibt der Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1M}^2 + \overline{A_2M}^2.$$

Wird die Viereckseite mit a_4 bezeichnet, so erhält man wegen $A_1M = A_2M = r$

$$a_4^2 = 2r^2,$$

$$a_4 = r \cdot \sqrt{2} \approx \underline{\underline{1{,}4142 \cdot r}}.$$

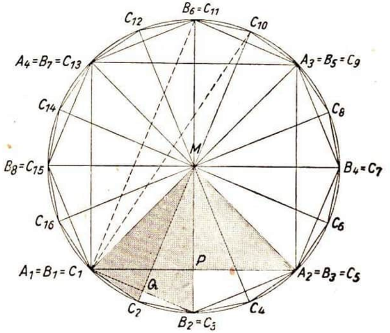


Abb.216. Regelmäßiges Viereck, Achteck und Sechzehneck

Als Umfang u_4 des Quadrats entsteht

$$u_4 = 4r \cdot \sqrt{2} \approx \underline{\underline{5{,}6568 \cdot r}}.$$

Als Flächeninhalt ergibt sich

$$F_4 = \left(r \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{2 \cdot r^2}}.$$

Das regelmäßige Sechseck

Das Bestimmungsdreieck für das regelmäßige Sechseck ist gleichseitig, weil der Winkel an der Spitze M die Größe 60° hat. Man erhält die Eckpunkte $B_1B_2 \dots B_6$, indem man den Radius r mit dem Zirkel sechsmal hintereinander als Sehne des Umkreises abträgt (Abb.217).

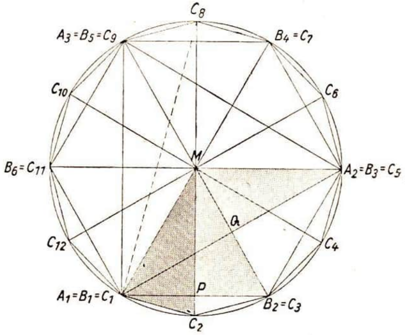


Abb.217. Regelmäßiges Sechseck, Dreieck und Zwölfeck

Für die Sechseckseite gilt also $a_6 = \underline{\underline{r}}$,
für den Umfang $U_6 = \underline{\underline{6r}}$,
für den Flächeninhalt $F_6 = 6 \cdot \frac{1}{2}\,\overline{B_1B_2} \cdot \overline{MP}$,

wenn P der Fußpunkt des von M auf B_1B_2 gefällten Lotes ist. Dabei ist

$$\overline{MP}^2 = \overline{B_1M}^2 - \overline{B_1P}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2,$$

$$MP = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3} \approx \frac{r}{2} \cdot 1{,}7321 = r \cdot 0{,}8660,$$

die halbe Schlüsselweite des Sechskants mit dem Eckenmaß $2r$. Man erhält

$$F_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2} r^2 \cdot \sqrt{3} \approx \frac{3}{2} \cdot 1{,}7321\, r^2 = \underline{\underline{2{,}5981\, r^2.}}$$

Das regelmäßige Dreieck

Überspringt man beim Verbinden der sechs Kreisschnittpunkte B jedesmal einen, so entsteht das regelmäßige (gleichseitige) Dreieck $A_1A_2A_3$. Die Dreiecksseite a_3 kann als Kathete A_1A_2 des bei A_2 rechtwinkligen Dreiecks $A_1A_2B_4$ berechnet werden. Da $A_1B_4 = 2r$, $A_2B_4 = r$ ist, ergibt sich aus $\overline{A_1B_4}^2 - \overline{A_2B_4}^2 = \overline{A_1A_2}^2$

$$a_3^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2 \text{ und } a_3 = r \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{1{,}7321 r.}}$$

Als Umfang erhält man

$$U_3 = 3 \cdot r\sqrt{3} \approx \underline{\underline{5{,}1962 \cdot r.}}$$

Da die Höhe A_3Q des Dreiecks $A_1A_2A_3$ die Länge $A_3M + MQ = r + \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$ hat, ist sein Flächeninhalt

$$F_3 = \tfrac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_3Q = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{3} \cdot \tfrac{3}{2} r = \tfrac{3}{4} r^2 \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{1{,}2990 r^2.}}$$

Weitere Berechnungen ergeben folgende Tabelle:

Regelmäßige Vielecke
(Umkreisradius r)

Eckenzahl	Seite s	Umfang u	Flächeninhalt F
3	$r \cdot \sqrt{3} = 1{,}7321\, r$	$r \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 5{,}1962 r$	$r^2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3} = 1{,}2990 r^2$
4	$r \cdot \sqrt{2} = 1{,}4142 r$	$r \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 5{,}6568 r$	$2r^2$
6	r	$6r$	$r^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} = 2{,}5981\, r^2$
8	$r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0{,}7654 r$	$r \cdot 8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 6{,}1229 r$	$r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2{,}8284 r^2$
12	$r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}5176 r$	$r \cdot 12 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 6{,}2117 r$	$3r^2$
16	$r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ $= 0{,}3902 r$	$r \cdot 16 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ $= 6{,}2429 r$	$r^2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ $= 3{,}0616 r^2$

AUFGABEN

1. Ein Werkstück, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck von $a = 20$ mm Seitenlänge ist, soll so ausgebohrt werden, daß die Wandstärke an den dünnsten Stellen $w = 2$ mm beträgt. Welcher Bohrerdurchmesser ist zu wählen?

2. An ein Stück Rundstahl ist ein Dreikant anzufeilen, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenkante $a = 30$ mm ist. Welchen Durchmesser d muß der Rundstahl wenigstens haben?

3. Bei einem Stück Vierkantstahl (Produktionsform) hat der Querschnitt die Seitenlängen $AB = 45$ mm, $BC = 30$ mm, $CD = 25$ mm und $DA = 40$ mm. Es soll eine Bohrung von 20 mm Durchmesser so ausgedreht werden, daß die dünnsten Wandstärken an allen Seiten gleich sind. Der Mittelpunkt der Bohrung ist anzureißen.

4. Bei einem Rollenlager hat der Außenring den Innendurchmesser d und umschließt 8 Rollen, von denen je zwei benachbarte einander berühren. Die Querschnitte der Rollen und die Außenseite des Innenringes sind dem Schnitt durch den Außenring einzuzeichnen.

5. Welche Seitenlänge kann der Querschnitt eines Dreikants höchstens haben, das aus einem Rundstahl von 20 mm Durchmesser gefräst wird?

6. Das Eckenmaß e einer Sechskantmutter beträgt 98 mm. Wie groß sind

a) Seitenkante, **b)** Schlüsselweite?

7. Bei einer Vierkantmutter beträgt die Schlüsselweite 22 mm. Wie groß ist das Eckenmaß?

8. An einem Bolzen von 20 mm Durchmesser ist ein quadratischer Zapfen mit möglichst großer Seitenlänge anzufeilen. Wie groß ist die Seitenlänge des Zapfenquerschnitts?

9. Es ist eine Vierkantmutter mit der Schlüsselweite 14 mm aus Rundstahl anzufertigen. Welchen Durchmesser muß der Rundstahl mindestens haben?

10. Aus einem Bolzen von 110 mm Durchmesser ist eine möglichst große Sechskantmutter anzufertigen. Welche Schlüsselweite hat die Mutter?

8. Kreisberechnungen

Bei einer Kreisfläche ist vor allem die Kenntnis von Umfang und Inhalt wichtig. Beide Größen lassen sich berechnen, wenn der Durchmesser des Kreises bekannt ist (Abb. 218).

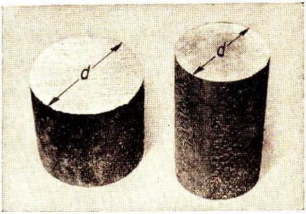


Abb. 218. Aus dem Durchmesser einer Kreisfläche lassen sich deren Umfang und Inhalt berechnen

a) Der Kreisumfang

In Abb. 219 ist $\triangle A_1MA_2$ das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen n-Ecks, das dem um M mit dem Radius r geschlagenen Kreis einbeschrieben ist. Es ist also $A_1A_2 = a_n$ und $A_1M = A_2M = r$. Die Halbierungslinie des Winkels A_1MA_2 schneidet den Kreis in D_1. $A_1D_1 = A_2D_1 = a_{2n}$ sind Seiten des demselben Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Da $A_1A_2 < A_1D_1 + A_2D_1$, also $a_n < 2 \cdot a_{2n}$ ist, sind auch die n-fachen Werte in demselben Sinn ungleich, und es ergibt sich $n \cdot a_n < 2n \cdot a_{2n}$, d.h.:

Der Umfang des einem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist kleiner als der Umfang des demselben Kreis einbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Die in den Punkten A_1 und A_2 an den Kreis gelegten Tangenten schneiden einander in C_1. C_1A_1 und C_1A_2 sind Hälften der Seiten c_n eines dem Kreis mit dem Radius r umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Wird auch in D_1 die Tangente an den Kreis gelegt, die A_1C_1 in E_1 und A_2C_1 in E_2 schneidet, so ist $E_1E_2 = c_{2n}$ eine Seite des dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Es gilt $E_1D_1 = E_1A_1 = E_2D_1 = E_2A_2$

und $E_1E_2 < E_1C_1 + C_1E_2$, also auch

$$E_1E_2 + A_1E_1 + E_2A_2 < E_1C_1 + C_1E_2 + A_1E_1 + E_2A_2$$

oder $2 \cdot c_{2n} < c_n$,

$2n \cdot c_{2n} < n \cdot c_n$, d.h.:

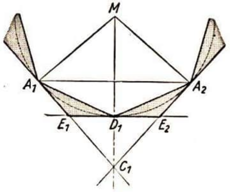


Abb.219. Vom regelmäßigen Vieleck zum Kreis

Der Umfang des einem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist größer als der Umfang des demselben Kreis umbeschriebenen regelmäßigen $2n$-Ecks.

Der Kreisumfang bildet bei Vergrößerung der Seitenzahl für das Wachsen des Umfangs einbeschriebener Vielecke die obere, für das Abnehmen des Umfangs umbeschriebener Vielecke die untere Grenze.

Das Berechnen ergibt folgende Werte, wenn d der Kreisdurchmesser ist:

Eckenzahl	Umfang des	
	einbeschriebenen Vielecks	umbeschriebenen Vielecks
3	$2{,}598\,08 \cdot d$	$5{,}196\,15 \cdot d$
6	$3{,}000\,00 \cdot d$	$3{,}464\,10 \cdot d$
12	$3{,}105\,83 \cdot d$	$3{,}215\,39 \cdot d$
24	$3{,}132\,63 \cdot d$	$3{,}159\,66 \cdot d$
48	$3{,}139\,35 \cdot d$	$3{,}146\,09 \cdot d$
96	$3{,}141\,03 \cdot d$	$3{,}142\,71 \cdot d$
192	$3{,}141\,45 \cdot d$	$3{,}141\,87 \cdot d$
384	$3{,}141\,56 \cdot d$	$3{,}141\,66 \cdot d$
768	$3{,}141\,58 \cdot d$	$3{,}141\,61 \cdot d$
1536	$3{,}141\,59 \cdot d$	$3{,}141\,60 \cdot d$

Der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d liegt zwischen $3{,}141\,59\,d$ und $3{,}141\,60\,d$.

Den Zahlenfaktor, mit dem man den Kreisdurchmesser d multiplizieren muß, um den Kreisumfang U zu erhalten, bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π (gesprochen pi). Es ist

$$U = \pi \cdot d = 2\pi r \quad \text{(für } d \text{ eingesetzt } 2r\text{).}$$

π ist eine Zahl, die sich nicht in der Form eines Bruches darstellen läßt, die aber beliebig genau errechnet werden kann. Näherungswerte sind auf 2 Stellen genau 3,14 oder $3\frac{1}{7}$, auf 4 Stellen genau 3,1416.

Kreisumfang $\boxed{U = 2\pi r = \pi d}$ $\boxed{\pi = 3{,}1416}$

b) Der Kreisinhalt

Der Flächeninhalt eines Kreises liegt zwischen den Inhalten regelmäßiger Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben und umbeschrieben sind. Die Vielecksflächen nähern sich der Kreisfläche um so mehr, je größer die Eckenzahl ist.

Die Berechnung führt hier, wenn mit r der Kreisradius bezeichnet wird, zu folgenden Werten:

Eckenzahl	Inhalt des einbeschriebenen Vielecks	Inhalt des umbeschriebenen Vielecks
3	$1{,}299\,04 \cdot r^2$	$5{,}196\,15 \cdot r^2$
6	$2{,}598\,08 \cdot r^2$	$3{,}464\,10 \cdot r^2$
12	$3{,}000\,00 \cdot r^2$	$3{,}215\,39 \cdot r^2$
24	$3{,}105\,83 \cdot r^2$	$3{,}159\,66 \cdot r^2$
48	$3{,}132\,63 \cdot r^2$	$3{,}146\,09 \cdot r^2$
96	$3{,}139\,35 \cdot r^2$	$3{,}142\,71 \cdot r^2$
192	$3{,}141\,03 \cdot r^2$	$3{,}141\,87 \cdot r^2$
384	$3{,}141\,45 \cdot r^2$	$3{,}141\,66 \cdot r^2$
768	$3{,}141\,56 \cdot r^2$	$3{,}141\,61 \cdot r^2$
1536	$3{,}141\,58 \cdot r^2$	$3{,}141\,60 \cdot r^2$

Der Flächeninhalt des Kreises, der mit dem Radius r geschlagen ist, ergibt

$$F = \pi \cdot r^2 \qquad \text{oder} \qquad F = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\left(r = \frac{d}{2}, \qquad r^2 = \frac{d^2}{4}\right).$$

Flächeninhalt des Kreises $\boxed{F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2}$

c) Der Kreisring

Zwei konzentrische Kreise mit den Durchmessern d_1 und d_2 (Abb.220) begrenzen einen Kreisring. Sein Flächeninhalt ist die Differenz der Kreisflächen:

$$F = \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} - \pi \cdot \frac{d_2^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_1^2 - d_2^2).$$

Nun ist $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2) \cdot (d_1 - d_2)$ (vgl. S. 54).

Nennt man $d_m = \frac{d_1 + d_2}{2}$ den mittleren Ringdurchmesser,

$w = \frac{d_1 - d_2}{2}$ die Stärke des Ringes,

so erhält man für die Ringfläche

$$F = \pi \cdot d_m \cdot w.$$

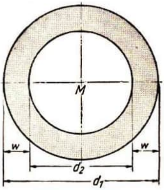


Abb.220. Kreisring

Flächeninhalt des Kreisringes $\boxed{F = \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2)(d_1 - d_2)}$

d) Der Kreisausschnitt (Sektor)

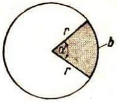


Abb.221. Kreisausschnitt

Schließen die beiden zur Abgrenzung eines Kreisausschnitts gehörenden Radien r des Kreises den Zentriwinkel α ein (Abb.221), so gilt für die Länge b des Kreisbogens die Proportion

$$b : 2r\pi = \alpha : 360 .$$

Hieraus ergibt sich $\qquad b = \pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot r,$

für $r = \frac{d}{2}$ somit $\qquad b = \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot d.$

Der Umfang des Kreisausschnitts ist demnach

$$U = d + \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot d = \frac{360 + \pi \cdot \alpha}{360} \cdot d.$$

Für die Sektorfläche F gilt die Proportion

$$F : (r^2 \cdot \pi) = \alpha : 360$$

und ergibt

$$F = \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{\alpha}{1440} \cdot d^2.$$

Da $F = \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot r\right) \cdot r$ und $\pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot r = b$, kann man auch setzen

$$F = \frac{1}{2}\, b \cdot r.$$

Flächeninhalt des Kreisausschnitts $\qquad \boxed{F = \pi \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot r^2 = \frac{b \cdot r}{2}} \qquad \boxed{b = \pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot r}$

e) Der Kreisabschnitt (Segment)

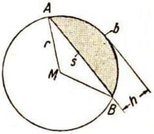


Abb.222. Kreisabschnitt

Ein Abschnitt eines mit dem Radius r um den Punkt M geschlagenen Kreises werde durch die Sehne $\overline{AB} = s$ und den Bogen $\overset{\frown}{AB} = b$ begrenzt und habe die Höhe h (Abb.222). Dann ergibt sich als Umfang des Kreisabschnitts

$$U = b + s.$$

Die Fläche des Kreisausschnitts kann als Differenz des Kreisausschnitts $ABM\left(=\frac{br}{2}\right)$ und des Dreiecks $ABM\left(= s \cdot \frac{r-h}{2}\right)$ berechnet werden und ergibt, wenn mit h die Bogenhöhe bezeichnet wird,

$$F = \frac{b \cdot r}{2} - s \cdot \frac{r-h}{2} = \frac{r \cdot (b-s) + h \cdot s}{2}.$$

Der Zusammenhang mit dem zugehörigen Zentriwinkel $AMB = \alpha$ ist für den Bogen b durch $b = \pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot r$ dargestellt.

Tabellen, die für einen Kreis mit dem Radius 1 die Bogenlängen zu beliebigen Winkeln angeben, enthalten gewöhnlich auch Angaben für die Größen h, s und F.

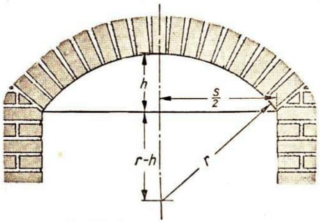


Abb.223. Oberteil eines Bogenfensters

Werte dieser Art enthält das „Tabellenbuch Metall für den Unterricht an Berufs- und Fachschulen", 4. Aufl., S. 48 und 49. Die Zahlenangaben gelten für $r = 1$, sind also für andere Werte r umzurechnen.

Beispiel 1: Für den Oberteil eines Fensters (Abb. 223) sind die Spannweite (Sehnenlänge) $s = 1{,}60$ m und die „Pfeilhöhe" (Bogenhöhe) $h = 0{,}40$ m gegeben. Die Größe dieses Teils der Fensteröffnung (Fläche des Kreisabschnitts) F soll aus der Tabelle entnommen werden.

Lösung: Zunächst ist der Kreisradius r zu bestimmen; r ist Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\frac{s}{2}$ und $(r - h)$, ergibt sich also nach dem Lehrsatz des Pythagoras aus der Gleichung

$$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

$$r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{s^2}{4},$$

$$2rh = h^2 + \frac{s^2}{4},$$

$$8rh = 4h^2 + s^2,$$

$$r = \frac{4h^2 + s^2}{8 \cdot h} = \frac{4 \cdot 0{,}4^2 + 1{,}6^2}{8 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}64 + 2{,}56}{8 \cdot 0{,}4} = \frac{3{,}2}{3{,}2} = 1.$$

Da der Radius 1 ist, gelten die Tabellenwerte. Es ergibt sich, auf 2 Stellen gerundet, für die Bogenlänge $b = 1{,}85$ m, für die Fläche $F = 0{,}44$ m², für den zugehörigen Zentriwinkel $\alpha = 106°$.

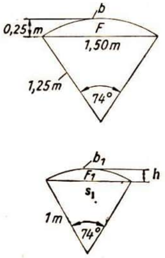


Abb.224. Zu Beispiel 2

Beispiel 2: Bei einem Fensteroberteil mit der Spannweite $s = 1{,}50$ m und der Pfeilhöhe $h = 0{,}25$ m erhält man nach Beispiel 1

$$r = \frac{4 \cdot 0{,}25^2 + 1{,}5^2}{8 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}25 + 2{,}25}{2} = 1{,}25\,.$$

Zu diesem Flachbogenfenster gehört der Kreisradius $r = 1{,}25$ m. Für den Radius 1 m ergibt sich die entsprechende Spannweite s_1 aus der Proportion $1{,}25 : 1 = 1{,}5 : s_1$ zu

$$s_1 = \frac{1{,}5}{1{,}25} = 1{,}2\,,$$

die entsprechende Pfeilhöhe h_1 aus der Proportion $1{,}25 : 1 = 0{,}25 : h_1$ zu

$$h_1 = \frac{0{,}25}{1{,}25} = 0{,}2 \quad \text{(Abb. 224)}.$$

Zu diesen für den Radius 1 geltenden Werten ergibt die Tabelle die Bogenlänge $b_1 = 1{,}29$, die Fläche des Kreisabschnitts $F_1 = 0{,}165$, den Zentriwinkel $\alpha_1 = 74°$.
Für $r = 1{,}25$ (m) bleibt $\alpha = 74°$, man erhält aber

$$b = b_1 \cdot r = 1{,}29 \cdot 1{,}25 \approx \underline{\underline{1{,}61\ (\mathrm{m})}},$$

und

$$F = F_1 \cdot r^2 = 0{,}165 \cdot 1{,}25^2 \approx \underline{\underline{0{,}26\ (\mathrm{m}^2)}}.$$

Wird nämlich die zum Radius 1 gehörende Fläche durch

$$F_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}29 - \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}2\,(1 - 0{,}2) = 0{,}165$$

berechnet, so entsteht die zum Radius $r = 1{,}25$ gehörende Fläche durch

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot 1{,}29 \cdot r - \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot r\,(r - 0{,}2 \cdot r) \\ &= F_1 \cdot r^2 = F_1 \cdot 1{,}25^2 = 0{,}165 \cdot \tfrac{25}{16} = 0{,}258 \approx 0{,}26\,. \end{aligned}$$

Aus den zum Radius 1 gehörenden Tafelwerten der Längen ergeben sich die zum Radius r gehörenden Längen durch Multiplikation mit r. Aus dem zum Radius 1 gehörenden Tafelwert der Fläche ergibt sich die zum Radius r gehörende Fläche durch Multiplikation mit r^2.

AUFGABEN

1. Um ein Wagenrad von 550 mm Durchmesser soll vom Schmied ein Stahlreifen gelegt werden. Auf welche Länge muß der Bandstahl zugeschnitten werden, wenn für die Feuerschweißung noch 160 mm Zugabe erforderlich sind?

2. Das Antriebsrad des sowjetischen Großlastwagens Typ Mammut hat einen äußeren Reifendurchmesser von 1800 mm. Um wieviel bewegt sich das Fahrzeug bei einer Umdrehung des Rades?

3. Auf der Drehbank wird eine Welle mit dem Durchmesser 90 mm und der Länge 450 mm einmal überdreht. Wie lang wird der Span (Fließspan), wenn der Drehmeißel bei jeder Umdrehung der Welle um 1,5 mm vorrückt?

4. Welchen Umfang hat die Querschnittsfläche von Rundstahl mit 5 (8; 10; 11; 16; 25; 29; 38; 46; 52; 74; 155) mm Durchmesser?

5. Welchen Außendurchmesser haben Stahlrohre mit einem äußeren Querschnittsumfang von 69,1 (157,1; 44,0; 182,2; 88,0; 37,7; 150,8; 56,6; 94,2; 141,4) mm?

6. Wie groß ist der Blechbedarf in mm² für 20 kreisförmige Blechscheiben mit einem Durchmesser von 27 (105; 17; 43; 33) mm, wenn der Verschnitt 25% beträgt?

7. Welche Querschnittsfläche hat ein Stahlrohr, dessen Außendurchmesser
a) 22 mm und dessen Wandstärke 2 mm,
b) 16 „ „ „ „ 2,5 mm,
c) 18 „ „ „ „ 3 mm,
d) 28 „ „ „ „ 6 mm,
e) 50 „ „ „ „ 7 mm beträgt?

8. Welchen Scheibendurchmesser hat eine Unterlegscheibe, deren Querschnitt eine Kreisringfläche von
a) 13,36 mm² mit einem Lochdurchmesser von 1,8 mm,
b) 49,1 „ „ „ „ „ 4,3 „
c) 259,77 „ „ „ „ „ 10,5 „
d) 671,52 „ „ „ „ „ 21,0 „
e) 6016,92 „ „ „ „ „ 58 „ ist?

9. Für ein Schmalfilmgerät soll nach Abb. 225 eine rotierende dreiteilige Belichtungsscheibe angefertigt werden. Der Scheibendurchmesser ist $d = 120$ mm. Wie groß ist der Blechbedarf (ohne Berücksichtigung des Verschnitts) für die Belichtungsscheibe?

10. Es ist das Blech für einen Trichter zuzuschneiden, dessen oberer Rand 120 mm Durchmesser hat und dessen Seitenlänge 110 mm beträgt. (Die Ausflußöffnung des Trichters soll nicht berücksichtigt werden.) Mit welchem Zentriwinkel ist der Trichtermantel anzureißen, und wie groß ist die Mantelfläche?

11. Für einen Ventilator sind Flügel in der Form von Kreissektoren mit der Bogenlänge $b = 66$ mm und dem Zentriwinkel $\alpha = 21°$ anzufertigen. Welchen Durchmesser hat das Flügelrad?

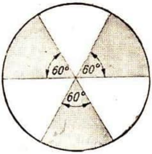


Abb. 225. Dreiteilige Belichtungsblende

12. Ein Brunnenschacht hat einen inneren Durchmesser von 1,5 m. Die Wand ist aus 38 cm dickem Klinkermauerwerk hergestellt. Wie groß ist die gemauerte Ringfläche?

13. Eine Torbogenöffnung soll hergestellt werden. Der Maurer erhält folgende Maße:

Sehne $s = 3{,}8$ m, Radius $r = 2{,}755$ m,
Höhe $h = 0{,}76$ m, Zentriwinkel $\alpha = 87°$.

Die Bogenlänge und die Segmentfläche der Öffnung sollen berechnet werden.

14. Aus einer kreisförmigen Blechplatte ($d = 1{,}2$ m) sollen 16 gleichgroße Löcher ($d = 4$ cm) gestanzt werden. Die Lochmitten liegen 12 cm vom Rand entfernt und sind auf der Platte gleichmäßig verteilt.

a) Fertige eine Zeichnung (M 1 : 10) an!

b) Berechne den Umfang des die Lochreihe umschließenden Kreises!

c) Welchen Flächeninhalt hat die Blechplatte nach dem Ausstanzen?

15. Aus einem zylindrischen Baumstamm von 3 m Länge und kreisförmigem Querschnitt von 75 cm Durchmesser soll ein möglichst starker Balken von quadratischem Querschnitt hergestellt werden. Wie groß sind die Querschnittskante des Balkens und der beim Bearbeiten entstehende Abfall (in Prozenten)?

16. Eine Schleifscheibe von 350 mm Durchmesser hat eine Drehzahl $n = 1470 \frac{1}{\text{min}}$. Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit in km/h? (Mit dieser Geschwindigkeit würde ein sich lösendes Teilchen tangential davonfliegen.)

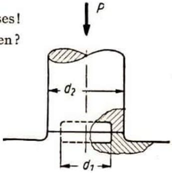


Abb. 226. Ringförmiger Stützzapfen

17. Auf einen ringförmig ausgebildeten Stützzapfen (Abb. 226, $d_1 = 30$ mm; $d_2 = 60$ mm) wirkt eine Kraft von $P = 1500$ kp. Wie groß ist der Druck (Druck = Kraft : Fläche)?

9. Ellipse

a) Grundeigenschaften

Wird ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt schräg zur Rohrrichtung durchschnitten, so entsteht als Schnittfigur eine Ellipse (Abb. 227). Da in der Rohrrichtung auf den Mantel des Rohres parallele gerade Linien gelegt werden können, verbindet jede dieser Mantellinien einen Punkt P_1 des

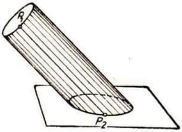


Abb. 227. Schneidet man ein Kreisrohr schräg an, so entsteht eine Ellipse

kreisförmigen Rohrquerschnitts mit einem Punkt P_2 der Schnittellipse. Der Kreis wird durch parallele Gerade auf die Schnittebene als Ellipse projiziert. Man sagt deshalb auch:

Die Ellipse ist die Parallelprojektion eines Kreises auf eine Ebene, die zur Kreisebene schräg liegt.

Abb.228 zeigt zwei Kugeln[1]) gleicher Größe, die genau in einen Zylinder passen. Die eine berührt die Zylinderwand im Kreise k_1 und die Ebene der Schnittellipse im Punkte F_1, die andere berührt die Zylinderwand im Kreise k_2, die Ellipsenebene im Punkte F_2. Durch den Punkt P der Ellipse geht eine Mantellinie, die im Schnittpunkt A mit dem Kreis k_1 die obere, im Schnittpunkt B mit k_2 die untere Kugel berührt. In der Ellipsenebene ist P mit F_1 und F_2 verbunden. PA und PF_1 sind Abschnitte zweier Tangenten, die von P an die obere, PB und PF_2 Abschnitte zweier Tangenten, die von P an die untere Kugel gelegt sind. Nun schneidet die durch PA und PF_1 bestimmte Ebene die obere Kugel in einem Kreis, für den PA und PF_1 Abschnitte der von P ausgehenden Tangenten sind. Die durch PB und PF_2 bestimmte Ebene schneidet die untere Kugel in einem Kreis, für den PB und PF_2 Abschnitte der von P ausgehenden Tangenten sind. Es gilt also $PA = PF_1$ und $PB = PF_2$, weil diese Strecken jeweils Tangenten an denselben Kreis sind.

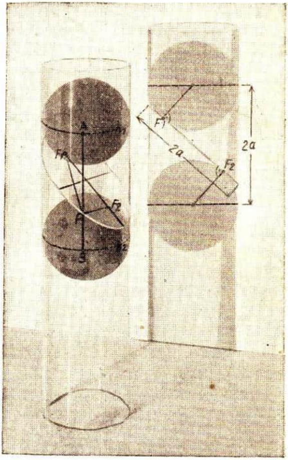


Abb.228. Die Dandelinschen Kugeln

Die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 liegen rechtwinklig zur Zylinderachse. Bei jeder Lage des Punktes P auf der Ellipse gibt demnach $PA + PB$ den unveränderlichen Abstand AB der parallelen Kreisebenen an. Ihm gleich ist auch $PF_1 + PF_2$. Daraus folgt:

Die Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) ist konstant.

b) *Konstruktion*

Um Rohrleitungen für Gas, Wasser oder Dampf mit Kesseln, Pumpen usw. sicher zu verbinden, werden Flansche von vielerlei Formen verwendet; ovale erinnern häufig an die Form einer Ellipse. Ist eine Ellipse anzureißen, so wird, wenn kein Ellipsenzirkel zur Verfügung steht, gewöhnlich die „Fadenkonstruktion" oder „Gärtnerkonstruktion" verwendet.

---

[1]) Zuerst verwendet von dem belgischen Ingenieur Dandelin (1794—1847), man nennt sie deshalb die *Dandelinschen Kugeln*.

Fadenkonstruktion

Man schlägt in die Zeichenebene zwei Drahtstifte an die Stellen der Brennpunkte F_1 und F_2, legt um beide einen geschlossenen Faden und spannt ihn durch die Reißnadel oder den Zeichenstift. Dann verschiebt man den Zeichenstift so, daß der Faden immer gespannt bleibt. Die Stiftspitze P beschreibt dabei eine Ellipse. Es ändert sich bei allen Stellungen des Zeichenstiftes weder die Fadenlänge l der Schlinge, noch der Abstand $F_1F_2 = 2e$; somit bleibt bei jeder Lage des wandernden Punktes P unverändert $PF_1 + PF_2 = l - 2e$.

Die Kurve, die der Punkt P beschreibt, hat zwei Symmetrieachsen (Abb.229). Sie ist symmetrisch zur Geraden F_1F_2 und schneidet diese Symmetrieachse in den Punkten A_1 und A_2. Ferner ist sie symmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke F_1F_2 und schneidet diese Symmetrieachse in den Punkten B_1 und B_2.

A_1 und A_2 werden **Hauptscheitel,** B_1 und B_2 **Nebenscheitel** der Ellipse genannt.

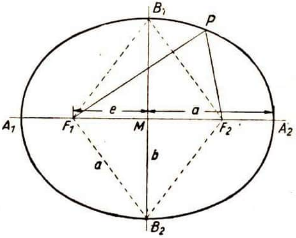


Abb.229. Ellipse

Dabei ist $A_1F_2 = \frac{l}{2}$ und $A_2F_1 = \frac{l}{2}$, $A_1F_1 = A_2F_2 = \frac{l}{2} - 2e$,

$A_1A_2 = A_1F_2 + F_2A_2 = l - 2e$,

$F_1B_1 = F_2B_1 = F_1B_2 = F_2B_2 = \frac{l - 2e}{2}$ und im Dreieck $F_1B_1B_2$

$B_1B_2 < F_1B_1 + F_1B_2$, also $B_1B_2 < l - 2e$, d. h. $B_1B_2 < A_1A_2$.

Man nennt deshalb A_1A_2 die **große Achse,** B_1B_2 die **kleine Achse** der Ellipse. Wenn M der Achsenschnittpunkt ist, heißt $A_1M = A_2M = a$ die *große Halbachse,* $B_1M = B_2M = b$ die *kleine Halbachse* der Ellipse.

Es ist $F_1A_1 + A_1F_2 = F_2A_2 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$. Also gilt nach dem obigen Satz auch für jeden anderen Punkt P der Ellipse

$$\boxed{F_1P + PF_2 = 2a}$$

Da $F_1B_1 + B_1F_2 = 2a$, und $F_1B_1 = B_1F_2$, ist $F_1B_1 = B_1F_2 = a$. Ebenso ist $F_1B_2 = F_2B_2 = a$ und im rechtwinkligen Dreieck F_1MB_1 nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\overline{F_1B_1}^2 = \overline{F_1M}^2 + \overline{B_1M}^2$, d.h.

$$\boxed{a^2 = e^2 + b^2}$$

Sind die Achsen $2a$ und $2b$ einer Ellipse gegeben, so erhält man die Brennpunkte F_1 und F_2 auf der großen Achse durch den um einen Nebenscheitel mit der großen Halbachse a geschlagenen Kreis. Die Länge der Fadenschlinge ist $l = 2 \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2})$.

Angenäherte Konstruktion

Die Ellipse kann zwar nicht mit einem gewöhnlichen Zirkel gezeichnet werden, aber die in der Nähe der Scheitel verlaufenden Ellipsenbogen werden oft durch Kreisbogen ersetzt, deren Mittelpunkte auf den Symmetrieachsen liegen und deren Radien passend bestimmt sind. Vorgegeben seien die große Achse A_1A_2 und die kleine Achse B_1B_2 (Abb. 230). Man zieht durch B_1 die Parallele zur Achse A_1A_2, durch A_1 die Parallele zu B_1B_2, die einander in C schneiden. Von C aus fällt man das Lot auf A_1B_1 bis zu den Schnittpunkten G_1 mit A_1A_2 und K_1 mit B_1B_2. G_1 ist der Mittelpunkt eines Kreises, der sich in A_1 dem Verlauf der Ellipse anschmiegt, K_1 der Mittelpunkt des entsprechenden Kreises für den Scheitel B_1. Die Mittelpunkte G_2 und K_2 der Krümmungskreise für die Scheitel A_2 und B_2 ergeben sich durch die Symmetrie. Der Übergang von dem Bogen des Krümmungskreises für den einen Scheitel zum Bogen des benachbarten ist mit einem Kurvenlineal zu ergänzen.

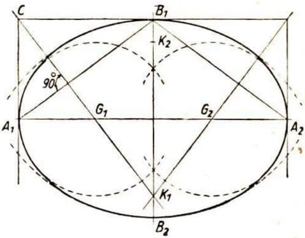


Abb. 230. Näherungskonstruktion einer Ellipse

Die Begründung für die angegebene Konstruktion wird hier übergangen, da sie mehr mathematisches Wissen voraussetzt, als in diesem Buche vermittelt werden kann.

c) *Umfang*

Eine Formel zur genauen Berechnung des Ellipsenumfanges kann auch mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik nicht aufgestellt werden.

Für die Berechnung des Ellipsenumfanges wird folgender Ausdruck entwickelt:

$$U = 2\pi a \cdot \{1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\varepsilon^2)^2 - \tfrac{1}{5}\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\varepsilon^3)^2 - \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\varepsilon^4)^2 - \cdots\},$$

wobei a die große Halbachse und ε als Abkürzung für $\frac{e}{a}$ gesetzt ist.

Die Zahl der durch die geschwungenen Klammern zusammengefaßten Glieder ist unbegrenzt, wie durch die am Ende stehenden Punkte angedeutet wird. Aus der Schreibform der angegebenen Glieder erkennt man das Bildungsgesetz der folgenden Glieder. Der Wert für U ergibt sich um so genauer, je mehr aufeinanderfolgende Summanden des Klammerausdrucks aufgeschrieben und berechnet werden. Die Berechnung selbst ist zeitraubend, auch wenn der errechnete Wert nur auf zwei Stellen genau angegeben werden soll. Deshalb verwendet der Techniker **Näherungsformeln.**

Von den in der Praxis verwendeten Näherungsformeln ist die einfachste

$$\boxed{U = \pi \cdot \frac{D + d}{2}}$$

Dabei bezeichnet D die große, d die kleine Ellipsenachse.
Eine genauere Näherungsformel ist

$$\boxed{U = \frac{3\pi}{4}(D + d) - \frac{\pi}{2}\sqrt{D \cdot d}}$$

Sie wird z. B. bei der Erdmessung zum Berechnen von Meridianbogenlängen verwendet.

Beispiel:

Es soll der Umfang einer Ellipse berechnet werden, deren große Achse 10 m und deren kleine Achse 6 m lang ist.

Wir haben $D = 2a = 10\text{ m}, \quad d = 2b = 6\text{ m},$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25\text{ m}^2 - 9\text{ m}^2} = 4\text{ m}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{4\text{ m}}{5\text{ m}} = \frac{4}{5}.$$

Lösung:

1. Näherungsformel:

$$U = \pi \cdot \frac{D + d}{2}$$

$$= \pi \cdot \frac{10\text{ m} + 6\text{ m}}{2} = \pi \cdot 8\text{ m} = \underline{\underline{25{,}13\text{ m}}}$$

2. Näherungsformel:

$$U = \frac{3\pi}{4}(D + d) - \frac{\pi}{2}\sqrt{D \cdot d}$$

$$= \frac{3\pi}{4}(10\text{ m} + 6\text{ m}) - \frac{\pi}{2}\sqrt{10\text{ m} \cdot 6\text{ m}}$$

$$= \pi \cdot 12\text{ m} - \pi \cdot 3{,}873\text{ m} = \pi \cdot 8{,}127\text{ m} = \underline{\underline{25{,}532\text{ m}}}$$

Nach dem zuerst genannten Verfahren ergibt der Ellipsenumfang unter Berücksichtigung von 16 Summanden, auf 3 Dezimalen genau berechnet, $U = 25{,}527$ m.

d) Inhalt

Abb. 231 zeigt noch einmal das in Abb. 227 dargestellte Rohrmodell. Die Ebene, die durch die Rohrachse und die Hauptachse A_1A_2 der Ellipse geht, schneidet den Kreis in C_1 und C_2. Das Rohr wird in den Mantellinien C_1A_1 und C_2A_2 geschnitten. G_1 und G_2 sind als Punkte des Kreisdurchmessers C_1C_2 willkürlich angenommen. Die durch G_1 zu A_1C_1 gezogene Parallele schneidet A_1A_2 in E_1, die durch G_2 gezogene Parallele in E_2. Nach dem Strahlensatz gilt die Proportion

$$E_1E_2 : G_1G_2 = A_1A_2 : C_1C_2 .$$

Der Kreisdurchmesser C_1C_2 hat die Länge der Nebenachse der Ellipse. Aus der Proportion folgt deshalb

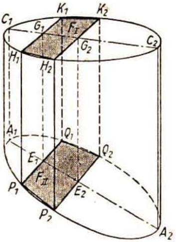


Abb. 231. Zur Berechnung der Ellipsenfläche

$$\frac{E_1E_2}{G_1G_2} = \frac{a}{b}, \quad E_1E_2 = \frac{a}{b} \cdot G_1G_2 .$$

Legt man durch G_1 und G_2 rechtwinklig zu C_1C_2 die Kreissehnen H_1K_1 und H_2K_2 und durch E_1 und E_2 rechtwinklig zu A_1A_2 die Ellipsensehnen P_1Q_1 und P_2Q_2, so werden $P_1H_1K_1Q_1$ und $P_2H_2K_2Q_2$ Rechtecke, $P_1Q_1 = H_1K_1$ und $P_2Q_2 = H_2K_2$.

Das Trapez $H_1H_2K_2K_1$ hat den Flächeninhalt $F_{\text{I}} = \frac{1}{2} \cdot (H_1K_1 + H_2K_2) \cdot G_1G_2$.

Das Trapez $P_1P_2Q_2Q_1$ hat den Flächeninhalt $F_{\text{II}} = \frac{1}{2} \cdot (P_1Q_1 + P_2Q_2) \cdot E_1E_2$.

Es ergibt sich also $\dfrac{F_{\text{II}}}{F_{\text{I}}} = \dfrac{E_1E_2}{G_1G_2}, \quad \dfrac{F_{\text{II}}}{F_{\text{I}}} = \dfrac{a}{b}, \quad F_{\text{II}} = \dfrac{a}{b} \cdot F_{\text{I}} .$

Die gleiche Beziehung gilt für jedes in derselben Weise dem Kreis einbeschriebene Trapez und das entsprechende der Ellipse.

Haben benachbarte Trapeze eine Grundlinie gemeinsam, so ergibt die Summe der dem Kreis einbeschriebenen Trapeze den Kreisinhalt um so genauer, je kleiner der Abstand der Parallelseiten gemacht wird. Die Summe der entsprechenden Trapeze in der Ellipse strebt dem Ellipseninhalt F zu. Die Summe aller Trapeze der Ellipse ergibt nach der obigen Formel das $\frac{a}{b}$-fache der Summe der zugehörigen Trapeze des Kreises. Der Kreis hat den Radius b und die Fläche $\pi \cdot b^2$. Es gilt also für den Flächeninhalt F der Ellipse $F = \pi \cdot b^2 \cdot \frac{a}{b}$, $F = \pi \cdot a \cdot b$ oder, wenn man $a = \frac{D}{2}$, $b = \frac{d}{2}$ setzt, $F = \frac{\pi}{4} D \cdot d$.

Flächeninhalt der Ellipse $\boxed{F = \pi a b = \frac{\pi}{4} D \cdot d}$

Beispiel:

Eine Ellipse mit der großen Achse $D = 10$ m und der kleinen Achse $d = 6$ m hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{\pi}{4} D \cdot d = \frac{\pi}{4} \cdot 10\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} = \pi \cdot 15\,\text{m}^2 = \underline{\underline{47{,}1\,\text{m}^2}}.$$

e) Der Korbbogen

Da genaue Ellipsen nicht durch Schlagen von Kreisen gezeichnet werden können, setzt man z. B. Abgrenzungen für Flansche, Bögen zur Überwölbung von Fenstern und Türen so aus Kreisbögen zusammen, daß die entstehenden Formen Ellipsen ähneln.

Die Mittelpunkte der Kreisbögen liegen immer auf den Symmetrieachsen der aus ihnen zusammengesetzten Bogenform. Für die Wahl der Radien gibt es verschiedene Möglichkeiten, z. B. folgende:

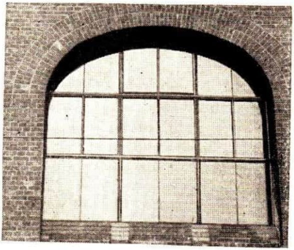


Abb. 232. Der obere Fensterteil wird durch eine Korbbogenform abgeschlossen

1. Gegeben ist die große Achse A_1A_2, ihr Mittelpunkt ist M. Auf A_1A_2 wählt man zwei Punkte G_1, G_2 beliebig, aber so, daß $G_1M = G_2M$. Auf der Mittelsenkrechten von A_1A_2 sind die Punkte K_1 und K_2 ebenfalls beliebig angenommen, aber so, daß $MK_1 = MK_2$ (Abb. 233).

   Aus Symmetriegründen ist

   $$G_1K_1 = G_2K_1 = G_1K_2 = G_2K_2\,,$$

   außerdem ist $A_1G_1 = G_2A_2$.

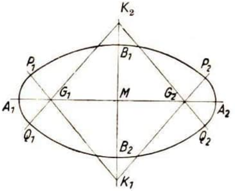


Abb. 233. Korbbogen aus Kreisbögen, deren Mittelpunkte auf dem Achsenkreuz beliebig angenommen sind

Verlängert man K_1G_1 um $G_1P_1 = G_1A_1$, K_1G_2 um $G_2P_2 = G_2A_2$,
K_2G_1 um $G_1Q_1 = G_1A_1$, K_2G_2 um $G_2Q_2 = G_2A_2$,
so liegen P_1, A_1 und Q_1 auf einem um G_1 geschlagenen Kreis, P_2, A_2 und Q_2 auf einem um G_2 geschlagenen Kreis. Ferner liegen P_1 und P_2 auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt K_1 und Q_1 und Q_2 auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt K_2. Durch P_1, P_2, Q_1 und Q_2 gehen also je zwei Kreise, deren Zentrale jedesmal durch den Punkt geht, der beiden Kreisen gemeinsam ist. Je zwei Kreise haben demnach in P_1, P_2, Q_2 und Q_1 gemeinsame Tangenten. An diesen Stellen geht der eine Kreisbogen in den sich anschließenden ohne Knick über.

Die um K_1 und K_2 geschlagenen Kreise schneiden die Symmetrieachse K_1K_2 in B_1 und B_2.

Die aus den Kreisbogen A_1P_1, $P_1B_1P_2$ und P_2A_2 zusammengesetzte Bogenform wird in der Architektur ein **Korbbogen** genannt (Abb. 232). Die geschlossene Kurve wird z. B. als Umrandung von Flanschen verwendet. Ihre Form hängt von der Lage der Kreismittelpunkte auf den Symmetrieachsen ab.

2. Während in Abb. 233 die Kreismittelpunkte auf den Symmetrieachsen beliebig gewählte Abstände vom Achsenschnittpunkt haben, bilden in Abb. 234 die auf der großen Achse liegenden Kreismittelpunkte mit je einem der auf der kleinen Achse liegenden ein gleichseitiges Dreieck. Dabei ist $A_1G_1 = G_1G_2 = G_2A_2$.

3. In Abb. 235 entspricht die Lage der einzelnen Mittelpunkte zueinander den Vorschriften für Gasrohrflansche.

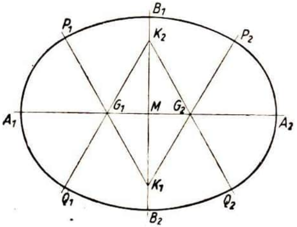


Abb. 234. Korbbogen aus Kreisbögen, deren Mittelpunkte zwei symmetrische, gleichseitige Dreiecke bilden

Die angegebenen Konstruktionen für den Korbbogen sind Versuche, eine der Ellipse möglichst ähnliche Figur auf einfachem Wege herzustellen. Ein Vergleich beider Kurven zeigt aber auf den ersten Blick, daß der Korbbogen an die Schönheit der Ellipsenform nicht heranreicht.

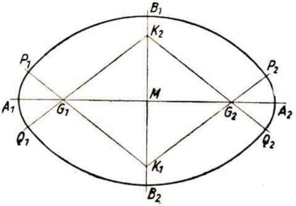


Abb. 235. Korbbogen als Umrandung eines Gasrohrflansches

AUFGABEN

1. Aus 10 mm starkem Flachstahl ist ein Flansch von 124 mm Länge und 84 mm Breite anzufertigen. Der Flansch soll die Form einer Ellipse erhalten, in der Mitte eine Bohrung von 45 mm Durchmesser und rechts und links davon auf der Längsmittellinie je eine Bohrung von 17 mm Durchmesser haben, für die der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte 86 mm beträgt.

a) Der Flansch ist unter Verwendung der Fadenkonstruktion anzureißen.

b) Welches Gewicht hat der Flansch, wenn die Dichte des Stahls $\varrho = 7{,}86\ \text{g/cm}^3$ beträgt?

2. Welchen Flächeninhalt hat eine Ellipse, deren große Achse 15 cm und deren kleine Achse 11 cm beträgt?

3. Den Rand eines elliptischen Beetes gibt ein Gärtner mit Hilfe einer Schlinge an, die er um zwei in 6 m Abstand eingeschlagene Pfähle spannt. Die Schnur der Schlinge ist 12,80 m lang. Berechne

a) die große und die kleine Achse der Ellipse,

b) die Umrandung nach einer der Näherungsformeln,

c) den Flächeninhalt des Beetes.

C. STEREOMETRIE

In der Planimetrie wird gelehrt, wie Berechnungen an ebenen Flächenstücken mit geraden oder krummen Begrenzungen, z. B. an Dreiecken, Vierecken, Kreisen und Ellipsen, ausgeführt werden. Entsprechende Berechnungen machen sich auch für räumliche Gebilde nötig, da sie z. B. die Grundlage vieler Gewichts- und Preisberechnungen bilden. Zu den Aufgaben der Stereometrie gehört das Berechnen von Oberfläche und Rauminhalt geometrischer Körper, die von ebenen und auch von gekrümmten Flächen eingeschlossen sind, z. B. für Quader, Zylinder, Kegel, Kugeln. Dabei werden an das Vorstellungsvermögen hohe Anforderungen gestellt. Während nämlich die in der Planimetrie betrachteten Gebilde unmittelbar auf einem Zeichenblatt darstellbar sind, ist das bei räumlichen Gebilden nicht möglich. Man ist gezwungen, sich die Objekte selbst vorzustellen, zur Erleichterung werden Modelle und Abbildungen herangezogen. Im Fachzeichnen wird das Anfertigen zweckmäßiger ebener Bilder von räumlichen Gegenständen gelehrt.

1. Würfel und Quader

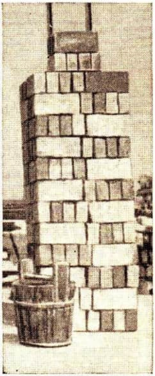


Abb.236. Der Mauerziegel — der bekannteste Quader

Als fertige Erzeugnisse der Produktion findet man Würfel selten. Die Baustoffindustrie produziert dagegen Quader in großer Zahl, z. B. Mauerziegel (Abb.236) und Mauersteine, Balken und Bohlen, Pfosten und Latten. In anderen Produktionszweigen, z. B. der metallverarbeitenden Industrie, treten Würfel und Quader als Formen von zugeschnittenen und vorgearbeiteten Werkstücken auf, die erst durch die weitere Bearbeitung ihre endgültige Gestalt erhalten. Zugeschnittene Werkstücke stellen den eigentlichen Werkstoffverbrauch dar und bilden die Grundlage für die Berechnung des Werkstoffbedarfs.

a) Oberfläche

Den Würfel begrenzen sechs Quadrate, die seine Oberfläche bilden. Hat der Würfel die Kantenlänge a (Abb.237 links), so hat jedes dieser Quadrate den Flächeninhalt a^2. Als Oberfläche des Würfels ergibt sich somit

$$O = 6 \cdot a^2.$$

Die Oberfläche eines Quaders setzt sich aus 6 Rechtecken zusammen (Abb. 237 rechts). Haben je zwei die Seitenlängen a und b, a und c, und b und c, so ergibt sich als Quaderoberfläche

$$O = 2 \cdot (ab + ac + bc) .$$

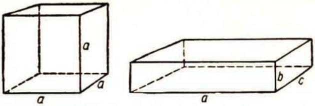


Abb. 237. Der Würfel ist eine Sonderform des Quaders, er ist ein Quader mit lauter gleichlangen Kanten

Da der Würfel als eine Sonderform des Quaders mit den Kanten $a = b = c$ angesehen werden kann, folgt aus der Formel für die Quaderoberfläche

$$O = 2 \cdot (a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a)$$

auch die Formel für die Würfeloberfläche: $O = 6a^2$.

Würfeloberfläche $\boxed{O = 6a^2}$

Quaderoberfläche $\boxed{O = 2(ab + ac + bc)}$

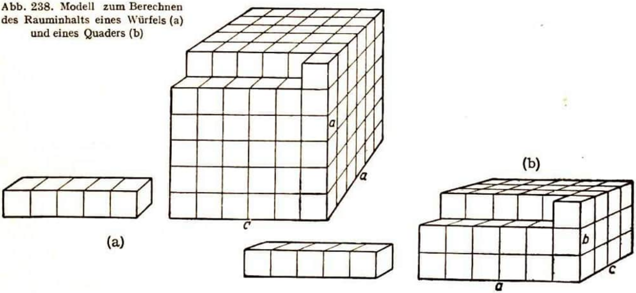
b) Rauminhalt

Der Rauminhalt eines Würfels oder eines Quaders wird durch das Vielfache einer Raumeinheit gemessen. Als Raumeinheiten bezeichnet man Würfel, deren Kantenlängen Längeneinheiten sind. Zugrunde liegt das Kubikmeter (1 m³), ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m. Davon abgeleitete Raumeinheiten sind z. B. das Kubikdezimeter (1 dm³), das Kubikzentimeter (1 cm³), das Kubikmillimeter (1 mm³). Es ist:

$$\begin{aligned} 1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{dm}^3 &= 1\,000\,000\,\text{cm}^3 = 1\,000\,000\,000\,\text{mm}^3, \\ 1\,\text{dm}^3 &= \quad 1\,000\,\text{cm}^3 = \quad 1\,000\,000\,\text{mm}^3, \\ & \qquad\quad 1\,\text{cm}^3 = \qquad\quad 1\,000\,\text{mm}^3. \end{aligned}$$

Bei Würfeln und Quadern, deren Kantenlängen ganze Vielfache einer Längeneinheit sind, kann der Rauminhalt unmittelbar bestimmt werden (Abb. 238 a u. b).

Abb. 238. Modell zum Berechnen des Rauminhalts eines Würfels (a) und eines Quaders (b)



An eine Kante von der Seitenlänge $a = 6$ cm passen genau 6 Kubikzentimeter nebeneinander und bilden eine Reihe. Beim Würfel sind 6, beim Quader von der Höhe $b = 3$ cm sind 3 solcher Reihen nötig, um die vordere Fläche zu bedecken. Es liegen also beim Würfel $a \cdot a = 36$, beim Quader $a \cdot b = 18$ Einheitswürfel an dieser Seitenfläche und bilden eine Schicht. Den Würfel füllen 6, den Quader von der Tiefe $c = 4$ cm füllen 4 Schichten aus. Es ergibt sich

als Rauminhalt des Würfels $V = a^3 = 6^3\ \text{cm}^3 = 216\ \text{cm}^3$,

als Rauminhalt des Quaders $V = a \cdot b \cdot c = 6 \cdot 3 \cdot 4\ \text{cm}^3 = 72\ \text{cm}^3$.

Würfelinhalt $\boxed{V = a^3}$

Quaderinhalt $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Kantenlängen eines Würfels oder eines Quaders nicht durch ganze Anzahlen gleicher Längeneinheiten angebbar sind. Zum Beweis ist der auf S. 171 f. beim Berechnen des Flächeninhalts angedeutete Gedankengang auf die Raumgrößen zu übertragen.

AUFGABEN

1. Zum Herstellen von Gelenkstücken werden als Rohlinge Würfel zugeschnitten. Wieviel Kilogramm wiegt ein Würfel, dessen Kantenlänge 65 mm ist, wenn der Werkstoff die Dichte 7,85 g/cm³ hat? ($m = V \cdot \varrho$)

2. Ein Klempner fertigt einen würfelförmigen offenen Blechbehälter an, der 15 l Wasser faßt.

a) Welche Kantenlänge hat der Behälter?

b) Wieviel Quadratmeter Blech werden für seine Anfertigung benötigt?

3. Um aus einer rechteckigen Blechtafel von 48 cm Länge und 30 cm Breite einen offenen quaderförmigen Kasten herzustellen, werden an den Ecken gleiche Quadrate ausgeschnitten. Welchen Rauminhalt hat der Kasten nach dem Aufbiegen der Seitenteile, wenn die Quadratseite

a) 5 cm, **b)** 6 cm, **c)** 7 cm lang ist?

4. In einer Lehrwerkstatt werden von Lehrlingen Bankhämmer angefertigt. Dazu werden aus 38-mm-Quadratstahl Rohlinge von 130 mm zugeschnitten.
Wieviel Kilogramm Stahl sind für 20 Bankhämmer erforderlich, wenn die Dichte 7,86 g/cm³ beträgt? (Schnittverlust soll nicht berücksichtigt werden.)

5. Aus einer Blechtafel, die 400 mm breit und 600 mm lang ist, soll ein Klempner einen möglichst großen Würfel anfertigen. Wie groß ist das Volumen des Würfels?

6. Aus 1 mm dickem Blech wird ein Kondensatorbecher von 100 mm Länge, 50 mm Breite und 80 mm Tiefe angefertigt. Wieviel wiegt der Becher, wenn die Dichte des Werkstoffs 7,85 g/cm³ beträgt?

7. Wieviel wiegt der in Abb. 239 dargestellte Bolzen aus Stahl (Dichte 7,86 g/cm³)?

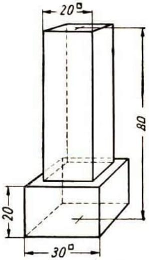


Abb. 239. Stahlbolzen

8. Welchen Querschnitt hat Quadratstahl mit der Dichte 7,86 g/cm³, wenn 1 Meter 12,560 kg wiegt?

9. Welchen Laderaum hat ein bedeckter Güterwagen, der im Lichten 7,92 m Kastenlänge, 2,75 m Kastenbreite und 2,20 m Kastenhöhe hat?

10. Für ein Einfamilienhaus wird die 9,6 m lange und 8,7 m breite Baugrube bis auf die Unterkante des Kellerpflasters 1,5 m tief ausgehoben. Außerdem werden für die Fundamentgräben 24,8 m² Grundfläche bei 0,30 m Tiefe und zum Hinterfüllen der Fundamentmauern 18,0 m³ Baugrund gebraucht. Wieviel Kubikmeter sind abzufahren?

11. Die Ladekästen (Pritschen) einiger gebräuchlicher Lastkraftwagen haben folgende Ausmaße:

Länge	4,0 m	4,4 m	5,0 m
Breite	2,05 m	2,3 m	2,35 m
Höhe	0,47 m	0,465 m	0,5 m
Nutzlast..................	3000 kg	3500 kg	6000 kg

a) Berechne für jeden Wagen das Fassungsvermögen des Kastens!

b) Prüfe nach, ob bei einer Beladung mit Sand (Dichte 2,1 g/cm³) oder mit Schlacke (Dichte 0,7 g/cm³) die zulässige Ladegrenze erreicht wird oder nicht und gib an, wieviel Kubikmeter von jedem dieser Stoffe höchstens geladen werden dürfen!

12. Die Durchschnittserträge an Heu von 2,75 ha Wiese und 1,95 ha Feldfutter betragen 4500 kg/ha und 6000 kg/ha. Ein Kubikmeter loses Heu wiegt 80 kg. Errechne den Raumbedarf für das Heu!

13. Eine LPG will den Strohertrag von 51 ha Wintergetreide, 38 ha Sommergetreide und den Heuertrag von 40 ha Wiese einlagern.
Wieviel Kubikmeter Scheunenraum benötigt sie, wenn für 1 ha Wintergetreide 120 m³, für 1 ha Sommergetreide 95 m³ und für 1 ha Wiese 90 m³ Scheunenraum erforderlich sind?

14. In einem Garten befindet sich ein aus Ziegeln gemauerter Wasserbehälter, der einen würfelförmigen Hohlraum mit 125 cm Kantenlänge einschließt.
Wieviel Liter Wasser kann der Behälter aufnehmen?

15. Ein Wasserbehälter soll für eine Wasseraufnahme von

a) 3 m³, **b)** 4 m³, **c)** 5 m³

mit würfelförmigem Hohlraum gebaut werden.
Wie lang muß die Kante des Hohlraumes sein?

16. Die Montagebauweise führt zu einer erheblichen Erhöhung der Leistung unserer Bauwirtschaft. Im volkseigenen Wohnungsbau werden zum Beispiel zum Überdecken von Fenstern und Türen Stahlbetonstürze verlegt.
Ein Sturz ist 1,61 m lang und hat einen Querschnitt von 7,5 cm × 24 cm.
Berechne das Volumen!

17. Für den Versand der Erzeugnisse eines Werkes werden rechteckige Kisten verwendet.
Die Maße sind: $a = 120$ cm; $b = 60$ cm; $c = 45$ cm.
Infolge eines Verbesserungsvorschlages sollen würfelförmige Kisten verwendet werden.

a) Wieviel Zentimeter muß die Länge einer Kante betragen, damit das Volumen unverändert bleibt?

b) Wieviel Quadratmeter wertvollen Materials werden in einer Woche (6 Tage) eingespart, wenn täglich 65 Kisten benötigt werden?

18. Ein Grabenbagger baggert stündlich im Tagebau einen Graben mit 4 m Tiefe, 0,9 m Breite und 30 m Länge.
Wieviel Kubikmeter werden in 8 Stunden abgetragen?

19. Ein gummibereifter Plattformwagen mit einem Laderaum von $6 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5$ m wird mit Kartoffeln beladen. 1 m^3 Kartoffeln wiegt 650 kg.

a) Ist der Wagen voll ausgelastet, wenn seine Tragfähigkeit 5 t beträgt?

b) Stelle die gleichen Berechnungen für eine Ladung Zuckerrüben an, wenn 1 m^3 Zuckerrüben 700 kg wiegt!

20. Der Trog eines Schiffshebewerkes hat eine Länge von 85 m, eine Breite von 12 m und eine Wassertiefe von 2,50 m. Die gesamte Eisenkonstruktion des Troges wiegt 1600 t.

a) Welchen Raum nimmt die Wassermenge ein?

b) Wie schwer ist der mit Wasser gefüllte Trog?

2. Prisma und Zylinder

a) Grundeigenschaften

Prismen

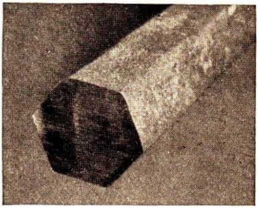


Abb. 240. Prisma mit regelmäßigem Sechseck als Grundfläche

Bei kantigen Stangen umschließen den Werkstoff drei oder mehr Ebenen, die einander in parallelen geraden Linien schneiden. Das von einer kantigen Stange durch zwei parallele Ebenen abgegrenzte Stück heißt **Prisma** (Abb. 240).

Prismen aus Glas werden im Physikunterricht bei optischen Versuchen verwendet. Beim Durchgang des Sonnenlichtes durch ein dreiseitiges Glasprisma wird das Lichtstrahlenbündel aus seiner Bahn abgelenkt und in Spektralfarben aufgelöst.
Die optische Industrie baut in Ferngläser dreiseitige Glasprismen zur Verkürzung der Tubuslänge ein (Prismen-Feldstecher).

Hat ein Prisma n parallele Kanten, so entstehen als Grundflächen oder als Grund- und Deckfläche zwei kongruente n-Ecke, deren Seiten Grundkanten des Prismas genannt werden (Abb. 241). Die übrigen parallelen Kanten sind die Seitenkanten des Prismas. Alle Seitenkanten eines Prismas sind gleich lang. Je zwei Seitenkanten grenzen mit den beiden in derselben Ebene liegenden Seiten der Grundflächen ein Parallelogramm ab, eine der Seitenflächen des Prismas. Das n-seitige Prisma hat als Seitenflächen n Parallelogramme mit gleichlangen parallelen Seiten. Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, so stimmen auch die zweiten Seitenpaare aller Seitenflächen des Prismas überein.

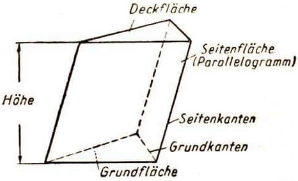


Abb. 241. Prisma mit dreieckiger Grund- und Deckfläche

Würfel und Quader gehören zu den Prismen. Wenn die Seitenkanten, wie bei Würfeln und Quadern, mit den Grundflächen und damit auch mit den Grundkanten rechte Winkel bilden, spricht man von **geraden Prismen,** in allen anderen Fällen von **schiefen Prismen.**

Der Abstand der beiden Grundflächen gibt die Höhe des Prismas an. Beim geraden Prisma ist die Höhe gleich der Seitenkante, beim schiefen Prisma ist sie kleiner als die Seitenkante.

Alle Seitenflächen zusammen ergeben den Mantel des Prismas. Eine parallel zu den Seitenkanten auf einer Seitenfläche liegende Gerade wird **Mantellinie** des Prismas genannt.

Zylinder

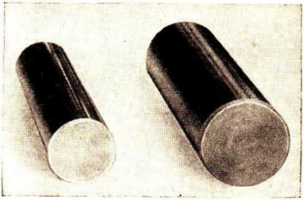


Abb. 242. Jede Rundstange ist ein Zylinder

Der Kreiszylinder begegnet uns bei Walzen und Rundstangen (Abb. 242). Wir denken uns die Entstehung eines Zylinders folgendermaßen.

Wir errichten in dem Punkt P der Peripherie eines Kreises auf der Kreisebene $\mathscr{E}_1$ die Senkrechte (Abb. 243). Sie überstreicht, wenn P die Kreisperipherie durchläuft, eine Zylinderfläche. Der Kreis wird *Leitkreis* der Zylinderfläche genannt. Diese Senkrechte bildet in jeder Lage eine *Mantellinie* des Zylinders. Eine parallel zu der Kreisebene gelegte Ebene $\mathscr{E}_2$ schneidet die Zylinderfläche in einem zweiten Kreis, der die Größe des Leitkreises hat. Die beiden Kreise grenzen als Grund- und Deckkreis einen geraden Kreiszylinder ab. Die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreise verbindet die **Achse,** der Abstand der beiden Kreisebenen heißt **Höhe,** das von Grund- und Deckkreis abgegrenzte Stück der Zylinderfläche **Mantel** des Zylinders.

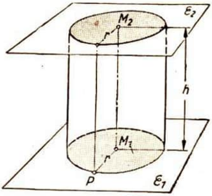


Abb. 243. Zylinder

b) Oberfläche

Alle Seitenflächen eines geraden Prismas sind Rechtecke. In jedem dieser Rechtecke besteht ein Seitenpaar aus gleich langen Prismenseitenkanten. Die Seitenflächen lassen sich deshalb in einer Ebene mit den gleichen Seiten so aneinander legen, daß ein als Abwicklung des

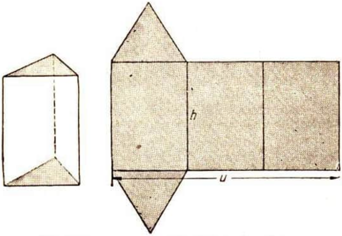


Abb. 244. Abwicklung eines Prismas

Prismenmantels bezeichnetes Rechteck entsteht (Abb. 244). Für dieses Rechteck wird die eine Seite durch den Umfang u einer Grundfläche bestimmt, die andere Seite durch die Prismenhöhe h. Für ein gerades Prisma beträgt also die Größe der Mantelfläche

$$M = u \cdot h\,,$$

die Größe der Oberfläche

$$O = M + 2 \cdot G = u \cdot h + 2 \cdot G\,,$$

wenn G den Inhalt einer Grundfläche angibt.

Beispiel:

Bei einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 6$ cm bildet und dessen Höhe $h = 10$ cm ist, ergibt sich:

$M = 3 \cdot 6\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = \underline{\underline{180\,\text{cm}^2}}$ (drei Rechtecke mit den Seiten a und h),

$G = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot \frac{6}{2}\sqrt{3}\,\text{cm} = \underline{\underline{9\sqrt{3}\,\text{cm}^2}}$ $\left(\text{Dreieck mit der Seite } a \text{ und der Höhe } \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$,

$O = M + 2G = 180\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 = 18 \cdot (10 + \sqrt{3})\,\text{cm}^2 = 18 \cdot 11{,}732\,\text{cm}^2 \approx \underline{\underline{211{,}2\,\text{cm}^2}}.$

Der entlang einer Mantellinie aufgeschnittene Mantel eines Zylinders kann so aufgebogen werden, daß eine ebene Fläche entsteht (Abb. 245). Bei einem geraden Kreiszylinder ergibt der auf eine Ebene abgerollte Mantel ein Rechteck; eine Rechteckseite wird dem Grundkreisumfang, die andere der Länge der Mantellinie gleich. Da die Länge der Mantellinie mit der Zylinderhöhe h übereinstimmt, ergibt sich als

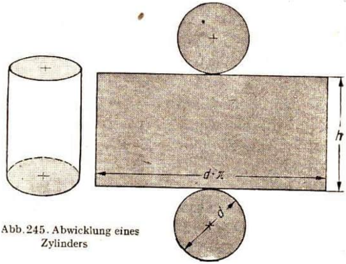


Abb. 245. Abwicklung eines Zylinders

Zylindermantel $\boxed{M = \pi \cdot d \cdot h}$

Dabei bezeichnet d den Grundkreisdurchmesser. Für die Größe der Zylinderoberfläche ergibt sich

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot d\left(\frac{d}{2} + h\right).$$

Beispiel:

Bei einem geraden Kreiszylinder, dessen Grundkreis $d = 10$ cm Durchmesser hat und dessen Höhe $h = 15$ cm beträgt, ergibt sich

$M = 3{,}14 \cdot 10\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} = \underline{\underline{471\,\text{cm}^2}},$

$G = 3{,}14 \cdot \frac{10^2}{4}\,\text{cm}^2 = \underline{\underline{78{,}5\,\text{cm}^2}},$

$O = 471\,\text{cm}^2 + 2 \cdot 78{,}5\,\text{cm}^2 = 628\,\text{cm}^2$ oder

$O = 3{,}14 \cdot 10 \cdot (5 + 15)\,\text{cm}^2 = 3{,}14 \cdot 200\,\text{cm}^2 = \underline{\underline{628\,\text{cm}^2}}.$

c) Rauminhalt des Prismas

Gerade Prismen

Wird ein Quader als Prisma, das Rechteck mit den Quaderkanten a und b dabei als seine Grundfläche G, die Kante c als Prismenhöhe h angesehen, so geht die Formel $V = a \cdot b \cdot c$ für den Quaderinhalt in die Form

$$V = G \cdot h$$

über. Das Produkt aus Grundfläche und Höhe ergibt den Rauminhalt.

Man erkennt sofort, daß nach derselben Formel der Rauminhalt eines jeden geraden Prismas mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche berechnet werden kann. Ein zur Grundfläche $ABCD$ des Quaders senkrechter Diagonalschnitt $ACGE$ (Abb.246) zerlegt die Grundfläche in die beiden kongruenten Dreiecke ABC und CDA und halbiert den Quader. Beide Quaderhälften sind gerade Prismen, das eine mit dem rechtwinkligen Dreieck CDA als Grundfläche. Für beide ist die Quaderseite c die Höhe. Wird die Formel $V_1 = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$ für den Rauminhalt der einen Quaderhälfte in der Form $V_1 = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c$ geschrieben, so gibt $G_1 = \frac{a \cdot b}{2}$ den Flächeninhalt der Grundfläche und $h = c$ die Höhe eines geraden Prismas an, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Das Produkt aus Grundfläche und Höhe gibt also auch für gerade Prismen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind, den Rauminhalt an, weil jedes rechtwinklige Dreieck Hälfte eines Rechtecks ist.

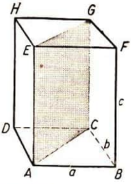


Abb. 246. Rauminhalt des geraden Prismas

In Abb. 247a ist ein fünfseitiges gerades Prisma skizziert, das durch ebene Schnitte in gerade Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen zerlegt ist. Besonders zeigt Abb. 247b, wie die Grundfläche $ABCDE$ zunächst durch die Diagonalen AC und AD in Dreiecke und diese durch ihre Höhen in rechtwinklige Dreiecke G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 zerlegt werden, deren Summe die Grundfläche des fünfseitigen Prismas ergibt. Ebenen, die auf dieser Grundfläche senkrecht stehen, zerschneiden das fünfseitige Prisma in sechs Prismen gleicher Höhe, deren Grundflächen die sechs rechtwinkligen Dreiecke sind.

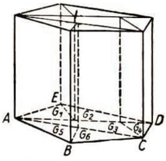


Abb.247a. Fünfseitiges gerades Prisma

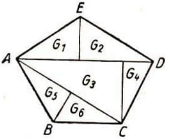


Abb.247b. Zerlegung der Prismagrundfläche in rechtwinklige Dreiecke

Ein n seitiges gerades Prisma kann durch Ebenen, die auf der Grundfläche senkrecht stehen, in dreiseitige gerade Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundflächen zerlegt werden. Die Grundflächen $G_1, G_2, G_3 \ldots$ dieser dreiseitigen Prismen ergeben zusammen die Grundfläche G des n-seitigen Prismas, und die Prismen haben die Höhe h gemeinsam. Somit wird der Rauminhalt des n-seitigen Prismas

$$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + \ldots = (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots) \cdot h = G \cdot h .$$

Auch bei geraden Prismen mit beliebigen Grundflächen ist $V = G \cdot h$.

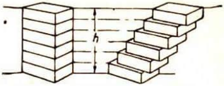


Abb. 248. Rauminhalt des schiefen Prismas

Platten gleicher Form und Dicke, die genau übereinandergelegt werden, ergeben ein gerades Prisma, dessen Rauminhalt das Produkt aus Grundfläche und Höhe bestimmt. Dieselben Platten, etwas gegeneinander verschoben gestapelt (Abb. 248), ergeben einen treppenartigen Körper mit unverändertem Rauminhalt. Die Form des Treppenkörpers nähert sich, wenn die Platten gleichmäßig verschoben sind, um so mehr der Form eines schiefen Prismas, je dünner die Platten sind; auch für das schiefe Prisma ergibt deshalb das Produkt aus Grundfläche und Höhe den Rauminhalt.

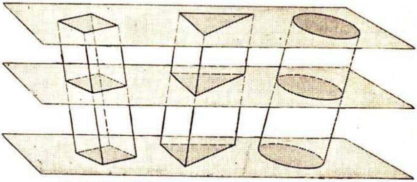


Abb. 249 a. Alle Querschnitte sind einander flächengleich.

Prismeninhalt

$$\boxed{V = G \cdot h}$$

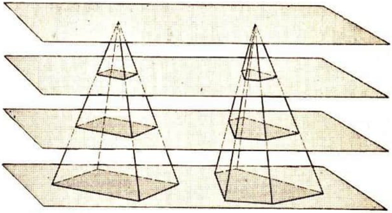


Abb. 249 b. Die Querschnitte in gleicher Höhe sind flächengleich.

d) Cavalierisches Prinzip

Den Gedanken, Körper in Platten oder Schichten zu zerlegen, um deren Rauminhalt zu vergleichen, verwendete zuerst der italienische Mathematiker Bonaventura Cavalieri, der am Anfang des 17. Jahrhunderts in Bologna lebte.

Betrachten wir zwei nebeneinanderstehende (gleich hohe) Körper, deren horizontale Querschnitte in jeder Höhe einander flächengleich sind, so können wir uns die beiden Körper aus dünnen Schichten aufgebaut denken; je zwei Schichten, die in der gleichen Höhe liegen, haben dann gleichen Rauminhalt. Da sich beide Körper aus diesen Schichten zusammensetzen, müssen beide das gleiche Volumen haben.

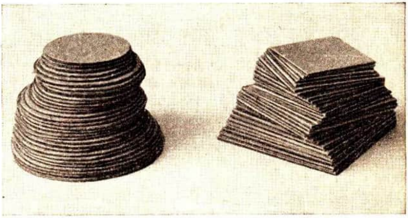


Abb. 249 c. Die beiden Stöße verschiedener Platten machen das Cavalierische Prinzip recht deutlich.

Das **Cavalierische Prinzip** lautet:

Zwei nebeneinanderstehende (gleich hohe) Körper haben das gleiche Volumen, wenn jede horizontale Ebene beide Körper in Figuren von gleichem Flächeninhalt schneidet.

e) Rauminhalt des Zylinders

Man stellt auf eine Ebene neben einen Zylinder mit dem Grundkreisradius r bzw. der Grundfläche $G = \pi r^2$ und der Höhe h ein Prisma mit der gleichen Höhe h und der gleichgroßen Grundfläche G. Parallelebenen zur Grundebene schneiden den Zylinder und das Prisma in Flächen, die den Grundflächen kongruent sind. Der Rauminhalt des Prismas ist $V = G \cdot h$. Jede Parallelebene zur Grundebene ergibt für Zylinder und Prisma Schnitte, die gleichen Flächeninhalt haben. Als Rauminhalt des Zylinders ergibt sich daher nach dem Satz des Cavalieri ebenfalls $V = G \cdot h$ oder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \,,$$

gleichgültig, ob der Zylinder gerade oder schief ist. Führen wir den Grundkreisdurchmesser $d = 2r$ ein, so ist, weil $r = \frac{d}{2}$,

$$V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} \,.$$

(Nur beim geraden Zylinder ist der Grundkreisdurchmesser gleich dem Zylinderdurchmesser!)

Rauminhalt des Zylinders $\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h}$

AUFGABEN

1. Ein 500 mm langer Sechskantstab aus Messing (Dichte 8,4 g/cm³) hat ein Eckenmaß von 20 mm. Wie groß sind

a) die Grundfläche G, **b)** die Mantelfläche M, **c)** die Oberfläche O,
d) der Rauminhalt V, **e)** die Masse m?

2. Masse m und Oberfläche O des Führungsstückes aus Grauguß (Dichte 7,6 g/cm³) sind nach den in Abb. 250 angegebenen Maßen zu berechnen.

3. Masse m und Oberfläche O der Führungsplatte aus Bronze (Dichte 8,6 g/cm³) sind nach den in Abb. 251 angegebenen Maßen zu berechnen.

4. Der in Abb. 252 dargestellte Bolzen aus Stahl (Dichte 7,86 g/cm³) soll angefertigt und verchromt werden.

a) Wie groß ist die Masse des Bolzens?
b) Wie groß ist die zu verchromende Fläche?

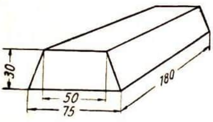


Abb.250. Führungsstück

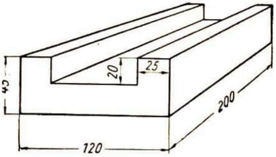


Abb.251. Führungsplatte

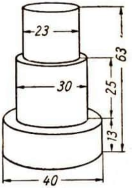


Abb.252. Stahlbolzen

5. Ein Kaufhaus erhält einen Vorbau, der von 4 gemauerten Rundsäulen von 6,20 m Höhe getragen wird.

Wieviel Kubikmeter Mauerwerk ist für eine Säule herzustellen, wenn der Durchmesser

a) 72 cm, **b)** 82 cm, **c)** 92 cm groß ist?

Wie groß ist in jedem Fall die zu putzende Mantelfläche einer Säule? Berechne den Mörtelbedarf bei 1,5 cm Putzdicke!

6. Ein runder Stahlbolzen von 50 mm Durchmesser hat einen 50 mm langen Vierkantansatz von 30 mm Kantenlänge. Wieviel wiegt der Bolzen, wenn die Gesamtlänge 130 mm beträgt (Dichte 7,86 g/cm^3)?

7. Ein Vierkantbolzen aus Messing von 20 mm Kantenlänge hat an beiden Seiten zylindrische Ansätze. Der eine Ansatz hat einen Durchmesser von 18 mm und eine Länge von 25 mm, der andere Ansatz einen Durchmesser von 12 mm und 15 mm Länge. Die Gesamtlänge des Bolzens beträgt 135 mm (Dichte 8,4 g/cm^3).

a) Wieviel wiegt der Bolzen? **b)** Wie groß ist seine Oberfläche?

8. Der Querschnitt eines Dammes ist ein gleichschenkliges Trapez. Die Dammsohle ist 38 m, die Krone 12 m breit, und der Damm ist 7,20 m hoch. Wieviel Kubikmeter Boden sind für 1 km Dammlänge aufzuschütten?

9. Der Katalog einer Verkaufsstelle für Chemiegeräte verzeichnet Bechergläser mit folgenden Angaben:

Höhe	70	100	160	200 mm
Weite	30	50	80	100 mm

Wieviel fassen die einzelnen Sorten?

10. Ein liegender zylindrischer Treibstoffbehälter einer Tankstelle ist 2,20 m lang und 0,92 m weit. Wieviel Liter Treibstoff füllen ihn 0,23 m hoch?

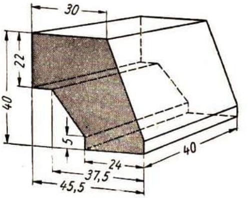
11. Eine LPG hat zur Konservierung von Futter 3 Silos. Jeder Silo hat einen inneren Durchmesser von 3,00 m und eine Höhe von 4,00 m. Berechne den Rauminhalt!

12. Der Motor des IFA F9 hat drei Zylinder, einen Hub von 78 mm und eine Bohrung (Innendurchmesser des Zylinders) von 70 mm; bei 3600 Umdrehungen pro Minute leistet der Motor 30 PS.

a) Wie groß ist der Gesamthubraum?

b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit (in km/h) hat ein Kolben des Motors bei der obengenannten Drehzahl?

13. Wieviel Mauerziegel sind erforderlich zum Bau eines Giebels, der die Form eines gleichschenkligen Dreiecks von 12 m Grundlinie und 5 m Höhe hat, wenn die Mauer einen Stein stark (d.h. 25 cm stark) aufgeführt wird und für 1 m^3 Mauerwerk 400 Steine benötigt werden?



14. Beim Wiederaufbau von Kulturstätten müssen oftmals scheitrechte (das heißt: nicht gewölbte) Mauerbogen aus Naturstein hergestellt werden, bei denen sogenannte Hakensteine Verwendung finden (Abb. 253).

a) Berechne die fehlenden Kantenlängen des perspektivisch gezeichneten Hakensteines!

b) Berechne die Masse des Steines (Dichte von Sandstein 2,5 kg/dm^3)!

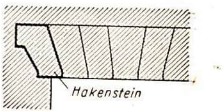


Abb. 253. Hakenstein

3. Pyramide und Kegel

a) Grundeigenschaften

Pyramide

Auf dem westlichen Nilufer erheben sich die Steinkolosse der Pyramiden, die Grabstätten der Pharaonen. Die Cheopspyramide, die größte von ihnen, ist etwa 2800 Jahre vor unserer Zeitrechnung erbaut worden. Sie hat als Grundfläche ein Quadrat von etwa 230 m Seitenlänge, ihre Höhe erreicht 147 m (Abb. 254).
Diese monumentalen, die Jahrtauseende überdauernden Bauwerke künden von dem hohen Stand der geometrisch-technischen Fertigkeiten und Kenntnisse im alten Ägypten. Sie lassen aber auch gleichzeitig ahnen, unter welchen unmenschlichen Bedingungen und unter welchen Strapazen die Sklaven der Ägypter mit den damaligen primitiven Hilfsmitteln diese Pyramiden errichtet haben.

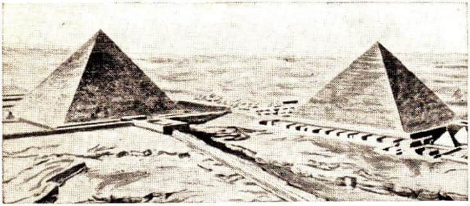


Abb. 254. Pyramiden am Nil

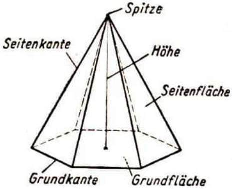


Abb. 255. Pyramide mit regelmäßigem Sechseck als Grundfläche

Bei einer n-seitigen Pyramide (Abb. 255) bildet ein n-Eck die **Grundfläche.** An diese stoßen als **Seitenflächen** Dreiecke, die durch je eine Vielecksseite und einen nicht in der Vielecksebene liegenden Punkt bestimmt sind. Der den Dreiecken gemeinsame Punkt ist die **Spitze,** die Seiten der Grundfläche sind die *Grundkanten,* die anderen Dreieckseiten die *Seitenkanten* der Pyramide. Das von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Lot wird als **Höhe** der Pyramide bezeichnet. Die Seitenflächen bilden den **Mantel** der Pyramide.
Eine Pyramide mit gleichlangen Seitenkanten wird gerade genannt. Eine gerade Pyramide heißt regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist. Bei regelmäßigen Pyramiden fällt der Fußpunkt des von der Spitze auf die Grundfläche gefällten Lotes auf die Mitte der Grundfläche.

Kegel

Formen von Kegeln bilden sich beim Aufschütten von Sand, Kohle oder anderem körnigen Material (Abb. 256). Die Größe der kreisförmigen Grundfläche richtet sich nach dem aufgeschütteten Material und der Schütthöhe. Bei gleicher Höhe bedeckt ein Haufen trockener Sand eine größere Bodenfläche als Weizen.
Pyramiden und Kegel finden wir z. B. als Dächer von Türmen, als Verzierungen an Bauwerken und als Spitzen an Werkstücken.

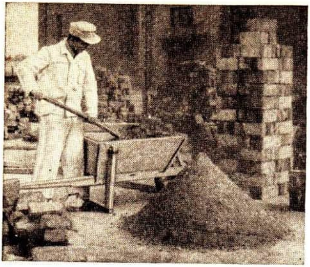


Abb. 256. Aufgeschütteter Sand ergibt Kegelform

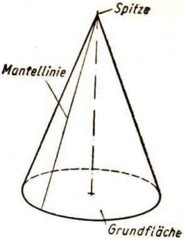


Abb.257. Kegel

Verbindungsgerade zwischen Punkten einer Kreislinie und einem Punkt außerhalb der Kreisebene liegen auf einer Kegelfläche. Der gemeinsame Punkt der Verbindungslinien ist die **Spitze.** Der durch Kreisfläche und Kegelfläche abgegrenzte Körper heißt Kegel (Abb. 257), die Kreisfläche seine **Grundfläche,** das von dem Grundkreis bis zur Spitze reichende Stück der Kegelfläche **Kegelmantel,** das Stück einer auf ihm liegenden Geraden Mantellinie. Das von der Kegelspitze auf die Grundfläche gefällte Lot ist die **Höhe** des Kegels. Bei einem geraden Kegel fällt der Fußpunkt dieses Lotes auf den Mittelpunkt des Grundkreises, und alle Mantellinien sind einander gleich. Ein schiefer Kegel besitzt diese Eigenschaften nicht.

b) Oberfläche

Pyramide

Die Oberfläche einer Pyramide ist die Summe aus der Grundfläche und allen Seitenflächen. Bei einer geraden Pyramide mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche G sind die Seitenflächen n kongruente Dreiecke; hat eine Seitenfläche den Inhalt I, so ergibt ihre Oberfläche

$$O = G + n \cdot I\,.$$

Kegel

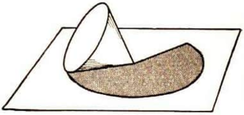


Abb.258. Abwicklung des Kegelmantels

Der Mantel eines geraden Kegels kann in eine Ebene ausgebreitet werden, wenn er entlang einer Mantellinie aufgeschnitten wird (Abb. 258). Er ergibt dann einen Kreissektor, dessen Radius die Kegelmantellinie und dessen Bogen der Umfang des Kegelgrundkreises ist.
Hat der Grundkreis den Radius r, also den Umfang $2\pi r$, und die Mantellinie die Länge s, so ergibt sich nach der Formel auf S. 218 für den Kegelmantel

$$M = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s = \pi \cdot r \cdot s.$$

Mantel das Kegels $$\boxed{M = \pi \cdot r \cdot s}$$

Da die Fläche des Grundkreises $G = \pi \cdot r^2$ beträgt, erhält man für die Kegeloberfläche

$$O = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (s + r) .$$

Wird der Grundkreisdurchmesser d eingeführt, so ergibt sich

$$O = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(s + \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{4} \pi \cdot d\,(2\,s + d) .$$

c) Rauminhalt

Hilfssatz

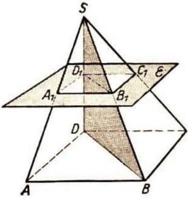


Abb.259. Diagonalschnitt durch die Spitze einer Pyramide

Das Parallelogramm $ABCD$ ist die Grundfläche der in Abb.259 dargestellten Pyramide $S\ (ABCD)$. Eine zur Grundfläche parallele Ebene $\mathcal{E}$ schneidet die Seitenkante AS in A_1, BS in B_1, CS in C_1 und DS in D_1. Dabei ist $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ und $D_1A_1 \parallel DA$ (Schnittlinien von Seitenflächen mit parallelen Ebenen). Da $AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$, ist auch $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ und $B_1C_1 \parallel A_1D_1$, d.h. $A_1B_1C_1D_1$ ist ein Parallelogramm. Die Diagonale BD zerlegt das Parallelogramm $ABCD$ in die kongruenten Dreiecke ABD und DCB, die Diagonale B_1D_1 das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$ in die kongruenten Dreiecke $A_1B_1D_1$ und $D_1C_1B_1$. Die Diagonalebene BSD zerlegt die Pyramide $S\ (ABCD)$ in die dreiseitigen Pyramiden $S\,(ABD)$ und $S\,(DCB)$. Die Grundflächen der beiden Pyramiden liegen in einer Ebene und haben gleiche Flächeninhalte, die Spitzen der Pyramiden fallen zusammen, und die Parallelebene zur Grundfläche schneidet die Pyramiden in gleichen Dreiecken. Nach dem Satz Cavalieris haben die Pyramiden gleichen Rauminhalt.

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein Parallelogramm ist, wird durch eine Ebene, die zwei gegenüberliegende Seitenkanten enthält, in zwei dreiseitige Pyramiden gleichen Rauminhalts zerlegt.

Pyramide

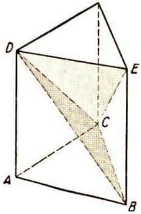


Abb. 260. Zerlegung eines dreiseitigen Prismas in Pyramiden

Ein dreiseitiges Prisma $ABCDEF$ (Abb. 260) wird durch zwei Ebenen, von denen die eine die Punkte B, C und D, die andere die Punkte C, D und E enthält, in drei dreiseitige Pyramiden $C(ABD)$, $C(BDE)$ und $D(CEF)$ zerlegt.

Die Pyramiden $C(ABD)$ und $C\,(BDE)$ entstehen durch die Schnittebene BCD aus der Pyramide $C\,(ABED)$, deren Grundfläche $ABED$ ein Parallelogramm ist. Nach dem Hilfssatz gilt also

$$C\,(ABD) = C(BDE).$$

Aus der Pyramide $D(BEFC)$, deren Grundfläche $BEFC$ ein Parallelogramm ist, entstehen durch die Schnittebene CDE die Pyramiden $D\,(BCE)$ und $D\,(CEF)$, für die ebenso

$$D(BCE) = D(CEF)$$

gilt.

Nun bezeichnet $C(BDE)$ dieselbe Pyramide wie $D(BCE)$. Es ergibt sich also

$$C(ABD) = C(BDE) = D(CEF)\,.$$

Die Summe der drei Pyramiden ergibt aber den Prismeninhalt.

Wird mit G die Prismengrundfläche, mit h die Prismenhöhe bezeichnet, so hat die Pyramide $D(ABC)$, die vorher $C(ABD)$ genannt wurde, ebenfalls die Grundfläche G und die Höhe h. Als Rauminhalt der dreiseitigen Pyramide ergibt sich

$$V = \tfrac{1}{3} G \cdot h\,.$$

Allgemein: Ein n-Eck als Grundfläche G einer Pyramide kann etwa durch Diagonalen, die von einer Ecke aus gezogen sind, in $(n - 2)$ Dreiecke, die Pyramide durch ebene Schnitte von der Spitze nach je einer Diagonale in $(n - 2)$ dreiseitige Pyramiden aufgeteilt werden. Bezeichnet man die Grundflächen der dreiseitigen Pyramiden mit $G_1, G_2, G_3 \ldots G_{n-2}$, so gilt

$$G_1 + G_2 + G_3 + \cdots G_{n-2} = G\,.$$

Jede der dreiseitigen Pyramiden hat mit der n-seitigen die Höhe h gemeinsam. Für die dreiseitigen Pyramiden geben $\frac{1}{3} G_1 \cdot h, \frac{1}{3} G_2 \cdot h, \cdots \frac{1}{3} G_{n-2} \cdot h$ den Rauminhalt an. Als Rauminhalt der n-seitigen Pyramide entsteht

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} G_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} G_2 \cdot h + \tfrac{1}{3} G_3 \cdot h + \cdots \tfrac{1}{3} G_{n-2} \cdot h \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots G_{n-2}) \cdot h \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot G \cdot h\,. \end{aligned}$$

Rauminhalt der Pyramide $\boxed{V = \tfrac{1}{3}\, G \cdot h}$

Kegel

Die Formel für den Rauminhalt des Kegels kann nach dem Cavalierischen Prinzip aus der Pyramide gewonnen werden. Wir beschreiten jedoch einen anderen Weg.

Die Fläche eines Kreises läßt sich beliebig genau durch die eines Vielecks genügend großer Eckenzahl annähern, das dem Kreise einbeschrieben ist. Ebenso kann man den Rauminhalt eines Kegels als Grenzwert des Rauminhalts einer Pyramide entstanden denken, deren Grundfläche mit wachsender Seitenzahl sich einem Kreis als Grenzwert nähert. Hat der Kreis den Radius r, der Kegel die Höhe h, so wird $G = \pi r^2$, und es entsteht als Formel für den

Rauminhalt des Kegels $\boxed{V = \tfrac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot h}$

AUFGABEN

1. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck von $a = 5$ cm Seitenlänge, die Pyramide ist $h = 12$ cm hoch. Wie groß sind

- **a)** eine Seitenkante s,
- **b)** die Grundfläche G,
- **c)** eine Seitenfläche F,
- **d)** die Mantelfläche M,
- **e)** die Oberfläche O,
- **f)** der Rauminhalt V?

2. Das regelmäßige Vierflach (Tetraeder) ist eine von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzte Pyramide. Wie groß sind Oberfläche O und Rauminhalt V, wenn die Seitenkanten die Länge $a = 5$ cm haben?

3. Werden zwei kongruente Pyramiden, deren Grundflächen Quadrate sind und deren Kanten die Länge a haben, mit den Grundflächen aneinandergesetzt, so entsteht ein von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzter regelmäßiger Achtflächner (Oktaeder). Wie groß sind Oberfläche O und Rauminhalt V?

4. An ein Stück Quadratstahl 50 mm · 50 mm soll eine pyramidenförmige Spitze von 114 mm Höhe angeschmiedet werden.

a) Welche Rohlänge ergibt die richtige Spitzenhöhe, wenn 5% durch Abbrand verlorengehen?

b) Wieviel wiegt das Werkstück bei einer Gesamtlänge von 250 mm (Dichte 7,85 g/cm³)?

5. Aus 1 mm starkem Zinkblech ist ein pyramidenförmiges achteckiges Laternendach mit einem Eckenmaß von 280 mm und einer Höhe von 210 mm anzufertigen. Wieviel wiegt das Laternendach, wenn 1 m² Zinkblech 7,18 kg wiegt?
Hilfswerte:

n	a	ϱ
8	$r \cdot 0{,}765$	$r \cdot 0{,}924$

n Seitenzahl, a Seitenlänge, r Umkreisradius, ϱ Inkreisradius.

6. Ein gerader Kreiskegel hat den Grundkreisdurchmesser $d = 40$ mm, die Mantellinie $s = 29$ mm. Wie groß sind

a) die Kegelhöhe h, **b)** der Kegelmantel M,

c) die Oberfläche O, **d)** der Rauminhalt V des Kegels?

7. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten $a = 18$ cm und $b = 24$ cm. Das Dreieck dreht sich einmal um die kleine, das andere Mal um die große Kathete. Die Hypotenuse überstreicht in beiden Fällen Kegelmäntel. In welchem Verhältnis stehen

a) die Mäntel, **b)** die Oberflächen, **c)** die Inhalte der Kegel?

8. Zwei rechtwinklige Dreiecke, das eine mit 9 cm und 12 cm langen Katheten, das andere mit 5 cm und 12 cm langen Katheten, ergeben aneinandergelegt ein Dreieck ABC, dessen Seite AC die Länge 14 cm hat (Abb. 261). Dreht sich das Dreieck ABC um die Seite AC, so überstreichen AB und BC Kegelmäntel. Wie groß sind

a) die Oberfläche O, **b)** der Rauminhalt V des Doppelkegels?

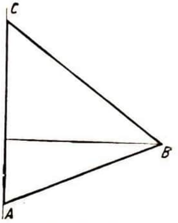


Abb. 261. Achsenschnitt eines Doppelkegels

9. An ein Stück Rundstahl von 70 mm Durchmesser ist eine 150 mm lange runde Spitze angeschmiedet. Die Gesamtlänge des Werkstückes ist 170 mm. Masse m und Oberfläche O des Werkstückes sind zu berechnen (Dichte $\varrho = 7{,}85$ g/cm³).

10. Wieviel wiegt der in Abb. 262 dargestellte Spitzsenker mit Zylinderschaft aus Schnellstahl ($\varrho = 8{,}1$ g/cm³)?

11. Ein Kelchglas mit einem Öffnungswinkel von 60° ist 6 cm hoch gefüllt. Welchen Rauminhalt hat die Füllung?

12. Ein zu einem geraden Kreiskegel aufgeschütteter Haufen Sand soll mit Lastkraftwagen von 3000 kg Ladefähigkeit abgefahren werden. Um festzustellen, wieviel Fahrten erforderlich sind, wird der Umfang des Grundkreises durch Abschreiten auf 22 m geschätzt, die Höhe des Haufens wird auf 2 m geschätzt. Wieviel Fahrten sind danach nötig (Dichte von Sand 1,8 g/cm³)?

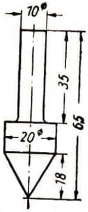


Abb. 262. Spitzsenker

4. Pyramidenstumpf und Kegelstumpf

Trennt man von einer Pyramide mit der Grundfläche G_1 durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche den oberen Teil ab, so bleibt ein **Pyramidenstumpf** übrig (Abb. 263). Man nennt die abgeschnittene Pyramide auch Ergänzungspyramide, die zur Grundfläche G_1 parallele Schnittfläche Deckfläche G_2 und den Abstand der Deckfläche von der Grundfläche Höhe h des Pyramidenstumpfes Entsprechendes gilt für den **Kegelstumpf** (Abb. 264).

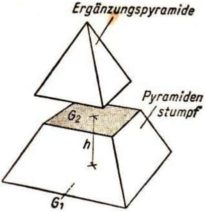


Abb. 263. Pyramidenstumpf

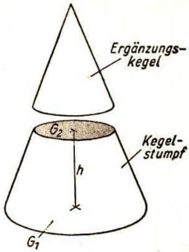


Abb. 264. Kegelstumpf

a) Oberfläche

Pyramidenstumpf

Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes setzt sich aus der Grundfläche, der Deckfläche und aus Trapezen als Seitenflächen zusammen.

Ist der Pyramidenstumpf der Rest einer geraden Pyramide mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche, so sind alle Seitenflächen kongruente gleichschenklige Trapeze. Werden die Parallelseiten einer Seitenfläche mit a_1 und a_2, die Trapezhöhe mit h' bezeichnet, so ergibt sich als **Mantel des Pyramidenstumpfes** (Abb. 265)

$$M = \frac{n}{2}(a_1 + a_2) \cdot h',$$

als **Oberfläche des Pyramidenstumpfes**

$$O = \frac{n}{2}(a_1 + a_2) \cdot h' + G_1 + G_2.$$

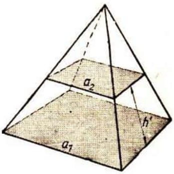


Abb. 265. Zur Berechnung der Mantelfläche eines Pyramidenstumpfes

Kegelstumpf

Der Mantel des Kegelstumpfes bleibt übrig, wenn vom Mantel M_1 des Kegels mit der Grundfläche G_1 der Mantel M_2 des Ergänzungskegels abgetrennt wird, der die Grundfläche G_2 hat. Sind r_1 der Radius der Grundfläche G_1 und s_1 die Mantellinie eines geraden Kreiskegels, so hat sein Mantel die Größe

$$M_1 = \pi \cdot r_1 \cdot s_1 .$$

Der Ergänzungskegel mit dem Grundkreisradius r_2 und der Mantellinie s_2 hat den Mantel

$$M_2 = \pi \cdot r_2 \cdot s_2 .$$

Den Mantel des Kegelstumpfs ergibt demnach der Ausdruck

$$M = \pi \cdot r_1 \cdot s_1 - \pi \cdot r_2 \cdot s_2 .$$

In ihm kommen die Größen s_1 und s_2 vor, die am Kegelstumpf nicht auftreten. Sie werden deshalb durch die Mantellinie s des Kegelstumpfs ersetzt. Abb. 266 zeigt einen Achsenschnitt des Kegelstumpfs. Die Schnittebene geht durch die Mittelpunkte des Grundkreises und des Deckkreises, daher auch durch die Spitze des Ergänzungskegels. Sie schneidet die Mäntel in Mantellinien, den Grundkreis und den Deckkreis in parallelen Durchmessern. Eine Mantellinie und die Verbindungslinie der Spitze mit den Kreismittelpunkten erscheinen demnach als ein von der Spitze ausgehendes Geradenpaar, die Radien als Abschnitte eines von diesen Geraden geschnittenen Parallelenpaars. Mithin gilt nach dem ersten Strahlensatz die Proportion

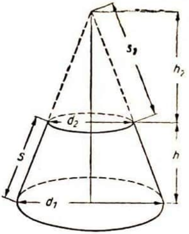


Abb. 266. Zur Berechnung der Mantelfläche eines Kegelstumpfes

$$s_1 : s_2 = r_1 : r_2 \quad \text{und damit} \quad s_2 \cdot r_1 = s_1 \cdot r_2 .$$

Außerdem ist

$$s_1 = s + s_2 .$$

Setzt man für s_1 diesen Ausdruck in die vorangehende Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s_2 \cdot r_1 &= (s + s_2) \cdot r_2 , \\ s_2 \cdot r_1 &= s \cdot r_2 + s_2 \cdot r_2 , \\ s_2 (r_1 - r_2) &= s \cdot r_2 , \\ s_2 &= \frac{s \cdot r_2}{r_1 - r_2} . \end{aligned}$$

Wird in dem Ausdruck für M die Größe s_1 durch $s + s_2$ und s_2 durch den Bruch $\frac{s \cdot r_2}{r_1 - r_2}$ ersetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} M &= \pi r_1 \left(s + \frac{s \cdot r_2}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \cdot \frac{s \cdot r_2}{r_1 - r_2} \\ &= \pi s \left(r_1 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 - r_2}\right) - \pi s \cdot \frac{r_2^2}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{\pi s}{r_1 - r_2} [r_1 (r_1 - r_2) + r_1 \cdot r_2] - \frac{\pi s}{r_1 - r_2} \cdot r_2^2 \\ &= \frac{\pi \cdot s}{r_1 - r_2} (r_1^2 - r_1 r_2 + r_1 r_2 - r_2^2) \\ &= \frac{\pi \cdot s}{r_1 - r_2} (r_1^2 - r_2^2) \\ &= \frac{\pi \cdot s}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = \pi \cdot s (r_1 + r_2) . \end{aligned}$$

Mantel des Kegelstumpfes $\boxed{M = \pi s (r_1 + r_2)}$

Für die Oberfläche O des Kegelstumpfes ergibt sich

$$O = \pi s (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi [s (r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2] ,$$

Werden die Kreisdurchmesser $d_1 = 2r_1$ und $d_2 = 2r_2$ eingeführt, so gehen die Formeln für den Mantel über in

$$M = \frac{\pi \cdot s}{2}(d_1 + d_2),$$

für die Oberfläche in

$$O = \frac{\pi}{4}[2s(d_1 + d_2) + d_1^2 + d_2^2].$$

b) Rauminhalt

Hilfssatz

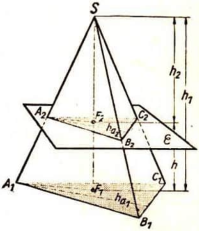


Abb. 267. Zur Ableitung des Hilfssatzes

In Abb. 267 ist die dreiseitige Pyramide $S(A_1B_1C_1)$ mit der Spitze S und der Grundfläche $A_1B_1C_1$ dargestellt. Die parallel zur Grundfläche gelegte Ebene $\mathcal{E}$ schneidet die Seitenkanten SA_1 in A_2, SB_1 in B_2, SC_1 in C_2. Dabei werden als Schnittlinien von Seitenflächen mit parallelen Ebenen

$$A_2B_2 \parallel A_1B_1, \quad B_2C_2 \parallel B_1C_1, \quad C_2A_2 \parallel C_1A_1,$$

als Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln

$$\sphericalangle A_2B_2C_2 = \sphericalangle A_1B_1C_1, \qquad \sphericalangle B_2C_2A_2 = \sphericalangle B_1C_1A_1,$$
$$\sphericalangle C_2A_2B_2 = \sphericalangle C_1A_1B_1.$$

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{SA_2}{SA_1} = \frac{SB_2}{SB_1},$$
$$\frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{SB_2}{SB_1} = \frac{SC_2}{SC_1},$$
$$\frac{C_2A_2}{C_1A_1} = \frac{SC_2}{SC_1} = \frac{SA_2}{SA_1}.$$

Fällt man von S das Lot auf die Grundfläche $A_1B_1C_1$, das diese in F_1 und $\mathcal{E}$ in F_2 trifft, so schneidet die durch SA_1 und SF_1 bestimmte Ebene die Grundfläche in A_1F_1, die Deckfläche in A_2F_2 und es gilt

$$A_1F_1 \parallel A_2F_2, \qquad \frac{SA_2}{SA_1} = \frac{SF_2}{SF_1},$$

wo $SF_2 = h_2$ die Höhe der Ergänzungspyramide, $SF_1 = h_1$ die Höhe der Pyramide $S(A_1B_1C_1)$ und $F_1F_2 = h_1 - h_2$ die Höhe h des Pyramidenstumpfes ist. Die Deckfläche $A_2B_2C_2$ ist die dem Maßstab $h_2 : h_1$ entsprechend verkleinerte Grundfläche $A_1B_1C_1$. Bezeichnen a_1 und h_{a_1} eine Seite und die zugehörige Höhe der Grundfläche, a_2 und h_{a_2} die entsprechenden Größen der Deckfläche, so gilt auch $a_2 : a_1 = h_2 : h_1$ und

$$h_{a_2} : h_{a_1} = h_2 : h_1.$$

Aus $G_1 = \frac{1}{2}a_1 \cdot h_{a_1}$ und $G_2 = \frac{1}{2}a_2 \cdot h_{a_2}$ folgt

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{a_2 \cdot h_{a_2}}{a_1 \cdot h_{a_1}} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{h_{a_2}}{h_{a_1}} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

oder

$$\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Bei einem Pyramidenstumpf, der von einer n-seitigen Pyramide abgetrennt ist, erhält man dieselbe Proportion, desgleichen für einen vom Kegel abgetrennten Kegelstumpf (Abb. 268):

$$G_1 : G_2 = h_1^2 : h_2^2.$$

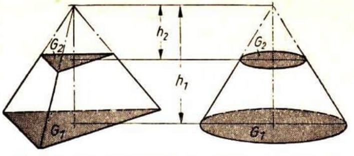


Abb. 268. Zur Berechnung des Rauminhaltes eines Pyramiden- und eines Kegelstumpfes

Die Größen der Grund- und der Deckfläche eines Pyramidenstumpfes (Kegelstumpfes) verhalten sich wie die Quadrate der Abstände von der Spitze der Ergänzungspyramide (des Ergänzungskegels).

Pyramidenstumpf

Um den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes zu berechnen, gehen wir davon aus, daß ein Pyramidenstumpf übrigbleibt, wenn von der Pyramide mit der Grundfläche G_1 und der Höhe h_1 die Ergänzungspyramide mit der Grundfläche G_2 und der Höhe h_2 abgetrennt wird.

Die erste Pyramide hat den Rauminhalt

$$V_1 = \tfrac{1}{3} G_1 \cdot h_1 ,$$

die zweite hat den Rauminhalt

$$V_2 = \tfrac{1}{3} G_2 \cdot h_2 ,$$

der Stumpf hat somit den Rauminhalt

$$V = \tfrac{1}{3} G_1 \cdot h_1 - \tfrac{1}{3} G_2 \cdot h_2 .$$

In diesem Ausdruck sind die Größen h_1 und h_2 verwendet, die am Pyramidenstumpf nicht vorkommen; sie werden auf folgende Weise entfernt.

Zwischen h_1, h_2 und der Höhe h des Pyramidenstumpfes besteht der Zusammenhang $h_1 = h + h_2$. Wird in dem Ausdruck für V die Höhe h_1 durch $h + h_2$ ersetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} G_1 (h + h_2) - \tfrac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h_2 , \\ &= \tfrac{1}{3} [G_1 \cdot h + G_1 \cdot h_2 - G_2 \cdot h_2] \\ &= \tfrac{1}{3} [G_1 \cdot h + h_2 (G_1 - G_2)] . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sqrt{G_2} : \sqrt{G_1} = h_2 : h_1 .$$

Wird hier an die Stelle von h_1 die Summe $h + h_2$ gesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{G_2} : \sqrt{G_1} &= h_2 : (h + h_2) , \\ h_2 \cdot \sqrt{G_1} &= (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} , \\ h_2 \cdot \sqrt{G_1} &= h \cdot \sqrt{G_2} + h_2 \cdot \sqrt{G_2} , \\ h_2 \cdot \sqrt{G_1} - h_2 \cdot \sqrt{G_2} &= h \cdot \sqrt{G_2} , \\ h_2 \left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2} \right) &= h \cdot \sqrt{G_2} , \\ h_2 &= \frac{h \cdot \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} . \end{aligned}$$

Wird dieser Bruch in dem Ausdruck für V an die Stelle von h_2 gesetzt, so erhält man

$$V = \frac{1}{3}\left[G_1 \cdot h + \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}-\sqrt{G_2}}(G_1 - G_2)\right].$$

Schreibt man $G_1 - G_2 = (\sqrt{G_1})^2 - (\sqrt{G_2})^2 = (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}) \cdot (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$, so ergibt sich

$$V = \tfrac{1}{3}\left[G_1 \cdot h + h\sqrt{G_2}\left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right)\right] = \tfrac{1}{3}h\left[G_1 + \sqrt{G_1}\cdot\sqrt{G_2} + G_2\right]$$

und als Formel für den

Rauminhalt des Pyramidenstumpfes $\boxed{V = \tfrac{1}{3}h\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right)}$

Kegelstumpf

Bei einem Kegelstumpf ist

$$G_1 = \pi r_1^2, \quad G_2 = \pi r_2^2,$$

wenn r_1 der Grundkreisradius, r_2 der Radius der Deckfläche ist. Die Formel für den Rauminhalt lautet

$$V = \tfrac{1}{3}h\left(\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2\right).$$

Nach Ausheben des allen Summanden gemeinsamen Faktors π entsteht für den

Rauminhalt des Kegelstumpfes $\boxed{V = \frac{\pi}{3} \cdot h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}$

Da die Höhe h eines geraden Kegelstumpfes eine Kathete, die Differenz $r_1 - r_2$ die andere Kathete und die Mantellinie s die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bilden (Abb. 269), gilt die Gleichung:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2.$$

Werden die Durchmesser $d_1 = 2r_1$ und $d_2 = 2r_2$ eingeführt, so entsteht als Formel für den Rauminhalt des Kegelstumpfes

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot h\left(d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2\right).$$

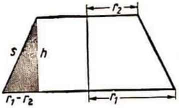


Abb. 269. Beziehungen zwischen Grund- und Deckkreisradien, Mantellinie und Höhe eines Kegelstumpfes

AUFGABEN

1. Grund- und Deckfläche eines geraden Pyramidenstumpfes sind regelmäßige Sechsecke. Die Grundfläche hat das Eckenmaß $e_1 = 80$ mm, die Deckfläche $e_2 = 64$ mm, die Seitenkante des Stumpfes mißt $s = 17$ mm (Abb. 270). Zu berechnen sind

- **a)** die Höhe h des Stumpfes,
- **b)** Seitenkante s_2 und Höhe h_2 der Ergänzungspyramide,
- **c)** die Höhe h' einer Seitenfläche des Stumpfes,
- **d)** seine Mantelfläche M,
- **e)** seine Grundfläche G_1 und seine Deckfläche G_2,
- **f)** seine Oberfläche O,
- **g)** sein Rauminhalt V.

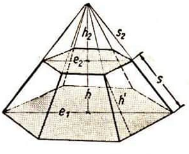


Abb. 270. Zu Aufgabe 1

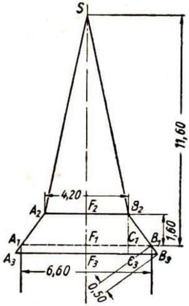


Abb. 271. Zu Aufgabe 2

2. Ein Turm hat einen quadratischen Dachboden von 6,60 m Seitenlänge. Das Dach setzt sich aus den Mänteln einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes zusammen, jede Traufenkante hat als Grundkante des Stumpfes von der in der gleichen Seitenfläche liegenden Seite des Dachbodens 0,50 m Abstand. Die Deckfläche des Stumpfes bildet zugleich die Grundfläche der Pyramide und hat 4,20 m Seitenlänge. Vom Dachboden hat die Deckfläche 1,60 m, die Turmspitze 11,60 m Abstand (Abb. 271).

- **a)** Wieviel Quadratmeter Blech werden gebraucht, um das Dach zu decken, wenn 10 % zur errechneten Dachfläche für Überlappung zugeschlagen werden?
- **b)** Wie groß ist der über dem Dachboden liegende Dachraum?

3. Wieviel wiegt das in Abb. 272 dargestellte Werkstück (Gesenk), wenn die Dichte $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$ beträgt?

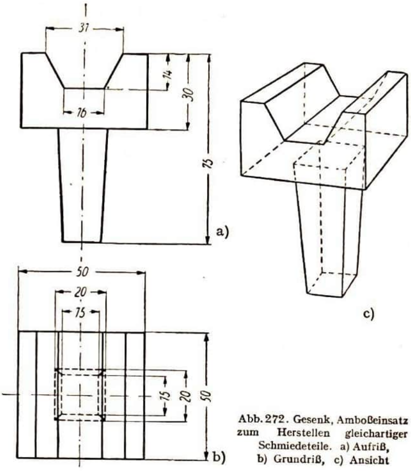


Abb. 272. Gesenk, Amboßeinsatz zum Herstellen gleichartiger Schmiedeteile. a) Aufriß, b) Grundriß, c) Ansicht

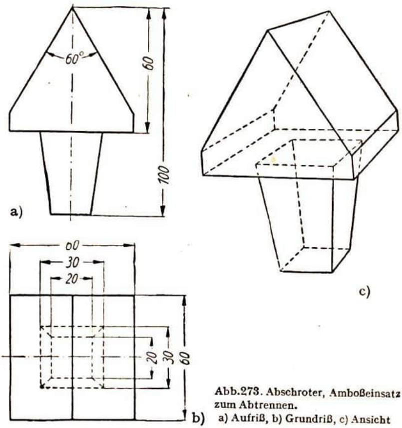


Abb. 273. Abschroter, Amboßeinsatz zum Abtrennen. a) Aufriß, b) Grundriß, c) Ansicht

4. Wieviel wiegt der in Abb. 273 dargestellte Abschroter? (Dichte 7,85 g/cm³.)

5. Der Sockel eines Denkmals hat die Form eines Pyramidenstumpfes. Grund- und Deckfläche sind regelmäßige Achtecke. Die Grundkante ist 2,40 m lang, die Kante der Deckfläche 2 m und die Seitenkante 1,20 m. Wieviel Mauerwerk enthält der Sockel?

6. Der Stumpf eines geraden Kreiskegels (Abb. 274) hat als oberen Durchmesser $d_2 = 112$ mm, als unteren $d_1 = 140$ mm, als Mantellinie $s = 50$ mm.

a) Welche Höhe h hat der Stumpf?

b) Welche Höhe h_2 und Mantellinie s_2 hat der Ergänzungskegel?

c) Welchen Winkel α bilden die Mantellinien, die den auf eine Ebene abgerollten Kegelstumpfmantel abgrenzen?

d) Wie groß ist die Mantelfläche M?

e) Wie groß ist die Oberfläche O?

f) Welchen Rauminhalt V hat der Stumpf?

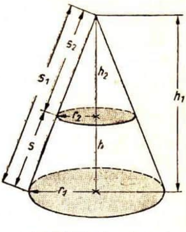


Abb. 274. Zu Aufgabe 6

7. Das Flammrohr eines 860 mm langen Dampfkessels hat die Form eines abgestumpften Kegels, der auf der einen Seite den Durchmesser 450 mm, auf der anderen den Durchmesser 280 mm hat. Wie groß ist die Heizfläche?

8. An Abzugsrohre von 80 mm Durchmesser sind als Rohrhauben Kegelstumpfmäntel aus 1,5 mm starkem, verzinktem Stahlblech anzusetzen. Die Hauben sollen 50 mm Höhe und 320 mm lichte Weite haben.

a) Zum Herstellen einer Schablone sind die Längen s_1 und s_2 der Mantellinien des Vollkegels und Ergänzungskegels zu berechnen sowie die Winkel zwischen den Mantellinien des Stumpfes, die die Schablone begrenzen.

b) Wieviel wiegt eine Haube, wenn 1 m² Blech 11,76 kg wiegt?

FACHWORTVERZEICHNIS

Abkürzungen: ar. = arabisch, grch. = griechisch, lat. = lateinisch, it. = italienisch, frz. = französisch, → siehe die Erklärung dieses Wortes.

abkürzen, → runden.

abschrecken, stark erhitzte Gegenstände plötzlich abkühlen.

Abszisse, die [lat. *abscissus* „abgetrennt“], der Rechtswert, der Abstand eines Punktes von der *y*-Achse des Koordinatensystems.

absolut [lat. *absolutus* „losgelöst“], für sich bestehend, nicht durch Beziehungen zu anderem gebunden, beziehungslos.

Achse, Gerade, die durch ihre Lage ausgezeichnet ist, Schnittlinie von Ebenen.

addieren [lat. *addere* „hinzufügen“], zusammenzählen. Addition ist erste Grundrechenart, Rechenzeichen +, gelesen → plus.

ähnlich, Kurzzeichen „~“ zwischen der Bezeichnung geometrischer Figuren, kennzeichnet die Übereinstimmung der Form geometrischer Figuren ohne Rücksicht auf ihre Größe.

Algebra, die [ar. *al dschebr* „Ergänzung“], die Buchstabenrechnung.

Altgrad, der, → Grad.

analog, [grch. *analogos* „gleichförmig“], entsprechend, in Verhältnissen des Zusammenhangs übereinstimmend, übertragbar, sinngemäß anwendbar, gleichartig.

Analyse, die [grch. *analysis* „Auflösung“], das Zerlegen eines Stoffes in Grundstoffe, Zergliederung.

Äquator, der [lat. *aequare* „gleichmachen“], größter Kreis der Erdkugel, dessen Ebene auf der Erdachse senkrecht steht.

Arithmetik, die [grch. *arithmos* „Zahl“], die Kunst, mit Zahlen zu rechnen, Rechenkunst.

Asymptote, die [grch. *a-* „nicht“, *-sym-* „zusammen“, *-piptein* „fallen“], Näherungsgerade; eine Gerade, die sich einer beliebig weit fortsetzbaren gekrümmten Linie immer weiter nähert, ohne sie zu erreichen.

at, Kurzform für Atmosphäre, Maßeinheit des Dampfdruckes; $1 \text{ at} = 1 \text{ kp/cm}^2$.

auflösen, eine Gleichung wird aufgelöst, indem man sie so umformt, daß eine Seite nur aus einer Größe besteht; Auflösen einer Klammer: Der Zahlenausdruck wird umgeformt, so daß die → Klammer wegfällt.

aufrunden, → runden.

ausheben, Rechenverfahren zum Umwandeln → algebraischer Summen in die Form eines → Produktes.

Außenglieder, das 1. und 4. Glied einer → Proportion.

Außenwinkel, der Winkel zwischen einer Seite und der Verlängerung einer benachbarten Seite eines Vielecks.

axial [lat. *axis* „Achse“], auf eine → Achse bezogen.

Azimut, der, auch das [ar. *azimut* „Richtung“], bei der Landvermessung der in einer waagerechten Ebene von der Nordrichtung aus im Sinne der Uhrzeigerdrehung gemessene Winkel.

Barograph, der [grch. *barys* „schwer“ *graphein* „schreiben“], Gerät, das den Luftdruck selbsttätig aufzeichnet.

Basis, die [grch. *basis* „Grundlage“], Grundlinie, Grundseite, Grundzahl.

Beizahl, die, → Faktor einer unbekannten oder veränderlichen Größe.

Beschleunigung, das Verhältnis von Geschwindigkeitszunahme zu Zeit gibt die auf eine Zeiteinheit bezogene Geschwindigkeitssteigerung an.

Bestimmungsdreieck, gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie die Seite und dessen Spitze der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vielecks ist.

Bestimmungsgleichung, → Gleichung.

Bestimmungsstück, eine Strecke oder ein Winkel, die für die Konstruktion einer geometrischen Figur der Größe nach vorgeschrieben sind.

Betrag, Wert der Zahl ohne Rücksicht auf ihr → Vorzeichen, auch absoluter Betrag genannt.

Bildweite, Abstand zwischen Linse und Schirm, auf dem ein Bild entworfen wird.

Billion, die [frz. billion], Zahlwort zur Bezeichnung von 1000 000 000 000.

Bimetallstreifen [lat. *bis* „zweimal“], dient zum Messen der Temperatur; besteht aus zwei verschiedenen, aufeinandergewalzten Metallblechen, die sich bei gleicher Erwärmung verschieden stark dehnen, so daß sich der Bimetallstreifen bei Änderung der Temperatur krümmt.

Binom, das [lat. *bis* „zweimal“, grch. *nomion* „das Zugeteilte“], zweigliedrige Summe.

Brechungswinkel, Richtungsunterschied zweier Strecken, die bei einem Linienzug der Landesvermessung aufeinanderfolgen.

Breite, die geographische Breite eines Ortes der Erdoberfläche ist der Winkel, den für diesen Ort der Erdradius mit der Ebene des → Äquators bildet.

Brennpunkt, → Ellipse; der Punkt auf der großen Halbachse einer Ellipse, der von den Endpunkten der kleinen Achse um die Länge der großen Halbachse entfernt ist.

Bruch, der Quotient zweier Zahlen, die erste ist der Zähler, die zweite der Nenner, zwischen beiden steht der Bruchstrich. Dezimalbrüche haben Potenzen von 10 als Nenner und werden durch Einordnen in die Schreibweise dekadischer Zahlen ohne Nenner geschrieben. Der Bruchstrich ist ein Kennzeichen gemeiner Brüche. Brüche mit dem Zähler 1 sind Stammbrüche. Bei echten Brüchen ist der Zähler kleiner, bei unechten größer als der Nenner. Bei uneigentlichen Brüchen ist der Zähler ein ganzes Vielfaches des Nenners.

Bürette, die [frz. *burette* „Kännchen“], Maßrohr zum genauen Abmessen von Flüssigkeitsmengen.

dekadisch [grch. *deka* „zehn“], aus Gruppen von je 10 Einheiten aufgebaut, zehnteilig.

Deltoid, das [grch. *delta*, vierter Buchstabe des griechischen Alphabets], ein aus zwei → gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetztes Viereck, Drachenviereck.

dezimal [lat. *decimus* „der Zehnte“] → dekadisch. Das Dezimalsystem ist der Zahlenaufbau mit der Grundzahl 10. Die Dezimale ist eine Stelle einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl.

Dezimalzahl, eine im Dezimalsystem geschriebene Zahl.

Diagonale, die [grch. *dia*, „durch“, *gonia*, „Winkel“], Strecke, die zwei nicht benachbarte Ecken eines Vielecks verbindet.

Diagramm, das [grch. *dia* „durch“, *gramma* „Geschriebenes“], Zeichnung, die den Zusammenhang von Größen darstellt.

Dichte, das Verhältnis von Masse zu Volumen, gibt die Masse der Raumeinheit eines Stoffes an.

Differenz, die [lat. *differentia*, „Unterschied“], Größenunterschied, Ergebnis der Subtraktion.

direkt [lat. *directus*, „gerade gerichtet“], gleichsinnig, gerade.

Diskussion, die [lat. *discussio*, „Untersuchung“], Erörterung, Deutung.

Dividend, der [lat. *dividere*, „teilen“], die Zahl, die geteilt wird.

Division, die [lat. *divisio*, „Teilung“], die vierte Grundrechenart, das Teilen.

Divisor, der [lat. *divisor*, „Teiler“], der Teiler; die Zahl, durch die geteilt wird.

Doppelbruch, ein Bruch, in dessen Zähler und Nenner Brüche stehen.

Drachenviereck → Deltoid.

Drehmoment, das [lat. *momentum*, „Bewegung“], die Größe der Drehwirkung, die eine Kraft an einem um eine Achse drehbaren Körper hervorbringt.

Durchmesser, die Sehne eines Kreises, die durch seinen Mittelpunkt geht.

Ebene, die einzige Flächenart, bei der die Verbindungsgerade zweier Flächenpunkte stets vollständig in der Fläche verläuft.

Eckenmaß, das, Abstand gegenüberliegender Ecken eines → regelmäßigen Vielecks mit gerader Eckenzahl.

Elastizität, die [grch. *elaunein*, „ziehen“], die Fähigkeit eines Körpers, die durch eine Kraft hervorgebrachte Änderung seiner Form beim Aufhören der Kraft rückgängig zu machen.

Elastizitätsmodul, der [lat. *modulus*, „Maß“], Zahlenwert der den Widerstand eines Werkstoffes gegen Formänderung durch Zugkräfte oder Druckkräfte kennzeichnet.

eliminieren [lat. *eliminare*, „über die Schwelle bringen“], beseitigen, z. B. in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die eine Unbekannte.

Ellipse, die [grch. *ekleipsis* „Ausbleiben“], geschlossene Kurve, die als schiefer Schnitt eines Kreiszylinders entsteht.

empirisch [grch. *empeireia*, „Erfahrung“], erfahrungsgemäß, auf Erfahrung beruhend.

Emulsion, die [lat. *emulgere*, „ausmelken“], Flüssigkeit, in der kleine Tröpfchen einer anderen schweben.

Energie, die [grch. *en*, „in“, *ergon*, „Arbeit“], Arbeitsvermögen eines Körpers.

erweitern, Zähler und Nenner eines Bruches werden mit derselben Zahl multipliziert. Dabei verändert sich der Wert des Bruches nicht.

Exponent, der [lat. *ex*, „heraus“, *ponere*, „stellen“], Hochzahl, die bei Potenzen und Wurzeln hochgestellte Zahl.

exzentrisch [lat. *ex* „heraus“, *centrum*, „Mittelpunkt“], Bezeichnung für Kreise, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen.

Faktor, der [lat. *facere*, „machen“], Zahl, mit der eine andere multipliziert wird.

Flansch, der, Ansatz zum Verbinden von Rohrenden.

Flaschenzug, Gerät, das zum Heben von Lasten Rollen verwendet.

Flügelschraube, Schraube mit flügelförmigen Ansätzen am Kopf, die das Drehen mit der Hand erleichtern.

fundamental [lat. *fundamentum*, „Grundlage“], grundlegend.

Funktion, die [lat. *functio* „Verrichtung“], Vorschrift, die einer veränderlichen Größe eine andere zuordnet.

Funktionsgleichung, Gleichung, die einen rechnerischen Zusammenhang zwischen veränderlichen Größen ausdrückt.

Fußpunkt, Schnittpunkt des Lotes, das von einem Punkt auf eine Gerade gefällt ist, mit der Geraden.

Ganghöhe, die Strecke, um die sich ein Punkt der Schraubenachse bei einer Umdrehung der Schraube verschiebt.

Gehrung, Abschrägung am Stoß zweier Leisten verschiedener Richtung.

Geometrie, die [grch. *ge* „Erde“, *metrein* „messen“], ursprünglich die Lehre von der Landvermessung. Wissenschaft, die ebene und räumliche Gebilde behandelt.

geometrisches Mittel → Mittel.

Geschwindigkeit, das Verhältnis von Weg zu Zeit, gibt die auf eine Zeiteinheit bezogene Änderung der Weglänge an.

Gewindesteigung → Ganghöhe.

gleichnamig → Bruch.

gleichschenklig, Bezeichnung für ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten, Bezeichnung für ein → Trapez, dessen nichtparallele Seiten gleich lang sind.

Gleichung, Ausdruck für die Gleichheit zweier Zahlenausdrücke, die Seiten der Gleichung genannt werden. Gleichungen, die nur für bestimmte Werte der in den Zahlenausdrücken vorkommenden Größen gelten, sind Bestimmungsgleichungen.

Gleichungssystem, das, Gleichungen, die nebeneinander bestehen und einander ergänzen.

Grad, der [lat. *gradus* „Schritt“], 1.) Maßeinheit der Winkelmessung; 1 Altgrad (1°) ist $\frac{1}{360}$ des Vollkreises. $1^\circ = 60$ Minuten ($60'$), $1' = 60$ Sekunden ($60''$). 1 Neugrad (1^g) ist $\frac{1}{400}$ des Vollkreises. $1^g = 100$ Neuminuten (100^c), $1^c = 100$ Neusekunden (100^{cc}); 2.) Höchste → Potenz der Unbekannten einer Gleichung.

graphisch [grch. *graphein*, „schreiben“], zeichnerisch.

Grundlinie, die ungleiche Seite des gleichschenkligen Dreiecks, jede Parallelseite des → Trapezes.

Grundrechnung, die vier Arten der Grundrechnung sind Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division.

Grundton, der tiefste Ton einer schwingenden Saite.

Grundzahl, der sich wiederholende Faktor einer → Potenz.

Halbachse, die Hälfte des größten bzw. kleinsten Durchmessers einer → Ellipse.

Härtevorgang, die Erhöhung der Härte metallischer Werkstoffe durch Erwärmen und anschließendes plötzliches Abkühlen.

Hauptnenner, das kleinste gemeinsame Vielfache einzelner Nenner.

Hauptscheitel, der Endpunkt des größten Durchmessers einer Ellipse.

Hebel, fester Körper, der um eine Achse drehbar ist.

Hebelarm, die Entfernung einer an einem Hebel wirksamen Kraft von seiner Drehachse, auch Kraftarm bzw. Lastarm genannt.

Hebelgesetz, die Gleichgewichtsbedingung für Kräfte, die an einem Hebel wirksam sind.

Hochwert → Ordinate.

Hochzahl → Exponent.

Höhe, die Länge des von einem Punkt auf eine Gerade bzw. Ebene gefällten → Lotes.

homolog [grch. *homos*, „gleich“, *logos*, „Wort, Lehre“], gleichliegend, entsprechend.

Hyperbel, die [grch. *hyperbole*, „Übermaß“], Kurve, die als Schnitt der beiden Teile eines Doppelkegels mit einer Ebene entsteht.

Hypotenuse, die [grch. *hypoteinein*, „sich unten ausbreiten“], die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.

Hz [nach Heinrich Hertz, 1857 bis 1894, Physiker, Prof. in Kiel, Karlsruhe, Bonn], Abkürzung für Hertz (Maßeinheit für Schwingungszahlen) 1 Hz = 1 Schwingung je Sekunde.

identisch [lat. *idem*, „derselbe“], übereinstimmend.

Index, der [lat. *index*, „Anzeiger“], Kennzeichen, Unterscheidungszeichen.

Indikator, der [lat. *indicare* „anzeigen“], Gerät, das den Druckverlauf im Zylinder der Dampfmaschine, des Verbrennungsmotors anzeigt.

indirekt [lat. *in-* „un-“, *directus* „gerade gerichtet“], entgegengesetzt gerichtet, ungerade, umgekehrt.

Inkreis, Kreis, der die Seiten eines Vielecks berührt.

Innenglied, das 2. und 3. Glied einer → Proportion.

Innenwinkel, Winkel zwischen zwei benachbarten Seiten eines Vielecks.

Interpolation, die [lat. *interpolare*, „zurichten“], das Errechnen von Zahlenwerten einer Funktion, die zwischen zwei benachbarten bekannten Werten der Funktion liegen.

isolieren [frz. *isoler*, „absondern“], absondern, vereinzeln.

Kalorie, die [lat. *calor* „Wärme“], Maßeinheit der Wärmemenge. 1 Kilokalorie (1 kcal) erwärmt 1 kg Wasser von 14,5° C auf 15,5° C.

Kapazität, die [lat. *capax* „fassungsfähig“], das Fassungsvermögen, die Aufnahmefähigkeit.

Kartograph, der [grch. *chartes* „Blatt“, *graphein* „schreiben“], Landkartenzeichner.

Kathete, die [grch. *kathetos* „Senkrechte“], jede Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die an seinem rechten Winkel liegt.

Kegel, Körper, der in eine Spitze ausläuft, mit einem gekrümmten Oberflächenteil, der sich in eine Ebene ausbreiten läßt.

Kehrwert, der Wert, mit dem eine Zahl zu multiplizieren ist, damit sich 1 ergibt. Der Kehrwert zu 5 ist $\frac{1}{5}$, denn $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Kilowatt, das [nach James Watt, 1736 bis 1819, engl. Ingenieur], technische Maßeinheit der elektrischen Leistung.

Klammer, Zeichen, das in einem algebraischen Ausdruck eine Vorschrift für die Reihenfolge der Berechnung andeutet.

Knotenblech, Blech, das an den Anschlußpunkten von Fachwerkträgern Kräfte überträgt.

Koeffizient, der [lat. *cum* „mit“, *efficere* „bewirken“], Beizahl, Zahlenfaktor.

Kompaß, der [it. *compas* „Kompaß“], Gerät zum Bestimmen der Himmelsrichtungen.

Komplementwinkel, [lat. *complementum* „Ergänzung“], Winkel, der einen anderen zu 90° ergänzt.

Kondensator, der [lat. *condensus* „dicht“], Gerät zum Aufspeichern elektrischer Ladungen.

kongruent [lat. *congruere* „übereinstimmen“], übereinstimmend, deckungsgleich.

konzentrisch [lat. *cum* „zusammen“, *centrum* „Mittelpunkt“], mit gleichem Mittelpunkt, gleichmittig.

konstant [lat. *constans*, „fest“], unveränderlich.

Konstruktion, die [lat. *construere* „zusammenfügen“], das Herstellen geometrischer Figuren aus vorgeschriebenen Stücken.

Koordinate, die [lat. *co-*, „zusammen“, *ordinare*, „ordnen“], der Abstand, den ein Punkt einer Ebene von einer ihrer Geraden hat. Durch die Abstände von zwei aufeinander senkrechtstehenden geraden Linien (Koordinatenachsen) wird ein Punkt festgelegt. Die Abstände werden auf den Achsen von ihrem Schnittpunkt (Nullpunkt) aus gerechnet. Die eine Achse (gewöhnlich waagerecht angenommen) wird x-Achse oder Abszissenachse, die andere y-Achse oder Ordinatenachse genannt.

Korbbogen, aus Kreisbogen zusammengesetzte Bogenform.

Leistung, das Verhältnis von Arbeit zu Zeit, gibt die in einer Zeiteinheit verrichtete Arbeit an.

linear [lat. *linea*, „Linie“], geradlinig.

Lot, das, eine gerade Linie, die senkrecht auf einer anderen steht.

Mantel, Teil der Oberfläche eines Körpers.

Mantellinie, eine Gerade, die auf dem Mantel eines Körpers verläuft.

Minuend, der [lat. *minuere* „kleiner machen“], die Zahl, von der eine andere subtrahiert wird.

minus [lat. *minus*, „weniger“], Bezeichnung für das Rechenzeichen der Subtraktion und für das Vorzeichen negativer Zahlen.

Mittel, das, Mittelwert (Durchschnittswert), der nach bestimmter Vorschrift aus mehreren Werten einer Größe errechnet wird. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist die Hälfte ihrer Summe; das geometrische Mittel zweier Zahlen ist die Quadratwurzel aus ihrem Produkt.

Mittellinie, die Strecke, die zwei Seitenmitten in einem Vieleck verbindet.

Mittelpunktswinkel, ein Winkel, dessen → Scheitel der Mittelpunkt eines Kreises ist.

Mittelsenkrechte, die im Mittelpunkt einer Strecke auf ihr errichtete Senkrechte.

Mitteltransversale, die [lat. *transversus*, „schräg“], in einem Dreieck die Strecke, die eine Seitenmitte mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet.

Mittelwert → Mittel.

mittlere Proportionale [lat. *proportio*, „Ebenmaß“], (geometrisches Mittel) zu den beiden → Außengliedern heißt bei einer viergliedrigen → Proportion jedes der → Innenglieder, wenn die Innenglieder einander gleich sind. Dasselbe wie geometrisches Mittel, denn $a : b = b : c$ läßt sich auch schreiben $b = \sqrt{a \cdot c}$; b ist die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und b.

Molekül, das [lat. *moles*, ,,Masse''], das kleinste Teilchen eines Stoffes, das noch die gleichen chemischen Eigenschaften wie der Stoff hat.

Moment, das → Drehmoment.

Multiplikand, der [lat. *multiplicare* ,,vervielfältigen''], die Zahl, die → multipliziert wird.

Multiplikation, die [lat. *multiplicatio* ,,Vervielfältigung''], die 3. Grundrechenart, das Malnehmen, Multiplizieren.

Multiplikator, der [lat. *multiplicare* ,,vervielfältigen''], die Zahl, mit der multipliziert wird.

Nebenwinkel, der Winkel zwischen dem einen → Schenkel eines Winkels und der Verlängerung des anderen über den Scheitel hinaus.

negativ [lat. *negare*, ,,verneinen''], negative Zahlen sind Zahlen, die kleiner als 0 sind, z. B. —1, —2, —3 usw.

Nenner, die Zahl, die bei einem gemeinen Bruch unter dem Bruchstrich steht, z. B. die Zahl 15 in $\frac{13}{15}$.

Nennmaß, das Maß, auf das sich Angaben über Abmessungen von Bohrungen oder Wellen beziehen.

Nennweite, die für ein Rohr vorgeschriebene Weite.

Nennwert, bezeichnet den Wert einer Ziffer im Unterschied zu ihrem Stellenwert und Zahlenwert. So hat in 345 die Ziffer 3 den Nennwert 3, den Stellenwert Hunderter und stellt den Zahlenwert 300 dar.

Neugrad, der, → Grad.

Nonius, der [nach Pedro Nunez, 1492 bis 1577, portug. Mathematiker in Coimbra], eine neben der Hauptteilung eines Maßstabes verschiebbare Hilfsteilung. Sie verwendet gewöhnlich eine in 10 gleiche Abstände geteilte Strecke, die 9 mm lang ist, und ermöglicht dann das Ablesen von Zehnteln eines Millimeters.

Norm, die [lat. *norma*, ,,Richtschnur''], die auf der Grundlage aller technischen Produktionsmöglichkeiten ermittelte Richtzahl für Arbeitsaufwand, Materialverbrauch u. a.

Obelisk, der [grch. *obeliskos*, ,,Spießchen''], der Körper wird auch Spitzsäule genannt. Seine Grundfläche bildet ein Rechteck oder Quadrat, je zwei der gleichlangen Seitenkanten treffen in Endpunkten der parallel zur Grundfläche gelegenen Firstkante zusammen.

Ohm, das [nach Georg Simon Ohm, 1789 bis 1854, Professor der Physik in München], Maßeinheit des elektrischen Widerstands, abgekürzt: Ω. Den elektrischen Widerstand 1 Ω hat bei 0° C ein Quecksilberfaden von 1 mm² Querschnitt und 106,3 cm Länge.

Ordinate, die [lat. *ordinare* ,,ordnen''], der Hochwert, der Abstand eines Punktes von der x-Achse, → Koordinate.

Parabel, die [grch. *parabole* ,,Gleichnis''], Bezeichnung für eine Kegelschnittart. Die Kurve entsteht als Schnitt zwischen dem Mantel eines Kegels und einer Ebene, die zu einer Mantellinie parallel liegt.

parallel [grch. *para*, ,,neben'', *alleloi*, ,,einander''], gleichlaufend. Parallele sind gerade Linien, die mit einer schneidenden Geraden gleiche Stufenwinkel bilden und unveränderlichen Abstand haben.

Parallelogramm, das [grch. *para* ,,neben'', *alleloi* ,,einander'', *graphein*, ,,schreiben''], ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten.

Pascalsches Dreieck [nach Blaise Pascal, 1623 bis 1662, franz. Gelehrter]. Werden aufeinanderfolgende Potenzen eines Binoms in Summen verwandelt, so lassen sich die Koeffizienten der Summanden so in Zeilen ordnen, daß jeder Koeffizient als Summe der beiden ihm in der vorhergehenden Zeile benachbarten erscheint. Die Zahlen füllen dann ein gleichschenkliges Dreieck aus.

Peripherie, die [grch. *peri* ,,um'', *pherein* ,,tragen''], die krumme Linie, die eine Kreisfläche begrenzt.

Pfeilhöhe, der größte Abstand, den ein Punkt eines Kreisbogens von der zum Bogen gehörenden Sehne hat.

Planimetrie, die [lat. *planum* ,,Ebene'', grch. *metrein* ,,messen''], ebene Geometrie. Der Teil der Geometrie, der sich auf Untersuchung ebener Gebilde beschränkt.

plus [lat. *plus*, ,,mehr''], Bezeichnung für das Rechenzeichen der Addition und für das Vorzeichen positiver Zahlen.

Polynom, das [grch. *polys*, ,,viel'', *nomion*, ,,Zugeteiltes''], ein Zahlenausdruck, der aus mehreren Summanden besteht.

Positiv [lat. *positus*, ,,hergestellt''], Bezeichnung für Zahlen, die größer als 0 sind, z. B. +1, +2, +3 usw.

Potenz, die [lat. *potentia*, ,,Macht''], das Produkt aus einer Anzahl gleicher Faktoren (*n* Faktoren *a*) wird abgekürzt a^n geschrieben (gelesen: *a* hoch *n*) und n^{te} Potenz von *a* genannt.

Primfaktor, der [lat. *primus* ,,erster'', *facere* ,,machen''], Primzahl, ganze Zahl, die nur durch sich selbst und durch Eins teilbar ist, deshalb nicht als Produkt aus anderen ganzen Zahlen dargestellt werden kann.

Prinzip, das [lat. *principium*, ,,Anfang''], der Grundsatz. Angabe, die als Grundlage weiterer Überlegungen dient.

Prisma, das, Säule mit ebenen Seitenflächen zwischen parallelen Seitenkanten.

Produkt, das [lat. *producere*, ,,hervorbringen''], das Ergebnis der Multiplikation.

Produktion, die [lat. *producere*, ,,hervorbringen''], die Gütererzeugung.

Profil, das [frz. *profil*, ,,Querschnitt''], die Umrandung des Querschnitts, der rechtwinklig zur Längsrichtung eines Gegenstands geführt ist.

Proportion, die [lat. *proportio* ,,Ebenmaß''], der Ausdruck für die Gleichheit der Werte von Verhältnissen, z. B. $5 : 15 = 8 : 24$.
In der viergliedrigen Proportion $a : b = c : d$ ist d die vierte Proportionale, in der stetigen Proportion $n : m = m : p$ ist m die mittlere Proportionale; fortlaufende Proportion $x : y : z = f : g : h$.

Pultdach, ein Dach, das nur nach einer Seite abfällt.

Pyramide, die [grch. *pyramis*, ,,Pyramide''], ein Körper mit ebenen Begrenzungsflächen, ein Vieleck bildet die Grundfläche, die Seitenflächen sind Dreiecke, die in der Spitze der Pyramide zusammentreffen.

Pythagoras, Lehrsatz des [nach Pythagoras, griech. Philosoph, 580 bis 501 v. u. Z.], die Summe zweier Quadrate, deren Seiten die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, ergibt den Flächeninhalt des über der Hypotenuse gezeichneten Quadrats.

Quader, der [lat. *quadrus* ,,viereckig''], ein durch sechs Rechtecke abgegrenzter Körper, von denen je zwei gegenüberliegende gleich groß sind.

Quadrant, der [lat. *quadrare*, ,,viereckig machen''], eines der vier Gebiete, in das zwei einander rechtwinklig schneidende gerade Linien die Ebene zerlegen; Viertelkreis.

Quotient, der [lat. *quotiens* ,,wievielmal''], das Ergebnis der Division zweier Zahlen; das Verhältnis zweier Größen.

Radius, der [lat. *radius* ,,Stab, Strahl''], der Halbmesser eines Kreises, einer Kugel; Abstand des Mittelpunkts vom Umfang eines Kreises bzw. von der Oberfläche einer Kugel.

Rechteck, das, ein Viereck mit vier rechten Winkeln.

Rechtkant, das → Quader.

Rechtswert → Abszisse.

regelmäßiges Vieleck, ein Vieleck, in dem die Seiten und die Winkel einander gleich sind.

relativ [lat. *relatio* ,,Beziehung''], die Lage der Zahlen, die positives oder negatives Vorzeichen haben, ist auf den Nullpunkt der Zahlengeraden bezogen. Diese Zahlen werden deshalb relative Zahlen genannt.

Resultat, das [lat. *resultare* ,,zurückspringen''], das Ergebnis einer Berechnung.

reziprok [lat. *reciprocus* ,,zurückgehend''], als reziproken (umgekehrten) Wert einer Zahl a bezeichnet man $\frac{1}{a}$. → Kehrwert.

Rhomboid, das [grch. *rhombos* ,,Steinbutt''], das schiefwinklige Parallelogramm, dessen benachbarte Seiten verschiedene Länge haben.

Rhombus, der [grch. *rhombos* ,,Steinbutt''], das gleichseitige Viereck mit schiefen Winkeln, Raute.

Rollenlager, das, Gleitvorrichtung für Wellen zur Verminderung der Reibung. Zwischen zwei Ringen liegen Rollen, die sich bei der Drehung der Welle auf den Rollbahnen der Ringe abwälzen.

runden, das Weglassen von Ziffern, die in den letzen Stellen einer Dezimalzahl stehen. Man spricht von aufrunden, wenn die letzte mitgeführte Ziffer dabei um 1 erhöht wird, von abrunden, wenn sie nicht erhöht wird.

Scheitel, der Schnittpunkt der Schenkel eines Winkels; der Schnittpunkt einer Kurve mit einer Symmetrieachse.

Scheitelwinkel, verlängert man die Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so entsteht zwischen den Verlängerungen der Scheitelwinkel des gegebenen Winkels.

Schenkel, jeder einen Winkel begrenzende Strahl; jede von zwei gleichlangen Dreiecksseiten, jede zur gegenüberliegenden Seite nicht parallele Seite eines → Trapezes.

Scherfläche, die Größe des Querschnitts, der beim Abscheren seitlich verschoben wird.

Schieb(e)lehre, auch Schublehre, Gerät zum Messen der Dicke von Werkstoffen.

Schlüsselweite, Abstand zweier gegenüberliegender Flächen eines Schraubenkopfes oder einer Mutter.

Schmiege, die, Winkelmaß, dessen Schenkel verstellbar sind.

Schwerlinie, in einem Dreieck die einen Eckpunkt mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindende Strecke. Die drei Schwerlinien schneiden einander in dem Schwerpunkt der Dreiecksfläche.

Schwingungszahl, die Zahl der Schwingungen, die in der Zeiteinheit erfolgen.

Segment, das [lat. *segmentum* ,,Stückchen''], das zwischen einem Kreisbogen und der zugehörigen Sehne liegende Flächenstück, der Kreisabschnitt.

Sehne, die, eine Strecke, die zwei Punkte einer Kreislinie verbindet.

Sehnentangentenwinkel, der Winkel zwischen einer Kreissehne und der Tangente, die den Kreis in einem Sehnenendpunkt berührt.

Sehnenvieleck, ein Vieleck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind; das Sehnenvieleck ist dem Kreis einbeschrieben.

Sekante, die [lat. *secare* ,,schneiden''], Gerade, die einen Kreis schneidet. Sie hat mit dem Kreis zwei Punkte gemeinsam.

Sektor, der [lat. *secare* ,,schneiden''], der Kreisausschnitt, das zwischen einem Kreisbogen und den Radien nach seinen Endpunkten liegende Flächenstück.

Siedepunkt, die Temperatur, bei der sich eine Flüssigkeit in Dampf verwandelt.

Sparren, der, ein Balken, der die Verschalung eines Daches trägt.

spezifisch [lat. *species* ,,Art''], kennzeichnend, für den betreffenden Stoff charakteristisch.

Standlinie, die Strecke, die für Vermessungen im Gelände festgelegt wird.

Stereometrie, die [grch. *stereos* ,,starr'', *metrein* ,,messen''], der Teil der Geometrie, der sich mit räumlichen Gebilden befaßt.

Strahl, der durch einen Punkt begrenzte Teil einer geraden Linie.

Strecke, ein durch zwei Punkte abgegrenztes Stück einer geraden Linie.

Subtrahend, der [lat. *subtrahere* ,,wegnehmen''], die Zahl, die bei der Grundrechenart Subtraktion, dem Abziehen, subtrahiert, abgezogen wird. Das Subtraktionszeichen ist —, gelesen ,,minus''.

Summand, der [lat. *summa* ,,Gesamtzahl''], jede Zahl, die einer anderen hinzugezählt wird. Das Zusammenrechnen ergibt eine Summe. Aus positiven und negativen Summanden entsteht eine algebraische Summe.

Supplementwinkel, der [lat. *supplementum* ,,Ergänzung''] ein Winkel, der einen anderen zu 180° ergänzt.

symbolisch [grch. *symbolos* ,,Kennzeichen''], sinnbildlich.

Symmetrie, die [grch. *symmetrein* ,,zusammen messen''], Gleichmaß, Spiegelgleichheit. In der Geometrie spricht man von Symmetrie zweier Figuren einer Ebene in bezug auf eine Achse, wenn durch Umklappen um diese Gerade die eine Figur mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann. Die Figur, die sich aus den beiden zusammensetzt, wird axial-symmetrisch (achsensymmetrisch) genannt. Eine ebene Figur ist symmetrisch in bezug auf einen Punkt (zentrisch-symmetrisch), wenn eine Drehung um 180°, die man die Figur in ihrer Ebene um den Punkt ausführen läßt, die Figur mit sich zur Deckung bringt.

System, das, die Zusammenstellung von Gleichungen, in denen dieselben Unbekannten auftreten, bildet ein Gleichungssystem. Das Zusammenstellen von Ziffern zum Bilden von Zahlen ist ein Zahlensystem.

Tangente, die [lat. *tangere* ,,berühren''], Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt. Der Punkt, den die Kurve und die Tangente gemeinsam haben, wird Berührungspunkt genannt, die Verbindungsstrecke zwischen dem Berührungspunkt einer Kreistangente und dem Kreismittelpunkt heißt Berührungsradius.

Teiler, der, eine ganze Zahl, von der eine andere ein Vielfaches ist. Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen ist die größte ganze Zahl, die in beiden aufgeht. Z. B. ist für 42 und 56 der größte gemeinsame Teiler die Zahl 14.

Temperatur, die [lat. *temperatura* „Beschaffenheit“], das Maß für den Wärmezustand eines Körpers, wird gewöhnlich in Grad (°) angegeben (Celsiusskala, Fahrenheitskala).

Theodolit, der [ar. *alhidade* „Arm“], Winkelmeßgerät, das besonders bei der Landesvermessung gebraucht wird.

Thermograph, der [grch. *thermos* „warm“, *graphein* „schreiben“], Gerät, das die Veränderung des Wärmezustands laufend aufzeichnet.

Toleranz, die [lat. *tolerare* „ertragen“], der Unterschied zwischen der größten und kleinsten Abmessung, die für ein Werkstück zulässig ist.

Transporteur, der [lat. *transportare* „überfahren“], ein einfaches Gerät zum Messen von Winkeln und zum Antragen von Winkeln bestimmter Größe. Gewöhnlich ist auf einem halben Kreisring aus Blech oder durchsichtigem Material die Skala (Gradeinteilung) angebracht.

Trapez, das [grch. *trapeza* „Tisch“], ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten. Ein Viereck, in dem keine parallelen Seiten vorhanden sind, bezeichnet man als Trapezoid.

Trigonometrie, die [lat. *tres* „drei“, grch. *gonia* „Winkel“, *metrein* „messen“], das Teilgebiet der Mathematik, das zur Berechnung von Seiten und Winkeln eines Dreiecks Zusammenhänge zwischen ihren Größen aufstellt und anwendet.

Trinom, das [lat. *tres* „drei“, grch. *nomion* „Zugeteiltes“], ein Zahlenausdruck, der aus drei Summanden besteht.

Umfangswinkel, ein Winkel, dessen Schenkel durch zwei Punkte einer Kreislinie gehen und dessen Scheitel ein dritter Punkt der Kreislinie ist, auch Peripheriewinkel.

Umkreis, der durch alle Ecken eines Vielecks gehende Kreis.

Ungleichheitszeichen, Größen, die durch das Ungleichheitszeichen $\neq$ verbunden sind, sind verschieden, ohne daß zum Ausdruck gebracht wird, welche von beiden die größere ist. Das Zeichen $\neq$ bedeutet „nicht gleich, verschieden von“, das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als“, das Zeichen $>$ bedeutet „größer als“.

Unterbrecher, der, ein Gerät, das schnell hintereinander den elektrischen Strom unterbricht.

variabel [lat. *variare* „wechseln“], veränderlich, Eigenschaft von Größen, die nicht an einen bestimmten Wert gebunden sind.

verfehlen, sich, Ausdruck für die Lage von zwei geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen, einander also nicht schneiden, ohne parallel zu sein. Man sagt auch, die Geraden sind windschief.

Verhältnis, der Quotient zweier gleichartiger Größen. Zwei Größen stehen im geraden (direkten) Verhältnis, wenn die eine in demselben Maß zu- oder abnimmt, in dem auch die andere zu- oder abnimmt; sie stehen im ungeraden (umgekehrten, indirekten) Verhältnis, wenn die eine in demselben Maße zu- oder abnimmt, in dem die andere ab- oder zunimmt.

Verlustzeit, die Zeit, die ein Arbeiter während der Auftragserledigung für persönliche und sachliche Verrichtungen braucht, die aber nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Arbeitsauftrag steht.

Vielfache, das, eine Zahl, in der eine andere als Faktor enthalten ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer ganzer Zahlen ist die kleinste ganze Zahl, in der jede dieser Zahlen als Faktor enthalten ist. So ist zu 18, 24 und 60 die Zahl 360 das kleinste gemeinsame Vielfache.

Voltmeter, das, Gerät zum Messen von Spannungsdifferenzen in Volt.

Volumen, das [lat. *volumen* „Gerolltes“], der Rauminhalt eines Körpers.

Vorgelege, das, eine Welle, die mit Riemenscheiben oder Zahnrädern ausgerüstet zur Regelung der Drehzahl zwischen Antrieb und Arbeitsmaschine geschaltet wird.

Vorzeichen, die Zeichen „+“ und „—“ zur Kennzeichnung relativer Zahlen.

Wichte, die, der Quotient aus Gewicht und Volumen eines Körpers, gibt das Gewicht der Raumeinheit eines Stoffes an, wird auch das spezifische Gewicht genannt und in $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{cm}^3}$, $\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{dm}^3}$, $\frac{\mathrm{Mp}}{\mathrm{m}^3}$ angegeben.

windschief sind zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen können. Sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel.

Winkel, wird durch zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen gebildet und in → Grad (Altgrad oder Neugrad) gemessen.

Würfel, ein Körper, der von sechs quadratischen Flächen begrenzt wird.

Wurzel, als Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl bezeichnet man eine zweite Zahl, die potenziert, d. h. wiederholt mit sich selbst multipliziert, die erste Zahl ergibt. Es ist $\sqrt[3]{8}$ (dritte Wurzel aus 8) $= 2$, weil $2^3 = 8$ ist. 3 wird Wurzelexponent genannt.

Zähler, die in einem gemeinen Bruch über dem Bruchstrich stehende Zahl, z. B. die Zahl 13 in $\frac{13}{15}$.

Zentrale, die [lat. *centrum* „Mittelpunkt“], die Mittelpunktslinie; die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet.

Zentriwinkel, der → Mittelpunktswinkel.

Zentrierwinkel, Gerät zum Anreißen des Mittelpunkts bei kreisförmigen Querschnitten.

Ziffer, ein Zahlzeichen. Im dekadischen Zahlensystem werden die zehn Ziffern 0, 1, 2, . ., 8, 9 verwendet.

SACHREGISTER

Bildnachweis:

Die Fotos stellten zur Verfügung: Bildarchiv des volkseigenen Verlages Volk und Wissen (8, 14, 47, 136, 254); Bildarchiv Teubner (228); Deutsche Bauaustellung, Berlin (110); Dewag-Foto, Berlin (1, 2, 4, 10, 12, 15, 33, 46, 53, 58, 90, 91, 138, 161, 179, 211, 218, 232, 236, 240, 242, 256); Hamann, Leipzig (121, 172, 197); Krüger, Berlin (75); Krütgen-Ziegler-Schütze, Halle/Sa. (23a, 23b); Lange, Dresden (249c); Zentralbild, Berlin (5, 82); P. Th. Zingg, Einsiedeln (102)

Zeichnungen:

Graphische Abteilung des volkseigenen Verlages Volk und Wissen in Verbindung mit Johanna Fischer, Markkleeberg

42040-9