Pädagogisches Kreiskabinett Wolgast
Fachkommission Mathematik

AUFGABENSAMMLUNG

Klasse 10

Fach Mathematik

Für Unterricht und selbständige Schülerarbeit

Pädagogisches Kreiskabinett Wolgast

Fachkommission M a t h e m a t i k

A u f g a b e n s a m m l u n g

Klasse 10

Fach Mathematik

für Unterricht und selbständige Schülerarbeit

Diese Aufgabensammlung entstand im Auftrag der Fachkommission Mathematik beim Pädagogischen Kreiskabinett Wolgast

Unter Leitung des Fachberaters für Mathematik
Studienrat Heinz S i e v e r t, EOS Wolgast,

waren im Arbeitskollektiv zur Auswahl und Bearbeitung der Aufgaben Mitglieder der Fachkommission und weitere Fachlehrer des Kreises Wolgast beteiligt :

Fachlehrer Karl-Heinz Kesten	POS Zinnowitz
Fachlehrer Ulrich Lentzkow	POS Zinnowitz
Fachlehrer Helmut Steffan	POS Ahlbeck
Fachlehrer Marie-Luise Spiegel	Lenin-OS Wolgast
Fachlehrer Günter Mesing	Ernst-Schneller-OS Wolgast
Fachlehrer Gerhard Manthey	EOS Wolgast
Fachberater Diplomlehrer Peter Rieck	Bruno-Kühn-OS Wolgast
Diplomlehrer Dieter Stüpmann	Maxim-Gorki-OS Heringsdorf
Diplomlehrer Klaus Schmidt	Maxim-Gorki-OS Heringsdorf

Hinweis :

Über 100 Aufgaben und Problemstellungen stammen aus dem Diskussionsmaterial der Fachkommission und dem Unterricht der beteiligten Lehrer.

Darüberhinaus sind eine weitere Anzahl von Aufgaben zentralen Materialien entnommen, und zwar die Nummern:

1, 2, 3, 14, 15, 16, 17, 18, 28, 29, 30, 31, 47, 50, 51, 52, 53,58,60, 61, 62, 67, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 99,100,101,102, 07, 108, 109, 113, 114, 119 .

I n h a l t s ü b e r s i c h t

Vorbemerkungen

Die Aufgabensammlung soll Ihnen helfen, mathematisches Wissen zu festigen, mathematische Fähigkeiten und Ihr Können weiter zu entwickeln.

Zum Lösen der Aufgaben brauchen Sie feste, umfangreiche Kenntnisse, aber auch Ausdauer, Beharrlichkeit und große Gewissenhaftigkeit.

Fleiß und gute Mitarbeit im Unterricht, hohe Arbeitsdisziplin und konsequente Anforderungen an sich selbst sind wesentliche Voraussetzungen für Ihren Erfolg !
Willentliche Anstrengungen und ein ständiges Bemühen um Selbständigkeit dürfen auch nicht fehlen .

Das alles ist nicht leicht ! Wir meinen auch, daß dies nicht leicht sein darf ! Durch Überwinden von Schwierigkeiten und durch Freude an der eigenen Leistung wächst man in seinem Können, seinen Fähigkeiten und seinen Charaktereigenschaften.

Die Aufgabensammlung will Sie stets anleiten, Ihre Selbständigkeit zu erhöhen.

Gleichzeitig ist sie aber auch Grundlage und Hilfe für Arbeiten im Lernkollektiv, in dem Sie die Vorbereitung auf Klassenarbeiten, auf die mündliche und schriftliche Abschlußprüfung durchführen und auch den Unterrichtsstoff wiederholen und festigen.

Was ist nun wichtig beim Bearbeiten einer Aufgabe ?

Es ist ratsam, sich auf einige Fragestellungen zu konzentrieren und nach ihrer Beantwortung zu suchen !

1. Welches Problem stellt die Aufgabe ?

- Lesen Sie die Aufgabe ganz genau !
- Was ist durch die Problemstellung bekannt ? Wovon ist auszugehen ?
- Wonach ist gefragt ? Wie kann der Sachverhalt der Aufgabe durch Symbole und Variablen ausgedrückt werden ?
- Ist eine Skizze zum Veranschaulichen des Sachverhalts möglich ?
- In welchem Stoffgebiet kommen solche oder ähnliche Aufgaben vor ?

2. Wie ist die Lösung möglich ?

- Welche Definitionen, Sätze, Regeln und Formeln helfen weiter ?
- Welche Arbeitsmethoden und mathematischen Verfahren können helfen ?
- Welche Möglichkeiten eines rationellen Vorgehens gibt es ?

3. Ist die Aufgabe richtig und tatsächlich gelöst ?

- Habe ich alle Voraussetzungen und Bedingungen beachtet ?
- Ist mein Ergebnis auch sinnvoll ?
- Sind alle benutzten Sätze, Regeln, Definitionen und Formeln richtig und gesichert ?
- Welche Kontrollen für die Überprüfung habe ich ?

Dies sind nur sehr allgemeine Hinweise und noch lange keine Garantie, ans Ziel zu kommen ! Aber diese Überlegungen können helfen, Zugang zum Problem und damit zur Lösung der Aufgabe selbständig zu finden.
Für die meisten Aufgaben sind im Anhang Lösungen angegeben. Sie können sich also sofort kontrollieren, ob Sie erfolgreich waren. Benutzen Sie auch die Literaturhinweise, die einer Reihe von Aufgaben beigegeben worden sind.

Wenn sich der Erfolg nicht sofort einstellen will, verzagen Sie nicht ! Wenden Sie sich dann an Mitglieder Ihres Kollektivs oder an Ihren Fachlehrer für Mathematik. Wir sind gewiß, daß Sie Hilfe erfahren werden - nur : Sie müssen auch bereit sein, alle Hilfen für die eigene Weiterabeit zu nutzen !

Scheuen Sie also keine Mühe beim Bearbeiten der Aufgaben ! Wir wissen, daß dies Energie und Fleiß erfordert !
Wir wissen aber auch, daß Sie im Unterricht das benötigte Rüstzeug erwerben konnten, das Sie zur Lösung der in dieser Sammlung gestellten Probleme befähigt !

Wir wünschen Ihnen Freude bei der Arbeit und sehr viel Erfolg !

Fachkommission Mathematik
Kreis Wolgast

November 1975

Anwendung von Verhältnisgleichungen

1. Die Sowjetunion liefert uns auf Grund langfristiger Verträge den wichtigen Rohstoff Erdöl. Daraus werden anteilmäßig folgende Produkte gewonnen :

32,5 % Dieselkraftstoff	5,5 % Bitumen
25,6 % Benzin	4,5 % Schmieröl
20,0 % Heizöl	1,5 % gasförmige Kohlenwasserstoffe
	10,4 % Abfallstoffe

In der Zeit von 1966 bis 1970 erhielt die DDR 38 Mio t Erdöl. 1971 bis 1975 soll die Lieferung auf 65 Mio t erhöht werden.

a) Um wieviel Prozent wird die Erdöllieferung 1971 bis 1975 im Vergleich zu 1966 bis 1970 gesteigert ?

b) Wieviel Mio t Benzin wurden 1966 bis 1970 aus sowjetischem Erdöl hergestellt ?

c) Ermitteln Sie, wieviel m^3 Erdöl nötig sind, um 750 hl Dieselkraftstoff herzustellen !

d) Stellen Sie den prozentualen Anteil der Produkte aus Erdöl in einem Diagramm dar !

Hinweis : Rechenstabgenauigkeit genügt !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 7, Kapitel A. LE 10 - 17 (S. 14 - 16) , Mathematik in Übersichten, S, 85.

2. Drei Mähdrescher ernten eine Fläche von 200 ha in 80 Stunden ab.

a) In welcher Zeit ernten sie bei gleicher Leistung eine Fläche von 65 ha ab ?

b) Wieviel Zeit wird benötigt, wenn 5 Mähdrescher auf einer 200 ha großen Fläche eingesetzt werden ?

c) Berechnen Sie die Anzahl der benötigten Mähdrescher, wenn das Abernten der 200 ha in 15 Stunden geschafft werden soll !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 6, Kapitel C, LE 15 - 18 (S. 80 - 86) Mathematik in Übersichten, S. 82 - 84 .

Planimetrie

3. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem die Hypotenuse c und die Höhe h_c gegeben sind.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, und stellen Sie einen Lösungsplan auf !

b) Führen Sie die Konstruktion aus !

c) Beschreiben Sie die Konstruktion !

/Fortsetzung: d, e, f

d) Ist die Konstruktion immer möglich , oder ist sie an bestimmte Bedingungen gebunden ?

e) Ist durch die Angabe von c und h_c das Dreieck eindeutig bestimmt ?

f) Begründen Sie, daß die durch die Konstruktion gewonnenen Dreiecke tatsächlich rechtwinklig sind !

Literaturhinweise:

Lehrbuch Klasse 7, Kapitel F, LE 8 und 9, (S. 114 - 115)
Mathematik in Übersichten, S. 201

4. Konstruieren Sie ein Dreieck aus :

1) $a = 5$ cm , $c = 4$ cm , $h_a = 3$ cm
2) $h_b = 4$ cm , $h_c = 5$ cm , $\alpha = 62^\circ$
3) $b = 3{,}5$ cm , $\gamma = 142^\circ$, $s_a = 4{,}6$ cm

5. Konstruieren Sie ein Dreieck, für das gilt :

$a : h_c = 7 : 3$, $\gamma = 80^\circ$, $s_c = 6$ cm

Hinweis : Beginnen Sie mit einem Dreieck, das dem geforderten ähnlich ist !

6. Konstruieren Sie ein Dreieck, für das gilt :

1) $a : b : c = 4 : 5 : 6$, $h_a = 6$ cm
2) $a : b = 5 : 3$, $\gamma = 72^\circ$, $h_a = 5$ cm

7. In einem Filmraum soll das Bild auf der Leinwand eine Höhe von 4 m haben (Bildhöhe) .

Berechnen Sie,wie weit der Filmstreifen von der Linse entfernt sein muß, wenn jedes Bild des Streifens eine Bildhöhe von 19 mm hat und wenn die Linse der Filmapparatur 18 m von der Leinwand entfernt ist !

8. In einem Quadrat mit der Seitenlänge a sind vier gleich große Kreise eingezeichnet, die sich untereinander und je zwei benachbarte Seiten des Quadrates berühren.

a) In welchem Verhältnis steht der Inhalt der zwischen den Kreisen liegenden Fläche zu dem Inhalt der Fläche eines Kreises ?

b) Wieviel Prozent der Fläche des Quadrates beträgt der Inhalt der mittleren Fläche ?

9. In ein Quadrat ist ein Kreisbogen so eingezeichnet, daß der Mittelpunkt dieses Kreisbogens mit einem Eckpunkt des Quadrates zusammenfällt, der Radius ist gleich der Seite des Quadrates.

a) In welchem Verhältnis stehen die beiden durch den Kreisbogen gebildeten Teilflächen des Quadrates ?

b) Wieviel Prozent von der Fläche des Quadrates beträgt die kleinere Teilfläche ?

10. In einem Rechteck sind zwei Kreise so eingezeichnet, daß sie sich untereinander und jeweils drei Seiten des Rechtecks berühren.

Wieviel Prozent der Rechteckfläche beträgt die außerhalb der beiden Kreise liegende Teilfläche des Rechtecks ?

11. Um drei gleichgroße Kreise, die sich untereinander berühren, ist ein Dreieck so gezeichnet, daß die Dreieckseiten Tangenten an je zwei Kreise sind.

a) In welchem Verhältnis steht der Umfang des Kreises zu dem Umfang des Dreiecks ?

b) Wieviel Prozent beträgt die Fläche des Dreiecks bezogen auf die Fläche eines Kreises ?

12. Die Maßzahlen der Inhalte zweier Flächen sind gleich.

In welchem Verhältnis zueinander stehen die Maßzahlen der Umfänge dieser Flächen ?

a) Kreis und Quadrat,
b) Halbkreis und Quadrat,
c) Kreis und Halbkreis,
d) Halbkreis und Viertelkreis (Mittelpunktswinkel 90°),
e) Quadrat und Viertelkreis,
f) Kreis und Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1 : 3 ,
g) Kreis und gleichseitiges Dreieck,
h) Halbkreis und gleichseitiges Dreieck,
i) halbes gleichseitiges Dreieck und Viertelkreis .

13. Die Maßzahlen der Umfänge zweier Flächen sind gleich.

In welchem Verhältnis stehen dann die Maßzahlen der Inhalte dieser Flächen ?

a) Quadrat und Halbkreis ,
b) Viertelkreis und Quadrat,
c) Viertelkreis und Halbkreis,
d) Quadrat und Kreis,
e) Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:2 und Halbkreis,
f) Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1:3 und Kreis ,
g) gleichseitiges Dreieck und Viertelkreis,
h) gleichseitiges Dreieck und Kreis .

Zahlbereiche

14. a) Vereinfachen Sie den folgenden Term so rationell und so weit wie möglich, und geben Sie die dabei verwendeten Rechengesetze an !

$$\left[3a - \frac{1}{4}\left(\frac{40}{3} + 8b\right)\right] - 0{,}5\left[(a - 6b - 4)\,2\right] + 1 \qquad a,\ b \in P$$

b) Setzen Sie den bei a) gewonnenen Term gleich x !

1. Für welche natürlichen Zahlen a $(a \in N)$ erhält man für x ebenfalls natürliche Zahlen ?

   (Benutzen Sie die Mengenschreibweise !)

2. Für welche natürlichen Zahlen x $(x \in N)$ erhält man für a ebenfalls natürliche Zahlen ?

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 9 , Kapitel A, LE 3 (S. 7 - 9),
LE 13 (S. 23 - 25),
Mathematik in Übersichten, S. 45 - 47, S. 52 .

15. a) Definieren Sie den Begriff "rationale Zahl" !

b) Eine rationale Zahl kann durch jede Differenz aus der betreffenden Klasse dargestellt werden.

Eine solche Differenz sei $(2 - \frac{5}{2})$.

1. Geben Sie drei weitere Differenzen an, die in derselben Klasse liegen !

2. Stellen Sie diese Differenzen auf der Zahlengeraden dar !

c) In der folgenden Tabelle sind Zahlen und Ungleichungen mit zugehörenden Grundbereichen gegeben.

Überprüfen Sie, ob diese Zahlen zur Lösungsmenge gehören !

Zahl / Ungleichung	-2	$0{,}6$	$\sqrt{2}$
$-3{,}5 < x < 6{,}8$, $x \in R$			
$-3{,}5 < x < 6{,}8$, $x \in R^*$			
$\lvert x \rvert < 4$, $x \in P$			

Es bedeuten : R^* Menge der gebrochenen Zahlen
R Menge der rationalen Zahlen
P Menge der reellen Zahlen

16.1 Diese Aufgabe besteht aus einer Reihe von Einzelaufgaben.

Zeigen Sie, daß Sie verschiedene Rechenoperationen mit Variablen schnell und sicher ausführen können !

a) Formen Sie das folgende Produkt in eine Summe um, und fassen Sie - soweit wie möglich - zusammen !

$$(m + 1)\cdot(m^2 - m - 1)$$

b) Formen Sie den folgenden Term in ein Produkt um, indem Sie alle gemeinsamen Faktoren ausklammern !

$$14\ q^2r^2s - 28\ q^2rs^2 + 91\ qr^2s^2$$

c) Fassen Sie nach Anwendung der binomischen Formel soweit wie möglich zusammen !

$$(3d - 2e)^2 - (2d + 3e)^2$$

d) Führen Sie die folgende Division aus !

$$(m^3n - m^2n^3 + m^3n^2 + mn) : mn$$

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 8, Kapitel A, LE 4 - 12 (S. 7 - 16),

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel A, LE 16 - 25 (S. 29 - 42) .

16.2 Es sind folgende Quotienten gegeben :

A	B	C	D	E	F	G
$\frac{4a^2}{b^2}$	$\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{4xy^2}{a+b}$	$\frac{a+b}{16x^2y^3}$	$\frac{7ab}{16y^3}$	$\frac{49bx^2}{8y^3}$
$b \neq 0$	$m \neq 0$	$n \neq 0$	$a+b \neq 0$	$x \neq 0$, $y \neq 0$	$y \neq 0$	$y \neq 0$

Bestimmen Sie : B - C / b) D·E / c) F : G / d) $\sqrt{A}$

(Vereinfachen Sie jede Rechnung !)

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel A, LE 23-26 (S. 38 - 41),
Kapitel C, LE 2/3 (S. 71 - 74),
LE 5 (S. 77- 78) ,

Mathematik in Übersichten, S. 36, 37 .

16.3 Formen Sie die folgende Summe in einen Quotienten um, und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich !

$$\frac{1}{4y} + \frac{1}{3x} - \frac{4xy + 3x}{12\ xy} + \frac{1}{3} \qquad (x \neq 0\ ;\ y \neq 0) .$$

Literaturhinweise:

LB Klasse 9, Kap. A, LE 15-27 (S. 27-41),
Mathematik in Übersichten, S. 31 - 33, 35, 36.

17. a) Drücken Sie den in Textform gegebenen mathematischen Sachverhalt durch einen Term aus !

1. Gegeben ist eine Summe.
Der erste Summand ist das Doppelte einer reellen Zahl.
Der zweite Summand ist das Dreifache einer anderen reellen Zahl.

2. Gegeben ist eine Differenz.
Der Minuend ist eine reelle Zahl. Der Subtrahend ist eine Summe aus einer anderen reellen Zahl und der Hälfte des Quadrates des Minuenden.

3. Gegeben ist ein Produkt.
Der erste Faktor ist der fünfte Teil einer reellen Zahl.
Der zweite Faktor ist die Summe aus einer anderen reellen Zahl ($\neq 0$) und dem Reziproken dieser Zahl.
Der dritte Faktor ist die 3.Potenz des ersten Faktors.

17. b) Formulieren Sie die durch Terme ausgedrückten mathematischen Sachverhalte in Form eines Textes !

1. $\frac{a}{3} - 5b \qquad a, b \in P$

2. $u + u^2 + \sqrt{v} \qquad v \geq 0 \quad , \quad u, v \in P$

3. $a(b^2 + c^2) \cdot (d - e) \qquad a, b, c, d \in P$

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 8 , Kapitel A , LE 7 - 12 (S. 7 - 16),
Lehrbuch Klasse 9 , Kapitel A , LE 15- 27 (S.27 - 42).

Gleichungen und Ungleichungen

18. Von drei natürlichen Zahlen x , y und z ist bekannt :

1) $x = 8$
2) z ist um 2 kleiner y
3) Wenn man zum Produkt aus x und y das Quadrat der Zahl z addiert, erhält man 49 .

Ermitteln Sie die Zahlen y und z !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel D, LE 14 - 17 (S. 122 - 129)
Mathematik in Übersichten , S. 92

	In den Aufgaben 19 bis 27 sind die Lösungsmengen der angegebenen Gleichungssysteme zu bestimmen !
19.	(1) $5x - 2y = 7$ (2) $y = 3 - 2x$
20.	(1) $1{,}2\,x - 5y = 2{,}4$ (2) $y = 1{,}2x$
21.	(1) $3x + 4{,}5y = -0{,}9$ (2) $x = -2{,}4y$
22.	(1) $\frac{1}{4}x - 3y = \frac{3}{2}$ (2) $y = \frac{5}{6}x$
23.	(1) $8x - 5y = 8$ (2) $2x + 3y = 2$
24.	(1) $x : y = 11 : 15$ (2) $1{,}5x - 2{,}3y = 126$
25.	(1) $\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5}$ (2) $\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x$
26.	(1) $x : y = 3 : 4$ (2) $(x-1) : (y+2) = 1 : 2$
27.	$(x-2) : (y+1) : (x+y-3) = 3 : 4 : 5$
28.	Gegeben ist die Ungleichung $12 - x > \frac{1}{3}(36 - x) - 1$ a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge L_1 der Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen ! b) Geben Sie die Lösungsmenge L_2 der Ungleichung im Bereich der gebrochenen Zahlen an ! c) Geben Sie die Lösungsmenge L_3 im Bereich der natürlichen Zahlen an ! d) Stellen Sie die einzelnen Lösungsmengen auf einer Zahlengeraden dar ! Literaturhinweise : Lehrbuch Klasse 9, Kapitel B, LE 3 - 7 (S. 47 - 53), Mathematik in Übersichten, S. 72 - 73.

29.	a) Bestimmen Sie von der Gleichung $$\frac{6}{5x - 2} = \frac{7}{5x - 8}$$ die Lösungsmenge L_1 im Bereich der natürlichen Zahlen und die Lösungsmenge L_2 im Bereich der ganzen Zahlen ! b) Stellen Sie eine lineare Gleichung der Form $ax + b = 0$ ($x \in P$; $a, b \neq 0$) auf, die die Lösungsmenge $L = \{3\}$ besitzt ! Literaturhinweise : Lehrbuch Klasse 8, Kapitel C, LE 13 - 14 (S. 73 - 76), Lehrbuch Klasse 7, Kapitel C, LE 1 - 8 (S. 60 - 68), Mathematik in Übersichten, S. 68 - 72 .
30.	An den Endpunkten A und B eines 8 m langen Balkens greifen die Kräfte F_1 und F_2 senkrecht zum Balken an. Die Summe der beiden Kräfte beträgt 500 kp . Das Verhältnis der Kräfte F_1 und F_2 beträgt 1 : 3 . Der Balken soll zwischen den Punkten A und B so unterstützt werden, daß sich in waagerechter Lage des Balkens ein Gleichgewichtszustand einstellt. a) Berechnen Sie die Kräfte F_1 und F_2 ! b) Berechnen Sie den Abstand des Unterstützungspunktes von dem Balkenende, an dem die größere der beiden Kräfte wirkt ! Literaturhinweise : Lehrbuch Mathematik, Klasse 9, Kapitel B,LE 13 - 16(S.58-66), Lehrbuch Physik, Klasse 7, (S. 37 - 39), Mathematik in Übersichten, S. 75 - 78 .
31.	a) Lösen Sie rechnerisch folgende Gleichungen : $(x-2)(x+3) = 0$; $4x^2 + 4x - 3 = 0$ b) Bestimmen Sie von der Funktion $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$ zeichnerisch die Nullstellen ! c) Gegeben ist die quadr.Gleichung $x^2 - 2x + q = 0$; $x \in P$ Bestimmen Sie q so,daß die Gleichung 1. keine Lösung ; 2. eine reelle Lösung; 3. zwei reelle Lösungen besitzt ! Literaturhinweise: Lehrbuch Klasse 9, Kapitel D, LE 13-15 (S.121 - 125), Mathematik in Übersichten, S. 72 - 73 .

	Ermitteln Sie die Lösungsmengen der Gleichungen 32 bis 42 im Bereich der reellen Zahlen !
32.	$\frac{x}{2}\left(\frac{5x}{2} - 2\right) - (x-1)^2 = \left(\frac{3x}{2} - 8\right)^2 + \frac{x}{8}(x - 1)$
33.	$\frac{x}{3}\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{x}{12}(x - 7) = 2\left(\frac{x}{3} - 3\right)^2 + \frac{x}{6}\left(\frac{x}{4} - 1\right)$
34.	$\frac{7x - 15}{12} + \frac{x}{3} = \frac{35}{2x - 13}$
35.	$\frac{6x + 7}{5} - 2x = \frac{2x}{x + 6} + 11$
36.	$\frac{3x - 11}{7} + \frac{5x}{2x + 3} = x - 3$
37.	$x^2 - \frac{1}{2}x = 3$
38.	$x^2 + \frac{1}{3}x = 8$
39.	$(6x - 5)(5x - 4) - (4x - 3)(3x - 2) = 22$
40.	$\frac{5x^2 - 72x + 448}{3x^2 + 56x - 320} = \frac{3}{5}$
41.	$\frac{3x^2 - 8x + 15}{7x^2 - 15x + 27} = \frac{2}{5}$
42.	$\frac{5x - 9}{x + 1} - \frac{39 - 8x}{12} = \frac{3}{4}(x - 1)$
43.	Der Umfang einer Rechteckfläche beträgt 252 m , ihr Inhalt 3888 m^2. Ermitteln Sie rechnerisch die Längen der Seiten dieses Rechtecks !
44.	Eine rechteckige Anlagenfläche mit den Seitenlängen 34 m und 26 m ist von einem überall gleichbreiten rechtwinkligen Rasenstreifen umgeben. Dieser Rasenstreifen hat einen Flächeninhalt von 1036 m^2. Ermitteln Sie durch Rechnung die Breite dieses Streifens !

45. Ein Spiegel von 60 cm Höhe und 56 cm Breite soll ringsum mit einem Holzrahmen versehen werden, der gleichmäßig breit ist und der nicht die Glasfläche des Spiegels bedeckt.

Die Breite des Rahmens ist so zu bestimmen, daß die Rahmenfläche und die Fläche des rechteckigen Spiegelglases gleich groß sind, also die gleiche Flächenmaßzahl haben !

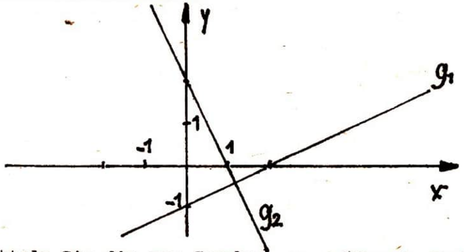
46. Beim Vergleich zweier Würfel wird festgestellt, daß sich ihre Kantenlängen um 2 dm (1 dm) und ihre Volumen um 152 dm^3 (331 dm^3) unterscheiden.

Ermitteln Sie die Längen der Kanten beider Würfel !

(Hinweis : Wählen Sie zweckmäßige Bezeichnungen ... etwa V_1 , a_1 , ... oder ähnlich !

Funktionen

47. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen g_1 und g_2 zweier linearer Funktionen



a) Ermitteln Sie die zum Graphen g_1 gehörende Funktionsgleichung!

b) Ermitteln Sie die zum Graphen g_2 gehörende Funktionsgleichung !

c) Geben Sie die Gleichung einer Funktion an, deren Graph parallel zu g_1 verläuft !

d) Geben Sie die Gleichung einer Funktion an, deren Graph die y-Achse im gleichen Punkt schneidet wie g_2 !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 8, Kapitel C , LE 9, 10 (S. 68 - 71),
Mathematik in Übersichten, S. 62 - 65 .

48. Prüfen Sie zeichnerisch und rechnerisch nach, ob folgende Punkte zur Punktmenge der Geraden mit der gegebenen Gleichung gehören !

a) A(7; 3) $y = x - 4$

b) B(4; -3) $y = -2x + 5$

c) C(2,5 ; $\frac{1}{3}$) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

d) D(7; 5) $y = \frac{7}{8}x - 1$

49. Im rechtwinkligen Koordinatensystem (x-Achse, y-Achse) kann man die Gleichung einer Geraden mit $y = mx + n$ angeben.

1. Wie lautet die Gleichung der jeweiligen Geraden, die durch zwei Punkte festgelegt wird ?

   a) $A(0;\ 1)$ $B(1;\ 3)$ b) $C(0;\ -4)$ $D(1;\ -1)$

   c) $E(0;\ 3{,}5)$ $F(1;\ 2)$

2. Geben Sie für die drei Beispiele in jedem Fall die Schnittpunkte mit den Achsen und den Anstiegswinkel der Geraden an !

50. Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ mit $x \in P$

a) Welche Bedingungen müssen sowohl für m_1 und m_2 als auch für n_1 und n_2 erfüllt sein, damit die Graphen der Funktionen

   (1) einander in einem Punkt schneiden

   (2) zusammenfallen

   (3) parallel zueinander verlaufen, aber nicht zusammenfallen ?

b) Welche Aussagen lassen sich bezüglich der Lösungsmengen für die zugehörigen Gleichungssysteme machen ?

c) 1) Welcher dieser Fälle a) (1) bis (3) liegt vor, wenn

   $m_1 = \frac{1}{2}$, $n_1 = -1$, $m_2 = \frac{3}{2}$ und $n_2 = -3$ ist ?

   2) Überprüfen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung, indem Sie das entstehende Gleichungssystem lösen !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel B, LE 13 - 16 (S.58 - 66),
Lehrbuch Klasse 8, Kapitel C, LE 8 - 10 (S.67 - 71),
Mathematik in Übersichten, S. 75 - 79 .

51. Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 8 , LE 3 (S. 61) ,
Lehrbuch Klasse 10, LE 1 (S.4,5) ,
Mathematik in Übersichten , S. 57 / 58

o Aufgabenstellungen - siehe nächste Seite - !

51. a) Welche der folgenden Mengen geordneter Paare sind <u>keine</u> Funktionen ? Begründen Sie Ihre Antwort !

$M_1 = \{[1;1], [2;4], [3;9], [4;16], [5;25], [6;36]\}$

$M_2 = \{[-2;0], [-1;0], [0;0], [1;0], [2;0]\}$

$M_3 = \{[0;-2], [0;-1], [0;0], [0;1], [0;2]\}$

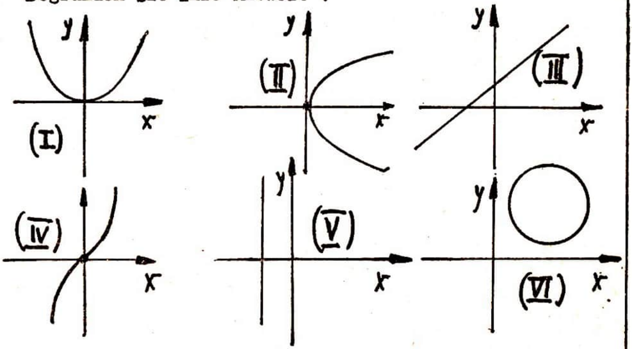
$M_4 = \{[0;2], [1;3], [2;4], [3;5], [4;6], [5;7]\}$

$M_5 = \left\{\left[\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{16}; -\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right]\right\}$

---

b) Welche der folgenden Kurvenbilder sind nicht Graph einer Funktion der Form $y = f(x)$?

Begründen Sie Ihre Antwort !



52. Gegeben ist die quadratische Funktion mit der Gleichung

$$y = x^2 - 6x + 5 \qquad (x \in P)$$

a) Zeichnen Sie das Bild der Funktion !
b) Geben Sie den Wertebereich an !
c) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab !
d) Überprüfen Sie die Richtigkeit der für die Nullstellen ermittelten Werte rechnerisch !
e) Berechnen Sie, welcher Funktionswert y in dieser Funktion dem Argument x = 2 zugeordnet ist !

<u>Literaturhinweise :</u>

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel D, LE 5,6,7 (S. 109 - 113)
Mathematik in Übersichten, S. 89 - 92

53. Von dem Graphen einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q \quad (x \in P)$ ist der Scheitelpunkt $S(-3;\ -4)$ gegeben.

a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion im Intervall $-6 \leqq x \leqq 0$!

b) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion !

c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion für den gesamten Definitionsbereich $(x \in P)$ an !

d) Lesen Sie die Nullstellen aus der Zeichnung ab !

e) Ermitteln Sie die Nullstellen auch rechnerisch,und vergleichen Sie sie anschließend mit den aus der Zeichnung gefundenen Werten !

f) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten vom Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse !

g) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das geordnete Paar $(-6;\ 4)$ zur Funktion gehört !

<u>Literaturhinweise</u> :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel D, LE 5,6,7 (S. 109 - 113),
Mathematik in Übersichten, S. 89 - 92 .

54. Bringen Sie die Funktionsgleichungen auf die Form

$$y = (x + d)^2 + e$$

Lesen Sie dann die Koordinaten des Scheitelpunktes ab, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion !

a) $y = x^2 - 6x + 9$ b) $y = x^2 - 6x + 10$

c) $y = x^2 + 4x + 1$ d) $y = x^2 - 7x + 8$

Es ist noch ein weiterer Weg zum Finden der Koordinaten des Scheitelpunktes möglich ! Welcher ?

55. Skizzieren Sie das Bild der Funktion mit der Gleichung :

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$ b) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$

56. Es sind die Gleichungen quadratischer Funktionen mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$ zu ermitteln !

Jeweils zwei Punkte der Punktmenge des Graphen seien bekannt .

a) $A(0;\ 2)\quad B(1\ ;\ 7)$ b) $C(\ 1;\ 2)\quad D(\ 6;\ 7)$

Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der beiden Parabeln, und zeichnen Sie ihre Bilder !

57. Bestimmen und zeichnen Sie die Parabel mit der Gleichung

$$y = ax^2 + bx + c , \quad (a,b,c \in P) ,$$ die

durch die Punkte

P(0; -3) , Q(4; 1) , R(-4; 9) verläuft !

Hinweis : Ein Lösungsweg führt über ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten !

58. Gegeben sei die Funktion $y = a \cdot \sin(bx)$ ($x \in P$; $a,b \in P$; $a,b > 0$).

Welche Bedingungen müssen für a und b erfüllt sein, wenn für den Graphen der Funktion $y = a \sin(bx)$ im Vergleich zum Graphen der Funktion $y = \sin x$ ($x \in P$) gilt ?

a) Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse gestreckt. Außerdem sind die Abstände zwischen benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse verkleinert.

b) Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse gestreckt. Außerdem sind die Abstände zwischen benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse vergrößert.

c) Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse gestaucht. Außerdem sind die Abstände zwischen benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse verkleinert.

d) Der Graph ist in Richtung der Ordinatenachse gestaucht. Außerdem sind die Abstände zwischen benachbarten Schnittpunkten des Graphen mit der Abszissenachse vergrößert.

Fertigen Sie für die Teilaufgaben a) bis d) jeweils eine Skizze an !

Literaturhinweise:

Lehrbuch Klasse 10, Kapitel A , LE 5 (S. 14 - 18),
Mathematik in Übersichten, S. 116/117 .

59\. Es seien Funktionsgleichungen der Form

$y = f(x) = a \cdot \sin(bx)$ ($x \in P$; $a, b, \in P$) gegeben.

a) $y = \frac{2}{3}\sin(2x)$ b) $y = \frac{5}{2}\sin(\frac{3}{2}x)$

c) $y = \frac{1}{2}\sin(3x)$ d) $y = \frac{3}{2}\sin(4x)$

e) $y = \sin(\pi x)$ f) $y = \frac{5}{4}\sin(2\pi x)$

1\. Für jede dieser Funktion geben Sie an :

- Wertebereich
- Definitionsbereich
- die kleinste Periode für $x > 0$
- die Nullstellen (mindestens in der kleinsten Periode)

2\. Zeichnen Sie die Graphen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

Alle unter 1. angegebenen Aussagen über die jeweilige Funktion müssen im Bild sorgfältig ausgewiesen werden !

60\. Gegeben seien folgende Bedingungen :

(I) Die Funktion hat keine Nullstellen.
(II) Die Funktion hat genau eine Nullstelle.
(III) Die Funktion hat mehr als eine Nullstelle.
(IV) Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich monoton steigend.
(V) Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich monoton fallend.
(VI) Die Funktion ist periodisch.

Welche dieser Bedingungen sind für die folgenden Funktionen erfüllt ?

a) $y = -3x + 5$ ($x \in P$) b) $y = x^{-2}$ ($x \in P$; $x \neq 0$)

c) $y = (x+2)^2 - 4$ ($x \in P$) d) $y = \sqrt{x}$ ($x \in P$; $x \geq 0$)

e) $y = 10^x$ ($x \in P$) f) $y = \lg x$ ($x \in P$; $x > 0$)

g) $y = \sin x$ ($x \in P$)

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 8, Kapitel C, LE 9, 11 (S. 68 - 72) ,
Lehrbuch Klasse 9, Kapitel C, LE 11, 13 (S. 87-90, 92-94) ,
Lehrbuch Klasse 9, Kapitel D, LE 4 (S. 108 - 109),
Lehrbuch Klasse 9, Kapitel E, LE 4,5, (S. 142 - 145),
Lehrbuch Klasse 10, Kapitel A, LE 4 (S. 12 - 13) ,

Mathematik in Übersichten, S. 60 -61; 62 - 63; 89; 99 ;100; S. 104 ; 106; 110; 111.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

61. Wenden Sie Ihre Kenntnisse über die Definitionen von Wurzeln, Potenzen und Logarithmen bei der Lösung folgender Aufgaben an !

a) Berechnen Sie 7^0 !

b) Formen Sie die Potenz a^{-3} ($a \in P$, $a \neq 0$) so um, daß kein negativer Exponent auftritt !

c) Schreiben Sie die Potenz $a^{\frac{1}{2}}$ ($a \in P$, $a > 0$) als Wurzel !

d) Schreiben Sie die Wurzel $\sqrt[3]{k^2}$ als Potenz !($k \in P$, $k > 0$)

e) Schreiben Sie die Gleichung $2^3 = 8$ in der Form $\log_a b = c$!

f) Schreiben Sie die Gleichung $\log_5 125 = 3$ in der Form $a^c = b$!

g) Berechnen Sie $\sqrt{0{,}09}$!

h) Schreiben Sie die Gleichung $3^4 = 81$ in der Form $\sqrt[n]{a} = b$

62. a) Definieren Sie die nachfolgenden Begriffe :

1. Potenz a^0 $(a \in P,\ a \neq 0)$
2. Potenz a^{-n} $(a \in P,\ a \neq 0,\ n \in G,\ n \geqq 0)$
3. $\sqrt[n]{a}$ $(a \in P,\ a \geqq 0,\ n \in N,\ n \geqq 1)$
4. Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ $(a \in P,\ a > 0,\ m,n \in G,\ n > 0)$
5. $\log_a b$ $(a,b \in P,\ a,b > 0,\ a \neq 1)$

b) Wenden Sie die Definitionen bei den folgenden Aufgaben an !

1. Berechnen Sie die Wurzel $\sqrt[3]{0{,}008}$!
2. Schreiben Sie die Einheit $1\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ als Produkt !
3. Berechnen Sie $(3{,}5 \cdot \frac{11}{3} + 13{,}5)^0$!
4. Schreiben Sie $\sqrt[4]{a^3}$ als Potenz !
5. Bestimmen Sie den Logarithmus $\log_2 32$!

Literaturhinweise für 61. und 62. :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel A, LE 14 (S. 25 - 26) ,
Kapitel C, LE 1 - 4 (S. 69 - 78) ;
Kapitel E, LE 3 (S. 141),

Mathematik in Übersichten, S.95; S.100; S.105 .

63.	Drücke die folgenden Angaben anders aus, und verdeutliche sie durch anschauliche Angaben ! a) Durchmesser der roten Blutkörperchen.........$0{,}7 \cdot 10^{-3}$ cm z.B. $\frac{7}{1000}$ mm, rund 143 aneinandergereiht ergäbe eine Kette von 1 mm Länge(!!!) b) Länge der kleinsten Bakterien...............rund 10^{-4} cm c) Wellenlänge des Natriumlichts(gelb)..........$589 \cdot 10^{-7}$ cm d) Wellenlänge der Röntgenstrahlen von $5 \cdot 10^{-6}$ bis $6 \cdot 10^{-10}$ cm e) Durchmesser des Wasserstoffatoms...........rund 10^{-8} cm f) Durchmesser des Atomkerns...................rund 10^{-12} cm g) Masse des Atomkerns........................$1{,}64 \cdot 10^{-24}$ g h) Masse des Elektrons.........................$9 \cdot 10^{-28}$ g i) Heliumgehalt der atmosphärischen Luft......$0{,}54 \cdot 10^{-3}$ % k) Radiumgehalt von Uranerz...................$3{,}328 \cdot 10^{-5}$ %
64.	Schreibe mit negativen Hochzahlen bei möglichst kleiner natürlicher Grundzahl (Basis) ! a) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{1024}$; $\frac{1}{343}$; $\frac{1}{100\,000}$ b) Es läßt sich schreiben : $0{,}007 = \frac{7}{1000} = 7 \cdot 10^{-3}$ Schreibe entsprechend : 0,09 ; 0,0009 ; 0,000 003 ; 0,000 07 ; 0,000 000 1
65.	Schreibe mit Hilfe von Zehnerpotenzen ! a) 1 mm als cm (m , km) b) $1\,mm^2$ als cm^2 (m^2, a, ha, km^2) c) $1\,cm^3$ als m^3 (Liter) d) 1 g als kg (t)
66.	Was bedeuten in der Physik ? $m \cdot s^{-1}$; $km \cdot h^{-1}$; $g \cdot cm^{-3}$; $cm \cdot s^{-2}$; $kp \cdot cm^{-2}$ Bei welchen physikalischen Begriffen treten sie auf ?
67.	a) Vereinfachen Sie die folgende Terme ! Geben Sie dabei die Nummern derjenigen Gesetze (1) bis (10) an - siehe nächste Seite- , die Sie bei der Umformung verwendet haben! 1. $2 \cdot p \cdot q^{k+1} \cdot 4 \cdot p^{-2} \cdot q^k$ 3. $\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[4]{m^7}$ 2. $\frac{(5a^4x^2)^3}{25a^6x^7}$ 4. $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$

67. **Übersicht über eine Anzahl von Gesetzen für das Rechnen mit Wurzeln, Potenzen und Logarithmen !**

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a^r \cdot a^s = a^{r+s} \\ (2) & a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r \\ (3) & (a^r)^s = a^{rs} \\ (4) & a^r : b^r = (a : b)^r \\ (5) & a^r : a^s = a^{r-s} \end{array}\right\}$$

Gilt für alle positiven reellen Zahlen a , b und für alle rationalen Zahlen r un s .

$$\left.\begin{array}{ll} (6) & \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \\ (7) & \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad (b > 0) \end{array}\right\}$$

Gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen a,b und für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) .

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \\ (9) & \log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \\ (10) & \log_a u^r = r \cdot \log_a u \quad (r \in P) \end{array}\right\}$$

Gilt für alle positiven reellen Zahlen u,r,v,a mit $a \neq 1$.

67. b) Drücken Sie die Gesetze (2) und (9) in Worten aus !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 9, Kapitel C, LE 2, 3, 4 und 5 (S. 71-78)
Kapitel E, LE 3, 7 und 10 (S.141,147,151)

Mathematik in Übersichten, S. 96, 97, 101 und 102 .

68. Lösen Sie die Gleichungen , wenn $u, v \in P$; $u,v > 0$; $u > v$ und $a \in P$; $a > 0$; $a \neq 1$!

a) $\log_a x = 2 \cdot \log_a u + \frac{1}{2} \cdot \log_a v$

b) $\log_a x = \log_a(u+v) - \log_a(u-v)$

c) $3 \cdot \log_a x = 4 \cdot \log_a u - 2 \cdot \log_a v$

69. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der nachfolgenden Gleichungen!

(a) $2^x = 32$

(b) $3^{x-1} = 27$

(c) $5^{2x+1} = 25$

(d) $7^{x-2} = 1$

(e) $6^x = 1$

(f) $10^{1-3x} = 1$

(g) $8^x = 16$

(h) $9^{-x} = 27$

(i) $16^x = \frac{1}{8}$

(k) $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

(l) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

70. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen!

(Gehen Sie dabei so vor, daß Sie zunächst quadratische Gleichungen der Form $z^2+pz+q=0$ herstellen !

Setzen Sie dabei für entsprechende Potenzen zunächst Hilfsunbekannte ein - z.B. für $2^x = z$, danach bestimmen Sie die Variable x !)

(a) $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = 0$ Hinweis : $(2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$ Warum ?

(b) $16^x - 6\cdot 4^x + 8 = 0$

(c) $9\cdot 3^x + 9\cdot 3^{-x} - 82 = 0$

(d) $5\cdot 5^x + 25\cdot 5^{-x} - 126 = 0$

(e) $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$

71. Lösen Sie die Gleichungen !

(a) $2^{|x|} = 8$ (b) $3^{|x|} = \sqrt{3}$ (c) $x^{\lg x} = 1$ (d) $x^{\lg x} = x$

72. Berechnen Sie mit Hilfe des Rechenstabes !

$x_1 = 1{,}68 \cdot 4{,}35$ $x_2 = \dfrac{7{,}05}{2{,}39}$ $x_3 = \dfrac{0{,}276 \cdot 765}{0{,}038}$

$x_4 = \dfrac{\sqrt{545} \cdot 23{,}2}{4680 \cdot 0{,}665}$

- Überschlagsrechnung !
- Vergleich : Überschlag-Ergebnis!

Geben Sie die Begründung der erforderlichen Einstellungen am Rechenstab mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über Logarithmen!

Literaturhinweise: Mathematik in Übersichten, S. 106
Lehrbuch Klasse 7, Kap.A, LE 3-6(S. 6-9),Kap.D,LE 8(S.81/82)
Lehrbuch Klasse 9, Kap.E, LE 9 - 12 (S. 149 - 153)

Darstellende Geometrie und Körperberechnung

73. a) Stellen Sie einen regelmäßigen (geraden) Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche in senkrechter Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar !

Die quadratische Grundfläche sei ABCD, die quadratische Deckfläche EFGH .

$AB = a = 57$ mm, $EF = b = 21$ mm, Körperhöhe $h = 42$ mm

b) Berechnen Sie die Oberfläche A_o des Körpers !

74. Gegeben sei ein regelmäßiger und gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche.

Ihm aufgesetzt ist ein gerades quadratisches Prisma, dessen quadratische Grundfläche mit der Deckfläche des Pyramidenstumpfes übereinstimmt.

Die Seitenlänge des Quadrates der Grundfläche des Pyramidenstumpfes beträgt 40 mm, die der Deckfläche 20 mm.

Das Prisma hat eine Höhe von 35 mm, die Gesamthöhe des zusammengesetzten Körpers mißt 50 mm.

a) Stellen Sie den Körper in senkrechter Zweitafelprojektion und in Kavalierperspektive dar !

b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Länge der Höhe h_s einer Seitenfläche des Pyramidenstumpfes !

c) Überprüfen Sie das Ergebnis von b) durch Rechnung !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 6, Kapitel D, LE 40, 44 (S.138 und 141)

Lehrbuch Klasse 7, Kapitel E, LE 4(S.88), LE 14 (S.97/99)

Lehrbuch Klasse 10, Kapitel B, LE 11 (S. 87 - 90)

Mathematik in Übersichten, S.243, S.247 - 258 und S. 226 .

75. a) Gegeben seien folgende Aussagen :

(I) Strecken, die parallel zur Bildebene liegen, werden in wahrer Größe abgebildet.

(II) Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen, werden verkürzt abgebildet.

(III) Strecken, die senkrecht auf der Bildebene stehen, werden als Punkte abgebildet.

(IV) Jedem Punkt des Raumes ist ein und nur ein (genau ein) Bildpunkt zugeordnet.

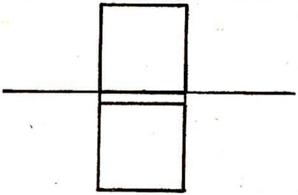
(V) Ein Bildpunkt kann unendlich viele Originalpunkte haben.

Welche dieser Aussagen sind wahre Aussagen
für die senkrechte Eintafelprojektion,
für die senkrechte Zweitafelprojektion,
für die Kavalierperspektive ?

75\. b) In der Darstellung eines Originals wurde die Bezeichnung der Risse markanter Punkte weggelassen (siehe Skizze- beide Figuren sind als kongruente Quadrate zu verstehen).

Das Original kann verschiedene Gestalt haben.

- Geben Sie zu dieser Skizze drei Originale an !
- Bezeichnen Sie für diese drei Möglichkeiten die Risse markanter Punkte so, daß die Darstellung unmißverständlich wird !



Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 7, Kapitel E, LE 1 - 7,13, 16, 17(S.84-100),
Lehrbuch Klasse 10, Kapitel B, LE 4 (S. 72 - 76),
Mathematik in Übersichten, S. 247 - 258.

76\. a) Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c rotiere um die Kathete a .
Welcher Rotationskörper entsteht auf diese Weise ?
b) Berechnen Sie die Oberfläche des bei a) entstandenen Rotationskörpers für $a=16$ cm, $b=12$ cm und $c=20$ cm !
c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina der Körper, wenn das Dreieck einmal um a, das andere Mal um b rotiert?

Literaturhinweise: Mathematik in Übersichten, S.244,
Lehrbuch Klasse 8, Kapitel D, LE 5 - 7 (S. 88 - 91),
Lehrbuch Klasse 10, Kapitel B, LE 2 - 3 (S. 67 - 71).

77\. a) Geben Sie die Formel für das Volumen und die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders an!
Verwenden Sie dabei die Variablen d (Durchmesser) und h (Höhe) .
b) Prüfen Sie, wie sich das Volumen und die Mantelfläche ändern, wenn man d ($d \neq 0$) verdoppelt und h ($h \neq 0$) konstant läßt !

c) Geben Sie den funktionalen Zusammenhang von Volumen und Durchmesser an, und skizzieren Sie den Graphen der Funktion $V=f(d)$, wobei h ($h \neq 0$) konstant bleibt!

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 7, Kapitel C, LE 5 - 7 (S. 135 - 138),
Lehrbuch Klasse 10, Kapitel B, LE 2 (S. 67 - 69),
Mathematik in Übersichten, S.239 und S. 87 .

78.	Berechnen Sie die Masse eines Würfels aus der Länge der Körperdiagonalen und aus der Dichte ! (a) 35 cm , 7,4 g/cm^3 (b) 25 cm , 8,4 g/cm^3 (c) 46,3 cm, 0,8 g/cm^3 (d) 678 mm , 19,4 g/cm^3
79.	Berechnen Sie das Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist und dessen Höhe 15a beträgt! (a) Seitenlänge des Dreiecks 5 a , (b) Seitenlänge des Dreiecks 8 a , (c) Seitenlänge des Dreiecks $3a\sqrt{3}$, (d) Höhe des Dreiecks 6a , (e) Höhe des Dreiecks $4a\sqrt{2}$.
80.	Ein gerades Prisma hat eine Höhe von 18,5 cm, die Grundfläche hat die Form eines Dreiecks. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Prismas ! (a) Dreieckseiten 6,5 cm , 8,4 cm , 7,2 cm (b) Dreieckseiten 18,0 cm , 24,0 cm , 17,0 cm (c) Dreieckseiten 34,5 cm , 27,4 cm , 22,8 cm
81.	Gegeben sei ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche. Die Höhe des Prismas hat als Maßzahl die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) der beiden Grundkanten des Prismas ! Berechnen Sie das Volumen des Prismas in dm^3 ! (a) a = 18 cm b = 52 cm (b) a = 45,6 cm b = 26,8 cm (c) a = 1,24 m b = 0,75 m (d) a = 3,52 m b = 5,40 m
82.	Ein gerader, zylindrischer Glasbehälter hat einen Durchmesser d = 72 mm . Er ist etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Nachdem man einen Stein hineingeworfen hat, ist das Wasser um 28 mm gestiegen. Welches Volumen hat der Stein ? Weitere Aufgaben : (a) d = 85 mm , Steigung 35 mm (b) d = 96 mm , Steigung 26 mm (c) d = 54 mm , Steigung 35 mm

83. In und um einen Würfel seien zwei Zylinder so eingezeichnet, daß in der Draufsicht die Grundfläche der Zylinder als Umkreis bzw. Inkreis der Grundfläche des Würfels erscheinen.

Die Kantenlänge des Würfels sei k.

a) Wie groß sind die Volumen der beiden Zylinder ?

b) In welchem Verhältnis stehen die Maßzahlen der Oberflächen zueinander ?

<u>Beispiele</u> :

(1) $k = 25$ cm

(2) $k = 16{,}5$ cm

(3) $k = 5a$

(4) $k = a$

(5) $k = a\sqrt{3}$

---

84. Ermitteln Sie den Radius und die Höhe eines geraden Kreiszylinders, dessen Volumen $V = 2$ l (Liter) beträgt.

Der Achsenschnitt dieses Zylinders hat Seiten, deren Längenmaße im Verhältnis $4 : 1$ stehen ($h > d$).

---

85. Die Höhe h_P einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist um 1 dm kleiner als das Maß der Grundkante.

Berechnen Sie die Grundkante, wenn die Länge einer Seitenkante 9,0 dm beträgt !

---

86. Bei einem geraden Kreiskegel verhalten sich die Maßzahl der Mantellinien zur Maßzahl des Durchmessers der Grundfläche wie $7 : 4$.

Berechnen Sie das Volumen !

(a) Größe der Grundfläche 60 cm^2

(b) Größe der Grundfläche 125 cm^2

(c) Größe der Grundfläche $16\pi a^2$

(d) Größe der Grundfläche $254{,}68$ cm^2

(e) Größe der Grundfläche πr^2

(f) Größe der Grundfläche 820 cm^2

---

87. In welcher Höhe muß ein zur Grundfläche eines Kreiskegels paralleler Schnitt gelegt werden, wenn diese Schnittfläche 210 cm^2 groß sein soll ?

(a) Radius der Grundfläche 12 cm , Höhe des Kegels 23 cm

(b) Radius der Grundfläche 15,4 cm , Höhe des Kegels 35 cm

(c) Radius der Grundfläche 14,5 cm , Oberfläche 2350 cm^2

(d) Radius der Grundfläche 12,57 cm , Volumen Kegel 8000 cm^3

88. Von einem geraden Kreiskegel sind die Maßzahlen der Mantelfläche und der Grundfläche bekannt.

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Mantellinie und die Länge der Höhe des Kegels !

(a) Mantelfläche $1670\ cm^2$, Grundfläche $620\ cm^2$

(b) Mantelfläche $2150\ cm^2$, Grundfläche $1230\ cm^2$

(c) Mantelfläche $4236\ cm^2$, Grundfläche $2567\ cm^2$

(d) Mantelfläche $46\ a^2$, Grundfläche $17\ a^2$

(e) Mantelfläche $32\ a^2\pi$, Grundfläche $16\ a^2\pi$

89. Von einem geraden Kreiskegel sind die Oberflächenmaßzahl und die Maßzahl der Grundfläche bekannt.

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Mantellinie und die Maßzahl der Höhe des Kegels !

(a) Oberfläche $476\ cm^2$, Grundfläche $120\ cm^2$

(b) Grundfläche $587\ cm^2$, Grundfläche $185\ cm^2$

(c) Grundfläche $2346\ cm^2$, Grundfläche $625\ cm^2$

(d) Grundfläche $36a^2$, Grundfläche $8{,}5a^2$

90. Die Maßzahl des Inhalts der Oberfläche eines Kegels (gerade) ist gleich der Maßzahl der Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser d bekannt ist.

Beim Kegel soll sich der Durchmesser der Grundfläche zur Höhe des Kegels wie $2 : 5$ verhalten.

Ermitteln Sie die Maßzahlen für r und s des Kegels !

(a) $d = 35$ cm , (b) $d = 25{,}7$ cm (c) $d = 45{,}68$ m

91. Die Maßzahlen der Oberflächen zweier Kugeln betragen zusammen $360\ cm^2$.

Die Maßzahlen der beiden Radien verhalten sich wie $2 : 3{,}5$.

Errechnen Sie die Länge dieser Radien !

92. Die Eckpunkte eines Quaders gehören zur Punktmenge der Oberfläche einer Kugel.

Berechnen Sie das Volumen dieser Kugel, wenn die Längen der Kanten des Quaders gegeben werden !

(a) 25 cm , 12 cm , 36 cm (b) 12,5 cm ; 18,5 cm ; 24,5 cm

(c) $7a$, $5a$, $12\ a$ (d) $a\sqrt{2}$, $3a\sqrt{2}$, $5a\sqrt{2}$

93. Die acht Eckpunkte eines Würfels gehören zur Punktmenge einer Kugeloberfläche.

Errechnen Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Volumen beider Körper !

(Benutzen Sie den Ansatz $V_K : V_W = 1 : x$)

94. In einen Würfel ist eine Kugel so hineingelegt (so einbeschrieben), daß die Begrenzungsflächen des Würfels die Kugeloberfläche sämtlich berühren.

In welchem Verhältnis stehen die Maßzahlen

(a) der Oberflächen beider Körper ($A_{OK} : A_{OW} = 1 : x$)

(b) der Volumen beider Körper ? ($V_K : V_W = 1 : y$)

95. Berechnen Sie das Volumen einer Halbkugel, in die ein Würfel einbeschrieben wird, in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Würfels a !

(Die Grundfläche des Würfels gehört zur Grundfläche der Halbkugel, die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels gehören zur Punktmenge der "gekrümmten" Begrenzungsfläche der Halbkugel.)

96. Die Grundkanten einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche messen 8 m und 6 m, die Seitenkante 13 m.

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche der Pyramide !

97. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat Seitenkanten gleicher Länge.

Die Seitenflächen haben zur Grundfläche einen Neigungswinkel von 75° .

Ermitteln Sie die Größe der Neigungswinkel der Seitenkanten zur Grundfläche !

98. In einer Pyramide mit gleichen Seitenkanten und quadratischer Grundfläche ist eine Seitenfläche gegen die Grundfläche unter einem Winkel von 39,75° geneigt, die Höhe des Kegels hat eine Länge von 1,2 m.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide !

Winkelfunktionen

99. a) Beweisen Sie folgende Formel mit Hilfe der Beziehung zwischen Funktionswerten bei gleichem Winkel, und geben Sie an, welche Einschränkungen für x ($x \in P$) gemacht werden müssen !

$$\cot^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

99.	b) Gegeben sei das Intervall $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. In diesem Intervall existiert genau ein Wert x_0, für den $\sin x_0 = \frac{1}{2}$ gilt. Berechnen Sie für dieses x_0 die Werte der anderen Winkelfunktionen, $\cos x_0$, $\tan x_0$ und $\cot x_0$, ohne x_0 selbst zu bestimmen ! c) Berechnen Sie $\cos x_1$, $\tan x_1$ und $\cot x_1$, wenn $\sin x_1 = -\frac{1}{2}$ und x_1 im Intervall $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ liegt ! Literaturhinweise : Lehrbuch Klasse 10, LE A 4 (S. 12, 13), LE A 12 (S. 28, 29), Mathematik in Übersichten, S. 111 - 114 .
100.	An einen Kreis sind von einem Punkt P , der außerhalb dieses Kreises liegt, die Tangenten gelegt. Sie berühren den Kreis in den Punkten B_1 und B_2 . Die Tangentenabschnitte $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ haben eine Länge von je 12 cm . a) Wie weit ist der Punkt P vom Mittelpunkt M dieses Kreises entfernt, wenn der Radius des Kreises 5 cm lang ist ? b) Wie groß ist die Strecke $\overline{PM}$, wenn die beiden Tangenten einen Winkel von 50° einschließen und der Radius des Kreises 5 cm beträgt ? Literaturhinweise : Lehrbuch Klasse 10, Kapitel A, LE 18,19 (S. 40 - 43), Lehrbuch Klasse 7, Kapitel F, LE 3 (S. 107), Lehrbuch Klasse 8, Kapitel B, LE 30, 31 (S. 49 - 51), Mathematik in Übersichten, S. 118 - 119, S. 196, S. 226.
101.	Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, wurde parallel zum Ufer im Abstand von 10 m zum Flußlauf eine 80 m lange gerade Standlinie abgesteckt. Von ihren Endpunkten aus wurde ein direkt am jenseitigen Ufer gelegener Punkt angepeilt. Die Peilrichtungen bildeten mit der Standlinie Winkel von 81° und 38°. Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch die Breite des Flusses ! Literaturhinweise: Lehrbuch Klasse 10, LE 27,28 (S. 57, 58), Mathematik in Übersichten, S. 120 - 126 .

102. Von einem Trapez ABCD seien die parallelen Seiten $a = 10$ cm und $c = 7$ cm, sowie die Schenkel $b = 6$ cm und $d = 5$ cm gegeben.

a) Berechnen Sie die Winkel des Trapezes !

b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Konstruktion !

Hinweis: Führen Sie durch Einzeichnen einer geeigneten Hilfslinie (die keine Diagonale ist!) die Lösung der Aufgabe zunächst auf die Berechnung bzw. Konstruktion eines Dreiecks zurück !

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 10, Kapitel A, LE 26 (S.51), LE 25 (S.50), LE 23 (S.47),

Lehrbuch Klasse 6, Kapitel D, LE 32 (S. 130), LE 10 (S.103),

Mathematik in Übersichten, S. 123, S. 181 - 183, S. 159

103. Jede Seitenkante eines schiefen Prismas mit dreiseitiger Grundfläche hat die Maßzahl 15 cm und ist gegen die Grundfläche unter einem Winkel $\delta = 71{,}7^\circ$ geneigt.

Eine der drei Seiten der Grundfläche hat die Länge $a = 2$ dm, die ihr anliegenden Winkel betragen $\beta = 65^\circ$ und $\gamma = 72^\circ$.

Berechnen Sie das Volumen dieses Prismas !

104. Entlang des Ufers eines Flusses wurde eine gerade Standlinie gemessen, $\overline{AB} = c = 375$ m.

Von ihren Endpunkten wird zu einem Pfahl am Gegenufer gepeilt.

Die Peillinien bilden mit $\overline{AB}$ die Wink $\alpha = 50{,}3^\circ$ und $\beta = 43{,}6^\circ$.

Ermitteln Sie die Breite des Flusses !

105. Ermitteln Sie die Winkel, die je zwei Raumdiagonalen eines Würfels miteinander bilden !

Zeichnen Sie sich dazu ein sorgfältiges Bild des Würfels in Kavalierperspektive ! (Die Kantenlänge sei a)

106. Die Kantenlängen eines Quaders seien 5,3 cm; 7,8 cm; 10,9 cm .

a) Konstruieren Sie das Bild des Quaders in Kavalierperspektive ! (Wählen Sie dabei vorteilhaft die Kante mit der Länge 10,9 cm als Tiefenstrecke)

b) Je zwei Diagonalen von Begrenzungsflächen bilden einen Winkel. Ermitteln Sie die Größe der möglichen Winkel!

Beweisaufgaben

107\. a) Ordnen Sie (I) bis (XII) nach Definitionen, Aussagen, Termen und anderen Ausdrücken !

b) Erläutern Sie bei den einzelnen Definitionen, was definiert wird !

c) Teilen Sie die Aussagen in wahre und falsche Aussagen ein !

Begründen Sie Ihre Entscheidung !

(I) Für alle Dreiecke ABC mit den Seiten a, b, c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

(II) Man bezeichne $\frac{a}{b}$ als echten Bruch genau dann, wenn $a < b$ $(a, b \in N)(b \neq 0)$

(III) Für alle reellen Zahlen x gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(IV) $a : (19 - x)$

(V) Für alle reellen Zahlen x gilt: $\tan x \cdot \cot x = 1$

(VI) $3 - 2x = 5$

(VII) Von je zwei beliebigen rationalen Zahlen ist diejenige kleiner, die auf der Zahlengeraden weiter links liegt .

(VIII) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.

(IX) Für alle reellen Zahlen a, b gilt $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

(X) Für beliebige natürliche Zahlen a, b und c gilt : Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.

(XI) $a^0 = 1$ $(a \in P ; a \neq 0)$

(XII) $x \cdot \sin 138^\circ$

Literaturhinweise :

Lehrbuch Klasse 6, Kapitel A, LE 3, 5, 6 (.S.8 - 10),
Lehrbuch Klasse 6, Kapitel C, LE 1, (S. 61 - 62),
Mathematik in Übersichten, S.9, 12, 65/66 .

108\. Gegeben sei ein beliebiges (konvexes) Viereck ABCD. Verbindet man die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 benachbarter Seiten, so erhält man wiederum ein Viereck.

a) Zeichnen Sie in ein beliebiges unregelmäßiges Viereck ABCD ein so beschriebenes Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein !

b) Stellen Sie eine Vermutung über die Art des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ an, und verallgemeinern Sie diese Vermutung für alle (konvexen) Vierecke ABCD .

Fortsetzung...

108.	Fortsetzung Hinweis: Formulieren Sie Ihre Vermutung in Form eines Satzes! c) Beweisen Sie den aufgestellten Satz ! Hinweis : Bedenken Sie, daß bei Beweisen geometrischer Aussagen oft Hilfsgrößen bzw. Hilfslinien erforderlich sind. Zeichnen Sie als Hilfslinie eine Diagonale des Vierecks ABCD ein ! Literaturhinweise : Lehrbuch Klasse 8, Kapitel B, LE 1 - 8 (S. 18 - 26), Lehrbuch Klasse 6, Kapitel D, LE 25,31-38 (S. 122 - 129), Mathematik in Übersichten, S. 9/10, 12, 184-187, 208, 211.
109.	Gegeben sind zwei Strahlen s_1 , s_2 mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt S und zwei parallele Geraden g_1 , g_2. g_1 schneide die Strahlen in A und B, g_2 schneide die Strahlen in C und D. Beweisen Sie, daß die Dreiecke SAB und SCD ähnlich sind! Literaturhinweise: Lehrbuch Klasse 8, Kapitel B, LE 21 - 26 (S. 41 - 45). Mathematik in Übersichten, S.222 - 223 .
110.	(1) Zeichnen Sie ein Rechteck ABCD mit der Seite $\overline{AB}=a=4$cm Die Seite $\overline{BC}=b$ sei doppelt so lang wie $\overline{AB}=a$! (2) Konstruieren Sie die Winkelhalbierende des Winkels DAB, welche die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E schneidet ! (3) Konstruieren Sie die Winkelhalbierende des Winkels DCB, welche die Seite $\overline{AD}$ im Punkt F schneidet! (4) Beweisen Sie, daß gilt : $\Delta ABE \cong \Delta CDF$!
111.	(1) Zeichnen Sie ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = a = 7$ cm, dessen Seite $\overline{BC} = b$ 3 cm kürzer ist als die Seite $\overline{AB}$! (2) Zeichnen Sie die Diagonale $\overline{AC}$ in das Rechteck ein, und fällen Sie das Lot von B auf $\overline{AC}$! Nennen Sie den Fußpunkt des Lotes E ! (3) Beweisen Sie, daß $\Delta ABE \sim \Delta ACD$! (4) Geben Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Strecken $\overline{BE}$: $\overline{AE}$ an ! Begründen Sie Ihre Lösung !

112. (1) Konstruieren Sie ein Dreieck mit $\overline{AB} = c = 8$ cm, $\overline{BC} = a = 6$ cm und $\sphericalangle ABC = \beta = 90°$!

(2) Es sei Punkt $D \in \overline{BC}$ gegeben, der die Strecke $\overline{BC}$ im Verhältnis $\overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$ teilt.

Teilen Sie die Strecke $\overline{BC}$ im angegebenen Verhältnis !

(3) Zeichnen Sie durch D eine Parallele zu $\overline{AB}$, diese Parallele schneidet $\overline{AC}$ in E !

(4) Geben Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Strecken $\overline{CD} : \overline{CB}$ an !

(5) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{ED}$!

(6) Beweisen Sie, daß gilt: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$!

(7) Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{AC} = b$!

113. Die Diagonalen eines Trapezes ABCD ($AB \parallel CD$) schneiden einander im Punkt S im Verhältnis 2 : 3.

a) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABS und CDS einander ähnlich sind !

b) Welches Verhältnis bilden die Grundseiten des Trapezes? Begründen Sie Ihre Aussage !

c) Welches Verhältnis bilden die Maßzahlen der Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke ?

<u>Literaturhinweise :</u>

Lehrbuch Klasse 8, Kapitel B, LE 21 - 26 (S. 41 - 45),
Mathematik in Übersichten, S. 222 - 223.

114. Zeichnen Sie in ein Dreieck ABC die Seitenhalbierende s_a ein!
Fällen Sie die Lote von B und C auf s_a bzw. ihre Verlängerung!
Beweisen Sie, daß die Lote gleiche Länge haben ! Formulieren Sie dann das Ergebnis als Satz !

<u>Literaturhinweise :</u>

Lehrbuch Klasse 6, Kapitel D, LE 9 - 11 (S. 102 - 104)
LE 22 - 23 (S. 116)
LE 29 (S. 126)

Mathematik in Übersichten, S. 158 f., S. 168 f., S. 175 f.

115. <u>Beweisen Sie den Satz :</u>

Wenn P, Q, R, S vier aufeinanderfolgende Punkte auf der Peripherie eines Kreises sind und wenn $\overline{PQ} = \overline{RS}$ ($PQ \nparallel RS$), so ist die Figur PQRS ein gleichschenkliges Trapez !

116.	Beweisen Sie den Satz : Wenn man durch den Berührungspunkt B zweier Kreise mit $r_1 \neq r_2$ eine Gerade zieht , die nicht gemeinsame Tangente ist, so schneidet die Gerade den Kreis K_1 in einem Punkt S_1 und den Kreis K_2 in S_2 . Es ist zu zeigen, daß die Mittelpunktswinkel(Zentriwinkel) $\sphericalangle BM_1S_1$ und $\sphericalangle BM_2S_2$ gleich groß sind !
117.	Beweisen Sie den Satz : Wenn man durch einen Schnittpunkt A zweier Kreise mit $r_1 \neq r_2$ die Durchmesser $d_1 = \overline{AB}$ und $d_2 = \overline{AC}$ zieht, so liegen die Punkte B , C und der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise auf einer Geraden ! Führen Sie ebenfalls den Nachweis, daß die Strecke $\overline{BC}$ doppelt so lang ist wie die Zentrale der Kreise $\overline{M_1M_2}$!
118.	Beweisen Sie den Satz : Wenn zwei Geraden durch den Berührungspunkt zweier Kreise ($r_1 \neq r_2$) gezogen werden und wenn diese beiden Geraden beide Kreise in zwei Punkten schneiden, so sind die Sehnen, welche von den beiden Geraden eingeschlossen werden, parallel !
119.	Beweisen Sie mit Hilfe von Variablen die Wahrheit folgender Aussage ! Die Summe aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Quadrat ist immer durch 2 teilbar ! Hinweis: Beachten Sie, daß eine natürliche Zahl gerade oder ungerade sein kann ! Ihr Beweis muß also vollständig sein - Fallunterscheidung ! Literaturhinweise: Lehrbuch Klasse 9, Kapitel A, LE 15, 16, 17, 18, 27 (S. 27 - 33, 42), Mathematik in Übersichten, S. 13, 26 .

120.	Beweisen Sie mit Hilfe von Variablen die Richtigkeit der nachfolgenden Aussagen : (1) Die Differenz der Quadrate von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen ! (2) Die Summe der Quadrate von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist um 1 größer als das doppelte Produkt dieser Zahlen ! (3) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ist stets durch 4 teilbar ! (4) Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl läßt bei Division durch 8 stets den Rest 1 ! (5) Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets um 1 größer als das Produkt aus ihrem Vorgänger und ihrem Nachfolger ! (Fallunterscheidung!)
121.	Führen Sie die Nachweise für die nachfolgenden Teilbarkeitsregeln ganz allgemeingültig! (Benutzen Sie u.a. dabei die Darstellung beliebiger Zahlen im dekadischen System!) (1) Eine natürliche Zahl ist durch 4 (8) teilbar, wenn die aus den zwei (drei) letzten Ziffern gebildete Zahl durch 4 (8) teilbar ist ! (2) Eine natürliche Zahl ist durch 25 (125) teilbar, wenn die aus den letzten zwei (drei) Ziffern gebildete Zahl durch 25 (125) teilbar ist !
122.	Beweisen Sie allgemein, daß eine natürliche Zahl durch 3 (9) teilbar ist, wenn die Quersumme dieser Zahl durch 3 (9) teilbar ist ! Hinweis: Auch hierbei ist die Darstellung im dekadischen Sytsem vorteilhaft !
	Aufgaben in Verbindung mit physikalischen Problemen
123.	Bei Serienschaltung zweier Drähte erhält man einen elektrischen Widerstand von 25 Ω (Ohm), bei Parallelschaltung dagegen 4 Ω (Ohm). Berechnen Sie die Widerstände, die in jedem Einzeldraht vorhanden sind !

124.	Bei einem zweiarmigen Hebel unterscheiden sich die Hebelarme um 3cm (4 cm) . Hängt ein Körper rechts, so braucht man links 16p (12p), hängt dieser Körper links, so braucht man rechts 20,25 p (18,75 p) zur Herstellung des Gleichgewichts. (a) Berechnen Sie die Länge der Hebelarme ! (b) Errechnen Sie das Gewicht des Körpers !
125.	An einem Flaschenzug hängen 60 p (240 p). Fügt man je eine feste und eine lose Rolle hinzu, so braucht man 5 p (6p) Kraft weniger zur Herstellung des Gleichgewichts bei gleicher Last . Ermitteln Sie die Anzahl der Rollen des Flaschenzuges !
126.	In einem elektrischen Stromkreis beträgt die Spannung 20 V (220 V) . Wie groß ist der Widerstand dieses Stromkreises, wenn bei einer Vergrößerung von 4 Ω (22 Ω) die Stromstärke um o,25 A (0,5 A) abnimmt?
127.	Vermehrt man in einer Leitung bei unveränderter Spannung den Widerstand um 2 Ω, so verringert sich die Stromstärke um 1 A . Verringert man den Widerstand um 4 Ω, so steigert sich die Stromstärke um 3 A. Wie groß sind Widerstand und Stromstärke der Leitung ?
128.	Ein Sportflugzeug der GST durchfliegt eine 18 km lange Prüfstrecke mit dem Wind und gegen den Wind in zusammen 10 Minuten 25 Sekunden. Die Windgeschwindigkeit beträgt 12m/s. a) Berechnen Sie die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges! b) Geben Sie die Zeit für den Hin- und Rückflug bei Windstille an !
129.	Zwei Flugzeuge starten gleichzeitig zu einem Zielort in 1600 km Entfernung. Die Geschwindigkeit des ersten Flugzeuges ist um 80 $km \cdot h^{-1}$ größer als die des anderen. Infolgedessen kam das erste Flugzeug eine Stunde früher am Bestimmungsort an. Wie groß waren die Geschwindigkeiten beider Flugzeuge ?

L ö s u n g e n

1.a)	71 %	1b)	9,7 Mio t	1c)	$231\ m^3$				
2a)	26 h	2b)	48 h	2c)	16	7.	85mm	8a) 8b)	1:2,72 7,15%
9a) 9b)	1:0,275 21,5%	10.	21,5%	11a) 11b)	1:2,6 412%				

12. a) 1: 0,885 b) 1: 0,974 c) 1: 1,15 d) 1: 0,767 e) 1: 1,05 f) 1: 1,29 g) 1: 1,29 h) 1: 1,11 i) 1: 0,79	13. a) 1 : 0,95 b) 1 : 1,01 c) 1 : 0,965 d) 1 : 1,275 e) 1 : 2,86 f) 1 : 1,67 g) 1 : 1,29 h) 1 : 1,65	14. a) $2a-5$ b) $2a-5=x$ 1. $a > 2, a \in N$ 2. $2n+1, n \in N$

16.1	a) $m^3 - 2m - 1$	16.2	a) $\frac{n^2 - m^2}{m^2n^2}$
	b) $7qrs(2qr - 4qs + 13rs)$		b) $\frac{1}{4xy}$
	c) $5d^2 - 24de - 5e^2$		c) $\frac{a}{14x^2}$ d) $\frac{2a}{b}$
	d) $m^2 - mn + m^2n + 1$		

16.3	$\frac{1}{3x}$	17.	(1) $2a + 3b$ (2) $a - (b + \frac{a^2}{2})$ (3) $\frac{a}{5}(b + \frac{1}{b})(\frac{a}{5})^3$

18.	y=5 z=3	19.	$\frac{13}{9}$; $\frac{1}{9}$	20.	−0,5; −0,6	21.	$-\frac{4}{5}$/ $\frac{1}{3}$	22.	$-\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{9}$
23.	1 ; 0	24.	−77/−105	25.	11/6	26.	6/8	27.	5/3

28. (a) $x < \frac{3}{2}$ (b) $0 \leqq x < \frac{3}{2}$ (c) $\{0 ; 1\}$

29. (a) $L_1 = \{ \ \}$ im Bereich der nat. Zahlen (b) $L_2 = \{-2\}$

30. 125kp ; 375 kp; Abstand 2 m

31a) $x_1=2$, $x_2=-3$ / $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

31b) $x_1=0,5/x_2= -1,5$

31c) (1) $q > 1$ (2) $q=1$ (3) $q<1$

32.	$8; \frac{65}{17}$	33.	$24; \frac{54}{13}$	34.	$9; -\frac{25}{22}$	35.	$-\frac{9}{2}/-16$	36.	$6; -\frac{5}{8}$
37.	$2/-\frac{3}{2}$	38.	$-\frac{8}{3}/-3$	39.	$2/-\frac{2}{9}$	40.	25/8	41.	9/1
42.	22,5/6	43.	72m 54m	44.	7m	45.	12cm	46.	4 dm (10 dm)

47. (a) $y = 0{,}5x - 1$ (b) $y = -2x + 2$ (c) $y = 0{,}5x + n$ (d) $y = mx + 2$

48. (a) ja (b) ja)c) ja (d) nein

49. (a) $y = 2x + 1$
(b) $y = 3x - 4$
(c) $y = -1{,}5x + 3{,}5$

50. (a) 1. $m_1 \neq m_2$; n_1; n_2 beliebig
(a) 2. $m_1 = m_2$; $n_1 = n_2$
(a) 3. $m_1 = m_2$; $n_1 \neq n_2$

(b) Die Lösungsmenge enthält:
1. genau ein Element
2. unendlich viele Elemente
3. Kein Element

(c) $x = 2$; $y = 0$

51. (a) M_3; M_5

51. (b) II, V, VI

52. a) $S(3; -4)$
b) $y \geqq -4$ $(y \in P)$
c) $x_1 = 5$ $x_2 = 1$ (e) $y = -3$

53. (b) $y = (x+3)^2 - 4$ $(x \in P)$ oder $y = x^2 + 6x + 5$
(c) $y \geqq -4$ $(y \in P)$ (d)/(e) $x_1 = -1$ $x_2 = -5$
(f) $B(0; 5)$ (g) $[6; 4]$ ist kein Element

54. (a) $y = (x - 3)^2$ (b) $y = (x - 3)^2 + 1$ (c) $y = (x + 2)^2 - 3$
(d) $y = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{17}{4}$ oder $y = (x - 3{,}5)^2 - 4{,}25$

55. (a) $S(5; -6{,}5)$ (b) $S(-2; -4)$

56. (a) $p = 4/q = 2$, $S(-2; -2)$ (b) $p = -6$ $q = 7$ $S(3; -2)$

57. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$ oder $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{7}{2}$
$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{7}$

58. (a) $a > 1$ und $b > 1$ (b) $a > 1$ und $0 < b < 1$

(c) $0 < a < 1$ und $b > 1$ (d) $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$

59.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
DB	In allen Beispielen: Menge der reellen Zahlen					
WB ($y \in P$)	$\lvert y \rvert \leq \frac{2}{3}$	$\lvert y \rvert \leq \frac{5}{2}$	$\lvert y \rvert \leq \frac{1}{2}$	$\lvert y \rvert \leq \frac{3}{2}$	$\lvert y \rvert \leq \frac{1}{2}$	$\lvert y \rvert \leq \frac{5}{4}$
p	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	2	1
x_{N1}	0	0	0	0	0	0
x_{N2}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{1}{2}$
x_{N3}	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	2	1

60. Wahre Aussagen (a) (II) / (V) (b) (I) (c) (III)
(d) (II) / (IV) (e) (I) / (IV)
(f) (II) / (IV) (g) (III) / (IV)

61. a) 1 b) $\frac{1}{a^3}$ c) $\sqrt{a}$ d) $k^{\frac{2}{3}}$ e) $\log_2 8 = 3$

f) $5^3 = 125$ g) 0,3 h) $\sqrt[4]{81} = 3$

62. b.1) 0,2 b.2) 1 kms^{-2} b.3) 1 b.4) $\frac{3}{a^4}$ b.5) 5

64. a) 2^{-2}, 2^{-5}, 5^{-3}, 3^{-3}, 10^{-3}, 2^{-10}, 7^{-3}, 10^{-5}

b) $9 \cdot 10^{-2}$, $9 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-6}$, $7 \cdot 10^{-5}$, 10^{-7}

65. (a) 10^{-1} cm (10^{-3} m ; 10^{-6} km)

(b) 10^{-2} cm^2 (10^{-6} m^2; 10^{-8} a ; 10^{-10} ha ; 10^{-12} km^2)

(c) 10^{-6} m^3 (10^{-3} Liter) (d) 10^{-3} kg (10^{-6} t)

66. Geschwindigkeit m/s oder km/h ; Dichte g/cm^3

Beschleunigung cm/s^2 ; Druck kp/cm^2

67.

	Ergebnis	Angewandte Gesetze
1.	$\frac{8q^{2k+1}}{p}$	(1)
2.	$\frac{5a}{x}$	(2) ,(3), (5)
3.	m^2	(6)
4.	3	(7)

68. (a) $u^2 \cdot \sqrt{v}$ (b) $\frac{u+v}{u-v}$ (c) $\sqrt[3]{\frac{u^4}{v^2}} = u\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}}$

69.
a) 5
b) 4
c) 0,5
d) 2
e) 0
f) $\frac{1}{3}$
g) $\frac{4}{3}$
h) $-\frac{3}{2}$
i) $-\frac{3}{4}$
k) -4
l) -4

70.
a) 3; 2
b) 1; 0,5
c) 2; -2
d) 2; -1
e) 1; 0

71.
a) 3; -3
b) 0,5 ; -0,5
c) 1
d) 10; 1

72.
$x_1 = 7,31$
$x_2 = 2,95$
$x_3 = 5550$
$x_4 = 0,174$

73. b) gerundet $A_o = 108 cm^2$

74. gerundet $h_S = 18$ mm

75. a)

Projektionsart	wahre Aussage
Senkrechte Eintafelpr.	I, III, IV, V
Senkrechte Zweitafelpr.	I, III
Kavalierperspektive	I, II, IV, V

b) Rechteck ; Würfel ; dreiseitiges Prisma ; Zylinder

76. (a) Gerader Kreiskegel (b) 1206 cm^2 (gerundet)

(c) $V_a : V_b = b : a$

77.	(b) $V_2 = 4\,V_1$ $\quad A_{M2} = 2A_{M1}$ $\quad V = f(d) = \frac{\pi}{4} h d^2 = k d^2 \; (d > 0)$
78.	(a) 317 kg (b) 131 kg (c) 79,1 kg (d) 6005 kg
79.	(a) $162{,}5\ a^3$ (b) $417\ a^3$ (c) $176\ a^3$ (d) $312\ a^3$ (e) $278 a^3$
80.	(a) $454{,}15 cm^2 / 419 cm^3$ (b) $1395 cm^2 / 2808 cm^3$ (c) $162{,}9 cm^2 / 57{,}7 cm^3$
81.	(a) $28{,}8 dm^3$ (b) $42{,}7 dm^3$ (c) $900 dm^3$ (d) $82\,800\ dm^3$
82.	$115 cm^3$ (a) $198 cm^3$ (b) $188{,}2 cm^3$ (c) $80{,}15\ cm^3$
83.	(a) (1) $12{,}27\ dm^3$ / $24{,}54\ dm^3$ (2) $3520\ cm^3$ / $7040\ cm^3$ (3) $98{,}2\ a^3$ / $196{,}4\ a^3$ (4) $\frac{\pi}{4} a^3$ / $\frac{\pi}{2} a^3$ (5) $\frac{3}{4} a^3 \pi \sqrt{3}$; $\frac{3}{2} a^3 \pi \sqrt{3}$ (b) $A_{oa} : A_{oi} = 1 : 1{,}5(\sqrt{2} - 1)$ (oa, außen, oi, innen)
84.	h=30cm r=3,75cm
85.	$\sqrt{31}$ dm
86.	a) $294{,}8 cm^3$ / b) $880{,}4 cm^3$ / c) $224{,}8 a^3$ d) $2562 cm^3$ / e) $3{,}51 r^3$ / f) $1542{,}1 cm^3$
87.	a) 7,3cm / b) 16,45cm / c) 8,9cm / d) 16,7 cm
88.	a) 68,2° 31,15cm b) 55,3° 28,3cm c) 52,6° 37,5cm d) 68° 6,4a e) 60° 3,9a
89.	a) 70° 16,8cm b) 62,6° 148cm c) 68,7° 36,2cm d) 73° 6,93a
90.	(a) r=14,4cm / s=70,8cm (b) r=10,4cm / s=53cm (c) r=14,4cm s=73,6cm
91.	2,04 cm 3,58 cm
92.	a) $39{,}42 dm^3$ b) $19{,}05 dm^3$ c) $2969 a^3$ d) $306{,}9 a^3$
93.	x=0,368
94.	$x = \frac{\pi}{6}$ $y = \frac{\pi}{6}$
95.	$\frac{a^3}{4} \pi \sqrt{3}$
96.	67,4°
97.	69,25°

98.	$3{,}3\ m^3$	99.	a) $x \neq k\pi \quad k \in G$				
99.	b) $\cos x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tan x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \cot x_0 = -\sqrt{3}$						
99.	c) $\cos x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tan x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \cot x_0 = -\sqrt{3}$						
100.	a) 13cm b) 11,8cm	101.	45,6m	102.	$\alpha = 93{,}8^\circ / \beta = 56{,}4^\circ / \gamma = 123{,}6^\circ$ $\delta = 86{,}18^\circ$		
103.	$3600 m^3$	104.	199,5m	105.	$109{,}5^\circ$ $70{,}5^\circ$	106.	$75{,}8^\circ / 43^\circ / 51{,}2^\circ$
107.	a) Definitionen (II)/(VII)/(XI) Terme (IV)/(XII) Aussagen, wahr (III)/(X) andere Ausdrücke falsch (I)/(V)/(VIII)/(IX) (VI)						
123.	$20\,\Omega$, $50\,\Omega$	124.	27 cm / 24 cm/ 18 p				
125.	4 (8)	126.	$16\,\Omega$ ($88\,\Omega$)	127.	$16\,\Omega$ 9 A		
128.	(a) 216 km/h (b) 10 Minuten	129.	400 km/h ; 320 km/h				