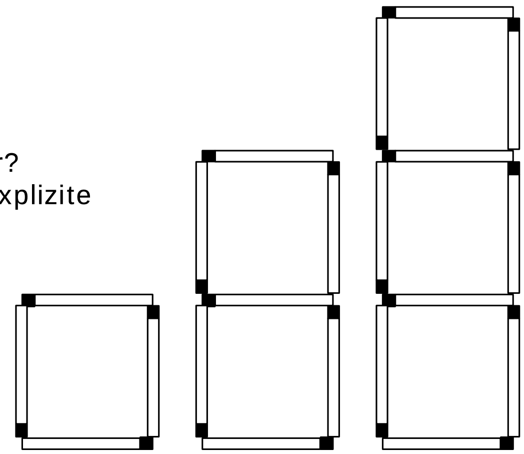
Zahlenfolgen

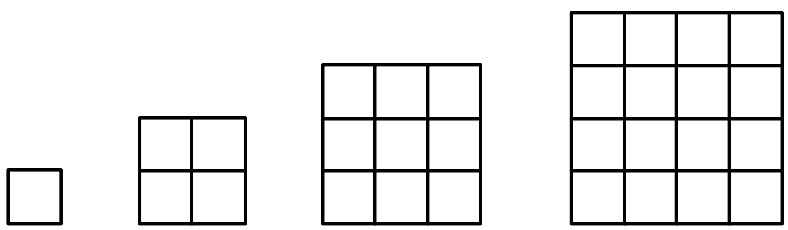
Aufgabe 1 (Streichholzfiguren)

a) Wie viele Streichhölzer benötigt man für die 10. Figur?
b) Gib für die Streichholzfolge eine rekursive und eine explizite Berechnungsvorschrift an.



Aufgabe 2 (Quadratzahlen)

a_n beschreibe die Anzahl der Quadrate der n-ten Figur.

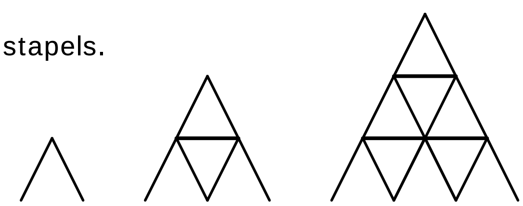


a) Liste die ersten 10 Folgenglieder auf.
b) Gib eine explizite und rekursive Berechnungsvorschrift für die Folge an.

Aufgabe 3 (Kartenstapel)

a_n beschreibe die Anzahl der Karten des n-ten Kartenstapels.

Aus wie vielen Karten besteht der 10. (100.) Stapel?
Entwickle zur Lösung eine geeignete Berechnungsvorschrift für die Folge.



Aufgabe 4 (Diagonalen im n-Eck)

Wie viele Diagonalen hat ein regelmäßiges 10-Eck?
Löse das Problem zunächst für ein regelmäßiges 4-Eck, 5-Eck, 6-Eck, ...
Beschreibe die Diagonalenanzahl mit Hilfe einer Zahlenfolge und bestimme eine Berechnungsvorschrift.

Aufgabe 5 (aus einem Intelligenztest)

Gegeben sind jeweils die Anfangsglieder einer Folge. Setze die Auflistung der Folgenglieder fort.
Versuch anschließend, eine explizite und / oder rekursive Darstellung der Folge zu finden.

a) 3; 6; 9; 12; 15; ...
b) 1; 3; 7; 15; 31; ...
c) 1; -2; 3; -4; 5; ...
d) 4; 7; 12; 19; 28; ...

Lösung

1) $A_1 = 4$; $A_2 = 4+3 = 7$, $A_3 = 10$, ..., $A_n = A_{n-1} + 3$

$A_n = 3n + 1$; $A_{10} = 31$

2)

n	an
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

n	an
1	=A2^2
2	=A3^2
3	=A4^2
4	=A5^2
5	=A6^2
6	=A7^2
7	=A8^2
8	=A9^2
9	=A10^2
10	=A11^2

explizit $a_n = n^2$ rekursiv $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$

3) $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, ... $a_n = (n+1)\,3n/2 - n$

$a_{10} = 155$; $a_{100} = 15050$ $a_n = a_{n-1} + 2n + (n-1)$

4) $d = (n-3)\,n / 2$

5)
a) $a_n = 3n$ $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 3$
b) $a_n = 2^n - 1$ $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2^n$
c) $a_n = n\,(-1)^{n+1}$ $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + (2n-1)\,(-1)^{n-1}$
d) $a_n = n^2 + 3$ $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1} + 2n-1$

Zahlenfolgen

Aufgabe 1
Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich!

a) $\frac{25x^2-10x+1}{1-5x}$ $\quad x \neq \frac{1}{5}$ $\qquad$ b) $\frac{a^2-b^2}{2a+2b} - \frac{49-b^2}{21-3b}$ $\quad a \neq (-b);\ b \neq 7$

Aufgabe 2
Geben Sie jeweils eine explizite Bildungsvorschrift an!

a) $(a_n) = (-50; -44; -38; -32; -26; \ldots)$
b) $(b_n) = (2; 1; 0.5; 0.25; 0.125; \ldots)$
c) $(c_n) = (-3; 6; -9; 12; -15; \ldots)$
d) Welche der Zahlenfolgen sind beschränkt?

Aufgabe 3
Gegeben ist die Zahlenfolge $(a_n) = \left(\frac{3-2n}{n+2}\right)$ mit $n \geq 1$.

a) Berechnen Sie die Glieder a_5 und a_{998}!
b) Untersuchen Sie, ob $-\frac{177}{96}$ ein Glied der Zahlenfolge ist! Wenn ja, welches?
c) Stellen Sie eine Vermutung bezüglich der Monotonie der Folge auf und beweisen Sie diese!
d) Stellen Sie eine Vermutung über die untere Grenze G_u der Folge auf.
e) Geben Sie die Zahl n an, für die a_n erstmals um weniger als 0,0001 von G_u abweicht!

Aufgabe 4
Gegeben ist die Zahlenfolge $(a_n) = (4n - 1)$ mit $n \geq 1$.

a) Weisen Sie nach, dass die Differenz zweier benachbarter Glieder konstant ist!
b) Zeigen Sie, dass 0 eine untere Schranke dieser Folge ist!
c) Berechnen Sie die Glieder a_l und a_2!

Aufgabe 5

a) Definieren Sie den Begriff reelle Funktion!
b) Geben Sie die explizite Bildungsvorschrift einer Zahlenfolge an, die monoton fallend ist und die Zahl 8 als untere Schranke hat!
c) Beurteilen Sie folgende Aussage: "Jede Folge mit der rekursiven Bildungsvorschrift $a_{n+1} = q \cdot a_n$; $a_1 = r$ $(q > 0, r > 0)$ ist streng monoton steigend." Begründen Sie!
d) Bei der Untersuchung der Monotonie einer Folge ergab sich die Differenz $a_{n+1} - a_n = 2n - 7$. Was lässt sich über das Monotonieverhalten dieser Folge aussagen? Begründen Sie!

Lösung

2	a) 6n - 56	b) 4/2^n	c) $(-1)^n$ 3n	d) Folge b_n
3	a) -1 und -1,993	b) nein	c) monoton fallend	d) -2

Zahlenfolgen

Aufgabe 1: Geben Sie die ersten 5 Glieder der Folge an!

a) $a_n = (2n - 1)^{6-n}$ b) $a_n = (n - 1)(n + 2)$ c) $a_n = 1 - 2n$

d) $a_n = 5 + 3n^2$ e) $a_n = 2n^2 / (n+1)$ f) $a_n = (n-1)^2/n$

Aufgabe 2: Geben Sie die ersten 5 Glieder der Folge an!

a) $a_1 = 5$; $a_{n+1} = (n+1)/a_n$ b) $a_1 = 7$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$

c) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a_n{}^2$ d) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$

Aufgabe 3: Geben Sie ein direktes Bildungsgesetz an!

a) 6, 8, 10, 12, ... b) 16, -8, 4, -2, ...

c) 4, 9, 16, 25, ... d) 10, 17, 26, 37, ...

e) 3, -3, 3, -3, ... f) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

g) 3/7, 6/9, 9/11, 12/13, 15/15,...

h) 2/4, 3/5, 4/6, 5/7, 6/8, ...

Aufgabe 4: Geben Sie ein rekursives Bildungsgesetz an!

a) 6, 8, 10, 12, ... b) 16, -8, 4, -2, ...

c) 7, 15, 31, 63, ... d) 1, 4, 9, 16, ...

e) 3, -3, 3, -3, ... f) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Aufgabe 5: Arithmetische Zahlenfolgen = AF

a) Von einer AF kennt man: $a_1 = 1{,}2$, $n = 20$, $d = 2{,}1$. Berechnen Sie a_n und s_n.

b) Von einer AF kennt man: $a_1 = 404$, $a_n = -9$, $d = -7$. Berechnen Sie n.

c) Von einer AF kennt man: $a_n = 0$, $n = 61$, $s_n = 2196$. Berechnen Sie a_1 und d.

d) $a_{20} = 16$ und $a_{21} = 22$ sind aufeinander folgende Glieder einer AF. Berechnen Sie a_1 und s_{21}.

Aufgabe 6:

a) Von einer AF kennt man: $a_{20} = 51$ und $s_{20} = 260$. Berechnen Sie a_1 und d.

b) Eine AF beginnt mit den Gliedern 6, 9, ... Geben Sie d und die nächsten drei Glieder an. Berechnen Sie a_{100} und s_{100}.

c) Wie viele vierstellige Zahlen sind durch 54 teilbar? Berechnen Sie die Summe dieser Zahlen.

Aufgabe 7:

a) Von einer AF kennt man: $a_1 = 1{,}8$; $d = 0{,}05$; $s_n = 4059$. Berechnen Sie a_n und d.

b) Von einer AF kennt man: $a_5 = 27{,}9$ und $a_{12} = 59{,}4$. Berechnen Sie a_1 und d.

c) Von einer AF kennt man: $a_n = 107$, $d = 5{,}2$, $s_n = 123$. Berechnen Sie n und a_1.

d) Von einer AF kennt man die Glieder $a_4 = -5$ und $a_{12} = 35$. Berechnen Sie a_8.

Aufgabe 8:
a) Die drei Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine AF. Die Hypotenuse hat die Länge 15. Bestimmen Sie a, b.
b) Fünf Zahlen bilden eine AF. Die Summe der ersten drei Zahlen ist 63, die der letzten drei Zahlen ist 87. Wie heißen die fünf Zahlen?
c) Vier Zahlen bilden eine AF mit dem Differenz d = 2 und der Summe 60. Wie heißen die vier Zahlen?
d) Wenn man das dritte, fünfte und siebte Glied einer arithmetischen Folge addiert erhält man 21; wenn man die gleichen drei Glieder multipliziert ergibt sich –105. Wie heißen die ersten drei Glieder der Folge?

Aufgabe 9: Geometrische Zahlenfolgen = GF
Von einer GF kennt man das erste, das zweite und das letzte Glied: 17408, 8704, ..., 68. Berechnen Sie zuerst q, anschließend die Anzahl der Glieder und die Summe aller Glieder.

Aufgabe 10:
Von einer geometrischen Zahlenfolge kennt man: $q = 2$, $a_n = 5632$, $s_n = 11253$. Berechnen Sie a_1 und n!

Aufgabe 11:
Vier Zahlen bilden eine GF mit dem Quotienten q = 2 und der Summe 60. Wie heißen die vier Zahlen?

Aufgabe 12:
Von einer GF kennt man: $a_1 = 5$, $q = 2$ und $s_n = 5115$. Berechnen Sie n und a_n.

Aufgabe 13:
Eine GF beginnt mit den Gliedern 6, 9, ... Geben Sie q und die nächsten drei Glieder an. Berechnen Sie a_{10} und s_{10}.

Aufgabe 14:
Fünf Zahlen bilden eine GF. Die Summe der ersten zwei Zahlen ist -4, die der letzten zwei Zahlen ist 108. Wie heißen die fünf Zahlen?

Aufgabe 15:
Es ist 5 + 7,5 + ... =
a) Berechnen Sie die Summe der ersten zehn Glieder, wenn es sich um eine AF handelt.
b) Berechnen Sie die Summe der ersten zehn Glieder, wenn es sich um eine GF handelt.

Aufgabe 16:
Berechnen Sie a) 6 + 12 + 18 + ... + 98304 =
b) 6 - 12 + 24 - ... + 98304 =

Aufgabe 17:
Von einer Folge kennen Sie $a_{10} = 12$ und $a_{18} = 192$. Berechnen Sie a_{14} und a_{16} unter der Voraussetzung, dass die Zahlen a) eine arithmetische b) eine geometrische Folge bilden. Nur positive Lösungen angeben!

Aufgabe 18:
Bestimmen Sie das erste Glied:
a) ... + 619 + 719 + 819 = 3228 b) ... + 486 + 1458 + 4374 = 6560

Aufgabe 19:
Der kleine Max hat aus 78 Klötzen drei Türme gebaut, deren Höhen eine arithmetische Zahlenfolge bilden. Nun nimmt er vom mittleren Turm acht Klötze weg und legt vier davon auf den kleinsten und die anderen vier auf den größten.
Jetzt bilden die Turmhöhen eine geometrische Zahlenfolge. Berechnen Sie die ursprünglichen Höhen der Türme!

Aufgabe 20:
Die Summe der ersten vier Glieder einer AF ist 250. Falls das dritte Glied weggelassen wird, entsteht eine GF. Bestimmen Sie die AF. Wählen Sie a_1 und d als Variable.

Aufgabe 21:
Drei Zahlen x, y, und z bilden eine GF mit der Summe 38. Wenn man von der dritten Zahl 2 abzählt, erhält man eine AF.

Aufgabe 22:
Papyrus Rhind Aufgabe Nr.64: "Vorschrift des Abteilens Unterschiede. Wenn gesagt dir Getreide Maß 10 an Personen 10. Der Unterschied von Person jeder zu ihrer zweiten beträgt an Getreide Maß 1/8, ist er."

Lösungen

1 a) 1, 81, 125, 49, 9 b) 0, 4, 10, 18, 28
c) -1, -3, -5, -7, -9 d) 8, 17, 32, 53, 80
e) 10, 8/3, 9/2, 32/5, 25/3 f) 0, 1/2, 4/3, 9/4, 16/5

2 a) 5, 2/5, 15/2, 8/15, 75/8 b) 7, 15, 31, 62, 125
c) 3, 9, 81, 6561, 43046721 d) 1, 2, 4, 7, 11

3 a) $a_n = 2n+4$ b) $a_n = (-2)^{5-n}$
c) $a_n = (n+1)^2$ d) $a_n = (n+2)^2 + 1$
e) $a_n = 3\ (-1)^{n+1}$ f) $a_n = (n+1)\ n/2$
g) $a_n = 3n\ /\ (2n+5)$ h) $a_n = (n+1)\ /\ (n+3)$

4 a) $a_1 = 6\ ;\ a_{n+1} = 2+ a_n$ b) $a_1 = 16\ ;\ a_{n+1} = -a_n/2$
c) $a_1 = 7\ ;\ a_{n+1} = a_n + 2^{n+2}$ d) $a_1 = 1\ ;\ a_{n+1} = a_n + 2n+1$
e) $a_1 = 3\ ;\ a_{n+1} = -a_n$ f) $a_1 = 1\ ;\ a_{n+1} = a_n + n+1$

5 a) $a_{20} = 41{,}1\ ;\ s_n = 423$ b) $n = 60$
c) $a_1 = 72\ ;\ d = -1{,}2$ d) $d = 6\ ;\ a_1 = -98\ ;\ s_{21} = -798$

6 a) $a_1 = -25\ ;\ d = 4$ b) $d = 3\ ;\ a_{100} = 303\ ;\ s_{100} = 15450$
c) $n = 167\ ;\ s_{167} = 919836$

7 a) $n = 8\ ;\ a_n = 28$ b) $d = 4{,}5\ ;\ a_1 = 9{,}9$
c) $n = 8\ ;\ a_1 = -7$ d) $a_8 = 15$

8 a) Seiten 15, 15-x, 15-2x mit $(15-x)^2 + (15-2x)^2 = 15^2$
Katheten 9 und 12
b) 12, 14, 16, 18 c) 17, 21, 25, 29, 33
d) a = 7
d = 4 ergibt –9, -5, -1, 3, 7, 11, 15
d = -4 ergibt 23, 19, 15, 11, 7, 3, -1

9 $q = 1/2\ ;\ n = 9\ ;\ s_9 = 34748$

10 $a_1 = 11\ ;\ n = 10$

11 4, 8, 16, 32

12 $n = 10\ ;\ a_{10} = 2560$

13 $a_{10} = 230{,}7\ ;\ s_{10} = 679{,}98$

14 Ansatz a, aq, aq^2, aq^3, aq^4
System $a + aq = -4\ ;\ aq^3 + aq^4 = 108$
Folge: 2, -6, 18, -54, 162

15 arithmetisch s = 162,5
geometrisch s = 290125 / 512

16 a) d = 6 ; n = 16384 ; Summe = 805355520
b) q = -2 ; n = 15 ; Summe = 65538

17 arithmetisch $a_{14} = 102\ ;\ a_{16} = 147$
geometrisch $a_{14} = 48\ ;\ a_{16} = 96$

18 a) -281 b) 2

19 Ansatz a-d, a, a+d $(a-d)+a+(a+d) = 78$ a = 26
$(30-d)(2+d) = 324$ d = 24
Höhen 2, 26, 50 neue Höhen 6, 18, 54

20 Ansatz a, a+d, a+2d, a+3d $2a+3d = 125$
$(a+d)^2 = a(a+3d)$
a = 25 ; d = 25
arithmetische Zahlenfolge 25, 50, 75, 100

21 Zahlen: 8, 12, 18

22 $n = 10$, $s = 10$, $d = -1/8$, arithmetische Zahlenfolge
$a_1 = 1{,}5625$; ... ; $a_{10} = 0{,}4375$

Zahlenfolgen, Funktionen, Grenzwerte

1. Gegeben ist die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

   a) Ermitteln Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3!
   b) Welches Monotonieverhalten zeigt (a_n)? Führen Sie den Nachweis!

2. Von einer geometrischen Zahlenfolge sind die Glieder $a_2 = 6{,}75$ und $a_5 = (-2)$ bekannt.
   a) Geben Sie die rekursive Bildungsvorschrift der Folge an!
   b) Welche Aussagen lassen sich zu Monotonie, Beschränktheit und Grenzwert treffen? Begründen Sie jeweils!
   c) In welcher Zeit verdreifacht sich ein Kapital von 5000 € bei 5 % Zinseszinsen?

3. Gegeben ist eine Folge $(a_n) = \left(\dfrac{1+7n}{2n+1}\right)$.

   a) Weisen Sie an Hand der Grenzwertdefinition nach, dass der Grenzwert dieser Folge 3,5 ist!
   b) Welches ε kann gewählt werden, damit für alle $n > 27$ die Glieder der Folge innerhalb der ε-Umgebung des Grenzwertes liegen?

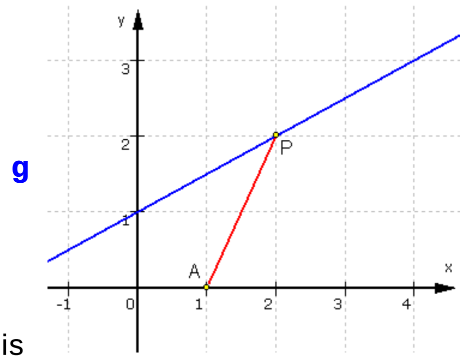
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{5n-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-4)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{n^2-1}$

5. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

6. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{x^2-0{,}25}{x-0{,}5}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-12x}{4-x}$ d) $\lim\limits_{x\to -1{,}5}\dfrac{x^2-0{,}5x-3}{x+1{,}5}$

7. In der Abbildung ist A (1;0) ein fester Punkt auf der x-Achse und P (a; b) ein Punkt auf der Geraden g.
   a) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an!
   b) Berechnen Sie den Anstieg m der Strecke $\overline{AP}$ in Abhängigkeit von der Abszisse a!
   c) Welchem Grenzwert nähert sich m, wenn sich P auf g immer weiter von der y-Achse entfernt? Führen Sie einen Nachweis für diesen Grenzwert!



8. Einem Quadrat Q_1 mit der Seitenlänge 1 m wird ein Kreis einbeschrieben, sodass er die Seiten des Quadrats berührt. Dann wird diesem Kreis ein Quadrat Q_2 einbeschrieben (so dass dessen Ecken auf dem Kreis liegen), danach diesem Quadrat wieder ein Kreis usw.
   a) Berechnen Sie die Umfänge der ersten drei Quadrate Q_1, Q_2 und Q_3!
   b) Berechnen Sie, für welche $n \in N$ die Quadrate Q_n einen Umfang von weniger als 1 cm besitzen!

Lösungen

1. $a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ a) $a_1 = \frac{1}{5}$ $a_2 = \frac{1}{45}$ und $a_3 = \frac{1}{117}$

b) (a_n) ist streng monoton fallend.

Nachweis: $a_{n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$ zu zeigen: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ oder $a_{n+1} - a_{n+1} < 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n-3)(4n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{4n-3}{4n+5}$ $a_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} - \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$-3 < 5$ w. A. $a_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(4n-3)-(4n+5)}{(4n+1)(4n+5)(4n-3)}$

$4n - 3 < 4n + 5$ $a_{n+1} - a_{n+1} = \frac{-8}{(4n+1)(4n+5)(4n-3)}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ w. z. b. w. Zähler < 0; Nenner > 0 (wegen $n \geq 1$: jeder Faktor positiv)

$a_{n+1} - a_{n+1} < 0$ w. z. b. w.

2. geometrische Zahlenfolge mit $a_2 = 6{,}75$ und $a_5 = (-2)$

a) $a_5 = a_2 \cdot q^3$ $a_2 = a_1 \cdot q$

$-2 = \frac{27}{4} \cdot q^3$ $\frac{27}{4} = a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

$-\frac{8}{27} = q^3$ $a_1 = \left(-\frac{81}{8}\right) \rightarrow$ rekursive Vorschrift $a_{n+1} = \left(-\frac{2}{3}\right)a_n$

$q = \left(-\frac{2}{3}\right)$ $a_1 = \left(-\frac{81}{8}\right)$

b) Monotonie: Wegen $q < 0$ wechseln die Glieder stets das Vorzeichen. Die Folge ist alternierend.

Beschränktheit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \left(-\frac{81}{8}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq 1$ w. A. (Eine Potenz ist stets kleiner als Eins, wenn -1 < Basis < 1.)

$\left(-\frac{81}{8}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \geq \left(-\frac{81}{8}\right)$ Multiplikation mit negativer Zahl

$a_n \geq \left(-\frac{81}{8}\right) \rightarrow \left(-\frac{81}{8}\right)$ ist eine untere Schranke von (a_n).

$\left(-\frac{2}{3}\right)^n \leq 1$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \geq \left(-\frac{3}{2}\right)$ Division durch eine negative Zahl

$\left(-\frac{81}{8}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \leq \left(-\frac{81}{8}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$ Multiplikation mit negativer Zahl

$a_n \leq \frac{243}{16} \rightarrow \frac{243}{16}$ ist eine obere Schranke von (a_n). Die Folge ist beschränkt.

Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{81}{8}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{81}{8}\right) \cdot 0 = 0$

Die Folge konvergiert gegen Null.

c) $a_n = a_0 \cdot q^n$

15.000 € = 5000 € $\cdot\ 1{,}05^n$ | : 5000 €

$\frac{\lg 3}{\lg 1{,}05} = n$

$n \approx 22{,}517$ Im 23. Jahr verdreifacht sich das Kapital.

3. $(a_n) = \left(\frac{1+7n}{2n+1}\right)$

b) $n > \frac{2{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon}$

$n > 27$

$\frac{2{,}5-\varepsilon}{2\varepsilon} = 27 \qquad | \cdot 2\varepsilon$

$2{,}5 - \varepsilon = 54\varepsilon \qquad | + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{22}$ Für $\varepsilon = \frac{1}{22}$ liegen die Glieder a_{28}, a_{29}, a_{30}... innerhalb der ε-Umgebung (für größere ε erst recht).

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-5}{5n-3} = \mathbf{\frac{2}{5}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-4) = \infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \mathbf{0}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-(n^2-1)}{n^2-1} = \mathbf{(-1)}$

5. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \mathbf{0}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x \cdot x^2}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{x}-1} = \mathbf{(-\infty)}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} = \infty$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \mathbf{(-\infty)}$

6. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x-3)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x-3) = \mathbf{(-3)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0{,}5} \frac{x^2-0{,}25}{x-0{,}5} = \lim\limits_{x\to 0{,}5} \frac{(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x-0{,}5} \lim\limits_{x\to 0{,}5}(x+0{,}5) = \mathbf{1}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x^2-12x}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{3x(x-4)}{-(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4}(-3x) = \mathbf{(-12)}$

d) $\lim\limits_{x\to -1{,}5} \frac{x^2-0{,}5x-3}{x+1{,}5} = \lim\limits_{x\to -1{,}5} \frac{(x+1{,}5)(x-2)}{x+1{,}5} = \lim\limits_{x\to -1{,}5}(x-2) = \mathbf{(-3{,}5)}$

Durch Polynomdivision erhält man $(x^2 - 0{,}5x - 3) : (x + 1{,}5) = (x - 2)$.

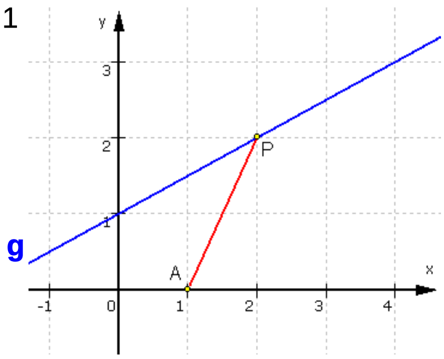
7. Gegeben sind A (1;0) und P (a; b) auf der Geraden g.

a) g : y = mx + n mit $m = \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ und n = 1

g : **y = 0,5x + 1**

b) $\overline{AP} : m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{b-0}{a-1} = \frac{\mathbf{0{,}5a+1}}{\mathbf{a-1}}$

c) $\lim\limits_{a\to\infty} m = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{0{,}5a+1}{a-1} = = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a\left(0{,}5+\frac{1}{a}\right)}{a\left(1-\frac{1}{a}\right)} = \mathbf{0{,}5}$

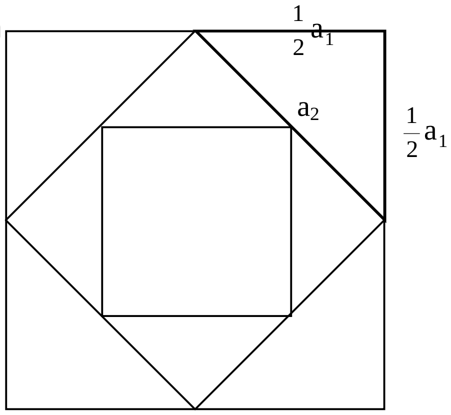


8. a) $a_1 = 1\text{ m}$

Satz des Pythagoras:

$$a_2^2 = \left(\frac{1}{2}a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a_1\right)^2 = \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{4}a_1^2 = \frac{1}{2}a_1^2 = \frac{1}{2}\text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ m}$$

analog: $a_3^2 = \frac{1}{2}a_2^2 = \frac{1}{4}\text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2}\text{ m}$



Umfänge: $u_1 = 4a_1 = 4 \cdot 1\text{ m} = \mathbf{4\text{ m}}$

$u_2 = 4a_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ m} = \mathbf{2\sqrt{2}\text{ m}}$

$u_3 = 4a_3 = 4 \cdot 0{,}5\text{ m} = \mathbf{2\text{ m}}$

b) $u_1 = 4\text{m}$

$u_2 = 2\sqrt{2}\text{ m} = 4\text{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^1$

$u_3 = 2\text{ m} = 4\text{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$

$u_n = 4\text{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{n-1} < 1\text{ cm}$

$400\text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{n-1} < 1\text{ cm} \qquad | : 400\text{ cm}$

$\lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{n-1} < \lg 0{,}0025$

$(n-1)\lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) < \lg 0{,}0025 \qquad | : \lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$n - 1 > \dfrac{\lg 0{,}0025}{\lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \qquad | + 1$

$n > 1 + \dfrac{\lg 0{,}0025}{\lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \approx 18{,}2877$

$n \geq 19$

Ab dem 19. Quadrat sind die Umfänge kleiner als 1 cm.

2. Klausur GK 11 / I Hilfsmittel: GTR, Tafelwerk **B**

1. Gegeben ist die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied $a_n = \dfrac{1}{(4n+3)(4n-1)}$.

   a) Ermitteln Sie die Glieder a_1, a_2 und a_3! **5**
   b) Welches Monotonieverhalten zeigt (a_n)? Führen Sie den Nachweis!

2. Von einer geometrischen Zahlenfolge sind die Glieder $a_2 = 96$ und $a_5 = (-40{,}5)$ bekannt.
   a) Geben Sie die rekursive Bildungsvorschrift der Folge an! **11**
   b) Welche Aussagen lassen sich zu Monotonie, Beschränktheit und Grenzwert treffen? Begründen Sie jeweils!
   c) In welcher Zeit erhöht sich ein Kapital von 5000 € auf 12500 € bei 4 % Zinseszinsen?

3. Gegeben ist eine Folge $(a_n) = \left(\dfrac{1+5n}{2n+1}\right)$. **5**
   a) Weisen Sie an Hand der Grenzwertdefinition nach, dass der Grenzwert dieser Folge 2,5 ist!
   b) Welches kann gewählt werden, damit für alle n > 25 die Glieder der Folge innerhalb der -Umgebung des Grenzwertes liegen?

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

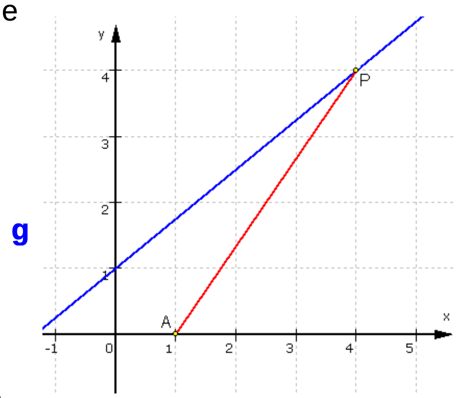
4. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{4n-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+4)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^3}{n^3-1}$

5. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}0{,}5^{-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5$ **12**

6. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x-2x^2}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-16x+63}{x-7}$

<u>Wahlaufgabe</u> (Es ist **entweder** Aufgabe 7.1 **oder** Aufgabe 7.2 zu lösen.)

7.I In der Abbildung ist A (1;0) ein fester Punkt auf der x-Achse und P (a; b) ein Punkt auf der Geraden g.
   a) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an!
   b) Berechnen Sie den Anstieg m der Strecke $\overline{AP}$ in Abhängigkeit von der Abszisse a!
   c) Welchem Grenzwert nähert sich m, wenn sich P auf g immer weiter von der y-Achse entfernt? Führen Sie einen Nachweis für diesen Grenzwert!



7.2 Einem Quadrat Q_1 mit der Seitenlänge **1 m** wird ein Kreis einbeschrieben, sodass er die Seiten des Quadrats berührt. Dann wird diesem Kreis ein Quadrat Q_2 einbeschrieben (so dass dessen Ecken auf dem Kreis liegen), danach diesem Quadrat wieder ein Kreis usw. **5**
   a) Berechnen Sie die Flächeninhalte der ersten drei Quadrate Q_1, Q_2 und Q_3!
   b) Berechnen Sie, für welche n ∈ ✕ die Quadrate Q_n einen Flächeninhalt von weniger als **1 cm²** besitzen!

–

38