# $y = \sin^2 x$

**Vorarbeiten:**

Wir leiten die Funktion zweimal ab:

$$y = \sin^2 x$$
$$y' = 2\sin x \cos x$$
$$y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

A: Ableitungen: Kettenregel. Aufg. 1
Online | Offline

**Periode:** Da der Winkel einfach x ist: [0°;360°]

**Definitionsbereich:** Überall definiert

**Nullstellen:**

$$y = \sin^2 x = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k \cdot 180^o$$

**Waagrechte Tangenten:**

$$y' = 2\sin x \cos x = 0$$

Diese Gleichung ist sehr schnell gelöst, wenn wir merken, dass:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos = 0$$
$$2x = k \cdot 180^o$$
$$x = k \cdot 90^o$$



**Wendepunkte:**

$$y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

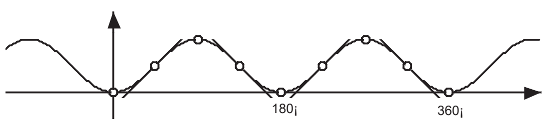
Auch hier sollte man am besten merken, dass:

$$2 \cdot \cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$
$$\cos 2x = 0$$
$$2x = 90^o + k \cdot 180^o$$
$$x = 45^o + k \cdot 90^o$$

**Zusammenstellung und Graph:**

(Wertetafel im Bereich $\left[0^o;360^o\right]$)

| | x | y | y' |
|---|---|---|---|
| Nullstellen | 0° | 0 | 0 |
| | 180° | 0 | 0 |
| | 360° | 0 | 0 |
| Minima | 0° | 0 | 2 |
| | 180° | 0 | 2 |
| | 360° | 0 | 2 |
| Maxima | 90° | 1 | -2 |
| | 270° | 1 | -2 |
| Wendepunkte | 45° | 0.5 | 1 |
| | 135° | 0.5 | -1 |
| | 225° | 0.5 | 1 |
| | 315° | 0.5 | -1 |



Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$ die exakten Werte für Nullstellen, Steigung in den Nullstellen und Extrema und zeichnen Sie den Graphen. (Vorprüfung 99)

---

$$f(x) = 2\cos x + \sin 2x$$
$$f'(x) = -2\sin x + \cos 2x \cdot 2 = -2(\sin x - \cos 2x)$$
$$f''(x) = -2(\cos x + \sin 2x \cdot 2) = -2(\cos x + 2\sin 2x)$$

### NULLSTELLEN:

$$f(x) = 2\cos x + \sin 2x \;=\; 2\cos + 2\sin x\cos x = 0$$
$$2\cos x(1 + \sin x) = 0$$

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 90^\circ \qquad f'(90^\circ) = -4$

$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 270^\circ \qquad f'(270^\circ) = 0$

### EXTREMA:

$$f'(x) = -2(\sin x - \cos 2x) = 0$$
$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$$
$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

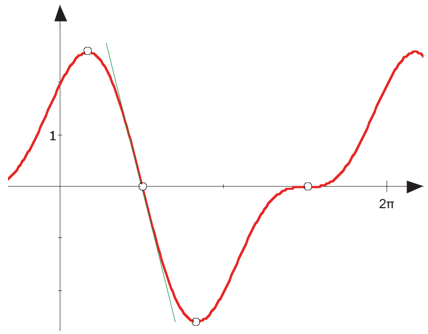
Setzen Sie $\sin x = u$ und lösen Sie die Gleichung

$$2u^2 + u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = -1,\; u_2 = 0.5$$



| $\sin x$ | x | f(x) | $f''(x)$ | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 270° | 0 | 0 | Terrassenpunkt |
| 0.5 | 30° | $1.5\sqrt{3}$ | $-3\sqrt{3} < 0$ | Maximum |
| | 150° | $-1.5\sqrt{3}$ | $3\sqrt{3} > 0$ | Minimum |

### GRAPH



# $y = \ln(x^2 + 16)$

## Vorbereitungen

$f(x) = \ln(x^2+16)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+16}$

$f''(x) = \dfrac{2(x^2+16) - 2x \cdot 2x}{(x^2+16)^2} = \dfrac{-2(x^2-16)}{(x^2+16)^2} = \dfrac{-2(x+4)(x-4)}{(x^2+16)^2}$

## Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ( $x^2+16$ ist immer grösser als Null!)

## Symmetrie

Symmetrisch zur y-Achse

## Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty$ aber sehr, sehr langsam!

## Nullstellen

$f(x) = \ln(x^2+16) = 0$

$x^2 + 16 = 1$

$x^2 = -15$ keine Nullstellen



## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+16} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0$ **$x = 0$**

## Wendepunkte

$f''(x) = \dfrac{-2(x+4)(x-4)}{(x^2+16)^2} = 0$ **$x = \pm 4$**

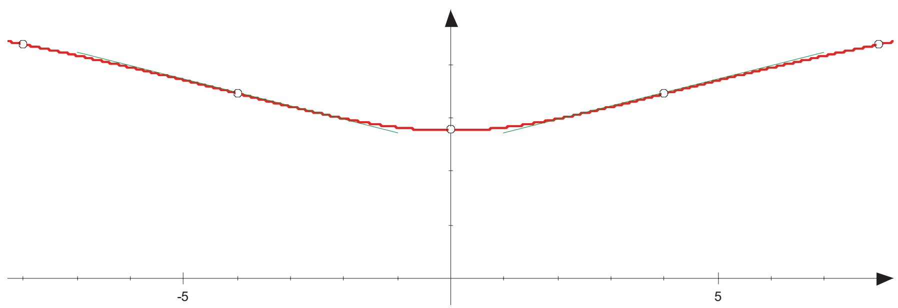
$(x+4)(x-4) = 0$

## Übersicht

| x | f(x) | f′(x) | |
|---|---|---|---|
| 0 | $\ln 16 \approx 2.770$ | 0 | Minimum |
| $\pm 4$ | $\ln 32 \approx 3.5$ | $\pm \frac{1}{4}$ | Wendepunkte |
| $\pm 8$ | $\ln 80 \approx 4.4$ | | Zusatzpunkte |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass zusätzliche Punkte event. nützlich wären.

## Graph



$y = \ln(17 - x^2)$

## Vorbereitungen

$f(x) = \ln(17 - x^2)$

$f'(x) = \frac{-2x}{17 - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 17}$

$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 17) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 17)^2} = \frac{-2(x^2 + 17)}{(x^2 - 17)^2}$

## Definitionsbereich

Definiert für $17 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{17} < x < \sqrt{17}$ $\qquad \mathbb{D} = \left]-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right[$

## Symmetrie

Symmetrisch zur y-Achse

## Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

$x \to +\sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad y \to -\infty$

$x \to -\sqrt{17} \quad \Rightarrow \quad y \to -\infty$ $\qquad$ Pole bei $\mathbf{x = \pm\sqrt{17}}$

## Nullstellen

$f(x) = \ln(17 - x^{2x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 17 - x^2 = 1$

$x^2 = 16$ $\qquad \mathbf{x = \pm 4}$

## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 17} = 0$ $\qquad \mathbf{x = 0}$



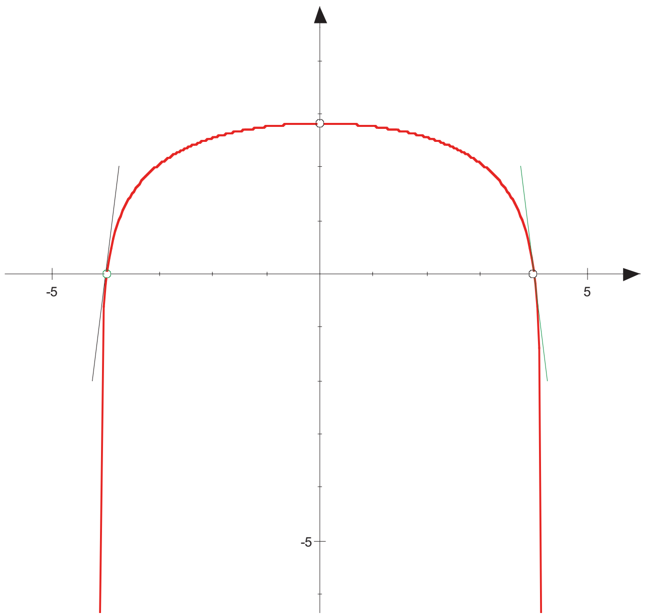
## Wendepunkte

$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 17)}{(x^2 - 17)^2} = 0$ $\qquad$ keine

## Übersicht

| x | f(x) | f′(x) | |
|---|---|---|---|
| 0 | ln17 ≈ 2.8 | 0 | Maximum |
| ±4 | 0 | -8 | Nullstellen |

## Graph



# $y = x \cdot \ln x$

### Vorbereitungen

$f(x) = x \cdot \ln x$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

### Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^{+}$

### Symmetrie

Keine erkennbare

### Verhalten für $x \to \infty$ und für $x \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty$
$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad y \to 0 \quad \Rightarrow \quad y' \to \infty$

### Nullstellen

$f(x) = x \cdot \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 0 \qquad \mathbf{x = 1} \quad (x = 0 \notin \mathbb{D})$

### Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -1 \qquad \mathbf{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$



### Wendepunkte

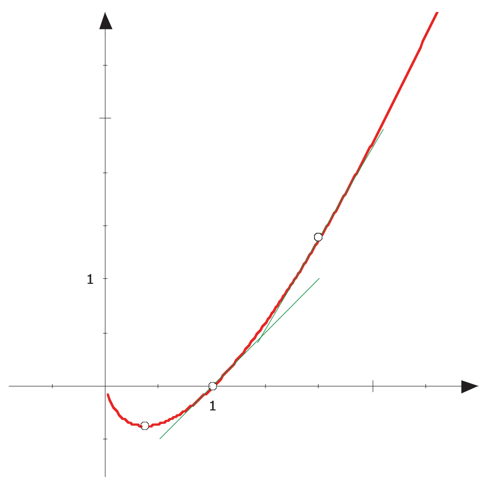
$f''(x) = \frac{1}{x} = 0$ keine

### Übersicht

| x | f (x) | f′ (x) | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{e} \approx 0.37$ | $-\frac{1}{e} \approx -0.37$ | 0 | Minimum |
| 1 | 0 | 1 | Nullstelle |
| 2 | $2\ln 2 \approx 1.4$ | $\approx 1.7$ | Zusatzpunkt |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

### Graph



# $y = 10 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$

### Vorbereitungen

$$f(x) = 10 \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = 10 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 10 \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln x)}{x^4} = 10 \cdot \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = 10 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

### Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

### Symmetrie

Keine erkennbare

### Verhalten für $x \to \infty$ und für $x \to 0$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0$

$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad y \to -\infty \quad$ Pol

### Nullstellen

$f(x) = 10 \cdot \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 0 \qquad$ $\mathbf{x = 1}$



### Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = 10 \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1 \qquad$ $\mathbf{x = e}$

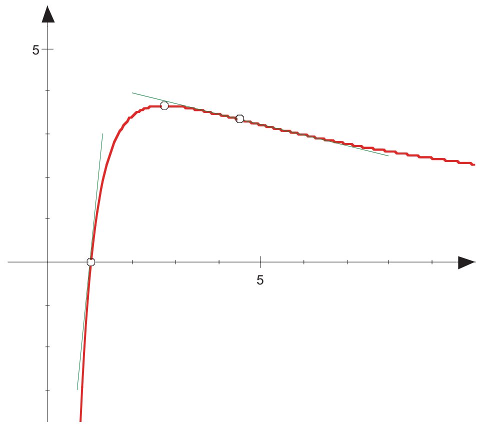
### Wendepunkte

$f''(x) = 10 \cdot \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1.5 \qquad$ $\mathbf{x = e^{1.5}}$

### Übersicht

| x | f (x) | f′ (x) | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 10 | Nullstelle |
| $e \approx 2.7$ | $\frac{10}{e} \approx 3.7$ | 0 | Maximum |
| $e^{1.5} \approx 4.5$ | $\frac{15}{e^{1.5}} \approx 3.35$ | $-\frac{5}{e^3} \approx -0.25$ | Wendepunkt |

### Graph



# $y = x^3 \cdot e^{-x}$

## Vorbereitungen

$f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (3x^2 - x^3)$

$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (3x^2 - x^3) + e^{-x} \cdot (6x - 3x^2) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$

## Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

## Symmetrie

Keine erkennbare

## Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to -\infty$ die positive x-Achse ist Asymptote

## Nullstellen

$f(x) = x^3 \cdot e^{-x} = 0$ $\quad$ $\mathbf{x = 0}$

## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = e^{-x} \cdot x^2 \cdot (3 - x) = 0$ $\quad$ $\mathbf{x = 0} \quad \mathbf{x = 3}$



## Wendepunkte

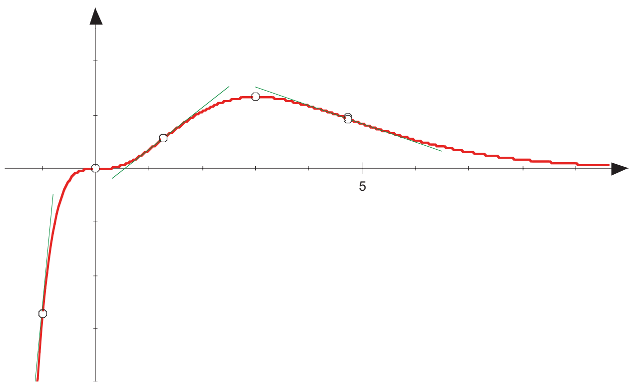
$f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} = 0$ $\quad$ $\mathbf{x = 0} \quad \mathbf{x = 1.27} \quad \mathbf{x = 4.73}$

## Übersicht

| x | f(x) | f′(x) | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | Terrassenpunkt |
| 3 | $\frac{27}{e^3} \approx 1.34$ | 0 | Maximum |
| 1.27 | 0.6 | 0.8 | Wendepunkt |
| 4.73 | 1.9 | -0.34 | Wendepunkt |
| -1 | $-e \approx -2.7$ | $4e \approx 10.9$ | Zusatzpunkt |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

## Graph



# $y = e^x - x - 1$

## Vorbereitungen

$f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x) = e^x - 1$

$f''(x) = e^x$

## Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

## Symmetrie

Keine erkennbare

## Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to +\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to -x - 1$

Für $x \to -\infty$ ist die Gerade $y = -x - 1$ Asymptote.

## Nullstellen

$f(x) = e^x - x - 1 = 0$

$\mathbf{x = 0}$ (raten!)

## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1$

$\mathbf{x = 0}$



## Wendepunkte

$f''(x) = e^x = 0$

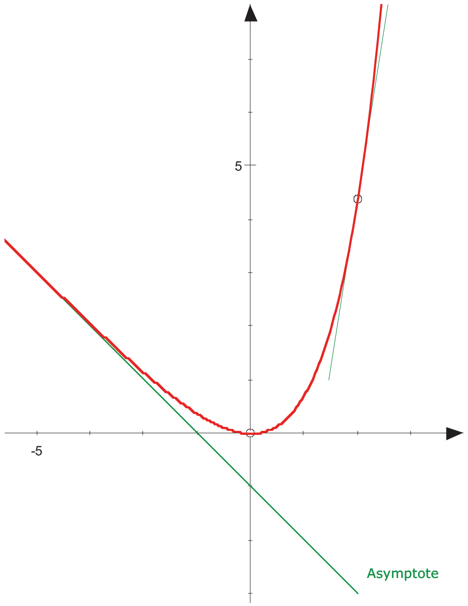
keine

## Übersicht

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | Minimum |
| 2 | $e^2 - 3 \approx 4.4$ | $e^2 - 1 \approx 6.4$ | Zusatzpunkt |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

## Graph



# $y = 5(x+1) \cdot e^{-x^2}$

## Vorbereitungen

$$f(x) = 5(x+1) \cdot e^{-x^2}$$
$$f'(x) = 5 \cdot \left(1 \cdot e^{-x^2} + (x+1) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)\right) = 5e^{-x^2} \cdot (-2x^2 - 2x + 1)$$
$$f''(x) = 5\left(e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x^2 - 2x + 1) + 5e^{-x^2} \cdot (-4x - 2)\right) = 10e^{-x^2}(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)$$

## Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

## Symmetrie

Keine erkennbare

## Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0$
$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0$

## Nullstellen

$f(x) = 5(x+1) \cdot e^{-x^2} = 0$ **$x = -1$**

## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = -5e^{-x^2} \cdot (+2x^2 + 2x - 1) = 0$ **$x \approx 0.366$** **$x \approx -1.366$**



## Wendepunkte

$f''(x) = 10e^{-x^2}(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1) = 0$ **$x = 1$** **$x \approx -0.292$** **$x \approx -1.707$**

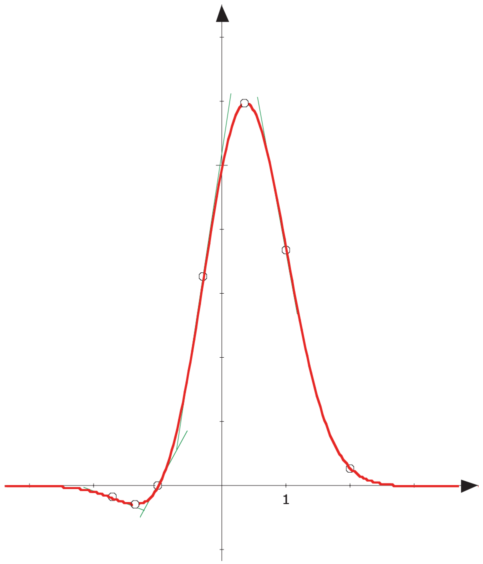
→ G:Gleichungen: nten Grades: Aufg. 3
Online | Offline

## Übersicht

| x | f (x) | f′ (x) | |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1.8 | Nullstelle |
| -1.37 | -0.28 | 0 | Minimum |
| 0.37 | 5.97 | 0 | Maximum |
| 1 | 3.68 | -5.5 | Wendepunkt |
| -0.29 | 3.24 | 6.5 | Wendepunkt |
| -1.71 | -0.19 | -0.4 | Wendepunkt |
| 2 | 0.27 | | Zusatzpunkt |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

## Graph



# $y = \dfrac{6}{1 + e^x}$

## Vorbereitungen

$$f(x) = \frac{6}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-6e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6e^x \cdot (1 + e^x)^2 - 2(1 + e^x) \cdot e^x \cdot (-6e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{6e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$$

## Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

## Symmetrie

Keine erkennbare

## Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 0$
$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad y \to 6$ waagrechte Asymptoten bei $y = 6$ und $y = 0$

## Nullstellen

$f(x) = \dfrac{6}{1 + e^x}$ keine



## Stellen mit waagrechten Tangenten

$f'(x) = \dfrac{-6e^x}{(1 + e^x)^2} = 0$ keine

## Wendepunkte

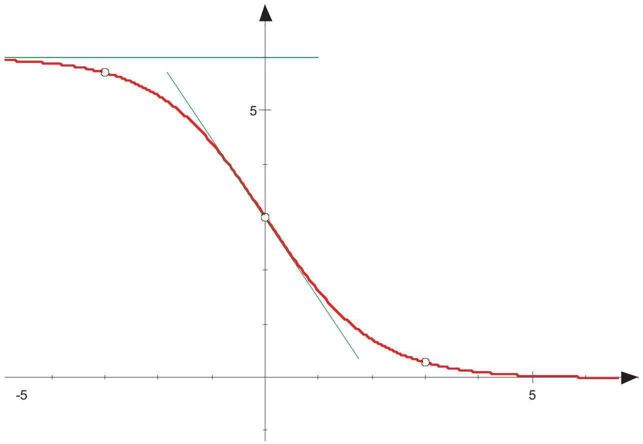
$f''(x) = \dfrac{6e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1$ $\mathbf{x = 0}$

## Übersicht

| x | f (x) | f′ (x) | |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | -1.5 | Wendepunkt |
| -3 | 5.72 | | Zusatzpunkt |
| 3 | 1.28 | | Zusatzpunkt |

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass zwei zusätzliche Punkte nützlich wären.

## Graph



$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

---

$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = \frac{x}{x^2+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$     Bemerkung: $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

$f''(x) = \frac{2x \cdot x(x^2+1) - (x^2-1)(3x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{-x^4+4x^2+1}{x^2(x^2+1)^2}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$     Bei allen folgenden Aufgaben werden nur positive Lösungen erlaubt.

Pol bei $x = 0$     $x \to 0 \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{1}{x}\right) \to \infty \;\Rightarrow\; y = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \to +\infty$

$x \to \infty \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{1}{x}\right) \to \infty \;\Rightarrow\; y = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \to +\infty$

Keine Nullstellen     $x + \frac{1}{x}$ ist für positive Zahlen sicher nie 0

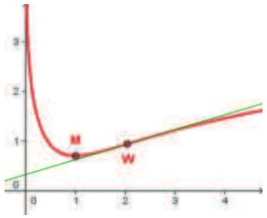
Extremum:     $x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \;\Rightarrow\; M(1|\ln 2) \approx M(1|\,0.7)$

Es muss ein Minimum sein, weil der Graph für x gegen 0 und für x gegen unendlich gegen unendlich geht.

Wendepunkt:     $-x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 4.231 \;\Rightarrow\; x = 2.058$

$M(2.058\,|\,0.934)$ und $f'(2.058) = 0.3$



$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$$

---

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)} = \frac{x^2}{2\ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln(x^2) - x^2 \cdot \frac{2}{x}}{\left(\ln(x^2)\right)^2} = \frac{2x \cdot \ln(x^2) - 2x}{\left(\ln(x^2)\right)^2}$$

Auf die 2. Ableitung verzichten wir angesichts des komplizierten Ergebnisses

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, (wegen der $x^2$ )

Pole: $\ln(x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

Ausserdem ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ ebenfalls nicht definiert;
es handelt sich da um eine so genannte behebbare Definitionslücke:
für $x \to \pm 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -0$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$ : $y \to +\infty$

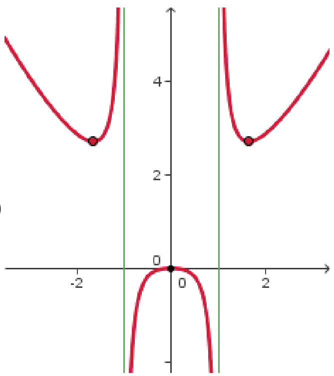
Der Zähler wächst sehr viel rascher als der $\ln(x^2)$ im Nenner

Nullstelle wäre bei der nicht definierten Null.

Extrema:

$$\begin{aligned} 2x\ln(x^2) - 2x &= 0 \\ \ln(x^2) - 1 &= 0 \\ \ln(x^2) &= 1 \\ x^2 &= e \\ x &= \pm\sqrt{e} \quad \Rightarrow \quad M_1(\sqrt{e}|e), M_2(-\sqrt{e}|e) \end{aligned}$$

und wieder $x = 0$ s. oben



$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$

---

$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x^2 - e^{-x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-e^{-x} \cdot x \cdot (x+2)}{x^4} = \frac{-e^{-x}(x+2)}{x^3}$

Angesichts der komplizierten 1. Ableitung verzichte ich auf die 2. Ableitung, die sowieso keine Nullstelle hat.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f(x) ist immer positiv

Für $x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \to +\infty$, sehr viel rascher als der Nenner: also $f(x) \to +\infty$
Für $x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \to 0$, sehr viel rascher als der Nenner: also $f(x) \to +0$

Pol bei $x = 0$

Keine Nullstelle

Extremum: $-e^{-x}(x+2) = 0$
$x = -2$ $\quad$ $e^{-x}$ ist nie 0!

Minimum $M\left(-2 \middle| \frac{e^2}{4}\right) \approx M(-2|\,1.84)$