

$$y = \sin^2 x$$


---

### Vorarbeiten:

Wir leiten die Funktion zweimal ab:

$$y = \sin^2 x$$

$$y' = 2 \sin x \cos x$$

$$y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

A: Ableitungen: Kettenregel. Aufg. 1

[Online](#) | [Offline](#)

**Periode:** Da der Winkel einfach  $x$  ist:  $[0^\circ; 360^\circ]$

**Definitionsbereich:** Überall definiert

### Nullstellen:

$$y = \sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180^\circ$$

### Waagrechte Tangenten:

$$y' = 2 \sin x \cos x = 0$$

Diese Gleichung ist sehr schnell gelöst, wenn wir merken, dass:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$$

$$2x = k \cdot 180^\circ$$

$$x = k \cdot 90^\circ$$

### Wendepunkte:

$$y'' = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

Auch hier sollte man am besten merken, dass:

$$2 \cdot \cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

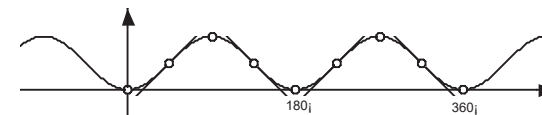
$$2x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$$

### Zusammenstellung und Graph:

(Wertetafel im Bereich  $[0^\circ; 360^\circ]$ )

	x	y	y'
Nullstellen	$0^\circ$	0	0
	$180^\circ$	0	0
	$360^\circ$	0	0
Minima	$0^\circ$	0	2
	$180^\circ$	0	2
	$360^\circ$	0	2
Maxima	$90^\circ$	1	-2
	$270^\circ$	1	-2
Wendepunkte	$45^\circ$	0.5	1
	$135^\circ$	0.5	-1
	$225^\circ$	0.5	1
	$315^\circ$	0.5	-1



Berechnen Sie für die Funktion  $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$  die exakten Werte für Nullstellen, Steigung in den Nullstellen und Extrema und zeichnen Sie den Graphen. (Vorprüfung 99)

$$f(x) = 2\cos x + \sin 2x$$

$$f'(x) = -2\sin x + \cos 2x \cdot 2 = -2(\sin x - \cos 2x)$$

$$f''(x) = -2(\cos x + \sin 2x \cdot 2) = -2(\cos x + 2\sin 2x)$$

#### NULLSTELLEN:

$$\begin{aligned} f(x) = 2\cos x + \sin 2x &= 2\cos x + 2\sin x \cos x = 0 \\ 2\cos x(1 + \sin x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ \quad f'(90^\circ) = -4$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 270^\circ \quad f'(270^\circ) = 0$$

#### EXTREMA:

$$f'(x) = -2(\sin x - \cos 2x) = 0$$

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$$

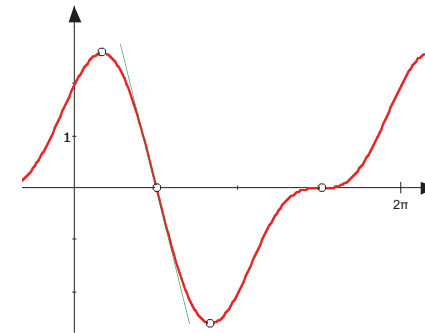
$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Setzen Sie  $\sin x = u$  und lösen Sie die Gleichung

$$2u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u_1 = -1, u_2 = 0.5$$

$\sin x$	$x$	$f(x)$	$f''(x)$	
-1	$270^\circ$	0	0	Terrassenpunkt
0.5	$30^\circ$	$1.5\sqrt{3}$	$-3\sqrt{3} < 0$	Maximum
	$150^\circ$	$-1.5\sqrt{3}$	$3\sqrt{3} > 0$	Minimum

#### GRAPH



# $y = \ln(x^2 + 16)$

## VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \ln(x^2 + 16)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 16}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 16) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-2(x^2 - 16)}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-2(x + 4)(x - 4)}{(x^2 + 16)^2}$$

## DEFINITIONSBEREICH

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad (x^2 + 16 \text{ ist immer gr\u00f6sser als Null!})$$

## SYMMETRIE

Symmetrisch zur y-Achse

## VERHALTEN F\u00dcR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

aber sehr, sehr langsam!

## NULLSTELLEN

$$f(x) = \ln(x^2 + 16) = 0$$

$$x^2 + 16 = 1$$

$$x^2 = -15$$

keine Nullstellen

## STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 16} = 0 \Rightarrow 2x = 0$$

$$x = 0$$

## WENDEPUNKTE

$$f''(x) = \frac{-2(x + 4)(x - 4)}{(x^2 + 16)^2} = 0$$

$$x = \pm 4$$

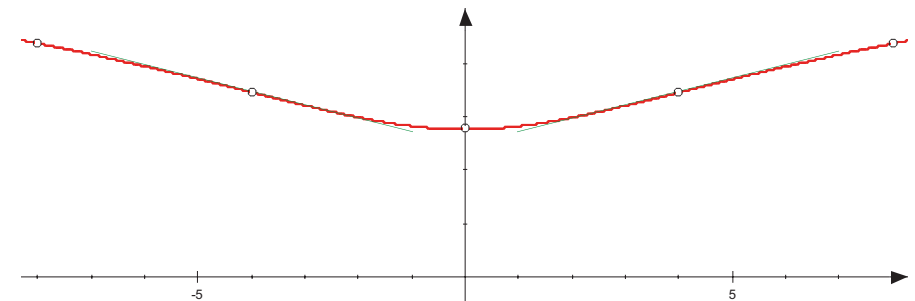
$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

## ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	$\ln 16 \approx 2.770$	0	Minimum
$\pm 4$	$\ln 32 \approx 3.5$	$\pm \frac{1}{4}$	Wendepunkte
$\pm 8$	$\ln 80 \approx 4.4$		Zusatzpunkte

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass zus\u00e4tzliche Punkte event. n\u00fctzlich w\u00e4ren.

## GRAPH



$$y = \ln(17 - x^2)$$


---

### VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \ln(17 - x^2)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{17 - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 17}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 17) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 17)^2} = \frac{-2(x^2 + 17)}{(x^2 - 17)^2}$$

### DEFINITIONSBEREICH

$$\text{Definiert f\"ur } 17 - x^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{17} < x < \sqrt{17}$$

$$\mathbb{D} = ]-\sqrt{17}; \sqrt{17}[$$

### SYMMETRIE

Symmetrisch zur y-Achse

### VERHALTEN AM RAND DES DEFINITIONSBEREICHS

$$x \rightarrow +\sqrt{17} \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\sqrt{17} \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

Pole bei  $x = \pm\sqrt{17}$

### NULLSTELLEN

$$f(x) = \ln(17 - x^2) = 0 \Rightarrow 17 - x^2 = 1$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

### STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 17} = 0$$

$$x = 0$$

### WENDEPUNKTE

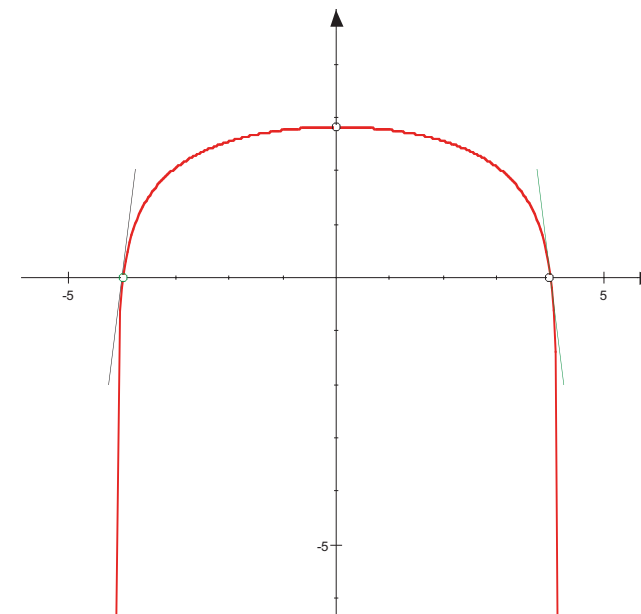
$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 17)}{(x^2 - 17)^2} = 0$$

keine

### ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	$\ln 17 \approx 2.8$	0	Maximum
$\pm 4$	0	-8	Nullstellen

### GRAPH



# $y = x \cdot \ln x$

## VORBEREITUNGEN

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

## DEFINITIONSBEREICH

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

## SYMMETRIE

Keine erkennbare

## VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \infty$ UND FÜR $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty &\Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 0 &\Rightarrow y \rightarrow 0 \quad \Rightarrow y' \rightarrow \infty \end{aligned}$$

## NULLSTELLEN

$$f(x) = x \cdot \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 0$$

$$\mathbf{x = 1} \quad (x = 0 \notin \mathbb{D})$$

## STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -1$$

$$\mathbf{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

## WENDEPUNKTE

$$f''(x) = \frac{1}{x} = 0$$

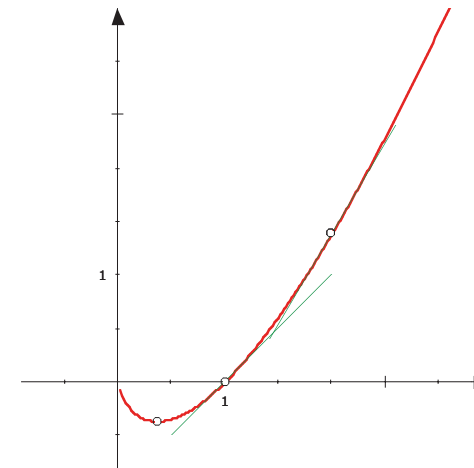
keine

## ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
$\frac{1}{e} \approx 0.37$	$-\frac{1}{e} \approx -0.37$	0	Minimum
1	0	1	Nullstelle
2	$2 \ln 2 \approx 1.4$	$\approx 1.7$	Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

## GRAPH



$$y = 10 \cdot \frac{\ln x}{x}$$


---

#### VORBEREITUNGEN

$$f(x) = 10 \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = 10 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = 10 \cdot \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln x)}{x^4} = 10 \cdot \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = 10 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

#### DEFINITIONSBEREICH

$$D = \mathbb{R}^+$$

#### SYMMETRIE

Keine erkennbare

#### VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \infty$ UND FÜR $x \rightarrow 0$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow -\infty \quad \text{Pol}$$

#### NULLSTELLEN

$$f(x) = 10 \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0$$

$$x = 1$$

#### STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \quad x = e$$

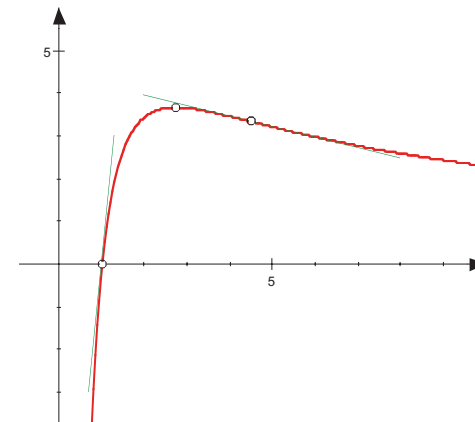
#### WENDEPUNKTE

$$f''(x) = 10 \cdot \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = 1.5 \quad x = e^{1.5}$$

#### ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
1	0	10	Nullstelle
$e \approx 2.7$	$\frac{10}{e} \approx 3.7$	0	Maximum
$e^{1.5} \approx 4.5$	$\frac{15}{e^{1.5}} \approx 3.35$	$-\frac{5}{e^3} \approx -0.25$	Wendepunkt

#### GRAPH



$$y = x^3 \cdot e^{-x}$$

### VORBEREITUNGEN

$$f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (3x^2 - x^3)$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (3x^2 - x^3) + e^{-x} \cdot (6x - 3x^2) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x}$$

### DEFINITIONSBEREICH

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

### SYMMETRIE

Keine erkennbare

### VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm \infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

die positive x-Achse ist Asymptote

### NULLSTELLEN

$$f(x) = x^3 \cdot e^{-x} = 0$$

$$x = 0$$

### STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = e^{-x} \cdot x^2 \cdot (3 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 3$$

### WENDEPUNKTE

$$f''(x) = x(x^2 - 6x + 6)e^{-x} = 0$$

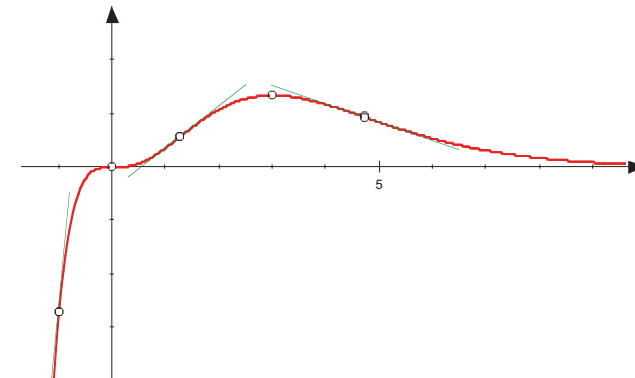
$$x = 0 \quad x = 1.27 \quad x = 4.73$$

### ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	0	Terrassenpunkt
3	$\frac{27}{e^3} \approx 1.34$	0	Maximum
1.27	0.6	0.8	Wendepunkt
4.73	1.9	-0.34	Wendepunkt
-1	$-e \approx -2.7$	$4e \approx 10.9$	Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

### GRAPH



# $y = e^x - x - 1$

---

## VORBEREITUNGEN

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f''(x) = e^x$$

## DEFINITIONSBEREICH

$$D = \mathbb{R}$$

## SYMMETRIE

Keine erkennbare

## VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -x - 1$$

Für  $x \rightarrow -\infty$  ist die Gerade  $y = -x - 1$  Asymptote.

## NULLSTELLEN

$$f(x) = e^x - x - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ (raten!)}$$

## STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1$$

$$x = 0$$

## WENDEPUNKTE

$$f''(x) = e^x = 0$$

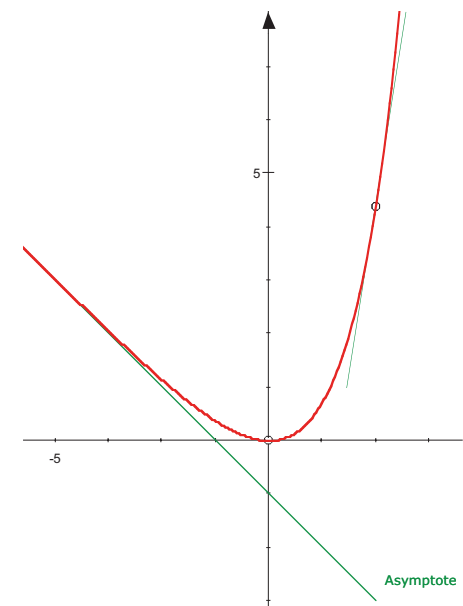
keine

## ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	0	Minimum
2	$e^2 - 3 \approx 4.4$	$e^2 - 1 \approx 6.4$	Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

## GRAPH





$$y = 5(x + 1) \cdot e^{-x^2}$$

### VORBEREITUNGEN

$$f(x) = 5(x + 1) \cdot e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 5 \cdot \left( 1 \cdot e^{-x^2} + (x + 1) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \right) = 5e^{-x^2} \cdot (-2x^2 - 2x + 1)$$

$$f''(x) = 5 \left( e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x^2 - 2x + 1) + 5e^{-x^2} \cdot (-4x - 2) \right) = 10e^{-x^2} (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)$$

### DEFINITIONSBEREICH

$$ID = \mathbb{R}$$

### SYMMETRIE

Keine erkennbare

### VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm \infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

### NULLSTELLEN

$$f(x) = 5(x + 1) \cdot e^{-x^2} = 0$$

$$x = -1$$

### STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = -5e^{-x^2} \cdot (+2x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$x \approx 0.366 \quad x \approx -1.366$$

### WENDEPUNKTE

$$f''(x) = 10e^{-x^2} (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$x = 1 \quad x \approx -0.292 \quad x \approx -1.707$$

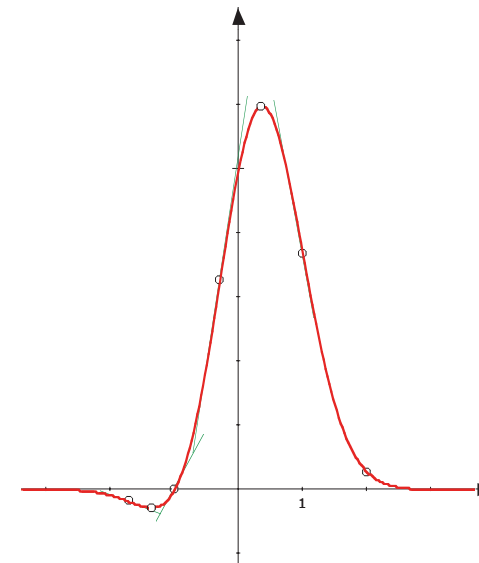
→ G: Gleichungen: nten Grades: Aufg. 3  
[Online](#) | [Offline](#)

### ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
-1	0	1.8	Nullstelle
-1.37	-0.28	0	Minimum
0.37	5.97	0	Maximum
1	3.68	-5.5	Wendepunkt
-0.29	3.24	6.5	Wendepunkt
-1.71	-0.19	-0.4	Wendepunkt
2	0.27		Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

### GRAPH



$$y = \frac{6}{1 + e^x}$$


---

### VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{6}{1 + e^x}$$

$$f'(x) = \frac{-6e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6e^x \cdot (1 + e^x)^2 - 2(1 + e^x) \cdot e^x \cdot (-6e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{6e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$$

### DEFINITIONSBEREICH

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

### SYMMETRIE

Keine erkennbare

### VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm \infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 6$$

waagrechte Asymptoten bei  $y = 6$  und  $y = 0$

### NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{6}{1 + e^x}$$

keine

### STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{-6e^x}{(1 + e^x)^2} = 0$$

keine

### WENDEPUNKTE

$$f''(x) = \frac{6e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} = 0 \Rightarrow e^x = 1$$

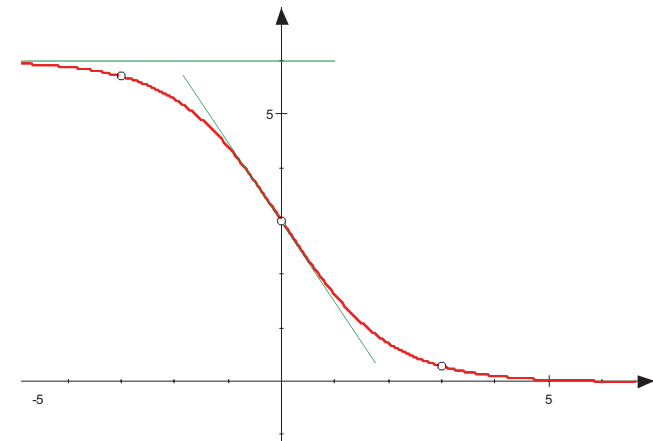
$x = 0$

### ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	3	-1.5	Wendepunkt
-3	5.72		Zusatzpunkt
3	1.28		Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass zwei zusätzliche Punkte nützlich wären.

### GRAPH



$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$


---

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x}{x^2+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$

Bemerkung:  $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x(x^2+1) - (x^2-1)(3x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

Bei allen folgenden Aufgaben werden nur positive Lösungen erlaubt.

Pol bei  $x = 0$        $x \rightarrow 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \infty \Rightarrow y = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \infty \Rightarrow y = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$

Keine Nullstellen       $x + \frac{1}{x}$  ist für positive Zahlen sicher nie 0

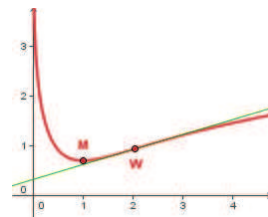
Extremum:       $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M(1 | \ln 2) \approx M(1 | 0.7)$

Es muss ein Minimum sein, weil der Graph für  $x$  gegen 0 und für  $x$  gegen unendlich gegen unendlich geht.

Wendepunkt:       $-x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 4.231 \Rightarrow x = 2.058$

$M(2.058 | 0.934)$  und  $f'(2.058) = 0.3$



$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)}$$


---

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)} = \frac{x^2}{2\ln(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln(x^2) - x^2 \cdot \frac{2}{x}}{(\ln(x^2))^2} = \frac{2x \cdot \ln(x^2) - 2x}{(\ln(x^2))^2}$$

Auf die 2. Ableitung verzichten wir angesichts des komplizierten Ergebnisses

Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, (wegen der  $x^2$ )

$$\text{Pole: } \ln(x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ausserdem ist die Funktion an der Stelle  $x = 0$  ebenfalls nicht definiert;  
es handelt sich da um eine so genannte behebare Definitionslücke:  
für  $x \rightarrow \pm 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow -0$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$$

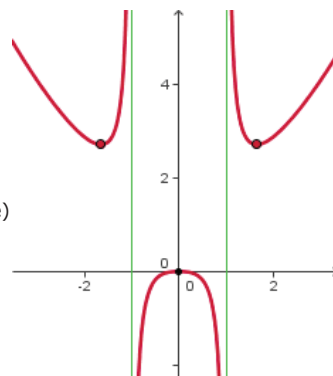
Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ :  $y \rightarrow +\infty$

Der Zähler wächst sehr viel rascher als der  $\ln(x^2)$  im Nenner

Nullstelle wäre bei der nicht definierten Null.

$$\begin{aligned} \text{Extrema: } \quad & 2x \ln(x^2) - 2x = 0 \\ & \ln(x^2) - 1 = 0 \\ & \ln(x^2) = 1 \\ & x^2 = e \\ & x = \pm \sqrt{e} \Rightarrow M_1(\sqrt{e}|e), M_2(-\sqrt{e}|e) \end{aligned}$$

und wieder  $x = 0$  s. oben



$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

---

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x^2 - e^{-x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-e^{-x} \cdot x \cdot (x+2)}{x^4} = \frac{-e^{-x}(x+2)}{x^3}$$

Angesichts der komplizierten 1. Ableitung verzichte ich auf die 2. Ableitung, die sowieso keine Nullstelle hat.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f(x)$  ist immer positiv

Für  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{-x} \rightarrow +\infty$ , sehr viel rascher als der Nenner: also  $f(x) \rightarrow +\infty$

Für  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-x} \rightarrow 0$ , sehr viel rascher als der Nenner: also  $f(x) \rightarrow +0$

Pol bei  $x = 0$

Keine Nullstelle

Extremum:  $-e^{-x}(x+2) = 0$   
 $x = -2$   $e^{-x}$  ist nie 0!

Minimum  $M\left(-2 \mid \frac{e^2}{4}\right) \approx M(-2 \mid 1.84)$

