Zylinder, Kegel, Kugel, weitere Körper

Aufgabe 1
Ein Messzylinder aus Glas hat einen Innendurchmesser von 4,0 cm.

a) In den Messzylinder wird Wasser eingefüllt. Welchen Abstand haben zwei Markierungen auf der Zylinderwand, die einem Volumenzuwachs von 50 cm^3 entsprechen?
b) Ein Eisenstück in der Form eines geraden Kreiskegels mit dem Radius 1,8 cm wird vollständig in das eingefüllte Wasser getaucht. Der Wasserspiegel steigt dabei um 2,4 cm. Wie groß ist die Höhe des Kegels?

Aufgabe 2
Es soll ein zylindrisches Gefäß hergestellt werden, dass 500 cm^3 fasst und dessen innere Tiefe doppelt so groß wie der Innendurchmesser ist. Wie tief ist das Gefäß innen? Welche Außenmaße hat es, wenn der Boden 3,0 mm und die Wand 2,0 mm dick sind?

Aufgabe 3
Ein gerader Kreiszylinder hat das Volumen 5,0 cm^3 und die Mantelfläche 4,0 cm^2. Berechne die Oberfläche und die Höhe des Zylinders.

Aufgabe 4

a) Ein Zylinder mit der Grundfläche $A = 50000\ mm^2$ hat das Volumen 45 l. Wie hoch ist er?
b) Welchen Durchmesser hat ein Zylinder mit $V = 100$ l und der Höhe 40 cm?

Aufgabe 5
In einer zylinderförmigen Regentonne steht das Wasser 60 cm hoch. Nachdem 120 l entnommen wurden, steht es noch 20 cm hoch. Welchen Innendurchmesser hat die Tonne?

Aufgabe 6
Welche Masse hat das laufende Meter eines Kupferrohrs (Dichte 8,9 g/cm^3) mit dem äußeren Durchmesser 4 cm und der Wandstärke 3 mm?

Aufgabe 7
Ein Rechteck mit den Seiten x und y rotiert um x und erzeugt so einen Zylinder. Berechne Volumen und Oberfläche des entstehenden Zylinders in Abhängigkeit von x für $y : x = \sqrt{2}$.

Aufgabe 8
Durch einen Würfel wird ein zylindrisches Loch parallel zu einer Kante gebohrt. Wie verhalten sich Kantenlänge a und Lochdurchmesser d, wenn der Würfel dann nur noch halb so schwer ist?

Aufgabe 9
Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Zylinder. Der Durchmesser des Zylinders ist gleich seiner Höhe. Welcher Körper hat das größere Volumen? Um wieviel Prozent ist sein Volumen größer?

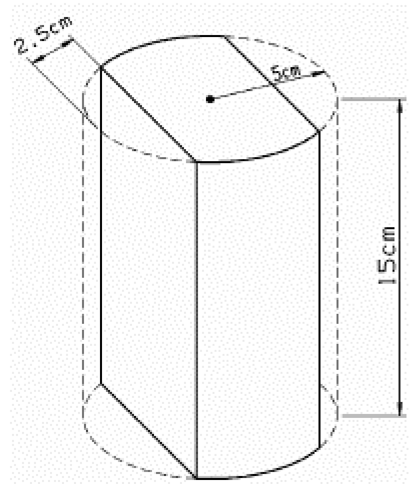
Aufgabe 10

Die Diagonale des Achsschnitts eines Zylinders ist 18 cm lang. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Zylinders, wenn zusätzlich gilt

a) der Zylinderdurchmesser ist 6 cm
b) die Zylinderhöhe ist um 6 cm größer als der Zylinderdurchmesser

Aufgabe 11

Von einem Eisenzylinder (r = 5 cm, h = 15 cm, Ditche 7,9 g/cm³) werden von der Rundung auf beiden Seiten 2,5 cm weggefräßt (im Bild gestrichelt)



a) Welches Volumen und welche Masse hat der Restkörper?
b) Welche Oberfläche hat der Restkörper?

Aufgabe 12

Der Axialschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Berechne Volumen und Oberfläche des Kegels in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 13

Ein kegelförmiger Behälter mit dem oberen Durchmesser d = 8 cm und der inneren Höhe h = 10 cm wird mit Wasser gefüllt. Der Abstand der Flüssigkeit bis zum Rand beträgt 3 cm. Wieviel Wasser befindet sich im Behälter?

Aufgabe 14

Ein oben offener Messbecher aus Glas hat die Form eines geraden Kreiskegels. Er fasst 1 l und hat die innere Höhe 20 cm.

a) Berechne den Grundkreisradius r des Kegels.
b) Durch einen Strich auf der Mantellinie des Kegels wird das Volumen 400 cm³ markiert. Wie weit ist dieser Strich von der Kegelspitze entfernt; entlang der Mantellinie gemessen?

Aufgabe 15

Ein gerader Kegel mit r = 4 cm und der Höhe h = 9 cm wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche durchgeschnitten. Berechnen Volumen und Oberfläche des Kegelstumpfes.

Aufgabe 16

Ein kegelförmiger Messbecher (Innendurchmesser d = 15 cm; Mantellinie s = 20 cm) wird mit Mehl gefüllt.

a) Wieviel Gramm Mehl fasst der bis zum Rand gefüllte Messbecher, wenn die Dichte von Mehl 0,6 g/cm³ beträgt?
b) Wieviel Gramm Mehl sind im Messbecher, wenn er nur bis zu 2/3 seiner Höhe gefüllt ist?

Aufgabe 17

Ein gerader Kegel mit dem Radius r = 3 cm und der Höhe h = 8 cm wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geteilt, dass die beiden entstehenden Körper

a) gleiche Volumina
b) gleiche Mantelflächen

besitzen. In welchem Abstand zur Grundfläche erfolgt der Schnitt. Berechne den Inhalt der Schnittfläche.

Aufgabe 18

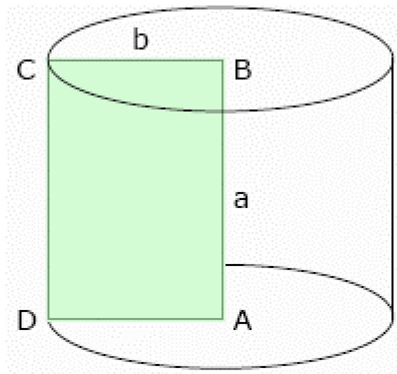
Bei einem geraden Kreiskegel ist eine Mantellinie so groß wie der Durchmesser. Wie verhalten sich Volumen und Oberfläche in Abhängigkeit von der Länge der Mantellinie?

Aufgabe 19

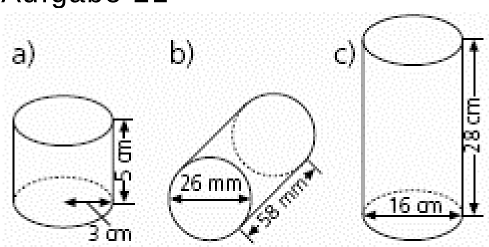
Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 6 und 8 rotiert um jede seiner Seiten. Berechne die Volumina und Mantelflächen der entstehenden Drehkörper.

Aufgabe 20

Ein Rechteck ABCD mit den Seiten a und b rotiert um die Seite AB. Berechne und vergleiche die Volumina der durch die folgenden Flächen erzeugten Drehkörper: ABCD, ABC und ACD.



Aufgabe 21



Berechne das Volumen und die Oberfläche.

Aufgabe 22

Eine Kreissektorfläche mit dem Mittelpunktswinkel 135° und dem Radius 8 cm wird zu einem Kegel zusammengebogen. Wie groß ist Kegelvolumen?

Aufgabe 23

Eine gerader Kegel hat der Grundkreisrdius 5 cm und eine Oberfläche von 225 π cm².

a) Welche Höhe hat der Kegel?
b) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des in die Ebene abgerollten Mantels?

Aufgabe 24

Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist viermal so groß wie der Kegelgrundkreis. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des in die Ebene abgerollten Mantels?

Aufgabe 25

Ein gerader Kreiskegel hat die Höhe h = 8 cm. Die Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene ergibt einen Halbkreis. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Kegels.

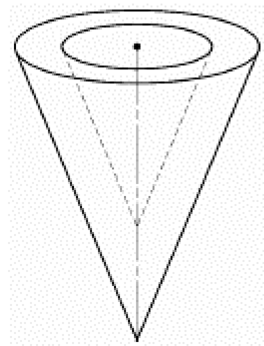
Aufgabe 26

Einem geraden Kegel mit dem Radius r = 2 cm und der Höhe h = 6 cm wird ein gerader Zylinder so einbeschrieben, dass die Grundfläche des Zylinders mit der des Kegels zusammenfallen und die Zylinderhöhe so groß wie der Zylinderdurchmesser ist. Wie groß ist das Zylindervolumen?

Aufgabe 27
Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a rotiert um eine Seite. Welches Volumen hat der dabei entstehende Körper?

Aufgabe 28
Einem Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein Würfel so einbeschrieben werden, dass der Würfel auf der Grundfläche des Kegels steht. Berechne die Kantenlänge a in Abhängigkeit von r und h.

Aufgabe 29
Aus einem Kegel (Radius R, Kegelhöhe H) wird ein konzentrischer Kegel (r, h) mit gleichem Öffnungswinkel so ausgebohrt, dass die Spitzen H/2 voneinander entfernt sind und in die gleiche Richtung zeigen. Welches Volumen hat der Restkörper?

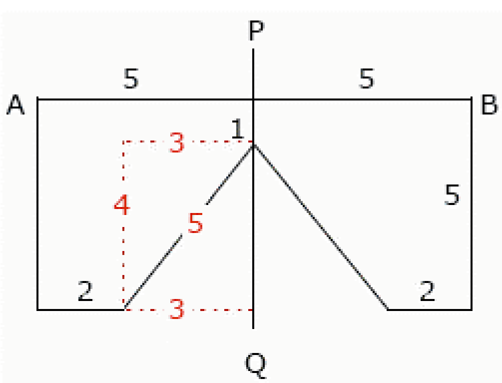


Aufgabe 30
Eine gerader Kreiskegel (R, H) wird zylindrisch (Zylinderradius r) so durchbohrt, dass Kegel- und Zylinderachse zusammenfallen.

a) Berechne das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von R, H und r.
b) Wie groß muss r sein, damit das Volumen des Restkörpers halb so groß ist wie das des Kegels?

Aufgabe 31
Ein waagerecht im Wasser schwimmender zylindrischer Baumstamm mit dem Durchmesser d = 60 cm ragt 15 cm hoch aus dem Wasser. Welche Dichte hat das Holz?

Aufgabe 32
Ein Kelchglas von der Form eines geraden Kreiskegels hat die Kegelhöhe h = 12 cm und einen Öffnungsdurchmesser von d = 2r = 6 cm. Es soll für 100cm³ Inhalt geeicht werden. In welcher Höhe h' muss der Eichstrich angebracht werden?

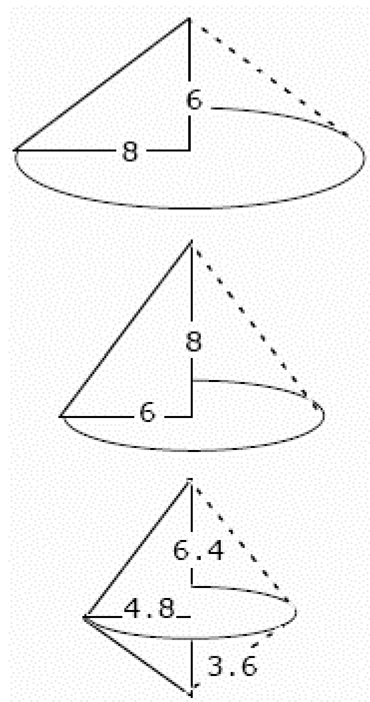


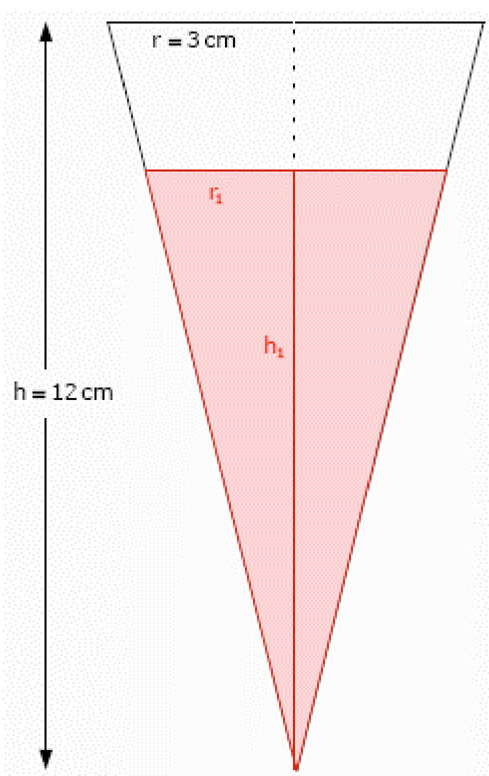
Aufgabe 33
Gegeben ist die nebenstehende Figur:
a) Die Figur rotiert um die Achse PQ. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen.
b) Die Figur rotiert um die Seite AB. Berechnen Sie das Volumen.

Aufgabe 34
Ein Oktaeder ist ein regelmässiger Körper, der entsteht, wenn man zwei quadratische Pyramiden mit lauter Kanten der Länge a an den Grundflächen zusammenklebt. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche!

Lösungen

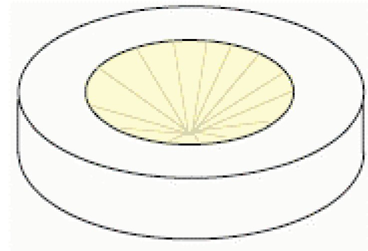
1	a)	$h = 3{,}9788$ cm b) $h = 8{,}8888$ cm
2		$r = 3{,}4139$ cm, innere Tiefe $h = 13{,}66$ cm
		Außendurchmesser $D = 7{,}23$ cm ; äußere Höhe $H = 13{,}96$ cm
3		$A = 43{,}27\ cm^3$; $h = 0{,}25$ cm
4	a)	$h = 9$ dm b) $d = 5{,}64$ dm
5		$d = 6{,}18$ cm
6		$m = 3103{,}5$ g
7		$V = 2\pi x^3$; $A = x^2\pi\ (4 + \sqrt{8})$
8		$a : d = 1/2\ \sqrt{(2\pi)}$
9		$a = r\ \sqrt{\pi}$; $V_{zylinder} : V_{würfel} = 2 : \sqrt{\pi}$
10	a)	$A = 376{,}43\ cm^2$; $V = 479{,}82\ cm^3$
	b)	$A = 589{,}28\ cm^2$; $V = 1056{,}9\ cm^3$
11		$V = 717{,}3\ cm^3$; $m = 5{,}67$ kg ; $A = 512{,}52\ cm^2$
12		$V = 1/24\ \pi\ \sqrt{3}\ a^3 = 0{,}23\ a$; $A = 3/4\ \pi\ a^2 = 2{,}36\ a$
13		$V = 57{,}47\ cm^3$
14		$r = 6{,}91$ cm ; $x = 15{,}6$ cm
15		$V = 131{,}95\ cm^3$; $A = 155{,}65\ cm^2$
16	a)	655,3 g b) 194,2 g
17		$x = h\ (1 - \sqrt[3]{(1/2)}) = 1{,}65$ cm ; $A = 17{,}8\ cm^2$
18		$V : A = s\ \sqrt{3} : 18$
19	a)	$V = 128\pi$; $M = 80\pi$
	b)	$V = 96\pi$; $M = 60\pi$
	c)	Doppelkegel $V = 76{,}8\pi$; $M = 67{,}2\pi$
20	a)	Zylinder $V = ab^2\pi$
	b)	Kegel $V = \pi/3\ ab^2$
	c)	kegelförmig ausgebohrter Zylinder $V = 2/3\pi ab^2$
21	a)	$V = 141{,}37\ cm^3$; $A = 150{,}79\ cm^2$
	b)	$V = 30794\ mm^3$; $A = 5799{,}4\ mm^2$
	c)	$V = 5629{,}7\ cm^3$; $A = 1809{,}6\ cm^2$

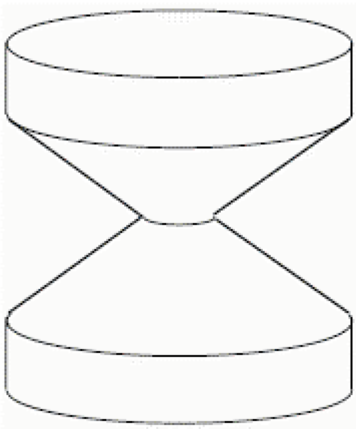




22		$V = 69{,}9\ cm^3$
23		$h = 39{,}69$ cm ;
		Winkel 45°
24		Winkel 90°
25		$V = 178{,}72\ cm^3$;
		$A = 201{,}06\ cm^2$
26		Zylindervolumen $10{,}86\ cm^3$
27		$V = 0{,}25\ \pi\ a^3$
28		$a = rh\ /\ (r + 1/2h\ \sqrt{2})$
29		$V = 7/24\ \pi\ R^2\ H$
30	a)	$V = 1/3\ \pi\ H\ (R^2 - 3r^2 + 2r^3/R)$
	b)	$r = R/2$
31		Dichte $0{,}80\ g/cm^3$
32		Abbildung links
		$r\ /\ h = 1/4$; $h_1 = 4\ r_1 \ldots h_1 = 11{,}52$ cm

33 a) rechte Abbildung
Zylinder ($r = 5$, $h = 5$), aus dem ein Kegel ($r = 3$, $h = 4$) ausgebohrt wurde.
$V = 113\pi$; $A = 106\pi$





b) linke Abbildung
Der Körper setzt sich zusammen aus: zwei Zylindern ($R = 5$, $h = 2$) und zwei Kegelstümpfen ($R = 5$, $r = 1$, $h = 3$) ; $V = 162\pi$

34 $V = a^3/3\,\sqrt{2}$; $A = 2a^2\,\sqrt{3}$

Berechnungen an der Kugel

Aufgabe 1
Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten, dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat 42,8 mm Durchmesser und ein Gewicht von 46,23 g. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von 3,0 mm, der Kern hat einen Durchmesser von 34,8 mm, die Schale hat eine Dicke von 1,0 mm.
Aufgabe: Wie groß sind die prozentualen Anteile des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles. Die Schale ist aus Lithium, 1 cm^3 Lithium wiegt 0,534 g, die Ummantelung aus Graphit, 1 cm^3 wiegt 2,39 g. Welche Dichte hat das Material des Kerns?

Aufgabe 2
Das Wahrzeichen der Weltausstellung 1958 in Brüssel ist das "Atomium". Es besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser. Wie groß ist das Gesamtvolumen aller Kugeln. Wie viele m^2 muss ein Reinigungsteam putzen, ohne das Gestänge zwischen den Kugeln, wenn das Wahrzeichen glänzen soll?

Aufgabe 3
a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt.
Wie viel Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?
b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

Aufgabe 4
Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe h = 1,5r einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

Aufgabe 5
Tennisbälle werden in Sportgeschäften häufig in zylindrischen Blechdosen angeboten. Dabei werden 4 Bälle übereinander in der Dose gestapelt. Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum, wenn man von einem Balldurchmesser von 7 cm ausgeht. Um welchen Anteil des Dosenvolumens handelt es sich dabei?

Aufgabe 6
Ein Hohlzylinder (Höhe h = 10 cm; Wanddicke a = 2 mm; Außendurchmesser d = 3 cm) aus Blei wird geschmolzen und
a) in eine Vollkugel
b) in eine Hohlkugel mit gleicher Wanddicke a
umgeformt. Berechne jeweils den Außendurchmesser der Kugel!

Aufgabe 7
Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zur Kugeloberfläche wie 1 : 2 verhält. Welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens macht das Zylindervolumen aus?

Aufgabe 8
Eine Kugel mit dem Radius R hat das gleiche Volumen wie eine Halbkugel mit dem Radius r. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen von Halbkugel und Kugel.

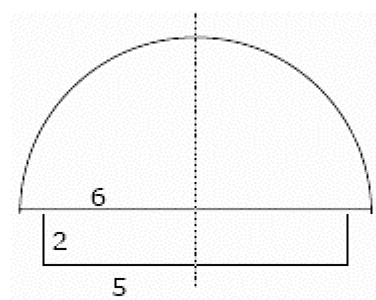
Aufgabe 9
Die Sonne sendet pro Sekunde ungefähr $n_0 = 10^{45}$ Lichtteilchen (Photonen) aus, gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt. Die Sonne ist mit dem bloßen Auge noch sichtbar, wenn ca. n = 100 Photonen pro Sekunde die Pupille (A = 0,5 cm²) treffen. In wie vielen Lichtjahren Entfernung ist die Sonne mit freiem Auge gerade noch sichtbar?

Aufgabe 10
Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Aufgabe 11
Eine hohle Kugel mit 10 cm Außendurchmesser und 4 mm Wanddicke schwimmt in Wasser und taucht genau bis zur Hälfte ein. Berechnen Sie die Dichte ρ_M des Materials, aus dem die Kugel besteht!

Aufgabe 12
Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kegel der Höhe 4r umbeschrieben.
(a) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels.
(b) Wie groß ist der Radius des Berührkreises?
(c) Welches Verhältnis bilden Mantelfläche und Kugeloberfläche?

Aufgabe 13
Die gegebene Figur rotiert um die eingezeichnete Achse und beschreibt dabei einen Rotationskörper.
a) Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche.



Lösung

1) Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%, Dichte $0{,}5 g/cm^3$
2) Volumen = $27482\ m^3$, Oberfläche $9160\ m^2$
3) $(2\pi r^3 - 4/3\pi r^3)/(2\pi r^3) \approx 33\ \%$; $d \approx 0{,}3$ mm
4) $V_Z : V_K = 63 : 128$
5) Anteil 1/3, Volumen $359\ cm^3$
6) a) $d_K = 3{,}2$ cm; b) $d_K = 5{,}4$ cm
7) 53,0 %
8) $r = R\ \sqrt[3]{2}$; $A_{HK} = 3\ r^2\ \pi$; $A_{HK} : A_K = 3 : \sqrt[3]{16} = 1{,}19...$
9) $n_0 / n = A / (4\pi r^3)$ ... $r = 6{,}31 \cdot 10^{18}$ m = 667 ly
10) 30,6 %
11) $2{,}3\ g/cm^3$ mit Auftriebsgesetz von Archimedes
12) a) $\tan \alpha/2 = 1/3$; b) $\rho = \sqrt{8} \sin \alpha/2$; c) 3 : 2
13) Körper besteht aus Zylinder und Halbkugel, $V = 194\ \pi$, $A = 128\ \pi$