Aufgaben zu statistischen Tests

Aufgabe 1
Jemand behauptet hellsichtig zu sein. Er wird einem Test unterzogen, bei welchem wiederholt aus einem vollständigen Stapel Karten eine einzelne Karte verdeckt gezogen wird. Der Kandidat soll dann die Kartenfarbe (Herz, Kreuz, Pik oder Karo) angeben. Man ist gewillt, einem Kandidaten gewisse Fähigkeiten zu attestieren, wenn er in einer Zehnerserie mindestens 6 richtige Farben angeben kann.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Banause diesen Test?

b) Jemand mit einer Trefferquote von 0.6 gilt als 'begabt'. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein derart Begabter durch den Test?

c) Legen Sie die Bedingungen für das Bestehen des Tests so fest, dass beide Fehlerarten kleiner sind als 6%.

Aufgabe 2
Ein Unternehmen beauftragt eine Werbeagentur, für eines seiner Produkte eine große Fernsehwerbung durchzuführen. Sollte nach Beendigung der Werbeaktion der Bekanntheitsgrad des Produkts mehr als 40% betragen, so ist das Unternehmen bereit, über den vereinbarten Preis für die Werbeaktion hinaus einen zusätzlichen Betrag an die Werbeagentur zu zahlen.
Zur Entscheidung darüber soll eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt werden.

a) Angenommen, der Bekanntheitsgrad sei 40%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Personen das Produkt kennen?

b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit das Risiko für das Unternehmen, zu Unrecht mehr zu zahlen, höchstens 1% beträgt?

Angenommen, das Unternehmen zahlt die Prämie, wenn mindestens 55 Personen das Produkt kennen:

c) Wie groß ist dann das Risiko der Werbeagentur, den zusätzlich vereinbarten Betrag nicht zu erhalten, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nach der Werbeaktion bei 50% liegt?

Aufgabe 3
In einem Dreieckstest werden Experten geprüft. Zwei Gläser werden mit Wein der gleichen Sorte 1 gefüllt, ein weiteres Glas mit Wein einer anderen Sorte 2. Der Kandidat soll das Glas mit der Sorte 2 identifizieren. Der Kandidat gilt als Experte, wenn er in mindestens 7 von 10 Fällen richtig tippt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Banause den Test glückhaft?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein bewährter Kenner durch den Test, der in vielen Versuchen dieser Art gezeigt hat, dass er sich mit einer Trefferquote von 80% brüsten kann?

Aufgabe 4
Der Kaufpreis für eine Sendung Äpfel wird unter der Annahme vereinbart, dass 10% des Obstes unbrauchbar sind. Sollte die Qualität wider Erwarten besser sein, so ist ein gewisser Preisaufschlag zu bezahlen; ist sie schlechter, dann wird ein Preisnachlass gewährt. Die Entscheidung wird nach folgender Regel getroffen:
Sind von 50 zufällig ausgewählten Äpfeln mehr als 10 schlecht, dann erfolgt der Preisnachlass, sind weniger als 2 ungenießbar, so erfolgt ein Preisaufschlag.
Es sei $H_0 : p = 0{,}1$.

a) Wie groß ist das Risiko des Verkäufers, einen ungerechtfertigten Preisnachlass hinnehmen zu müssen?

b) Wie groß ist das Risiko des Käufers, einen ungerechtfertigten Preisaufschlag hinnehmen zu müssen?

c) Bei gleicher Stichprobenlänge sollen die beiden Risiken unter 4% gedrückt werden. Untersuchen Sie, ob es hierfür eine passende Entscheidungsvorschrift gibt.

d) Der wahre Gehalt der Sendung an unbrauchbaren Äpfeln sei 20%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim ursprünglichen Entscheidungsverfahren Preisnachlass bzw. Preisaufschlag erzielt?

Lösungen

Aufgabe 1
a) Raten: $p = 0{,}25$, er besteht den Test, wenn er mindestens 6 richtig hat:

$$\sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = 1{,}97$$

b) Begabung: $p = 0{,}6$, er besteht den Test nicht, wenn er weniger als 6 richtig hat:

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} (0{,}6)^k (0{,}4)^{10-k} = 36{,}7$$

c) falls nur 5 Richtige verlangt werden steigt die Wahrscheinlichkeit schon auf 7%. Die Bedingung für b) könnte gemildert werden:

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} (0{,}6)^k (0{,}4)^{10-k} = 16 \qquad ; \qquad \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} (0{,}6)^k (0{,}4)^{10-k} = 5{,}4$$

Eine Bedingung, die gleichzeitig für a) und b) passt, existiert nicht.

Aufgabe 2
a) $p = 40\%$; Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Personen das Produkt kennen:

$$\sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} (0{,}4)^k (0{,}6)^{100-k} = 1{,}68$$

b) Probieren

$$\sum_{k=x}^{100} \binom{100}{k} (0{,}4)^k (0{,}6)^{100-k} \leq 1$$

ergibt $x = 52$; $p = 1{,}000$ und $x = 53$; $p = 0{,}57$
c) kennen:

$$\sum_{k=0}^{54} \binom{100}{k} (0{,}5)^k (0{,}5)^{100-k} = 81{,}6$$

Aufgabe 3
a) Raten $p = \frac{1}{3}$:

$$\sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} = 1{,}97$$

b) Kenner $p = 0{,}8$: er besteht den Test nicht, wenn er weniger als 7 richtig hat

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{10}{k} (0{,}8)^k (0{,}2)^{10-k} = 12{,}1$$

Aufgabe 4

a) $p = 0{,}1$, der Verkäufer muss unter dieser Voraussetzung einen Preisnachlass gewähren, wenn mehr als 10 von 50 Äpfeln schlecht sind:

$$\sum_{k=11}^{50} \binom{50}{k} (0{,}9)^k \, (0{,}1)^{50-k} = 0{,}94$$

b) Der Käufer muss einen Preisaufschlag hinnehmen, wenn weniger als 2 Äpfel ungeniessbar sind: = 3,38 %

c) Es ist zu prüfen, ob die Wahrscheinlichkeit der Aufgaben a) und b) bei geänderten Grenzen immer noch unter 4% bleibt:

$$\sum_{k=10}^{50} \binom{50}{k} (0{,}1)^k \, (0{,}9)^{50-k} = 2{,}4 \qquad ; \qquad \sum_{k=9}^{50} \binom{50}{k} (0{,}1)^k \, (0{,}9)^{50-k} = 5{,}8$$

d.h. Preisnachlass bei 10 oder mehr schlechten. Bei b) ist keine Änderung möglich.

d) Die Apfelqualität ist wirklich schlechter: $p = 0{,}2$;

$$\text{Preisnachlass:} \qquad \sum_{k=11}^{50} \binom{50}{k} (0{,}2)^k \, (0{,}8)^{50-k} = 2{,}4$$

$$\text{Preisaufschlag:} \qquad \sum_{k=0}^{1} \binom{50}{k} (0{,}2)^k \, (0{,}8)^{50-k} = 0{,}02$$