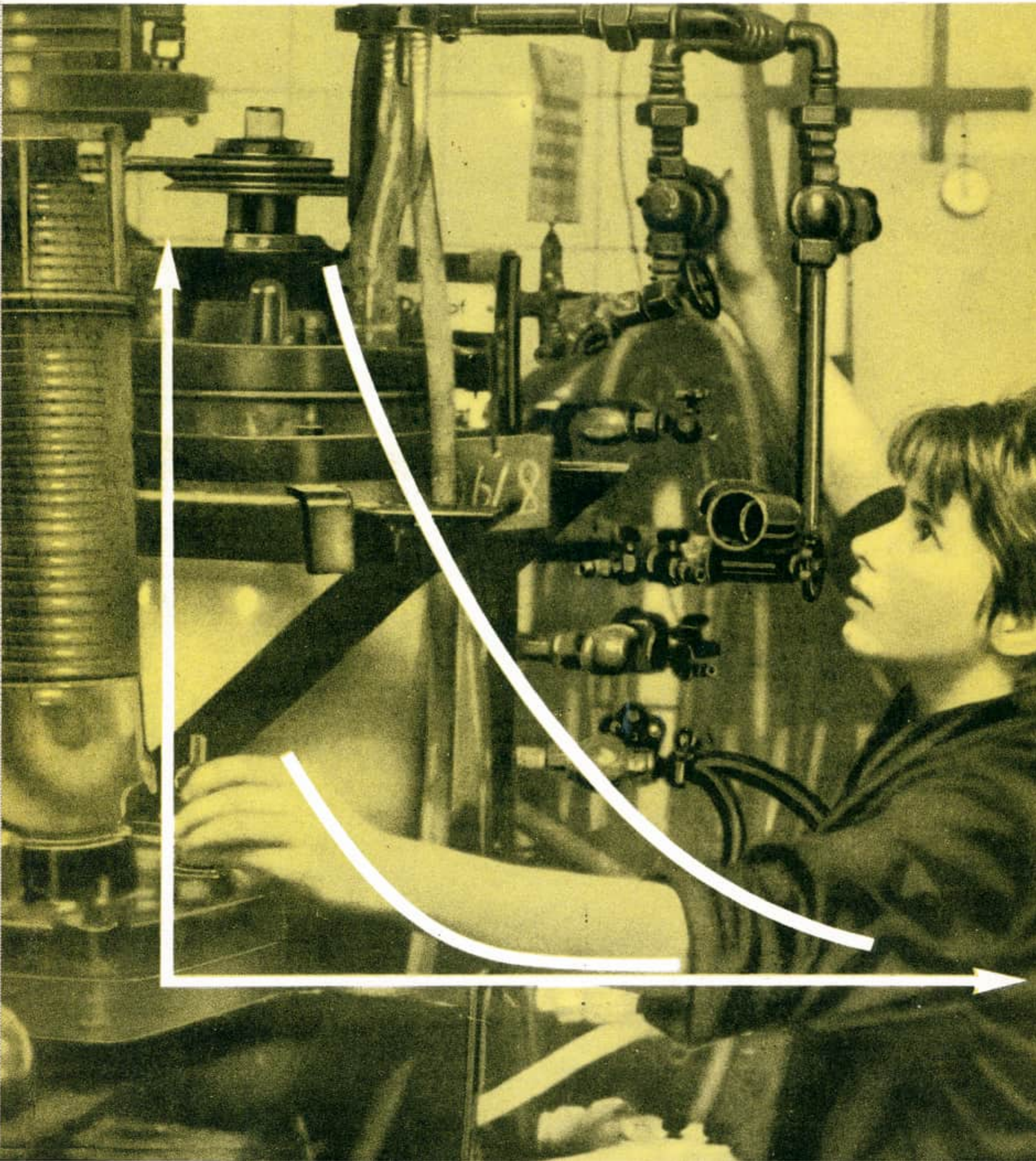
MATHEMATIK

für Berufsschulen



Mathematik für Berufsschulen

Volk und Wissen

Volkseigener Verlag Berlin

1964

Verfasser:

Teil 1: Dipl.-Math. *Werner Tietz* (unter teilweiser Verwendung eines Manuskripts von *Erich Weiß* und *Horst Koch*)

Teil 2: *Erich Weiß*

Teil 3: Dipl.-Math. *Werner Tietz* (unter teilweiser Verwendung eines Manuskripts von *Erich Weiß* und *Horst Koch*)

Teil 4: *Prof. Dr. Werner Renneberg*

Teil 5: *Hans Simon*

Teil 6: *Prof. Dr. Wolfgang Lange* (unter teilweiser Verwendung eines Manuskripts von *Erich Weiß*)

Vom Ministerium für Volksbildung der Deutschen Demokratischen Republik
als Lehrbuch für die Berufsausbildung bestätigt

Die Lehrbuchteile, die den Lehrplanthemen „Folgen und Reihen“ und „Linearoptimierung“ für die Berufsausbildung in der Fachrichtung *Wirtschaft und Verwaltung* entsprechen, sind getrennt als Ergänzungsmaterial unter dem Titel „Folgen und Reihen, Linearoptimierung, Ergänzungen zum Lehrbuch ‚Mathematik für Berufsschulen‘ für die Berufsausbildung in der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung“, Bestell-Nr. 00 1303-1, erschienen.

Redaktion: Siegmar Kubicek, Karlheinz Martin und Peter Pfeiffer
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Redaktionsschluß: 1. April 1964
ES 11 C (19 B 1) · Bestell-Nr. 00 13 01-1 · 4,00 DM · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)
Satz und Druck: B.G.Teubner, Leipzig C1, Querstr. 17 (III/18/154)

1. Funktionen

1.1. Funktionen und ihre Darstellungen

1.1.1. Der Funktionsbegriff

Um zu einer mathematisch einwandfreien Definition des Funktionsbegriffs zu kommen, gehen wir zunächst von einem Beispiel aus. Wir betrachten alle Bewohner eines FDGB-Feriendorfes und die in diesem stehenden Bungalows. Die Bewohner des Dorfes bilden eine Menge. Hier begegnen wir dem mathematischen Begriff „Menge". Wir dürfen ihn nicht mit dem Wort „Menge" der Umgangssprache verwechseln, das häufig gleichbedeutend mit „viel" benutzt wird.
Wir bezeichnen die Menge der Bewohner mit X. Ebenso fassen wir die Bungalows des Dorfes zu der Menge Y zusammen. Eine Menge im mathematischen Sinne ist durch die Angabe der einzelnen Objekte, die zu ihr gehören, d.h. durch die Angabe ihrer **Elemente**, bestimmt. Die Feriengäste bzw. die Bungalows des Dorfes sind also die Elemente der Menge X bzw. der Menge Y. Wir ordnen nun die Elemente der beiden Mengen einander zu, und zwar wollen wir jedem durch seinen Namen bezeichneten Urlauber aus der Menge X den Bungalow aus der Menge Y zuordnen, in dem er wohnt. Dabei sollen die auftretenden Ziffern die Nummern der Bungalows bedeuten (s. Abb. 1.1. a).

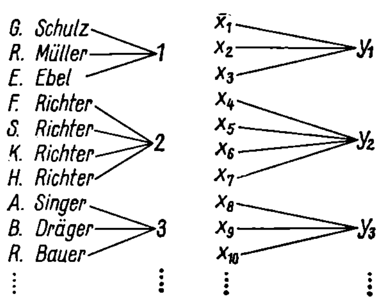


Abb. 1.1. a b

Zur besseren Übersicht wollen wir jetzt die Feriengäste, die Elemente der Menge X, mit x_1, x_2, x_3 usw. und die Bungalows als Elemente der Menge Y mit y_1, y_2, y_3 usw. bezeichnen. Wir erhalten dann die Abb. 1.1.b als Darstellung der Zuordnung. Man kann statt durch die Abbildung 1.1.b die Zuordnung auch durch eine Menge von Paaren aus je einem Urlauber und dem zugeordneten Bungalow angeben. Dabei verabreden wir, den Urlauber innerhalb eines jeden Paares stets an erster Stelle anzuführen, d.h., wir ordnen die Paare. Es ist üblich, die geordneten Paare in Klammern zu setzen. Wir erhalten so folgende Menge von geordneten Paaren:

$$(x_1; y_1);\ (x_2; y_1);\ (x_3; y_1);\ (x_4; y_2);\ (x_5; y_2);\ (x_6; y_2);\ (x_7; y_2);$$
$$(x_8; y_3);\ (x_9; y_3);\ (x_{10}; y_3);\ \ldots$$

Wir erkennen nun an dieser Zuordnung folgende wichtige Eigenschaften: Jedem Urlauber ist ein Bungalow als sein Ferienheim zugeordnet, aber es ist ihm auch nur ein Bungalow zugeordnet.

Diese Tatsache bringt man durch die Redeweise „jedem Feriengast ist eindeutig ein Bungalow zugeordnet" zum Ausdruck.
Kehrt man die Richtung der Zuordnung in dem betrachteten Beispiel um, indem man jedem Bungalow die in ihm wohnenden Urlauber zuordnet, so zeigt sich, daß diese neue Zuordnung nicht mehr eindeutig ist. Jetzt gehören nämlich zu jedem Bungalow im allgemeinen mehrere Bewohner.
Die durch die erste Zuordnungsvorschrift erzeugte Menge von geordneten Paaren heißt eine **Funktion.**
Wir wollen nun die an dem eben behandelten Beispiel erkannten Eigenschaften in allgemeiner Form zusammenfassen.

Definition
Wird jedem Element x einer Menge X eindeutig ein Element y einer Menge Y zugeordnet, so entsteht dadurch eine Menge von geordneten Paaren. Diese Menge von geordneten Paaren heißt Funktion.

Funktionen werden üblicherweise mit f, g, h, φ, ψ usw. bezeichnet. Um auszudrücken, daß das Paar $(x; y)$ zur Funktion f gehört, schreibt man auch $y = f(x)$ [bzw. $y = g(x)$ usw.]. Für das Zeichen x können alle Elemente der Menge X, denen etwas zugeordnet wird, beliebig eingesetzt werden. Man nennt x die **unabhängige Veränderliche** (Variable). Hat man nun für x ein Element eingesetzt, dann liegt das zugeordnete Element (auch der **Funktionswert** genannt) fest. Das Element, das für y eingesetzt werden darf, hängt also vom zuerst für x gewählten Element ab. Deshalb heißt y auch **abhängige Variable.**
Im Unterricht beschäftigen wir uns fast ausschließlich mit ganz speziellen Funktionen. Bei ihnen sind die Mengen X und Y nicht Mengen von irgendwelchen Objekten (im Beispiel waren es Menschen und Häuser), sondern beide sind Mengen von reellen Zahlen. Die Menge X von reellen Zahlen, denen etwas zugeordnet wird, heißt **Definitionsbereich** (DB), und die Menge Y der zugeordneten reellen Zahlen wird **Wertevorrat** (WV) genannt.

Eine Funktion kann nun auf verschiedene Arten dargestellt werden.

a) Man gibt die Zuordnungsvorschrift in Worte gekleidet an, wie es im Beispiel geschehen ist.
b) Die Funktion wird dadurch gegeben, daß man alle geordneten Paare aufschreibt, die zu ihr gehören. Das kann auch in Form einer Tabelle, bei der in der ersten Zeile oder Spalte die Elemente x und in der zweiten Zeile oder Spalte die Elemente y stehen, geschehen. Eine solche Tabelle wird **Wertetabelle** oder **Wertetafel** genannt. Diese Darstellung einer Funktion ist natürlich nur dann möglich, wenn die betrachtete Funktion aus nur endlich vielen geordneten Paaren besteht, wie das im Beispiel der Fall ist. Bei den im Unterricht behandelten Funktionen gibt eine Wertetafel nur eine Auswahl aus der gesamten Menge der geordneten Paare.
c) Faßt man die geordneten Paare einer Funktion als Koordinatenpaare bezüglich eines Koordinatensystems auf, dann kann man eine Funktion auch graphisch darstellen, indem man die zu den Paaren gehörigen Punkte in dieses Koordinaten-

system einzeichnet. Die graphische Darstellung einer Funktion heißt auch das **Bild** der Funktion.
d) Bei den meisten der in der Schule behandelten Funktionen kann man die Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung, eines analytischen Ausdrucks, darstellen. Dieser analytische Ausdruck gibt an, durch welche Rechenoperationen man zu einer vorgegebenen Zahl x des Definitionsbereiches die zugeordnete Zahl y des Wertevorrats finden kann. Bei der Angabe des analytischen Ausdrucks der Funktion muß stets der Definitionsbereich mitgenannt werden. Es genügt z.B. nicht, den analytischen Ausdruck $y = \sqrt{1 + x}$ zur Darstellung einer Funktion anzugeben; denn für $x = -5$ ist $\sqrt{1 + x}$ im Bereich der reellen Zahlen gar nicht definiert. Die vollständige Angabe muß heißen: $y = \sqrt{1 + x}$ (DB: $-1 \leqq x < \infty$). Der Definitionsbereich einer Funktion muß auch angegeben werden, um Einschränkungen einer Funktion deutlich zu machen. So sind z. B. die durch die analytischen Ausdrücke $y = x^2$ (DB: $-\infty < x < +\infty$) und $y = x^2$ (DB: $-1 \leqq x \leqq 2$) gegebenen Funktionen voneinander verschieden, denn die zweite Funktion enthält weniger geordnete Paare als die erste. So gehört z.B. das geordnete Paar $(-5; 25)$ zur ersten Funktion, aber nicht zur zweiten. Unterbleibt die Angabe des Definitionsbereichs, so nimmt man stillschweigend an, daß der Definitionsbereich aus allen den reellen Zahlen besteht, für die $\sqrt{1 + x}$ definiert ist.
Ein weiteres Beispiel für einen analytischen Ausdruck einer Funktion ist $y = x^2$ $(-\infty < x < +\infty)$. Er besagt, daß man den der Zahl x zugeordneten Wert y dadurch erhält, indem man x quadriert.
Die Schreibweise $y = f(x)$ bedeutet, daß y der zu x gehörige Funktionswert ist, der durch irgendeine Zuordnungsvorschrift geliefert wird. Mit $y = f(x)$ wird also nicht die gesamte Funktion bezeichnet, sondern nur der zu x gehörige Funktionswert. Dennoch sagt man der Kürze wegen häufig: die Funktion $y = f(x)$.

1.1.2. Graphische Darstellung von empirisch gefundenen Funktionen

Funktionen, deren Wertetafeln aus statistischen Angaben oder durch Beobachtungen gewonnen werden, also nicht nach analytischen Ausdrücken berechnet werden können, nennt man *empirisch gefundene Funktionen*. Das graphische Darstellen in einem Koordinatensystem ergibt eine Folge voneinander getrennt liegender Punkte. Die Punktfolge kann nur durch Bereitstellen weiterer Wertepaare verdichtet werden. Als Beispiel einer empirisch gefundenen Funktion sind die in Leipzig an einem Apriltage beobachteten Temperaturen durch die folgende Wertetafel angegeben.

Uhrzeit:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	Uhr
Lufttemperatur:	7,6	6,0	5,6	7,4	10,0	12,4	13,8	14,2	14,0	12,4	10,2	9,6	9,2	°C

Bei der graphischen Darstellung (Abb. 1.2.) sind nur die Überschüsse über 5 °C durch Strecken entsprechender Länge dargestellt, die auf einer waagerechten Geraden

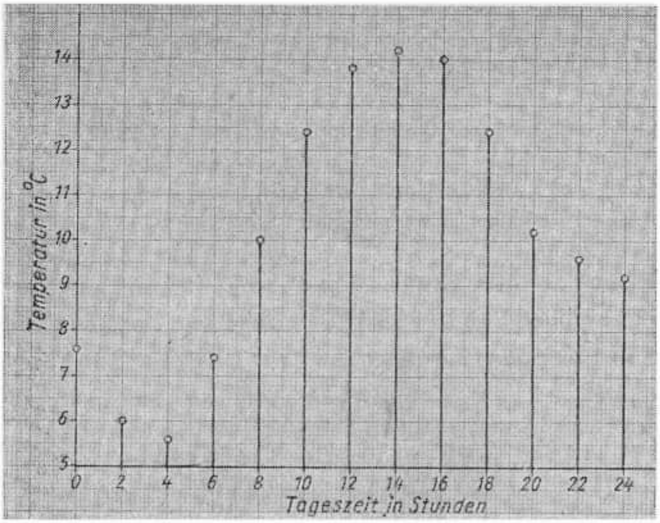


Abb. 1.2.

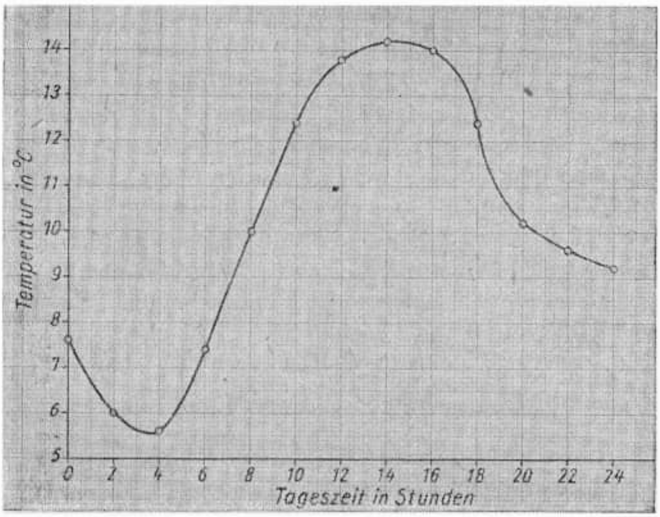


Abb. 1.3.

senkrecht stehen. Die Endpunkte der Strecken bilden ein *Punktdiagramm* der empirischen Funktion, das das Ansteigen und Sinken der Lufttemperatur an diesem Tage deutlich macht. Das Diagramm gibt den Zusammenhang zwischen Tageszeit und Lufttemperatur nur unvollkommen wieder. Die Temperaturen wurden in Abständen von zwei Stunden abgelesen. Die in der Tabelle angegebenen Temperaturen ändern sich deshalb sprungweise, sie verändern sich aber in Wirklichkeit allmählich. Dieses Verhalten deutet die in Abbildung 1.3. skizzierte Kurve an, die durch die Diagrammpunkte gelegt ist. [Punktdiagramme kann man nicht immer in ein Kurvendiagramm umwandeln (z. B. Diagramme, durch die die Produktion verschiedener Jahre miteinander verglichen wird).] Das Verbinden von derartigen Punkten ist

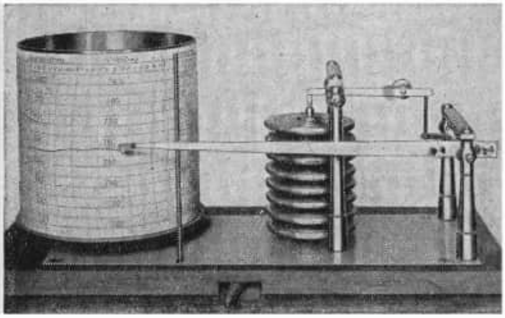


Abb. 1.4. Der Barograph zeichnet Schwankungen des Luftdrucks auf einer durch ein Uhrwerk bewegten Trommel auf

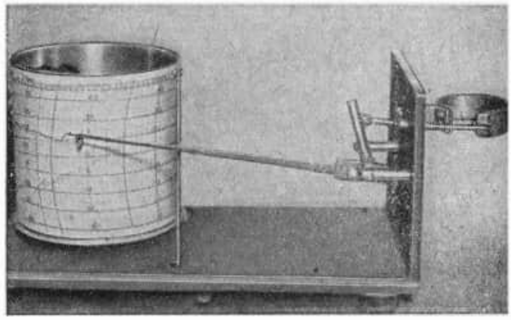


Abb. 1.5. Der Thermograph zeichnet Schwankungen der Lufttemperatur auf einer durch ein Uhrwerk bewegten Trommel auf

aber problematisch, weil es ja durchaus sein kann, daß die Kurve zwischen zwei zu verbindenden Punkten ein ganz anderes Verhalten zeigt, als es eigentlich der Funktion entspricht. Das bedeutet, daß ein neu ermittelter Punkt dann möglicherweise nicht auf dem gezeichneten Diagramm liegt.
Welche Werte die Temperatur zwischen zwei Beobachtungen wirklich hatte, läßt die Kurve nur vermuten. Da auch durch eine dichtere Beobachtungsfolge die lückenlose Erfassung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Tageszeit nicht erreicht wird, wurden Geräte konstruiert, die derartige Zusammenhänge laufend erfassen. So registriert der *Barograph* (Abb. 1.4.) die Veränderung des Luftdrucks, der *Thermograph* die der Temperatur in Abhängigkeit von der Tageszeit (Abb. 1.5.). Durch Diagramme selbstregistrierender Apparate können auch Vorgänge erfaßt werden, deren rascher Ablauf eine unmittelbare Beobachtung unmöglich macht.

Aufgaben

1. Zur Beobachtung eines Krankheitsverlaufs wurden an sieben aufeinander folgenden Tagen jedesmal früh 6 Uhr und abends 18 Uhr die folgenden Körpertemperaturen gemessen.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7. Tag
6 h:	37,3	38,6	38,2	38,4	39,7	38,8	37,4 °C
18 h:	38,9	39,0	38,9	40,1	40,0	38,0	37,2 °C

a) Die Körpertemperatur ist in Abhängigkeit von der Uhrzeit graphisch darzustellen.
b) Geben Sie Definitionsbereich und Wertevorrat an!

2. Die folgenden Luftdruckwerte wurden vom Barographen eines Flugzeugs registriert.

Höhe h in km:	0	2	4	6	8	10
Luftdruck b in Torr:	760	598	470	370	291	229

Die Luftdruckwerte b sind in Abhängigkeit von der Höhe graphisch darzustellen.

3. Letternmetall für Handsatz enthält 28 % Antimon, 67 % Blei und 5 % Zinn, für Maschinensatz (Linotype) 12 % Antimon, 83 % Blei und 5 % Zinn, für Maschinensatz (Monotype) 19 % Antimon, 72 % Blei und 9 % Zinn. Die Bestandteile sind für jede Sorte durch Sektoren eines Kreises (100 % = 360 Grad) zu veranschaulichen (*Kreisdiagramm*). (L)

4. Die jährliche Kalisalzgewinnung der DDR betrug in 1000 t:

1945:	176;	1949:	1170;	1953:	1378;	1957:	1604;
1946:	685;	1950:	1336;	1954:	1463;	1958:	1650;
1947:	737;	1951:	1409;	1955:	1552;	1959:	1644;
1948:	950;	1952:	1346;	1956:	1556;	1960:	1666.

Die Steigerung ist durch nebeneinander gezeichnete gleich breite Rechtecke entsprechender Höhe zu veranschaulichen (*Säulendiagramm*).

5. Die Elektroenergieerzeugung der DDR betrug in den Jahren

1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
21,5	23,2	24,2	26,0	28,7	31,2	32,7	34,9	37,2	40,3

Milliarden kWh.

Ein Diagramm der Steigerung ist zu zeichnen.

6. Setzt man die Produktion von Betonfertigteilen für die Großblockbauweise der DDR für 1950 mit 100% an, so ergab sie für

1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
142%	207%	259%	383%	513%	954%	1300%	1568%.

Es ist ein Diagramm anzufertigen.

7. Auf einer Wetterstation wurden die folgenden Monats-Durchschnittstemperaturen festgestellt.

Jan. :	8 °C	April:	16 °C	Juli :	28 °C	Okt. :	18 °C
Febr.:	10 °C	Mai :	20 °C	Aug.:	27 °C	Nov.:	12 °C
März :	12 °C	Juni :	25 °C	Sept.:	24 °C	Dez. :	10 °C

Die Durchschnittstemperaturen sind durch ein Diagramm zu veranschaulichen.

8. Die Braunkohle ist ein wichtiger Grundstoff für viele Industriezweige. Die Braunkohlenförderung der DDR steht in der Welt an erster Stelle. Sie betrug in den Jahren

1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
137,0	151,2	158,5	172,7	181,9	200,6	206,9	212,6	215,0	214,8	Mill. t.

a) Zum Vergleich der Förderleistungen ist ein Säulendiagramm anzufertigen.

b) Die jährliche prozentuale Erhöhung der Förderung ist zu berechnen. Die Ergebnisse sind graphisch darzustellen.

9. Die Erleichterung der Arbeit bei der Getreideernte durch die Entwicklung neuer Erntemaschinen zeigt die folgende Zusammenstellung.
Mit einer Sense können zwei Personen in einer Stunde 6 a mähen und binden.
Mit einem Ableger und zwei Pferden können zwei Personen in einer Stunde 32 a mähen und binden.
Mit einem Mähbinder und einem Traktor können zwei Personen in einer Stunde 45 a mähen und binden.
Mit einem Zapfenwellenbinder können zwei Personen in einer Stunde 50 a mähen und binden.
Wieviel Prozent beträgt die Steigerung der Arbeitsproduktivität von Maschine zu Maschine? (L)

10. Von den in der DDR produzierten Revolverdrehmaschinen wird jährlich eine bestimmte Anzahl exportiert. Im Durchschnitt wurden monatlich hergestellt:

1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
23	19	30	44	49	47	50	46	47 Stück,

exportiert wurden jährlich

126	103	167	58	153	123	134	154	192 Stück.

In einem Diagramm soll gezeigt werden, wieviel der hergestellten Revolverdrehmaschinen jährlich für die Industrie der DDR zur Verfügung gestellt wurden.

1.2. Ganze rationale Funktionen ersten, zweiten und dritten Grades

1.2.1. Die konstanten Funktionen

Wir geben ein weiteres Beispiel für eine Funktion: Allen reellen Zahlen soll als Funktionswert jeweils die Zahl 3 zugeordnet werden. Der Definitionsbereich dieser Funktion umfaßt also alle reellen Zahlen x mit $-\infty < x < +\infty$. Der Wertevorrat enthält nur die eine einzige Zahl 3. Die Funktion selbst besteht aus allen geordneten Paaren $(x; 3)$, in denen x irgendeine reelle Zahl bedeutet. Diese Paare lassen sich hier natürlich nicht angeben, da es unendlich viele sind. Man kann die betrachtete Funktion aber außer durch die oben angegebene wörtliche Zuordnungsvorschrift noch auf zwei andere Arten darstellen, und zwar durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = 3$ und durch das Bild der Funktion. Dieses Bild stellt im kartesischen Koordinatensystem eine Parallele zur x-Achse dar, die durch den Punkt $(0; 3)$ auf der y-Achse geht. Funktionen, die durch eine Gleichung der Form $y = c$ (c konstant) beschrieben werden, nennt man **konstante** Funktionen. Ihre Bilder im kartesischen Koordinatensystem sind Parallelen zur x-Achse im Abstand c. Dabei verlaufen die Parallelen im I. und II. Quadranten, falls $c > 0$, und im III. und IV. Quadranten, falls $c < 0$ gilt. Ist $c = 0$, so ist die x-Achse Bild der Funktion.

1.2.2. Die identische Funktion

Ordnet man jede reelle Zahl x sich selbst zu, so bekommt man eine Funktion, die aus allen Paaren $(x; x)$ besteht, wobei für x alle reellen Zahlen mit $-\infty < x < +\infty$ eingesetzt werden dürfen. Auch bei dieser Funktion kann man nicht alle unendlich vielen Paare angeben. Ihr analytischer Ausdruck heißt $y = x$. Die graphische Darstellung dieser Funktion ist eine Gerade, die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten.
Die durch den analytischen Ausdruck $y = x$ gegebene Funktion heißt die **identische** Funktion oder **Identitätsfunktion.**

1.2.3. Die ganzen rationalen Funktionen

Definition:

Die ganzen rationalen Funktionen sind diejenigen Funktionen, die sich aus den konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion durch Addition, Multiplikation oder Subtraktion zusammensetzen lassen.

Die in der Definition erwähnten Rechenoperationen mit Funktionen sollen so ausgeführt werden, daß man die jeweils zu einem Wert von x gehörenden Funktionswerte addiert, multipliziert oder subtrahiert. Die Division ist in der Definition ausdrücklich ausgeschlossen. Folgende Beispiele sollen die Definition veranschaulichen.

Beispiel 1:

Konstante Funktion:	$f_1(x) = -7$
Identische Funktion:	$f_2(x) = x$
Multiplikation von $f_2(x)$ mit sich selbst:	$f_3(x) = x^2$
Multiplikation von $f_3(x)$ mit $f_2(x)$:	$f_4(x) = x^3$
Wiederholte Addition von $f_4(x)$:	$f_5(x) = 4x^3$
Wiederholte Addition von $f_3(x)$:	$f_6(x) = 3x^2$
Subtraktion der Funktion $f_6(x)$ von $f_5(x)$:	$f_7(x) = 4x^3 - 3x^2$
Wiederholte Addition von $f_2(x)$:	$f_8(x) = 5x$
Addition von $f_7(x)$ und $f_8(x)$:	$f_9(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x$
Addition von $f_9(x)$ und $f_1(x)$:	$\underline{f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 7}$

Beispiel 2:

Konstante Funktion:	$f_1(x) = 8$
Identische Funktion:	$f_2(x) = x$
Wiederholte Multiplikation von $f_2(x)$:	$f_3(x) = x^6$
Wiederholte Multiplikation von $f_2(x)$:	$f_4(x) = x^3$
Wiederholte Addition von $f_4(x)$:	$f_5(x) = 7x^3$
Addition von $f_3(x)$ und $f_5(x)$:	$f_6(x) = x^6 + 7x^3$
Addition von $f_1(x)$ und $f_6(x)$:	$\underline{f(x) = x^6 + 7x^3 + 8}$

Der Exponent der vorkommenden höchsten Potenz der Veränderlichen x heißt der Grad der ganzen rationalen Funktion. So ist im Beispiel 1 eine ganze rationale Funktion dritten Grades und im Beispiel 2 eine solche sechsten Grades entstanden. Die gewonnenen Erkenntnisse kann man allgemein in folgender Erklärung zusammenfassen:

Die Werte einer ganzen rationalen Funktion lassen sich durch die Gleichung

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

darstellen. Dabei bezeichnet n eine natürliche Zahl und heißt der Grad der ganzen rationalen Funktion. Die Buchstaben $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ bezeichnen konstante Koeffizienten. Diese können beliebige Zahlen sein. So gilt im ersten Beispiel: $a_3 = 4$; $a_2 = -3$; $a_1 = 5$; $a_0 = -7$. Im zweiten Beispiel ist $a_6 = 1$; $a_5 = 0$; $a_4 = 0$; $a_3 = 7$; $a_2 = 0$; $a_1 = 0$; $a_0 = 8$.

Auch die Funktion $y = \frac{3}{4}x^4 + 0{,}6x^3 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist eine ganze rationale Funktion mit $a_4 = \frac{3}{4}$; $a_3 = 0{,}6$; $a_2 = 0$; $a_1 = \sqrt{2}$; $a_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

1.2.4. Spezielle ganze rationale Funktionen

a) Lineare Funktionen

Setzt man in dem allgemeinen analytischen Ausdruck einer ganzen rationalen Funktion $n = 1$, so erhält man eine ganze rationale Funktion ersten Grades mit der Gleichung $y = a_1 x + a_0$. Es ist üblich, in diesem Fall die Koeffizienten a_1 und a_0 in m und n [1]) umzubenennen, so daß der analytische Ausdruck die Form $y = mx + n$ annimmt. Die graphische Darstellung der durch diesen Ausdruck dargestellten Funktion ergibt im kartesischen Koordinatensystem eine Gerade. Daher nennt man die ganzen rationalen Funktionen ersten Grades auch **lineare** Funktionen.

Die Lage des Funktionsbildes im Koordinatenkreuz richtet sich nach den Werten von m und n. Später wird gezeigt, daß m den Neigungswinkel der Geraden gegen die x-Achse und n den Abschnitt bestimmt, den die Gerade auf der y-Achse abschneidet.

Die lineare Funktion, deren analytischer Ausdruck

$$y = \tfrac{2}{3}x - 4$$

ist, enthält z. B. die Zahlenpaare $(-3; -6)$, $(0; -4)$, $(3; -2)$, $(6; 0)$, $(9; 2)$, die man als Koordinaten von Punkten der Geraden deuten kann. Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, genügen zwei dieser Zahlenpaare zum Zeichnen des Funktionsbildes. Die Gerade verläuft vom Punkt $P\ (0; -4)$ zum Punkt $Q\ (6; 0)$ (Abb. 1.6.). Ist der analytische Ausdruck einer Funktion nach der abhängigen Variablen aufgelöst, wie das bei $y = mx + n$ der Fall ist, so spricht man von der *expliziten* Form. In allen anderen Fällen spricht man von *impliziter* Form. In *impliziter* Form würde die oben durch $y = \frac{2}{3}x - 4$ angegebene Funktion z. B. durch $2x - 3y - 12 = 0$ angegeben.

Die explizite Form ist für die Berechnung der Wertetafel vorzuziehen.

Als *Nullstellen* einer Funktion bezeichnet man Werte von x, für die sich als Funktionswert $y = 0$ ergibt. An diesen Stellen liegen die Schnittpunkte des Funktionsbildes mit der x-Achse.

Die Funktion $y = mx$ ergibt für $x = 0$ auch $y = 0$, d. h., die entsprechende Gerade geht durch den Nullpunkt des Koordinatenkreuzes.

$y = n$ stellt die Parallele zur x-Achse dar, die die y-Achse bei n schneidet.

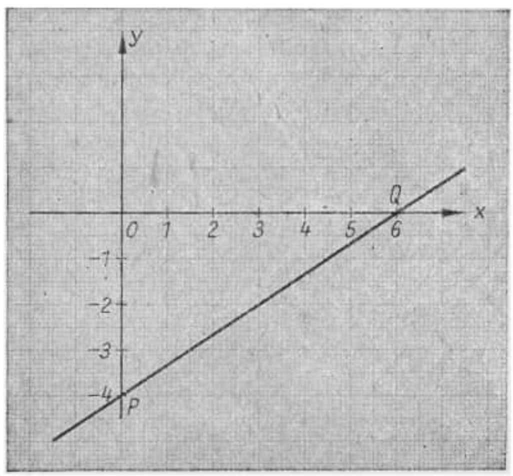


Abb. 1.6.

[1]) Der Buchstabe n darf hier nicht mit dem vorher ebenso bezeichneten Grad einer ganzen rationalen Funktion verwechselt werden.

Aufgaben

1. Das zu den folgenden analytischen Ausdrücken gehörende Funktionsbild ist zu zeichnen.

   a) $y = x + 2$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = \frac{2}{3}x + 1$ d) $y = -x + 3$

2. Die folgenden in impliziter Form gegebenen analytischen Ausdrücke sind in expliziter Form zu schreiben. Dabei sei I. y abhängige Variable, II. x abhängige Variable.

   a) $x + y - 23 = 0$ b) $x - y = 5$ c) $2x + 3y = 45$
   d) $7x - 9y = 11$ e) $6x - 7y - 43 = 0$ f) $12x = 9 - 11y$ (L)

3. Die Geschwindigkeit, die ein frei fallender Körper nach der Fallzeit t erreicht, wird nach der Formel $v = g \cdot t$ berechnet ($g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). v ist in Abhängigkeit von t graphisch darzustellen. Aus dem Bild ist zu entnehmen, wie groß v für $t = 2\frac{1}{2}\,s$ und t für $v = 30 \text{ ms}^{-1}$ ist.

4. Auf Grund der Beziehung $360^\circ = 400^g$ ist ein Diagramm zu zeichnen, das zur Umrechnung von Altgrad in Neugrad dient. (L)

5. Auf Grund der Beziehung 1 PS = 0,736 kW ist ein Diagramm zu zeichnen, das zur Umrechnung von PS in kW dient.

b) Quadratische Funktionen

Wir wollen jetzt ganze rationale Funktionen zweiten Grades betrachten. Die allgemeine Form ihrer analytischen Ausdrücke ist ($n = 2$):

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0).$$

Man schreibt statt dessen auch: $y = ax^2 + bx + c$. Dabei sind $a \neq 0$, b und c konstant. Ganze rationale Funktionen zweiten Grades heißen auch quadratische Funktionen.

Beispiel 3:

Der Weg s (in cm), der mit der konstanten Beschleunigung b (in $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$) in der Zeit t (in s) zurückgelegt wird, kann nach der Formel

$$s = \tfrac{1}{2}\,b\,t^2$$

berechnet werden.
Der analytische Ausdruck für die Abhängigkeit der Weglänge s von der zur Zurücklegung des Weges benötigten Zeit t enthält keine höhere als die zweite Potenz der unabhängigen Variablen t.

t (in s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s (in cm)	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9	6,4	8,1

Es ergibt sich als Bild der Funktion mit dem analytischen Ausdruck $s = 0{,}1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}t^2$ eine gekrümmte Linie (Abb. 1.7.).

Beispiel 4:

Der analytische Ausdruck $y = ax^2 + bx + c$ geht für $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$ in die Form $y = x^2$ über. Man erhält für den Bereich $-3 \leqq x \leqq +3$ z.B. die Wertetafel

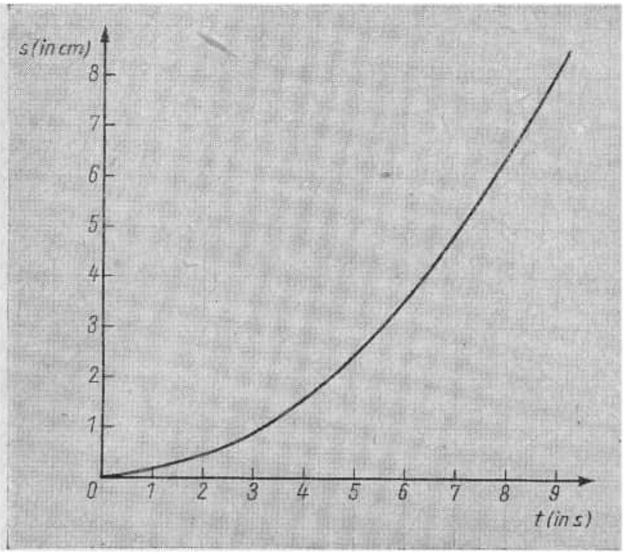


Abb. 1.7.

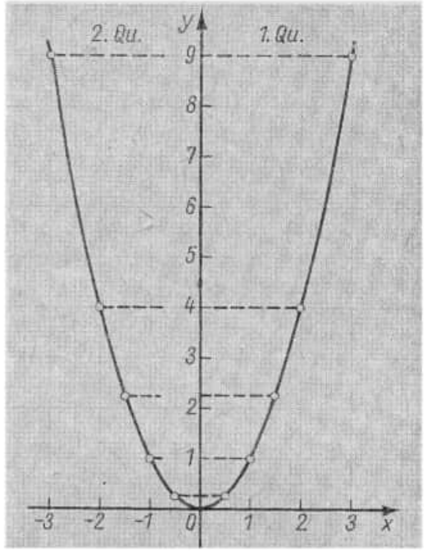


Abb. 1.8.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$+0{,}5$	$+1$	$+1{,}5$	$+2$	$+2{,}5$	$+3$
y	$+9$	$+6{,}25$	$+4$	$+2{,}25$	$+1$	$+0{,}25$	0	$+0{,}25$	$+1$	$+2{,}25$	$+4$	$+6{,}25$	$+9$

und damit die in Abbildung 1.8. gezeigte graphische Darstellung, eine sogenannte *Normal-* oder *Einheitsparabel.* Die sich nach dem positiven Teil der Ordinatenachse öffnende Kurve verläuft im ersten und zweiten Quadranten und hat die Ordinatenachse als *Symmetrieachse.* Die Parabel *berührt* die Abszissenachse im Nullpunkt des Koordinatensystems. Der Nullpunkt bildet den *Scheitel* dieser Parabel. Als Ordinaten der Punkte einer sorgfältig gezeichneten Normalparabel erhält man annähernd die Quadratzahlen zu den Abszissenwerten.

Für $a = 1$, $b \neq 0$ und $c \neq 0$ erhält man als graphische Darstellungen der Funktionen Parabeln, die sich von der Parabel der Abbildung 1.8. nur durch ihre Lage im Koordinatensystem unterscheiden. Sie sind nämlich gegenüber letzterer parallel zu den Koordinatenachsen verschoben.

■ **Beispiel 5:**

$y = x^2 - 4x + 3$ (Abb. 1.9.)

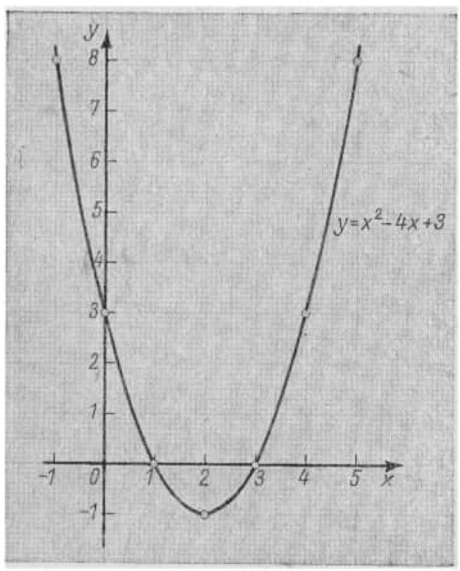


Abb. 1.9.

Bei den bisher betrachteten quadratischen Funktionen hat der Koeffizient des quadratischen Gliedes a den Wert $+1$. Die Diagramme sind jedesmal Normalparabeln, die sich nach der Seite der positiven y-Achse öffnen.

Man erkennt, daß sie sich für $a = -1$ nach der negativen Richtung der y-Achse öffnen. Zum Beispiel ergibt sich für $y = -x^2$ als Wertetafel

x	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

und als graphische Darstellung eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel (Abb. 1.10.).

Ist der Koeffizient des quadratischen Gliedes $a = \pm 1$, so wird durch das Verwenden einer Schablone der Normalparabel das Aufstellen der Wertetafel überflüssig.

Durch den analytischen Ausdruck $y = f(x) = = ax^2 + bx + c$ wird eine Parabel dargestellt, deren Symmetrieachse zur Ordinatenachse parallel verläuft. Die Parabel öffnet sich für positive Werte von a nach der positiven Seite, für negative nach der negativen Seite der Ordinatenachse. Der Parabelscheitel hat die Abszisse $-\frac{b}{2a}$, die Ordinate $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Man erhält diese Koordinaten, wenn man den analytischen Ausdruck auf die Form $\bar{y} = g(x) = (x + d)^2 + e$ bringt. Es gilt dann: $-d = -\frac{b}{2a}$ und $e = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

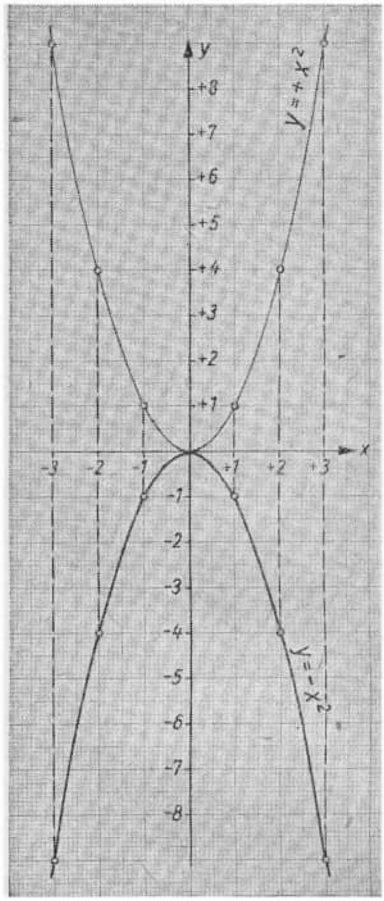


Abb. 1.10.

Aufgaben

1. Aus dem Bild der Funktion $y = x^2$ sind näherungsweise die folgenden Werte zu entnehmen.

a) $0{,}75^2$; $1{,}35^2$; $1{,}85^2$; $2{,}15^2$; $2{,}65^2$

b) $\sqrt{0{,}62}$; $\sqrt{1{,}2}$; $\sqrt{1{,}75}$; $\sqrt{2{,}3}$; $\sqrt{2{,}8}$

2. In ein Koordinatensystem sind die Bilder der folgenden Funktionen zu zeichnen.

$y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$; $y = -x^2$; $y = -2x^2$

3. Die folgenden Funktionen sind graphisch darzustellen.

a) $y = x^2 + 2$ **b)** $y = x^2 - 2$ **c)** $y = x^2 - 2$ **d)** $y = -x^2 - 2$

e) $y = 2x^2 + 3$ **f)** $y = -2x^2 + 3$ **g)** $y = 3x^2 - 2$ **h)** $y = -3x^2 - 2$

4. Für die Bilder der folgenden Funktionen sind die Scheitelkoordinaten zu ermitteln und die Lagen der Symmetrieachse anzugeben.

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = -(x - 5)^2$ **c)** $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ **d)** $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$

e) $y = (x + 2{,}5)^2 - 3$ **f)** $y = -(x + 2{,}5)^2 - 3$

g) $y = \frac{1}{3}(x - 3{,}6)^2 + 4$ **h)** $y = -\frac{1}{3}(x - 3{,}6)^2 + 4$ (L)

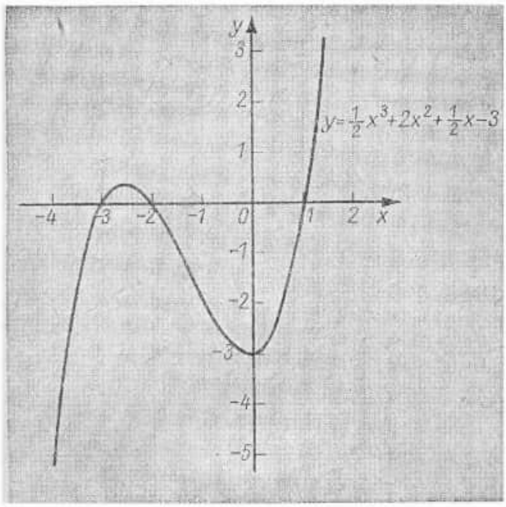


Abb. 1.11.

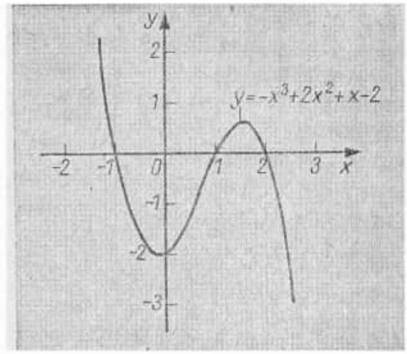
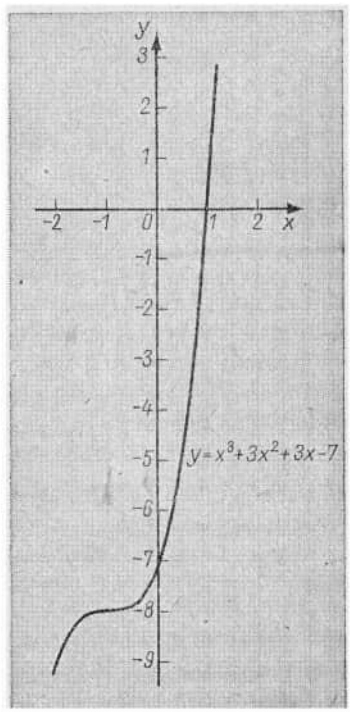


Abb. 1.12.

Abb. 1.13.



1.2.5. Ganze rationale Funktionen dritten Grades

Die analytischen Ausdrücke der ganzen rationalen Funktionen dritten Grades ($n = 3$) haben die folgende allgemeine Form:

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_3 \neq 0).$$

Die Abbildungen 1.11., 1.12. und 1.13. zeigen die graphischen Darstellungen von ganzen rationalen Funktionen dritten Grades, die für deren Verlauf typisch sind.

1.2.6. Nullstellen ganzer rationaler Funktionen

Will man sich einen Überblick über den Verlauf einer Kurve, die das Bild einer Funktion darstellt, im Koordinatensystem verschaffen, so ist es vorteilhaft, die Lage

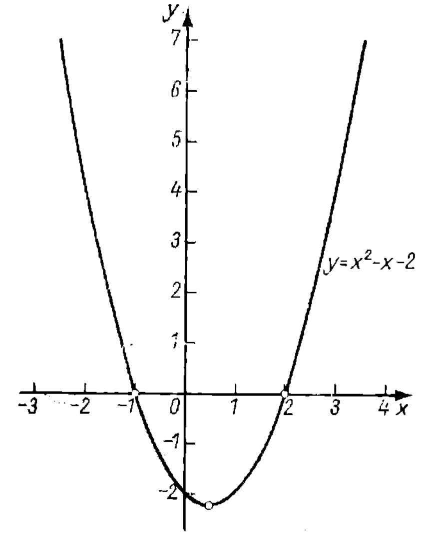
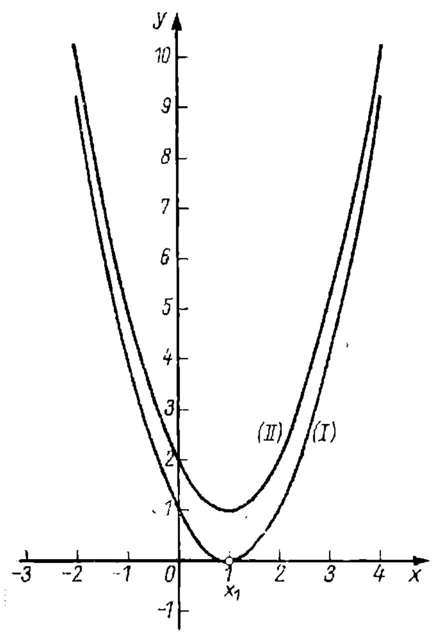


Abb. 1.14.

Abb. 1.15.



gewisser zur Kurve gehörenden Punkte mit speziellen Eigenschaften zu ermitteln. Zu diesen speziellen Punkten zählen unter anderem auch etwa vorhandene Schnittpunkte der Kurve mit der Abszissenachse. Charakteristisch für diese Punkte ist, daß ihre Ordinaten, d.h. die Funktionswerte der durch das betreffende Bild dargestellten Funktion, gleich Null sind. Die Werte von x, denen bei der betrachteten Funktion der Funktionswert $y = 0$ zugeordnet wird, nannten wir in 1.2.4. die Nullstellen der Funktion. Aus den Kenntnissen, die wir über den Verlauf der Bilder von linearen Funktionen haben, können wir entnehmen, daß diese Funktionen mit Ausnahme der konstanten Funktion genau eine Nullstelle haben.

Untersuchen wir nun die durch die Gleichung $y = x^2 - x - 2$ (Abb. 1.14.) gegebene Funktion auf Nullstellen. Wir haben dazu alle Werte von x, denen durch die angegebene Gleichung der Wert $y = 0$ zugeordnet wird, zu ermitteln. Das bedeutet, daß wir alle geordneten Paare von der Form $(x; 0)$ finden müssen. Nach den Regeln, die im Abschnitt „Quadratische Gleichungen" wiederholt werden, finden wir die beiden Paare $(-1; 0)$ und $(2; 0)$. Es müßte nun noch bewiesen werden, daß dies auch alle Paare der Form $(x; 0)$ sind. Diesen Beweis wollen wir jedoch nicht führen.

Die betrachtete Funktion hat also zwei Nullstellen, nämlich $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Das im vorigen Beispiel gefundene Ergebnis bedeutet nun aber nicht, daß alle ganzen rationalen Funktionen zweiten Grades im Bereich der reellen Zahlen zwei Nullstellen haben müssen.

Die durch die beiden folgenden analytischen Ausdrücke gegebenen Funktionen sind Beispiele dafür:

$$\text{(I)}\quad y = x^2 - 2x + 1;$$
$$\text{(II)}\quad y = x^2 - 2x + 2.$$

Die erste Funktion besitzt nur die eine Nullstelle $x_1 = 1$, und die zweite hat in ihrem Definitionsbereich, dem Bereich der reellen Zahlen, überhaupt keine Nullstelle (s. Abb. 1.15.).

Zusammenfassend können wir feststellen, daß eine ganze rationale Funktion zweiten Grades im Bereich der reellen Zahlen höchstens zwei verschiedene Nullstellen hat. Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern zu dem

Satz:

Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat im Bereich der reellen Zahlen höchstens n verschiedene Nullstellen.

Auch diesen Satz können wir hier nicht beweisen.

1.2.7. Extremwerte und Wendepunkte ganzer rationaler Funktionen

In der Abbildung 1.16. ist das Bild der ganzen rationalen Funktion dritten Grades mit dem analytischen Ausdruck $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 6$ dargestellt. Sie hat drei Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$. Außer diesen Nullstellen gibt es aber noch weitere Punkte des Funktionsbildes, die besondere Eigenschaften aufweisen, so z. B. die Punkte H und T. Der Punkt H liegt nämlich in bezug auf seine Umgebung am höchsten. Damit ist aber nicht gesagt, daß H der höchste Punkt des Funktionsbildes überhaupt sein muß; denn außerhalb einer Umgebung von H kann es Punkte geben, die höher als H liegen, z. B. den Punkt P_4. Ganz entsprechend liegt der Punkt T in bezug auf seine Umgebung am tiefsten. Der Punkt T ist jedoch nicht der tiefste Punkt überhaupt. Der Punkt P_5 liegt z. B. tiefer als T.

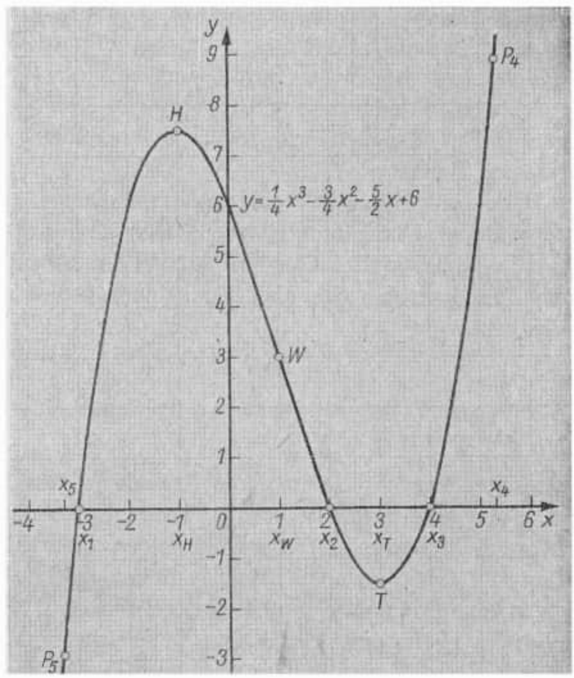


Abb. 1.16.

Definition:

Ein Funktionswert einer gegebenen Funktion, der innerhalb einer passend gewählten Umgebung der größte ist, heißt ein (relatives) Maximum der Funktion. Ein Funktionswert einer gegebenen Funktion, der innerhalb einer passend gewählten Umgebung der kleinste ist, heißt ein (relatives) Minimum der Funktion. Maxima und Minima heißen Extremwerte.

Der Zusatz „relativ“ in der Definition soll andeuten, daß sich die Eigenschaft, größter oder kleinster Funktionswert zu sein, nur auf eine gewisse Umgebung bezieht.
Die in Abbildung 1.16. dargestellte Funktion dritten Grades hat also zwei Extrema, ein Maximum an der Stelle $x_H = -1$ und ein Minimum an der Stelle $x_T = 3$.
Es gibt jedoch ganze rationale Funktionen, die weder Maxima noch Minima besitzen. Ein Beispiel für derartige Funktionen ist die mit dem analytischen Ausdruck $y = x^3 + 1$. Ihre graphische Darstellung ist in Abbildung 1.17. wiedergegeben. Die Abbildung läßt erkennen, daß es im gesamten Kurvenverlauf keinen Punkt gibt, der in bezug auf irgendeine Umgebung der höchste oder tiefste Punkt wäre. Betrachtet man nämlich einen beliebigen Punkt der Kurve, so findet man in jeder seiner Umgebungen links einen tiefer gelegenen und rechts einen höher gelegenen Punkt.
Mit Hilfe der Differentialrechnung, die in diesem Buch jedoch nicht behandelt wird, läßt sich nun ein Satz beweisen, der über die Anzahl der Extrema bei ganzen rationalen Funktionen Auskunft gibt:

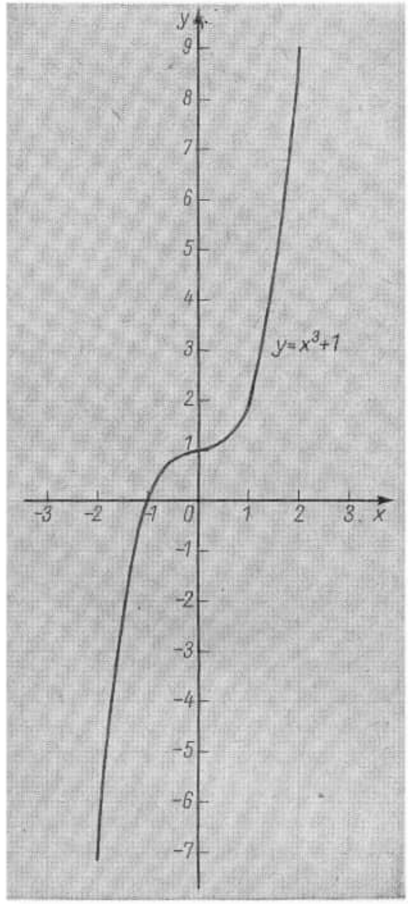


Abb. 1.17.

▶ **Satz:**
Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat höchstens $n - 1$ Extrema.

Betrachten wir noch einmal die Abbildung 1.16., so sehen wir, daß die Kurve in ihrem Verlauf Abschnitte besitzt, in denen sie unterschiedlich gekrümmt ist. Durchläuft man die Kurve im Sinne wachsender x-Werte, so stellt man fest, daß ihre Krümmung in Richtung der positiven y-Achse gesehen zunächst konkav ist. Das ändert sich in dem Augenblick, in dem man den Punkt W durchläuft. Von diesem Punkt an ist die Krümmung der Kurve in der gleichen Richtung gesehen konvex. Beim weiteren Durchlaufen ändert sich dann die Art der Krümmung nicht mehr.

▶ **Definition:**
Punkte, in denen sich der Krümmungssinn einer Funktionskurve ändert, heißen W e n d e p u n k t e der Funktionskurve.

Die in der Abbildung 1.16. dargestellte Funktionskurve hat also einen Wendepunkt bei (1; 3). Allgemein gilt folgender Satz:

Satz:
Jede ganze rationale Funktion n-ten Grades hat höchstens $n - 2$ Wendepunkte.

Die Untersuchung der graphischen Darstellung einer Funktion auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte nennt man Kurvendiskussion. Die Kenntnis derartiger besonderer Punkte erleichtert wesentlich das Zeichnen der graphischen Darstellung einer Funktion.

1.3. Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

1.3.1. Potenzieren

Der Potenzbegriff

Als Abkürzung für ein Produkt aus n gleichen Faktoren a wurde auf Vorschlag des Mathematikers René Descartes (1596 bis 1650) die Schreibweise a^n eingeführt. Das Symbol a^n wird *n-te Potenz von a* genannt und „a hoch n" oder auch „a zur n-ten (Potenz)" gelesen.

Exponent oder **Hochzahl**

Es gilt: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} = a^n = b$ – **Potenz**

Basis oder **Grundzahl**

a wird als *Basis* oder *Grundzahl*,
n als *Exponent* oder *Hochzahl*,
a^n und b als *Potenz* bezeichnet.

Stellt man aus einer Zahl a durch Anfügen eines Exponenten n die Potenz a^n her, so sagt man, „a wird mit n potenziert".
Als *Potenzrechnung* bezeichnet man das Rechnen mit Potenzen, für das bestimmte Regeln zu beachten sind.
Die Erklärung des Symbols a^n setzt für die Basis a keine Einschränkung fest. Als Exponent n wird eine natürliche (ganze positive) Zahl vorausgesetzt, die größer als 1 ist.
Obwohl zu einem Produkt wenigstens zwei Faktoren gehören, benutzt man auch die Schreibweise a^1, nennt sie die *erste Potenz von a* und setzt sie gleich a.

(1) $\quad \mathbf{a^1 = a}$

Produkte, die nur aus Faktoren 1 bestehen, haben den Wert 1. Deshalb sind alle Potenzen mit der Basis 1 gleich 1.

(2) $\quad \mathbf{1^n = 1}$

Eine Potenz, deren Basis eine positive Zahl ist, ist eine positive Zahl.

$$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +5^3 = +125.$$

Eine Potenz mit negativer Basis ist eine positive Zahl, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +2^4 = +16.$$

Eine Potenz mit negativer Basis ist eine negative Zahl, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^3 = -8.$$

Da für jede ganze Zahl n die Zahl $2n$ gerade, die Zahl $2n+1$ ungerade ist, gilt allgemein

$$(+a)^n = +a^n,$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n},$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Um das Vorzeichen einer Potenz von dem Vorzeichen der Basis zu unterscheiden, wird eine mit Vorzeichen behaftete Basis einer Potenz in Klammern eingeschlossen. Es gilt

$$(-a)^{2n} = (+a)^{2n},$$

$$(-a)^{2n+1} = -(+a)^{2n+1},$$

$$(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n},$$

$$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}.$$

● **Aufgaben**

1. Folgende Potenzen sind zu berechnen.

a) 2^7; 7^2; 3^6; 6^3; 2^{10}; 10^2; 13^1

b) $(\frac{1}{3})^1$; $(\frac{1}{3})^2$; $(\frac{1}{3})^3$; $(\frac{2}{5})^1$; $(\frac{2}{5})^2$; $(\frac{2}{5})^3$; $(1\frac{1}{4})^1$; $(1\frac{1}{4})^2$; $(1\frac{1}{4})^3$; $(2\frac{2}{3})^1$; $(2\frac{2}{3})^2$

c) $0{,}3^1$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$; $0{,}02^1$; $0{,}02^2$; $0{,}02^3$; $0{,}12^1$; $0{,}12^2$; $0{,}12^3$; $0{,}21^1$

2. Was ergibt

a) 4 mit 3; 5 mit 2; 10 mit 4; 2 mit 6; 6 mit 2

b) $\frac{3}{8}$ mit 3; $\frac{3}{8}$ mit 2; $\frac{3}{4}$ mit 4; $\frac{1}{2}$ mit 6; $\frac{5}{6}$ mit 1 potenziert?

3. Welche Zahl ist gleich

a) der ersten Potenz von 12,3; 2,34; 0,765; 80,56; 5,806,

b) der zweiten Potenz von 17; 0,018; 1,1; 0,13; 2,5,

c) der dritten Potenz von 0,03; 0,4; 0,5; 0,12; 1,5?

4. Welche Zahl ist gleich der Potenz mit

der Basis	2	9	0,2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$
und dem Exponenten	9	2	5	4	2

5. Welche Zahl ergibt sich, wenn

die Zahl	5595	19	0,7	0,02	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
in die	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Potenz erhoben wird?

6. Wie lautet das kleinste gemeinsame Vielfache der folgenden Zahlen?

a) 42; 63; 72 **b)** 108; 117; 156 **c)** 225; 315; 525 (L: a bis c)

7. Nach der Überlieferung hat ARCHIMEDES den ersten Potenzflaschenzug konstruiert. Die Abbildung 1.18. zeigt ein Modell mit drei losen und einer festen Rolle. Bei n losen Rollen wird eine Last Q durch die Kraft $F = \frac{Q}{2^n}$ im Gleichgewicht gehalten. Wie groß ist F für 3, 4, 5 lose Rollen, wenn die Last $Q = 512$ kp beträgt? (L)

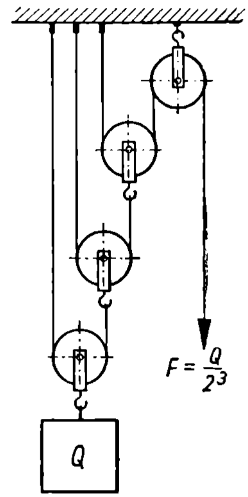


Abb. 1.18.

8. Berechnen Sie die folgenden Potenzen!

a) $(-1)^1$; -1^1; $(-1)^2$; -1^2; $(-1)^3$; -1^3; $(-1)^4$; -1^4

b) $(-2)^1$; -2^2; -2^3; (-2^4); $(-2)^5$; -2^6; $(-2)^{10}$; -2^{11}

c) $(+10)^1$; $(-10)^2$; -10^3; $+10^4$; $(-10)^4$; -10^4; $(-10)^5$; -10^6 (L: a bis c)

9. Ermitteln Sie die folgenden Summen bzw. Differenzen von Potenzen!

a) $4^3 + 3^4$; $11^2 - 7^2$; $(+8)^2 - (-6)^2$; $(-13)^2 + (-5)^3$

b) $(-3)^2 + (-2)^3$; $(+1)^3 + (-1)^3$; $(-4)^2 + (-2)^4$; $-4^2 - 2^4$

c) $1{,}2^2 - 0{,}2^2$; $0{,}71^3 + 0{,}17^3$; $0{,}5^2 + 0{,}05^2$; $1{,}11^3 - 0{,}111^2$ (L: a bis c)

Zusammenfassung

Addieren und Subtrahieren heißen Rechenoperationen der **ersten Stufe**. Das Multiplizieren und das Dividieren sind durch wiederholtes Addieren bzw. Subtrahieren entstanden und werden als die Rechenoperationen der **zweiten Stufe** bezeichnet. Das durch wiederholtes Multiplizieren entstehende Potenzieren nennt man eine Rechenoperation der **dritten Stufe**. Für die Rechenvorschrift a^n sagt man: „a ist mit n zu potenzieren", oder „a ist in die n-te Potenz zu erheben".

▶ **Die n-te Potenz der Grundzahl a ist das Produkt aus n gleichen Faktoren a.**

(3) $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$$

Das Symbol a^n ist für jede beliebige Zahl a erklärt, wenn n eine natürliche Zahl ist. Das Ausführen der durch a^n gekennzeichneten Rechenvorschrift wird Potenzieren genannt.

Aufgaben

1. Die folgenden Zahlen sind zu berechnen.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ **b)** $\frac{1}{6^2}$ **c)** $\frac{2^3}{3}$ **d)** $\frac{2}{3^3}$ **e)** $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$ **f)** $\frac{(-5)^2}{7}$ **g)** $\frac{5}{(-7)^2}$ **h)** $-\frac{5^2}{7}$

2. Die folgenden Zahlen sind als Summen zu schreiben, deren Summanden möglichst Vielfache von Potenzen mit der Basis 10 sind.

a) 3456 **b)** 50050 **c)** 708090 **d)** 2010300 (L: a bis d)

3. Welche Zahlen können durch zwei Neunen dargestellt werden?

4. Was ergibt 0^n für jede natürliche Zahl n $(n \neq 0)$?

5. Wie wird die Zahl 625 als Potenz mit dem Exponenten

a) 1 **b)** 2 **c)** 4 geschrieben? (L: a bis c)

6. Wie wird die Zahl 4096 als Potenz mit der Basis

a) 2 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 16 **e)** 64 **f)** 4096 geschrieben?

7. Der mittlere Erddurchmesser beträgt etwa $d = 12740$ km. Berechnen Sie den Rauminhalt V der Erde in km³ nach der Formel $V = \frac{\pi}{6} d^3$! (L)

8. Die Fliehkraft im Radkranz eines Schwungrades wächst mit dem Quadrat der Umlaufgeschwindigkeit. Auf das Wievielfache erhöht sich die Fliehkraft, wenn die Umlaufgeschwindigkeit des Schwungrades auf das 1,6fache (1,9fache, 2,1fache) ansteigt? (L)

1.3.2. Potenzrechengesetze

Bei den Potenzrechengesetzen handelt es sich um Regeln für das Rechnen mit Potenzen, dessen Ergebnis wieder Potenzen liefert.

Addieren und Subtrahieren von Potenzen

Summen und Differenzen von Potenzen können nur dann zusammengefaßt werden, wenn die Potenzen sowohl in der Basis als auch im Exponenten übereinstimmen. Es ist z. B. $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$ und $10b^3 - 4b^3 = 6b^3$, dagegen lassen sich $a^3 + a^2$ oder $b^5 - a^2$ nur zusammenfassen, wenn für die Variablen a und b Zahlen eingesetzt und die angegebenen Potenzen berechnet werden können.

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichen Basen

Das *Produkt der Potenzen* a^m und a^n enthält insgesamt $m + n$ Faktoren a und kann daher als Potenz mit der Basis a und dem Exponenten $m + n$ geschrieben werden. Es gilt

(4) $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

und entsprechend

(5) $\boldsymbol{a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}}.$

▶ **Potenzen mit gleichen Basen werden miteinander multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.**

Durch Vertauschen der Seiten entsteht aus der Gleichung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ die Form

(6) $\quad \boldsymbol{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}.$

Der *Quotient der Potenzen* a^m und a^n heißt $a^m : a^n$ oder $\frac{a^m}{a^n}$.
Ist $m > n$, so entsteht durch Kürzen gleicher Faktoren des Zählers und des Nenners im Zähler ein Produkt aus $m - n$ Faktoren a, im Nenner 1. Man erhält somit

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{wenn } m > n).$$

Ist $m < n$, so entsteht durch Kürzen des Bruches $\frac{a^m}{a^n}$ im Zähler 1 und im Nenner a^{n-m}, also

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{wenn } m < n).$$

$$(7) \qquad \boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \textbf{für } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \textbf{für } m < n \end{cases}}$$

● **Aufgaben**

Durch Zusammenfassen gleichartiger Potenzen sind die folgenden Ausdrücke zu vereinfachen.

1. a) $3a^5 + 5a^5 - 2a^5$ **b)** $7b^2 - 3b^2 - 2b^2$

2. a) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^3$ **b)** $\frac{3}{4}y^2 - \frac{5}{6}y^2 + \frac{1}{2}y^2$

3. a) $7a^n + 6a^n - 3a^n$ **b)** $9a^p - 2a^p - 4a^p$

4. a) $5a^p + 3a^{r-1} - 2a^p - 2a^{r-1}$ **b)** $5b^{n+1} + 6b^m - 2b^{n+1} + 2b^m$
c) $2x^{m+n} + 3y^{m+n} - x^{m+n} + y^{m+n}$ **d)** $11u^{m-n} - 5v^{m-n} - 6u^{m-n} + 2v^{m-n}$
e) $(a+b)^{m+n} + (a-b)^{m-1} + 2(a+b)^{m+n} - 3(a-b)^{m-1}$ (L: a bis e)

Produkte aus Potenzen mit gleichen Basen sind durch einen Potenzausdruck darzustellen.

5. a) $a^n \cdot a^3$ **b)** $x^5 \cdot x^m$ **c)** $y^n \cdot y^m$ **d)** $b^{3x} \cdot b^2$ **e)** $u^2 \cdot u^{3a}$ **f)** $z^{2a} \cdot z^{3b}$

6. a) $2a^5 \cdot 5a^2$ **b)** $3x^2 \cdot 4x^3$ **c)** $\frac{1}{2}y^4 \cdot \frac{2}{3}y^3$ **d)** $\frac{3}{5}b \cdot \frac{5}{6}b^2$ **e)** $\frac{3}{4}u^4 \cdot u^x$ (L: a bis e)

7. a) $a^{n-2} \cdot a^2$ **b)** $x^3 \cdot x^{n+3}$ **c)** $y^{n+2} \cdot y^{n-2}$ **d)** $b^{3-n} \cdot b^{3+n}$ **e)** $u^{2n-1} \cdot u^{n+2}$

8. a) $2a^{1+n} \cdot \frac{1}{4}a^{1-n}$ **b)** $x^{n-3m} \cdot \frac{1}{m}x^{4m-n}$ **c)** $5b^{m+2n} \cdot 2b^{3n-2m}$ **d)** $9c^{5-3n} \cdot \frac{2}{3}c^{5n-6}$

9. a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^2$ **b)** $x^8 \cdot x \cdot x^3$ **c)** $2b^7 \cdot 7b^4 \cdot 4 \cdot b^3$

10. a) $a^{m-2} \cdot a^{3m} \cdot a^{2m+3}$ **b)** $b^{x-2y} \cdot b^{2x+y} \cdot b^{2y}$ **c)** $c^{n+1} \cdot c^{1-2n} \cdot c^{3n-2}$ (L: a bis c)

11. a) $a^4 \cdot (a^2 - a^3)$ **b)** $a^7 \cdot (a^5 + a^3)$ **c)** $a^2 \cdot (a^9 - a^4)$ **d)** $x^3 \cdot (x^4 + x^5)$

12. a) $ab^2 \cdot (a^3b + a^2)$ **b)** $(m^4n^2 - m^3n) \cdot m^5n^3$ **c)** $r^6s^2 \cdot (r^4 - r^2s^5)$ (L: a bis c)

13. a) $a^6 \cdot (a^2 + a^4 - a^3)$ b) $p^5 \cdot (p^3 - p^2 + p)$ c) $r^7 \cdot (r^5 - r^6 + r^7)$

14. a) $(1^3 + 1^2) \cdot (1^4 - 1^3)$ b) $(m^4 - m) \cdot (m^5 - m^4)$ c) $(a^2 - a) \cdot (a^2 + a)$

15. a) $(a^x - b^y + c^z) \cdot (a^x + b^y - c^z)$ b) $(x^a + y^b - z^c) \cdot (x^a - y^b - z^c)$

c) $(a^{x-2}b - 5\,ab^{x+3}) \cdot a^{3-x} \cdot b^{2-x}$ d) $(2\,x \cdot y^{2+n} - x^3 \cdot y^{n-1}) \cdot x^{n-2} \cdot y^{n+1}$

e) $3\frac{1}{2} \cdot a^{2n} \cdot (-b)^4 \cdot x \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) \cdot a^2 \cdot b^{n-3} \cdot x^n \cdot 4 \cdot x^{1-n} \cdot b \cdot (-x)^3$

f) $2\frac{1}{4} \cdot (-x)^3 \cdot y \cdot z^{2n} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot x^{3n-1} \cdot y^{n-2} \cdot z^{3-2n} \cdot \frac{5}{9} \cdot x^2\,(-y)^2 \cdot z$ (L: a bis f)

16. a) $\frac{6a^4}{3a^2}$; $\frac{12a^5}{4a^4}$ b) $\frac{9b^3}{3b}$; $\frac{5b^5}{10b^3}$ c) $\frac{3c^3}{18c^2}$; $\frac{x^3}{3x}$ d) $\frac{c^7}{7c}$; $\frac{a^x}{a \cdot x}$ e) $\frac{8y^9}{9y^8}$; $\frac{5 \cdot z^n}{n \cdot z^5}$

17. a) $\frac{x^6 \cdot y^7}{x^4 \cdot y^4}$ b) $\frac{a^3b^5}{a^2b}$ c) $\frac{x^m y^{m+1}}{x^{m-1}y^m}$ d) $\frac{a^{x+2}b^y}{a^x b^{y-2}}$ e) $\frac{x^{2n+1} \cdot y^{2n-1}}{x^{n-1} \cdot y^{n-2}}$ (L: a bis c)

18. $\frac{20a^5 + 10a^4}{5a^3}$; $\frac{12b^7 - 8b^5}{4b^4}$; $\frac{36c^9 + 18c^8 - 27c^7}{9c^6}$; $\frac{48a^2 + 32a^5 - 40a^6}{8a^2}$;

$\frac{8x^4 + 12x^3 - 24x^5}{4x^3}$ (L)

19. $\frac{12a^5x^3 - 18a^4x^5}{6a^4x^3}$; $\frac{22a^3b^3 - 11a^2b^4}{11a^2b^4}$; $\frac{21a^4m^3 + 14a^5m^4}{42a^4m^4}$; $\frac{8a^6y^4 - 6a^5y^3}{24a^3y^3}$ (L)

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichen Exponenten

Wird die Potenz a^m mit der Potenz b^m multipliziert, so erhält man $a^m \cdot b^m$, ein Produkt aus m Faktoren a und m Faktoren b. Ändert man die Reihenfolge dieser Faktoren und ordnet sie zu Paaren $a \cdot b$, so entsteht ein Produkt aus m Faktoren $(a \cdot b)$, also eine Potenz mit der Basis $(a \cdot b)$ und dem Exponenten m.

(8) $\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$.

▶ **Potenzen mit gleichen Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.**

Aus $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ entsteht durch Vertauschen der Seiten

(9) $\boldsymbol{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$.

Als Quotient der Potenzen a^m und b^m entsteht $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m}$. Da der Zähler dieses Bruches m Faktoren a, sein Nenner m Faktoren b enthält, kann der Bruch als Produkt aus m Faktoren $\frac{a}{b}$, d.h. als m-te Potenz des Quotienten $a : b$ angesehen werden.

(10) $\boldsymbol{a^m : b^m = (a : b)^m}$ oder $\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$.

▶ **Man erhält den Quotienten zweier Potenzen mit gleichen Exponenten, wenn man den Quotienten ihrer Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.**

Aus $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ entsteht durch Vertauschen der Seiten

(11) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$.

Aufgaben

Die folgenden Produkte sind möglichst einfach zu berechnen.

1. a) $8^3 \cdot 125^3$ b) $2^6 \cdot 5^6$ c) $4^2 \cdot 25^2$ d) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3$

2. a) $\left(1\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^6$ b) $\left(2\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(1\frac{2}{7}\right)^5$ c) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(3\frac{1}{7}\right)^2$

3. a) $(-5)^n \cdot \left(1\frac{2}{5}\right)^n$ b) $\left(-3\frac{1}{4}\right)^m \cdot (-8)^m$ c) $\left(\frac{3xy}{4z}\right)^n \cdot \left(\frac{8z}{9xy}\right)^n$ (L: a bis c)

4. a) $(x \cdot y)^3 \cdot (5x)^2$ b) $(3ab)^4 \cdot (2a)^2$ c) $(xy)^n \cdot (xz)^{1-n}$ d) $(abc)^{4n} \cdot a^{m-4n} \cdot b^n \cdot c^{1-3n}$

5. a) $\frac{65^3}{78^3}$ b) $\frac{42^4}{56^4}$ c) $16^3 : \left(3\frac{1}{5}\right)^3$ d) $29^4 : \left(9\frac{2}{3}\right)^4$

6. a) $(35ab)^3 : (15bc)^3$ b) $(51xy)^4 : (68yz)^4$ c) $\left(7\frac{1}{5}x\right)^3 : \left(\frac{12ax}{5b}\right)^3$

7. a) $(xy - y^2)^3 : (x^2 - xy)^3$ b) $(abc + ab)^5 : (bc^2 + bc)^5$ c) $(ab + b^2)^n : (a^2 + ab)^n$
(L: a bis c)

Potenzieren von Potenzen

Nach der Erklärung des Potenzbegriffes bezeichnet $(a^n)^m$ abgekürzt das aus m Faktoren a^n bestehende Produkt. Da jeder Faktor a^n selbst ein Produkt aus n Faktoren a vorstellt, enthält $(a^n)^m$ insgesamt m mal n Faktoren a und ist somit ein Produkt aus $m \cdot n$ Faktoren a, also die Potenz $a^{m \cdot n}$. Dieselbe Überlegung ergibt für $(a^m)^n$ die Potenz $a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$. Es gilt

(12) $\quad (a^n)^m = (a^m)^n = a^{m \cdot n}\,.$

Eine Potenz wird potenziert, indem man ihre Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

Es gilt entsprechend

$$a^{m \cdot n} = (a^n)^m = (a^m)^n\,.$$

Aufgaben

1. a) $(10^3)^2$ b) $(10^2)^4$ c) $(a^4)^5$ d) $(x^7)^2$

2. a) $(a^n)^3$ b) $(b^8)^n$ c) $(c^x)^y$ d) $(d^u)^v$

3. a) $(x^{n+1})^2$ b) $(y^3)^{n-1}$ c) $(a^m)^{n-1}$ d) $(b^{m+1})^n$ (L: a bis d)

4. a) $(x^2 \cdot y^3)^5$ b) $(y^5 \cdot z^2)^4$ c) $(a^4 \cdot b^5 \cdot c)^3$ d) $(a^5 \cdot b \cdot c^6)^2$

5. a) $(x^2)^3 \cdot (x^4)^m$ b) $(y^5)^n \cdot (y^m)^2$ c) $(2{,}5\,a^4)^3 \cdot (4\,a^6)^3$ d) $(1{,}25\,x^3)^4 \cdot (8\,x^7)^4$. (L: a bis d)

6. Die folgenden Potenzen sollen mit Hilfe einer Zahlentafel berechnet werden, die nur die zweiten und dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 100 enthält.

a) 5^4 b) 7^6 c) 2^{12} d) 3^9

Die folgenden Ausdrücke sind in Summen zu verwandeln.

7. a) $(x+1)^3$ **b)** $(1-x)^3$ **c)** $(2a+b)^4$ **d)** $(a-2b)^4$ (L: a, c)

8. a) $(0{,}1x+0{,}2y)^3$ **b)** $(0{,}5a-0{,}3b)^3$ **c)** $(1{,}2x+1{,}1y)^3$ **d)** $(0{,}14a-1{,}3b)^3$ (L: a, b)

9. a) $\left(2y-\frac{z}{2}\right)^4$ **b)** $\left(\frac{y}{3}+3\right)^5$ (L: a, b)

10. a) $(0{,}1c+0{,}4d)^3-(0{,}2c-0{,}3d)^3$ **b)** $\left(z+\frac{2}{3}\right)^4-\left(z-\frac{2}{3}\right)^4$ (L: a)

1.3.3. Erweiterung des Potenzbegriffs

Das Symbol a^0

Als Abkürzung für ein Produkt aus n Faktoren a wurde die Schreibweise a^n eingeführt und als n-te Potenz der Zahl a bezeichnet. Die Definition versagt für $n = 0$. Nur durch eine Erweiterung des bisher erklärten Potenzbegriffs kommt man hier zum Ziele. Setzt man für a^0 bei allen von 0 verschiedenen a den Potenzwert $a^0 = 1$ fest, so bleiben für das Symbol a^0 die für positive ganze Exponenten entwickelten Rechengesetze gültig.
Der Ausdruck a^0 soll eine Potenz mit der Grundzahl a und dem Exponenten 0 sein. Damit auch für diese Potenz die erarbeiteten Regeln gelten, ist sie so festzusetzen, daß z. B. die Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ erfüllt ist, wenn der Exponent m durch 0 ersetzt wird. Man erhält $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$, $a^0 \cdot a^n = a^n$ und muß daher $a^0 = 1$ festsetzen.

▶ **Für die 0-te Potenz einer beliebigen von 0 verschiedenen endlichen Zahl wird der Potenzwert 1 festgesetzt.**

0^0 dagegen ist nicht definiert und daher ein sinnloses Symbol.

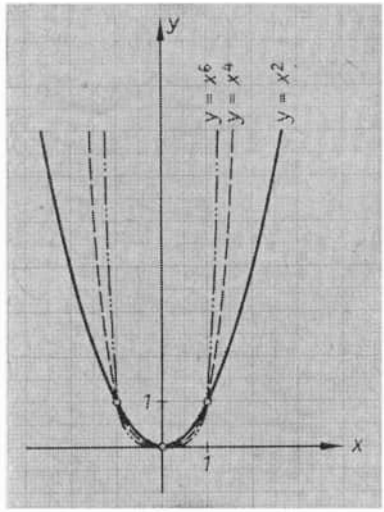
1.3.4. Potenzfunktionen $y = x^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Wir haben im Abschnitt 1.2.3. die ganzen rationalen Funktionen n-ten Grades kennengelernt. Ihre Werte ließen sich durch die Gleichung

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

darstellen. Dabei waren die Koeffizienten $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ beliebige konstante Zahlen. Wir wollen nun einen Spezialfall untersuchen, in dem alle Koeffizienten außer a_n gleich Null sind und a_n den Wert 1 hat. Der analytische Ausdruck nimmt dann die Form $y = x^n$ an. Für n lassen wir zunächst alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen zu. Funktionen, deren analytische Ausdrücke die Form $y = x^n$ haben, heißen Potenzfunktionen. Die Potenzfunktionen mit natürlichen Zahlen $n \neq 0$ als Exponenten sind also spezielle ganze rationale Funktionen n-ten Grades.
Wir wollen nun den Verlauf der graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten untersuchen. Dabei betrachten wir zunächst Potenz-

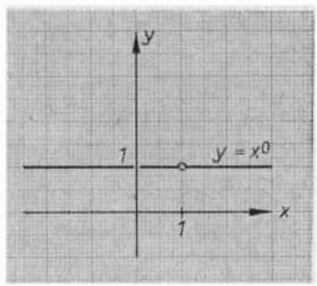
funktionen mit geradzahligen Exponenten n ($n = 2k$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$) und dann Potenzfunktionen mit ungeradzahligen Exponenten n ($n = 2k + 1$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).



1.3.5. Potenzfunktionen $y = x^{2k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

Für $k = 1$ erhält man die quadratische Funktion $y = x^2$. Ihr Bild ist die auf Seite 11 als Normalparabel bezeichnete Parabel zweiten Grades. Wie diese verlaufen auch die für $k = 2; 3; \ldots$ entstehenden Parabeln vierten und sechsten Grades im I. und II. Quadranten symmetrisch zur y-Achse mit dem Scheitel im Koordinatenursprung (Abb. 1.19.). Alle diese Parabeln haben die Punkte $(-1; 1)$, $(0; 0)$ und $(1; 1)$ gemeinsam. Es sei darauf hingewiesen, daß die Parabeln höheren als zweiten Grades keine Kegelschnitte sind. Nur die Parabel zweiten Grades kann als Schnittfigur durch einen Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene erzeugt werden.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch die Potenzfunktion, die sich für $k = 0$ ergibt. Sie hat die Gleichung $y = x^0$. Nun wurde aber in der Potenzrechnung definiert: $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$. Also ist das Bild der Funktion mit der Gleichung $y = x^0$ für alle $x \neq 0$ eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1 oberhalb der x-Achse. Für $x = 0$ gibt es keinen zugeordneten Funktionswert, da 0^0 nicht definiert ist. Man sagt, die Funktion hat bei $x = 0$ eine Lücke. Diese ist in Abbildung 1.20. angedeutet.



1.3.6. Potenzfunktionen $y = x^{2k+1}$ ($k = 0, 1, 2, 3 \ldots$)

Für $k = 0$ entsteht $y = x$, eine gerade Linie, die durch den Koordinatenursprung und die Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 = +1$, $y_1 = +1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2 = -1$, $y_2 = -1$ hindurchgeht (Abb. 1.21.).

Die für $k = 1$ entstehende Parabel dritten Grades $y = x^3$ ergibt nach der Wertetafel

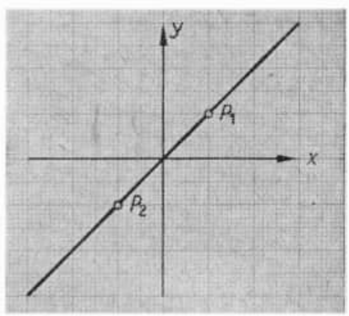


Abb. 1.21.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$
y	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$+\frac{1}{8}$	$+1$	$+8$

eine durch den Koordinatenursprung gehende Kurve, die im I. und III. Quadranten zentralsymmetrisch zum Ursprung verläuft. Der Ursprung ist ein Wendepunkt der Kurve. An dieser Stelle krümmt sich die aus dem III. Quadranten kommende Kurve beim Eintritt in den I. Quadranten nach der anderen Seite (Abb. 1.22.).
Einen gleichartigen Verlauf nehmen auch die Bilder der Funktionen $y = x^5$ (Parabel fünften Grades), $y = x^7$ (Parabel siebenten Grades) usf. Mit der Geraden $y = x$ haben diese Parabeln die Punkte P_1 und P_2 und den Ursprung gemeinsam.

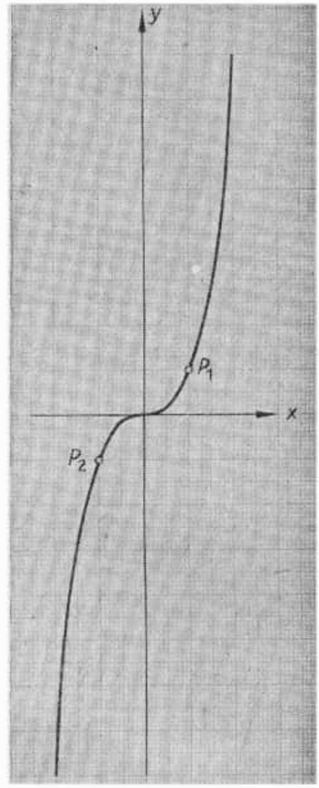


Abb. 1.22.

1.4. Potenzfunktionen $y = x^{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

1.4.1. Das Symbol a^{-n}

Der Ausdruck a^{-n} soll eine Potenz mit der Grundzahl a und dem Exponenten $-n$ (n eine natürliche Zahl) sein. Damit auch für diese Potenzen die erarbeiteten Regeln gelten, sind sie so zu deuten, daß z. B. die Potenzregel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ erfüllt ist, wenn der Exponent m durch $-n$ ersetzt wird. Man erhält $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, also das gleiche wie bei $\frac{1}{a^n} \cdot a^n$; deshalb setzt man fest:

(13) $\quad \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (a \neq 0)$.

▶ **Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reziproken Wert (Kehrwert) der mit dem entsprechenden positiven Exponenten potenzierten Basis.**

● **Aufgaben**

1. Bestimmen Sie die folgenden Zahlen!

a) $4 \cdot 5^0$ **b)** $\frac{7}{a^0}$ **c)** $\frac{6 \cdot (a-b)^0}{5 \cdot (a-b)^0}$ **d)** $5 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^0$

2. Die folgenden Ausdrücke sind so umzuformen, daß keine Brüche mehr auftreten.

a) $\frac{1}{a^7}$ **b)** $\frac{1}{a^5}$ **c)** $\frac{4}{a^3}$ **d)** $\frac{11}{b^9}$ **e)** $\frac{a}{x^4}$

3. Die folgenden Quotienten sind in möglichst einfacher Form ohne Bruchstrich zu schreiben.

a) $\frac{x^3 y^2}{x^2 y^3}$ **b)** $\frac{a^3 b^4}{a^5 b^2}$ **c)** $\frac{a^{n-1}}{a^{n+m}}$ **d)** $\frac{x^{1-n}}{x^{m-n}}$ **e)** $\frac{b^{2n-1}}{b^{3n-6}}$ **f)** $\frac{y^{3-2n}}{y^{n-4}}$

4. Die folgenden Ausdrücke sind soweit wie möglich zusammenzufassen.

a) $x^{-4} + x^{-3}$ b) $x^{-2} + x^{-1}$ c) $x^{-n} + x^{1-n}$ (L: a bis c)

5. Formen Sie die folgenden Zahlen so um, daß nur Potenzen mit positiven Exponenten auftreten!

a) $3x^{-5}$ b) $4x^{-3}$ c) x^{-11} d) y^{-4} e) $2y^{-5}$

1.4.2. Potenzfunktionen $y = x^{-2k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

Die bisher untersuchten Potenzfunktionen umfaßten nur diejenigen, bei denen die Exponenten natürliche Zahlen sind. Wir hatten sie für $n \neq 0$ als spezielle ganze rationale Funktionen erkannt. Nun wollen wir entsprechend der Erweiterung des Potenzbegriffs unsere Untersuchungen auf Potenzfunktionen mit negativen ganzen Zahlen als Exponenten ausdehnen. Ausdrücklich sei hier vermerkt, daß diese Potenzfunktionen keine ganzen rationalen Funktionen sind.

Die zu $k = 1$ gehörende Funktion $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ enthält z.B. die folgenden Zahlenpaare.

x	-4	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{9}$	$+\frac{1}{4}$	$+1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{9}$	$+\frac{1}{16}$

Zu $k = 2$ gehört die Funktion $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ und die folgende Wertetafel.

x	-4	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	$+\frac{1}{256}$	$+\frac{1}{81}$	$+\frac{1}{16}$	$+1$	$+1$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{81}$	$+\frac{1}{256}$

Jede der beiden graphischen Darstellungen besteht aus zwei Zweigen (Ästen), von denen der eine im I. Quadranten, der andere im II. Quadranten liegt (Abb. 1.23.). Für beide Funktionen verlaufen die Zweige symmetrisch zur y-Achse und haben die Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 = +1$, $y_1 = +1$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2 = -1$, $y_2 = +1$ gemeinsam. Die Kurvenzweige nähern sich um so mehr der x-Achse, je mehr der Betrag von x zunimmt, sie nähern sich um so mehr der y-Achse, je mehr er abnimmt. Man sagt, sie nähern sich den Koordinatenachsen asymptotisch, oder die Koordinatenachsen sind **Asymptoten** der Kurvenzweige.

Die Funktionen $y = x^{-2}$ und $y = x^{-4}$ sind für $x = 0$ nicht erklärt.

Dieselbe Art des Verlaufs zeigen alle Kurven, die sich für Funktionen $y = x^{-2k}$ ergeben.

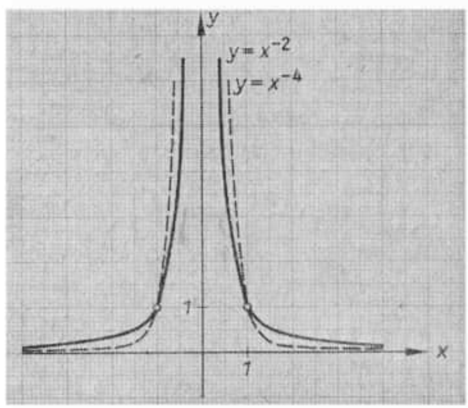


Abb. 1.23.

1.4.3. Potenzfunktionen $y = x^{-(2k-1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$

Für $k = 1$ z.B. ergibt sich die Funktion $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ und die folgende Wertetafel.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+3$	$\ldots$
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$+2$	$+1$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$\ldots$

Entsprechend gehört zu $k = 2$ die Funktion $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ und die folgende Wertetafel.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+3$	$\ldots$
y	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	$+8$	$+1$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{27}$	$\ldots$

Die Bilder der beiden Funktionen bestehen jedesmal aus zwei Zweigen (Ästen), von denen der erste im I. Quadranten, der zweite im III. Quadranten liegt (Abb. 1.24.).
Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ ergibt einen Kegelschnitt, nämlich eine gleichseitige Hyperbel, die zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung und symmetrisch in bezug auf die Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes liegt. Die Funktion $y = \frac{1}{x^3}$ liefert eine Kurve, die mit der Kurve $y = \frac{1}{x}$ den Punkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = +1$, $y_1 = +1$ und den Punkt P_2 mit den Koordinaten $x_2 = -1$, $y_2 = -1$ gemeinsam hat. Beide Funktionen sind ebenfalls für $x = 0$ nicht erklärt. Ihre Kurven haben die Koordinatenachsen zu Asymptoten.
Die sich für Funktionen $y = x^{-(2k-1)}$ ergebenden Kurven zeigen alle die gleiche Art des Verlaufs.

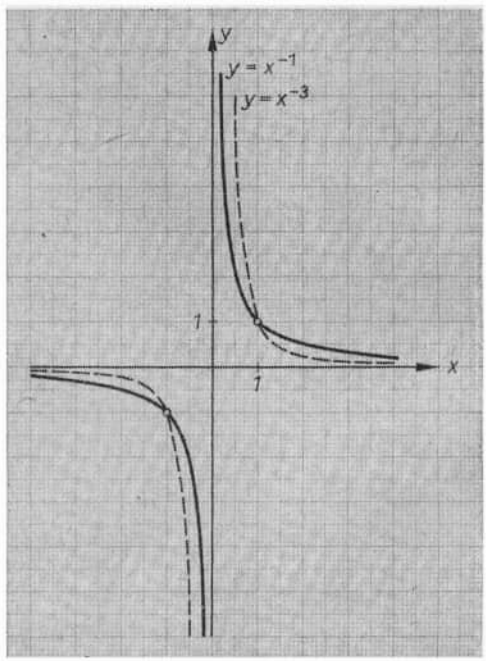


Abb. 1.24

1.5. Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$

1.5.1. Radizieren (Wurzelrechnung)

Durch Potenzieren entsteht aus einer gegebenen Zahl a und dem gegebenen Exponenten n die Potenz $b = a^n$. Sind in der Gleichung $a^n = b$ die Zahlen b und n (b nichtnegativ, $n \geqq 2$, natürlich) gegeben, so kann der Zusammenhang auch durch $a = \sqrt[n]{b}$ (gelesen: n-te Wurzel aus b) angegeben werden.
Eine Zahl $b \geqq 0$ mit einer Zahl n radizieren heißt also, die Zahl a zu bestimmen, die mit n potenziert b ergibt. Diese Zahl a wird mit $\sqrt[n]{b}$ bezeichnet.

▶ **Unter $\sqrt[n]{b}$ $(b \geqq 0)$ versteht man die nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz b ergibt.**

(14) $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b \quad (b \geqq 0)$.

Entsprechend bezeichnet $\sqrt[n]{b^n}$ die Zahl, die mit n potenziert b^n ergibt, d.h. die Zahl b.

(15) $\sqrt[n]{b^n} = b \quad (b \geqq 0)$.

Aufeinanderfolgendes Radizieren und Potenzieren mit derselben Zahl heben einander auf. Dabei ist b immer auf nichtnegative Zahlen zu beschränken.

▶ **Radizieren und Potenzieren sind einander entgegengesetzte Rechenoperationen.**

1.5.2. Der Begriff der Wurzel

In $\sqrt[n]{b} = a$ nennt man a und $\sqrt[n]{b}$ die n-te Wurzel aus b,
b den *Radikanden* der Wurzel,
n den *Exponenten* der Wurzel.

Das Bestimmen von $\sqrt[n]{b}$ nennt man *Ziehen* der n-ten Wurzel aus b oder *Radizieren* von b.

1.5.3. Irrationale Wurzeln

Gemäß der Definition $\sqrt[n]{b} = a$ $(a \geqq 0, b \geqq 0)$ ist $\sqrt[n]{b}$ ohne weiteres angebbar, wenn der Radikand als Potenz dargestellt werden kann, deren Exponent gleich dem Wurzelexponenten ist. So ist

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ weil } 2^5 = 32; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}, \text{ weil } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \text{ ergibt.}$$

Wurzelausdrücke dieser Art ergeben ganze Zahlen oder Brüche und gehören zu den *rationalen* Zahlen.

Für Ausdrücke wie $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{10}$ dagegen kann der Radikand nicht als Potenz einer ganzen oder gebrochenen Zahl dargestellt werden, deren Exponent gleich dem Wurzelexponenten ist. Wurzeln dieser Art sind weder durch ganze Zahlen noch durch Brüche angebbar. Sie gehören zu den *irrationalen* Zahlen, die durch rationale Zahlen beliebig angenähert werden können.

■ **Beispiel 6:**

$\sqrt{2}$ liegt zwischen 1 und 2; denn $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$

$(1^2 < 2 < 2^2)$,

$\sqrt{2}$ liegt zwischen 1,4 und 1,5; denn $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$

$(1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2)$,

$\sqrt{2}$ liegt zwischen 1,41 und 1,42; denn $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0146$

$(1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2)$.

Durch Angeben weiterer Dezimalstellen kommt man dem wirklichen Wert für $\sqrt{2}$ unbegrenzt näher, erreicht ihn aber nie. Er liegt zwischen 1,41421 und 1,41422, da $1{,}41421^2 < 2 < 1{,}41422^2$ ist.

● **Aufgaben**

1. $(\sqrt{111})^2$; $\left(\sqrt[3]{617}\right)^3$; $\left(\sqrt[5]{125}\right)^5$; $\left(\sqrt{4a^2 + 9b^2}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3$; $\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2$

2. $\sqrt{36}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[5]{243}$

3. $\sqrt[3]{0{,}027}$; $\sqrt{2{,}56}$; $\sqrt[4]{0{,}0256}$; $\sqrt[3]{0{,}064}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt[3]{0{,}125}$; $\sqrt{0{,}0121}$; $\sqrt[3]{0{,}008}$ (L)

4. $\sqrt{a^2}$; $\sqrt[3]{b^3}$; $\sqrt[5]{x^5}$; $\sqrt{(a+b)^2}$; $\sqrt[3]{(x-y)^3}$; $\sqrt[n]{(a-b)^n}$; $\sqrt[4]{x^8}$; $\sqrt[3]{z^6}$

5. Radizieren Sie!

   $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$; $\sqrt{a^2 - 2a + 1}$; $\sqrt{m^2 + 4m + 4}$ (L)

6. Was ergibt

   $\sqrt[3]{c^3} + \left(\sqrt{a+b}\right)^2$; $\left(\sqrt[n]{x+y}\right)^m - \sqrt[n]{y^n}$; $\sqrt{(x-y)^2} + \left(\sqrt{x+y}\right)^2$; $\sqrt[3]{(c+d)^3} - \left(\sqrt[3]{c-d}\right)^3$;
   $\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 \cdot \sqrt{(a+b)^2}$; $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{z^2}\right)^3$? (L)

7. Die gesetzlich vorgeschriebene Bremsverzögerung für nach 1958 gebaute Kraftwagen mit einer Höchstgeschwindigkeit bis 100 km $\cdot$ h^{-1} beträgt mindestens 4,0 m $\cdot$ s^{-2}. Die Bremsverzögerung für den „Trabant" beträgt 6,5 m $\cdot$ s^{-2}.
   Welche Geschwindigkeit darf ein „Trabant" haben, wenn er mit seiner Bremswirkung auf $s = 125$ m zum Stehen kommen soll? Wieviel Sekunden beträgt die Bremszeit (t)?
   $\left(\text{Formeln: } v = \sqrt{2bs}\,;\quad t = \sqrt{\frac{2s}{b}}\right)$ (L)

8. Als Bruchpotenzen sind zu schreiben:

$\sqrt{5}$; $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[6]{z}$; $\sqrt[x]{n}$; $\sqrt[m]{u+v}$; $\sqrt{a^2+b^2}$; $\sqrt[n]{x^n-y^n}$.

9. Als Wurzeln sind folgende Ausdrücke zu schreiben:

$3^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{3}}$; $5^{\frac{1}{4}}$; $4^{\frac{1}{5}}$; $x^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{4}}$; $b^{\frac{1}{5}}$; $25^{0,5}$; $16^{0,5}$; $4^{-0,5}$; $81^{0,25}$.

10. Was ergibt

$\sqrt[3]{z^3}$; $\sqrt{(a+b)^2}$; $\sqrt[n]{x^n}$; $\sqrt[m]{(x-y)^m}$; $(a^2)^{\frac{1}{2}}$; $(a^2-2ab+b^2)^{\frac{1}{2}}$?

11. Als Bruchpotenzen sind zu schreiben:

$\sqrt[5]{2^3}$; $\sqrt[3]{(-3)^2}$; $\sqrt{2^3}$; $\sqrt[5]{7^2}$; $\sqrt[3]{(-2)^4}$; $\sqrt[4]{5^3}$; $\sqrt[q]{z^p}$; $\sqrt[n]{a^z}$; $\sqrt[3]{(a+b)^2}$.

12. Vor dem Multiplizieren sind die Wurzeln in Bruchpotenzen zu verwandeln:

$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[5]{b}\cdot\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[6]{y}$ (L)

13. Welche Werte haben die folgenden Wurzeln?

$\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{0,16}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{0,64}$; $\sqrt{0,0081}$

14. $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[5]{243}$; $\sqrt[5]{100\,000}$; $\sqrt[3]{0,008}$

15. Welche Formen können für die folgenden Wurzelausdrücke angegeben werden, in denen a und b positive Zahlen sind?

$\sqrt{a^2}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt{a\cdot b}$; $\sqrt[3]{a\cdot b}$; $\sqrt[5]{b^2}$; $\sqrt[5]{a^3b^2}$; $\sqrt[2n]{b}$; $\sqrt[2n-1]{b}$; $\sqrt[3]{(a\cdot b)^3}$; $\sqrt[5]{b^5}$

16. Wie in Aufgabe 12 sind zu berechnen:

$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}$; $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$; $\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[6]{b}$; $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[9]{a}$; $\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$;

$\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$. (L)

17. Welche Zahlen sind gleich folgenden Potenzen?

a) $8^{\frac{1}{3}}$ b) $16^{\frac{1}{4}}$ c) $100^{0,5}$ d) $243^{0,2}$

18. Folgende Produkte sind zu vereinfachen.

a) $\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^6$ b) $\left(a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$ c) $\left(1\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2\frac{6}{13}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$

1.5.4. Das Symbol $a^{\frac{1}{n}}$

Der Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ soll eine Potenz mit der Grundzahl a und dem Exponenten $\frac{1}{n}$ sein. Damit auch für diese Potenz die erarbeiteten Regeln gelten, ist sie so festzusetzen, daß z.B. die Potenzregel $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ erfüllt ist, wenn $m=\frac{1}{n}$ ist.

Man erhält $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$ und muß daher festsetzen:

▶ $a^{\frac{1}{n}}$ **bedeutet die Zahl, deren** n**-te Potenz** a **ist. In der Wurzelschreibweise heißt diese Zahl** $\sqrt[n]{a}$ **(**n**-te Wurzel aus** a**).**

(16) $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a \geqq 0)$

Um auch $a^{\frac{p}{q}}$ als Potenz mit der Basis a und dem Exponenten $\frac{p}{q}$ bezeichnen zu können, ist $a^{\frac{p}{q}}$ so zu deuten, daß die Potenzregel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ erfüllt ist, wenn $m = \frac{p}{q}$ und $n = q$ gesetzt wird. Dann gilt $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p$.

$a^{\frac{p}{q}}$ ist somit als Zahl festzusetzen, deren q-te Potenz a^p ergibt. In der Wurzelschreibweise heißt diese Zahl $\sqrt[q]{a^p}$.

(17) $\quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (a \geqq 0)$

▶ $a^{\frac{p}{q}}$ **bezeichnet die Zahl, deren** q**-te Potenz** a^p **ergibt.**

1.5.5. Wurzelgesetze

Das Symbol $\sqrt[n]{a}$ ist nach Definition mit dem Symbol $a^{\frac{1}{n}}$ gleichbedeutend. Das Rechnen mit Wurzelausdrücken geschieht deshalb nach den Regeln für das Rechnen mit Potenzen.

Addieren und Subtrahieren

Summen und Differenzen von Wurzelausdrücken lassen sich nur bei gleichen Radikanden und gleichen Wurzelexponenten zusammenfassen.

■ **Beispiel 7:**

$2\sqrt{25} + 4\sqrt{25} = 6\sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$

■ **Beispiel 8:**

$c \cdot \sqrt{a} + d \cdot \sqrt{a} = (c + d) \cdot \sqrt{a}$

● **Aufgaben**

1. $\sqrt{41} + 2\sqrt{41}$; $\quad 3\sqrt{15} + \sqrt{15}$; $\quad 7\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$; $\quad 2\sqrt{11} + 9\sqrt{11}$; $\quad 5\sqrt{13} - \sqrt{13}$;
$3\sqrt[3]{12} + 6\sqrt[3]{12}$; $\quad 5\sqrt[4]{8} + 2\sqrt[4]{8}$; $\quad 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}$; $\quad 4\sqrt[5]{3} - 3\sqrt[5]{3}$; $\quad 8\sqrt[4]{5} - 4\sqrt[4]{5}$

2. a) $3\sqrt{7} - 5\sqrt{2} - \sqrt{11} + 3\sqrt{2} - \sqrt{7} + \sqrt{11} + 2\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 7\sqrt{11} + 6\sqrt{5} + 8\sqrt{11} - 2\sqrt{3}$ (L: a, b)

3. a) $a\sqrt{2} + b\sqrt{2} - c\sqrt{2}$ **b)** $x\sqrt{3} - y\sqrt{3} + z\sqrt{3}$ **c)** $a\sqrt{5} + \sqrt{5}$

4. a) $5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$ **b)** $6\sqrt[3]{a} - 5\sqrt{a} - 4\sqrt[3]{a} + 7\sqrt{a}$

c) $2a\sqrt[3]{x} + 3b\sqrt{x} - 3b\sqrt[3]{x} - 2a\sqrt{x}$ **d)** $3x\sqrt{a} - 2y\sqrt[3]{a} + 3x\sqrt[3]{a} - 2y\sqrt{a}$ **(L: a, d)**

5. Nach dem Radizieren sind zusammenzufassen:

a) $7\sqrt[3]{64} - 3\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{8} + 3\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$

b) $\sqrt{(2a)^2} - \left(\sqrt[3]{3a}\right)^3 + 10a$ **c)** $\sqrt{8} - \sqrt[3]{27}$ **d)** $\sqrt{9b^2} - (\sqrt{48})^2$.

Multiplizieren und Dividieren von Wurzelausdrücken mit gleichen Wurzelexponenten

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ ; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = (a : b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a : b}\,.$$

▶ **Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden multipliziert (dividiert), indem das Produkt (der Quotient) der Radikanden mit dem Wurzelexponenten radiziert wird.**

Ebenso gilt $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$.

Das Produkt (der Quotient) von Wurzeln, deren Exponenten verschieden sind, kann durch einen Wurzelausdruck dargestellt werden, nachdem man gleiche Wurzelexponenten hergestellt hat.
Man erhält

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{m \cdot n}} \cdot b^{\frac{m}{m \cdot n}} = (a^n)^{\frac{1}{m \cdot n}} \cdot (b^m)^{\frac{1}{m \cdot n}} = (a^n \cdot b^m)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$$

und $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{m \cdot n}} : b^{\frac{m}{m \cdot n}} = (a^n : b^m)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^n : b^m}\,.$$

● **Aufgaben**

1. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; $2 \cdot \sqrt{64} \cdot 3 \cdot \sqrt{4}$; $\sqrt{128} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$; $7\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{18}$; $(2\sqrt{256})^2$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}$; $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; $3\sqrt[3]{9} \cdot 6\sqrt[3]{3}$; $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2$; $2\sqrt[3]{2} \cdot 3\sqrt[3]{3}$; $4\sqrt[3]{4} \cdot 5\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{32}$

2. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$; $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$; $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{48}$

b) $\sqrt{5x} \cdot \sqrt{2y} \cdot \sqrt{10xy}$; $\sqrt{3u} \cdot \sqrt{2v} \cdot \sqrt{24uv}$; $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$

c) $\sqrt[3]{12x^2y} \cdot \sqrt[3]{30xyz} \cdot \sqrt[3]{75yz^2}$; $\sqrt[n]{a^3} \cdot \sqrt[n]{a^{n-3}}$; $\sqrt[m]{z^2} \cdot \sqrt[m]{z^3} \cdot \sqrt[m]{z^{m-5}}$; $\sqrt[x]{(a+b)^{x-y}} \cdot \sqrt[x]{(a+b)^y}$

3. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$; $\sqrt{27} \cdot \sqrt{6}$; $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{20}$; $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{32}$; $\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{3a^2b}$; $\sqrt[3]{2xy} \cdot \sqrt[3]{4y^2}$

4. a) $\sqrt{b^2c^2}$; $\sqrt{a^4c^2}$; $\sqrt{u^2v^2w^2}$; $\sqrt{a^2b^4c^6d^8}$; $\sqrt{9a^2b^6}$; $\sqrt{25x^{10}}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{(a-b)^2c^4}$

b) $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt[3]{m^3n^3}$; $\sqrt[3]{(uv)^3}$; $\sqrt[3]{a^6b^{12}}$; $\sqrt[3]{2m^3 + 6m^3}$; $\sqrt[3]{8x^3y^6}$; $\sqrt[3]{64a^3b^3}$

5. $\sqrt{a^5b^3c}$; $\sqrt[3]{a^5b^4c^2}$; $\sqrt{8x^3y}$; $\sqrt[3]{81xy^4}$; $\sqrt{6z^{2n+1}}$; $\sqrt[3]{24a^{3n+2}}$; $\sqrt[n]{(a+b)^{n+1}}$ **(L)**

6. Die folgenden Polynome sind durch Umformen der Glieder möglichst zu vereinfachen:

a) $5 \cdot \sqrt{18} + 6 \cdot \sqrt{32} - 4 \cdot \sqrt{50} + 3 \cdot \sqrt{72} - 2 \cdot \sqrt{98}$

b) $20 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{75} - 7 \cdot \sqrt{48} + 8 \cdot \sqrt{27} - 6 \cdot \sqrt{108}$

c) $8 \cdot \sqrt[3]{40} + 7 \cdot \sqrt[3]{135} - 5 \cdot \sqrt[3]{40} + 6 \cdot \sqrt[3]{135} + 3 \cdot \sqrt[3]{320}$

d) $9 \cdot \sqrt[3]{320} - 4 \cdot \sqrt[3]{135} - 2 \cdot \sqrt[3]{625} + 10 \cdot \sqrt[3]{40} - 3 \cdot \sqrt[3]{40}$

e) $\sqrt[3]{8x^3 + 8y^3} + \sqrt[3]{27x^3 + 27y^3}$ (L: a bis d)

7. a) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5})$

b) $(4 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{6}) \cdot (2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot \sqrt{6})$ (L: a, b)

8. Die folgenden Wurzeln sind zu berechnen:

a) $\sqrt{80}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{363}$; $\sqrt{2{,}88}$; $\sqrt{1{,}5}$

mit Hilfe von $\sqrt{2} = 1{,}414$; $\sqrt{3} = 1{,}732$; $\sqrt{5} = 2{,}236$; $\sqrt{6} = 2{,}450$; $\sqrt{7} = 2{,}646$;

b) $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{48}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{189}$; $\sqrt[3]{500}$; $\sqrt[3]{0{,}08}$; $\sqrt[3]{3{,}087}$; $\sqrt[3]{0{,}32}$

mit Hilfe von $\sqrt[3]{2} = 1{,}260$; $\sqrt[3]{3} = 1{,}442$; $\sqrt[3]{4} = 1{,}587$; $\sqrt[3]{5} = 1{,}710$;
$\sqrt[3]{6} = 1{,}817$; $\sqrt[3]{7} = 1{,}913$; $\sqrt[3]{9} = 2{,}080$; $\sqrt[3]{10} = 2{,}154$.

9. a) $(\sqrt{2a} - \sqrt{6b} - 3\sqrt{a} + \sqrt{10b}) \cdot \sqrt{6ab}$ b) $(\sqrt{3x} + \sqrt{5y} - 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{15y}) \cdot \sqrt{5xy}$

c) $\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}\right) \cdot \sqrt[3]{abc}$ d) $\left(\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{y^2 z} - \sqrt[3]{xz^2}\right) \cdot \sqrt[3]{xyz}$

e) $\left(\sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{ab^{n-1}} + \sqrt[n]{a^2 b^{n-2}}\right) \cdot \sqrt[n]{ab}$ f) $\left(\sqrt[m]{a^{m-2}b^2} + \sqrt[m]{a^2 b^{m-2}} + \sqrt[m]{a^3 b^{n-3}}\right) \cdot \sqrt[m]{a^2 b^3}$

(L: a, c, e)

10. a) $(3 + \sqrt{5})^2$ b) $(5 + \sqrt{3})^2$ c) $(\sqrt{5} - 2)^2$ d) $(3 - \sqrt{2})^2$

11. a) $(2\sqrt{7} + 7\sqrt{2})^2$ b) $(3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})^2$ c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$ d) $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{7})^2$ (L: a, c)

12. a) $(7 + 2\sqrt{5}) \cdot (7 - 2\sqrt{5})$ b) $(5\sqrt{3} + 7) \cdot (5\sqrt{3} - 7)$ c) $(5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$

13. a) $(\sqrt{x + y} + \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + y} - \sqrt{x})$ b) $(a + \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a - \sqrt{a^2 - b^2})$

c) $(x + \sqrt{1 - x^2}) \cdot (x - \sqrt{1 - x^2})$ d) $(\sqrt{u + v} + \sqrt{u - v}) \cdot (\sqrt{u + v} - \sqrt{u - v})$ (L: a bis d)

14. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$; $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{300}}$; $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$; $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{10\,000}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$; $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

15. $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$; $\frac{\sqrt[3]{320}}{\sqrt[3]{5}}$; $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{432}}$; $\frac{\sqrt[3]{88}}{\sqrt[3]{297}}$; $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{448}}$; $\frac{\sqrt[3]{1458}}{\sqrt[3]{2000}}$; $\frac{4 \cdot \sqrt[3]{864}}{3 \cdot \sqrt[3]{4}}$; $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

16. $\frac{\sqrt{9x}}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sqrt{18a}}{\sqrt{2a}}$; $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sqrt{x^n}}{\sqrt{x^{n-2}}}$; $\frac{\sqrt{z^{2n+1}}}{\sqrt{z}}$; $\frac{\sqrt[3]{54b^7}}{\sqrt[3]{2b}}$; $\frac{\sqrt[3]{40c}}{\sqrt[3]{5c^7}}$; $\frac{\sqrt{n^2 \cdot m}}{\sqrt{m}}$; $\frac{\sqrt{y^3 \cdot z^2}}{\sqrt{y \cdot z}}$

17. $\dfrac{\sqrt[n]{z^{n+1}}}{\sqrt[n]{z}}$; $\dfrac{\sqrt[m]{(a+b)^n}}{\sqrt[m]{(a+b)^{m+n}}}$; $\dfrac{\sqrt[a]{x^b}}{\sqrt[a]{x^{a+b}}}$; $\dfrac{\sqrt[x]{(a-b)^{x+y}}}{\sqrt[x]{(a-b)^y}}$; $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$ (L)

18. $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$; $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$; $\sqrt{\dfrac{121}{144}}$; $\sqrt{\dfrac{2}{9}}$; $\sqrt{6\dfrac{1}{8}}$; $\sqrt{4\dfrac{1}{9}}$; $\sqrt{3\dfrac{1}{5}}$; $\sqrt{3\dfrac{1}{9}}$

19. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{125}{216}}$; $\sqrt{\dfrac{4a}{b^2}}$; $\sqrt{\dfrac{x}{25y^2}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{4x}{27y^3}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{64b^9}}$

20. $\sqrt[n]{\dfrac{n\cdot a^n}{b^n}}$; $\sqrt[m]{\dfrac{m}{x^m}}$; $\sqrt[n]{\dfrac{(a-b)^n}{c^{2n}}}$; $\sqrt[m]{\dfrac{x^{2m}}{y^m z^m}}$ (L)

Potenzieren und Radizieren von Wurzelausdrücken

Ist $\sqrt[n]{a}$ $(a \geqq 0)$ mit m zu potenzieren, so erhält man

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

In der Wurzelschreibweise gilt somit

$$(18)\quad \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$$

▶ **Anstatt eine Wurzel mit einer Zahl zu potenzieren, kann ihr Radikand mit der Zahl potenziert und diese Potenz mit dem Wurzelexponenten radiziert werden.**

Da ein Bruch ohne Wertänderung gekürzt oder erweitert werden kann, bleibt der Wert der Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ ungeändert, wenn der Exponent $\frac{m}{n}$ gekürzt oder erweitert wird.

Der Wurzelausdruck $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ändert somit seinen Wert nicht, wenn Zähler und Nenner des Exponenten durch einen gemeinsamen Faktor geteilt oder wenn Zähler und Nenner des Exponenten mit derselben Zahl multipliziert werden.

Es gilt:

$$(19)\quad \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \sqrt[n\cdot z]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}\cdot z}}.$$

Durch dieses Kürzen oder Erweitern der Wurzelexponenten können Wurzeln mit ungleichen Wurzelexponenten in Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten verwandelt werden.

Ist $\sqrt[n]{a}$ mit m zu radizieren, so erhält man $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

In der Wurzelschreibweise lautet diese Gleichung:

$$(20)\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n\cdot m]{\boldsymbol{a}}.$$

▶ **Eine Wurzel kann mit einer Zahl radiziert werden, indem man ihren Wurzelexponenten mit der Zahl multipliziert und den Radikanden mit diesem Produkt radiziert.**

Von rechts nach links gelesen besagt die obige Gleichung:

Anstatt eine Zahl mit einem Produkt zu radizieren, kann die Zahl nacheinander mit den Faktoren des Produktes radiziert werden. Die Reihenfolge ist dabei gleichgültig.

Bei einem Wurzelausdruck $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ können die Wurzelexponenten vertauscht werden. Er kann auch durch eine Wurzel ersetzt werden, deren Wurzelexponent das Produkt der gegebenen Wurzelexponenten ist.

Aufgaben

1. $\sqrt[3]{5^6}$; $\sqrt[4]{3^{12}}$; $\sqrt[6]{7^3}$; $\sqrt[4]{13^2}$; $\sqrt[10]{32}$; $\sqrt[4]{x^{2n}}$; $\sqrt[2n]{x^4}$; $\sqrt[n]{a^{mn}}$; $\sqrt[3]{x \cdot y^6}$; $\sqrt[4n]{a^{8n}b^{4m}}$ (L)

2. Wie lauten die Wurzeln

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{7}$; $\sqrt[3]{3^2}$; $\sqrt{2^3}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[n]{a}$

nach dem Erweitern der Bruchexponenten mit 2?

b) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[3]{2^2}$; $\sqrt[4]{3^3}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x^n}$

mit den Wurzelexponenten 12? (L: a, b)

3. Unter einer Wurzel sind zusammenzufassen

$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[2n]{x^a} \cdot \sqrt[5n]{x^{2a-b}}$; $\sqrt[3x]{z^{5-2n}} \cdot \sqrt[4x]{z^{2n-4}}$; $\sqrt[n]{x^2} \cdot \sqrt[m]{x^3}$. (L)

4. a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2}$ (L: b)

5. a) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ **b)** $\sqrt{a^3} : \sqrt[3]{a^2}$ (L: a)

6. a) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ **b)** $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ (L: a)

7. a) $\sqrt[3]{x^7} \cdot \sqrt[9]{x^4} \cdot \sqrt[6]{x^5}$ **b)** $\sqrt[4]{z^3} \cdot \sqrt[3]{z^3} : \sqrt{z}$ (L: a, b)

8. a) $\sqrt[3]{(a+b)^2} \cdot \sqrt[4]{(a+b)^3}$ **b)** $\sqrt[4]{(a-b)^3} : \sqrt[3]{(a-b)^2}$ (L: a, b)

9. $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$; $\sqrt{\sqrt[5]{49}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{625}}$

10. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[6]{b^5}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{x^3y^9}}$; $\sqrt{\sqrt[5]{25(a-b)^4}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{125(a+b)^6}}$ (L)

11. $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$; $\sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}}$; $\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}$; $\sqrt[3]{3z^2 \cdot \sqrt[5]{2z}}$; $\sqrt{2a \cdot \sqrt{3a}}$; $\sqrt{3a \cdot \sqrt{2a}}$

12. a) $3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{xy}} + 6 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{xy}} - 4 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{xy}} - 2 \cdot \sqrt{\sqrt[6]{xy}}$

b) $3 \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x-y}} - 2 \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x-y}} - 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{x-y}} + 6 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{x-y}}$ (L: a)

1.5.6. Zusammenfassung der Rechengesetze für Potenzen und Wurzeln

Zunächst war die Potenz nur für natürliche Zahlen als Exponenten erklärt. Außer den Bemerkungen zum Addieren und Subtrahieren dieser Potenzen wurden die fünf Rechenregeln

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad a^m : a^n = a^{m-n}\ (m > n),$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m, \qquad a^m : b^m = (a : b)^m, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

aufgestellt. Dann wurde der Potenzbegriff erst auf alle ganzzahligen und schließlich auf beliebige rationale Zahlen (Brüche) als Exponenten erweitert, und zwar so, daß die Rechengesetze auch für diese Potenzen gültig bleiben.

Nach dieser Erweiterung des Potenzbegriffes fassen die Formeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m; \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

die Regeln für das Rechnen mit Potenz- und Wurzelausdrücken zusammen; m und n sind dabei beliebige rationale Zahlen.

Aufgaben

1. Wie werden Potenzen mit gleichen Basen multipliziert?
2. Für welche Werte gilt $x^y = y^x$? (L)
3. Warum ist $(a - b)^2 = (b - a)^2$, $(1 - x)^4 = (x - 1)^4$?
4. Welcher Unterschied besteht zwischen $(a - b)^3$ und $(b - a)^3$, wenn a verschieden von b ist?
5. Die Potenzausdrücke $(2^3)^2$ und $2^{(3^2)}$ sind zu berechnen. (L)
6. Die Ausdrücke $(-3x^3)^2$ und $[(-3x)^2]^3$ sind zu berechnen. (L)
7. Aus einem Zylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe h wird ein Kegel mit demselben Grundkreisdurchmesser und derselben Höhe herausgedreht. Wie groß ist der Restkörper? (L)
8. a) $4a^3 \cdot (2a^2 + a^3) - 8 \cdot (a^5 + a^6) - 3a^2(2a^4 - 4a^6) + 2a^4(6a^4 - 3a^2)$
   b) $(a^3 - a^2) \cdot (a^2 + a)$ c) $(a^{12} - a^4) \cdot (a^2 + a^6)$ d) $(1^5 + 1^3) \cdot (1 - 1^3)$ (L: a bis d)
9. a) $a^7 : a^3$ b) $a^{12} : a^5$ c) $b^9 : b^8$ d) $\dfrac{a^2m^4}{am}$; $\dfrac{a^4l^6}{a^2l^3}$; $\dfrac{b^5x^3y^6}{x^2y^4}$
10. a) $(54a^5 + 9a^2) : 3a^2$; $(16a^5 - 4a^4) : 2a^3$; $\dfrac{28x^4y^3 - 21x^3y^4}{7x^2y^2}$
    b) $(a^{2x} + a^{x+1}) : a^x$; $(4a^{2m-2} - 8a^{m+2}) : a^2$
11. a) $a^4 \cdot a^{-2}$; $a^3 \cdot a^0$; $m^5 \cdot m^{-1}$; $1^{-2} \cdot 1^{-3}$; $g^{-2} \cdot g^3$
    b) $a^5 : a^{-2}$; $a^4 : a^{-3}$; $m^6 : m^{-2}$; $r^{-4} : r^5$; $g^{-2} : g^4$
    c) $(a^3)^{-2}$; $(a^5)^3$; $(b^{-4})^2$; $(m^3)^0$ (L: a bis c)

1.5.7. Umkehrfunktionen

Wir haben im Abschnitt 1.1.1. die Funktionen als Mengen von geordneten Paaren kennengelernt. Als Beispiel soll hier noch einmal die uns bereits bekannte Funktion mit dem analytischen Ausdruck $y = x^2$ angeführt werden (Abb. 1.8.). Die durch ihn bestimmte Menge von geordneten Paaren enthält u.a. auch folgende in der ersten Wertetafel zusammengestellten Paare:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

y	9	4	1	0	1	4	9
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

Jedem Wert x aus dem Definitionsbereich ist hier wie bei allen Funktionen eindeutig ein Wert y des Wertevorrats zugeordnet. (Der Definitionsbereich besteht bei dieser Funktion aus allen reellen Zahlen, der Wertevorrat enthält alle reellen Zahlen y mit $y \geqq 0$). Nun wollen wir die Bestandteile eines jeden geordneten Paares vertauschen. Dadurch wird jetzt jedem Wert y ein Wert für x zugeordnet. Wir erhalten eine neue Menge von geordneten Paaren. Einige von ihnen sind in der zweiten Wertetafel aufgeführt. Diese neue Menge von geordneten Paaren ist nun aber keine Funktion, denn die gegebene Zuordnung der Zahlen ist nicht mehr eindeutig. So sind z.B. der Zahl 9 aus der ersten Zeile die beiden Zahlen 3 und -3 der zweiten Zeile zugeordnet. Soll bei der Vertauschung wiederum eine Funktion entstehen, so müssen wir den Definitionsbereich der gegebenen Funktion z.B. auf alle reellen Zahlen x mit $x \geqq 0$ einschränken. Das bedeutet, daß von dem Bild der ersten, nicht eingeschränkten Funktion nur noch die rechte Parabelhälfte übrig bleibt. Von den als Beispiel angeführten Paaren der beiden Wertetafeln bleiben dann nur noch folgende Paare übrig:

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

y	0	1	4	9
x	0	1	2	3

Jetzt ist in der zweiten Wertetafel der Zahl 9 nur noch eine Zahl, nämlich die 3, zugeordnet. Dasselbe gilt für alle anderen Werte y, die nicht in der Wertetafel aufgeführt werden. Damit ist die Menge der geordneten Paare, die wir durch Vertauschung erhalten haben, ebenfalls eine Funktion. Wir nennen sie die Umkehrfunktion oder inverse Funktion [1] zu der auf den Definitionsbereich $x \geqq 0$ eingeschränkten Funktion mit der Gleichung $y = x^2$. Bei der Umkehrung einer Funktion vertauschen sich, wie wir am Beispiel gesehen haben, Definitionsbereich und Wertevorrat. Es ist daher vorteilhaft, bei der Umkehrfunktion die Bezeichnung der Variablen zu vertauschen, um die übliche Bezeichnungsweise für unabhängige und abhängige Variable zu erhalten:

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

[1] Hier sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß beide Bezeichnungen gleichwertig sind.

1.5.8. Die Potenzfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$

Man kann nun auch, ohne die Menge der geordneten Paare zu betrachten, aus der Gleichung der gegebenen Funktion direkt die Gleichung ihrer Umkehrfunktion erhalten, falls die Funktion durch einen analytischen Ausdruck gegeben ist. Die Gleichung der gegebenen Funktion lautete:

$$y = f(x) = x^2 \text{ (DB: } x \geqq 0;\ \text{WV: } y \geqq 0) .$$

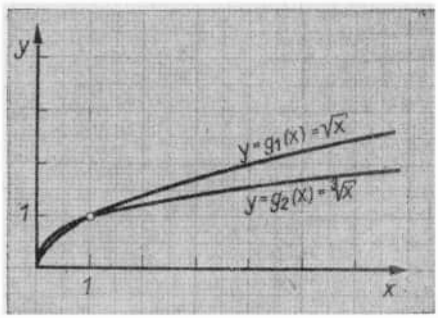
Wir fassen nun x als abhängige Variable auf und lösen die Gleichung nach x auf:

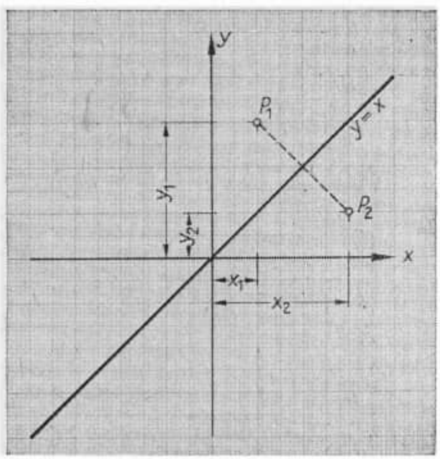
$$x = g(y) = \sqrt{y} \text{ (DB: } y \geqq 0;\ \text{WV: } x \geqq 0) .$$

Definitionsbereich und Wertevorrat sind hier auf Grund der Definition der Wurzel festgelegt. Das ist der analytische Ausdruck der Umkehrfunktion in expliziter Form. Die Rückkehr zur alten Variablenbezeichnung liefert schließlich:

$$y = g(x) = \sqrt{x} \text{ (DB: } x \geqq 0;\ \text{WV: } y \geqq 0) .$$

Genauso erhält man aus dem analytischen Ausdruck der Funktion $y = f(x) = x^n$ den analytischen Ausdruck der zu ihr inversen Funktion $x = g(y) = \sqrt[n]{y}$ in expliziter Form. Tauscht man schließlich noch die Variablen aus, so erhält man $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$. Unter der Funktion $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ soll im folgenden für jede natürliche Zahl $n > 1$ stets die Funktion verstanden werden, die jedem Argument x eine nicht negative Zahl y zuordnet. Die Abbildung 1.25. zeigt den Verlauf der graphischen Darstellung der Funktionen $y = g_1(x) = \sqrt{x}$ und $y = g_2(x) = \sqrt[3]{x}$, der für die graphischen Darstellungen der Funktionen $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ typisch ist. Die Verwendung des Wurzelsymbols erfordert eine Einschränkung des Definitionsbereichs aller Funktionen $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$; derartige Funktionen sind nur für nichtnegative x erklärt. Zu den Bildern der Funktionen $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ gelangt man auch auf andere Weise. Tauscht man die Koordinaten des Punktes $P_1(x_1; y_1)$ gegeneinander aus, so daß daraus der Punkt $P_2(x_2; y_2)$ mit $x_2 = y_1$ und $y_2 = x_1$ entsteht, so stellt man fest, daß die Bilder dieser Punkte symmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$ liegen (Abb. 1.26.). Anders ausgedrückt: Der Punkt P_2 geht aus dem Punkt P_1 durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervor. Entsprechend kann man jeden Punkt des Bildes der Funktion $y = f_1(x) = x^2$ an der Geraden





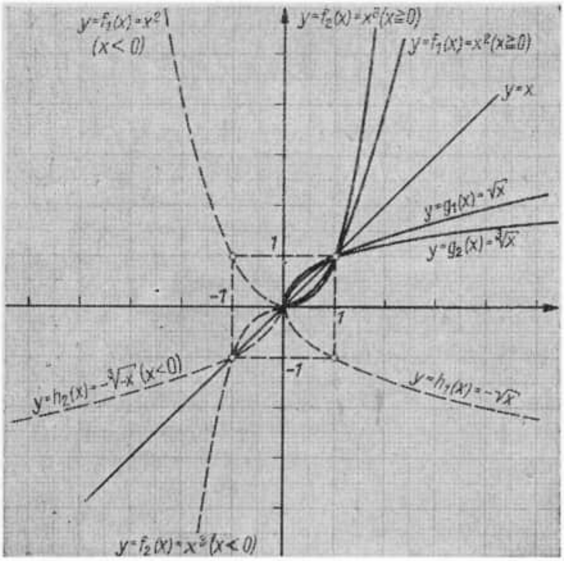


Abb. 1.27.

$y = x$ spiegeln. Er geht dann in den Punkt über, dessen Koordinaten gegenüber dem ursprünglichen Punkt vertauscht sind. Das aber ist nach der Erklärung der Wurzelfunktion ein Punkt des Bildes der Funktion $y = g_1(x) = \sqrt{x}$. Dabei gehen alle Punkte mit $x \geqq 0$ der rechten Hälfte des Funktionsbildes von $y = f_1(x) = x^2$ in das Bild der Funktion $y = g_1(x) = \sqrt{x}$ über. Die andere Hälfte (die Punkte mit $x < 0$) wird durch das Spiegeln in das Bild der Funktion $y = h_1(x) = -\sqrt{x}$ überführt (Abb. 1.27.). Die Bilder der Funktionen $y = f_1(x)$ bzw. $y = g_1(x)$ bzw. $y = h_1(x)$ sind charakteristisch für alle Funktionen $y = f(x) = x^n$ bzw. $y = g(x) = \sqrt[n]{x}$ bzw. $y = h(x) = -\sqrt[n]{x}$ mit geradem Exponenten bzw. Wurzelexponenten n. Die Potenzfunktionen $y = x^{2k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) mit ungeradem Exponenten sind allerdings in ihrem gesamten Definitionsbereich umkehrbar. Man kann jedoch die analytischen Ausdrücke ihrer Umkehrfunktionen explizit nur mit Hilfe von zwei Gleichungen angeben. Geht man z.B. von $y = x^3$ aus, so erhält man als analytischen Ausdruck der zugehörigen Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt[3]{x}\,, \text{ falls } x \geqq 0 \quad \text{und} \quad y = -\sqrt[3]{-x}\,, \text{ falls } x < 0\,.$$

In impliziter Form lassen sich beide Gleichungen zu $y^3 = x$ zusammenfassen.

Will man die Umkehrung einer beliebigen Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ bilden, so hat man darauf zu achten, daß bei dieser Umkehrung tatsächlich eine Funktion entsteht, d.h., daß die Zuordnung nach der Umkehrung wieder eindeutig ist. Ist das nicht der Fall, so ist die gegebene Funktion in ihrem Definitionsbereich nicht umkehrbar. Sie kann jedoch in Teilbereichen ihres Definitionsbereiches umkehrbar sein, wie das im Beispiel $y = x^2$ der Fall war. Zum Beispiel ist eine konstante Funktion mit der Gleichung $y = c$ (c konstant) in ihrer Gesamtheit nirgends umkehrbar, man könnte sie höchstens auf jeweils ein einziges geordnetes Paar einschränken und dieses dann umkehren.

Bildet man von der inversen Funktion einer gegebenen Funktion wiederum die Umkehrung, so erhält man die ursprünglich gegebene Funktion.

● **Aufgaben**

1. Die Funktion $y = -x^3$ ist im Bereich $-2 \leqq x \leqq +2$ graphisch darzustellen, und der Verlauf der Kurve ist zu beschreiben. Vergleichen Sie den Kurvenverlauf mit dem Bild von $y = x^3$!

2. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist abhängig von der Quadratseite darzustellen. Aus der sich ergebenden Kurve ist zu entnehmen, bei welcher Seitenlänge das Quadrat den Flächeninhalt 3 hat.

3. Die Funktion $y = -x^{-2}$ ist im Bereich $-3 \leqq x < 0$ und $0 < x \leqq 3$ graphisch darzustellen, und der Verlauf des Diagramms ist zu beschreiben. (L)

4. Für welchen Wert von x ist die Funktion a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{1}{x-3}$; c) $y = \frac{1}{x+2}$ nicht erklärt?

5. Die Bilder der Funktionen a) $y = \frac{1}{x-2}$; b) $y = \frac{1}{x+3}$ sind zu zeichnen und zu beschreiben. (L: a)

6. Wie erhält man das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$, ohne die zugehörige Wertetafel zu verwenden? (L)

7. Das Bild der Funktion $y = \sqrt[4]{x}$ ist durch Spiegelung des Bildes der Funktion $y = x^4$ für $x \geqq 0$ an der Geraden $y = x$ zu gewinnen.

8. Das Bild der Funktion $y = \sqrt[5]{x}$ ist durch Spiegelung des Bildes der Funktion $y = x^5$ für $x \geqq 0$ an der Geraden $y = x$ zu gewinnen.

9. Die Kantenlänge y eines Würfels ist abhängig vom Rauminhalt x darzustellen. Dem zugehörigen Bild ist zu entnehmen, bei welcher Kantenlänge der Würfel den Rauminhalt 5 hat.

10. Das Bild der Funktion $y = \sqrt{x^3}$ ist nach einer Wertetafel punktweise zu konstruieren und der Verlauf der Kurve ist zu beschreiben. (L)

1.5.9. Zusammenfassung

Die graphischen Darstellungen der Potenzfunktionen $y = x^n$ ergeben bei geradzahligen positiven Exponenten n Kurven, die symmetrisch zur y-Achse im I. und II. Quadranten und mit dem Scheitel im Koordinatenursprung liegen. Bei ungeradzahligen positiven Exponenten n entstehen Kurven, die durch den I. und III. Quadranten zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung gehen. Der im I. Quadranten liegende Kurventeil krümmt sich nach der positiven y-Achse zu, der im III. Quadranten nach der negativen y-Achse, der Wendepunkt der Krümmung liegt im Koordinatenursprung. Für negative geradzahlige Exponenten n entstehen Kurven mit zwei voneinander getrennten Ästen (Zweigen). Der eine Ast liegt im I. Quadranten, der andere im II. Quadranten, symmetrisch zum ersten in bezug auf die y-Achse. Die Äste nähern sich den Koordinatenachsen asymptotisch. Auch für negative ungeradzahlige Exponenten n entstehen Kurven mit zwei Ästen. Der eine Ast liegt im I. Quadranten, der andere liegt zentralsymmetrisch zum ersten in bezug auf den Koordinatenursprung im III. Quadranten. Die Äste nähern sich den Koordinatenachsen asymptotisch. Die für $n = -1$ entstehende Kurve ist eine gleichseitige Hyperbel.

Die graphischen Darstellungen der Funktionen $y = \sqrt[n]{x}$ liegen bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu den graphischen Darstellungen der Funktionen $y = x^n$ mit $x \geqq 0$. Sie beginnen im Koordinatenursprung und verlaufen nur innerhalb des I. Quadranten. Dem Spiegelbild der Funktion $y = x^2$ mit $x < 0$ entspricht im IV. Quadranten die graphische Darstellung der Funktion $y = -\sqrt{x}$.

Aufgaben

1. Was gilt für die Koordinaten x_1; y_1 und x_2; y_2 der Punkte P_1 und P_2, die auf der Parabel
   a) $y = x^2$ axialsymmetrisch; **b)** $y = x^3$ zentralsymmetrisch liegen? (L: a, b)
2. Auf welche Weise können
   a) die axialsymmetrischen Teile der Bilder der Funktionen $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ bzw. $y = -\sqrt{x}$
   b) die zentralsymmetrischen Teile der Kurven $y = x^3$ und $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geqq 0)$ bzw. $y = -\sqrt[3]{-x}$ $(x < 0)$ zur Deckung gebracht werden? (L: a, b)
3. Welchen Verlauf nimmt das Bild der Funktion
   a) $y = x^3$; **b)** $y = x^{-2}$?
4. Was ergibt ein Vergleichen der Bilder der Funktionen $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{x^2}$? (L)
5. Warum existiert die Funktion $y = \sqrt[n]{x}$ nur für $x \geqq 0$?
6. Für die Funktion $y = \sqrt[3]{x^2}$ ist
   a) eine Wertetafel zu berechnen, **b)** das Bild punktweise zu konstruieren,
   c) der Kurvenverlauf zu beschreiben. (L)

1.6. Exponentialfunktionen

1.6.1. Potenzfunktionen $y = x^c$ (c eine beliebige reelle Zahl)

In den Abschnitten 1.3. bis 1.5. haben wir die Potenzfunktionen kennengelernt. Ihre analytischen Ausdrücke hatten die Form $y = x^c$. Alle diese Funktionen entstanden so, daß bei fester Zahl c jedem Wert der Basis x ein Funktionswert y zugeordnet wurde. Dabei war c zunächst auf die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... beschränkt. Dann wurde der Bereich der für c zugelassenen Zahlen schrittweise erweitert, und zwar wurde als erstes die Zahl Null hinzugenommen und dann die Potenz für alle ganzzahligen Exponenten definiert. Schließlich wurden dann für c beliebige rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ zugelassen. Wir wollen nun die Potenz auch für Exponenten erklären, die nicht rational sind, die also nicht in der Form $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q dargestellt werden können. Solche irrationalen Zahlen sind z.B. alle Quadratwurzeln, deren Radikanden keine Quadratzahlen (und auch keine Quotienten von Quadratzahlen) sind, und alle Kubikwurzeln, deren Radikanden keine Kubikzahlen und keine Quotienten von Kubikzahlen sind. Es gibt jedoch noch weitaus mehr irrationale Zahlen. Die Menge der irrationalen Zahlen besteht nämlich gerade aus allen unendlichen, nicht periodischen Dezimalbrüchen. Die Gesamtheit der rationalen und irrationalen Zahlen nennt man reelle Zahlen. Wollen wir eine irrationale Zahl als Dezimalbruch hinschreiben, so ist das nicht möglich; denn wir können immer nur endlich viele Stellen des Dezimalbruchs schreiben. Wir müssen uns also beim numerischen Rechnen mit irrationalen Zahlen mit rationalen Näherungswerten dieser Zahlen begnügen. So schreiben wir z.B. für $\sqrt{2}$ je nach der geforderten Genauigkeit:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4 \ (1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5, \text{ weil } 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2);$$
$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \ (1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42, \text{ weil } 1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2);$$
$$\sqrt{2} \approx 1{,}414 \ (1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415, \text{ weil } 1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2);$$
$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \ (1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143, \text{ weil } 1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2) \quad \text{usw.}$$

Auf die gleiche Art berechnen wir auch eine Potenz mit irrationalem Exponenten c. Wir stellen zunächst c durch einen rationalen Näherungsdezimalbruch mit geforderter Genauigkeit dar und erhalten so für jeden Wert von x einen eindeutig bestimmten Funktionswert $y = x^c$ mit der geforderten Genauigkeit. Dabei müssen wir aus Gründen, die in 1.6.2. erläutert werden, $x > 0$ voraussetzen.

Beispiel 9:

$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4} \approx 4{,}6;$ $\quad 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41} \approx 4{,}71;$ $\quad 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,414} \approx 4{,}727;$

$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4142} \approx 4{,}7283 \ldots$

Das Verfahren, nach dem hier die rationalen Näherungswerte für $3^{\sqrt{2}}$ berechnet wurden, lernen wir später kennen. Ohne Beweis sei hier noch bemerkt, daß die Näherungswerte für $3^{\sqrt{2}}$ einer e i n d e u t i g b e s t i m m t e n reellen Zahl zustreben und um so dichter bei dieser Zahl liegen, je genauer der Näherungswert für $\sqrt{2}$ im Exponenten angegeben wird. Diese Zahl wird jedoch von den Näherungswerten nie erreicht, da man auch für $\sqrt{2}$ stets nur eine genäherte Dezimalzahl angeben kann. Ebenso streben bei jeder anderen Basis $x > 0$ die Funktionswerte $y = x^{c_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ einer eindeutig bestimmten reellen Zahl x^c zu, falls die Näherungswerte c_n der reellen Zahl c zustreben. Damit haben wir die Potenzen für beliebige reelle Exponenten erklärt. Für sie gelten die gleichen Rechengesetze wie für Potenzen mit rationalem Exponenten.

1.6.2. Die Exponentialfunktionen mit der Gleichung $y = a^x$ $(a > 0)$

Bei den Potenzfunktionen ist die Basis variabel und der Exponent konstant (z.B. $y = x^2$). Jetzt soll der Exponent variabel und die Basis konstant sein (z.B. $y = 2^x$). Die so entstehenden Funktionen nennt man Exponentialfunktionen.

Beispiel 10:

$y = 2^x$ $(a = 2)$

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, ist die Potenz 2^x für jede reelle Zahl als Exponent erklärt. Daher ist der Definitionsbereich der durch die Gleichung $y = 2^x$ gelieferten Funktion die Menge aller reellen Zahlen. Um die graphische Darstellung dieser Funktion zeichnen zu können, schreiben wir uns einige zu ihr gehörenden Paare in Form einer Wertetafel auf.

x	y
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$-\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ (rationaler Näherungswert)
0	$2^0 = 1$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ (rationaler Näherungswert)
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

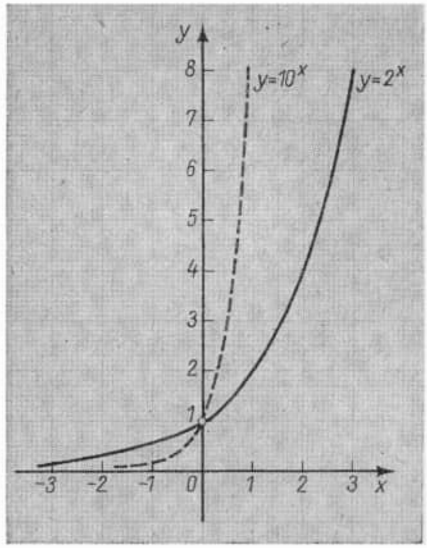


Abb. 1.28.

Die graphische Darstellung der Funktion zeigt Abbildung 1.28.

Beispiel 11:

$y = 10^x \quad (a = 10)$

Auch diese Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert. Wir stellen einige geordnete Paare zu einer Wertetafel zusammen.

x	y	
-1	$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	
$-\frac{1}{2}$	$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316$	(rationaler Näherungswert)
0	$10^0 = 1$	
$\frac{1}{2}$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$	(rationaler Näherungswert)
1	$10^1 = 10$	

In der Abbildung 1.28. ist das Bild dieser Funktion dargestellt.

Beispiel 12:

$y = (-2)^x$

Wir stellen eine Wertetafel zusammen.

x	y	
-3	$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8} = -0{,}125$	
-2	$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	
-1	$(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -0{,}5$	
$-\frac{1}{2}$	$(-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-2}}$	nicht definiert
$-\frac{1}{3}$	$(-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2}}$	nicht definiert
$-\frac{1}{4}$	$(-2)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{-2}}$	nicht definiert
0	$(-2)^0 = 1$	
$\frac{1}{4}$	$(-2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-2}$	nicht definiert
$\frac{1}{3}$	$(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}$	nicht definiert
$\frac{1}{2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$	nicht definiert
1	$(-2)^1 = -2$	
2	$(-2)^2 = 4$	
3	$(-2)^3 = -8$	

Diese Funktion ist, wie wir schon an der Wertetafel erkennen können, nicht für alle Werte von x definiert. Außerdem wechseln die vorhandenen Funktionswerte ständig ihr Vorzeichen. Das Bild dieser Funktion ist keine zusammenhängende Kurve mehr. Ähnlich verhalten sich alle Exponentialfunktionen mit negativer Basis. Die Funktion mit der Gleichung $y = 0^x$ ist für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ definiert. Ihr Bild ist die Abszissenachse ohne den Ursprung. Wegen der ungewöhnlichen Eigenschaften der zuletzt genannten Funktionen schränken wir bei der Betrachtung von Exponentialfunktionen deren Basis a auf positive reelle Zahlen ein. Wir untersuchen also nur Exponentialfunktionen mit der Gleichung $y = a^x$, wobei $a > 0$ gilt.

Beispiel 13:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Um uns einen Überblick über den Verlauf der graphischen Darstellung dieser Funktion zu verschaffen, stellen wir eine Wertetafel zusammen. Wir berücksichtigen dabei die Beziehung $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, die uns aus der Potenzrechnung bekannt ist und die auch für beliebige reelle Exponenten x gilt. Auf Grund dieser Beziehung können wir bei der Aufstellung der Wertetafel die Wertetafel des Beispiels 10 benutzen.

x	y		
-3	2^3		$= 8$
-2	2^2		$= 4$
-1	2^1		$= 2$
$-\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$= \sqrt{2}$	$\approx 1{,}414$
	(rationaler Näherungswert)		
0	2^0		$= 1$
$\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$		$\approx 0{,}707$
	(rationaler Näherungswert)		
1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$		$= 0{,}5$
2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$		$= 0{,}25$
3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$		$= 0{,}125$

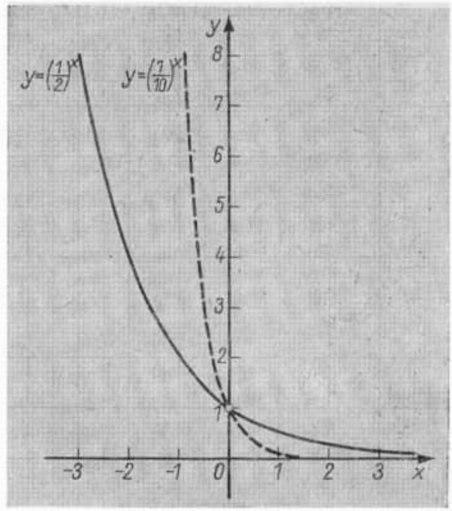


Abb. 1.29.

Die Abbildung 1.29. zeigt das Bild dieser Funktion. Beim Vergleich dieser graphischen Darstellung mit dem Bild der durch $y = 2^x$ beschriebenen Funktion stellen wir fest, daß sie durch Spiegelung an der Ordinatenachse auseinander hervorgehen.

Begründen Sie diese Feststellung!

Beispiel 14:

$$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

Zur Aufstellung einer Wertetafel können wir wieder auf Grund der Beziehung $\left(\frac{1}{10}\right)^x = \frac{1}{10^x} = 10^{-x}$ die Wertetafel aus Beispiel 11 benutzen.

x	y			
-1	10^1		$= 10$	
$-\frac{1}{2}$	$10^{\frac{1}{2}}$	$= \sqrt{10}$	$\approx 3{,}16$	(rationaler Näherungswert)
0	10^0		$= 1$	
$\frac{1}{2}$	$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$		$\approx 0{,}316$	(rationaler Näherungswert)
1	$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$		$= 0{,}1$	

Das Bild dieser Funktion ist ebenfalls in Abbildung 1.29. dargestellt.

Vergleichen Sie auch hier wieder die Bilder der durch $y = 10^x$ und $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ beschriebenen Funktionen!

Beispiel 15:

In der Naturwissenschaft und in der Technik tritt häufig eine Exponentialfunktion auf, deren Basis eine irrationale Zahl ist. Der rationale Näherungswert dieser Zahl auf drei Dezimalstellen genau ist 2,718. Man bezeichnet sie üblicherweise mit e.

$e = 2{,}718281828459\ldots$

Die Abbildung 1.30. zeigt das Bild dieser Funktion.

Vergleiche es mit den Funktionsbildern der Abbildung 1.28.!

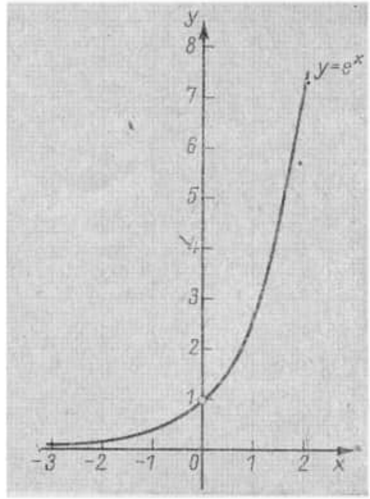


Abb. 1.30.

Zusammenfassung

Die Bilder der Exponentialfunktionen mit der Gleichung $y = a^x$ $(a > 0)$ gehen alle durch den Punkt mit den Koordinaten $(0; 1)$, denn für alle Basen a der Exponentialfunktionen gilt $a^0 = 1$. Sämtliche Funktionswerte der von uns betrachteten Exponentialfunktionen sind positiv. Die Bilder der Exponentialfunktionen, für deren Basen $a > 1$ gilt, steigen im ganzen Definitionsbereich mit wachsendem Exponenten x. Strebt x gegen $-\infty$, so nähern sich die Kurven asymptotisch dem negativen Teil der x-Achse. Gilt für die Basen a der Exponentialfunktionen $0 < a < 1$, so fallen diese in ihrem ganzen Definitionsbereich mit wachsendem Exponenten x, und ihre Bilder nähern sich dabei asymptotisch dem positiven Teil der x-Achse.

Wie verläuft das Bild der Exponentialfunktion mit der Basis $a = 1$?

Vergleichen Sie die Bilder der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ miteinander $(a > 0)$!

1.7. Die Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = \log_a x$ $(a = 2; 10)$

1.7.1. Der Begriff des Logarithmus

Das Logarithmieren als zweite Umkehrung des Potenzierens

Die Gleichung

$$b = a^n \quad (a > 0)$$

gibt einen Zusammenhang der drei Zahlen a, n und b an. Sind zwei der Zahlen gegeben, so ist die dritte Zahl durch diese Gleichung bestimmt. Die Gleichung ist nach derjenigen Zahl aufzulösen, die durch die gegebenen Zahlen ausgedrückt werden soll.

Es sind drei Fälle möglich:

1. Gesucht b, gegeben $a = 5, \quad n = 3$.

Durch Potenzieren ergibt sich $b = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$,

allgemein:

(21) $b = a^n$.

2. Gesucht a, gegeben $b = 125, \quad n = 3$.

Durch Radizieren ergibt sich aus $125 = a^3$ oder $a^3 = 125$

und $a = \sqrt[3]{125} \qquad a = 5$,

allgemein:

(22) $a = \sqrt[n]{b}$ bzw. $a = b^{\frac{1}{n}}$ mit $b \geqq 0$.

3. Gesucht n, gegeben $b = 125, \quad a = 5$.

Die Gleichung $125 = 5^n$ oder $5^n = 125$

ist nach n aufzulösen. Wir erkennen in diesem Zahlenbeispiel sofort, daß n gleich 3 ist. Es muß aber eine besondere Rechenoperation eingeführt werden, durch die eine solche Gleichung in allen Fällen aufgelöst werden kann. Diese Rechenoperation wird Logarithmieren genannt. Die Auflösung der Gleichung $5^n = 125$ nach n wird geschrieben $n = \log_5 125$ (gelesen: n ist gleich dem Logarithmus der Zahl 125 zur Basis 5).

Das Kurzzeichen „log" ist die Abkürzung des Wortes „Logarithmus". Es ist aus *logos* (griech. „Wort") und *arithmos* (griech. „Zahl") durch den Schotten John Neper gebildet worden, der im Jahre 1614 die erste von ihm berechnete und übersichtlich angeordnete Tabelle zusammengehörender Potenzwerte und Potenzexponenten veröffentlichte. Da der griechische Mathematiker Euklid, der um 300 v. u. Z. gelebt hat, das Wort „*logos*" als Bezeichnung des Exponenten einer Potenz verwendete, kann das Wort „Exponentzahl" sinngemäß die Übersetzung des Wortes „Logarithmus" sein.

Löst man die Gleichung $a^n = b$ nach n auf, so ergibt sich entsprechend

(23) $\boldsymbol{n = \log_a b}$

(gelesen: n ist gleich dem Logarithmus von b zur Basis a).

Wie aus $a^n = b$ durch Radizieren die Gleichung $a = \sqrt[n]{b}$ entsteht, so entsteht durch Logarithmieren die Gleichung $n = \log_a b$. Das Radizieren wird deshalb die erste, das Logarithmieren die zweite Umkehrung des Potenzierens genannt.
In der Gleichung $b = a^n$ kann, wie eben ausgeführt wurde, n auch Logarithmus der Zahl b zur Basis a genannt werden. In der durch Logarithmieren erhaltenen Gleichung $n = \log_a b$ bezeichnet man b auch als Numerus (lat. „Zahl"), der zur Basis a den Logarithmus n hat.

Das Potenzieren und seine Umkehrungen

Potenzieren	Radizieren (1. Umkehrung)	Logarithmieren (2. Umkehrung)
$b = a^n$	$a = \sqrt[n]{b}$ $(a \geqq 0;\ b \geqq 0)$	$n = \log_a b$ $(a > 0; b > 0)$
$b = 5^3 = 125$	$a = \sqrt[3]{125} = 5$	$n = \log_5 125 = 3$
b Potenz	a Wurzel	n Logarithmus
a Basis	b Radikand	b Numerus
n Potenzexponent	n Wurzelexponent	a Basis

Der Logarithmus einer Zahl

Die Gleichung $n = \log_5 125$ ist gleichbedeutend mit der Gleichung $5^n = 125$. Beide Gleichungen besagen, daß 5 mit n potenziert 125 liefern soll. Es ergibt sich $n = 3$, also $3 = \log_5 125$. Schreiben wir allgemein $n = \log_a b$ und $a^n = b$, so gilt:

Der Logarithmus einer Zahl $b > 0$ zur Basis $a > 0$ ist der Exponent n, mit dem a potenziert werden muß, damit sich b ergibt.

Beispiel 16:

Als Basis wird zunächst 2 gewählt.
Dann ist z. B. der Logarithmus von 16 gleich 4, denn $2^4 = 16$; aus $2^4 = 16$ folgt $\log_2 16 = 4$.
Ebenso folgt aus

$2^3 = 8$ $\quad \log_2 8 = 3;$ $\quad 2^1 = 2$ $\quad \log_2 2 = 1;$
$2^2 = 4$ $\quad \log_2 4 = 2;$ $\quad 2^0 = 1$ $\quad \log_2 1 = 0.$

Beispiel 17:

Als Basis wird 3 gewählt.
Dann ist z. B. der Logarithmus von 81 gleich 4, denn $3^4 = 81$; aus $3^4 = 81$ folgt $\log_3 81 = 4$.
Ebenso folgt aus

$3^3 = 27$ $\quad \log_3 27 = 3;$ $\quad 3^1 = 3$ $\quad \log_3 3 = 1;$
$3^2 = 9$ $\quad \log_3 9 = 2;$ $\quad 3^0 = 1$ $\quad \log_3 1 = 0.$

Beispiel 18:

Als Basis wird 10 gewählt.
Dann ist z. B. der Logarithmus von 10000 gleich 4, denn $10^4 = 10000$; aus $10^4 = 10000$ folgt $\log_{10} 10000 = 4$.
Ebenso folgt aus

$10^3 = 1000$ $\quad \log_{10} 1000 = 3;$ $\quad 10^1 = 10$ $\quad \log_{10} 10 = 1;$
$10^2 = 100$ $\quad \log_{10} 100 = 2;$ $\quad 10^0 = 1$ $\quad \log_{10} 1 = 0.$

Alle Logarithmen, die zu derselben Basis gehören, bilden ein **Logarithmensystem.** Man bezeichnet die Logarithmen zur Basis 2 kurz als *Zweier-Logarithmen,* die zur Basis 3 als *Dreier-Logarithmen* usf. Die Beispiele lassen erkennen, daß gleiche Logarithmenwerte bei verschiedenen Basen im allgemeinen zu verschiedenen Numeruswerten führen: Die Zahl 4 ist der Logarithmus von 81, wenn man als Basis 3 wählt, sie ist der Logarithmus von 16, wenn man als Basis 2 wählt. Eine Ausnahme bildet die Zahl 1:

▶ **Der Logarithmus von 1 ist in allen Logarithmensystemen gleich 0.**

Aus $a^0 = 1$ folgt für jede positive Zahl a:

(24) $\log_a 1 = 0\,.$

Ferner gilt folgender Satz:

▶ **Der Logarithmus der Basis ist in jedem Logarithmensystem gleich 1.**

Aus $a^1 = a$ folgt für jede positive Zahl a:

(25) $\log_a a = 1\,.$

▶ **Jede positive Zahl, die von 1 verschieden ist, kann Basis eines Logarithmensystems sein.**

● **Aufgaben**

1. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

a) $\log_2 32$ **b)** $\log_2 64$ **c)** $\log_3 243$ **d)** $\log_3 729$ **e)** $\log_{10} 100000$ **f)** $\log_{10} 1000000$ (L: a bis f)

2. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

a) $\log_2 \frac{1}{8}$ **b)** $\log_2 \frac{1}{16}$ **c)** $\log_3 \frac{1}{27}$ **d)** $\log_3 \frac{1}{81}$ **e)** $\log_{10} 0{,}1$ **f)** $\log_{10} 0{,}01$ (L: a, c, e)

3. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen!

a) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ **b)** $\log_2 \sqrt[10]{2}$ **c)** $\log_3 \sqrt[4]{3}$ **d)** $\log_3 \sqrt[5]{3}$ **e)** $\log_{10} \sqrt{10}$ **f)** $\log_{10} \sqrt[3]{10}$ (L)

4. Zu welchen Numeri gehört der Logarithmus **a)** 2; **b)** 3; **c)** 4 in den Logarithmensystemen mit den Basen 2, 3, 4, 5, 6? (L: a, b)

5. Warum ist die Zahl 1 als Basis eines Logarithmensystems ungeeignet? (L)

1.7.2. Die Zehnerlogarithmen

Da man als Basis eines Logarithmensystems jede positive von 1 verschiedene Zahl wählen kann, sind unendlich viele Logarithmensysteme möglich. Es sind jedoch nur zwei in Gebrauch:

1. das System der *Zehnerlogarithmen* mit der Zahl 10 als Basis,
2. das System der *natürlichen Logarithmen* mit der in der höheren Mathematik eine Rolle spielenden Zahl $e = 2{,}718\ldots$ als Basis.

Die Besonderheit der Zehnerlogarithmen

In unserem auf der Grundzahl 10 beruhenden dekadischen Zahlensystem nehmen die Logarithmen zur Basis 10 eine besondere Stellung ein. Wie bereits festgestellt wurde, folgen aus den Beziehungen

$10^0 = 1$ die Gleichungen $\log_{10} 1 = 0$;
$10^1 = 10$ $\quad \log_{10} 10 = 1$;
$10^2 = 100$ $\quad \log_{10} 100 = 2$.

Die Zehnerlogarithmen dekadischer Einheiten sind durch Abzählen feststellbar. Steht die Ziffer 1 einer dekadischen Einheit in der

1., 2., 3. usf. Stelle **links** von der Einerstelle (bei 10, 100, 1000 usf.), so ist 1, 2, 3 usf. der zur Zahl gehörende Zehnerlogarithmus, denn

$10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ usf.

Steht die Ziffer 1 in der

1., 2., 3. usf. Stelle **rechts** von der Einerstelle (bei 0,1, 0,01, 0,001 usf.), so ist -1, -2, -3 usf. der zur Zahl gehörende Zehnerlogarithmus, denn

$0{,}1 = 10^{-1}$, $0{,}01 = 10^{-2}$, $0{,}001 = 10^{-3}$ usf.

Im folgenden werden nur die Logarithmen zur Basis 10 benutzt. Man nennt sie **Zehnerlogarithmen, dekadische Logarithmen,** auch **Briggssche Logarithmen,** weil der englische Mathematiker Henry Briggs (1556 bis 1630, Oxford) als erster eine Wertetafel für Zehnerlogarithmen berechnete. Zur Bezeichnung der Zehnerlogarithmen wird das Symbol „$\log_{10}$" in „lg" verkürzt. Man schreibt also für $\log_{10} 100 = 2$ kürzer $\lg 100 = 2$.

„lg" bedeutet „$\log_{10}$" oder „Logarithmus zur Basis 10"

Die Logarithmen der Zehnerpotenzen sind im dekadischen Logarithmensystem ohne weiteres angebbar (vgl. untenstehende Tabelle).

Die Logarithmen der anderen Zahlen dagegen können nicht ohne weiteres angegeben werden. Man erkennt aber z.B., daß lg 2 eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist. Die Zahl 2 liegt ja zwischen $1 = 10^0$ und $10 = 10^1$. Ebenso ist 37,2 eine Zahl zwischen $10 = 10^1$ und $100 = 10^2$, also liegt lg 37,2 zwischen 1 und 2. Für den Logarithmus einer jeden Zahl, die keine Zehnerpotenz ist, lassen sich zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen als obere und untere Schranke feststellen. Für lg 0,078 sind -2 und -3 die beiden Schranken, denn 0,078 liegt zwischen 0,01 und 0,001, und es ist $\lg 0{,}01 = -2$ und $\lg 0{,}001 = -3$. Weitere Beispiele zeigt die folgende Tabelle.

$10\,000 = 10^4$,	also $\lg 10\,000 = 4$
$1\,000 = 10^3$,	„ $\lg 1\,000 = 3$
$100 = 10^2$,	„ $\lg 100 = 2$
$10 = 10^1$,	„ $\lg 10 = 1$
$1 = 10^0$,	„ $\lg 1 = 0$
$0{,}1 = 10^{-1}$,	„ $\lg 0{,}1 = -1$
$0{,}01 = 10^{-2}$,	„ $\lg 0{,}01 = -2$
$0{,}001 = 10^{-3}$,	„ $\lg 0{,}001 = -3$

lg 5623	liegt zwischen	4	und	3
lg 207	„ „	3	„	2
lg 25	„ „	2	„	1
lg 2	„ „	1	„	0
lg 0,7	„ „	0	„	-1
lg 0,04	„ „	-1	„	-2
lg 0,005	„ „	-2	„	-3

1.7.3. Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ $(a = 2;\ 10)$

Wir wollen nun die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen bilden. Alle Exponentialfunktionen mit positiver Basis liefern in ihrem gesamten Definitionsbereich (Menge der reellen Zahlen) bei der Umkehrung wiederum Funktionen, man sagt, sie seien in ihrem gesamten Definitionsbereich umkehrbar.
Die Umkehrfunktionen zu den Exponentialfunktionen heißen **Logarithmusfunktionen.** Wir erhalten ihre Gleichungen auf folgendem Wege:

Exponentialfunktion	Logarithmusfunktion
(26) $y = f(x) = a^x$	(27) $x = g(y) = \log_a y$ $y = g(x) = \log_a x$ (Rückkehr zur üblichen Variablenbezeichnung)

Der Definitionsbereich aller Logarithmusfunktionen $y = \log_a x\,(a > 0)$ umfaßt alle positiven reellen Zahlen.

● *Warum gibt es keine Logarithmusfunktion, die auch für negative Werte der unabhängigen Variablen definiert ist?*

Die Bilder aller Logarithmusfunktionen schneiden die x-Achse bei $x = 1$.

● *Erklären Sie diese Eigenschaft aus der entsprechenden Eigenschaft der Exponentialfunktionen!*

■ **Beispiel 19:**

$y = \log_2 x \quad (a = 2)$

Die Umkehrfunktion zu dieser Logarithmusfunktion ist die durch $y = 2^x$ beschriebene Exponentialfunktion. Um den Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen zu verdeutlichen, stellen wir Wertetafeln der beiden Funktionen einander gegenüber:

$y = 2^x$

x	y
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

$y = \log_2 x$ (explizit)
$x = 2^y$ (implizit)

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Die Abbildung 1.31. zeigt das Bild der Funktion mit dem analytischen Ausdruck $y = \log_2 x$. Vergleichen wir die Bilder der durch $y = 2^x$ und $y = \log_2 x$ beschriebenen Funktionen, so stellen wir fest, daß sie durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten auseinander hervorgehen.

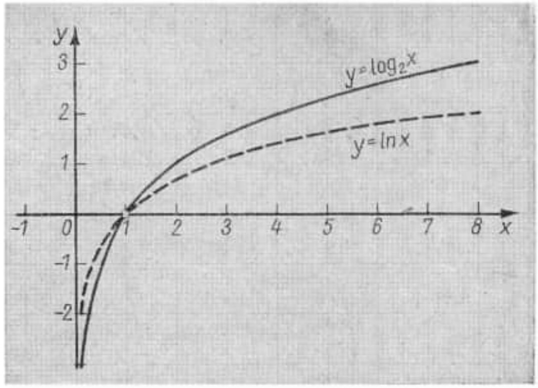


Abb. 1.31.

● *Begründen Sie diese Feststellung!*

■ **Beispiel 20:**

$y = \lg x \quad (a = 10)$

Wie die Gleichungen $2 = \lg 100$ und $10^2 = 100$ gleichbedeutend sind, so sind es auch die Gleichungen $y = \lg x$ und $10^y = x$, wenn man allgemein für den Numerus x und für den Logarithmus y setzt. Will man die Funktion $y = \lg x$ graphisch darstellen, so findet man die Koordinaten für Punkte der Kurve am bequemsten aus der rechts stehenden Form der obigen Gleichung. Setzt man z.B. für y die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ein, so ergeben sich für x die Werte 1, 10, 100, 1000, 10 000. Wir erhalten die nebenstehende Wertetafel.

x	$y = \lg x$
1	0
10	1
100	2
1 000	3
10 000	4

Sie kann leicht durch weitere Wertepaare ergänzt werden. Diese erhalten wir, indem wir wieder den Zusammenhang zwischen der betrachteten Logarithmusfunktion und ihrer durch $y = 10^x$ beschriebenen Umkehrung ausnutzen.

$y = 10^x$

x	y
-2	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
-1	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}10$
$-\frac{1}{2}$	$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}32$
$\frac{1}{4}$	$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} \approx 1{,}78$
$\frac{1}{2}$	$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$
$\frac{2}{3}$	$10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100} \approx 4{,}64$
$\frac{3}{4}$	$10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1000} \approx 5{,}62$

$y = \lg x$ (explizit)
$x = 10^y$ (implizit)

x	y
0,01	-2
0,10	-1
0,32	$-\frac{1}{2}$
1,78	$\frac{1}{4}$
3,16	$\frac{1}{2}$
4,64	$\frac{2}{3}$
5,62	$\frac{3}{4}$

Unter ihrer Berücksichtigung nimmt die Kurve $y = \lg x$ den in der Abbildung 1.32. dargestellten Verlauf, wenn gleiche Strecken als Einheiten der beiden Koordinatenachsen gewählt werden.
Die Kurvenpunkte, die zu x-Werten zwischen $x = 0$ und $x = 1$ gehören, haben negative y-Werte, deren absolute Beträge um so größer werden, je mehr die x-Werte abnehmen.
Die Kurvenpunkte kommen dem negativen Teil der y-Achse um so näher, je mehr sich die x-Werte der 0 nähern.
Für $x = 1$ ist $y = 0$, die Kurve schneidet die x-Achse. Zu x-Werten, die größer als 1 sind, gehören positive y-Werte. Mit dem Anwachsen der x-Werte über $x = 1$ hinaus nehmen die y-Werte nur allmählich zu, sie erreichen erst für $x = 100$ den Wert 2, werden aber für wachsende x-Werte beliebig groß. Das Diagramm muß also schon für verhältnismäßig kleine x-Werte abgebrochen werden.

Die Genauigkeit, mit der das Ablesen von y-Werten und damit das Bestimmen von Logarithmen an der Abbildung 1.32. erfolgen kann, genügt nur bescheidenen Ansprüchen. Sie wird besser, wenn man die Darstellung der Funktion auf einen kleinen Bereich beschränkt und die y-Werte in größerem Maßstab als die x-Werte abträgt. In der Abbildung 1.33. ist die Ordinateneinheit das Zehnfache der Abszisseneinheit.

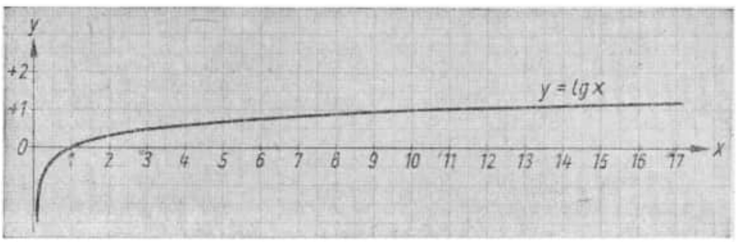


Abb. 1.32.

Beispiele:

Das Bild der Funktion $y = \lg x$ ergibt

in Abb. 1.32.	in Abb. 1.33.
$\lg 2 \approx 0{,}3$;	$\lg 2 \approx 0{,}30$;
$\lg 3 \approx 0{,}5$;	$\lg 3 \approx 0{,}48$;
$\lg 4 \approx 0{,}6$;	$\lg 4 \approx 0{,}60$;
$\lg 6 \approx 0{,}7$;	$\lg 6 \approx 0{,}78$;
$\lg 8 \approx 0{,}9$;	$\lg 8 \approx 0{,}90$.

Für den praktischen Gebrauch werden die Logarithmenwerte berechnet und in Logarithmentafeln zusammengefaßt. Sie sind im allgemeinen irrationale Zahlen und werden auf eine den Bedürfnissen der Praxis entsprechende Stellenzahl gerundet.

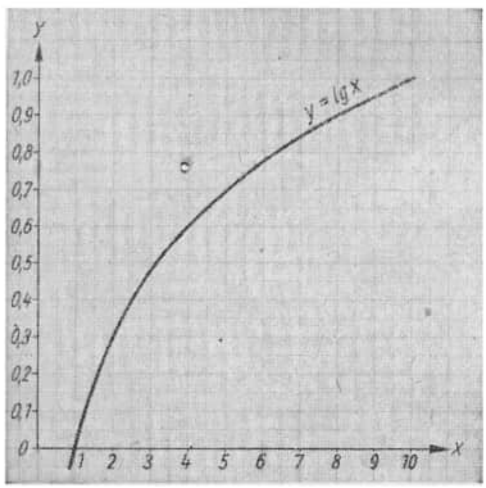


Abb. 1.33.

■ **Beispiel 21:**

$y = \ln x \quad (a = e)$

Genauso wie für die dekadischen Logarithmen wird für die natürlichen Logarithmen ein besonderes Symbol benutzt. (Man schreibt statt „$\log_e$" kürzer „ln" [lat. logarithmus naturalis]). Das Bild der Funktion $y = \ln x$ ist in der Abbildung 1.31. dargestellt.

● **Aufgaben**

1. Zwischen welchen einander folgenden ganzen Zahlen liegt

   a) lg 0,0056; b) lg 0,78; c) lg 17,5; d) lg 321; e) lg 2468; f) lg 82720? (L)

2. Mit Hilfe der in Abbildung 1.32. dargestellten Kurve sind Näherungswerte für lg 5, lg 7, lg 9, lg 11, lg 12, lg 13, lg 14, lg 15, lg 16, lg 17 anzugeben!

3. Bestimmen Sie aus der Kurve der Abbildung 1.33.

   lg 1,5; lg 2,5; lg 3,5; lg 4,5; lg 5,5; lg 6,5; lg 7,0; lg 7,5; lg 8,5!

1.7.4. Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen

Da Logarithmen als Exponenten anzusehen sind, ergeben sich die Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen aus den Gesetzen für das Rechnen mit Potenzen. Bei den im folgenden hergeleiteten Rechengesetzen verwenden wir für „Logarithmus" an Stelle von „lg" das Symbol „log", um zum Ausdruck zu bringen, daß diese Gesetze nicht nur im dekadischen Logarithmensystem, sondern auch in jedem anderen gelten.

Der Logarithmus eines Produktes

Für $16 = 4^2$ und $64 = 4^3$ ergibt sich als Produkt $16 \cdot 64 = 4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$.
In logarithmischer Schreibweise lauten dieselben Zusammenhänge

$$\log_4 16 = 2; \quad \log_4 64 = 3 \quad \text{und} \quad \log_4 (16 \cdot 64) = 2 + 3.$$

Wenn die Basis 10 benutzt wird, ergibt sich z.B.

$$100 = 10^2, \qquad 1000 = 10^3; \qquad 100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 \quad \text{bzw.}$$
$$\log_{10} 100 = 2, \quad \log_{10} 1000 = 3; \quad \log_{10} (100 \cdot 1000) = 2 + 3 = 5.$$

Wenn in der Gleichung $\log_{10} (100 \cdot 1000) = 2 + 3$ für 2 der Ausdruck $\log_{10} 100$ und für 3 der Ausdruck $\log_{10} 1000$ eingesetzt wird, erhält man

$$\log_{10} (100 \cdot 1000) = \log_{10} 100 + \log_{10} 1000.$$

Allgemein:
Ist $p = a^n$ und $q = a^m$, so ergibt sich als Produkt $p \cdot q = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
In logarithmischer Schreibweise gilt

$$\log_a p = n, \quad \log_a q = m \quad \text{und} \quad \log_a (p \cdot q) = n + m.$$

Setzen wir in der letzten Gleichung für n und m die Ausdrücke $\log_a p$ bzw. $\log_a q$ ein, so erhalten wir

$$\log_a (p \cdot q) = \log_a p + \log_a q.$$

Für Logarithmen der gleichen Basis gilt also der Satz:
Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren.
Es läßt sich leicht nachweisen, daß die Regel auch für Produkte von mehr als zwei Faktoren richtig ist. Wir merken sie uns in der Form:

▶ **Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen seiner Faktoren addiert.**

(28) $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$

■ **Beispiel 22:**

Aus $\lg 10 = 1$ und $\lg 100 = 2$ findet man $\lg (10 \cdot 100) = 1 + 2$, d.h. $\lg 1000 = 3$.

■ **Beispiel 23:**

Aus den gegebenen Werten
$\lg 2 \approx 0{,}30$ und $\lg 3 \approx 0{,}48$ findet man $\lg (2 \cdot 3) \approx 0{,}30 + 0{,}48$, d.h. $\lg 6 \approx 0{,}78$.

Der Logarithmus eines Quotienten

In $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$ setzen wir $a \cdot b = c$, also $a = \frac{c}{b}$, dann entsteht
$\log c = \log \frac{c}{b} + \log b$ oder $\log \frac{c}{b} = \log c - \log b$.
In Worten: Der Logarithmus eines Quotienten (Bruches) ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor (Zähler und Nenner). Wir merken uns:

▶ **Ein Quotient (Bruch) wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Dividenden (Zählers) den Logarithmus des Divisors (Nenners) subtrahiert.**

(29) $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

■ **Beispiel 24:**

Aus $\lg 1000 = 3$ und $\lg 100 = 2$ findet man $\lg \frac{1000}{100} = 3 - 2 = 1$; d.h. $\lg 10 = 1$.

■ **Beispiel 25:**

Aus $\lg 8 \approx 0{,}90$ und $\lg 4 \approx 0{,}60$ findet man $\lg \frac{8}{4} \approx 0{,}90 - 0{,}60 = 0{,}30$; d.h. $\lg 2 \approx 0{,}30$.

■ **Beispiel 26:**

Aus $\lg 2 \approx 0{,}3$ und $\lg 10 = 1$ findet man $\lg \frac{2}{10} \approx 0{,}3 - 1 = -0{,}7$; d.h. $\lg 0{,}2 \approx -0{,}7$.

Der Logarithmus einer Potenz

Wir betrachten die Gleichung $81 = 3^4$. Durch Quadrieren ergibt sich $81^2 = (3^4)^2$ oder $81^2 = 3^{2 \cdot 4}$.

Die erste und die dritte Gleichung lauten in logarithmischer Schreibweise

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{und} \quad \log_3 81^2 = 4 \cdot 2.$$

Setzt man in der letzten Gleichung für 4 den Ausdruck $\log_3 81$ ein, so erhält man

$$\log_3 81^2 = 2 \cdot \log_3 81.$$

Allgemein:
Wir setzen $p = a^n$ und erheben beide Seiten der Gleichung in die m-te Potenz. So erhalten wir aus

$$p = a^n$$
$$p^m = (a^n)^m$$
$$p^m = a^{n \cdot m}.$$

Die logarithmische Schreibweise ergibt

für die erste Gleichung $\qquad \log_a p = n,$

für die dritte Gleichung $\qquad \log_a (p^m) = m \cdot n.$

Setzen wir in der letzten Gleichung für n den Wert $\log_a p$ ein, so wird

$$\log_a (p^m) = m \cdot \log_a p.$$

Diese Gleichung bedeutet:
Man erhält den Logarithmus der Potenz p^m, indem man den Logarithmus der Grundzahl p mit dem Exponenten m multipliziert.

▶ **Eine Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus ihrer Basis mit dem Potenzexponenten multipliziert.**

(30) $\mathbf{\log p^m = m \cdot \log p}$

■ **Beispiele:**

$\lg 10 = 1$; $\lg (10^2) = 2 \cdot \lg 10 = 2 \cdot 1 = 2$; $\quad \lg 2 \approx 0{,}3$; $\lg (2^3) = 3 \cdot \lg 2 \approx 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$;
$\lg (2^{-3}) = -3 \cdot \lg 2 \approx -3 \cdot 0{,}3 = -0{,}9$.

Das Rechnen mit Wurzelausdrücken geschieht bekanntlich nach den Regeln für das Rechnen mit Potenzen.
Den Logarithmus des Wurzelausdrucks $\sqrt[m]{p} = p^{\frac{1}{m}}$ gewinnt man also, indem man den Logarithmus des Radikanden p mit $\frac{1}{m}$ multipliziert bzw. durch den Wurzelexponenten m teilt.

■ **Beispiele:**

$\lg 1000 = 3$; $\lg \sqrt[3]{1000} = \frac{\lg 1000}{3} = \frac{3}{3} = 1$; $\quad \lg 8 \approx 0{,}90$; $\lg \sqrt[3]{8} = \frac{\lg 8}{3} \approx \frac{0{,}90}{3} = 0{,}30$;

$\lg 100 = 2$; $\lg \sqrt[3]{100} = \frac{\lg 100}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}67$.

Aufgaben

1. Warum wird das Logarithmieren die zweite Umkehrung des Potenzierens genannt?

2. Welche Bezeichnungen sind in der Gleichung $n = \log_a b$ für a, b und n gebräuchlich?

3. Warum sind die Logarithmen zugleich Exponenten?

4. Welcher Unterschied besteht zwischen $y = \lg x$ und $y = \log x$?

5. Wie lauten die Formeln für die logarithmische Berechnung eines Produkts, eines Bruches, einer Potenz, einer Wurzel?
Warum ist

a) $\lg 3 + \lg 4 = \lg 12$; $\lg 3 + \lg 5 = \lg 15$; $\lg 2 + \lg 2 + \lg 2 = \lg 8$?

b) $\lg 9 - \lg 3 = \lg 3$; $\lg 8 - \lg 2 = \lg 4$; $\lg 18 - \lg 3 = \lg 6$?

c) $\lg 2 = \frac{1}{3} \lg 8$; $\lg 3 = \frac{1}{3} \lg 27$; $\lg 3 = \frac{1}{4} \lg 81$ (L); $\lg 5 = \frac{1}{4} \lg 625$?

6. Berechnen Sie $\log 1$!

7. Für welche Basis gehört zum Logarithmus 2 der Numerus 121, zum Logarithmus 3 der Numerus 343?

8. Welche Logarithmen zur Basis 3 ergeben die Numeri 9; 81; 243; 3; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$?

9. Berechnen Sie aus den Logarithmuswerten $\lg 3 \approx 0{,}4771$ und $\lg 4 \approx 0{,}6021$ die Logarithmen für folgende Zahlen: 9; 12; 16; 36; 27!

10. Berechnen Sie aus den Werten $\lg 2 \approx 0{,}3010$ und $\lg 10 = 1$ die Logarithmen für folgende Zahlen: 20; 200; 2000; 0,2; 0,002!

11. Wie lautet der Logarithmus zur Basis 10 für folgende Zahlen: 0,03; 0,3; 30; 400; 40000; 0,0004?

12. Der Logarithmus von 3,1 beträgt rund 0,4914. Ermitteln Sie die Logarithmen für 31; 310; 31000; 0,31; 0,031!

13. Welche Logarithmen ergeben sich für die Zahlen 56,78; 567,8; 0,5678; 0,05678, wenn $\lg 5{,}678 \approx 0{,}7542$?

14. Ermitteln Sie aus

$\lg 9 \approx 0{,}9542$ den Wert für $\lg 3$,	$\lg 144 \approx 2{,}1584$ den Wert für $\lg 12$,
$\lg 49 \approx 1{,}6902$,, ,, ,, $\lg 7$,	$\lg 16 \approx 1{,}2041$,, ,, ,, $\lg 2$,
$\lg 121 \approx 2{,}0828$,, ,, ,, $\lg 11$,	$\lg 625 \approx 2{,}7959$,, ,, ,, $\lg 5$!

15. Berechnen Sie aus den Werten $\lg 210 \approx 2{,}3222$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$ und $\lg 7 \approx 0{,}8451$ die Logarithmen für 42; 4,2; 35; 30!

2. Analytische Geometrie der Geraden und des Kreises

Werden geometrische Gebilde (Kurven, Flächen) mit Hilfe rechnerischer (analytischer) Verfahren untersucht, so spricht man von analytischer Behandlung der Geometrie oder kurz von **analytischer Geometrie**.
Man unterscheidet dabei geometrische Gebilde, die in einer Ebene liegen, von solchen, die sich in den Raum erstrecken. Im Mathematikunterricht der Berufsschule werden mit Ausnahme der Abiturklassen nur in einer Ebene liegende gerade Linien und Kreise behandelt. Man beschränkt sich also auf ein Teilgebiet der analytischen Geometrie der Ebene. Für die Untersuchungen im Kapitel 1 wurde bereits zur graphischen Darstellung von Funktionen ein Bezugssystem benutzt: das rechtwinklige *Koordinatensystem*. Die Koordinaten der Punkte, die einem zu untersuchenden Gebilde angehören, verknüpft eine Gleichung. So ist z.B. $y = mx + n$ die Gleichung einer geraden Linie, wenn x und y die veränderlichen Koordinaten der Punkte der Geraden, m und n konstante Zahlen bedeuten. Für andere geometrische Gebilde gelten andere Gleichungen. Gleichungen stellen ein Hilfsmittel der analytischen Geometrie dar.

Bereits bei altgriechischen Mathematikern, z. B. bei APOLLONIUS von PERGE (3. Jh. v. u. Z.), findet man Methoden, die dem Wesen der analytischen Geometrie entsprechen. Später wurden sie von dem Franzosen PIERRE FERMAT (1601 bis 1665) wieder angewandt. Systematisch, exakt und im wesentlichen erschöpfend hat sie der bedeutende französische Philosoph und Mathematiker RENÉ DESCARTES (1596 bis 1650) dargestellt (latinisierte Form des Namens: Cartesius), der deshalb als der Schöpfer der analytischen Geometrie bezeichnet wird. Die Entwicklung dieser mathematischen Disziplin wurde wesentlich durch den Aufschwung der Astronomie im 16. und 17. Jahrhundert (KEPLER, KOPERNIKUS u. a.) gefördert; andererseits wirkten die neuen mathematischen Hilfsmittel mit ihren vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten befruchtend auf die Entwicklung einer neuen Mechanik durch NEWTON. Der Deutsche GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 bis 1716), der Engländer ISAAC NEWTON (1643 bis 1727) und der Schweizer LEONHARD EULER (1707 bis 1783) haben die Gedanken von DESCARTES weiterentwickelt.

2.1. Punkt und Strecke

2.1.1. Der Punkt im Koordinatensystem

Um in einer Ebene die Lage eines Punktes P eindeutig bestimmen zu können, gehen wir von zwei in der Ebene festgelegten Geraden, den Koordinatenachsen, aus, die im am häufigsten benutzten Koordinatensystem aufeinander senkrecht stehen. Ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit O und legen die Längeneinheit fest. Die eine Gerade

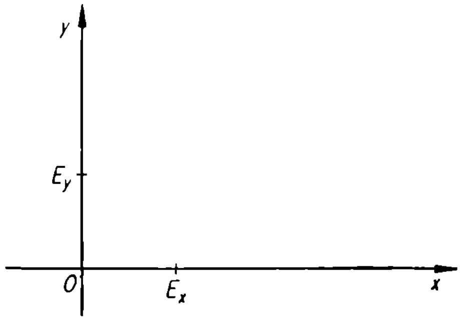


Abb. 2.1.

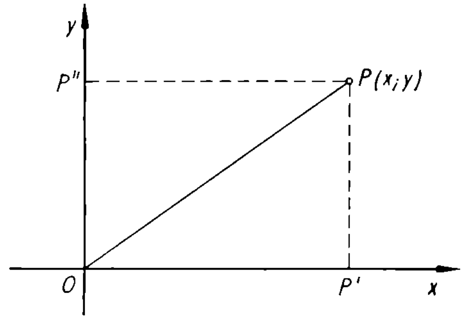


Abb. 2.2.

wird *x-Achse* (Abszissenachse), die andere *y-Achse* (Ordinatenachse) genannt. Auf den Achsen tragen wir von O aus die Längeneinheit als $\overline{OE_x}$ bzw. $\overline{OE_y}$ ab. Im allgemeinen wählt man die Bezeichnung der Achsen so, wie es die Abbildung 2.1. zeigt.
Ein um den Punkt O drehbarer Strahl, der zunächst mit der positiven x-Achse zusammenfällt, kommt mit der positiven y-Achse zur Deckung, wenn er um $+ 90°$ gedreht wird, d.h. entgegengesetzt dem Uhrzeigerdrehsinn. Durch diese Bewegung des Strahls wird der positive Drehsinn in der Ebene bestimmt.
Von dem gegebenen Punkt P aus fällen wir Lote auf die beiden Achsen (Abb. 2.2.). Ihre Fußpunkte P' und P'' begrenzen auf den Achsen Abschnitte, denen reelle Zahlen entsprechen. Sie werden mit x und y bezeichnet und heißen die Koordinaten des Punktes P. Man nennt $\overline{OP'} = x$[1] die *Abszisse*, $\overline{PP'} = y$ die *Ordinate* des Punktes P und schreibt dafür $P(x; y)$. Auf diese Weise werden jedem Punkt der Ebene eindeutig zwei Zahlen x und y zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar $(x; y)$ eindeutig ein Punkt.
Man nennt O den Koordinatenursprung. Die x-Achse nennt man im allgemeinen Abszissenachse, die y-Achse Ordinatenachse. Da sich die beiden Achsen unter einem rechten Winkel schneiden, nennt man dieses System ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Es wird auch als kartesisches Koordinatensystem bezeichnet.

■ **Beispiel 1:**
Der Punkt P (Abb. 2.2.) hat die Abszisse $x = 3{,}5$ und die Ordinate $y = 2{,}5$, wenn wir als Einheiten $\overline{OE_x}$ und $\overline{OE_y}$ jeweils 1 cm wählen.

2.1.2. Länge einer Strecke

In einem rechtwinkligen xy-Koordinatensystem sei ein Punkt P durch seine Koordinaten x und y, kurz $P(x; y)$, gegeben. Die Länge der Strecke $\overline{OP}$ ist gesucht (Abb. 2.3.). P' sei die senkrechte Projektion von P auf die x-Achse. Das Dreieck $OP'P$ ist rechtwinklig. Nach dem Satz des PYTHAGORAS ergibt sich

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

[1] Hierbei ist die Maßzahl der Strecke $\overline{OP'}$ gemeint.

■ **Beispiel 2:**

Zu P (2,8; 2) (Abb. 2.3.) gehört
$\overline{OP} = \sqrt{2{,}8^2 + 2{,}0^2} = \sqrt{11{,}84} \approx 3{,}44.$

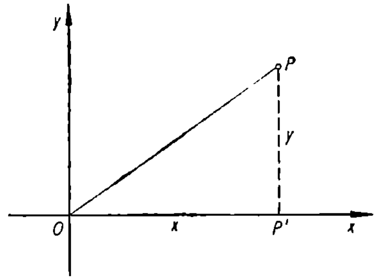


Abb. 2.3.

Es seien jetzt zwei Punkte, P_1 $(x_1; y_1)$ und P_2 $(x_2; y_2)$, gegeben. Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ (Abb. 2.4.). Die Projektionen der Punkte P_1 und P_2 auf die x-Achse seien Q_1 bzw. Q_2. Die Parallele zur x-Achse durch P_1 schneidet P_2Q_2 in R. Das Dreieck P_1RP_2 ist rechtwinklig. Seine Katheten sind $\overline{P_1R} = \overline{Q_1Q_2} = x_2 - x_1$ und $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. Nach dem Satz des PYTHAGORAS ergibt sich als gesuchte Länge einer Strecke

$$(1) \qquad \boldsymbol{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

■ **Beispiel 3:**

Für P_1 (1; 1) und P_2 (3,8; 3,0) (Abb. 2.4.) ergibt
$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(3{,}8 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{2{,}8^2 + 2^2} \approx 3{,}44.$

Die Herleitung dieser Formel erfolgte nur für Punkte im ersten Quadranten; sie ist jedoch für jede Lage der Punkte P_1 und P_2 gültig.

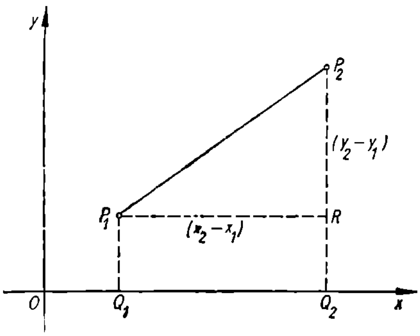


Abb. 2.4.

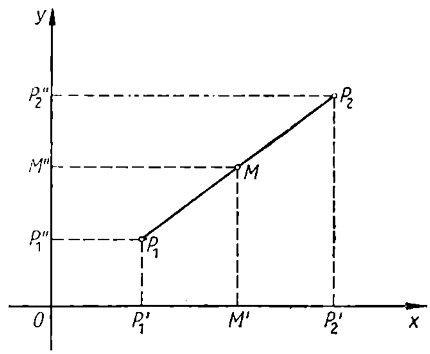


Abb. 2.5.

2.1.3. Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke

Man erhält die Koordinaten x_m und y_m des Mittelpunktes M einer Strecke aus den Koordinaten ihrer Endpunkte P_1 $(x_1; y_1)$ und P_2 $(x_2; y_2)$ durch folgende Überlegung: Werden von P_1, M und P_2 die Lote P_1P_1', MM' und P_2P_2' auf die x-Achse und die Lote P_1P_1'', MM'' und P_2P_2'' auf die y-Achse gefällt (Abb. 2.5.), so gilt:

$$\frac{\overline{P_1'M'}}{\overline{P_1'P_2'}} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}} \text{ und } \frac{\overline{P_1''M''}}{\overline{P_1''P_2''}} = \frac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}}.$$

Da $\frac{P_1M}{P_1P_2} = \frac{1}{2}$ ist, ergibt sich

$$\frac{x_m - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{y_m - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{2}; \text{ daraus folgt}$$

$$2x_m - 2x_1 = x_2 - x_1; \quad 2y_m - 2y_1 = y_2 - y_1,$$

$$\text{(2)} \qquad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

▶ **Die Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke sind die arithmetischen Mittel aus den entsprechenden Koordinaten ihrer Endpunkte.**

● **Aufgaben**

1. Die Länge s der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist zu berechnen.

a) $P_1\,(1; 2)$, $P_2\,(4; 6)$ (L) **b)** $P_1\,(9; 14)$, $P_2\,(4; 2)$

c) $P_1\,(3; 8)$, $P_2\,(-3; 8)$ (L) **d)** $P_1\,(-1; -2)$, $P_2\,(0; 8)$

e) $P_1\,(0; 0)$, $P_2\,(0; 8)$ (L) **f)** $P_1\,(1{,}4; 33{,}1)$, $P_2\,(16{,}4; -2{,}9)$.

Tragen Sie die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in ein Koordinatensystem ein, und überprüfen Sie das Ergebnis!

2. Die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{OP}$ mit $P\,(8; -3)$ sind zu ermitteln. (L)

2.2. Analytische Geometrie der Geraden

2.2.1. Die allgemeine Form der Geradengleichung

Gegeben sei die Gleichung

$$Ax + By + C = 0,$$

wobei A, B und C zunächst verschieden von Null sein sollen. Die Gleichung läßt sich folgendermaßen umformen:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Setzt man hierin $-\frac{A}{B} = m$ und $-\frac{C}{B} = n$, so erkennt man, daß die Gleichung $Ax + By + C = 0$ die implizite Form der Geradengleichung $y = mx + n$ ist. Umgekehrt läßt sich jede Gleichung $y = mx + n$ umformen in $mx - y + n = 0$ und damit auf die Form $Ax + By + C = 0$ zurückführen.

Man bezeichnet die Gleichung

(3) $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

als die **allgemeine Form der Geradengleichung**. Wir lassen jetzt die Einschränkung bezüglich der Koeffizienten fallen. Für $A = 0$ ergibt sich eine Parallele zur x-Achse, für $B = 0$ eine Parallele zur y-Achse. Es können nicht A und B gleichzeitig Null sein, da in einer Geradengleichung mindestens eine Variable enthalten sein muß. Für $A = B = 0$ ist jedoch diese Bedingung nicht erfüllt.

2.2.2. Die kartesische Form der Geradengleichung

Wie wir gezeigt haben, läßt sich aus der allgemeinen Gleichung der Geraden mit $B \neq 0$ die Gleichung

(4) $\boldsymbol{y = mx + n}$

herleiten (Abb. 2.6.). Diese Form nennt man die **kartesische Form der Geradengleichung.**

Diese Form der Geradengleichung ergibt für den Punkt mit der Abszisse $x = 0$ die Ordinate $y = n$. Man nennt den *Abschnitt* n, der durch die Gerade vom Koordinaten-Ursprung aus auf der y-Achse entsteht, die *Verschiebung* der Geraden.

Für einen Punkt $P(x, y)$ der Geraden gilt

$$y = mx + n,$$

also

$$m = \frac{y - n}{x}.$$

Aus der graphischen Darstellung ergibt sich

$$\frac{y - n}{x} = \tan \alpha,$$

also

(5) $\boldsymbol{m = \tan \alpha.}$

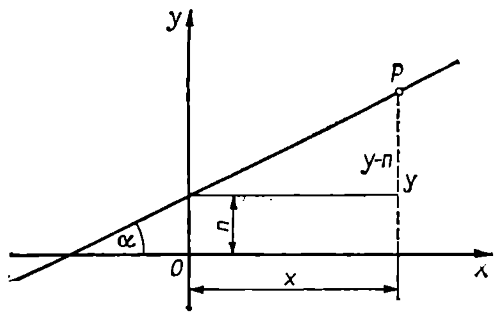


Abb. 2.6.

In der kartesischen Form der Geradengleichung gibt m den Tangenswert des Richtungswinkels α der Geraden an. Man nennt m den **Richtungsfaktor,** den **Anstieg** oder die **Steigung** der Geraden.

Ist in der allgemeinen Gleichung $A = 0$, so ergibt sich für die kartesische Form $m = 0$, man erhält also $y = n$. Die Gleichung stellt die Gerade dar, die parallel zur x-Achse verläuft und die y-Achse in n schneidet. Für den Spezialfall $n = 0$ fällt die Gerade mit der x-Achse zusammen.

Für $B = 0$ erhält man $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A} = c$. Die Gleichung stellt eine Gerade dar, die parallel zur y-Achse verläuft und die x-Achse in c schneidet. Für den Spezialfall $c = 0$ fällt die Gerade mit der y-Achse zusammen.

Ist $C = 0$, so ergibt sich $y = mx$ für die kartesische Form der Geradengleichung. Da sich für $x = 0$ auch $y = 0$ ergibt, verläuft die Gerade durch den Ursprung.

Für den Steigungswinkel α der Geraden $y = mx + n$ gilt (Abb. 2.7.): Für $m = 0$ bzw. $\alpha = 0°$ wird jedem beliebigen x der Funktionswert n zugeordnet. Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.

Für $0 < m < 1$ ist $0° < \alpha < 45°$;
für $m = 1$ ist $\alpha = 45°$;
aus $m > 1$ folgt $45° < \alpha < 90°$.

In diesen Fällen ($m > 0$) verläuft die Gerade in der Richtung vom dritten zum ersten Quadranten.

Mit wachsendem m steigt die Gerade immer steiler an. Der Fall, daß $\alpha = 90°$ wird, muß ausgelassen werden, da in $y = mx + n$ dann m größer als jede angebbare Zahl würde.

Für $m < -1$ ist $90° < \alpha < 135°$;
für $m = -1$ ist $\alpha = 135°$;
aus $-1 < m < 0$
folgt $135° < \alpha < 180°$.

In diesen Fällen ($m < 0$) verläuft die Gerade in der Richtung vom zweiten zum vierten Quadranten.

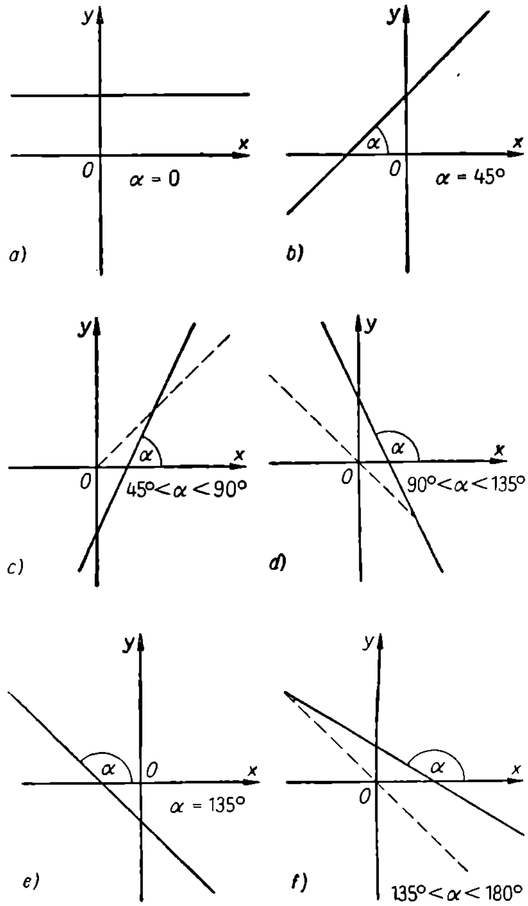


Abb. 2.7.

2.2.3. Die Punktrichtungsform der Geradengleichung

Jede Gerade ist durch einen festen Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und den Steigungswinkel α bestimmt (Abb. 2.6.). Für jeden von $P_1(x_1; y_1)$ verschiedenen Punkt $P(x; y)$ der Geraden gilt:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \tan \alpha = m.$$

Daraus ergibt sich als

Punktrichtungsform der Geradengleichung

(6a) $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

oder

(6b) $\boldsymbol{y = mx - mx_1 + y_1}$.

Vergleicht man diese Form der Gleichung mit der kartesischen Form, so erkennt man, daß $-mx_1 + y_1 = n$ ist.
Bei der Wahl des Punktes P waren nur die beiden Einschränkungen gemacht worden, daß er auf der Geraden liegt und nicht mit P_1 zusammenfällt. Die Abszisse x kann daher jeden Wert im Definitionsbereich und damit die Ordinate y jeden Wert im Wertevorrat der Funktion annehmen. Deshalb bezeichnet man x und y als variable Koordinaten und $P(x; y)$ als variablen Punkt.
Die zur Herleitung der Punktrichtungsgleichung notwendige Einschränkung $P \neq P_1$ kann nunmehr fallengelassen werden, denn die Koordinaten des Punktes P_1 erfüllen die Gleichung.

2.2.4. Die Zweipunkteform der Geradengleichung

Eine Gerade ist durch zwei feste, nicht zusammenfallende Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ bestimmt (Abb. 2.8.). Für jeden von P_1 und P_2 verschiedenen Punkt $P(x; y)$ der Geraden gilt auf Grund des Strahlensatzes die
Zweipunkteform der Geradengleichung.

(7) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x_1 \neq x_2;\ x \neq x_1).$$

Man schreibt sie häufig auch in der Form

(8) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Es ist also

$$y - y_1 = \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1},$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1,$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1},$$

(9) $$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

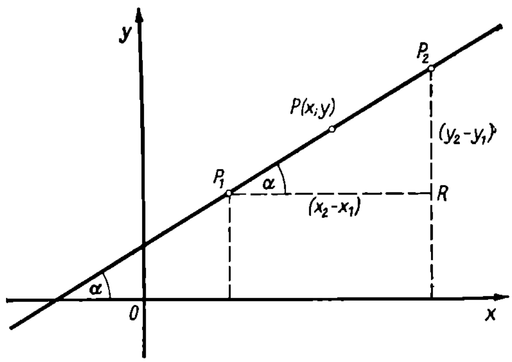


Abb. 2.8.

Wir erkennen, daß $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ und $\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = n$ ist.
Der Fall $x_1 = x_2$ muß ausgeschlossen werden, da sonst im Nenner 0 entstehen würde. Sind die Punkte P_1 und P_2 so gegeben, daß entweder $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$ ist, so liegen P_1 und P_2 auf einer Parallelen zur y-Achse im Abstand x_1 bzw. auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand y_1. Die Gleichung der Geraden lautet dann $x = x_1$ bzw. $y = y_1$.
Die zur Herleitung der Zweipunkteform notwendige Einschränkung $P \neq P_1$ und $P \neq P_2$ kann nunmehr fallengelassen werden; denn die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 erfüllen die Gleichung.

Für $P_1(0; b)$ und $P_2(a; 0)$ ergibt die Zweipunktegleichung

$$\frac{y-b}{x} = \frac{-b}{a},$$

$$ay - ba = -bx;$$

$$ay + bx = ab,$$

$$(10) \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

Diese Form der Gleichung der Geraden wird **Abschnittsgleichung** genannt, weil die in ihr vorkommenden Konstanten die durch die Gerade entstehenden Achsenabschnitte angeben.

● **Aufgaben**

1. Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, für die gegeben ist

a) $m = \frac{1}{2}$; $n = 3$; **b)** $m = -1$, der Abschnitt 5 auf der positiven x-Achse;

c) $m = -4$, der Punkt $P_1\,(0; -1{,}5)$ auf der Geraden;

d) $\alpha = 45°$; $n = 4{,}3$. (L: a, b)

Überlegen Sie, wie man die Geraden zeichnen kann, ohne die Gleichung aufzustellen!

2. Es ist die Gleichung der Geraden aufzustellen, die durch den Punkt P_1 verläuft und für die gegeben ist

a) $m = 2{,}5$, $P_1\,(3; 4)$; **b)** $m = 1$, $P_1\,(-6; -6)$;

c) $m = -1{,}5$, $P_1\,(-8; -9)$; **d)** $m = -1$, $P_1\,(0; 0)$. (L: a, b)

Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem!

3. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 ist zu bestimmen.

a) $P_1\,(+5; +6)$, $P_2(+7; +8)$; **b)** $P_1\,(-4; -3)$, $P_2\,(+4; +3)$;

c) $P_1\,(+3; +3)$, $P_2\,(-3; +3)$; **d)** $P_1\,(+3; +3)$, $P_2\,(+3; -3)$;

e) $P_1\,(+3; +3)$, $P_2\,(-3; -3)$; **f)** $P_1\,(+3; -3)$, $P_2\,(-3; +3)$;

g) $P_1\,(+1{,}5; +4{,}6)$, $P_2(+2{,}0; +4{,}3)$;

h) $P_1\,(-2{,}8; -3{,}7)$, $P_2(-3{,}7; -2{,}8)$. (L: a, c, e, g)

4. Die Geradengleichungen der Aufgabe 2 sind in die allgemeine Form der Geradengleichung überzuführen. (L)

5. Die Geradengleichungen der Aufgabe 3 sind in die allgemeine Form der Geradengleichung überzuführen. (L: b, d, f, h)

6. Es ist die Gleichung der Geraden zu bestimmen, die durch die Punkte $P_1\,(a; 0)$ und $P_2\,(0; b)$ verläuft. Geben Sie die Lage der beiden Punkte an, und zeichnen Sie die Gerade! Formen Sie die Gleichung in die Abschnittsgleichung der Geraden um! (L)

7. Führen Sie die Geradengleichungen

a) $Ax + By + C = 0$, b) $y = mx + n$

in die Abschnittsgleichungen über!
Untersuchen Sie diese Gleichungen für die Fälle, in denen eine der konstanten Größen gleich Null ist! Unter welcher Bedingung ist die Abschnittsgleichung nicht anwendbar? (L)

8. Die folgenden Geradengleichungen sind in die kartesische Form überzuführen.

a) $3x + 4y + 5 = 0$ b) $-7x + 9y - 3 = 0$

c) $-2{,}4x - 1{,}8y + 0{,}5 = 0$ d) $1{,}4x + 3{,}25y - 1{,}8 = 0$

e) $3{,}875x - 4 = 0$ f) $0{,}14 - 0{,}1y = 0$ (L: a, c, e)

9. Wo schneiden die folgenden Geraden die Koordinatenachsen?

a) $17x + 10y - 34 = 0$ b) $-9x - 8{,}5y + 17 = 0$

c) $y = 2{,}1x - 14$ d) $y = -11{,}7x + 7{,}5$

e) $\dfrac{x}{4{,}3} + \dfrac{y}{6{,}5} = 1$ f) $\dfrac{x}{\sqrt{5}} + \dfrac{y}{3\sqrt{2}} = 1$

Der Anstieg der Geraden ist zu bestimmen. (L: a, c, e)

2.2.5. Der Schnittpunkt zweier Geraden

■ **Beispiel 4:**

Es soll der Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 bestimmt werden, die durch die Gleichungen $3x + y - 7 = 0$ bzw. $2x - y - 3 = 0$ gegeben sind. Da der Schnittpunkt P_0 mit den unbekannten Koordinaten $(x_0; y_0)$ auf beiden Geraden liegt (Abb. 2.9.), müssen diese Koordinaten beide Gleichungen erfüllen, es gilt also

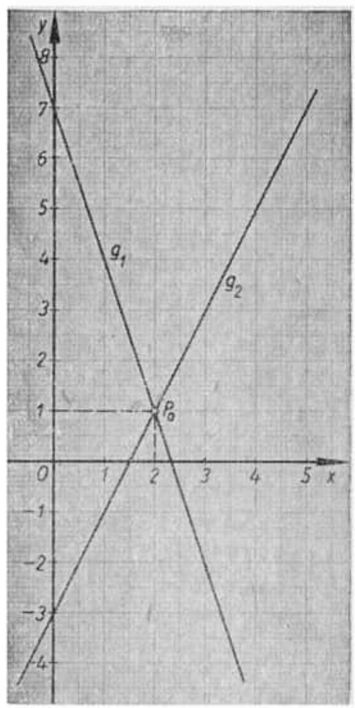
$$3x_0 + y_0 - 7 = 0$$

und

$$2x_0 - y_0 - 3 = 0.$$

Dieses Gleichungssystem kann nach den Lösungsverfahren für Gleichungen mit zwei Unbekannten gelöst werden. Die Lösung $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes P_0 (2; 1).

Abb. 2.9.



Es seien zwei Geraden durch ihre Gleichungen in der allgemeinen Form

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

gegeben, wobei die Koeffizienten von x und y vorerst verschieden von Null sind. Die Koordinaten des Schnittpunktes $P_0(x_0; y_0)$ sind die Lösung des Gleichungssystems, das die beiden Gleichungen bilden.

Man erhält daraus die Ausdrücke

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) x_0 = B_1 C_2 - B_2 C_1 \quad \text{und} \quad (A_1 B_2 - A_2 B_1) y_0 = A_2 C_1 - A_1 C_2 .$$

Ist $(A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$, so sind die Gleichungen eindeutig lösbar. Es existiert also ein Schnittpunkt. Aus $(A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$ folgt

$$A_1 B_2 \neq A_2 B_1$$

und wegen $B_1 \neq 0$ und $B_2 \neq 0$ weiterhin

$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2} .$$

Sind also die Richtungsfaktoren der beiden Geraden voneinander verschieden, so existiert ein Schnittpunkt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, sind also die Richtungsfaktoren der beiden Geraden gleich, das heißt, gilt

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} ,$$

so gibt es keinen Schnittpunkt; die beiden Geraden laufen parallel oder fallen zusammen. Für den Fall, daß in einer Gleichung oder in beiden Gleichungen einer der beiden Koeffizienten von x und y gleich Null ist, haben entsprechende Relationen Gültigkeit.

2.2.6. Der Schnittwinkel zweier Geraden

Sind zwei Geraden g_1 und g_2 durch die Gleichungen

$$y = m_1 x + n_1 \quad \text{und} \quad y = m_2 x + n_2$$

gegeben, so bestimmen $m_1 = \tan \alpha_1$ und $m_2 = \tan \alpha_2$ die Winkel α_1 bzw. α_2, die die Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bilden. Als **Schnittwinkel** zweier Geraden g_1 und g_2 bezeichnet man den Winkel, der von der Geraden g_1 überstrichen wird, wenn man sie im positiven Drehsinn um den Schnittpunkt bis zur Deckung mit der Geraden g_2 dreht. Für den Schnittwinkel φ der Geraden (Abb. 2.10.) ergibt sich dann $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ und folglich

$$\tan \varphi = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}$$

oder

$$(11) \quad \boldsymbol{\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}} .$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß $\varphi \neq 90°$ ist. Dieser Fall wird später betrachtet.

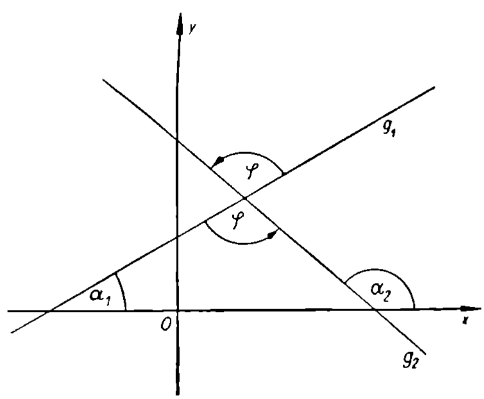


Abb. 2.10.

2.2.7. Parallele Geraden

Da für parallele Geraden $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, ist auch $m_1 = m_2$. Umgekehrt kann man sagen: Gilt für zwei Geraden mit dem Anstieg m_1 bzw. m_2 die Beziehung $m_1 = m_2$, so sind die Geraden parallel.

Beispiel 5:

Die Geraden $4x - 2y + 15 = 0$ und $6x - 3y + 17 = 0$ laufen parallel, da sich für beide Geraden nach dem Umstellen der Geradengleichung derselbe Anstieg $m = 2$ ergibt.

2.2.8. Zwei zueinander senkrechte Geraden

Sind die gegebenen Geraden zueinander senkrecht, so ist

$\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$, also

$$m_2 = \tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90°) = \frac{\sin(\alpha_1 + 90°)}{\cos(\alpha_1 + 90°)} = \frac{-\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{-1}{\tan\alpha_1}.$$

Da $\tan\alpha_1 = m_1$, ergibt sich $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$.

Beispiel 6:

Der Anstieg der Geraden $3x + 5y + 10 = 0$ ist $m_1 = -\frac{3}{5}$. Die Gerade $10x - 6y + 11 = 0$ hat den Anstieg $m_2 = \frac{5}{3}$. Die beiden Geraden stehen also aufeinander senkrecht.

Aufgaben

1. Der Schnittpunkt der Geraden ist zu bestimmen.

a) $y = \frac{5}{3}x - 1;\quad y = -\frac{4}{5}x + 6\frac{2}{5}$ **b)** $x + y - 2 = 0;\quad x + 3y - 10 = 0$

c) $5x - 2y + 10 = 0;\ 5x - 7y - 15 = 0$ **d)** $3x - 4x + 13 = 0;\ 11x + 7y - 104 = 0$

e) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1;\quad 4x - 2y - 1 = 0$ **f)** $0{,}8x + 0{,}4y - 1{,}2 = 0;\ 2x + y - 3 = 0$

g) $y = \frac{3}{4}x - 3;\quad y - 2x + 6\frac{3}{4} = 0$ **h)** $y = mx + b;\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (L: a, f, h)

Die Rechnungen sind mit Zeichnungen zu vergleichen. Welche Anforderungen an die Genauigkeit der Zeichnungen kann man stellen?

2. Die Gleichungen der Seiten a, b, c eines Dreiecks sind:

$y = 7 - 3x,\qquad x = 3y - 1,\qquad x + 7y + 11 = 0.$

Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken des Dreiecks! Bestimmen Sie die Gleichungen für die Seitenhalbierenden des Dreiecks und deren Schnittpunkt! Die Berechnung ist mit einer Konstruktion zu vergleichen. (L)

3. Der Schnittwinkel der Geraden ist zu bestimmen.

a) $y = -2x + 16;\quad y = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{8}$ **b)** $2y - x = 1;\quad 3y = 4x + 2$

c) $3x - y + 5 = 0;\quad 7x - y - 2 = 0$ **d)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1;\quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$. (L: a, c)

4. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind:

a) $A(-2; 4)$, $B(2; -3)$, $C(3; 5)$;

b) $A(-4; -5)$, $B(7; -3)$, $C(3; 5)$.

Die Winkel des Dreiecks sind zu bestimmen. (L: a)

5. Die Seiten a, b, und c eines Dreiecks werden gebildet von den Geraden

a) $8x + 3y - 83 = 0$, $\quad 6x - 5y + 3 = 0$, $\quad x + 4y - 14 = 0$;

b) $3x + 4y - 52 = 0$, $\quad 4x - y - 6 = 0$, $\quad x - 5y + 8 = 0$;

c) $419x + 513y + 718 = 0$, $\quad 807x - 629y - 205 = 0$, $\quad 635x + 421y - 316 = 0$.

Die Koordinaten der Eckpunkte und die Winkel des Dreiecks sind zu bestimmen. (L: a)

6. Die Gleichung der Parallelen durch $P_1(x_1; y_1)$ zu der gegebenen Geraden g ist zu bestimmen.

a) $P_1(5; 3)$ $\quad 2x - 3y - 12 = 0$ $\qquad$ **b)** $P_1(-2; -3)$ $\quad 5x + 6y - 27 = 0$

c) $P_1(2; 3)$ $\quad 9x + 10y - 80 = 0$ $\qquad$ **d)** $P_1(4; -1)$ $\quad 2x - y + 5 = 0$

e) $P_1(5; 7)$ $\quad 2x + 3y + 8 = 0$ $\qquad$ **f)** $P_1(5; 13)$ $\quad 3x - y - 2 = 0$

g) $P_1(-2; 2)$ $\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ $\qquad$ **h)** $P_1(x_1; y_1)$ $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (L: a, c)

7. Die Gleichung des Lotes von $P_1(x_1; y_1)$ auf die gegebene Gerade g ist zu bestimmen.

a) $P_1(2; 3)$ $\quad 7x - 5y - 2 = 0$ $\qquad$ **b)** $P_1(3; 5)$ $\quad 6x + 5y - 11 = 0$

c) $P_1(-3; 4)$ $\quad 10x - 9y + 11 = 0$ $\qquad$ **d)** $P_1(5; 13)$ $\quad 9x - 3y + 5 = 0$. (L: a, c)

8. Es sind die folgenden Sätze aus der Planimetrie analytisch zu beweisen:

a) Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

c) Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.

d) Die Streckensymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.

Anleitung: Es ist ein möglichst günstiges Koordinatensystem festzulegen. (L: a, b)

9. Beim Drehen ist die Schnittgeschwindigkeit v (in $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$) abhängig von der Umdrehungszahl n (in min^{-1}) und vom Durchmesser d (in m) des Werkstückes gemäß der Formel $v = d \cdot \pi \cdot n$. Durch welche Kurve wird die Funktion bei festem n dargestellt?

a) Es ist in einem $d; v$-Koordinatensystem die Funktion für $n_1 = 30\ \text{min}^{-1}$ darzustellen. Die d-Achse soll Durchmesser von 0 bis 400 mm enthalten, die v-Achse Schnittgeschwindigkeiten von 0 bis $120\ \text{m} \cdot \text{min}^{-1}$.

b) Ebenso sind die Kurven der Funktionen für: $n_2 = 37{,}5$; $n_3 = 47{,}5$; $n_4 = 60$; $n_5 = 75$; $n_6 = 95$; $n_7 = 118$; $n_8 = 150$ in demselben Koordinatensystem zu zeichnen.

c) Beim Schnelldrehen werden hohe Umdrehungszahlen und somit hohe Schnittgeschwindigkeiten erreicht. Es ist ein Nomogramm für die Umdrehungszahlen $n_1 = 1000\ \text{min}^{-1}$; $n_2 = 1460\ \text{min}^{-1}$; $n_3 = 1500\ \text{min}^{-1}$; $n_4 = 2400\ \text{min}^{-1}$ aufzustellen. Aus dem Nomogramm soll die Schnittgeschwindigkeit für n_3, $d = 350$ mm; n_2, $d = 110$ mm; n_4, $d = 320$ mm abgelesen werden. (L)

2.3. Analytische Geometrie des Kreises

2.3.1. Erklärung und Mittelpunktsgleichung des Kreises

Die Kreislinie (Peripherie des Kreises) ist die geschlossene Linie, deren Punkte alle von einem festen Punkte (Mittelpunkt oder Zentrum des Kreises) den gleichen Abstand haben.

Wir wählen den festen Punkt M als Mittelpunkt des Kreises so, daß er mit dem Koordinatenursprung O zusammenfällt (Abb. 2.11.). Alle Punkte des Kreises haben von O die konstante Entfernung r. Es sei P ein beliebiger Punkt des Kreises. Fällen wir von ihm aus die Lote auf die Achsen, so erhalten wir die Koordinaten $\overline{OQ} = x$ und $\overline{QP} = y$ des Punktes P. Die Verbindung $\overline{OP}$ ist der Radius r des Kreises. Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt dann:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

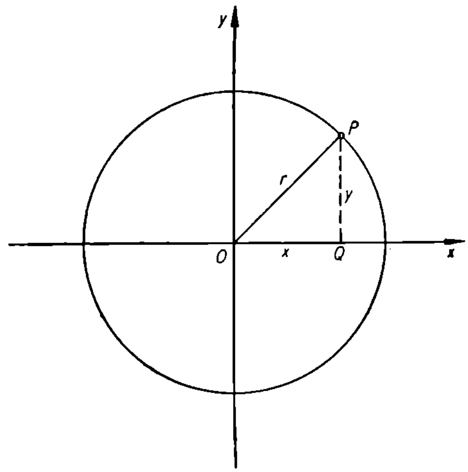


Abb. 2.11.

Wir haben diese Beziehung für einen beliebigen Punkt P auf der Peripherie des Kreises gefunden, sie gilt also für alle Punkte des Kreises. Für Punkte, die nicht auf der Peripherie des Kreises liegen, gilt $x^2 + y^2 \neq r^2$.

Da der Mittelpunkt des Kreises mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, gilt somit als **Mittelpunktsgleichung des Kreises:**

(12) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2.}$

2.3.2. Die allgemeine Gleichung des Kreises

Der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r sei jetzt der Punkt $M(c;\, d)$ des Koordinatensystems. Wir nehmen eine Parallelverschiebung des Systems vor, derart, daß der Koordinatenursprung O' mit dem Mittelpunkt $M(c; d)$ des Kreises zusammenfällt (Abb. 2.12.).

Für die Koordinatentransformation ergibt sich $x' = x - c;\ y' = y - d$.

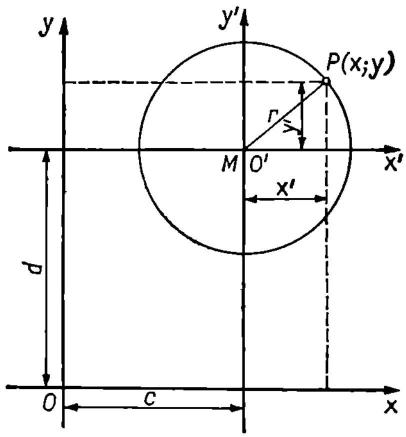


Abb. 2.12.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises $x'^2 + y'^2 = r^2$ geht dadurch über in die **allgemeine Kreisgleichung**

(13) $\quad \boldsymbol{(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2}.$

■ **Beispiel 7:**

Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(4;5)$ und dem Radius $r = 3$ lautet

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9.$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleichartiger Glieder entsteht daraus die Gleichung

$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0.$

Die Gleichung gehört als spezielle Form zu den Gleichungen zweiten Grades mit zwei Veränderlichen x und y. In ihr kommen außer einer Konstanten nur die zweiten und die ersten Potenzen der Variablen x und y vor, und ihre zweiten Potenzen haben gleiche Koeffizienten.

● **Aufgaben**

1. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, und zeichnen Sie ihn!

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
M	0; 0	0; 0	0; 6	10; 0	2; −3	2,5; 1,5	−2; −5	3; 0
r	4	1,732	12	14	5,831	3	7	3,7

(L: a, c, e)

2. Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(r; 0)$ und dem Radius r ist zu bestimmen. (L)

3. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch den Ursprung geht und dessen Mittelpunkt gegeben ist.

a) $M(3; 4)$ **b)** $M(-12; 5)$ **c)** $M(-1; -7)$ **d)** $M(4; -13)$
e) $M(-3,5; -6)$ **f)** $M(0; 6)$ **g)** $M(a; a)$ **h)** $M(0; c)$
i) $M(0; 1)$ **j)** $M(a; 0)$ **k)** $M(7; 0)$ **l)** $M(3,3; 0)$

Der Kreis ist zu zeichnen. (L: a, g, h)

4. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius der Kreise, die durch folgende Gleichungen gegeben sind!

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$
c) $x^2 + (y - 2)^2 = 18$ (L: a, c) **d)** $x^2 + (y + 2)^2 = 18$
e) $(x + 2)^2 + y^2 = 49$ **f)** $(x - 1,5)^2 + (y - 3,3)^2 = 81$

5. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten (1; 4) hat, soll durch den Punkt $P_1(5;6)$ gehen. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen und der Kreis zu zeichnen. (L)

2.3.3. Die Gleichungen der Tangenten

Ist $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt des um den Koordinatenanfang O mit dem Radius r geschlagenen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ (Abb. 2.13.), so gilt

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Die Gleichung der Geraden, die durch O und P_1 geht, ergibt sich nach der Zweipunkteform der Geradengleichung (s. S. 67)

$$y = \frac{0 - y_1}{0 - x_1} x + \frac{0\, y_1 - x_1 0}{0 - x_1}.$$

Der Koeffizient von x ist der Richtungsfaktor m_1 des Radius $\overline{OP_1}$.

Der Radius $\overline{OP_1}$ hat den Richtungsfaktor $m_1 = \frac{-y_1}{-x_1} = \frac{y_1}{x_1}$. Die an den Kreis im Punkte P_1 gelegte Tangente t steht auf dem Radius $\overline{OP_1}$ nach dem Berührungspunkt senkrecht und hat somit wegen

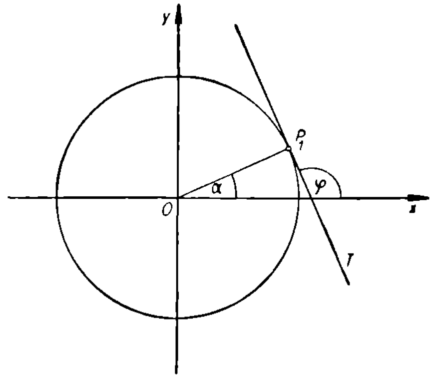


Abb. 2.13.

$$\varphi = 90° + \alpha \text{ und } \tan\varphi = \tan 90° + \alpha = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

den Richtungsfaktor $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

Die **Punktrichtungsform der Tangentengleichung** lautet somit

$$(14) \quad \boldsymbol{\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}}.$$

Daraus folgt

$$y y_1 - y_1^2 = -x x_1 + x_1^2 \text{ und } x x_1 + y y_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ist, erhält man schließlich als **Gleichung der Tangente an den Kreis**

$$(15) \quad \boldsymbol{x x_1 + y y_1 = r^2}.$$

■ **Beispiel 8:**

Die Gleichung der Tangente im Punkte P_1 (3; 4) des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ lautet $3x + 4y = 25$; $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$; ihr Richtungsfaktor $-\frac{3}{4}$ ergibt den Richtungswinkel $\varphi = 143{,}1°$ und den Achsenabschnitt $n = 6\frac{1}{4}$.

Hat die Gleichung des Kreises die allgemeine Form $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$, so erhält man durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems die **allgemeine Gleichung der Kreistangente im Punkte P_1**

$$(16) \quad \boldsymbol{(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2}.$$

Beispiel 9:

Die Tangente des Kreises $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 289$ im Punkte $P_1(+5; +10)$ lautet

$(x+3)(5+3) + (y+5)(10+5) = 289,$

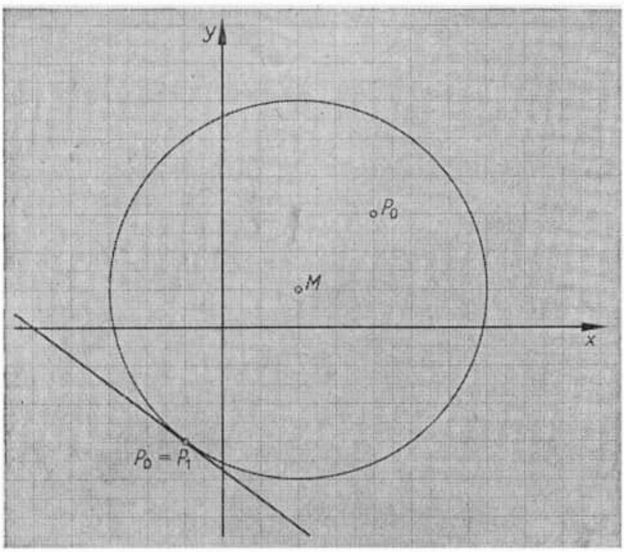


Abb. 2.14.

$$8x + 15y = 190,$$

$$y = -\frac{8}{15}x + 12\frac{2}{3}.$$

Der Radius MP_1 hat den Richtungsfaktor $\frac{15}{8}$, die Tangente in P_1 hat den Richtungsfaktor $-\frac{8}{15}$. Daß die Tangente auf dem Berührungsradius senkrecht steht, zeigt die Beziehung

$$\frac{15}{8} \cdot \left(-\frac{8}{15}\right) = -1.$$

Die Abbildungen 2.14. und 2.15. zeigen, welche Fälle zu unterscheiden sind, wenn von einem Punkt P_0 aus an den Kreis Tangenten zu legen sind.

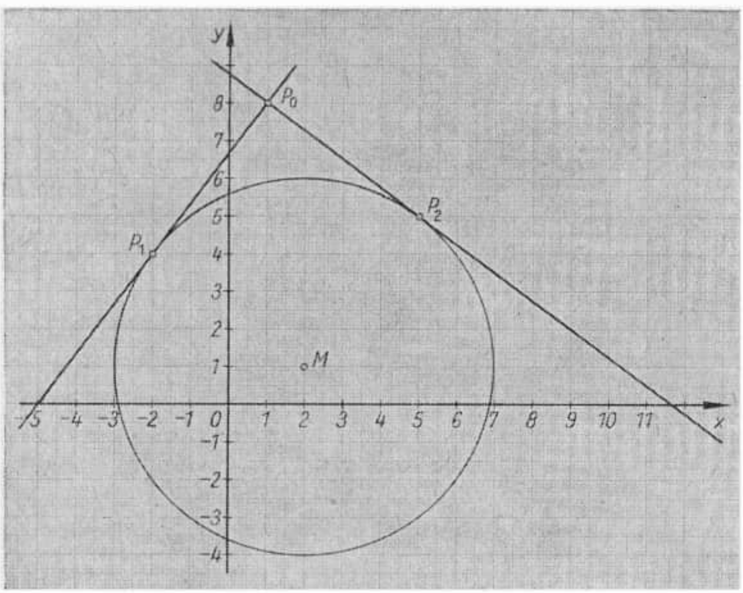


Abb. 2.15.

2.3.4. Schnittpunkte von Kreis und Gerade

Gegeben seien der Kreis

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$$

und die Gerade

$$y=mx+n.$$

Die Koordinaten ihrer Schnittpunkte erfüllen beide Gleichungen. Es gilt also für einen Schnittpunkt $P_1\,(x_1;\,y_1)$:

$$(x_1-c)^2+(y_1-d)^2=r^2$$

und

$$y_1=mx_1+n.$$

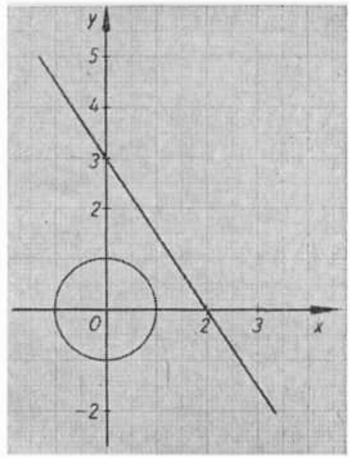


Abb. 2.16.

Dieses Gleichungssystem löst man zweckmäßig durch Anwendung der Substitutionsmethode. Je nachdem, ob es keine, eine oder zwei (reelle) Lösungen hat, haben der Kreis und die Gerade keinen, einen oder zwei gemeinsame Punkte. Im ersten Fall schneidet die Gerade den Kreis nicht, im zweiten ist sie Tangente und im dritten Fall Sekante.

Beispiel 10:

Für den Kreis $x^2+y^2=1$ und die Gerade $y=-1{,}5x+3$ (Abb. 2.16.) erhält man die folgende Gleichung für x_1:

$3{,}25x_1^2-9x_1+8=0.$

Diese Gleichung hat keine (reellen) Wurzeln; es ist nämlich

$$x_1=\frac{9\pm\sqrt{-23}}{6{,}5}.$$

Beispiel 11:

Für den Kreis $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ und die Gerade $y=-x+9$ (Abb. 2.17.) ergibt sich die Gleichung

$x_1^2-8x_1+16=0.$

Sie hat die Doppelwurzel $x_1=4$. Durch Einsetzen dieses Wertes in eine der Gleichungen (zweckmäßig die Geradengleichung) erhält man $y_1=5$. Die Gerade $y=-x+9$ ist demnach Tangente an den Kreis im Punkte $P\,(4;\,5)$.

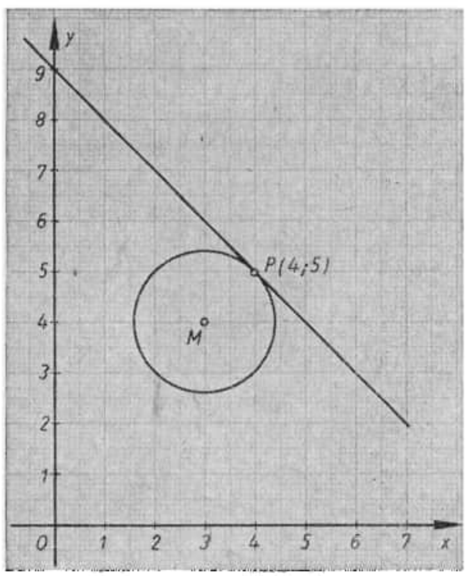


Abb. 2.17.

Beispiel 12:

Für die Gleichung des Kreises $(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$ und die Geradengleichung $y=2x-2$ (Abb. 2.18.) erhält man durch die Gleichung

$5x_1^2-18x_1-8=0$

zwei Wertepaare. Die Gerade ist Sekante des Kreises und schneidet diesen in den Punkten $P_1(4;\,6)$ und $P_2(-0{,}4;\,-2{,}8)$.

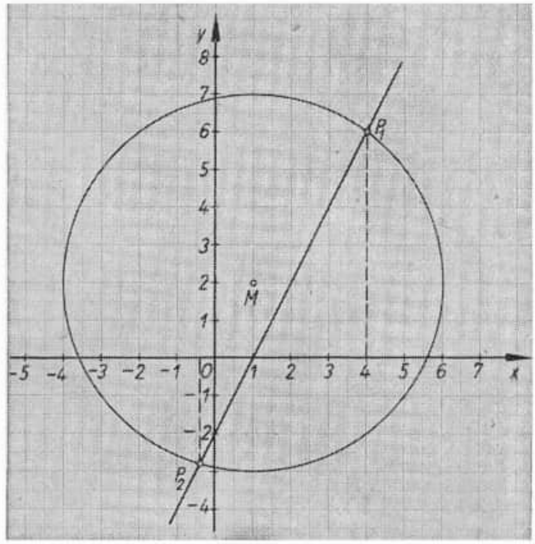


Abb. 2.18.

Aufgaben

1. Die Gleichung des Kreises durch die Punkte $P_1(-5;\,6)$ und $P_2(8;\,-4)$, dessen Mittelpunkt

a) auf der x-Achse,

b) auf der y-Achse

liegt, ist zu bestimmen. (L: a)

2. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, der durch die Punkte $P_1(10;\,9)$ und $P_2(4;\,-5)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $3x-2y-17=0$ liegt. (L)

3. Es ist die Gleichung des Kreises durch P_1, P_2 und P_3 zu bestimmen.

	a)	b)	c)	d)
P_1	(0; 0)	(−1; 2)	(0; 4)	(1; 2)
P_2	(5; 0)	(3; −6)	(10; 2)	(4; 1)
P_3	(3; 4)	(16; −15)	(−2; −6)	(9; 6) (L: a, c)

4. Die Gleichungen der Kreise durch $P_1(1;\,2)$ und $P_2(-3;\,6)$ mit dem Radius $r=4$ sind aufzustellen. (L)

5. Es ist zu untersuchen, ob das Viereck $A\,(-3;\,0)$ $B\,(1;\,8)$ $C\,(5;\,6)$ $D\,(4;\,-1)$ ein Sehnenviereck ist. (L)

6. Es ist die Länge der Sehne zu bestimmen, die der Kreis aus der Geraden ausschneidet. Vergleichen Sie mit einer Konstruktion!

a) $x^2+y^2=9;\qquad 20x-15y-21=0$

b) $x^2+y^2=36;\qquad 4x-3y+24=0$

c) $x^2+y^2=100;\qquad 4x+3y-50=0$ (L: a)

3. Gleichungen

3.1. Lineare Gleichungen

Der Grad einer Gleichung, in der die Variablen nur als Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten auftreten, wird durch diese Potenzen bestimmt. Kommt in einer Gleichung nur eine einzige Variable vor, so ist der Grad der Gleichung einfach gleich dem Exponenten der höchsten Potenz der Variablen.

■ **Beispiele:**

$4x + 9 = 0$ (Gleichung ersten Grades, auch lineare Gleichung genannt)
$0{,}7x^2 + 35x = 9$ (Gleichung zweiten Grades, auch quadratische Gleichung genannt)
$2x^3 + 7x = 0$ (Gleichung dritten Grades, auch kubische Gleichung genannt)
$3x^2 - \frac{2}{9}x^4 + 18 = 2x$ (Gleichung vierten Grades)

Treten in einer Gleichung mehrere Variable auf, so ist der Grad der Gleichung die größte Exponentensumme der vorkommenden Variablenprodukte.

■ **Beispiele:**

$x \cdot y = 4$ ist eine Gleichung zweiten Grades, denn die Exponentensumme des vorkommenden Variablenprodukts x^1y^1 ist gleich 2.
$2x^3y + 9x^2y + y^3 = 8$ ist eine Gleichung vierten Grades, denn die größte Exponentensumme ist im Produkt x^3y^1 gleich 4.

$4x + y - 2z + 4 = 0$	Gleichung ersten Grades mit drei Variablen;
$25xy + 3{,}8z = 19$	Gleichung zweiten Grades mit drei Variablen;
$x^2 + 4yz - 8 = 3x$	Gleichung zweiten Grades mit drei Variablen;
$5x^3y = 1$	Gleichung vierten Grades mit zwei Variablen;
$a^2x + 3b^4y = c$	Gleichung ersten Grades bezüglich der Variablen x, y und c. Bezüglich der Variablen b ist diese Gleichung jedoch vierten Grades, und bezüglich der Variablen a ist sie zweiten Grades.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Lösung von linearen Gleichungen, d.h. von Gleichungen ersten Grades.
Eine Gleichung mit einer Variablen lösen bedeutet, die Menge der Zahlen aus einer vorgegebenen Zahlenmenge zu ermitteln, die die Gleichung zu einer wahren (richtigen) Gleichheitsaussage machen, wenn man diese Zahlen an Stelle der Variablen in die Gleichung einsetzt. Man sagt auch kürzer, daß die gesuchten Zahlen die Gleichung erfüllen müssen. Die Menge dieser Zahlen heißt die Lösungsmenge oder kurz Lösung der gegebenen Gleichung. Die vorgegebene Zahlenmenge, aus der die

Elemente der Lösungsmenge ausgesucht werden müssen, heißt **Lösungsgrundmenge**. Von der Wahl der Lösungsgrundmenge hängt es wesentlich ab, ob eine Gleichung eine Lösung hat oder nicht.

■ **Beispiel 1:**

Man löse die Gleichung $4x = 15$, wobei die vorgegebene Lösungsgrundmenge die Menge der rationalen Zahlen sein soll. Die Lösungsmenge enthält ein einziges Element, nämlich die rationale Zahl $\frac{15}{4}$. Setzen wir sie an Stelle der Variablen x in die gegebene Gleichung ein, so erhalten wir die wahre Gleichheitsaussage $4 \cdot \frac{15}{4} = 15$.

■ **Beispiel 2:**

Man löse die Gleichung $4x = 15$, wobei die Grundmenge jetzt die Menge der ganzen Zahlen sein soll.
Die Lösungsmenge ist in diesem Fall leer, es gibt nämlich keine ganze Zahl, die die gegebene Gleichung erfüllt. Man sagt: die Gleichung ist unlösbar.

Wenn im folgenden keine Bemerkung über die Lösungsgrundmenge gemacht wird, so soll stets die Menge der reellen Zahlen Lösungsgrundmenge sein.

■ **Beispiel 3:**

Man löse die Gleichung $3x = 21$.
Diese Gleichung wird nur von der Zahl 7 erfüllt. Mit anderen Worten heißt das: Nur wenn man die Zahl 7 für die Variable x in die Gleichung einsetzt, wird aus dieser eine wahre Gleichheitsaussage, nämlich die Gleichheitsaussage $3 \cdot 7 = 21$. Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung besteht also nur aus der Zahl 7.

■ **Beispiel 4:**

$2x + 4 = 2x - 8$; diese Gleichung wird von keiner reellen Zahl erfüllt; die Lösungsmenge ist also leer. Man sagt: die Gleichung ist unlösbar.

■ **Beispiel 5:**

$4x + 9 = x + 4 + 3x + 5$; die Lösungsmenge dieser Gleichung umfaßt alle reellen Zahlen, denn die Gleichung wird von allen reellen Zahlen erfüllt. Derartige Gleichungen heißen identische Gleichungen (bezüglich der Menge der reellen und auch der komplexen Zahlen).

Das Lösen einer Gleichung ersten Grades mit einer Variablen wird durch Umformen der Gleichung erleichtert. Damit erreicht man, daß die Variable isoliert wird. Auf der einen Seite steht dann nur die Variable, auf der anderen kommen nur bekannte Zahlen vor. Bei diesen Umformungen hat man darauf zu achten, daß durch sie die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung nicht verändert wird. Ein Beispiel soll das verdeutlichen: Die Lösungsmenge der Gleichung $2x = 6$ enthält nur die Zahl 3. Quadriert man nun beide Seiten der Gleichung, so erhält man die neue Gleichung $4x^2 = 36$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung enthält aber außer der Zahl 3 noch die Zahl -3. Durch das Quadrieren ist ein neues Element zur Lösungsmenge hinzu-

gekommen. Die beiden Gleichungen sind also nicht gleichwertig. In vielen Fällen lassen sich allerdings derartige Umformungen nicht vermeiden. Um sicher zu sein, daß die gefundenen Zahlen wirklich Lösungen einer gegebenen Gleichung sind, muß man deshalb auf jeden Fall eine Probe machen, indem man diese Zahlen an Stelle der Variablen in die gegebene Gleichung einsetzt und nachprüft, ob dadurch wirklich eine wahre Gleichheitsaussage entsteht.
Bei anderen Umformungen von Gleichungen können auch Elemente der Lösungsmenge verlorengehen. Solche Umformungen sind unzulässig.

■ **Beispiel 6:**

Man löse die Gleichung $4x(x+8) = 12(x+8)$.
Wie man durch Einsetzen nachprüfen kann, enthält die Lösung die beiden Elemente $x_1 = 3$ und $x_2 = -8$.
Geht man von der gegebenen Gleichung zur Gleichung $4x = 12$ über, indem man beiderseits durch $x + 8$ dividiert, so erhält man als Lösung der letzten Gleichung nur ein Element, nämlich $x_1 = 3$. Das andere Element $x_2 = -8$ ist also verlorengegangen. Man darf daher nicht eine Gleichung beiderseits durch einen Ausdruck dividieren, der die Variable enthält.

Bei der Lösung von Gleichungen mit zwei Variablen handelt es sich darum, die Menge der **Zahlenpaare** zu ermitteln, die die Gleichung erfüllen. Die Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Variablen ist also eine Menge von geordneten Zahlenpaaren.

■ **Beispiel 7:**

$3x + 2y = 7$

Wie wir aus der Lehre von den Funktionen schon wissen, enthält die Lösungsmenge dieser Gleichung unendlich viele Zahlenpaare. Einige von ihnen sind z.B. die folgenden: $(1;\ 2)$; $(3;\ -1)$; $(-5;\ 11)$; $\left(6;\ -\frac{11}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{5};\ \frac{32}{10}\right)$.

Genauso wie bei den linearen Gleichungen mit einer Variablen muß man auch hier mit den betrachteten Lösungen Proben machen, indem man die in Frage kommenden Zahlenpaare in die Ausgangsgleichung einsetzt.

3.1.1. Gleichungen in Verbindung mit algebraischen Summen und Klammer ausdrücken

■ **Beispiel 8:**

$3x + 5 = 26$

Das Isolieren der Variablen x erfolgt durch zwei Umformungen. Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 5, so ergibt sich $3x = 21$; werden nun beide Seiten durch 3 dividiert, so erhält man $x = 7$.
Will man kurz angeben, durch welche Rechenoperationen die Gleichung umgeformt werden soll, so schreibt man hinter einem senkrechten Strich am Ende der Gleichung mit den üblichen Rechenzeichen auf, was auf beiden Seiten der Gleichung zu rechnen ist („Rechenbefehl"):

Kurzform:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 26 \quad &&| -5 \\ 3x &= 21 &&| :3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Probe: Die linke Seite ergibt $3 \cdot 7 + 5 = 21 + 5 = 26$ und stimmt also mit der rechten überein.

Beispiel 9:

$53 - 5x - 21 + 22x = 18x + 17 - 4x - 51$

Beide Seiten der Gleichung können vereinfacht werden, bevor das Auflösen der Gleichung beginnt. Man erhält durch Zusammenfassen $17x + 32 = 14x - 34$. Subtrahiert man auf beiden Seiten $14x$, so entsteht $3x + 32 = -34$. Subtrahiert man auf beiden Seiten 32, so ergibt sich $3x = -66$; dividiert man beide Seiten durch 3, so erhält man $x = -22$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} 53 - 5x - 21 + 22x &= 18x + 17 - 4x - 51 \quad &&| \text{ zusammenfassen} \\ 17x + 32 &= 14x - 34 &&| -14x \\ 3x + 32 &= -34 &&| -32 \\ 3x &= -66 &&| :3 \\ x &= -22 \end{aligned}$$

Probe:

linke Seite $\quad 53 - 5 \cdot (-22) - 21 + 22 \cdot (-22) = 53 + 110 - 21 - 484 = -342$

rechte Seite $\quad 18 \cdot (-22) + 17 - 4(-22) - 51 = -396 + 17 + 88 - 51 = -342$

Vergleich: $-342 = -342$

Beispiel 10:

$ax + bx = c \quad (a + b \neq 0)$

Sind a, b und c bekannte Zahlen, so klammert man auf der linken Seite der Gleichung den gemeinsamen Faktor x aus und erhält $x \cdot (a + b) = c$. Nun isoliert man x, indem man beide Seiten der Gleichung durch $(a + b)$ dividiert. Es ergibt sich $x = \frac{c}{a+b}$.

Kurzform:

$$\begin{aligned} ax + bx &= c \quad &&| \ x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (a + b) &= c &&| :(a + b) \\ x &= \frac{c}{a+b} \end{aligned}$$

Probe:

$$a \cdot \frac{c}{a+b} + b \cdot \frac{c}{a+b} = \frac{ac + bc}{a+b} = \frac{c \cdot (a+b)}{a+b} = c$$

Beispiel 11:

$6a^2 - 3b(x + 2a) = 3b(2a - 3x) - 4a(b - 2x) \quad (3b - 4a \neq 0)$

Die auf beiden Seiten der Gleichung stehenden Klammerausdrücke enthalten die Variable x. Wir erhalten zunächst durch Ausmultiplizieren der Klammern

$6a^2 - 3bx - 6ab = 6ab - 9bx - 4ab + 8ax$

und durch Zusammenfassen

$6a^2 - 3bx - 6ab = 2ab - 9bx + 8ax.$

Die Gleichung ordnen wir so, daß auf der linken Seite nur Glieder stehen, die x als Faktor enthalten, auf der rechten Seite nur Glieder, die x nicht als Faktor enthalten. Zu dem Zwecke müssen wir auf beiden Seiten der Gleichung einen Ausdruck addieren, der auf der linken Seite die Summanden $6a^2$ und $-6ab$, auf der rechten die Summanden $-9bx$ und $+8ax$ beseitigt. Es ist also auf beiden Seiten der Ausdruck $(-6a^2 + 6ab + 9bx - - 8ax)$ zu addieren. Er enthält mit entgegengesetzten Vorzeichen alle Glieder der linken Seite, die x nicht enthalten, und alle Glieder der rechten Seite, die x enthalten. Beim Addieren fallen links die Glieder ohne x, rechts die Glieder mit x weg, und somit ist die Gleichung im gewünschten Sinne geordnet. Wir erhalten dabei

$$\left.\begin{array}{r} 6a^2 - 3bx - 6ab \\ -6a^2 + 9bx + 6ab - 8ax \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 2ab - 9bx + 8ax \\ -6a^2 + 6ab + 9bx - 8ax. \end{array}\right.$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich

$6bx - 8ax = 8ab - 6a^2.$

Jeder Summand dieser Gleichung enthält den Faktor 2. Wir dividieren daher jede Seite der Gleichung, d.h. jeden einzelnen Summanden, durch 2 und erhalten

$3bx - 4ax = 4ab - 3a^2.$

Klammert man aus den Summanden der linken Seite den gemeinsamen Faktor x aus, so entsteht $x \cdot (3b - 4a) = 4ab - 3a^2$.

Die Division durch $(3b - 4a)$ ergibt

$$x = \frac{4ab - 3a^2}{3b - 4a}.$$

Hier erkennen wir, daß es notwendig war, $3b - 4a \neq 0$ vorauszusetzen.

Kurzform:

$$\begin{array}{rcll} 6a^2 - 3b(x + 2a) &=& 3b(2a - 3x) - 4a(b - 2x) & \mid \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 6a^2 - 3bx - 6ab &=& 6ab - 9bx - 4ab + 8ax & \mid \text{zusammenfassen} \\ 6a^2 - 3bx - 6ab &=& 2ab - 9bx + 8ax & \mid + (-6a^2 + 6ab + 9bx - 8ax) \\ 6bx - 8ax &=& 8ab - 6a^2 & \mid : 2 \\ 3bx - 4ax &=& 4ab - 3a^2 & \mid x \text{ ausklammern} \\ x \cdot (3b - 4a) &=& 4ab - 3a^2 & \mid : (3b - 4a) \\ x &=& \dfrac{4ab - 3a^2}{3b - 4a}. & \end{array}$$

Probe:

$$6a^2 - 3b\left(\frac{4ab - 3a^2}{3b - 4a} + 2a\right) = 6a^2 - 3b \cdot \frac{10ab - 11a^2}{3b - 4a} = \frac{51a^2b - 24a^3 - 30ab^2}{3b - 4a};$$

$$3b\left(2a - 3\,\frac{4ab - 3a^2}{3b - 4a}\right) - 4a\left(b - 2 \cdot \frac{4ab - 3a^2}{3b - 4a}\right) =$$

$$= 3b \cdot \frac{-6ab + a^2}{3b - 4a} - 4a \cdot \frac{3b^2 - 12ab + 6a^2}{3b - 4a} = \frac{-30ab^2 + 51a^2b - 24a^3}{3b - 4a}$$

▶ **Klammern, in denen die Variable vorkommt, müssen beim Auflösen der Gleichung beseitigt werden.**

Andere Klammern werden nur dann beseitigt, wenn sich dadurch die Gleichung vereinfacht.

3.1.2. Textgleichungen

In der folgenden Aufgabe ist der Zusammenhang zwischen einer unbekannten und anderen, bekannten Größen nicht durch eine aufzulösende Gleichung unmittelbar gegeben, sondern in einen Text eingekleidet, aus dem sich eine Gleichung aufstellen läßt.

■ **Beispiel 12:**

Das 7fache einer Zahl, um 11 vermindert, ergibt das 5fache der um 3 vermehrten Zahl. Wie findet man die Zahl aus diesen Angaben? Die Frage soll mit Hilfe einer Gleichung beantwortet werden.

Lösung: Die gesuchte Zahl wird mit x bezeichnet. Man bringt zunächst zum Ausdruck, was nach der Aufgabe für die Zahl x gefordert wird. Ihr 7faches heißt $7x$, das um 11 verminderte 7fache ergibt $7x - 11$, die um 3 vermehrte Zahl x heißt $x + 3$, ihr 5faches $5 \cdot (x + 3)$. Die Ausdrücke $7x - 11$ und $5 \cdot (x + 3)$ sollen gleich sein, es ergibt sich somit als Gleichung für x: $7x - 11 = 5 \cdot (x + 3)$.

Das Auflösen der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 7x - 11 &= 5x + 15 \quad && \mid -5x + 11 \\ 2x &= 26 && \mid :2 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Zur Prüfung der Richtigkeit der Lösung von Textaufgaben genügt es nicht, daß die gefundenen Werte in die Gleichung eingesetzt werden; es könnte ja schon beim Aufstellen der Gleichung ein Fehler unterlaufen sein. Deshalb muß die Lösung an Hand des wirklichen Sachverhalts überprüft werden.

Probe: Das 7fache von 13 ist 91. Diese Zahl, um 11 verkleinert, ergibt $91 - 11 = 80$; 13, um 3 vermehrt, ergibt 16. Das 5fache von 16 ist $5 \cdot 16 = 80$. Die Zahl 13 erfüllt die in der Aufgabe gestellten Forderungen.

Auch in der nächsten Aufgabe ist die aufzulösende Gleichung nicht unmittelbar gegeben. Statt dessen wird ein Problem geschildert, wie es in der Praxis auftreten kann; es muß erst in die Sprache der Mathematik übersetzt und in Form einer

Gleichung niedergeschrieben werden. Gerade durch Lösen von Textaufgaben wird geübt, mathematische Begriffe und Regeln, die aus Problemen der Umwelt entwickelt werden, wieder auf die Praxis anzuwenden, um neue Erkenntnisse zu gewinnen.

■ **Beispiel 13:**

Wieviel Kilogramm Zink (Dichte $7\ \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$) sind mit 53,4 kg Kupfer (Dichte $8{,}9\ \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$) zu legieren, damit man Messing mit der Dichte $8{,}4\ \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ erhält?

Lösung: Aus 53,4 kg Kupfer werden durch Zusatz von x kg Zink insgesamt $(53{,}4 + x)$ kg Messing hergestellt. Nach der Formel $V = \frac{m}{\varrho}$ sind das $\frac{53{,}4}{8{,}9}\ \text{dm}^3$ Kupfer und $\frac{x}{7}\ \text{dm}^3$ Zink, die zu $\frac{53{,}4 + x}{8{,}4}\ \text{dm}^3$ Messing verarbeitet werden. Das Gesamtvolumen ergibt sich als Summe der Volumina der Bestandteile. Man erhält für das Gesamtvolumen also die beiden Ausdrücke

$\left(\frac{53{,}4}{8{,}9} + \frac{x}{7}\right)\text{dm}^3$ und $\frac{53{,}4 + x}{8{,}4}\ \text{dm}^3$ und daraus für x die Gleichung

$$\frac{53{,}4}{8{,}9} + \frac{x}{7} = \frac{53{,}4 + x}{8{,}4}.$$

Das Auflösen der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 6 + \frac{x}{7} &= \frac{53{,}4 + x}{8{,}4} && | \cdot 8{,}4 \\ 50{,}4 + 1{,}2x &= 53{,}4 + x && | - (50{,}4 + x) \\ 0{,}2x &= 3 && | : 0{,}2 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Den 53,4 kg Kupfer müssen demnach 15 kg Zink zugesetzt werden.

Probe: Fügt man 15 kg Zink zu 53,4 kg Kupfer, so erhält man 68,4 kg Messing.

$\frac{68{,}4}{8{,}4}\ \text{dm}^3$ oder $8\frac{1}{7}\ \text{dm}^3$ Messing enthalten

$\frac{53{,}4}{8{,}9}\ \text{dm}^3$ oder $6\ \text{dm}^3$ Kupfer und $\frac{15}{7}\ \text{dm}^3$ oder $2\frac{1}{7}\ \text{dm}^3$ Zink.

$8\frac{1}{7} = 6 + 2\frac{1}{7}.$

Richtlinien für
das Aufstellen einer Gleichung nach einem Aufgabentext:

1. Es wird festgestellt, was unbekannt ist.
2. Alle Beziehungen der in der Aufgabe genannten Größen werden mit mathematischen Rechenzeichen aufgeschrieben, die unbekannte Größe wird dabei durch eine Variable (x, y, u, o. ä.) bezeichnet.
3. Es wird festgestellt, zwischen welchen Ausdrücken eine Gleichheitsbeziehung existiert. Enthält wenigstens der eine dieser Ausdrücke die Variable, so bildet er die eine Seite, der andere Ausdruck die andere Seite der Gleichung:

das Lösen der Gleichung:

1. Jede Seite der Gleichung wird für sich soweit wie möglich vereinfacht.
2. Die Gleichung wird geordnet und danach wieder soweit wie möglich vereinfacht.
3. Die Variable wird isoliert;

die Probe:

1. Die Elemente der Lösungsmenge werden an Stelle der Variablen in die Aufgabe eingesetzt.
2. Die Lösung ist nur dann richtig, wenn ihre Elemente den Bedingungen der Aufgabe genügen.

● **Aufgaben**

1. a) $x + 3 = 8$ b) $8 + x = 3$ c) $x + 0{,}7 = 2$

2. a) $x - 6 = 8$ b) $x - 5\frac{1}{7} = 2$ c) $7{,}5 - x = 2{,}1$

3. a) $4x = 28$ b) $35x = 7$ c) $1{,}4x = 42$

4. a) $\frac{x}{5} = 2$ b) $\frac{x}{4} = 2{,}4$ c) $\frac{x}{3} = 1$ d) $\frac{x}{2} = 3\frac{1}{7}$

5. a) $8x + 7 = 39$ b) $3x - 11 = 16$ c) $15 + 2x = 25$

6. a) $px + q = r$ b) $a - bx = c$ c) $4d + nx = 7d$

7. a) $13x - 19 = 9x + 5$ b) $29 + 14x = 5x + 2$ c) $14 - 7x = 15 - 8x$ (L:a)

8. a) $2 - 9x + 3 - 7x = 12 - 16x + 13 - 10x$
b) $11 - x = 5x + 12 - 8x + 7$ (L:a)

9. a) $ax - 5b = 3bx + 2a$ b) $ax + b = cx + d$
c) $4ax + 3b - 5bx = 3bx + 8a - b$ (L:a)

10. $12x - (5x + 4) = 7 - (23x - 19)$

11. $37x - [59 - (25 - 4x) - 7x] = 47 - (9x - 17)$ (L)

12. $7{,}3x - (17{,}8x + 2{,}6) = 19{,}3x - [15{,}6 - (5{,}2x + 20{,}1)] - 6{,}4$ (L)

13. $(3{,}4 + 2{,}3a) \cdot x = 2{,}2a - (x + 2{,}6) \cdot (2{,}3a - 3{,}4)$ (L)

14. $\frac{x}{4} - \frac{7x-9}{3} = 5\frac{1}{2} - \frac{x-8}{6}$ (L) **15.** $\frac{x+1}{10} + \frac{3-x}{30} - \frac{x+1}{12} = \frac{2x+3}{20} - \frac{x-4}{15}$

16. $\frac{4x-3}{4} - \frac{3x+2}{9} = \frac{x+1}{3} - \frac{5}{12}$ **17.** $\frac{2x+b}{22} - \frac{15b-8a}{33} = \frac{13x-a}{33} - \frac{2a-3b}{6}$ (L)

18. Im zweiten Quartal produzierte eine Maschinenfabrik monatlich durchschnittlich 14 Maschinen mehr als der Monatsdurchschnitt des ersten Quartals ergab. So wurden im ersten Halbjahr insgesamt 282 Maschinen fertiggestellt. Wie hoch war der Monatsdurchschnitt des ersten Quartals?

19. In der Formel $\Delta t = t_2 - t_1$ bedeuten Δt Temperaturzunahme, t_1 Anfangstemperatur, t_2 Endtemperatur. Die Gleichung ist aufzulösen nach

a) t_1 (Zahlenbeispiel: $t_2 = 33{,}5°$, $\Delta t = 25{,}8°$), b) t_2 (Zahlenbeispiel: $t_1 = 18°$, $\Delta t = 7{,}1°$).

Anmerkung: Hier wie in den folgenden Aufgaben sollen die Zahlenwerte erst eingesetzt werden, wenn die Gleichung aufgelöst worden ist.

20. Die Masse m eines Körpers wird aus dem Volumen V und der Dichte ϱ nach der Formel $m = V \cdot \varrho$ berechnet. Die Gleichung ist nach V aufzulösen (Zahlenbeispiel: $m = 24{,}03$ kg; $\varrho = 8{,}9 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$).

21. Bei gleichförmiger Bewegung wird der Weg s, der mit der Geschwindigkeit v in der Zeit t zurückgelegt wird, nach der Formel $s = v \cdot t$ berechnet. Die Gleichung ist nach t aufzulösen (Zahlenbeispiel: $s = 66$ km, $v = 27{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

22. Die Umfangsgeschwindigkeit v eines Schwungrades wird aus dem Durchmesser d und der Drehzahl n nach der Formel $v = \pi \cdot d \cdot n$ berechnet. Die Gleichung ist nach n aufzulösen. (Zahlenbeispiel: $v = 15{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $d = 500$ mm, $\pi \approx 3\frac{1}{7}$).

23. Durchfließt ein elektrischer Strom mit der Stärke I ein Stück eines Leiters, das den Widerstand R hat, so berechnet man den Spannungsabfall U zwischen den Enden des Leiterstücks nach dem Ohmschen Gesetz $U = I \cdot R$. Die Gleichung ist nach R aufzulösen (Zahlenbeispiel: $U = 220$ V, $I = 0{,}55$ A).

24. Der Widerstand R eines elektrischen Leiters wird aus seinem spezifischen Widerstand ϱ, seiner Länge l und seinem Querschnitt A nach der Formel $R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$ berechnet. Die Gleichung ist nach A aufzulösen (Zahlenbeispiel: $R = 143\,\Omega$, $\varrho = 0{,}0286\,\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$, $l = 2$ km).

25. Die Masse m eines Keiles wird nach der Formel

$$m = \frac{a_1 + 2a_2}{6} \cdot b \cdot h \cdot \varrho$$

berechnet; dabei bezeichnet a_1 die Länge der Keilschneide, a_2 die Länge des Keilfußes, b die Breite des Keilfußes, h die Höhe des Keiles, ϱ die Dichte. Die Formel ist nach

a) a_1, b) a_2, c) b, d) h, e) ϱ aufzulösen.

26. Um wichtige Zeichen (Herstellungsnummern u. a.) in polierte Maschinenteile aus Stahl einzuätzen, verwendet man verdünnte Salpetersäure. In wieviel Liter Wasser ist $\frac{1}{8}$ l konzentrierte Salpetersäure von der Dichte $1{,}5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ zu schütten, damit Ätzflüssigkeit von der erforderlichen Dichte $1{,}1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ entsteht? (L)

27. In einer LPG sind zwei Brigaden für das Einbringen der Getreideernte eingesetzt. Durch bessere Arbeitsorganisation benötigt die eine Brigade nur $\frac{3}{7}$ der Gesamtzeit. Wieviel Stunden benötigt die andere Brigade, wenn je Dezitonne Getreide vom Mähen bis zum Drusch für beide Brigaden zusammen eine Zeit von 14 Stunden festgestellt wurde?

28. Buntmetalle sind für uns sehr wichtige Grundstoffe, und deshalb muß sparsam mit ihnen umgegangen werden, denn für eine Tonne Kupferschrott und eine Tonne Elektrolytkupfer werden zusammen 5310,– MDN gezahlt. Der Preis des Kupferschrotts beträgt aber nur

18% von dem des Elektrolytkupfers. Wieviel kostet die Tonne Kupferschrott, wieviel die Tonne Elektrolytkupfer?

29. Durch Einführung technischer Verbesserungen konnte die Produktionsauflage eines volkseigenen Werkes um 60 Werkzeugmaschinen gegenüber dem Vorjahre erhöht werden. Die Produktionsauflage konnte um $\frac{1}{4}$ übererfüllt werden, wodurch eine Produktion erreicht wurde, die 50% über der des Vorjahres lag.
Wie groß ist: **a)** die Vorjahrsproduktion gewesen, **b)** die Produktion des neuen Jahres?

30. Die bessere Ausstattung mit Maschinen und die Anwendung neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse in der sozialistischen Landwirtschaft führen zu einer wesentlichen Steigerung der tierischen und pflanzlichen Produktion. So konnte z. B. das Eieraufkommen im Bezirk Potsdam im Jahre 1960 im Gegensatz zu 1955 auf einen Stand gebracht werden, der 16 Mill. mehr als das Doppelte betrug. In den beiden Jahren war der Ertrag zusammen 277 Mill. Eier. Wie hoch war das Eieraufkommen 1960?

31. Durch den ständigen Aufschwung der Volkswirtschaft ist es unserem Staate möglich, immer größere Investitionsmittel für den Wohnungsbau bereitzustellen. So wurden 1954 $\frac{1}{5}$, 1955 ebenfalls $\frac{1}{5}$, 1956 $\frac{1}{3}$, 1957 die Hälfte der 1958 hergestellten Wohnungseinheiten gebaut. Zusammen waren es 402 000. Wieviel Wohnungseinheiten entfallen auf die einzelnen Jahre?

32. In einem VE-Betrieb sollen drei Arbeiter, die Verbesserungsvorschläge eingereicht haben, ausgezeichnet werden. Da der Wert der Vorschläge unterschiedlich ist, muß die Höhe der einzelnen Prämien unterschiedlich sein. Der erste Arbeiter soll 100 MDN mehr bekommen als der zweite, der dritte die Hälfte des ersten. Zusammen stehen 900 MDN zur Verfügung. Wie hoch ist die Prämie jedes einzelnen Arbeiters? (L)

33. Ein Lastkraftwagen fährt mit 40 km $\cdot$ h^{-1} Geschwindigkeit von A nach einem 260 km entfernten Orte B. Von B fährt eine Stunde später ein Personenkraftwagen mit 70 km h^{-1} Geschwindigkeit nach A. Nach wieviel Stunden Fahrzeit begegnen die Wagen einander? (L)

34. Ein Becher besteht aus einer Legierung von Gold und Kupfer. Er wiegt in Luft gewogen 176 g, in Wasser gewogen 162,3 g. Welcher Feingehalt ergibt sich daraus, wenn für Gold 19,25 g $\cdot$ cm^{-3}, für Kupfer 8,75 g $\cdot$ cm^{-3} gerechnet wird? (L)

3.2. Quadratische Gleichungen

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung lautet

$$ax^2 + bx + c = 0\,.$$

In der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ nennt man ax^2 *das quadratische Glied*, bx *das lineare Glied*, c *das absolute Glied*.

In einer quadratischen Gleichung darf das quadratische Glied nicht fehlen, wohl aber eins der beiden anderen.

Bei der Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ soll die Menge der reellen Zahlen bestimmt werden, die, an Stelle der Variablen x eingesetzt, eine wahre Gleichheitsaussage ergeben. Für die Variablen a, b und c sind in jedem einzelnen Fall bestimmte Zahlen eingesetzt zu denken.

3.2.1. Die gemischt-quadratische Gleichung

Aus der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ geht durch Division durch a $(a \neq 0)$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

hervor.

Setzt man $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so entsteht $x^2 + px + q = 0$.

Diese Form einer quadratischen Gleichung wird als *Normalform* der *gemischtquadratischen Gleichung* bezeichnet. Sie enthält neben dem quadratischen auch das lineare Glied.

Als *rein quadratisch* bezeichnet man die Gleichung $x^2 + q = 0$, weil in ihr das lineare Glied fehlt.

Da jede positive Zahl das Quadrat zweier dem Betrag nach gleicher Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist, ergibt sich eine Zweiermenge als Lösung der rein quadratischen Gleichung. So folgt aus $x^2 - 49 = 0$ zunächst $x^2 = 49$ und dann $x = +\sqrt{49}$ und $x = -\sqrt{49}$, also $x = 7$ und $x = -7$. Man unterscheidet die beiden Elemente der Lösungsmenge durch die Indizes 1 und 2 und schreibt $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

Der Betrag der Elemente wird einer Quadratwurzeltabelle entnommen. Soll x^2 gleich einer negativen Zahl sein, so gibt es bezüglich der Grundmenge der reellen Zahlen keine Lösung, weil das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist.

Heißt die Gleichung $x^2 + px = 0$, fehlt also das absolute Glied, so erhält man durch Ausklammern des Faktors x den Ausdruck $x(x + p) = 0$. Da ein Produkt nur dann Null wird, wenn einer seiner Faktoren Null ist, wird die Gleichung erfüllt, wenn $x = 0$ oder $x + p = 0$ gilt. Die Elemente der Lösungsmenge dieser Gleichung sind dann $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$.

Die linke Seite der Gleichung $x^2 + 2kx + k^2 = 0$ ist das Quadrat des Binoms $x + k$. Schreibt man die Gleichung in der Form $(x + k)(x + k) = 0$, so erhält man nach dem Vorhergehenden $x_1 = -k$ und $x_2 = -k$. Die Gleichung $(x + k)^2 = 0$ hat als Lösung nur eine Zahl, eine sogenannte *Doppellösung*, die Lösungsmenge enthält also nur ein Element.

Für die Gleichung $(x + k)^2 = d$ ergeben sich wegen $x + k = +\sqrt{d}$ und $x + k = -\sqrt{d}$:

$$x_1 = -k + \sqrt{d}, \quad x_2 = -k - \sqrt{d}.$$

Die Lösung der letzten Gleichung weist auf einen Weg hin, durch den auch die Normalform der gemischt-quadratischen Gleichung ohne weiteres lösbar wird. Man schreibt für $x^2 + px + q = 0$ zunächst $x^2 + px = -q$. Dann ergänzt man die linke Seite der Gleichung durch Hinzufügen des Summanden $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ zum Quadrat des Binoms $\left(x + \frac{p}{2}\right)$ und addiert, damit die Lösungsmenge erhalten bleibt, diesen Summanden auch auf der rechten Seite.

Durch diese *quadratische Ergänzung* entsteht die Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

mit ihrer Lösung

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Diese zwei Elemente der Lösung existieren bezüglich der reellen Zahlen nur, wenn der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ des Wurzelausdrucks größer oder gleich Null ist.
Gehört zu dem quadratischen Glied einer quadratischen Gleichung ein von $+1$ verschiedener Faktor, so ist die Gleichung durch diesen Faktor zu dividieren, bevor das Auflösungsverfahren eingeleitet wird.

Wurzelsatz von VIETA

Zwischen den Koeffizienten p und q der Normalform $x^2 + px + q = 0$ und den Lösungselementen x_1 und x_2 besteht ein einfacher Zusammenhang.
Addiert man x_1 zu x_2, so ergibt sich

$x_1 + x_2 = -p.$ Die Summe der beiden Elemente ergibt den mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Koeffizienten des linearen Gliedes.

Multipliziert man x_1 mit x_2, so erhält man

$x_1 \cdot x_2 = q.$ Das Produkt der Lösungselemente ergibt das absolute Glied.

Diese Zusammenhänge fand der französische Mathematiker FRANÇOIS VIETA (1540 bis 1603).
Die dem Satz des VIETA entsprechende Zerlegung der Koeffizienten der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

läßt sich bei kleinen ganzzahligen Lösungselementen leicht erraten. Zum Beispiel ist bei der Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$ der Koeffizient $-8 = -(3 + 5)$ und das absolute Glied $15 = 3 \cdot 5$. Die Erfüllungsmenge besteht daher aus den Zahlen 3 und 5.

● **Aufgaben**

1. a) $x^2 - 81 = 0$ **b)** $x^2 - 3{,}24 = 0$ **c)** $x^2 - 0{,}36 = 0$

2. a) $3x^2 - 10{,}83 = 0$ **b)** $5x^2 = 11{,}25$ **c)** $5x^2 - 12 = 51 - 2x^2$

3. a) $x^2 - \frac{1}{3} = 40 + \frac{2}{3}x^2$ **b)** $8x^2 + \frac{37}{49} = 3x^2 + \frac{6}{7}$ **c)** $(x - 3)(x + 3) = 55$

4. a) $(2x - 3)^2 + (2x + 3)^2 = 50$ **b)** $(3x + 7)^2 + (3x - 7)^2 = 260$

5. a) $x^2 - 1{,}5x = 0$ **b)** $3x^2 - x = 0$ **c)** $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$

6. a) $x^2 - 14x + 49 = 0$ **b)** $x^2 - 8x + 16 = 0$ **c)** $(x + 4)^2 = 100$

7. a) $(2x - 1)^2 = 841$ **b)** $(3x - 6)^2 = 576$ **c)** $(2{,}3x + 5{,}7)^2 = 200$

8. a) $x^2 + 4x - 165 = 0$ **b)** $x^2 - 6x - 187 = 0$ **c)** $x^2 - 12x + 32 = 0$ (L)

9. a) $x^2 - 19x - 42 = 0$ **b)** $x^2 - 13x - 48 = 0$ **c)** $x^2 + x - 30 = 0$

10. a) $x^2 + 1{,}3x - 0{,}9 = 0$ b) $x^2 - 1{,}7x + 0{,}16 = 0$ c) $x^2 - 1\frac{5}{8}x + 3\frac{3}{32} = 0$

11. a) $3x^2 + 2x - 133 = 0$ b) $3x^2 - 2x - 85 = 0$ c) $2x^2 - 5x - 18 = 0$ (L)

12. a) $7x^2 - 3x = 5x^2 + 7x - 8$ b) $11x^2 + 2x = 8x^2 + 9x - 2$

c) $(3x - 5)^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)^2$ d) $(4x + 1)^2 - (3x + 1)^2 = (2x + 1)^2$ (L)

3.2.2. Zeichnerische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Die Elemente der Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stimmen mit den Nullstellen der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ und damit auch der Funktion $y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ überein. Das Bild der Funktion kann nach dem Aufstellen einer Wertetafel gezeichnet werden.

Ohne eine solche Wertetafel zu verwenden, kann das Bild auch gezeichnet werden, wenn die Koordinaten des Parabelscheitels berechnet werden und dann eine Schablone der Parabel $y = x^2$ durch Parallelverschiebung mit ihrem Scheitel an die Stelle des Scheitels der Parabel $y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ gebracht wird.

Das Bild zeigt, daß je nach den Koeffizienten a, b und c die Kurve von der x-Achse entweder an zwei Stellen geschnitten oder an einer Stelle berührt oder gar nicht geschnitten wird. Im ersten Fall gibt es zwei Nullstellen und zwei Lösungselemente der Gleichung, im zweiten Fall eine Nullstelle und ein Lösungselement der Gleichung und im dritten Fall keine Nullstelle und keine Lösung der Gleichung.

Für die Darlegung eines weiteren Verfahrens zur graphischen Lösung quadratischer Gleichungen wird von der Normalform $x^2 + px + q = 0$ ausgegangen. Man formt sie in $x^2 = -px - q$ um und fragt nach den Lösungsmengen der Gleichungen $y = x^2$ und $y = -px - q$. Die graphische Darstellung der in diesen Lösungsmengen enthaltenen Zahlenpaare in einem Koordinatensystem ergibt eine Normalparabel (Lösungsmenge der Gleichung $y = x^2$) und eine Gerade (Lösungsmenge der Gleichung $y = -px - q$). Je nachdem, ob die Gerade die Parabel meidet, berührt oder schneidet, enthalten die beiden Lösungsmengen kein gemeinsames, ein gemeinsames Zahlenpaar oder zwei gemeinsame Zahlenpaare. Nehmen wir an, (x_1, y_1) sei ein solches gemeinsames Zahlenpaar. Dann erfüllt es beide Gleichungen, d.h.

$$y_1 = x_1^2 \quad \text{und} \quad y_1 = -px_1 - q$$

sind wahre Gleichheitsaussagen. Daraus folgt $x_1^2 = -px_1 - q$ oder die ebenfalls wahre Gleichheitsaussage $x_1^2 + px_1 + q = 0$.

Die erste Komponente x_1 des betrachteten Zahlenpaares gehört also zur Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Die Elemente der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ werden demnach durch die Abszissen der Schnittpunkte zwischen der Parabel und der Geraden angegeben.

Es hängt von p und q ab, ob die Parabel von der Geraden in zwei Punkten geschnitten, in einem Punkt oder in keinem Punkt berührt wird.

Aufgaben

1. Es sind Näherungswerte der Lösungen folgender Gleichungen graphisch zu bestimmen.

   a) $x^2 + 5x + 3{,}25 = 0$ b) $x^2 - 7{,}2x + 9{,}96 = 0$ c) $x^2 + 2{,}4x - 2{,}56 = 0$

   Das zugehörige Bild ist nach dem Ermitteln der Scheitelkoordinaten mit Hilfe der Schablone der Parabel $y = x^2$ in das Koordinatennetz einzuzeichnen. Die Zeichnung ist jedesmal durch eine Wertetafel für die Koordinaten der Kurvenpunkte zu kontrollieren. (L: a, b)

2. Die Lösungen der folgenden Gleichungen sind näherungsweise mit Hilfe der Normalparabel und einer Geraden zu bestimmen.

   a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ b) $x^2 - 2x - 3 = 0$ c) $x^2 + x - 3{,}75 = 0$ (L: a, b, c)

3.2.3. Textaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen

Die Lösung einer nach den Angaben eines Aufgabentextes angesetzten Gleichung wird durch Nullstellen derjenigen Funktion bestimmt, die den Zusammenhang der in der Aufgabe genannten Größen angibt. Dabei ist es möglich, daß der Existenzbereich der Funktion über das Gebiet hinausreicht, das für den Zusammenhang der Aufgabe in Frage kommt. Dann scheiden unter Umständen Nullstellen der Funktion als Lösung der Aufgabe aus. Daher ist in jedem Falle zu prüfen, ob ein aus der Gleichung errechnetes Lösungselement Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage gibt.

Aufgaben

1. Um ein Rechteck von 40 cm Länge und 21 cm Breite ist ein zweites gezeichnet, dessen Seiten von den Seiten des ersten Rechtecks überall gleiche Abstände haben. Wie groß ist dieser Abstand, wenn sich die Rechteckflächen wie 4 : 7 verhalten? (L)

2. Ein Eisenbahnzug braucht für eine 120 km lange Strecke 15 Minuten weniger Fahrzeit, wenn seine Durchschnittsgeschwindigkeit um 2 km · h⁻¹ gesteigert wird. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach der Steigerung? (L)

3. Eine zweiziffrige Zahl hat die Quersumme 12. Dividiert man die Zahl durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 2 Rest 5. Wie heißt die Zahl? (L)

4. Für den oberen Teil eines Flachbogenfensters (Abb. 3.1.) beträgt die Spannweite $s = 1{,}60$ m in einem Kreis vom Durchmesser $d = 2{,}40$ m. Die Pfeilhöhe h ist zu berechnen. (L)

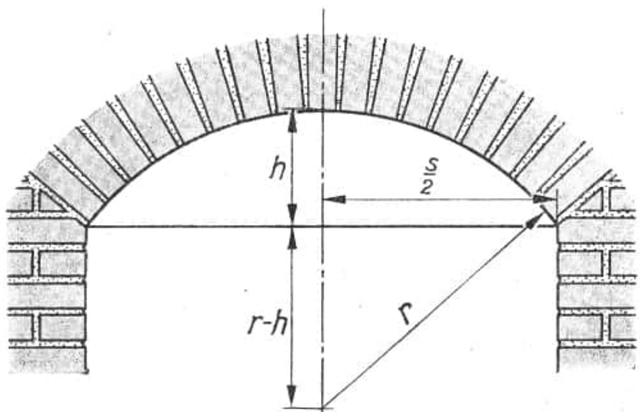


Abb. 3.1. Oberteil eines Bogenfensters

5. Zur Feststellung der Brinellhärte wird eine Stahlkugel von $d = 10$ mm Durchmesser auf eine ebene Fläche eines Werkstücks gepreßt. Die Breite des Eindrucks beträgt dabei $b = 6{,}4$ mm. Die Eindrucktiefe h ist zu berechnen.
6. Von einem Orte A fährt ein Kraftwagen nach einem 90 km entfernten Orte B. Gleichzeitig fährt von B ein Kraftwagen nach A, der in einer Stunde 20 km mehr zurücklegt. Er braucht für die ganze Strecke 30 Minuten weniger Fahrzeit als der erste. Mit welcher Geschwindigkeit fährt der von A abfahrende Kraftwagen?
7. Wie tief ist ein Schacht, wenn das Aufschlagen eines Steines auf die Schachtsohle 8,5 Sekunden später gehört wird? (Fallbeschleunigung $g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, Schallgeschwindigkeit $c = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) (L)

Zusammenfassung

Rechnerisch werden rein-quadratische Gleichungen durch Ziehen der Quadratwurzel gelöst. Gemischt-quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ werden im allgemeinen zunächst durch quadratische Ergänzung auf die Form

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

gebracht. Nach dem Radizieren entsteht $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$.

Die Lösung enthält die Elemente

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Im allgemeinen benutzt man diese Formeln sofort.

Es sind x_1 und x_2 reelle Zahlen, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0$ ist.

Es gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Zeichnerisch erhält man die reelle Lösung einer quadratischen Gleichung durch Ermitteln der Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion. Das Bild wird entweder durch punktweise Konstruktion nach einer Wertetafel oder durch Parallelverschiebung einer Parabelschablone gezeichnet. Man erhält die Lösung auch als Abszissen der Schnittpunkte einer Normalparabel mit einer Geraden.

● **Aufgaben**

1. Welche quadratischen Gleichungen können ohne Radizieren gelöst werden?
2. Wie lauten die Normalformen quadratischer Gleichungen mit den folgenden Lösungen?
   a) $x_1 = +3$; $x_2 = +4$ b) $x_1 = +3$; $x_2 = -4$ c) $x_1 = -3$; $x_2 = -4$
3. Was gilt für die Gleichung $x^2 + px + q = 0$, wenn die Parabel $y = x^2$ von der Geraden $y = -px - q$ nicht geschnitten wird?
4. a) Dividiert man eine zweiziffrige Zahl, die die Quersumme 11 hat, durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 2 Rest 18. Die Zahl ist mit Hilfe einer quadratischen Gleichung zu bestimmen.
   b) Für welche quadratische Funktion ergeben sich die Nullstellen durch die Lösung dieser Gleichung?
   c) Wie lautet der Definitionsbereich dieser Funktion?
   d) Welche Beschränkung des Gültigkeitsbereichs ist für die Lösung zu beachten?
   e) Welche Nullstelle der Funktion kommt für die Lösung der Aufgabe nicht in Frage?

3.3. Bruchgleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable im Nenner von Brüchen vorkommt, werden kurz **Bruchgleichungen** genannt. Im allgemeinen ist es zweckmäßig, derartige Gleichungen mit dem Hauptnenner der vorkommenden Brüche zu multiplizieren und so die Nenner zu beseitigen. Danach stellt man durch Ausmultiplizieren von Klammern und Zusammenfassen gleichartiger Glieder die Normalform der Gleichung her, die nun in gewohnter Weise gelöst wird.

■ **Beispiel 14:**

$$\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)} = \frac{2b}{x+b} + \frac{5a}{3x-a} \quad \Big|\ \text{mit Hauptnenner } (3x-a)(x+b) \text{ multiplizieren}$$

$$\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)} \cdot (3x-a)(x+b) = \frac{2b}{x+b} \cdot (3x-a)(x+b) + \frac{5a}{3x-a} \cdot (3x-a)(x+b) \quad \Big|\ \text{kürzen}$$

$$10ax = 2b(3x-a) + 5a(x+b) \quad \big|\ \text{ausmultiplizieren}$$

$$10ax = 6bx - 2ab + 5ax + 5ab \quad \big|\ \text{ordnen und zusammenfassen}$$

$$5ax - 6bx = 3ab \quad \big|\ x \text{ ausklammern}$$

$$x(5a - 6b) = 3ab \quad \big|\ :(5a - 6b)$$

$$x = \frac{3ab}{5a - 6b}$$

Kurzform:

$$\frac{10ax}{(3x-a)(x+b)} = \overbrace{\frac{2b}{x+b}}^{\cdot(3x-a)} + \overbrace{\frac{5a}{3x-a}}^{\cdot(x+b)} \quad \big|\ \cdot(x+b)\cdot(3x-a)$$

$$10ax = 6bx - 2ab + 5ax + 5ab \quad \big|\ +(-5ax - 6bx)$$

$$5ax - 6bx = 3ab \quad \big|\ \text{ausklammern}$$

$$x(5a - 6b) = 3ab \quad \big|\ :(5a - 6b)$$

$$x = \frac{3ab}{5a - 6b}$$

▶ **Beim Lösen von Bruchgleichungen beseitigt man die Brüche durch Multiplizieren beider Seiten mit dem Hauptnenner.**

Die anschließende Probe hat hier aber nicht nur wie bei den linearen und quadratischen Gleichungen den Zweck, die Richtigkeit der Rechnung zu kontrollieren, sondern sie soll auch zeigen, ob das durch richtiges Rechnen erhaltene Ergebnis als Lösung der Aufgabe in Frage kommt. Deshalb ist sie immer durchzuführen. Die Bruchgleichung

$$-\frac{8}{x+4} + x = \frac{2x}{x+4}$$

führt z.B. auf die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 8 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Doch für $x_2 = -4$ würden die Nenner der Bruchgleichung gleich Null, was nicht zulässig ist (die Division durch Null ist nicht erklärt). Also kommt $x_2 = -4$ als Element der Lösungsmenge der Bruchgleichung nicht in Frage; die Lösung enthält nur $x_1 = 2$.

Aufgaben

1. $\frac{1}{3a} + \frac{3}{5bx} = \frac{1}{ax} + \frac{1}{5b}$ (L)

2. $\frac{7x+9}{10x} - 2\frac{1}{3} - \frac{19}{6x} = 1\frac{2}{5} - \frac{2x+3}{2x} - 2\frac{5}{12}$

3. $\frac{7}{2x-14} - \frac{13}{24} + \frac{1}{12x-84} = \frac{7}{3x-21} - \frac{3}{8x-56}$

4. $\frac{2}{x+4} + \frac{3}{x+3} = \frac{43}{x^2+7x+12}$ (L)

5. a) $5x - \frac{2x+9}{x+1} = 27$ b) $\frac{16-x}{4} + 2 \cdot \frac{x-11}{x-6} = \frac{x-4}{12}$

6. a) $\frac{6x+4}{5} - \frac{15-2x}{x-3} = \frac{7 \cdot (x-1)}{5}$ b) $\frac{3x-15}{5x-9} = \frac{10}{3} - \frac{5x-9}{3x-15}$ (L)

7. $\frac{x-4}{x+2} + \frac{x-2}{x+6} = \frac{56}{x^2+8x+12}$

8. $\frac{x}{x-2} + \frac{5x}{x-3} + \frac{6}{x^2-5x+6} = 0$ (L)

9. $\frac{6x}{x-5} + \frac{5}{x-2} = \frac{3 \cdot (2x+1)}{x^2-7x+10}$

10. $\frac{3x-2}{x-5} - \frac{x-12}{4x-3} = \frac{45}{4x^2-23x+15}$

11. Der Widerstand R einer Stromverzweigung mit dem Widerstand R_1 des einen, R_2 des anderen Zweiges wird nach der Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ berechnet. Die Formel ist

    a) nach R_1, b) nach R_2 aufzulösen.

12. Die Kapazität C der in Reihe geschalteten 3 Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2 und C_3 wird nach der Formel $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ berechnet. Die Formel ist nach den Kapazitäten C, C_1, C_2, C_3 aufzulösen (L für C und C_1).

13. Aus der Gegenstandsweite g und der Bildweite b wird die Brennweite f einer Linse nach der Formel $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ berechnet. Die Formel ist nach f aufgelöst zu schreiben.

14. Eine Baugrube ist durch einen Platzregen vollgelaufen und soll durch drei Pumpen schnellstens entleert werden. Die erste Pumpe allein benötigt für diese Arbeit 3 h, die zweite allein 4 h und die dritte allein sogar 6 h. In welcher Zeit ist die Baugrube entleert, wenn alle drei Pumpen zugleich in Tätigkeit sind? (L)

3.4. Wurzelgleichungen

Bei **Wurzelgleichungen** ist die Variable im Radikanden von Wurzelausdrücken enthalten. In den hier betrachteten Fällen kommt die Variable nur in Quadratwurzelausdrücken vor. Diese Quadratwurzeln sind durch ein- oder mehrmaliges Quadrieren zu beseitigen. Da das Quadrieren die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung verändert, hat auch hier die Probe nicht nur den Zweck, die Richtigkeit der Rechnung zu kontrollieren, sondern sie soll auch zeigen, ob das durch richtiges Rechnen erhaltene Ergebnis als Lösung der Aufgabe in Frage kommt. Die Wurzelgleichung $x + 2 + \sqrt{12 + 2x} = 0$ z.B. führt über $x + 2 = -\sqrt{12 + 2x}$ auf die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 8 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Doch die Wurzelgleichung ist nur für x_2, aber nicht für x_1 erfüllt! Es gehört also nur $x_2 = -4$ zur Lösung.

● **Aufgaben**

1. a) $3x + 4 \cdot \sqrt{4x + 1} = 8$ **b)** $2x + 3 \cdot \sqrt{3x - 5} = 5$ (L)

2. a) $\sqrt{a + 2x} + \sqrt{a - 2x} = \sqrt{2a}$ **b)** $\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx} = \sqrt{2a}$ (L)

3. a) $\sqrt{x + 6} + 3 \cdot \sqrt{x - 10} - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x - 3)} = 0$

b) $3 \cdot \sqrt{x - 10} = \sqrt{x + 6} + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x - 3)}$ (L)

4. Warum ist es bei Wurzelgleichungen notwendig, die Gültigkeit der errechneten Lösung an der Ausgangsgleichung zu prüfen?

Die folgenden Aufgaben sind verschiedenen Gebieten entnommen.

Aus der Elektrotechnik

5. Das elektrische Lichtnetz einer Wohnung mit einer Spannung $U = 220$ V ist mit 6-A-Sicherungen abgesichert. Mit welcher elektrischen Leistung darf das Lichtnetz höchstens belastet werden? (L)

6. Durch einen starken Wind sind zwei Telefonleitungen mit einem Querschnitt $A = 3{,}14\ \mathrm{mm}^2$ zusammengeschlagen, so daß ein Kurzschluß entstanden ist. Die Entstörungsstelle der Deutschen Post mißt vom Leitungsanfang aus über die Kurzschlußstelle hinweg einen Gesamtwiderstand von 120 Ω. Wie weit ist die Kurzschlußstelle vom Leitungsanfang entfernt, wenn $\varrho = 0{,}018\ \Omega \cdot \mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$ beträgt? (L)

7. Ein Elektromonteur der PGH „Kraftanlagen" wird beauftragt, beim „VEB Kohlenhandel" an einen vorhandenen Stromkreis des 220-V-Netzes einen Elektromotor mit einer mechanischen Leistung von 3 PS und einem Wirkungsgrad von $\eta = 0{,}8$ anzuschließen. Der Stromkreis ist mit 10-A-Sicherungen abgesichert und wird bereits mit 300 W belastet. Kann der Elektromotor betrieben werden, ohne die Sicherungen zu überlasten? (L)

8. Vom volkseigenen Starkstromanlagenbau ist die Trafo-Station eines Großbetriebes auf eine Wirkleistung von 40 kW vergrößert worden. Mit dem Einschalten der Anlage ist der Leistungsfaktor auf einen Wert von $\cos \varphi = 0{,}5$ gesunken. Ein Mitglied der sozialistischen Brigade des Anlagenbau-Betriebes erhält den Auftrag, die Kapazität C des neuen Phasenschieber-Kondensators für den günstigsten Wert des Leistungsfaktors, $\cos \varphi = 1$, zu berechnen. Der Transformator wird hochspannungsseitig mit 1000 V/50 Hz gespeist. Bestimmen Sie die Kapazität des Phasenschieber-Kondensators! (L)

9. In einem mit tropischen Zierfischen besetzten Aquarium ist infolge einer Stromunterbrechung an der Aquarienheizung die Temperatur von 28 °C auf eine für die Zierfische gefährliche Temperatur von 17 °C gesunken. Um die wertvollen Tiere zu retten, wird eine 200-W-Heizung unmittelbar an das Lichtnetz angeschlossen und in das mit 120 l Wasser gefüllte Aquarium gebracht. Nach welcher Zeit wird die ursprüngliche Temperatur wieder erreicht? (L)

10. An eine 6 km lange Kabelleitung ist am Ende ein Telefon angeschaltet. Der Leitungswiderstand R_L verhält sich zum Widerstand R_T des Telefones wie 2 : 1. Der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung wird mit 900 Ω gemessen. Um die günstigsten Widerstandsverhältnisse für eine einwandfreie Übertragung der Sprache zu ermitteln, müssen Leitungs- und Telefonwiderstand ermittelt werden. Berechnen Sie R_L und R_T! (L)

11. In einem kapazitiven Stromkreis einer elektronischen Steuereinrichtung liegen u.a. zwei Kondensatoren C_1 und C_2 parallel zueinander. Der Kondensator C_1 ist schadhaft geworden und muß ausgewechselt werden; seine Kapazität ist jedoch nicht bekannt. Aus der vorhandenen Beschreibung der Steuereinrichtung kann entnommen werden, daß sich die Kapazität von C_1 zur Gesamtkapazität C wie 1 : 3 verhalten muß. Mit Hilfe einer R-C-L-Meßbrücke wird die Kapazität des Kondensators C_2 mit 500 pF bestimmt. Wie groß muß C_1 sein und welchen Wert hat die Gesamtkapazität? (L)

12. Die Werkstatt eines Meßgerätewerkes bekommt ein Vielfachmeßinstrument zur Reparatur, bei dem die Skale für den Spannungsmeßbereich unleserlich geworden ist. Ein Elektromechaniker der Werkstatt wird damit beauftragt, die Spannungsmeßbereiche festzustellen. Der Mechaniker legt zunächst eine Spannung an und mißt bei Vollausschlag des Instrumentes an der Drehspule einen Strom von 3 mA. Ferner enthält das Instrument für den Spannungsmeßbereich 4 Widerstände; es muß also entsprechend 4 Spannungsmeßbereiche haben. Die Widerstände sind so bemessen, daß bei einem Gesamtwiderstand von 1588 Ω R_2 fünfmal größer ist als R_1, aber fünfmal kleiner als R_3, und R_4 ist fünfzigmal größer als R_1 (Abb. 3.2.). Bestimmen Sie die 4 Spannungsmeßbereiche! (L)

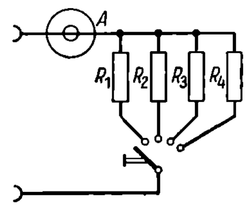


Abb. 3.2.

13. Das Entwicklungskollektiv eines volkseigenen Betriebes hat den Auftrag erhalten, einen relaisgesteuerten Impulsgeber zu entwickeln. Der Impulsgeber soll die Impulse in bestimmten Zeitabständen geben. Ferner wird die Bedingung gestellt, daß die Zeitdauer der Impulsgabe durch Betätigen eines Relais verlängert wird. Die Entwicklungsgruppe hat entschieden, die zeitliche Verlängerung der Impulsgabe durch 2 Kondensatoren zu erreichen, die über Relaiskontakte einmal so in den Stromkreis des Impulsgebers geschaltet werden, daß sie in Reihe liegen, zum anderen so, daß sie parallel zueinander liegen. In Reihe geschaltet soll die Kapazität C der beiden Kondensatoren C_1 und C_2 8 µF (normale Impulsgabe), und parallel geschaltet soll die Kapazität der beiden Kondensatoren 50 µF (Zeitverlängerung der Impulsgabe) betragen (Abb. 3.3.). Wie groß muß die Kapazität der beiden Kondensatoren C_1 und C_2 gewählt werden? (L)

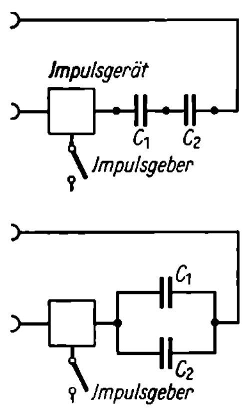


Abb. 3.3.

14. Im Fernsprechverkehr ist es besonders wichtig, daß die beiden Leitungen einer Doppelleitung symmetrisch sind, d.h., beide Leitungen müssen möglichst gleiche Widerstandsverhältnisse aufweisen, um Verzerrungen beim Übertragen der Sprache auf ein Mindestmaß herabzusetzen. Zwei Techniker sind dabei, eine solche Doppelleitung auf ihre Symmetrie zu prüfen. Zunächst messen sie den Schleifenwiderstand (beide Leitungen in Reihe) mit 600 Ω und dann schalten sie beide Leitungen parallel und messen einen Widerstand von 270 Ω. Bei der Parallelschaltung der beiden Leitungen muß eine dritte Leitung als Meßleitung benutzt werden, die einen Widerstand von 120 Ω hat. Sind die Leitungen symmetrisch? (L)

Aus der Metallindustrie

15. Für einen Schiffsmotor sollen in einem Werk des volkseigenen Schwermaschinenbaues mit Hilfe einer Kurbelzapfen-Drehmaschine die Tragzapfen der Kurbelwelle bearbeitet werden. Der Trägerring für die Drehmeißel hat einen Durchmesser $d = 1640$ mm. Für das Material ist eine Schnittgeschwindigkeit $v = 10{,}3\ \mathrm{m \cdot min^{-1}}$ vorgeschrieben. Welche Drehzahl n muß der Dreher einstellen? (L)

16. Im Labor eines volkseigenen Werkzeugmaschinenbaubetriebes soll die maximale Schnittkraft des Drehmeißels einer neuen Drehmaschine bestimmt werden. Die Maschine ist mit einem Antriebsmotor von 8 PS versehen. Es wurden Werkstücke mit 240 mm Durchmesser bei 80 Umdrehungen je Minute bearbeitet. Welche maximale Schnittkraft F kann erreicht werden? (L)

17. Für Handbohrmaschinen sollen in einer volkseigenen Werkzeugmaschinenfabrik die Zahnradgetriebe hergestellt werden. Die Getriebe müssen mit einer Evolventenverzahnung versehen werden, wobei ein Übersetzungsverhältnis von 1 : 3 vorgeschrieben ist. Der Achsenabstand für das aus zwei Zahnrädern bestehende Getriebe liegt mit 48 mm fest. Mit welchen Abmessungen müssen die beiden Teilkreisdurchmesser d_{0_1} und d_{0_2} in den Fertigungsunterlagen angegeben werden? (L)

18. Ein Absolvent der Ingenieurschule für Schwermaschinenbau hat die Masse eines aus zwei Teilen bestehenden Kompressorkolbens zu bestimmen. Der für eine Exportmaschine bestimmte Kolben hat eine Masse von 320 kg. Da die Kolbenteile einzeln nach dem Ausland transportiert werden müssen, muß die Masse jedes Teiles bestimmt werden. Um die Masse zu ermitteln, nutzt der Absolvent die Hebelgesetze aus; er stellt fest, daß sich der Kolben im Gleichgewicht befindet, wenn sich die Hebelarme wie 2 : 3 verhalten. Wie schwer ist jedes der beiden Kolbenteile? (L)

19. Ein Konstrukteur des „VEB Pressenbau" ist dabei, eine neue hydraulische Presse zu konstruieren. Im Verlauf seiner Konstruktionsarbeit muß er die beiden Seiten des rechteckigen Vollstempels berechnen. Für den Vollstempel ist bei einem Umfang von 90 cm eine Fläche von 500 cm² Inhalt festgelegt. Welche Abmessungen muß der Stempel haben? (L)

Aus der Bauwirtschaft

20. Der „VEB Bauunion" soll auf einem Bahnhof einen neu angelegten Bahnsteig überdachen. Für die Überdachung ist eine Pilzdecke vorgesehen, die von Betonsäulen mit einer Abmessung von 12 cm · 12 cm getragen werden soll. Unter Berücksichtigung aller einwirkenden Faktoren – Eigengewicht, Schneelast, Winddruck usw. – wird jede einzelne Säule mit einem maximalen Gewicht von 3,6 Mp belastet. Um die zulässige Spannung σ, d.h. die vorgeschriebene Beanspruchung der Säulen, nicht zu überschreiten, muß der Statiker des Betriebes die in einer Säule auftretende Spannung berechnen, wobei das Eigengewicht und eine ungleichmäßige Beanspruchung der Säule unberücksichtigt bleiben. Berechnen Sie die Spannung einer Säule! (L)

21. Ein volkseigener Betrieb erhält eine neue Montagehalle mit einer stählernen Dachkonstruktion (Abb. 3.4.). Die Zugbänder der Dachkonstruktion haben einen Querschnitt $A = 8{,}2$ cm² und sind bei einer Länge $l = 28$ m je Band mit einer Zugkraft $F = 12$ Mp belastet. Damit bei Temperaturschwankungen keine unzulässig hohe Beanspruchung der Bänder entsteht, muß die zusätzlich auftretende Zugkraft berechnet werden. Für die Berechnung wird eine Temperaturänderung von ± 40 °C, wobei sich eine Längenänderung $l = \pm 0{,}9$ cm ergibt, zugrunde gelegt. Das Elastizitätsmodul hat eine Größe von $E = 2\,100\,000$ kp · cm^{-2}. Berechnen Sie die zusätzliche Zugkraft F_{zus}! (L)

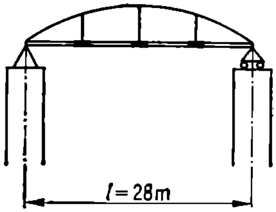


Abb. 3.4.

22. In einem Institut für Baustoffkunde unserer Republik ist der CaO- und SiO_2-Gehalt von 4 m³ Tonerdezement zu bestimmen. Beide Oxyde nehmen nach den bisherigen Erfahrungen 50% der Gesamtmenge ein, wobei der CaO-Gehalt etwa 4mal höher ist, als der SiO_2-Gehalt. Die restlichen 50% sind andere Bestandteile. Wie hoch ist der Gehalt an CaO und SiO_2 in den zu untersuchenden 4 m³ Tonerdezement? (L)

23. Für die HO ist eine neue Gemüsehalle errichtet worden, deren Bodenfläche mit Hochofenzement der Güteklasse 325 zementiert wurde. Nachdem der Boden ausgetrocknet ist und seine vorgeschriebene Druckfestigkeit erreicht hat, soll ein Fußbodenbelag verlegt werden. Nach 3, 7 und 28 Tagen wird die Druckfestigkeit des Bodens geprüft, wobei festgestellt wird, daß nach 7 Tagen die Druckfestigkeit um 75 kp · m^{-2} größer geworden ist als nach 3 Tagen, und nach 28 Tagen werden 100 kp · m^{-2} mehr als nach 7 Tagen gemessen. Wie groß war die Druckfestigkeit bei jeder Messung und nach wieviel Tagen war die vorgeschriebene Druckfestigkeit erreicht, wenn zusammen 700 kp · cm^{-2} gemessen wurden? (L)

24. Eine Produktionsgenossenschaft des Zimmererhandwerks soll für ein Wohnhaus das Dach errichten. Die Holzkonstruktion des Daches soll so aufgebaut werden, daß die zu jedem Streckbalken gehörenden zwei Strebensäulen je 2 m kürzer sind als die Streckbalken, wobei die Strebensäulen rechtwinklig zueinander angeordnet sein sollen (Abb. 3.5.). Wie lang müssen die Streckbalken und Strebensäulen sein? (L)

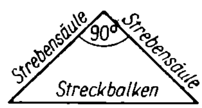


Abb. 3.5.

25. Ein Aussichtsturm, dessen obere Plattform ein Quadrat darstellt, soll von einer Produktionsgenossenschaft des Maurerhandwerks gebaut werden. Die Plattform des Turmes soll 24 m² groß sein, wobei die äußere Turmkante 4 m größer sein soll als die Kante der in der Mitte vorgesehenen quadratischen Aufstiegsluke. Wie groß muß die PGH die äußere Turmkante und die Kante der Aufstiegsluke mauern? (L)

26. 8 m³ kunstharzgetränktes Buchenholz mit einer Dichte von 0,94 kg · dm^{-3} (bei 15% Feuchtigkeit) sollen auf einem Wagen, der für eine maximale Nutzlast von 10 Mp bestimmt ist, transportiert werden. Können die 8 m³ Buchenholz aufgeladen werden, ohne die Nutzlast des Wagens zu überschreiten? (L)

27. Eine Bautischlerei hat den Auftrag erhalten, Balken mit einer Breite $b = 8$ cm für eine Überdachung herzustellen. Nach Tabelle ist für den Balken ein Widerstandsmoment $W = 620$ cm³ vorgeschrieben. Mit welcher Höhe h müssen die Balken zugeschnitten werden? (L)

28. Für eine Bücherei hat ein Tischler des „VEB Holzbau“ ein größeres Regal anzufertigen. Da die ermittelte Bücherlast für das Regal verhältnismäßig groß sein wird, soll das Regal von der Seitenwand nach den mittleren Fußbalken jeweils eine Strebe erhalten. Für beide ist eine Abmessung von 8 cm · 8 cm vorgesehen. Jede Strebe soll durch einen einfachen Brustversatz mit dem Fußbalken verbunden werden; sie wirkt entsprechend der durchgeführten Berechnung mit einer Scherkraft $H = 800$ kp in horizontaler Richtung auf den Fußbalken (Abb. 3.6.). Wie lang muß der Tischler das Vorholz belassen, damit die auftretende Scherkraft sicher aufgenommen wird? (L)

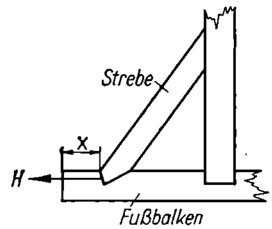


Abb. 3.6.

29. In einem Labor sollen die Dichten einer Holzfaserhartplatte, einer Holzfaserdämmplatte, einer mehrschichtigen und einer zweischichtigen Holzspanplatte bestimmt werden. Der ausführende Laborant stellt fest, daß alle 4 Platten zusammen eine Dichte von 2,1 kg · dm^{-3} haben. Eine Versuchsreihe, bei der die Platten mehrere Male ausgewägt wurden, hat ergeben, daß die Dichte der Holzfaserdämmplatte um 0,75 kg · dm^{-3} und die der mehrschichtigen Holzspanplatte um 0,4 kg · dm^{-3} kleiner ist als die der Holzfaserhartplatte. Ferner wurde festgestellt, daß die Dichte der zweischichtigen Holzspanplatte genau so groß sein muß wie die der Holzfaserdämmplatte. Wie groß ist die Dichte jeder Platte? (L)

Aus dem Bergbau

30. Mehrere Geologen sind dabei, die Tiefe einer Steinkohlenlagerstätte, über der sich eine Tondecke befindet, zu erforschen. Da die Lagerstätte verhältnismäßig tief ist, wird die Tiefe mit Hilfe künstlicher Explosionen ermittelt. Die bei den Explosionen entstehenden Erschütterungswellen pflanzen sich im Ton mit 3000 m · s^{-1} fort. Mit welcher ungefähren Tiefe der Lagerstätte kann gerechnet werden, wenn an den Meßinstrumenten für Hin- und Rücklauf der Wellen eine Zeit von 3,21 s ermittelt wurde? (L)

31. Bei Anwendung der Sprengseismik müssen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v der Erschütterungswellen in den verschiedenen Gesteins- und Erdschichten bekannt sein. Ein Geologe wurde beauftragt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erschütterungswellen in einer Steinsalzader für Vergleichszwecke zu ermitteln.
Der Geologe führt die für diesen Zweck erforderliche Explosion in einem Steinsalzschacht an einer Stelle durch, an der die Steinsalzader eine Stärke von 800 m hat. Die Ausbreitungszeit der Wellen in einer Richtung ermittelt er mit 0,16 s. Wie groß ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Steinsalz? (L)

32. Eine sozialistische Brigade der Bergbauverwaltung hat zu entscheiden, welche von zwei Kohlelagerstätten aus wirtschaftlichen Erwägungen rentabler ist als die andere. Das eine Lager hat 42 m Deckgebirge und 12 m Kohle, das andere 36 m Deckgebirge und 8 m Kohle. Welche Lagerstätte ist wirtschaftlicher?

Hinweis: Je kleiner das Verhältnis Deckgebirge : Kohle ($D : K$), desto wirtschaftlicher ist der Abbau. (L)

33. In einem Schacht beträgt das Verhältnis Deckgebirge : Kohle 2,4 : 1, bei einer Gesamtabmessung von 52 m. Welche Abmessungen haben Deckgebirge und Kohle? (L)

3.5. Systeme linearer Gleichungen mit zwei und mehr Variablen

3.5.1. Graphisches Lösungsverfahren

Die Gleichung $ax + by = c$, die neben gegebenen Zahlen $a \neq 0$, $b \neq 0$, c die Variablen x und y enthält, hat eine bestimmte Lösungsmenge, die aus unendlich vielen geordneten Zahlenpaaren $(x; y)$ besteht. Die graphische Darstellung dieser Lösungsmenge ergibt eine gerade Linie. Die Lösungsmenge der Gleichung $x + 2y = 8$ ergibt bei der graphischen Darstellung die Gerade, die durch die Punkte P_1 mit den Koordinaten $x_1 = 0$ und $y_1 = 4$ und P_2 mit den Koordinaten $x_2 = 8$ und $y_2 = 0$ geht. Die graphische Darstellung der Lösungsmenge der Gleichung $3x - y = 3$ ist die Gerade durch die Punkte P_3 mit den Koordinaten $x_3 = 0$ und $y_3 = -3$ und P_4 mit den Koordinaten $x_4 = 1$ und $y_4 = 0$ (Abb. 3.7.). Die Abbildung 3.7. zeigt, daß beide Geraden einander im Punkt S schneiden, dessen Koordinaten $x_S = 2$ und $y_S = 3$ der Zeichnung entnommen werden können. Die Schnittpunktkoordinaten treten als Zahlenpaar in den Lösungsmengen der beiden Gleichungen auf; beide Gleichungen werden erfüllt, wenn x den Wert 2 und y den Wert 3 enthält. Betrachtet man

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{array} \right|$$

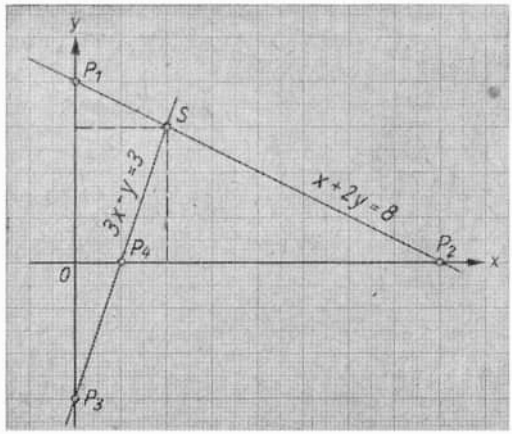


Abb. 3.7.

als System von zwei Gleichungen mit zwei Variablen, so kann man sagen, daß die Koordinaten $x = 2$, $y = 3$ des Schnittpunktes der beiden Geraden die Lösung des Gleichungssystems darstellen; die Lösung wurde also graphisch gewonnen. Das graphische Lösungsverfahren setzt genaues Zeichnen voraus.

Um ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen graphisch zu lösen, stellt man ihre Lösungsmengen in einem Koordinatensystem graphisch dar. Das ergibt zwei Geraden. Dann ermittelt man den Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Er gehört beiden Lösungsmengen an. Seine Koordinaten sind die Lösung des gegebenen Gleichungssystems, da sie beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Das Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn als graphische Darstellungen der Lösungsmengen wirklich zwei einander schneidende Geraden auftreten.

3.5.2. Arithmetische Lösungsverfahren

Soll ein System von zwei Gleichungen arithmetisch gelöst werden, so leitet man dazu aus den vorgelegten Gleichungen eine neue ab, die nur noch eine der beiden Variablen enthält. Das Lösen des Gleichungssystems wird auf das Lösen einer Gleichung mit einer Variablen zurückgeführt. Das Aussondern einer Variablen aus den Gleichungen des Systems wird **Eliminieren** (lat. **eliminare** „vertreiben“) genannt. Die Elimination läßt sich durch drei Verfahren erreichen.

Gleichsetzungsverfahren

■ **Beispiel 15:**

$$\left| \begin{array}{l} 5x - y = 56 \\ 2x + y = 35 \end{array} \right|$$

1. Weg: Werden beide Gleichungen nach y aufgelöst, so erhält man

$y = 5x - 56,$

$y = 35 - 2x.$

In beiden Gleichungen sollen für die Variable y die gleichen Zahlen eingesetzt werden, d.h., die beiden linken Seiten sollen einander gleich sein, also auch die beiden rechten Seiten. Setzen wir sie gleich, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 5x - 56 &= 35 - 2x && \mid + (2x + 56) \\ 7x &= 91 && \mid : 7 \\ x &= 13. \end{aligned}$$

Setzt man diese Zahl für x in $y = 5x - 56$ ein, so ergibt sich

$y = 5 \cdot 13 - 56$

$y = 65 - 56$

$y = 9.$

Probe: Für die linken Seiten der Gleichungen ergibt sich $5 \cdot 13 - 9 = 56$ und $2 \cdot 13 + 9 = 35$; das stimmt mit den rechten Seiten überein.

2. Weg: Durch Auflösen nach x ergibt die erste Gleichung $x = \frac{56 + y}{5}$;

die zweite $x = \frac{35 - y}{2}$;

die durch Gleichsetzen der rechten Seiten gewonnene neue Gleichung heißt jetzt

$$\frac{56 + y}{5} = \frac{35 - y}{2} \quad \mid \cdot 10.$$

Multipliziert man beide Seiten mit 10, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 112 + 2y &= 175 - 5y && \mid + (5y - 112) \\ 7y &= 63 && \mid : 7 \\ y &= 9. \end{aligned}$$

Daraus folgt $x = \frac{56 + 9}{5}, \quad x = \frac{65}{5}, \quad x = 13.$

Bei dem **Gleichsetzungsverfahren** werden die Ausdrücke einander gleichgesetzt, die sich durch Auflösen der beiden Gleichungen nach derselben Variablen ergeben. Es entsteht eine neue Gleichung mit einer Variablen. Daß man dabei unter

Umständen geschickt und auch weniger geschickt vorgehen kann, zeigt das Beispiel. Beim ersten Weg treten hier im Gegensatz zum zweiten keine Brüche auf, er ist also vorzuziehen.

Einsetzungsverfahren

■ **Beispiel 16:**

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y \;\;= 19 \\ 3x - 4y = \;\;1 \end{array} \right|$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = 19 - 2x$. Setzt man den Ausdruck $19 - 2x$ an die Stelle von y in der zweiten Gleichung ein, so erhält die zweite Gleichung die neue Form

$$3x - 4 \cdot (19 - 2x) = 1.$$

Sie enthält nur noch die eine Variable x und ergibt

$$\begin{aligned} 3x - 76 + 8x &= 1 \qquad &&| + 76 \\ 11x &= 77 &&| : 11 \\ x &= 7\,. \end{aligned}$$

Wird diese Zahl in $y = 19 - 2x$ an die Stelle von x gesetzt, so entsteht

$$\begin{aligned} y &= 19 - 2 \cdot 7 \\ y &= 19 - 14 \\ y &= 5\,. \end{aligned}$$

Die *Probe* ergibt:

$2 \cdot 7 + 5 = 19$ für die linke Seite der ersten Gleichung,
$3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = \;\;1$ für die linke Seite der zweiten Gleichung; das stimmt mit der jeweils rechten Seite überein.

● *Hätte man die erste Gleichung auch erst nach x auflösen können? Wäre das geschickt gewesen?*

Bei dem **Einsetzungsverfahren** wird eine der Gleichungen des Systems nach einer der in ihr vorkommenden Variablen aufgelöst und der sich ergebende Ausdruck an Stelle dieser Variablen in die zweite Gleichung eingesetzt. Es entsteht e i n e Gleichung mit e i n e r Variablen.

Verfahren der gleichen Koeffizienten

■ **Beispiel 17:**

$$\left| \begin{array}{r} 15x - 8y = 29 \\ 5x + 4y = 23 \end{array} \right|$$

Das Eliminieren einer Variablen gelingt auch, indem man durch geeignetes Umformen die Koeffizienten dieser Variablen in beiden Gleichungen ihrem Betrage nach zur Übereinstimmung bringt. Dann werden die beiden linken und die beiden rechten Seiten der Gleichungen addiert bzw. voneinander subtrahiert, so daß die Variable mit den betragsgleichen Koeffizienten eliminiert wird. Läßt man z.B. die erste Gleichung unverändert und multipliziert die zweite Gleichung mit 2, so entsteht

$$\left|\begin{array}{l} 15x - \mathbf{8y} = 29 \\ 10x + \mathbf{8y} = 46 \end{array}\right| .$$

Werden die linken Seiten und die rechten Seiten der Gleichungen addiert, so ergibt sich $25x = 75$, also $x = 3$.

Diese Zahl setzt man etwa in die zweite Gleichung ein und erhält $y = 2$. Auf die Probe soll hier verzichtet werden. Sie ist jedoch bei allen Gleichungen unerläßlich.

Beispiel 18:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{7x - 5y}{y - 4} = 7 \\ \dfrac{3x + 2y}{x + 11} = 2 \end{array}\right|$$

Diese Gleichungen können erst nach dem Verfahren der gleichen Koeffizienten gelöst werden, nachdem beide Gleichungen möglichst vereinfacht worden sind. Auf einer Seite sollen jedesmal nur zwei Summanden stehen, von denen der eine den Faktor x, der zweite den Faktor y enthält, während die andere Seite von den Variablen befreit ist.

Aus $\dfrac{7x - 5y}{y - 4} = 7$ erhält man $7x - 5y = 7y - 28$ und daraus $7x - 12y = -28$;

aus $\dfrac{3x + 2y}{x + 11} = 2$ erhält man $3x + 2y = 2x + 22$ und daraus $x + 2y = 22$.

Kurz dargestellt, ergibt sich nun folgender Lösungsweg:

$$\begin{array}{rcll}
7x - 12y &=& -28 & \quad | + \quad | + \\
x + 2y &=& 22 & \quad | \cdot 6 \quad | \cdot(-7) \\
\hline
6x + 12y &=& 132 & \quad | + \\
\hline
13x &=& 104 & \quad | : 13 \\
x &=& 8 & \\
\hline
-7x - 14y &=& -154 & \quad | + \\
\hline
-26y &=& -182 & \quad | : (-26) \\
y &=& 7 &
\end{array}$$

Probe:

$$\frac{7 \cdot 8 - 5 \cdot 7}{7 - 4} = \frac{21}{3} = 7, \qquad \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 7}{8 + 11} = \frac{38}{19} = 2.$$

Nachdem die eine Komponente des gesuchten Zahlenpaares ermittelt ist, kann man sie in eine Gleichung einsetzen und dann die andere Komponente bestimmen.

Bei dem **Verfahren der gleichen Koeffizienten** werden die Gleichungen zunächst möglichst vereinfacht und geordnet. Durch Multiplizieren jeder der beiden Gleichungen mit einer geeigneten Zahl kann erreicht werden, daß die Koeffizienten der einen Variablen übereinstimmen. Beim Addieren oder Subtrahieren der beiden Gleichungen wird dann diese Variable eliminiert. Dann werden die Koeffizienten der anderen Variablen durch Umformen in beiden Gleichungen gleichgemacht, so daß durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen diese Variable eliminiert wird.

● **Aufgaben**

Die Aufgaben 1 und 2 sind graphisch und rechnerisch zu lösen. Für die rechnerischen Lösungen ist ein Lösungsweg zu wählen, der möglichst wenig Rechenaufwand erfordert.

1. a) $\left| \begin{aligned} x + y &= 23 \\ x &= y + 5 \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} x - y &= 5 \\ y &= 7 - x \end{aligned} \right|$ **c)** $\left| \begin{aligned} 9x - 5y &= 3 \\ y &= 8x - 13 \end{aligned} \right|$

2. a) $\left| \begin{aligned} x &= 7y - 19 \\ x &= 17 - 5y \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} y &= 1 + x \\ y &= 13 - 2x \end{aligned} \right|$ **c)** $\left| \begin{aligned} 2x &= 3y - 9 \\ 2x &= y + 5 \end{aligned} \right|$

3. a) $\left| \begin{aligned} x + y &= 24 \\ x - y &= 10 \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} 2x + 3y &= 23 \\ 3x + 2y &= 22 \end{aligned} \right|$ **c)** $\left| \begin{aligned} 12x + 5y &= 19 \\ 4x + 5y &= 3 \end{aligned} \right|$

4. a) $\left| \begin{aligned} 7x + 4y &= 10{,}3 \\ 6x - 5y &= 0{,}4 \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} 1{,}3x - 2y &= 2{,}4 \\ 0{,}9x - 5y &= 1{,}3 \end{aligned} \right|$ **c)** $\left| \begin{aligned} 0{,}5x + 0{,}2y &= 0{,}58 \\ 0{,}7x - 0{,}3y &= 0{,}29 \end{aligned} \right|$ (L: a, b)

5. a) $\left| \begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} &= 9 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} &= 10 \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} \frac{y}{8} - \frac{x}{9} &= 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} &= 9 \end{aligned} \right|$ ● **c)** $\left| \begin{aligned} 3x - 2\frac{5}{7}\,y &= 10 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &= -4\frac{1}{2} \end{aligned} \right|$ (L: a, b, c)

6. a) $\left| \begin{aligned} 3 - 5 \cdot (3y - 2x) &= 3 \cdot (3x - 2y) \\ 5 \cdot (5y - 2x) &= 49 - 3 \cdot (5x - 2y) \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} \frac{4x - 5y + 12}{6} - \frac{7x - 8y + 4}{7} &= 1 \\ \frac{5x - 4y + 7}{4} &= 7 - \frac{6x + y - 4}{10} \end{aligned} \right|$ (L)

7. a) $\left| \begin{aligned} 2x + 3y &= 5a + b \\ 3x + 2y &= 5a - b \end{aligned} \right|$ **b)** $\left| \begin{aligned} 5x - 4y &= a + 9b \\ -4x + 5y &= a - 9b \end{aligned} \right|$

c) $\left| \begin{aligned} ax - by &= a^2 - 2ab - b^2 \\ bx + ay &= a^2 + 2ab - b^2 \end{aligned} \right|$ **d)** $\left| \begin{aligned} ax - by &= a^3 - 2a^2b - b^3 \\ -bx + ay &= a^3 + 2ab^2 - b^3 \end{aligned} \right|$ (L: a bis d)

Ein Gleichungssystem von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen ist nur dann e i n d e u t i g lösbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

▶ **1. Die Gleichungen dürfen einander nicht widersprechen.**

Ein Widerspruch besteht bei dem Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 4 \end{aligned} \right|.$$

Es gibt kein Zahlenpaar, für das die Summe der Komponenten sowohl gleich 3 als auch gleich 4 ist. Bei der graphischen Darstellung der Lösungsmengen zeigt sich kein Schnittpunkt der entsprechenden Geraden, sie verlaufen zueinander parallel (Abb. 3.8.).

Dasselbe gilt, wenn das Gleichungssystem auf die Form

$$\begin{vmatrix} ax + by = c, \\ ax + by = d \end{vmatrix}$$

($c \neq d$) gebracht werden kann.

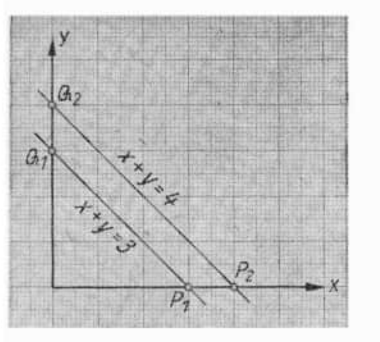


Abb. 3.8.

▶ **2. Die Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein.**

Die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{vmatrix}$$

sind voneinander *abhängig*.

Wird die erste Gleichung mit 2 multipliziert, so entsteht die zweite. Alle Zahlenpaare x und y, die der ersten Gleichung genügen, erfüllen auch die zweite. Bei der graphischen Darstellung der Lösungsmengen fällt die zur ersten Gleichung gehörende Gerade auf die zur zweiten gehörende. Es ergibt sich kein eindeutig bestimmtes Zahlenpaar als Lösung des Gleichungssystems.

Dasselbe gilt für das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} ax + by = c \\ kax + kby = kc \end{vmatrix}.$$

▶ **Ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen hat nur dann ein eindeutig bestimmtes Zahlenpaar als Lösung, wenn die beiden Gleichungen widerspruchsfrei und voneinander unabhängig sind.**

3.5.3. Textaufgaben mit zwei Variablen

Bei Textaufgaben sind Zusammenhänge unbekannter und bekannter Größen in Worten gegeben. Diese Abhängigkeit ist durch Gleichungen auszudrücken, die einander nicht widersprechen und zugleich voneinander unabhängig sind.

Beim Aufstellen der Gleichungen wird wie bei Gleichungen mit einer Variablen verfahren. Besonders zu beachten ist, daß in jeder Gleichung andere Zusammenhänge benutzt werden.

● **Aufgaben**

1. Die Welle einer einfachen Seilwinde hat 20 cm Durchmesser, die Kurbel 55 cm Länge. Die zum Heben einer Last Q erforderliche Kraft F ist um 50 kp kleiner als die Last. Wie groß sind Kraft und Last? (Anleitung: Hebelgesetz $F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$)

2. Zwei ineinandergreifende Zahnräder mit dem Übersetzungsverhältnis 5 : 11 werden durch zwei andere Zahnräder ersetzt, die je 5 Zähne mehr haben. Das Übersetzungsverhältnis ist nun 1 : 2. Wieviel Zähne hat jetzt jedes Zahnrad? (L)

3. Von zwei zweiziffrigen Zahlen ist die zweite um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl. Setzt man die erste vor die zweite, so entsteht eine vierziffrige Zahl, die um 5 größer ist als das 52fache der zweiten Zahl. Wie heißen die Zahlen? (L)

4. Teilt man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Einerziffer, so erhält man 12 Rest 2. Vertauscht man die Ziffern der Zahl und teilt die so entstandene Zahl durch ihre Einerziffer, so ergibt sich 9 Rest 8. Wie heißt die Zahl? (L)

5. Verlängert man die kleinere Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt die größere um 2 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 22 cm² größer ist als der Flächeninhalt des Rechtecks. Wie groß sind die Rechteckseiten? (L)

6. Schachten 2 Arbeiter gemeinsam 4 Tage lang, so wird $\frac{1}{3}$ eines Fundamentgrabens ausgehoben. Arbeitet der erste 6 Tage und der zweite 15 Tage, so wird die Hälfte des Grabens fertig. Wieviel Zeit brauchte jeder Arbeiter allein, um den Graben auszuschachten? (L)

7. Im Rahmen des Nationalen Aufbauwerkes soll eine rechteckige Grünfläche mit Bäumen bepflanzt werden. Hätte man zwei Reihen mehr genommen und je Reihe einen Baum mehr gesetzt, wären 23 Bäume mehr nötig gewesen. Hätte man aber eine Reihe mehr genommen und in jede Reihe zwei Bäume mehr gesetzt, wären sogar 29 Bäume zuwenig gewesen. Wieviel Bäume und wieviel Reihen waren vorhanden? (L)

8. Zwei Abteilungen einer Schleiferei für optische Geräte verpflichteten sich – in der ersten Abteilung waren 18, in der zweiten 20 Personen beschäftigt –, ihre Norm überzuerfüllen. Im ersten Monat produzierten beide Abteilungen 246 Stück. Im zweiten Monat erarbeitete jeder Mitarbeiter der ersten Abteilung soviel wie jeder aus der zweiten im ersten Monat und umgekehrt. Beide Abteilungen brachten es auf 248 Stück. Wieviel produzierte jede Abteilung im ersten und im zweiten Monat? (L)

9. In der Hauptstadt der DDR wurden für Feierabend- und Pflegeheime in den beiden Jahren 1953 und 1957 13 546 000 DM ausgegeben. Im Jahre 1957 waren es 5 104 000 DM mehr als 1953. Wieviel DM wurden 1953 und 1957 ausgegeben und wie hoch war die prozentuale Steigerung?

10. Von einer Berufsschule gingen die FDJler zweier Klassen Altstoff sammeln. Das Geld, das sie beim Verkauf der Altstoffe erhielten, spendeten die FDJler für den Neuaufbau des Müggelturms. Wenn zu dem Geld, das die Klasse A für ihre Altstoffe bekommen hat, noch 4 MDN hinzukämen, hätte sie dreimal soviel wie die Klasse B. Wenn aber die Klasse B zu ihrem Geld noch 1 MDN bekäme, hätte sie halb soviel wie die Klasse A. Wieviel Geld erhält jede Klasse für die gesammelten Altstoffe beim Verkauf?

11. Eine Messinggußlegierung von 35 kg enthält 12 kg mehr Kupfer als Zink und außerdem 1 kg Blei. Wieviel Kilogramm Kupfer und wieviel Kilogramm Zink enthält die Legierung?

12. Wieviel Kilogramm Stahl mit 0,5% Kohlenstoffgehalt und wieviel Tonnen Grauguß mit 2,5% Kohlenstoffgehalt ergeben – zusammengeschmolzen – 12 Tonnen mit 1,45% Kohlenstoffgehalt? (L)

13. Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird mit einer Emulsion geschmiert und zugleich gekühlt. Die Emulsion wird durch Mischen von gefettetem Mineralöl (Dichte 0,8 g · cm^{-3}) und möglichst weichem Wasser hergestellt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,98 g · cm^{-3}, für Schneidwerkzeuge niederer Festigkeit die Dichte 0,992 g · cm^{-3}, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,996 g · cm^{-3} haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser kommen für die einzelnen Bearbeitungsarten auf 10 Liter Emulsion?

14. Zum Herstellen von Rädern legiert man 189,2 kg Kupfer (Dichte 8,8 g · cm^{-3}) mit Zinn (Dichte 7,2 g · cm^{-3}) zu Bronze mit der Dichte 8,6 g · cm^{-3}. Wieviel Kilogramm Zinn sind nötig, und wieviel Kilogramm Bronze ergeben sich? (L)

15. Spiritus enthält Alkohol und Wasser. Aus zwei Sorten Spiritus von verschiedenem Alkoholgehalt und Wasser wird Spiritus vom Gehalt 40% hergestellt. Man mischt entweder 48 l der ersten Sorte und 16 l der zweiten mit 56 l Wasser oder 50 l der ersten Sorte mit 10 l der zweiten und 60 l Wasser. Wieviel Prozent Alkohol enthalten die beiden Sorten? (L)

16. Salpetersäure mit der Dichte 1,5 g · cm^{-3} ist mit Wasser so zu verdünnen, daß 10 l mit der Dichte 1,1 g · cm^{-3} entstehen. (Lösung rechnerisch und graphisch!)

3.5.4. Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen

So wie zum eindeutigen Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Variablen zwei voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen nötig sind, müssen zum eindeutigen Lösen eines Gleichungssystems mit mehreren Variablen ebenso viele voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen vorliegen, wie Variable in diesem System enthalten sind.

Lösungsverfahren

Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen können graphisch nicht gelöst werden, weil in einem ebenen Koordinatensystem nur Zahlenpaare durch Punkte dargestellt werden können. Das arithmetische Lösungsverfahren beruht – wie bei den Gleichungen mit zwei Variablen – auf dem Gedanken, aus den Gleichungen durch Eliminieren einer Variablen ein neues Gleichungssystem herzustellen, das eine Variable weniger enthält. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrig ist.
Diese Gleichung wird dann nach der betreffenden Variablen aufgelöst. Das Einsetzen ihres Wertes macht nacheinander die Ermittlung der Werte der übrigen Variablen möglich.
Für das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} (1) & 5x + 3y - 2z = 4 \\ (2) & 7x - 2y + 3z = 16 \\ (3) & 2x - 5y + 4z = 7 \end{array} \right|$$

wird im folgenden ein Lösungsweg angegeben.

Das Eliminieren der Variablen z kann z. B. mit den Gleichungen (1) und (3) erreicht werden. Multipliziert man (1) mit dem Faktor 2, so entsteht (1a) $10x + 6y - 4z = 8$. Durch Addieren der Gleichungen

(1a) $10x + 6y - 4z = 8$ und

(3) $2x - 5y + 4z = 7$ entsteht die Gleichung

(4) $12x + y = 15$.

In dieser Gleichung kommen nur noch die Variablen x und y vor. Das Eliminieren von z gelingt auch, nachdem man (1) mit dem Faktor 3 und (2) mit dem Faktor 2 multipliziert hat. Man erhält

(1b) $15x + 9y - 6z = 12$ und

(2a) $14x - 4y + 6z = 32$.

Durch Addieren von (1b) und (2a) ergibt sich

(5) $29x + 5y = 44$.

Zur Elimination von y stehen nun die Gleichungen (4) und (5) zur Verfügung. Multipliziert man noch (4) mit dem Faktor 5, so ergibt sich die Gleichung:

(4a) $60x + 5y = 75$.

Wird (5) von (4a) subtrahiert, so erhält man

(6) $31x = 31$, also $x = 1$.

Durch Einsetzen dieses Wertes in (4) ergibt sich

$$12 \cdot 1 + y = 15, \quad y = 3.$$

Durch Einsetzen beider Werte in (1) entsteht

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2z = 4, \quad z = 5.$$

Probe: Für die linken Seiten der gegebenen Gleichungen ergibt sich bei

(1) $5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 5 + 9 - 10 = 4$, bei

(2) $7 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 7 - 6 + 15 = 16$ und bei

(3) $2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 2 - 15 + 20 = 7$, das stimmt mit den jeweiligen rechten Seiten überein.

Gleichungssysteme mit mehr als drei Variablen können durch ein entsprechendes Verfahren gelöst werden. Man eliminiert z.B. aus der ersten und zweiten, aus der ersten und dritten, . . . , aus der ersten und letzten Gleichung des Systems ein und dieselbe Variable, so daß ein neues Gleichungssystem entsteht, das eine Variable und eine Gleichung weniger enthält.

Für das neue System wird das Verfahren wiederholt, und so wird fortgefahren, bis sich schließlich eine Gleichung mit einer Variablen ergibt. Nach dem Auflösen dieser Gleichung setzt man die für diese Variable ermittelte Zahl in eine Gleichung des Systems ein, die zwei Variable enthält, ermittelt den Wert der zweiten Variablen und fährt so fort, bis alle Werte bestimmt sind.

In welcher Reihenfolge die Variablen eliminiert werden, ist dabei belanglos. Sind die linearen Gleichungen voneinander unabhängig und widerspruchsfrei und stimmt ihre Anzahl mit der der Variablen überein, so gibt es genau eine Lösung, d.h. für jede Variable einen bestimmten Zahlenwert. Die Probe ist mit sämtlichen Gleichungen des Systems durchzuführen.

Aufgaben

1. $\left|\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 11 \\ 2x + 3y - z = 14 \\ 5x - 4y - 6z = 4 \end{array}\right|$ (L)

2. $\left|\begin{array}{l} x - y = 2 \\ z + y = -1 \\ x - z = -5 \end{array}\right|$

3. $\left|\begin{array}{l} x + 4y = 21 \\ 2x + 3z = 27 \\ 2y + 15z = 128 \end{array}\right|$ (L)

4. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{5}y + 1\frac{1}{3}z = 1 \\ 1\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y - 1\frac{2}{5}z = -3 \\ 2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}y + \frac{2}{3}z = -8 \end{array}\right|$ (L)

5. $\left|\begin{array}{l} 5x - 3y = 11 \\ 3z + 4u = 10 \\ 5y - 8u = 7 \\ 4x - 5z = 6 \end{array}\right|$ (L)

6. Eine dreiziffrige Zahl hat die Quersumme 15. Die zweite Ziffer der Zahl ist das arithmetische Mittel aus der ersten und dritten Ziffer. Die Summe der ersten beiden Ziffern ergibt das Vierfache der dritten Ziffer. Wie heißt die Zahl?

7. Dividiert man eine dreiziffrige Zahl durch die Summe ihrer ersten beiden Ziffern, so erhält man 49 Rest 11. Dividiert man dieselbe Zahl durch die Summe der ersten und dritten Ziffer, so ergibt sich 66 Rest 3. Dividiert man sie durch ihre Quersumme, so kommt 37 Rest 18 heraus. Wie heißt die Zahl? (L)

8. Ein Wasserbehälter faßt 630 Liter. Er wird gefüllt, wenn gleichzeitig durch drei Röhren 30 Minuten lang Wasser zufließt. Dabei liefert die erste Röhre in einer Minute 7 Liter mehr als die zweite und dreimal soviel als die dritte. Wieviel Liter fließen durch jede Röhre in einer Minute?

9. Ein Wasserbecken kann durch drei Pumpen gefüllt werden. Fördert die erste Pumpe zwei Stunden lang und die zweite Pumpe neun Stunden, so werden vier Fünftel des Beckens gefüllt. Fördert die erste Pumpe fünf und die dritte Pumpe vier Stunden, so fehlt noch ein Sechstel an der Füllung des Beckens. Fördert die zweite Pumpe fünf und die dritte acht Stunden, so wird das Becken gerade voll. In welcher Zeit wird das Becken durch jede Pumpe allein gefüllt? (L)

10. Drei Stück Silber, das erste mit dem Feingehalt 0,750, das zweite mit dem Feingehalt 0,585, das dritte mit dem Feingehalt 0,800 wiegen zusammen 270 g. Werden die ersten zwei Stücke zusammengeschmolzen, so erhält die entstandene Legierung den Feingehalt 0,700. Werden das zweite und das dritte Stück zusammengeschmolzen, so entsteht Silber mit dem Feingehalt 0,600. Wieviel Gramm wiegt jedes Stück?

11. Zur Herstellung ärztlicher Geräte werden 4,5 kg Neusilber benötigt, das 60% Kupfer, 30% Zink und 10% Nickel enthält. Zur Verfügung stehen drei Sorten Neusilber, von denen
die erste aus 52% Kupfer, 26% Zink und 22% Nickel,
die zweite aus 59% Kupfer, 30% Zink und 11% Nickel,
die dritte aus 63% Kupfer, 31% Zink und 6% Nickel besteht.
Wieviel Kilogramm von jeder Sorte sind zu nehmen? (L)

4. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

4.1. Die Winkelfunktionen

4.1.1. Die Sinusfunktion

1. *a) Fertigen Sie ein Gelenkviereck an, bei dem alle Seiten die gleiche Länge haben (Rhombus)! Bewegen Sie das Viereck so, daß ein Innenwinkel alle Winkel von* 0° *bis* 180° *durchläuft! Wie verändert sich dabei der Flächeninhalt des Rhombus?*

b) Zeichnen Sie Rhomben mit den Seiten $a = 5$ cm *und den Winkeln* $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 20°$; $\alpha_3 = 30°$; ...; $\alpha_{17} = 170°$*! Messen Sie die zugehörigen Höhen* h_1; h_2; h_3; ...; h_{17}, *und bestimmen Sie die Flächeninhalte* A_1; A_2; A_3; ...; A_{17}*! Welcher Flächeninhalt ergibt sich für* $\alpha_0 = 0°$ *und* $\alpha_{18} = 180°$*?*

c) Stellen Sie den Flächeninhalt A des Rhombus als Funktion des Winkels α *graphisch dar* $[A = f(\alpha)]$*!*

d) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Rhomben mit den Seiten $a = 5$ cm *und den Winkeln* $\alpha = 30°$; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°; 150°, *indem Sie die jeweilige Höhe rechnerisch ermitteln! Vergleichen Sie mit den unter b) gefundenen Werten! Wie fügen sich die Werte für* $\alpha = 45°$ *und* $\alpha = 135°$ *ein?*

e) Wie ändert sich die graphische Darstellung der Funktion $A = f(\alpha)$, *wenn Sie* $a = 3$ cm (7 cm) *wählen?*

2. *Dreht sich eine Spule gleichförmig in einem homogenen Magnetfeld, so wird in ihr eine Wechselspannung U induziert. Diese ändert ständig ihre Größe und wechselt ihre Polarität in regelmäßigen Zeitabständen. Zeichnen Sie den Verlauf der Spannung U in Abhängigkeit vom Drehwinkel* α *während einer Umdrehung der Spule!*

Der Flächeninhalt A eines Rhombus hängt bei gegebener Seitenlänge vom Winkel α ab. Ebenso hängt die in einer Spule induzierte Spannung U vom Winkel α ab. Die Abhängigkeit ist in beiden Fällen von gleicher Art; sie läßt sich aber durch keine der bisher behandelten Funktionen ausdrücken. Im folgenden werden wir diese Funktion näher bestimmen.

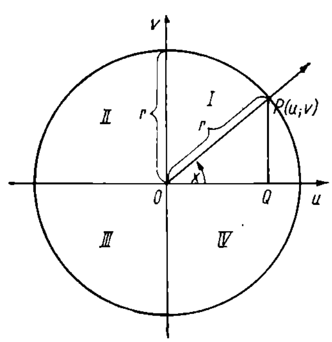


Abb. 4.1.

Es sei ein rechtwinkliges uv-Koordinatensystem mit gleicher Teilung auf den Achsen gegeben (Abb. 4.1.). Ein Winkel x entsteht dadurch, daß man einen Strahl um seinen Anfangspunkt O (0; 0) von der positiven u-Achse als Ausgangslage aus dreht. Als **positiven**

Drehsinn legt man fest, daß die positive u-Achse durch Drehung um $90°$ in die positive v-Achse übergeführt wird.
Um O sei ein Kreis mit beliebigem Radius r gezeichnet. Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneide den Kreis im Punkt $P\ (u;\ v)$. Dreht sich der Strahl um O bis in die Ausgangslage zurück, so hat er die vier Quadranten des Kreises überstrichen, und der Punkt P ist auf der Peripherie des Kreises einmal herumgelaufen.

● *Von P sei das Lot auf die u-Achse gefällt und der Fußpunkt mit Q bezeichnet. Wie bewegt sich Q, wenn P, von der Ausgangslage auf dem positiven Teil der u-Achse beginnend, einen vollen Umlauf ausführt?*

Im Verlauf der Drehung des Strahls ändert sich mit dem Winkel x die Länge des projizierenden Lotes $\overline{P_nQ_n}$ des zugehörigen Punktes $P_n\,(n = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots)$. Im I. Quadranten vergrößert sich die Länge des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel $x\,(0° \leqq x \leqq 90°)$ von 0 bis r (Abb. 4.2.). Im II. Quadranten verkürzt sich die Länge des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ mit wachsendem Winkel x $(90° \leqq x \leqq 180°)$ von r bis 0 (Abb. 4.3.). Überschreitet der Winkel den Wert $180°$, so nimmt die Maßzahl des Lotes negative Werte an, und zwar nimmt sie im III. Quadranten von 0 bis $-r$ ab und steigt im IV. Quadranten von $-r$ bis 0 an. Die mit Vorzeichen versehene Maßzahl des Lotes $\overline{P_nQ_n}$ hängt bei konstanter Länge des Radius $\overline{OP} = r\,(r > 0)$ eindeutig vom Winkel x ab.
Wir bilden nun das Verhältnis $\dfrac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$. Dieses Verhältnis (der Radius $\overline{OP}$ ist zunächst konstant) hängt ebenfalls eindeutig vom Winkel x ab, und ändert sich in gleicher Weise wie das projizierende Lot $\overline{PQ}$ selbst. Bedenkt man, daß nach dem Strahlensatz für die Winkel x das Verhältnis $\dfrac{\text{projizierendes Lot } \overline{PQ}}{\text{Radius } \overline{OP}}$ auch für veränderte Radien jeweils gleich ist, so erkennt man, daß das Verhältnis $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ nur vom Winkel x, nicht aber vom Radius $\overline{OP}$ abhängt.
Da die Maßzahl des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ gleich der Ordinate v des Punktes P ist, kann das Verhältnis auch lauten:

Ordinate v: Maßzahl des Radius r.

Dieses Verhältnis nennt man den **Sinus (sin)**[1] des Winkels x.

[1] sinus (lat.), Rundung, Wölbung

Abb. 4.2.

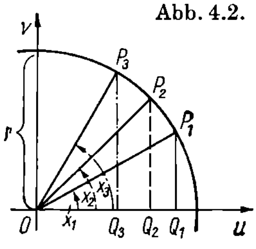


Abb. 4.3.

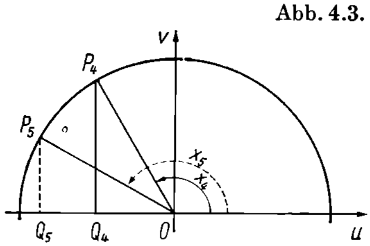
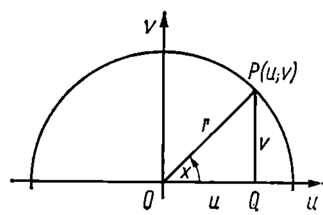


Abb. 4.4.



Erklärung 1: Das Verhältnis der Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Sinus des Winkels x (Abb. 4.4.).

(1) $$\sin x = \frac{\overline{PQ}}{r} \quad (0° \leqq x \leqq 360°) \quad \text{oder} \quad \sin x = \frac{v}{r}.$$

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist v mit Vorzeichen, von r jedoch nur die Maßzahl zu verwenden.
Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Maßzahl des Radius

vom Winkel ausdrückt, heißt nach Erklärung 1 **Sinusfunktion**. Als Funktionszeichen wird dabei das Symbol sin benutzt.
Bezeichnet man den Wert des veränderlichen Quotienten mit y, so erhält man die Funktion

$$y = \sin x.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Abbildung 4.1., *in der r konstant ist, die Funktionswerte der Sinusfunktion für die Winkel* $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$! *(Im III. und IV. Quadranten nimmt* $\sin x$ *negative Funktionswerte an.)*

4.1.2. Die Kosinusfunktion

Bei der Drehung des Strahls $\overline{OP}$ um O in Abbildung 4.1. ändert sich mit dem Winkel x auch die Projektion $\overline{OQ}$ des Radius auf die u-Achse (Abb. 4.5.).
Das Verhältnis Projektion $\overline{OQ}$: Radius $\overline{OP}$, das auch lauten kann

Abszisse u: Maßzahl des Radius r,

hängt ebenfalls nur vom Winkel x ab. Dieses Verhältnis nennt man den **Kosinus (cos)** des Winkels x.

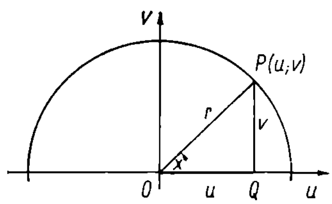


Abb. 4.5.

Erklärung 2: Das Verhältnis der Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P zur Maßzahl des Radius r des Kreises um O nennt man den Kosinus des Winkels x.

(2) $$\cos x = \frac{\overline{OQ}}{r} \quad (0° \leqq x \leqq 360°) \quad \text{oder} \quad \cos x = \frac{u}{r}.$$

Für beide Gleichungen gilt: $r \neq 0$. In der zweiten Gleichung ist wieder nur die Maßzahl von r zu verwenden.
Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Maßzahl des Radius

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kosinusfunktion:**

$$y = \cos x.$$

Ermitteln Sie die Funktionswerte der Kosinusfunktion für die Winkel $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$! *Im II. und III. Quadranten hat u negative Werte. Daher nimmt* $y = \cos x$ *in diesen Quadranten negative Funktionswerte an.*

4.1.3. Die Tangensfunktion

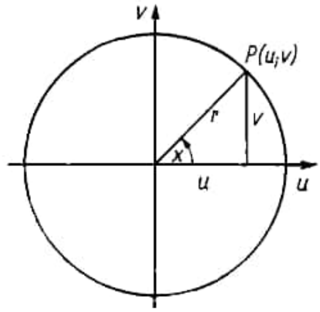


Abb. 4.6.

Eine weitere Winkelfunktion erhalten wir durch das Verhältnis

Ordinate v : Abszisse u,

das ebenfalls nur vom Winkel x abhängt (Abb. 4.6.). Für $x = 0°$ ist $v = 0$ und $u = r$ $(r \neq 0)$, also $\frac{v}{u} = 0$. Mit wachsendem x nimmt $\frac{v}{u}$ zu. Wenn der Winkel x sich dem Wert 90° nähert, wächst der Quotient $\frac{v}{u}$ über alle Grenzen. (Dieser Fall kann mit der Funktion $y = \frac{1}{x}$ verglichen werden, wenn sich x dem Wert 0 nähert.) Für $x = 90°$ existiert demnach kein Tangenswert. Das gleiche gilt für $x = 270°$.

Im II. Quadranten ist der Quotient $\frac{v}{u}$ negativ. Das Verhältnis $\frac{v}{u}$ wächst mit zunehmendem Winkel und erreicht für $x = 180°$ den Wert 0. Der Quotient $\frac{v}{u}$ zeigt im III. Quadranten das gleiche Verhalten wie im I. Quadranten, und im IV. Quadranten verhält er sich wie im II. Quadranten.

▶ **Erklärung 3: Das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Tangens[1] des Winkels x.**

(3) $$\tan x = \frac{v}{u} \quad (0° \leqq x \leqq 360°;\ x \neq 90°;\ x \neq 270°)\,.$$

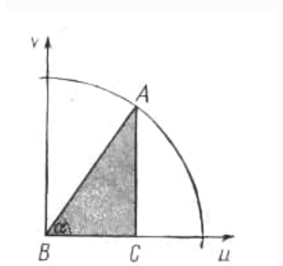


Abb. 4.7.

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Ordinate : Abszisse

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Tangensfunktion**:

$$y = \tan x\,.$$

4.1.4. Die Kotangensfunktion

Als vierte Funktion am Kreis betrachten wir das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v (Abb. 4.7.).

▶ **Erklärung 4: Das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des auf der Peripherie laufenden Punktes P nennt man den Kotangens des Winkels x.**

(4) $$\cot x = \frac{u}{v} \quad (0° < x < 360°;\ x \neq 180°)\,.$$

Die Funktion y, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses

Abszisse : Ordinate

[1] tangere (lat.), berühren.

vom Winkel x ausdrückt, heißt **Kotangensfunktion:**

$$y = \cot x.$$

Nähert sich der Winkel x im I. Quadranten von größeren Winkelwerten her dem Wert 0, so wächst der Quotient $\frac{u}{v}$ und damit die Funktion $y = \cot x$ über alle Grenzen. Für $x = 0°$ existiert die Funktion $y = \cot x$ nicht. Das gleiche gilt für $x = 180°$ und $x = 360°$.

Im II. und im IV. Quadranten haben die Tangensfunktion und die Kotangensfunktion negative Funktionswerte.

Zwei weitere nicht so bedeutende Winkelfunktionen sind der **Sekans** und der **Kosekans** eines Winkels. Der Sekans (sec) des Winkels x (Abb. 4.1.) ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: Projektion $\overline{OQ}$.

Der Kosekans (cosec) des Winkels x ist das Verhältnis

Radius $\overline{OP}$: Projizierendes Lot $\overline{PQ}$.

Für die Umrechnung gelten die Gleichungen:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Aufgaben

1. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems mehrere konzentrische Kreise, und legen Sie in den I. Quadranten einen Strahl, der in O beginnt!

a) Bestimmen Sie jeweils das Verhältnis „Ordinate des Schnittpunktes des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius"!
b) Vergleichen Sie die einzelnen Ergebnisse miteinander!
c) Wie ändert sich das Verhältnis im I. Quadranten, wenn sich der Winkel ändert?
d) Beurteilen Sie, warum die Sinusfunktion durch das Verhältnis von Ordinate zur Maßzahl des Radius und nicht durch die Ordinate allein definiert wird!
e) Welche besondere Rolle spielt der Kreis, der die Längeneinheit als Radius hat?
f) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. Quadranten durch!

2. Um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems sei ein Kreis mit dem Radius r gezogen. Von O geht ein Strahl aus, der den Kreis im Punkt P $(u;\, v)$ schneidet und mit dem positiven Teil der Abszissenachse den Winkel x bildet. Wie groß ist jeweils $\sin x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

a) $r = 8;\ v = 4$ **b)** $r = 3;\ v = 1$ **c)** $r = 13;\ v = -5$
d) $u = 3;\ v = 4$ **e)** $u = 2;\ v = -1{,}5$ **f)** $u = v = 2$
g) $u = -1;\ v = 3$ **h)** $r = c;\ v = a$ **i)** $u = b;\ v = a$ (L: a, d, e, i)

3. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Sinus die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** 0,1 **e)** $-0{,}3$ **f)** 0,4 **g)** $-0{,}8$ **h)** 0,9 (L: a, d, f, h)

Beachten Sie, daß sich jeweils zwei Winkel ergeben! Überlegen Sie, wie man die Aufgabe möglichst leicht lösen kann!

i) Warum ist 1,1 als Funktionswert des Sinus nicht möglich?

4. a) bis **c)** Beantworten Sie die Fragen der Aufgaben **1 a**, **b** und **c** für das Verhältnis „Abszisse des Schnittpunktes P des Strahls mit dem Kreis zur Maßzahl des zugehörigen Radius"!
d) Führen Sie die Untersuchungen auch im II. und III. Quadranten durch!

5. Wie groß sind für den in Aufgabe **2** geschilderten Sachverhalt die Werte von $\cos x$, wenn für die Symbole die folgenden Werte gesetzt werden?

a) $r = 3;\ u = 2,$ **b)** $r = 2;\ u = \sqrt{3}$ **c)** bis **i)** Siehe Aufgabe **2c** bis **i**! (L: b, c, i)

6. Bestimmen Sie die Kosinuswerte der folgenden Winkel nach Erklärung 2 durch Messung am Kreis!

a) 22,5° **b)** 45° **c)** 67,5° **d)** 135° **e)** 202,5° **f)** 337,5° (L: a, d)

7. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die die Kosinusfunktion die in Aufgabe **3a** bis **h** angegebenen Werte annimmt! (L: b, e, h)

8. Zeichnen Sie um den Anfangspunkt O eines uv-Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius r!
Wie verändert sich **a)** die Ordinate v, **b)** die Abszisse u eines Punktes P, der die Kreislinie, vom Punkt P_1 $(r;\ 0)$ beginnend, im mathematisch positiven Drehsinn durchläuft? Ziehen Sie daraus Folgerungen für den Verlauf der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion!
Für welche Winkel ist $\sin x = \cos x$? In welchen Fällen ist $\sin x = -\cos x$? (L)

9. Vergleichen Sie miteinander:

a) $\sin 30°$ und $\cos 60°$, **c)** $\sin x$ und $\cos(90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$,
b) $\sin 60°$ und $\cos 30°$, **d)** $\cos x$ und $\sin(90° - x)$, $0° \leqq x \leqq 90°$! (L: a, b)

10. Tragen Sie in einem uv-Koordinatensytem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel 55° an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2 auf, deren Abszissen $u_1 = 4$ bzw. $u_2 = 6$ sind! Messen Sie in beiden Fällen die Ordinaten v_1 und v_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{v_1}{u_1}$ und $\frac{v_2}{u_2}$!
Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung! (L)

11. Bestimmen Sie für die Winkel **a)** 30°, **b)** 60°, **c)** 120°, **d)** 150° am Kreis im uv-System das Verhältnis $v : u$ durch Messung! Kommt es auf den Radius des Kreises an? (L: a, d)

12. Welche Werte hat $\tan x$ am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die folgenden Koordinaten hat?

a) $u = 4;\ v = 3$ **b)** $u = v = 1$ **c)** $u = -4;\ v = 2$
d) $u = 2;\ v = -1{,}5$ **e)** $u = -0{,}9;\ v = -0{,}6$ **f)** Abszisse b; Ordinate a. (L: b, e)

13. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Tangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** 4 **d)** -1 **e)** $\sqrt{3}$ **f)** $-\frac{1}{3}$ (L: b, d)

14. Tragen Sie im uv-Koordinatensystem in O an den positiven Teil der u-Achse den Winkel 35° an, und suchen Sie auf seinem freien Schenkel (im I. Quadranten) die Punkte P_1 und P_2, deren Ordinaten $v_1 = 6$ bzw. $v_2 = 8$ sind!
Messen Sie in beiden Fällen die Abszissen u_1 bzw. u_2, und bestimmen Sie die Quotienten $\frac{u_1}{v_1}$ und $\frac{u_2}{v_2}$!
Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Feststellung! (L)

15. Bestimmen Sie am Kreis nach Erklärung 4 durch Messung die folgenden Funktionswerte!

a) $\cot 15°$ **b)** $\cot 75°$ **c)** $\cot 105°$ **d)** $\cot 165°$ **e)** $\cot 195°$ **f)** $\cot 255°$ (L: a, c, d)

16. Welche Werte hat $\cot x$ am Kreis im uv-System, wenn der Schnittpunkt P des zum Winkel x gehörenden Strahles mit dem Kreis die in Aufgabe **14** aufgeführten Koordinaten hat? (L: a, b, f)

17. Zeichnen und messen Sie die Winkel, für die der Kotangens die folgenden Werte annimmt!

a) $\frac{4}{7}$ **b)** 2 **c)** 2,5 **d)** $-0{,}8$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** -5 (L: c, f)

18. Stellen Sie, soweit möglich, die Werte der vier Winkelfunktionen für $x = 0°$; $90°$; $180°$; $270°$; $360°$ in einer Tabelle zusammen! (L)

19. In einigen Lehrbüchern der Mathematik werden die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck erklärt.

a) Wenden Sie die Erklärungen 1 bis 4 auf das rechtwinklige Dreieck ABC in Abbildung 4.7. an!

b) Erklären Sie die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck! Welcher Beschränkung unterliegen diese Erklärungen?

4.2. Der Zusammenhang der Winkelfunktionen

Die Darlegungen im Abschnitt 4.1. über die Winkelfunktionen können in folgenden Faustregeln zusammengefaßt werden:

1. $\dfrac{\text{Ordinate}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Sinus}$ 2. $\dfrac{\text{Abszisse}}{\text{Maßzahl des Radius}} = \text{Kosinus}$

3. $\dfrac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \text{Tangens}$ 4. $\dfrac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \text{Kotangens}$

Für alle vier Verhältnisse wurde die Abhängigkeit vom Winkel x festgestellt.

Die Verhältnisse	$v : r$	$u : r$	$v : u$	$u : v$
stellen die Funktionen	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
des Winkels x dar.				

Aus der Zusammenstellung entnehmen wir, daß die Verhältnisse, die Tangens und Kotangens erklären, für denselben Winkel x zueinander reziprok sind. Die Tangens- und die Kotangensfunktion eines Winkels haben reziproke Werte. Für die Werte der Sinus- und der Kosinusfunktion eines Winkels gilt eine derartige einfache Beziehung nicht.

4.2.1. Die Bilder der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen können im rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt werden. Hierzu verwendet man die Winkel x als Abszissen und die Funktionswerte y als Ordinaten der Kurvenpunkte. Die Abbildung 4.8. stellt das Bild der Funktion $y = \sin x$ im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ dar. Die Funktionswerte wurden einer Dar-

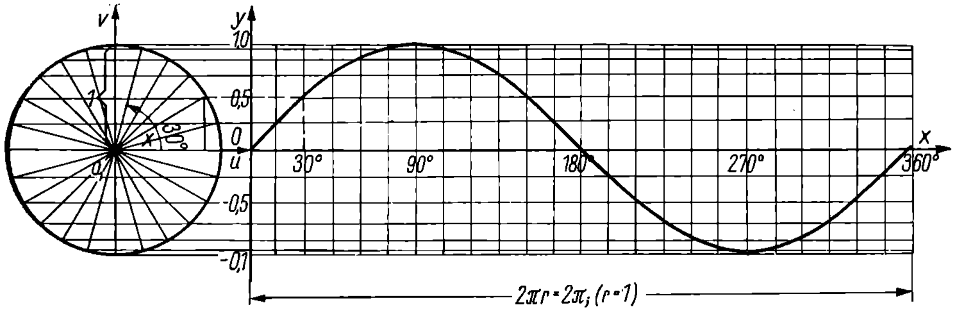


Abb. 4.8.

stellung im uv-Koordinatensystem entnommen, in der dem Radius des Kreises der Wert 1 gegeben wurde. In diesem Einheitskreis (Abb. 4.8., linker Teil) geht die Gleichung (1) über in

$$\text{(1a)} \quad \sin x = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}.$$

Die Maßzahl der Länge des Lotes $\overline{PQ}$ im Einheitskreis entspricht also jeweils dem Sinus des entsprechenden Winkels x.
Es ist zweckmäßig, auf der Abszissenachse des xy-Systems als Einheit die Länge desjenigen Bogens zu wählen, den der Zentriwinkel 1° auf der Peripherie des Einheitskreises ausschneidet. Man rollt dazu den Einheitskreis auf dem positiven Teil der x-Achse vom Ursprung O aus ab und erhält eine Strecke, die dem Vollwinkel 360° entspricht.
Um ein Bild der Funktion zu zeichnen, reicht es praktisch aus, wenn man den rechten Winkel im Einheitskreis in sechs gleiche Teile teilt und die zu einem Winkel von 15° gehörende Bogenlänge näherungsweise durch die Sehne ersetzt.

● *Wie ermittelt man in der Abbildung 4.8. für einen gegebenen Winkel den zugehörigen Kurvenpunkt?*

Aus der Abbildung 4.8. ist ersichtlich:
Die Werte der Sinusfunktion $y = \sin x$ liegen zwischen $y = -1$ und $y = +1$. Es gilt also der Wertevorrat: $-1 \leqq y \leqq +1$.
Im I. und IV. Quadranten ist die Sinusfunktion eine steigende, im II. und III. Quadranten eine fallende Funktion. Im Bereich $0° \leqq x \leqq 360°$ ist jedem Winkel x ein Funktionswert $y = \sin x$ eindeutig zugeordnet. Diese Aussage kann man jedoch nicht umkehren.

● *Wieviel Winkelwerte gehören a) im allgemeinen zu einem gegebenen Funktionswert, b) zu $y = +1$, $y = -1$, $y = 0$?*

Dagegen wird im Bereich $0° \leqq x \leqq 90°$ jedem Winkel x ein Funktionswert y $(0 \leqq y \leqq +1)$ umkehrbar eindeutig (eineindeutig) zugeordnet. Man sagt auch: Die Funktion $y = \sin x$ bildet die Menge der Winkel x $(0° \leqq x \leqq 90°)$ auf die Menge der

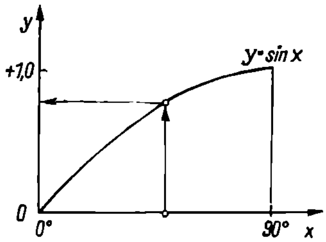


Abb. 4.9.

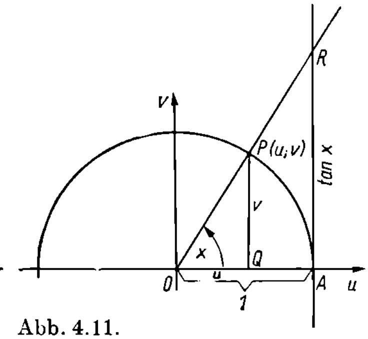


Abb. 4.11.

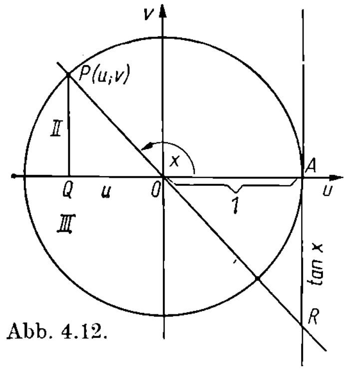
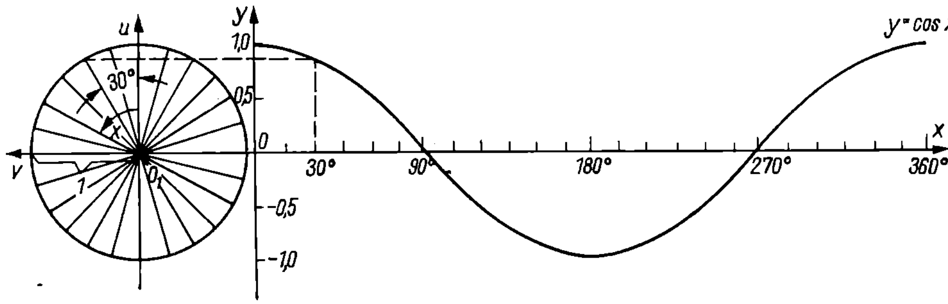


Abb. 4.12.

Abb. 4.10.



reellen Zahlen zwischen 0 und $+1$ $(0 \leqq y \leqq +1)$ eineindeutig ab (Abb. 4.9.). Die Abbildung 4.10. zeigt das Bild der Funktion $y = \cos x$, das in ähnlicher Weise wie das der Sinusfunktion gezeichnet wird. Als Ordinaten y hat man die entsprechenden Abszissen u im Einheitskreis des uv-Koordinatensystems zu verwenden.

Zur Konstruktion des Bildes der Tangensfunktion in Abbildung 4.11. wurde an den Einheitskreis im Punkt A $(1; 0)$ die Tangente (Haupttangente) gelegt. Der den Winkel x erzeugende Strahl schneidet die Tangente in R. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\overline{AR} : 1 = v : u.$$

Da $v : u = \tan x$ ist, ergibt sich

$$\overline{AR} = \tan x.$$

Der Abschnitt $\overline{AR}$ auf der Haupttangente im Punkte A des Einheitskreises stellt also den Tangens des Winkels x geometrisch dar.[1] Liegt der Winkel x im II. oder III. Quadranten, so schneidet der bewegliche Schenkel des Winkels x die Tangente nicht. Der den Tangens des Winkels x darstellende Abschnitt der Haupttangente wird in diesem Fall von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 4.12.). Auf dieser geometrischen Darstellung der Funktions-

[1] Diese geometrische Deutung läßt die Bezeichnung Tangens für das Verhältnis $v : u$ der Koordinaten eines Kreispunktes verständlich werden.

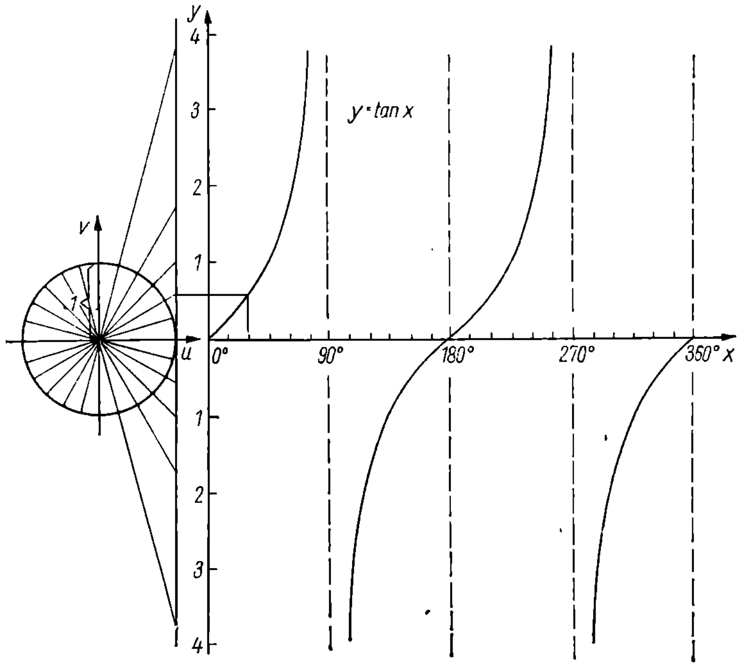


Abb. 4.13.

werte beruht das Konstruktionsverfahren für das Bild der Funktion $y = \tan x$ (Abb. 4.13.).
In ähnlicher Weise erhält man das Bild der Kotangensfunktion (Abb. 4.14.). Hierzu wird an den Einheitskreis im Punkt B (0; 1) die Tangente (Nebentangente) gelegt.
Der bewegliche Schenkel des Winkels x schneidet diese Tangente in T. Die Dreiecke OTB und OQP sind ähnlich; somit gilt die Proportion:

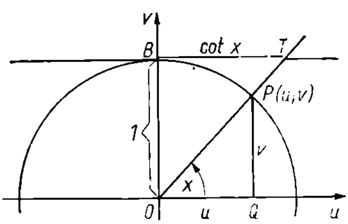


Abb. 4.14.

$$\overline{BT} : 1 = u : v.$$

Da $u : v = \cot x$ ist, ergibt sich

$$\overline{BT} = \cot x.$$

Der Abschnitt $\overline{BT}$ auf der Nebentangente im Punkte B des Einheitskreises stellt also den Kotangens des Winkels x geometrisch dar.
Im III. und IV. Quadranten wird der den Kotangens des Winkels x darstellende Tangentenabschnitt von der Verlängerung des beweglichen Schenkels über den Scheitel O hinaus gebildet (Abb. 4.15.). Bei der Konstruktion des Bildes

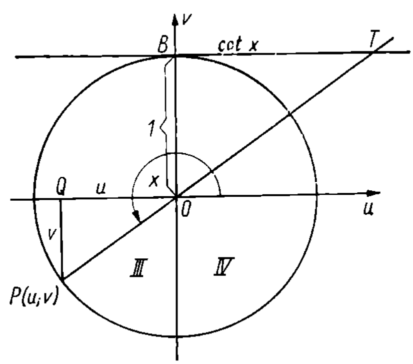
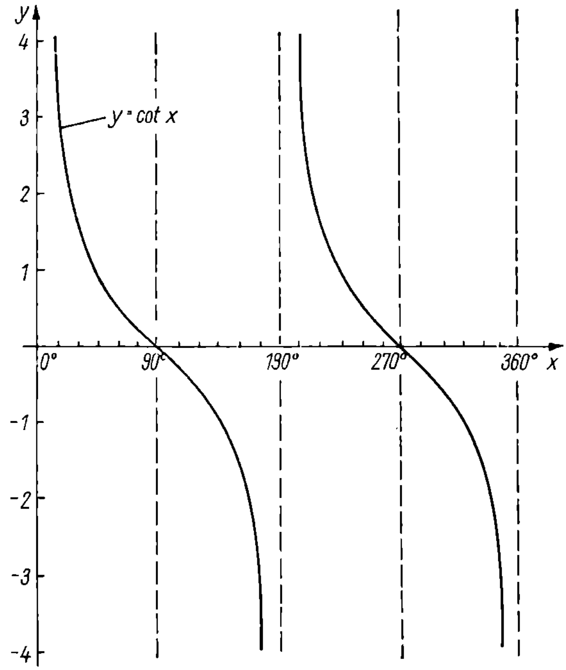


Abb. 4.15.

Abb. 4.16.



der Funktion $y = \cot x$ hat man als Ordinaten die Tangentenabschnitte $\overline{BT}$ zu verwenden (Abb. 4.16.). In den Abbildungen 4.13. und 4.16. zeigt der Verlauf der Kurven anschaulich, daß die Funktion $y = \tan x$ für $x = 90°$ und $x = 270°$, die Funktion $y = \cot x$ für $x = 0°$, $x = 180°$ und $x = 360°$ nicht definiert ist.

Beachten Sie, daß die Funktionswerte der Tangens- und Kotangensfunktion nicht die Strecken $\overline{AR}$ bzw. $\overline{BT}$ selbst, sondern deren Maßzahlen, also unbenannte Zahlen sind!

4.2.2. Die Vorzeichen der Winkelfunktionen

Der Radius r ist stets positiv, aber die Maßzahlen der Projektion $\overline{OQ}$ und des projizierenden Lotes $\overline{PQ}$ bzw. die Koordinaten u und v nehmen je nach dem Quadranten das positive oder negative Vorzeichen an. Die Vorzeichen von u und v bestimmen damit das Vorzeichen der Winkelfunktionen für die Winkel dieses Quadranten.

Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Quadranten

	I	II	III	IV
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tan	+	—	+	—
cot	+	—	+	—

● *Leiten Sie die Vorzeichen aus den Erklärungen der Winkelfunktionen her!*

4.2.3. Beziehungen zwischen den Funktionen bei gleichem Winkel

Dividiert man in der Zusammenstellung auf S. 117 die erste Gleichung durch die zweite und die zweite durch die erste, so erhält man:

$$\frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Hieraus ergeben sich für den gleichen Winkel x die Grundformeln

(5) $\quad \mathbf{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$

(6) $\quad \mathbf{\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$.

● *Sprechen Sie diese Beziehungen in Worten aus!*
Für welche Winkelwerte hat die Formel (5), *für welche die Formel* (6) *keine Gültigkeit?*

Durch Multiplikation der Gleichungen (5) und (6) findet man

(7) $\quad \mathbf{\tan x \cdot \cot x = 1}$.

● *Lösen Sie Gleichung* (7) *nach* $\tan x$ *bzw. nach* $\cot x$ *auf!*
Sprechen Sie die sich ergebenden Beziehungen in Worten aus!

Nach den Erklärungen (1) und (2) ist $\sin x = \frac{v}{r}$ und $\cos x = \frac{u}{r}$. Werden die beiden Gleichungen quadriert und anschließend addiert, so ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2 + u^2}{r^2}.$$

Wie aus den Abbildungen 4.4., 4.5. und 4.6. hervorgeht, gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS $v^2 + u^2 = r^2$ für jeden Punkt $P(u;\, v)$ im I. bis IV. Quadranten.
Hieraus ergibt sich:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

An Stelle von $(\sin x)^2$ bzw. $(\cos x)^2$ schreibt man vereinfacht $\sin^2 x$ bzw. $\cos^2 x$. So erhält man

(8) $\quad \mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$.

● *Lösen Sie die Gleichung* (8) *nach* $\sin x$ *bzw. nach* $\cos x$ *auf!*

Einige weitere Beziehungen gehen aus der Abbildung 4.17. hervor. In der Abbildung 4.17.a wurde im I. Quadranten der Winkel x, in der Abbildung 4.17.b der Winkel $(90° - x)$ eingezeichnet.

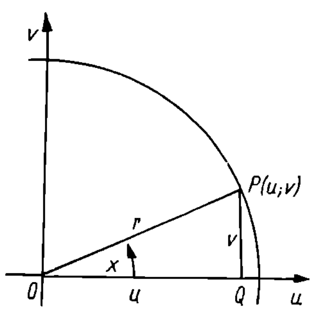


Abb. 4.17 a.

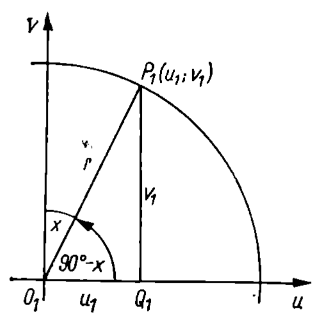


Abb. 4.17 b.

Auf Grund der Erklärungen der Winkelfunktionen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin(90^\circ - x) = \frac{v_1}{r}, \qquad \tan(90^\circ - x) = \frac{v_1}{u_1},$$

$$\cos(90^\circ - x) = \frac{u_1}{r}, \qquad \cot(90^\circ - x) = \frac{u_1}{v_1}.$$

Da die Dreiecke OQP und $O_1Q_1P_1$ kongruent sind, kann man setzen:

$$u_1 = v \quad \text{und} \quad v_1 = u.$$

Wendet man die Erklärungen der Winkelfunktionen nochmals an, so ergeben sich aus den obigen Gleichungen die **Komplementbeziehungen**:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\sin(90^\circ - x) = \cos x, \qquad &&\tan(90^\circ - x) = \cot x, \\ &\cos(90^\circ - x) = \sin x, \qquad &&\cot(90^\circ - x) = \tan x. \end{aligned}$$

Durch die Formeln in der zweiten Zeile werden die Namen *Kosinus* und *Kotangens* verständlich: complementi sinus (abgekürzt **co**sinus) bedeutet Sinus des Komplementwinkels, complementi tangens (abgekürzt **co**tangens) bedeutet Tangens des Komplementwinkels. Die Kosinus- bzw. die Kotangensfunktion nennt man die **Kofunktionen** zur Sinus- bzw. zur Tangensfunktion und umgekehrt.
Die Beziehungen (9) können zu folgender Aussage zusammengefaßt werden:

▶ **Die Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels (Komplementbeziehung).**

Die Formeln (5) bis (8) werden verwendet, um aus gegebenen Werten einer Winkelfunktion entsprechende Werte anderer Winkelfunktionen zu berechnen. Mit Hilfe der Formeln (9) werden Werte der entsprechenden Kofunktion des Komplementwinkels ermittelt.

■ **Beispiel 1:**

Gegeben ist $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Es ist $\tan x_1$ zu bestimmen. Hierzu ist es erforderlich, daß zunächst $\tan x$ durch $\sin x$ ausgedrückt wird.

Nach (5) ist $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und nach (8) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Indem wir für $\cos x$ den Wurzelausdruck einsetzen, erhalten wir: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$.

Für $\sin x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich daraus $\tan x_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

■ **Beispiel 2:**

Bekannt seien die Werte der Sinusfunktion für die Winkel $x = 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$.
Welche Werte hat die Kosinusfunktion für diese Winkel?

Es ist $\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$;
$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$;
$\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ$.

Aufgaben

1. a) Für die Sinus- und die Kosinusfunktion ist zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° eine dreistellige Tafel aufzustellen.
Anleitung: Zeichnen Sie den I. Quadranten eines Einheitskreises, und tragen Sie die Winkel 10°; 20°; 30°; ...; 80° ein! Wählen Sie als Radius 1 dm! Die Funktionswerte kann man so auf zwei Dezimalstellen genau bestimmen und die dritte Dezimalstelle schätzen (Millimeterpapier!). Kosinus- und Sinusfunktion haben den gleichen Wertevorrat; die Funktionswerte sind aber anderen Winkeln zugeordnet. Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$?

b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Sinus- und der Kosinusfunktion auf! (L)

2. a) Stellen Sie eine dreistellige Tafel der Tangens- und der Kotangensfunktion zwischen 0° und 90° von 10° zu 10° auf!
Anleitung: Es ist $\tan x$ die Maßzahl des Haupttangentenabschnittes, $\cot x$ die Maßzahl des Nebentangentenabschnittes.
Welchen Zusammenhang beobachten Sie an den Funktionen $y = \tan x$ und $y = \cot x$?

b) Stellen Sie auch für den II. Quadranten eine Wertetafel der Tangens- und der Kotangensfunktion auf!

3. a) Stellen Sie die Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion zusammen! (Darunter sind die Stellen x zu verstehen, für die $\sin x = 0$ bzw. $\cos x = 0$ ist.)

b) Stellen Sie diejenigen Stellen zusammen, an denen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ die Werte $+1$ und -1 annehmen! (L)

4. In einem Kreis mit dem Radius r ist eine Sehne von der Länge l mit dem zugehörigen Zentriwinkel α gezeichnet. Das Lot vom Kreismittelpunkt auf die Sehne halbiert Zentriwinkel und Sehne.

a) Stellen Sie die Funktion auf, welche die Beziehung zwischen halbem Zentriwinkel, halber Sehne und Kreisradius ausdrückt!

b) Wie groß ist in einem Kreis vom Durchmesser 7 cm die Sehne zum Zentriwinkel 20°; 80°; 140°?
Anleitung: Benutzen Sie zur Bestimmung die Tafel aus Aufgabe **1**! (L)

5. Bestimmen Sie graphisch durch Interpolation an der Sinus- bzw. Kosinuskurve die folgenden Funktionswerte!

a) sin 5° **b)** sin 78° **c)** sin 175° **d)** sin 258°
e) cos 25° **f)** cos 62° **g)** cos 118° **h)** cos 355° (L: a, b, h)

6. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \sin x$ die Winkel, deren Sinus die folgenden Werte haben!

a) 0,35 **b)** 0,70 **c)** — 0,30 **d)** — 0,65 (L: a, d)

7. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cos x$ die Winkel, deren Kosinus die folgenden Werte haben!

a) 0,40 **b)** 0,125 **c)** — 0,45 **d)** — 0,140 (L: b, d)

8. a) Die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion sind im I. Quadranten in ein und dasselbe xy-Achsenkreuz zu zeichnen.
Spiegeln Sie die Kurven an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 45°$! Zeichnen Sie dazu entweder (1) nur das Bild einer der beiden Funktionen oder (2) beide Funktionen lediglich im Bereich von 0° bis 45°, und vervollständigen Sie die Zeichnungen durch Spiegelung!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet?

b) Zeichnen Sie die Bilder der Sinus- und der Kosinusfunktion nun auch im II. bis IV. Quadranten! Nutzen Sie die Möglichkeit der Spiegelung an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt mit der Abszisse $x = 225°$!
Durch welche Beziehungen wird das Verfahren analytisch begründet? (L)

9. Bestimmen Sie durch Interpolation an der Tangens- bzw. Kotangenskurve die folgenden Funktionswerte!

a) tan 73° **b)** tan 11° **c)** tan 107° **d)** tan 191°
e) cot 39° **f)** cot 66° **g)** cot 107° **h)** cot 294° (L: a, e)

10. Entnehmen Sie der graphischen Darstellung der Funktion $y = \cot x$ die Winkel, deren Kotangens die folgenden Werte hat!

a) 2,10 **b)** 0,83 **c)** −0,50 **d)** −1,50 (L: a, b)

11. Leiten Sie aus den nachstehenden Werten der Sinus- und der Tangensfunktion die entsprechenden Werte der Kofunktionen her! (L)

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin x$	0	0,174	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\tan x$	0	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	—

12. Beschreiben und vergleichen Sie den Verlauf der Kurven der Sinus- und der Tangensfunktion im Bereich von 0° bis 90°!
Welche Punkte haben die beiden Kurven gemeinsam?

13. Beweisen Sie die Formeln

a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, **b)** $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$! (L: a)

14. Bestätigen Sie die Richtigkeit der Beziehungen

a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ und **b)** $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$! (L: b)

15. Aus den Funktionen $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$ können jeweils die drei anderen Winkelfunktionen bestimmt werden.
Leiten Sie die Beziehungen her, und vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle!

gesucht \ ausgedrückt durch	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	—	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$		...
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	—	...	
$\tan x$			—	...
$\cot x$	...	...	...	—

16. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a) $\cos x \cdot \tan x$ **b)** $\sin x \cdot \cot x$ **c)** $\dfrac{\cos x}{\cot x}$

d) $\dfrac{\sin x}{\tan x}$ **e)** $\dfrac{\tan x}{\cot x}$ **f)** $\tan x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (**L: a, e**)

17. Gegeben sind die folgenden Funktionswerte.

a) $\sin\ 30° = 0{,}5$ b) $\tan\ 45° = 1$ c) $\cos 120° = -0{,}5$
d) $\tan\ 0° = 0$ e) $\cot 270° = 0$ f) $\sin\ 13° = 0{,}2250$
g) $\cos 40° = 0{,}7660$ h) $\tan 308° = -1{,}280$ i) $\cot\ 59° = 0{,}6009$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle in Aufgabe **21** die übrigen Funktionswerte der Winkel!
(L: a, d, e, i)

18. Berechnen Sie aus den gegebenen Funktionswerten jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen!

a) $\sin x = \frac{1}{3}$ **b)** $\cos x = \frac{3}{4}$ **c)** $\tan x = 3$

d) $\cot x = \sqrt{3}$ **e)** $\sin x = \frac{10}{11}$ **f)** $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

g) $\tan x = \frac{1}{4}$ **h)** $\cot x = 2 - \sqrt{3}$ **i)** $\sin x = -\frac{1}{2}$

k) $\cos x = \frac{1}{2}$ **l)** $\tan x = -1$ **m)** $\cot x = \sqrt{3} - 2$ (**L: a, g, h, k**)

● **Schülerauftrag**

Fertigen Sie das in Abbildung 4.18. dargestellte Gerät zum Bestimmen der Werte der Winkelfunktionen an!
Es besteht aus einem durchscheinenden Deckblatt mit dem Vollkreis und dem Durchmesser sowie aus einem Grundblatt mit dem Quadrat und dem Quadranten. Auf den Quadratseiten kann man für den mit dem Durchmesser eingestellten Winkel unmittelbar die Funktionswerte $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ($0° \leqq x \leqq 45°$) *und* $\cot x$ ($45° \leqq x \leqq 90°$) *ablesen. Führen Sie den Beweis! Wie findet man die Tangenswerte für Winkel zwischen* 45° *und* 90° *und die Kotangenswerte für Winkel zwischen* 0° *und* 45°?
Beurteilen Sie die Genauigkeit, mit der Sie die Funktionswerte an Ihrem Gerät ablesen können!

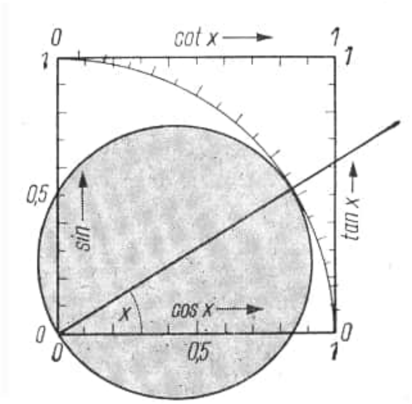


Abb. 4.18.

4.3. Die Tafeln der Winkelfunktionen

Die Werte der Winkelfunktionen sind überwiegend irrationale Zahlen. Sie sind in Tafeln zusammengefaßt, die

das Aufsuchen des Wertes $y = f(x)$ einer Winkelfunktion $f(x)$ zu einem gegebenen Winkel x
sowie das Aufsuchen des Winkels x zu einem gegebenen Funktionswert $f(x)$ ermöglichen.

Im folgenden wird stets auf das Tafelwerk von Beyrodt/Küstner *Vierstellige Logarithmen – Zahlen, Werte, Formeln* Bezug genommen.

4.3.1. Aufsuchen der Funktionswerte bzw. der Winkel

● *Erläutern Sie die Begriffe „steigende Funktion" und „fallende Funktion", indem Sie im I. Quadranten bei jeder der vier Winkelfunktionen angeben, wie sich der Funktionswert bei einer Änderung des Winkels ändert!*

Die Tafel 13 enthält unter Ausnutzung des Umstandes, daß die Kosinusfunktion die Kofunktion zur Sinusfunktion ist, die Funktionswerte für $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ($0° \leqq x \leqq 90°$). Entsprechend enthält die Tafel 14 die Funktionswerte für $y = \tan x$ und $y = \cot x$.
Die Winkel im Rahmen auf der linken Seite und oben bilden den Tafeleingang für die Funktion $y = \sin x$ ($y = \tan x$), die Winkel im Rahmen auf der rechten Seite und unten den für die Funktion $y = \cos x$ ($y = \cot x$). Dabei sind die Winkel für die Funktionen Kosinus bzw. Kotangens in entgegengesetzter Folge aufgeführt.
Die Funktionswerte sind jeweils zwei Winkeln zugeordnet. Einerseits stellen sie den Sinuswert (Tangenswert) eines Winkels dar, andererseits den Kosinuswert (Kotangenswert) des Komplementwinkels.

■ **Beispiel 1:**

$\sin 21{,}0° = 0{,}3584;\quad \cos(90° - 21{,}0°) = \cos 69{,}0° = 0{,}3584$
$\tan 63{,}2° = 1{,}980;\quad \cot(90° - 63{,}2°) = \cot 26{,}8° = 1{,}980$

Da die tabellierten Funktionswerte fast alle gerundet sind, müßte eigentlich geschrieben werden: $\sin 21{,}0° \approx 0{,}3584$. Man verzichtet jedoch wie auch bei den Logarithmen auf diese Unterscheidung im Schriftbild.
Ist der Winkel gesucht, so liest man bei gegebenem Sinusfunktionswert (Tangensfunktionswert) die Gradzahl in dem Winkelrahmen ab, der die linke Spalte und die obere Zeile bildet. Bei gegebenem Kosinusfunktionswert (Kotangensfunktionswert) findet man die Gradzahl in dem Winkelrahmen, der die rechte Spalte und die untere Zeile bildet.

■ **Beispiel 2:**

$\sin x = 0{,}4664$	$\cos x = 0{,}2284$	$\tan x = 0{,}7400$	$\cot x = 10{,}99$
$x = 27{,}8°$	$x = 76{,}8°$	$x = 36{,}5°$	$x = 5{,}2°$

Aufsuchen der Funktionswerte $y = f(x)$ mit Interpolieren

Ist der Winkel mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad gegeben, so hat man zu interpolieren. Für das Interpolieren gelten bei dezimal geteiltem Grad die gleichen Regeln wie beim Rechnen mit Logarithmen.

■ **Beispiel 3:**

$y = \sin 13{,}27°$.

Aus Tafel 13 entnimmt man die Funktionswerte für sin 13,20° und sin 13,30°, zwischen denen der gesuchte Funktionswert liegt.

$$\frac{10°}{100}\left[\begin{array}{l} \dfrac{n°}{100}\left[\begin{array}{l}\sin 13{,}20° = 0{,}2284 \\ \sin 13{,}27° = 0{,}22\,.\,.\end{array}\right] d \\ \quad\;\;\sin 13{,}30° = 0{,}2300 \end{array}\right] D$$

Nach dem Einsetzen in die Interpolationsformel $d = \frac{D \cdot n}{10}$ ergibt sich:

$$d = \frac{16 \cdot 7}{10} = 11{,}2 \approx 11\,.$$

Man addiert 11 Zehntausendstel zu 0,2284 und erhält $y = \sin 13{,}27° = 0{,}2295$.

■ **Beispiel 4:**

$y = \cos 52{,}14°$

$$\begin{array}{l} \cos 52{,}10° = 0{,}6143 \\ \cos 52{,}14° = 0{,}61\,.\,. \\ \cos 52{,}20° = 0{,}6129 \end{array}$$

Wächst der Winkel um 10 Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um $D = 14$ Zehntausendstel.
Wächst der Winkel um $n = 4$ Hundertstelgrad, so fällt der Funktionswert um d Zehntausendstel.
Die Eigendifferenz berechnet man zu $d = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5{,}6$, gerundet 6. Man subtrahiert 6 Zehntausendstel von 0,6143 und erhält $y = \cos 52{,}14° = 0{,}6137$.

■ **Beispiel 5:**

$y = \tan 68{,}44°$

$$\begin{array}{lr} \tan 68{,}44° = & 2{,}526 \\ & +0{,}005 \\ \hline \tan 68{,}44° = & 2{,}531 \end{array} \qquad d = \frac{13 \cdot 4}{10} = 5{,}2 \approx 5$$

Ist der Winkel in sexagesimaler Teilung, also in Grad, Minuten und Sekunden gegeben, so hat man vor der Benutzung der Tafeln die Minuten (′) und Sekunden (″) in dezimale Teile eines Grades umzurechnen. Für die Umwandlung von m' bzw. s'' in Grad gelten folgende Formeln:

$$60' = 1^\circ \qquad 60'' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \qquad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

$$m' = \left(\frac{m}{60}\right)^\circ \qquad s'' = \left(\frac{s}{3600}\right)^\circ$$

■ **Beispiel 6:**

17° 13′ 25″ sind in Grad und Dezimalgrad zu verwandeln (auf 2 Dezimalstellen).

$13' = \left(\frac{13}{60}\right)^\circ \approx 0{,}217^\circ \qquad 25'' = \left(\frac{25}{3600}\right)^\circ \approx 0{,}007^\circ$

Ergebnis: $17^\circ\, 13'\, 25'' \approx 17{,}22^\circ$

Es gibt auch Tafeln der Winkelfunktionen, denen die sexagesimale Teilung des Winkels zugrunde gelegt ist.

Aufsuchen der Winkel x mit Interpolieren

Steht der gegebene Funktionswert nicht in der Tafel, so hat man beim Aufsuchen des Winkels zu interpolieren.

■ **Beispiel 7:**

$\tan x = 0{,}3652.$

Der gegebene Funktionswert liegt zwischen den in der Tafel 14 verzeichneten Werten 0,3640 und 0,3659, zu denen die Winkel 20,00° und 20,10° gehören:

$$\frac{10^\circ}{100}\left[\begin{array}{l} \frac{n^\circ}{100}\left[\begin{array}{l}\tan 20{,}00^\circ = 0{,}3640 \\ \tan 20{,}0\,.^\circ = 0{,}3652\end{array}\right] d \\ \qquad \tan 20{,}10^\circ = 0{,}3659 \end{array}\right] D$$

Nach dem Einsetzen in die Formel $n = \frac{d \cdot 10}{D}$ ergibt sich: $n = \frac{12 \cdot 10}{19} = 6{,}3\,.. \approx 6$.

Man addiert 6 Hundertstelgrad zu 20,00° und erhält $x = 20{,}06^\circ$.

■ **Beispiel 8:**

$\cos x = 0{,}8768$

$$\begin{array}{rr} x = & 28{,}70^\circ \\ + & 0{,}04^\circ \\ \hline x = & 28{,}74^\circ \end{array} \qquad n = \frac{3 \cdot 10}{8} \approx 4$$

Soll der errechnete Winkel in sexagesimaler Teilung ausgedrückt werden, so hat man anschließend umzurechnen:

$x = 28{,}74^\circ \qquad (0{,}1^\circ = 6';\ 0{,}01^\circ = 36'')$

$0{,}7^\circ = 7 \cdot 6' = 42'$

$0{,}04^\circ = 4 \cdot 36'' = 144'' = 2'\,24''$

$x = 28^\circ\, 44'\, 24''.$

4.3.2. Die Winkelfunktionsleitern auf dem Rechenstab

Werden die Punkte der Sinuskurve mit den Abszissen $x = 0°$; $10°$; $20°$; ...; $90°$ senkrecht auf die y-Achse projiziert, so erhält man eine Darstellung der Funktion $y = f(x) = \sin x$ in Form einer **Funktionsskale**. Auf der Funktionsskale in Abbildung 4.19. sind auf der Einheitslänge 0 ... 1 die Punkte, die den Winkeln $0°$; $10°$; ...; $90°$ entsprechen, markiert. Stark gerundete Werte der Sinusfunktion können somit auf dieser sogenannten **Doppelleiter** abgelesen werden.

Die Teilung der Funktionsskale in Abbildung 4.19. ist eine Sinusteilung der Einheitslänge 0 ... 1.

Die **Sinusfunktionsleiter** auf der Rückseite des Rechenstabes unterscheidet sich von der eben beschriebenen dadurch, daß die Logarithmen der Sinusfunktion abgetragen sind. Auf dem Normalrechenstab sind auf einer Länge von 25 cm die Logarithmen der Zahlen 0,1 bis 1 aufgetragen. Dementsprechend sind bei der Sinusleiter die Logarithmen der Funktion $y = \sin x$ im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Winkelangaben versehen. Da $0{,}1000 = \sin 5{,}74°$ ist, beginnt die Sinusleiter auf dem Rechenstab mit $5{,}74°$ (Abb. 4.20.).

Die Sinusleiter ist auf die logarithmische Skale D des Rechenstabes abgestimmt. Somit kann man zu einem gegebenen Winkel x im Bereich $5{,}74° \leqq x \leqq 90°$ den Funktionswert $y = \sin x$ ablesen. Umgekehrt findet man zu einem gegebenen Funktionswert y im Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ den zugehörigen Winkel.

Wegen der Komplementbeziehung $\cos x = \sin (90° - x)$ kann die Sinusfunktionsleiter auf dem Rechenstab auch dazu benutzt werden, zu gegebenen Winkeln x im Bereich $84{,}26° \geqq x \geqq 0°$ den Kosinuswert zu finden und umgekehrt.

● *Stellen Sie eine Sinusfunktionsleiter her, indem Sie auf einem Kartonstreifen auf einer Strecke von 250 mm Länge die Logarithmen der Werte der Sinusfunktion für folgende Winkel auftragen:* $10°$; $20°$; $30°$; $40°$; $50°$; $60°$; $70°$; $80°$; $90°$! *Überlegen Sie, mit welchem Faktor Sie die Mantissen der Logarithmen multiplizieren müssen!*

Schreiben Sie die Winkelwerte an! Vergleichen Sie Ihre Sinusleiter mit der auf dem Rechenstab!

Bei der **Tangensfunktionsleiter** auf dem Rechenstab sind die Logarithmen der Tangensfunktion, $y = \tan x$, ebenfalls für den Wertebereich $0{,}1 \leqq y \leqq 1$ abgetragen und mit den zugehörigen Argumenten versehen.

Da $0{,}1000 = \tan 5{,}71°$ und $1{,}000 = \tan 45°$ ist, reicht die Tangensleiter auf dem Rechenstab von $5{,}71°$ bis $45°$. Man kann also auf dem Rechenstab die natürlichen Zahlenwerte der Tangensfunktion nur im Bereich $5{,}71° \leqq x \leqq 45°$ ablesen, und umgekehrt.

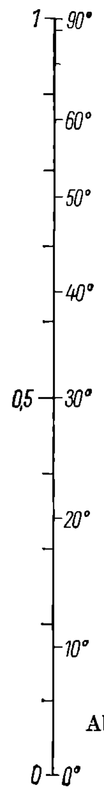


Abb. 4.19.

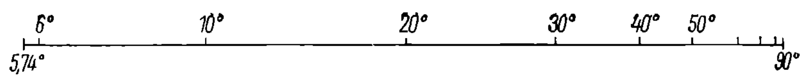


Abb. 4.20.

Wegen der Komplementbeziehung $\cot x = \tan (90° - x)$ kann die Tangensleiter verwendet werden, zu gegebenen Winkeln x im Bereich $45° \leqq x \leqq 84{,}29°$ den Kotangenswert zu finden und umgekehrt. Außerdem findet man auf dem Rechenstab für Sinus und Tangens kleiner Winkel eine gemeinsame Leiter. Sie reicht von 0,57° bis 5,73° entsprechend den Funktionswerten 0,01 bzw. 0,1 für Sinus und Tangens. Es ist $\sin 0{,}57° \approx \tan 0{,}57° \approx 0{,}0100$. Da sich beim Funktionswert 0,1000 die zugehörigen Winkelwerte bei Sinus und Tangens in den Hundertstelgraden unterscheiden (5,74° bzw. 5,71°), ist für den Winkel der mittlere Wert 5,73° zu nehmen. Diese Leiter läßt sich außerdem für die Kosinusfunktion und die Kotangensfunktion im Bereich $89{,}43° \geqq x \geqq 84{,}27°$ verwenden.

● *Stellen Sie eine Tangensleiter her!*

4.3.3. Kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen

Falls bei der Lösung einer Aufgabe die Genauigkeit des Rechenstabes ausreicht, aber kein Stab mit Winkelfunktionsleitern zur Verfügung steht, benutzen wir zum Aufsuchen der Funktionswerte die Tafeln der Winkelfunktionen und rechnen im übrigen mit dem Rechenstab. Diese Methode wird als **kombiniertes Tafel-Stab-Rechnen** bezeichnet. Sie hat insbesondere auch Bedeutung bei Winkelfunktionswerten, die auf dem Rechenstab nicht unmittelbar abgelesen werden können.

● *Geben Sie diese Bereiche des Rechenstabes an!*

■ **Beispiel 9:**

$x = \frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot \sin 44{,}6°$

Wir finden in Tafel 13 $\sin 44{,}6° = 0{,}7022$. Mit dem Rechenstab berechnen wir den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot 8{,}7 \cdot 7{,}1 \cdot 0{,}702$. Es ergibt sich $x = 21{,}7$.

■ **Beispiel 10:**

$$\sin x = \frac{36{,}6 \cdot \sin 55{,}7°}{32{,}3}$$

In Tafel 13 finden wir $\sin 55{,}7° = 0{,}8261$. Mit dem Rechenstab berechnen wir den Ausdruck $\frac{36{,}6 \cdot 0{,}826}{32{,}3}$ und finden $\sin x = 0{,}936$. Nun suchen wir in Tafel 13 den Winkel auf. Es ergibt sich $x = 69{,}4°$.

■ **Beispiel 11:**

$$x = \frac{2{,}73 \cdot \tan 73{,}4° \cdot \cos 3{,}5°}{6{,}84}$$

Den Funktionswert tan 73,4° finden wir nicht auf dem Rechenstab. Wir könnten tan 16,6° ablesen und davon den reziproken Wert nehmen. Desgleichen könnten wir cos 3,5° als sin 86,5° ablesen, aber nur mit geringer Genauigkeit. Deshalb suchen wir tan 73,4° in Tafel 14, cos 3,5° in Tafel 13 auf und berechnen den Ausdruck $\frac{2{,}73 \cdot 3{,}35 \cdot 0{,}998}{6{,}84}$.

Wir erhalten $x = 1{,}34$.

4.3.4. Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln aus verschiedenen Quadranten (Quadrantenbeziehungen)

Die Werte der Winkelfunktionen für Winkel des I. Quadranten werden aus den Tafeln 13 und 14 entnommen. Aber auch die Funktionswerte von Winkeln in den Quadranten II bis IV können mit Hilfe dieser beiden Tafeln bestimmt werden.

Es sei x_{II} ein Winkel im II. Quadranten (Abb. 4.21.). Auf Grund der Erklärungen (1) bis (4) gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin x_{II} = \frac{\overline{PQ}}{r}, \qquad \tan x_{II} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}},$$

$$\cos x_{II} = \frac{\overline{OQ}}{r}, \qquad \cot x_{II} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}.$$

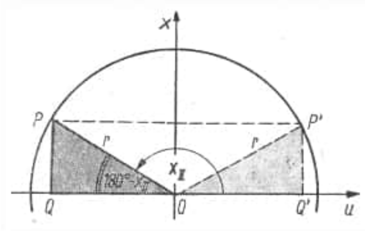


Abb. 4.21.

Spiegelt man das Dreieck OQP in Abbildung 4.21. an der v-Achse, so erhält man das Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten. Der Winkel $POQ = (180° - x_{II})$ entspricht dann dem Winkel $P'OQ$. Weiter ist $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ und $\overline{OQ} = -\overline{OQ'}$! Setzt man in die obigen Gleichungen ein und berücksichtigt, daß

$$\frac{\overline{P'Q'}}{r} = \sin(180° - x_{II}), \qquad \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = \tan(180° - x_{II}),$$

$$\frac{\overline{OQ'}}{r} = \cos(180° - x_{II}), \qquad \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \cot(180° - x_{II})$$

ist, so ergibt sich:

$$\sin x_{II} = \sin(180° - x_{II}), \quad \tan x_{II} = -\tan(180° - x_{II}),$$

$$\cos x_{II} = -\cos(180° - x_{II}), \quad \cot x_{II} = -\cot(180° - x_{II}).$$

Diese Gleichungen setzen die Winkelfunktionen eines Winkels im II. Quadranten zu den entsprechenden Winkelfunktionen des im I. Quadranten gelegenen Supplementwinkels in Beziehung.

Die Quadrantenbeziehung für den III. Quadranten erhält man mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OPQ in Abbildung 4.22. am Koordinatenursprung des uv-Koordinatensystems. Das bedeutet, daß dieses Dreieck um O um den Winkel 180° gedreht wird. Man erhält wiederum ein Dreieck $OQ'P'$ im I. Quadranten, und der Winkel $QOP = (x_{III} - 180°)$ entspricht dem Winkel $Q'OP'$.

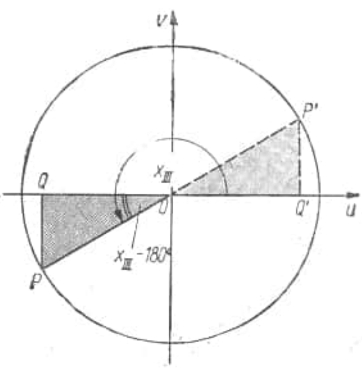


Abb. 4.22.

● *Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im III. Quadranten weiter!*

Die Quadrantenbeziehung für den IV. Quadranten wird mit Hilfe einer Spiegelung des Dreiecks OQP mit dem Winkel $POQ = (360° - x_{IV})$ an der u-Achse gewonnen (Abb. 4.23.).

● *Führen Sie die Untersuchungen über die Winkelfunktionen im IV. Quadranten selbst durch!*

Zwischen den Winkelfunktionen, die zu Winkeln in höheren Quadranten gehören, und den Winkelfunktionen des entsprechenden Winkels im I. Quadranten gelten die folgenden Beziehungen.

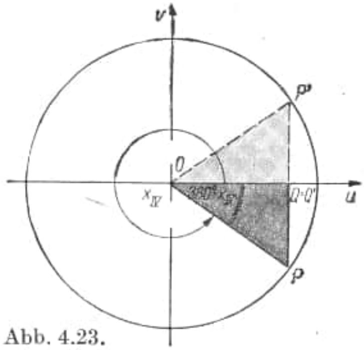


Abb. 4.23.

II. Quadrant

(10) $\sin x_{II} = \sin(180° - x_{II})$ $\qquad$ $\tan x_{II} = -\tan(180° - x_{II})$

$\cos x_{II} = -\cos(180° - x_{II})$ $\qquad$ $\cot x_{II} = -\cot(180° - x_{II})$

III. Quadrant

(11) $\sin x_{III} = -\sin(x_{III} - 180°)$ $\qquad$ $\tan x_{III} = \tan(x_{III} - 180°)$

$\cos x_{III} = -\cos(x_{III} - 180°)$ $\qquad$ $\cot x_{III} = \cot(x_{III} - 180°)$

IV. Quadrant

(12) $\sin x_{IV} = -\sin(360° - x_{IV})$ $\qquad$ $\tan x_{IV} = -\tan(360° - x_{IV})$

$\cos x_{IV} = \cos(360° - x_{IV})$ $\qquad$ $\cot x_{IV} = -\cot(360° - x_{IV})$

Die Beziehungen (10) bis (12) führen die Winkelfunktionen im II. bis IV. Quadranten auf die entsprechenden Funktionen im I. Quadranten zurück.

■ **Beispiel 12:**

$\cos 152° = -\cos(180° - 152°) = -\cos 28°$

■ **Beispiel 13:**

$\cot 215° = \cot(215° - 180°) = \cot 35°$

■ **Beispiel 14:**

$\tan 312° = -\tan(360° - 312°) = -\tan 48°$

Allgemein:

Um den Wert einer Winkelfunktion zu einem Winkel x $(90° < x < 360°)$ zu ermitteln, sucht man in den Tafeln 13 bzw. 14 den Wert der gleichen Funktion für den Winkel $180° - x$, $x - 180°$ bzw. $360° - x$ auf. Zur schnellen Vorzeichenbestimmung dient die Tabelle auf S. 121.

Man erkennt, daß bei jeder der vier Funktionen jedes Vorzeichen genau zweimal vorkommt. Bei einem gegebenen Funktionswert eines Winkels x findet man infolgedessen für den Winkel (im Bereich von $0° \leqq x < 360°$) zwei Lösungen.

■ **Beispiel 15:**

$\sin x = 0{,}9664$

Der Funktionswert ist positiv, also liegen die Winkel x im I. und II. Quadranten.

$x_{\mathrm{I}} = x \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$; $\qquad x_{\mathrm{II}} = 180^\circ - x \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$.

Aus der Tafel entnimmt man $x = 75{,}1^\circ$.

Demnach ist $x_{\mathrm{I}} = 75{,}1^\circ$; $x_{\mathrm{II}} = 180^\circ - 75{,}1^\circ = 104{,}9^\circ$.

■ **Beispiel 16:**

$\cos x = -0{,}7145$

Der Funktionswert ist negativ, also liegen die Winkel x im II. und III. Quadranten.

$x_{\mathrm{II}} = 180^\circ - x \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ) \qquad x_{\mathrm{III}} = 180^\circ + x \quad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$

Aus der Tafel entnimmt man $x = 44{,}4^\circ$.
Demnach ist $x_{\mathrm{II}} = 180^\circ - 44{,}4^\circ = 135{,}6^\circ$; $x_{\mathrm{III}} = 180^\circ + 44{,}4^\circ = 224{,}4^\circ$.

● **Aufgaben**

Übungen im Tafelrechnen

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die folgenden Funktionswerte!

1. a) sin 12°	**b)** sin 84°	**c)** sin 3°	**d)** sin 29°	
e) sin 37°	**f)** sin 135°	**g)** sin 97°	**h)** sin 200°	
i) cos 2°	**k)** cos 17°	**l)** cos 32°	**m)** cos 51°	
n) cos 68°	**o)** cos 150°	**p)** cos 101°	**q)** cos 213°	(L: a, e, i, m, n, q)
2. a) tan 21°	**b)** tan 58°	**c)** tan 5°	**d)** tan 12°	
e) tan 31°	**f)** tan 120°	**g)** tan 91°	**h)** tan 261°	
i) cot 8°	**k)** cot 13°	**l)** cot 64°	**m)** cot 76°	
n) cot 87°	**o)** cot 110°	**p)** cot 249°	**q)** cot 96°	(L: a, e, i, m, n, q)
3. a) sin 58,11°	**b)** sin 63,44°	**c)** sin 87,15°	**d)** sin 34,26°	
e) sin 19,24°	**f)** sin 147,87°	**g)** sin 219,73°	**h)** sin 331,12°	
i) cos 22,94°	**k)** cos 17,32°	**l)** cos 37,22°	**m)** cos 9,67°	
n) cos 1,12°	**o)** cos 177,13°	**p)** cos 209,65°	**q)** cos 348,48°	(L: a, e, i, m, n, q)
4. a) tan 1,92°	**b)** tan 17,44°	**c)** tan 28,55°	**d)** tan 39,67°	
e) tan 41,72°	**f)** tan 216,36°	**g)** tan 298,47°	**h)** tan 154,41°	
i) cot 14,74°	**k)** cot 26,59°	**l)** cot 34,53°	**m)** cot 43,88°	
n) cot 53,46°	**o)** cot 224,33°	**p)** cot 337,29°	**q)** cot 135,23°	(L: a, e, i, m, n, q)
5. a) sin 0,2°	**b)** sin 0,83°	**c)** sin 1,77°	**d)** sin 2,6°	
tan 0,2°	tan 0,83°	tan 1,77°	tan 2,6°	
e) sin 3,25°	**f)** sin 4,71°	**g)** sin 5,0°	**h)** sin 9,1°	
tan 3,25°	tan 4,71°	tan 5,0°	tan 9,1°	(L: a, c, e, g)

6. Bis zu welchen Winkeln stimmen die Werte der Sinus- und der Tangensfunktion
a) auf vier Dezimalstellen, **b)** auf drei Dezimalstellen überein?
c) Begründen Sie diese Erkenntnisse am Kreis, und formulieren Sie sie! (L: a, b)

7. Verwandeln Sie die sexagesimale Teilung der folgenden Winkel in die dezimale (auf zwei Dezimalstellen)!

a) $16° 18'$ **b)** $38° 24'$ **c)** $79° 39'$ **d)** $24° 25'$
e) $20° 30' 30''$ **f)** $54° 3' 48''$ **g)** $78° 52' 33''$ **h)** $0° 5' 13''$ (L: b, d, f)

8. Rechnen Sie die folgenden Winkelangaben in Grad, Minuten und Sekunden um!

a) $27{,}1°$ **b)** $14{,}9°$ **c)** $34{,}12°$ **d)** $50{,}08°$
e) $68{,}47°$ **f)** $73{,}57°$ **g)** $7{,}93°$ **h)** $40{,}28°$ (L: a, b, c)

9. Berechnen Sie im Bereich $89{,}00° \leqq x \leqq 89{,}10°$ die Werte der Tangensfunktion für Hundertstelgrad durch lineare Interpolation (Tafel 14)! – Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Werten der Tangensfunktion in der untenstehenden Tabelle! Diese sind einer genaueren Tafel entnommen. Bilden Sie die Differenzen zwischen den interpolierten und den in der Tabelle stehenden Funktionswerten!
Beurteilen Sie für verschiedene Intervalle von x die Möglichkeit, bei der Tangensfunktion linear zu interpolieren!

x	89,00°	,01°	,02°	,03°	,04°	,05°	,06°	,07°	,08°	,09°	,10°
$\tan x$	57,29	57,87	58,46	59,06	59,68	60,31	60,95	61,60	62,27	62,96	63,66

10. Suchen Sie die folgenden Funktionswerte auf!

a) $\tan 87{,}88°$ **b)** $\tan 89{,}05°$ **c)** $\cot 1{,}33°$ **d)** $\cot 2{,}87°$ **e)** $\cot 0{,}92°$ (L: a, b)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tafeln 13 und 14 die Winkel, denen die folgenden Funktionswerte zugeordnet sind!

11. **a)** $\sin x = 0{,}2756$ **b)** $\sin x = 0{,}6157$ **c)** $\sin x = 0{,}8829$ **d)** $\sin x = 0{,}4787$
e) $\sin x = 0{,}2990$ **f)** $\sin x = -0{,}5105$ **g)** $\cos x = 0{,}0454$ **h)** $\cos x = 0{,}9921$
i) $\cos x = 0{,}1547$ **k)** $\cos x = -0{,}6858$ **l)** $\cos x = 0{,}7325$ **m)** $\cos x = -0{,}9724$
(L: a, b, c, d)

12. **a)** $\tan x = 0{,}0699$ **b)** $\tan x = 0{,}2679$ **c)** $\tan x = 1{,}483$ **d)** $\tan x = -0{,}9725$
e) $\tan x = 0{,}1495$ **f)** $\tan x = -0{,}4536$ **g)** $\cot x = 1{,}865$ **h)** $\cot x = 0{,}3115$
i) $\cot x = 2{,}592$ **k)** $\cot x = -3{,}420$ **l)** $\cot x = -5{,}730$ **m)** $\cot x = 0{,}0052$
(L: e, f, g, h)

13. **a)** $\sin x = 0{,}6407$ **b)** $\sin x = 0{,}4711$ **c)** $\sin x = 0{,}8308$ **d)** $\sin x = -0{,}6300$
e) $\sin x = 0{,}6070$ **f)** $\sin x = 0{,}0081$ **g)** $\cos x = 0{,}1700$ **h)** $\cos x = 0{,}3473$
i) $\cos x = -0{,}9872$ **k)** $\cos x = 0{,}0037$ **l)** $\cos x = -0{,}0323$ **m)** $\cos x = 0{,}9999$
(L: i, k, l, m)

Rechnen Sie die gefundenen Winkel in sexagesimal geteilte Grad um!

14. Bestimmen Sie die Winkel x, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind! (L: c, d, e)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin x$	0	1	$-0{,}5$	0,3746	$-0{,}7314$	0,1500	$-0{,}0728$
$\cos x$	0	1	-1	0,7071	$-0{,}9336$	0,2358	$-0{,}7005$
$\tan x$	0	1	2	-3	$-0{,}4452$	0,9387	$-0{,}0120$
$\cot x$	0	1	-3	$-16{,}50$	0,1700	$-1{,}319$	$-2{,}439$

Übungen mit dem Rechenstab

15. Stellen Sie am Rechenstab fest, in welchem Bereich die Sinusfunktionsleiter gilt!
Die Unterteilung wechselt. Wie viele Teilbereiche mit verschiedener Unterteilung gibt es?
Beschreiben Sie die Unterteilung! Was bedeutet in jedem dieser Bereiche ein Skalenteil?

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes!

16. a) sin 85° **b)** sin 72° **c)** sin 61,5° **d)** sin 24,3°
e) sin 10,4° **f)** sin 7,42° **g)** sin 5,95° **h)** sin 213,38°
i) sin 323,83° **k)** cos 22° **l)** cos 57,6° **m)** cos 73,27° (L: a, d, g, k)

17. a) tan 43° **b)** tan 37,2° **c)** tan 22,22° **d)** tan 17,29°
e) tan 6,15° **f)** tan 186,35° **g)** tan 42,4° **h)** tan 283,55°
i) tan 354,21° **k)** cot 48° **l)** cot 54,2° **m)** cot 79,66° (L: b, f, k)

18. a) sin 2° **b)** sin 5,5° **c)** sin 1,92° **d)** tan 0,75°
e) tan 1,07° **f)** tan 2,96° **g)** cos 85° **h)** cos 87,3°
i) cos 89,08° **k)** cot 86° **l)** cot 84,9° **m)** cot 88,63° (L: c, g, l)

19. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **3** und **4** mit Hilfe des Rechenstabes!
Vergleichen Sie in den verschiedenen Teilbereichen des Rechenstabes die Genauigkeit mit der der Tafel!

Bestimmen Sie mit Hilfe des Rechenstabes die Winkel, die den folgenden Funktionswerten zugeordnet sind!

20. a) $\sin x = 0{,}99$ **b)** $\sin x = 0{,}87$ **c)** $\sin x = 0{,}654$ **d)** $\sin x = 0{,}358$
e) $\sin x = -0{,}194$ **f)** $\sin x = 0{,}111$ **g)** $\sin x = 0{,}722$ **h)** $\sin x = -0{,}533$
i) $\sin x = 0{,}276$ **k)** $\cos x = 0{,}23$ **l)** $\cos x = 0{,}872$ **m)** $\cos x = 0{,}433$
(L: a, b, c, d)

21. a) $\tan x = 0{,}97$ **b)** $\tan x = 0{,}83$ **c)** $\tan x = 0{,}755$ **d)** $\tan x = 0{,}444$
e) $\tan x = 0{,}123$ **f)** $\tan x = -0{,}337$ **g)** $\tan x = -0{,}842$ **h)** $\tan x = 0{,}229$
i) $\tan x = 0{,}656$ **k)** $\cot x = 0{,}17$ **l)** $\cot x = 0{,}778$ **m)** $\cot x = 0{,}100$
(L: e, f, g, h)

22. a) $\sin x = 0{,}09$ **b)** $\sin x = 0{,}082$ **c)** $\sin x = 0{,}054$ **d)** $\tan x = 0{,}017$
e) $\tan x = 0{,}0323$ **f)** $\tan x = 0{,}0122$ **g)** $\cos x = 0{,}08$ **h)** $\cos x = 0{,}045$
i) $\cos x = 0{,}0226$ **k)** $\cot x = 0{,}07$ **l)** $\cos x = 0{,}061$ **m)** $\cot x = 0{,}0118$
(L: i, k, l, m)

23. Lösen Sie, soweit möglich, die Aufgaben **13** mit Hilfe des Rechenstabes!
Beurteilen Sie die Genauigkeit des Rechenstabes in den verschiedenen Teilbereichen!

Anwendungen

24. Beweisen Sie das folgende Formelsystem ($0° \leqq x \leqq 90°$)!

II. Quadrant	$\sin(180° - x) = \sin x$	$\tan(180° - x) = -\tan x$
	$\cos(180° - x) = -\cos x$	$\cot(180° - x) = -\cot x$
III. Quadrant	$\sin(180° + x) = -\sin x$	$\tan(180° + x) = \tan x$
	$\cos(180° + x) = -\cos x$	$\cot(180° + x) = \cot x$
IV. Quadrant	$\sin(360° - x) = -\sin x$	$\tan(360° - x) = -\tan x$
	$\cos(360° - x) = \cos x$	$\cot(360° - x) = -\cot x$

25. a) Im II. bis IV. Quadranten können die Winkel x auch durch folgende Beziehungen ausgedrückt werden ($0° \leqq x' \leqq 90°$):

$90° + x'$; $270° - x'$; $270° + x'$!

Stellen Sie unter diesen Bedingungen Quadrantenbeziehungen für die vier Winkelfunktionen auf! Zeichnen Sie am Kreis entsprechende Figuren!

b) In welchen Fällen sind die von 90° bzw. 270° ausgehenden Quadrantenbeziehungen den von 180° und 360° ausgehenden Beziehungen (10) bis (12) bzw. denen in Aufgabe 24 vorzuziehen?

c) Führen Sie auf verschiedene Arten auf Funktionen im I. Quadranten zurück: $\sin 110{,}43°$; $\cos 200°$; $\tan 290{,}86°$; $\cot 185°$!

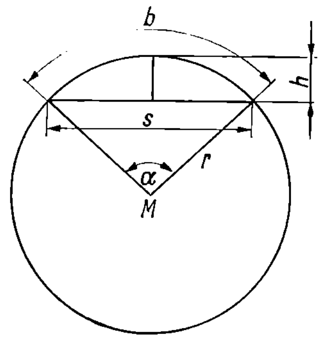


Abb. 4.24.

26. a) Berechnen Sie die zu einem beliebigen Zentriwinkel α gehörige Sehne s, den zugehörigen Kreisbogen $\overset{\frown}{b}$ und die Pfeilhöhe h (Abstand der Bogenmitte von der Sehne) eines Kreises mit dem Radius r als Funktionen des Zentriwinkels, und stellen Sie diese Funktionen graphisch dar (Abb. 4.24.)!

b) Wie lauten die analytischen Darstellungen für die Funktionen $s(\alpha)$; $\overset{\frown}{b}(\alpha)$ und $h(\alpha)$ am Einheitskreis? (L: b)

27. Die Fläche eines Kreissegments über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\overset{\frown}{b}$ begrenzt wird, berechnet man als Differenz aus dem Kreissektor zum Bogen $\overset{\frown}{b}$ und dem gleichschenkligen Dreieck über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Kreismittelpunkt liegt.

a) Wie groß ist die Fläche des Kreissegments zum Zentriwinkel $\alpha = 54°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ m?

b) Berechnen Sie die Pfeilhöhe h des Segments aus Aufgabe a!

c) Von einem Segment sind die Sehne $s = 5{,}40$ m (Spannweite s) und die Pfeilhöhe $h = 0{,}50$ m (Bogenhöhe h) gegeben. Berechnen Sie die Fläche des Kreissegments und den zugehörigen Zentriwinkel!

d) Stellen Sie
1) den Sektor zum Bogen $\overset{\frown}{b}$ eines Einheitskreises,
2) den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks über der Sehne s als Basis, dessen Spitze im Mittelpunkt des Einheitskreises liegt,
3) das Kreissegment über der Sehne s, das von dem Kreisbogen $\overset{\frown}{b}$ begrenzt wird, als Funktionen des Zentriwinkels α analytisch und graphisch dar! (L)

28. Berechnen Sie den Umfang der Breitenkreise, auf denen folgende Orte liegen:

a) Berlin ($\varphi = 52{,}4°$ N; $\lambda = 13{,}1°$ O),
b) Moskau ($\varphi = 55{,}8°$ N; $\lambda = 37{,}6°$ O),
c) Johannesburg (Republik Südafrika) ($\varphi = 26{,}2°$ S; $\lambda = 28{,}1°$ O),
d) La Plata (Argentinien) ($\varphi = 34{,}9°$ S; $\lambda = 57{,}9°$ O),
e) Peking ($\varphi = 39{,}8°$ N; $\lambda = 116{,}5°$ O),
f) Ihr Heimatort!

4.4. Das rechtwinklige Dreieck

Konische Zapfen (auch Kegelzapfen oder kurz „Kegel" genannt) können auf der Drehmaschine durch Schrägstellen des Oberteils am verschiebbaren Werkzeugschlitten, des sogenannten **Längssupports**, gedreht werden (Abb. 4.25. a und b). In der Mathematik bezeichnet man einen solchen Körper als **Kegelstumpf** (Abb. 4.26.). Die Symbole l, D und d werden in der Technik zur Bezeichnung der Größen eines Kegelzapfens verwendet.

Der Einstellwinkel des Längssupports β hängt vom Kegelwinkel α ab; es ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (Abb. 4.25. b).

In der Praxis wird die Gestalt des Kegels nicht durch den Winkel α angegeben, sondern durch die Verjüngung $\frac{1}{x}$ (Fachbezeichnung: Kegel $1 : x$). Das bedeutet, daß der Durchmesser D sich auf einer Zapfenlänge von x mm um 1 mm vermindert

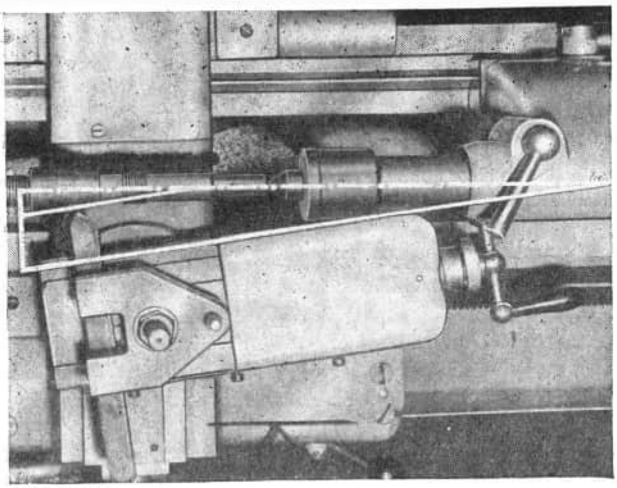


Abb. 4.25. a

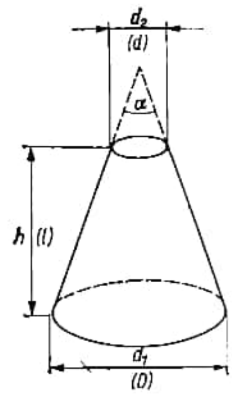
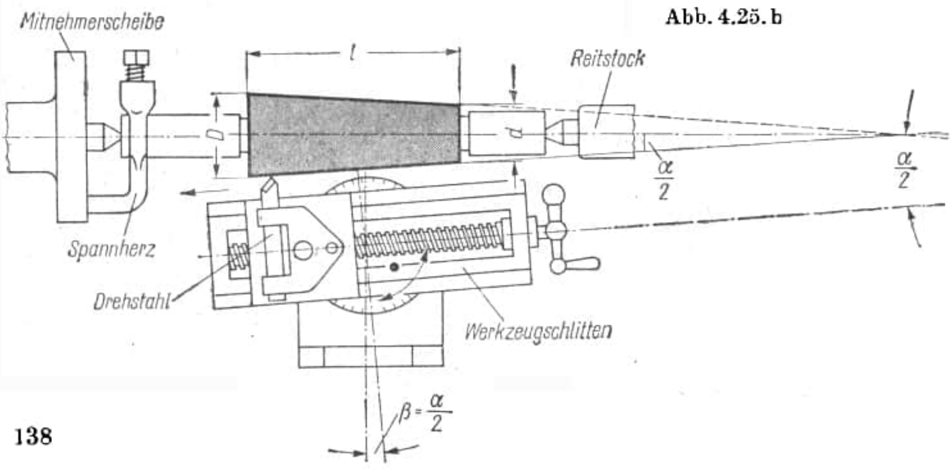


Abb. 4.26.

Abb. 4.25. b



(Abb. 4.27.). Hat der Kegel die Länge l, so verjüngt er sich von D auf d, das heißt um $(D-d)$. Wendet man den Strahlensatz auf die Figur in Abbildung 4.28. an, so gilt:

$$1 : x = (D - d) : l.$$

Die Verjüngung $\frac{1}{x}$ beträgt also $\frac{D-d}{l}$.

Sowohl in Abbildung 4.27. als auch in Abbildung 4.28. sind „Kegel 1 : 4" dargestellt. Für das Arbeiten auf der Drehmaschine ist es nötig, aus der Vorschrift $1 : x$ den Einstellwinkel β des Supports, also letztlich den Kegelwinkel α zu bestimmen.

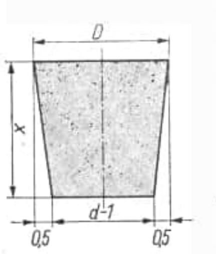


Abb. 4.27.

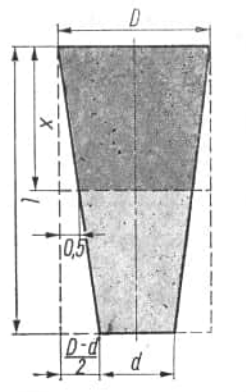


Abb. 4.28

● 1. *Bestimmen Sie geometrisch den Kegelwinkel α, wenn die Verjüngung 1 : 4 beträgt!*
2. *Ein Turm wirft auf eine waagerechte Ebene einen Schatten von der Länge l, während die Sonne unter dem Winkel α gegen die Horizontallinie gesehen wird. Die Turmhöhe h ist aus der Schattenlänge l und dem Winkel α zu bestimmen.*

Die Bearbeitung technischer oder naturwissenschaftlicher Probleme führt häufig zu Aufgaben, in denen in einer Figur Zusammenhänge zwischen Streckenverhältnissen und Winkeln an Dreiecken auftreten. Die rechnerische Lösung solcher Aufgaben ist mit Hilfe der ebenen Trigonometrie[1] möglich.

4.4.1. Die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Die Winkelfunktionen wurden im Abschnitt 4.1. mit Hilfe eines Kreispunktes $P(u; v)$ im Kreis mit dem Radius r erklärt. Das entstehende Dreieck OQP ist rechtwinklig (Abb. 4.4.). In bezug auf den Winkel x werden $\overline{PQ}$ als Gegenkathete und $\overline{OQ}$ als Ankathete bezeichnet.

Am rechtwinkligen Dreieck OQP gelten auf Grund der Erklärungen (1) bis (4), Abschnitt 4.1., die folgenden Beziehungen:

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}; \qquad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}};$$

$$\tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}; \qquad \cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}.$$

In der Abbildung 4.29. werden drei rechtwinklige Dreiecke (ABC, A_1B_1C und A_2B_2C) dargestellt. Die Dreiecke sind ähnlich, deshalb gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_2C}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{a}{c}.$$

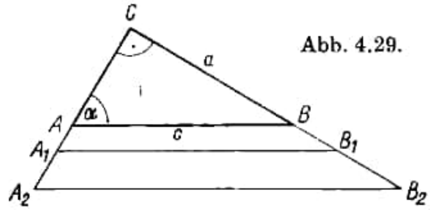


Abb. 4.29.

[1] Tri-gono-metrie (griech.), wörtlich: Drei-Winkel- oder Drei-Eck-Messung; frei: Dreiecksberechnung.

Dieses Verhältnis (Gegenkathete für den Winkel α : Hypotenuse) ist aber nach der Erklärung (1), Abschnitt 4.1., gleich dem Sinus des Winkels α. Das gilt für alle ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel α:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke der Abbildung 4.30. stimmen in der Hypotenuse c überein.

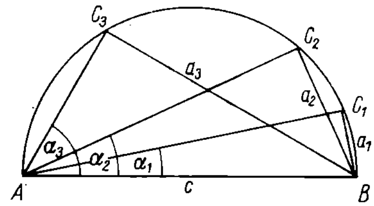


Abb. 4.30.

● *Wo liegen die Scheitel C_n der rechten Winkel aller Dreiecke, die c als Hypotenuse haben?*

Der Winkel mit dem Scheitel A nimmt zu, wenn man vom Dreieck ABC_1 zum Dreieck ABC_2 und von diesem zum Dreieck ABC_3 übergeht. Es gilt die Ungleichung

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Mit dem Winkel α wächst die zugehörige Gegenkathete a_n. Da die Hypotenuse c konstant bleibt, wächst mit dem Winkel auch das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse; es ist

$$\frac{a_1}{c} < \frac{a_2}{c} < \frac{a_3}{c}.$$

Allgemein gilt:

Wenn im rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so nimmt auch der Quotient aus Gegenkathete und Hypotenuse zu. Im rechtwinkligen Dreieck ist also das Verhältnis der Gegenkathete eines Winkels zur Hypotenuse eine Funktion des Winkels. Umgekehrt hängt der Winkel von dem Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse ab. Diese Abhängigkeit wird durch die Sinusfunktion ausgedrückt:

$$(13) \quad \boldsymbol{\sin \alpha = \frac{a}{c}}.$$

▶ **Satz 1: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Sinus eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete dieses Winkels und der Hypotenuse.**

Analoge Betrachtungen können für die Seitenverhältnisse $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ durchgeführt werden. Dabei ergeben sich

$$(14) \quad \boldsymbol{\cos \alpha = \frac{b}{c}},$$

$$(15) \quad \boldsymbol{\tan \alpha = \frac{a}{b}},$$

$$(16) \quad \boldsymbol{\cot \alpha = \frac{b}{a}}.$$

▶ **Satz 2: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kosinus eines Winkels der Quotient aus der Ankathete dieses Winkels und der Hypotenuse.**

▶ **Satz 3: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens eines Winkels der Quotient aus der Gegenkathete und der Ankathete dieses Winkels.**

Satz 4: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Kotangens eines Winkels der Quotient aus der Ankathete und der Gegenkathete dieses Winkels.

Untersuchen Sie auf Grund der Gleichungen 13 *bis* 16 *die Grenzfälle* $\alpha = 0°$ *und* $\alpha = 90°$! *Halten Sie c konstant, und weisen Sie nach, daß die Ergebnisse mit den Werten der Winkelfunktionen für diese Winkel übereinstimmen!*

Auf Grund der Sätze 1 bis 4 gelten im rechtwinkligen Dreieck folgende Beziehungen:

$$a : c = \sin\ \alpha = \cos \beta, \qquad b : c = \cos \alpha = \sin\ \beta,$$
$$a : b = \tan \alpha = \cot \beta, \qquad b : a = \cot \alpha = \tan \beta. \qquad (\gamma = 90°)$$

Drücken Sie diese Beziehungen in Worten aus, und leiten Sie die Formeln (5) *und* (6), *Abschnitt* 4.2., *her!*

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab$. Wir drücken nach (13) und (14) die Katheten durch die Hypotenuse und Winkelfunktionen von α aus:

$$(17) \quad \boldsymbol{A = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha\,.}$$

4.4.2. Berechnung spezieller Funktionswerte

Für die Winkel 30°, 45° und 60° können die Werte der Winkelfunktionen durch die Anwendung von Sätzen aus der Planimetrie berechnet werden. Für den Winkel 30° verwendet man hierbei ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 4.31.). Es ergibt sich:

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = h : a = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\tan 30° = \frac{a}{2} : h = \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

$$\cot 30° = h : \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

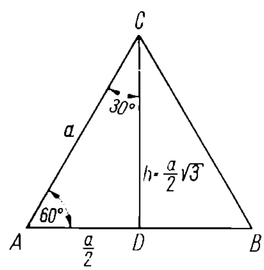


Abb. 4.31.

Bestimmen Sie die Werte der vier Winkelfunktionen für den Winkel 60°, *indem Sie ein gleichseitiges Dreieck (Abb.* 4.31.*) zugrunde legen!*

Die Funktionswerte für den Winkel 45° können mit Hilfe eines Quadrates ermittelt werden (Abb. 4.32.).
Es ergibt sich:

$$\sin 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$
$$\cos 45° = a : d = a : a\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$
$$\tan 45° = a : a = 1;$$
$$\cot 45° = a : a = 1.$$

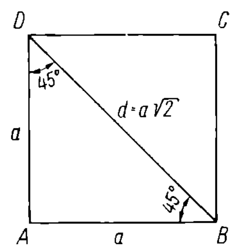


Abb. 4.32.

● *Verwandeln Sie die Funktionswerte für die Winkel 30°, 45° und 60° in Dezimalzahlen! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Angaben in den Tafeln 13 und 14!*

Wir wissen, daß $\tan x$ größer wird als jede angebbare Zahl, wenn x gegen 90° strebt, und ebenso $\cot x$, wenn x gegen 0° strebt. Dafür verwendet man das Symbol:

$$\tan x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 90^\circ$$
$$\cot x \to \infty, \quad \text{falls } x \to 0^\circ,$$

gelesen: „$\tan x$ ($\cot x$) wird größer als jede angebbare Zahl, falls x gegen 90° (gegen 0°) strebt“.

Die auf diese Weise berechneten Funktionswerte und die für 0° und 90° werden in der folgenden Übersicht zusammengefaßt.

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)
$\cot x$	(∞)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Die gedächtnismäßige Beherrschung dieser Funktionswerte ist vorteilhaft. Dabei genügt es, wegen der Komplementbeziehungen (9), wenn man sich nur die Folgen der Sinus- und Tangenswerte einprägt. Für die Sinuswerte kann man dazu die folgende Gedächtnisstütze benutzen:

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$

4.4.3. Die Logarithmen der Winkelfunktionen

Zur Erleichterung trigonometrischer Berechnungen wendet man auch auf die Werte der Winkelfunktionen das Rechnen mit Logarithmen an. Um ein doppeltes Aufschlagen von Werten zu vermeiden (1. Aufschlagen des Funktionswertes, 2. Aufschlagen des Logarithmus des Funktionswertes), wurden die Logarithmen der Winkelfunktionswerte tabellarisch in den Tafeln 2 und 3 des Tafelwerks erfaßt.

Die Tafeln der Logarithmen der Winkelfunktionen sind in gleicher Weise zu handhaben wie die Tafeln der Werte der Winkelfunktionen. Dabei ist zu beachten, daß die Winkelfunktionswerte überwiegend kleiner als 1 sind und somit Logarithmen mit negativen Kennzahlen haben.

■ **Beispiel 17:**

$\sin 23{,}3^\circ = 0{,}3955$

$\lg \sin 23{,}3^\circ = \lg 0{,}3955 = 0{,}5972 - 1$

In den Tafeln 2 und 3 sind alle Logarithmen mit negativer Kennzahl auf die Kennzahl -10 gebracht worden, die aus drucktechnischen Gründen fehlt. Es muß also jeweils -10 ergänzt werden. In Tafel 2 steht zum Beispiel für

lg sin 23,3° der Wert 9,5972; das bedeutet: lg sin 23,3° = 9,5972 − 10.

In der Rechenpraxis subtrahiert man beim Aufschlagen der Logarithmen von der Form 9, . . .; 8, . . .; 7, . . .; usw. im Kopfe die Zahl 10 und erhält 0, . . . −1; 0, . . . −2; 0, . . . −3; usw. Umgekehrt ist zu einem gegebenen Logarithmus mit negativer Kennzahl vor Benutzung der Tafel die Zahl 10 zu addieren. Infolge der dezimalen Teilung des Grades ist die Interpolation dieselbe wie beim Rechnen mit Logarithmen. Aus der Tafel 4 entnimmt man die Logarithmen der Sinus- und Tangenswerte für Winkel von 0° bis 5° und die Logarithmen der Kosinus- und Kotangenswerte von 85° bis 90° mit einer Genauigkeit von Hundertstelgrad unmittelbar, durch Interpolation mit einer Genauigkeit von Tausendstelgrad.

		Werte der Winkelfunktionen (Tafeln 13 und 14)	Logarithmen der Funktionswerte (Tafeln 2, 3 bzw. 4)
Beispiel 18:	sin 21,87°	0,3725	9,5711 — 10 = 0,5711 — 1
Beispiel 19:	cos 31,58°	0,8519	9,9304 — 10 = 0,9304 — 1
Beispiel 20:	tan 69,43°	2,664	0,4257
Beispiel 21:	cot 86,68°	0,0580	8,7635 — 10 = 0,7635 — 2

Beim Rechnen mit den Logarithmen der Werte der Winkelfunktionen von Winkeln über 90° müssen die negativen Vorzeichen außer Betracht gelassen werden. Denn Logarithmen von negativen Zahlen existieren im Bereich der reellen Zahlen nicht. Man muß also in diesen Fällen mit den absoluten Beträgen der Werte der Winkelfunktionen rechnen. Im übrigen gelten dann die gleichen Gesetze, die für das Rechnen mit den Logarithmen bei Winkeln im I. Quadranten erklärt wurden.

Beispiel 22:

lg cos 152°

Der Funktionswert cos 152° ist negativ. Deshalb wird der Logarithmus des Betrages des Winkelfunktionswertes angegeben: $\lg|\cos 152°| = 0{,}9459 - 1$.

Beispiel 23:

$\lg|\tan x| = 0{,}4389 \quad (\tan x < 0)$

In diesem Falle soll der Wert der Winkelfunktion, zu dem der Logarithmus angegeben ist, negativ sein. Man bestimmt zunächst den im I. Quadranten liegenden Winkelwert und erhält $x = 70°$. Unter Berücksichtigung der Vorschrift $\tan x < 0$ findet man als Lösungen:

$x_1 = 180° - x = 110°; \quad x_2 = 360° - x = 290°.$

4.4.4. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

Da im rechtwinkligen Dreieck immer der rechte Winkel gegeben ist, sind zur Bestimmung dieses Dreiecks nur noch zwei Stücke nötig. Dazu können die Hypotenuse, die beiden Katheten, einer der spitzen Winkel, der Flächeninhalt und andere Stücke in geeigneter Zusammensetzung dienen. Beschränken wir uns auf die Seiten und Winkel (primäre Stücke), so sind vier Fälle möglich (Abb. 4.33.).

Gegeben können sein:

1. die Hypotenuse und ein Winkel;
2. eine Kathete und ein Winkel;
3. eine Kathete und die Hypotenuse;
4. die beiden Katheten.

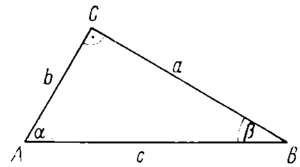


Abb. 4.33.

● *Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung 4.33. alle möglichen Fälle zusammen!*

Die Berechnungen werden in zwei Schritten durchgeführt:

1. Die Aufgabe wird unter Verwendung der allgemeinen Symbole (a, b, c; α, β; A usw.) gelöst (Allgemeine Lösung).
   Dabei müssen oft Winkelfunktionen hinzugezogen werden.
2. Die gegebenen speziellen Zahlenwerte werden verwendet (Zahlenmäßige Lösung).

In den folgenden Beispielen erfahren die Symbole a, b, c und A während der Lösung einen Bedeutungswechsel. Während diese Symbole in der allgemeinen Lösung als Größen verwendet werden, sind sie in der zahlenmäßigen Lösung als Symbole für Zahlenwerte anzusehen.

■ **Beispiel 24:**

(1. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $c = 51{,}90$ m; $\alpha = 52{,}55°$.
Gesucht: **1)** a (in m); **2)** b (in m); **3)** β (in Grad); **4)** A (in m²).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ **2)** $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha$ $b = c \cdot \cos\alpha$

3) $\beta = 90° - \alpha$ **4)** $A = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $a = 51{,}90 \cdot \sin 52{,}55°$
$a = 41{,}21$

2) $b = 51{,}90 \cdot \cos 52{,}55°$
$b = 31{,}56$

3) $\beta = 90° - 52{,}55° = 37{,}45°$

N.	L.	
51,90 sin 52,55°	1,7152 0,8998 — 1	+
a	1.6150	
51,90 cos 52,55°	1,7152 0,7839 — 1	+
b	1,4991	

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 51{,}90^2 \cdot \sin 52{,}55° \cdot \cos 52{,}55°$

$A = 650{,}3$

Die Stücke des Dreiecks sind:

$a = 41{,}21$ m; $b = 31{,}56$ m; $c = 51{,}90$ m;

$\alpha = 52{,}55°$; $\beta = 37{,}45°$; $\gamma = 90°$;

$A = 650{,}3$ m².

N.	L_1	L_2	
$51{,}90^2$	$1{,}7152 \cdot 2$	3,4304	
sin 52,55°		0,8998 − 1	+
cos 52,55°		0,7839 − 1	+
0,5		0,6990 − 1	+
A		2,8131	

4.4.5. Berechnungen am gleichschenkligen Dreieck

Das gleichschenklige Dreieck wird durch seine Symmetrieachse, die zugleich die Höhe h_c auf der Grundlinie ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt (Abb. 4.34.).

Da man das gleichschenklige Dreieck auf das rechtwinklige zurückführen kann, genügen zwei Stücke, um die fehlenden Stücke und den Flächeninhalt zu berechnen. Beschränken wir uns auf die primären Stücke (Basis, Schenkel und einen der Winkel). so können die gegebenen Stücke in folgender Zusammenstellung auftreten:

1. die Basis und ein Winkel,
2. der Schenkel und ein Winkel,
3. die Basis und der Schenkel.

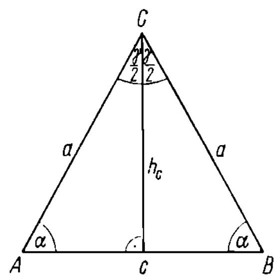


Abb. 4.34.

● *Stellen Sie für das Dreieck in Abbildung* 4.34. *alle möglichen Fälle zusammen!*
Vergleichen Sie mit den möglichen Zusammenstellungen beim rechtwinkligen Dreieck!

■ **Beispiel 25:**

(2. Fall der obigen Zusammenstellung):
Gegeben: $a = 15{,}2$ cm; $\gamma = 76{,}8°$.
Gesucht: **1)** α (in Grad); **2)** c (in cm); **3)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung (a, b, c, A bedeuten Größen):

1) $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$

2) $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : a = \frac{c}{2a}$

$c = 2a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$

3) $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{h_c}{a}$

$h_c = a \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Es kann auch die Gleichung (17) auf die rechtwinkligen Teildreiecke angewandt werden.

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

$A = a^2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Zahlenmäßige Lösung
(a, b, c, A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\alpha = 90° - 38{,}4° = 51{,}6°$

2) $c = 2 \cdot 15{,}2 \cdot \sin 38{,}4°$
$c = 18{,}88$

3) $A = 15{,}2^2 \cdot \sin 38{,}4° \cdot \cos 38{,}4°$
$A = 112{,}4$

N.	L.	
2	0.3010	
15,2	1,1818	+
sin 38,4°	0,7932 — 1	+
c	1,2760	

Die Stücke des Dreiecks sind:
$a = b = 15{,}2$ cm;
$c = 18{,}88$ cm $\approx 18{,}9$ cm;
$\alpha = \beta = 51{,}6°$;
$\gamma = 76{,}8°$;
$A = 112{,}4$ cm².

N.	L_1	L_2	
$15{,}2^2$	1,1818	2,3636	
sin 38,4°		0,7932 — 1	+
cos 38,4°		0,8941 — 1	+
A		2,0509	

4.4.6. Berechnungen am regelmäßigen n-Eck

Von einem Punkt O seien n Strahlen in einer Ebene so gezogen, daß je zwei Strahlen einen Winkel von $\varphi = \frac{360°}{n}$ miteinander bilden. Wird diese Figur, wie in Abbildung 4.35. angedeutet, um den Punkt O um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ gedreht, so kommt sie mit sich selbst zur Deckung (Radialsymmetrie).

Abb. 4.35.

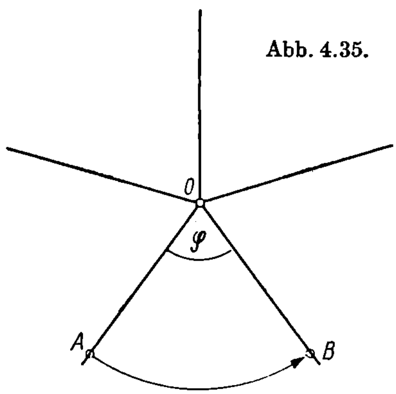
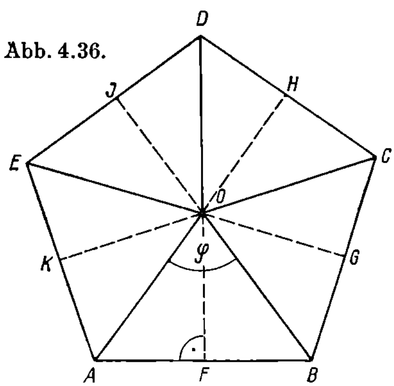


Abb. 4.36.



Wir nennen die Punkte der Strahlen, die durch Drehung zur Deckung gebracht werden, einander entsprechende Punkte. Verbinden wir die entsprechenden Punkte A, B, C, D, E der Reihe nach miteinander, so entsteht ein Vieleck, in dem alle Seiten und Winkel einander gleich sind, denn sie gelangen durch Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{360°}{n}$ zur Deckung (Abb. 4.36.).

Ein Vieleck, dessen Seiten und dessen Winkel einander gleich sind, heißt **regelmäßig**. Dreht man das regelmäßige Vieleck $ABCDE$ um den Punkt O, so gelangen nicht nur seine Seiten und Winkel zur Deckung, sondern es decken sich auch die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ..., $\overline{OE}$ und ebenso die von O auf die Seiten gefällten Lote $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, ..., $\overline{OK}$. Der Punkt O ist demnach von allen Eckpunkten und allen Seiten des regelmäßigen Vielecks jeweils gleich weit entfernt.

Allgemein gilt:

▶ **Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umbeschreiben (Umkreis) und ein Kreis einbeschreiben (Inkreis).**

Die Abbildung 4.37. stellt ein regelmäßiges Achteck dar. Jedes der gleichschenkligen Dreiecke (z.B. $\triangle ABM$) kann als ein Bestimmungsdreieck angesehen werden. Die Berechnung des regelmäßigen Vielecks läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, ein Bestimmungsdreieck mit den Mitteln der Trigonometrie zu berechnen. Wir können dabei die Ergebnisse der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks anwenden.

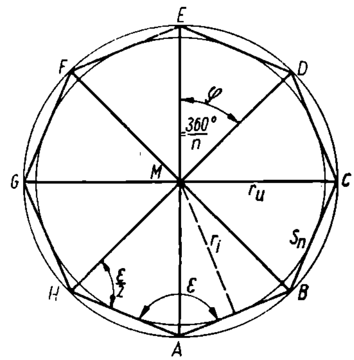


Abb. 4.37.

Beispiel 26:

Gegeben ist die Seite $s_{12} = 6{,}41$ dm des regelmäßigen Zwölfecks. Wie groß ist der Winkel des Zwölfecks? Wie groß sind die Radien des Inkreises und des Umkreises sowie der Umfang und der Flächeninhalt?

Das Bestimmungsdreieck für diese Aufgabe zeigt die Abbildung 4.38.

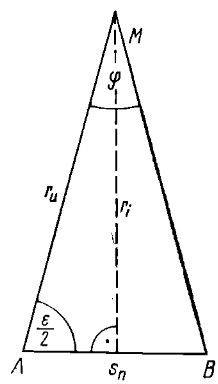


Abb. 4.38.

Gegeben: $s_{12} = 6{,}41$ dm; $\varphi = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Gesucht: **1)** ε (in Grad); **2)** r_u (in dm); **3)** r_i (in dm);
4) u_{12} (in dm); **5)** A_{12} (in dm²).

Allgemeine Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Größen):
(Zur Vereinfachung wird im folgenden $s_{12} = s$ gesetzt.)

1) $\frac{\varepsilon}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ **2)** $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2} : r_u$ **3)** $\cot\frac{\varphi}{2} = r_i : \frac{s}{2}$

$\varepsilon = 180^\circ - \varphi$ $\qquad r_u = \frac{s}{2\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}$ $\qquad r_i = \frac{s}{2}\cdot\cot\frac{\varphi}{2}$

4) $u_{12} = 12s$ **5)** $A_{12} = 12\,\frac{s\cdot r_i}{2} = 6\,s\,r_i = 3\,s^2\cot\frac{\varphi}{2}$

Zahlenmäßige Lösung (r_u, r_i, u_{12}, s_{12}, A_{12} bedeuten Zahlenwerte):

1) $\varepsilon = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ **2)** $r_u = \frac{6{,}41}{2\cdot\sin 15^\circ}$ **3)** $r_i = \frac{6{,}41\cdot\cot 15^\circ}{2}$

$r_u = 12{,}39$ $\qquad r_i = 11{,}96$

4) $u_{12} = 12\cdot 6{,}41$ **5)** $A_{12} = 3\cdot 6{,}41^2\cdot\cot 15^\circ$

$u_{12} = 76{,}92$ $\qquad A_{12} = 460$

Die Stücke des Zwölfecks sind:

$s_{12} = 6{,}41$ dm; $\varepsilon = 150^\circ$; $r_u = 12{,}39$ dm; $r_i = 11{,}96$ dm; $u_{12} = 76{,}92$ dm; $A_{12} = 460$ dm².

Mit der Konstruktion und Berechnung regelmäßiger Vielecke hat sich im Altertum der griechische Mathematiker und Physiker ARCHIMEDES beschäftigt. Er lebte von 287 bis 212 in Syrakus. ARCHIMEDES berechnete die Vielecke allerdings planimetrisch, da ihm die Mittel der Trigonometrie noch nicht zur Verfügung standen. Er verwendete die Methode der einem Kreis ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke auch, um das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises zu bestimmen. Mit Hilfe des 96-Ecks fand er, daß dieses Verhältnis zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegt. Er gab $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ als Näherungswerte für die Zahl π an. Um seine Leistung richtig zu würdigen, müssen wir bedenken, daß er weder die Dezimalzahlen noch das Stellenwertsystem kannte. ARCHIMEDES suchte seine wissenschaftlichen Erkenntnisse auch für die Zwecke der Praxis nutzbar zu machen.
Gegen Ende des 18. Jahrhunderts stellte einer der berühmtesten deutschen Mathematiker, CARL FRIEDRICH GAUSS, eine allgemeine Theorie der regelmäßigen Vielecke auf. In diesem Zusammenhang entdeckte der damals Neunzehnjährige, daß das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Die Theorie der regelmäßigen Vielecke ist in dem bedeutenden Werk von GAUSS *Disquisitiones arithmeticae* (Arithmetische Untersuchungen) dargestellt, das 1801 in Leipzig erschien.

4.4.7. Anwendungsaufgaben

Bei der Lösung von Anwendungsaufgaben mit Hilfe der Trigonometrie sucht man zunächst nach einem für die Berechnung geeigneten rechtwinkligen Dreieck.

■ **Beispiel 27:**

Welchen Anstiegswinkel hat eine Schraube mit metrischem Gewinde, deren Gewindedurchmesser $d = 11{,}4$ mm und deren Ganghöhe $h = 2{,}0$ mm beträgt?

Lösung: Aus Abbildung 4.39. ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{h}{\pi d}$$

$$\tan\alpha = \frac{2{,}0\ \text{mm}}{\pi \cdot 11{,}4\ \text{mm}}.$$

Mit dem Rechenstab berechnet man $\tan\alpha = 0{,}0559$.
Aus Tafel 14 ergibt sich $\alpha = 3{,}2°$.

Ergebnis: Die Schraube hat einen Anstiegswinkel von $3{,}2°$.

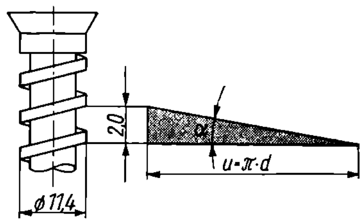


Abb. 4.39.

■ **Beispiel 28:**

Der in Abbildung 4.40. dargestellte Bolzen soll gedreht werden. Wie groß sind Supporteinstellwinkel und Kegelwinkel? (Vergleichen Sie auch mit den Ausführungen auf S. 138!)

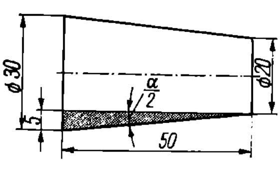


Abb. 4.40.

Lösung: Allgemein gilt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{D-d}{2} : l = \frac{1}{2} \cdot \frac{D-d}{l}$,

das heißt, der Tangens des halben Kegelwinkels ist gleich der halben **Verjüngung.**

Im vorliegenden Fall ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10} = 0{,}1000.$

Aus Tafel 14 ergibt sich $\frac{\alpha}{2} \approx 5{,}71°$ und damit $\alpha \approx 11{,}42°$.

Ergebnis: Der Supporteinstellwinkel beträgt etwa 5,71°; der Kegelwinkel etwa **11,42°.**

■ **Beispiel 29:**

Bei der Deutschen Reichsbahn werden Steigungen durch Schilder der in Abbildung **4.41. a** dargestellten Form gekennzeichnet. Die Aufschrift besagt, daß auf 40 m waagerechte Entfernung 1 m senkrechte Erhebung kommt; die gleiche Steigung hält auf den nächsten 830 m Streckenlänge an (Abb. 4.41. b; nicht maßstäblich). Wie groß ist der Höhenunterschied H zwischen Anfang A und Ende C_1 dieses Streckenabschnittes?

Lösung (mit Hilfe der trigonometrischen Methode):

$$\tan\alpha = \frac{1}{40};\ \sin\alpha = \frac{H}{830\text{ m}}$$

$$H = 830 \cdot \sin\alpha \text{ m}.$$

Es ist nicht notwendig, Winkel α zu bestimmen; wir können vielmehr $\sin\alpha$ durch $\tan\alpha$ ausdrücken.

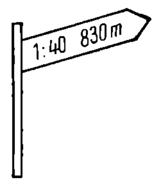


Abb. 4.41. a

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{40}}{\sqrt{1+\frac{1}{1600}}} = \frac{1}{\sqrt{1601}}.$$

Dann ergibt sich $H = \frac{830}{\sqrt{1601}}$ m.

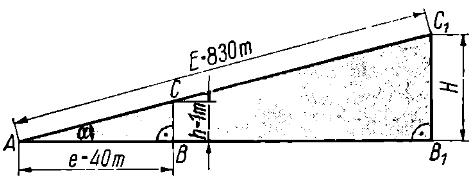


Abb. 4.41. b

Mit dem Rechenstab berechnet man $H \approx 20{,}75$ m.

Ergebnis: Der Höhenunterschied beträgt rund 20,8 m.

● ***Lösen Sie die Aufgabe auch, ohne daß Sie die trigonometrische Methode anwenden, und vergleichen Sie die Ergebnisse!***

● **Aufgaben**

Übungen im Tafelrechnen

1. a) $\lg\sin 19{,}5°$ **b)** $\lg\sin 31{,}67°$ **c)** $\lg\sin 93{,}5°$ **d)** $\lg\sin 17°\,42'$
e) $\lg\cos 73{,}92°$ **f)** $\lg\cos 37{,}57°$ **g)** $\lg|\cos 224{,}7°|$ **h)** $\lg\cos 45°\,22'\,45''$ (L)

2. a) $\lg\tan 21{,}28°$ **b)** $\lg\tan 50{,}68°$ **c)** $\lg\tan 187{,}55°$ **d)** $\lg\tan 47°\,33'$
e) $\lg\cot 38{,}95°$ **f)** $\lg\cot 45{,}08°$ **g)** $\lg|\cot 101{,}54°|$ **h)** $\lg\cot 2°\,5'\,12''$ **(L: a, b, c)**

3. Stellen Sie die folgenden Funktionen graphisch dar!

a) $y = \lg \sin x$ **b)** $y = \lg \cos x$ **c)** $y = \lg \tan x$ **d)** $y = \lg \cot x$

Anleitung: Benutzen Sie die Tafelwerte für $x = 15°$; $30°$; $45°$; $60°$; $75°$! Verwenden Sie für **a** und **b** bzw. für **c** und **d** ein gemeinsames Koordinatensystem! Beschreiben Sie den Verlauf jeder Funktion!

Untersuchen Sie insbesondere die folgenden Fragen:

1) Wie verlaufen die Funktionen in der Umgebung von $x = 0°$ und $x = 90°$?
2) Für welche Winkel ändern sich die einzelnen Funktionen besonders stark, für welche besonders wenig?
3) Haben die Kurven zu **a** und **b** bzw. die zu **c** und **d** Symmetrieeigenschaften?

4. Welche Beziehungen bestehen zwischen

a) $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$; **b)** $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \tan x$; **c)** $\lg \sin x$, $\lg \cos x$ und $\lg \cot x$?

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Beziehungen für einige selbstgewählte Beispiele $\lg \tan x$ und $\lg \cot x$ aus $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$!

Gibt es eine entsprechende Beziehung auch zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$? (L)

Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen die Winkel aus dem ersten Quadranten!

5. a) $\lg \sin x = 0{,}6093 - 1$ **b)** $\lg \sin \alpha = 0{,}3775 - 1$ **c)** $\lg \sin \gamma = 0{,}5717 - 1$
d) $\lg \cos \beta = 0{,}2700 - 1$ **e)** $\lg \cos \alpha = 0{,}9900 - 1$ **f)** $\lg \cos \beta = 0{,}2356 - 1$ (L)

6. a) $\lg \tan x = 0{,}1387$ **b)** $\lg \tan \beta = 0{,}8003$ **c)** $\lg \tan \gamma = 0{,}6486 - 1$
d) $\lg \cot \gamma = 0{,}3688$ **e)** $\lg \cot \beta = 0{,}1888$ **f)** $\lg \cot \alpha = 0{,}9800$ (L)

7. Bestimmen Sie zu den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel x!

a) $\lg \sin x = 0{,}8810 - 1$ $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}9750 - 2$ $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9996 - 1$ $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}3075 - 1$ $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}2764 - 1$ $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 0{,}9000 - 2$ $(\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}7718$ $(\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 1{,}2700$ $(\cot x < 0)$ (L: **a**, **b**, **c**)

Aus der Geometrie

8. Berechnen Sie die Seiten, Winkel und Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ABC $(\gamma = 90°)$, von denen folgende Stücke gegeben sind!

a) $a = 12{,}7$ cm; $b = 4{,}9$ cm **b)** $a = 54{,}85$ m; $b = 74{,}54$ m
c) $a = 420$ m; $c = 645$ m **d)** $a = 14{,}54$ cm; $c = 29{,}08$ cm
e) $c = 125$ m; $\alpha = 35{,}60°$ **f)** $c = 10{,}50$ cm; $\beta = 40{,}30°$
g) $a = 63$ mm; $\alpha = 40{,}30°$ **h)** $b = 80{,}70$ m; $\beta = 62{,}30°$ (L: **a**, **b**, **c**)

9. In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 4.42.) sind die folgenden Stücke gegeben.

a) $c = 18{,}50$ m; $p = 4{,}20$ m **b)** $c = 18{,}50$ m; $h = 4{,}30$ m
c) $h = q = 3{,}5$ cm **d)** $h = 22{,}42$ m; $b = 25{,}30$ m
e) $p = 10{,}2$ cm; $\alpha = 37{,}50°$ **f)** $c = 4{,}20$ m; $q = 2{,}53$ m
g) $a = 60{,}5$ cm; $h = 15{,}2$ cm **h)** $p = 18{,}18$ m; $q = 3{,}88$ m

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die rechtwinkligen Dreiecke! (L: e, f, g)

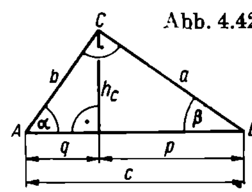


Abb. 4.42.

10. In einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 4.43.) sind die folgenden Stücke gegeben.

a) $c = 125$ m; $h_c = 85$ m **b)** $a = 3{,}70$ m; $c = 2{,}50$ m
c) $a = 5{,}70$ m; $c = 3{,}50$ m **d)** $c = 19{,}64$ cm; $\gamma = 55{,}40°$
e) $c = 75{,}92$ dm; $\alpha = 52{,}62°$ **f)** $h_c = 4{,}786$ m; $\gamma = 32{,}10°$

Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt, und konstruieren Sie die gleichschenkligen Dreiecke! (L: a, b, c)

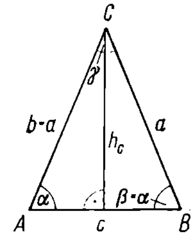


Abb. 4.43.

11. Von einem Rhombus sind die Seite $a = 12{,}5$ cm und der Winkel $\alpha = 45°$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen des Rhombus und den Flächeninhalt!

12. In einem regelmäßigen n-Eck ist **a)** der Umkreisradius r_u, **b)** der Inkreisradius r_i gegeben. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des regelmäßigen n-Ecks

im Falle **a)** $A_n = n r_u^2 \sin\frac{180°}{n} \cdot \cos\frac{180°}{n}$, im Falle **b)** $A_n = n r_i^2 \tan\frac{180°}{n}$ ist! (L: a)

13. Berechnen Sie Seite, In- und Umkreisradius sowie Flächeninhalt für folgende regelmäßigen n-Ecke!

a) $n = 7$; $s = 13{,}2$ cm **b)** $n = 10$; $r_u = 23{,}5$ cm
c) $n = 5$; $r_i = 17{,}4$ dm **d)** $n = 8$; $A = 23{,}47$ m² (L: a, b)

14. Ein Punkt P liege a cm vor der Aufrißtafel, b cm vor der Kreuzrißtafel und c cm über der Grundrißtafel; der Schnittpunkt der Rißachsen sei O.

a) Welche Winkel bildet die Verbindungsstrecke $\overline{PO}$ mit den Projektionen $\overline{P'O}$, $\overline{P''O}$ sowie $\overline{P'''O}$?

b) Bestimmen Sie die Winkel für $a = 3$, $b = 2$ und $c = 2{,}5$ sowohl mit Hilfe des darstellend-geometrischen als auch mit Hilfe des trigonometrischen Verfahrens! (L: a)

Aus der Physik und der Technik

15. Am äußeren Ende eines Tragarms mit Zugstange hängt eine Last $F = 400$ kp (Abb. 4.44.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Zugstange wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; 45°; 60° der Zugstange gegen den Tragarm!

b) Handelt es sich um Zug- oder um Druckkräfte?

c) Berechnen Sie trigonometrisch die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel! (L)

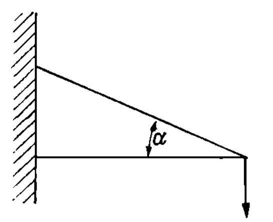


Abb. 4.44.

16. Am Ende eines Tragarms mit Stütze hängt eine Last $F = 400$ kp (Abb. 4.45.).

a) Bestimmen Sie geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung Größe und Richtung der auf den Tragarm und auf die Stütze wirkenden Teilkräfte für die Neigungswinkel $\alpha = 30°$; 45°; 60° der Stütze gegen den Tragarm!

b) Werden Tragarm und Stütze auf Zug oder auf Druck beansprucht?

c) Berechnen Sie die Größe der Teilkräfte für die angegebenen Neigungswinkel!

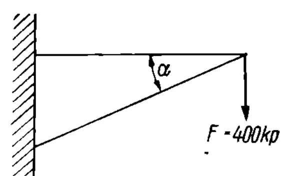


Abb. 4.45.

17. Ein Ausleger soll 2000 kp tragen und ist mit einem Seil von 5000 kp Tragfähigkeit abzufangen (Abb. 4.46.). Wie groß muß das Maß x mindestens werden, wenn die Tragfähigkeit des Seiles nicht überschritten werden soll?

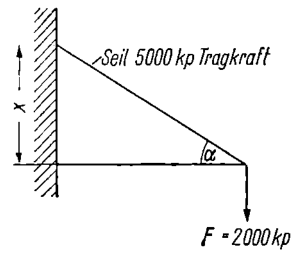


Abb. 4.46.

18. Eine Kiste, die 220 kg wiegt, wird mittels einer Schrotleiter abgeladen (Abb. 4.47.).
Bei welchem Winkel α beginnt die Kiste zu gleiten, wenn zur Überwindung der Reibung 17 kp erforderlich sind? (L)

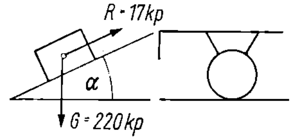


Abb. 4.47.

19. Eine Kiste, die 96 kg wiegt, soll auf einer unter 25° gegen die Horizontalebene geneigten Holzrampe hochgezogen werden.

a) Bestimmen Sie trigonometrisch und geometrisch die Abhängigkeit des Hangabtriebs H und des Normaldrucks N vom Neigungswinkel α der Rampe!

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Gleitreibung die Größe der erforderlichen Zugkraft! Die Reibungszahl für Holz auf Holz ist im Mittel $\mu = 0{,}18$.

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel ϱ der Rampe, bei welchem der Hangabtrieb H gleich der Reibung R wird (Reibungswinkel ϱ)!

d) Zeigen Sie, daß der Tangens des Reibungswinkels ϱ gleich der Reibungszahl μ ist! (L: a, b)

20. Aus einem Rundstahl mit dem Durchmesser $d = 60$ mm soll ein regelmäßiges Fünfkant gefräst werden (Abb. 4.48.).
Bestimmen Sie

a) die Seite s_5 des Fünfkants,

b) den prozentualen Verlust an Querschnittsfläche! (L: a)

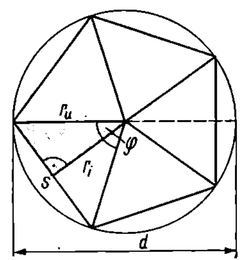


Abb. 4.48.

Lichtbrechung

Fallen Lichtstrahlen unter dem Winkel α aus Luft in ein optisch dichteres Medium ein, so werden sie von ihrer ursprünglichen Richtung zum Einfallslot hin derart gebrochen, daß das Verhältnis des Sinus des Einfallswinkels α zum Sinus des Brechungswinkels β gleich der Brechungszahl n des optischen Mediums gegenüber Luft ist.

Brechungsgesetz: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$

Bei umgekehrtem Strahlengang ist die Brechungszahl $n' = \dfrac{1}{n}$.

21. Ein Lichtstrahl fällt unter dem Einfallswinkel $\alpha = 15°; 30°; 45°; 60°; 75°; 90°$ aus Luft in Wasser. Die Brechungszahl für den Übergang von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$.

a) Berechnen Sie die zugehörigen Brechungswinkel β!

b) Stellen Sie die einander zugeordneten Werte von Einfalls- und Brechungswinkel in einer Tafel zusammen!

22. Beim Durchgang durch eine planparallele Platte wird ein Lichtstrahl parallel verschoben.

a) Wie groß ist die Parallelverschiebung, die ein Lichtstrahl durch eine planparallele Glasplatte von $d = 10$ cm Dicke bei einem Einfallswinkel $\alpha = 60°$ erfährt ($n = \frac{3}{2}$)?

b) Bestimmen Sie den Gang des Lichtstrahls geometrisch!

c) Stellen Sie die Verschiebung des Lichtstrahls als Funktion des Einfallswinkels α graphisch dar! (L: a)

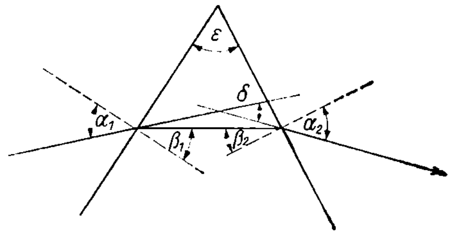


Abb. 4.49.

23. Auf ein Glasprisma (Brechungszahl $n = \frac{3}{2}$), dessen brechende Flächen einen Winkel $\varepsilon = 60°$ bilden, fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 45°$ ein (Abb. 4.49.).

a) Bestimmen Sie geometrisch den Gang des Lichtstrahls!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gesamtablenkung δ des Lichtstrahls! (L: b)

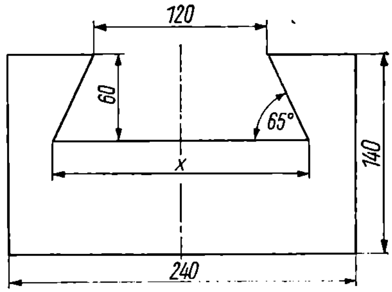


Abb. 4.50.

24. Unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion versteht man denjenigen spitzen Einfallswinkel im optisch dichteren Medium, für den der Brechungswinkel im optisch dünneren Medium 90° wird. Wie groß ist der Grenzwinkel der totalen Reflexion für den Übergang von

a) Wasser in Luft ($n' = \frac{3}{4}$),

b) Glas in Luft ($n' = \frac{2}{3}$)? (L: a)

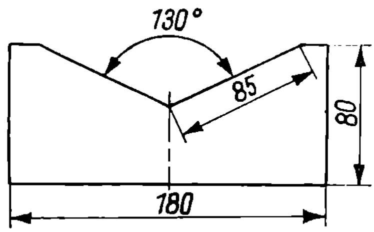


Abb. 4.51.

25. Berechnen Sie für die in Abbildung 4.50. dargestellte Schwalbenschwanzführung das Maß x! (L)

26. Berechnen Sie für das in Abbildung 4.51. dargestellte Führungsprisma die fehlenden Maße! (L)

4.5. Additionstheoreme

● *Bestimmen Sie, ohne die Tafel zu benutzen:* sin 45°, cos 45°, sin 30°, cos 30°*!*

● *Ohne Benutzung der Tafel sind exakt zu bestimmen:* sin 75°, cos 75°.

Da $75° = 45° + 30°$ ist, könnte die Aufgabe gelöst werden, wenn es Beziehungen zwischen $\sin(45° + 30°)$, $\cos(45° + 30°)$ einerseits und $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\sin 30°$, $\cos 30°$ andererseits gäbe.

Allgemein handelt es sich um die folgende Aufgabe: Gegeben sind die Werte der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion für zwei Argumente x und y. Es sollen die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion der Summe der Argumente, $\sin(x + y)$ bzw. $\cos(x + y)$, durch die Sinus- und Kosinuswerte der Einzelargumente, $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$ und $\cos y$, dargestellt werden. Wir leiten jetzt entsprechende Beziehungen her.

4.5.1. Funktionswerte der Summe zweier Winkel

Die Aufgabe werde unter der Voraussetzung gelöst, daß die Winkel x und y im I. Quadranten liegen und ihre Summe kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bleibt.

Wir gehen von der Figur eines Kreises mit beliebigem Radius um den Punkt A aus (Abb. 4.52.). Die Winkel x und y sind als Zentriwinkel eingezeichnet. Von C aus sind die Lote mit den Fußpunkten B bzw. E auf die beiden Schenkel des Winkels x gefällt. Es ist $\sphericalangle BCE = \sphericalangle x$. Durch E sind die Parallelen zu AB und zu BC gezeichnet; sie schneiden BC in D beziehungsweise die Verlängerung von AB in F.

Die Dreiecke ABC, AEC, AFE und DEC sind rechtwinklig. Es gilt $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$ und $\overline{BD} = \overline{EF}$.

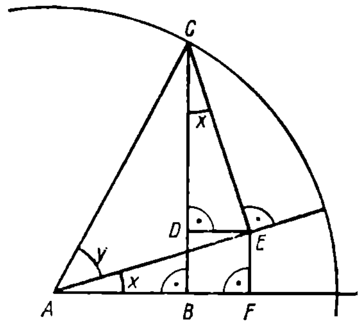


Abb. 4.52.

Im Dreieck ABC gilt:

$$\sin(x+y) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}+\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$$

Wir erweitern den ersten Bruch mit $\overline{AE}$, den zweiten mit $\overline{CE}$.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

Nun gilt im Dreieck AFE: $\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \sin x$,

im Dreieck DEC: $\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}} = \cos x$ und

im Dreieck AEC: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \cos y$, $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \sin y$.

Schließlich ergibt sich

(18) $\boldsymbol{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y}$.

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}-\overline{BF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{BF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}.$$

(19) $\boldsymbol{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y}$.

● *Begründen Sie die Umformungen im einzelnen!*

Die Beziehungen (18) und (19) drücken den Sinus und den Kosinus einer Winkelsumme durch den Sinus und den Kosinus der Summanden aus. Sie heißen die **Additionstheoreme**[1] der Sinus- beziehungsweise Kosinusfunktion. Das zu ihrer Herleitung benutzte Verfahren heißt „Kreismethode".

● *Formulieren Sie die Beziehungen* (18) *und* (19) *mit Worten!*

● *Lösen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die eingangs gestellte Aufgabe!*

Das Additionstheorem der Tangensfunktion finden wir als Folgerung aus den Additionstheoremen der Sinus- und der Kosinusfunktion. Dividieren wir die Gleichung (18) durch die Gleichung (19) (die Fälle $x + y = \frac{2k+1}{2}\pi$, $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ und $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ werden durch die einschränkende Bedingung auf S. 154, 3. Zeile von oben, ausgeschlossen), so ergibt sich

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch das Produkt $\cos x \cos y$ dividieren und berücksichtigen, daß der Quotient von Sinus und Kosinus ein und desselben Winkels den Tangens dieses Winkels ergibt, so erhalten wir

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}},$$

$$\text{(20)} \quad \mathbf{\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}}.$$

● *Formulieren Sie die Beziehung* (20) *mit Worten!*

4.5.2. Funktionswerte der Differenz zweier Winkel

Für manche Rechnungen sind Beziehungen nützlich, welche die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion der Differenz der Argumente, $\sin(x-y)$ beziehungsweise $\cos(x-y)$, durch die Sinus- und Kosinuswerte der Einzelargumente, $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ und $\cos y$, darstellen. Die Winkel x, y und die Differenz $x - y$ mögen im I. Quadranten liegen. Wir setzen

$$x + y = z,$$

dann ist $x = z - y$. Setzen wir $x = z - y$ in (18) und (19) ein, so erhalten wir

$$\sin z = \sin(z-y)\cos y + \cos(z-y)\sin y,$$
$$\cos z = \cos(z-y)\cos y - \sin(z-y)\sin y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir $\sin(z-y)$, indem wir die erste

[1] θεώρημα (griech.), Lehrsatz

Gleichung mit $\sin y$, die zweite mit $\cos y$ multiplizieren und dann beide Gleichungen addieren (Verfahren der gleichen Koeffizienten). Wir erhalten

$$\sin z \sin y + \cos z \cos y = \cos (z - y) \cdot (\sin^2 y + \cos^2 y)\,.$$

Wegen $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ wird

$$\cos (z - y) = \cos z \cos y + \sin z \sin y\,.$$

Ebenso ergibt sich

$$\sin (z - y) = \sin z \cos y - \cos z \sin y\,.$$

● *Führen Sie die Herleitung durch!*

Wir hätten auch mit $y = z - x$ rechnen können, was formal zu den gleichen Ergebnissen führt.
Wir ändern die Bezeichnungen, indem wir x an Stelle von z setzen, dann stimmen die gefundenen Beziehungen mit den in den Formelsammlungen enthaltenen auch äußerlich überein.

(21) $\mathbf{\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y}$

(22) $\mathbf{\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$

● *Drücken Sie die Beziehungen* (21) *und* (22) *mit Worten aus!*

Aus den Gleichungen (21) und (22) erhalten wir in der gleichen Weise, wie wir die Gleichung (20) aus den Gleichungen (18) und (19) gewonnen haben, die Beziehung

(23) $\mathbf{\tan (x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}}\,.$

● *Führen Sie die Herleitung durch!*

● *Drücken Sie die Formel* (23) *in Worten aus!*

4.5.3. Erweiterung des Gültigkeitsbereiches für die Additionstheoreme

Die Beziehungen (18) bis (23) haben wir unter der Voraussetzung hergeleitet, daß alle vorkommenden Winkel im I. Quadranten liegen. Die Formeln sind aber auch allgemeingültig. Wir führen jedoch den Beweis allgemein nicht durch, sondern zeigen nur in einem Fall, wie der Gültigkeitsbereich für die Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion erweitert werden kann. Die Winkel x und y mögen im I. Quadranten, ihre Summe aber im II. Quadranten liegen.
Es sei also

$$x < \frac{\pi}{2}\,,\ y < \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2} < x + y < \pi\,.$$

Dann sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln (18) und (19) für die Winkel

$$\frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} - y, \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} - y = \pi - (x + y)$$

erfüllt.

$$\sin [\pi - (x + y)] = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\cos [\pi - (x + y)] = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Auf Grund bestehender Quadrantenbeziehungen setzen wir

$$\sin [\pi - (x + y)] = \sin (x + y); \quad \cos [\pi - (x + y)] = - \cos (x + y);$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \qquad \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y; \qquad \cos \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$$

und erhalten

$$\sin (x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y;$$

$$- \cos (x + y) = \sin x \sin y - \cos x \cos y$$

oder wieder

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Die Gleichungen (18) und (19) gelten also auch unter der Bedingung, daß die Winkelsumme im II. Quadranten liegt.

▶ **Zusammenstellung der Additionstheoreme:**

$$\mathbf{\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y}$$

$$\mathbf{\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y}$$

$$\mathbf{\tan (x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}}$$

● **Aufgaben**

1. Leiten Sie die Formeln (18) und (19) aus speziellen Figuren entsprechend Abbildung 4.52. für folgende Fälle her („Kreismethode"):

a) x, y im I. Quadranten, $x + y$ im II. Quadranten;

b) x oder y und $x + y$ im II. Quadranten. (L: a, b)

2. Beweisen Sie, daß im schiefwinkligen Dreieck die Beziehungen

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad \text{und} \quad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$$

gelten!

Verwenden Sie diese Beziehungen, um die Additionstheoreme der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion herzuleiten („Dreiecksmethode")!

Geben Sie die Bedingungen an, unter denen die Herleitung gilt! (L)

3. Leiten Sie aus der Figur der Abbildung 4.53. das Additionstheorem der Sinusfunktion her!
Anleitung: Gehen Sie davon aus, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke PAC und PBC gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks PAB ist, und benutzen Sie, um Winkel einzuführen, entsprechende Gleichungen für den Flächeninhalt des Dreiecks! (L)

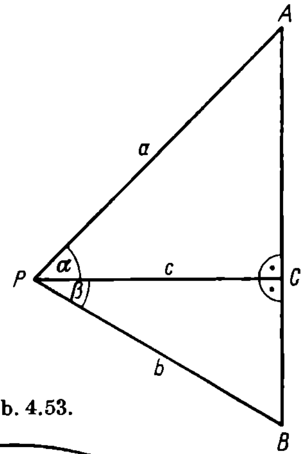


Abb. 4.53.

4. Zeichnen Sie eine entsprechende Figur, wie die der vorigen Aufgabe, für den Fall, daß ein Winkel stumpf ist, und leiten Sie daraus das Additionstheorem der Sinusfunktion her!

5. Bestimmen Sie das Additionstheorem der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion unter Verwendung der Quadrantenbeziehung $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$! (L)

6. Leiten Sie die Formeln (21) und (22) geometrisch
   a) aus der Figur nach Abbildung 4.54. („Kreismethode"),
   b) aus der Figur nach Abbildung 4.55. („Dreiecksmethode") her! (L: b)

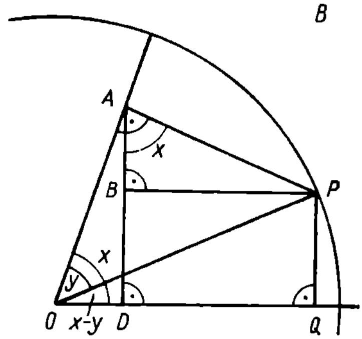


Abb. 4.54.

7. Leiten Sie die Gleichung (21) aus der Figur der Abbildung 4.55. in der gleichen Weise her wie die Gleichung (18) aus der Figur der Abbildung 4.52.!

8. Zeigen Sie, daß die Gleichungen (18) und (19) auch gelten, wenn y im IV. Quadranten liegt ($y < 0$)! (L)

9. Ohne Beweis haben wir mitgeteilt, daß die Gleichungen (18) und (19) für beliebige Winkel gelten. Leiten Sie unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (21) und (22) aus den Gleichungen (18) und (19) her! (L)

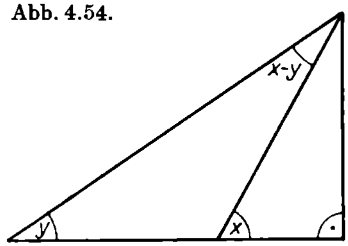


Abb. 4.55.

10. Setzen Sie in den Gleichungen (18) bis (23) $y = x$, und diskutieren Sie die Ergebnisse!

11. Bestimmen Sie exakt, ohne die Tafel zu benutzen: $\tan 75°$; $\sin 15°$; $\cos 22{,}5°$; $\sin 7{,}5°$! (L)

12. Berechnen Sie $\sin(x + y)$ und $\sin(x - y)$ aus $\sin x$ und $\sin y$!

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	c) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	d) $\sin x = 0{,}8$
$\sin y = \frac{1}{2}$	$\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sin y = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	$\sin y = 0{,}3$

Geben Sie Werte für die Winkel x, y, $x + y$ und $x - y$ an, welche die Bedingungen erfüllen! (L: a, b)

13. Berechnen Sie $\cos(x + y)$ und $\cos(x - y)$ aus $\cos x$ und $\cos y$!

a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cos x = -\frac{1}{4}$ d) $\cos x = -0{,}2$

$\cos y = \frac{1}{2}$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $\cos y = \frac{3}{4}$ $\cos y = 0{,}9$

Geben Sie Werte für die Winkel x, y, $x + y$ und $x - y$ an, welche die Bedingungen erfüllen! (L: a, b)

14. Berechnen Sie $\tan(x + y)$ und $\tan(x - y)$ aus $\tan x$ und $\tan y$!

a) $\tan x = \sqrt{3}$ b) $\tan x = 2 + \sqrt{3}$ c) $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d) $\tan x = 3$

$\tan y = 1$ $\tan y = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\tan y = -1$ $\tan x = 2$

Geben Sie Werte für die Winkel x, y, $x + y$ und $x - y$ an, welche die Bedingungen erfüllen! (L: a, b)

4.6. Das schiefwinklige Dreieck

4.6.1. Der Sinussatz und die Flächenformel

Die trigonometrische Methode findet auch bei Berechnungen in schiefwinkligen Dreiecken Anwendung. Ein schiefwinkliges Dreieck läßt sich durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Diese sind jedoch im allgemeinen nicht kongruent. Die Höhe h_c des Dreiecks ABC läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken (Abb. 4.56.):

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}; \qquad h_c = a\sin\beta;$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}; \qquad h_c = b\sin\alpha.$$

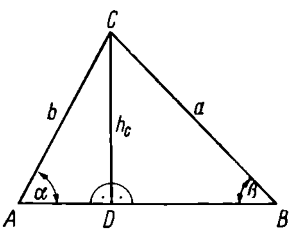


Abb. 4.56.

Setzt man die Ausdrücke für h_c einander gleich, so wird h_c eliminiert, und es ergibt sich

$$a\sin\beta = b\sin\alpha$$

oder, als Proportion geschrieben,

(24) $\boldsymbol{a : b = \sin\alpha : \sin\beta}$.

Entsprechend findet man, wenn man das Dreieck durch die Höhe h_a bzw. h_b zerlegt,

(25) $\boldsymbol{b : c = \sin\beta : \sin\gamma}$

und

(26) $\boldsymbol{c : a = \sin\gamma : \sin\alpha}$.

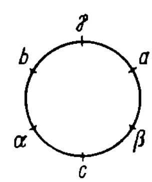


Abb. 4.57.

Die Gleichungen (25) und (26) kann man auch aus (24) durch zyklische Vertauschung erhalten. Man ordnet die Seiten und Winkel des Dreiecks auf einem Kreis so an, wie sie beim Umlaufen des Dreiecks aufeinander folgen (Abb. 4.57.). Für jeden lateinischen und griechischen Buchstaben der Formel (24) hat man den lateinischen bzw. griechischen Buchstaben zu setzen, der auf ihn folgt, wenn man den Kreis im positiven Drehsinn durchläuft.

Auch in dem stumpfwinkligen Dreieck in Abbildung 4.58. erhält man durch Eliminieren der Höhe h_c die Gleichung (24)

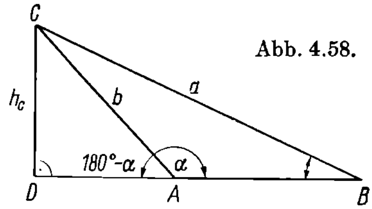


Abb. 4.58.

$$h_c = a \sin \beta; \quad h_c = b \sin (180° - \alpha).$$

Wegen $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$ geht die zweite Gleichung über in $h_c = b \sin \alpha$.
Die Gleichungen (24), (25) und (26) werden als **Sinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

▶ **In einem Dreieck verhalten sich zwei Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.**

Man kann den Sinussatz auch als fortlaufende Proportion schreiben:

(27) $\boldsymbol{a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma}$.

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, hat man bei der Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Sinussatz die Doppeldeutigkeit des Winkels zu berücksichtigen. Zu einem Sinuswert gehören stets ein Winkel im I. und ein Winkel im II. Quadranten. Beide Winkel sind zunächst als Rechenergebnisse möglich, und es bedarf einer besonderen Untersuchung, ob sie auch beide als Lösungen der betreffenden Aufgabe in Frage kommen.
Durch den Sinussatz werden Berechnungen im schiefwinkligen Dreieck vereinfacht, da nicht erst die entsprechende Höhe berechnet werden muß.

● *Was ergibt sich aus den Gleichungen* (24) *bis* (26) *im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?*

Der Sinussatz kann auch in der Form

(28) $$\boldsymbol{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

geschrieben werden.
Der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels hängt mit dem Umkreisradius r zusammen.
Nach dem Peripheriewinkelsatz ist in Abbildung 4.59.:

$$\sphericalangle BMC = 2\alpha; \quad \sphericalangle BMD = \alpha (0° < \alpha < 90°).$$

Im Dreieck MBD gilt dann

$$\sin \alpha = \frac{a}{2} : r \text{ und nach Umformung } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r.$$

In Verbindung mit (28) ergibt sich:

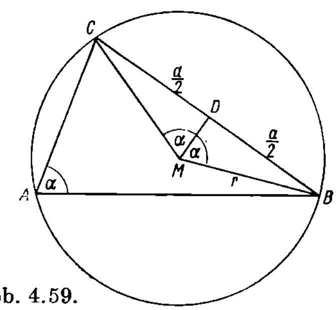


Abb. 4.59.

(29) $$\boldsymbol{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r}.$$

▶ **Im Dreieck ist der Quotient aus einer Seite und dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Umkreisdurchmesser.**

● 1) *Zeichnen Sie eine Figur für den Fall, daß α ein stumpfer Winkel ist!*
2) *Welcher Sonderfall ergibt sich aus (29), wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist?*

Aus der Formel $A = \frac{1}{2} c h_c$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhält man mit Hilfe von $h_c = b \cdot \sin \alpha$ durch Substitution

(30) $\boldsymbol{A = \frac{1}{2} b c \sin \alpha}$.

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich

(31) $A = \frac{1}{2} c a \sin \beta$ und (32) $A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$.

▶ **Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.**

● 1) *Was ergibt sich aus den Gleichungen* (30) *bis* (32) *im Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks?*
2) *Leiten Sie aus Gleichung* (30) *die Gleichung* (17) *her!*

Eine weitere Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$$\boldsymbol{A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}}.$$

● *Weisen Sie die Richtigkeit dieser Formel nach!*
Stellen Sie die Beziehungen für A auf, in denen die Seite a bzw. b verwendet wird!

■ **Beispiel 1:**

Gegeben: $a = 20$ cm; $b = 8$ cm; $\alpha = 117°$.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** β; **3)** γ; **4)** r (in cm); **5)** A (in cm²).
Konstruieren Sie zunächst das Dreieck mit dem Umkreis (Maßstab 1 : 2), und ermitteln Sie durch Messung näherungsweise die Werte für c, β, γ und r!

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und *A bedeuten Größen):*

1) $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

3) $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

4) $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha}$$

5) $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin \beta = \frac{8 \cdot \sin 117°}{20}$

$$\sin \beta = \frac{8 \cdot \sin 63°}{20}$$

$\beta_1 = 20{,}88°$
$\beta_2 = 180° - 20{,}88° = 159{,}12°$

Da ein Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel haben kann, entfällt β_2.

2) $\gamma = 180° - 137{,}88° = 42{,}12°$

3) $c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 117°}$

$c = \frac{20 \cdot \sin 42{,}12°}{\sin 63°}$

$c = 15{,}06$

4) $r = \frac{20}{2 \cdot \sin 117°}$

$r = \frac{10}{\sin 63°}$

$r = 11{,}22$

5) $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 80 \cdot \sin 42{,}12°$

$A = 53{,}66$

Ergebnisse:

$a = 20$ cm;	$b = 8$ cm;	$c = 15{,}06$ cm $\approx 15{,}1$ cm;
$\alpha = 117°$;	$\beta = 20{,}88°$;	$\gamma = 42{,}12°$.
$r = 11{,}22$ cm $\approx 11{,}2$ cm;	$A = 53{,}66$ cm²;	

● *Vergleichen Sie die rechnerischen Ergebnisse mit den Meßwerten aus der Konstruktion!*

■ **Beispiel 2:**

Gegeben: $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $r = 8{,}2$ cm.
Gesucht: **1)** c (in cm); **2)** α; **3)** β; **4)** γ; **5)** A (in cm²).

Konstruieren Sie das Dreieck, und sagen Sie die Ergebnisse näherungsweise voraus! Wie viele Lösungen gibt es?

Allgemeine Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Größen):

1) $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$

$\sin \alpha = \frac{a}{2r}$

2) $\frac{b}{\sin \beta} = 2r$

$\sin \beta = \frac{b}{2r}$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

4) $\frac{c}{\sin \gamma} = 2r$

$c = 2r \sin \gamma$

5) $A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c, r und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\sin \alpha = \frac{7{,}6}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}8}{8{,}2}$

$\alpha_1 = 27{,}61°$

$\alpha_2 = 180° - 27{,}61° = 152{,}39°$

2) $\sin \beta = \frac{6{,}4}{2} : 8{,}2 = \frac{3{,}2}{8{,}2}$

$\beta_1 = 22{,}97°$

$\beta_2 = 180° - 22{,}97° = 157{,}03°$

Rechnerisch ergeben sich je zwei Werte für α und β. Deshalb muß untersucht werden, welche Winkel möglich sind. Das Dreieck könnte folgende Winkel enthalten:

(1) α_1 und β_1 (2) α_1 und β_2 (3) α_2 und β_1 (4) α_2 und β_2.

Man erkennt sofort, daß (4) nicht möglich ist, da das Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel enthalten kann. Aber auch (2) entfällt, weil $\alpha + \beta < 180°$ sein muß. Dagegen widersprechen (1) und (3) der Winkelsummenbedingung nicht und müssen für die weiteren Berechnungen berücksichtigt werden.

$\alpha_1 = 27{,}61°$	$\alpha_2 = 152{,}39°$
$\beta_1 = 22{,}97°$	$\beta_1 = 22{,}97°$

3) $\gamma_1 = 180° - 50{,}58°$ 4) $c_1 = 2 \cdot 8{,}2 \cdot \sin 129{,}42°$ 5) $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 129{,}42°$

$\gamma_1 = 129{,}42°$ $c_1 = 16{,}4 \ \sin 50{,}58°$ $A_1 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 50{,}58°$

$c_1 = 12{,}67$ $A_1 = 18{,}79$

$\gamma_2 = 180° - 175{,}36°$ $c_2 = 16{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$ $A_2 = 3{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot \sin 4{,}64°$

$\gamma_2 = 4{,}64°$ $c_2 = 1{,}326$ $A_2 = 1{,}967$

Ergebnisse:

(I) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 12{,}7$ cm; $\alpha = 27{,}6°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 129{,}4°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 18{,}79$ cm²

(II) $a = 7{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 1{,}3$ cm; $\alpha = 152{,}4°$;
$\beta = 23{,}0°$; $\gamma = 4{,}6°$; $r = 8{,}2$ cm; $A = 1{,}97$ cm²

● *Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Ihrer Konstruktion des Dreiecks!*

4.6.2. Der Kosinussatz

Sind in einem schiefwinkligen Dreieck die drei Seiten bzw. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, so kann der Sinussatz nicht zur Berechnung der fehlenden Stücke herangezogen werden. In diesem Fall führt die Anwendung einer weiteren trigonometrischen Beziehung zum Ziel, die im folgenden allgemein hergeleitet wird. Das Dreieck ABC in Abbildung 4.60. wird durch die Höhe h_c in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt

$$h_c^2 = b^2 - q^2 \quad \text{und} \quad h_c^2 = a^2 - p^2.$$

Gleichsetzen und Umordnen ergibt

$$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2.$$

Wegen $p = c - q$ wird

$$a^2 = b^2 + (c-q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$$

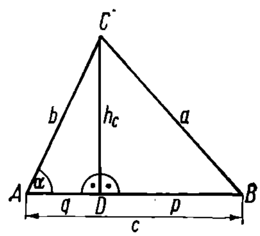


Abb. 4.60.

Der Hypotenusenabschnitt q läßt sich durch eine Seite und eine Winkelfunktion ausdrücken. Im Dreieck ADC ist $\cos \alpha = \frac{q}{b}$, woraus folgt

$$q = b \cos \alpha.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$ ein, so erhält man

(33) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die beiden weiteren Gleichungen

(34) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ und (35) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Die drei Gleichungen (33), (34) und (35) werden als **Kosinussatz** der ebenen Trigonometrie bezeichnet.

● *Weisen Sie die Richtigkeit der Gleichungen* (34) *und* (35) *durch entsprechende Zerlegung des Dreiecks ABC mit Hilfe der Höhen h_a bzw. h_b nach!*

Ist Winkel α stumpf, so wird $p = c + q$ (Abb. 4.61.). Weiterhin ist

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{q}{b}, \text{ also } q = b\cos(180° - \alpha).$$

Wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ wird $q = -b\cos\alpha$.

Man findet:

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + (c+q)^2 - q^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b\cos\alpha)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

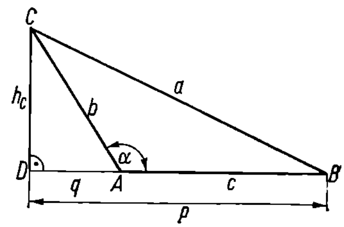


Abb. 4.61.

Man erhält also ebenfalls Gleichung (33).
Da der Kosinus im I. und II. Quadranten verschiedene Vorzeichen hat, ist die Berechnung eines Dreieckwinkels nach dem Kosinussatz eindeutig.
Durch die Anwendung des Kosinus- und des Sinussatzes wird es überflüssig, in jedem Einzelfall das Dreieck in zwei rechtwinklige zu zerlegen. Mit Hilfe des Sinus- und des Kosinussatzes lassen sich alle Stücke eines Dreiecks berechnen, wenn drei voneinander unabhängige Stücke gegeben sind. Die folgende Übersicht zeigt die Verwendung der beiden Sätze.

	Gegebene Stücke	Lösung
(1)	*ssw*	Sinussatz
(2)	*sww*	Sinussatz
(3)	*sws*	Kosinussatz und Sinussatz
(4)	*sss*	Kosinussatz und Sinussatz

Bei jeder Aufgabe muß untersucht werden, ob und wieviele Lösungen vorhanden sind **(Determination)**. Die Determination wird erleichtert, wenn man neben dem Rechengang die geometrische Konstruktion ausführt.
Werden die unbekannten Stücke des schiefwinkligen Dreiecks logarithmisch berechnet, so hat der Kosinussatz gegenüber dem Sinussatz den Nachteil, daß die logarithmische Rechnung unterbrochen werden muß.

■ **Beispiel 3:**

Gegeben: $a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm.
Gesucht: **1)** α; **2)** β; **3)** γ; **4)** A (in cm²).

Allgemeine Lösung (a, b, c und A bedeuten Größen):

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

2) $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

4) $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Zahlenmäßige Lösung (a, b, c und A bedeuten Zahlenwerte):

1) $\cos\alpha = \dfrac{169 + 225 - 576}{2 \cdot 13 \cdot 15}$

$\cos\alpha = -\dfrac{182}{390} = -\dfrac{7}{15} = -0{,}4667$

$\alpha = 180° - 62{,}18°$

$\alpha = 117{,}82°$

2) $\sin\beta = \dfrac{13 \cdot \sin 117{,}82°}{24}$

$\sin\beta = \dfrac{13 \cdot \sin 62{,}18°}{24}$

$\beta_1 = 28{,}62°$

$\beta_2 = 180° - 28{,}62° = 151{,}38°$

Der Winkel β_2 entfällt als Lösung, da bereits Winkel α stumpf ist.

3) $\gamma = 180° - 146{,}44° = 33{,}56°$

4) $A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 13 \cdot \sin 33{,}56°$

$A = 86{,}24$

Ergebnisse:

$a = 24$ cm; $b = 13$ cm; $c = 15$ cm;

$\alpha = 117{,}8°$; $\beta = 28{,}6°$; $\gamma = 33{,}6°$;

$A = 86{,}24\ \text{cm}^2$.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt folgender Dreiecke, und kontrollieren Sie die Ergebnisse, gegebenenfalls maßstäblich verkleinert, durch Konstruktion!

a) $a = 4$ cm, $\beta = 43°$, $\gamma = 55°$
b) $a = 5{,}6$ cm, $\beta = 83{,}8°$, $\gamma = 26{,}5°$
c) $c = 1{,}46$ m, $\alpha = 20{,}2°$, $\beta = 74{,}3°$
d) $b = 8{,}5$ cm, $\beta = 44{,}2°$, $\gamma = 54{,}5°$ (L: a, b, c)

2. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt folgender Dreiecke! Achten Sie dabei darauf, ob der gegebene Winkel der größeren oder der kleineren Seite gegenüberliegt!

a) $a = 12{,}15$ m, $b = 27{,}83$ m, $\beta = 109{,}24°$
b) $b = 4{,}3$ cm, $c = 4{,}6$ cm, $\gamma = 20°\,35'$
c) $a = 30{,}4$ cm, $c = 27{,}8$ cm, $\alpha = 67°\,23'$
d) $b = 24{,}9$ m, $c = 17{,}2$ m, $\beta = 117°\,4'$ (L: e, f, g)

3. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks, von dem $\alpha = 81{,}91°$, $\beta = 41{,}54°$ und $r = 258{,}4$ cm gegeben sind! (L)

4. a) Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks durch die Gleichung $A = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ gegeben ist!

b) Berechnen Sie aus den Winkeln $\alpha = 56{,}79°$ und $\beta = 62{,}89°$ sowie dem Umkreisradius $r = 12$ cm den Flächeninhalt des Dreiecks!

5. Warum können die Seiten $a = 8$ cm, $b = 5$ cm und der Flächeninhalt $A = 22\ \text{cm}^2$ nicht Bestimmungsstücke eines Dreiecks sein?

a) Begründen Sie geometrisch, daß dies nicht möglich ist!
Anleitung: Untersuchen Sie die funktionale Abhängigkeit des Flächeninhalts vom Winkel γ, wenn dieser von 0° bis 180° zunimmt!

b) Wie zeigt sich beim trigonometrischen Lösungsverfahren, daß die Aufgabe keine Lösung hat? (L)

6. Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel sowie die Dreiecksfläche!

a) $a = 6{,}1$ cm, $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 63{,}2°$
b) $a = 123{,}5$ m, $b = 134{,}2$ m, $\gamma = 102{,}16°$
c) $b = 17{,}18$ m, $c = 13{,}85$ m, $\alpha = 74{,}32°$ (L: a, b)

7. Beweisen Sie mit den Mitteln der Trigonometrie, daß die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten teilt!

8. Drei Kreise mit den Radien

a) $r_1 = 6{,}5$ cm; $r_2 = 5{,}2$ cm; $r_3 = 3{,}8$ cm
b) $r_1 = 9{,}5$ cm; $r_2 = 7{,}6$ cm; $r_3 = 5{,}1$ cm
c) $r_1 = 24{,}2$ cm; $r_2 = 15{,}6$ cm; $r_3 = 21{,}8$ cm

berühren einander gegenseitig von außen. Welchen Winkel schließen je zwei Zentralen miteinander ein? (Die Zentrale zweier Kreise ist die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte.) (L: a, b)

9. Ein gleichseitiges Dreieck wird in Kavalierperspektive abgebildet.

a) Bestimmen Sie im Bilddreieck die Winkel 1) darstellend-geometrisch, 2) trigonometrisch!
b) Führen Sie die gleiche Aufgabe an einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Basiswinkel 75° durch! (L: a)

Aus der Physik und der Technik

10. Ein Leitungsmast wird unter einem Winkel von 105° mit 70 kp und 40 kp Zug beansprucht (Abb. 4.62.).
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch Größe und Richtung der Resultierenden! (L)

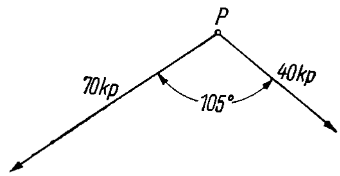


Abb. 4.62.

11. Der 5,20 m hohe Mast am Ende einer elektrischen Grubenbahn ist durch eine waagerechte Seilspannkraft von 1020 kp belastet und durch ein schräges Drahtseil am Boden gegen Biegung verankert (Abb. 4.63.). Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch

a) die Spannkraft im Ankerseil,
b) die Belastung des Mastfundamentes (Gewicht des Mastes: $F = 800$ kp)! (L)

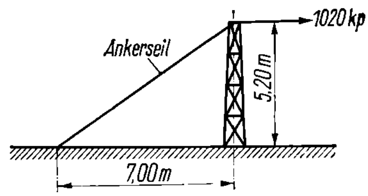


Abb. 4.63.

12. Ein Drehkran trägt am Auslegerkopf B eine Last $F = 3000$ kp. Welche Spannkräfte treten in der Strebe S und in der Zugstange Z auf (Abb. 4.64.)? Sind es Zug- oder Druckkräfte?

13. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe 12 für

a) $F = 6000$ kp; $\overline{AB} = 6000$ mm; $\overline{BC} = 5000$ mm; $\overline{AC} = 2000$ mm;
b) $F = 4000$ kp; $\overline{AB} = 3000$ mm; $\overline{BC} = 2000$ mm; $\overline{AC} = 1500$ mm! (L: a)

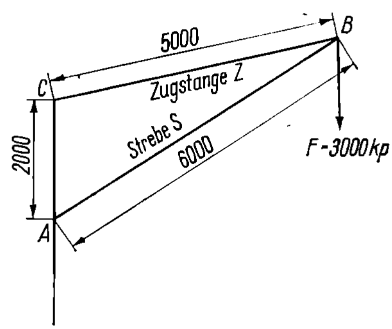


Abb. 4.64.

14. Drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene liegen, greifen in einem Punkte P an und halten sich das Gleichgewicht.

a) $F_1 = 50$ kp, $F_2 = 60$ kp, $F_3 = 80$ kp
b) $F_1 = 720$ kp, $F_2 = 315$ kp, $F_3 = 555$ kp

Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein? (L: a)

15. In einem Bergwerk sind von demselben „Stoß“ (Wand) eines Schachtes aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende „Strecken“ (Gänge) vorgetrieben worden, deren Eingänge um 4 m voneinander entfernt liegen (Grundriß der Schachtanlage: Abb. 4.65.). Die erste Strecke ist 350 m lang und verläuft senkrecht zur Schachtwand. Die zweite Strecke ist 420 m lang und verläuft unter einem Winkel von 125° gegen die Schachtwand. Die Enden beider Strecken sollen durch eine dritte Strecke miteinander verbunden werden.

a) Wie lang wird die Verbindungsstrecke?

b) In welchen Richtungen ist die Verbindungsstrecke von den beiden Streckenenden vorzutreiben, wenn sie von den Endpunkten aus gleichzeitig in Angriff genommen werden soll?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung! (L)

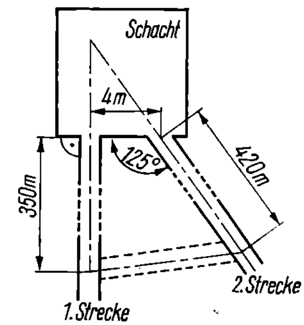


Abb. 4.65.

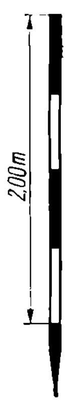
4.7. Anwendungen aus dem Vermessungswesen

Bei Messungen im Gelände unterscheidet man Längen- oder Streckenmessungen, Winkelmessungen und Höhenmessungen.

4.7.1. Streckenmessungen

Punkte werden im Gelände meist durch lotrecht aufgestellte Fluchtstäbe (Abb. 4.66.) bezeichnet. Zur Festlegung von Strecken werden zwei oder auch mehrere Fluchtstäbe verwendet.

Strecken werden im ebenen Gelände mit Stahlmeßbändern entweder abgesetzt (Abb. 4.67.a) oder fortgesetzt (Abb. 4.67.b) gemessen. Häufig verwendet man auch 5,00 m lange Meßlatten, mit denen fortgesetzt gemessen wird. Ist das Gelände geneigt, so wird die horizontale Entfernung zweier Punkte A und B durch Staffel-



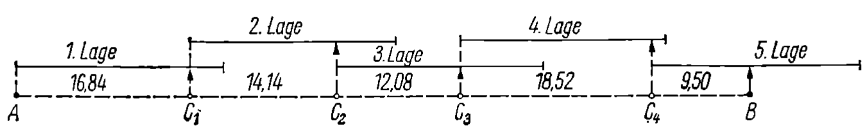


Abb. 4.67. a

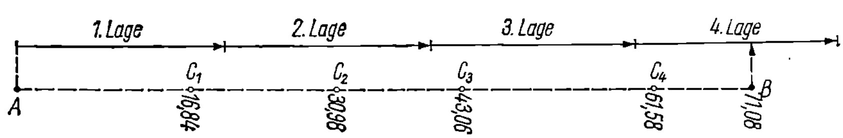


Abb. 4.67. b

Abb. 4.66.

messung bestimmt (Abb. 4.68.). Man hält in A eine Meßlatte mittels Wasserwaage horizontal und lotet ihren Endpunkt mit dem Senklot auf die Abhangfläche nach C hinunter. Hier legt man die zweite Meßlatte horizontal an usw. Im Gebirge oder nicht begehbarem Gelände können Entfernungen optisch gemessen werden.

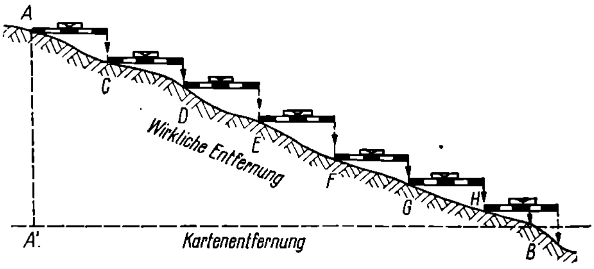


Abb. 4.68.

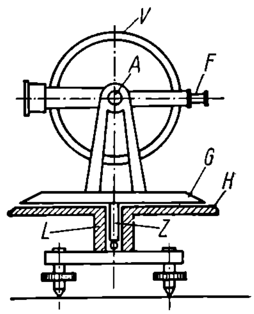


Abb. 4.69.

4.7.2. Winkelmessungen

Das wichtigste Instrument für Winkelmessungen im Gebirge ist der **Theodolit** (Abb. 4.69.; schematische Darstellung). Ein in drei Punkten gelagertes und durch Stellschrauben horizontal einstellbares Untergestell trägt den Horizontalkreis H mit Kreisteilung (neue Teilung 400^g, alte Teilung $360°$). Im Lager L des Fußes dreht sich mit dem Zapfen Z die Grundplatte G des Obergestells. Auf dieser ist um die (horizontal liegende) Kippachse A drehbar das Zielfernrohr F befestigt. Die Größe des Winkels, um den das Zielfernrohr beim Anpeilen eines Geländepunktes aus der Anfangslage in horizontaler Richtung gedreht werden muß, wird mit Hilfe der auf der Grundplatte G angebrachten Marke am Horizontalkreis H abgelesen; die Drehung des Fernrohres in der Vertikalrichtung wird an dem senkrecht zur Kippachse A stehenden Höhen- oder Vertikalkreis V gemessen. Weitere Geräte zur Winkelmessung sind zum Beispiel der **Feldwinkelmesser** und das **Winkelprisma**.
Für die Winkelgrößen sind für den Vollkreis 400 Grad neuer Teilung festgesetzt. Der rechte Winkel wird also in 100 Teile (Neugrad oder Gon) statt in 90 Teile (Altgrad) geteilt.
Zur Umrechnung dienen die folgenden Beziehungen.

Neugrad in Altgrad	Altgrad in Neugrad
$100^g = 90°$	$90° = 100^g$
$1^g = (\frac{9}{10})°$	$1° = (\frac{10}{9})^g$
$n^g = \frac{9}{10} \cdot n°$	$a° = \frac{10}{9} \cdot a^g$

■ **Beispiele:**

1) $34{,}26^g = 0{,}9 \cdot 34{,}26° \approx 30{,}83°$
2) $86{,}58° = \frac{10}{9} \cdot 86{,}58^g = 96{,}20^g$

Neben der Unterteilung des Neugrades in Dezimalgrade ist auch die Zählung in Minuten und Sekunden in Gebrauch. Die Einheit 1^g hat 100 Minuten (100^c), und 1 Minute hat 100 Sekunden (100^{cc}).

4.7.3. Das Vorwärtseinschneiden

Ein Punkt kann in der Ebene entweder durch seine Abstände von zwei festen Punkten festgelegt werden (Dreieckverfahren) oder durch Parallelen zu den Achsen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes (orthogonales Aufnahmeverfahren; Koordinatensystem).

Beim Dreieckverfahren geht man von einer Standlinie oder Basis $\overline{AB} = c$ aus (Abb. 4.70.). Ein Punkt C (Neupunkt) wird folgendermaßen angeschlossen. Man mißt die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = \beta$. Durch die drei Stücke c, α und β ist das Dreieck ABC bestimmt, die Abstände $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ können nach der trigonometrischen Methode berechnet werden. Das Verfahren ist in der Feldmessung als **Vorwärtseinschneiden** bekannt.

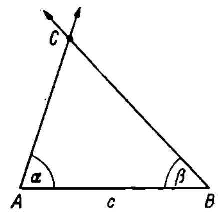


Abb. 4.70.

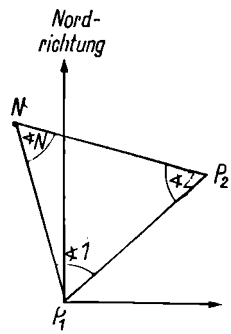


Abb. 4.71.

Beispiel 3:

Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist zu 30,37 m bestimmt worden. Sie bildet mit der Nordrichtung den Winkel 48,8° (Abb. 4.71.). Die Winkel, die durch die Strecke $\overline{P_1P_2}$ und durch die beiden Visierlinien zum Neupunkt (P_1N bzw. P_2N) gebildet werden, betragen: $\sphericalangle\, 1 = 62{,}72^\circ$ und $\sphericalangle\, 2 = 58{,}07^\circ$. Zu berechnen sind die Entfernungen $\overline{P_1N}$ und $\overline{P_2N}$.

Lösung: Innerhalb der Berechnung werden für die Strecken nur die Maßzahlen der Strecken eingesetzt:

1) $\sphericalangle\, N = 180^\circ - (62{,}72^\circ + 58{,}07^\circ)$

$\sphericalangle\, N = 180^\circ - 120{,}79^\circ = 59{,}21^\circ$

$\overline{P_1N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle\, 2) : \sin(\sphericalangle\, N)$

$$\overline{P_1N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle\, 2)}{\sin(\sphericalangle\, N)}$$

$$\overline{P_1N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 58{,}07^\circ}{\sin 59{,}21^\circ}$$

$\overline{P_1N} = 30{,}01$

2) $\overline{P_2N} : \overline{P_1P_2} = \sin(\sphericalangle\, 1) : \sin(\sphericalangle\, N)$

$$\overline{P_2N} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \sin(\sphericalangle\, 1)}{\sin(\sphericalangle\, N)}$$

$$\overline{P_2N} = \frac{30{,}37 \cdot \sin 62{,}72^\circ}{\sin 59{,}21^\circ}$$

$\overline{P_2N} = 31{,}43$

Ergebnis: Die Entfernungen des Neupunktes von den Endpunkten P_1 und P_2 der Strecke $\overline{P_1P_2}$ betragen 30,01 m bzw. 31,43 m.

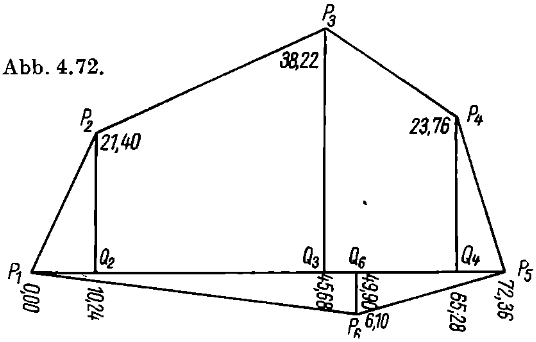
4.7.4. Flächenberechnungen

Um die Fläche eines aufgenommenen (geradlinig begrenzten) Grundstückes zu bestimmen, zerlegt man die maßstäblich gezeichnete Figur in Vielecke, zum Beispiel Dreiecke und Trapeze, und berechnet die Flächeninhalte der Vielecke.
Die Messung einer Fläche bedingt ebenso wie die von Geraden die Festlegung einzelner Punkte. Bei kleinen Flächen können die Punkte von einer geraden Linie aus rechtwinklig aufgenommen werden. Die Fußpunkte der von den Punkten auf die Standlinie zu fällenden Lote werden mit einem Winkelprisma bestimmt.

■ **Beispiel 4:**

Ein Grundstück von der Form eines in der Abbildung 4.72. dargestellten Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ist vermessen worden. Die Begrenzungen sind auf die Gerade durch die Ecken P_1 und P_5 projiziert. Die Abbildung 4.72. zeigt den Aufnahmeplan mit eingeschriebenen Meterzahlen. Der Flächeninhalt ist zu berechnen.

Abb. 4.72.



Lösung: Die Projektionen der Punkte P_2, P_3, P_4 und P_6 bezeichnen wir entsprechend mit Q_2, Q_3, Q_4 und Q_6.

Wir berechnen die Flächeninhalte der Teilfiguren.

1. Dreieck $P_1Q_2P_2$ ist rechtwinklig.
   $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}24 \cdot 21{,}40 \text{ m}^2 = 5{,}12 \cdot 21{,}40 \text{ m}^2 \approx 109{,}57 \text{ m}^2$
2. Dreieck $P_4Q_4P_5$ ist ebenfalls rechtwinklig.
   $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 23{,}76 \cdot (72{,}36 - 65{,}28) \text{ m}^2 = 11{,}88 \cdot 7{,}08 \text{ m}^2 \approx 84{,}11 \text{ m}^2$
3. Dreieck $P_1P_6P_5$
   $A_3 = \frac{1}{2} \cdot 72{,}36 \cdot 6{,}10 \text{ m}^2 = 36{,}18 \cdot 6{,}10 \text{ m}^2 \approx 220{,}70 \text{ m}^2$
4. Trapez $P_2Q_2Q_3P_3$
   $$A_4 = \frac{21{,}40 + 38{,}22}{2} \cdot (45{,}68 - 10{,}24) \text{ m}^2$$
   $$A_4 = \frac{59{,}62}{2} \cdot 35{,}44 \text{ m}^2 = 29{,}81 \cdot 35{,}44 \text{ m}^2 \approx 1056{,}47 \text{ m}^2$$
5. Trapez $P_3Q_3Q_4P_4$
   $$A_5 = \frac{38{,}22 + 23{,}76}{2} \cdot (65{,}28 - 45{,}68) \text{ m}^2$$
   $$A_5 = \frac{61{,}98}{2} \cdot 19{,}60 \text{ m}^2 = 30{,}99 \cdot 19{,}60 \text{ m}^2 \approx 607{,}40 \text{ m}^2$$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$
$A = 109{,}57 \text{ m}^2 + 84{,}11 \text{ m}^2 + 220{,}70 \text{ m}^2 + 1056{,}47 \text{ m}^2 + 607{,}40 \text{ m}^2$
$A = 2078{,}25 \text{ m}^2$

Ergebnis: Der Flächeninhalt beträgt angenähert $2078{,}25 \text{ m}^2$.

4.7.5. Höhenmessungen

Zur Bestimmung von Höhenunterschieden kann die Winkelmessung ebenfalls benutzt werden, wenn die Entfernung nach den aufzunehmenden Punkten bekannt ist oder sich bestimmen läßt. Werden die Höhe des Instrumentes mit i, die Entfernung mit e und der Winkel gegen die Horizontale mit α bezeichnet, so ist (Abb. 4.73.)

$$h = i + e \cdot \tan \alpha.$$

Liegt der Winkel α über der Horizontalen, so nennt man ihn **Erhebungswinkel (Höhenwinkel)**, liegt er unterhalb, so heißt er **Senkungswinkel (Tiefenwinkel)** (Abb. 4.74.; α bzw. α'). Der Winkel, unter dem eine Strecke $\overline{AB}$ gesehen wird, heißt **Sehwinkel** σ. Es ist der Winkel, den die Visierlinien nach den Endpunkten A und B miteinander bilden (Abb. 4.75.).

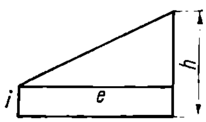


Abb. 4.73.

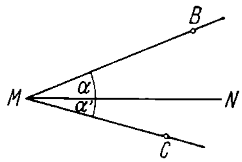


Abb. 4.74.

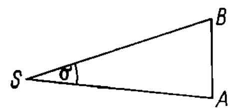


Abb. 4.75.

Beispiel 5:

Um die Höhe eines Berges zu messen, wird in der Ebene eine Standlinie $\overline{AB} = s = 113$ m abgesteckt, deren Richtung genau auf die Bergspitze hinweist (Abb. 4.76.). An den Enden der Standlinie werden die Erhebungswinkel $\alpha_1 = 24{,}29°$ und $\alpha_2 = 19{,}80°$ gemessen. Wie hoch erhebt sich der Berg über der Ebene?

Lösung: Es ist $\tan \alpha_1 = \dfrac{h}{e_1}$ und $\tan \alpha_2 = \dfrac{h}{e_1 + s}$.
Die zweite Gleichung wird nach h aufgelöst, die erste nach e_1.

$$h = e_1 \cdot \tan \alpha_2 + s \cdot \tan \alpha_2$$

$$e_1 = \frac{h}{\tan \alpha_1}$$

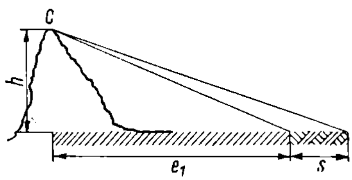


Abb. 4.76.

Setzt man den Ausdruck für e_1 in den für h ein und formt um, so erhält man h.

$$h = \frac{h \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} + s \cdot \tan \alpha_2$$

$$h\,1 - \left(\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}\right) = s \tan \alpha_2$$

$$h = \frac{s \cdot \tan \alpha_2}{\dfrac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}}$$

$$h = \frac{s \cdot \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}$$

Die Zahlenwerte werden eingesetzt.

$$h = \frac{113 \cdot \tan 24{,}29° \cdot \tan 19{,}80°}{\tan 24{,}29° - \tan 19{,}80°}$$

$$\begin{aligned} \tan 24{,}29° &= 0{,}4513 \\ -\tan 19{,}80° &= 0{,}3600 \\ \hline \text{Nenner} &= 0{,}0913 \end{aligned}$$

$$h = 201{,}1$$

Ergebnis: Der Berg erhebt sich rund 201 m über der Ebene.

4.7.6. Bemerkungen zur Triangulation

Die Unterlagen für die Herstellung zuverlässiger Karten liefert die Landesvermessung, die nach den Gesetzen der Geodäsie vorgenommen wird. Die Methoden der Vermessung, Berechnung und Abbildung, die zur Lösung der verschiedenen geodätischen Aufgaben angewendet werden, rechnet man je nach den Anforderungen an die theoretischen Grundlagen zur „niederen" oder zur „höheren" Geodäsie. Sind die zu vermessenden Gebiete so klein, daß sie als eben behandelt werden können und daß für Berechnungen die Methoden der ebenen Trigonometrie hinreichend genaue Ergebnisse liefern, so gehört die Bearbeitung zur niederen Geodäsie. Aufgabe der höheren Geodäsie dagegen ist es, weite Gebiete unter Berücksichtigung der Erdkrümmung zu vermessen. Hierzu müssen die auf der Erdoberfläche festgelegten Hauptpunkte der Landesvermessung auf eine Kugel- oder Ellipsoidoberfläche, die als Ersatz für die Erdoberfläche gedacht ist, eingeordnet sowie die einzelnen Gebiete dieser Flächen auf ebenen Karten dargestellt werden.

Bei der **Triangulation** wird das Land mit Dreiecksnetzen verschiedener Ordnung überzogen. Die Dreiecke der I. Ordnung haben 30 bis 100 km Seitenlänge, die der II. Ordnung durchschnittlich 8 km und die der III. Ordnung durchschnittlich 3 km. Von einer sehr genau gemessenen Basis ausgehend, werden die Punkte der Dreiecksnetze durch Winkelmessungen und Rechnung bestimmt. Über den trigonometrischen Marksteinen werden oft Holzgerüste errichtet, die die Sicht auf größere Entfernungen hin ermöglichen (trigonometrische Signale).

● *Stellen Sie trigonometrische Punkte in Ihrem Ort bzw. in seiner Umgebung fest!*

Höhenpunkte werden ebenfalls festgelegt. Die Vermarkung solcher Punkte geschieht zum Beispiel durch Einlassen von eisernen Bolzen in standsichere massive Gebäude.

● *Stellen Sie Höhenbolzen in der Umgebung Ihrer Schule fest!*

Für die Landesvermessung in Deutschland war das Vorbild die Vermessung, die der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss durchgeführt hat.

4.7.7. Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss wurde 1777 in Braunschweig geboren. Er stammte aus einfachen Verhältnissen; sein Vater hatte vielerlei Beschäftigungen, zum Beispiel als Gärtner, als Weißbinder, als Kassierer einer Sterbekasse. Wie Gauss selbst äußerte, schrieb und rechnete der Vater gut. Seine Mutter hatte jahrelang als Magd gearbeitet. Schon als Kind hatte Gauss Freude am Rechnen. In der Volksschule in Braunschweig

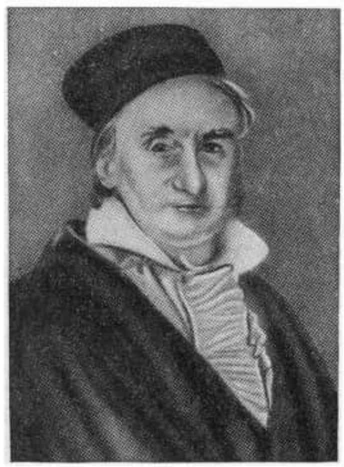


Abb. 4.77.
Carl Friedrich Gauss (1777—1855)

entdeckte der Lehrer BÜTTNER die mathematischen Fähigkeiten des Jungen. In der damaligen Gesellschaftsordnung war den Kindern der Werktätigen der Weg zur Hochschule im allgemeinen verschlossen. So war es ein besonderer Glücksfall, daß GAUSS in Braunschweig das Gymnasium und in Göttingen die Universität besuchen konnte. GAUSS beschäftigte sich schon als Fünfzehnjähriger mit Problemen der höheren Mathematik. Im Jahre 1799 promovierte er zum Doktor der Philosophie mit einer grundlegenden Arbeit auf dem Gebiet der Algebra. Seit 1807 war er Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen.
Das wissenschaftliche Schaffen von C. F. GAUSS ist außerordentlich vielseitig. Auf allen Gebieten der Mathematik, der Arithmetik, Algebra, Analysis und der Geometrie, kam er zu neuen und für die weitere Entwicklung der Mathematik fruchtbaren Erkenntnissen. Außerdem wandte er sich auch anderen Wissenschaften zu, der Astronomie, der Physik und der angewandten Mathematik. Er war der Meinung, daß die Anwendungen für die mathematische Forschung große Bedeutung haben. Seine Vielseitigkeit ist auch dadurch gekennzeichnet, daß er sich als Student außer der höheren Mathematik der Philosophie und der Literatur widmete. In seinem Leben und Wirken hat GAUSS die Theorie mit der Praxis eng verbunden. Als er schon in höherem Alter war, führte er die Landesvermessung im Land Hannover durch. Die Triangulation diente zunächst praktischen Zwecken. GAUSS benutzte sie aber zugleich zu wissenschaftlichen Erkenntnissen; durch äußerst genaue Vermessung des Dreiecks Brocken–Inselsberg–Hoher Hagen (bei Göttingen) prüfte er die Grundlagen der Geometrie. Fast ein volles Jahrzehnt fuhr er Sommer für Sommer ins Gelände, um die erforderlichen Messungen entweder selbst durchzuführen oder zu überwachen. Mit ungeheurem Fleiß wertete er die Meßergebnisse aus. Dabei berechnete er etwa eine Million Zahlen und führte Eliminationen aus, bei denen 55 Gleichungen ebenso viele unbekannte Größen enthielten.
CARL FRIEDRICH GAUSS war einer der bedeutendsten Mathematiker.

Aufgaben

1. Unter welchem Winkel steigt eine geradlinige Straße gleichmäßig an, wenn zwei Meßpunkte A und B auf ihr um 810 m voneinander entfernt liegen (in der Straßenmitte gemessen) und einen Höhenunterschied von 40,80 m gegeneinander aufweisen? Zeichnen Sie einen maßstäblichen Geländeschnitt durch die Straßenmitte, und lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch (Abb. 4.78.)! (L)

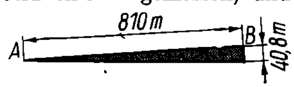


Abb. 4.78.

2. Welche Breitenausdehnung hat ein Körper, der einem Beobachter in der Entfernung d unter dem Sehwinkel 1° erscheint?

   a) $d = 1$ m b) $d = 10$ m c) $d = 100$ m d) $d = 1$ km e) $d = 10$ km (L: a, b)

3. Ein elektrischer Leitungsmast wirft bei einer Sonnenhöhe von $52{,}7^\circ$ in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten.

   a) Wie groß ist die Höhe des Leitungsmastes über der Erde?
   b) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch! (L)

4. Um die Höhe einer Wolkendecke zu bestimmen, wird diese von dem Scheinwerfer einer meteorologischen Station lotrecht angestrahlt, so daß die Spitze des Lichtkegels an der Wolkendecke einen scharf begrenzten Lichtfleck erzeugt. Der Lichtfleck wird durch das Fernrohr eines in 300 m horizontaler Entfernung vom Scheinwerfer aufgestellten Theodoliten angepeilt und am Höhenkreis des Theodoliten ein Höhenwinkel $\alpha = 70{,}4°$ abgelesen. Wie hoch ist die Wolkendecke?
Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch! (L)

5. Von einem Standpunkt P aus sieht man einen Turm unter dem Sehwinkel $\alpha = 29{,}82°$. Der Standpunkt P ist horizontal um $d = 240$ m vom Turm entfernt und liegt um $h = 19{,}40$ m höher als der Fuß des Turmes. Wie hoch ist der Turm?
Lösen Sie die Aufgabe
a) trigonometrisch, **b)** geometrisch! (L)

6. Beim Abstecken eines rechtwinklig-dreieckigen Grundrisses ergeben sich die Seitenlängen für die Hypotenuse zu 53,50 m und eine Kathete zu 25 m. Wie groß sind die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, der Flächeninhalt und die dritte Seite?

7. Berechnen Sie die Horizontalentfernungen e_1 und e_2 eines Turmes von den Standorten St. 1 und St. 2 und die Höhe h der Turmspitze über NN (Abb. 4.79.)!
a) Gemessen sind die Grundlinie $b = 247{,}290$ m, die Horizontalwinkel $\varphi_1 = 110{,}99°$ und $\varphi_2 = 34{,}90°$ (Vorwärtseinschneiden).
b) Gegeben sind die Höhen der Standorte $H_1 = 145{,}02$ m über NN; $H_2 = 139{,}04$ m über NN sowie die Höhen der Meßinstrumente $i_1 = 1{,}30$ m; $i_2 = 1{,}20$ m. Gemessen sind die Höhenwinkel $\alpha_1 = 19{,}12°$ und $\alpha_2 = 12{,}80°$.
c) Beachten Sie die Rechenkontrolle für h!
(L: a)

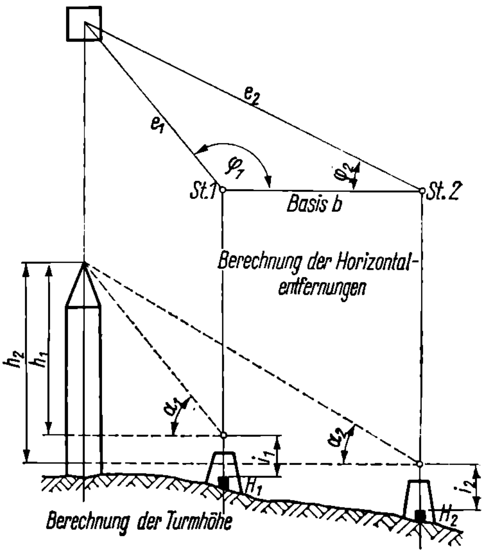


Abb. 4.79.

8. Von einem Viereck kennt man die Seite $\overline{AB}$ und die Winkel, die $\overline{AB}$ mit den Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ und mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ bildet. Es soll aus diesen Angaben die Länge der Seite $\overline{CD}$ berechnet werden.

a) $\overline{AB} = 85$ m, $\sphericalangle ABC = 57{,}12°$, $\sphericalangle ABD = 34{,}24°$,
$\sphericalangle BAC = 44{,}37°$ und $\sphericalangle BAD = 122{,}19°$

b) $\overline{AB} = 72$ m, $\sphericalangle ABC = 39°\,43'$, $\sphericalangle ABD = 25°\,21'$,
$\sphericalangle BAC = 62°\,5'$ und $\sphericalangle BAD = 118°\,24'$

c) $\overline{AB} = 514$ m, $\sphericalangle ABC = 90°\,27'$, $\sphericalangle ABD = 62°\,27'$,
$\sphericalangle BAC = 39°\,52'$ und $\sphericalangle BAD = 73°\,54'$ (L: b, c)

9. Über einen Fluß soll eine Brücke mit zwei gleichen Bogen gebaut werden. Um die Lage des mittleren Pfeilers zu bestimmen, hat man auf dem linken Ufer eine Standlinie $\overline{CD}$ von $a = 190$ m Länge abgesteckt und die Winkel gemessen, die die Visierlinien nach den Endpfeilern A und B mit $\overline{CD}$ bilden. Welche Entfernung muß der mittlere Pfeiler von jedem der beiden anderen erhalten, wenn er 2,4 m breit werden soll?

$\sphericalangle\, ACD = \alpha = 152{,}53°$, $\sphericalangle\, BCD = \beta = 121{,}26°$,
$\sphericalangle\, ADC = \gamma = 4{,}16°$ und $\sphericalangle\, BDC = \delta = 32{,}43°$ (L)

10. An den Endpunkten einer Strecke $\overline{CD}$, deren direkte Ausmessung nicht möglich ist, sind die Richtungen nach den Endpunkten einer bekannten Strecke $\overline{AB}$ festgelegt und ihre Winkel mit $\overline{CD}$ gemessen. Es soll hieraus die Länge von $\overline{CD}$ berechnet werden.

a) $\overline{AB} = 25$ m, $\sphericalangle\, DCA = 47{,}19°$, $\sphericalangle\, DCB = 79{,}14°$,
$\sphericalangle\, CDA = 74{,}23°$ und $\sphericalangle\, CDB = 59{,}26°$

b) $\overline{AB} = 60$ m, $\sphericalangle\, DCA = 62°\,25'$, $\sphericalangle\, DCB = 101°\,39'$,
$\sphericalangle\, CDA = 65°\,27'$ und $\sphericalangle\, CDB = 43°\,29'$

c) $\overline{AB} = 150$ m, $\sphericalangle\, DCA = 23°\,54'$, $\sphericalangle\, DCB = 87°\,43'$,
$\sphericalangle\, CDA = 125°\,42'$ und $\sphericalangle\, CDB = 63°\,24'$ (L: a, b)

11. An zwei einander gegenüberliegenden Punkten C und D der Elbufer bei Torgau wurden die Winkel der Visierlinien nach zwei auf dem linken Ufer stehenden Pappeln A und B von $a = 56$ m Abstand mit der Geraden $\overline{CD}$ gemessen. Es ergab sich:

$\sphericalangle\, DCA = 120°$, $\sphericalangle\, DCB = 97{,}46°$, $\sphericalangle\, CDA = 4{,}30°$ und $\sphericalangle\, CDB = 18{,}23°$.

Welche Größe ergab sich hieraus für die Breite der Elbe an der Beobachtungsstelle? (L)

12. Zwei Straßen stoßen geradlinig unter einem Winkel von 120° aufeinander. Zur Verbesserung der Straßenführung sollen beide durch einen Kreisbogen vom Radius

a) $r = 300$ m, **b)** $r = 500$ m

verbunden werden. Um wieviel Meter wird durch den Bogen der Straßenzug verkürzt? (L: a)

13. Von einer Klasse wird ein LPG-Feld vermessen (Abb. 4.80.). Ergebnisse:

Basis $\overline{AB} = 125$ m

$\sphericalangle\, BAC = \alpha_1 = 35{,}1°$	$\sphericalangle\, ABC = \beta_1 = 87{,}8°$
$\sphericalangle\, BAD = \alpha_2 = 58{,}1°$	$\sphericalangle\, ABD = \beta_2 = 71{,}9°$
$\sphericalangle\, BAE = \alpha_3 = 112{,}0°$	$\sphericalangle\, ABE = \beta_3 = 26{,}1°$
$\sphericalangle\, BAF = \alpha_4 = 121{,}0°$	$\sphericalangle\, ABF = \beta_4 = 33{,}6°$
$\sphericalangle\, BAG = \alpha_5 = 64{,}0°$	$\sphericalangle\, ABG = \beta_5 = 84{,}2°$.

Der Flächeninhalt des Feldes ist zu berechnen. (L)

14. Eine neue Eisenbahnlinie wird gebaut. Sie verläuft in einer Ebene senkrecht zu einer bereits bestehenden Bahnlinie, über die sie mittels einer Brücke von 8,50 m Höhe geführt werden soll. Wie lang muß die Rampe mindestens sein, wenn der Anstiegswinkel nicht mehr als 1° betragen soll?

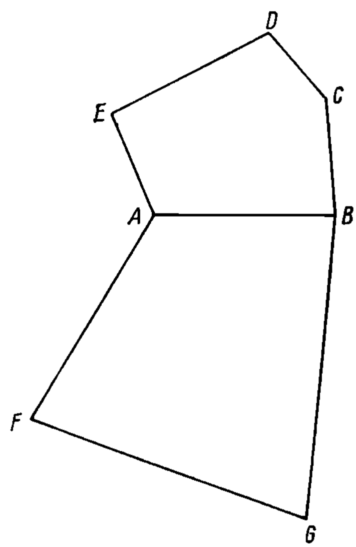


Abb. 4.80.

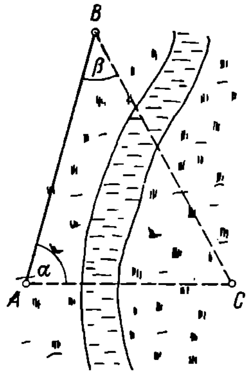


Abb. 4.81.

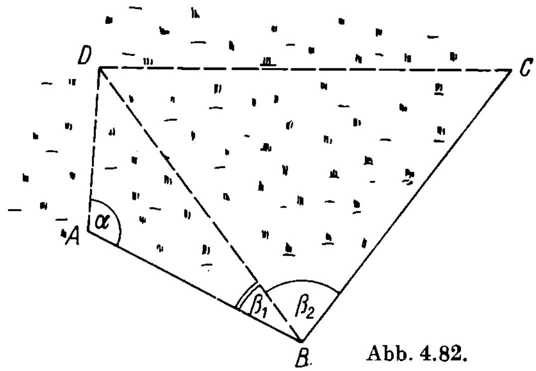


Abb. 4.82.

15. Im Gelände ist eine Basis $\overline{AB} = 225$ m vermessen worden. Ein dritter Punkt im Gelände ist C, der von A und B aus nicht zugänglich ist. Mit dem Theodoliten wurden

$\sphericalangle\, CAB = \alpha = 75^\circ\, 20'$ und $\sphericalangle\, CBA = \beta = 42^\circ\, 40'$ ermittelt.

Wie lang sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (Abb. 4.81.)? (L)

16. Wieviel Hektar Land werden durch die Trockenlegung der in Abbildung 4.82. skizzierten feuchten Wiese $ABCD$ gewonnen?

Bemerkung: $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind nicht begehbar.

$\overline{AB} = 470$ m; $\overline{BC} = 675$ m; $\alpha = 115^\circ$; $\beta_1 = 26^\circ$; $\beta_2 = 72{,}5^\circ$

17. Zwischen zwei durch einen Wald getrennten Orten A und B soll für eine Hochspannungsleitung eine Schneise geschlagen werden. Die Orte A und B liegen gleich hoch und sind von einem in gleicher Höhe liegenden Geländepunkt C aus beide sichtbar. Die Peilstrahlen CA und CB werden zu 2,380 km und 3,450 km bestimmt. Der Winkel ACB beträgt $38{,}7^\circ$.

a) Wie groß ist die Horizontalentfernung $\overline{AB}$?

b) In welchen Richtungen von A und B aus ist die Schneise zu schlagen?

c) Lösen Sie die Aufgabe auch geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung!

18. Ein 23 m hoher Gittermast einer Hochspannungsleitung wirft in der Horizontalebene einen 16,76 m langen Schatten. Unter welchem Winkel fallen im Zeitpunkt der Beobachtung die Sonnenstrahlen ein? Lösen Sie die Aufgabe **a)** trigonometrisch, **b)** geometrisch durch eine maßstäbliche Zeichnung! (L)

4.8. Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen

4.8.1. Das Bogenmaß eines Winkels

Beim Zeichnen der Bilder der Winkelfunktionen hatten wir auf der Abszissenachse als Einheit des Winkels die Bogenlänge aufgetragen, die zum Zentriwinkel 1° des Einheitskreises gehört. Wir hatten also auf der x-Achse eine bestimmte Einheit zur Darstellung der Winkelgrade und auf der y-Achse eine andere Maßeinheit für die unbenannten Verhältniszahlen. Beide haben verschiedene Bedeutungen. Der Unterschied wird beseitigt, wenn man für die Winkel ein Maß verwendet, das aus unbenannten Zahlen besteht.

Aus Abbildung 4.83. erkennt man die Gültigkeit folgender Proportion:

Kreisumfang : Kreisbogen = Vollwinkel : Zentriwinkel
$2\pi r : \quad b = \quad 360^\circ \quad : \quad \alpha.$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{b = \frac{\pi r}{180^\circ}\, \alpha.}$$

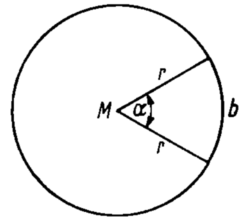


Abb. 4.83.

▶ **Die Länge eines Kreisbogens b ist dem Zentriwinkel α und dem Radius r proportional.**

● *Wie lautet der Proportionalitätsfaktor?*

Bildet man aus der Proportion die neue Beziehung $\frac{b}{r} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$, so ist das Verhältnis aus Kreisbogen und Radius nur noch dem Zentriwinkel proportional. Man kann daher dieses Verhältnis als Maß für den Winkel α einführen. Da diesem Maß der Bogen zugrunde liegt, bezeichnet man es als **Bogenmaß**.

▶ **Erklärung:**
Unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht man das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zum Radius.

Das Symbol für das Bogenmaß ist: arc α oder $\widehat{\alpha}$ (gelesen: „Arkus von alpha“[1] oder „Bogen alpha“).
Es gilt:

$$(36) \quad \boldsymbol{\widehat{\alpha} = \operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}}.$$

Das Bogenmaß des Winkels ist also, wie es beabsichtigt war, als Verhältnis zweier Längen eine unbenannte Zahl. Die Gleichung (36) stellt eine lineare Funktion $[\widehat{\alpha} = f(\alpha)]$ dar.
Wird zur Bestimmung des Bogenmaßes speziell der Einheitskreis genommen, so ergibt sich eine einfache Deutung:

$$\widehat{\alpha} = \frac{b \text{ Längeneinheiten}}{1 \text{ Längeneinheit}} = b.$$

Das Bogenmaß eines Winkels ist also gleich der Maßzahl des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis.

4.8.2. Übergang vom Gradmaß zum Bogenmaß und umgekehrt

Durch Einsetzen in die Gleichung (36) kann für die im Gradmaß gegebenen Winkel das zugehörige Bogenmaß berechnet werden.

[1] arcus (lat.), Bogen

Beispiel 1:

Es soll das Bogenmaß für den Winkel 45° berechnet werden.

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

Berechnen Sie das Bogenmaß für die Winkel 90°, 180°, 360°*!*

Zum Gradmaß 1° gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc} 1^\circ = \frac{\pi \cdot 1^\circ}{180^\circ} \approx 0{,}0175 \approx \frac{7}{400}.$$

Zum Gradmaß $\alpha°$ gehört als Bogenmaß die Zahl

$$\operatorname{arc} \alpha^\circ = \widehat{\alpha} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} \approx 0{,}0175 \cdot \alpha \approx \frac{7}{400} \cdot \alpha.$$

Das Bogenmaß kann also angenähert berechnet werden, indem man das Gradmaß des Winkels mit 0,0175 multipliziert.
Die Tafel der vierstelligen Logarithmentafel enthält die Bogenmaße der Winkel 0° bis 360°.
Die Bogenmaße von Winkeln mit nicht tabellierten Gradzahlen, zum Beispiel von Bruchteilen von Graden, bestimmt man durch additive oder subtraktive Zusammensetzung aus tabellierten Werten oder Bruchteilen davon. Auch der Interpolation kann man sich bedienen.

Beispiele

für die Umrechnung von Grad- in Bogenmaß:

2)
$$\begin{aligned} \alpha &= 132^\circ \\ 130^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 2{,}2689 \\ 2^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}0349 \\ \hline \widehat{\alpha} &= 2{,}3038 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} \alpha &= 198{,}92^\circ \\ 180^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 3{,}1416 \\ 18^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}3142 \\ 0{,}92^\circ &\mathrel{\widehat{=}} 0{,}0161 \\ \hline \widehat{\alpha} &= 3{,}4719 \end{aligned}$$

Wird die Beziehung (36) nach α aufgelöst, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \widehat{\alpha}.$$

Daraus erhält man:

Zur Zahl π als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \pi = 180^\circ$.

Zur Zahl 1 als Bogenmaß gehört als Gradmaß $\frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 \approx \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}3^\circ$.

Die Winkeleinheit im Bogenmaß entspricht einem Winkel von etwa 57,3°, das ist fast die Größe der Winkel im gleichseitigen Dreieck. Die Einheit des Bogenmaßes, die **Radiant** genannt wird, ist also wesentlich größer als die des Gradmaßes.

■ **Beispiele**

für die Umrechnung von Bogen- in Gradmaß:

4) $\widehat{\alpha} = 4{,}9742$

$$\begin{array}{rl} 4{,}7124 \mathrel{\widehat{=}} & 270^\circ \\ \hline 0{,}2618 & \\ 0{,}2618 \mathrel{\widehat{=}} & 15^\circ \\ \hline & \alpha = 285^\circ \end{array}$$

5) $\widehat{\alpha} = 2{,}7193$

$$\begin{array}{rl} 2{,}7053 \mathrel{\widehat{=}} & 155^\circ \\ \hline 0{,}0140 & \\ 0{,}0140 \mathrel{\widehat{=}} & 0{,}8^\circ \\ \hline & \alpha = 155{,}8^\circ \end{array}$$

Zur Umrechnung des Gradmaßes eines Winkels ins Bogenmaß und umgekehrt können also die folgenden Formeln verwendet werden:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha \text{ und } \alpha = \frac{180^\circ}{\pi}\,\widehat{\alpha}.$$

Bei Benutzung des Bogenmaßes ist es nunmehr möglich, in der graphischen Darstellung der Winkelfunktionen auf beiden Achsen Maßeinheiten zu verwenden, die nach Bedeutung und Größe übereinstimmen. Da die Tafeln 13 und 14 die Winkel im Gradmaß enthalten, muß bei ihrer Verwendung jeder Winkelgradwert erst in den zugehörigen Bogenmaßwert umgerechnet werden.
In der Elementargeometrie mißt man Winkel meistens im Gradmaß. In der Trigonometrie benutzt man Winkelgrade bei praktischen Messungen und Rechnungen, bei allgemeineren Betrachtungen über Winkelfunktionen bevorzugt man das Bogenmaß. In der höheren Mathematik bedient man sich ausschließlich des Bogenmaßes.

4.8.3. Die Winkelfunktionen negativer Winkel

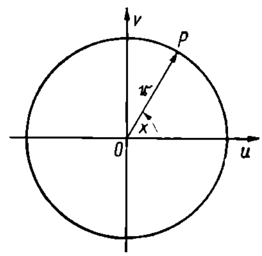


Abb. 4.84.

Legt man auf dem Radius $\overline{OP} = r$ des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt O als Richtung die von O nach P fest, so entsteht die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$, die man als **Ortsvektor** $\mathfrak{r}$ bezeichnet (Abb. 4.84.). Die Richtung des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ ist durch den Richtungswinkel x bestimmt, seine Länge durch die Strecke $\overline{OP}$. Wenn sich der Ortsvektor um seinen Anfangspunkt O dreht, so kann diese Drehung – je nach der Drehrichtung – im positiven oder im negativen Drehsinn erfolgen. Eine Drehung im positiven Sinne erfolgt gegen die Bewegung des Uhrzeigers (im Gegenzeigersinn), eine Drehung im negativen Sinne mit der Uhrzeigerbewegung (im Uhrzeigersinn). Dreht sich der Ortsvektor im positiven Sinne, so entstehen p o s i t i v e Winkel $\left(\text{z. B. } +120^\circ = +\frac{2\pi}{3}\right)$, im anderen Falle bezeichnen wir die entstehenden Winkel als n e g a t i v e Winkel $\left(\text{z. B. } -120^\circ = -\frac{2\pi}{3}; \text{ Abb. 4.85.}\right)$. Man legt fest, daß die Erklärungen 1 bis 4 der

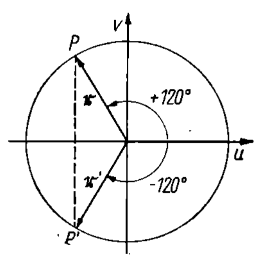


Abb. 4.85.

Winkelfunktionen auch für Winkel im Bereich $0 > x \geqq -2\pi$ gelten sollen. Die Abbildung 4.86. veranschaulicht das für den Winkel $-\frac{\pi}{3}$:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{v}{r} = -\frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{r} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

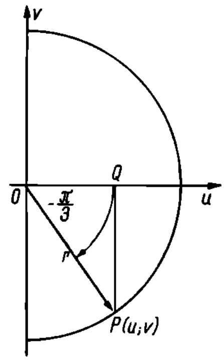


Abb. 4.86.

Die Winkelfunktionen negativer Winkel lassen sich auf die entsprechenden Funktionen positiver Winkel zurückführen. Es ist zum Beispiel $\sin(-x) = \sin(2\pi - x)$.
Andererseits ist $\sin(2\pi - x) = -\sin x$.
Daraus folgt $\sin(-x) = -\sin x$.

Es ist:

(37) $\mathbf{\sin(-x) = -\sin x \qquad \tan(-x) = -\tan x}$

$\mathbf{\cos(-x) = \cos x \qquad \cot(-x) = -\cot x.}$

● *Beweisen Sie die Beziehungen* (37) *für negative Winkel in den verschiedenen Quadranten! Gelten die Gleichungen* (5) *bis* (8) *von Seite 122, die die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen bei gleichem Winkel zum Ausdruck bringen, sowie die Gleichungen* (10) *bis* (12) *von Seite 133, die die Beziehungen zwischen Funktionswerten von Winkeln verschiedener Quadranten darlegen, auch für negative Winkel?*

Also ist die Kosinusfunktion, $y = \cos x$, eine gerade Funktion, die Sinusfunktion, $y = \sin x$, dagegen eine ungerade Funktion.

● *Deuten Sie diese Funktionseigenschaften geometrisch! Welche Symmetrieverhältnisse hat die Kosinusfunktion $y = \cos x$ zur y-Achse, welche die Sinusfunktion $y = \sin x$ zum Nullpunkt O* (0; 0)*? Zu welcher Funktionsgruppe gehören die Tangens- und die Kotangensfunktion?*

● *Nennen Sie gerade und ungerade Potenzfunktionen!*

■ **Beispiele:**

6) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\sin 60° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

7) $\cos(-110°) = \cos 110° = \cos(180° - 70°) = -\cos 70° = -0{,}3420$

8) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\frac{2\pi}{3} = -\tan 120° = -\tan(180° - 60°)$
$= -(-\tan 60°) = +\sqrt{3}$

9) $\cot(-214{,}92°) = -\cot 214{,}92° = -\cot(180° + 34{,}92°)$
$= -\cot 34{,}92° = -1{,}432$

4.8.4. Die Winkelfunktionen für Winkel mit Beträgen über 2π

Dreht sich der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ im positiven oder im negativen Sinne, so werden nach einem vollen Umlauf Winkel erzeugt, deren absoluter Betrag größer als 2π ist, nach zwei Umläufen Winkel, deren absoluter Betrag größer als 4π ist, usw. (Abb. 4.87.a und 4.87.b). Winkel, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, heißen zueinander **äquivalent**.

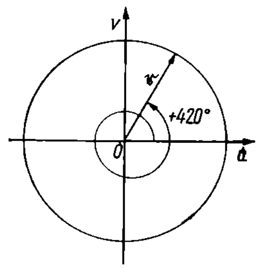


Abb. 4.87. a

■ **Beispiel 10:**

$$\ldots -\frac{17\pi}{3};\ -\frac{11\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{13\pi}{3};\ \ldots$$

Bezeichnet man den zwischen 0 und 2π liegenden Winkel $\bar{x}$ als den **Hauptwert**, so läßt sich jeder beliebige Winkel durch die Gleichung

$$x = \bar{x} + k \cdot 2\pi$$

darstellen, wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

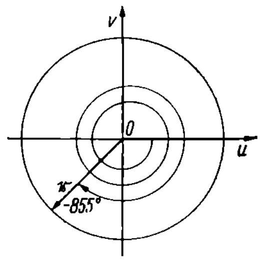


Abb. 4.87. b

■ **Beispiel 11:**

Wenn $x = -855°$ ist, so ist

$$x = -855° - (-3) \cdot 360° = -855° + 3 \cdot 360° = 225°.$$

Man legt nun fest, daß die Erklärungen der Winkelfunktionen auch für Winkel x mit Beträgen über 2π gelten. Dreht sich der Ortsvektor von einer beliebigen Ausgangslage aus im Einheitskreis, so hat sein Endpunkt P nach ein, zwei, drei usw. vollen Umläufen dieselben Koordinaten wie in der Ausgangslage. Daher haben die Winkelfunktionen in den **Intervallen**[1] $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$ usw. dieselben Werte wie im Intervall $0 \ldots 2\pi$. Entsprechendes gilt für negative Winkel.

● *Veranschaulichen Sie einige Zahlenbeispiele durch geeignete Abbildungen!*

Die Winkelfunktionen eines beliebigen Winkels x lassen sich auf dieselbe Funktion des Hauptwertes $\bar{x}$ des Winkels zurückführen. Es ist

$$\begin{aligned} (38)\quad \sin x &= \sin(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \sin \bar{x};\\ \cos x &= \cos(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cos \bar{x};\\ \tan x &= \tan(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \tan \bar{x};\\ \cot x &= \cot(\bar{x} + k \cdot 2\pi) = \cot \bar{x}, \end{aligned}$$

wobei k eine (positive oder negative) ganze Zahl ist.

● *Zeigen Sie, daß die Formeln* (5) *bis* (8) *auf Seite 122 für beliebige Winkel gelten!*

[1] intervallum (lat.), Zwischenraum, Teilbereich.

Bei gegebener Funktion $f(x)$, f bedeute sin, cos, tan oder cot, und bekanntem Funktionswert findet man für den Winkel x zunächst die Werte zwischen 0 und 2π und durch Addition bzw. Subtraktion der ganzzahligen Vielfachen von 2π die äquivalenten Werte. Zu der gegebenen Funktion $f(x)$ erhält man also im allgemeinen die beiden Winkel

$$\bar{x}_1 + k \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 + k \cdot 2\pi, \; (k = 0;\; \pm 1;\; \pm 2;\; \ldots).$$

Beispiele:

12) $\sin 3520° = \sin(3520° - 9 \cdot 360°) = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$

13) $\tan x = 2{,}565;\; \bar{x}_1 = 68{,}7°,\; \bar{x}_2 = 248{,}7°$

Allgemeine Lösung: $x_1 = 68{,}7° + k \cdot 360°$ und $x_2 = 248{,}7° + k \cdot 360°$,
$(k = 0;\; \pm 1;\; \pm 2;\; \ldots)$,

oder $x = 68{,}7° + k' \cdot 180°,\; (k' = 0;\; \pm 1;\; \pm 2;\; \ldots)$.

4.8.5. Die Periodizität der Sinus- und der Kosinusfunktion

Da sich bei der Sinusfunktion die Funktionswerte nach jeweils 2π (in den Bereichen $2\pi \leqq x < 4\pi$; $4\pi \leqq x < 6\pi$; ... und in den Bereichen $-2\pi \leqq x < 0$; $-4\pi \leqq x < -2\pi$; ...) wiederholen, muß sich das Kurvenstück, das die graphische Darstellung von $y = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ ergab, in regelmäßiger Wiederkehr nach beiden Seiten fortsetzen. Für die Sinusfunktion ergibt sich so die Abbildung 4.88. Das Bild der Funktion $y = \sin x$ nennt man kurz **Sinuskurve**. Man erkennt, daß sich das zwischen 0 und 2π gelegene Kurvenstück immer wiederholt. Ebenso könnte man das allerdings auch von dem zwischen 0 und 6π gelegenen Kurvenstück sagen. Eine derartige Funktion nennt man eine periodische Funktion.

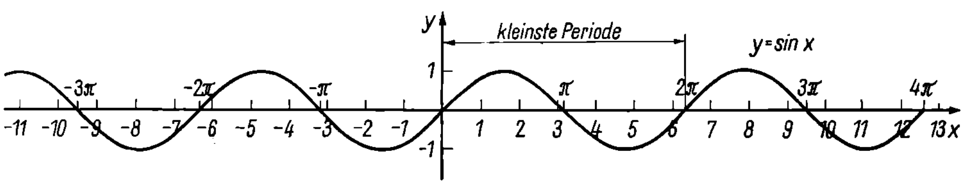


Abb. 4.88.

Die Abschnitte auf der x-Achse, innerhalb derer ein sich wiederholendes Kurvenstück liegt, nennt man Perioden der betreffenden Funktion. Perioden der Sinusfunktion sind beispielsweise $0 \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 4\pi$; $4\pi \ldots 6\pi$; ... und $0 \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -4\pi$; $-4\pi \ldots -6\pi$; ...
Allgemein lassen sich die Perioden der Sinusfunktion zusammenfassen als

$$k \cdot 2\pi = 2k\pi, \; (k = \pm 1;\; \pm 2;\; \ldots).$$

Am wichtigsten ist die kleinste Periode; sie beträgt 2π. Mit ihrer Hilfe läßt sich der analytische Ausdruck der Sinusfunktion wie folgt umgestalten.

Statt $y = \sin x$ mit $-\infty < x < +\infty$ kann man auch schreiben:

(39) $\boldsymbol{y = \sin(x + 2k\pi)}$ mit $0 \leqq x < 2\pi$; k ganzzahlig.

Das ist deshalb möglich, weil nach unseren Überlegungen gilt:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

Wichtig ist, daß die Darstellung (39) nicht nur für einen bestimmten Winkel x, sondern für alle x in dem angegebenen Bereich gilt.

● *Wodurch unterscheidet sich* (39) *von der Beziehung* (38)*?*

Der Teilbereich $0 \leqq x < 2\pi$ enthält alle für die Sinuswerte möglichen Werte, das heißt ihren Wertevorrat $(-1 \leqq y \leqq 1)$.
Die Kosinusfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode 2π. Es ist

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < 2\pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

In Abbildung 4.89. ist die Funktion

(40) $\boldsymbol{y = \cos(x + 2k\pi)}$ mit $0 \leqq x < 2\pi$; k ganzzahlig,

graphisch dargestellt.
Wir stellen fest, daß die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ für jedes beliebige x erklärt sind.

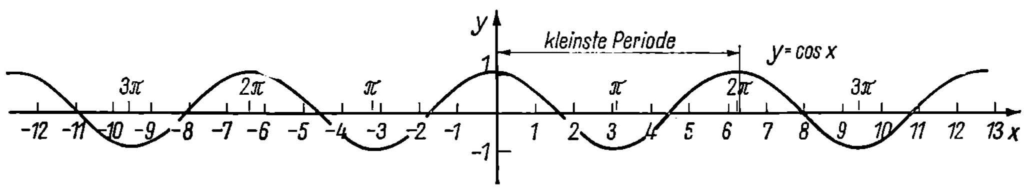


Abb. 4.89.

4.8.6. Die Periodizität der Tangens- und der Kotangensfunktion

Die Tangens- und die Kotangensfunktion verhalten sich ähnlich wie die Sinus- und die Kosinusfunktion. Wir können die Tangensfunktion im ganzen x-Bereich $-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig) graphisch darstellen (Abb. 4.90.). Wir erkennen, daß auch die Tangensfunktion eine periodische Funktion ist. Perioden von $y = \tan x$ sind beispielsweise $0 \ldots \pi$; $\pi \ldots 2\pi$; $2\pi \ldots 3\pi$; ... und $0 \ldots -\pi$; $-\pi \ldots -2\pi$; $-2\pi \ldots -3\pi$; ...
Im Gegensatz zur Sinus- und Kosinusfunktion wiederholen sich bei der Funktion $y = f(x) = \tan x$ die Funktionswerte y bereits nach einem Zuwachs des Arguments[1] x um π. Die Tangensfunktion hat also die (kleinste) Periodenlänge π. Es ist, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots)$,

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < \pi.$$

[1] **Als Argument wird hier die unabhängige Veränderliche der Winkelfunktion bezeichnet.**

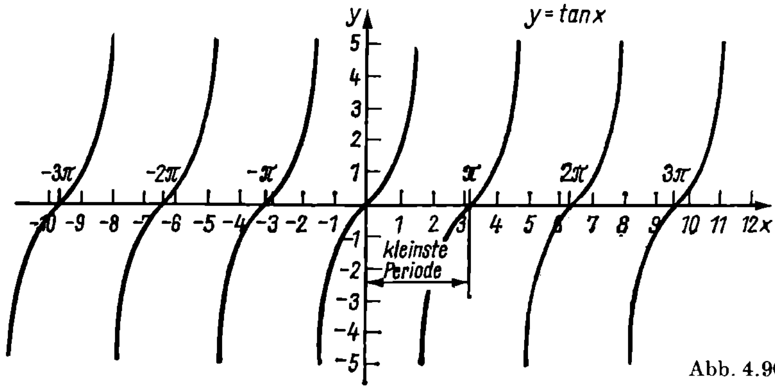


Abb. 4.90.

Die Tangensfunktion kann durch den analytischen Ausdruck

(41) $\boldsymbol{y = \tan (x + k\pi)}$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig

wiedergegeben werden.
Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ (n ganzzahlig).}$$

Die Kotangensfunktion ist ebenfalls eine periodische Funktion mit der (kleinsten) Periode π. Es gilt

$$\cot (x + k\pi) = \cot x \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x < \pi;\ k \text{ ganzzahlig.}$$

Für die in Abbildung 4.91. dargestellte Kotangensfunktion lautet der analytische Ausdruck

(42) $\boldsymbol{y = \cot (x + k\pi)}$ mit $0 \leqq x < \pi$; k ganzzahlig.

Sie ist nicht erklärt an den Stellen

$$x = n\pi \text{ (n ganzzahlig).}$$

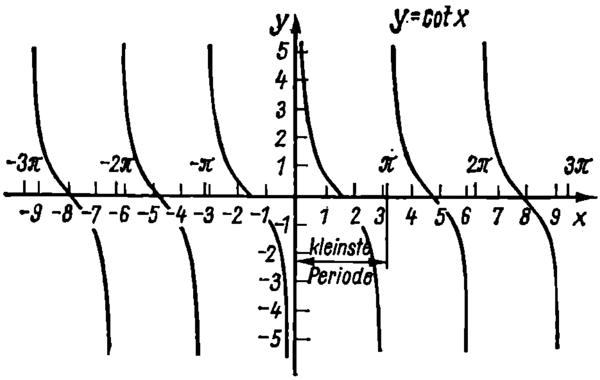


Abb. 4.91.

Aus den graphischen Darstellungen der Winkelfunktionen kann man den Wertevorrat jeder dieser Funktionen deutlich erkennen. Zu jeder reellen Zahl x (als Winkel x im Bogenmaß) gehört eine bestimmte reelle Zahl y aus dem Bereich $-1 \leqq y \leqq +1$ als Funktionswert der Sinus- bzw. Kosinusfunktion. Zu jeder reellen Zahl x mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ bzw. $n\pi$ gehört eine bestimmte reelle Zahl y als Funktionswert der Tangens- bzw. Kotangensfunktion.
In der folgenden Übersicht sind Definitionsbereich und Wertevorrat der vier Winkelfunktionen nochmals zusammengestellt.

Winkelfunktion	Definitionsbereich	Wertevorrat
$y = \sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqq y \leqq +1$
$y = \tan x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$
$y = \cot x$	$-\infty < x < +\infty$ mit Ausnahme der Stellen $n\pi$ (n ganzzahlig)	$-\infty < y < +\infty$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Werte aller Winkelfunktionen der folgenden Winkel!

a) $-30°$ **b)** $-18°$ **c)** $-135°$ **d)** $-83{,}4°$ **e)** $-90{,}45°$
f) $-174{,}77°$ **g)** $-214{,}92°$ **h)** $-282° 12' 38''$ **i)** $-393{,}27°$ **k)** $-450{,}13°$ (L: a, b, c, d)

2. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge zu den Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens für die in Aufgabe **1a** bis **k** angeführten Winkel auf! (L: a, b, c, d)

3. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionswerten $f(x)$ die zwischen 0° und $-360°$ liegenden negativen Winkel! (L: a, b, f)

	a)	b)	c)		d)	e)	f)
$\sin x$	$-0{,}4848$	$-0{,}9024$	$0{,}0820$	$\tan x$	$-0{,}3759$	$-0{,}9935$	$2{,}877$
$\cos x$	$0{,}9655$	$0{,}3704$	$-0{,}8671$	$\cot x$	$-191{,}0$	$-1{,}333$	$0{,}0107$

4. Bestimmen Sie zu den folgenden Logarithmen der vier Winkelfunktionen sowohl die positiven als auch die negativen Winkel!

a) $\lg \sin x = 0{,}5717 - 1, (\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}1718 - 1, (\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}9970 - 2, (\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}4237 - 1, (\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}3393, (\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\tan x| = 1{,}0763, (\tan x < 0)$
g) $\lg \cot x = 0{,}6506 - 1, (\cot x > 0)$ **h)** $\lg |\cot x| = 0{,}8411 - 2, (\cot x < 0)$
(L: a, b, c, d)

5. Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Beziehungen auch für negative Winkel gelten!

a) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **b)** $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ **c)** $\tan x \cot x = 1$
d) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **e)** $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ **f)** $\tan x = \cot(90^\circ - x)$
g) $\cos x = \sin(90^\circ - x)$ **h)** $\cot x = \tan(90^\circ - x)$ (L: e, f, g, h)

6. Geben Sie zu den nachstehenden Winkeln die auf sie folgenden drei äquivalenten Winkel bei positivem und negativem Drehsinn an!

a) 50° **b)** 175° **c)** 335° **d)** $117{,}5^\circ$ **e)** $-221{,}68^\circ$
f) -33° **g)** $212{,}7^\circ$ **h)** $-148{,}5^\circ$ **i)** $241^\circ\,15'$ **k)** $7^\circ\,10'\,10''$
(L: a, b, c, d, e)

7. Wie groß ist der Hauptwert der folgenden Winkel?

a) 1200° **b)** 5180° **c)** -320° **d)** -1755° **e)** $-615^\circ\,23'$
f) 2123° **g)** -4713° **h)** $498^\circ\,10'$ **i)** $-913{,}2^\circ$ **k)** $2916{,}48^\circ$
(L: f, g, h, i, k)

8. Geben Sie sämtliche Lösungen (im Gradmaß) folgender Gleichungen an!

a) $\sin x = 0{,}3223$ **b)** $\sin x = 0{,}8440$ **c)** $\cos x = 0{,}9018$ **d)** $\cos x = -0{,}1382$
e) $\tan x = -1{,}083$ **f)** $\tan x = 0{,}9045$ **g)** $\cot x = 0{,}0524$ **h)** $\cot x = -0{,}4109$
(L: a, c, e)

9. Welche Winkel ergeben sich als allgemeine Lösung aus den nachstehenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg \sin x = 0{,}4328 - 1$, $(\sin x > 0)$ **b)** $\lg |\sin x| = 0{,}6743 - 1$, $(\sin x < 0)$
c) $\lg \cos x = 0{,}1873 - 1$, $(\cos x > 0)$ **d)** $\lg |\cos x| = 0{,}8591 - 1$, $(\cos x < 0)$
e) $\lg \tan x = 0{,}4711 - 1$, $(\tan x > 0)$ **f)** $\lg |\cot x| = 0{,}7220 - 2$, $(\cot x < 0)$
(L: a, c, e)

10. Rechnen Sie die folgenden im Gradmaß gegebenen Winkel in das Bogenmaß um!

a) 1° **b)** $0{,}1^\circ$ **c)** $0{,}01^\circ$ **d)** $1'$ **e)** $1''$ **f)** 45°
g) 120° **h)** 75° **i)** 300° **k)** -180° **l)** 900° **m)** 32°
n) $67{,}5^\circ$ **o)** $102{,}7^\circ$ **p)** $256{,}58^\circ$ **q)** $318{,}04^\circ$ **r)** $-177{,}42^\circ$ **s)** $1125{,}17^\circ$
(L: a, e, i, n, r)

11. Rechnen Sie die folgenden im Bogenmaß gegebenen Winkel ins Gradmaß um!

a) $\dfrac{\pi}{3}$ **b)** $\dfrac{\pi}{5}$ **c)** $\dfrac{\pi}{10}$ **d)** $\dfrac{\pi}{15}$ **e)** $\dfrac{\pi}{30}$ **f)** $\dfrac{\pi}{180}$
g) $\dfrac{3}{2}\pi$ **h)** $\dfrac{3}{4}\pi$ **i)** $\dfrac{7}{8}\pi$ **k)** $\dfrac{\pi}{12}$ **l)** $2{,}5\pi$ **m)** 37π
n) $1{,}13\pi$ **o)** $0{,}1$ **p)** $0{,}01$ **q)** 2 **r)** $1{,}5$ **s)** $3{,}04$
t) $-\pi$ **u)** $-\dfrac{2}{3}\pi$ **v)** -3 **w)** $-0{,}703$ **x)** $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ **y)** 12 (L: b, f, k, o, s, w)

12. Berechnen Sie die Bogenlängen auf einem Kreis mit dem Radius $r = 5$ cm für die folgenden Zentriwinkel!

a) $36{,}3^\circ$ **b)** $117{,}45^\circ$ **c)** $255{,}58^\circ$ (L: a)

13. Wie groß ist jeweils der Bogen zum Zentriwinkel 1° auf Kreisen mit den folgenden Radien?
a) $r = 1$ cm **b)** $r = 2$ cm **c)** $r = 4$ cm (L: b, c)

14. Bestimmen Sie die Winkel x (im Gradmaß) zu den nachstehenden Funktionswerten!

a) $\sin x = 0{,}0000238$ **b)** $\sin x = 3{,}76 \cdot 10^{-6}$ **c)** $\sin x = 8{,}24 \cdot 10^{-7}$
d) $\tan x = 0{,}0000104$ **e)** $\tan x = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\tan x = 9{,}83 \cdot 10^{-7}$

15. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin \frac{\pi}{3}$ **b)** $\sin \frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ **d)** $\sin 1$ **e)** $\sin 0{,}43$
f) $\sin(-1{,}87)$ **g)** $\sin 2{,}163$ **h)** $\cos \frac{4}{3}\pi$ **i)** $\cos \frac{\pi}{4}$ **k)** $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$
l) $\cos 1{,}31\pi$ **m)** $\cos 0{,}5$ **n)** $\cos(-1)$ **o)** $\cos 2{,}897$ **p)** $\cos(-2{,}17)$
(L: a, b, c, d, e)

16. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\tan \pi$ **b)** $\tan \frac{2}{7}\pi$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{20}\right)$ **d)** $\tan 0{,}7$ **e)** $\tan(-1{,}2)$
f) $\tan 5{,}943$ **g)** $\tan 1{,}052$ **h)** $\cot(-\pi)$ **i)** $\cot \frac{2}{5}\pi$ **k)** $\cot 1{,}8\pi$
l) $\cot 0{,}05$ **m)** $\cot \sqrt{2}$ **n)** $\cot 3$ **o)** $\cot(-1{,}32)$ **p)** $\cot(-0{,}48\pi)$
(L: a, b, c, d, e)

17. Suchen Sie die Logarithmen der Beträge der folgenden Funktionswerte auf!

a) $\sin \frac{5}{9}\pi$ **b)** $\sin 0{,}1\pi$ **c)** $\sin 6{,}1$ **d)** $\cos 1\frac{3}{4}\pi$ **e)** $\cos(-2{,}4)$
f) $\cos 3{,}515$ **g)** $\tan \frac{13}{20}\pi$ **h)** $\tan \frac{\pi}{100}$ **i)** $\cot 5{,}5$ **k)** $\cot(-0{,}72)$
(L: a, b, c, d)

18. Geben Sie die Winkel x zu den folgenden Funktionswerten im Bogenmaß an!

a) $\sin x = 0{,}9511$ **b)** $\sin x = 0{,}6428$ **c)** $\sin x = 0{,}9736$ **d)** $\sin x = -0{,}1951$
e) $\sin x = 3{,}23 \cdot 10^{-6}$ **f)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **g)** $\cos x = 0{,}4067$ **h)** $\cos x = -0{,}8805$
i) $\cos x = 0{,}2190$ **k)** $\tan x = 1$ **l)** $\tan x = 0{,}7265$ **m)** $\tan x = -3{,}630$
n) $\tan x = -0{,}5924$ **o)** $\tan x = 5{,}18 \cdot 10^{-5}$ **p)** $\cot x = 0$ **q)** $\cot x = -\sqrt{3}$
(L: a, b, c, d, e, f)

19. Welche Winkel x im Bogenmaß ergeben sich aus den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen?

a) $\lg \sin x = 0{,}8495 - 1, (\sin x > 0)$ **b)** $\lg \sin x = 0{,}7990 - 3, (\sin x > 0)$
c) $\lg \sin x = 0{,}5686 - 6, (\sin x > 0)$ **d)** $\lg \cos x = 0{,}9730 - 1, (\cos x > 0)$
e) $\lg |\cos x| = 0{,}8026 - 1, (\cos x < 0)$ **f)** $\lg \cos x = 0{,}9278 - 1, (\cos x > 0)$
g) $\lg \tan x = 0{,}0762, (\tan x > 0)$ **h)** $\lg \tan x = 0{,}8699 - 2, (\tan x > 0)$
i) $\lg |\cot x| = 0{,}0456, (\cot x < 0)$ **k)** $\lg \cot x = 0{,}7741 - 1, (\cot x > 0)$
(L: a, c, e, g, i)

20. a) Berechnen Sie den Weg, den ein um die Strecke $r = 5$ cm vom Scheitelpunkt entfernter Punkt P zurücklegt, wenn der Winkel 90°; 270°; 360°; 45°; 57,3° beträgt!
b) Zeichnen Sie die jeweiligen Winkel sowie die dazugehörigen Wege des Punktes P als Kreisbögen und als Strecken! (L)

21. Geben Sie die in Aufgabe 20 bestimmten Wege unter der Voraussetzung an, daß $r = 1$ cm ist!

22. Stellen Sie die Funktion $y = \operatorname{arc} x$ $(0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$ in einem geeigneten Maßstab graphisch dar!

23. **a)** Untersuchen Sie an Hand von Beispielen, welche der Winkelfunktionen gerade und welche ungerade sind!

b) Welche anderen geraden bzw. ungeraden Funktionen kennen Sie?

24. Untersuchen Sie die Symmetrieverhältnisse bei den Bildern der Winkelfunktionen in den folgenden Bereichen!

a) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ **b)** $0 \leqq x \leqq \pi$ **c)** $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$

25. Unter Benutzung der Formeln (5) und (6) ist zu zeigen, daß die Tangens- und die Kotangensfunktion die kleinste Periode π haben. (L)

26. Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte!

a) $\sin 5\pi$ **b)** $\sin 7\frac{3}{8}\pi$ **c)** $\sin(-15{,}4\pi)$ **d)** $\sin 10{,}5$ **e)** $\cos(-3\pi)$

f) $\cos 2\frac{1}{2}\pi$ **g)** $\cos 100\pi$ **h)** $\cos 6{,}53$ **i)** $\tan\frac{3}{2}\pi$ **k)** $\tan 1{,}7\pi$

l) $\tan\left(-2\frac{1}{12}\pi\right)$ **m)** $\tan 3{,}487$ **n)** $\cot\left(-\frac{10}{9}\pi\right)$ **o)** $\cot 14\pi$ **p)** $\cot 14$

(L: a, b, c, d, e, f)

27. Suchen Sie die Logarithmen zu den Beträgen der Funktionen in den Aufgaben **26a** bis **p**!

(L: a, b, c, d, e, f)

28. Geben Sie die allgemeinen Lösungen für die folgenden Funktionswerte im Bogenmaß an!

a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ **c)** $\sin x = 0{,}5052$ **d)** $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ **f)** $\cos x = 0{,}9340$ **g)** $\tan x = 2+\sqrt{3}$ **h)** $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

i) $\tan x = 5{,}823$ **k)** $\cot x = -\sqrt{3}$ **l)** $\cos x = \sqrt{3} - 2$ **m)** $\cot x = 0{,}1341$

(L: a, b, c, d, e, f)

29. Geben Sie die allgemeinen Lösungen zu den folgenden Logarithmen der Winkelfunktionen im Bogenmaß an!

a) $\lg \sin x = 0{,}7859 - 3, (\sin x > 0)$ **b)** $\lg|\sin x| = 0{,}9750 - 1, (\sin x < 0)$

c) $\lg \cos x = 0{,}8436 - 2, (\cos x > 0)$ **d)** $\lg|\cos x| = 0{,}8436 - 1, (\cos x < 0)$

e) $\lg \tan x = 0{,}4189 - 1, (\tan x > 0)$ **f)** $\lg|\tan x| = 0{,}7732, (\tan x < 0)$

g) $\lg \cot x = 0{,}5066 - 1, (\cot x > 0)$ **h)** $\lg|\cot x| = 1{,}1178, (\cot x < 0)$

(L: a, c, e, g)

30. Stellen Sie in einem einzigen Koordinatensystem dar:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = \sin x \\ 2)\ y = 2\sin x \\ 3)\ y = \sin 2x \end{array}\right\} (-\pi \leqq x \leqq +3\pi)$$

a) Vergleichen Sie die Ordinaten der Punkte der zu 1 und 2 gehörenden Kurven bei jeweils gleichen Argumenten!

b) Welche Periode hat die Funktion 3?

c) Was ergibt ein Vergleich der Bilder der Funktionen $y = \sin x$, $y = n\sin x$ und $y = \sin nx$?

5. Nomographie

5.1. Netztafeln mit linear geteilten Leitern

5.11. Zur Wiederholung und Einführung

1. Was versteht man unter einer Funktion? Welche Möglichkeiten kennen Sie, um eine Funktion darzustellen?
2. Bei der graphischen Darstellung wird meist das kartesische Koordinatensystem zugrunde gelegt. Erklären Sie die wichtigsten Fachbegriffe dieser Darstellungsart (Koordinatenachsen, Koordinatenursprung; Koordinaten eines Punktes; Abszisse und Abszissenachse; Ordinate und Ordinatenachse; Maßeinheiten und Maßeinteilungen auf den Achsen)!
3. Wovon hängt die Gestalt des Bildes einer Funktion und seine Lage in bezug auf die Koordinatenachsen ab?

5.1.2. Beispiel für eine Funktion mit mehreren Variablen

Für die Sicherheit im Straßenverkehr ist es wichtig, den Bremsweg der Fahrzeuge im Falle plötzlich auftretender Gefahr möglichst klein zu halten. Dieser Bremsweg hängt von vielen Faktoren ab, z.B. von der Beschaffenheit der Fahrbahn, von der Reaktionsgeschwindigkeit des Fahrers („Schrecksekunde"), von der Wirksamkeit der Bremsen und vor allem von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs. Der Bremsweg ist also von mehr als einer Variablen abhängig. Die Untersuchung dieser Funktion, z.B. ihre graphische Darstellung, erfordert andere Methoden als sie bisher für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen besprochen wurden.

Dazu wird zunächst der Einfluß der Fahrbahndecke dadurch unberücksichtigt gelassen, daß man die Untersuchung für jedes Fahrbahnmaterial gesondert durchführt. Im folgenden sei eine trockene, gut griffige Zementdecke (Autobahn) angenommen.

Zweitens wird der Einfluß der Reaktionsfähigkeit des Fahrers dadurch ausgeschaltet, daß mit einer festen, mittleren Reaktionszeit von 0,5 s gerechnet wird. Auf diese Weise bleibt nur noch die Abhängigkeit des Bremswegs s von der Wirksamkeit der Bremsen, die eine bestimmte Verzögerung a bewirken, und von der Geschwindigkeit c des Fahrzeugs im Augenblick der Bremsenbetätigung bestehen.

Während des Bremsweges führt das Fahrzeug eine gleichmäßig verzögerte Bewegung aus, bis es zum Stillstand kommt, d.h. bis seine Geschwindigkeit v gleich Null geworden ist.

$$v = c - a \cdot t = 0$$

Daraus berechnet man die Bremszeit $t = \frac{c}{a}$ und schließlich den um die Fahrstrecke während der „Schrecksekunde" vermehrten Bremsweg:

$$s = 0{,}5\,\mathrm{s}\,c + c \cdot t - \frac{1}{2}\,a\,t^2;$$

$$s = 0{,}5\,\mathrm{s}\,c + c \cdot \frac{c}{a} - \frac{1}{2}\,a \cdot \frac{c^2}{a^2};$$

$$s = 0{,}5\,\mathrm{s}\,c + \frac{c^2}{2\,a}.$$

Diese Beziehung enthält noch drei Variable: s, c und a. Den normalen analytischen Ausdruck einer Funktion mit zwei Variablen erhält man jetzt, wenn man für ein bestimmtes Fahrzeug die im wesentlichen feststehende Bremsverzögerung a einsetzt. z.B. für die ES 150 den Wert $a = 8{,}0\ \mathrm{ms}^{-2}$.
Dann ergibt sich für dieses Fahrzeug

$$s = 0{,}5\,\mathrm{s}\,c + \frac{c^2}{16\ \mathrm{ms}^{-2}}.$$

Zur besseren Übersicht kann diese Beziehung als Zahlenwertgleichung durch ein Funktionsbild in einem kartesischen sc-Koordinatensystem dargestellt werden (Abb. 5.1.).

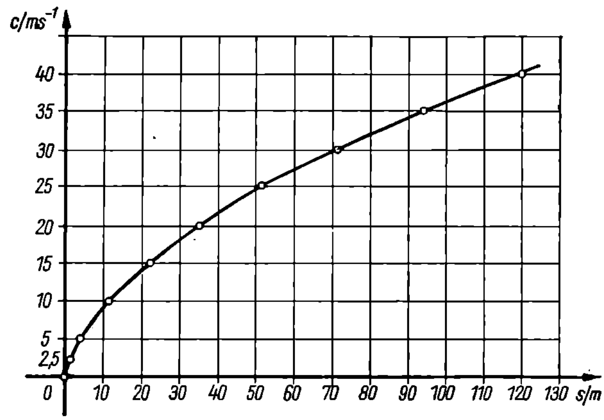


Abb. 5.1.

Da man zur Beurteilung des Bremsvorganges keine absolut genauen Werte für c und s benötigt, kann man mit Hilfe dieses Diagramms mit hinreichender Genauigkeit Werte für c und s durch Ablesen bestimmen.

Aufgaben

1. Wie groß ist der Bremsweg der ES 150 unter den vorgegebenen Bedingungen bei einer Geschwindigkeit von 60 kmh^{-1}?
2. Welche Geschwindigkeit darf höchstens gefahren werden, wenn der Bremsweg 10 m nicht überschreiten soll?
3. In welchem Verhältnis vergrößert sich der Bremsweg, wenn die Geschwindigkeit um 50 % vergrößert wird?
4. In welchem Verhältnis muß man die Geschwindigkeit verringern, wenn der Bremsweg auf die Hälfte reduziert werden soll?

5.1.3. Kurvenscharen

Es ist wichtig, den Bremsvorgang für verschiedene Fahrzeuge zu kennen und zu vergleichen. Jedes Fahrzeug hat seine charakteristische Bremsverzögerung a, die u.a. von der Art der Bremsenkonstruktion abhängt. Für jede Verzögerung a ergibt sich ein anderes Diagramm, dessen Funktionsbild zwar ähnliche Gestalt, aber eine andere Lage im Koordinatensystem hat. Der Vergleich wird erleichtert, wenn man alle Bilder in ein und demselben Koordinatensystem darstellt (Abb. 5.2.).

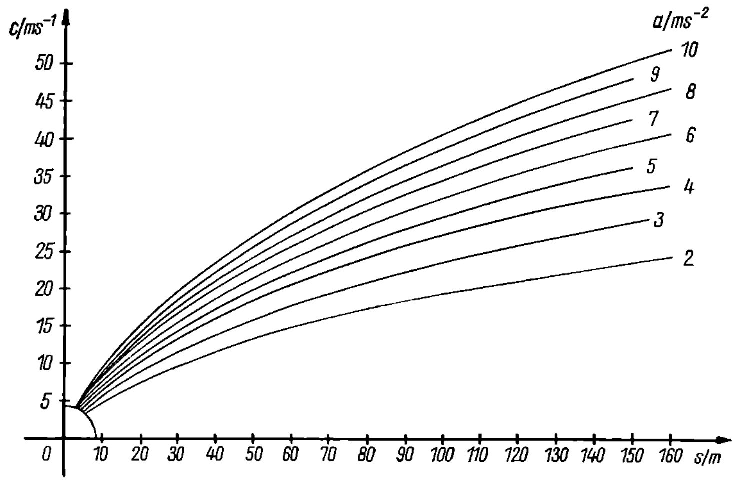


Abb. 5. 2.

Jede Kurve gilt für eine bestimmte Verzögerung a, die deshalb an die jeweilige Kurve geschrieben werden muß. Man erhält ein Diagramm mit einer Kurvenschar. Der jeweils zugeordnete Zahlenwert von a (in ms^{-2}) heißt der Parameter der betreffenden Kurve. Das Diagramm ist also die graphische Darstellung der Funktion

$$s = 0{,}5sc + \frac{c^2}{2a} \quad (s \text{ in m};\ c \text{ in } \mathrm{ms}^{-1};\ a \text{ in } \mathrm{ms}^{-2}),$$

die zwei unabhängige Variable (c und a) enthält. Eine von ihnen und die abhängige Variable werden wie üblich auf den Achsen des Koordinatensystems dargestellt und abgelesen, die zweite unabhängige Variable erscheint als Parameter an den Kurven. Ein solches Kurvenschar-Diagramm heißt auch Netztafel. Die Maßteilungen auf den Achsen nennt man meistens Leitern. Sofern diese, wie in Abbildung 5.2., gleichmäßige Einteilungen aufweisen (d.h. gleichen Zahlenunterschieden entsprechen gleiche Achsenabschnitte), spricht man von linear geteilten Leitern[1]. Die Abbildung 5.2. zeigt also eine Netztafel mit linear geteilten Leitern, durch die eine Funktion mit drei Variablen graphisch dargestellt ist.

[1] Beispiele für nicht linear geteilte Leitern finden sich z.B. auf dem Rechenstab.

Aufgaben

5. Die StVO (Straßenverkehrsordnung) bestimmt, daß Kraftfahrzeuge bei einer Geschwindigkeit von 100 kmh^{-1} mit Bremsen ausgerüstet sein müssen, die eine Bremsverzögerung von mindestens 3 m s^{-2} gewährleisten. Beurteilen Sie diese Bestimmung an Hand des Bremsweges, den Sie aus Abbildung 5.2. ablesen!

6. Entwerfen Sie ein Diagramm in Form einer Netztafel mit linear geteilten Leitern für den Kraftstoffbedarf B auf einer Strecke s für Fahrzeuge mit verschiedenem Kraftstoffverbrauch V je 100 km! Dem Diagramm liegt die Beziehung

$$B = V \cdot s \quad (B \text{ in l}; \; V \text{ in l/100 km}; \; s \text{ in km})$$

zugrunde. Wählen Sie V als Parameter!

5.1.4. Nomogramme und Nomographie

Diagramme, mit deren Hilfe Funktionen mit mehr als zwei Variablen graphisch dargestellt werden und die dazu dienen, zu vorgegebenen Werten einiger dieser Variablen den Wert einer anderen Variablen durch einfaches Ablesen näherungsweise und rasch zu ermitteln, heißen Nomogramme. Sie können z.B. die Gestalt von Netztafeln haben, doch gibt es auch noch andere Formen (Leitertafeln, vgl. 5.4.; Verbundene Nomogramme, vgl. 5.5.).

Die Erörterung der den Nomogrammen zugrunde liegenden mathematischen Gesetze sowie der Verfahren zu ihrer Konstruktion und der zugehörigen Ablesevorschriften ist Aufgabe der Nomographie. Für kompliziertere Beziehungen zwischen den Variablen ist die Herstellung von Nomogrammen oft sehr mühsam, und das Ablesen wird besonders bei unzweckmäßigen Konstruktionen mitunter schwierig und zeitraubend. Deshalb ist die Verwendung von Nomogrammen in der Praxis nur sinnvoll, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Arbeiten mit dem Nomogramm muß rationeller sein als das Berechnen der gesuchten Werte mit Hilfe der zugrunde liegenden Formel. Das ist nur gewährleistet, wenn
   a) das Nomogramm einfach und übersichtlich ist, so daß das beigegebene Ablesebeispiel eine rasche und sichere Benutzung erlaubt, ohne daß der Benutzer tiefer in die mathematischen Zusammenhänge einzudringen braucht, und
   b) die zugrunde liegende Formel eine verhältnismäßig umständliche Einzelrechnung ergibt, die mehr Zeit bei geringerer Sicherheit als die Nomogrammablesung erfordert.
2. Die Konstruktion des Nomogramms muß sich lohnen, d.h., die durch das Nomogramm ermöglichten Bestimmungen gewisser Zahlenwerte müssen sehr oft, möglichst laufend, in der Praxis vorkommen.
3. Die durch das Nomogramm zwangsläufig bedingten Ungenauigkeiten der ermittelten Werte müssen kleiner sein als die durch die Praxis zugelassenen Toleranzen.

5.2. Verstreckung; Funktionsleiter

Krummlinige Funktionsbilder (vgl. Abb. 5.1. und 5.2.) sind immer (mit Ausnahme von Kreisen) schwieriger zu zeichnen als geradlinige (vgl. Aufgabe 6). Auch die Ablesegenauigkeit ist bei krummlinigen Kurvenscharen meist geringer, vor allem dann, wenn Zwischenwerte zwischen zwei Kurven geschätzt werden müssen (Interpolieren). Nach Möglichkeit sollen deshalb Netztafeln mit Geradenscharen verwendet werden. Das ist grundsätzlich immer möglich, wenn man den Funktionsbildern Koordinatensysteme mit geeignet gewählten nichtlinear geteilten Leitern zugrunde legt. Dadurch kann jede Kurve durch eine Gerade als Funktionsbild ersetzt werden (Verstreckung der Kurven).

Beispiel 1:

Der durch $y = \frac{1}{2}x^2$ mit $x \geqq 0$ dargestellten Funktion entspricht im kartesischen Koordinatensystem (mit lineargeteilten Leitern) als Funktionsbild die Parabel (Abb. 5.3.). Man erhält sie z.B. mit Hilfe der folgenden Wertetafel.

x	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	0	0,5	2	4,5	8

Das Bild dieser Funktion kann deshalb keine Gerade sein, weil der analytische Ausdruck $\frac{1}{2}x^2$ nicht linear in x ist. Dagegen ergibt sich als Bild der linearen Funktion $y = \frac{1}{2}u$ mit $u \geqq 0$ in einem uy-Koordinatensystem mit linear geteilten Leitern eine Halbgerade (Abb. 5.4.).

Man kann jetzt der linear geteilten u-Leiter eine zweite Beschriftung beifügen, also auf derselben Geraden, die schon die u-Leiter trägt, eine zweite Leiter (eine x-Leiter) abtragen, indem z.B. die Zahl x jeweils der Zahl $u = x^2$ zugeordnet wird (Abb. 5.5.).

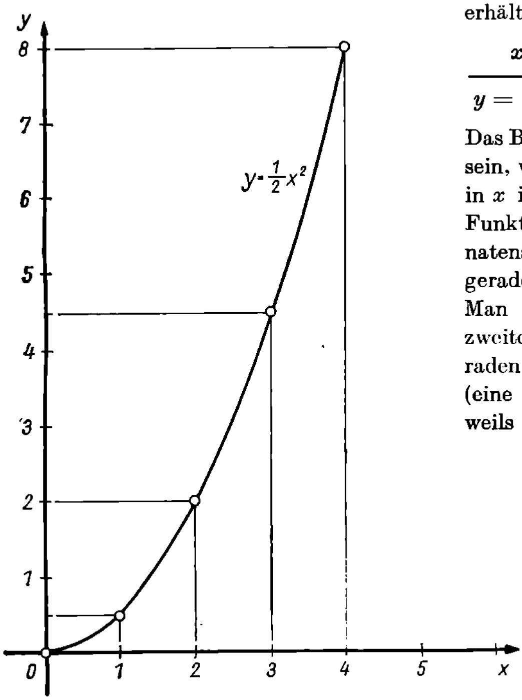


Abb. 5.3.

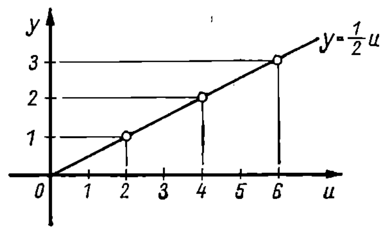


Abb. 5.4.

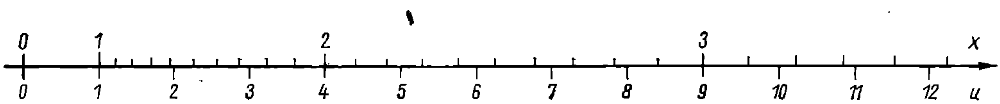


Abb. 5.5.

Dadurch wird zweierlei erreicht:

(I) Die Abbildung 5.5. stellt eine weitere Möglichkeit dar, die **Funktion** $u = x^2$ mit $x \geqq 0$ graphisch darzustellen. Sie heißt Doppelleiter oder Funktionsleiter und besteht aus einer linear und einer nichtlinear geteilten Leiter, die beide auf demselben Träger aufgetragen sind. Da in diesem Falle eine quadratische Funktion zugrunde liegt, nennt man die x-Leiter eine quadratisch geteilte Leiter. Sie läßt sich durch Einfügen weiterer Punkte (durch Interpolieren) zum Ablesen weiterer Quadratzahlen oder umgekehrt auch von Quadratwurzelwerten verwendbar machen. Dabei ist zu beachten, daß auch die Unterteilung (das Interpolieren) nach der der Doppelleiter zugrunde liegenden funktionalen Beziehung (hier $u = x^2$) erfolgen muß.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung 5.5. folgende Werte und beurteilen Sie die erreichbare Genauigkeit!

   $1{,}55^2$; $2{,}07^2$; $2{,}82^2$; $3{,}44^2$;

   $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{7{,}5}$

2. Verlängern Sie die Doppelleiter der Abbildung 5.5. über den Nullpunkt hinaus! Beachten Sie dabei den Wertevorrat der zugrunde liegenden Funktion $u = x^2$!

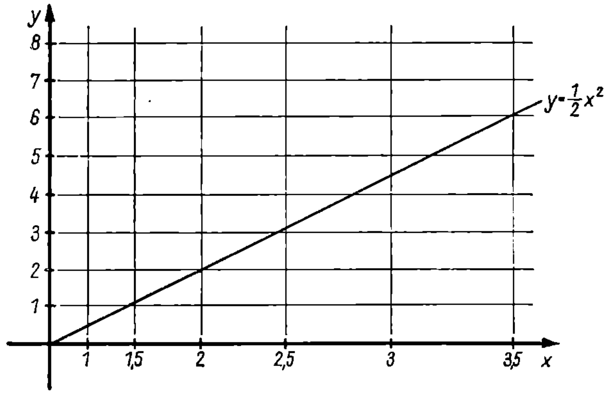


Abb. 5.6.

(II) Wird in der Abbildung 5.4. an Stelle der linearen x-Leiter die Funktionsleiter der Abbildung 5.5. auf der einen Koordinatenachse aufgetragen, so stellt die Halbgerade nach wie vor das Bild der Funktion $y = \frac{1}{2}u$ mit $u \geqq 0$ dar, aber zugleich wegen $u = x^2$ mit $x \geqq 0$ das Bild der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2$ mit $x \geqq 0$, wenn zum Ablesen die nichtlinear geteilte x-Leiter benutzt wird. Meist trägt man auf dieser Koordinatenachse nur die nichtlinear geteilte x-Leiter auf und unterstützt das Ablesen durch Einzeichnen entsprechender Rasterlinien. Dadurch entsteht ein linear-quadratisches Koordinatenpapier, in dem das Bild der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2$ mit $x \geqq 0$ eine Halbgerade ist (Abb. 5.6.). Man sagt, das (ursprünglich gekrümmte) Bild der Funktion ist durch Wahl einer nichtlinear geteilten Leiter auf der einen Koordinatenachse, in unserem Falle einer quadratischen Leiter, zu einer Geraden verstreckt worden.

Beispiel 2:

Das Bild der durch $y = \lg x$ $(x > 0)$ dargestellten Funktion ist bei linear geteilten Leitern eine gekrümmte Linie (Abb. 5.7.). Um sie zu einer Geraden zu verstrecken, muß die linear geteilte x-Leiter durch eine nichtlinear geteilte Leiter ersetzt werden. Man erhält sie aus der Funktionsleiter $u = \lg x$ (Abb. 5.8.) als logarithmisch geteilte Leiter. (Solche logarith-

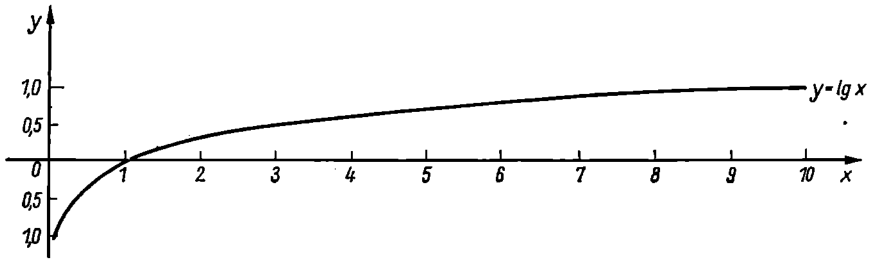


Abb. 5.7.

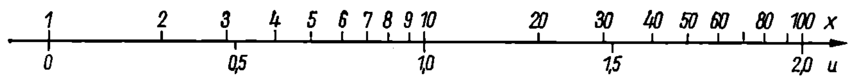


Abb. 5.8

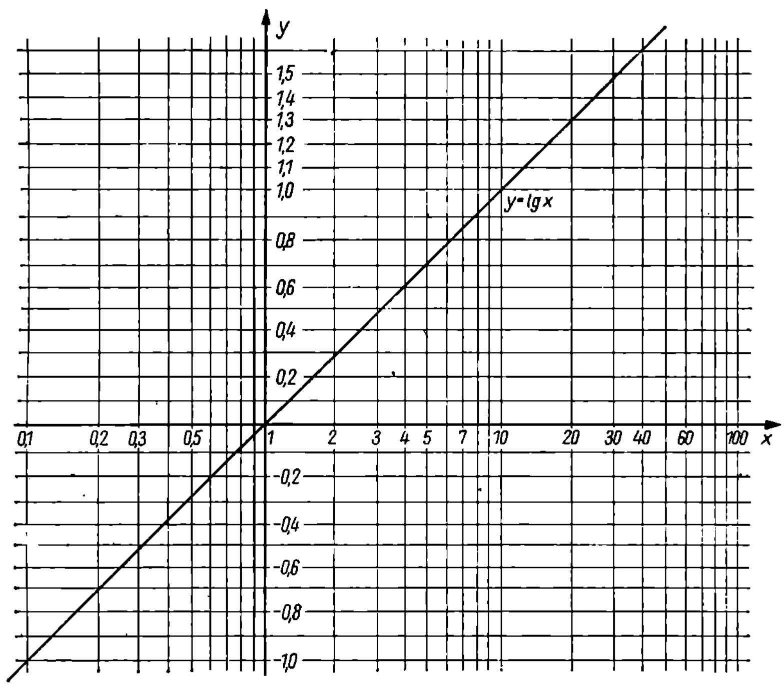


Abb. 5.9.

misch geteilten Leitern finden sich u.a. auf den Rechenstäben.) Damit ergibt sich schließlich eine Darstellung (Abb. 5.9.), in der das Funktionsbild eine Gerade ist. Das zugrunde liegende linearlogarithmische (oder halblogarithmische) Koordinatenpapier ist im Handel erhältlich, da diese Verstreckung mit Hilfe logarithmisch geteilter Leitern in der Nomographie sehr oft angewendet wird (vgl. 5.3.).

5.2.1. Konstruktion von Funktionsleitern

Jeder Funktionsleiter liegt eine Funktion f zugrunde, deren graphische Darstellung sie ist. In der Nomographie ist es üblich, die unabhängigen Variablen (die Argumente) mit kleinen griechischen Buchstaben (z.B. α) zu bezeichnen, so daß man die Funktionswerte $f(\alpha)$ nennen kann. Es gibt zwei Wege zur Konstruktion der Funktionsleitern.

1. Weg

Man berechnet eine Wertetafel für beliebige Werte α_i, wobei man zunächst nichtnegative ganze Zahlen berücksichtigen wird. (Dabei sind natürlich Definitionsbereich und Wertevorrat der Funktion zu beachten.)

α	0	1	2	3	4	$\cdots$	α_i
$f(\alpha)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$\cdots$	$f(\alpha_i)$

Mit einer beliebigen Zeicheneinheit l (meist in mm gemessen) ermittelt man jetzt die Strecken mit den Längen

$$x_i = l \cdot f(\alpha_i).$$

Diese trägt man alle auf derselben Geraden von demselben Anfangspunkt P_0 aus ab, auf der außerdem mit derselben Maßeinheit und demselben Anfangspunkt eine lineare Leiter aufgetragen wird. Die Endpunkte P_i der Strecken bezeichnet man mit den jeweils zugehörigen Zahlen α_i, den Anfangspunkt P_0 mit der Zahl α_0. Diese Zahl ergibt sich aus

$$x_0 = 0 = l \cdot f(\alpha_0),$$

also aus

$$f(\alpha_0) = 0$$

(Abb. 5.10.).

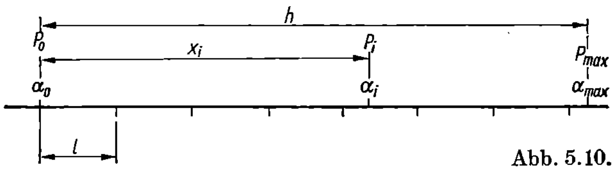


Abb. 5.10.

α_0 ist also die Nullstelle der der Funktionsleiter zugrunde liegenden Funktion. Sie braucht nicht immer selbst den Wert Null zu haben. (Bei der logarithmischen Leiter folgt z.B. aus $\lg \alpha_0 = 0$ der Wert $\alpha_0 = 1$.)

Die Zeicheneinheit l kann im allgemeinen willkürlich gewählt werden, es sei denn, daß für die Funktionsleiter eine bestimmte Gesamtlänge (auch maximale Länge oder Leiterhöhe h, in mm gemessen) und ein bestimmter Bereich für die darzustellenden Werte von α, also $\alpha_0 \ldots \alpha_{\max}$ (der Meßbereich $\alpha_{\max} - \alpha_0$) vorgeschrieben sind. Dann liegt l fest durch die Beziehungen

$$h = \overline{P_0 P_{\max}} = x_{\max} = l \cdot f(\alpha_{\max})$$

$$l = \frac{h}{f(\alpha_{\max})} = \frac{x_{\max}}{f(\alpha_{\max})}.$$

Gelegentlich wird die Funktionsleiter auch im unteren Teil beschnitten, d.h., der erste darzustellende Punkt ist nicht P_0 (mit $x_0 = 0$; $f(\alpha_0) = 0$; α_0), sondern ein vor-

geschriebener anderer Leiterpunkt $P_{\min}$ (mit $x_{\min} \neq 0$; $f(x_{\min}) \neq 0$; $\alpha_{\min}$) (Abb. 5.11.). Man spricht dann von einer Leiter mit unterdrücktem Nullpunkt.
Die Leiterhöhe ist dann

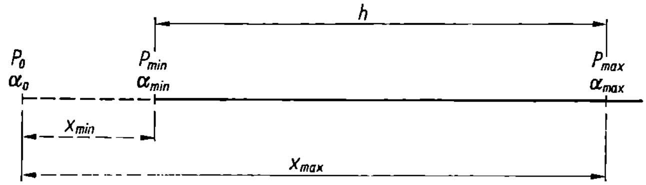


Abb. 5.11.

$$h = \overline{P_{\min} P_{\max}} = x_{\max} - x_{\min} = l \cdot f(x_{\max}) - l \cdot f(x_{\min}).$$

Ist diese sowie der Meßbereich $\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ vorgeschrieben, so ist die Zeicheneinheit nicht mehr frei wählbar; es ergibt sich vielmehr

$$l = \frac{h}{f(\alpha_{\max}) - f(\alpha_{\min})} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{f(\alpha_{\max}) - f(\alpha_{\min})}.$$

Bei der Konstruktion der Leiterpunkte mit Hilfe der Streckenlängen x muß auch in diesem Falle von P_0 ausgegangen werden, obwohl dann P_0 in der endgültigen Funktionsleiter nicht mehr enthalten ist. Konstruktionserleichterungen ergibt das Abtragen der Differenzstrecken zwischen zwei Nachbarpunkten.

■ **Beispiel 3:**

Es ist eine Doppelleiter für die Funktion $f(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha}$ zu konstruieren. Meßbereich $\alpha_{\min} = 8 \ldots \alpha_{\max} = 125$; Leiterhöhe $h = 90$ mm.
Berechnung der Zeicheneinheit l:

$$l = \frac{90\,\text{mm}}{\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{8}} = \frac{90\,\text{mm}}{5 - 2} = 30\,\text{mm}.$$

Wertetafel (einschließlich der Streckenlängen $x_i = 30 \cdot \sqrt[3]{\alpha_i}$ mm)

α	8	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	125
$\sqrt[3]{\alpha}$	2	2,15	2,71	3,11	3,42	3,68	3,91	4,12	4,31	4,48	4,64	4,79	4,93	5
x (in mm)	60	64,6	81,4	93,2	102,6	110,5	117,4	123,6	129,3	134,4	139,3	143,7	147,9	150

Nun konstruiert man vom Punkte $P_{\min}$ mit $\alpha_{\min} = 8$ aus die weiteren Leiterpunkte für die nichtlinear geteilte Leiter mit Hilfe der Differenzstrecken

64,6 mm — 60 mm = 4,6 mm
81,4 mm — 60 mm = 21,4 mm
93,2 mm — 60 mm = 33,2 mm usw. (Abb. 5.12.)

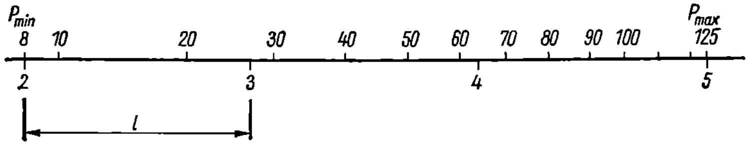


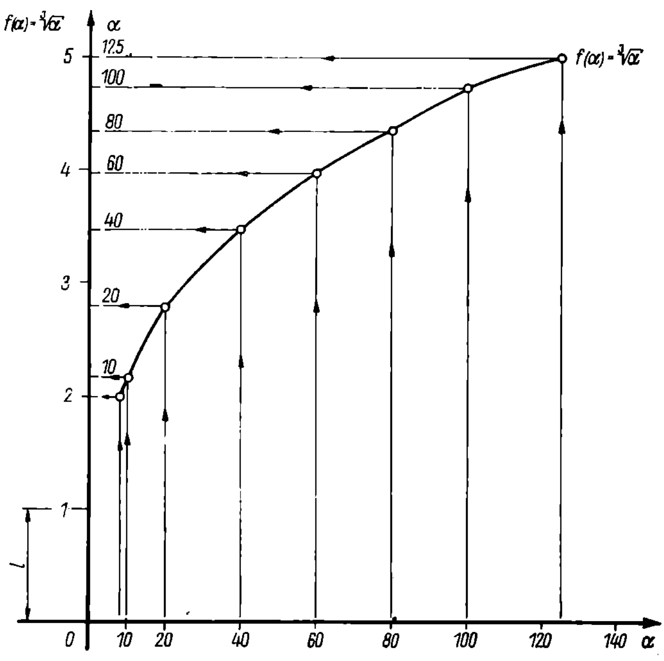
Abb. 5.12.

2. Weg

Statt die Streckenlängen x_i zur Festlegung der Leiterpunkte P_i mit Hilfe der Wertetafel zu berechnen, kann man sie auch durch Konstruktion ermitteln. Dazu wird zunächst die zugrunde liegende Funktion f in einem Koordinatensystem mit linear geteilten Leitern graphisch dargestellt. Als Maßeinheit auf der $f(\alpha)$-Achse wählt man dazu die Zeicheneinheit l, die vorher wie beim 1. Weg berechnet oder festgelegt wird. Die Maßeinheit auf der α-Achse kann beliebig sein, nur muß man sie so wählen, daß der gesamte Meßbereich auf den gezeichneten Teil der α-Achse zu liegen kommt. Man markiert jetzt auf der α-Achse alle Punkte, die denjenigen Zahlenwerten α zugeordnet sind, die in der Funktionsleiter eingezeichnet werden sollen. In diesen Punkten errichtet man auf der α-Achse die Senkrechten bis zum Schnitt mit dem Funktionsbild.

Von diesen Schnittpunkten fällt man die Lote auf die $f(\alpha)$-Achse und erhält dort als Fußpunkte der Lote die Punkte der gesuchten nichtlinear geteilten Leiter. Sie werden jeweils mit den Zahlen α_i (nicht mit $f(\alpha_i)$!) beschriftet. Unter Einbeziehung der bereits vorher auf der $f(\alpha)$-Achse angebrachten linear unterteilten Leiter ist auf diese Weise auf der $f(\alpha)$-Achse die gesuchte Funktionsleiter entstanden (Abb. 5.13.).

Abb. 5.13.



■ **Beispiel 4:**

Es ist eine Doppelleiter für die Funktion $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ zu konstruieren. Meßbereich $\alpha_{min} = 2 \ldots \alpha_{max} = 8$; Leiterhöhe $h = 60$ mm.

Berechnung der Zeicheneinheit l, die zugleich Maßeinheit für die $f(\alpha)$-Achse wird:

$$l = \frac{60\,\text{mm}}{\left|\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right|} = 160\,\text{mm}.$$

Hierbei ist zu beachten, daß diesmal dem kleineren α der größere Funktionswert $f(\alpha)$ zugeordnet ist, so daß sich nur dann eine positive Zeicheneinheit ergibt, wenn der Betrag der Differenz $f(\alpha_{max}) - f(\alpha_{min})$ zur Berechnung benutzt wird.

$$l = \frac{h}{|f(\alpha_{max}) - f(\alpha_{min})|}.$$

Die Maßeinheit auf der α-Achse wird so gewählt, daß auch $\alpha_{max} = 8$ noch auf der α-Achse eingetragen werden kann, z.B. gleich 10 mm.

Das Funktionsbild $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ wird mit Hilfe einer Wertetafel gezeichnet. Nach Eintragen der Senkrechten und der Lote entsteht auf der $f(\alpha)$-Achse die gesuchte Funktionsleiter (Abb. 5.14.).

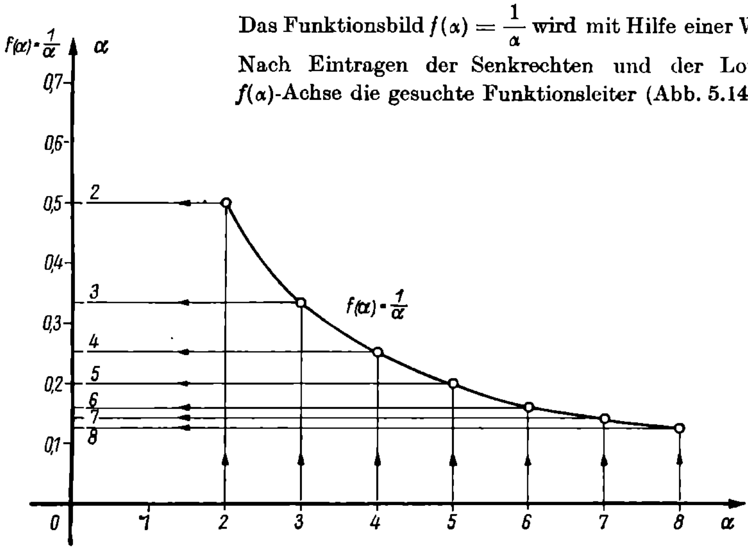


Abb. 5.14.

Aufgaben

1. Es ist eine Funktionsleiter für $f(\alpha) = \lg \alpha$ mit $h = 125$ mm und $\alpha_{min} = 1 \ldots \alpha_{max} = 10$ zu konstruieren. Die Leiter ist mit der A-Skale eines normalen Rechenstabs zu vergleichen.

2. Wie ändert sich das Bild der logarithmischen Funktionsleiter aus Aufgabe 1, wenn die Zeicheneinheit **a)** verdoppelt, **b)** im Verhältnis 2 : 3 verkleinert wird? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Rechenstab-Skalen!

3. Die Umrechnung einer Geschwindigkeit von $\alpha\,\text{ms}^{-1}$ in $\beta\,\text{kmh}^{-1}$ erfolgt durch die Beziehung $\beta = 3{,}6 \cdot \alpha$. Wie kommt diese Beziehung zustande? Für diese Beziehung ist eine (doppelt lineare) Funktionsleiter zu entwerfen mit $h = 100$ mm, $\alpha_{min} = 5$, $\alpha_{max} = 30$.

4. An Hand von Abbildung 5.12. sind Näherungswerte zu bestimmen für
$\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[3]{37}$; $\sqrt[3]{104}$.

5. An Hand von Abbildung 5.14. sind Näherungswerte für $\frac{1}{\alpha}$ zu bestimmen für
$\alpha = 2{,}5;\ 4{,}7;\ 6{,}2.$

5.2.2. Allgemeine Methode zur Verstreckung von Kurven

Im rechtwinkligen Koordinatensystem mit linear geteilten Leitern ergibt jede lineare Funktion $Ax + By + C = 0$ als Bild eine Gerade. Sofern aber wenigstens eine der beiden Variablen nichtlinear vorkommt, also in der Form y^2 oder $\sqrt{x}$ oder $\lg x$ usw., ergibt sich eine gekrümmte Kurve als Bild. Diese kann verstreckt werden, wenn durch Einführen einer neuen Variablen u oder v eine lineare Funktion hergestellt werden kann. Die Substitutionsgleichung $u = f_1(x)$ oder $v = f_2(y)$ stellt zugleich die der neuen nichtlinear geteilten Leiter zugrunde liegende Funktion dar.

Beispiel 5:

$y^2 = \frac{2}{3}x$ mit $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ergibt im xy-System ein gekrümmtes Funktionsbild. Durch $v = y^2$ ergibt sich $v = \frac{2}{3}x$ mit $x \geqq 0$, eine in den Variablen v und x lineare Funktion. Diese

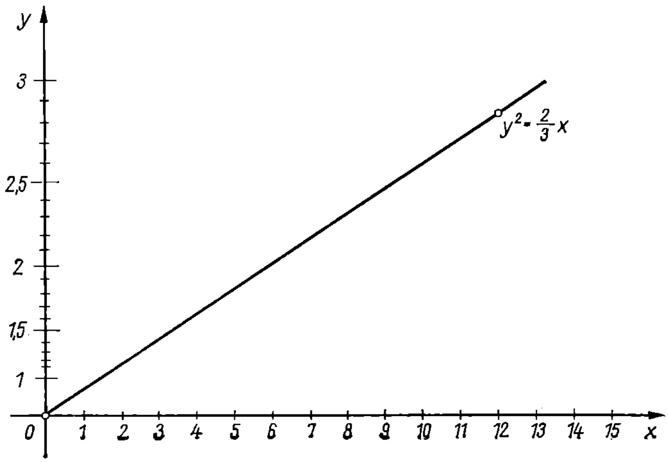


Abb. 5.15.

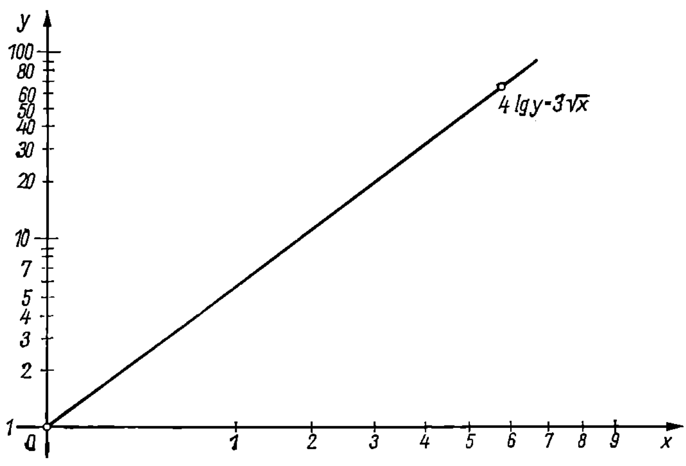


Abb. 5.16.

hat im xv-System eine Halbgerade als Bild. Durch $v = y^2$ mit $y \geqq 0$ ist eine Funktionsleiter festgelegt, deren nichtlinearer Teil als Leiter auf der y-Achse die Halbgerade auch als Funktionsbild von $y^2 = \frac{2}{3}x$ mit $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ im neuen xy-System zu verwenden erlaubt (Abb. 5.15.).

Beispiel 6:

$4 \lg y = 3\sqrt{x}$ läßt sich mit $v = \lg y$ und $u = \sqrt{x}$ als Halbgerade $v = \frac{3}{4}u$ mit $u \geqq 0$ darstellen. Konstruiert man mit $u = \sqrt{x}$ eine nichtlinear geteilte Leiter für die x-Achse und mit $v = \lg y$ eine nichtlinear, nämlich logarithmisch geteilte Leiter für die y-Achse, wird das Bild von $4 \lg y = 3\sqrt{x}$ im neuen xy-System zu einer Halbgeraden verstreckt (Abb. 5.16.).

Lautet der analytische Ausdruck einer Funktion $a f_1(x) + b f_2(x) + c = 0$, so bewirken die nach $u = f_1(x)$ und $v = f_2(x)$ konstruierten nichtlinearen Leitern auf der x- bzw. y-Achse eine Verstreckung der Kurve zur Geraden.

5.3. Netztafeln mit beliebiger Leiterteilung

Auch die Scharen gekrümmter Kurven von Netztafeln lassen sich häufig durch Einführen geeigneter nichtlinear geteilter Leitern zu Geradenscharen verstrecken. Davon macht man in der Nomographie gern Gebrauch, da dadurch die Nomogramme an Übersichtlichkeit, Einfachheit und Genauigkeit bei der praktischen Benutzung gewinnen. Allerdings darf das nicht auf Kosten einer übermäßig komplizierten Leiterteilung gehen.

Die Variablen mögen mit α, β und γ (γ als Parameter) bezeichnet sein. Dann ist bereits mit normalen linear geteilten α- und β-Leitern die Kurvenschar der Netztafel eine Geradenschar, wenn die dargestellte Funktion in α und β linear ist. (Im einfachsten Fall kann auch γ linear sein.) Praktisch bedeutungsvoll sind zwei Funktionstypen:

(1) $\beta = m \cdot \alpha + \gamma$

Es ergibt sich eine Schar paralleler Geraden, deren Neigung durch die Konstante m festgelegt ist, während der Parameter γ die Lage der einzelnen Geraden bestimmt (Abb. 5.17.). Eine solche Netztafel heißt Diagonaltafel.

(2) $\beta = \gamma \cdot \alpha + n$

Es ergibt sich ein Geradenbüschel. Das Büschelzentrum auf der β-Achse

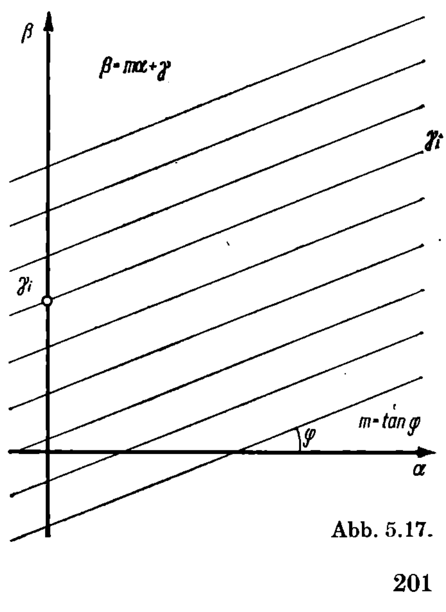


Abb. 5.17.

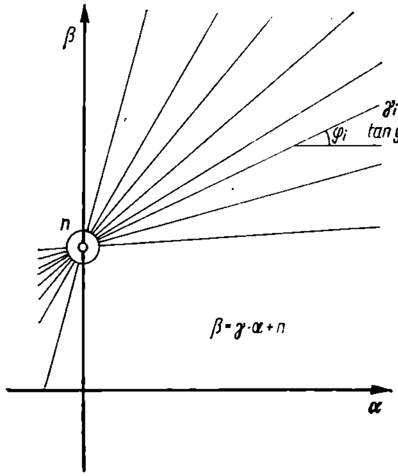


Abb. 5.18.

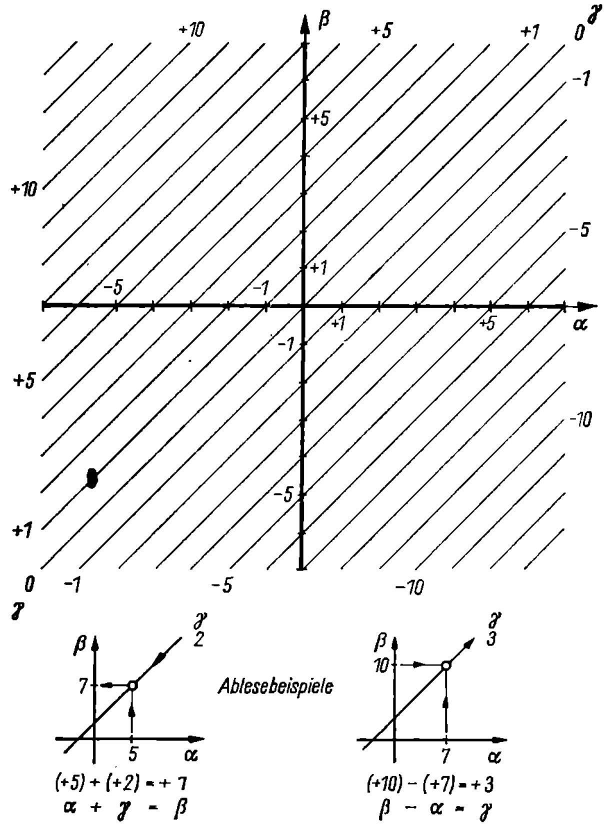


Abb. 5.19.

ist durch die Konstante n, die Neigung der einzelnen Geraden durch den Parameter γ festgelegt (Abb. 5.18.). Solche Netztafeln heißen **Strahlentafeln.**

Beispiel 7:

Die Abbildung 5.19. zeigt eine Diagonaltafel mit linear geteilten Leitern auf den Achsen bei gleich großen Zeicheneinheiten als Rechentafel für Additionen und Subtraktionen nach der Beziehung $\beta = \alpha + \gamma$ bzw. $\beta - \alpha = \gamma$. Wegen $m = +1$ sind die Geraden in diesem Fall unter 45° zur α-Achse geneigt. (Das wäre jedoch nicht der Fall, wenn für beide Achsen verschiedene Zeicheneinheiten verwendet worden wären.) Das beigegebene Ablesebeispiel erläutert die Benutzung.

Beispiel 8:

Die Abbildung 5.20. zeigt eine Strahlentafel mit linear geteilten Leitern auf den Achsen bei gleich großen Zeicheneinheiten als Rechentafel für Multiplikationen und Divisionen nach der Beziehung $\beta = \alpha \cdot \gamma$ bzw. $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$. Wegen $n = 0$ liegt das Büschelzentrum im Koordinatenursprung. Das beigegebene Ablesebeispiel erläutert die Benutzung.

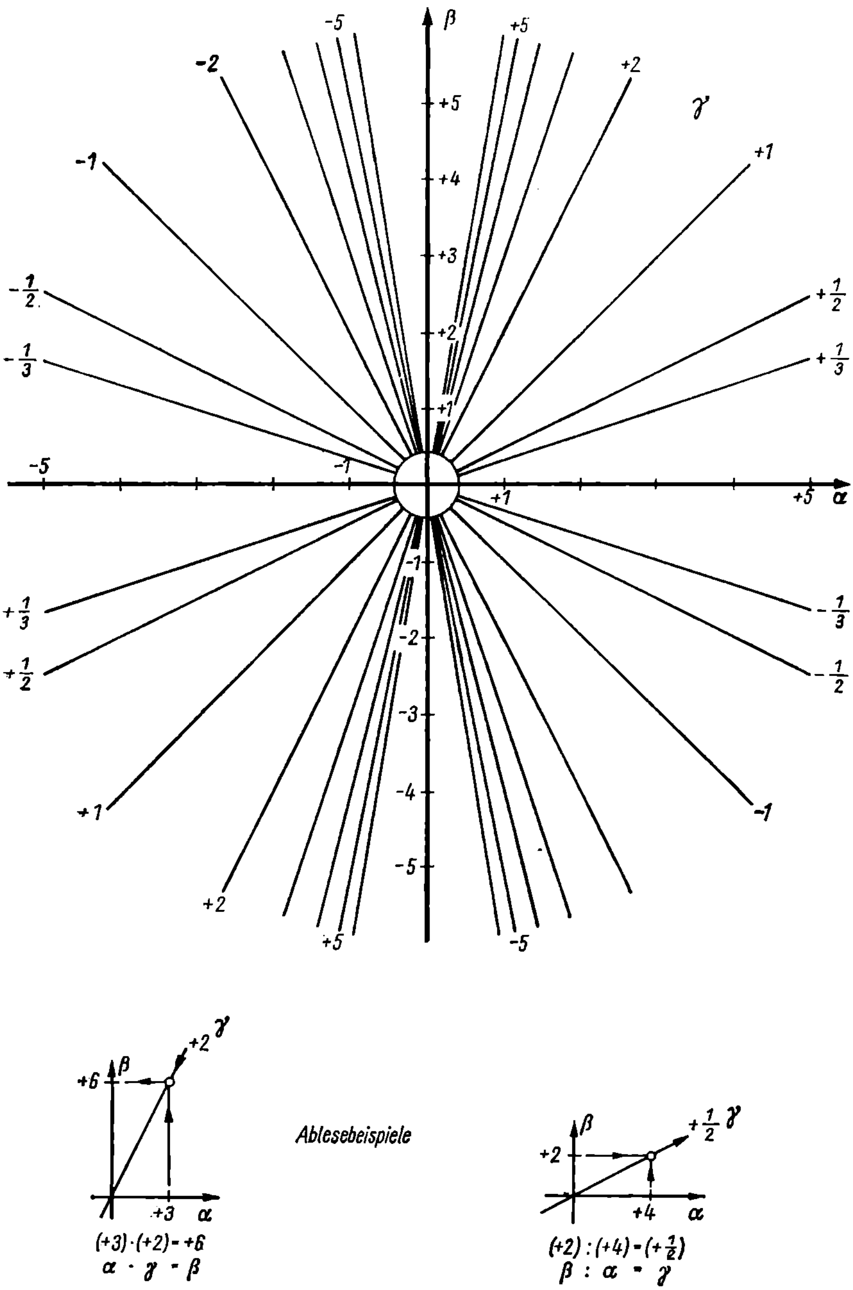


Abb. 5.20.

Aufgaben

1. Die Ergebnisse folgender Aufgaben sind mit Hilfe von Abbildung 5.19. (gegebenenfalls durch geschätztes Interpolieren) zu bestimmen.

$(+3) + (+2) =$	$(+5) - (+3) =$
$(-2) + (-4) =$	$(-4{,}6) - (-2{,}1) =$
$(+6{,}8) + (-2{,}3) =$	$(+5{,}8) - (-3{,}6) =$

Bilden Sie selbst noch weitere Beispiele!

2. Mit Hilfe der Rechentafel (Abb. 5.19.) sind die Regeln über das Addieren und Subtrahieren positiver und negativer Zahlen zu untersuchen.

3. Die Ergebnisse folgender Aufgaben sind mit Hilfe von Abbildung 5.20. (gegebenenfalls durch geschätzte Interpolation) zu bestimmen.

$(+2) \cdot (+2) =$	$(+5) : (+2) =$
$(-0{,}8) \cdot (-4{,}2) =$	$(-3{,}4) : (-1{,}2) =$
$(+2{,}1) \cdot (-1{,}7) =$	$(+3{,}5) : (-2{,}9) =$

Bilden Sie selbst noch weitere Beispiele!

4. Mit Hilfe der Rechentafel (Abb. 5.20.) sind die Regeln über das Multiplizieren und Dividieren positiver und negativer Zahlen zu untersuchen.

Sind die im Nomogramm darzustellenden Funktionen in α, β, γ nichtlinear, kann man oft durch Einführen neuer Variabler nach $u = f_1(\alpha)$, $v = f_2(\beta)$, $w = f_3(\gamma)$ Linearität herstellen und durch entsprechend nichtlinear geteilte Leitern die Kurvenschar zu einer Geradenschar verstrecken. Häufig ist dazu das Logarithmieren beider Seiten des analytischen Ausdrucks und anschließend die Verwendung logarithmischer Leitern zweckmäßig, damit sich eine Diagonaltafel ergibt.

Beispiel 9:

Es ist eine Diagonaltafel für das Ohmsche Gesetz $U = I \cdot R$ zu entwerfen.

Wir setzen in die zugeschnittene Größengleichung $\frac{U}{\mathrm{V}} = \frac{I}{\mathrm{A}} \cdot \frac{R}{\Omega}$ zunächst $I = \alpha\,\mathrm{A}$; $U = \beta\,\mathrm{V}$; $R = \gamma\Omega$ ein. Dadurch erhalten wir die Zahlenwertgleichung: $\beta = \alpha \cdot \gamma$. Durch Logarithmieren beider Seiten dieser Gleichung ergibt sich

$\lg \beta = \lg \alpha + \lg \gamma$.

Werden α- und β-Achse mit logarithmischen Leitern nach $u = \lg \alpha$; $v = \lg \beta$ versehen, so ergibt sich die Parallelgeradenschar $v = u + \lg \gamma$, die im doppelt logarithmisch geteilten Raster auch das Bild von $\lg \beta = \lg \alpha + \lg \gamma$, d.h. von $\beta = \alpha \cdot \gamma$ ist (Abb. 5.21.). Die Geraden verlaufen wegen $m = 1$ unter 45° zur x-Achse, da die Zeicheneinheiten (Dekadenlängen) auf der x- und auf der y-Achse gleich groß sind. Der Parameter γ jeder einzelnen Geraden ergibt sich als Ordinate des Schnittpunktes mit der β-Achse, natürlich mit Hilfe der logarithmischen Leiter, so daß sich eine besondere Beschriftung erübrigt, wenn man die β-Leiter zugleich als γ-Leiter benutzt. Koordinatenpapier mit doppelter logarithmischer Teilung (sog. doppeltlogarithmisches Papier) ist im Handel erhältlich, da es wie das halblogarithmische in der Nomographie sehr oft benötigt wird.

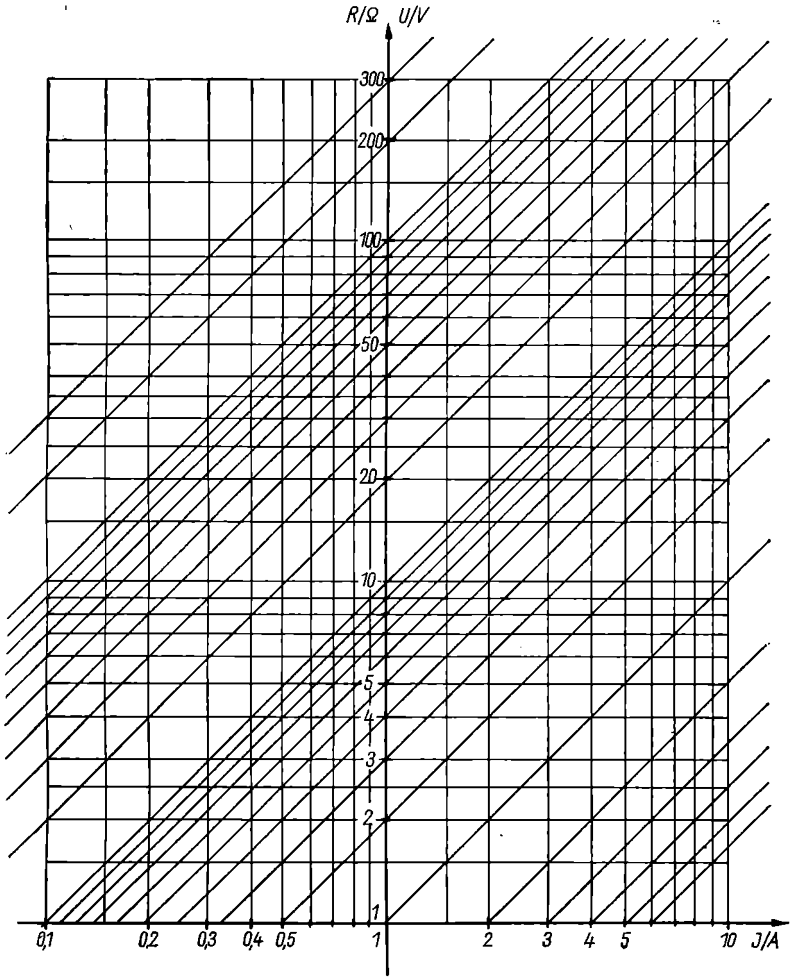


Abb. 5.21. a

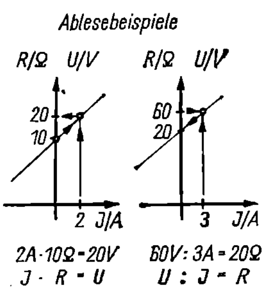


Abb. 5.21. b

Eine Verstreckung der Kurven durch Einführung beliebig geteilter Leitern ist allerdings nicht immer in praktisch sinnvoller Weise möglich. So würde z.B. die Funktion, die der in Abbildung 5.2. dargestellten Netztafel zugrunde liegt, für eine Verstreckung der Kurvenschar folgende Überlegungen erfordern:

$$s = 0{,}5\,\mathrm{s}\,c - \frac{c^2}{2a}$$

schreibt man als zugeschnittene Größengleichung:

$$s/\mathrm{m} = 0{,}5\,\mathrm{s/s}\cdot c/\mathrm{m\,s^{-1}} - \frac{(c/\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\,a/\mathrm{m\,s^{-2}}}.$$

Mit $c = \alpha \, \mathrm{m\,s^{-1}}$; $s = \beta \, \mathrm{m}$; $a = \gamma \, \mathrm{m\,s^{-2}}$ erhält man daraus die Zahlenwertgleichung

$$\beta = 0{,}5\,\alpha - \frac{\alpha^2}{2\gamma}.$$

Diese könnte folgendermaßen umgeformt werden:

$$\beta = -\frac{1}{2\gamma}(\alpha^2 - \gamma\alpha);$$

$$\beta = -\frac{1}{2\gamma}\left(\alpha^2 - \gamma a + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{\gamma}{8};$$

$$\beta = -\frac{1}{2\gamma}\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{8}.$$

Würde jetzt die α-Achse mit einer quadratischen Leiter nach $u = \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)^2$ versehen, so wäre eine Verstreckung der Kurvenschar nach $\beta = -\frac{1}{2\gamma}u + \frac{\gamma}{8}$ zwar erreicht, doch hinge die quadratische Teilung und auch die Neigung der einzelnen Geraden vom Parameter γ ab. Beide wären also nicht einheitlich für die gesamte Kurvenschar. Das würde eine weitaus größere Komplikation des Nomogramms bedeuten, als der Vorteil der Verstreckung einbringt.

● **Aufgaben**

Die Blätter 1–5 der Nomogrammsammlung enthalten Netztafel-Nomogramme verschiedener Art. Mit ihnen sind die folgenden Übungsaufgaben zu lösen. Die Blätter der Nomogrammsammlung enthalten nicht immer ein durchgehendes Grundraster, das für die Ablesung sehr vorteilhaft ist. Es wird daher empfohlen, ein solches einfaches linear unterteiltes, quadratisches Raster sauber auf Transparentpapier zu zeichnen und dieses Blatt dann bei der Ablesung als Deckblatt zu benutzen.

1. (Übungsblatt 1)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

D/cm	12	4,5	9	11,2		
d/cm	5	2			6	7,5
A/cm²			30	25	120	87

b) Was ergibt sich, wenn $d = 0$ cm gewählt wird? Bilden Sie Beispiele und überprüfen Sie die Genauigkeit der Ablesung!

c) Was erhalten Sie, wenn $D = d$ gewählt wird? Deuten Sie das Ergebnis!

2. (Übungsblatt 2)

a) Es ist ψ für folgende Querschnitte zu bestimmen.

A_0/cm²	50	32	12,5	28
A_B/cm²	10	17	10	25

b) Deuten Sie die Ergebnisse für $A_0 = A_B$!

c) Was müßte sich für $A_B = 0$ ergeben? Folgern Sie daraus die Extrapolation (Erweiterung) des Nomogramms über die linke Begrenzung hinaus!

3. (Übungsblatt 3)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

R/kΩ	2,7	3,75			3,5	2,25
L/H	4	2,5	6	3		
R_s/kΩ			4	1,3	4,5	3,75

b) Was ergibt sich für $L = 0$? Wie müßte die zugehörige Gerade verlaufen?

c) Was folgt für $R = 0$? Was bedeuten die Zahlen an der R_s-Achse in den Schnittpunkten mit den L-Geraden?

4. (Übungsblatt 4)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

P_{zu}/kW	22	4,5	3,5	55		
P_{ab}/kW	20	3,8			13,5	33
η/%			85	92	77	88

b) Wie zeigt sich am Nomogramm, daß stets gelten muß $P_{zu} \geqq P_{ab}$? Beurteilen Sie eine Maschine, für die $P_{zu} = P_{ab}$ zutrifft!

5. (Übungsblatt 5)

Die folgende Tabelle ist zu ergänzen.

F/kp	75	350	700	85		
v/m s^{-1}	4	0,8			25	1,6
P/PS			20	85	42	9,5

6. (Übungsblatt 6)

Das Nomogramm stellt das sogenannte Sägezahndiagramm dar. Da die Schnittgeschwindigkeiten bei Drehmaschinen nach oben und nach unten begrenzt sind (im Nomogramm sind $v_{min} = 12$ m min^{-1} und $v_{max} = 20$ m min^{-1} angenommen worden), macht sich bei bestimmten Werkstückdurchmessern ein Übergang zur nächsthöheren bzw. nächstniederen Drehzahlstufe erforderlich. Im Nomogramm ist eine Stufung nach $n = 30, 50, 88, 139, 232, 386, 643$ min^{-1} angenommen worden. Das Nomogramm ermöglicht es also, zu vorgegebenen Werkstückdurchmessern eindeutig die beste Drehzahl anzugeben, umgekehrt lassen sich aber zu gegebenen Drehzahlen nur Durchmesserbereiche für die Werkstücke bestimmen.

a) Für folgende Werkstückdurchmesser d/mm ist die optimale Drehzahl zu bestimmen.

10, 20, 45, 77, 160

b) Welche Werkstückdurchmesser können mit den folgenden Drehzahlen n/min^{-1} bearbeitet werden?

30, 88, 139, 643

c) Bei welchen Drehzahlen ergeben sich große Bereiche?

d) Welche Werkstückdurchmesser erfordern besondere Sorgfalt in der Auswahl der Drehzahl?

7. (Übungsblatt 7)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

α	50°	20°			45°	22°
β			30°	42°	25°	10°
n	1,51	1,75	1,62	1,33		

b) Beim Übergang von einem optisch dichteren (β) in ein optisch dünneres Medium (α) gibt es jeweils einen Grenzwinkel, bei dem der Lichtstrahl nicht mehr in das andere Medium übertreten kann, sondern an der Trennungsfläche wie von einem Spiegel reflektiert wird. Für die im Nomogramm angegebenen Medien sind diese Grenzwinkel der Totalreflexion zu bestimmen.

c) $\delta = \alpha - \beta$ ist der Ablenkungswinkel des Lichtstrahls.
Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

α	45°	52°			38°	70°		
β			23°	17°			36°	10°
δ					16°	40°	15°	10°
n	2,42	1,62	1,75	2,42				

d) Wie groß ist δ für die im Nomogramm angegebenen Medien beim Grenzwinkel der Totalreflexion?

8. (Übungsblatt 8)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

b/cm	9	35	10,5	20	35	8,4				
g/cm	20	15					12,5	40	25	7
f/cm			7	10			8,5	10		
D/m^{-1}					5	15			10	18

D heißt die Brechkraft der Linse. Ihre Maßeinheit m^{-1} wird vom Optiker meist Dioptrie genannt.

b) Wie kann man rasch mit Hilfe des Nomogramms diejenigen Bild- und Gegenstandsweiten für die verschiedenen Brennweiten finden, für die $b = g$ gilt?

c) Wird der Gegenstand innerhalb der Brennweite aufgestellt ($g < f$), so ergibt sich kein reelles Bild. Woran kann man das am Nomogramm erkennen?

5.4. Dreileitertafeln

Eine grundsätzlich andere, praktisch besonders häufig verwendete Form von Nomogrammen sind die Dreileitertafeln. Bei ihnen wird jede der Variablen α, β, γ durch eine besondere Leiter auf einem besonderen Träger dargestellt, wobei die Träger und ihre Leitern so gewählt werden, daß die Punkte mit solchen Beschriftungen α_i, β_i, γ_i, die nach der durch die Dreileitertafel dargestellten Funktion einander zugeordnet sind, jeweils auf einer Geraden (der Ablesegeraden) liegen. Die Träger können beliebige Kurven, im einfachsten Fall Geraden sein. Die Geraden wiederum können beliebig zueinander verlaufen, in den einfachsten Fällen durch einen gemeinsamen Punkt gehen oder parallel zueinander liegen. Die zuletzt genannten Fälle ergeben besonders übersichtliche und ohne Schwierigkeiten benutzbare Nomogramme. Für den Arbeitsplatz des Facharbeiters sind allerdings Netztafeln besser geeignet, denn für Leitertafeln benötigt man eine ebene Unterlage.

Beispiel 10:

Für die in Abbildung 5.19. durch eine Netztafel dargestellte Additions- und Subtraktionsbeziehung $\alpha + \beta = \gamma$ soll eine Dreileitertafel mit parallelen, abstandsgleichen Geraden konstruiert werden.

Das Ergebnis, im Verhältnis 1:2 verkleinert, zeigt die Abbildung 5.22. Damit die Ablesegerade[1] bei jeder beliebigen Lage drei nach $\alpha + \beta = \gamma$ einander zugeordnete Punkte auf den drei Leitern verbindet, ist es notwendig, diese Leitern so zu konstruieren und auf den Trägern so anzuordnen, daß die Schlüsselgleichung erfüllt wird. Darunter versteht man eine Beziehung zwischen den drei Leitern, die sich aus den geometrischen Besonderheiten des Nomogramms ergibt. Zu jeder besonderen Art und Lage der drei Träger gehört eine spezifische Schlüsselgleichung. Für drei parallele, abstandsgleiche, geradlinige Träger folgt aus der Abbildung 5.23. die

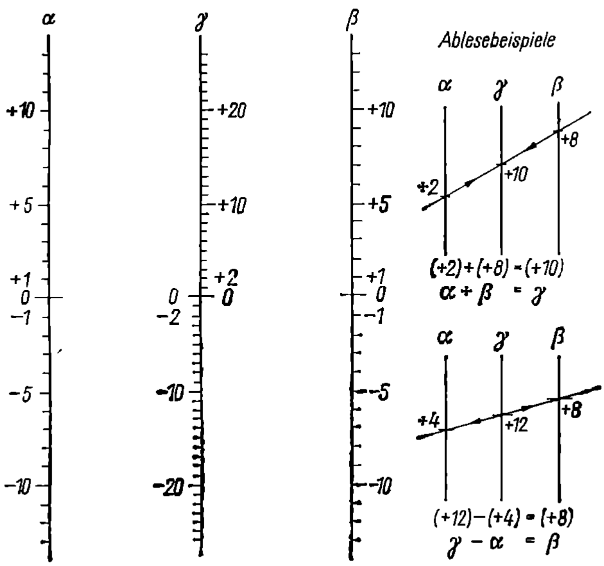


Abb. 5.22.

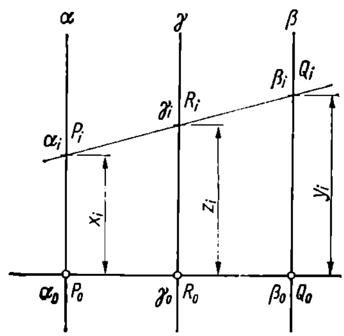


Abb. 5.23.

[1] Diese Geraden werden bei der Benutzung des Nomogramms nicht eingezeichnet, sondern nur mechanisch angelegt. Dazu kann ein gespannter Faden, eine auf Transparentpapier gezeichnete Gerade oder noch besser eine in Plexiglas eingeritzte dünne Linie dienen. Letztere wird man zweckmäßig mit schwarzer Ausziehtusche einfärben. Notfalls ist auch eine Linealkante verwendbar.

Trapezbeziehung für drei beliebige, mit α_i, β_i, γ_i beschriftete Punkte, deren Entfernungen von den Leiteranfangspunkten x_i, y_i, z_i seien mögen:

$$z_i = \frac{x_i + y_i}{2} \text{ oder } x_i + y_i = 2z_i .$$

Voraussetzung dafür ist, daß den Anfangspunkten P_0, Q_0, R_0 der Leitern Zahlenwerte α_0, β_0, γ_0 zugeordnet sind, die ebenfalls der im Nomogramm dargestellten Beziehung genügen.

Wegen

$$x = l_1 \cdot f_1(\alpha); \; y = l_2 \cdot f_2(\beta); \; z = l_3 \cdot f_3(\gamma)$$

folgt schließlich die Schlüsselgleichung für drei parallele, abstandsgleiche, geradlinige Leitern:

$$l_1 \cdot f_1(\alpha) + l_2 \cdot f_2(\beta) = 2 l_3 \cdot f_3(\gamma)$$

mit der Bedingung, daß die zu $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$ gehörenden Werte α_0, β_0, γ_0 die im Nomogramm dargestellte Beziehung erfüllen, also einander zugeordnete Werte der Variablen sind.

Die drei Leitern müssen jetzt so nach $u = f_1(\alpha)$, $v = f_2(\beta)$, $w = f_3(\gamma)$ und mit solchen Zeicheneinheiten l_1, l_2, l_3 konstruiert werden, daß die Schlüsselgleichung mit der im Nomogramm darzustellenden Beziehung $\alpha + \beta = \gamma$ in Übereinstimmung kommt.

$$\begin{aligned} l_1 \cdot f_1(\alpha) + l_2 \cdot f_2(\beta) &= 2 l_3 \cdot f_3(\gamma) \\ \alpha + \qquad \beta &= \qquad \gamma \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f_1(\alpha) = \alpha; \; f_2(\beta) = \beta; \; f_3(\gamma) = \gamma$$

und $\quad l_1 = 1e; \quad l_2 = 1e; \quad 2l_3 = 1e \quad$ oder $\quad l_3 = \frac{1}{2}e,$

wobei e eine willkürliche Einheit, z.B. 5 mm, bedeutet. Auf der Mittelleiter ist dann die halbe Einheit, also 2,5 mm, als Zeicheneinheit zu verwenden, wenn die ganze Einheit e als Zeicheneinheit auf den Außenleitern verwendet wird.

Aus $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$ folgt $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$. (Tatsächlich erfüllen $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ die Beziehung $\alpha + \beta = \gamma$.) Auf Grund dieser Überlegungen wurde das Nomogramm (Abb. 5.22.) konstruiert.

● **Aufgaben**

Die zur Abbildung 5.19. in 5.3. angewiesenen Aufgaben 1 und 2 sind auch mit Hilfe der Abbildung 5.22. zu lösen.

5.4.1. Beliebig geteilte, abstandsgleiche, parallele Leitern

Auch nichtlinear geteilte Leitern können bei Dreileitertafeln erforderlich werden, wenn α, β oder γ in der darzustellenden Funktion nichtlinear sind. Außerdem kann gelegentlich eine Beschränkung des Meßbereichs der Leitern zweckmäßig sein.

Beispiel 11:

Es ist ein Nomogramm für die pythagoreische Beziehung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ für $\alpha_{min} = 2 \ldots \alpha_{max} = 12$, $\beta_{min} = 2 \ldots \beta_{max} = 12$ für eine Leiterhöhe $h = 140$ mm zu entwerfen.

Aus $\alpha_{min}^2 + \beta_{min}^2 = \gamma_{min}^2$ folgt $\gamma_{min} = 2\sqrt{2}$.

Aus $\alpha_{max}^2 + \beta_{max}^2 = \gamma_{max}^2$ folgt $\gamma_{max} = 12\sqrt{2}$.

Also: $\gamma_{min} = 2\sqrt{2} \ldots \gamma_{max} = 12\sqrt{2}$.

Aus dem Vergleich mit der Schlüsselgleichung

$$\begin{aligned} l_1 \cdot f_1(\alpha) + l_2 \cdot f_2(\beta) &= 2\, l_3 f_3(\gamma) \\ \alpha^2 + \quad \beta^2 &= \quad \gamma^2 \end{aligned}$$

folgt: $f_1(\alpha) = \alpha^2$; $\quad f_2(\beta) = \beta^2$; $\quad f_3(\gamma) = \gamma^2$

$l_1 = 1e$; $\quad l_2 = 1e$; $\quad l_3 = \frac{1}{2}e$.

Aus $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$ folgt $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$. (Tatsächlich ist dadurch die Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ erfüllt.)

Es müssen also drei quadratische Leitern nach $u = \alpha^2$; $v = \beta^2$; $w = \gamma^2$ konstruiert werden. Bei der Berechnung der Zeicheneinheiten unter Berücksichtigung der vorgeschriebenen Leiterhöhe h ist zu beachten, daß die Anfangspunkte der Leitern nicht α_0, β_0, γ_0, sondern α_{min}, β_{min}, γ_{min} sein sollen.

$$l_1 = \frac{h}{f_1(\alpha_{max}) - f_1(\alpha_{min})} = \frac{h}{\alpha_{max}^2 - \alpha_{min}^2} = \frac{140\,\text{mm}}{144 - 4} = 1\,\text{mm} = 1e$$

$$l_2 = \frac{140\,\text{mm}}{144 - 4} = 1\,\text{mm} = 1e$$

$$l_3 = \frac{140\,\text{mm}}{288 - 8} = \frac{1}{2}\,\text{mm} = \frac{1}{2}e$$

Bei allen drei Leitern ist also $e = 1$ mm. Sie sind außerdem so zu legen, daß die Punkte mit $\alpha_{min} = 2$; $\beta_{min} = 2$; $\gamma_{min} = 2\sqrt{2}$ als Anfangspunkte auf einer Geraden liegen (Abb. 5.24.). Das abgebildete Nomogramm ist im Verhältnis 1 : 2 verkleinert worden.

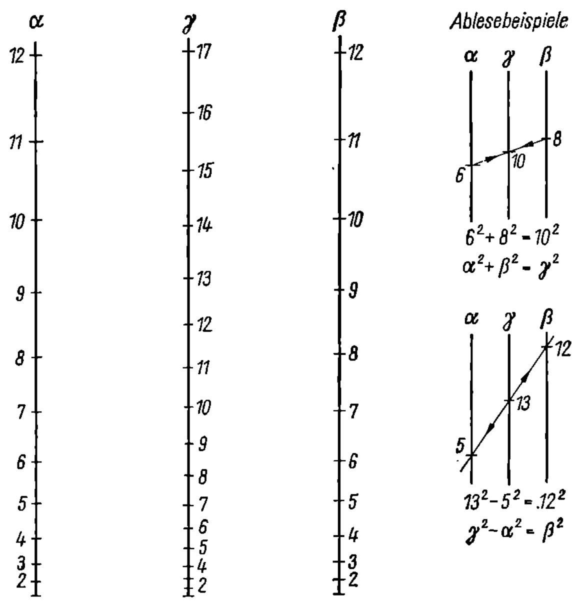


Abb. 5.24.

Aufgaben

1. Es sind pythagoreische Zahlentripel, d.h. ganze Zahlen α, β, γ, die die pythagoreische Beziehung erfüllen, mit Hilfe der Abbildung 5.24. zu bestimmen.

2. Es sind mit Hilfe der Abbildung 5.24. Näherungswerte für folgende Wurzeln zu bestimmen.

$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{2^2+1^2}$ $\qquad$ $\sqrt{13}$; $\sqrt{91}$; $\sqrt{244}$; $\sqrt{220}$

$\sqrt{5} = \sqrt{9-4} = \sqrt{3^2-2^2}$ $\qquad$ $\sqrt{51{,}14} = \sqrt{6{,}25+44{,}89} = \sqrt{2{,}5^2+6{,}7^2}$

Bilden Sie selbst weitere Beispiele!

5.4.2. Parallele, geradlinige Leitern in beliebigen Abständen

Die Schlüsselgleichung für diese Dreileitertafel läßt sich an Hand der Abbildung 5.25. dadurch aufstellen, daß man den Flächeninhalt des großen Trapezes als Summe der Flächeninhalte der beiden kleinen Teiltrapeze ausdrückt:

$$(a+b)\frac{x_i+y_i}{2} = a\frac{x_i+z_i}{2} + b\frac{z_i+y_i}{2}.$$

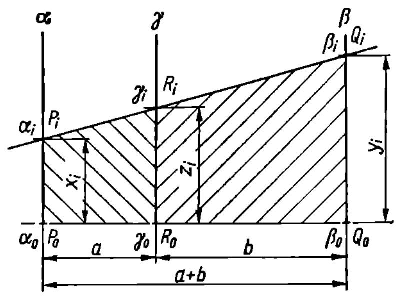


Abb. 5.25.

Daraus folgt durch Umstellen die Schlüsselgleichung für drei parallele, geradlinige Leiter, die in den Abständen a (zwischen α- und γ-Leiter) und b (zwischen γ- und β-Leiter) verlaufen:

$$b x_i + a y_i = (a+b) z_i \quad \text{oder}$$

$$b l_1 f_1(\alpha) + a l_2 f_2(\beta) = (a+b) l_3 f_3(\gamma).$$

Dabei sind den Anfangspunkten P_0, Q_0, R_0 der Leitern Zahlenwerte α_0, β_0, γ_0 zugeordnet, die der im Nomogramm dargestellten Funktion genügen und für die außerdem $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$ gilt. $a+b$ heißt die Nomogrammbreite. Sind die Anfangspunkte der Leitern nicht durch α_0, β_0, γ_0 für $f_1(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = f_3(\gamma_0) = 0$, sondern durch $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$, $\gamma_{\min}$ vorgeschrieben, die dann als einander zugeordnete Werte die im Nomogramm dargestellte Funktion erfüllen müssen, so muß das bei der Berechnung der Zeicheneinheiten entsprechend berücksichtigt werden.

Beispiel 12:

Es ist eine Dreileitertafel mit drei parallelen, geradlinigen Leitern zur Ermittlung der Leistung P eines elektrischen Widerstands R bei einer Stromstärke I nach der Beziehung $P = I^2 \cdot R$ zu konstruieren.

Meßbereiche: $I_{\min} = 0{,}2\ \mathrm{A} \ldots I_{\max} = 2\ \mathrm{A}$
$R_{\min} = 5\,\Omega \ \ldots\ R_{\max} = 50\,\Omega$

Leiterhöhe $h = 120$ mm; Nomogrammbreite $a + b = 90$ mm

Mit $I = \alpha\mathrm{A}$; $R = \beta\Omega$, $P = \gamma\mathrm{W}$ ergibt sich aus der zugeschnittenen Größengleichung $\frac{P}{\mathrm{W}} = \left(\frac{I}{\mathrm{A}}\right)^2 \cdot \frac{R}{\Omega}$ die Zahlenwertgleichung $\gamma = \alpha^2 \cdot \beta$.

Durch Logarithmieren erhält man $2 \lg \alpha + \lg \beta = \lg \gamma$.

Der Vergleich mit der Schlüsselgleichung $b\, l_1 f_1(\alpha) + a\, l_2 f_2(\beta) = (a + b) l_3 f_3(\gamma)$ ergibt zunächst $f_1(\alpha) = \lg \alpha$; $f_2(\beta) = \lg \beta$; $f_3(\gamma) = \lg \gamma$.

Es sind also drei logarithmisch geteilte Leitern zu konstruieren nach $u = \lg \alpha$; $v = \lg \beta$; $w = \lg \gamma$.
Der Wertebereich der γ-Leiter folgt aus den Bereichen der α- und β-Leiter.

$$\gamma_{\min} = \alpha_{\min}^2 \cdot \beta_{\min} = 0{,}2$$
$$\gamma_{\max} = \alpha_{\max}^2 \cdot \beta_{\max} = 200$$

Zur Bestimmung der Zeicheneinheiten $l_1 = l_2$ und l_3 sowie der Leiterabstände a und b ergeben sich folgende Bedingungen:

$$b \cdot l_1 = 2e;$$
$$a \cdot l_2 = e;$$
$$\overline{b : a \;= 2 l_2 : l_1.}$$

$$l_1 = \frac{120\text{ mm}}{f(\alpha_{\max}) - f(\alpha_{\min})} = \frac{120\text{ mm}}{\lg 2 - \lg 0{,}2} = \frac{120\text{ mm}}{\lg 2 - (\lg 2 - \lg 10)} = 120\text{ mm}$$

$$l_2 = \frac{120\text{ mm}}{\lg 50 - \lg 5} = \frac{120\text{ mm}}{\lg 10 + \lg 5 - \lg 5} = 120\text{ mm}$$

$$l_3 = \frac{120\text{ mm}}{\lg 200 - \lg 0{,}2} = \frac{120\text{ mm}}{\lg 2 + \lg 100 - (\lg 2 - \lg 10)} = 40\text{ mm}$$

Folglich ergibt sich $b : a = 2 \cdot 120 : 120 = 2 : 1$. Wegen $a + b = 90$ mm folgt $b = 60$ mm; $a = 30$ mm.
Das Nomogramm ist mit diesen Werten so zu konstruieren, daß die Anfangspunkte mit $\alpha_{\min} = 0{,}2$; $\beta_{\min} = 5$; $\gamma_{\min} = 0{,}2$ auf einer Geraden liegen. Diese Werte erfüllen tatsächlich die Bedingung $\gamma = \alpha^2 \cdot \beta$ (Abb. 5.26.)

Das abgebildete Nomogramm ist im Verhältnis 1: 2 verkleinert worden.

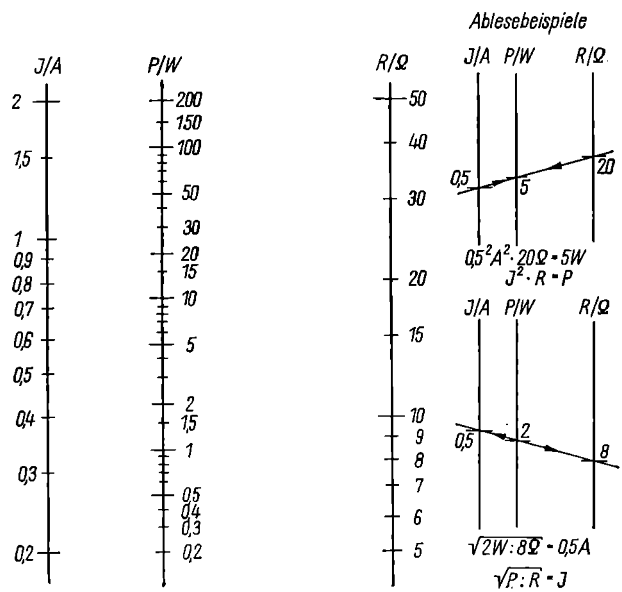


Abb. 5.26.

Aufgaben

1. Die in folgender Tabelle fehlenden Werte sind durch Näherungswerte mit Hilfe des Nomogramms in Abbildung 5.26. zu ergänzen.

I/A	1		1,5	0,5		1,8
R/Ω	5	40		20	50	
P/W		100	80		50	45

Die Blätter 9 bis 16 der Nomogrammsammlung enthalten Dreileitertafel-Nomogramme. Mit ihnen sind die folgenden Übungsaufgaben zu lösen.

2. (Übungsblatt 9)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

R_1/Ω	1,2	4,5	5	1,25		
R_2/Ω	2,5	1,8			10	2,8
R/Ω			1	0,75	1,5	0,9

b) Das Nomogramm ist auch für andere Einheiten verwendbar, sofern sie nur bei R_1, R_2 und R jeweils gleich sind. Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

R_1	6 kΩ	1,1 MΩ	2,5 kΩ	8 MΩ		
R_2	4 kΩ	5,5 MΩ			3,6 kΩ	1,4 MΩ
R			1,5 kΩ	2 MΩ	1,3 kΩ	1,1 MΩ

c) Bei Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand R stets kleiner als der kleinste der Teilwiderstände R_1 oder R_2. Wie zeigt sich das am Nomogramm? (Versuchen Sie, eine Lage der Ablesegeraden zu finden, die das widerlegt!)

d) Das Nomogramm läßt sich auch für die verallgemeinerte Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

verwenden. Man muß dann mehrfach ablesen, indem man zunächst zwei Teilwiderstände zusammenfaßt, das Ergebnis als neuen Ausgangswiderstand mit dem dritten Teilwiderstand vereinigt usw.

Ermitteln Sie auf diese Weise die unbekannten Widerstände in folgenden Beziehungen!

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{6\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{3\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{1{,}5\,\mathrm{k\Omega}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4\,\mathrm{M\Omega}} + \frac{1}{3\,\mathrm{M\Omega}} + \frac{1}{9\,\mathrm{M\Omega}} + \frac{1}{2{,}5\,\mathrm{M\Omega}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1{,}8\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{4{,}5\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega}$$

$$\frac{1}{2\,\Omega} = \frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{R_3}$$

3. (Übungsblatt 10)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

s/mm	144	195	75	175		
d/mm	110	75			110	95
v/l			1,2	3,5	1,5	1,7

b) Untersuchen Sie mit dem Nomogramm die Daten bekannter Kraftfahrzeugmotore!

c) Was für Teilungen haben die Leitern dieses Nomogramms?

4. (Übungsblatt 11)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

m/t	0,85	4,2	2,5	0,6		
v/kmh^{-1}	25	8,5			15	55
W/Mpm			2,5	3	4,5	10

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Nomogramms, in welchem Verhältnis sich die kinetische Energie ändert, wenn
(1) die Masse, (2) die Geschwindigkeit, (3) beide zugleich verdoppelt werden,
(4) die Masse um 50 %, (5) die Geschwindigkeit um 50 %, (6) beide zugleich um je 25 % geringer werden!

c) Ist es möglich, eine Vergrößerung der Masse durch eine Verringerung der Geschwindigkeit auszugleichen, so daß die kinetische Energie dieselbe bleibt? In welchen Verhältnissen müssen diese Änderungen vorgenommen werden? Untersuchen Sie das mit Hilfe des Nomogramms!

d) Führen Sie die Untersuchungen wie bei **c)** für den Fall durch, daß die Masse verringert und die Geschwindigkeit vergrößert wird!

5. (Übungsblatt 12)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

a/cm	3,5	8,2	5,3	1,7		
h/cm	27	65			90	38
m/kg			6	0,8	10	15

b) Das Nomogramm läßt sich auch für andere Einheiten verwenden. In welcher Einheit ergibt sich m, wenn a und h in dm gemessen werden? Überlegen Sie noch weitere Zusammenstellungen!

c) Was wirkt sich auf die Masse stärker aus, eine Verdopplung von a oder eine Verdopplung von h? Wie ergibt sich das bei der Nomogrammablesung, obwohl eine Verdopplung von a und von h auf beiden Leitern eine Verlagerung der Ablesestelle um gleiche Strecken bedeutet?

6. (Übungsblatt 13)

a) Vergleichen Sie Nomogramm 13 mit Nomogramm 12! Beide sind für ganz ähnliche Berechnungen aufgestellt. Worin liegen die Unterschiede? (Achten Sie auf die Leiteranordnung, die Leiterteilungen, die Einheiten der dargestellten Größen!)

b) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

l/m	45	3,5	80	2,5		
d/mm	2	7,5			1,5	0,45
m/kg			20	0,001	0,1	0,03

7. (Übungsblatt 14)

Das Nomogramm hat N-Form; der mittlere Träger verläuft nicht parallel zu den äußeren Trägern. Das erleichtert in manchen Fällen die Ablesung und steigert die Genauigkeit. Die Benutzung entspricht der bei Nomogrammen mit drei parallelen Trägern.
Ferner enthält das Nomogramm auf dem rechten Außenträger eine „rückläufige" Leiter. Das ist beim Anlegen der Ablesegeraden zu beachten.
Schließlich wird auf zwei Wegen eine Erweiterung des Anwendungsbereichs erreicht. Einmal enthalten die beiden äußeren Leitern je 3 Ablesebereiche A, B und C, von denen jeweils entsprechend bezeichnete bei der Benutzung zusammen verwendet werden müssen (A mit A, B mit B, C mit C). Zweitens können die Einheiten, wieder auf beiden Leitern zugleich, verändert werden: Ω, kΩ, MΩ usw. (vgl. dazu Aufgabe 2).

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

R_v	30 Ω	8 kΩ	500 Ω	3 MΩ	15 kΩ	5,5 MΩ
l/cm	65	46	33	73	52	31
R_x						

b) Die Widerstandbestimmung mit der Meßbrücke wird nicht sehr genau, wenn der Abgriff nahe bei den Enden des Meßdrahts liegt. Das kann durch geeignete Wahl des Vergleichswiderstands R_v vermieden werden. Ermitteln Sie mit Hilfe des Nomogramms zweckmäßige Vergleichswiderstände, wenn der Abgriff zwischen 40 cm und 60 cm liegen soll und die zu messenden Widerstände R_x folgende Größenordnungen erwarten lassen!

2 Ω···5 Ω;	15 kΩ···25 kΩ;	7 MΩ···12 MΩ
700 Ω···1000 Ω;	6 kΩ···15 kΩ;	0,5 MΩ··· 3 MΩ
etwa 250 Ω;	etwa 750 kΩ;	etwa 6 MΩ

8. (Übungsblatt 15)

a) Auch dieses Nomogramm ist aus einer N-Form entstanden.
Warum enthält der mittlere Träger nur einen kurzen Leiterausschnitt?

b) Wie sind die Leitern auf den drei Trägern beschaffen?

c) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

f_0/Torr	17,3	11,2	13,2	10,2		
f/Torr	12,4	9,9			10,6	14,3
Φ/%			54	95	72	84

d) Überprüfen Sie die Richtigkeit der beiden äußeren Leitern mit Hilfe des Punktes für $\Phi = 100\,\%$!

e) Es muß immer gelten $f \leqq f_0$, da die relative Feuchtigkeit höchstens (beim Sättigungszustand) 100 % betragen kann. Wie zeigt sich das am Nomogramm?

9. (Übungsblatt 16)

Das Nomogramm enthält drei Träger, die sich in einem Punkte schneiden. Diese Form der Dreileitertafeln hat mitunter gewisse Vorzüge in bezug auf die Ablesegenauigkeit.
Bei gewissen Maschinen, die nur in einer Richtung Arbeit verrichten, in der anderen Richtung das Werkzeug aber im Leerlauf zurückholen müssen (z.B. Hobelmaschinen), läßt man den zweiten Takt mit größerer Geschwindigkeit ablaufen als den Arbeitsgang ($v_r > v_a$). Beispielsweise für die Ermittlung der Leistung rechnet man dann mit einer mittleren Geschwindigkeit v_m.

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

$v_a/\text{m min}^{-1}$	32	17	40	26	
$v_r/\text{m min}^{-1}$	58	35		42	22
$v_m/\text{m min}^{-1}$			50	35	38	17

b) Wie groß wird v_m für $v_a = v_r$? Rechnen Sie, und überprüfen Sie damit das Nomogramm!

5.5. Verbundene Nomogramme

Funktionale Beziehungen, Berechnungsformeln usw., für die sich nomographische Methoden lohnen, enthalten meist mehr als drei Variable, z.B. $R = \frac{4\varrho l}{\pi d^2}$ (Widerstand eines Drahtes; vier Variable); $m = \frac{\pi}{4}\varrho h\,(D^2 - d^2)$ (Masse eines Rohrstückes; fünf Variable)
Da jedes Nomogramm nur Beziehungen zwischen drei Variablen darzustellen erlaubt, wird bei vier Variablen so verfahren, daß zunächst zwei dieser Variablen zu einer Hilfsvariablen H zusammengefaßt werden.

■ **Beispiel 13:**

Stündlicher Wärmedurchgang Q durch eine Wandfläche von der Größe A bei einem Temperaturgefälle Δt zu beiden Seiten der Wand: $Q = k \cdot A \cdot \Delta t$. Hierin bedeutet k eine spezifische Konstante, die vom Material der Wand und von der Dicke abhängt. (Bei einer 25er Ziegelmauer ist z.B. $k = 1{,}7\,\frac{\text{kcal} \cdot \text{h}^{-1}}{\text{m}^2 \cdot \text{grd}}$.

Zur nomographischen Darstellung wird hier z.B. gesetzt

(1) $k \cdot A = H.$

Mit Hilfe der Hilfsveränderlichen H ergibt sich dann

(2) $H \cdot \Delta t = Q.$

Man geht also zur Bestimmung von Q gewissermaßen in zwei Schritten vor, wie es auch beim Rechnen üblich ist.

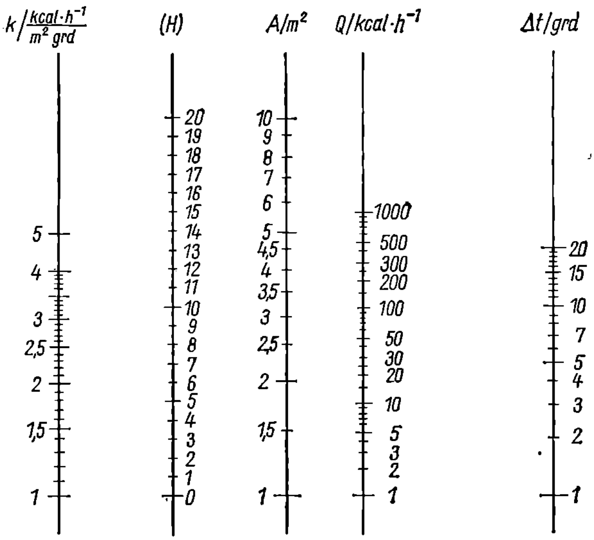
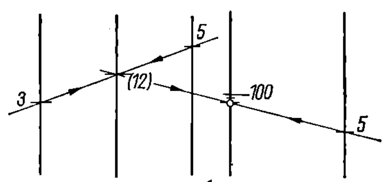


Abb. 5.27.

Wandmaterial		k
Glas	0,3 cm	5
Eisenbeton		
	5 cm	3,7
	12 cm	3
Holz	5 cm	2,1
Ziegel	25 cm	1,7
	38 cm	1,3
	50 cm	1,1

Ablesebeispiel



$$75\,kcal\cdot h^{-1} = 3\,\frac{kcal\cdot h^{-1}}{m^2\,grd}\cdot 5\,m^2\cdot 5\,grd$$

(für Eisenbeton 12 cm)

$$Q = k\cdot A\cdot \Delta t$$

Jede der Beziehungen (1) und (2) läßt sich jetzt durch ein Nomogramm darstellen. Beide Nomogramme haben die gleiche H-Leiter. Diese wird deshalb nur einmal gezeichnet, und die beiden Teilnomogramme werden auf diese Weise zu einem einzigen vereinigt (Abb. 5.27.).

Das abgebildete Nomogramm ist im Verhältnis 1 : 2 verkleinert worden.

Man sagt, durch die H-Leiter seien beide Nomogramme miteinander verbunden. Die H-Leiter heißt die Zapfenlinie, das Ganze ein verbundenes Nomogramm.
Da auf der Zapfenlinie keine Werte abgelesen werden, versieht man sie gewöhnlich mit keiner Leiter oder mit einer willkürlichen linear geteilten Behelfsleiter. Sie dient in der Praxis ja nur dazu, daß die erste Ablesegerade (k, $A \to H$) auf der H-Leiter einen Punkt bestimmt, der zur Festlegung der zweiten Ablesegerade (H, $\Delta t \to Q$) verwendet werden muß. Bei fünf Variablen legt die zweite Teilbeziehung zunächst eine zweite Hilfsvariable fest, mit deren Hilfe dann eine dritte Beziehung entsteht. Hier sind also drei Nomogramme durch zwei Zapfenlinien zu verbinden.

Es lassen sich, wie in Abbildung 5.27., Leitertafeln mit Leitertafeln verbinden, aber auch Netztafeln mit Netztafeln oder Leitertafeln mit Netztafeln zu verbundenen Nomogrammen vereinigen.

Zur Konstruktion von Abbildung 5.27:

(1′) $k \cdot A = H$ (2′) $H \cdot \Delta t = Q$

Aus den zugeschnittenen Größengleichungen

(1″) $k \Big/ \dfrac{\text{kcal h}^{-1}}{\text{m}^2\,\text{grd}} \cdot A/\text{m}^2 = H \Big/ \dfrac{\text{kcal h}^{-1}}{\text{grd}}$ und (2″) $H \Big/ \dfrac{\text{kcal h}^{-1}}{\text{grd}} \cdot \Delta t/\text{grd} = Q/\text{kcal h}^{-1}$

folgen mit

$$k = \alpha \frac{\text{kcal h}^{-1}}{\text{m}^2\,\text{grd}}; \quad A = \beta\,\text{m}^2; \quad H = \gamma \frac{\text{kcal h}^{-1}}{\text{grd}};$$

$$\Delta t = \delta\,\text{grd}; \qquad Q = \varepsilon\,\text{kcal h}^{-1}$$

die Zahlenwertgleichungen:

(1*) $\alpha \cdot \beta = \gamma$ (2*) $\gamma \cdot \delta = \varepsilon$

Logarithmiert: (1**) $\lg \alpha + \lg \beta = \lg \gamma$ (2**) $\lg \gamma + \lg \delta = \lg \varepsilon$

Meßbereiche: $\alpha_{\text{min}} = 1 \ldots \alpha_{\text{max}} = 5;$
$\beta_{\text{min}} = 1 \ldots \beta_{\text{max}} = 10;$
$\delta_{\text{min}} = 1 \ldots \delta_{\text{max}} = 20;$
Daraus folgt: $\varepsilon_{\text{min}} = 1 \ldots \varepsilon_{\text{max}} = 1000.$

Jedes der Nomogramme soll eine Dreileitertafel mit untereinander parallelen, abstandsgleichen Leitern werden. Daraus folgt durch Vergleich mit der Schlüsselgleichung:

(1) $\lg \alpha + \lg \beta = \lg \gamma$ (2) $\lg \gamma + \lg \delta = \lg \varepsilon$
$l_1 f_1(\alpha) + l_2 f_2(\beta) = 2 l_3 f_3(\gamma)$ $l_3 f_3(\gamma) + l_4 f_4(\delta) = 2 l_5 f_5(\varepsilon)$.

Alle Leitern sind also logarithmisch zu teilen. Die Zeicheneinheiten müssen so bestimmt werden, daß sie einerseits dem Vergleich zwischen dargestellter Funktion und Schlüsselgleichung entsprechen, andererseits die vorgeschriebenen Meßbereiche berücksichtigt werden. Das kann zu Widersprüchen führen, wenn man für alle Leitern gleiche Höhen h vorschreibt.
Einerseits folgt z.B. aus dem Vergleich von (1):

$$l_1 = 1e; \quad l_2 = 1e; \quad \text{also } l_1 = l_2.$$

Bei gleicher Leiterhöhe h ergäbe sich aber:

$$l_1 = \frac{h}{\lg 5 - \lg 1} = \frac{h}{\lg 5}; \qquad l_2 = \frac{h}{\lg 10 - \lg 1} = h,$$

also $l_1 \neq l_2$.

Da die Schlüsselgleichungen unter allen Umständen gelten müssen, werden zunächst diese berücksichtigt:

(1) $l_1 = 1e; \quad l_2 = 1e; \quad 2l_3 = 1e$, d.h. $l_3 = \frac{1}{2}e;$

(2) $l_3 = \frac{1}{2}e; \quad l_4 = \frac{1}{2}e; \quad 2l_5 = \frac{1}{2}e$, d.h. $l_5 = \dfrac{1}{4}\,e.$

Ist nun eine maximale Leiterhöhe von z.B. $h = 100$ mm vorgeschrieben, so würden sich daraus folgende Zeicheneinheiten ergeben:

$$l_1 = \frac{100\ \text{mm}}{\lg 5 - \lg 1} \approx 143\ \text{mm}\,; \quad l_2 = \frac{100\ \text{mm}}{\lg 10 - \lg 1} = 100\ \text{mm}\,;$$

$$l_4 = \frac{100\ \text{mm}}{\lg 20 - \lg 1} \approx 77\ \text{mm}; \quad l_5 = \frac{100\ \text{mm}}{\lg 1000 - \lg 1} \approx 33\ \text{mm}\,.$$

Wegen der Forderung $l_1 = l_2$ muß entweder $e = 143$ mm oder $e = 100$ mm sein. Im ersten Falle würde aber der Meßbereich von β erfordern, daß die Leiter bis $\beta_{\max} = 10$ verlängert würde, man also die Leiterhöhe $h = 100$ mm überschreiten müßte. Deshalb bleibt nur $e = 100$ mm. Damit wird unter Berücksichtigung der Schlüsselgleichung: $l_1 = l_2 = 100$ mm; ($l_3 =$) $l_4 = 50$ mm; $l_5 = 25$ mm.

Das hat zur Folge, daß die Leitern des Nomogramms nicht mehr gleiche Höhen haben. Die Nomogrammhöhe ist dann die der längsten Leiter, hier der β-Leiter. So ist das Nomogramm der Abbildung 5.27. entstanden.

Aufgaben

1. Die in folgender Tabelle fehlenden Werte sind durch Näherungswerte mit Hilfe des Nomogramms (Abb. 5.27.) zu ergänzen.

k: Material	Eisenbeton	Ziegel	Ziegel	
k: Dicke/cm	5	38	51	
A/m^2	4	3		2
Δt/grd	3		10	20
Q/kcal · h^{-1}		50	20	200

Die Blätter 17 bis 24 der Nomogrammsammlung enthalten verbundene Nomogramme. Mit ihnen sind folgende Aufgaben zu lösen.

2. (Übungsblatt 17; zwei verbundene Leitertafeln)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

a/cm	6	2,5	4,2	1,5	5,5	3,2		
b/cm	3	5,8	4,9	5,3			5,7	1,2
c/cm	5	3,4			4,2	2,1	4,6	1,5
d/cm			7,2	6,1	8,2	5,5	9,3	4,2

b) Woran zeigt es sich im Nomogramm, daß die Quaderkanten a, b, c völlig gleichwertig und untereinander mit ihren Größen vertauschbar sind?

c) Was ergibt sich für $a = b = c$?

3. (Übungsblatt 18; zwei verbundene Leitertafeln)

In dem Nomogramm sind zwei Leitern (für l und für R) auf demselben Träger aufgetragen. Das erfordert besondere Sorgfalt beim Ablesen auf diesem Träger. Die A-Leiter ist gegenläufig.

Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

$\varrho/\Omega\mathrm{mm}^2\mathrm{m}^{-1}$	0,028	0,074	0,06	0,08	0,10	0,016		
l/m	52	30	80	15			80	25
A/mm²	1	2,5			0,6	1,5	1,2	0,8
R/Ω			3	0,4	10	0,2	5	0,5

4. (Übungsblatt 19; zwei verbundene Leitertafeln)

Die zweite Leitertafel ist in N-Form konstruiert.

a) Für die folgenden Kegelmaße ist der Einstellwinkel zu bestimmen.

d/cm	10	2,4	6,3	8,6	7,3
D/cm	20	8,2	9,5	15	10,5
l/cm	4	7,5	8,2	5,5	6

b) Welcher Einstellwinkel muß sich für $d = D$ ergeben?
Überprüfen Sie damit das Nomogramm!

5. (Übungsblatt 20; zwei verbundene Netztafeln)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

m/t	450	720	500	320	1000	900
w/%	40	15	10	32	30	38
M/t			600	250	20	
W/%	30	20				25

b) Vergleichen Sie die beiden Netztafeln miteinander!

c) Es wäre möglich, auch nur mit einer der beiden Netztafeln auszukommen. Wie müßte dann die Ablesevorschrift geändert werden?

d) Ermitteln Sie auf diesem Wege nochmals die fehlenden Werte der Tabelle unter a)!

6. (Übungsblatt 21; zwei verbundene Netztafeln)

Aus Sicherheitsgründen wählt man die tatsächliche Druckbelastung wesentlich unter der maximal zulässigen.

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

d/mm	600	250	320	850	150	400		
p/at	45	20			72	36	70	50
p_m/at	1000	500	700	2000			600	800
s/mm			10	7	9	6	16	8

b) Ist es auch bei diesem Nomogramm möglich, wie bei dem Nomogramm des Übungsblattes 20, mit nur einer der beiden Netztafeln auszukommen?

7. (Übungsblatt 22; zwei verbundene Netztafeln)

Beim Ablesen (siehe Ablesebeispiel) muß der Weg von der ersten zur zweiten Netztafel an den beiden stark ausgezogenen Geraden gebrochen werden. Diese verzahnen beide Netztafeln und entsprechen der Zapfenlinie bei den verbundenen Leitertafelnomogrammen (Übungsblatt 17, 18, 19). Sie heißen Leitlinien.

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

$c/\mathrm{cal\,g^{-1}\,grd^{-1}}$	0,9	0,5	1,0	0,22	0,4	0,1		
m/g	4,5	15	7	40			20	17
$\Delta t/\mathrm{grd}$	15	4			25	5	4,5	8
Q/cal			40	20	55	15	30	70

b) Da sich beide Netztafeln (abgesehen von der Leiterbeschriftung) völlig gleichen, könnte man auch hier eine von ihnen weglassen. Die andere müßte dann aber eine Doppelbeschriftung erhalten, was die Übersichtlichkeit verschlechtern würde. Lesen Sie einige der in Tabelle **a)** fehlenden Werte auch auf diesem Wege ab und beachten Sie dabei insbesondere die Bedeutung der Leitlinie!

8. (Übungsblatt 23; Verbindung einer Leitertafel mit einer Netztafel)

Die Zapfenlinie der Leitertafel ist in diesem Falle zugleich Leitlinie für die Netztafel.

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

d/cm	16	15,5	6	5			17	10,5
D/cm	24	18,5	14	18,2	20	12		
h/cm	3	6,5			8	5	8	7,5
$V/\mathrm{cm^2}$			600	300	700	300	450	900

b) Was ergibt sich für $d = 0$ cm?

c) Was erhalten Sie als Volumen für $d = D$? Überprüfen Sie damit **das Nomogramm!**

9. (Übungsblatt 24; Verbindung einer Netztafel mit einer Leitertafel)

a) Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen.

$f/\mathrm{s^{-1}}$	130	75	100	150	110	60		
L/H	8	9,2	5	6,5			7	5
$R/\mathrm{k\Omega}$	5	11			9	10	10	4,5
$R_s/\mathrm{k\Omega}$			7	12	11,2	10,2	11	6

b) Vergleichen Sie das Nomogramm mit dem von Übungsblatt 3! Lösen Sie die dazu gegebenen Übungen auch mit Hilfe des Nomogramms des Übungsblattes 24! Welches Nomogramm ermöglicht eine genauere Ablesung?

6. Komplexe Zahlen

6.1. Vorbemerkungen

Komplexe Zahlen traten erstmalig im 16. Jahrhundert bei Problemen der Gleichungslehre auf; sie wurden zunächst nicht anerkannt und als „unmögliche Zahlen“ bezeichnet. Trotzdem versuchte man zaghaft, mit ihnen nach den herkömmlichen Regeln zu rechnen und erkannte dabei bald ihre Brauchbarkeit. Heute stellt das Rechnen mit den komplexen Zahlen ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel, z.B. in der Wechselstromtechnik und in der Strömungslehre, dar. Aus diesem Grunde wird im folgenden für die Lehrlinge der Elektroberufe das Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt.
Als Einleitung soll zunächst eine sehr vereinfachte wiederholende Übersicht über die bisher behandelten Zahlbereiche gegeben werden, damit deutlich wird, welche Stellung die komplexen Zahlen einnehmen.
Um eine Vereinfachung handelt es sich insofern, als im folgenden beispielsweise die natürlichen Zahlen einfach mit der Null und den negativen ganzen Zahlen zum Bereich der ganzen Zahlen zusammengefaßt werden, so daß dann die positiven ganzen Zahlen mit den natürlichen Zahlen identisch sind. Tatsächlich besteht aber ein begrifflicher Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen und den positiven ganzen Zahlen; das wird beispielsweise schon daraus klar, daß man zwar sagen kann, man hat drei Gegenstände vor sich liegen („drei“ ist hier eine natürliche Zahl), während die Aussage, daß man „plus drei Gegenstände“ vor sich liegen hat, unsinnig ist („plus drei“ ist eine positive ganze Zahl).

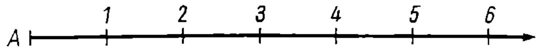
6.2. Vom Bereich der natürlichen Zahlen zum Bereich der reellen Zahlen

6.2.1. Der Bereich der natürlichen Zahlen

Der Zahlenbegriff entwickelte sich bereits in vorgeschichtlicher Zeit zum Kennzeichnen von Mengen gleichartiger Dinge, also beim Zählen. Durch das Zählen entstand die Folge der natürlichen Zahlen: 1; 2; 3; 4; ... Die Null gehört nicht zu den natürlichen Zahlen, denn wenn nichts vorhanden ist, besteht keine Veranlassung zum Zählen.
Offensichtlich gibt es eine kleinste natürliche Zahl, die Eins, aber keine größte. Von zwei (verschiedenen) natürlichen Zahlen steht stets fest, welche die größere ist; die

natürlichen Zahlen lassen sich also der Größe nach ordnen. Diese Eigenart der Folge der natürlichen Zahlen läßt das Veranschaulichen auf einem Strahl zu, indem man auf ihm von seinem Anfangspunkt A aus nach rechts die Einheitsstrecke wiederholt abträgt und die so entstehenden Punkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen bezeichnet (Abb. 6.1.).

Abb. 6.1.



Mit dem Zählen entstand durch das Zusammenfassen mehrerer Schritte das Rechnen mit den natürlichen Zahlen. Die Ergebnisse müssen selbstverständlich ebenfalls der Folge der natürlichen Zahlen angehören, sonst könnte man nicht vom Rechnen im Bereich der natürlichen Zahlen sprechen. Addieren, Multiplizieren und Potenzieren sind im Bereich der natürlichen Zahlen uneingeschränkt ausführbar; das heißt, sind a und b natürliche Zahlen, so sind stets auch $a + b$, $a \cdot b$ und a^b natürliche Zahlen.

■ **Beispiel 1:**

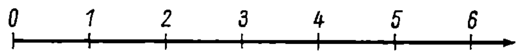
Für $a = 3$, $b = 5$ erhält man $a + b = 3 + 5 = 8$; $a \cdot b = 3 \cdot 5 = 15$; $a^b = 3^5 = 243$.

Die Umkehrungen dieser Rechenoperationen, also das Subtrahieren, das Dividieren, das Radizieren und das Logarithmieren, sind dagegen nur in speziellen Fällen im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar. So ist $5 - 3 = 2$; $15 : 3 = 5$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\log_2 1024 = 10$.

6.2.2. Der Bereich der ganzen Zahlen

Das Bilden der Differenz $a - b$ für den Fall, daß $a = b$ ist, erfordert das Einführen der Zahl 0. Wir erhalten so die Zahlenfolge 0; 1; 2; 3; 4; 5; . . ., die durch den bei 0 beginnenden Zahlenstrahl veranschaulicht werden kann (Abb. 6.2.). Für diese

Abb. 6.2.



Zahlenfolge ist das Bilden der Differenz $a - b$ mit $a = b$ möglich und ergibt die Zahl 0. Das Erweitern des Zahlenbereichs besteht also in dem Einführen der Zahl 0, der der „Nullpunkt" am Anfang A des Zahlenstrahls entspricht. Um das Subtrahieren auch für den Fall zu ermöglichen, daß der Subtrahend größer als der Minuend ist, wird die Einheitsstrecke vom Nullpunkt aus nach links auf dem verlängerten Zahlenstrahl wiederholt abgetragen; dann werden die mit dem Vorzeichen „$-$" versehenen negativen ganzen Zahlen -1; -2; -3; . . . eingeführt und den neu entstandenen Punkten der Reihe nach zugeordnet (Abb. 6.3.). Zur Unterscheidung versieht man nun die natürlichen Zahlen mit dem Vorzeichen „$+$" und nennt sie jetzt positive ganze Zahlen. Die beiderseitig unbegrenzte Folge stellt den Bereich der ganzen Zahlen dar, wobei festgesetzt wird, daß jede Zahl größer als die auf der Zahlengeraden links

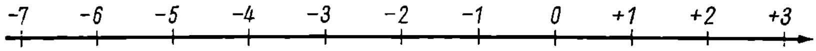


Abb. 6.3.

vor ihr stehenden ist, $-6 < -5$; $-7 < -5$; $-3 < 0$. Offensichtlich gibt es keine kleinste und keine größte ganze Zahl.
Im Bereich der ganzen Zahlen ist außer dem Addieren, Multiplizieren und Potenzieren mit positiv ganzzahligem Exponenten auch das Subtrahieren ohne Einschränkung ausführbar.

■ **Beispiel 2:**

$(+5) + (+8) = +13$ $\quad$ $(+5) - (+8) = -3$ $\quad$ $(+5) \cdot (+8) = +40$
$(+5) + (-8) = -3$ $\quad$ $(+5) - (-8) = +13$ $\quad$ $(+5) \cdot (-8) = -40$
$(-5) + (+8) = +3$ $\quad$ $(-5) - (+8) = -13$ $\quad$ $(-5) \cdot (+8) = -40$
$(-5) + (-8) = -13$ $\quad$ $(-5) - (-8) = +3$ $\quad$ $(-5) \cdot (-8) = +40$

Der Quotient $a : b$ mit den ganzen Zahlen a und b dagegen stellt nur dann wiederum eine ganze Zahl dar, wenn b als Faktor in a enthalten ist, d.h., wenn es eine ganze Zahl c gibt, so daß $b \cdot c = a$ ist. Das ist z.B. für $a = 91$ und $b = 7$ der Fall, weil $7 \cdot 13 = 91$ ist, desgleichen für $a = -12$, $b = -4$, weil $(-4) \cdot 3 = -12$ ist.

6.2.3. Der Bereich der rationalen Zahlen

Das Bilden des Quotienten $a : b$ mit den ganzen Zahlen a und b für den Fall, daß a nicht den Faktor b enthält, erfordert wiederum eine Erweiterung des Zahlenbereichs, das Einführen der vorzeichenbehafteten Brüche.
Jedem Quotienten $a : b$, bei dem b nicht als Faktor in a enthalten ist, kann, wenn $b \neq 0$ ist, trotzdem ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet werden. Man teilt die Einheitsstrecke in $|b|$ gleiche Teile und trägt vom Nullpunkt aus $|a|$ solche Teile nach rechts oder links ab, je nachdem, ob Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben. So findet man z.B. den Punkt, der dem Quotienten $(-5) : (-7)$ zugeordnet ist, indem man die Einheitsstrecke in $|-7| = 7$ gleiche Teile teilt und vom Nullpunkt aus $|-5| = 5$ solche Teile nach rechts abträgt (Abb. 6.4.a). Den Punkt, der dem Quotienten $(-17) : (+5)$ entspricht, findet man, wenn man die Einheitsstrecke in $|+5| = 5$ gleiche Teile teilt und vom Nullpunkt aus $|-17| = 17$ solche Teile nach links abträgt (Abb. 6.4.b). Auf diese Weise wird z.B. den Quotienten $(+3) : (-4)$, $(-3) : (+4)$, $(-12) : (+16)$ ein und derselbe Punkt der Zahlengeraden zugeordnet (Abb. 6.5.). Nun wird festgesetzt, daß diese demselben Punkt

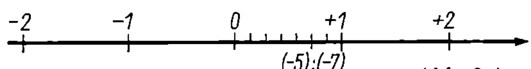


Abb. 6.4. a

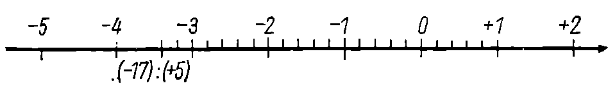


Abb. 6.4. b

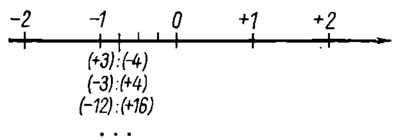


Abb. 6.5.

zugeordneten Quotienten eine gebrochene Zahl darstellen, die man einfach durch $-\frac{3}{4}$ oder $-0{,}75$ bezeichnet.

In entsprechender Weise kommen z.B. die gebrochenen Zahlen $-\frac{16}{3} = -5{,}\overline{3}$ und $\frac{36}{25} = 1{,}44$ zustande. Die gebrochenen Zahlen bilden zusammen mit den ganzen Zahlen den Bereich der rationalen Zahlen. Behält man die Regel bei, daß jede Zahl größer ist als alle, deren zugeordnete Punkte auf der Zahlengeraden weiter links liegen, so steht von zwei rationalen Zahlen stets fest, welche die größere ist. Zwischen zwei beliebig dicht beieinanderliegenden rationalen Zahlen kann man noch beliebig viele weitere rationale Zahlen angeben; z.B.: Zwischen 1,44 und 1,45 liegen 1,441; 1,442; 1,443; ...; 1,449; zwischen 1,442 und 1,443 liegen 1,4421; 1,4422; ...; 1,4429 usf. Diesen Sachverhalt beschreibt man durch die Formulierung: Die rationalen Zahlen liegen überall dicht.

Im Bereich der rationalen Zahlen ist nun auch die Division mit Ausnahme der Division durch Null uneingeschränkt ausführbar. Dagegen sind die inversen Rechenoperationen der dritten Stufe, das Radizieren und das Logarithmieren, nur in speziellen Fällen im Bereich der rationalen Zahlen ausführbar, auch wenn der Wurzelradikand nicht negativ sowie Basis und Numerus des Logarithmus positiv sind (was laut Definition in jedem Falle erfüllt sein muß): Die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ kann nur dann eine rationale Zahl darstellen, wenn b die n-te Potenz einer rationalen Zahl ist, d.h., wenn es eine rationale Zahl a gibt, so daß $a^n = b$ ist; das ist z.B. der Fall bei $b = \frac{81}{16}$, $n = 4$, weil $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ ist. Der Logarithmus $\log_a b$ ist nur dann gleich einer rationalen Zahl, wenn b eine Potenz von a ist, d.h., wenn es eine rationale Zahl c gibt, so daß $a^c = b$ ist; das ist z.B. der Fall bei $\log_{1,69} 2{,}197 = \frac{3}{2}$, weil $1{,}69^{\frac{3}{2}} = 2{,}197$ ist.

6.2.4. Der Bereich der reellen Zahlen

Die Symbole $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ und $\log_2 3$ z.B. bedeuten dagegen keine rationalen Zahlen. Das Bilden der Wurzel und des Logarithmus erfordert im allgemeinen eine nochmalige Erweiterung des Zahlenbereichs durch Einführen der irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\log_2 3$ usw. Die irrationalen Zahlen werden zwischen die rationalen eingeordnet; sie können mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen angenähert werden. Um z.B. $\sqrt[3]{2}$ durch zwei rationale Näherungswerte a_1 und a_2 einzuschachteln,

$$a_1 < \sqrt[3]{2} < a_2,$$

muß $a_1^3 < 2 < a_2^3$

sein. Daraus findet man

$$1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3, \quad \text{weil} \quad 1{,}2^3 = 1{,}728 < 2 < 1{,}3^3 = 2{,}197 \text{ ist,}$$

dann $1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$, weil $1{,}25^3 \approx 1{,}953 < 2 < 1{,}26^3 \approx 2{,}0004$ ist usf.

Wie für $\sqrt[3]{2}$ lassen sich alle irrationalen Zahlen stets durch beliebig nahekommende rationale Werte annähern.

● *Geben Sie in dieser Weise eine Schachtelung für $\sqrt{3}$ bis auf Tausendstel an!*

Das numerische Rechnen mit irrationalen Zahlen wird durch das Rechnen mit den rationalen Näherungswerten ausgeführt. Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen den Bereich der reellen Zahlen.

Obwohl zwischen zwei noch so dicht beieinanderliegenden rationalen Zahlen beliebig viele weitere rationale Zahlen angegeben werden können, haben zwischen den rationalen Zahlen noch unzählig viele irrationale Zahlen Platz. Auf der Zahlengeraden liegen also zwischen den Punkten, die den rationalen Zahlen zugeordnet sind, noch die Punkte, die den irrationalen Zahlen entsprechen. Nach dem Einordnen der irrationalen Zahlen veranschaulicht die Zahlengerade den Bereich der reellen Zahlen. Nunmehr ist jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl, und zwar eine reelle Zahl, zugeordnet. Von zwei reellen Zahlen steht stets fest, welche von ihnen die größere ist. Die reellen Zahlen sind also der Größe nach geordnet.

Im Bereich der reellen Zahlen ist nun auch das Logarithmieren (Basis und Numerus als positiv vorausgesetzt) stets ausführbar, desgleichen das Radizieren, wenn der Radikand nicht negativ ist. Die Gleichungen $x^2 = a$ und $x^3 = a$ z. B. haben daher bei nichtnegativem a reelle Zahlen als Lösungen.

■ **Beispiel 3:**

$x^2 = 2$ hat die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$;
$x^4 = 81$ hat die Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = -3$;
$x^6 = 0$ hat die Lösung $x = 0$.

6.3. Der Bereich der komplexen Zahlen

6.3.1. Imaginäre Zahlen

Die Gleichungen $x^2 = -a$ $(a > 0)$ und $x^2 + px + q = 0$ $(p^2 - 4q < 0)$ z.B. haben im Bereich der reellen Zahlen keine Lösungen. Um diese Einschränkung zu beseitigen, ist wieder eine Erweiterung des Zahlenbereichs notwendig.

Um z.B.

$$x^2 = -a \quad (a > 0)$$

lösen zu können, definiert man durch $-1 = j^2 = j \cdot j$ eine neue Zahl j. Dann kann man

$$x^2 = -a \quad (a > 0)$$

auch als $\quad x^2 = j^2 a$

mit den Lösungen $\quad x_1 = j\sqrt{a}$ und $x_2 = -j\sqrt{a}$

schreiben.

Durch Quadrieren von x_1 und x_2 erhält man wieder $-a$, wenn man j wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt und bedenkt, daß $j^2 = -1$ ist; x_1 und x_2 sind dann also Lösungen der vorgelegten Gleichung. Man nennt j die imaginäre Einheit und die Zahlen ja, jb, $2j$, $-3j$, πj usw., die als Produkt der imaginären Einheit mit einer beliebigen reellen Zahl (a, b, 2, -3, π usw.) dargestellt werden, imaginäre Zahlen.

▶ **Man bezeichnet die Zahl j, für die $j^2 = -1$ gilt, als imaginäre Einheit.**

▶ **Eine imaginäre Zahl hat die Form $a \cdot j$. Der Faktor a bedeutet eine beliebige reelle Zahl.**

Für die imaginäre Einheit benutzt man in der Mathematik das Symbol i, bei den Anwendungen in der Elektrotechnik dagegen die Bezeichnung j, um Verwechslungen mit i als Symbol für die Stromstärke zu vermeiden. Auch im folgenden wird j als Symbol der imaginären Einheit benutzt, weil die Behandlung dieses Stoffgebiets vor allem wegen der Anwendungen in der Elektrotechnik erfolgt.
Bis zum Beginn der Neuzeit wurden Lösungen von Aufgaben wie $x^2 = -2$ für unmöglich, unwirklich oder eingebildet gehalten. Daraus ist auch die heute noch gebräuchliche Bezeichnung „imaginäre Zahlen" für derartige Lösungen entstanden („imaginär", d.h. nur in der Einbildung bestehend). Dennoch begann man vorsichtig mit ihnen in der gleichen Weise wie mit reellen Zahlen zu rechnen, wobei sich ihre Brauchbarkeit erwies. Heute sind die imaginären Zahlen zusammen mit den aus ihnen entwickelten komplexen Zahlen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete geworden; ihr Wesen wurde einwandfrei geklärt.

● **Aufgaben**

1. Die Lösungen x_1 und x_2 folgender Gleichungen sind anzugeben. Führen Sie die Probe durch!

a) $x^2 = -25$ **b)** $x^2 + 11 = 0$ **c)** $x^2 = -121$ **d)** $x^2 = -\frac{4}{9}$

e) $x^2 + 1\frac{13}{36} = 0$ **f)** $x^2 = -4\frac{4}{9}$ **g)** $x^2 = -81a^2$ **h)** $x^2 = -225a^2b$ $(b > 0)$

(L: a, d, h)

2. Welche Zahlen x genügen den folgenden Gleichungen?

a) $x^2 + 100 = 0$ **b)** $x^2 + 17 = 0$ **c)** $x^2 + 0{,}1 = 0$ **d)** $x^2 + \frac{2}{7} = 0$ (L: a, b, c)

3. Bilden Sie die Folge $j, j^2, j^3, j^4, j^5 \ldots$, und suchen Sie nach einer Gesetzmäßigkeit!

6.3.2. Komplexe Zahlen in allgemeiner Form

Erweitert man den Bereich der reellen Zahlen durch die imaginären Zahlen, so erhält man den Bereich der komplexen Zahlen $\mathfrak{z} = a + bj$, wobei a und b reelle Zahlen und j die imaginäre Einheit bedeuten. Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ $(p^2 - 4q < 0)$, die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat, besitzt Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen.

■ **Beispiel 4:**

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad [(-4)^2 - 4 \cdot 13 < 0];$$
$$x^2 - 4x = -13$$
$$x^2 - 4x + 2^2 = -13 + 4$$
$$(x - 2)^2 = -9$$

Nun müßte radiziert werden, und da rechts eine negative Zahl steht, ersetzt man vorher -1 durch j^2:

$$(x - 2)^2 = 9j^2$$
$$x_1 - 2 = 3j$$
$$x_2 - 2 = -3j,$$

also $x_1 = 2 + 3j$ und $x_2 = 2 - 3j$.

Man macht die Probe, indem man z. B. x_1 in die quadratische Gleichung einsetzt und j dabei wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt. Bedenkt man, daß $j^2 = -1$ ist, so ergibt sich $(2 + 3j)^2 - 4(2 + 3j) + 13 = 4 + 12j + 9j^2 - 8 - 12j + 13 = 0$.
Die komplexe Zahl x_1 erfüllt also die quadratische Gleichung.

● *Machen Sie die Probe mit x_2!*

Der Bereich der komplexen Zahlen $\mathfrak{z} = a + bj$ enthält für $b = 0$ die reellen, für $a = 0$ die imaginären Zahlen; a heißt **Realteil**, b **Imaginärteil** der komplexen Zahl $a + bj$. Bei zwei komplexen Zahlen ist es sinnlos, zu fragen, welche von ihnen die größere ist; hier liegt also ein wesentlicher Unterschied gegenüber den natürlichen, den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen vor.

▶ **Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, werden als zueinander konjugiert komplex bezeichnet.**

■ **Beispiele:**

$3 + 4j$, $3 - 4j$; $\quad -5 + 2j$, $-5 - 2j$; $\quad$ allgemein: $a + bj$, $a - bj$.

▶ **Zwei komplexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Realteils und des Imaginärteils voneinander unterscheiden, heißen einander entgegengesetzt.**

■ **Beispiele:**

$3 + 4j$, $-3 - 4j$; $\quad -5 + 2j$, $5 - 2j$; $\quad a + bj$, $-a - bj$.

Naheliegend sind folgende Festsetzungen:

1. Zwei komplexe Zahlen $a + bj$ und $c + dj$ sind einander gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, d.h., wenn $a = c$ und $b = d$ ist.
2. Die vier Grundrechenoperationen mit komplexen Zahlen werden nach den für das Rechnen mit reellen Zahlen gültigen Regeln ausgeführt; j wird dabei wie ein allgemeines Zahlensymbol behandelt, und ein eventuell auftretendes $j^2 = j \cdot j$ wird durch -1 ersetzt.

Aus diesen Festsetzungen ergeben sich folgende Regeln für die vier Grundrechenoperationen.

Addition

(1) $\quad \boldsymbol{(a+bj)+(c+dj)=(a+c)+(b+d)j}$

Die Summe zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl. Der Realteil der Summe ist gleich der Summe der Realteile der Summanden, der Imaginärteil der Summe ist gleich der Summe der Imaginärteile der Summanden.

■ **Beispiele:**

$(4+3j)+(1+5j)=5+8j; \quad (2-7j)+(-1+6j)=1-j;$

$(a+bj)+(a-bj)=2a$, d.h., die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl, ein Sonderfall der komplexen Zahl.

● *Welche Zahl muß zu $a+bj$ addiert werden, damit sich als Summe die imaginäre Zahl $2bj$ ergibt? Welche Zahl muß zu $a+bj$ addiert werden, damit sich Null ergibt?*

Subtraktion

(2) $\quad \boldsymbol{(a+bj)-(c+dj)=(a-c)+(b-d)j}$

Die Differenz zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl.

● *Formulieren Sie die Regel für das Bilden der Differenz!*

■ **Beispiele:**

$(4+3j)-(1+5j)=3-2j; \quad (2-7j)-(-1+6j)=3-13j.$

● *Welche Zahl muß von $(a+bj)$ subtrahiert werden, damit sich als Differenz*
a) die reelle Zahl $2a$,
b) die imaginäre Zahl $2bj$ ergibt?

● *Zeigen Sie die Richtigkeit des folgenden Satzes!*
Statt die Zahl $\mathfrak{z}_2=c+dj$ zu subtrahieren, kann man auch die zu $\mathfrak{z}_2$ entgegengesetzte Zahl $-\mathfrak{z}_2=-c-dj$ addieren: $\mathfrak{z}_1-\mathfrak{z}_2=\mathfrak{z}_1+(-\mathfrak{z}_2)$.

Multiplikation

$$(a+bj)\cdot(c+dj)=ac+adj+bcj+bdj^2=(ac-bd)+(ad+bc)j;$$

(3) $\quad \boldsymbol{(a+bj)\cdot(c+dj)=(ac-bd)+(ad+bc)j}$

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist ebenfalls eine komplexe Zahl.

● *Formulieren Sie die Regel, nach der das Produkt aus den Faktoren gebildet wird!*

■ **Beispiele:**

$(4+3j)\cdot(1+5j)=-11+23j; \quad (2-7j)\cdot(-1+6j)=40+19j;$

$(a+bj)\cdot(a-bj)=a^2+b^2$, d.h., das Produkt konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl.

Division

Man erweitert den Quotienten mit der zum Divisor konjugiert komplexen Zahl, weil dann ein reeller Divisor entsteht:

$$\frac{a+bj}{c+dj}=\frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}=\frac{ac-adj+bcj+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}j$$

(4) $$\boldsymbol{\frac{a+bj}{c+dj}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}j} \quad (c \text{ und } d \text{ nicht gleichzeitig Null}).$$

Der Quotient komplexer Zahlen ist also ebenfalls eine komplexe Zahl.

■ **Beispiele:**

$$\frac{4+3j}{1-5j}=\frac{19}{26}-\frac{17}{26}j,\quad \frac{2-7j}{-1+6j}=-\frac{44}{37}-\frac{5}{37}j.$$

In den folgenden Abschnitten werden zwei weitere Darstellungsmöglichkeiten für komplexe Zahlen behandelt, durch die sich die Regeln für die Multiplikation und Division vereinfachen.

● **Aufgaben:**

Ermitteln Sie folgende Differenzen und Summen komplexer Zahlen!

1. a) $(3+5j)+(2+3j)$ **b)** $(5-3j)+(3+7j)$ **c)** $(-3+2j)+(6-5j)$
d) $(7-j)+(-2-3j)$ **e)** $(3+5j)-(2+3j)$ **f)** $(5-3j)-(3+7j)$
g) $(-3+2j)-(6-5j)$ **h)** $(7+j)-(-2-3j)$

2. a) $(a+bj)+(a-bj)$ **b)** $(a+bj)-(a-bj)$ **c)** $(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}j)+(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}j)$
d) $(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}j)-(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}j)$ **e)** $(0{,}85+15j)+(0{,}58-0{,}42j)-(0{,}43-j)$
f) $(2{,}3a-1{,}3bj)-(3{,}5a+3{,}5bj)+(6{,}8a-0{,}8bj)$ (L: a, c)

3. a) $(5x+5j)-(7x-4j)+(2x-j)-(3x+6j)$
b) $(15y-j)-(8y-7j)-(y+3j)+(-6y+5j)$
c) $(6a+5bj)-(-3a-4bj)+(17a-8bj)+(-a+5bj)$ (L: a, c)

Ermitteln Sie die Produkte und Quotienten folgender komplexer Zahlen!

4. a) $(2-7j)\cdot(6+j)$ **b)** $(5+7j)\cdot(8-3j)$ **c)** $(-4-5j)\cdot(3-2j)$
d) $(-9+7j)\cdot(-10-11j)$ **e)** $(13+5j)\cdot(2-j)$ **f)** $(0{,}9-0{,}2j)\cdot(1{,}2-3j)$ (L: a, c)

5. a) $\frac{5+6j}{3+4j}$ **b)** $\frac{3-2j}{5+4j}$ **c)** $\frac{1+7j}{8-j}$ **d)** $\frac{2-3j}{3-4j}$

e) $\frac{3+2j}{3-4j}+\frac{2+3j}{4+3j}$ **f)** $\frac{5-4j}{2+3j}-\frac{4-5j}{3-2j}$ (L: e, f)

6. a) $\frac{13j}{4-5j}$ **b)** $\frac{25j}{3+4j}$ **c)** $\frac{13}{3-2j}$ **d)** $\frac{1}{1+2j}$

e) $\frac{1}{1-5j}$ **f)** $\frac{1}{6-7j}$ **g)** $\frac{1}{a+bj}$ **h)** $\frac{1}{a-bj}$ (L: a, e)

6.3.3. Die Gaussssche Zahlenebene

Jeder komplexen Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$ kann ein Punkt $P(a;\, b)$ der Koordinatenebene zugeordnet werden, und umgekehrt läßt sich jedem Punkt $P(a;\, b)$ eine komplexe Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$ zuordnen (Abb. 6.6.).

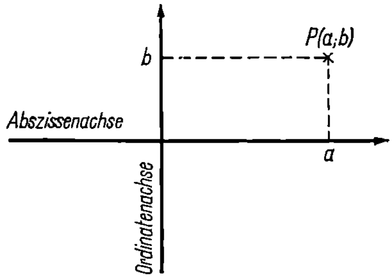


Abb. 6.6.

Die reellen Zahlen, die für $b = 0$ im Bereich der komplexen Zahlen $a + bj$ enthalten sind, werden durch die Punkte der Abszissenachse veranschaulicht, die hier deshalb **reelle Achse** genannt wird. Die imaginären Zahlen $(a = 0)$ werden durch die Punkte der Ordinatenachse veranschaulicht, die man hier deshalb **imaginäre Achse** nennt. Die Ebene, in der die komplexen Zahlen veranschaulicht werden, nennt man zu Ehren des großen deutschen Mathematikers Carl Friedrich Gauss (1777–1855), der viel zur begrifflichen Klärung der komplexen Zahlen beigetragen hat, **Gausssche Zahlenebene**.

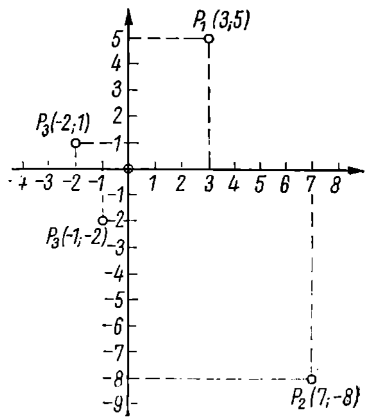


Abb. 6.7.

Beispiel 5:

Der Zahl

$\mathfrak{z}_1 = 3 + 5j$ entspricht der Punkt $P_1(3;\, 5)$;

$\mathfrak{z}_2 = 7 - 8j$ entspricht der Punkt $P_2(7;\, -8)$;

$\mathfrak{z}_3 = -2 + j$ entspricht der Punkt $P_3(-2;\, 1)$;

$\mathfrak{z}_4 = -1 - 2j$ entspricht der Punkt $P_4(-1;\, -2)$ (Abb. 6.7.).

Dem Ursprung O des Koordinatensystems ist die Zahl $0 + 0j = 0$ zugeordnet: Der Punkt $P(a;\, b)$ kann somit zur Veranschaulichung der komplexen Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$ dienen. Statt durch $P(a;b)$ kann man den Punkt, der die Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$ veranschaulicht, geradezu mit $\mathfrak{z} = a + bj$ bezeichnen (Abb. 6.8.); davon soll hier künftig Gebrauch gemacht werden.

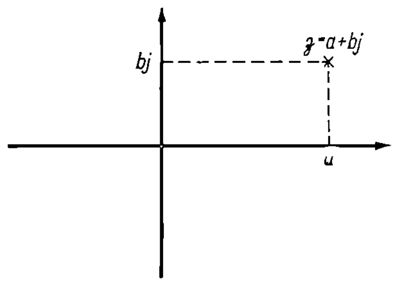


Abb. 6.8.

Beispiel 6:

Den Punkt $P_1(3;\, 5)$ bezeichnet man mit $\mathfrak{z}_1 = 3 + 5j$, den Punkt $P_2(7;\, -8)$ mit $\mathfrak{z}_2 = 7 - 8j$, den Punkt $P_3(-2;\, 1)$ mit $\mathfrak{z}_3 = -2 + j$, den Punkt $P_4(-1;\, -2)$ mit $\mathfrak{z}_4 = -1 - 2j$ (Abb. 6.9.).

● *Veranschaulichen Sie die Zahlen* $3 + 4j$; $-2 + 7j$; $1{,}3 - 6{,}2j$; $-4{,}8 - 2{,}6j$ *in der Gaussschen Zahlenebene!*

Statt $P(a;\, b)$ kann auch der Pfeil, der vom Ursprung O zu diesem Punkt reicht, die Zahl $a + bj$ veranschaulichen (Abb. 6.10.). Dieser Pfeil wird **Zeiger** genannt und ebenfalls mit $\mathfrak{z} = a + bj$ bezeichnet. Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist die Länge des Zeigers gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Die reelle Zahl $\sqrt{a^2 + b^2}$ nennt man den **Betrag** oder auch den **Modul** der komplexen Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$. Man bezeichnet den Betrag mit $z = |\mathfrak{z}| = |a + bj|$:

$$(5) \qquad |\mathfrak{z}| = z = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Für $b = 0$, im Falle einer reellen Zahl also, ist der Betrag $\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ und stimmt mit dem im Bereich der reellen Zahlen erklärten Betrag der reellen Zahl a überein. Gleiche Beträge haben die komplexen Zahlen, deren zugeordnete Punkte gleiche Entfernung vom Schnittpunkt O der beiden Achsen haben. Der Winkel φ, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse bildet, wird **Phase** oder auch **Argument** der betreffenden komplexen Zahl genannt. Die Phase φ ermittelt man aus den Beziehungen

$$(6) \qquad \sin\varphi = \frac{b}{z} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

oder aus $\tan\varphi = \frac{b}{a}$. Benutzt man den Tangens, so muß man der Anschauung (GAUSSsche Zahlenebene) entnehmen, welcher der beiden möglichen Winkel, die sich um 180° unterscheiden, der richtige ist.

■ **Beispiel 7:**

Betrag und Phase der komplexen Zahl $\mathfrak{z}_1 = 2 + 3j$ sollen berechnet werden.

$|\mathfrak{z}_1| = z_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$;

$\sin\varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}$;

daraus folgt $\varphi_1 \approx 56{,}3°$.

Der zugehörige Zeiger ist in Abbildung 6.11. dargestellt.

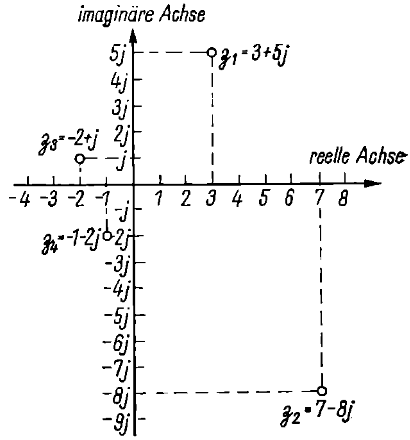


Abb. 6.9.

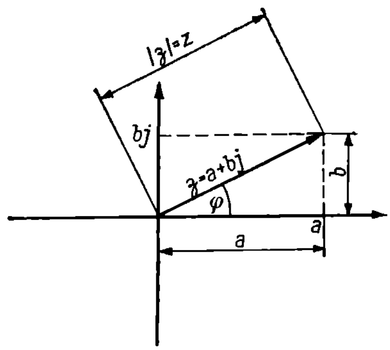


Abb. 6.10.

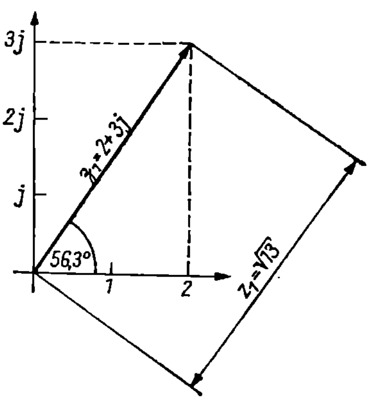


Abb. 6.11.

■ **Beispiel 8:**

$\mathfrak{z}_2 = 1 - 2j$;

$|\mathfrak{z}_2| = z_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;

$\sin \varphi_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, $\cos \varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; daraus folgt $\varphi_2 \approx 296{,}6^\circ$.

● *Zeichnen Sie den zugehörigen Zeiger in die* G*AUSS**sche Zahlenebene ein!*

● **Aufgaben**

1. Geben Sie zu den folgenden komplexen Zahlen die entsprechenden Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 der GAUSSschen Zahlenebene an!
Zeichnen Sie die Zeiger!

a) $\mathfrak{z}_1 = 3 + 4j$ **b)** $\mathfrak{z}_2 = 4 - 3j$ **c)** $\mathfrak{z}_3 = -2 + 3j$ **d)** $\mathfrak{z}_4 = -3 - 2j$

2. Für die Zahlen der Aufgabe 1 sind der Betrag z und die Phase φ zu berechnen. (L: a, b)

3. Wie groß sind der Betrag und die Phase der komplexen Zahl $a + bj$ für $a = b$?

4. a) Wie groß sind die Beträge und die Phasenwinkel der konjugiert komplexen Zahlen $5 + 12j$ und $5 - 12j$?

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis von **a)** für alle konjugiert komplexen Zahlen!

5. Welcher Zahl ist der Zeiger zugeordnet, der durch Spiegelung folgender Zeiger am Ursprung entsteht?

a) $\mathfrak{z}_1 = 3 - 4j$ **b)** $\mathfrak{z}_2 = a + bj$ (L: a)

6.3.4. Veranschaulichung von Addition und Subtraktion in der GAUSSschen Zahlenebene

Werden die komplexen Zahlen $\mathfrak{z}_1 = a_1 + b_1 j$ und $\mathfrak{z}_2 = a_2 + b_2 j$ durch ihre Zeiger dargestellt (Abb. 6.12.), so läßt sich die Summe $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ finden, indem man die von den beiden Zeigern $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ gebildete Figur zu einem Parallelogramm ergänzt; denn der neu gefundene Parallelogrammpunkt oder der Zeiger zu diesem Punkt gibt wegen der

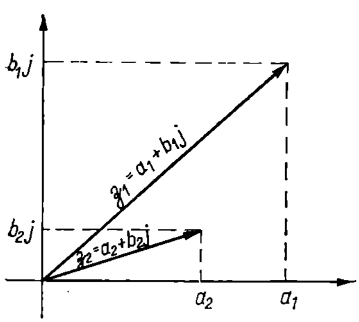


Abb. 6.12.

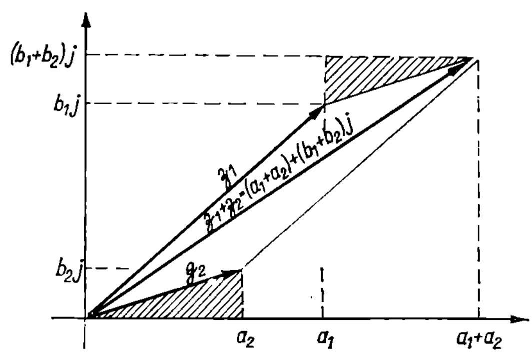


Abb. 6.13.

Kongruenz der schraffierten Dreiecke die Summe $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$ an (Abb. 6.13.).
In 6.3.2. wurde gezeigt, daß $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 + (-\mathfrak{z}_2)$ gilt, wobei $-\mathfrak{z}_2$ die zu $\mathfrak{z}_2$ entgegengesetzte Zahl ist. In 6.3.3. (Aufg. 5) wurde gefunden, daß sich der Zeiger $-\mathfrak{z}_2$ durch Spiegeln des Zeigers $\mathfrak{z}_2$ am Ursprung ergibt. Auf Grund dieses Sachverhalts findet man den Zeiger $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$, indem man die Zeiger $\mathfrak{z}_1$ und $-\mathfrak{z}_2$ zum Parallelogramm zusammensetzt (Abb. 6.14.).

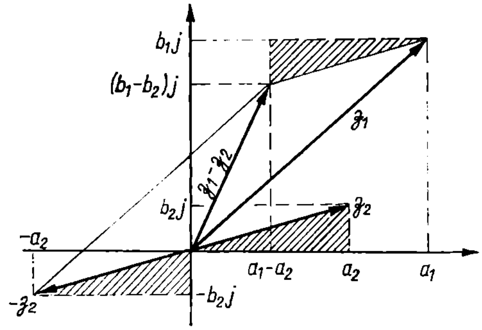


Abb. 6.14.

● **Aufgaben**

Ermitteln Sie die Summen und Differenzen der komplexen Zahlen aus den Aufgaben 1 und 2 von Seite 231 auf graphischem Wege!

6.3.5. Komplexe Zahlen in goniometrischer Form

Der Betrag z und die Phase φ der komplexen Zahl $\mathfrak{z} = a + bj$ werden nach Abbildung 6.10. aus den Beziehungen

(5) $z = \sqrt{a^2 + b^2}$,

(6) $\sin\varphi = \frac{b}{z}$, $\cos\varphi = \frac{a}{z}$

ermittelt. Stellt man die beiden letzten Formeln nach b bzw. a um, so erhält man

$$b = z \sin\varphi, \qquad a = z\cos\varphi.$$

Setzt man das in die allgemeine Form $\mathfrak{z} = a + bj$ ein, so erhält man die **goniometrische Form der komplexen Zahl:** $\mathfrak{z} = z\cos\varphi + jz\sin\varphi$ bzw.

(7) $\mathfrak{z} = z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$.

■ **Beispiel 9:**

Die komplexe Zahl $\mathfrak{z}_1 = 2 + 3j$ soll in die goniometrische Form umgeschrieben werden. Wie bereits ermittelt wurde, ist $z_1 = \sqrt{13}$, $\varphi_1 = 56{,}3°$. Dann lautet die goniometrische Form

$\mathfrak{z}_1 = \sqrt{13}\,(\cos 56{,}3° + j\sin 56{,}3°)$.

Wird die Phase im Bogenmaß angegeben, so ist $\varphi_1 = 0{,}983$, und damit lautet die goniometrische Form

$\mathfrak{z}_1 = \sqrt{13}\,(\cos 0{,}983 + j\sin 0{,}983)$.

Beispiel 10:

$\mathfrak{z}_2 = 1 - 2j$. Es ist $z_2 = \sqrt{5}$, $\varphi_2 = 296{,}6°$, im Bogenmaß 5,177. Die goniometrische Form lautet dann

$$\mathfrak{z}_2 = \sqrt{5}\,(\cos 296{,}6° + j \sin 296{,}6°)$$

oder

$$\mathfrak{z}_2 = \sqrt{5}\,(\cos 5{,}177 + j \sin 5{,}177).$$

Probe: Bestimmen Sie die Funktionswerte des Kosinus und des Sinus, und lösen Sie die Klammer auf! Dann muß wieder die allgemeine Form der komplexen Zahl entstehen.

Aufgaben

1. Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in goniometrischer Form!

a) $3 + 4j$ **b)** $4 - 3j$ **c)** $-6 + 2j$ **d)** $-1 - 4j$
e) $1{,}2 + 2{,}7j$ **f)** $\frac{4}{9} - \frac{5}{3}j$ **g)** $-\frac{1}{5} + 2{,}6j$ (L: a, d)

2. Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in allgemeiner Form!

a) $3(\cos 12{,}8° + j \sin 12{,}8°)$ **b)** $\sqrt{2}\,(\cos 1{,}2 + j \sin 1{,}2)$
c) $(\cos 315° + j \sin 315°)$ **d)** $14\left(\cos\frac{\pi}{6} + j \sin\frac{\pi}{6}\right)$ (L: a, d)

6.3.6. Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der goniometrischen Form

Multiplikation

Die Berechnung des Produkts $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2$ der in goniometrischer Form vorliegenden komplexen Zahlen

$$\mathfrak{z}_1 = z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}_2 = z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$$

ergibt

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 &= z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\cdot z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)\\ &= z_1 z_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + j\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + j\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2).\end{aligned}$$

Später wird gezeigt werden, daß die „Additionstheoreme"

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

gelten.

Prüfen Sie die Formeln nach, indem Sie

a) $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = 30°$;
b) $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = 60°$

setzen!

Mit Hilfe der beiden Formeln ergibt sich:

$$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = z_1 z_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ist $\mathfrak{z}_1 = z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ und $\mathfrak{z}_2 = z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, so ist das Produkt

$$(8) \quad \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = z_1 \cdot z_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

▶ **Das Produkt komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag das Produkt der Beträge der Faktoren und deren Phase die Summe der Phasen der Faktoren ist.**

Die Multiplikation komplexer Zahlen in der goniometrischen Form ist also wesentlich übersichtlicher als die Multiplikation komplexer Zahlen in der allgemeinen Form.

■ **Beispiel 11:**

$\mathfrak{z}_1 = 5(\cos 134{,}2° + j\sin 134{,}2°)$,

$\mathfrak{z}_2 = 2(\cos\ 93{,}5° + j\sin\ 93{,}5°)$;

$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = 10(\cos 227{,}7° + j\sin 227{,}7°)$.

Man findet in der GAUSSschen Zahlenebene leicht den Zeiger, der dem Produkt zugeordnet ist. Seine Länge beträgt 10, und er schließt mit der positiven reellen Achse einen Winkel von 227,7° ein; seine Spitze liegt also im III. Quadranten. Bestimmt man die Funktionswerte von Sinus und Kosinus und löst man die Klammer auf, so erhält man das Produkt in der allgemeinen Form.

■ **Beispiel 12:**

Die Zahlen $\mathfrak{z}_1 = 3 + 4j$ und $\mathfrak{z}_2 = 2 + 5j$ sollen miteinander multipliziert werden; das Produkt soll aus ihren goniometrischen Formen bestimmt werden. Es ergibt sich

$\mathfrak{z}_1 = 5(\cos 53{,}1° + j\sin 53{,}1°)$,

$\mathfrak{z}_2 = \sqrt{29}\,(\cos 68{,}2° + j\sin 68{,}2°)$;

$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = 5\sqrt{29}\,(\cos 121{,}3° + j\sin 121{,}3°)$;

$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 \approx 26{,}9(\cos 121{,}3° + j\sin 121{,}3°)$.

Ergibt sich hierbei einmal eine Phase größer als 360°, so kann sie wegen der Periodizität der Winkelfunktionen durch eine Phase kleiner als 360° ersetzt werden; z.B. ist $\cos 400° + j\sin 400° = \cos(40° + 360°) + j\sin(40° + 360°) = \cos 40° + j\sin 40°$.

Division

Entsprechend ergibt die Berechnung des Quotienten $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 (\mathfrak{z}_2 \neq 0)$ der in goniometrischer Form vorliegenden Zahlen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2}.$$

Dieser Quotient wird mit der zum Divisor konjugiert komplexen Zahl erweitert:

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + j(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}.$$

Später wird gezeigt werden, daß die „Additionstheoreme"

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

gelten.

● *Prüfen Sie auch diese Formeln nach!*

Mit Hilfe der beiden Formeln ergibt sich:

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Ist $\mathfrak{z}_1 = z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ und $\mathfrak{z}_2 = z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, so ist der Quotient gleich

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{9}$$

▶ **Der Quotient komplexer Zahlen ist die komplexe Zahl, deren Betrag der Quotient der Beträge von Dividend und Divisor und deren Phase die Differenz der Phasen von Dividend und Divisor ist.**

Auch die Division komplexer Zahlen in der goniometrischen Form ist also wesentlich übersichtlicher als die Division in allgemeiner Form.

■ **Beispiel 13:**

$\mathfrak{z}_1 = 5(\cos 134{,}2^\circ + j\sin 134{,}2^\circ)$, $\mathfrak{z}_2 = 2(\cos 93{,}5^\circ + j\sin 93{,}5^\circ)$;

$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \frac{5}{2}(\cos 40{,}7^\circ + j\sin 40{,}7^\circ)$.

Ergibt sich dabei einmal ein negativer Winkel, so kann dieser wegen der Periodizität der Winkelfunktionen durch einen positiven ersetzt werden; z.B. ist

$\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ) = \cos 330^\circ + j\sin 330^\circ$.

● **Aufgaben**

1. Ermitteln Sie die Produkte und Quotienten komplexer Zahlen der Aufgaben 4, 5 und 6 von Seite 231 unter Verwendung der goniometrischen Form der entsprechenden komplexen Zahlen!

2. Berechnen Sie die folgenden Produkte bzw. Quotienten!

a) $3(\cos 15^\circ - j\sin 15^\circ) \cdot 2(\cos 23^\circ + j\sin 23^\circ)$

b) $4(\cos 45^\circ + j\sin 50^\circ) \cdot 0{,}5(\cos 61^\circ + j\sin 61^\circ)$

c) $3(\cos 215^\circ + j\cos 25^\circ) : 2(\cos 16^\circ + j\sin 16^\circ)$

Hinweis: Bei diesen Aufgaben ist zu beachten, daß jeweils das erste Glied nicht die goniometrische Form einer komplexen Zahl darstellt; bei der ersten Aufgabe kann man diese recht schnell finden, bei den beiden letzten dagegen stellt man erst einmal durch Bestimmen der Funktionswerte von Kosinus und Sinus und Auflösen der Klammer die allgemeine Form dieser komplexen Zahl her, und daraus ermittelt man dann die goniometrische Form.

6.3.7. Komplexe Zahlen in Exponentialform

Die oben hergeleiteten Formeln (8) und (9) über das Produkt und den Quotienten komplexer Zahlen, die in goniometrischer Form gegeben sind, sind bereits einfacher als die entsprechenden Regeln für die komplexen Zahlen in allgemeiner Form. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man für $\cos\varphi + j\sin\varphi$ die Potenz $e^{j\varphi}$ schreibt, also

(10) $\boldsymbol{e^{j\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi}$

festsetzt; denn dann ergeben sich die Regeln über das Produkt und den Quotienten komplexer Zahlen und auch andere Regeln, die bei etwas tieferem Eindringen in die Lehre von den komplexen Zahlen auftreten, ohne weiteres aus dieser Festsetzung durch Anwenden der geläufigen Potenzgesetze.
Die Formel (10) wurde von Leonhard Euler (1707–1783) aufgestellt und heißt ihm zu Ehren Eulersche Formel. Daß die Basis $e = 2{,}71828\ldots$ eine irrationale Zahl ist, sei hier nur am Rande vermerkt; denn bei der Anwendung, die hier von der Eulerschen Formel gemacht werden soll, spielt dieser Zahlenwert keine Rolle.
Aus $\mathfrak{z} = z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ ergibt sich mit der Eulerschen Formel die Exponentialform der komplexen Zahl:

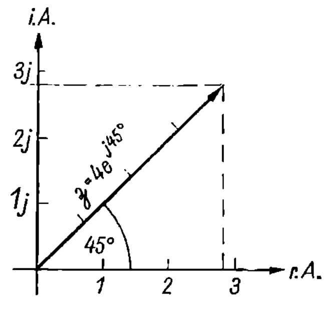
(11) $\boldsymbol{\mathfrak{z} = z e^{j\varphi}}$.

Beispiel 14:

Die komplexe Zahl mit dem Betrage $z = 4$ und der Phase $\varphi = 45°$ (Abb. 6.15.) hat die Exponentialform $\mathfrak{z} = 4e^{j\,45°}$.

Gibt man die Phase im Bogenmaß an $\left(45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4}\right)$, so ist $\mathfrak{z} = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Umformung in die goniometrische Form gibt nach der Eulerschen Formel



$\mathfrak{z} = 4(\cos 45° + j\sin 45°) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Abb. 6.15.

Einsetzen der Winkelfunktionswerte und Auflösen der Klammer führt zur allgemeinen Form dieser komplexen Zahl: $\mathfrak{z} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j$.

Beispiel 15:

Die komplexe Zahl $\mathfrak{z} = 5 + 12j$ hat den Betrag 13 und die Phase $67{,}4° \mathrel{\hat{=}} 1{,}176$. Man erhält die Exponentialform

$\mathfrak{z} = 13e^{j\,67{,}4°} = 13e^{j\,1{,}176}$

und die goniometrische Form

$\mathfrak{z} = 13(\cos 67{,}4° + j\sin 67{,}4°) = 13(\cos 1{,}176 + j\sin 1{,}176)$.

Es gilt $e^{j(\varphi + k2\pi)} = \cos(\varphi + k2\pi) + j \sin(\varphi + k2\pi) \qquad (k = 0; \pm 1; \ldots)$

$$= \cos\varphi + j\sin\varphi$$
$$= e^{j\varphi};$$

$e^{j\varphi}$ hat also wie $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die Periode 2π.

6.3.8. Multiplikation und Division komplexer Zahlen in der Exponentialform

Im folgenden sollen komplexe Zahlen in Exponentialform multipliziert und dividiert werden.

Multiplikation

$$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = z_1 e^{j\varphi_1} \cdot z_2 e^{j\varphi_2}.$$

Anwendung des Potenzgesetzes $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ führt auf

(12) $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = z_1 z_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Schreibt man das Ergebnis in die goniometrische Form um, so ergibt sich Übereinstimmung mit der Formel (8):

$$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = z_1 z_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Division

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1 e^{j\varphi_1}}{z_2 e^{j\varphi_2}} \text{ mit } \mathfrak{z}_2 \neq 0.$$

Anwendung des Potenzgesetzes $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ führt auf

(13) $\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Schreibt man das Ergebnis in die goniometrische Form um, so ergibt sich in Übereinstimmung mit der Formel (9):

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

■ **Beispiel 16:**

Für $\mathfrak{z}_1 = 2e^{j\frac{5\pi}{6}}$ und $\mathfrak{z}_2 = 3e^{j\frac{3\pi}{2}}$ ergibt die Multiplikation

$$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = 2e^{j5\frac{\pi}{6}} \cdot 3e^{j3\frac{\pi}{2}} = 6e^{j\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)} = 6e^{j\frac{7\pi}{3}} = 6e^{j\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Bei dieser Schreibweise findet man in der GAUSSschen Zahlenebene leicht den Zeiger, der dem Produkt zugeordnet ist. Er hat die Länge 6 und schließt mit der positiven reellen Achse den Winkel $\frac{\pi}{3} \mathrel{\widehat{=}} 60°$ ein.

Falls erwünscht, erhält man daraus noch die goniometrische Form

$\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$ und daraus die allgemeine Form $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = 3 + 3\sqrt{3}\,j$

des Produkts.

Die Division ergibt

$$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \frac{2e^{j\frac{5\pi}{6}}}{3e^{j\frac{3\pi}{2}}} = \frac{2}{3}e^{j\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2}{3}e^{j\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2}{3}e^{j\frac{4\pi}{3}}.$$

Falls erwünscht, erhält man daraus noch die goniometrische Form

$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ und daraus die allgemeine Form $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,j$

des Quotienten.

Aufgaben

1. Berechnen Sie
   a) das Produkt $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2$; **b)** den Quotienten $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2$ für $\mathfrak{z}_1 = \frac{4}{5}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ und $\mathfrak{z}_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}}$! (L)
2. Berechnen Sie
   a) das Produkt $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2$; **b)** den Quotienten $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2$ für $\mathfrak{z}_1 = 5e^{j\,3{,}368}$ und $\mathfrak{z}_2 = 2 \cdot e^{j\,4{,}276}$! (L)
3. Berechnen Sie
   a) das Produkt $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2$; **b)** den Quotienten $\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2$ für $\mathfrak{z}_1 = 2 \cdot e^{j\frac{5\pi}{3}}$ und $\mathfrak{z}_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$!
   Produkt und Quotient sind in allgemeiner Form anzugeben.

6.3.9. Zusammenfassung

Das Lösen quadratischer Gleichungen führt in einzelnen Fällen auf die Notwendigkeit, negative Zahlen zu radizieren; das ist jedoch im Gebiet der reellen Zahlen nicht möglich. Deshalb wurde für das uneingeschränkte Radizieren eine erneute Erweiterung des Zahlenbereichs zu dem Bereich der komplexen Zahlen notwendig. Die GAUSSsche Zahlenebene veranschaulicht den Bereich der komplexen Zahlen.

Eine komplexe Zahl $\mathfrak{z}$ wird

in allgemeiner Form $\mathfrak{z} = a + bj$,
in goniometrischer Form $\mathfrak{z} = z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$,
in Exponentialform $\mathfrak{z} = ze^{j\varphi}$

geschrieben.

Hierin ist $z = \sqrt{a^2 + b^2}$, und φ läßt sich aus $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bzw. aus $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ errechnen.

Wie die Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind auch Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren mit komplexen Zahlen ausführbar (von wenigen Ausnahmefällen, wie z. B. Division durch Null abgesehen) und ergeben wieder komplexe Zahlen. Von dem Begriff der natürlichen Zahlen ausgehend, ist der Zahlbegriff den jeweils auftretenden Bedürfnissen entsprechend schrittweise erweitert worden.

6.4. Anwendung komplexer Zahlen in der Elektrotechnik

Bei einphasigem Wechselstrom ändern sich Stromstärke und -richtung periodisch, und zwar nach einer Kosinusfunktion. Ist J_m der Maximalwert der Stromstärke und i ihr Momentanwert, so gilt

(14) $\boldsymbol{i = J_m \cos(\omega t + \varphi_i)}$.

Hierin heißt ω Kreisfrequenz, φ_i Phasenwinkel des Stroms. Zur Zeit $t = 0$ ergibt sich aus (14) der Anfangswert des Stroms

$$i = J_m \cos \varphi_i .$$

Dieser Anfangswert wird nach der Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ wieder erreicht, denn es ist

$$i = J_m \cos\left(\omega \frac{2\pi}{\omega} + \varphi_i\right) = J_m \cos \varphi_i .$$

Die Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ wird Periode genannt; es gilt daher

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Die Anzahl der Perioden T in der Sekunde heißt Frequenz und wird mit f bezeichnet; ihre Einheit ist Hertz (Hz). Es gilt also

$$T \cdot f = 1, \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi f.$$

Man betrachtet nun einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der GAUSSschen Ebene im mathematisch positiven Drehsinn umlaufenden Zeiger $\mathfrak{i}$, dessen Länge J_m ist und der zur Zeit $t = 0$ die Phase φ_i hat, d.h., der zur Zeit $t = 0$ mit der reellen Achse den Winkel φ_i bildet (Abb. 6.16.). Zur Zeit t bildet er dann mit der reellen Achse den Winkel $\omega t + \varphi_i$ (Abb. 6.17.). Für diesen Zeiger gilt also

(15) $\boldsymbol{\mathfrak{i} = J_m [\cos(\omega t + \varphi i) + j \sin(\omega t + \varphi i)] = J_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}}$.

Die Projektion dieses Zeigers auf die reelle Achse (Abb. 6.17.) oder, anders ausgedrückt, der Realteil der zugehörigen komplexen Zahl ist

$$i = J_m \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Er gibt folglich nach (14) den Momentanwert der Stromstärke an.

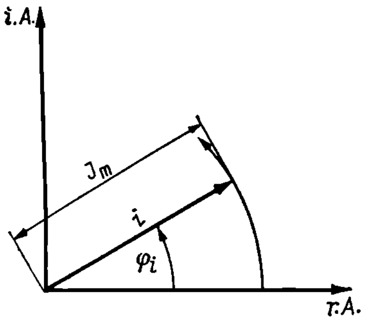


Abb. 6.16.

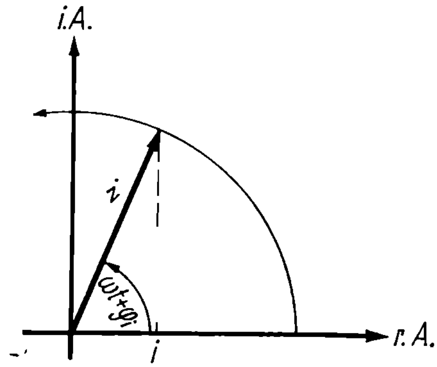


Abb. 6.17.

Fließt dieser Strom i durch einen Zweipol (Abb. 6.18.), so bewirkt er an diesem einen Spannungsabfall u, der im allgemeinen ebenfalls dem Kosinusgesetz mit der gleichen Kreisfrequenz ω, aber anderem Phasenwinkel φ_u gehorcht:

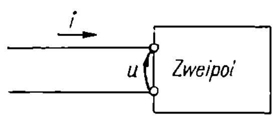


Abb. 6.18.

(16) $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$.

Hier ist u der Momentanwert der Spannung, U_m ihr Maximalwert. Dieser Momentanwert der Spannung kann nun analog zum Strom als Projektion eines Zeigers $\mathfrak{u}$ auf die reelle Achse aufgefaßt werden, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der GAUSSschen Ebene im positiven Drehsinn umläuft, dessen Länge U_m ist und der zur Zeit $t = 0$ mit der reellen Achse den Winkel φ_u bildet (Abb. 6.19.):

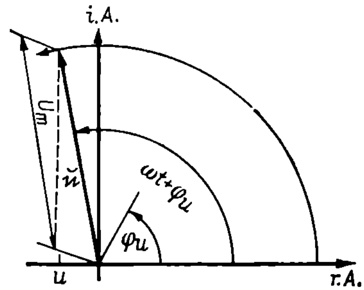


Abb. 6.19.

(17) $\mathfrak{u} = U_m\,[\cos(\omega t + \varphi_u) + {} + j \sin(\omega t + \varphi_u)] = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$.

Die mit der Frequenz f umlaufenden Zeiger i und u bilden stets den Winkel

$$(\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$$

(Abb. 6.20.), der positiv ist, wenn die Spannung voreilt, und negativ, wenn der Strom voreilt.

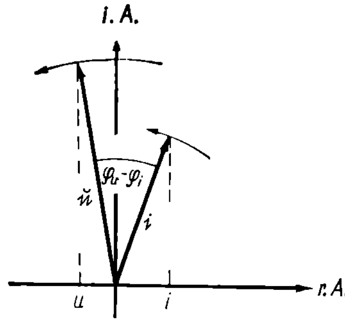


Abb. 6.20.

Die Theorie der Wechselstromtechnik lehrt nun, daß der Quotient $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{i}}$ der komplexen Zahlen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}$ den gerichteten Widerstand $\mathfrak{R}$ ergibt:

(18) $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{i}} = \mathfrak{R}$.

Dieses Gesetz entspricht dem OHMschen Gesetz für den Gleichstrom. Einsetzen von (15) und (17) in (18) ergibt

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{i}} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{J_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \left(\frac{U_m}{J_m}\right) e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = R_s e^{j(\varphi_u - \varphi_i}$$

$$\mathfrak{R} = R_s[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \sin(\varphi_u - \varphi_i)].$$

Der Quotient

$$\frac{U_m}{J_m} = R_s$$

heißt Scheinwiderstand. Offensichtlich ist $|\mathfrak{R}| = R_s$. In $\mathfrak{R} = R_s e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ ist t nicht enthalten; der gerichtete Widerstand $\mathfrak{R}$ ist also im Gegensatz zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}$ unabhängig von der Zeit; er ist konstant und kennzeichnet den Strom-Spannungs-Zusammenhang für den betreffenden Zweipol. Insbesondere ist die Phase von $\mathfrak{R}$ gleich der Phasendifferenz $\varphi_u - \varphi_i$ zwischen Spannungs- und Stromzeiger. Der gerichtete Widerstand $\mathfrak{R}$ hat als Realteil

(19) $R_w = R_s \cos(\varphi_u - \varphi_i)$,

als Imaginärteil

(20) $R_b = R_s \sin(\varphi_u - \varphi_i)$.

Beide haben eine physikalische Bedeutung. Um sie zu finden, werden beide Gleichungen mit J_m multipliziert:

$$J_m R_w = J_m R_s \cos(\varphi_u - \varphi_i) = U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i),$$

$$J_m R_b = J_m R_s \sin(\varphi_u - \varphi_i) = U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i).$$

Da die Zeiger $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}$ stets den Winkel $\varphi_u - \varphi_i$ bilden (Abb. 6.20.), bedeutet $U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i)$ die Komponente des Spannungszeigers $\mathfrak{u}$ in Richtung des Stromzeigers $\mathfrak{i}$ (Abb. 6.21.). Diese Komponente heißt Wirkspannung U_w:

$$U_w = U_m \cos(\varphi_u - \varphi_i) = J_m R_w.$$

Entsprechend bedeutet $U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i)$ die Komponente senkrecht dazu, die Blindspannung U_b heißt:

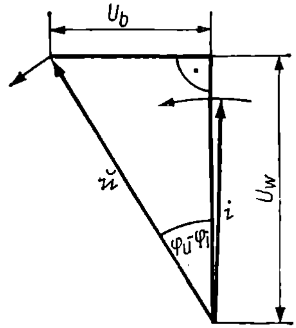


Abb. 6.21.

$$U_b = U_m \sin(\varphi_u - \varphi_i) = J_m R_b.$$

Die Blindspannung trägt nicht wie die Wirkspannung zur wirklich verfügbaren elektrischen Leistung bei, sondern bedingt nur zusätzliche Verluste. Der Widerstand R_w, über dem die Wirkspannung $U_w = J_m R_w$ liegt, heißt Wirkwiderstand, der Widerstand R_b, über dem die Blindspannung $U_b = J_m R_b$ liegt, heißt Blindwiderstand. Es gilt also:

(gerichteter Widerstand) $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{i}} = R_w + R_b j$;

(Scheinwiderstand) $R_s = |\,\mathfrak{R}\,| = \sqrt{R_w^2 + R_b^2}$;

$$\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R_b}{R_w}.$$

OHMsche Widerstände sind Wirkwiderstände, (reine) Kapazitäten und Induktivitäten sind Blindwiderstände; den Blindwiderstand einer Induktivität L errechnet man nach der Formel $R_{bL} = \omega L$, den Blindwiderstand einer Kapazität C nach $R_{bC} = -\frac{1}{\omega C}$. Bei Parallel- und Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen gelten für die gerichteten Widerstände analoge Formeln wie für OHMsche Widerstände bei Gleichstrom:

$$\mathfrak{R}_{\text{ges}} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 \text{ (Reihenschaltung)},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{ges}}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} \text{ (Parallelschaltung)}.$$

■ **Beispiel 17:**

Eine Spule hat den Wirkwiderstand $R_w = 20\ \Omega$ und die Induktivität $L = 0{,}06$ H (Henry). Bei einer Frequenz von $f = 50$ Hz beträgt ihr Blindwiderstand somit

$R_b = \omega L = 0{,}06 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\ \Omega = 18{,}8\ \Omega.$

Als gerichteter Widerstand ergibt sich dann $\mathfrak{R} = (20 + 18{,}8j)\ \Omega$. Daraus erhält man den Scheinwiderstand $R_s = |\,\mathfrak{R}\,| = \sqrt{20^2 + 18{,}8^2}\ \Omega = 27{,}4\ \Omega$.
Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man aus
$\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{18{,}8}{20}$; $\varphi_u - \varphi_i = 43{,}3°$, die Spannung eilt also vor.
Die goniometrische Form des gerichteten Widerstandes ist

$\mathfrak{R} = 27{,}4(\cos 43{,}3° + j \sin 43{,}3°)\ \Omega,$

die Exponentialform

$\mathfrak{R} = 27{,}4 e^{j\,43{,}3°}\ \Omega.$

Fließt durch die Spule ein Strom von $J_m = 0{,}6$ A, so entsteht als maximale Klemmenspannung $U_m = J_m R_s = 0{,}6\ \text{A} \cdot 27{,}4\ \Omega = 16{,}4$ V.
Die Wirkspannung beträgt $U_w = J_m R_w = 0{,}6\ \text{A} \cdot 20\ \Omega = 12$ V
und die Blindspannung $U_b = J_m R_b = 0{,}6\ \text{A} \cdot 18{,}8\ \Omega = 11{,}3$ V.

■ **Beispiel 18:**

Ein Kondensator $C = 1\ \mu$F ist bei einer Frequenz von $f = 796$ Hz in Reihe geschaltet mit einem OHMschen Widerstand von $R_w = 50\ \Omega$. Der gerichtete Widerstand $\mathfrak{R}_1$ des Kondensators ist $\mathfrak{R}_1 = 0 + R_{bC} j = -\frac{1}{\omega C} j = -\frac{10^6\,\text{s} \cdot \text{V}}{5000 \cdot 1\,\text{As}} j = -200\,j\,\Omega$. Der gerichtete Widerstand $\mathfrak{R}_2$ des OHMschen Widerstandes ist $\mathfrak{R}_2 = (50 + 0j)\ \Omega = 50\ \Omega$. Somit ist $\mathfrak{R}_{\text{ges}} = (50 - 200j)\ \Omega$. Daraus ergibt sich der Scheinwiderstand R_s der Reihenschaltung

$R_s = |\mathfrak{R}_{ges}| = \sqrt{50^2 + 200^2}\,\Omega = 206\,\Omega$. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung erhält man aus $\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{-200}{50} = -4$; $\varphi_u - \varphi_i = -76°$. Hier ist also die Phase φ_i des Stroms zur Zeit $t = 0$ größer als die der Spannung, d.h., der Strom eilt der Spannung voraus. Fließt ein Strom von $J_m = 1$ A durch Widerstand und Kondensator, so ist die maximale Klemmenspannung $U_m = 206$ V, die Wirkspannung $U_w = 50$ V, die Blindspannung $U_b = 200$ V.

■ **Beispiel 19:**

Eine Spule (10 Ω, 0,1 H) und ein Kondensator (10 μF) sind in Reihe geschaltet, die Frequenz beträgt 50 Hz. Eilt der Strom gegenüber der Spannung vor oder umgekehrt?

$$\mathfrak{R}_1 = (10 + 314\,j)\,\Omega,\ \mathfrak{R}_2 = \left(0 - \frac{10^6}{314 \cdot 10}\,j\right)\Omega = -318\,j\,\Omega.$$

$$\mathfrak{R}_{ges} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = (10 - 286{,}6\,j)\,\Omega.$$

Aus $\tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{-286{,}6}{10}$ erhält man $\varphi_u - \varphi_i = -88°$; der Strom eilt also fast um 90° vor.

● *Ermitteln Sie R_s, R_w und R_b sowie U_w und U_b für diese Schaltung!*

■ **Beispiel 20:**

Spule und Kondensator aus dem Beispiel 19 sind jetzt parallelgeschaltet. Eilt jetzt der Strom oder die Spannung vor?

$$\mathfrak{R}_{ges} = \frac{\mathfrak{R}_1 \cdot \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} = \frac{33\,e^{j72{,}3°} \cdot 318\,e^{-j90°}}{287\,e^{-j88°}}\,\Omega = 46{,}6\,e^{j70{,}3°}\,\Omega\,;$$

$\varphi_u - \varphi_i = 70{,}3° > 0$, d.h., die Spannung eilt vor.

● *Ermitteln Sie entsprechend dem Beispiel* 19 *die übrigen Werte!*

● **Aufgaben**

1. Zwei Spulen, von denen die eine den Wirkwiderstand $R_{w1} = 100\,\Omega$ und die Induktivität $L_1 = 0{,}3$ H, die andere den Wirkwiderstand $R_{w2} = 50\,\Omega$ und die Induktivität $L_2 = 0{,}2$ H hat, sind

   a) hintereinander geschaltet; b) parallelgeschaltet

   und an eine Wechselspannung von $U = 220$ V mit der Frequenz $f = 50$ Hz angeschlossen.

   Zu berechnen sind zu

   a) die Stromstärke, die Spannungen an beiden Spulen und die Phasenverschiebung;

   b) die Stromstärken in der Zuleitung und in den Zweigen sowie die Phasenverschiebung. (L)

2. Eine Spule hat bei $R_{w1} = 10\,\Omega$ Wirkwiderstand die Induktivität $L_1 = 0{,}05$ H, eine zweite Spule hat bei $R_{w2} = 30\,\Omega$ Wirkwiderstand die Induktivität $L_2 = 0{,}04$ H. Die Spulen werden

   a) hintereinander geschaltet; b) parallelgeschaltet

   und an eine Wechselspannung von $U = 110$ V mit der Frequenz $f = 25$ Hz angeschlossen.

Zu berechnen sind zu

a) die Stromstärke, die Spannungen an beiden Spulen und die Phasenverschiebungen;
b) die Stromstärke in den Zweigen und in der Zuleitung sowie die Phasenverschiebungen.

3. Eine Spule mit dem Wirkwiderstand $R_w = 100\ \Omega$ sowie der Induktivität $L = 0{,}6$ H und ein Kondensator mit $C = 30\ \mu$F Kapazität sind

a) hintereinander geschaltet; **b)** parallelgeschaltet
und an eine Wechselspannung $U = 220$ V mit der Frequenz $f = 50$ Hz angeschlossen.

Zu berechnen sind zu

a) die Stromstärke, die Spannungen an der Spule und an dem Kondensator sowie die Phasenverschiebung,
b) die Stromstärke in der Zuleitung und in den Zweigen sowie die Phasenverschiebung. (L)

4. Parallel zu einem Kondensator von $C = 20\ \mu$F ist eine Spule von $R_w = 15\ \Omega$ Wirkwiderstand und $L = 0{,}8$ H Induktivität geschaltet. Die Stromstärke in der Zuleitung ist $J_m = 0{,}5$ A. Die Frequenz des Wechselstroms ist $f = 50$ Hz.

Zu berechnen sind

a) der Blindwiderstand R_{bC} des Kondensators und der Blindwiderstand R_{bL} der Spule,
b) der Scheinwiderstand R_s der Schaltung,
c) die Spannung U zwischen den Verzweigungspunkten,
d) die Stromstärken J_{mC} und J_{mL} im Kondensator und in der Spule.

5. Eine Spule mit der Induktivität 0,4 H und 8 Ω Wirkwiderstand und ein Kondensator mit $C = 40\ \mu$F sind in Reihe geschaltet und an eine Wechselspannung von 120 V angeschlossen, welche die Frequenz von $f = 60$ Hz hat. Wie groß sind

a) der Blindwiderstand des Kondensators R_{bC},
b) der Blindwiderstand der Spule R_{bL},
c) der Scheinwiderstand R_s des äußeren Stromkreises,
d) die Stromstärke J_m,
e) die Spannungen U_{mL} an der Spule und U_{mC} am Kondensator? (L)

Lösungen

1. Funktionen

Seite 8

3. Handsatz: Antimon 28% → 100,8°; Blei 67% → 241,2°; Zinn 5% → 18°
   Linotype: Antimon 12% → 43,2°; Blei 83% → 298,8°; Zinn 5% → 18°
   Monotype: Antimon 19% → 68,4°; Blei 72% → 259,2°; Zinn 9% → 32,4°

9. Die Arbeitsproduktivität wächst,
   wenn statt der Sense der
   - Ableger verwendet wird, um 433%
   - Mähbinder verwendet wird, um 650%
   - Wellenbinder verwendet wird, um 733%

   wenn statt des Ablegers der
   - Mähbinder verwendet wird, um 40,6%
   - Wellenbinder verwendet wird, um 56,2%

   wenn statt des Mähbinders der
   - Wellenbinder verwendet wird, um 11,1%

Seite 12

2. I. a) $y = -x + 23$ b) $y = x - 5$ c) $y = -\frac{2}{3}x + 15$ d) $y = \frac{7}{9}x - \frac{11}{9}$ e) $y = \frac{6}{7}x - \frac{43}{7}$ f) $y = -\frac{12}{11}x + \frac{9}{11}$

   II. a) $x = -y + 23$ b) $x = y + 5$ c) $x = -\frac{3}{2}y + \frac{45}{2}$ d) $x = +\frac{9}{7}y + \frac{11}{7}$ e) $x = \frac{7}{6}y + \frac{43}{6}$ f) $x = -\frac{11}{12}y + \frac{3}{4}$

4. Trägt man auf der Abszissenachse vom Koordinatenanfang aus die Anzahl der Altgrade (0° bis 360°), auf der Ordinatenachse ebenso die Anzahl der Neugrade (0^g bis 400^g) ab, so entsteht als gesuchtes Diagramm die vom Koordinatenanfang nach dem Punkt mit der 360° entsprechenden Abszisse und der 400^g entsprechenden Ordinate verlaufende Gerade. Die Koordinaten der Punkte dieser Geraden ergeben zusammengehörende Werte von Altgrad und Neugrad.

Seite 15

4. a) Scheitelkoordinaten zu $y = +(x-5)^2$ sind $x_s = +5$, $y_s = 0$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur positiven y-Achse.
   b) Scheitelkoordinaten zu $y = -(x-5)^2$ sind $x_s = +5$, $y_s = 0$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur negativen y-Achse.
   c) Scheitelkoordinaten zu $y = +\frac{1}{2}(x+2)^2$ sind $x_s = -2$, $y_s = 0$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur positiven y-Achse.
   d) Scheitelkoordinaten zu $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$ sind $x_s = -2$, $y_s = 0$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur negativen y-Achse.
   e) Scheitelkoordinaten zu $y = +(x+2{,}5)^2 - 3$ sind $x_s = -2{,}5$; $y_s = -3$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur positiven y-Achse.
   f) Scheitelkoordinaten zu $y = -(x+2{,}5)^2 - 3$ sind $x_s = -2{,}5$; $y_s = -3$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur negativen y-Achse.
   g) Scheitelkoordinaten zu $y = +\frac{1}{3}(x-3{,}6)^2 + 4$ sind $x_s = +3{,}6$; $y_s = +4$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur positiven y-Achse.
   h) Scheitelkoordinaten zu $y = -\frac{1}{3}(x-3{,}6)^2 + 4$ sind $x_s = +3{,}6$; $y_s = +4$; die Symmetrieachse verläuft parallel zur negativen y-Achse.

Seite 21

6. a) Da $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $63 = 3^2 \cdot 7$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ist, lautet das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

b) Da $108 = 2^2 \cdot 3^3$; $117 = 3^2 \cdot 13$; $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ ist, lautet das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen $2^2 \cdot 3^3 \cdot 13 = 1404$.

c) Da $225 = 3^2 \cdot 5^2$; $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ ist, lautet das kleinste gemeinsame Vielfache $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575$.

7. $F_1 = \frac{512}{2^3}\,\text{kp} = 64\,\text{kp}$; $F_2 = \frac{512}{24}\,\text{kp} = 32\,\text{kp}$; $F_3 = \frac{512}{2^5}\,\text{kp} = 16\,\text{kp}$

8. a) -1; -1; $+1$; -1; -1; -1; $+1$; -1

b) -2; -4; -8; -16; -32; -64; $+1024$; -2048

c) $+10$; $+100$; -1000; $+10\,000$; $+10\,000$; $-10\,000$; $-100\,000$; $-1\,000\,000$

9. a) 145; 72; 28; 44 **b)** $+1$; 0; $+32$; -32 **c)** 1,40; 0,362 824; 0,2525; 1,355 310

Seite 22

2. a) $3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ **b)** $5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^1$

c) $7 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1$ **d)** $2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$

5. a) 625^1 **b)** 25^2 **c)** 5^4 **7.** $V = 1083 \cdot 10^9\,\text{km}^3$

8. Die Fliehkraft im Radkranz wächst auf das 2,56- (3,61-; 4,41-)fache.

Seite 23

4. a) $3a^p + a^{r-1}$ **b)** $3b^{n+1} + 8b^n$ **c)** $x^{m+n} + 4y^{m+n}$

d) $5u^{m-n} - 3v^{m-n}$ **e)** $3(a+b)^{m+n} - 2(a-b)^{m-1}$

6. a) $10a^7$ **b)** $12x^5$ **c)** $\frac{1}{3} \cdot y^7$ **d)** $\frac{1}{2} \cdot b^3$ **e)** $\frac{3}{4} \cdot u^{4+x}$

10. a) a^{6m+1} **b)** b^{3x+y} **c)** c^{2n}

12. a) $a^4b^3 + a^3b^2$ **b)** $m^9n^5 - m^8n^4$ **c)** $r^{10}s^2 - r^8s^7$

15. a) $a^{2x} - b^{2y} - c^{2z} + 2b^yc^z$ **b)** $x^{2a} - y^{2b} + z^{2c} - 2x^az^c$ **c)** $a \cdot b^{3-x} - 5 \cdot a^{4-x} \cdot b^5$

d) $2 \cdot x^{n-1} \cdot y^{2n+3} - x^{n+1} \cdot y^{2n}$ **e)** $5 \cdot a^{2n+2} \cdot b^{n+2} \cdot x^5$ **f)** $x^{3n+4} \cdot y^{n+1} \cdot z^4$

17. a) x^2y^3 **b)** $a \cdot b^4$ **c)** $x \cdot y$

18. $4a^2 + 2a$; $3b^3 - 2b$; $4c^3 + 2c^2 - 3c$; $48 + 4a^3 - 5a^4$; $3 + 2x - 6x^2$

19. $2a - 3x^2$; $\frac{2a}{b} - 1$; $\frac{1}{2m} + \frac{a}{3}$; $\frac{a^3y}{3} - \frac{a^2}{4}$

Seite 25

3. a) $(-7)^n$ **b)** 26^m **c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **7. a)** $\frac{y^3}{x^3}$ **b)** $\frac{a^5}{c^5}$ **c)** $\frac{b^n}{a^n}$

Seite 25

3. a) x^{2n+2} **b)** y^{3n-3} **c)** a^{mn-m} **d)** b^{mn+n}

5. a) x^{4m+6} **b)** y^{2m+5n} **c)** $1000 \cdot a^{30}$ **d)** $10\,000 \cdot x^{40}$

Seite 26

7. a) $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **c)** $(2a+b)^4 = 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$

8. a) $0{,}001x^3 + 0{,}006x^2y + 0{,}012xy^2 + 0{,}008y^3$ **b)** $0{,}125a^3 + 0{,}225a^2b + 0{,}135ab^2 + 0{,}027b^3$

9. a) $16\,y^4 - 16\,y^3 z + 6\,y^2 z^2 - y \cdot z^3 + \frac{1}{16} z^4$ **b)** $\frac{1}{243} y^5 + \frac{5}{27} y^4 + \frac{10}{3} y^3 + 30 y^2 + 135\,y + 243$

10. a) $-0{,}007\,c^3 + 0{,}048\,c^2 d - 0{,}006\,c d^2 + 0{,}091\,d^3$

Seite 29

4. a) $(1+x)x^{-4}$ **b)** $(1+x) \cdot x^{-2}$ **c)** $(1+x) \cdot x^{-n}$

Seite 32

3. 0,3; 1,6; 0,4; 0,4; 0,5; 0,5; 0,11; 0,2 **5.** $x+1$; $a+b$; $a-1$; $m+2$

6. $a+b+c$; x; $2\,x$; $2\,d$; $ac+bc$; $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ **7.** $v = 40{,}3\ \mathrm{ms}^{-1}$; $t = 6{,}2\ \mathrm{s}$

12. $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$; $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{4}}$; $b^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{8}{15}}$; $y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{2}}$

16. x; $a^{\frac{3}{4}}$; b; $x^{\frac{11}{12}}$; $y^{\frac{4}{5}}$; $a^{\frac{17}{18}}$; $a^{\frac{14}{15}}$; $a^{\frac{5}{6}}$; $a^{\frac{9}{10}}$

Seite 34

2. a) $2 \cdot \sqrt{7}$ **b)** $7 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{11}$ **4. a)** $2\sqrt{x} + 5 \cdot \sqrt[3]{x}$ **d)** $(3x - 2y) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right)$

Seite 35

5. $a^2 \cdot b \cdot \sqrt{abc}$; $a \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 b c^2}$; $2\,x \cdot \sqrt{2xy}$; $3 \cdot y \cdot \sqrt[3]{3xy}$; $z^n \cdot \sqrt{6z}$; $2 \cdot a^n \cdot \sqrt[3]{3a^2}$; $(a+b) \cdot \sqrt[n]{a+b}$

6. a) $23 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $25 \cdot \sqrt{3}$ **c)** $57 \cdot \sqrt[3]{5}$ **d)** $28 \cdot \sqrt[3]{5}$

7. a) $1 - \sqrt{5}$ **b)** $27 + 6 \cdot \sqrt{15} - 60\sqrt{2} + 6\sqrt{30}$

9. a) $2\,a \cdot \sqrt{3\,b} - 6b \cdot \sqrt{a} - 3\,a \cdot \sqrt{6b} + 2\,b \cdot \sqrt{15\,a}$ **c)** $a \cdot \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{a^2 b^2 c} + b\sqrt[3]{ac}$

e) $a \cdot \sqrt[n]{b^2} + b \cdot \sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{a^3 \cdot b^{n-1}}$

11. a) $126 + 28 \cdot \sqrt{14}$ **c)** $57 - 12 \cdot \sqrt{15}$ **13. a)** y **b)** b^2 **c)** $2\,x^2 - 1$ **d)** $2\,v$

17. z; $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{x}$; $(a-b)^x$; $\sqrt{a-b}$ **20.** $\frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{n}$; $\frac{\sqrt[m]{m}}{x}$; $\frac{a-b}{c^2}$; $\frac{x^2}{y \cdot z}$

Seite 38

1. $\sqrt{x^n}$; $\sqrt[n]{x^2}$; a^m; $y^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; $a^2 \cdot \sqrt[n]{b^m}$

2. a) $\sqrt[4]{25}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[8]{9}$; $\sqrt[10]{49}$; $\sqrt[6]{81}$; $\sqrt[4]{64}$; $\sqrt[8]{a^2}$; $\sqrt[2n]{a^2}$

b) $\sqrt[12]{729}$; $\sqrt[12]{625}$; $\sqrt[12]{8}$; $\sqrt[12]{36}$; $\sqrt[12]{256}$; $\sqrt[12]{19\,683}$; $\sqrt[12]{x^6}$; $\sqrt[12]{x^{4n}}$

3. $\sqrt[6]{500}$; $\sqrt[6]{72}$; $\sqrt[15]{256}$; $\sqrt[10n]{x^{9a-2b}}$; $\sqrt[6]{z^{4-n}}$; $\sqrt[m \cdot n]{x^{2m+3n}}$

4. b) $\sqrt[15]{4}$ **5. a)** $\sqrt[6]{a^{13}}$ **6. a)** $\sqrt[6]{\frac{a}{b}}$

7. a) $\sqrt[18]{x^{65}}$ **b)** $\sqrt[12]{z^{11}}$ **8. a)** $\sqrt[12]{(a+b)^{17}}$ **b)** $\sqrt[12]{(a-b)}$

10. $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{b}$; $\sqrt[3]{xy^2}$; $y \cdot \sqrt{x \cdot y}$; $\sqrt[5]{5 \cdot (a-b)^2}$; $\sqrt[5]{5 \cdot (a+b)^2}$ **12. a)** $3 \cdot \sqrt[12]{x \cdot y}$

Seite 39

2. Es gilt $x^y = y^x$ für $x = 1$ und $y = 1$, für $x = 2$ und $y = 4$. **5.** $(2^3)^2 = 2^6 = 64$; $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

6. $(-3x^3)^2 = 9x^6$; $[(-3x)^2]^3 = [9x^2]^3 = 729x^6$ **7.** $V = \frac{\pi}{6} d^2 \cdot h$

8. a) $24a^8 - 16a^6$ **b)** $a^5 - a^3$ **c)** $a^{18} + a^{14} - a^{10} - a^6$ **d)** 0

11. a) a^2; a^3; m^4; 1; g **b)** a^7; a^7; m^8; r^{-9}; g^{-6} **c)** a^{-6}; a^{15}; b^{-8}; 1

Seite 43

3. Für $x = -3$; -2; -1; $-0{,}1$; $+0{,}1$; $+1$; $+2$; $+3$ ergibt sich

$y = -\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{4}$; -1; -100; -100; -1; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{9}$.

Die Kurve besteht aus zwei symmetrisch zur y-Achse und III. und IV. Quadranten verlaufenden Zweigen, nähert sich beiderseits asymptotisch der x-Achse und ist bei $x = 0$ nicht definiert.

5. a) $y = \frac{1}{x-2}$ ergibt eine gleichseitige Hyperbel, die für $x = 2$ nicht erklärt ist.

6. Man spiegelt die Kurve $y = x^2$ mit $x \geqq 0$ an der Geraden $y = x$.

10. Für $x = 0$; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 2; 3 erhält man

$y = 0$; 0,25; 0,46; 0,7; 1; 2,83; 5,1.

Es entsteht ein Ast der „Neilschen Parabel". Sie besteht eigentlich aus zwei Zweigen, von denen der eine im I., der zweite im IV. Quadranten, beide symmetrisch in bezug auf die x-Achse verlaufen.

Seite 44

1. a) $x_1 = -x_2$; $y_1 = y_2$ **b)** $x_1 = -x_2$; $y_1 = -y_2$

2. a) Durch Umklappen um die y-Achse bzw. um die x-Achse.

b) Durch Drehung um 180° um den Koordinatenursprung innerhalb der Koordinatenebene.

4. Beide Funktionsbilder bestehen aus zwei Zweigen, die für $y = \frac{1}{x}$ im I. und III., für $y = \frac{1}{x^2}$ im I. und II. Quadranten verlaufen. Die Kurvenzweige liegen bei $y = \frac{1}{x}$ weiter vom Achsenkreuz entfernt als bei $y = \frac{1}{x^2}$.

6. a) $x = -4$; -3; -2; -1; 0; $+1$; $+2$; $+3$

$y = 2{,}52$; 2,08; 1,59; 1; 0; 1; 1,59; 2,08.

c) Die Kurve zeigt zwei im I. und II. Quadranten symmetrisch zur y-Achse verlaufende Zweige, die in eine Spitze im Koordinatenanfang zusammenlaufen.

Seite 52

1. a) 5 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 5 **f)** 6 **2. a)** -3 **c)** -3 **e)** -1

3. a) 0,2 **b)** 0,1 **c)** 0,25 **d)** 0,2 **e)** 0,5 **f)** $\frac{1}{3}$

4. a) 4; 9; 16; 25; 36 **b)** 8; 27; 64; 125; 216

5. Zu jedem Logarithmus ergibt sich der Numerus 1, wenn die Basis des Systems 1 ist.

Seite 60

1. Die Auflösung der Gleichung $a^n = b$ nach a ergibt $a = \sqrt[n]{b}$. Das Radizieren wird erste Umkehrung des Potenzierens genannt. Die Auflösung der Gleichung $a^n = b$ nach n ergibt $n = \log_a b$. Das Logarithmieren wird zweite Umkehrung des Potenzierens genannt.

5. a) $12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

c) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; $27^{\frac{1}{3}} = 3$; $81^{\frac{1}{4}} = 3$

15. $\lg 210 - \lg 5 = 1{,}6232 = \lg 42$; $\lg 4{,}2 = 0{,}6232$; $\lg 5 + \lg 7 = 1{,}5441 = \lg 35$;

$\lg 210 - \lg 7 = 1{,}4771 = \lg 30$; $\lg 3 = 0{,}4771$.

2. Analytische Geometrie der Geraden und des Kreises

Seite 64

1. a) $\overline{P_1P_2} = \sqrt{+9+16} = 5$ c) $\overline{P_1P_2} = \sqrt{+36+0} = 6$ e) $\overline{P_1P_2} = \sqrt{+0+64} = 8$

2. $x_m = 4$ $y_m = -1{,}5$

Seite 68

1. a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = -x + 5$ 2. a) $y = 2{,}5\,x - 3{,}5$ b) $y = x$

3. a) $y = x + 1$ c) $y = 3$ e) $y = x$ g) $y = -0{,}6\,x + 5{,}5$

4. a) $5x - 2y - 7 = 0$ b) $x - y = 0$ c) $3x + 2y + 42 = 0$ d) $x + y = 0$

5. b) $3x - 4y = 0$ d) $x - 3 = 0$ f) $x + y = 0$ h) $x + y + 6{,}5 = 0$

6. $\frac{y}{x-a} = \frac{b}{-a}$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Die dieser Gleichung zugeordnete Gerade erzeugt auf der x-Achse bzw. y-Achse den vom Ursprung gemessenen Abschnitt a bzw. b.

7. a) $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$. Man erhält für $A = 0$ eine Parallele zur x-Achse, für $B = 0$ eine Parallele zur y-Achse.

b) $\frac{x}{\frac{-n}{m}} + \frac{y}{n} = 1$ Ist $m = 0$, so erhält man eine Parallele zur x-Achse. Für $C = 0$ bzw. $n = 0$ ist die Abschnittsgleichung nicht anwendbar.

8. a) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ c) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{18}$ e) $x = \frac{4}{3{,}875} \approx 1{,}03$

9. Schnittpunkte mit den Achsen — Anstieg

a) (0; 3,4), (2; 0) — $m = -1{,}7$

c) (0; −14), $\left(6\frac{2}{3};\ 0\right)$ — $m = 2{,}1$

e) (0; 6,5), (4,3; 0) — $m = -\frac{6{,}5}{4{,}3} \approx -1{,}51$

Seite 71

1. a) $S(3;\ 4)$ c) $S(-4;\ -5)$

f) Die Gleichungen sind identisch (die das Gleichungspaar darstellenden Geraden fallen zusammen).

h) $S(0;\ b)$ [Für $am + b \neq 0$]. Ist $m = -\frac{b}{a}$, so fallen die Geraden zusammen.

2. Koordinaten der Eckpunkte: $A(-4;\ -1)$ $B(3;\ -2)$ $C(2;\ 1)$

Die Mitten der Seiten haben die Koordinaten: $M_a(2{,}5;\ -0{,}5)$, $M_b(-1;\ 0)$, $M_c(-0{,}5;\ -1{,}5)$.

Gleichungen der Seitenhalbierenden:

für s_a: $\frac{y+0{,}5}{x-2{,}5} = \frac{-1+0{,}5}{-4-2{,}5}$ $y = \frac{1}{13}x - \frac{9}{13}$

für s_b: $\frac{y-0}{x+1} = \frac{-2-0}{3+1}$ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

für s_c: $\frac{y+1{,}5}{x+0{,}5} = \frac{1+1{,}5}{2+0{,}5}$ $y = x - 1$

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden: $S\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$

3. a) $m_1 = -2$ $m_2 = -\frac{3}{5}$ $\tan\varphi = \frac{7}{11} = 0{,}6364$ $\varphi = 32{,}47°$

c) $m_1 = 3$ $m_2 = 7$ $\tan\varphi = \frac{2}{11} = 0{,}1818$ $\varphi = 10{,}31°$

4. a) Anstiege der Seiten: $m_a = 8$ $m_b = \frac{1}{5}$ $m_c = -\frac{7}{4}$

Winkel des Dreiecks: $\tan\alpha = 3$ $\alpha = 71{,}56°$ $\tan\beta = 0{,}75$ $\beta = 36{,}87°$ $\tan\gamma = 3$ $\gamma = 71{,}56°$

5. a) Koordinaten der Eckpunkte: $A\,(2;\,3)$ $\quad B\,(10;\,1)$ $\quad C\,(7;\,9)$

Anstiege der Seiten: $m_a = -\frac{8}{3}$ $\quad m_b = \frac{6}{5}$ $\quad m_c = -\frac{1}{4}$

Winkel des Dreiecks: $\tan\alpha = \frac{29}{14} = 2{,}071$ $\quad \tan\beta = \frac{29}{20} = 1{,}450$ $\quad \tan\gamma = \frac{58}{33} = 1{,}758$

$\alpha = 64{,}22°$ $\quad \beta = 55{,}40°$ $\quad \gamma = 60{,}37°$

6. a) $m = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{y-3}{x-5} = \frac{2}{3}$ $\quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

c) $m = -\frac{9}{10}$ $\quad \frac{y-3}{x-2} = -\frac{9}{10}$ $\quad y = -\frac{9}{10}x + 4\frac{4}{5}$

7. a) $m = \frac{7}{5}$ $\quad \frac{y-3}{x-2} = -\frac{5}{7}$ $\quad y = -\frac{5}{7}x + 4\frac{3}{7}$

c) $m = \frac{10}{9}$ $\quad \frac{y-4}{x+3} = -\frac{9}{10}$ $\quad y = -\frac{9}{10}x + 1\frac{3}{10}$

8. Wahl des Koordinatensystems:

Die Dreieckseite $\overline{AB}$ liege auf der x-Achse; die y-Achse halbiere die Seite $\overline{AB}$. Die Eckpunkte des Dreiecks haben dann die Koordinaten:

$A\,(-x_1;\,0)$ $\quad B(x_1;\,0)$ $\quad C\,(x_2;\,y_2)$

Die Gleichungen der Seiten lauten: $\quad$ für $\overline{BC} = a: y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

für $\overline{CA} = b: y = \frac{y_2}{x_2 + x_1}(x + x_1)$ $\quad$ für $\overline{AB} = c: y = 0$

a) Gleichungen der Höhen:

für $h_a: y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2}(x + x_1)$ $\quad$ für $h_b: y = -\frac{x_2 + x_1}{y_2}(x - x_1)$ $\quad$ für $h_c: x = x_2$

Schnittpunkt H' von h_a und h_c:

$x_{H'} = x_2$ $\quad y_{H'} = -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{y_2} = -\frac{x_2^2 - x_1^2}{y_2}$

Schnittpunkt H'' von h_b und h_c:

$x_{H''} = x_2$ $\quad y_{H''} = -\frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{y_2} = -\frac{x_2^2 - x_1^2}{y_2}$

H' und H'' fallen zusammen, das heißt, die Höhen haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

b) Koordinaten der Seitenmitten:

$M_a\left(\frac{x_2 + x_1}{2};\ \frac{y_2}{2}\right)$ $\quad M_b\left(\frac{x_2 - x_1}{2};\ \frac{y_2}{2}\right)$ $\quad M_c(0;\ 0)$

Gleichungen der Seitenhalbierenden

für $s_a: y = \frac{y_2}{x_2 + 3x_1}(x + x_1)$ $\quad$ für $s_b: y = \frac{y_2}{x_2 - 3x_1}(x - x_1)$ $\quad$ für $s_c: y = \frac{y_2}{x_2}x$

Schnittpunkt von s_b und s_c: $S\left(\frac{x_2}{3};\ \frac{y_2}{3}\right)$

Die Koordinaten von S erfüllen auch die Gleichung für s_a, das heißt, die Seitenhalbierenden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

9. Die Kurve wird durch eine Gerade durch den Koordinatenursprung dargestellt.

a) und **b)** Die Aufgaben verlangen eine graphische Darstellung

c) $n_3 = 1500\ \text{min}^{-1}$ $\quad d = 350$ mm $\quad v = 1649\ \text{m}\cdot\text{min}^{-1}$

$n_2 = 1460\ \text{min}^{-1}$ $\quad d = 110$ mm $\quad v = 505\ \text{m}\cdot\text{min}^{-1}$

$n_4 = 2400\ \text{min}^{-1}$ $\quad d = 320$ mm $\quad v = 2413\ \text{m}\cdot\text{min}^{-1}$

Seite 74

1. a) $x^2+y^2=16$ **c)** $x^2+(y-6)^2=144$ **e)** $(x-2)^2+(y+3)^2=34$

2. $(x-r)^2+y^2=r^2$; $x^2-2xr+y^2=0$

3. a) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ **g)** $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$ **h)** $x^2+(y-c)^2=c^2$

4. a) $M(0;0)$ $r=8$ **c)** $M(0;2)$ $r=3\cdot\sqrt{2}$ **5.** $(x-1)^2+(y-4)^2=20$

Seite 78

1. a) $\left(x-\frac{19}{26}\right)^2+y^2=68\frac{569}{676}$ **2.** $(x-7)^2+(y-2)^2=58$

3. a) $\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\frac{1}{4}\right)^2=7\frac{13}{16}$ **c)** $(x-4)^2+(y+2)^2=52$

4. Ermittlung der Mittelpunktskoordinaten:

$c=d-5$ oder $d=c+5$

$d^2-8d+12=0$ $c^2+2c-3=0$

$(x-1)^2+(y-6)^2=16$ $(x+3)^2+(y-2)^2=16$

5. Es ist zu untersuchen, ob alle 4 Punkte auf einem Kreise liegen.
Die Punkte A, B, C bestimmen einen Kreis: $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.
Diese Gleichung wird auch von den Koordinaten des Punktes D $(4;-1)$ erfüllt. Viereck $ABCD$ ist also ein Sehnenviereck.

6. a) Ermittlung der Schnittpunkte:

$y^2+\frac{630}{625}y-\frac{3159}{625}=0$ oder $x^2-\frac{840}{625}x-\frac{1584}{625}=0$

$P_1(2,4;\ 1,8)$ $P_2(-1,056;\ -2,808)$

Länge der Sehne:

$s=+\sqrt{3,456^2+4,608^2}=+\sqrt{33,1776}=5,76$

3. Gleichungen

Seite 86

7. a) $x=6$ **8. a)** $x=2$ **9. a)** $x=\frac{2a+5b}{a-3b}$ **11.** $x=2$ **12.** $x=0,02$

13. $x=\frac{4,42-1,89a}{2,3a}$ **14.** $x=-2$ **17.** $x=2a-3b$

26. Wird $\frac{1}{8}$ l Salpetersäure zu x l Wasser gegossen, entstehen $\left(x+\frac{1}{8}\right)$ l Ätzflüssigkeit der Dichte 1,1. Es gilt $\left(x+\frac{1}{8}\right)\cdot 1,1=x+\frac{1}{8}\cdot 1,5$; $x=0,5$. Die Wassermenge beträgt 0,5 l.

32. Erhält der 1. Arbeiter x MDN Prämie, so der 2. Arbeiter $(x-100)$ MDN, der dritte $\frac{x}{2}$ MDN.
Es gilt $x+(x-100)+\frac{x}{2}=900$; $x=400$.

Der 1. Arbeiter erhält 400 MDN, der 2. Arbeiter 300 MDN, der 3. Arbeiter 200 MDN.

33. Erfolgt das Begegnen x h von A, so gilt $40x+70\cdot(x-1)=260$; $x=3$.

34. Der Gewichtsverlust beträgt 13,7 p, also der Rauminhalt des Bechers 13,7 cm³. Wird sein Feingehalt mit $\frac{x}{1000}$ bezeichnet, so gibt $\frac{176\cdot x}{1000}$ p das Gewicht des Goldes, $\frac{176\cdot(1000-x)}{1000}$ p das des Kupfers an. Der Becher enthält somit $\frac{176\cdot x\cdot 4}{77}$ cm³ Gold und $\frac{176\cdot(1000-x)\cdot 4}{35}$ cm³ Kupfer.
Somit gilt die Gleichung $\frac{176\cdot x\cdot 4}{1000\cdot 77}+\frac{176(1000-x)\cdot 4}{1000\cdot 35}=13,7$; $x=585$.

Seite 90

8. a) $(x+2)^2=169$, $x_1=+11$; $x_2=-15$ **b)** $(x-3)^2=196$, $x_1=+17$; $x_2=-11$

c) $(x-6)^2=4$, $x_1=+8$; $x_2=+4$

11. a) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{400}{9}$, $x_1=+6\frac{1}{3}$; $x_2=-7$ **b)** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{256}{9}$, $x_1=5\frac{2}{3}$; $x_2=-5$

c) $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{169}{16}$, $x_1=+4\frac{1}{2}$; $x_2=-2$

12. a) $x_1=+4$; $x_2=+1$ **b)** $x_1=+2$; $x_2=+\frac{1}{2}$ **c)** $x_1=+5$; $x_2=+\frac{3}{7}$ **d)** $x_1=+1$; $x_2=-\frac{1}{3}$

Seite 92

1. a) Scheitelkoordinaten: $x_3=-2{,}5$; $y_3=-3$ Lösungen: $x_1=-0{,}77$; $x_2=-4{,}23$

b) Scheitelkoordinaten: $x_3=+3{,}6$; $y_3=-3$ Lösungen: $x_1=+5{,}33$; $x_2=+1{,}87$

2. a) $x_1=1$; $x_2=-3$ **b)** $x_1=+3$; $x_2=-1$ **c)** $x_1=1{,}5$; $x_2=-2{,}5$

Seite 92

1. Haben die Rechteckseiten der beiden Rechtecke überall den Abstand x cm, so gilt

$(21+2x)\cdot(40+2x)\cdot\frac{4}{7}=21\cdot 40$; $x_1=4{,}5$; $x_2=-35$. Der Abstand beträgt 4,5 cm.

2. Beträge die Geschwindigkeit x km h^{-1}, so dauert die Fahrt $\frac{120}{x}$ h, und es gilt $\frac{120}{x-2}-\frac{120}{x}=\frac{1}{4}$; $x_1=32$; $x_2=-30$. Die gesteigerte Geschwindigkeit ist 32 km · h^{-1}.

3. Die Zahl heißt 75.

4. Aus $h(d-h)=\left(\frac{s}{2}\right)^2$ ergibt sich $h(240-h)=80^2$; $h_1=30{,}6$; $h_2=209{,}4$.
Die Pfeilhöhe beträgt 30,6 cm.

7. Ist der Schacht x m tief, so beträgt die Fallzeit des Steines $t_1=\sqrt{\frac{x}{5}}$ s.
Das Aufschlagen des Steines wird $t_2=\frac{x}{340}$ s später wahrgenommen, und es gilt $\sqrt{\frac{x}{5}}+\frac{x}{340}=8{,}5$. Der Schacht ist 292 m tief.

Seite 95

1. $x=3$ **4.** $x=5$ **6. a)** $x_1=18$; $x_2=6$ **b)** $x_1=9$; $x_2=1$

8. $x_1=\frac{2}{3}$; $x_2=\frac{3}{2}$

12. $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$; $\frac{1}{C}=\frac{C_1\cdot C_2+C_1\cdot C_3+C_2\cdot C_3}{C_1\cdot C_2\cdot C_3}$; $C=\frac{C_1\cdot C_2\cdot C_3}{C_1\cdot C_2+C_1\cdot C_3+C_2C_3}$

$\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C}-\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_3}$; $\frac{1}{C_1}=\frac{C_2\cdot C_3-C\cdot C_3-C\cdot C_2}{C\cdot C_2\cdot C_3}$; $C_1=\frac{C\cdot C_2\cdot C_3}{C_2\cdot C_3-C\cdot C_3-C\cdot C_2}$

14. Faßt die Baugrube b m³ und wird durch die drei Pumpen in x h entleert, so fördert die 1. Pumpe in dieser Zeit $x\cdot\frac{b}{3}$ m³, die 2. Pumpe $x\cdot\frac{b}{4}$ m³, die 3. Pumpe $x\cdot\frac{b}{6}$ m³, und es gilt

$x\cdot\frac{b}{3}+x\cdot\frac{b}{4}+x\cdot\frac{b}{6}=b \quad \Big| \cdot\frac{12}{b}$ $x=1\frac{1}{3}$. Die Baugrube wird in $1\frac{1}{3}$ h entleert.

Seite 96

1. a) $(x_1=+12)$; $x_2=+\frac{4}{9}$ x_1 erfüllt die Gleichung nicht.

b) $(x_1=+10)$; $x_2=+\frac{7}{4}$ x_1 erfüllt die Gleichung nicht.

2. a) $x_1=+\frac{a}{2}$; $x_2=-\frac{a}{2}$ **b)** $x_1=+\frac{a}{b}$; $x_2=-\frac{a}{b}$

3. a) $x_1 = 12$; $(x_2 = -15)$ x_2 erfüllt die Gleichung nicht.
b) $(x_1 = 12)$; $x_2 = -15$ x_1 erfüllt die Gleichung nicht.

5. Das Lichtnetz darf höchstens mit 1320 W belastet werden.

6. Anleitung: $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$. Die Kurzschlußstelle ist 10,467 km vom Leitungsanfang entfernt.

7. Anleitung: Gesamtstromentnahme ermitteln! Beziehungen: $P = U \cdot I$ und $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$. Die Gesamtstromentnahme beträgt 13,4 A. Die vorhandene Absicherung reicht nicht aus.

8. Anleitung: C ergibt sich aus der Gleichung für die kapazitive Blindleistung $P'_B = U^2 \cdot \omega \cdot C$. Da die kapazitive Blindleistung P'_B die induktive Blindleistung P_B kompensieren soll, kann $P'_B = P_B$ gesetzt werden. P_B ist das Produkt aus $P_w \cdot \tan\varphi$. Lösung: $C = 223\,\mu F$.

9. Anleitung: Da 120 l Wasser 120 kg wiegen, ist die benötigte Wärmemenge $Q = m(t_2 - t_1)$. Die Zeit ergibt sich aus $A = U \cdot I \cdot t$.

Lösung: Die ursprüngliche Temperatur würde nach 7 h 40′ erreicht werden: es ist aber zu beachten, daß das Wasser während des Erwärmens einen Wärmeverlust an die Luft hat.

10. Anleitung: $R = R_1 + R_2$. Lösung: $R_T = 300\,\Omega$; $R_L = 600\,\Omega$.

11. Anleitung: $C = C_1 + C_2$ Lösung: $C_1 = 250$ pF; $C = 750$ pF.

12. Anleitung: $\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$ und $U = I \cdot R$.

Lösung: $U_1 = 6$ V; $U_2 = 30$ V; $U_3 = 150$ V; $U_4 = 300$ V.

13. Anleitung: Gleichungen für Reihen- und Parallelschaltungen von Kapazitäten.
Lösung: $C_1 = 40\,\mu F$; $C_2 = 10\,\mu F$.

14. Anleitung: Gleichungen für Reihen- und Parallelschaltungen von Widerständen.
Lösung: $R_1 = 300\,\Omega$; $R_2 = 300\,\Omega$. Die beiden Leitungen sind also symmetrisch.

15. Anleitung: $v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{60}$ Lösung: Der Dreher muß 120 min^{-1} einstellen.

16. Anleitung: $P = \frac{F \cdot v}{75}$ Lösung: $F_{max} = 597{,}014$ kp.

17. Lösung: $d_{01} = 24$ mm; $d_{02} = 72$ mm.

18. Anleitung: Die beiden Teile halten einander am zweiarmigen Hebel im Gleichgewicht, wenn sich die Hebelarme wie 2 : 3 verhalten. Lösung: $m_1 = 192$ kg; $m_2 = 128$ kg.

19. Die Abmessungen des Stempels sind 25 cm · 20 cm.

20. Anleitung: $\sigma = \frac{F}{A}$ Lösung: $\sigma = 25$ kp · cm^{-2}.

21. Anleitung: $F_{zus.} = \frac{\Delta l \cdot A \cdot E}{l}$ Lösung: Die zusätzliche Zugkraft beträgt 553,5 kp.

22. Die 4 m^3 Tonerdezement enthalten 1,6 m^3 CaO und 0,4 m^3 SiO_2.

23. Die Druckfestigkeit betrug nach 3 Tagen 150 kp · cm^{-2}, nach 7 Tagen 225 kp · cm^{-2} und nach 28 Tagen 325 kp · cm^{-2}. Hinweis: Die Angabe der Güteklasse entspricht der vorgeschriebenen Mindestdruckfestigkeit nach 28 Tagen.

24. Anleitung: Satz des Pythagoras. Lösung: Streckbalken 6,8 m, Strebensäulen 4,8 m.

25. Die äußere Turmkante muß 5 m, die Kante der Aufstiegsluke muß 1 m lang gemauert werden.

26. Das Buchenholz hat ein Gewicht von 7,52 Mp. Die Nutzlast wird nicht überschritten.

27. Anleitung: $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$
Lösung: $h = 15{,}25$ cm; entsprechend den Handelsgrößen wird man eine Höhe von 16 cm wählen.

28. Anleitung: Die erforderliche Fläche A ergibt sich aus $A = \frac{H}{\tau_{zul}}$, wobei sich die Vorholzlänge aus $\frac{A}{b}$ ergibt. (Laut Tabelle ist $\tau_{zul} = 7\ \mathrm{kp \cdot cm^{-2}}$.)

Lösung: Das Vorholz muß 15 cm lang belassen werden.

29. Die Platten haben folgende Dichten:
Die Holzfaserhartplatte 1 kg · dm^{-3}, die mehrschichtige Holzspanplatte 0,6 kg · dm^{-3},
die Holzfaserdämmplatte 0,25 kg · dm^{-3}, die zweischichtige Holzspanplatte 0,25 kg · dm^{-3}.

30. Die Lagerstätte ist bei einer durchschnittlichen Tiefe von 4815 m zu erwarten.

31. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Steinsalz beträgt 5000 m · s^{-1}.

32. Das Verhältnis der ersten Lagerstätte ist 3,5 : 1, das der zweiten 4,5 : 1. Der Abbau der ersten Lagerstätte wird also rentabler.

33. Das Deckgebirge hat eine Abmessung von 36,7 m und die Kohle von 15,3 m.

Seite 105

4. a) $x = 0{,}9$; $y = 1$
b) $x = 2$; $y = 0{,}1$

5. a) $x = 12$; $y = 20$
b) $x = 18$; $y = 24$
c) $x = -3$; $y = -7$

6. a) $x = +6$; $y = +1$
b) $x = +5$; $y = +4$

7. a) $x = a - b$; $y = a + b$
b) $x = a + b$; $y = a - b$
c) $x = a - b$; $y = a + b$
d) $x = a^2 - ab + b^2$; $y = a^2 + ab + b^2$

Seite 107

2. Hat das erste der beiden neuen Zahnräder x, das zweite y Zähne, so hat von den beiden alten das erste $(x - 5)$, das zweite $(y - 5)$ Zähne, und es gelten die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{x-5}{y-5} = \dfrac{5}{11} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right|$$

$x = 30$; $y = 60$.

Das erste Zahnrad hat 30, das zweite 60 Zähne.

3. Heißt die erste Zahl x, die zweite y, so gilt

$$\left| \begin{array}{c} 2x = y + 1 \\ 100x + y = 52y + 5, \end{array} \right|$$

$x = 45$; $y = 23$.

4. Mit x als Zehnerziffer und y als Einerziffer heißt die Zahl $10x + y$, mit y als Zehnerziffer und x als Einerziffer heißt sie $10y + x$. Es gelten die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{10x + y - 2}{y} = 12 \\ \dfrac{10y + x - 8}{x} = 9 \end{array} \right|$$

$x = 9$; $y = 8$. Die Zahl heißt 98.

5. Ist die kleinere Seite des Rechtecks x cm, die größere y cm lang, so gilt

$$\left| \begin{array}{c} (x+3) \cdot (y-2) = x \cdot y + 22 \\ x + 3 = y - 2 \end{array} \right|$$

$x = 13$; $y = 18$.

Die kleinere Rechteckseite ist 13 cm, die größere 18 cm lang.

6. Um den Graben fertigzustellen, sind G m³ auszuschachten. Dazu braucht der erste Arbeiter x Tg., der zweite y Tg. An einem Tag schachtet der erste Arbeiter $\frac{G}{x}$ m³, der zweite $\frac{G}{y}$ m³ aus, somit gelten die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{G}{x} \cdot 4 + \dfrac{G}{y} \cdot 4 = \dfrac{G}{5} \\ \dfrac{G}{x} \cdot 6 + \dfrac{G}{y} \cdot 15 = \dfrac{G}{2} \end{array} \right|$$

$x = 36$; $y = 45$.

Der erste Arbeiter würde in 36 Tagen, der zweite in 45 Tagen den Graben allein ausschachten.

7. Werden in einer Reihe x Bäume gepflanzt, und sind y Reihen vorgesehen, so sind $x \cdot y$ Bäume notwendig.
Mit einem Baum mehr in jeder Reihe und zwei Reihen mehr würden $(x+1) \cdot (y+2)$ Bäume, mit zwei Bäumen mehr in jeder Reihe und einer Reihe mehr würden $(x+2) \cdot (y+1)$ Bäume gebraucht, und es gelten die Gleichungen

$$\left| \begin{array}{c} (x+1) \cdot (y+2) = x \cdot y + 23 \\ (x+2) \cdot (y+1) = x \cdot y + 29 \end{array} \right|$$

$x = 5$; $y = 11$.

Je 5 Bäume stehen in 11 Reihen.

8. Im ersten Monat schleift ein Arbeiter der 1. Abteilung x Stück, ein Arbeiter der 2. Abteilung y Stück.

$$\left|\begin{array}{r} 18\cdot x+20\cdot y=246 \\ 20\,x+18\,y=248 \end{array}\right|$$

$x=7;\ y=6.$

12. Werden x kg Stahl mit y kg Grauguß zusammengeschmolzen, so gilt

$$\left|\begin{array}{c} \frac{x\cdot 0{,}5}{100}+\frac{y\cdot 2{,}5}{100}=\frac{12000\cdot 1{,}45}{100} \\ x+y=12000 \end{array}\right|$$

$x=6300;\ y=5700.$

6,3 t Stahl werden mit 5,7 t Grauguß zusammengeschmolzen.

14. Die Legierung aus 189,2 kg Kupfer und x kg Zinn ergibt y kg Bronze. Somit gelten die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} 189{,}2+x=y \\ \frac{189{,}2}{8{,}8}+\frac{x}{7{,}2}=\frac{y}{8{,}6} \end{array}\right|$$

$x=22\frac{4}{35};\quad y=211\frac{11}{35}.$

Die Legierung aus 189,2 kg Kupfer und 22,1 kg Zinn ergibt 211,3 kg Bronze.

15. Enthält die erste Sorte $x\%$, die zweite $y\%$ Alkohol, so gilt, wenn der beim Mischen entstehende Schwund vernachlässigt wird,

$$\left|\begin{array}{c} \frac{48\cdot x}{100}+\frac{16\cdot y}{100}=\frac{120\cdot 40}{100} \\ \frac{50x}{100}+\frac{10y}{100}=\frac{120\cdot 40}{100} \end{array}\right|$$

$x=90;\quad y=30.$

Die erste Sorte enthält 90%, die zweite 30% Alkohol.

Seite 110

1. $x=2;\quad y=3;\quad z=-1$

3. $x=1\frac{2}{3};\quad y=4\frac{5}{6};\quad z=7\frac{8}{9}$

4. $x=6;\quad y=10,\quad z=15$

5. $x=4;\quad y=3;\quad z=2;\quad u=1$

7. Besteht die Zahl aus x Hundertern, y Zehnern und z Einern, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{100x+10y+z-11}{x+y}=49 \\ \frac{100x+10y+z-3}{x+z}=66 \\ \frac{100x+10y+z-18}{x+y+z}=37 \end{array}\right|$$

$x=7;\quad y=9;\quad z=5.$

Die Zahl heißt 795.

9. Zur Füllung des b m³ fassenden Beckens benötigt die erste Pumpe x h, die zweite y h, die dritte z h; in einer Stunde fördert die erste Pumpe $\frac{b}{x}$ m³, die zweite $\frac{b}{y}$ m³, die dritte $\frac{b}{z}$ m³ Wasser. Somit ergeben sich die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} 2\cdot\frac{b}{x}+9\cdot\frac{b}{y}=\frac{4}{5}b \\ 5\cdot\frac{b}{x}+4\cdot\frac{b}{z}=\frac{5}{6}b \\ 5\cdot\frac{b}{y}+8\cdot\frac{b}{z}=b \end{array}\right|$$

$x=10;\quad y=15;\quad z=12.$

11. Werden von der 1. Sorte x kg, von der 2. Sorte y kg, von der 3. Sorte z kg genommen, so ergibt sich:

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}52\,x+0{,}59\,y+0{,}63\,z=(x+y+z)\cdot 0{,}60 \\ 0{,}26\,x+0{,}30\,y+0{,}31\,z=(x+y+z)\cdot 0{,}30 \\ 0{,}22\,x+0{,}11\,y+0{,}06\,z=(x+y+z)\cdot 0{,}10 \end{array}\right|$$

$x=0{,}5;\quad y=2{,}0;\quad z=2{,}0.$

4. Winkelfunktionen und ebene Trigonometrie

Seite 115

2. a) $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $-\frac{3}{5}$ **i)** $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. a) 30°; 150° **d)** 5,7°; 174,3° **f)** 23,6°; 156,4° **h)** 64,2°; 115,8°

5. b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **c)** $\pm\frac{12}{13}$ **i)** $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. a) 0,92 **d)** 0,71 **7. b)** 75,5°; 284,5° **e)** 107,5°; 252,5° **h)** 25,8°; 334,2°

8. $\sin x = \cos x$ für $x_1 = 45°$; $x_2 = 225°$
$\sin x = -\cos x$ für $x_1 = 135°$; $x_2 = 315°$

9. a) $\sin 30° = \cos 60°$
b) $\sin 60° = \cos 30°$

10. $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \approx 1{,}4$ 11. a) $\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}58$ d) $-\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx -0{,}58$ 12. b) 1 e) $\frac{2}{3}$

13. b) 23,2°; 203,2° d) 135,0°; 315,0° 14. $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \approx 1{,}4$

15. a) 3,73 c) −0,27 d) −3,73
(nach Tafel 14)

16. a) $\frac{4}{3}$ b) 1 f) $\frac{b}{a}$

17. c) 21,8°; 201,8° f) 168,7°; 348,7°

18.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	—
90°	1	0	—	0
180°	0	−1	0	—
270°	−1	0	—	0
360°	0	1	0	—

Seite 124

1. a)

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin\alpha$	0	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1
$\cos\alpha$	1	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174	0

b)

α	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
$\sin\alpha$	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174	0
$\cos\alpha$	−0,174	−0,342	−0,500	−0,643	−0,766	−0,866	−0,940	−0,985	−1

3.

Quadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
I.	steigend	fallend	steigend	fallend
II.	fallend	fallend	steigend	fallend
III.	fallend	steigend	steigend	fallend
IV.	steigend	steigend	steigend	fallend

4. a) $l = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$ b)

α	20°	80°	140°
l (in cm)	1,22	4,50	6,58

5. a) 0,087 b) 0,978 h) 0,996 6. a) 20,5°; 159,5° d) 220,5°; 319,5° 7. b) 83,0°; 277,0° d) 98,0°; 262,0°

8. Analytische Begründung:
a) $\sin(45° - x) = \cos(45° + x)$
$\cos(45° - x) = \sin(45° + x)$
b) $\sin(225° - x) = \cos(225° + x)$
$\cos(225° - x) = \sin(225° + x)$

9. a) 3,27 e) 1,24 10. a) 25,5°; 205,5° b) 50,3°; 230,3°

11.

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos x$	1	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174	0
$\cot x$	—	5,671	2,747	1,732	1,192	0,839	0,577	0,364	0,176	0

13. a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

14. b) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\sin^2 x + \sin^2 x \cot^2 x = 1$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

16. a) $\sin x$ e) $\tan^2 x$

17. a) $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}866$; $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577$;

$\cot 30° = \sqrt{3} \approx 1{,}732$

d) $\sin 0° = 0$; $\cos 0° = 1$; $\cot 0°$ nicht erklärt

e) $\sin 270° = -1$; $\cos 270° = 0$; $\tan 270°$ nicht erklärt

i) $\sin 59° = 0{,}8572$; $\cos 59° = 0{,}5150$; $\tan 59° = 1{,}664$

18. a) $\sin x = \frac{1}{3}$; (Lage des Winkels: I. und II. Quadrant)

$\cos x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ Der Funktionswert ist im I. Quadranten +, im II. Quadranten −

$\tan x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ (±)

$\cot x = 2\sqrt{2}$ (±)

g) $\tan x = \frac{1}{4}$: (I. und III.)

$\sin x = \frac{1}{17}\sqrt{17}$ (±)

$\cos x = \frac{4}{17}\sqrt{17}$ (±)

$\cot x = 4$ (+)

h) $\cot x = 2 - \sqrt{3}$: (I. und III.)

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (±)

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (±)

$\tan x = 2 + \sqrt{3}$ (+)

k) $\cos x = \frac{1}{2}$: (I. und IV.)

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (±)

$\tan x = \sqrt{3}$ (±)

$\cot x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (±)

Seite 134

1. a) 0,2079	e) 0,6018	i) 0,9994	m) 0,6293	n) 0,3746	q) −0,8387
2. a) 0,3839	e) 0,6009	i) 7,115	m) 0,2493	n) 0,0524	q) −0,1051
3. a) 0,8491	e) 0,3295	i) 0,9209	m) 0,9858	n) 0,9998	q) 0,9798
4. a) 0,0335	e) 0,8916	i) 3,801	m) 1,040	n) 0,7411	q) −1,008
5. a) 0,0035	c) 0,0309	e) 0,0567	g) 0,0872		
0,0035	0,0309	0,0568	0,0875		

6. a) bis zu 2,6° b) bis zu 4,0°

7. b) 38,40° d) 24,42° f) 54,06°

8. a) 27° 6′ b) 14° 54′ c) 34° 7′ 12″

9.

x	89,00°	89,01°	89,02°	89,03°	89,04°	89,05°
$\tan x$	57,29	57,93	58,56	59,20	59,84	60,48
$\Delta \tan x$	0,00	+0,06	+0,10	+0,14	+0,16	+0,17

(nach Tafel 14)

x	89,06°	89,07°	89,08°	89,09°	89,10°
$\tan x$	61,11	61,75	62,39	63,02	63,66
$\Delta \tan x$	+0,16	+0,15	+0,12	+0,06	0,00

10. a) 27,03 b) 60,24

11. a) 16° b) 38° c) 62° d) 28,6°

164° 142° 118° 151,4°

12. e) 8,5° **f)** 155,6° **g)** 28,2° **h)** 72,7°
188,5° 335,6° 208,2° 252,7°

13. i) 170,83° **k)** 89,79° **l)** 91,85° **m)** 0,6° bis 0,9°
189,17° 270,21° 268,15° 359,1° bis 359,4°

14.

c)		d)		e)	
210°	330°	22°	158°	227°	313°
180°		45°	315°	159	201°
63,43°	243,43°	108,44°	288,44°	156°	336°
161,56°	341,56°	176,53°	356,53°	80,35°	260,35°

16. a) 0,996 **d)** 0,412 **g)** 0,104 **k)** 0,927

17. b) 0,759 **f)** 0,111 **k)** 0,900

18. c) 0,0335 **g)** 0,0872 **l)** 0,0892

20. a) 81,9° **b)** 60,5° **c)** 40,7° **d)** 21,0°
98,1° 119,5° 139,3° 159,0°

21. e) 7,0° **f)** 161,4° **g)** 139,9° **h)** 12,9°
187,0° 341,4° 319,9° 192,9°

22. i) 88,7° **k)** 86,0° **l)** 86,5° **m)** 89,3°
271,3° 266,0° 273,5° 269,3°

26. b) $s = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ $b = \frac{\pi \alpha}{180°}$ $h = 1 - \cos \frac{\alpha}{2}$

27. a) $A_{\text{Segment}} = 0{,}0667\ \text{m}^2$ **b)** $h = 0{,}109$ m **c)** $r = 7{,}54$ m

d) $A_{\text{Sektor}} = f(\alpha) = \frac{\pi \alpha}{360°}$

$A_{\Delta} = f(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha$

$A_{\text{Segment}} = f(\alpha) = \frac{\pi \alpha}{360°} - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \alpha}{180°} - \sin \alpha\right)$

Seite 149

1. a) 0,5235 − 1 **b)** 0,7201 − 1 **c)** 0,9992 − 1 **d)** 0,4829 − 1
e) 0,4425 − 1 **f)** 0,8991 − 1 **g)** 0,8517 − 1 **h)** 0,8466 − 1

2. a) 0,5905 − 1 **b)** 0,0867 **c)** 0,1223 − 1

4. a) $\lg \tan x = -\lg \cot x$ **b)** $\lg \tan x = \lg \sin x - \lg \cos x$ **c)** $\lg \cot x = \lg \cos x - \lg \sin x$
Eine entsprechende Beziehung zwischen $\lg \sin x$ und $\lg \cos x$ gibt es nicht.

7. a) 49,50° **b)** 185,42° **c)** 2,3° bis 2,6°
130,50° 354,58° 357,4° bis 357,7°

8. a) $\alpha = 68{,}90°$ $c = 13{,}6$ cm $\beta = 21{,}10°$ $A = 31{,}12\ \text{cm}^2$
b) $\alpha = 36{,}35°$ $c = 92{,}55$ m $\beta = 53{,}65°$ $A = 2045\ \text{m}^2$
c) $\alpha = 40{,}62°$ $b = 490$ m $\beta = 49{,}38°$ $A = 102\,900\ \text{m}^2$

9. e) $a = 16{,}8$ cm $c = 27{,}5$ cm $b = 21{,}8$ cm $\beta = 52{,}50°$ $A = 183{,}1\ \text{cm}^2$
f) $a = 2{,}65$ m $\alpha = 39{,}1°$ $b = 3{,}26$ m $\alpha = 50{,}9°$ $A = 4{,}32\ \text{m}^2$
g) $b = 15{,}7$ cm $\alpha = 75{,}45°$ $c = 62{,}5$ cm $\beta = 14{,}55°$ $A = 474{,}9\ \text{cm}^2$

10. a) $\alpha = \beta = 53{,}67°$ $\gamma = 72{,}66°$ $a = b = 105{,}5$ m (berechtigt 106 m) $A = 5312\ \text{m}^2$
b) $\alpha = \beta = 70{,}26°$ $\gamma = 39{,}48°$ $A = 4{,}35\ \text{m}^2$
c) $\alpha = \beta = 72{,}12°$ $\gamma = 35{,}76°$ $A = 9{,}50\ \text{m}^2$

12. a) $a_n = n \cdot a_\triangle$

$a_\triangle = \frac{1}{2} s_n \cdot r_i$

$a_\triangle = r_u^2 \sin \frac{180°}{n} \cos \frac{180°}{n}$

$a_\triangle = \frac{1}{2} r_u^2 \sin \frac{360°}{n}$

$a_n = \frac{1}{2} n r_u^2 \sin \frac{360°}{n}$

13. a) $r_i = 13{,}7$ cm $\quad r_u = 15{,}2$ cm $\quad A_7 = 633\ \text{cm}^2$

b) $s_{10} = 14{,}5$ cm $\quad r_i = 22{,}4$ cm $\quad A_{10} = 1624\ \text{cm}^2$

14. a) $\tan\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\quad \tan\beta = \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}$; $\quad \tan\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}$

15.

	P_Z	P_D
30°	800 kp	693 kp
45°	566 kp	400 kp
60°	462 kp	231 kp

18. $\alpha = 4{,}43°$

19. a) $H = G \cdot \sin\alpha = 40{,}6$ kp

$N = G \cdot \cos\alpha = 87{,}0$ kp

b) Gleitreibung $R = \mu \cdot N = 15{,}7$ kp

Zugkraft $Z = H + R = 56{,}3$ kp

20. a) $s_5 = 35{,}3$ mm

22. a) $\beta = 35{,}26°$

Verschiebung: $s = \frac{d \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} \approx 5{,}12$ cm

23. b) $\sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}$ $\qquad \beta_1 = 28{,}13°$

$\beta_2 = 60° - \beta_1$ $\qquad \beta_2 = 31{,}87°$

$\sin\alpha_2 = n \sin\beta_2$ $\qquad \alpha_2 = 52{,}37°$

Gesamtablenkung $\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 37{,}37°$

24. a) 48,6°

25. $x = (120 + 2 \cdot 28)\ \text{mm} = 176\ \text{mm}$

26. Breite der Ausfräsung: 154 mm

Tiefe der Ausfräsung: 36 mm

Seite 157

1. a) $\sin[\pi - (x+y)] = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\cos[\pi - (x+y)] = \sin x \sin y - \cos x \cos y$

b) Sei x im II. Quadrant

$\sin[\pi - (x+y)] = \sin(\pi - x)\cos y - \cos(\pi - x)\sin y$

$\cos[\pi - (x+y)] = \sin(\pi - x)\sin y + \cos(\pi - x)\cos y$

2. Es ist z. B. $c = p + q$; $\quad p = a\cos\beta$, $\quad q = b\cos\alpha$.

Mit $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$ und $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ergibt sich $\quad \sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Aus $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ ergibt sich $\sin \beta = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma$.

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \gamma &= \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma \\ &= \sin \beta - \cos \alpha(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= -\cos \alpha \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta(1 - \cos^2\alpha) \\ &= -\cos \alpha \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin^2 \alpha \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Da die Beziehungen $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ und $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ auch in stumpfwinkligen Dreiecken gelten, sind die Bedingungen: α, β im I. oder II. Quadranten, $\alpha + \beta < \pi$.

3. $\frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} b^2 \sin \beta \cos \beta$

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a}{b} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{b}{a} \sin \beta \cos \beta$$

5. Die Einzelargumente seien $\frac{\pi}{2} - x$ und $-y$, dann ist die Summe $\frac{\pi}{2} - (x + y)$. Unter der Voraussetzung, daß (21) für beliebige Winkel gilt, ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(-y) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y).$$

6. b) $c = p - q = b \cos y - a \cos x$

$$c = \frac{a \sin(x - y)}{\sin y} \qquad b = \frac{a \sin(\pi - x)}{\sin y}$$

$$a \frac{\sin(x - y)}{\sin y} = \frac{a \sin(\pi - x)}{\sin y} \cos y - a \cos x.$$

Aus $b = c \cos y + a \cos(x - y)$ ergibt sich

$$\frac{\sin(\pi - x)}{\sin y} = \frac{\sin(x - y)}{\sin y} \cos y + \cos(x - y)$$

$\sin x = (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \cos y + \sin y \cos(x - y)$.

Dann weiter analog Aufgabe 2.

8. Sei $y < 0$ im IV. Quadranten, dann ist $-y > 0$ im I. Quadranten. Die Bedingungen für die Formeln (18) und (19) sind für die Winkel $\frac{\pi}{2} - x$ und $-y$ erfüllt.

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(-y) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y)$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(-y) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y)$$

9. Man setzt $-y$ für y ein:

$\sin(x - y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y)$

$\cos(x - y) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$

11. $2 + \sqrt{3}$; $\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$; $\quad \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\quad \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

12. a) $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$; $\quad \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ $\qquad$ **b)** $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ $\quad \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

45°; 30°; 75°; 15° $\qquad$ 60°; 45°; 105°; 15°

13. a) 0; $\quad \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ **b)** $-\frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$; $\quad \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$

30°; 60°; 90°; −30° $\qquad$ 135°; 75°; 210°; 60°

14. a) $-(2+\sqrt{3})$; $2-\sqrt{3}$ b) $-(\sqrt{3}+2)$; i

60°; 45°; 105°; 15° 75°; 30°; 105°; 45°

Seite 165

1. a) $\alpha = 82°$ $b = 2{,}76$ cm $c = 3{,}31$ cm $A = 4{,}51$ cm²
   b) $\alpha = 69{,}7°$ $b = 5{,}94$ cm $c = 2{,}66$ cm $A = 7{,}42$ cm²
   c) $\gamma = 85{,}5°$ $a = 0{,}506$ m $b = 1{,}410$ m $A = 0{,}3555$ m²
2. e) $\alpha = 24{,}34°$ $\gamma = 46{,}42°$ $c = 21{,}36$ m $A = 122{,}5$ m²
   f) $\beta = 19°11'$ $\alpha = 140°14'$ $a = 8{,}37$ cm $A = 6{,}33$ cm²
   g) $\gamma = 57°35'$ $\beta = 55°2'$ $b = 27{,}0$ cm $A = 346{,}4$ cm²
3. $a = 511{,}6$ cm $b = 342{,}7$ cm $c = 431{,}2$ cm
5. a) Wegen $\sin\gamma \leqq 1$ und $A = 20 \sin\gamma$ ist $0 \leqq A \leqq 20$ cm² b) $\sin\gamma = \frac{2F}{ab} > 1$
6. a) $b = 5{,}78$ cm $\alpha = 70{,}27°$ $\gamma = 46{,}53°$ $A = 12{,}79$ cm²
   b) $c = 200{,}6$ m $\alpha = 36{,}99°$ $\beta = 40{,}85°$ $A = 8100$ m²
8. a) $\sphericalangle M_2M_1M_3 = 47{,}77°$ b) $\sphericalangle M_2M_1M_3 = 46{,}41°$
   $\sphericalangle M_1M_2M_3 = 57{,}94°$ $\sphericalangle M_1M_2M_1 = 56{,}38°$
   $\sphericalangle M_1M_3M_2 = 74{,}29°$ $\sphericalangle M_1M_3M_2 = 77{,}21°$
9. a) Die Winkel im Bilddreieck
   $\alpha = 20{,}8°$ $\beta = 57{,}6°$ $\gamma = 101{,}6°$
10. $R = 71{,}07$ kp
    Winkel zwischen F_1 (40 kp) und $R = 72{,}1°$
    Winkel zwischen F_2 (70 kp) und $R = 32{,}9°$
11. a) Spannkraft im Ankerseil: 1271 kp b) Belastung des Mastfundamentes: (758 + 800) kp = 1558 kp
13. a) $F_Z = 15000$ kp $F_D = 18000$ kp
14. a) $\sphericalangle$ zwischen F_1 und $F_2 = 87°$
    $\sphericalangle$ zwischen F_1 und $F_3 = 131{,}5°$
    $\sphericalangle$ zwischen F_2 und $F_3 = 141{,}4°$
15. a) 244,9 m b) 90° bzw. 55°

Seite 173

1. 2,89° 2. a) 0,0175 m b) 0,175 m 3. a) $h \approx 22{,}0$ m
   4. a) $h = 842{,}4$ m
5. Turmhöhe: 132,3 m 7. a) $e_1 = 252{,}3$ m; $e_2 = 411{,}7$ m
8. b) $\overline{CD} = 47{,}0$ m c) $\overline{CD} = 390{,}9$ m
9. Abstand des Mittelpfeilers von A bzw. B: 99,3 m
   Abstand der Endpfeiler A und B: 201 m
10. a) $\overline{CD} = 36{,}5$ m b) $\overline{CD} = 75{,}8$ m 11. $\overline{CD} = 211$ m 12. Verkürzung a) 32,2 m
13. $\overline{AD} = 155{,}1$ m $A_{ADE} = 51{,}60$ a
    $\overline{AE} = 82{,}3$ m $A_{ABD} = 82{,}30$ a
    $\overline{BD} = 138{,}5$ m
    $\overline{BC} = 85{,}6$ m $A_{BCD} = 16{,}24$ a $A \approx 4{,}42$ ha
    $\overline{AG} = 236$ m $A_{AGB} = 132{,}60$ a
    $\overline{AF} = 161{,}3$ m $A_{AFG} = 159{,}60$ a
15. $\overline{AC} = 172{,}8$ m $\overline{BC} = 246{,}6$ m 18. Einfallswinkel: 53,92°

Seite 185

1.

	a) $-30°$	b) $-18°$	c) $-135°$	d) $-83{,}4°$
sin	$-0{,}5000$	$-0{,}3090$	$-0{,}7071$	$-0{,}9934$
cos	$0{,}8660$	$0{,}9511$	$-0{,}7071$	$0{,}1149$
tan	$-0{,}5774$	$-0{,}3249$	$1{,}0000$	$-8{,}643$
cot	$-1{,}732$	$-3{,}078$	$1{,}0000$	$-0{,}1157$

2.

	a)	b)	c)	d)
$\lg \lvert\sin x\rvert$	9,6990	9,4900	9,8495	9,9971
$\lg \lvert\cos x\rvert$	9,9375	9,9782	9,8495	9,0005
$\lg \lvert\tan x\rvert$	9,7614	9,5118	0,0000	0,9367
$\lg \lvert\cot x\rvert$	0,2386	0,4882	0,0000	9,0633

3.

	$\sin x$	x_1	x_2	$\cos x$	x_1	x_2
a)	$-0{,}4848$	$-29°$	$-151°$	$0{,}9655$	$-15{,}1°$	$-344{,}9°$
b)	$-0{,}9024$	$-64{,}48°$	$-115{,}52°$	$0{,}3704$	$-68{,}26°$	$-291{,}74°$
	$\tan x$	x_1	x_2	$\cot x$	x_1	x_2
f)	$2{,}877$	$-109{,}17°$	$-289{,}17°$	$0{,}0107$	$-90{,}61°$	$-270{,}61°$

4. a) $21{,}9°$ $\quad 158{,}1°$ $\quad -201{,}9°$ $\quad -338{,}1°$
b) $188{,}54°$ $\quad 351{,}46°$ $\quad -8{,}54°$ $\quad -171{,}46°$
c) $84{,}3°$ $\quad 275{,}7°$ $\quad -84{,}3°$ $\quad -275{,}7°$
d) $105{,}38°$ $\quad 254{,}62°$ $\quad -105{,}38°$ $\quad -254{,}62°$

5. φ sei > 0; damit ist $x = -\varphi$:
e) $\cos(90° - (-\varphi)) = \cos(90° + \varphi) = -\sin\varphi = \sin(-\varphi) \rightarrow \cos(90° - x) = \sin x, \quad x < 0$
f) $\sin(90° - (-\varphi)) = \sin(90° + \varphi) = +\cos\varphi = \cos(-\varphi) \rightarrow \sin(90° - x) = \cos x, \quad x < 0$
g) $\tan(90° - (-\varphi)) = \tan(90° + \varphi) = -\cot\varphi = \cot(-\varphi) \rightarrow \tan(90° - x) = \cot x, \quad x < 0$
h) $\cot(90° - (-\varphi)) = \cot(90° + \varphi) = -\tan\varphi = \tan(-\varphi) \rightarrow \cot(90° - x) = \tan x, \quad x < 0$

6.

a)	$-1030°$	$-670°$	$-310°$	$50°$	$410°$	$770°$	$1130°$
b)	$-905°$	$-545°$	$-185°$	$175°$	$535°$	$895°$	$1255°$
c)	$-745°$	$-385°$	$-25°$	$335°$	$695°$	$1055°$	$1415°$
d)	$-962{,}5°$	$-602{,}5°$	$-242{,}5°$	$117{,}5°$	$477{,}5°$	$837{,}5°$	$1197{,}5°$
e)	$-1301{,}68°$	$-941{,}68°$	$-581{,}68°$	$-221{,}68°$	$138{,}32°$	$498{,}32°$	$858{,}32°$

7. f) $323°$ $\quad$ g) $327°$ $\quad$ h) $138°\,10'$ $\quad$ i) $166{,}8°$ $\quad$ k) $36{,}48°$

8. a) $x_1 = 18{,}8° + k \cdot 360°$ $\quad x_2 = 161{,}2° + k \cdot 360°$
c) $x_1 = 25{,}6° + k \cdot 360°$ $\quad x_2 = 334{,}4° + k \cdot 360°$
e) $x = 132{,}72° + k \cdot 180°$

9. a) $x_1 = 15{,}72° + k \cdot 360°$ $\quad x_2 = 164{,}28° + k \cdot 360°$
c) $x_1 = 81{,}15° + k \cdot 360°$ $\quad x_2 = 278{,}85° + k \cdot 360°$
e) $x = 16{,}48° + k \cdot 180°$

10. a) 0,0175 $\quad$ e) 0,000 004 85 $\quad$ i) $\frac{5\pi}{3} = 5{,}2360$ $\quad$ n) 1,1781 $\quad$ r) $-3{,}0966$

11. b) 36° **f)** 1° **k)** 15° **o)** 5,73° **s)** 174,2° **w)** - 40,3°

12. a) 3,17 cm **13. b)** 0,0349 cm **c)** 0,0698 cm

15. a) $\sin 60° = 0{,}8660$ **b)** $\sin 67{,}5° = 0{,}9239$ **c)** $\sin(-270°) = 1$
d) $\sin 57{,}30° = 0{,}8415$ **e)** $\sin 24{,}63° = 0{,}4168$

16. a) $\tan 180° = 0$ **b)** $\tan 51{,}43° = 1{,}254$
c) $\tan(-9°) = -0{,}1584$ **d)** $\tan 40{,}11° = 0{,}8424$ **e)** $\tan(-68{,}76°) = -2{,}573$

17. a) $\lg \sin 100° = 0{,}9934 - 1$ **b)** $\lg \sin 18° = 0{,}4900 - 1$
c) $\lg |\sin 349{,}51°| = 0{,}2602 - 1$ **d)** $\lg \cos 315° = 0{,}8495 - 1$

18. a) $72° \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{5} = 1{,}2566$ $108° \mathrel{\hat{=}} \frac{3\pi}{5} = 1{,}8850$
b) $40° \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{9} = \ = 0{,}6981$ $140° \mathrel{\hat{=}} \frac{7\pi}{9} = 2{,}4435$
c) $76{,}8 \mathrel{\hat{=}} 1{,}3405$ $103{,}2 \mathrel{\hat{=}} 1{,}8012$
d) $191{,}25° \mathrel{\hat{=}} 3{,}3380$ $348{,}75° \mathrel{\hat{=}} 6{,}0869$
e) $3{,}23 \cdot 10^{-6}$ $\pi - 3{,}23 \cdot 10^{-6}$
f) $45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$ $315° \mathrel{\hat{=}} \frac{7\pi}{4} = 5{,}4978$

19. a) $45° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$ $135° \mathrel{\hat{=}} \frac{3\pi}{4} = 2{,}3562$
c) $3{,}703 \cdot 10^{-6}$ $\pi - 3{,}703 \cdot 10^{-6}$
e) $129{,}4° \mathrel{\hat{=}} 2{,}2584$ $230{,}6° \mathrel{\hat{=}} 4{,}0248$
g) $50° \mathrel{\hat{=}} 0{,}8727$ $230° \mathrel{\hat{=}} 4{,}0143$
i) $138° \mathrel{\hat{=}} 2{,}4085$ $318° \mathrel{\hat{=}} 5{,}5502$

20.

	90°	270°	360°	45°	57,3°
s	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{2}$	10π	$\frac{5\pi}{4}$	
(in cm)	7,85	23,56	31,42	3,93	5,0

25. Es sei stets $0 \leqq x \leqq \pi$

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$$\cot(\pi + x) = \frac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$$

26. a) 0 **b)** $-0{,}9239$ **c)** 0,9511 **d)** $-0{,}8796$ **e)** -1 **f)** 0

27. a) – **b)** $0{,}9656 - 1$ **c)** $0{,}9782 - 1$ **d)** $0{,}9443 - 1$ **e)** 0,0000 **f)** –

28. a) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi = 1{,}0472 + 2k\pi$ $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi = 2{,}0944 + 2k\pi$
b) $\frac{13\pi}{12} + 2k\pi = 3{,}4034 + 2k\pi$ $\frac{23\pi}{12} + 2k\pi = 6{,}0214 + 2k\pi$
c) $0{,}5297 + 2k\pi$ $2{,}6119 + 2k\pi$
d) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi = 0{,}7854 + 2k\pi$ $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi = 5{,}4978 + 2k\pi$
e) $\frac{11\pi}{12} + 2k\pi = 2{,}8798 + 2k\pi$ $\frac{13\pi}{12} + 2k\pi = 3{,}4034 + 2k\pi$
f) $0{,}3653 + 2k\pi$ $5{,}9179 + 2k\pi$

29. a) $0{,}006109 + 2k\pi$ $3{,}1355 + 2k\pi$ **c)** $1{,}5010 + 2k\pi$ $4{,}7822 + 2k\pi$
e) $0{,}2565 + k\pi$ **g)** $1{,}2601 + k\pi$

6. Komplexe Zahlen

Seite 228

1. a) $x_1 = 5\,j$; $x_2 = -5\,j$ **d)** $x_1 = \frac{2}{3}\,j$; $x_2 = -\frac{2}{3}\,j$ **h)** $x_1 = 15\,a\sqrt{b}\,j$; $x_2 = -15\,a\sqrt{b}\,j$

2. a) $x_1 = 10\,j$; $x_2 = -10\,j$ **b)** $x_1 = 4{,}123\,j$; $x_2 = -4{,}123\,j$ **c)** $x_1 = 0{,}316\,j$; $x_2 = -0{,}316\,j$

Seite 231

2. a) $2\,a$ **c)** $\frac{6}{7}$ **3. a)** $-3\,x + 2\,j$ **c)** $25\,a + 6\,b\,j$

4. a) $19 + 40\,j$ **c)** $-22 - 7\,j$ **5. e)** $\frac{18}{25} + \frac{24}{25}\,j$ **f)** $-\frac{24}{13} - \frac{16}{13}\,j$

6. a) $-\frac{65}{41} + \frac{52}{41}\,j$ **e)** $\frac{1}{26} + \frac{5}{26}\,j$

Seite 234

2. a) $|\mathfrak{z}_1| = 5$; $\varphi \approx 37°$ **b)** $|\mathfrak{z}_2| = 5$; $\varphi \approx 53°$

5. a) $\mathfrak{z}_1^* = -3 + 4\,j$

Seite 236

1. a) $5\,(\cos 37° + j \cdot \sin 37°)$ **d)** $\sqrt{17}\,(\cos 256° + j \cdot \sin 256°)$

2. a) $2{,}93 + 0{,}67\,j$ **d)** $7\sqrt{3} + 7\,j$

Seite 241

1. a) $\frac{2}{5} \cdot e^{j\frac{17\pi}{12}} = \frac{2}{5} \cdot e^{j \cdot 255°} = 0{,}4 \cdot (\cos 255° + j \cdot \sin 255°) = -0{,}10352 - j \cdot 0{,}38636$

b) $\frac{8}{5} \cdot e^{j\frac{\pi}{12}} = \frac{8}{5} \cdot e^{j \cdot 15°} = 1{,}6\,(\cos 15° + j \cdot \sin 15°) = 1{,}5454 + j \cdot 0{,}4141$

2. a) $10 \cdot e^{j\,438°} = 10 \cdot (\cos 78° + j \cdot \sin 78°) = 2{,}079 + j \cdot 9{,}781$

b) $2{,}5 \cdot e^{j\,308°} = 2{,}5 \cdot (\cos 308° + j \cdot \sin 308°) = 1{,}539 - j \cdot 1{,}970$

Seite 246

1. a) Der Scheinwiderstand der ersten Spule ergibt wegen

$\mathfrak{Z} = 100\ \Omega + j\,0{,}3 \cdot 2\,\pi \cdot 50\ \Omega = (100 + j \cdot 94{,}2)\ \Omega$ $Z_1 = 138\ \Omega$,

der zweiten Spule wegen

$\mathfrak{Z}_2 = 50\ \Omega + j\,0{,}2 \cdot 2\,\pi \cdot 50\ \Omega = (50 + j \cdot 62{,}8)\ \Omega$ $Z_2 = 80{,}2\ \Omega$,

insgesamt wegen

$\mathfrak{Z} = (150 + j\,157)\ \Omega$ $Z = 217\ \Omega$.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt als *Stromstärke*

$I = \frac{220}{217}\ \mathrm{A} = 1{,}014\ \mathrm{A}$,

für die an der ersten Spule gemessene *Spannung*

$U_1 = \frac{220}{217} \cdot 138\ \mathrm{V} = 139{,}8\ \mathrm{V}$, für die an der zweiten

$U_2 = \frac{230}{217} \cdot 80{,}2\ \mathrm{V} = 81{,}3\ \mathrm{V}$.

b) Aus $\mathfrak{Z}_1 = (100 + j \cdot 94{,}2)\ \Omega$ folgt $\tan\varphi_1 = 0{,}942$; $\varphi_1 = 43{,}3°$ und $\mathfrak{Z}_1 = 138 \cdot e^{j43{,}3°}\ \Omega$;

aus $\mathfrak{Z}_2 = (50 + j \cdot 62{,}8)\ \Omega$ folgt $\tan\varphi_2 = 1{,}256$; $\varphi_2 = 51{,}5°$ und $\mathfrak{Z}_2 = 80{,}2 \cdot e^{j\,51{,}5°}\ \Omega$;

aus $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 = (150 + j \cdot 157)\ \Omega$ folgt $\tan\varphi_{(1,2)} = 1{,}047$; $\varphi_{(1,2)} = 46{,}3°\ \Omega$.

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz gilt für den Widerstand der Verzweigung $\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{Z}_1 \cdot \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2} = e^{j\,48{,}5°}\ \Omega$.

Wegen $\frac{138 \cdot 80{,}2}{217} = 51$ ergibt sich als Effektivwert der *Stromstärke* in der Zuleitung zu der Verzweigung $I = \frac{220}{51}\ \mathrm{A} = 4{,}3\ \mathrm{A}$, als *Stromstärken* in den Spulen $I_1 = \frac{220}{138}\ \mathrm{A} = 1{,}6\ \mathrm{A}$, $I_2 = \frac{220}{80{,}2}\ \mathrm{A} = 2{,}7\ \mathrm{A}$.

3. a) Sie Spule hat den Blindwiderstand $X_L = L\omega = 0{,}6 \cdot 3{,}14\ \Omega = 188{,}4\ \Omega$,

der Kondensator den Blindwiderstand $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^6}{30 \cdot 314}\ \Omega = 106{,}1\ \Omega$.

Da die Spule 100 Ω Wirkwiderstand hat, ergibt der Gesamtwiderstand

$\mathfrak{Z} = 100\ \Omega + j \cdot (188{,}4 - 106{,}1)\ \Omega = (100 + j \cdot 82{,}3)\ \Omega$,

$Z = \sqrt{100^2 + 82{,}3^2}\ \Omega = 129{,}5\ \Omega$, der Strom I wegen

$220\ \mathrm{V} = I \cdot 129{,}5\ \Omega$ den Wert $I = 1{,}7\ \mathrm{A}$.

Als *Kondensatorspannung* ergibt sich $U_C = 1{,}7 \cdot 106{,}1\ \mathrm{V} = 180\ \mathrm{V}$, als *Blindspannung* der Spule

$U_L = 1{,}7 \cdot 188{,}4\ \mathrm{V} = 320\ \mathrm{V}$, als *Wirkspannung* $U_w = 1{,}7 \cdot 100\ \mathrm{V} = 170\ \mathrm{V}$.

Die *Phasenverschiebung* ergibt aus $\tan\varphi = \frac{188{,}4 - 106{,}1}{100} = 0{,}823$, $\varphi = 39{,}5°$.

b) Für den Scheinwiderstand der Spule gilt $\mathfrak{Z}_1 = (100 + j \cdot 188{,}4)\ \Omega$ und $Z_1 = \sqrt{100^2 + 188{,}4^2}$, $I_1 = \frac{220}{213}\ \mathrm{A} = 1{,}03\ \mathrm{A}$. Der Kondensatorwiderstand ergibt sich aus $\mathfrak{Z}_2 = (0 - j \cdot 106{,}1)\ \Omega$, für $I_2 = \frac{220}{106{,}1}\ \mathrm{A} = 2{,}07\ \mathrm{A}$.

Wird der Widerstand $\mathfrak{Z}$ der Verzweigung durch die Widerstände $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ der Zweige berechnet, so erhält man nach dem Kirchhoffschen Gesetz $\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{Z}_1 \cdot \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}$.

Da $\mathfrak{Z}_1 = 213 \cdot e^{j \cdot 62°}\ \Omega$, $\mathfrak{Z}_2 = 106{,}1 \cdot e^{j \cdot (-90°)}\ \Omega$, $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 = 129{,}5 \cdot e^{j - 39{,}5°}\ \Omega$,

entsteht $\mathfrak{Z} = \frac{213 \cdot 106{,}1}{129{,}5} \cdot e^{j \cdot (62{,}4° - 90° - 39{,}5°)}\ \Omega = \frac{213 \cdot 106{,}1}{129{,}5} \cdot e^{j \cdot 293°}\ \Omega$,

$I = \frac{220 \cdot 129{,}5}{213 \cdot 106{,}1}\ \mathrm{A} = 1{,}26\ \mathrm{A}$.

Als *Stromstärken* ergeben sich: In der Zuleitung $I = 1{,}26\ \mathrm{A}$,
in der Spule $I_1 = 1{,}06\ \mathrm{A}$, im Kondensator $I_2 = 2{,}07\ \mathrm{A}$.

Die *Phasenverschiebung* der Stromquelle bestimmt sich als $\cos\varphi = \frac{1{,}03 \cdot \cos 62{,}4°}{1{,}26}$, $\varphi = 67{,}5°$.

5. a) Als *Kondensatorwiderstand* ergibt sich $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{10^6}{40 \cdot 2\pi \cdot 60}\ \Omega = 66{,}3\ \Omega$.

b) Die Spule hat den *Blindwiderstand* $X_L = L \cdot \omega = 0{,}4 \cdot 2\pi \cdot 60\ \Omega = 150{,}8\ \Omega$

und den Scheinwiderstand $Z_1 = \sqrt{8^2 + 150{,}8^2}\ \Omega = 151{,}1\ \Omega$.

c) Der Gesamtwiderstand beträgt $\mathfrak{Z} = [8 + j \cdot (150{,}8 - 66{,}3)] = [8 + j \cdot 84{,}5]\ \Omega$; also $Z = \sqrt{8^2 + 84{,}5^2}\ \Omega = 84{,}9\ \Omega$ beträgt der *Widerstand des äußeren Stromkreises*.

d) Die *Stromstärke* I bei 120 V Klemmenspannung an den Zuleitungsklemmen beträgt $I = \frac{120}{84{,}9}\ \mathrm{A} = 1{,}41\ \mathrm{A}$.

e) An den Klemmen der Spule liegt die *Spannung* $U_L = 1{,}41 \cdot 151{,}1\ \mathrm{V} = 213{,}1\ \mathrm{V}$,

an den Klemmen des Kondensators die *Spannung* $U_C = 1{,}41 \cdot 66{,}3\ \mathrm{V} = 93{,}5\ \mathrm{V}$.

INHALTSVERZEICHNIS