A.I. Markuschewitsch

Bemerkenswerte Kurven

Übersetzung: Gisela Päch
1954 Deutscher Verlag der Wissenschaften
Kleine Ergänzungsreihe Hochschulbücher für Mathematik Nr. 7
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Vorwort

Dieses Büchlein ist hauptsächlich für Schüler bestimmt, jedoch auch zum Selbststudium erwachsener Leser, deren mathematische Kenntnisse nur der Mittelschulbildung entsprechen.

Die Grundlage für dieses Heft bilden Vorträge, die vom Verfasser für Moskauer Schüler der 7. und 8. Klassen gehalten wurden.
Bei der Vorbereitung zur Herausgabe erweiterte der Verfasser diese Vorträge etwas; er war jedoch bemüht, die Allgemeinverständlichkeit der Darlegung nicht zu beeinträchtigen.
Die wesentlichste Ergänzung ist der Abschnitt 13 über Ellipse, Hyperbel und Parabel als Kegelschnitte.

Um aber den Umfang dieses Heftes nicht zu vergrößern, sind die meisten Sätze über Kurven ohne Beweise angegeben, obwohl es in vielen Fällen möglich wäre, diese in einer dem Leser zugänglichen Form zu bringen. Die vorliegende zweite Auflage ist ein unveränderter Abdruck der ersten.

Der Verfasser.

1. In der Umgangssprache werden die Worte "krumm" oder "gekrümmt" immer dann verwendet, wenn etwas bezeichnet werden soll, was vom Ebenen, Regelmäßigen, Geraden abweicht. Man spricht von einem krummen Stab, einem krummen Weg, einem gekrümmten Spiegel usw.

Die Mathematiker bezeichnen allgemein eine krumme Linie als eine Kurve. Was ist eine Kurve? Wie können wir in einer Definition alle diese Kurven, die sich auf Papier mit Bleistift oder Feder, auf der Tafel mit Kreide zeichnen lassen oder am nächtlichen Himmel als Sternschnuppe sichtbar werden, erfassen? Wir geben folgende Definition:

Eine Kurve ist die Spur eines sich bewegenden Punktes.

In unseren Beispielen ist die Spitze eines Bleistiftes, der scharfe Rand eines Kreidestückes oder ein glühender Meteor, der die obere Schicht der Atmosphäre durchdringt, solch ein "Punkt". Wenn wir von dieser Definition ausgehen, ist die gerade Linie ein Spezialfall der gekrümmten. In der Tat, warum soll ein sich bewegender Punkt nicht eine geradlinige Spur zurücklassen?

2. Ein sich bewegender Punkt beschreibt immer dann eine Gerade, wenn er sich von einer. Lage in eine beliebige andere auf kürzestem Wege fortbewegt.[1] Um eine gerade Linie zu zeichnen, benutzt man ein Lineal; wenn der Bleistift am Rande des Lineals entlanggleitet, beschreibt seine Spitze auf dem Papier eine geradlinige Spur.
Bewegt sich der Punkt auf einer Ebene derart, dass sein Abstand von einem festen Punkt der gleichen Ebene stets unverändert bleibt, so beschreibt er einen Kreis. Auf dieser Eigenschaft beruht das Zeichnen von Kreisen mit dem Zirkel.

Gerade und Kreis sind zwei besonders einfache und außerdem durch ihre Eigenschaften die bemerkenswertesten Kurven. Dem Leser sind Gerade und Kreis vertrauter als andere Kurven. Er darf aber nicht etwa denken, ihm seien alle wichtigen Eigenschaften von Gerade und Kreis gut bekannt. Kennt er z.B. folgenden Satz (Desargue, d. Red.)?

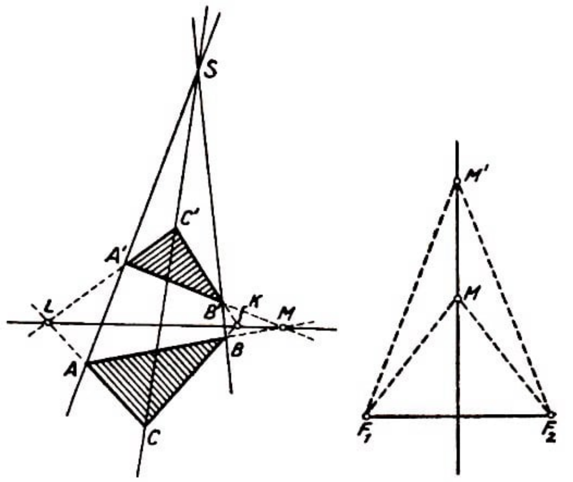


Abb. 1 und 2

Liegen die Ecken zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ auf drei Geraden, die sich in einem Punkt S schneiden (Abb. 1), so liegen die drei Schnittpunkte M, K, L der Dreiecksseiten AB mit $A'B'$, BC mit $B'C'$ und AC mit $A'C'$ alle auf einer Geraden.

[1]Bei Bewegung im euklidischen Raum. (Anm. d. Übers.)

Dem Leser ist natürlich bekannt, dass ein Punkt M, der sich auf einer Ebene so bewegt, dass die Abstände von zwei festen Punkten F_1, und F_2 derselben Ebene jeweils gleich sind, d.h. so, dass stets $MF_1 = MF_2$ ist, eine Gerade beschreibt (Abb. 2).
Jedoch wird es ihm wahrscheinlich Schwierigkeiten machen, zu erklären, was für eine Kurve der Punkt M beschreibt, wenn sein Abstand vom Punkte F_1 ein bestimmtes Vielfaches des Abstandes vom Punkte F_2 beträgt (z. B. das Doppelte wie in Abb. 3).

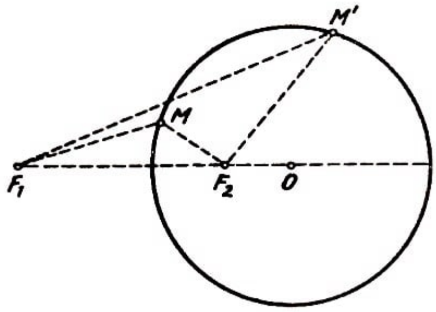


Abb. 3

Es stellt sich heraus, dass diese Kurve ein Kreis ist. Daraus folgt also: Bewegt sich ein Punkt M auf der Ebene so, dass sein Abstand von einem festen Punkt F_1 der Ebene dem Abstand von einem anderen festen Punkt F_2 der Ebene proportional ist, also $MF_1 = k \cdot MF_2$ ist, dann beschreibt der Punkt M entweder eine Gerade (wenn der Proportionalitätsfaktor k gleich 1 ist) oder einen Kreis (wenn der Proportionalitätsfaktor k von 1 verschieden ist).

3. Betrachten wir nun die Kurve, die ein Punkt M beschreibt, wenn die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 unverändert bleibt. Wir wollen einen Faden nehmen, seine Enden an zwei Stecknadeln befestigen und diese Stecknadeln auf einen Bogen Papier stecken, wobei wir den Faden zunächst ungespannt lassen.

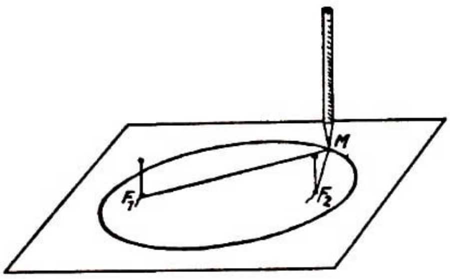


Abb. 4

Spannen wir jetzt den Faden mit Hilfe eines senkrecht gestellten Bleistiftes und bewegen wir danach den Bleistift herum, indem wir ihn leicht an das Papier drücken und darauf achten, dass der Faden gespannt bleibt (Abb. 4), so beschreibt die Spitze M des Bleistiftes eine Kurve von ovaler Form (ähnlich einem abgeplatteten Kreis); sie wird Ellipse genannt.
Um eine vollständige Ellipse zu erhalten, muss man den Faden auf die andere Seite der Stecknadeln herübernehmen, nachdem man die eine Hälfte der Ellipse gezeichnet hat. Offensichtlich ist die Summe der Abstände von der Bleistiftspitze M zu den Einstichstellen der Stecknadeln F_1 und F_2 während der ganzen Bewegung unverändert geblieben.

Diese Summe ist gleich der Länge des Fadens. Die Einstichstelle n der Stecknadeln bezeichnen auf dem Papier zwei Punkte, die Brennpunkte der Ellipse. Man nennt einen Brennpunkt auch Fokus. Das lateinische Wort Fokus bedeutet "Herd", "Feuer".

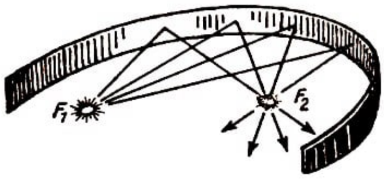


Abb. 5

Diese Bezeichnung erklärt sich durch folgende bemerkenswerte Eigenschaft der Ellipse: Biegen wir ein schmales gut poliertes Metallband zu einem Ellipsenbogen und stellen eine punktförmige Lichtquelle in den einen Brennpunkt, so werden die Lichtstrahlen, die vom Metallband reflektiert werden, im anderen Brennpunkt gesammelt. Daher wird auch im zweiten Brennpunkt ein "Feuer" gesehen - das Bild des ersten Brennpunktes (Abb. 5).

4. Verbinden wir die Brennpunkte der Ellipse durch eine gerade Strecke und verlängern diese Strecke bis zu den Schnittpunkten mit der Ellipse, so erhalten wir die Hauptachse der Ellipse: A_1A_2 (Abb. 6).

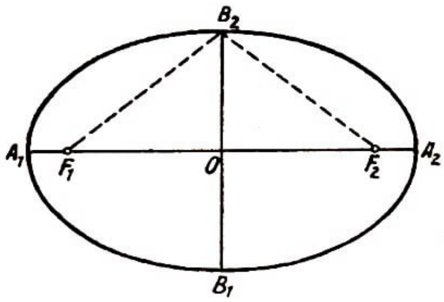


Abb. 6

Die Ellipse ist in Bezug auf ihre Hauptachse symmetrisch. Halbieren wir die Strecke F_1F_2, errichten darauf die Senkrechte und verlängern diese bis zu den Schnittpunkten mit der Ellipse, so erhalten wir die Nebenachse der Ellipse B_1B_2. Sie ist ebenfalls eine Symmetrieachse der Ellipse.
Die Endpunkte der Achsen, A_1, A_2, B_1 und B_2, nennt man die Scheitel der Ellipse.
Die Summe der Entfernungen des Punktes A_1 von den Brennpunkten F_1 und F_2 ist durch die Länge des Fadens gegeben:

$$A_1F_1 + A_2F_2 = l$$

Nun ist aber

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

wegen der Symmetrie der Ellipse. Daher kann man A_1F_1 durch A_2F_2 ersetzen, und wir erhalten:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = l$$

Offensichtlich stellt die linke Seite der Gleichung die Länge der Hauptachse dar. Das heißt also: Die Länge der Hauptachse der Ellipse ist gleich der Länge des Fadens; mit anderen Worten: die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes der Ellipse von den Brennpunkten ist gleich der Länge der Hauptachse.

Daraus folgt wegen der Symmetrie der Ellipse, dass die Entfernung des Scheitelpunktes B_2 (oder B_1) von jedem Brennpunkt gleich der halben Länge der Hauptachse ist. Kennt man also die Scheitelpunkte der Ellipse, so kann man ihre Brennpunkte leicht finden:

Man braucht nur um B_2 einen Kreis zu schlagen, dessen Radius gleich der halben Strecke A_1A_2 ist, und diesen Kreis mit der Hauptachse zum Schnitt zu bringen.

5. Wir schlagen einen Kreis, dessen Durchmesser die Hauptachse der Ellipse ist (Abb. 7). Von einem beliebigen Punkte N des Kreises fällen wir auf die Hauptachse das Lot NP, das die Ellipse im Punkte M schneidet.
Es ist klar, dass die Strecke NP ein gewisses Vielfaches der Strecke MP ist. Es stellt sich folgendes heraus: Wählen wir einen beliebigen anderen Punkt N' des Kreises und führen wir die gleiche Konstruktion durch, so ist das Verhältnis von $N'P'$ zu der entsprechenden Strecke $M'P'$ dasselbe:

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}$$

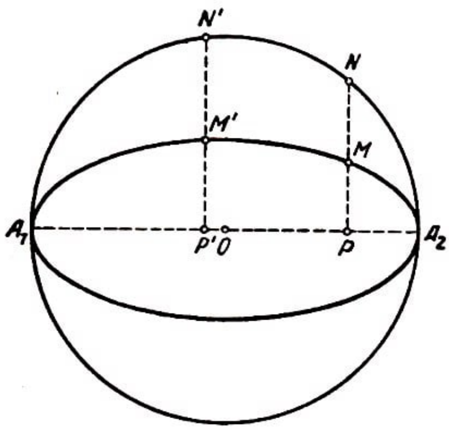


Abb. 7

Mit anderen Worten: wir können die Ellipse aus dem umbeschriebenen Kreis erhalten, wenn wir alle Punkte des Kreises der Hauptachse der Ellipse so nähern, dass wir die Abstände der Punkte von der Hauptachse in ein und demselben Verhältnis verkürzen. Auf dieser Eigenschaft beruht folgende einfache Methode, eine Ellipse punktweise zu konstruieren.

Wir zeichnen einen Kreis, ziehen einen beliebigen Durchmesser und ersetzen die Punkte des Kreises durch andere, die auf Senkrechten zum Durchmesser liegen, und zwar in einem in bestimmtem Verhältnis verkürzten Abstand von diesem Durchmesser (beispielsweise 3:2 oder 2:1 oder 3:1 usw.).

Wir erhalten die Punkte der Ellipse, deren Hauptachse mit dem Durchmesser des Kreises zusammenfällt und deren Nebenachse im entsprechenden Verhältnis kleiner ist als der Durchmesser (3:2 oder 2:1 oder 3:1 usw.).

6. Im täglichen Leben können wir häufig Ellipsen beobachten.. Wenn wir zum Beispiel ein Glas Wasser neigen, so ist der Umriss der Wasseroberfläche eine Ellipse (Abb. 8); ebenso werden die Scheiben, die man von einem zylindrischen Stück Wurst abschneidet, indem man das Messer schräg ansetzt, ellipsenförmig (Abb. 9.).

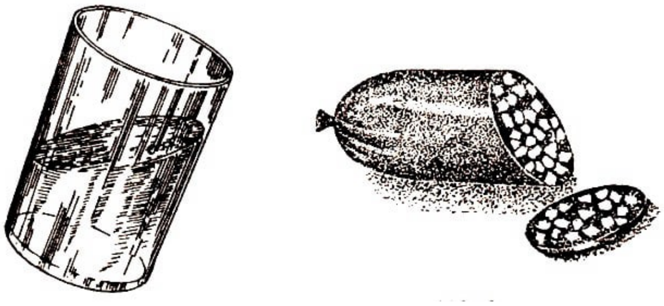


Abb. 8 und 9

Allgemein erhält man, wenn man einen geraden Zylinder (oder Kegel) schräg durchschneidet (so dass die Grundflächen dabei nicht berührt werden), als Schnittfläche eine Ellipse (Abb. 10).

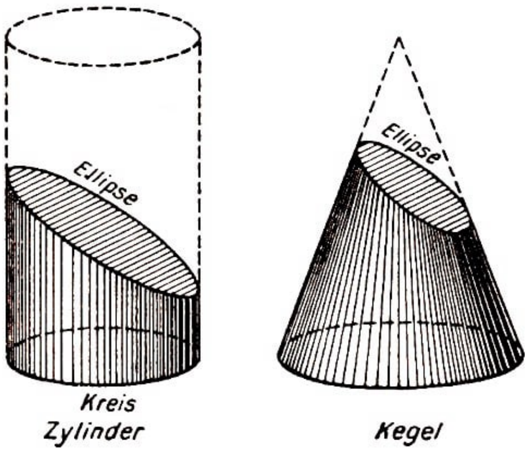


Abb. 10

Schon der deutsche Astronom und Mathematiker Kepler (1571-1630) erkannte, dass die Planeten sich nicht in Kreisen um die Sonne bewegen, wie man früher annahm, sondern in Ellipsen, wobei die Sonne sich in einem Brennpunkt jeder dieser Ellipsen befindet (Abb. 11).

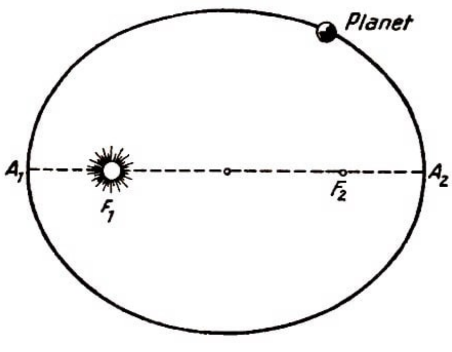


Abb. 11

Einmal während der Umlaufszeit befindet sich der Planet im Scheitel A_1 der Ellipse, also in Sonnennähe - diesen Bahnpunkt nennt man Perihel -, und einmal im Scheitelpunkt A_2, also in Sonnenferne - diesen Bahnpunkt nennt man Aphel.
Die Erde befindet sich z.B. im Perihel, wenn auf unserer Halbkugel Winter, und im Aphel, wenn auf unserer Halbkugel Sommer ist. Die Ellipse, auf der sich die Erde bewegt, ist nur wenig abgeplattet, nahezu ein Kreis.

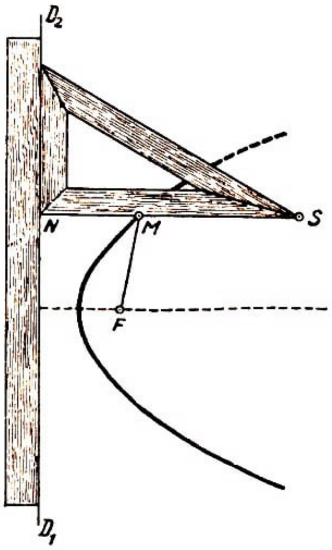


Abb. 12

7. Auf einem Blatt Papier ziehen wir eine beliebige Gerade, wählen einen Punkt F, der nicht darauf liegt, und führen den Bleistift so, dass seine Spitze M in jedem Augenblick den gleichen Abstand von der Geraden wie vom Punkte F hat (Abb. 12).

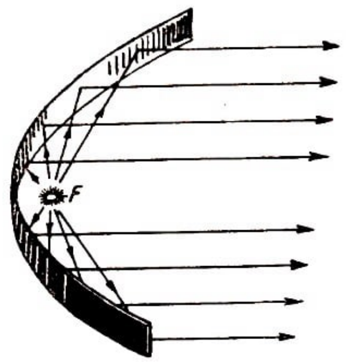
Zu diesem Zweck genügt es, mit einem Reißnagel an der Ecke S eines Zeichendreieckes einen Faden zu befestigen, dessen Länge gleich der Kathete SN ist, und das freie Ende an eine im Punkte F befestigte Stecknadel zu binden.
Wenn wir jetzt die andere Kathete des Dreiecks an einem Lineal entlanggleiten lassen, das wir an der Geraden D_1D_2 angelegt haben, so hat die Spitze M des Bleistiftes, mit dem wir den Faden spannen, indem wir ihn an die freie Kathete des Dreiecks drücken, den gleichen Abstand vom Lineal und von der Stecknadel:

$$NM = MF$$

Die Bleistiftspitze beschreibt auf dem Papier einen Teil einer Kurve, die man Parabel nennt. Um einen größeren Teil dieser Kurve zu erhalten, muss man ein Dreieck mit längeren Katheten nehmen und notwendigerweise ein längeres Lineal.

Die Parabel besteht aus einem Zweig, der sich bis ins Unendliche erstreckt.
Der Punkt F heißt der Brennpunkt der Parabel, das verlängerte Lot vom Brennpunkt auf die Gerade D_1D_2 (die man die Leitlinie der Parabel nennt) ist die Symmetrieachse der Parabel; man bezeichnet sie einfach als Achse der Parabel.

8. Biegen wir ein schmales gut poliertes Metallband zu einem Parabelbogen, so verlaufen die Strahlen, die von einer im Brennpunkt befindlichen punktförmigen Lichtquelle ausgehen und vom Metallband reflektiert werden, parallel zur Achse (Abb. 13).



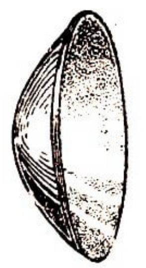


Abb. 13 und 14

Umgekehrt, wenn auf unser Metallband ein Strahlenbündel parallel zur Parabelachse auffällt, so werden die Strahlen nach der Reflexion in ihrem Brennpunkt gesammelt.
Auf dieser Eigenschaft der Parabel beruht die Konstruktion des Parabolspiegels, den man bei Autoscheinwerfern und überhaupt bei Scheinwerfern benutzt (Abb. 14).

Sie sind jedoch nicht bandförmig geschliffen, sondern als Rotationsparaboloid. Man erhält die Oberfläche dieses Spiegels, indem man die Parabel um ihre Achse rotieren lässt.

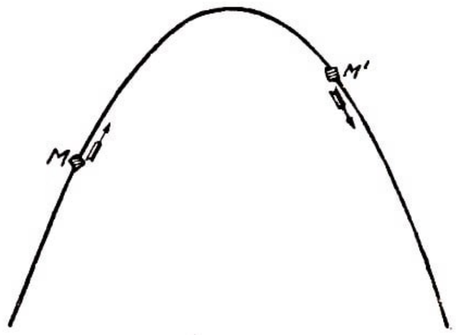


Abb. 15

9. Ein Stein, der nicht gerade senkrecht hochgeworfen wird, beschreibt beim Flug eine Parabel (Abb. 15). Dasselbe kann man auch von einem Geschoss sagen. Der Luftwiderstand verzerrt jedoch sowohl in dem einen als auch in dem anderen Fall die Parabelform, und tatsächlich erhält man eine andersgeformte (sog. ballistische) Kurve. Beobachten wir dagegen die Bewegung; im Vakuum, so erhalten wir eine regelrechte Parabel.

Geben wir bei ein und derselben Abflugsgeschwindigkeit v aus dem Geschossrohr dem Geschoss verschiedene Neigungswinkel gegen den Horizont, so werden sowohl die Parabeln, die von dem Geschoss beschrieben werden, als auch die Flugweiten verschieden sein. Die größte Weite erhält man bei einem Neigungswinkel von $45°$.

Die Weite beträgt $\frac{v^2}{g}$, wobei g die Schwerebeschleunigung ist. Schießt man senkrecht hoch, so erreicht das Geschoss eine Höhe, die halb so groß ist wie die größte Weite, nämlich $\frac{v^2}{2g}$.
Wie wir den Lauf auch richten, immer gibt es bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse auf der Erde und in der Luft Stellen, welche das Geschoss nicht erreichen kann. Es zeigt sich, dass diese Stellen von denjenigen, die das Geschoss bei entsprechendem Zielen erreichen kann, ebenfalls durch eine Parabel (Abb. 16) getrennt sind.

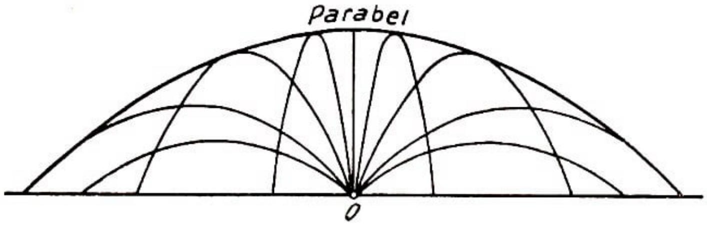


Abb. 16

10. Ganz analog zur Ellipse kann man Kurven konstruieren, die von einem Punkt M so beschrieben werden, dass nicht die Summe, sondern die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 oder das Produkt oder schließlich der Quotient dieser Abstände konstant bleibt (im letzten Fall erhält man einen Kreis).

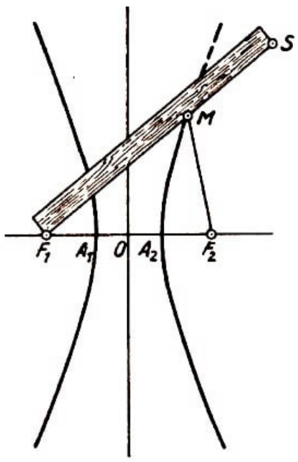


Abb. 17

Betrachten wir den Fall der Differenz. Um den Bleistift in der erforderlichen Weise zu bewegen, bringen wir in den Punkten F_1 und F_2 eine Stecknadel an und befestigen an einer von ihnen ein Lineal derart, dass es um die Stecknadel gedreht werden kann (Abb. 17).
Am Ende S des Lineals befestigen wir ein Ende eines Fadens (dieser Faden muss kürzer als das Lineal sein), und das andere Ende befestigen wir in F_2; danach ziehen wir den Faden an und drücken ihn mit der Spitze M des Bleistiftes an das Lineal.
Dann ist die Differenz der Abstände MF_1 und MF_2 gleich

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS)$$

d.h. gleich der Differenz zwischen der Länge des Lineals und der Länge des Fadens. Wenn wir nun das Lineal um F_1 drehen, indem wir wie vorher den Bleistift an das Lineal andrücken und den Faden gespannt lassen, so beschreibt der Bleistift auf dem Papier eine Kurve, für die in jedem Punkt die Differenz der Abstände von F_1 und F_2 ein und dieselbe ist, nämlich gleich der Differenz m zwischen der Länge des Lineals und der Länge des Fadens.

Auf diese Weise erhält man nur die obere Hälfte der in Abb. 17 dargestellten Kurve. Um auch die untere Hälfte zu erhalten, muss man das Lineal so befestigen, dass es sich nicht oberhalb, sondern unterhalb der Stecknadeln befindet.
Wenn man schließlich das Lineal an der Stecknadel in F_2, das Ende des Fadens aber an der Stecknadel in F_1 befestigt, so erhält man den Teil der Kurve, die links in derselben Abbildung dargestellt ist.

Diese beiden so konstruierten Kurvenzweige betrachten wir als eine einzige Kurve, die wir Hyperbel nennen.
Die dargestellten Kurvenbögen erschöpfen übrigens nicht die ganze Hyperbel.

Ersetzen wir das Lineal durch ein größeres und verlängern gleichzeitig den Faden (aber so, dass sich die Differenz ihrer Längen nicht ändert), so können wir unsere Hyperbel unbeschränkt verlängern; analog dazu, wie wir z.B. eine Strecke einer Geraden unbeschränkt verlängern können.

11. Untersuchen wir nun die Gerade durch die Brennpunkte der Hyperbel. Diese Gerade bildet eine Symmetrieachse der Hyperbel. Eine andere Symmetrieachse steht senkrecht auf der ersten und geht durch die Mitte der Strecke F_1F_2.
Der Punkt O, der Schnittpunkt der Achsen, ist das Symmetriezentrum; er heißt einfach Zentrum der Hyperbel.
Die erste Achse schneidet die Hyperbel in den Punkten A_1 und A_2, die man die Scheitelpunkte der Hyperbel nennt. Der Abschnitt A_1A_2 heißt die reelle Achse der Hyperbel. Die Differenz der Abstände eines Hyperbelpunktes A_1 von den Brennpunkten F_2 und F_1 muss gleich m sein:

$$A_1F_2 - A_1F_! = m$$

Es ist aber $A_1F_1 = A_2F_2$, wegen der Symmetrie der Hyperbel. Daher kann man A_1F_1 durch A_2F_2 ersetzen, und wir erhalten

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m$$

Es ist offensichtlich, dass die Differenz $A_1F_2 - A_2F_2$, gleich A_1A_2, d.h. gleich der reellen Achse der Hyperbel ist. Daher ist die Differenz m der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Hyperbel von ihren Brennpunkten (wobei man von dem größeren Abstand den kleineren abzuziehen hat) gleich der Länge der reellen Achse der Hyperbel.

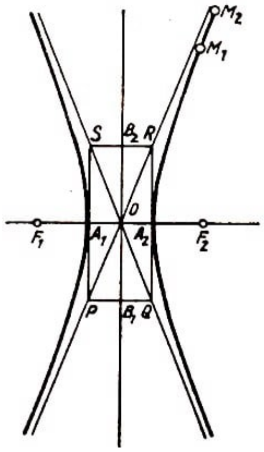


Abb. 18

Bringen wir die zweite Symmetrieachse der Hyperbel zum Schnitt mit einem Kreis um den Scheitel A_1 (oder um A_2), dessen Radius gleich der halben Strecke F_1F_2 ist, so finden wir zwei Punkte B_1 und B_2 (Abb. 18).
Die Strecke B_1B_2 heißt die imaginäre Achse der Hyperbel. Konstruieren wir nun das Rechteck $PQRS$, dessen Seiten parallel zu den Symmetrieachsen der Hyperbel und durch die Punkte A_1, A_2, B_1 und B_2 verlaufen, und unter suchen wir seine Diagonalen PR und QS!

Verlängern wir diese Diagonalen unbeschränkt, so erhalten wir zwei Geraden, die man Asymptoten der Hyperbel nennt. Sie besitzen die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie die Hyperbel niemals schneiden, obwohl die Hyperbelpunkte in beliebige Nähe der Asymptote kommen, und zwar um so näher, je weiter diese Punkte vom Zentrum der Hyperbel entfernt sind.

Die Hyperbelbogen, die zwischen zwei vom Zentrum etwas weiter entfernten Punkten liegen, erscheinen auf der Zeichnung fast wie eine geradlinige Strecke (siehe Bogen M_1M_2 in Abb. 18), obwohl sie auf keinen Fall geradlinig sind. Allerdings ist ihre Krümmung sehr klein und daher kaum merklich.

Um eine Hyperbel angenähert zu zeichnen, ohne die genaue Konstruktion mit Hilfe von Lineal und Faden zu benutzen, verfährt man folgendermaßen:
Zuerst zeichnen wir die Symmetrieachsen der Hyperbel. Dann markieren wir auf der reellen Achse die Brennpunkte F_1 und F_2 in gleichen Abständen vom Zentrum. Weiterhin markieren wir auf beiden Seiten des Zentrums auf derselben Achse Strecken der Länge $\frac{m}{2}$, d.h. gleich der Hälfte der gegebenen Differenz der Abstände der Hyperbelpunkte von ihren Brennpunkten, und erhalten die Scheitel A_1 und A_2 der Hyperbel.

Danach konstruieren wir auf der zweiten Achse die Punkte B_1 und B_2, zeichnen das Rechteck $PQRS$ und verlängern schließlich noch seine Diagonalen. Wir erhalten eine Figur, wie sie in Abb. 19 dargestellt ist.

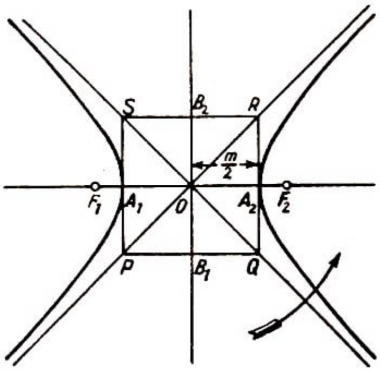


Abb. 19

Jetzt braucht man nur noch zwei Bogen mit der Hand zu ziehen, die symmetrisch zu den dazugehörigen Achsen sind und durch die Punkte A_1 und A_2 verlaufen, und die sich in leichter Krümmung nach und nach den Asymptoten PR und QS nähern.

12. Insbesondere kann das Rechteck $PQRS$ ein Quadrat sein.
Das tritt dann und nur dann ein, wenn die Asymptoten der Hyperbel senkrecht aufeinander stehen. Eine solche Hyperbel nennt man gleichseitig. Dieser Fall ist in Abb. 19 dargestellt.
Der Einfachheit halber drehen wir jetzt die ganze Zeichnung um $45°$ nach links um den Nullpunkt in Richtung des Pfeils. Wir erhalten eine Hyperbel, wie sie in Abb. 20 dargestellt ist.

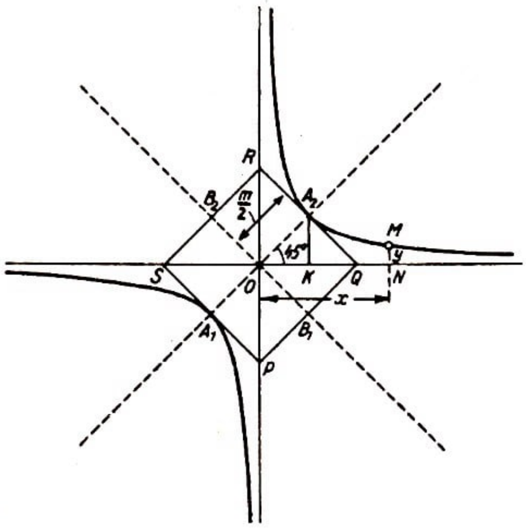


Abb. 20

Wir tragen auf der Asymptote OQ eine beliebige Strecke $ON = x$ ab und errichten im Punkte N die Senkrechte $NM = y$ bis zum Schnittpunkt mit der Hyperbel. Zwischen x und y besteht eine einfache Abhängigkeit.
Es stellt sich folgendes heraus: vergrößert man x in einem bestimmten Verhältnis, so wird y im gleichen Verhältnis kleiner.
Ebenso vergrößert sich, wenn man x verkleinert, y im gleichen Verhältnis. Mit anderen Worten: Die Länge $NM = y$ ist umgekehrt proportional der Länge $ON = x$, d.h.

$$y = \frac{k}{x}$$

Dank dieser Eigenschaft ist die gleichseitige Hyperbel die graphische Darstellung einer umgekehrten Proportionalität. Um zu klären, wie der Proportionalitätsfaktor k mit den Abmessungen der Hyperbel zusammenhängt, betrachten wir den Scheitel A_2. Für ihn gilt:

$$x = OK \qquad ; \qquad y = KA_2$$

Die Strecken OK und KA_2 sind die Katheten eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse

$$OA_2 = \frac{m}{2}$$

Daher ist

$$x = y \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4}$$

hieraus folgt: $2x^2 = \frac{m^2}{4}$ oder $x^2 = \frac{m^2}{8}$.
Aus dem Verhältnis der umgekehrten Proportionalität $y = \frac{k}{x}$ folgt andererseits $xy = k$, oder im gegebenen Fall (in dem $y = x$) $x^2 = k$.

Vergleichen wir diese beiden Resultate $x^2 = \frac{m^2}{8}$ und $x^2 = k$, so finden wir $k = \frac{m^2}{8}$. mit anderen Worten; der Proportionalitätsfaktor k ist gleich $\frac{1}{8}$ des Quadrates der Länge der reellen Achse der Hyperbel.

13. Wir erwähnten schon folgendes: Schneidet man einen Kegel mit einem Messer durch, d.h. geometrisch, bringt man ihn mit einer Ebene zum Schnitt, aber so, dass die Grundfläche des Kegels nicht geschnitten wird, so ist die Schnittfläche eine Ellipse (siehe Abb. 10).

Bringt man aber den Kegel mit einer Ebene so zum Schnitt, dass der Schnitt durch die Grundfläche des Kegels verläuft, so kann man als Schnitt einen Parabelbogen (Abb. 21a) oder einen Hyperbelbogen (Abb. 21b) erhalten. Daher sind alle drei Kurven Ellipse, Hyperbel und Parabel Kegelschnitte.

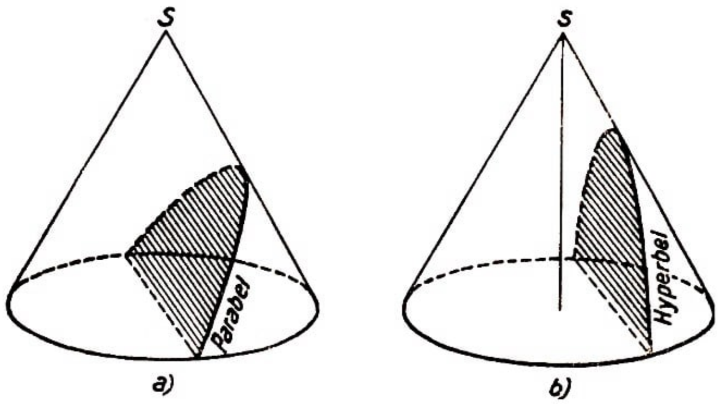


Abb. 21

Der Kegel, den wir eben behandelten, hat einen Mangel. Es lässt sich nämlich nur die Ellipse vollständig auf ihm unterbringen, während Parabel und Hyperbel als Kurven, die sich bis ins Unendliche erstrecken, nur teilweise darauf untergebracht werden können.
Aus Abb. 21b ist nicht einmal ersichtlich, woher der zweite Ast der Hyperbel genommen wird. Um diesen Mangel zu beseitigen, ersetzen wir den Kegel durch eine sich bis ins

Unendliche erstreckende Kegelfläche.

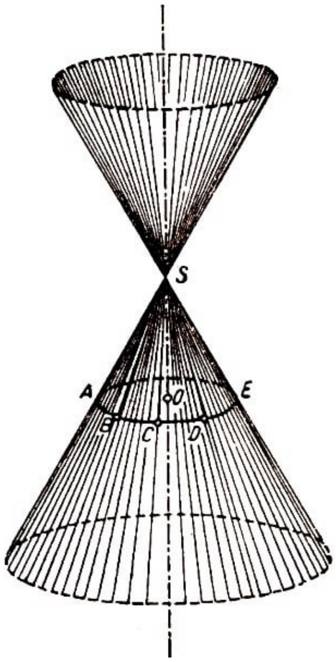


Abb. 22

Zu diesem Zweck verlängern wir alle Mantellinien des Kegels unbeschränkt nach beiden Seiten, d.h., wir verlängern alle geradlinigen Strecken AS, BS, CS, DS, ES usw., also die Verbindungen der Punkte der Leitkurve des Kegels (d. h. des Grundkreises) mit seiner Spitze. (Abb. 22; natürlich kann man auf unserer Zeichnung diese Verlängerungen nicht unbegrenzt darstellen, daher zeichnen wir hier wie üblich die Geraden durch Strecken, nur von größerer Länge als die ursprünglichen Strecken).

Als Ergebnis erhält man die gewünschte Kegelfläche, die aus zwei im Punkte S zusammenhängenden und sich bis ins Unendliche erstreckenden Hälften besteht, einen sogenannten Doppelkegel.
Man kann die gesamte Kegeloberfläche als Spur einer sich bewegenden Geraden betrachten, und zwar einer Geraden, die durch den Punkt S verläuft und so gedreht wird, dass ihr Winkel mit der Geraden OS, also mit der Achse der Kegeloberfläche, unverändert bleibt.

Eine sich so bewegende Gerade nennt man eine Erzeugende des Doppelkegels. Es ist klar, dass jede Verlängerung einer Mantellinie des ursprünglichen Kegels auch eine Mantellinie des Doppelkegels ist. Wir wollen jetzt die ganze Kegeloberfläche mit einer Ebene schneiden.
Schneidet die Ebene alle Mantellinien im Gebiet einer Kegelhälfte, so erhält man als Schnitt eine Ellipse (Abb. 23a) und im Spezialfall einen Kreis. Schneidet sie alle Mantellinien mit Ausnahme von einer einzigen (die parallel zu ihr verläuft), so erhält man als Schnitt eine Parabel (Abb. 23b).

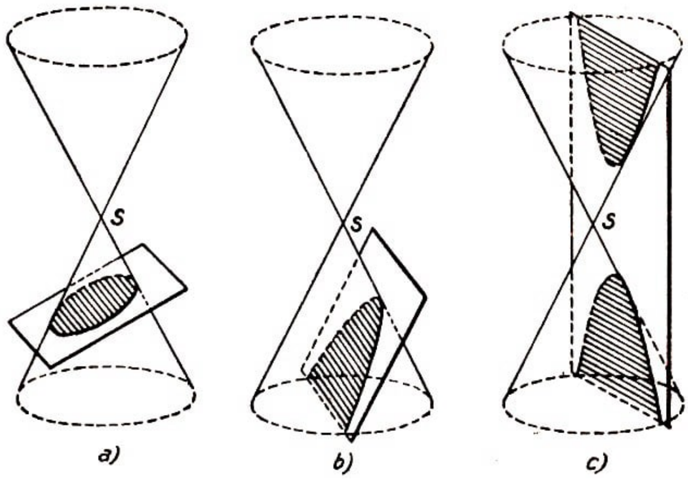


Abb. 23

Schneidet die Ebene schließlich einen Teil der Mantellinien im Gebiet der einen und einen Teil der Mantellinien im Gebiet der anderen Hälfte des Kegels, so erhält man als Schnitt eine Hyperbel (Abb. 23c).

Wir sehen, dass sowohl Ellipse wie auch Parabel sich vollständig auf einer Hälfte der Kegeloberfläche darstellen lassen, dass man für die Hyperbel aber den ganzen Doppelkegel braucht. Ein Ast der Hyperbel liegt auf der einen Hälfte, der zweite auf der anderen Hälfte des Doppelkegels.

14. Wir wenden uns nun der Kurve zu, die von einem Punkt M auf der Ebene beschrieben wird, wenn das Produkt der Entfernungen dieses Punktes von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant bleibt. Diese Kurve nennt man Lemniskate (Lemniskate ist griechisch und bedeutet "Band").

Ist die Länge der Strecke F_1F_2 gleich c, dann ist der Abstand des Mittelpunktes O der Strecke F_1F_2 von F_1 und F_2 gleich $\frac{c}{2}$ und das Produkt dieser Abstände gleich $\frac{c^2}{4}$. Wir verlangen, zunächst, dass die Größe p des festen Produktes gerade gleich $\frac{c^2}{4}$ ist, d.h.

$$MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4}$$

Dann liegt der Punkt O auf der Lemniskate, und die Lemniskate selbst hat die Form einer liegenden Acht (Abb. 24).

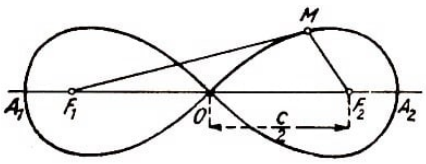


Abb. 24

Verlängern wir den Abschnitt F_1F_2 nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit der Lemniskate, so erhalten wir die zwei Punkte A_1 und A_2.
Es ist sehr einfach, die Entfernung $A_1A_2 = x$ zwischen ihnen durch die uns bekannte Entfernung $F_1F_2 = c$ auszudrücken. Dazu bemerken wir, dass der Abstand des Punktes A_2 von F_2 gleich $\frac{x}{2} - \frac{c}{2}$ ist, und der Abstand desselben Punktes A_2 von F_1 gleich $\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$; daher ist das Produkt der Entfernungen

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

Dieses Produkt muss aber wegen der gestellten Bedingung gleich $\frac{c^2}{4}$ sein, daher ist $\frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}$, woraus $x^2 = 2c^2$ und $x = \sqrt{2}c \approx 1{,}414c$ folgt.

Es besteht ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen dieser Lemniskate und der gleichseitigen Hyperbel.

Wir nehmen den Punkt O als Ausgangspunkt geradliniger Strahlen (Abb. 25) und markieren auf ihnen die Schnittpunkte mit der Lemniskate.
Dabei machen wir folgende Feststellung: an Stellen, an denen der Neigungswinkel des Strahls zur Strecke OF_2 (oder zu OF_1) kleiner als $45°$ ist, schneidet jeder Strahl die Lemniskate außer im Nullpunkt noch in einem weiteren Punkt. Ist aber der Neigungswinkel gleich $45°$ oder größer, so existiert kein solch zweiter Schnittpunkt.

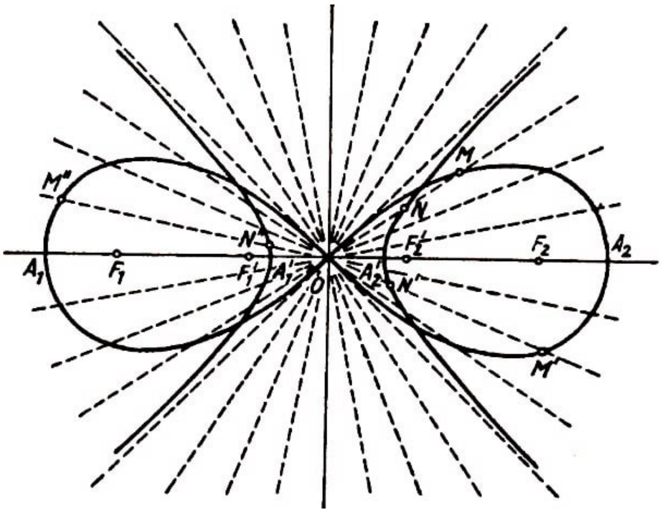


Abb. 25

Wir wählen einen beliebigen Strahl der ersten Gruppe, der die Lemniskate in einem von Null verschiedenen Punkt M treffen möge. Nun tragen wir auf diesem Strahl die Strecke $ON = \frac{1}{OM}$ vom Nullpunkt aus ab. Wenn wir diese Konstruktion für jeden Strahl der ersten Gruppe durchführen, dann liegen die Punkte N, die jeweils bestimmten Punkten M auf der Lemniskate entsprechen, alle auf der gleichseitigen Hyperbel mit den Brennpunkten F_1' und F_2', für welche

$$OF_1' = \frac{1}{OF_1} \qquad \text{und} \qquad OF_2' = \frac{1}{OF_2} \qquad \text{gilt.}$$

15. Wählen wir die Größe des unveränderlichen Produktes p nicht gleich $\frac{c^2}{4}$, so ändert die Lemniskate ihre Gestalt.
Für den Fall, dass p kleiner als $\frac{c^2}{4}$ ist, besteht die Lemniskate aus zwei Ovalen; eines von ihnen enthält den Punkt F_1, das andere den Punkt F_2, im Innern (Abb. 26).

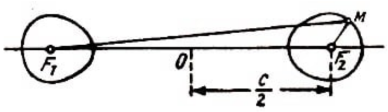


Abb. 26

Für den Fall, dass das Produkt p größer als $\frac{c^2}{4}$, aber kleiner als $\frac{c^2}{2}$ ist, hat die Lemniskate die in Abb. 27 dargestellte Form, also die Gestalt einer sogenannten "Katzenzunge" (oder eines Biskuits).

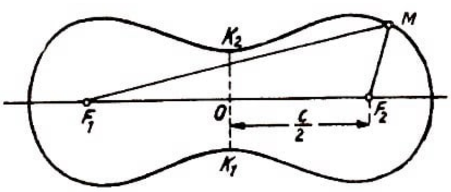


Abb. 27

Unterscheidet sich p nur wenig von $\frac{c^2}{4}$ so ist die "Taille" K_1K_2 der Lemniskate sehr schmal, und die Kurve hat annähernd die Form einer liegenden Acht. Unterscheidet sich p dagegen nur wenig von $\frac{c^2}{2}$, so kann man fast gar keine "Taille" bemerken, und ist p gleich $\frac{c^2}{2}$ oder größer, so verschwindet die "Taille" völlig, und die Lemniskate erhält die Form eines Ovals (Abb. 28; hier sind auch andere Lemniskaten zum Vergleich dargestellt).

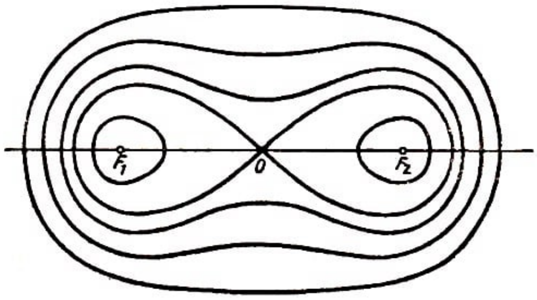


Abb. 28

16. Wir wollen nun auf einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten $F_1, F_2, ..., F_n$ annehmen und den Punkt M so bewegen, dass das Produkt der Abstände des Punktes M von jedem der gewählten Punkte unverändert bleibt.
Wir erhalten eine Kurve, deren Form davon abhängig ist, wie die Punkte $F_1, F_2, ..., F_n$ im Verhältnis zueinander angeordnet sind und welchen Wert das konstante Produkt hat. Eine solche Kurve nennt man Lemniskate mit n Brennpunkten.

Oben haben wir Lemniskaten mit zwei Brennpunkten betrachtet. Betrachten wir jetzt je nach der Anzahl der Brennpunkte verschiedene Fälle, wobei die Brennpunkte beliebig angeordnet sind und diese oder jene Größe für das Produkt der Abstände festgesetzt ist, so können wir Lemniskaten von wunderlichster Gestalt erhalten.
Wir werden die Bleistiftspitze von einem gewissen Punkt A an in der Weise fortbewegen, dass sie schließlich wieder zum Ausgangspunkt A zurückkehrt, ohne vom Papier heruntergeglitten zu sein. Dann hat sie eine gewisse Kurve beschrieben; wir verlangen nur, dass diese Kurve sich nirgends überschneidet. Sicher können wir so Kurven zeichnen, die z. B. die Umrisse des menschlichen Kopfes oder eines Vogels bilden (Abb. 29).

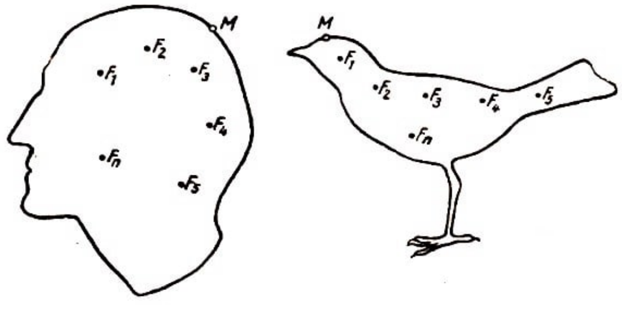


Abb. 29

Es ergibt sich folgendes:
Ist eine beliebige Kurve vorgegeben, so kann man die Zahl n und die Anordnung der Brennpunkte $F_1, F_2, ..., F_n$ so wählen und den Wert des unveränderlichen Produkts der Abstände

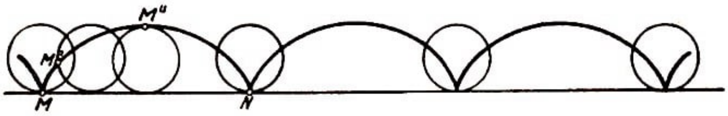
$$MF_1 \cdot MF_2 \cdot ... \cdot MF_n = p$$

so festsetzen, dass die entsprechende Lemniskate sich dem Augenschein nach nicht von dieser Kurve unterscheidet. Mit anderen Worten: die mögliche Abweichung des die Lemniskate beschreibenden Punktes M von der gezeichneten Kurve übertrifft die Breite des Bleistiftstriches nicht (der Bleistift soll von vornherein so gut gespitzt sein, dass der Strich äußerst dünn ist).

Diese bemerkenswerte Tatsache, die die ungewöhnliche Mannigfaltigkeit und den Formenreichtum der Lemniskaten mit vielen Brennpunkten zeigt, lässt sich völlig streng, aber sehr kompliziert mit Hilfsmitteln der höheren Mathematik beweisen.

17. Wir legen ein Lineal an den unteren Rand einer Wandtafel und rollen darauf einen Reifen oder Kreis (aus Pappe oder Holz) ab, wobei wir ihn gegen das Lineal und die Tafel drücken.

Abb. 30



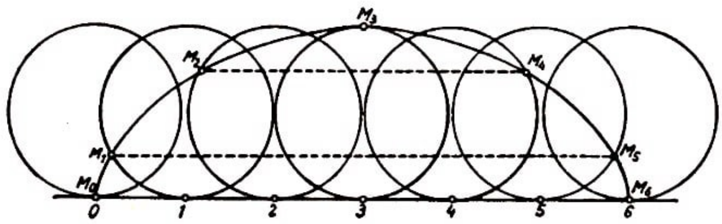
Befestigen wir an dem Reifen (oder Kreis) ein Stück Kreide (an seinen Berührungspunkten mit dem Lineal), so zeichnet die Kreide eine Kurve (Abb. 30), die man Zykloide nennt (griechisch, bedeutet "vom Kreis erzeugt").
Einer Umdrehung des Kreises entspricht der Bogen $MM'M''N$ der Zykloide; wird der Reifen weiterbewegt, so erhält man immer wieder Bögen derselben Zykloide.

Um auf dem Papier angenähert einen Bogen einer Zykloide darzustellen, der beim Abrollen des Kreises von einem Durchmesser von 3 cm beschrieben wird, tragen wir auf einer Geraden eine Strecke von

$$3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ cm}$$

ab. Wir erhalten eine Strecke von der Länge des Kreisumfangs. Ferner teilen wir diese Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile, z. B. in sechs gleiche Teilstrecken und stellen unseren Kreis für jeden Teilungspunkt in seiner gerade diesem Punkt entsprechenden Lage dar (Abb. 31), nachdem wir diese Lagen mit den Ziffern 1, ..., 6 bezeichnet haben.

Abb. 31



Um von einer Lage in die benachbarte Lage zu gelangen, muss der Kreis sich um ein Sechstel einer vollen Drehung bewegen (da die Entfernung zwischen zwei benachbarten Teilpunkten gleich dem sechsten Teil des Kreisumfanges ist).

Befindet sich also die Kreide in der Lage Null im Punkte M_0, so befindet sie sich in der Lage Eins im Punkte M_1, um ein Sechstel des Kreisumfanges vom Berührungspunkt mit dem Kreis entfernt, in der Lage Zwei im Punkte M_2, um zwei Sechstel vom Berührungspunkt entfernt usw.
Um die Punkte M_1, M_2, M_3 usw. zu erhalten, braucht man nur den entsprechenden Kreis vom Radius 1,5 cm, beginnend mit dem Berührungspunkt, entsprechend einzuteilen. In der Lage 1 nimmt man einen Abschnitt, in der Lage 2 diesen und den nächsten, in der Lage 3 diese Abschnitte usw.

Um die Zykloide zu zeichnen, braucht man nur noch die Punkte M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 durch eine glatte Kurve (nach Augenmaß) zu verbinden.

18. Unter vielen bemerkenswerten Eigenschaften der Zykloide heben wir eine hervor, wodurch sie die bekannte, kompliziert klingende Bezeichnung Brachistochrone erhielt. Diese Bezeichnung ist aus zwei griechischen Worten entstanden, von denen das eine "kürzeste" und das andere "Zeit" bedeutet. Wir wollen folgende Frage untersuchen:

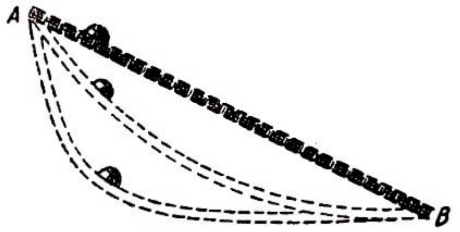


Abb. 32

Welche Form muss man einer gut geschliffenen metallenen Rinne geben, die zwei gegebene Punkte A und B miteinander verbindet (Abb. 32), damit ein poliertes metallenes Kügelchen auf dieser Rinne in kürzester Zeit vom Punkte A zum Punkte B rollt?

Auf den ersten Blick scheint es, als ob man die Rinne geradlinig lassen müsste, da nur längs dieser die Kugel den kürzesten Weg vom Punkte A zum Punkte B beschreibt. Jedoch geht es hier nicht um den kürzesten Weg, sondern um die kürzeste Zeit.
Die Zeit ist aber nicht nur von der Länge des Weges abhängig, sondern auch von der Geschwindigkeit, mit der sich die Kugel bewegt.

Ist die Rinne nach unten gebogen, so wird ihr beim Punkte A beginnender Teil steiler nach unten verlaufen als im Fall einer geradlinigen Rinne, und die auf ihr herunterrollende Kugel erlangt eine größere Geschwindigkeit als auf der gleichlangen geradlinigen Rinne. Biegen wir jedoch den Anfang der Rinne im Vergleich zu ihrer Länge sehr stark nach unten, so dass der vom Punkt B begrenzte Teil im Vergleich zu ihrer Länge sehr flach ist, so durchläuft die Kugel den ersten Teil schnell, den zweiten sehr langsam und kommt später im Punkte B an (als im geradlinigen Fall).
Daher muss man offenbar der Rinne eine gebogene Form geben, darf aber die Krümmung nicht zu stark werden lassen.

Der italienische Physiker und Astronom Galilei (1564-1642) dachte, die Rinne für die kürzeste Geschwindigkeit müsse.in einem Kreisbogen gekrümmt sein.
Jedoch zeigten die Schweizer Mathematiker Bernoulli vor 250 Jahren durch genaue Berechnung, dass es nicht so ist, sondern dass die Rinne in Form eines Zykloidenbogens gekrümmt sein muss (nach unten gebogen, Abb. 33).

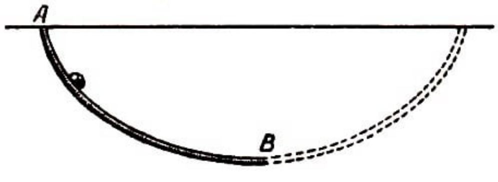


Abb. 33

Seit dieser Zeit hat die Zykloide den Beinamen Brachistochrone, und die Beweise der Brüder Bernoulli begründeten einen neuen Zweig der Mathematik, die Variationsrechnung. Diese beschäftigt sich mit der Untersuchung von Kurven, für welche diese oder jene uns interessierende Größe ihren kleinsten - bei manchen Problemen ihren größten - Wert annimmt.

19. Hiermit beschließen wir die Darlegung über bemerkenswerte Kurven. Wir haben nur einige von ihnen betrachtet, jedoch in keiner Weise ihre Eigenschaften erschöpfend behandelt.
Und wieviel Kurven gibt es noch, die nicht in diesem Büchlein aufgeführt sind!

Wir sprachen weder von der Kettenlinie, in der sich eine an beiden Enden aufgehängte schwere Kette anordnet, noch von der Archimedischen Spirale, die ein Käfer beschreiben würde, der entlang der Kante eines sich gleichförmig um einen Punkt drehenden Lineals kriechen würde, noch von der Kurve, die vom Ende eines dünnen Fadens beim Aufspulen beschrieben wird.
Wir hatten die Absicht, einen nur mit den Anfangsgründen der Mathematik vertrauten Leserkreis für einige hübsche Tatsachen aus der unermesslichen Schatzkammer des mathematischen Wissens zu interessieren. Wir vermieden in der Regel Beweise und längere Erläuterungen.

Der Leser, der die hier erworbenen Kenntnisse erweitern will, mag zu dem Büchlein des polnischen Mathematikers H. Steinhaus[2] greifen (in welchem ebenfalls keine Beweise enthalten sind) oder zu dem ausführlichen Buch unseres kürzlich verstorbenen G. N. Berman[3], der sich um die Popularisierung der Mathematik große Verdienste erworben hat; dort findet er die Beweise vieler Dinge, die in der vorliegenden Broschüre und im Buch von Steinhaus aufgeführt sind.

[2] H. Steinhaus, Mathematisches Kaleidoskop. Moskau-Leningrad 1950 (russisch). Deutsche Übersetzung geplant.

[3] G. N. Berman, Die Zykloide (Über eine bemerkenswerte Kurve und einige andere, die damit im Zusammenhang stehen). Moskau-Leningrad 1948 (russisch). Deutsche Übersetzung geplant.