AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER MATHEMATIK

für Ingenieur- und Fachschulen

Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen

von G. Ose, G. Lochmann, G. Schiemann, Dr. habil. H. Baumann, W. Körner

2. Auflage

Mit 125 Bildern, 87 Tabellen, einem Anhang zur Nomographie (78 Tafeln), 2 Beilagen

und 257 Aufgaben mit Lösungen

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Als Lehrbuch
an den Fachschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt
Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen
Berlin, den 4. September 1965

AUTOREN *Federführung:*

Studiendirektor Gertrud Ose
Ingenieurschule für Bauwesen, Leipzig

Autoren der einzelnen Teile:

NOMOGRAPHIE
Günther Lochmann
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Rechenzentrum der Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List", Dresden

MATRIZENRECHNUNG
Fachschuldozent Gerhard Schiemann
Ingenieurschule für Automatisierungstechnik, Leipzig

LINEAROPTIMIERUNG
Studiendirektor Gertrud Ose
Ingenieurschule für Bauwesen, Leipzig

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER STATISTIK
Dozent Dr. rer. oec. habil. Horst Baumann
Karl-Marx-Universität, Leipzig, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

PRAKTISCHES RECHNEN
Willy Körner
Gruppenleiter im VEB Wissenschaftlich-Technisches Zentrum Kraftwerksanlagenbau, Pirna-Sonnenstein

Das Manuskript wurde begutachtet im Institut für Mathematik der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar. Institutsleiter: Prof. Dr. habil. H. Matzke

Die Lektorate wurden durchgeführt von:
Fachschuldozent Horst Beinhoff, Ingenieurschule für Kraft- und Arbeitsmaschinen „Rudolf Diesel", Meißen — Prof. Rudolf Fucke, Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Dresden — Studiendirektor Robert Georgi, Ingenieurschule für Maschinenbau und Elektrotechnik, Zwickau — Dipl.-Math. Gerhard Große, Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau — Fachschullehrer Dieter Haupt, Ingenieurschule für Textiltechnik und Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt — Dipl.-Math. Klaus Kulke, Ingenieurschule für Energiewirtschaft „Dr. Robert Mayer", Zittau — Dipl.-Math. Karl-Heinz Müller, Leiter des Rechenzentrums im Institut für Datenverarbeitung, Dresden — Dipl.-Math. Dr. rer. oec. Achim Renner, Institut für Ökonomie der Deutschen Bauakademie, Leipzig — Dipl.-Math. Georg Seltmann, I. Institut für angewandte Mathematik der TU Dresden

Redaktionsschluß: 15. 2. 1967
ES 20 C 2 (19 B 1)

Verlagslektor: Alfred Sommer
Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
Veröffentlicht unter der Lizenznummer 114—210/51/67
13,—

GELEITWORT

In den letzten Jahrzehnten hat sich eine stürmische Entwicklung in der mathematischen Wissenschaft vollzogen. Gleichzeitig ist die Mathematik immer stärker in alle Zweige der Produktion eingedrungen, und zwar nicht nur in die rein technischen Gebiete, die eng mit Messen, Regeln und Steuern zusammenhängen, sondern auch in solche Gebiete wie Planung, Leitung und Organisation. Durch diese Entwicklung wird auch der Mathematikunterricht an den Ingenieur- und Fachschulen vor neue Probleme gestellt.

Um die erhöhten Anforderungen des wissenschaftlich-technischen Fortschrittes erfüllen zu können, wurde im Jahre 1963 ein neuer verbindlicher Lehrplan für das Fach Mathematik an den Ingenieur- und Fachschulen eingeführt, der den internationalen Entwicklungstendenzen Rechnung trägt. Durch die in diesem Plan erhobene Forderung nach weitgehender mengentheoretischer Interpretation der einzelnen Stoffgebiete und durch die Aufnahme neuer mathematischer Einzeldisziplinen ergab sich die Aufgabe, in möglichst kurzer Zeit ein neues Lehrwerk für den Mathematikunterricht zu schaffen.

Der vorliegende Band „Ausgewählte Kapitel der Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen" schließt diese im Jahre 1963 begonnene Arbeit ab. Die ersten beiden Bände „Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen" und „Analysis für Ingenieur- und Fachschulen" vermitteln ein auf den Grundbegriffen der Mengenlehre fußendes mathematisches Fundament. Der letzte Band dagegen enthält einige Gebiete der Mathematik, die für die Praxis besonders wichtig sind und deren Behandlung es ermöglichen soll, daß die Stoffdarbietung in zahlreichen technischen und ökonomischen Fächern in hohem Maße rationalisiert und praxisbezogen gestaltet werden kann. Damit wird die Grundlage für ein erfolgreiches Wirken der Absolventen der Ingenieur- und Fachschulen in den verschiedenen Bereichen der sozialistischen Industrie gelegt.

Der großen Einsatzbereitschaft der Autorenkollektive und des Verlages ist es zu verdanken, daß das gesamte Lehrwerk trotz vieler Schwierigkeiten in verhältnismäßig kurzer Zeit entwickelt werden konnte. Es sei daher an dieser Stelle gestattet, den Autorenkollektiven aller drei Bände sowie dem VEB Fachbuchverlag Leipzig den Dank des Instituts für Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik auszusprechen.

Möge es dem vorliegenden Lehrbuch gelingen, für Lehrkräfte und Studierende ein wertvolles Handwerkszeug zu sein, sowohl für die Gestaltung eines qualitativ hochstehenden Mathematikunterrichts als auch zur Hebung des Bildungsniveaus unserer Studierenden zum Nutzen unserer sozialistischen Gesellschaft.

Karl-Marx-Stadt, Juli 1966

Institut für Fachschulwesen der
Deutschen Demokratischen Republik

Lehrbücher der Mathematik

Herausgegeben im Auftrag des Staatssekretariats für das Hoch- und Fachschulwesen

von Prof. Dr. K. Bögel †, H. Birnbaum, Dr.-Ing. H. Götzke, H. Kreul, W. Leupold,

Dr. F. Müller

VORWORT

Das vorliegende Lehrbuch, das eine Erweiterung des bisherigen Lehrmaterials für das Grundlagenstudium im Fach Mathematik darstellt, behandelt Stoffgebiete der angewandten Mathematik, die sowohl für die Ausbildung von Ingenieuren der einzelnen technischen Disziplinen als auch für die Ausbildung von Ingenieurökonomen der verschiedenen Fachrichtungen besonders wichtig sind: Nomographie, Matrizenrechnung, Linearoptimierung, Mathematische Grundlagen der Statistik sowie Praktisches Rechnen einschließlich einer Einführung in die maschinelle Rechentechnik.
Diese Gebiete wurden bis jetzt nur teilweise in Lehrbriefen für das Fachschulfernstudium einiger Fachrichtungen behandelt.
Vor den Autoren lag deshalb eine dreifache Aufgabe:

1. Aus der Fülle der einzelnen Stoffgebiete war eine *Auswahl* zu treffen, die sich sowohl im Sinne einer gediegenen Grundlagenausbildung als auch, bedingt durch den vorgesehenen Umfang und den Charakter des Buches, in der Hauptsache auf eine Einführung beschränken mußte. Es war deshalb nicht möglich, den einen oder den anderen Abschnitt noch ausführlicher darzustellen, so wie es manchem Leser vielleicht wünschenswert erscheinen würde. Die behandelten Grundlagen sollen es dem Studierenden der Ingenieur- und Fachschulen ermöglichen, in den Spezialfächern der Ausbildung und nachfolgend in der Praxis einfache Probleme lösen zu können. Außerdem sollen sie ihn befähigen, seinen späteren Aufgaben entsprechend, mit Hilfe der Literatur tiefer in die einzelnen Problemkreise einzudringen.
2. Der ausgewählte Stoff mußte unter Wahrung der im Lehrplan geforderten Wissenschaftlichkeit methodisch so aufbereitet werden, daß das Lehrbuch für *alle Studienformen der Ausbildung* von Ingenieuren, Ingenieurökonomen — und auch Ökonomen — benutzbar ist.
3. Als letztes in der Reihe der Mathematiklehrbücher für Ingenieur- und Fachschulen war endlich die Übereinstimmung in den mathematischen Grundbegriffen mit den vorangehenden Bänden herzustellen. Bei der im allgemeinen außerhalb der Hochschulliteratur noch üblichen Darstellung der Gebiete der angewandten Mathematik war auch dieser Teil der Gesamtaufgabe nicht immer leicht.

Die *Nomographie* wurde aufgenommen, weil sie für den in der Praxis tätigen Ingenieur und Ökonomen ein wertvolles, leider zum Teil noch viel zu wenig beachtetes Hilfsmittel darstellt. Mit Nomogrammen lassen sich Überschlagsrechnungen leicht durchführen; mit ihnen kann man sich in verhältnismäßig kurzer Zeit einen Überblick über den Charakter der Lösungen bestimmter Probleme verschaffen, der sonst nur durch eine genaue Berechnung mit erheblichem Zeitaufwand zu bekommen wäre. Endlich sind Nomogramme auch zum laufenden Gebrauch an Maschinen unbedingt erforderlich.

Die *Matrizenrechnung* darf heute in der mathematischen Ausbildung an den Ingenieurschulen nicht mehr fehlen, da dieses Gebiet im Zusammenhang mit der Entwicklung der maschinellen Rechentechnik immer mehr an Bedeutung gewonnen hat.
Die *Linearoptimierung* trägt dem Problemkreis der optimalen Entscheidungen Rechnung. Die Beschränkung auf die ausführliche Behandlung der *grundlegenden* Verfahren und auf die kurze Charakterisierung weiterführender Methoden erfolgte aus methodischen Gründen im Zusammenhang mit den bereits genannten Umfangsbedingungen.
Die *Mathematischen Grundlagen der Statistik* sind für viele Problemkreise, die der mathematischen Durchdringung erschlossen wurden, ein wesentliches Arbeitsmittel. Das gilt insbesondere für die Bearbeitung empirischen Zahlenmaterials und für die Notwendigkeit, aus diesem Material die Möglichkeit exakter perspektivischer Planung auf den verschiedensten Gebieten zu erschließen.
Im letzten Teil konnten lehrplanbedingt nur knappe allgemeine Ausführungen über *numerisches Rechnen* und über *maschinelle Rechentechnik* gemacht werden. Zusätzliche Gebiete, die der steigenden Bedeutung der Datenverarbeitung auch im Fachschulwesen Rechnung tragen, gehören nicht mehr in die mathematische Grundlagenausbildung; sie sind speziellen Unterrichtsfächern vorbehalten.
In der Art der einzelnen behandelten Gebiete liegt es, daß eine streng wissenschaftliche theoretische Grundlegung im Rahmen eines Fachschullehrbuches nicht möglich war. Für alle Autoren mußte es das Ziel sein, die hauptsächlichsten *Verfahren* verständlich darzulegen und sie, den mathematischen Voraussetzungen der Studierenden entsprechend, in die Theorie einzuordnen. Dabei wird, soweit es möglich war, vom Beispiel ausgegangen, und außerdem wird der gebotene Stoff auch am Beispiel erläutert, während allgemeine Ableitungen teilweise nicht gebracht werden können. Trotzdem ist versucht worden, Allgemeingültiges für alle Fachrichtungen herauszuarbeiten. Deshalb tragen auch die meisten der Beispiele und Aufgaben sowohl in der Thematik als auch in den Zahlenwerten nur Demonstrativcharakter. Wo eine mengentheoretische Interpretation möglich ist, wird sie gegeben; der in der Mengenlehre verankerte und präzisierte Funktionsbegriff wird verwendet.
Der Herausgeber und die Autoren wissen, daß die vorliegende Fassung des Buches noch manche Wünsche offenlassen wird. Wir richten deshalb an alle Benutzer, vor allem an die Fachschullehrer, die Bitte, durch kritische Hinweise dazu beizutragen, daß das Werk weiter verbessert werden kann.
Das Gutachten wie die Lektorate haben mit ihren kritischen Stellungnahmen und Bemerkungen bereits wertvolle Hilfe bei der Gestaltung des Lehrbuches geleistet. Dafür sei an dieser Stelle dem Mathematischen Institut der Hochschule für Architektur und Bauwesen in Weimar sowie allen Lektoren sehr herzlich gedankt.

Die Verfasser

INHALTSVERZEICHNIS

1. Nomographie

1.1. Grundbegriffe der Nomographie

1.1.1. Aufgabenstellung der Nomographie

In allen Bereichen der Wirtschaft und Technik treten in steigendem Maß Probleme auf, die eine umfangreiche und teilweise schwierige Zahlenrechnung erfordern. In all diesen Fällen wird angestrebt, die vorliegenden Aufgaben schnell, sicher und mit möglichst geringem Aufwand zu lösen und die Ergebnisse in einer übersichtlichen und anschaulichen Form darzustellen. Dazu bieten sich verschiedene Hilfsmittel an, z. B. die Verwendung von Zahlentafeln (Logarithmentafeln u. a.), des Rechenstabes, der verschiedenen Arten von Rechenmaschinen und -automaten sowie von zahlreichen graphischen Verfahren. Der Einsatz solcher Hilfsmittel muß allerdings sinnvoll sein, d. h., die gewonnene Genauigkeit der Ergebnisse und die Einsparungen an Zeit und Arbeitskraft müssen im richtigen Verhältnis zu dem notwendigen Aufwand für die Anschaffung und den Einsatz der Hilfsmittel stehen (vgl. dazu auch 5. Praktisches Rechnen). Die **Nomographie**[1]) stellt solche Hilfsmittel in Form von Rechentafeln oder **Nomogrammen** bereit.

Nomogramme sind graphische Darstellungen von vorliegenden Gesetzmäßigkeiten und Formeln, die es gestatten, zu beliebigen Ausgangswerten eines bestimmten Bereiches das zugehörige Ergebnis abzulesen.

Bei den einfachen graphischen Darstellungen ist für jede spezielle Aufgabe ein gesondertes Diagramm anzulegen. So ist z. B. bei der graphischen Lösung einer kubischen Gleichung die zugehörige kubische Parabel zu zeichnen, und ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse sind zu bestimmen. Dagegen werden in der Nomographie Rechentafeln für alle Aufgaben eines bestimmten Typs angelegt, die für jeden gewünschten speziellen Wert (in dem geforderten Bereich) gelten. Ein Nomogramm liefert also beispielsweise die Lösungen für alle zu untersuchenden kubischen Gleichungen; zu den gegebenen Koeffizienten können die zugehörigen Lösungen abgelesen werden.
In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten Arten der Nomogramme behandelt. Damit können die meisten der in der Praxis vorkommenden Funktionen in Form von Nomogrammen dargestellt werden, wobei jeweils die einfachste und übersichtlichste Möglichkeit auszuwählen ist. In besonders schwierigen Fällen können Anleitungen aus der angegebenen weiterführenden Literatur entnommen werden.

---

[1]) nomos (griech.) Gesetz, graphein (griech.) schreiben

Das Nomogramm kann auch von denen benutzt werden, die die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten nicht kennen. Es soll daher stets mit einer Erläuterung, z. B. in Form eines Ableseschemas, versehen werden.
Bei jeder graphischen Methode treten Ungenauigkeiten durch die Zeichnung selbst oder durch Ablesefehler auf. Es muß darauf geachtet werden, daß diese Fehler möglichst klein gehalten werden und daß die Genauigkeit für das jeweilige Anwendungsgebiet ebenso wie in dem vorkommenden Wertebereich ausreicht. Dazu sind die Hinweise für die praktische Herstellung von Rechentafeln, die überall eingefügt sind, zu beachten.
In jedem Nomogramm werden Funktionen dargestellt, die in der Naturwissenschaft, Technik oder Ökonomie vorkommen. Es muß daher auf die Grundbegriffe der Funktionenlehre und die Elemente der graphischen Darstellung zurückgegriffen werden, die bereits im Band „Analysis für Ingenieur- und Fachschulen" behandelt sind [2]. Sie werden hier kurz wiederholt und in der für die Nomographie notwendigen Weise ausgebaut.
Die Nomographie ist ein verhältnismäßig junger Zweig der Mathematik. Wenn auch in Landkarten und anderen Darstellungen Vorläufer von Nomogrammen gesehen werden können, so erfolgte doch eine systematische Behandlung der Netztafeln erst 1846 durch LALANNE[1]). Die Fluchtlinientafeln gehen auf D'OCAGNE[2]) (1884/85) zurück. In der Folgezeit trugen SOREAU, GERSEWANOW, SCHWERDT, GLAGOLEW, LUCKEY u. a. zur Entwicklung der Nomographie bei [5, 10].

1.1.2. Größe, Zahlenwert, Einheit

In den meisten Anwendungen der Mathematik treten Beziehungen zwischen **Größen** auf, die durch die Angabe eines **Zahlenwertes** und einer **Maßeinheit** bestimmt sind. Solche Größen sind z. B. Masse, Zeit, Kraft, Kosten usw. So sind in Grundgesetzen der Physik, wie

$$F = m \cdot a \qquad (F \text{ Kraft, } m \text{ Masse, } a \text{ Beschleunigung})$$

$$v = \pi \cdot d \cdot n \qquad (v \text{ Geschwindigkeit, } d \text{ Durchmesser, } n \text{ Drehzahl}),$$

alle auftretenden Variablen physikalische Größen. Dabei wird definiert

Größe = Zahlenwert mal Einheit.

Größen sind z. B. $v = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $s = 10\ \mathrm{km} = 10000\ \mathrm{m}$, $F = 8\ \mathrm{kp}$. Die Zahlenwerte sind 5, 10, 10000 und 8, die Einheiten $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, km, m, kp. Wie das zweite Beispiel zeigt, verhält sich das Produkt aus Zahlenwert und Einheit wie ein gewöhnliches Produkt. Wenn der eine Faktor (Einheit) verkleinert wird, muß der andere Faktor (Zahlenwert) entsprechend vergrößert werden, damit das Produkt denselben Wert behält.

---

[1]) LÉON LALANNE, geb. 1811, französischer Ingenieur
[2]) PHILIBERT MARIA D'OCAGNE, geb. 1862, Professor der Mathematik in Paris

Im folgenden werden unter den üblichen Formelzeichen immer Größen verstanden. Bei graphischen Darstellungen sind die der Größe zugeordneten Zahlenwerte durch Längen zu veranschaulichen. Für diese Zahlenwerte werden je nach den verwendeten Achsen die üblichen Bezeichnungen für Variablen x, y, z oder $x_1, x_2, \ldots$ verwendet:

$$\text{Größe } u, \quad \text{Einheit } [u], \quad \text{Zahlenwert } x = \frac{u}{[u]}.$$

Entsprechend der obigen Erklärung gibt es **Größengleichungen**, **Einheitengleichungen** und **Zahlenwertgleichungen.** Dabei ist eine Größengleichung eine solche, in der alle Formelzeichen Größen bedeuten. Es ist zu beachten, daß in allgemeinen Größengleichungen empirische Faktoren als Größen zu behandeln und daß Umrechnungsfaktoren nicht erlaubt sind. Die obengenannten allgemeinen Gleichungen der Physik sind Größengleichungen. In diese Gleichungen dürfen Größen in beliebigen Einheiten eingesetzt werden, z. B. der Durchmesser d in der zweiten Gleichung in mm oder in m. Das Ergebnis, hier die Schnittgeschwindigkeit v, liegt dann jeweils in der entsprechenden Einheit vor. Werden alle Größen in solchen Einheiten verwendet, die nach den Grundgleichungen aufeinander abgestimmt sind (sogenannte **kohärente**[1]) Einheiten), so gelten die Größengleichungen in derselben Form auch für die entsprechenden Zahlenwerte. Da aber in der Praxis häufig **nichtkohärente Einheiten** benötigt werden, muß die Rechnung und damit auch das aufzustellende Nomogramm durch das Einführen von Umrechnungsfaktoren für diese Einheiten vorbereitet werden. Die Größengleichung verliert dann ihre Allgemeingültigkeit. Dies soll am Beispiel der oben erwähnten Gleichung für die Umfangsgeschwindigkeit gezeigt werden, wobei folgende Einheiten zu berücksichtigen sind:

$$[d] = \text{mm}, \; [n] = \text{min}^{-1}, \; [v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Aus $v = \pi \cdot d \cdot n$ folgt durch Erweitern mit den vorgeschriebenen Einheiten von d und n

$$v = \pi \cdot \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{n}{\text{min}^{-1}} \text{ mm min}^{-1}.$$

Die Geschwindigkeit v würde sich jetzt jedoch in mm min^{-1} ergeben. Um auf die vorgeschriebene Einheit zu kommen, sind die Umrechnungsbeziehungen 1 m = = 1000 mm und 1 min = 60 s in Form von geeigneten Quotienten

$$\frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}}, \; \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}},$$

deren Wert 1 ist, als Erweiterungsfaktoren anzufügen:

$$v = \pi \cdot \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{n}{\text{min}^{-1}} \cdot \text{mm} \cdot \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{ m}}{1000\text{ mm}} \cdot \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}.$$

[1]) cohaerentia (lat.) Zusammenhang

Kürzen und Zusammenfassen ergibt

$$v = \frac{\pi}{60000} \cdot \frac{d}{\mathrm{mm}} \cdot \frac{n}{\mathrm{min}^{-1}}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Dies ist eine Größengleichung, denn die Formelzeichen bedeuten Größen. Die Gleichung ist jedoch nicht mehr allgemeingültig, sondern für die geforderten Einheiten zugeschnitten; sie heißt daher **zugeschnittene Größengleichung**. Der entstandenen Gleichung kann sofort entnommen werden, in welchen Einheiten die Größen d und n einzusetzen sind, damit die Ausdrücke $\frac{d}{\mathrm{mm}}$ und $\frac{n}{\mathrm{min}^{-1}}$ Zahlenwerte sind und sich v in $\mathrm{m\,s^{-1}}$ ergibt. Diese Form der Gleichung ist exakt und erlaubt im Bedarfsfall auch durch entsprechende Umrechnung einen Übergang zu anderen Einheiten.
Wenn die obige Gleichung noch durch $\mathrm{m\,s^{-1}}$ geteilt wird, ergibt sich mit den Abkürzungen für die Zahlenwerte

$$x = \frac{d}{\mathrm{mm}},\quad y = \frac{n}{\mathrm{min}^{-1}},\quad z = \frac{v}{\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

die Zahlenwertgleichung

$$z = \frac{\pi}{60000}\, xy.$$

Damit ist eine Funktionsgleichung für reelle Variablen entstanden, die die Grundlage für die graphische Darstellung in einem Nomogramm bildet und die alle nötigen Umrechnungsfaktoren enthält. Die Zahlenwerte x, y, z mit der angegebenen Bedeutung können auf Achsen eines Koordinatensystems oder auf beliebigen Skalen dargestellt werden.
Bei der Umwandlung der Gleichung sind die Einheiten wie gewöhnliche Faktoren behandelt worden. Das beschriebene Verfahren führt exakt zu den Gleichungen, die für die Anlage der Nomogramme benötigt werden.

BEISPIELE

1. Die Masse von Stahldrähten (in kg) ist aus der Länge l (in m) und dem Durchmesser d (in mm) zu berechnen, wobei für die Dichte $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg/dm^3}$ zu setzen ist. Die entstehende Gleichung ist als Zahlenwertgleichung zu schreiben.

   Lösung: Die Gleichung für die Masse lautet

   $$m = \varrho \cdot V, \quad \text{wobei für } V = \frac{\pi}{4}\, d^2 \cdot l \quad \text{zu setzen ist.}$$

   Mit dem gegebenen Wert für ϱ erhält man

   $$m = 7{,}85\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \cdot \frac{\pi}{4}\, d^2 \cdot l$$

   und durch Erweitern mit den vorgeschriebenen Einheiten

$$m = 7{,}85 \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)^2 \cdot \frac{l}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}.$$

Die Umrechnungsbeziehungen $1\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{dm}$ und $1\ \mathrm{dm}^2 = 10^4\ \mathrm{mm}^2$ sind in geeigneter Form als Quotienten anzufügen:

$$m = 7{,}85 \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)^2 \cdot \frac{l}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} \cdot \frac{10\ \mathrm{dm}}{1\ \mathrm{m}} \cdot \frac{1\ \mathrm{dm}^2}{10^4\ \mathrm{mm}^2}.$$

Daraus entsteht durch Kürzen, Zusammenfassen und Dividieren durch kg

$$\frac{m}{\mathrm{kg}} = 6{,}16 \cdot 10^{-3}\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)^2 \cdot \frac{l}{\mathrm{m}}.$$

Nach Einführen der Zahlenwerte

$$x = \frac{d}{\mathrm{mm}}, \quad y = \frac{l}{\mathrm{m}}, \quad z = \frac{m}{\mathrm{kg}}$$

ergibt sich die für eine spätere Nomogrammkonstruktion benötigte Zahlenwertgleichung

$$\underline{\underline{z = 6{,}16 \cdot 10^{-3}\, x^2 \cdot y.}}$$

2. Die Gleichung für die Leistung

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

ist in eine Zahlenwertgleichung mit den Einheiten

$$[F] = \mathrm{kp}, \quad [s] = \mathrm{cm}, \quad [t] = \mathrm{min}, \quad [P] = \mathrm{PS}$$

zu überführen.

Lösung: Das Einführen der geforderten Einheiten für die 3 unabhängigen Variablen ergibt

$$P = \frac{\dfrac{F}{\mathrm{kp}} \cdot \dfrac{s}{\mathrm{cm}}}{\dfrac{t}{\mathrm{min}}} \cdot \frac{\mathrm{kp\,cm}}{\mathrm{min}}.$$

Das Anfügen der Umrechnungsquotienten $\dfrac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}}$ und $\dfrac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}}$ führt zunächst auf die Leistungseinheit $\dfrac{\mathrm{kpm}}{\mathrm{s}}$, die noch durch den Quotienten $\dfrac{1\ \mathrm{PS}}{75\ \mathrm{kpms}^{-1}}$ auf die gewünschte Einheit PS zurückgeführt wird.

$$P = \frac{\dfrac{F}{\mathrm{kp}} \cdot \dfrac{s}{\mathrm{cm}}}{\dfrac{t}{\mathrm{min}}} \cdot \frac{\mathrm{kp\,cm}}{\mathrm{min}} \cdot \frac{1\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{cm}} \cdot \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \mathrm{PS}}{75\ \mathrm{kpms}^{-1}}$$

Kürzen, Zusammenfassen und Einführen der Abkürzungen für die Zahlenwerte

$$x_1 = \frac{F}{\mathrm{kp}}, \quad x_2 = \frac{s}{\mathrm{cm}}, \quad x_3 = \frac{t}{\mathrm{min}}, \quad x_4 = \frac{P}{\mathrm{PS}}$$

ergibt die gewünschte Zahlenwertgleichung

$$\underline{\underline{x_4 = \frac{1}{450000} \cdot \frac{x_1 x_2}{x_3}.}}$$

AUFGABEN

1. Die Formel für die Schnittgeschwindigkeit

$$v = \pi d n$$

ist für eine Rechnung mit den Einheiten

$$[v] = \mathrm{m\,min^{-1}}, \quad [d] = \mathrm{mm}, \quad [n] = \mathrm{min^{-1}}$$

vorzubereiten und als Zahlenwertgleichung zu schreiben.

2. Die Masse m eines Rohres, bezogen auf die Länge, wird nach der Formel

$$\frac{m}{l} = \pi(ds + s^2)\,\varrho$$

berechnet. Dabei bedeuten d die lichte Weite, s die Wanddicke und ϱ die Dichte. Die Gleichung ist in eine Zahlenwertgleichung mit den folgenden Einheiten umzuformen:

$$[d] = \mathrm{mm}, \quad [s] = \mathrm{mm}, \quad [\varrho] = \mathrm{kg\,dm^{-3}}, \quad \left[\frac{m}{l}\right] = \mathrm{kg\,m^{-1}}.$$

3. Die Kraft F, mit der die Platten eines Kondensators einander anziehen, beträgt

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{U^2 \cdot A}{d^2}.$$

Hierbei sind $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, U die Spannung zwischen den Platten, A die Fläche einer Platte und d der Plattenabstand.
Die Größengleichung ist für die Einheiten

$$[U] = \mathrm{V}, \quad [A] = \mathrm{cm^2}, \quad [d] = \mathrm{mm}, \quad [F] = \mathrm{mp}$$

zuzuschneiden.

1.1.3. Aufbau von Leitern

1.1.3.1. Reguläre Leitern

In der Nomographie werden die den Größen u zugeordneten Zahlenwerte $x = \frac{u}{[u]}$ durch Abschnitte auf einer Kurve dargestellt. Die mit einer Punktfolge (Teilung) für die verschiedenen Zahlenwerte versehene Kurve heißt **Leiter** oder **Skale**, die Kurve ist der Träger der Teilung.
Im einfachsten Fall ist der Träger eine Gerade, und die Teilungspunkte sind gleichabständig, wie das z. B. von den Achsen des cartesischen Koordinatensystems oder den üblichen Linealen her bekannt ist. Solche Leitern heißen **regulär** oder **linear**. Davon sind die **Funktionsleitern** zu unterscheiden, bei denen die Teilpunktabstände aus Funktionswerten einer nicht-linearen Funktion zu ermitteln und demzufolge ungleich sind, z. B. bei der Teilung des Rechenstabes. Weiterhin treten in der Nomographie krummlinige Leiterträger auf.
Zunächst soll der Aufbau der regulären Leiter untersucht werden. Als Träger der Leiter wird eine orientierte Gerade mit einem Anfangspunkt A gewählt. Wenn alle Werte x einer linearen Punktmenge $x_0 \leqq x \leqq x_n$ auf der Leiter dargestellt werden sollen, wird zunächst dem Anfangspunkt A der Wert x_0 zugeordnet. Zu jedem Wert x soll dann ein Punkt P gehören, so daß die Strecke AP proportional zu $x - x_0$ ist. Die endgültige Länge der Strecke wird durch die Wahl der **Zeicheneinheit** oder Einslänge l_x bestimmt, das ist die Länge, die für die Einheit von x gewählt wird. Die Länge der Strecke AP ist dann (Bild 1)

$$\boxed{X = l_x (x - x_0)} \tag{1}$$

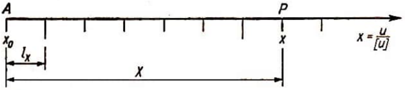


Bild 1

Der Abschnitt auf der Leiter wird im Gegensatz zu der Darstellung im Band „Analysis für Ingenieur- und Fachschulen" zur Vereinfachung der folgenden Gleichungen X statt $s(x)$ genannt. Seine Abhängigkeit von x ist jedoch stets zu beachten.

In Bild 1 ist l_x der Abstand zweier beliebiger Teilstriche, wenn diese zu aufeinanderfolgenden, ganzzahligen Werten von x gehören. Ist $x_0 = 0$ (die Leiter beginnt mit dem Nullpunkt), gilt insbesondere $X = l_x \cdot x$. Beim cartesischen Koordinatensystem sind beide Achsen in dieser Weise geteilt, $X = l_x \cdot x$ und $Y = l_y \cdot y$, wobei meist $l_x = l_y$ ist.
Gleichung (1) heißt **Gleichung der regulären Leiter** und stellt den Zusammenhang zwischen dem an die Teilung geschriebenen Zahlenwert x und der dafür vom Anfangspunkt an abgetragenen Länge X dar. Mit dieser Gleichung kann einerseits der Ab-

stand jedes Teilpunktes vom Anfangspunkt berechnet und andererseits aus einem abgemessenen Abstand der (vielleicht nicht angeschriebene) zugehörige Zahlenwert ermittelt werden. Die Herstellung der regulären Leitern erfolgt jedoch meist ohne Benutzung der Leitergleichung durch fortgesetztes Abtragen gleicher Strecken.
Die Wahl der Zeicheneinheit l_x hängt von dem darzustellenden Wertebereich und der zur Verfügung stehenden Leiterlänge $X_{\max}$ ab, die z. B. durch die Blattgröße bestimmt wird. Je größer l_x gewählt wird, um so feiner läßt sich die Leiter unterteilen. Ist eine Leiter für die Werte $x_0, \ldots, x_n$ anzufertigen, so muß

$$l_x (x_n - x_0) \leqq X_{\max}$$

gelten, damit die Teilung auf der vorhandenen Länge untergebracht werden kann. Daraus ergibt sich als Bedingung für die **Wahl der Zeicheneinheit**

$$\boxed{l_x \leqq \frac{X_{\max}}{x_n - x_0}} \tag{2}$$

Nach Möglichkeit sollen für l_x immer ganze Zahlenwerte gewählt werden, damit sich die Teilung einfach herstellen läßt. Wenn sich dabei der Bruch in Gleichung (2) z. B. zu 11,8 mm ergibt, so wird im allgemeinen $l_x = 10$ mm gewählt und nur in Ausnahmefällen, wo ein geringes Überschreiten des Platzes zulässig ist, auf $l_x = 12$ mm aufgerundet.

Häufig wird statt der Zeicheneinheit l_x der **Maßstab** m_x als Verhältnis $m_x = \frac{l_x}{[u]}$ eingeführt. So wird also beispielsweise der Maßstab für die Kraft mit $m_x = \frac{10\ \text{mm}}{1\ \text{kp}}$ angegeben. Auch die Maßstabsverhältnisse auf allen Landkarten sind so zu verstehen, wobei im Zähler und Nenner Längen stehen, so daß m_x dimensionslos ist. Ein derartiges Maßstabsverhältnis hat jedoch nur für die reguläre Leiter einen Sinn, da sich für eine Funktionsleiter dieses Verhältnis von Punkt zu Punkt ändert. Deshalb wird hier die allgemeingültige Zeicheneinheit l_x verwendet.

BEISPIELE

1. Die Zeicheneinheiten für die verschiedenen Teilungen des üblichen Dreikantmaßstabes sind zu ermitteln.

Lösung: Die Zeicheneinheiten sind

$l_x = 50$ mm	(1: 20)
$l_x = 40$ mm	(1: 25)
$l_x = 20$ mm	(1: 50)
$l_x = 13{,}\overline{3}$ mm	(1: 75)
$l_x = 10$ mm	(1:100)
$l_x = 8$ mm	(1:125)

Die in Klammern angefügten Maßstabsverhältnisse sind auf eine darzustellende Länge von 1000 mm bezogen.

2. Es ist eine reguläre Leiter zur Darstellung der Kraft F in kp mit der Zeicheneinheit $l_x = 10\,\text{mm}$ und dem Anfangspunkt 0 herzustellen. (Ablesebeispiel $F = 6$ kp)

Lösung: Mit dem Zahlenwert $x = \dfrac{F}{\text{kp}}$ lautet die Gleichung der Leiter

$$X = 10\text{ mm} \cdot x = 10\text{ mm} \cdot \frac{F}{\text{kp}}.$$

Zu dem Zahlenwert 6 gehört der Abstand $X = 60$ mm (Bild 2).

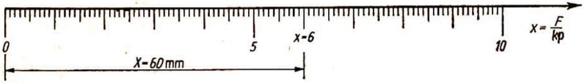


Bild 2

3. Für die Stromstärke I ist eine reguläre Leiter im Bereich 0,5 ⋯ 5,0 A auf einer Länge von höchstens 100 mm herzustellen.

a) In welchem Abstand vom Anfangspunkt ist der Strich für $I = 1{,}8$ A anzubringen?

b) Eine Ablesung führt auf einen nicht beschrifteten Punkt im Abstand 38,5 mm vom Anfangspunkt. Welche Stromstärke gehört zu diesem Punkt?

Lösung: Es ist $x = \dfrac{I}{\text{A}}$, $x_0 = 0{,}5$, $x_n = 5{,}0$, $X_{\max} = 100$ mm.

Aus Gleichung (2) ergibt sich

$$l_x \leq \frac{X_{\max}}{x_n - x_0} = \frac{100\text{ mm}}{5{,}0 - 0{,}5} = 22{,}2\text{ mm}.$$

Es wird $l_x = 20$ mm gewählt. Die Leiter zeigt Bild 3.

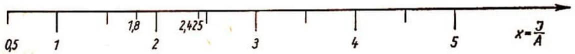


Bild 3

a) Nach Gleichung (1) ergibt sich für $x = 1{,}8$ ein Abstand

$$X = l_x(x - x_0) = 20\text{ mm } (1{,}8 - 0{,}5) = \underline{\underline{26\text{ mm}}}.$$

b) Für $X = 38{,}5$ mm gilt wieder nach Gleichung (1)

$$x = \frac{X}{l_x} + x_0 = \frac{38{,}5\text{ mm}}{20\text{ mm}} + 0{,}5 = 2{,}425.$$

Zu dem abgelesenen Wert gehört die Stromstärke

$$I = x\text{A} = \underline{\underline{2{,}425\text{ A}}}.$$

4. In Bild 4 ist das Indikatordiagramm einer Dampfmaschine mit dem Kolbendurchmesser $d = 220$ mm gegeben. Es ist die Arbeit in kpm zu berechnen[1]), die die Maschine während einer Umdrehung verrichtet. Der durch Planimetrieren bestimmte Flächeninhalt des abgeschlossenen Gebietes beträgt $A = 1140\ \mathrm{mm}^2$.

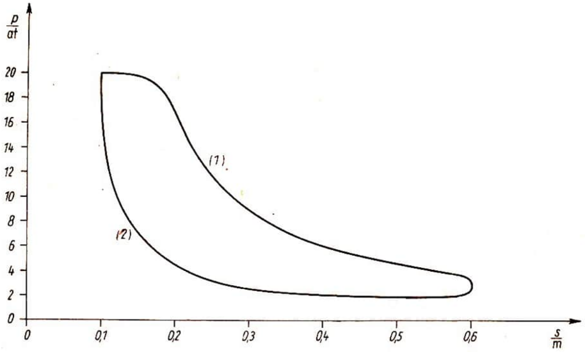


Bild 4

Lösung: Die gesuchte Arbeit W wird bestimmt durch

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \,\mathrm{d}V - \int_{V_1}^{V_2} p_2 \,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} (p_1 - p_2)\,\mathrm{d}V.$$

Dabei sind V_1 und V_2 die Volumina, die zu den beiden Endlagen des Kolbens gehören. Für das Volumenelement gilt

$$\mathrm{d}V = q\,\mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad q = \frac{\pi d^2}{4} = 38013\ \mathrm{mm}^2.$$

p_1 und p_2 geben den Druckverlauf in Abhängigkeit vom Kolbenweg s für die beiden Bewegungen (obere und untere Kurve in Bild 4) an.
Andererseits wurde durch Planimetrieren die von der Kurve umschlossene Fläche ermittelt, die sich aus den geometrischen Größen, d. h. den dargestellten Längen X und Y, ergibt:

$$A = \int_{X_1}^{X_2} Y_1 \,\mathrm{d}X - \int_{X_1}^{X_2} Y_2 \,\mathrm{d}X = \int_{X_1}^{X_2} (Y_1 - Y_2)\,\mathrm{d}X = 1140\ \mathrm{mm}^2.$$

---

[1]) Dieses Beispiel ist nur für Schulen mit entsprechend weitgehender Ausbildung in der Integralrechnung gedacht

Dabei sind Y_1 und Y_2 wiederum die zu der oberen bzw. unteren Kurve gehörenden Werte von Y.

Die Verbindung zwischen den beiden Integralen wird über die Gleichungen der Leitern hergestellt, wobei zur Vereinfachung der Schreibweise in den folgenden Rechnungen für die Integrale $\int_1^2 p\,\mathrm{d}V$ und $\int_1^2 Y\,\mathrm{d}X$ geschrieben wird.

Aus Bild 4 ist zu entnehmen, daß der Druck p in at und der Kolbenweg s in m angegeben sind, während der Kolbenquerschnitt in mm² gegeben und die Arbeit in kpm gefordert werden. Für diese Einheiten wird die Gleichung für W zugeschnitten, wobei die Umrechnungsbeziehungen $1\ \mathrm{at} = 1\ \mathrm{kp\,cm^{-2}}$ und $1\ \mathrm{cm^2} = 100\ \mathrm{mm^2}$ in Quotientenform verwendet werden.

$$W = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V = q\int_1^2 p\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{q}{\mathrm{mm^2}} \cdot \int_1^2 \frac{p}{\mathrm{at}} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{mm^2\,at\,m}\, \frac{1\ \mathrm{kp\,cm^{-2}}}{1\ \mathrm{at}} \cdot \frac{1\ \mathrm{cm^2}}{100\ \mathrm{mm^2}} =$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \frac{q}{\mathrm{mm^2}} \cdot \int_1^2 \frac{p}{\mathrm{at}} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{m}}\ \mathrm{kpm}.$$

Auf den Achsen des Bildes 4 sind die Werte für s und p nach den Gleichungen

$$X = l_x \cdot x = l_x \cdot \frac{s}{\mathrm{m}}$$

$$Y = l_y \cdot y = l_y \cdot \frac{p}{\mathrm{at}}$$

abgetragen, wobei $l_x = 150$ mm und $l_y = 2{,}5$ mm abzulesen sind. Für das Differential gilt entsprechend

$$\mathrm{d}X = l_x \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{m}}.$$

Im Ausdruck für W sind demnach einzusetzen

$$\frac{p}{\mathrm{at}} = \frac{Y}{l_y}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}X}{l_x},$$

so daß sich unter Verwendung von $A = \int_1^2 Y\,\mathrm{d}X$ ergibt

$$W = \frac{1}{100} \cdot \frac{q}{\mathrm{mm^2}} \cdot \frac{1}{l_x l_y} \int_1^2 Y\,\mathrm{d}X\ \mathrm{kpm} = \frac{1}{100} \cdot \frac{q}{\mathrm{mm^2}} \cdot \frac{A}{l_x \cdot l_y}\ \mathrm{kpm}.$$

Das Einsetzen der Zahlen liefert schließlich

$$W = \frac{1}{100} \cdot 38013 \cdot \frac{1140\ \mathrm{mm^2}}{150\ \mathrm{mm} \cdot 2{,}5\ \mathrm{mm}}\ \mathrm{kpm} = \underline{\underline{1156\ \mathrm{kpm}}}.$$

Hinweise für die Herstellung von Leitern

Je nach den Anforderungen an die Genauigkeit der Leiter ist die Unterteilung zu wählen. Sind x_m und x_{m+1} zwei aufeinanderfolgende Zahlenwerte der Leiter, so ergibt sich für den Abstand der zugehörigen Teilstriche

$$\Delta X = l_x(x_{m+1} - x_m) = l_x \cdot \Delta x .$$

Δx ist die **Schrittlänge** oder **Stufe** der Leiter und bestimmt die Feinheit der Teilung. Sie ist bei den regulären Teilungen konstant und wird so gewählt, daß der Abstand zweier Teilstriche mindestens 1 mm beträgt ($\Delta X \geqq 1$ mm). Unter dieser Voraussetzung sind Stufenwerte im allgemeinen mit 1, 2 oder 5 Einheiten zu wählen.
Die Strichlängen sollen nicht kleiner als 1 mm und nicht größer als 10 mm sein. Unterschiedliche Strichlängen verbessern die Ablesemöglichkeit. In Bild 2 wurden beispielsweise folgende Längen gewählt:

Striche für	0,1; 0,2	usw.	1,5 mm	lang
,,	,, 0,5; 1,5	,,	2,5 mm	,,
,,	,, 1; 2; 3	,,	4 mm	,,
,,	,, 0; 5	,,	6 mm	,,

Häufig wird es vorkommen, vor allem bei Funktionsleitern, daß von einer fertigen Leiter ein Bild mit einer anderen Zeicheneinheit benötigt wird. Es ist dann möglich, alle Teilpunktabstände mit einem Proportionalitätsfaktor umzurechnen. Meist wird aber der zeichnerische Weg bevorzugt, wobei Leitern aus Genauigkeitsgründen möglichst nur verkleinert werden sollen. (Bei einer Vergrößerung würden auch die Ungenauigkeiten mit vergrößert.)
Die Konstruktionen der Bilder 5 und 6 sind nach den Strahlensätzen sofort verständlich.
In Bild 5 wird eine Leiter AB mit der Zeicheneinheit l_x durch *Zentralprojektion* auf eine Leiter $A'B'$ mit der Zeicheneinheit l'_x verkleinert. Nach dem zweiten Strahlensatz ist

$$l'_x : l_x = \overline{A'C} : \overline{AC},$$

$$l'_x = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}\, l_x .$$

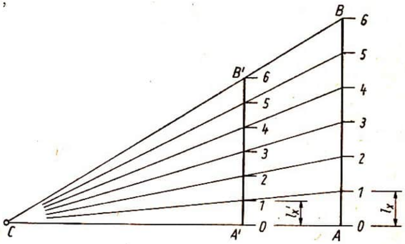


Bild 5

Die gewünschte kleinere Zeicheneinheit l'_x ergibt sich durch geeignete Wahl der Strecken $A'C$ und AC.
Nach Bild 6 kann die Leiter AB mit der Zeicheneinheit l_x durch eine *Parallelprojektion* in die Leiter AB' mit l'_x übergeführt werden. Hier gilt nach dem ersten Strahlensatz

$$l'_x : l_x = \overline{AB'} : \overline{AB}$$

$$l'_x = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\, l_x .$$

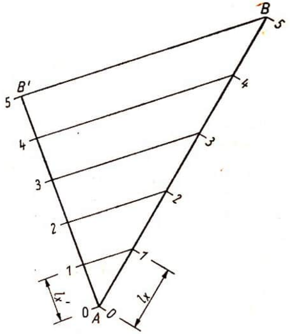


Bild 6

Der gewünschte Wert von l'_x wird durch die Wahl der Strecke AB' erreicht, die unter beliebigem Winkel an $\overline{AB}$ angetragen wird.
Die genannten Konstruktionen können auch für die anschließend zu behandelnden Funktionsleitern angewandt werden. Durch die beschriebenen Verfahren (Zentralprojektionen bei parallelen Leitern, Parallelprojektionen bei nichtparallelen Leitern) wird die Art der Teilung nicht verändert, während z. B. die Zentralprojektion bei nichtparallelen Trägern eine Verzerrung der Teilung ergibt, wie später gezeigt wird.

AUFGABEN

4. Für den Widerstand R in Ohm ist eine reguläre Leiter mit dem Anfangspunkt $R_0 = 20\,\Omega$ auf einer Länge von 75 mm anzulegen. Welcher Bereich kann auf der Leiter untergebracht werden, wenn Teilstriche für je $0{,}5\,\Omega$ unter der Bedingung $\Delta X \geqq 1$ mm anzubringen sind?

5. Für die Skale eines Tachometers soll ein Geschwindigkeitsbereich von 0 bis 120 km/h mit einer regulären Teilung auf dem Bogen eines Kreissektors mit dem Zentriwinkel von 150° dargestellt werden. Wie groß muß der Radius der Skale mindestens gewählt werden, damit die Teilstriche für je 2 km/h einen Abstand von $\Delta X = 1$ mm haben?

   Anleitung: Für die auf dem Kreisbogen gemessenen Längen gelten die üblichen Leitergleichungen.

1.1.3.2. Funktionsleitern

Im Gegensatz zur Teilung der regulären Leiter sind die Teilungsabschnitte einer **Funktionsleiter** nicht proportional zu den dargestellten Zahlenwerten, sondern proportional zu den zugehörigen Funktionswerten. Solche Leitern sind z. B. von der logarithmischen Teilung des Rechenstabes bekannt. Unter ihrer Verwendung gelingt es dort, die Multiplikation zweier Zahlen auf ein einfaches Aneinandersetzen zweier Strecken zurückzuführen. In ähnlicher Weise werden in der Nomographie schwierige Zusammenhänge von Variablen dadurch vereinfacht, daß bestimmte funktionale Zusammenhänge schon im Aufbau der Teilungen erfaßt werden.
Funktionsleitern können beispielsweise aus der graphischen Darstellung einer Funktion f: $y = f(x)$; $(x;y) \in R \times R$ (vgl. [1]) gewonnen werden, wie dies in Tafel 1[1]) gezeigt ist. Die Leitern für x und y sind in der üblichen Weise regulär geteilt. Werden die x-Werte der Abszissenachse über die Kurve für f: $y = f(x)$ auf die Ordinatenachse projiziert, so entsteht auf ihr neben der ursprünglichen regulären Teilung für $y = f(x)$ eine ungleichförmige oder Funktionsleiter für x. Auf dieser sind die Funktionswerte $f(x)$ mit einer Zeicheneinheit, die sich hier aus der Anlage der Zeichnung ergibt, aufgetragen, aber die Zahlenwerte x angeschrieben. Die Leiter beginnt für $x_0 = 0$ an einer Stelle $f(x_0) \approx 1{,}35$.
Die Zuordnung der Punkte P einer Funktionsleiter zu den darzustellenden Zahlenwerten x aus der linearen Punktmenge $x_0 \leqq x \leqq x_n$ erfolgt also über die Funktionswerte $f(x)$ bei der Funktion f.
Nach der Wahl eines Anfangspunktes A auf einer orientierten Geraden, der dem Werte x_0 zugeordnet wird, und der Festlegung einer Zeicheneinheit l_x ergibt sich für die Länge der Strecke $X = \overline{AP}$ (Bild 7)

$$\boxed{X = l_x[f(x) - f(x_0)]} \tag{3}$$

Bild 7

Damit ist die **Gleichung der Funktionsleiter** gewonnen. Die Gleichung (1) für die reguläre Leiter ergibt sich als Sonderfall $f(x) = x$.
Die Leitergleichung ist die Grundlage für die Berechnung der Strecken X, d. h. der Teilstrecken, die zu den Zahlenwerten x gehören. Nur in Fällen, in denen einfache Konstruktionen bekannt sind, kann auf die punktweise Berechnung der Leiter nach Gleichung (3) verzichtet werden. Allerdings setzt die Anwendung von (3) die Kenntnis der analytischen Darstellung der erzeugenden Funktion oder einer Wertetabelle für alle benötigten Punkte der Teilung voraus. Ist die Funktion dagegen, vielleicht aus einer Versuchsreihe, nur als grob unterteilte Wertetafel oder als graphische Dar-

[1]) Die Tafeln sind im Anhang enthalten

stellung gegeben, so ist für die Herstellung der zugehörigen Leiter nur das mit Tafel 1 beschriebene graphische Verfahren (oder ein später zu behandelndes Näherungsverfahren) möglich.
Die Zeicheneinheit l_x ist jetzt die Länge, die für die Schrittlänge 1 von $f(x)$ benutzt wird. Zwei Punkte der Leiter liegen also um l_x voneinander entfernt, wenn sich die zugehörigen Funktionswerte um 1 unterscheiden. Die Wahl von l_x hängt wiederum von der zur Verfügung stehenden Teilungslänge $X_{\max}$ und dem geforderten Wertebereich ab.

$$\boxed{l_x \leqq \frac{X_{\max}}{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)}} \tag{4}$$

Dabei ist $f_{\min}(x)$ der kleinste und $f_{\max}(x)$ der größte Wert der Funktion $y = f(x)$ in dem darzustellenden Bereich. Diese Werte brauchen durchaus nicht an den Intervallgrenzen zu liegen.
Der Abschnitt X der Teilung ergibt sich mit Vorzeichen. Bei negativem Vorzeichen ist er entgegengesetzt zur Orientierung der Geraden abzutragen.
Für die praktische Herstellung der Leitern gilt das im vorangegangenen Abschnitt Gesagte.
Für den Abstand zweier Teilpunkte, die zu den Zahlenwerten x_m und x_{m+1} mit $\Delta x = x_{m+1} - x_m$ gehören, gilt

$$\Delta X = l_x[f(x_{m+1}) - f(x_m)] \approx l_x \cdot f'(x_m) \cdot \Delta x .$$

Der Abstand ΔX ist also bei gleicher Schrittlänge Δx veränderlich, so daß die Feinheit der Teilung an verschiedenen Stellen unterschiedlich ausfällt. Um der Forderung $\Delta X \geqq 1$ mm zu genügen, muß daher unter Umständen die Schrittlänge Δx abschnittsweise verändert werden, wie das z. B. von den logarithmischen Teilungen des Rechenstabes bekannt ist.
Entsprechend der Art der dem Leiteraufbau zugrunde liegenden Funktionen werden die Leitern eingeteilt; die wichtigsten sind

Potenz- und Wurzelleitern mit $f(x) = x^n$ bzw. $f(x) = \sqrt[n]{x}$
Logarithmische Leitern mit $f(x) = \lg x$
Trigonometrische Leitern mit $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ usw.

Logarithmische Leitern

Bei den Funktionsleitern kommen die logarithmischen am häufigsten vor. Dabei ist zu beachten, daß wegen

$$\lim_{x \to 0} \lg x = -\infty$$

eine logarithmische Leiter nie mit dem Punkt $x_0 = 0$ beginnen kann.

Die Mantissen der dekadischen Logarithmen wiederholen sich für die Intervalle der Numeri von 10^m bis 10^{m+1} mit $m \in G$ (G Menge der ganzen Zahlen).
Ein solches Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zehnerpotenzen heißt **Mantisseneinheit**. Die Logarithmen der Intervallgrenzen unterscheiden sich um 1, so daß für eine Mantisseneinheit gerade die Strecke l_x benötigt wird. Die logarithmische Teilung zwischen 1 und 10 stimmt mit der zwischen 10 und 100 überein usw. Bei gedruckten logarithmischen Leitern wird daher meist am Anfang und Ende eine 10 stehen, an die noch der jeweilige Exponent zu schreiben ist.
Da logarithmische Leitern häufig in verschiedenen Zeicheneinheiten benötigt werden, lohnt sich das Anlegen einer sogenannten **logarithmischen Harfe**. Mit ihr wird nach der in 1.1.3.1. beschriebenen Zentralprojektion eine logarithmische Teilung mit der Zeicheneinheit l_x auf eine solche mit der Zeicheneinheit l_x' verkleinert. Eine solche Harfe ist als Beilage 1 angefügt. Aus ihr können die benötigten logarithmischen Teilungen entnommen werden. Ihr Aufbau ist schematisch und verkleinert in Bild 8 dargestellt. Gegenüber der Leiter mit $l_x = 250$ mm liegt im gleichen Abstand l_x der Pol P. Alle Teilpunkte der Leiter sind mit P verbunden. Unterhalb der Figur liegt eine Millimeterteilung. Damit eine logarithmische Leiter mit der Maßeinheit l_x' entsteht, ist diese Länge auf der Millimeterteilung abzulesen und vom Endpunkt senkrecht nach oben zu gehen. Auf diese Senkrechte projiziert das Strahlenbüschel eine Leiter mit der geforderten Zeicheneinheit l_x', da sich nach der Anlage der Zeichnung die Teilungslänge und der Polabstand wie 1:1 verhalten. Damit die Projektionsstrahlen die Senkrechte unter möglichst günstigen Winkeln schneiden (Genauigkeit), soll der Pol P in der halben Höhe der Teilung liegen.

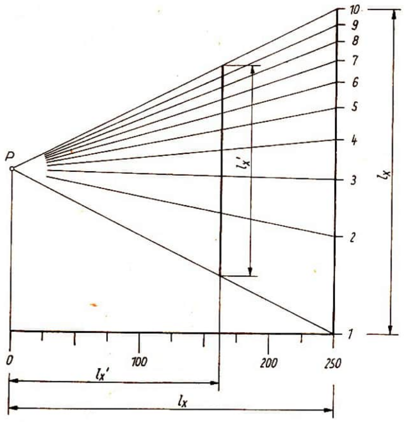


Bild 8

BEISPIELE

1. Es ist eine logarithmische Leiter mit dem Wertebereich $0{,}2 \leqq x \leqq 15$ auf einer Teilungslänge von höchstens 60 mm anzulegen.

Lösung: Nach Gleichung (4) ist mit $X_{\max} = 60$ mm

$$l_x \leqq \frac{60 \text{ mm}}{\lg 15 - \lg 0{,}2} = \frac{60 \text{ mm}}{1{,}1761 - (0{,}3010 - 1)} = \frac{60 \text{ mm}}{1{,}8751} \approx 32 \text{ mm}.$$

Für das endgültig gewählte $l_x = 30$ mm wird die Teilung mit dem Stechzirkel oder mit Hilfe eines Papierstreifens aus der Logarithmenharfe entnommen und mehrfach hintereinander abgetragen, bis sie den geforderten Wertebereich umfaßt (Bild 9). Dafür sind hier drei Mantisseneinheiten nötig, deren Anfangs- und Endpunkte mit den nötigen Zehnerexponenten versehen werden. Der geforderte Bereich von 0,2 bis 15 ist in Bild 9 besonders hervorgehoben. Für den praktischen Gebrauch könnte er mit Hilfe der Harfe leicht noch weiter unterteilt werden.

Bild 9

2. Es ist eine Potenzleiter für die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ bei einer maximalen Gesamtlänge $X_{\max} = 120$ mm zu konstruieren. Für x sollen die Zahlen von -10 bis $+10$ aufgetragen werden. Welchen Abstand X vom Skalenanfang hat der Strich für $x = 3{,}85$? Welcher Wert x gehört zu dem Punkt, der im Abstand 12,8 mm vom Anfangspunkt der Leiter liegt?

Lösung: Es ist gegeben: $f(x) = x^2$, $X_{\max} = 120$ mm, $x_0 = -10$, $x_n = +10$. Zunächst ist nach Gleichung (4) die Zeicheneinheit l_x zu bestimmen. $f(x) = x^2$ nimmt zwischen $x = -10$ und $x = +10$ den kleinsten Wert bei $x = 0$, den größten Wert bei $x = \pm 10$ an:

$$f_{\min}(x) = 0, \quad f_{\max}(x) = 100.$$

Damit folgt nach (4)

$$l_x \leqq \frac{120 \text{ mm}}{100 - 0} = 1{,}2 \text{ mm}.$$

Es wurde $l_x = 1$ mm gewählt. Die Leitergleichung lautet dann

$$X = 1 \text{ mm } [x^2 - (-10)^2] = 1 \text{ mm } (x^2 - 100).$$

Die Teilpunktabstände ergeben sich negativ, sind also vom Anfangspunkt $x_0 = \pm 10$ nach links abzutragen (Bild 10). Die Teilpunkte für positive und negative Zahlenwerte fallen zusammen.

Bild 10

Für $x = 3{,}85$ ist

$$X = 1 \text{ mm } (3{,}85^2 - 100) = \underline{\underline{-\,85{,}2 \text{ mm}}}.$$

Für den gesuchten Punkt ist $X = -12{,}8$ mm, also

$$\begin{aligned} -12{,}8\ \text{mm} &= 1\ \text{mm}\,(x^2 - 100) \\ x^2 &= 87{,}2 \\ x &= \pm\sqrt{87{,}2} = \underline{\underline{\pm\, 9{,}34}}. \end{aligned}$$

3. Es ist eine Kehrwertleiter für $f(x) = \dfrac{1}{x}$ zu entwerfen.

Lösung: Nach (3) gilt für die Gleichung dieser Leiter

$$X = l_x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Als Anfangspunkt x_0 kann jeder Punkt außer $x_0 = 0$ gewählt werden, da $\lim\limits_{x_0 \to 0} \dfrac{1}{x_0} = \infty$.

Es ist dagegen möglich, die Leiter mit $x_0 = \infty$ beginnen zu lassen, da $\lim\limits_{x_0 \to \infty} \dfrac{1}{x_0} = 0$.

Als Beispiel wird eine reziproke Leiter mit $l_x = 80$ mm und dem Anfangspunkt ∞ nach der Gleichung

$$X = 80\ \text{mm} \cdot \frac{1}{x}$$

aus einer Wertetabelle aufgestellt.

x	∞	50	20	10	5	4	3	2	1,5	1	0,8
$\dfrac{X}{\text{mm}}$	0	1,6	4	8	16	20	$26{,}\overline{6}$	40	$53{,}\overline{3}$	80	100

Die fertige Leiter zeigt Bild 11.

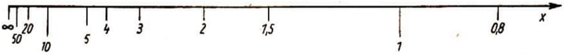


Bild 11

4. Ein Meßglas hat die Form eines Kegels, der auf die Spitze gestellt ist (Bild 12). Dabei verhält sich der Radius zur zugehörigen Mantellinie wie 1:3. Es ist die Gleichung der Eichteilung für das Volumen aufzustellen, die an der Mantellinie anzubringen ist.

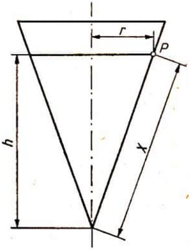


Bild 12

Lösung: Gesucht ist die Beziehung zwischen den an die Teilung zu schreibenden Zahlen für das Volumen und dem Abstand X von der Spitze.
Hat die Flüssigkeit den Punkt P erreicht, so ist das Volumen der Flüssigkeit

$$V = \frac{\pi}{3}\, r^2 h.$$

Laut Aufgabenstellung ist $r:X = 1:3$, also $r = \frac{X}{3}$. Nach dem Satz von PYTHAGORAS folgt

$$h = \sqrt{X^2 - r^2} = \sqrt{X^2 - \frac{X^2}{9}} = \frac{2}{3}\, X \sqrt{2}.$$

Dies in die Volumengleichung eingesetzt, ergibt

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{X^2}{9} \cdot \frac{2}{3}\, X \sqrt{2} = \frac{2\,\pi}{81}\, X^3 \sqrt{2}.$$

Somit ist

$$X = \sqrt[3]{\frac{81}{2\,\pi\sqrt{2}} \cdot V}$$

und mit $V = x\ \mathrm{cm}^3$

$$X = 2{,}09\, \sqrt[3]{x}\ \mathrm{cm} = 20{,}9\ \mathrm{mm} \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Diese Gleichung für das Auftragen der Volumenmarken an der Gefäßwand ist die Gleichung einer Funktionsleiter von der Form (3) zwischen den Zahlenwerten $x = \frac{V}{\mathrm{cm}^3}$ des Volumens und den dafür vom Anfangspunkt $x_0 = 0$ aus abzutragenden Längen X. Die erzeugende Funktion ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$, die Zeicheneinheit $l_x = 20{,}9$ mm und der Anfangspunkt $x_0 = 0$. Die nach dieser Gleichung hergestellte Leiter zeigt Bild 13.

Bild 13

5. Es ist eine Leiter für $f(x) = \sin x°$ in dem Bereich von 0° bis 120° mit der Leiterlänge $X_{\max} = 90$ mm zu entwerfen.

Lösung: Die Zahlenwerte x des Winkels liegen in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 120$; jedoch tritt der größte Funktionswert nicht für $x_n = 120$, sondern für $x = 90$ auf. Es ergibt sich nach (4)

$$l_x \leqq \frac{90\ \mathrm{mm}}{\sin 90° - \sin 0°} = 90\ \mathrm{mm}.$$

Die Gleichung der Leiter lautet damit

$$\underline{\underline{X = 90\ \mathrm{mm}\, \sin x°.}}$$

Daraus müssen mit Hilfe einer Sinus-Tabelle die Teilpunkte berechnet werden. Die Leiter ist in Bild 14 dargestellt. Die Leiter ist von 90° bis 120° rückläufig und überdeckt den Bereich von 60° bis 90°.

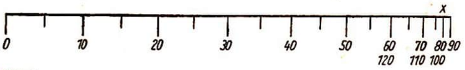


Bild 14

Für die Herstellung einer solchen trigonometrischen Leiter kann neben der beschriebenen punktweisen Berechnung auch die Konstruktion verwendet werden, die von der Definition der Winkelfunktionen her bekannt ist. Diese ist in Tafel 2 für Winkel zwischen 0° und 90° durchgeführt.

Projektive Leitern

Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Anwendungen sollen die projektiven Leitern noch genauer betrachtet werden. Zu diesen gehört schon die im Beispiel 3 behandelte *Kehrwertleiter*. Sie kann außer durch die beschriebene punktweise Berechnung auch mit Hilfe einer geeignet durchgeführten Zentralprojektion aus einer regulären Leiter erzeugt werden, wie dies in Tafel 3 dargestellt ist.

Durch den Nullpunkt einer beliebigen, regulären Leiter (reg x) mit der Zeicheneinheit l_0 wird unter beliebigem Winkel eine Gerade gelegt und auf ihr die für die reziproke Leiter geforderte Zeicheneinheit l_x abgetragen. Der so gefundene Punkt P ist der Pol einer Zentralprojektion. Auf einer Parallelen zur ersten Geraden durch den Punkt $+1$ der regulären Leiter erzeugen die Projektionsstrahlen von P zu den entsprechenden Teilpunkten der regulären Leiter die geforderte reziproke Teilung (rez x). Der Projektionsstrahl zum Teilpunkt 0 schneidet die reziproke Leiter im Endlichen nicht, der zur regulären Leiter parallele Projektionsstrahl ergibt den Punkt $\pm\infty$ auf der reziproken Leiter. Daß die beschriebene Konstruktion tatsächlich die vorher berechnete reziproke Leiter liefert, ergibt sich leicht aus den in Bild 15 dargestellten Verhältnissen. Der Projektionsstrahl von P verbindet die Punkte auf der regulären und der reziproken Leiter, die zum gleichen Zahlenwert x gehören. Der Abstand zwischen dem Anfangspunkt ∞ der reziproken Leiter und dem Punkt x ist X. Nach dem zweiten Strahlensatz ergibt sich

$$\frac{l_x - X}{l_x} = \frac{l_0 x - l_0}{l_0 x} = \frac{x-1}{x}$$

und nach Vereinfachen

$$X = l_x \frac{1}{x}.$$

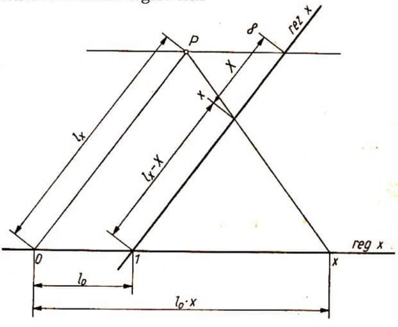


Bild 15

Das ist dieselbe Leitergleichung wie in Beispiel 3, in die noch der spezielle Wert für die Zeicheneinheit einzusetzen ist. Die Zeicheneinheit l_0 der regulären Leiter läßt sich herauskürzen, so daß sie beliebig gewählt werden kann. Damit ist es möglich, den Wertebereich und die Genauigkeit der Teilung zu beeinflussen.
Es ist nun zu untersuchen, wie sich die Gleichung der Leiter ändert, wenn die beiden Parallelen nicht mehr durch die Punkte 0 und 1 der regulären Leiter, sondern durch zwei beliebige Punkte mit dem Abstand b gehen. Außerdem soll auf der einen Parallelen bis zum Pol P eine beliebige Strecke a abgetragen werden und die entstehende Leiter nicht mehr mit ∞, sondern im Punkt mit x_0 beginnen, in dem die beiden Leitern einander schneiden. Die entstehenden Verhältnisse sind im Bild 16 dargestellt.

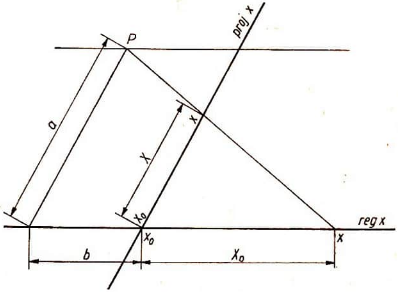


Bild 16

Die durch diese allgemeinere Projektion entstehende Leiter heißt projektive Leiter (in Bild 16 mit proj x bezeichnet). Für die Länge X_0 bis zu einem Punkt x auf der regulären Leiter gilt

$$X_0 = l_0(x - x_0).$$

Der von P ausgehende Projektionsstrahl zu diesem Punkt x schneidet auf der projektiven Leiter zu demselben Zahlenwert x eine Strecke X heraus, für die nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{X}{a} = \frac{X_0}{X_0 + b} = \frac{l_0(x - x_0)}{l_0(x - x_0) + b} = \frac{x - x_0}{x - x_0 + \frac{b}{l_0}}$$

und

$$X = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0 + \frac{b}{l_0}}. \tag{5}$$

Darin sind a, b und l_0 Strecken, x und x_0 Zahlenwerte. Der Zähler hat also die Dimension einer Länge, während der Nenner dimensionslos ist. Es kann deshalb eine Zeicheneinheit l_x mit der Dimension einer Länge ausgeklammert werden. Weiterhin ist zu beachten, daß alle Größen außer x Konstanten sind, so daß die Gleichung für X in die Form

$$\boxed{X = l_x \frac{Ax + B}{x + C} = l_x \cdot f(x)} \tag{6}$$

gebracht werden kann. Durch Kürzen kann stets erreicht werden, daß die Variable im Nenner den Faktor 1 besitzt.

Die erzeugende Funktion f der projektiven Leiter ist eine gebrochen rationale Funktion mit linearem Zähler und Nenner. Die vorher abgeleitete Gleichung für die Kehrwertleiter ist ein Sonderfall davon mit $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$.

Soll nun für eine spezielle Gleichung, z. B.

$$X = 20\ \text{mm}\ \frac{2x - 3}{x + 2},$$

die projektive Leiter hergestellt werden, so kann die mühsame punktweise Berechnung aus der Leitergleichung durch die beschriebene Konstruktion ersetzt werden. Es wäre möglich, aus den gegebenen Größen l_x, A, B und C die für die Konstruktion benötigten Größen l_0, a, b und x_0 zu berechnen. Dies könnte durch Vergleich der Koeffizienten von (5) und (6) durchaus erfolgen. Einfacher und anschaulicher ist jedoch die Konstruktion der Leiter aus 3 markanten Punkten, die im folgenden gezeigt wird.

Die Nullstelle der Funktion f liegt bei

$$2x - 3 = 0$$

$$x_0 = 1{,}5.$$

Zu diesem Wert gehört $X = 0$; er ist damit Anfangspunkt der projektiven Leiter.

Der Pol (Unendlichkeitsstelle) der Funktion f ergibt sich durch Nullsetzen des Nenners

$$x + 2 = 0$$

$$x_P = -2.$$

Der zugehörige Punkt der projektiven Leiter liegt im Unendlichen.

Das teilweise Ausführen der Division liefert

$$(2x - 3) : (x + 2) = 2 - \frac{7}{x + 2}.$$

Für $x \to \infty$ gilt

$$X = \lim_{x \to \infty} 20\ \text{mm} \left(2 - \frac{7}{x + 2}\right) = 40\ \text{mm},$$

da der echt gebrochene Rest gegen Null geht.
Aus den so bestimmten 3 Punkten

x	1,5	-2	∞
$\frac{X}{\text{mm}}$	0	∞	40

kann die Projektion leicht ermittelt werden (Tafel 4). Es wird eine beliebige reguläre Leiter, z. B. mit $l_0 = 10$ mm, gewählt. Durch den Anfangspunkt 1,5 wird unter beliebigem Winkel, z. B. einem rechten, eine Gerade gelegt, die die projektive Teilung tragen soll. Eine Parallele dazu durch den Punkt $x = -2$ der regulären Leiter und eine Parallele zur regulären Leiter im Abstand 40 mm schneiden einander im Pol P der Projektion. Die letztere Parallele liefert den Punkt $\pm\infty$ auf der projektiven Leiter. Die gesamte projektive Leiter kann nun leicht mit der gewünschten Feinteilung projiziert werden. Insbesondere liefern die in Tafel 4 gestrichelt gezeichneten Projektionsstrahlen die oben berechneten Punkte. Die projektive Teilung ändert sich nicht, wenn eine andere Zeicheneinheit l_0 oder ein anderer Winkel zwischen den beiden Leitern gewählt wird.

Für die Konstruktion können auch andere als die benutzten Punkte herangezogen werden, wobei ähnlich vorzugehen ist, wie dies anschließend für die projektive Interpolation gezeigt wird.

Sind umgekehrt 3 Paare von zusammengehörigen Werten $(x;X)$ gegeben, so können nach (6) aus 3 Gleichungen die Konstanten A, B und C berechnet werden, so daß bis auf die willkürliche Zeicheneinheit die Gleichung der Leiter bestimmt ist.

Die projektive Leiter tritt in manchen Anwendungen, z. B. bei der WHEATSTONEschen Brückenschaltung, unmittelbar auf. Größere Bedeutung erlangt die projektive Verzerrung von ganzen Nomogrammen, wenn in bestimmten Bereichen die Genauigkeit einer Teilung vergrößert werden soll. Hier soll noch auf die wichtigste Anwendung beim Zwischenschalten von Werten in ungleichmäßig geteilten Leitern, die sogenannte **projektive Interpolation**, hingewiesen werden.

Vorgelegt sei eine grob geteilte Funktionsleiter, deren Abbildungsgesetz entweder unbekannt oder kompliziert ist. In Tafel 5 ist die senkrecht liegende Leiter nur mit den ganzzahligen Teilpunkten vorgegeben. Diese Leiter soll weiter unterteilt werden. Die Feinteilung kann näherungsweise nach der Gesetzmäßigkeit der projektiven Leiter vorgenommen werden. Die Genauigkeit ist dann immer noch wesentlich besser als bei linearer Interpolation.

Da eine projektive Leiter durch drei Punkte bestimmt ist, wird für jeweils drei Punkte der vorgegebenen Leiter das Zentrum für die Projektion einer beliebigen regulären Leiter konstruiert. Dazu wird in den Anfangspunkt 1 der gegebenen Leiter der gleichbezifferte Anfangspunkt einer regulären Leiter gelegt (vgl. Tafel 5), die unter beliebigem Winkel angetragen wird. Die Punkte 2 und 3 der regulären Leiter werden mit den gleichbezifferten Punkten der Funktionsleiter verbunden. Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen ist das Projektionszentrum P_1. Von diesem aus kann die Feinteilung leicht auf die senkrechte Leiter übertragen werden. Die reguläre Leiter ist aus Gründen der Genauigkeit mit einer solchen Maßeinheit zu wählen, daß ihre Gesamtlänge größer ist als der ihr entsprechende Bereich der gegebenen Leiter. Für die nächsten drei Punkte ist das Verfahren zu wiederholen. Nur wenn die gegebene Leiter selbst eine projektive ist, ist das Verfahren exakt. Dann braucht das Projektionszentrum nur einmal bestimmt zu werden und gilt für die gesamte Leiter.

AUFGABEN

6. Wie lautet die Gleichung für die untere logarithmische Teilung des normalen Rechenstabes (Teilungslänge 250 mm)? Für die Punkte $x = 2, 5, 8$ sind die Teilpunktabstände zu berechnen und am Stab nachzumessen.

7. Es ist eine gegenläufige reguläre Leiter mit $f(x) = -x$ für den Zahlenbereich von 10 bis 20 auf einer Länge von 80 mm anzulegen.

8. Eine Kubikleiter mit $f(x) = x^3$ ist auf einer Länge von höchstens 100 mm mit dem Zahlenbereich von 0 bis 5 zu entwerfen.

9. Für $f(x) = 10x - x^2$ ist eine Leiter im Bereich $0 \leqq x \leqq 10$ mit $X_{\max} = 75$ mm anzulegen.

10. Für $f(x) = \tan x°$ ist eine Leiter mit dem Wertebereich von 0° bis 60° auf einer Länge von höchstens 90 mm

    a) rechnerisch

    b) mit der der Tafel 2 entsprechenden Konstruktion

    anzulegen. Welche Feinteilung der Leiter ist möglich?

11. Es ist die projektive Leiter

$$X = 20\text{ mm}\,\frac{2x + 7}{2x - 12}$$

für den Bereich $-4 \leqq x \leqq 4$ zu konstruieren.

12. Zur Messung eines unbekannten Widerstandes R_x wird in der Elektrotechnik die WHEATSTONEsche Brückenschaltung verwendet (Bild 17). Längs eines Drahtes AB mit der Länge 1000 mm wird ein Schleifkontakt so lange verschoben, bis ein Galvanometer G keinen Anschlag anzeigt. Dann ergibt sich der unbekannte Widerstand

$$R_x = \frac{X}{Y} R_n,$$

wobei R_n ein bekannter Vergleichswiderstand ist. Wenn am Draht AB eine Teilung für die Zahlenwerte $x = \frac{X}{Y}$ angebracht wird, so ergibt sich R_x jeweils sofort durch Multiplikation aus diesem abgelesenen Wert mit R_n. Es ist die Beziehung zwischen der abgetragenen Länge X und dem anzuschreibenden Zahlenwert x aufzustellen und in die Normalform der Leitergleichung zu bringen. Von welcher Art ist diese Leiter? Die Teilung ist in einer Verkleinerung 1:10 zu konstruieren.

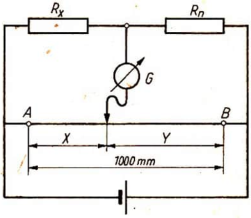


Bild 17

13. Beim Eichen eines Meßinstrumentes werden einzelne Punkte einer Teilung ermittelt (Bild 18). Die Teilung ist näherungsweise in Zehntel zu unterteilen.

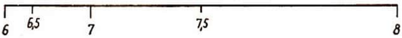


Bild 18

14. Die kubische Leiter aus Aufgabe 8 ist im Bereich $2 \leqq x \leqq 5$, ausgehend von den Teilpunkten zu ganzzahligem x, näherungsweise mit projektiver Interpolation auf Zehntel zu unterteilen. Diese Unterteilung ist mit berechneten Teilpunkten zu vergleichen.

1.1.4. Darstellung von Funktionen in verschiedenartigem Netz

1.1.4.1. Einfluß der Leiterteilung auf die Gestalt von Kurven

Während eine Variable auf einer Leiter dargestellt werden kann, sind zur Darstellung der beiden Variablen x und y einer Funktion f: $y = f(x)$ zwei Leitern nötig. Diese werden im allgemeinen senkrecht zueinander angeordnet und ergeben dann das cartesische Koordinatensystem.

Werden durch die Teilpunkte beider Leitern Parallelen zu der jeweils senkrecht stehenden Leiter gezogen, entsteht ein sogenanntes **Netz**, im einfachsten Fall z. B. das Millimeterpapier.
Im Gegensatz zum cartesischen Koordinatensystem können die beiden Leitern verschiedene Teilungen tragen. Dadurch wird natürlich die Form der dargestellten Kurven beeinflußt.
Werden auf beiden Achsen zwar die regulären Teilungen beibehalten, aber die Zeicheneinheiten unterschiedlich gewählt, so behalten die Kurven ihre grundsätzliche Gestalt bei und werden nur verzerrt. In den Bildern 19 und 20 sind eine Gerade, eine kubische Parabel und ein Kreis aus Wertetabellen einmal mit gleichen, ein zweites Mal mit unterschiedlichen Zeicheneinheiten auf den Achsen dargestellt. Dies führt zu einer Stauchung der Kurven, insbesondere ändert sich die Steigung der Geraden, und aus dem Kreis entsteht eine Ellipse. Diese Maßstabsänderung ist von Vorteil, wenn ohne Vergrößerung des Zeichenblattes in Richtung der y-Achse noch weitere Punkte der Kurven mit erfaßt werden sollen.
Werden dagegen auf den beiden Achsen unterschiedliche Arten der Achsenteilung gewählt, so bewirkt das eine grundsätzliche *Verformung der Kurve*, eine gekrümmte Kurve kann in eine Gerade übergehen oder umgekehrt. In den Bildern 21 und 22 sind eine Gerade

$$y = 2x - 3; \quad x \geqq 0$$

und eine Parabel

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 1; \quad x \geqq 0$$

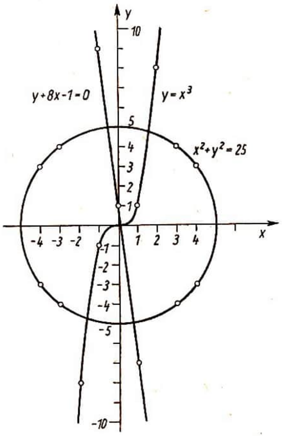


Bild 19

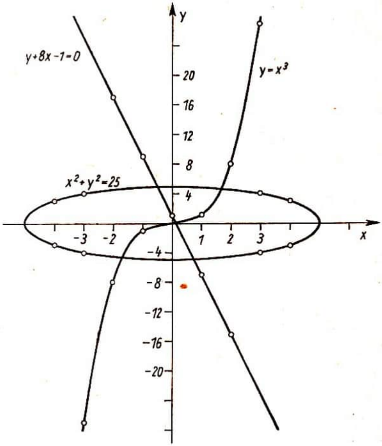


Bild 20

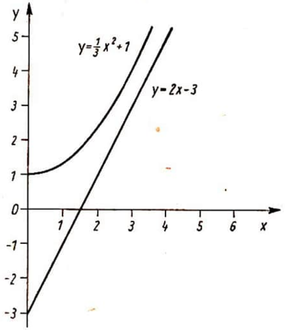


Bild 21

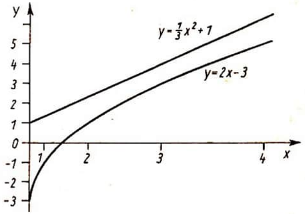


Bild 22

mit Hilfe ihrer Wertetabelle einmal in einem Koordinatensystem mit zwei regulär geteilten Achsen und dann in einem System mit einer regulären und einer quadratisch geteilten Achse dargestellt. Im ersten Fall ergibt sich als graphische Darstellung der linearen Funktion bekanntlich eine Gerade, als solche der quadratischen Funktion eine Parabel. Bei der zweiten Darstellung ist die Parabel zu einer Geraden gestreckt, aus der Geraden dagegen ist eine Parabel entstanden.
Bei der Herstellung von Nomogrammen ist es günstig, möglichst solche Kurven zu verwenden, die sich *einfach und genau zeichnen und ablesen* lassen. Am geeignetsten sind die *Geraden*. Es wird deshalb versucht, durch geeignete Wahl der Achsenteilungen die auftretenden Kurven als Geraden darzustellen (Geradstreckung der Kurven). Dies läßt sich bei jeder Kurve erreichen, allerdings ist der Vorteil beim Zeichnen der Kurven durch erhöhten Aufwand bei der Anlage der Leitern zu erkaufen. Häufig lohnt sich das erst, wenn in ein Netz eine größere Anzahl von Kurven einzuzeichnen ist.
Es ist anzustreben, einige wenige, aber vielseitig verwendbare Achsenteilungen zu benutzen. Dazu gehören neben den regulären Leitern vor allem die logarithmischen Leitern. Die entsprechenden **Funktionsnetze** oder **Gitterpapiere** sind mit verschiedenen Zeicheneinheiten im Handel erhältlich. Die wichtigsten sollen in den folgenden Abschnitten behandelt werden, wobei entsprechend der oben aufgestellten Forderung für jedes Netz die Gruppe von Funktionen angegeben werden soll, die in diesem Netz Geraden ergeben.

1.1.4.2. Millimeterpapier

Beim Millimeterpapier sind auf beiden Achsen reguläre Leitern aufgetragen, die nach (1) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= l_x(x - x_0) \\ Y &= l_y(y - y_0) \end{aligned} \tag{7}$$

beschrieben werden. Als Zeicheneinheiten sind dabei unter Beachtung von (2) nach Möglichkeit l_x und l_y mit 1, 2, 5, 10, 20, ... mm zu wählen. Die vorgedruckte Teilung ist gemäß der gewählten Zeicheneinheit zu beziffern.
Es ist aus der analytischen Geometrie bekannt, daß in einem solchen (cartesischen) Koordinatensystem alle linearen Funktionen mit der Gleichung

$$\boxed{y = mx + b} \tag{8}$$

Geraden ergeben, wobei m den Anstieg und b den Achsenabschnitt auf der Ordinatenachse bedeuten. Die durch die Funktionsgleichung (8) gegebene Funktion kann in einem durch die Gleichung (7) charakterisierten Millimeternetz graphisch dargestellt werden, wobei die *Punktkoordinaten x und y Zahlenwerte sind.*
Für die Längen X und Y, die als Abstand eines beliebigen Punktes P von den Achsen abgetragen werden müssen, ergibt sich nach Bild 23 eine der Funktionsgleichung (8) entsprechende Beziehung:

$$M = \frac{Y - B}{X}$$

$$\boxed{Y = MX + B} \qquad (9)$$

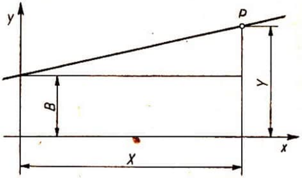


Bild 23

Dabei sind M und B wiederum Steigung bzw. Achsenabschnitt. Die Gleichungen (8) und (9) sind gleichbedeutend, wenn die Anfangspunkte beider Leitern gleich Null sind und die Zeicheneinheiten gleich groß gewählt werden. Deshalb braucht auch meist nicht zwischen den Beziehungen (8) (für die *Zahlenwerte*) und (9) (für die *Längen*) unterschieden zu werden. Wenn nun aber infolge der Anforderungen, die an ein Nomogramm gestellt werden, diese Bedingungen nicht eingehalten werden können, also $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ und $l_x \neq l_y$ gewählt werden müssen, ist zwischen den Koeffizienten m und b der Funktionsgleichung (8) und den die Zeichnung bestimmenden Größen M und B in (9) zu unterscheiden. Der Zusammenhang wird über die Leitergleichungen (7) hergestellt und könnte zur Herleitung von allgemeinen Formeln benutzt werden.

Praktisch genügt es jedoch,

1. aus dem gegebenen Wertebereich und dem Format die Zeicheneinheiten zu berechnen,
2. zwei beliebige Wertepaare auszuwählen und durch die sich aus ihnen ergebenden Punkte die Gerade zu legen.

Dabei muß aus Gründen der Genauigkeit allerdings noch beachtet werden, daß die entstehende Gerade die Koordinatenachsen nicht zu flach schneidet. Notfalls muß nachträglich die Zeicheneinheit einer Leiter geändert werden.
Auch die umgekehrte Aufgabe ist wichtig, wenn zu einer Zeichnung, die etwa aus einer Versuchsreihe entstanden ist, die zugehörige Funktionsgleichung bestimmt werden soll. Wenn auf Millimeterpapier eine Gerade entsteht, so liegt eine lineare Funktion zugrunde. Die Koeffizienten m und b der Funktionsgleichung (8) sind aus 2 geeigneten Wertepaaren $(x; y)$, die aus der Zeichnung abgelesen werden, zu ermitteln.

BEISPIEL

Die Beziehung

$$s = \left(16 \, \frac{d}{\mathrm{m}} + 8\right) \mathrm{mm}$$

zwischen der Wanddicke s eines gußeisernen Leitungsrohres und dem lichten Durchmesser d ist in einem Diagramm darzustellen. Der Durchmesser d soll zwischen 0 und 3,25 mm variieren. Das Diagramm soll ein Rechteck von etwa 80 mm Breite und 60 mm Höhe bilden.[1])

[1]) Aufgabenstellung nach [8]

Lösung: Mit den Zahlenwerten $x = \frac{d}{\mathrm{m}}$ und $y = \frac{s}{\mathrm{mm}}$ ergibt sich die Gleichung

$$y = 16x + 8.$$

Diese Gleichung ist von der Form (8). Laut Aufgabenstellung ist $x_0 = 0$, $x_n = 3{,}25$; daraus folgt durch Einsetzen $y_0 = 8$, $y_n = 60$. Die y-Leiter braucht also eigentlich erst bei 8 zu beginnen. Da im Verhältnis zum Gesamtumfang des Bereiches die Einsparung gering ist, werden um einer glatten Teilung willen folgende Intervalle gewählt:

$$0 \leqq x \leqq 3{,}25$$
$$0 \leqq y \leqq 60.$$

Nach (2) ergibt sich

$$l_x \leqq \frac{80\ \mathrm{mm}}{3{,}25} \approx 24{,}6\ \mathrm{mm}$$

$$l_y \leqq \frac{60\ \mathrm{mm}}{60} = 1\ \mathrm{mm}.$$

Mit $l_x = 20$ mm, $l_y = 1$ mm sind die Leitern in Tafel 6 angelegt. Die Gerade wird mit Hilfe zweier geeigneter, nicht zu nahe beieinander liegender Punkte mit den Koordinaten

$$x = 0, \quad y = 8$$
$$x = 2, \quad y = 40$$

gezeichnet. Die entstehende Gerade schneidet keine der Koordinatenachsen zu flach, so daß nachträglich nichts mehr an den Zeicheneinheiten geändert zu werden braucht.

1.1.4.3. Einfach-logarithmisches Papier

Beim **einfach-logarithmischen** Papier, auch **halblogarithmisches** oder **mm-lg-Papier** genannt, ist **eine Achse regulär**, die **andere logarithmisch** geteilt. Wenn die *Abszissenachse die lineare* ist, lauten die Gleichungen der Leitern

$$\begin{aligned} X &= l_x(x - x_0) \\ Y &= l_y(\lg y - \lg y_0) \end{aligned} \tag{10}$$

Bei handelsüblichem Papier ist die Zeicheneinheit l_y festgelegt, z. B. mit 40 mm, 62,5 mm, 90 mm, 100 mm, 125 mm, so daß die Wahl von l_y nur in gewissen Grenzen möglich ist. Für die günstigste Wahl von l_x gilt das in 1.1.4.2. Gesagte.
Entsprechend der Aufgabenstellung ist zu untersuchen, welche Funktionen im einfach-logarithmischen Netz Geraden ergeben. Für die Geraden gelten dabei wieder die in Bild 23 dargestellten Verhältnisse und die Gleichung (9) für die abgetragenen Längen. Um den gesuchten Zusammenhang $y = f(x)$ zu finden, werden die Gleichungen (10) in (9) eingesetzt, wobei zur Vereinfachung der Rechnung $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ angenommen wird. (Eine Verschiebung der Leitern ändert nichts am Charakter der dargestellten Funktion.)

$$Y = MX + B$$

$$l_y \cdot \lg y = M l_x x + B$$

$$\lg y = \left(M \frac{l_x}{l_y}\right) x + \frac{B}{l_y}$$

Mit den Abkürzungen

$$c = M \frac{l_x}{l_y}, \quad d = \frac{B}{l_y}$$

entsteht

$$\lg y = cx + d$$

oder $$y = 10^{cx+d} = 10^{cx} \cdot 10^d = (10^c)^x \cdot 10^d,$$

und mit den nochmaligen Abkürzungen

$$a = 10^c, \quad b = 10^d$$

ergibt sich endgültig

$$\boxed{y = b \cdot a^x} \tag{11}$$

Die Untersuchung zeigt also, daß eine **Exponentialfunktion auf einfach-logarithmischem Papier eine Gerade** ergibt. Deshalb werden zweckmäßigerweise die folgenden, in der Praxis häufig vorkommenden Funktionsgleichungen wie

$F_{S1} = F_{S2}\, e^{\mu\alpha}$ (Seilreibung),

$I = I_0 l^{-kx}$ (Absorption),

$n = n_0\, e^{-\frac{t}{t_0}}$ (Zerfallsgleichung),

$b_n = b_0\, q^n$ (Zinseszinsgleichung),

auf diesem Papier dargestellt, da sie dann als Geraden erscheinen.
Die Darstellung erfolgt wiederum aus 2 geeignet gewählten Punkten der entstehenden Geraden, nachdem die Zeicheneinheiten nach den üblichen Gesichtspunkten gewählt wurden. Sollen beispielsweise die durch die Funktionsgleichungen

$$y = 4^x; \quad y = e^x; \quad y = 2^x; \quad y = 1{,}5^x; \quad y = 1^x; \quad y = 0{,}5^x$$

gegebenen Funktionen im einfach-logarithmischen Netz dargestellt werden (Tafel 7), so wird zunächst $l_x = 10$ mm, $l_y = 40$ mm gewählt. Zum Zeichnen ist die Abszisse $x = 0$ zu empfehlen, da sie für jede Funktion $y = 1$ liefert. Für $x = 2$ ergeben sich als entsprechende Funktionswerte $y = 16$; $e^2 \approx 7{,}39$; 4; 2,25; 1; 0,25. Dadurch sind alle Geraden festgelegt, es entsteht ein Geradenbüschel.

In Tafel 8 sind in einem Koordinatensystem mit gleicher Teilung wie in Tafel 7 die Funktionen mit den Gleichungen

$$y = 0{,}5 \cdot 2^x; \quad y = 2^x; \quad y = 2 \cdot 2^x; \quad y = 8 \cdot 2^x$$

dargestellt. Als geeignete Punkte wurden gewählt

$$(0;0{,}5), \quad (0;1), \quad (0;2), \quad (0;8)$$

und $(2;2), \quad (2;4), \quad (2;8), \quad (-2;2)$

Die entstehenden Geraden bilden eine Schar von Parallelen.

Wie aus den Beispielen hervorgeht, beeinflußt die Basis a in Gleichung (11) die Steigung der entstehenden Geraden, während der Faktor b den Abschnitt auf der Ordinatenachse bestimmt.

Diese Tatsache wird später häufig benutzt werden. Bei allen Darstellungen ist zu beachten, daß auf der Ordinatenachse nur positive Werte aufgetragen werden können. Schwierigkeiten sind nicht zu erwarten, da Exponentialfunktionen nur für $a > 0$ definiert sind und für positives b auch immer positive Funktionswerte liefern.
Ist beim einfach-logarithmischen Papier die *Abszissenachse logarithmisch* und *die Ordinatenachse regulär* nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= l_x(\lg x - \lg x_0) \\ Y &= l_y(y - y_0) \end{aligned} \tag{12}$$

geteilt, so zeigt eine entsprechende Rechnung, daß die Funktionen, deren Funktionsgleichung

$$\boxed{y = a \lg x + b} \tag{13}$$

ist, als Geraden dargestellt werden können. Logarithmen mit beliebiger Basis lassen sich durch einen entsprechenden Faktor, der in a eingeht, in dekadische Logarithmen umrechnen. Damit können bei vertauschten Achsenteilungen erwartungsgemäß die Umkehrfunktionen zu (11) als Geraden dargestellt werden.

BEISPIELE

1. Eine Leidener Flasche wird durch einen Leinenfaden langsam entladen. Dabei wird folgende Abnahme des Potentials Φ ($[\Phi]$ = Volt) in der Zeit t ($[t]$ = Sekunde) beobachtet:[1])

$\frac{t}{\text{s}}$	0	30	60	90	120	150	180
$\frac{\Phi}{\text{V}}$	1640	1350	1120	930	780	660	550

Das Abnahmegesetz für das Potential ist aufzustellen.

[1]) Aufgabenstellung nach [5]

Lösung: Es muß zunächst versucht werden, die Meßreihe auf geeignetem Netz als Gerade zu erhalten. Dies glückt (annähernd) auf mm-lg-Papier (Tafel 9). Dabei ist

$$x = \frac{t}{\mathrm{s}}, \quad x_0 = 0, \quad l_x = 0{,}5 \text{ mm}$$

$$y = \frac{\Phi}{\mathrm{V}}, \quad y_0 = 2 \cdot 10^2, \quad l_y = 62{,}5 \text{ mm}.$$

Da sich auf einfach-logarithmischem Papier eine Gerade ergibt, gilt nach (11) eine Gesetzmäßigkeit der Form

$$y = b \cdot a^x.$$

Zur Bestimmung von a und b sind zwei Punkte zu wählen. Zunächst liegt es nahe, den Punkt mit $x = 0$ zu verwenden, da das die Rechnung vereinfacht. Der zweite Punkt darf aus Genauigkeitsgründen nicht zu nahe am ersten und muß möglichst genau auf der Geraden in Tafel 9 liegen. Durch Einsetzen der Punktkoordinaten

$$x = 0, \quad y = 1640$$

$$x = 150, \quad y = 660$$

in (11) findet man

$$1640 = b \cdot a^0 \rightarrow b = 1640$$

$$660 = b \cdot a^{150} = 1640 \cdot a^{150}$$

$$a = \sqrt[150]{\frac{660}{1640}}$$

Logarithmische Rechnung ergibt $a = 0{,}9939$. Damit ist

$$y = 1640 \cdot 0{,}9939^x$$

oder mit den physikalischen Größen

$$\underline{\underline{\Phi = 1640 \cdot 0{,}9939^{\frac{t}{\mathrm{s}}} \cdot \mathrm{V}.}}$$

2. $y = \ln x$ ist in geeignet gewähltem Netz als Gerade darzustellen.
Lösung: Um eine Darstellung als Gerade entsprechend Gleichung (13) im Netz (12) zu ermöglichen, erfolgt zunächst die Umformung in den dekadischen Logarithmus:

$$y = \ln x = 2{,}3026 \lg x.$$

Dies entspricht (13) mit $a = 2{,}3026$, $b = 0$. Die Darstellung in Tafel 10 erfolgt mit $l_x = 62{,}5$ mm, $l_y = 20$ mm, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ aus den Punkten $x = 1$, $y = 0$ und $x = 10$, $y = 2{,}30$.

1.1.4.4. Doppelt-logarithmisches Papier

Bei **doppelt-logarithmischem Papier**, kurz auch **logarithmisches** oder **lg-lg-Papier** genannt, tragen **beide Achsen logarithmische Teilungen**:

$$\begin{aligned} X &= l_x(\lg x - \lg x_0) \\ Y &= l_y(\lg y - \lg y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

Dabei ist meist $l_x = l_y$. Im allgemeinen liegen beide Zeicheneinheiten durch das verwendete Papier fest.
Um zu untersuchen, welche Funktionen auf lg-lg-Papier Geraden ergeben, werden die Gleichungen (14) in die Gleichung (9) der darzustellenden Geraden eingesetzt. Dabei wird zur Vereinfachung wieder $x_0 = y_0 = 1$ angenommen, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist.

$$Y = MX + B$$

$$l_y \lg y = M \cdot l_x \lg x + B$$

$$\lg y = \left(M \frac{l_x}{l_y}\right) \lg x + \frac{B}{l_y}$$

Mit den Abkürzungen

$$n = M \frac{l_x}{l_y} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{B}{l_y}$$

entsteht

$$\lg y = n \cdot \lg x + c$$

$$y = 10^{n \cdot \lg x + c} = (10^{\lg x})^n \cdot 10^c$$

und schließlich mit $b = 10^c$ und unter Beachtung von $10^{\lg x} = x$

$$\boxed{y = b \cdot x^n} \tag{15}$$

Das ist die Gleichung einer **Potenzfunktion**.

Im lg-lg-Netz werden also Parabeln und Hyperbeln vom n-ten Grad, die der Gleichung (15) mit $n > 0$ bzw. $n < 0$ genügen, zu Geraden gestreckt.

Die Darstellung auf logarithmischem Papier kann nur für positive Werte der Variablen vorgenommen werden, eine etwaige Vorzeichenrechnung ist gesondert durchzuführen.
In den Tafeln 11 und 12 sind einige Potenzfunktionen im lg-lg-Netz mit $l_x = l_y = 50$ mm dargestellt, wobei jeweils zwei Punkte zur Bestimmung der Geraden benutzt wurden.
Für die Potenzfunktionen mit den Funktionsgleichungen

$$y = x^3;\; y = x^2;\; y = x;\; y = \sqrt{x};\; y = \sqrt[4]{x};\; y = \frac{1}{\sqrt{x}};\; y = \frac{1}{x};\; y = \frac{1}{x^2}$$

eignet sich neben dem für alle gültigen Punkt (1;1) z. B. der Punkt mit $x = 2$, wozu für die verschiedenen Funktionen die y-Werte 8; 4; 2; 1,41; 1,19; 0,707; 0,5; 0,25 gehören. Es entsteht ein Geradenbüschel (Tafel 11).
Dagegen werden für die Potenzfunktionen mit den Funktionsgleichungen

$$y = 0{,}1\sqrt{x};\quad y = 0{,}5\sqrt{x};\quad y = \sqrt{x};\quad y = 3\sqrt{x}$$

Punkte mit der Abszisse $x = 1$ und den y-Koordinaten 0,1; 0,5; 1; 3 sowie Punkte mit der Abszisse $x = 4$ und den y-Koordinaten 0,2; 1; 2; 6 gewählt.
Es ergibt sich eine Schar von Parallelen (Tafel 12).

Als Ergebnis ist festzuhalten, daß der Exponent n in Gleichung (15) die Steigung der entstehenden Geraden bestimmt, während durch den Faktor b der Achsenabschnitt beeinflußt wird.

BEISPIEL

O. Lummer stellte an einer Glühlampe Versuche über die Abhängigkeit der ausgestrahlten Energie von der Temperatur des Kohlefadens an. Für die von der Oberfläche 1 cm² in 1 s ausgestrahlte Energie S, gemessen in cal, ergaben sich bei der Temperatur T ($[T] = °K$) folgende Werte:[1])

$\frac{T}{°K}$	1309	1471	1490	1565	1611	1680
$\frac{S}{cal}$	2,138	3,421	3,597	4,340	4,882	5,660

Diese Versuchsreihe ist nach Auftragen der Wertepaare auf lg-lg-Papier zu einer (angenäherten) Formel auszuwerten!

Lösung: Mit $x = \frac{T}{°K}$, $y = \frac{S}{cal}$,

und $l_x = l_y = 100$ mm sind die den Wertepaaren der Tabelle entsprechenden Punkte in ein doppelt-logarithmisches Netz (Tafel 13) eingetragen. Die Punkte bilden annähernd eine Gerade. Um die unbekannten Größen b und n der Gleichung (15) zu ermitteln, werden der erste und der letzte Punkt eingesetzt.

$$y = b \cdot x^n$$

$$2{,}138 = b \cdot 1309^n$$

$$5{,}660 = b \cdot 1680^n$$

Durch Logarithmieren ergeben sich die Gleichungen

$$\lg 2{,}138 = n \cdot \lg 1309 + \lg b$$

$$\lg 5{,}660 = n \cdot \lg 1680 + \lg b$$

1) Aufgabenstellung nach [5]

aus denen durch Subtraktion zunächst n bestimmt werden kann:

$$n = \frac{\lg 5{,}660 - \lg 2{,}138}{\lg 1680 - \lg 1309} = \frac{0{,}7528 - 0{,}3300}{3{,}2253 - 3{,}1169} = 3{,}9 \approx 4.$$

Schließlich folgt für b aus einer der beiden Gleichungen

$$b = \frac{5{,}660}{1680^4} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-13}.$$

Damit ist

$$y = 7{,}1 \cdot 10^{-13} \cdot x^4$$

oder mit den physikalischen Größen

$$\underline{\underline{S = 7{,}1 \cdot 10^{-13} \left(\frac{T}{°\mathrm{K}}\right)^4 \mathrm{cal}.}}$$

1.1.4.5. Beliebiges Funktionsnetz

Wenn auch die behandelten Funktionspapiere die Geradstreckung von zahlreichen Kurven gestatten und noch weitere, hier nicht erwähnte Netze (z. B. mit Sinus-Teilung) zur Verfügung stehen, so lassen sich doch wichtige Kurven nicht mit Hilfe von vorgedruckten Funktionspapieren in Geraden verwandeln.

Vor allem verbietet das Auftreten von additiven Größen in der Funktionsgleichung die Anwendung von logarithmischen Papieren.

Es bleibt dann nur die Möglichkeit, ein spezielles Netz im Einzelfall herzustellen, wie das am Beispiel der Funktion mit der Gleichung

$$y = 10x - x^2$$

gezeigt werden soll. Diese Funktion soll im Bereich $0 \leqq x \leqq 10$ als Gerade dargestellt werden.

Im cartesischen Koordinatensystem, das im Bild 24 mit $x_0 = y_0 = 0$, $l_x = 7{,}5$ mm, $l_y = 2$ mm angelegt ist, ergibt sich eine Parabel aus der folgenden Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Eine Geradstreckung in einem der bekannten Funktionsnetze ist wegen der Summenbildung nicht möglich.

Werden die Achsen jedoch nach den Gleichungen

$$X = l_x(10x - x^2)$$

$$Y = l_y \cdot y$$

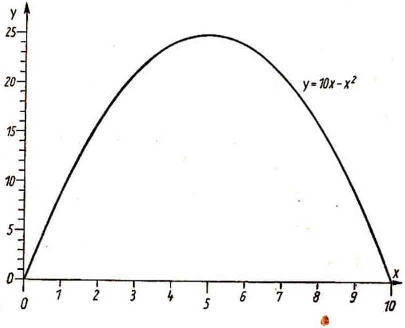


Bild 24

geteilt; so ergibt sich durch Einsetzen in die Funktionsgleichung

$$\frac{Y}{l_y} = \frac{X}{l_x}$$

oder

$$Y = \frac{l_y}{l_x} X.$$

Das ist eine lineare Beziehung und führt nach (9) zu einer Geraden. Wenn für die x-Teilung 75 mm zur Verfügung stehen, so liegen genau die Verhältnisse laut Aufgabe 9

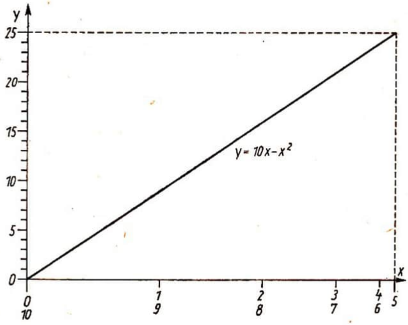


Bild 25

vor. Der größte Wert für $10x - x^2$ im betrachteten Intervall ist 25, also

$$l_x \leqq \frac{75 \text{ mm}}{25 - 0} = 3 \text{ mm}.$$

Mit dieser Zeicheneinheit wird im Bild 25 die x-Achse unterteilt, wobei die Leiter von 5 bis 10 wieder rückläufig ist. Die y-Teilung wird beibehalten. Die beiderseits des Maximums liegenden Parabeläste fallen in Bild 25 zu einer Geraden zusammen. Mit diesem Beispiel wird besonders deutlich, daß das Bildungsgesetz der Funktionsgleichung im Aufbau der Leiter berücksichtigt werden kann, so daß als graphische Darstellung eine Gerade entsteht.

Zusammenfassung

Eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x)$ wird in einem geeigneten Netz als Gerade dargestellt.

Netzart	Achsenteilungen	Funktionsgleichung
mm-mm-Netz	$X = l_x(x - x_0)$ $Y = l_y(y - y_0)$	$y = mx + b$
mm-lg-Netz	$X = l_x(x - x_0)$ $Y = l_y(\lg y - \lg y_0)$	$y = b \cdot a^x$
lg-mm-Netz	$X = l_x(\lg x - \lg x_0)$ $Y = l_y(y - y_0)$	$y = a \lg x + b$
lg-lg-Netz	$X = l_x(\lg x - \lg x_0)$ $Y = l_y(\lg y - \lg y_0)$	$y = b \cdot x^n$

AUFGABEN

15. In Tafel 14 ist die Abhängigkeit der Länge l eines Drahtes von seiner Belastung F dargestellt. Die (unterhalb der Proportionalitätsgrenze gültige) Beziehung zwischen diesen beiden Größen ist zu ermitteln.

16. Bei einem Versuch zum freien Fall wurde der von einem Körper zurückgelegte Weg nach jeder $^1/_{32}$ Sekunde gemessen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

$\frac{t}{\frac{1}{32}\,\mathrm{s}}$	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{s}{\mathrm{mm}}$	4,8	19,2	43,2	76,2	119,9	172,6	234,9

Es ist der Kurvenverlauf auf doppelt-logarithmischem Papier aufzunehmen und die Gleichung für das Fallgesetz

$$s = f(t)$$

aufzustellen.

17. Die Gleichung für die adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases

$$p \cdot V^{\varkappa} = p_0 \cdot V_0^{\varkappa}$$

ist in einem geeignet gewählten Funktionsnetz als Gerade darzustellen. Dabei ist $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen und für Luft gleich 1,4 zu setzen. Die Ausgangswerte sind $p_0 = 1$ at, $V_0 = 1$ dm³; als Bereiche der Darstellung sind zu wählen

$$0{,}1 \leqq \frac{p}{\text{at}} \leqq 25; \quad 0{,}1 \leqq \frac{V}{\text{dm}^3} \leqq 5.$$

Die Breite der Darstellung soll 100 mm nicht überschreiten.

18. Die Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

ist in einem geeigneten Netz für den Bereich $0{,}1 \leqq x < \infty$ als Gerade darzustellen.

19. a) Welche Funktion wird auf doppelt-logarithmischem Papier durch die Gerade, die durch die Punkte (1;1) und (2;4) geht, dargestellt?
 b) Welche Funktionen entsprechen den Parallelen zu dieser Geraden?

20. a) Auf geeignetem Funktionspapier ist die zur Funktionsgleichung $y = 2{,}7^x$ gehörende Kurve als Gerade zu zeichnen.
 b) Welche Funktionen entsprechen den Parallelen zu dieser Geraden?

1.2. Netztafeln

1.2.1. Einführung in den Aufbau von Netztafeln

Mit den in 1.1.4. bereitgestellten Hilfsmitteln kann nunmehr *der Aufbau* einer der beiden wichtigsten Gruppen von Nomogrammen, der *Netztafeln*, beschrieben werden. Dabei wird von der Darstellung von Funktionen in einem Netz ausgegangen. Während bisher ausschließlich Funktionen mit zwei Variablen behandelt wurden, liegt das *eigentliche Aufgabengebiet der Nomographie in der graphischen Darstellung von Funktionen mit drei und mehr Variablen*, wie sie in der Praxis häufig vorkommen (z. B. Schnittgeschwindigkeit einer Drehmaschine $v = \pi d n$, Normzeit in Abhängigkeit von Vorbereitungs- und Abschlußzeit, Stückzeit und Anzahl der produzierten Stücke $t_N = t_A + n t_s$ u. a.). Für die Darstellung einer Funktion mit drei Variablen ist an sich ein räumliches Koordinatensystem nötig. Da jedoch eine solche Form für den praktischen Gebrauch völlig ungeeignet ist, sind für Funktionen mit mehr als 2 Variablen *übersichtliche ebene* Nomogramme zu entwickeln.
Soll eine Funktion mit der Gleichung $y = f(x; z)$ und den drei Variablen x, y, z in der Ebene dargestellt werden, so ist das nur für *einzelne bestimmte Werte einer der Variablen* möglich. Wird z. B. für z der feste Wert c_1 eingesetzt, so stellt $y = f(x; c_1)$ eine

Funktionsgleichung für die beiden Variablen x und y dar, der eine Kurve in der Ebene entspricht. Für andere Werte $c_2, c_3, \ldots$ für z ergeben sich andere Kurven $y = f(x; c_2)$, $y = f(x; c_3)$, ..., so daß insgesamt eine Kurvenschar entsteht, die zusammen mit den zwei Scharen der Koordinatenlinien (Parallelen zu den Koordinatenachsen) eine **Netztafel** bildet.
Die Variable z, die jeweils für eine Kurve der Schar mit konstantem Wert belegt wird, heißt **Parameter**[1]) der Kurvenschar. Statt z kann auch x oder y als Parameter gewählt werden. Es ergeben sich dann im allgemeinen andere Scharen.
Wird beispielsweise in der Funktionsgleichung $y = x + z$ die Variable y als Parameter festgehalten, so folgt mit $y = C$

$$z = -x + C.$$

Das ist die Funktionsgleichung einer Geraden mit dem Anstieg $m = -1$ und dem Achsenabschnitt C. Für verschiedene Werte von C entsteht in einem x, z-Koordinatensystem eine Netztafel, die wegen ihrer Gestalt **Diagonaltafel** heißt (Bild 26). Sie enthält **drei Kurvenscharen**

die Schar der Parallelen zur Ordinatenachse	$x = \text{const.}$
die Schar der Parallelen zur Abszissenachse	$z = \text{const.}$
die Schar der unter 45° fallenden Geraden	$y = \text{const.}$

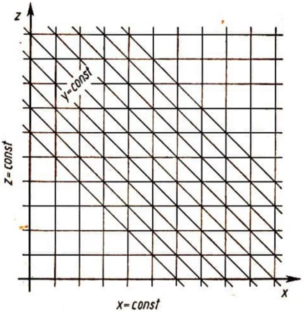


Bild 26

Auf jeder Linie der Schar besitzt eine der drei Variablen immer den gleichen Wert, weshalb die Linien auch manchmal **x-, y- oder z-Gleicher** heißen.

---

1) Parameter (griech.) Vergleichsmaß; math. Hilfsvariable oder hier und in den folgenden Abschnitten: unterscheidende Konstante in einer Funktionsschar (vgl. unbestimmtes Integral)

Eine Netztafel besteht stets aus einem solchen Netz von drei Kurvenscharen. Die Kurven können auch gekrümmt sein oder ungleichmäßige Abstände (Funktionsteilungen) haben. In jedem Punkt der Ebene schneiden einander drei Linien, je eine aus jeder Schar. Die drei Werte x, y und z genügen der zugrunde liegenden Funktionsgleichung, hier also der Gleichung $y = x + z$. Es ist natürlich unwesentlich, ob die durch den Punkt gehende Linie einer Schar eingezeichnet ist oder als Zwischenwert geschätzt werden muß.

Die im Bild 26 schematisch dargestellte Netztafel ist in Tafel 15 mit allen Teilungen ausgeführt, so daß mit ihr Aufgaben der Form $y = x + z$ gelöst werden können. Eingezeichnet sind die Beispiele $7 + 4 = 11$ und $3{,}4 + 8{,}9 = 12{,}3$, wobei von den Werten für x und z ausgegangen und das Ergebnis an den Enden der y-Gleicher abgelesen wird. Die im zweiten Beispiel nötige Interpolation ist ohne Schwierigkeit möglich.

Die behandelte Netztafel erfüllt alle Anforderungen, die an ein Nomogramm zu stellen sind: Sie läßt sich einfach und mit genügender Genauigkeit herstellen, ist übersichtlich und läßt sich leicht benutzen. Zwischenwerte können einfach ermittelt werden. Es ist selbstverständlich, daß der Aufwand für die Herstellung der Netztafel zur Lösung von so einfachen Berechnungen nicht gerechtfertigt ist, es sollen lediglich die wesentlichen Merkmale einer Netztafel an diesem einfachen Beispiel erläutert werden.

Wird auf die Funktionsgleichung $y = x \cdot z$ dasselbe Verfahren angewandt, so ergibt sich mit $y = C$ in der x, z-Ebene die Kurvenschar

$$z = \frac{C}{x}.$$

Das sind *gleichseitige Hyperbeln*, die entweder nach einer der bekannten Konstruktionen oder mit Hilfe einer Wertetabelle erzeugt werden müssen. Die Netztafel ist in Tafel 16 dargestellt, als Beispiele sind $7 \cdot 5 = 35$ und $6 \cdot 8{,}5 = 51$ eingezeichnet. Dieses Nomogramm erfüllt die obigen Forderungen *nicht*, die Herstellung ist schwierig und mit Ungenauigkeiten behaftet, die Interpolation ungenau.

Bei der Anlage einer Netztafel ist also anzustreben, daß *die dritte Schar aus Geraden* besteht. Dies kann durch geeignete Wahl des Parameters und der Teilungen auf den Koordinatenachsen in vielen Fällen erreicht werden. Außerdem ist zu beachten, daß das Interpolieren auf den Achsen stets einfacher und genauer möglich ist als zwischen den Linien der dritten Kurvenschar. Daher soll möglichst *die* Variable als Parameter gewählt werden, für die nur einzelne Werte erforderlich sind.

In den folgenden Abschnitten werden die analytischen Darstellungen der Funktionen mit drei Variablen hergeleitet, die in den behandelten Funktionsnetzen Netztafeln ergeben, in denen alle drei Scharen geradlinig sind. Dabei kann unmittelbar an 1.1.4. angeknüpft werden. Damit die dort hergeleiteten Formeln direkt übertragen werden können, soll zunächst vereinbart werden, daß die Variablen x und y immer auf der Abszissen- bzw. Ordinatenachse aufgetragen werden und die Variable z als Parameter gewählt wird. Später kann diese Einschränkung fallengelassen werden.

1.2.2. Netztafeln mit regulärem Netz

In einem regulären Netz, das meist unter Verwendung von Millimeterpapier hergestellt wird, kann nach 1.1.4.2. die lineare Funktion mit der Gleichung

$$y = mx + b \tag{8}$$

als Gerade dargestellt werden. Bei der Wahl verschiedener Werte m_i bzw. b_i für m bzw. b ergibt sich jedesmal eine Schar von Geraden, im ersten Fall ein Strahlenbüschel, im zweiten eine Schar von Parallelen (Bilder 27 und 28).

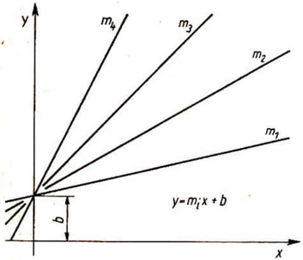


Bild 27

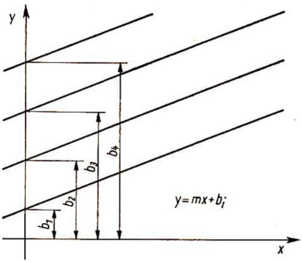


Bild 28

Es bestehen somit zwei Möglichkeiten, eine als Parameter behandelte dritte Variable z zu berücksichtigen.
Wird der Parameter z durch die Veränderlichkeit des Abschnitts b erfaßt und daher $b = Bz$ gesetzt, so folgt mit $m = A$ aus (8)

$$\boxed{y = Ax + Bz} \tag{16}$$

Diese Gleichung gibt an, welche Gruppe von Funktionen als Netztafeln im regulären Netz dargestellt werden kann. Sie heißt deshalb **Schlüsselgleichung** für die genannte Netzart. Es handelt sich bei (16) um Funktionen, in denen die Variablen x und z *durch Addition* verbunden sind, wobei noch beliebige konstante Faktoren A und B auftreten können. Für jeden Wert des Parameters z ergibt sich je eine Gerade mit anderem Achsenabschnitt (vgl. Bild 28). Es entsteht eine sogenannte **Parallelentafel**. Das im vorigen Abschnitt behandelte Beispiel $y = x + z$ gehört zu dieser Funktionsgattung. Trotz der Möglichkeit, zusätzliche Faktoren A und B berücksichtigen zu können, gilt auch hier die Feststellung, daß einfache Funktionen der Form (16) die Anlage eines Nomogramms nur selten erforderlich machen.

Von größerer Bedeutung für die Anwendungen ist dagegen die zweite Möglichkeit für die Berücksichtigung des Parameters. Dazu ist in (8) $m = Az$ und $b = B$ zu setzen:

$$\boxed{y = Axz + B} \tag{17}$$

Mit dieser Schlüsselgleichung sind Funktionen erfaßt, bei denen die Variablen x und z *durch Multiplikation* verbunden sind, wobei noch eine multiplikative und eine additive Konstante berücksichtigt werden. Für jeden Wert des Parameters z ergibt sich eine Gerade mit veränderter Steigung. Entsprechend den Verhältnissen von Bild 27 entsteht eine **Strahlentafel**. Da das Interpolieren für die Variable z schwierig ist (zwischen Geraden verschiedener Steigung lassen sich schwer Zwischenwerte schätzen), eignet sich diese Netztafel vor allem für solche Funktionen, bei denen für z nur einzelne Werte benötigt werden.
Es ist noch zu bemerken, daß in den Schlüsselgleichungen statt z ein beliebiger Term $f(z)$ stehen kann, so daß z. B. auch eine Funktion mit der Gleichung $y = Axz^n + B$ dargestellt werden kann. Da bei konstantem z auch $f(z)$ eine Konstante ist, ändert sich dadurch nur die Lage der einzelnen Linien der Kurvenschar zueinander.
Auch wenn der Parameter z in beiden Summanden der Schlüsselgleichung auftritt, z. B. $y = Axz + Bz$, ändert sich nichts Wesentliches, es liegt dann allerdings weder eine reine Strahlentafel noch eine reine Parallelentafel vor.
Wenn nun zu einer Funktion der Form (16) oder (17) eine Netztafel zu entwerfen ist, so werden zunächst aus den geforderten Bereichen für die Variablen nach den in 1.1.3. gegebenen Richtlinien die Achsenteilungen festgelegt und anschließend für jeden geforderten Wert des Parameters aus 2 Punkten (oder Steigung und Achsenabschnitt) die Geraden der Schar bestimmt.

BEISPIELE

1. Die Grundformel der Prozentrechnung ist als Netztafel darzustellen.

Lösung: Der Prozentwert P ergibt sich aus dem Grundwert G und dem Prozentsatz p nach der Beziehung

$$P = \frac{p}{100}\,G.$$

Wenn es sich z. B. um die Bestimmung der Zinsen von Sparkasseneinlagen mit bestimmten, festen Prozentsätzen handelt, liegt es auf der Hand, p als Parameter zu wählen. Mit den Zahlenwerten

$$x = \frac{G}{\text{MDN}}, \quad y = \frac{P}{\text{MDN}}, \quad z = \frac{p}{\%}$$

entsteht die Gleichung

$$y = \frac{1}{100}\,xz.$$

Das entspricht (17) mit $A = \frac{1}{100}$, $B = 0$ und führt zu einer Strahlentafel im Millimeternetz. Nach der Wahl geeigneter Zeicheneinheiten, auf die hier wegen ihrer Einfachheit nicht weiter eingegangen werden soll (vgl. Tafel 17), werden die Geraden des Büschels aus je 2 Punkten gezeichnet, wobei die Tatsache verwendet wird, daß jeder Strahl durch den Ursprung geht. Für jeden benötigten Wert des Zinsfußes ist nur noch ein zweiter Punkt zu ermitteln, z. B.

$$z = 0{,}5\,, \quad x = 5000 \;\rightarrow\; y = 25\,.$$

Ablesebeispiel in Tafel 17: $G = 3600$ MDN, $p = 3\%$ $\rightarrow$ $P = 108$ MDN.
Auf entsprechende Weise lassen sich andere Anwendungen der Grundformel der Prozentrechnung, z. B. die Normerfüllung, darstellen.

2. Es ist ein Nomogramm für die Schnittgeschwindigkeit

$$v = \pi d n$$

im regulären Netz zu entwerfen. Die Drehzahlen sind dabei Werte der abgeleiteten Normzahlreihe R 20/3 mit dem Stufensprung $\varphi = 1{,}4$:

$$n = 112,\ 160,\ 224,\ 315,\ 450,\ 630,\ 900,\ 1250\ \mathrm{min}^{-1}\,.$$

Folgende Bereiche für d und v sind zu berücksichtigen

$$0 \leqq \frac{d}{\mathrm{mm}} \leqq 160\,, \quad 0 \leqq \frac{v}{\mathrm{m\,min}^{-1}} \leqq 200\,.$$

Für die waagerechte bzw. senkrechte Leiter steht eine Gesamtlänge von 160 mm bzw. 100 mm zur Verfügung.
Als Beispiele sind einzuzeichnen:
Beim Abdrehen einer Welle mit $d = 80$ mm soll eine Schnittgeschwindigkeit von $v = 120\ \mathrm{m\,min}^{-1}$ nicht überschritten werden. Welche Drehzahl ist zu wählen?
Welche Schnittgeschwindigkeit entsteht, wenn eine Welle vom Durchmesser $d = 150$ mm mit einer Drehzahl $n = 112\ \mathrm{min}^{-1}$ bearbeitet wird?

Lösung: Die Umformung der Größengleichung für die geforderten Einheiten ergibt (vgl. Lösung der Aufgabe 1)

$$\frac{v}{\mathrm{m\,min}^{-1}} = \frac{\pi}{1000} \cdot \frac{d}{\mathrm{mm}} \cdot \frac{n}{\mathrm{min}^{-1}}\,.$$

Es ist ratsam, die Drehzahl n als Parameter zu wählen, da von ihr nur einzelne bestimmte Werte benötigt werden, während für die beiden anderen Variablen alle Zwischenwerte in den geforderten Intervallen auftreten können. Mit

$$x = \frac{d}{\mathrm{mm}}\,, \quad y = \frac{v}{\mathrm{m\,min}^{-1}}\,, \quad z = \frac{n}{\mathrm{min}^{-1}}$$

folgt

$$y = \frac{\pi}{1000}\,xz\,.$$

Das ist eine Funktion der Form (17) mit $A = \frac{\pi}{1000}$, $B = 0$, die zu einer Strahlentafel führt.

Für die Zeicheneinheiten auf den Achsen gelten nach (2) die Ungleichungen

$$l_x \leqq \frac{160\ \text{mm}}{160 - 0} = 1\ \text{mm}$$

$$l_y \leqq \frac{100\ \text{mm}}{200 - 0} = 0{,}5\ \text{mm}.$$

Mit diesen Zeicheneinheiten werden die Achsenteilungen in Tafel 18 angelegt. Zur Ermittlung der Strahlenschar wird außer $x = 0$, $y = 0$ für jeden Strahl je ein weiterer Punkt berechnet, z. B.

$$x = 50, \quad z = 1250 \;\rightarrow\; y = 196{,}4.$$

Dabei ist zu beachten, daß aus Genauigkeitsgründen solche Punkte zur Festlegung der Strahlen benutzt werden, die möglichst weit vom Anfangspunkt entfernt sind.
Im fertigen Nomogramm sind die Beispiele eingetragen. Im ersten Fall führen die Pfeile für $d = 80$ mm und $v = 120\ \text{m}\,\text{min}^{-1}$ nicht direkt auf eine Linie für n. Da das vorgegebene v nicht überschritten werden darf, wird die kleinere Drehzahl $n = 450\ \text{min}^{-1}$ gewählt. Das zweite Beispiel führt auf $v \approx 53\ \text{m}\,\text{min}^{-1}$.

1.2.3. Netztafeln mit einfach-logarithmischem Netz

In 1.1.4.3. wurde gezeigt, daß in einem einfach-logarithmischen Netz mit *regulärer Abszissen-* und *logarithmischer Ordinatenachse* eine Exponentialfunktion

$$y = b \cdot a^x \tag{11}$$

für *konstantes a und b eine Gerade* ergibt. Dabei zeigte sich, daß die Basis a die Steigung der Geraden beeinflußt, während der Faktor b den Abschnitt auf der Ordinatenachse bestimmt. Es gibt auch hier wieder zwei Möglichkeiten, den Parameter z einer Funktion mit drei Variablen zu berücksichtigen, indem *entweder der Faktor b oder die Basis a variiert wird.* Dementsprechend ergeben sich zwei Schlüsselgleichungen für Netztafeln im **mm-lg-Netz.** Im ersten Fall lassen sich mit $b = Az$ Gesetzmäßigkeiten von der Form

$$\boxed{y = A \cdot a^x \cdot z} \tag{18}$$

als **Parallelentafel** darstellen. Dagegen ergibt sich mit $a = z$ und $b = A$ aus (11)

$$\boxed{y = A \cdot z^x} \tag{19}$$

Da die veränderliche Basis die Steigung der Geraden beeinflußt, entsteht eine **Strahlentafel.**
In beiden Fällen handelt es sich um *Exponentialfunktionen.* Während bei (18) die Basis konstant ist und die Variable z als Faktor auftritt, kann mit (19) eine veränder-

liche Basis erfaßt werden. Bekanntlich können für y nur positive Werte auf der logarithmischen Leiter aufgetragen werden; etwaige Vorzeichenrechnungen sind gesondert durchzuführen.
Bei *logarithmischer Abszissen-* und *regulärer Ordinatenachse* (**lg-mm-Netz**) folgt entsprechend aus (13), daß Funktionsgleichungen

$$\boxed{y = A \lg x + Bz} \tag{20}$$

als **Parallelentafel** und

$$\boxed{y = Az \lg x + B} \tag{21}$$

als **Strahlentafel** darstellbar sind.
Über die Erfassung eines Terms $f(z)$ statt des Parameters z und über die Anlage des Nomogramms gilt das in 1.2.2. Gesagte.

BEISPIELE

1. Es sind zwei Nomogramme für die Ermittlung des Zeitwertes W einer Anlage von $W_0 = 800$ TMDN Beschaffungswert bei einer jährlichen Abschreibung von $p = 10, 15, 20, 25\%$ zu entwerfen. Beim ersten Nomogramm soll eine konstante, auf den ursprünglichen Beschaffungswert bezogene Abschreibung zugrunde gelegt werden. Beim zweiten Nomogramm ist die Abschreibung auf den am Jahresanfang gültigen Zeitwert zu beziehen.

   Lösung: Im ersten Fall liegt die Beziehung vor

$$W_1 = W_0 - W_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = W_0\left(1 - \frac{pn}{100}\right).$$

   Dabei bedeutet n die Anzahl der Jahre.
   Mit $\frac{p}{\%} = z$ als Parameter sowie $x = n$, $y = \frac{W_1}{\text{TMDN}}$ und $W_0 = 800$ TMDN ist

$$y = 800\left(1 - \frac{xz}{100}\right) = 800 - 8xz.$$

   eine lineare Funktion der Form (17) mit $A = -8$, $B = 800$, die nach den Richtlinien des vorigen Abschnittes als Strahlentafel im mm-Netz dargestellt werden kann (Tafel 19). Die Wahl der Zeicheneinheiten bereitet keine Schwierigkeiten. Die Leiter für n braucht natürlich nur den Bereich der Zeit zu erfassen, in dem der Anlagewert abgeschrieben ist (bis $n = 10$). Alle Geraden gehen durch den Punkt $x = 0$, $y = 800$. Auf jeder Geraden wird ein weiterer Punkt berechnet, z. B. für $z = 20$, $x = 5 \rightarrow y = 0$.
   Im zweiten Fall ist der Wert der Anlage nach einem Jahr auf

$$W_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

abgesunken. Dies hat für das zweite Jahr als Anfangswert zu dienen, der wiederum mit dem Faktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ zu multiplizieren ist, so daß sich nach zwei Jahren der Wert

$$W_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

ergibt. Nach n Jahren ist demnach der Zeitwert

$$W_2 = W_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Mit entsprechenden Abkürzungen wie oben gilt

$$y = 800 \left(1 - \frac{z}{100}\right)^x.$$

Das ist eine Exponentialfunktion, bei der auch die Basis veränderlich ist, so daß sie der Form (19) entspricht. Allerdings tritt entsprechend den Bemerkungen in 1.2.2. an die Stelle des Parameters z ein Term $f(z) = 1 - \frac{z}{100}$. Das ändert aber nichts Grundsätzliches. Die Darstellung hat im mm-lg-Netz zu erfolgen. Die Wertebereiche werden wie in Tafel 19 gewählt, wobei allerdings die logarithmische y-Teilung nicht bei Null beginnen kann. In Tafel 20 wird ein logarithmisches Netz mit $l_y = 62{,}5$ mm verwendet. Für $x = 0$ sowie für jedes z gilt wieder $y = 800$. Zum Zeichen der Geraden des Büschels ist je ein weiterer geeigneter Punkt durch logarithmische Rechnung zu ermitteln, z. B. ist für $z = 20$ und für $x = 10$

$$y = 800 \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{10} = 800 \cdot 0{,}8^{10} = 86{,}3.$$

Der Vergleich der beiden Nomogramme (Tafeln 19 und 20) zeigt, daß für das erste Jahr die Ergebnisse gleich sind, da auch die Anfangswerte für die Abschreibungen übereinstimmen. Dann aber geht die Abschreibung im zweiten Fall viel langsamer vor sich, während bei konstanter Abschreibung schon nach einigen Jahren der Wert Null erreicht ist.

Ablesebeispiel: $n = 8$, $p = 10\%$, $W_1 = 160$ TMDN
$W_2 = 340$ TMDN.

2. Die Gleichung der Seilreibung lautet

$$F_{S1} = F_{S2} \cdot e^{\mu\alpha}.$$

Dabei ist F_{S1} die Kraft, die zum Heben einer Last F_{S2} erforderlich ist, wenn das Seil um einen Pfosten geschlungen ist (Bild 29). α ist der Umschlingungswinkel im Bogenmaß, μ der Reibungskoeffizient.

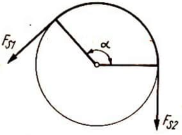


Bild 29

a) Für $\mu = 0{,}3$ ist eine Netztafel für die Bereiche

$$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi, \qquad 1 \leqq \frac{F_{S_2}}{\text{kp}} \leqq 10$$

zu entwerfen, deren Breite 120 mm und deren Höhe 80 mm nicht übersteigen soll.

b) Eine zweite Netztafel soll für das Verhältnis $\frac{F_{S_1}}{F_{S_2}}$ in Abhängigkeit von μ und α in den Bereichen

$$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi, \qquad 0{,}1 \leqq \mu \leqq 0{,}6$$

mit den gleichen Abmessungen wie vorher hergestellt werden.

Lösung:

a) Für $\mu = 0{,}3$ und mit der Einheit Kilopond für die Kräfte gilt

$$\frac{F_{S_1}}{\text{kp}} = \frac{F_{S_2}}{\text{kp}} \cdot e^{0,3\alpha}$$

und mit den Zahlenwerten

$$x = \alpha, \qquad y = \frac{F_{S_1}}{\text{kp}}, \qquad z = \frac{F_{S_2}}{\text{kp}}$$

$$y = (e^{0.3})^x \cdot z.$$

Das ist ein Gesetz der Form (18) mit $A = 1$, $a = e^{0,3} = 1{,}35$. Die Netztafel ist damit auf mm-lg-Papier zu entwerfen und ergibt eine Parallelentafel. Aus den angegebenen Intervallen für x und z folgt aus der vorliegenden Gleichung

$$x_0 = 0, \qquad z_0 = 1 \;\rightarrow\; y_0 = 1$$
$$x_n = 2\pi, \qquad z_n = 10 \;\rightarrow\; y_n \approx 66.$$

Für y wird deshalb der Bereich $1 \cdots 100$ gewählt. Wegen der vorgegebenen Höhe ist ein Papier mit $l_y = 40$ mm geeignet. Die Variable x wird auf der regulären Abszissenachse mit

$$l_x = \frac{120 \text{ mm}}{2\pi}$$

abgetragen (Tafel 21). Zur Bestimmung der Geraden der Schar wird zunächst die Tatsache verwendet, daß aus $x = 0$ folgt $y = z$, d. h., die Teilungen für F_{S_1} und F_{S_2} stimmen am linken Rand der Tafel überein (das stellt auch eine gute Hilfe für die Interpolation von z dar). Ein weiterer Punkt ist durch logarithmische Rechnung zu ermitteln:

$$x = 2\pi, \qquad z = 1 \;\rightarrow\; y = 1{,}35^{2\pi} \approx 6{,}59.$$

Die übrigen Linien der Schar können durch Parallelverschiebung erhalten werden.

Ablesebeispiel: $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ (= 150°), $F_{S_2} = 8$ kp $\rightarrow$ $F_{S_1} = 17{,}5$ kp.

b) Für die zweite Aufgabenstellung wird die vorgelegte Gleichung in der Form

$$\frac{F_{S_1}}{F_{S_2}} = (e^{\mu})^{\alpha}$$

geschrieben und ergibt mit

$$x = \alpha, \quad y = \frac{F_{S_1}}{F_{S_2}} \quad \text{und} \quad z = \mu$$

eine Gleichung der Gestalt (19)

$$y = (e^z)^x.$$

Dabei ist $A = 1$, und statt z steht $f(z) = e^z$. Das Nomogramm läßt sich also auf mm-lg-Papier als Strahlentafel darstellen. Aus den vorgeschriebenen Intervallgrenzen für x und z ergibt sich für y

$$x_0 = 0, \quad z_0 = 0{,}1 \rightarrow y_0 = 1$$
$$x_n = 2\pi, \quad z_n = 0{,}6 \rightarrow y_n \approx 43{,}4.$$

Wie vorher werden der Bereich $1 \cdots 100$ für y und dieselben Zeicheneinheiten gewählt (Tafel 22). Für alle Strahlen gilt $x = 0$, $y = 1$. Weitere Punkte sind logarithmisch zu berechnen, z. B.

$$x = 2\pi, \quad z = 0{,}1 \rightarrow y = (e^{0,1})^{2\pi} = e^{0,2\pi} \approx 1{,}87.$$

Ablesebeispiel: $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\mu = 0{,}3 \rightarrow \frac{F_{S1}}{F_{S2}} = 2{,}19.$

Das Beispiel entspricht genau demjenigen, das in Tafel 21 eingetragen wurde.

1.2.4. Netztafeln mit doppelt-logarithmischem Netz

Analog zu den Betrachtungen in den vorangegangenen Abschnitten folgen aus der Gleichung

$$y = b \cdot x^n \tag{15}$$

in 1.1.4.4. für das **lg-lg-Netz** die Schlüsselgleichungen für Netztafeln, wenn der Faktor b oder der Exponent n veränderlich angesetzt wird.
Im ersten Fall entsteht mit $b = Az$

$$\boxed{y = Ax^n \cdot z} \tag{22}$$

die **Schlüsselgleichung für eine Parallelentafel.**
Werden dagegen in (15) für den Exponenten n verschiedene Werte zugelassen, ergibt sich mit $b = A$, $n = z$

$$\boxed{y = Ax^z} \tag{23}$$

als **Schlüsselgleichung einer Strahlentafel.** Diese Funktion entspricht in ihrem Aufbau der Gleichung (19), es ist jedoch die Bedeutung des Parameters mit der der unab-

hängigen Variablen vertauscht. Da sich Zwischenwerte für den Parameter schlecht ablesen lassen, wird diejenige Variable als Parameter gewählt, von der nur einzelne Werte auftreten. Je nachdem, ob diese Größe als Basis oder Exponent auftritt, ist (19) oder (23) als Grundlage für die Netztafel zu wählen.
Auch bei der Darstellung im lg-lg-Netz ergibt sich die Notwendigkeit, etwaige Vorzeichenrechnungen gesondert durchzuführen.

BEISPIELE

1. Die Rentabilitätsziffer R eines Betriebes ist das Verhältnis von Gewinn G und Gesamtselbstkosten K ausgedrückt in Prozenten. Für diese Funktion sind mit Werten von G bis 1500,— MDN, von K bis 4000,— MDN und von R bis 100% die möglichen verschiedenartigen Netztafeln aufzustellen und kritisch miteinander zu vergleichen.

Lösung: Die Funktion lautet

$$R = \frac{100\,G}{K}.$$

Es ist sofort ersichtlich, daß von den Schlüsselgleichungen (16) bis (23) nur die Gleichungen (17) und (22) in Betracht kommen. (16) entfällt, da die Variablen nicht durch Addition verbunden sind. (18), (19) und (23) setzen veränderliche Exponenten, (20) und (21) logarithmische Funktionen voraus.

a) Um die vorliegende Funktion in die Gleichung (17) zu überführen, wird umgeformt in

$$G = \frac{1}{100}\,KR.$$

Mit $z = \frac{R}{\%}$ als Parameter und $x = \frac{K}{\mathrm{MDN}}$, $y = \frac{G}{\mathrm{MDN}}$ folgt

$$y = \frac{1}{100}\,xz.$$

Das entspricht (17) mit $A = \frac{1}{100}$, $B = 0$. Die Darstellung ergibt danach eine *Strahlentafel im regulären Netz.* Wenn das Nomogramm auf einem Blatt 80 mm mal 80 mm untergebracht werden soll, gelten für die Zeicheneinheiten nach (2) die Ungleichungen

$$l_x \leqq \frac{80\ \mathrm{mm}}{4000} = 0{,}02\ \mathrm{mm}$$

$$l_y \leqq \frac{80\ \mathrm{mm}}{1500} = 0{,}053\ \mathrm{mm},$$

die mit $l_x = 0{,}02$ mm und $l_y = 0{,}05$ mm erfüllt werden. Das führt zu den Achsenteilungen in Tafel 23. Für den Parameter werden die Linien für 10, 20, ..., 100 eingetragen, die alle durch den Ursprung gehen. Die Bestimmung von weiteren Punkten und damit das Einzeichnen der Strahlenschar ist ohne Schwierigkeiten möglich.
Ablesebeispiel: $K = 1600$ MDN, $G = 1200$ MDN $\rightarrow$ $R = 75\%$.

b) Mit

$$x = \frac{K}{\text{MDN}}, \qquad y = \frac{R}{\%}, \qquad z = \frac{G}{\text{MDN}}$$

geht die vorgelegte Gleichung in

$$y = 100\, x^{-1} \cdot z$$

über, die mit $A = 100$, $n = -1$ der Gleichung (22) entspricht.
Die Darstellung im doppelt-logarithmischen Netz hängt in bezug auf die Zeicheneinheiten von dem zur Verfügung stehenden Papier ab. Es möge ein Netz mit $l_x = l_y = 62{,}5$ mm benutzt werden (Tafel 24). Da keine logarithmische Teilung mit Null beginnen kann, müssen die Variablen demnach mit einer passend gewählten Zehnerpotenz beginnen, x z. B. mit 100, y mit 10. Die Linien für den Parameter werden aus jeweils zwei Punkten bestimmt (oder aus jeweils einem Punkt, durch den sie parallel zur ersten Linie zu legen sind), z. B.

$$z = 200, \qquad x = 200, \quad y = 100$$
$$x = 2000, \quad y = 10$$

Ablesebeispiel wie bei a).

c) Die vorliegende Gleichung kann auch in der unter a) hergeleiteten Form nach (22) als *Parallelentafel* im lg-lg-Netz dargestellt werden, wobei wie bei a) R als Parameter auftritt. Die Darstellung erfolgt auf demselben logarithmischen Papier wie bei b), für die Wahl der Wertebereiche und das Zeichnen der Geradenschar gelten ähnliche Überlegungen wie dort. Das Ergebnis zeigt Tafel 25. Ablesebeispiel wie bei a) und b).
Ein Vergleich der Tafeln 23, 24 und 25 für dieselbe Aufgabe zeigt zunächst einen Vorteil der regulär geteilten Leitern hinsichtlich gleichbleibender Genauigkeit im ganzen Bereich, während bei den logarithmischen Leitern ein gewisser Bereich gar nicht darstellbar ist, andere Gebiete zusammengedrückt sind. Dagegen besitzen die Tafeln 24 und 25 bessere Interpolationsmöglichkeiten für den Parameter, zumal sich Zwischenwerte des Parameters leicht aus der logarithmischen Teilung auf der Senkrechten $x = 10^3$ bestimmen lassen, die von den Parameterlinien geschnitten wird. Deshalb wird den logarithmischen Netztafeln der Vorzug zu geben sein, wobei noch auf Grund der speziellen Aufgabenstellung (K und G gegeben, R gesucht bzw. K und R gegeben, G gesucht) zwischen den Tafeln 24 und 25 zu wählen ist.

2. Für die Zustandsgleichung eines idealen Gases

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

ist eine Netztafel zu entwerfen. Es soll dabei von einer Gasmenge ausgegangen werden, die bei einer Temperatur von $T_0 = 200\,°\text{K}$ und einem Druck von $p_0 = 1$ at ein Volumen $V_0 = 2\ \text{dm}^3$ besitzt. Als Parameter ist die Temperatur zu wählen. Die Linien für $T = \text{const}$ stellen dann die üblichen Isothermen dar. Für p und V sind die Intervalle

$$0{,}2 \leq \frac{p}{\text{at}} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{V}{\text{dm}^3} \leq 10$$

zu wählen.

Lösung: Die Zustandsgleichung kann in der Form

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

geschrieben werden. Das Einsetzen der gegebenen Größen und anschließendes Umformen ergibt

$$\frac{pV}{T} = \frac{1\,\text{at} \cdot 2\,\text{dm}^3}{200\,°\text{K}}$$

$$\frac{p}{\text{at}} = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{T}{°\text{K}}\right) \cdot \left(\frac{V}{\text{dm}^3}\right)^{-1}.$$

Mit $x = \frac{V}{\text{dm}^3}$, $y = \frac{p}{\text{at}}$ und $z = \frac{T}{°\text{K}}$ als Parameter entsteht die Gleichung

$$y = \frac{1}{100}\, x^{-1} z.$$

Sie entspricht (22) mit $A = \frac{1}{100}$, $n = -1$ und ergibt eine *Parallelentafel*. Die Netztafel ist also auf lg-lg-Papier anzulegen, das mit $l_x = l_y = 100$ mm verwendet wird (Tafel 26). Die erste Gerade der Schar für den Parameter mit $z = 200$ wird aus den Punkten mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 2$ und $x = 10$, $y = 0{,}2$ gezeichnet, die übrigen parallel dazu durch Punkte mit $x = 10$ (rechter Rand der Netztafel).

Ablesebeispiel: $p = 0{,}8$ at, $T = 250\,°\text{K} \rightarrow V = 3{,}1\,\text{dm}^3$.

1.2.5. Netztafeln mit beliebigem Netz

Die bisher behandelten Funktionsnetze sind wohl die am meisten benutzten, doch führt ihre Anwendung nur in den Fällen zu einer geradlinigen Kurvenschar für den Parameter, in denen die darzustellende Funktionsgleichung einer der Schlüsselgleichungen (16) bis (23) entspricht. Ist dies nicht der Fall, so muß in Kauf genommen werden, daß die dritte Kurvenschar krummlinig ist. Das Beispiel der Hyperbeltafel in 1.2.1. hat die Schwierigkeiten der Anlage und der Benutzung gezeigt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, ein spezielles Funktionsnetz zu konstruieren und dabei durch geeignete Wahl der Art der Achsenteilungen eine lineare Beziehung zwischen den dargestellten Längen herzustellen. Dies wurde in 1.1.4.5. für eine Funktion mit zwei Variablen behandelt. In der entstehenden Beziehung tritt jetzt noch die dritte Variable z als Parameter auf, wodurch eine *Schar von Geraden* erzeugt wird.
An einigen Beispielen soll das Verfahren erläutert werden:

a) $y = ax^2 + bz$

Erforderliche Achsenteilungen $X = l_x \cdot x^2$, $Y = l_y \cdot y$

Einsetzen ergibt $\frac{Y}{l_y} = a\,\frac{X}{l_x} + bz$

$$Y = \frac{l_y a}{l_x} X + b l_y z = AX + Bz.$$

b) $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

Erforderliche Achsenteilungen $X = l_x \cdot \frac{1}{x}, \quad Y = l_y \cdot \frac{1}{y}$

Einsetzen ergibt $\frac{Y}{l_y} = \frac{X}{l_x} + \frac{1}{z}$

$$Y = \frac{l_y}{l_x} X + l_y \frac{1}{z} = AX + \frac{B}{z}.$$

c) $y = \sin x + \sin z$

Erforderliche Achsenteilungen $X = l_x \sin x, \; Y = l_y \cdot y$

Einsetzen ergibt $\frac{Y}{l_y} = \frac{X}{l_x} + \sin z$

$$Y = \frac{l_y}{l_x} X + l_y \sin z = AX + B \sin z.$$

Der Parameter z kann in den entstehenden linearen Beziehungen zwischen X und Y in beliebiger Form vorkommen, da er für eine einzelne Gerade der Schar konstant ist. Lediglich der Abstand zwischen den einzelnen Geraden wird durch den Term, mit dem der Parameter eingeht, z. B. $\frac{1}{z}$ oder $\sin z$, beeinflußt.

Es genügt nun nicht mehr, nur die Achsen mit der nötigen Funktionsteilung zu versehen. Zur Führung der Ableselinien muß das ganze Netz der Koordinatenlinien eingetragen werden.

Allerdings darf deren Dichte nicht beliebig gesteigert werden, um die Übersichtlichkeit und Ablesegenauigkeit nicht zu gefährden. Auch die Forderungen über die Feinheit der Teilung sind zu beachten, die Unterteilung ist u. U. abschnittsweise zu verändern.
Sollte öfter dieselbe Teilung, z. B. die quadratische, in verschiedenen Maßstäben benötigt werden, so lohnt sich die Anlage einer Harfe entsprechend der Logarithmenharfe.

BEISPIEL

Für die Kreisringfläche $A = \pi(R^2 - r^2)$ ist ein Nomogramm mit einem Geradennetz für den Parameter A zu entwerfen. Als Intervalle sind zu wählen:

$$0 \leqq \frac{r}{\text{mm}} \leqq 50, \qquad 0 \leqq \frac{R}{\text{mm}} \leqq 50, \qquad 0 \leqq \frac{A}{\text{mm}^2} \leqq 3000.$$

Die Größe des Nomogramms soll 100 mm mal 100 mm nicht überschreiten.

Lösung: Die Ausgangsgleichung wird zunächst umgeformt

$$\frac{A}{\pi} = R^2 - r^2$$

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{\pi} A$$

$$\left(\frac{R}{\text{mm}}\right)^2 = \left(\frac{r}{\text{mm}}\right)^2 + \frac{1}{\pi} \frac{A}{\text{mm}^2}.$$

Mit den Abkürzungen für die Zahlenwerte

$$x = \frac{r}{\text{mm}}, \qquad y = \frac{R}{\text{mm}}, \qquad z = \frac{A}{\text{mm}^2}$$

folgt

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{\pi} z.$$

Diese Gleichung ist unter den Schlüsselgleichungen nicht enthalten. Es ist sofort ersichtlich, daß quadratische Leiterteilungen zu einer linearen Beziehung zwischen den dargestellten Längen und damit zu einer Geradenschar führen:

$$X = l_x \cdot x^2, \qquad Y = l_y \cdot y^2$$

$$\frac{Y}{l_y} = \frac{X}{l_x} + \frac{1}{\pi} z$$

$$Y = \frac{l_y}{l_x} X + \frac{l_y}{\pi} z.$$

Da der Parameter z nicht im Faktor von X vorkommt, der die Steigung der Geraden bestimmt, sondern nur im Term für den Achsenabschnitt, ergibt sich eine Parallelenschar für die z-Linien.
Es wird $l_x = l_y = l$ gewählt, da der Wertebereich und der vorgegebene Platz für beide Achsen gleich sind, und nach (4)

$$l \leqq \frac{100 \text{ mm}}{50^2 - 0} = 0{,}04 \text{ mm}$$

bestimmt. Damit werden die Leitern in Tafel 27 angelegt.
Zur Bestimmung der Geradenschar werden nacheinander die Werte des Parameters z, für die die Linien zu zeichnen sind, hier also $z = 0, 250, 500, \ldots, 3000$, zur Berechnung von Punkten gewählt. Dazu sind diese Werte entweder in die Gleichung für die Zahlenwerte

$$y^2 = x^2 + \frac{1}{\pi} z$$

oder in die Gleichung zwischen den dargestellten Längen X und Y (mit $l_x = l_y = l = 0{,}04$ mm)

$$Y = X + \frac{0{,}04 \text{ mm}}{\pi} \cdot z$$

einzusetzen.

Hier bietet die zweite Möglichkeit Vorteile, da die Geraden mit den zu berechnenden Längen genauer konstruiert werden können als aus Zahlenwerten, für die kein genaues Netz vorhanden ist.
Alle Geraden besitzen den Anstieg $M = 1$. Jede einzelne Gerade kann dann leicht aus dem Achsenabschnitt auf der Y-Achse bestimmt werden. Dieser ergibt sich für $X = 0$ aus

$$Y = \frac{0{,}04 \text{ mm}}{\pi} \cdot z,$$

z. B. für $z = 1000$, $Y = \dfrac{0{,}04 \text{ mm}}{\pi} \cdot 1000 = 12{,}7 \text{ mm}$.

Ablesebeispiel: $r = 38$ mm, $R = 46$ mm $\rightarrow$ $A = 2100 \text{ mm}^2$.

Zusammenfassung

Eine Funktion mit der analytischen Darstellung $y = f(x; z)$ ergibt in einem geeigneten Netz eine Geradenschar mit dem Parameter z, wobei der Parameter im allgemeinen die Steigung oder den Achsenabschnitt der Geraden beeinflußt.
Für die gebräuchlichsten Funktionsnetze lauten die Schlüsselgleichungen

Netzart	Parallelentafel	Strahlentafel
mm-mm-Netz	$y = Ax + Bz$	$y = Axz + B$
mm-lg-Netz	$y = Aa^x z$	$y = Az^x$
lg-mm-Netz	$y = A \lg x + Bz$	$y = Az \lg x + B$
lg-lg-Netz	$y = Ax^n z$	$y = Ax^z$

Statt z kann auch ein Term in z stehen.

AUFGABEN

21. Für

$$y = x^z$$

ist eine Netztafel mit den Parameterwerten $z = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

a) mit regulär geteilten Achsen

b) mit logarithmisch geteilten Achsen

zu zeichnen.

22. Auf einem geeigneten Funktionspapier ist die Netztafel für

$$y = \log_z x$$

mit den Parameterwerten $z = 1{,}5;\ 2;\ e = 2{,}718;\ 4;\ 10;\ 20$ und mit einer geradlinigen Schar zu entwerfen.

23. Die Arbeitsproduktivität P eines Betriebes wird durch das Verhältnis des nach Planpreisen berechneten Wertes W der Produktion in einer bestimmten Zeit zur Zahl A der Produktionsarbeiter angegeben. Es ist eine Netztafel im Millimeternetz mit der Abszisse W zwischen 0 und 2000 TMDN und den Parameterwerten $A = 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1000$ zu entwerfen.

24. Für das Übersetzungsverhältnis eines Getriebes gilt

$$i = \frac{z_b}{z_a}.$$

Dabei sind z_a und z_b die Zähnezahlen für die beiden Räder. Für dieses Gesetz ist eine Netztafel von etwa 120 mm mal 150 mm im regulären Netz für die Intervalle

$$10 \leqq z_a \leqq 120, \quad 20 \leqq z_b \leqq 280$$

und für die Werte $i = \frac{1}{2{,}5};\ \frac{1}{1{,}4};\ 1;\ \sqrt[10]{10};\ \sqrt{2};\ 2{,}4;\ 3{,}6$ zu entwerfen.

Ablesebeispiel: $z_a = 95, \quad i = \sqrt[10]{10}, \quad z_b = ?$

25. Die Zinseszinsformel lautet

$$b_n = b_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dabei sind b_0 Anfangsbetrag, b_n Endbetrag, p Prozentsatz und n die Anzahl der Zinstermine (meist in Jahresabständen). Es ist eine Netztafel für $\frac{b_n}{b_0}$ mit $0 \leqq n \leqq 10$ und mit $p = 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\%$ anzulegen.

26. Zur Kennzeichnung der Formänderung beim Kaltstauchen wird der Stauchgrad φ eingeführt. Darunter wird der natürliche Logarithmus des Längenverhältnisses von Ausgangslänge L_a und Endlänge L_e des Stauchkörpers verstanden (Bild 30).[1]
Für die Beziehung

$$\varphi = \ln \frac{L_a}{L_e},$$

die auch in der Form

$$L_e = L_a e^{-\varphi}$$

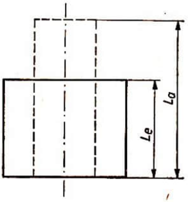


Bild 30

[1]) Aufgabenstellung nach KIESSLER, Angewandte Nomographie

geschrieben werden kann, ist ein Nomogramm mit den Bereichen

$$10 \leqq \frac{L_a}{\text{cm}} \leqq 100, \quad 1 \leqq \frac{L_e}{\text{cm}} \leqq 100, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 4$$

zu entwerfen. Höhe und Breite der Tafel etwa 100 mm.

Ablesebeispiel: $L_a = 20$ cm, $\varphi = 0{,}8$, $L_e = ?$

27. Bei der Herstellung von Rundmaterial durch Schmieden wird mit dem Verschmiedungsgrad M gerechnet. Darunter ist das Verhältnis des Ausgangsquerschnitts zum Querschnitt des Endproduktes zu verstehen. Es gilt

$$M = \frac{\pi d_a^2}{4} : \frac{\pi d_e^2}{4} = \frac{d_a^2}{d_e^2}$$

oder

$$d_e = \frac{d_a}{\sqrt{M}}.$$

Für diese Formel ist eine Netztafel mit den Bereichen

$$1 \leqq M \leqq 10, \quad 100 \leqq \frac{d_e}{\text{mm}} \leqq 600$$

und den Durchmessern für das Ausgangsmaterial

$d_a = 240, 300, 400, 500, 600$ mm herzustellen.[1])

Tafelabmessungen 100 mm mal 100 mm

Ablesebeispiel: $d_a = 300$ mm, $M = 3$, $d_e = ?$

28. Auf doppelt-logarithmischem Papier ist ein Nomogramm zur Auswertung der Formel

$$P = \frac{1}{75} \cdot \frac{F}{\text{kp}} \cdot \frac{v}{\text{m}\,\text{s}^{-1}} \text{ PS}$$

in den Bereichen

$$\frac{v}{\text{m}\,\text{s}^{-1}} = 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 5;\ 10;\ 20;\ 30;\ 50;\ 100;\ 200,$$

$$10 \text{ kp} \leqq F \leqq 10^3 \text{ kp}, \quad 1 \text{ PS} \leqq P \leqq 100 \text{ PS}$$

anzulegen.
Tafelabmessungen: 100 mm mal 100 mm

Ablesebeispiel: $F = 200$ kp, $v = 5\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$, $P = ?$

29. Für die Aufgabe lt. Beispiel 2 in 1.2.2. ist ein Nomogramm auf doppelt-logarithmischem Netz herzustellen. Tafelabmessungen 100 mm mal 100 mm.

---

[1]) Aufgabenstellung nach Kiessler, Angewandte Nomographie

30. Für die resultierende Geschwindigkeit v beim waagerechten Wurf gilt

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Dabei sind v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in waagerechter Richtung, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ die Fallbeschleunigung und t die Zeit (Bild 31).
Für die Werte $v_0 = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 m/s ist im Intervall $0 \leq t/\mathrm{s} \leq 10$ eine Netztafel mit geradliniger Schar herzustellen.
Tafelabmessungen: 100 mm mal 150 mm
Ablesebeispiel: $t = 8$ s, $v_0 = 30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $v = ?$

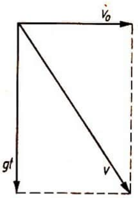


Bild 31

31. Für die Hohlspiegel- bzw. Linsengleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ist eine Netztafel mit geradliniger Schar herzustellen.

$$\frac{f}{\mathrm{cm}} = 1, 2, 4, 6, 10; \quad 1\ \mathrm{cm} \leq g,\ b < \infty$$

Tafelabmessung: 80 mm mal 80 mm

Ablesebeispiel: $g = 3$ cm, $f = 2$ cm, $b = ?$

1.3. Leitertafeln

1.3.1. Doppelleitern und Leiterpaare für zwei Variablen

Ebenso wie die Darstellung der durch $y = f(x)$ gegebenen Funktion in einem beliebigen Netz als Vorstufe zu den Netztafeln angesehen werden kann, soll vor der Behandlung einer zweiten großen Gruppe von Nomogrammen, der Leitertafeln, die Darstellung von $y = f(x)$ als Doppelleiter und Leiterpaar beschrieben werden.
In der zu 1.1.3.2. gehörigen Tafel 1 waren an der Ordinatenachse bereits nebeneinander Teilungen für x und $y = f(x)$ aufgetreten, wobei zusammengehörige Werte in gleicher Höhe stehen. Eine solche Darstellung heißt **Doppelleiter**, sie ist schematisch nochmals in Bild 32 gezeigt.

Die Doppelleiter ist im Grunde nichts weiter als die graphische Darstellung der Wertetabelle einer Funktion auf einem geraden Träger.

Dabei können je nach der Art der Funktion beide Seiten regulär oder eine Seite regulär und die andere nach einer beliebigen Funktion geteilt sein oder auch beide Seiten Funktionsteilungen tragen.

Bild 32

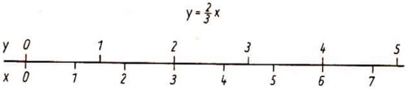


Bild 33

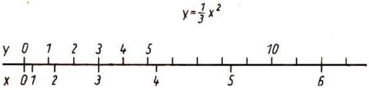


Bild 34

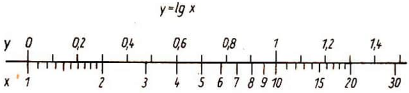


Bild 35

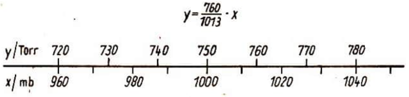


Bild 36

Jede der in 1.1.3.2. behandelten Funktionsleitern kann zu einer Doppelleiter ausgebildet werden, wenn neben die nach einem bestimmten Gesetz geteilte Leiter noch eine reguläre Leiter gelegt wird. In den Bildern 33 bis 36 sind Doppelleitern für einige Funktionen angegeben, die sofort verständlich sind.
Solche Doppelleitern werden gelegentlich an Meßinstrumenten angebracht, an denen das Ergebnis in verschiedenen Maßeinheiten abgelesen werden soll. Alte Thermometer sind z. B. oft nach Celsius und Réaumur geteilt. Ein weiteres Beispiel ist die in Bild 36 dargestellte Umrechnungsbeziehung für Druckangaben in Torr und in Millibar.
Die Darstellung der wichtigsten Funktionen, z. B. der trigonometrischen Funktionen, in Form von Doppelleitern liefert handliche Hilfsmittel zur Bestimmung der Werte dieser häufig gebrauchten Funktionen.

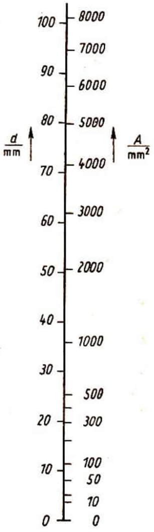


Bild 37

BEISPIEL

Auf einer Leiterlänge von 100 mm ist eine Doppelleiter für die Beziehung zwischen Durchmesser d und Fläche A eines Kreises für $0 \leq d \leq 100$ mm anzulegen.

Lösung: Für die Darstellung von

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow \frac{A}{\text{mm}^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2$$

wird von einer regulären Leiter für $x = \frac{d}{\text{mm}}$ ausgegangen (Bild 37). Mit $y = \frac{A}{\text{mm}^2}$ folgt

$$y = 0{,}785\ x^2.$$

Für besondere ganzzahlige Werte von y werden die zugehörigen x-Werte nach

$$x = \sqrt{\frac{y}{0{,}785}}$$

berechnet und dann der Wertetafel entsprechend abgetragen, z. B.

$y = \frac{A}{\text{mm}^2}$	10	20	50	100	500	1000	5000
$x = \frac{d}{\text{mm}}$	3,57	5,05	7,98	11,29	25,2	35,7	79,8

Für den praktischen Gebrauch müßten weitere Punkte errechnet oder näherungsweise, etwa projektiv, interpoliert werden.

Die beiden aneinander liegenden Teilungen einer Doppelleiter können auch aufgetrennt und die beiden Träger parallel zueinander verschoben werden. Dann entsteht ein sogenanntes **Leiterpaar**. Das ist in Bild 38 für $y = \frac{1}{3}\ x^2$ (vgl. Bild 34) geschehen.

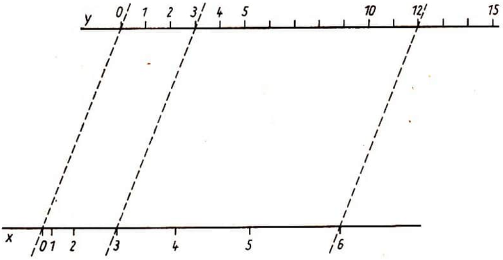


Bild 38

Zum Ablesen werden jetzt aber noch Geraden benötigt, die einander zugeordnete Punkte der beiden Leitern verbinden, die **Zuordnungsgeraden**. Da die eine Leiter durch eine Parallelverschiebung von der anderen gelöst wurde, sind auch diese Zuordnungsgeraden untereinander parallel.
Ein praktisch wichtiges Beispiel für ein Leiterpaar ist die A- und D-Leiter beim Rechenstab, denen das Gesetz $y = x^2$ (in logarithmierter Form $\lg y = 2 \lg x$) zugrunde liegt. Die Zuordnungsgeraden verlaufen senkrecht zu den beiden parallelen Trägern und werden durch den Läuferstrich dargestellt.

1.3.2. Leitertafeln mit parallelen Leitern

Der Grundgedanke der *Doppelleiter* oder des *Leiterpaares* für Funktionen mit zwei Variablen soll nun auf Funktionen mit drei Variablen übertragen werden. Dazu sind drei Träger nötig, von denen jeder die Leiter einer Variablen enthält. Drei Punkte, die einander zugeordnete Werte der Variablen darstellen, sollen auf einer Geraden (in einer Flucht) liegen. Das entstehende Nomogramm heißt **Leitertafel** oder **Fluchtlinientafel.**

Die Lage der Geraden zueinander kann verschieden sein. Zunächst werde die Tafel mit drei parallelen Leitern betrachtet. Die einfachste Form einer solchen Leitertafel ist in Bild 39 dargestellt. Auf den drei Leitern sind die Variablen x, y, z mit gleichen Anfangspunkten und Zeicheneinheiten abgetragen, wobei die Leitern gleichen Abstand voneinander besitzen. Da aus den geometrischen Zusammenhängen (Mittellinie eines Trapezes) sofort die Beziehung

$$Z = \frac{1}{2}(X + Y)$$

ersichtlich ist, folgt wegen $X = l \cdot x$, $Y = l \cdot y$, $Z = l \cdot z$ auch

$$z = \frac{1}{2}(x + y),$$

d. h., die drei auf der Ablesegeraden liegenden Werte der Variablen x, y und z (in Bild 39 sind das die Werte 3,11 und 7) genügen dem Gesetz für die Bildung des arithmetischen Mittels.

Die Ablesegerade darf nicht für jede Aufgabe eingezeichnet werden, da dadurch die Leitertafel bald unbrauchbar würde.

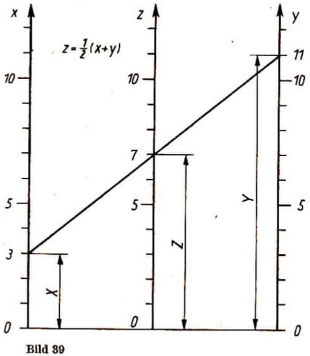


Bild 39

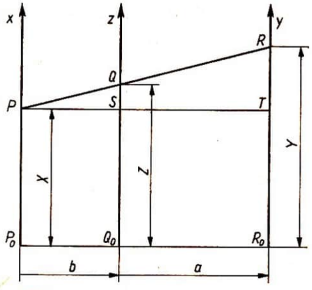


Bild 40

Mit diesem einfachen Beispiel ist das Grundprinzip der Leitertafel eingeführt. Die Verhältnisse von Bild 39 brauchen jetzt nur noch so verallgemeinert zu werden, daß auch andere Funktionen erfaßt werden können. Dazu sind die Leiterteilungen nach Art und Zeicheneinheit und die Abstände zwischen den Leitern zu variieren. In Bild 40 ist der Aufbau einer solchen Leitertafel dargestellt. Die Anfangspunkte der drei Leitern sind mit P_0, Q_0, R_0 bezeichnet. Die Mittelleiter teilt den Abstand der Außenleitern im Verhältnis $b:a$. Eine Ablesegerade PR erzeugt auf den drei Leitern die Abschnitte

$$X = \overline{P_0P}, \quad Y = \overline{R_0R}, \quad Z = \overline{Q_0Q}.$$

Es ist zu untersuchen, in welcher Beziehung diese drei Strecken zueinander stehen. Die Hilfslinie PT verlaufe parallel zu P_0R_0. Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\overline{SQ} : \overline{TR} = \overline{PS} : \overline{PT}$$

$$(Z - X) : (Y - X) = b : (a + b).$$

Aus der Produktgleichung

$$(Z - X) \cdot (a + b) = b(Y - X)$$

folgt

$$Z(a + b) = aX + bY.$$

Tragen die Leitern Funktionsteilungen nach den Gleichungen

$$X = l_1[f_1(x) - f_1(x_0)]$$

$$Y = l_2[f_2(y) - f_2(y_0)]$$

$$Z = l_3[f_3(z) - f_3(z_0)],$$

so gilt

$$(a + b)\, l_3[f_3(z) - f_3(z_0)] = a l_1[f_1(x) - f_1(x_0)] + b l_2[f_2(y) - f_2(y_0)]. \quad (24)$$

Vor den eckigen Klammern stehen konstante Faktoren, für die zur Abkürzung A, B bzw. C gesetzt werden kann.

$$\boxed{C[f_3(z) - f_3(z_0)] = A[f_1(x) - f_1(x_0)] + B[f_2(y) - f_2(y_0)]} \quad (25)$$

Für $f_1(x_0) = f_2(y_0) = f_3(z_0) = 0$ gilt insbesondere

$$\boxed{C \cdot f_3(z) = A \cdot f_1(x) + B \cdot f_2(y)} \tag{25a}$$

Die Gleichung (25) heißt **Schlüsselgleichung für die Leitertafel mit drei parallelen Leitern.** Wie besonders aus der speziellen Form (25a) gut zu erkennen ist, lassen sich solche Beziehungen als Leitertafeln darstellen, bei denen ein Term $f(z)$ mit der Variablen z als Summe zweier Terme mit den Variablen x und y gebildet wird. Dabei können konstante Faktoren A, B, C sowie Summanden $f_1(x_0)$, $f_2(y_0)$, $f_3(z_0)$ auftreten. Wie an den später zu behandelnden Beispielen gezeigt wird, ist es häufig nötig, eine vorliegende Funktionsgleichung erst durch Umformen, z. B. durch Logarithmieren, in eine Form zu bringen, die der Schlüsselgleichung (25) entspricht.
Für die Herstellung der Leitertafel wird der Zusammenhang zwischen den Faktoren A, B und C der vorgelegten Gleichung und den für das Anlegen der Zeichnung wichtigen Strecken a, b, l_1, l_2 und l_3 benötigt. Aus einem Vergleich der Gleichungen (24) und (25) folgt, daß die Faktoren der einen Gleichung in demselben Verhältnis zueinander stehen müssen wie diejenigen der anderen. Es ist also

$$(a + b)\, l_3 : a l_1 : b l_2 = C : A : B$$

oder

$$\frac{(a+b)\, l_3}{C} = \frac{a\, l_1}{A} = \frac{b\, l_2}{B}.$$

Diese Beziehung muß durch geeignete Wahl der Zeicheneinheiten und der Leiterabstände befriedigt werden. Aus den beiden letzten Brüchen läßt sich das *Abstandsverhältnis der Leitern* ermitteln:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{A\, l_2}{B\, l_1}} \tag{26}$$

Das Abstandsverhältnis wird also sowohl durch die Faktoren *A* und *B* als auch durch die Zeicheneinheiten der beiden Ausgangsleitern bestimmt.

Aus der gewünschten Breite des Nomogramms ergeben sich dann die Abstände a und b selbst.
Für die Zeicheneinheit der Ergebnisleiter (z-Leiter) folgt aus dem Vergleich des ersten und zweiten bzw. ersten und dritten Bruches der obigen Gleichung

$$\boxed{l_3 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A} \cdot l_1 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{C}{B} \cdot l_2} \tag{27}$$

Während sich die Zeicheneinheiten der x- und y-Leiter nach den üblichen Gesichtspunkten frei wählen lassen, ergibt sich die Zeicheneinheit der z-Leiter zwangsläufig nach Gleichung (27). Zur Bestimmung des Anfangspunktes der z-Leiter kann die

Gleichung (25) herangezogen werden, indem aus allen vorkommenden konstanten Summanden der Funktionswert $f(z_0)$ und daraus z_0 selbst ermittelt werden. Jedoch wird z_0 meist einfacher aus den Anfangswerten x_0 und y_0 bestimmt (s. Beispiel 1). Die Anlage einer Leitertafel hat insgesamt in folgenden Schritten zu erfolgen:

1. Die vorgelegte Funktionsgleichung ist so umzuformen, daß sie der Schlüsselgleichung (25) entspricht. Dabei sind die Art der Funktionsteilungen der Leitern und die Faktoren A, B und C abzulesen.
2. Mit Hilfe der üblichen Formeln (2) bzw. (4) sind die Zeicheneinheiten der Ausgangsleitern (x- und y-Leitern) aus der Zeichenlänge und dem Wertebereich festzulegen und damit diese beiden Leitern anzulegen.
3. Nach (26) sind das Abstandsverhältnis der Leitern und aus der Gesamtbreite der Tafel die Abstände selbst zu ermitteln.
4. Die Zeicheneinheit der Ergebnisleiter ist nach (27) zu berechnen. Nachdem der Anfangspunkt ermittelt wurde, kann die Ergebnisleiter angelegt und damit die Leitertafel vervollständigt werden.

BEISPIELE

1. Für die Funktion $2x + 3y + 6 = 2z$ ist eine Leitertafel mit den Bereichen $10 \leqq x,\ y \leqq 20$ sowie der maximalen Breite 80 mm und der Höhe 100 mm anzulegen.

Lösung: Die vorgelegte Gleichung entspricht unmittelbar der Schlüsselgleichung (25), wobei alle Leitern regulär zu teilen sind [$f_1(x) = x$ usw.]. Die Faktoren der Gleichung sind $A = 2$, $B = 3$, $C = 2$. Für die vorgeschriebene Höhe folgt nach (2)

$$l_1 = l_2 \leqq \frac{100 \text{ mm}}{20 - 10} = 10 \text{ mm}.$$

Aus (26) folgt für das Abstandsverhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{A\, l_2}{B l_1} = \frac{2 \cdot 10 \text{ mm}}{3 \cdot 10 \text{ mm}} = \frac{2}{3},$$

das unter Beachtung der zulässigen Breite mit $a = 30$ mm, $b = 45$ mm befriedigt wird. Für die Zeicheneinheit der Mittelleiter gilt nach (27)

$$l_3 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A}\, l_1 = \frac{30 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \cdot \frac{2}{2} \cdot 10 \text{ mm} = 4 \text{ mm}.$$

Derselbe Wert ergibt sich auch aus dem zweiten Teil der Formel (27).
Als letztes fehlt noch der Anfangspunkt der Mittelleiter. Dazu werden die Anfangswerte $x_0 = 10$, $y_0 = 10$ in die vorliegende Gleichung eingesetzt; sie ergeben $z_0 = 28$. Es wäre zwar auch möglich, die Gleichung durch Hinzufügen der Anfangswerte x_0 und y_0 formal in die vollständige Schlüsselgleichung überzuführen und daraus den Anfangswert von z abzulesen:

$$2x + 3y = 2z - 6$$

$$2(x - 10) + 3(y - 10) = 2z - 6 - 20 - 30 = 2(z - 28),$$

doch ist das vor allem bei Funktionsleitern umständlicher als das Einsetzen der Anfangswerte. Nunmehr liegen alle Angaben vor, so daß die Leitertafel entsprechend Tafel 28 angelegt werden kann.
Zur Kontrolle der Konstruktion sind in Tafel 28 zwei Aufgabenpaare eingezeichnet, die jedesmal zu dem gleichen Ergebnis führen:

$$x = 10, \quad y = 12 \rightarrow z = 31$$
$$x = 13, \quad y = 10 \rightarrow z = 31$$

und

$$x = 14, \quad y = 16 \rightarrow z = 41$$
$$x = 17, \quad y = 14 \rightarrow z = 41\,.$$

Durch die Schnittpunkte der Ablesegeraden muß die z-Leiter hindurchgehen, und zwischen diesen Punkten 31 und 41 müssen auf ihr 10 Einheiten liegen. Nach der Wahl der Außenleitern ist die Mittelleiter dadurch eindeutig bestimmt, jedoch kann diese Konstruktion die Berechnung nicht ersetzen, da sie einerseits nicht genau genug ist und da es andererseits bei komplizierten Zusammenhängen schwierig ist, geeignete Aufgabenpaare zu finden.

2. Für die Gleichung

$$z = \frac{1}{2}\, x^2 \sqrt{y}$$

ist mit den Bereichen

$$1 \leqq x \leqq 10$$
$$0{,}1 \leqq y \leqq 100$$

eine Leitertafel herzustellen. Maximale Tafelbreite 80 mm, Tafelhöhe 100 mm.
Lösung: Da die Schlüsselgleichung eine Addition der vorkommenden Terme in x und y verlangt, muß die vorliegende Gleichung logarithmiert werden.

$$\lg z = 2 \lg x + \frac{1}{2} \lg y + \lg 0{,}5\,.$$

Das entspricht (25) mit $A = 2$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$ sowie drei logarithmischen Termen, die logarithmische Teilungen für alle Leitern erforderlich machen.
Aus den vorgeschriebenen Bereichen und der maximalen Höhe folgt nach (4)

$$l_1 \leqq \frac{100\ \text{mm}}{\lg 10 - \lg 1} = 100\ \text{mm}$$

$$l_2 \leqq \frac{100\ \text{mm}}{\lg 100 - \lg 0{,}1} = \frac{100\ \text{mm}}{2 - (-1)} = 33{,}3\ \text{mm}\,.$$

Wird $l_2 = 30$ mm gewählt, so nehmen die geforderten drei Mantisseneinheiten eine Gesamtlänge von 90 mm ein. Mit $l_1 = 90$ mm erhält auch die x-Leiter dieselbe Höhe.
Aus (26) folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{A l_2}{B l_1} = \frac{2 \cdot 30\ \text{mm}}{\frac{1}{2} \cdot 90\ \text{mm}} = \frac{4}{3}\,.$$

Mit $a = 40$ mm, $b = 30$ mm wird die geforderte Breite eingehalten. Für die Zeicheneinheit der Mittelleiter ergibt sich nach (27)

$$l_3 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A} l_1 = \frac{40 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \text{ mm} = 25{,}7 \text{ mm}.$$

Dieser unbequeme Wert muß beibehalten werden, da er durch die übrigen Größen bestimmt ist. Die zugehörige logarithmische Teilung wird aus der Harfe entnommen, die hierbei von besonderem Wert ist.
Der Anfangspunkt der Mittelleiter ergibt sich durch Einsetzen:

$$z_0 = \frac{1}{2} x_0^2 \sqrt{y_0} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{0{,}1} = 0{,}158.$$

Mit diesen Angaben kann Tafel 29 angelegt werden. Die Teilung der Mittelleiter wird, ebenso wie die der anderen, mit Hilfe eines Papierstreifens aus der Harfe entnommen, ist jedoch zunächst bei 0,158 anzusetzen und bis 1 zu übertragen, ehe die übrigen Mantisseneinheiten wiederholt angesetzt werden können.
Auch hier ist es ratsam, zur Kontrolle zwei Aufgabenpaare einzuzeichnen, von denen jedes Paar auf dasselbe Ergebnis führt. Dabei sind nach Möglichkeit solche Paare zu wählen, deren Ergebnisse z um wenigstens eine Mantisseneinheit auseinanderliegen, z. B.

$$\begin{aligned} x &= 1, & y &= 4 & &\to z = 1\\ x &= 2, & y &= 0{,}25 & &\to z = 1\\ x &= 2, & y &= 25 & &\to z = 10\\ x &= 5, & y &= 0{,}64 & &\to z = 10. \end{aligned}$$

Die in Tafel 29 eingetragenen Ablesegeraden begrenzen auf der z-Leiter eine Mantisseneinheit mit $l_3 = 25{,}7$ mm.

Bei den bisherigen Betrachtungen waren die Faktoren A, B und C stets positiv. Bei negativen Faktoren müssen die Gleichungen (26) und (27) hinsichtlich des Vorzeichens dadurch erfüllt werden, daß entweder eine oder mehrere Zeicheneinheiten oder das Abstandsverhältnis negativ gewählt werden. Negative Zeicheneinheit bedeutet, daß die Leiter gegenläufig zu teilen ist. Dagegen muß noch vereinbart werden, was unter *negativem Abstandsverhältnis* zu verstehen ist. In Übereinstimmung mit der Erklärung der inneren und äußeren Teilung in der analytischen Geometrie wird festgelegt (Bild 41 a, b, c)

1. Der Abstand b ist von der x-Leiter in Richtung zur z-Leiter, der Abstand a von der z-Leiter in Richtung zur y-Leiter zu messen.
2. Nach rechts gerichtete Strecken sind positiv, nach links gerichtete Strecken sind negativ.

Dadurch ergeben sich folgende Möglichkeiten:

1. $a > 0$, $b > 0$ Die z-Leiter ist Mittelleiter (Bild 41 a).
2. $a < 0$, $b > 0$ Die z-Leiter ist rechte Außenleiter (Bild 41 b).
3. $a > 0$, $b < 0$ Die z-Leiter ist linke Außenleiter (Bild 41 c).

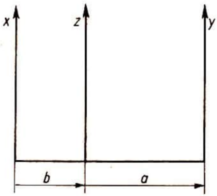


Bild 41

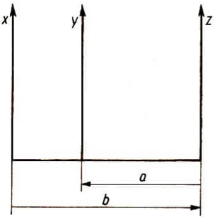


Bild 41 b

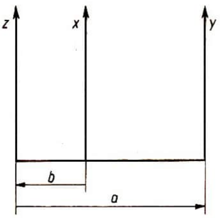


Bild 41 c

Es muß noch bemerkt werden, daß **das Verhältnis $a : b = -1$ nicht gewählt werden darf,** da dann die Gleichungen versagen und die z-Leiter ins Unendliche rückt.
Die z-Leiter kann also zur Außenleiter gemacht werden, wenn ein negativer Faktor auftritt. Dann werden die Leitern miteinander vertauscht. Beispielsweise wird statt $x - y = z$ die Gleichung $x = z + y$ dargestellt, wobei die x-Leiter zur Mittelleiter wird. Im allgemeinen ist es jedoch handlicher, die Ergebnisleiter zur Mittelleiter zu machen und negative Faktoren der Schlüsselgleichung durch gegenläufige Leiterteilungen zu berücksichtigen. Dabei ist dann allerdings die gegenläufige Leiter so zu verschieben, daß die benötigten Wertebereiche wieder in gleicher Höhe liegen. Darauf ist vor allem bei der Festlegung der Anfangspunkte der Leitern zu achten (vgl. das folgende Beispiel).
Von der Möglichkeit, die Ergebnisleiter als Außenleiter anzulegen, wird vor allem in zusammengesetzten Nomogrammen Gebrauch gemacht, wenn die Ergebnisleiter eines ersten Teilnomogramms Ausgangsleiter in einem sich anschließenden zweiten Nomogramm werden soll (vgl. 1.4.).

BEISPIEL

3. Der Wirkungsgrad η einer Maschine ist durch

$$\eta = \frac{P_e}{P_i}$$

gegeben, wobei P_e die Nutzleistung und P_i die aufgewandte Leistung in gleicher Maßeinheit bedeuten.
Eine Leitertafel ist zu konstruieren mit den Bereichen 1 bis 50 PS für P_e und P_i sowie der Breite 80 mm und der Höhe 100 mm.

Lösung: Mit den Abkürzungen für die Zahlenwerte

$$x = \frac{P_e}{\text{PS}}, \qquad y = \frac{P_i}{\text{PS}}, \qquad z = \eta$$

ergibt sich $z = \dfrac{x}{y}$

und durch Logarithmieren

$$\lg z = \lg x - \lg y .$$

Der Vergleich mit (25) liefert $A = 1, B = -1, C = 1$ und zeigt die Notwendigkeit logarithmischer Achsenteilungen. Da die Bereiche für die x- und y-Leiter gleich sind, ist nach (4)

$$l \leqq \frac{100 \text{ mm}}{\lg 50 - \lg 1} = \frac{100 \text{ mm}}{1{,}699} \approx 59 \text{ mm}.$$

Mit $l_1 = l_2 = 50$ mm würde nach (26) folgen

$$\frac{a}{b} = \frac{A l_2}{B l_1} = \frac{1 \cdot 50 \text{ mm}}{-1 \cdot 50 \text{ mm}} = -1 .$$

Das ist jedoch nicht zulässig. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn es erforderlich ist, daß die z-Leiter Außenleiter wird, etwa wegen eines sich anschließenden weiteren Nomogrammteiles, so muß entweder auf der x- oder der y-Leiter, allerdings auf Kosten des darzustellenden Bereiches oder der Genauigkeit, die Zeicheneinheit geändert werden, z. B. $l_1 = 40$ mm, $l_2 = 30$ mm. Dafür ergibt sich das Verhältnis $a:b = -3:4$, das mit $a = -60$ mm, $b = 80$ mm so befriedigt wird, daß auch die zulässige Breite eingehalten werden kann.
Hier soll jedoch eine Außenleiter gegenläufig geteilt und z. B. $l_2 = -50$ mm gewählt werden. Dann ist nach (26) $a:b = 1$ und damit $a = 40$ mm, $b = 40$ mm.
Die Zeicheneinheit der Mittelleiter folgt aus (27)

$$l_3 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A} l_1 = \frac{40 \text{ mm}}{80 \text{ mm}} \cdot 1 \cdot 50 \text{ mm} = 25 \text{ mm}.$$

Für die Berechnung des Anfangspunktes der Mittelleiter ist zu beachten, daß wegen der Gegenläufigkeit der y-Leiter der Wert $y_0 = 50$ mit $x_0 = 1$ und $z_0 = \dfrac{x_0}{y_0} = 0{,}02$ auf gleicher Höhe liegt.
Die Anlage der Leitertafel (Tafel 30) bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. Die Mittelleiter ist aus physikalischen Gründen natürlich nur bis $\eta = 1$ sinnvoll.
Die Leitern können bei Bedarf nachträglich auch über ihre Anfangspunkte hinaus verlängert werden.

Ablesebeispiel: $P_e = 20$ PS, $P_i = 30$ PS $\rightarrow$ $\eta = 0{,}67$.

1.3.3. Leitertafeln mit nicht parallelen Leitern

Drei Leitern gehen von einem Punkt aus

Während die Leitertafeln mit parallelen Leitern solche Funktionen erfassen, bei denen ein Funktionsterm[1]) gleich der Summe zweier anderer Funktionsterme ist, kann eine weitere Gruppe von Funktionen in einer Leitertafel dargestellt werden, bei der die *drei Leitern von einem Punkt ausgehen*. Dabei soll hier nur der einfache Fall betrachtet werden, daß die Leitern *gleiche Winkel* einschließen (Bild 42).

[1]) Term in einer Variablen (bei Unmißverständlichkeit im Text auch kurz als Term bezeichnet)

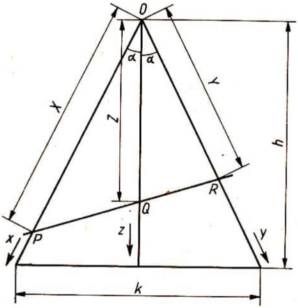


Bild 42

Die Leitern sollen in O beginnen. Die Mittelleiter halbiert den Winkel 2α. Eine beliebige Ablesegerade schneidet die Leitern in den Punkten P, Q, R. Die Abschnitte auf den drei Strahlen seien X, Z und Y. Es ist zu untersuchen, in welcher Beziehung diese Strecken zueinander stehen.
Der Flächeninhalt des entstandenen Dreiecks OPR ist gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke OPQ und OQR.

$$\triangle OPR = \triangle OPQ + \triangle OQR$$

$$\frac{1}{2} XY \sin 2\alpha = \frac{1}{2} XZ \sin \alpha + \frac{1}{2} YZ \sin \alpha$$

Wird diese Gleichung durch $\frac{1}{2} XYZ \sin \alpha$ dividiert, so folgt

$$\frac{\sin 2\alpha}{Z \sin \alpha} = \frac{1}{Y} + \frac{1}{X}.$$

Mit $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ wird schließlich

$$\frac{2 \cos \alpha}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}. \tag{28}$$

Für X, Y und Z sind die Gleichungen der Leitern einzusetzen, wobei im Hinblick auf die hauptsächlich interessierenden Anwendungen verschiedene Vereinfachungen zugelassen werden sollen. Insbesondere soll angenommen werden, daß die Leiterteilungen mit dem Funktionswert Null beginnen. Außerdem sollen die Zeicheneinheiten auf den Außenleitern gleich $l_1 = l_2 = l$ gesetzt und die Mittelleiter mit $l_3 = 2l \cos \alpha$ geteilt werden. Die dann entstehenden Leitergleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} X &= l \cdot f_1(x) \\ Y &= l \cdot f_2(y) \\ Z &= 2l \cos\alpha\, f_3(z) \end{aligned}} \tag{29}$$

werden in (28) eingesetzt, so daß die Schlüsselgleichung

$$\boxed{\frac{1}{f_3(z)} = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(y)}} \tag{30}$$

entsteht. Wie die Schlüsselgleichung (30) zeigt, werden durch die beschriebene Tafelart Funktionen dargestellt, bei denen der Kehrwert eines Funktionsterms gleich der Summe der Kehrwerte zweier anderer Funktionsterme ist.
Solche Gleichungen kommen in der Physik häufig vor, z. B. bei der Parallelschaltung von elektrischen Widerständen und in der Optik. Da hier nur einfache Anwendungen interessieren, soll nicht allgemein auf die Berücksichtigung von Faktoren in der Schlüsselgleichung (30) eingegangen werden. Die Teilung der z-Leiter wird besonders einfach, wenn $\alpha = 60°$ gewählt wird, da dann $2\cos\alpha = 1$ und damit $l_3 = l$ ist, d. h., die Mittelleiter besitzt dieselbe Zeicheneinheit wie die Außenleitern. Doch ist dann das Nomogramm durch die große Spreizung der Leitern unhandlich. Außerdem läßt die Genauigkeit infolge flacher Schnitte der Ablesegeraden zu wünschen übrig. Der Winkel wird deshalb aus dem zur Verfügung stehenden Platz (Höhe h, Breite k, vgl. Bild 42) bestimmt durch

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{k}{2h}} \tag{31}$$

Auf den Außenleitern steht dann als größte Zeichenlänge zur Verfügung

$$\boxed{X_{\max} = Y_{\max} = \frac{k}{2\sin\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha}} \tag{32}$$

BEISPIELE

1. Es ist ein Nomogramm für das Linsengesetz

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

zu entwerfen. Hierbei bedeuten f die Brennweite, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite. Sowohl b als auch g sollen zwischen 0 und 120 mm variieren.
Höhe und Breite der Tafel sind mit 120 mm vorzusehen.

Lösung: Die Zahlenwertgleichung lautet

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Dies entspricht der Schlüsselgleichung (30) mit linearen Teilungen auf den Leitern. Nach (31) ist

$$\tan\alpha = \frac{k}{2} : h = 60\text{ mm} : 120\text{ mm} = 1:2,$$

$$\alpha = 26{,}6^\circ.$$

Für das Anlegen des Nomogramms wird nicht der Winkel, sondern das Verhältnis 1:2 für $\tan\alpha$ verwendet.
Aus Gleichung (32) ergibt sich

$$X_{\max} = Y_{\max} = \frac{120\text{ mm}}{2\sin 26{,}6^\circ} = 134\text{ mm},$$

$$l \leqq \frac{134\text{ mm}}{120} = 1{,}12\text{ mm}.$$

Mit dem glatten Wert $l = 1$ mm lauten die Gleichungen der Leitern nach (29)

$$X = 1\text{ mm}\cdot x$$

$$Y = 1\text{ mm}\cdot y$$

$$Z = 2\text{ mm}\cdot\cos 26{,}6^\circ\cdot z = 1{,}79\text{mm}\cdot z.$$

Statt aus der unbequemen Zeicheneinheit kann die Mittelleiter leicht hergestellt werden, wenn zwei Punkte der Außenleitern mit gleichem Zahlenwert miteinander verbunden werden. Diese Ablesegerade schneidet dann die Mittelleiter in einem Punkt mit dem halben Zahlenwert, denn es ist für $x = y$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{2}.$$

Danach können alle Punkte der Mittelleiter in Tafel 31 bestimmt werden.

Ablesebeispiel: $g = 100$ mm, $b = 50$ mm $\rightarrow$ $f = 33{,}3$ mm.

2. Zur Berechnung der Maschinenhauptzeiten beim zerspanenden Formen (z. B. Hobeln oder Schleifen) spielen die Geschwindigkeit beim Arbeitsgang v_a, die Geschwindigkeit beim Rücklauf v_r und die mittlere Geschwindigkeit v_m eine Rolle.
Für

$$\frac{2}{v_m} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r}$$

ist in den Bereichen

$$0 \leqq \frac{v_a}{\text{m min}^{-1}} \leqq 100, \quad 0 \leqq \frac{v_r}{\text{m min}^{-1}} \leqq 100$$

eine Leitertafel herzustellen, Höhe $h = 80$ mm, Breite $k = 120$ mm.

Lösung: Mit den Zahlenwerten

$$x = \frac{v_a}{\mathrm{m\,min^{-1}}}, \quad y = \frac{v_r}{\mathrm{m\,min^{-1}}}, \quad z = \frac{v_m}{\mathrm{m\,min^{-1}}}$$

entsteht die Zahlenwertgleichung

$$\frac{1}{\frac{z}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Es ist also $f_1(x) = x$, $f_2(y) = y$ und $f_3(z) = \frac{z}{2}$.

Weiter folgt $\tan\alpha = 3:4$, $\alpha = 36{,}9°$ und

$$X_{\max} = Y_{\max} = \frac{120\ \mathrm{mm}}{2\sin 36{,}9°} = 100\ \mathrm{mm}.$$

Danach kann

$$l \leqq \frac{100\ \mathrm{mm}}{100} = 1\ \mathrm{mm}$$

gewählt werden, so daß die Leitergleichungen lauten

$$X = 1\ \mathrm{mm}\cdot x$$
$$Y = 1\ \mathrm{mm}\cdot y$$
$$Z = 2\ \mathrm{mm}\cdot\cos 36{,}9°\cdot\frac{z}{2} = 0{,}8\ \mathrm{mm}\cdot z.$$

Das danach angelegte Nomogramm zeigt Tafel 32.

Ablesebeispiel: $v_a = 30\ \mathrm{m\,min^{-1}}$, $v_r = 90\ \mathrm{m\,min^{-1}}$, $v_m = 45\ \mathrm{m\,min^{-1}}$.

Im letzten Beispiel konnte der Faktor 2 leicht durch eine entsprechende Zeicheneinheit der Ergebnisleiter erfaßt werden. Wenn ein solcher Faktor bei einem der Summanden $\frac{1}{f_1(x)}$ oder $\frac{1}{f_2(x)}$ auftritt, kann er durch verschiedene Zeicheneinheiten l_1 und l_2 berücksichtigt werden. Es sind dann die entsprechenden Leitergleichungen mit $l_1 \neq l_2$ in (28) einzusetzen, wobei diese Größen so zu wählen sind, daß das vorgelegte Gesetz erfüllt wird. Wenn solche Fälle häufig auftreten, können allgemeine Formeln zur Erfassung von Faktoren A, B und C ähnlich wie in 1.3.2. hergeleitet werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung ungleicher Faktoren bei den Summanden besteht darin, die Winkel zwischen den Leitern verschieden zu wählen. Wenn α der Winkel zwischen x- und z-Leiter und β der Winkel zwischen z- und y-Leiter ist, lautet die (28) entsprechende Gleichung

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{Z} = \frac{\sin\beta}{X} + \frac{\sin\alpha}{Y},$$

in die die Leitergleichungen einzusetzen sind. Für $\alpha \neq \beta$ ergeben sich also ungleiche Faktoren bei den Summanden. Für diese Tafelform wird auf die angegebene weiterführende Literatur verwiesen.

Zwei parallele Leitern werden von einer dritten geschnitten

In Bild 43 ist der grundsätzliche Aufbau einer Leitertafel mit zwei parallelen Leitern dargestellt, die von einer dritten Leiter geschnitten werden. Wegen ihrer Gestalt wird diese Art der Leitertafel häufig als **N-Nomogramm** bezeichnet.

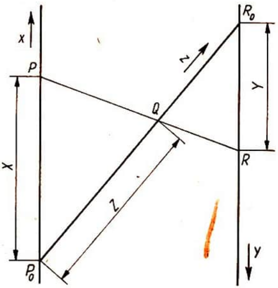


Bild 43

Die x-Leiter beginnt im Punkt P_0, die parallele y-Leiter in R_0; die letztere ist gegenläufig geteilt. Die z-Leiter hat ebenfalls den Anfangspunkt P_0 und endet in R_0; ihre Länge ist $\overline{P_0R_0} = a$. Eine Ablesegerade erzeugt auf den drei Leitern die Abschnitte X, Y und Z.
Der Zusammenhang zwischen diesen drei Abschnitten wird durch Anwendung des Strahlensatzes ermittelt:

$$X : Y = Z : (a - Z). \tag{33}$$

Auf der x- und y-Leiter seien beliebige Funktionsteilungen $X = l_1 \cdot f_1(x)$, $Y = l_2 \cdot f_2(y)$ aufgetragen. Wäre auch auf der z-Leiter eine solche beliebige Teilung $Z = l_3 \cdot f_3(z)$ angebracht, ergäbe sich eine Schlüsselgleichung von einer so speziellen Form, daß diese kaum Anwendung finden könnte. Deshalb wird für die ganze rechte Seite von (33) gesetzt

$$L_3 \cdot f_3(z) = \frac{Z}{a - Z}$$

oder, nach Z aufgelöst:

$$\boxed{Z = a\,\frac{L_3 f_3(z)}{L_3 f_3(z) + 1}} \tag{34}$$

Die Schlüsselgleichung lautet dann, wenn noch $L_3 = \frac{l_1}{l_2}$ gesetzt wird,

$$\boxed{f_3(z) = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}} \tag{35}$$

Damit ist die Division und — nach Umformung — auch die Multiplikation von zwei Funktionstermen in einer Leitertafel darstellbar. Das wäre zwar auch durch eine Leitertafel mit drei parallelen Leitern möglich, doch müßte dafür die Gleichung erst logarithmiert werden, damit sie mit der Schlüsselgleichung (25) übereinstimmt. Die entstehenden logarithmischen Teilungen sind aber in manchen Fällen, z. B. in zusammengesetzten Nomogrammen, störend.
Die Gleichung (34) der Ergebnisleiter ist die einer gebrochen rationalen Funktion mit $f_3(z)$ und entspricht der Gleichung (6) der projektiven Leiter. Jedoch ist an die Stelle der Variablen x jetzt der Term $L_3 f_3(z)$ getreten, wobei $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ gilt. Die z-Leiter ist also nicht unmittelbar eine projektive Leiter für z, sondern entsteht durch projektive Umformung der zu $f_3(z)$ gehörigen Funktionsleiter.

BEISPIEL

3. Geht ein Lichtstrahl von einem Medium in ein optisch dichteres über, so wird der Strahl nach dem Einfallslot hin gebrochen (Bild 44). Die Brechzahl n (Brechungsindex) ist für jeden Stoff charakteristisch.
Für das Brechungsgesetz

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ist eine N-Leitertafel zu entwerfen. Für die Brechzahlen folgender Stoffe sind besondere Marken anzubringen:

Luft	Wasser	Kronglas	Diamant
1	1,33	1,5	2,4

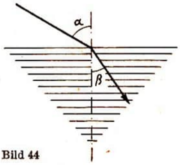


Bild 44

Tafelhöhe 125 mm, Tafelbreite 60 mm.
Unter welchem Winkel wird ein Lichtstrahl gebrochen, der unter $\alpha = 27°$ auf Kronglas fällt? Welche Größe hat der Grenzwinkel der Totalreflexion ($\alpha = 90°$) für Wasser?

Lösung: Die vorliegende Funktionsgleichung ist von der Form (35) mit $f_1(x) = \sin x$, $f_2(y) = \sin y$, $f_3(z) = z = n$.
Für die x- und y-Leiter können zunächst die Zeicheneinheiten gewählt werden. Aus dem physikalischen Zusammenhang folgt, daß die Winkelbereiche $0 \cdots 90°$ sinnvoll sind.

$$l_1 = l_2 \leqq \frac{125\ \text{mm}}{\sin 90° - \sin 0°} = 125\ \text{mm}.$$

Mit dieser Zeicheneinheit können die x-Leiter von unten nach oben und die y-Leiter von oben nach unten mit einer Sinusteilung versehen werden (Tafel 33).

Die Anfangspunkte P_0 und R_0 begrenzen die Mittelleiter mit $\overline{P_0R_0} = a$, wobei in P_0 zugleich ihr Anfangswert liegt. Nach Gleichung (34) gilt für die z-(n-)Teilung mit $L = 1$

$$Z = a\frac{z}{z+1} = a\left(1 - \frac{1}{z+1}\right).$$

Da im vorliegenden Fall $f_3(z)$ unmittelbar gleich der Variablen z ist, liegt eine gewöhnliche projektive Leiter vor, die in üblicher Weise durch Projektion aus einer regulären z-Leiter gewonnen werden kann (vgl. 1.1.3.2.). Dazu sind drei Punkte zu wählen, z. B.

z	0	1	∞
Z	0	$\frac{a}{2}$	a

Als Träger der regulären Leiter kann die x-Leiter verwendet werden, die mit der projektiven Leiter denselben Anfangspunkt P_0 hat. Der Pol P der Projektion liegt auf der y-Leiter, da er parallel zur regulären Leiter den Punkt ∞ in R_0 erzeugen muß (Bild 45). Die beliebige reguläre Leiterteilung wird so gewählt, daß der interessierende Bereich der z-Leiter mit nicht zu flach schneidenden Strahlen projiziert wird. Die reguläre Teilung und die Projektionsstrahlen sind nur zur Anlage der Tafel 33 nötig und können im endgültigen Nomogramm weggelassen werden.

Die geforderten Aufgaben sind in Tafel 33 eingetragen:

$$\alpha = 27°, \quad n = 1{,}5 \text{ (Kronglas)} \rightarrow \beta = 17{,}5°$$
$$\alpha = 90°, \quad n = 1{,}33 \text{ (Wasser)} \rightarrow \beta = 48{,}5°.$$

Zusammenfassung

Drei parallele Leitern

Schlüsselgleichung

$$C[f_3(z) - f_3(z_0)] = A[f_1(x) - f_1(x_0)] + B[f_2(y) - f_2(y_0)]$$

Teilungen:

$$X = l_1[f_1(x) - f_1(x_0)]$$
$$Y = l_2[f_2(y) - f_2(y_0)]$$
$$Z = l_3[f_3(z) - f_3(z_0)]$$

Abstände der Leitern:

b Abstand zwischen x- und z-Leiter

a Abstand zwischen z- und y-Leiter

$$\frac{a}{b} = \frac{Al_2}{Bl_1}$$

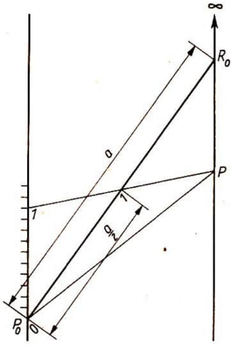


Bild 45

Zeicheneinheit der z-Leiter

$$l_3 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A}\, l_1 = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{C}{B}\, l_2$$

Drei Leitern gehen von einem Punkt aus und schließen gleiche Winkel α ein

Schlüsselgleichung

$$\frac{1}{f_3(z)} = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(y)}$$

Teilungen

$$X = l \cdot f_1(x)$$
$$Y = l \cdot f_2(y)$$
$$Z = 2l \cos\alpha \cdot f_3(z)$$

Höhe der Tafel h, Breite der Tafel k

$$\tan\alpha = \frac{k}{2h}$$

$$X_{\max} = Y_{\max} = \frac{k}{2\sin\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha}$$

Zwei parallele Leitern werden von einer dritten geschnitten

Schlüsselgleichung

$$f_3(z) = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$$

Teilungen

$$X = l_1 \cdot f_1(x)$$
$$Y = l_2 \cdot f_2(y)$$
$$Z = a\,\frac{L \cdot f_3(z)}{L \cdot f_3(z) + 1}$$

Dabei ist a Länge der z-Leiter und $L = \dfrac{l_1}{l_2}$.

AUFGABEN

32. Die folgenden Zuordnungen sind durch Doppelleitern darzustellen

a) kW und PS (1 kW = 1,36 PS)

b) cm und Zoll (1″ = 2,54 cm)

33. Auf einer Länge von 120 mm ist eine Doppelleiter für $f(x) = \sin x^\circ$ mit $0 \leqq x^\circ \leqq 360^\circ$ anzufertigen.

34. Für die Gleichung

$$P = \frac{1}{75} \cdot \frac{F}{\mathrm{kp}} \cdot \frac{v}{\mathrm{ms}^{-1}}\ \mathrm{PS}$$

ist in den Bereichen

$$1 \leqq \frac{F}{\mathrm{kp}} \leqq 100$$

$$1 \leqq \frac{v}{\mathrm{ms}^{-1}} \leqq 10$$

eine Leitertafel anzulegen (Höhe 150 mm, Breite 90 mm).

35. Für die Masse von Stahldrähten gilt

$$m = \varrho \cdot \frac{\pi}{4}\, d^2 l,$$

wobei $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg/dm^3}$ zu setzen ist. Unter Verwendung der Umformung aus Beispiel 1 in 1.1.2. ist eine Leitertafel mit den Bereichen

$$0{,}1 \leqq \frac{d}{\mathrm{mm}} \leqq 10$$

$$1 \leqq \frac{l}{\mathrm{m}} \leqq 10^4$$

herzustellen (Höhe 100 mm, Breite 80 mm).

36. Eine Leitertafel ist für

$$z = \frac{x^3}{y}$$

in den Bereichen $1 \leqq x, y \leqq 10$ anzulegen (Höhe 100 mm, Breite 80 mm).

37. Für die Gleichung von Aufgabe 3 ist eine Leitertafel in den Bereichen

$$15 \leqq \frac{U}{\mathrm{V}} \leqq 150$$

$$0{,}01 \leqq \frac{d}{\mathrm{mm}} \leqq 1$$

und mit $A = 10\ \mathrm{cm^2}$ anzulegen. Die Kraft F ist in Millipond anzugeben (Höhe 120 mm, Breite 75 mm).

38. Der Scheinwiderstand für die Reihenschaltung eines Ohmschen und eines induktiven Widerstandes ist

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Zur Auswertung dieser Formel ist eine Leitertafel mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 314\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ in den Bereichen

$$0 \leqq \frac{R}{\Omega} \leqq 300, \quad 0 \leqq \frac{L}{\mathrm{H}} \leqq 1$$

zu entwerfen (Höhe 150 mm, Breite 100 mm).

39. Eine Leitertafel zur Berechnung zylindrischer Schraubenfedern ist nach der zugeschnittenen Größengleichung

$$F = \frac{0{,}002 \left(\dfrac{d}{\mathrm{mm}}\right)^3 \cdot \dfrac{\tau_{zul}}{\mathrm{kp\,cm^{-2}}}}{\dfrac{r}{\mathrm{mm}}}\ \mathrm{kp}$$

in den Bereichen

$$1 \leqq \frac{d}{\mathrm{mm}} \leqq 10 \quad \text{und} \quad 10 \leqq \frac{r}{\mathrm{mm}} \leqq 100$$

zu entwerfen. Es bedeuten F die Last, r den mittleren Windungsdurchmesser und d die Dicke des Drahtes; für die zulässige Spannung ist zu setzen $\tau_{zul} = 3500\ \mathrm{kp\,cm^{-2}}$ (Höhe 120 mm, Breite 80 mm).

40. Es ist eine Leitertafel mit drei parallelen Leitern zu entwerfen, deren Abstände a und b sich wie 1:2 verhalten und auf denen logarithmische Leitern mit gleichen Zeicheneinheiten aufgetragen sind.
Welche Funktion wird durch diese Leitertafel dargestellt?

41. Welche Form einer Leitertafel mit regulären Leitern kann für die Funktionsgleichung

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{(Parallelschaltung von zwei Widerständen)}$$

angewendet werden? (Anleitung: Umformung der Funktionsgleichung)

42. Die Beziehung für die Wheatstonesche Brückenschaltung

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{X}{L - X}$$

(vgl. Aufgabe 12), wobei $L = 1000$ mm die Länge des Meßdrahtes ist, soll in Form einer N-Leitertafel dargestellt werden.

Bereiche: $0 \leqq \dfrac{R_x}{\Omega} \leqq 100$

$$0 \leqq \frac{R_n}{\Omega} \leqq 100$$

$$0 \leqq \frac{X}{\mathrm{mm}} \leqq 1000$$

Höhe 100 mm, Breite 80 mm

1.4. Zusammengesetzte Nomogramme

1.4.1. Verknüpfung von Nomogrammen

Mit den bisher behandelten Netz- und Leitertafeln können Funktionen mit drei Variablen dargestellt werden. Liegt die Aufgabe vor, in der Praxis häufig vorkommende Funktionen mit vier und mehr Variablen zu erfassen, so kann das mit Hilfe von **zusammengesetzten Netz- und Leitertafeln** geschehen. Dazu ist die vorliegende Funktion in *Teilfunktionen* mit *jeweils drei* Variablen aufzuspalten, und für diese sind mit den bekannten Methoden die zugehörigen Nomogramme zu entwerfen. Die entstehenden Teilnomogramme sind in geeigneter Weise zu verknüpfen. Liegt z. B. eine Funktionsgleichung mit vier Variablen

$$v = f(x;y;u)$$

vor, so kann es gelingen, einen Teil

$$z = f_1(x;y)$$

abzuspalten, der nur die Variablen x und y enthält. Mit der Hilfsvariablen z geht dann die ursprüngliche Funktionsgleichung in

$$v = f_2(z;u)$$

über. Damit wird die vorgelegte Funktion mit vier Variablen in zwei Schritten gebildet, wobei allerdings zusätzlich eine Hilfsvariable auftritt, so daß jetzt insgesamt fünf Variablen vorkommen. Es muß bemerkt werden, daß die Aufspaltung der Funktion in Teilfunktionen, die nur jeweils zwei unabhängige Variablen enthalten, nicht in allen Fällen möglich ist. Der beschriebene Weg ist jedoch in zahlreichen praktisch wichtigen Fällen anwendbar. Die Teilnomogramme können als Netz- oder Leitertafeln in bekannter Weise angelegt werden. Es sind jetzt nur Hinweise nötig, wie diese miteinander zu verknüpfen sind. In den meisten Fällen wird die Verbindung über Leitern erfolgen, auf denen die Hilfsvariable (im obigen Beispiel z genannt) in den beiden Teilnomogrammen aufgetragen ist. Lediglich die Verbindung von zwei Netztafeln kann im Ausnahmefall über die Kurvenschar für den Parameter erfolgen, wenn in beiden Teilnomogrammen die Hilfsvariable als Parameter auftritt.

Wenn die zwei Leitern, über die die Verknüpfung erfolgen soll, in *Richtung wie Orientierung, in der Art der Teilung* und *in der Zeicheneinheit übereinstimmen*, so können sie *unmittelbar zur Deckung* gebracht werden oder, wenn dies aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht ratsam ist, als *Leiterpaar nebeneinander* liegen, wobei eine Parallelenschar die Führung beim Übergang vom Nomogramm 1 zum Nomogramm 2 übernimmt (Bild 46). Die Nomogramme können dabei Netz- oder Leitertafeln sein.

Wenn die beiden Leitern *parallel liegen und dieselbe Teilung*, jedoch *verschiedene Zeicheneinheiten* haben, so kann die Verbindung über die Projektionsstrahlen einer

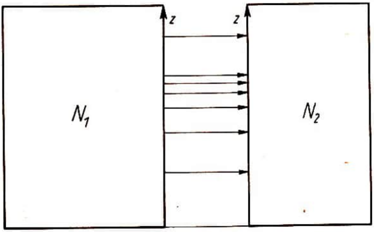


Bild 46

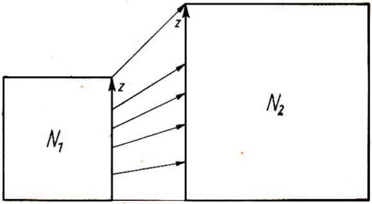


Bild 47

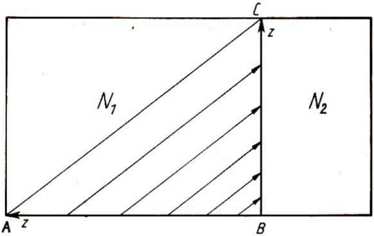


Bild 48

Zentralprojektion zwischen parallelen Leitern erfolgen (Bild 47, vgl. auch 1.1.3.1. und Bild 5). Liegt das Projektionszentrum zwischen den Leitern, kann gleichzeitig eine Richtungsumkehr der Leitern erzielt werden.

Stimmen die Leitern in der *Art ihrer Teilung überein, liegen jedoch verschieden* (z. B. unter rechtem Winkel zueinander), so kann der Übergang zwischen ihnen je nach der geforderten Richtung entweder durch *Parallelprojektion* (Bild 48) oder durch *Spiegelung* über eine sogenannte **Leitlinie** AC nach Bild 49 erfolgen. In beiden Fällen

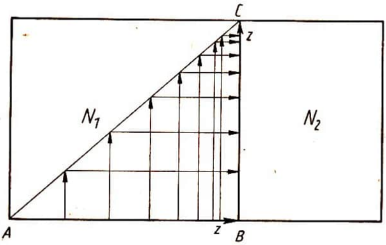


Bild 49

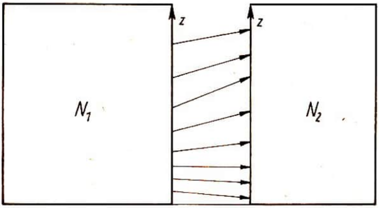


Bild 50

werden auf Grund der Strahlensätze Abschnitte der einen Leiter AB in ähnliche Abschnitte der Leiter BC überführt, wobei gleichzeitig die Zeicheneinheit geändert werden kann.

Bei den bisher beschriebenen Konstruktionen über den Übergang zwischen zwei Leitern brauchen häufig die Führungslinien nicht eingezeichnet zu werden, da sie durch ein ohnehin vorhandenes Netz oder eine einfache Anweisung für den Übergang ersetzt werden können.

Unterscheiden sich schließlich die beiden Leitern *in der Art ihrer Teilung*, so bleibt nichts anderes übrig, als *alle entsprechenden Teilpunkte durch Zuordnungslinien zu verbinden* (Bild 50). Dem Aufbau dieser sogenannten **Zapfenschar** liegt keine einfache Konstruktion zugrunde, so daß alle benötigten Linien einzuzeichnen sind. Die Genauigkeit ist insbesondere bei Interpolation nicht sehr gut.

In den meisten Fällen hat die Hilfsvariable keine praktische Bedeutung, so daß ihre Größe nicht interessiert. Es kann also häufig die Bezifferung der z-Leiter entfallen, und die Verbindungslinien können in beliebigem Abstand gezogen werden. In Bild 46 z. B. kann die Schar von ungleichabständigen Parallelen durch die Linien eines beliebigen Netzes ersetzt werden, die die Führung bei der Ablesung übernehmen.

Alle bisherigen Betrachtungen gelten für beliebigen Aufbau der Teilnomogramme. In den folgenden Abschnitten wird die Verknüpfung der verschiedenen Arten von Nomogrammen behandelt, wobei nur noch ergänzende Angaben nötig sind.

1.4.2. Verbindung von Netztafeln

Die beschriebenen Methoden können auf die Verbindung von Netztafeln angewandt werden, wie am Beispiel

$$v = f(x; y; u)$$

mit der Zerlegung

$$z = f_1(x; y)$$
$$v = f_2(z; u)$$

gezeigt werden soll.
Bei dem Aufbau des Nomogramms nach Bild 51 ist die Leiter der Hilfsvariablen in beiden Netztafeln Abszissenachse. Wenn die Teilungen für z übereinstimmen, können die beiden Teilnomogramme unmittelbar aneinandergelegt werden. Die Ablesung erfolgt in der angedeuteten Weise, wobei der Wert von z nicht interessiert. Dasselbe Verfahren ist natürlich auch möglich, wenn die z-Achse in beiden Netztafeln Ordinatenachse ist.

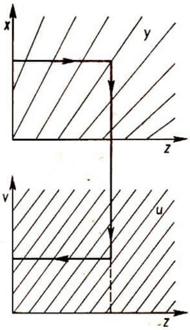


Bild 51

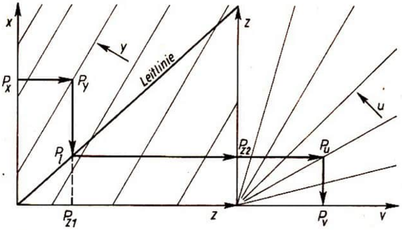


Bild 52

Liegen dagegen die z-Achsen verschiedenartig, so wird eine Spiegelung über eine Leitlinie entsprechend Bild 49 vorgenommen. Beim endgültigen Nomogramm nach Bild 52 wird die Spiegelungsschar nicht mehr eingezeichnet, es braucht nur bei der Ablesung der jeweils interessierende Wert über die Leitlinie projiziert zu werden. Vom Teilungspunkt P_x des gegebenen x-Wertes verläuft die Ableselinie über die

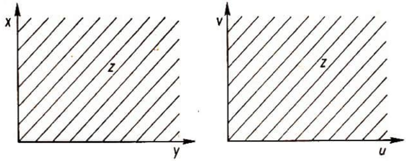


Bild 53

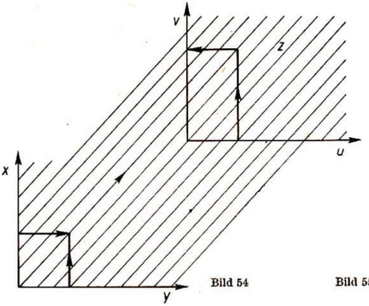


Bild 54

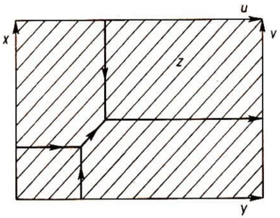


Bild 55

Linie, die zum gegebenen Wert des Parameters y gehört, zur Leitlinie. Die Verlängerung bis zur z-Achse (P_{z1}) ist nicht nötig, die Ablesung geht sofort weiter auf der waagerechten Projektionslinie zum Punkt P_{z2} und von dort über die Linie zum gegebenen u auf die Ergebnisleiter v. Die Ableselinie $P_x P_y P_l P_u P_v$ heißt **Lauflinie**. Eine Beschriftung der z-Leiter ist unnötig.

Falls in beiden Teilnomogrammen die Hilfsvariable z die Rolle des Parameters spielt (Bild 53), läßt sich die Verbindung der Netztafeln durch Verlängern der Schar der z-Linien herstellen (Bild 54). Die Ablesung erfolgt in der in Bild 54 angedeuteten Weise. Hier ist also Voraussetzung, daß die Kurvenschar für den Parameter in beiden Teilnomogrammen völlig gleichartig ist, was nur in Ausnahmefällen erreicht werden kann. Wenn sich das zweite Nomogramm noch entsprechend Bild 55 in das erste hineinschieben läßt, evtl. unter Veränderung der Anfangspunkte der Leitern, entsteht eine handliche Tafel, die nach dem eingezeichneten Schema zu verwenden ist. Die Leitern für u und v sind dann wegen der größeren Übersichtlichkeit an den rechten bzw. oberen Rand herausgezogen worden.

Der Aufbau der Teilnomogramme erfolgt nach den Richtlinien von 1.2., wobei allerdings bei der Anwendung der Formeln beachtet werden muß, daß der Parameter nicht mehr in allen Fällen mit z bezeichnet werden kann.

BEISPIELE

1. Bei Rohren gilt für die Masse je Längeneinheit die Formel

$$\frac{m}{l} = \pi(ds + s^2)\,\varrho .$$

Es bedeuten d die lichte Weite, s die Wandstärke und ϱ die Dichte. Für die gebräuchlichen Maßeinheiten gilt die Gleichung

$$\frac{\frac{m}{l}}{\mathrm{kg\,m^{-1}}} = 0{,}001\,\pi\left[\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)\cdot\left(\frac{s}{\mathrm{mm}}\right) + \left(\frac{s}{\mathrm{mm}}\right)^2\right]\cdot\frac{\varrho}{\mathrm{kg\,dm^{-3}}}.$$

Für diese Funktion ist eine zusammengesetzte Netztafel mit den Bereichen

$$0 \leqq \frac{d}{\mathrm{mm}} \leqq 100,$$

$$0 \leqq \frac{s}{\mathrm{mm}} \leqq 10,$$

$$\frac{\varrho}{\mathrm{kg\,dm^{-3}}} = 2{,}7\ \text{(Aluminium)};\ 7{,}25\ \text{(Gußeisen)};\ 8{,}4\ \text{(Messing)};\ 8{,}9\ \text{(Kupfer)};\ 11{,}4\ \text{(Blei)}$$

zu entwerfen.[1])

Lösung: Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{s}{\mathrm{mm}}, \quad y = \frac{d}{\mathrm{mm}}, \quad u = \frac{\varrho}{\mathrm{kg\,dm^{-3}}}, \quad v = \frac{\frac{m}{l}}{\mathrm{kg\,m^{-1}}}$$

ergibt sich die Gleichung

$$v = 0{,}001\,\pi(yx + x^2)\,u .$$

Wird für die Klammer die Hilfsvariable z eingeführt, so entstehen die Teile

$$z = yx + x^2$$

$$v = 0{,}001\,\pi\,z\,u .$$

a) Teilnomogramm $z = yx + x^2$

Da in dieser Funktionsgleichung eine Addition vorkommt, verbietet sich eine Darstellung im logarithmischen Netz. Die Gleichung entspricht auch nicht unmittelbar den Schlüsselgleichungen (16) und (17) für das mm-Netz. Wenn jedoch x als Parameter gewählt wird, ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen y und z, wobei der Parameter sowohl die Steigung als auch den Abschnitt der entstehenden Geraden beeinflußt.
Aus den Bereichen

$$0 \leqq x \leqq 10, \quad 0 \leqq y \leqq 100$$

folgt durch Einsetzen

$$0 \leqq z \leqq 1100.$$

---

1) Aufgabenstellung nach [5]

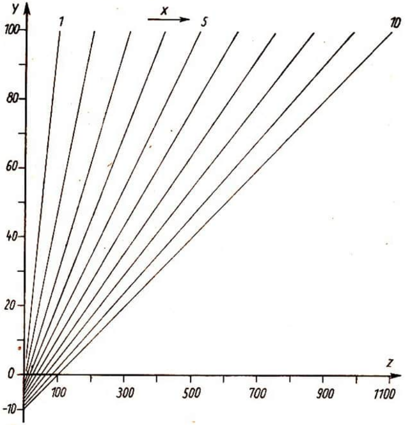


Bild 56

Um einen einfachen Anschluß an das zweite Teilnomogramm zu erhalten, wird die Hilfsvariable z auf der Abszissenachse aufgetragen. Mit den Zeicheneinheiten $l_z = 0{,}1$ mm und $l_y = 1$ mm wird nach dem Schema von Bild 56 das Koordinatensystem angelegt. Die Geraden des Büschels für die Parameterwerte $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$ werden jeweils aus geeigneten Punkten $(z;y)$ ermittelt.
Im endgültigen Teilnomogramm (oberer Teil von Tafel 34) wird die z-Teilung nicht angebracht, da diese Hilfsvariable nicht interessiert.

b) Teilnomogramm $v = 0{,}001\,\pi z u$

Da die z-Teilung aus dem ersten Nomogramm regulär ist, kommt auch hier nur ein Millimeternetz in Betracht. Die vorliegende Gleichung entspricht jetzt unmittelbar (17) mit $A = 0{,}001\,\pi$, $B = 0$. Es ergibt sich also eine Strahlentafel, wobei z als Abszisse festliegt und u als Parameter zu wählen ist. Dies ist auch insofern sinnvoll, als nur einzelne Werte von u benötigt werden. Die Zeicheneinheit $l_z = 0{,}1$ mm ist vom vorhergehenden Nomogramm vorgeschrieben. Mit $l_v = 2$ mm für die vertikale Teilung wird der untere Teil von Tafel 34 angelegt, wobei das zweite Nomogramm so weit nach unten gezogen wird, daß sich die beiden Geradenscharen nicht stören. Die Geraden für $u = 2{,}7$; $7{,}25$; $8{,}4$; $8{,}9$; $11{,}4$ werden jeweils aus zwei Punkten mit den Koordinaten $(z;v)$ ermittelt. An die Linien für den Parameter ist nur die Materialart angeschrieben, da das für den praktischen Gebrauch genügt.

Ablesebeispiel: $d = 80$ mm, $s = 5$ mm, Material Kupfer $\rightarrow \dfrac{m}{l} = 11{,}9\ \mathrm{kg\,m^{-1}}$.

2. Für die Gleichung

$$t_\mathrm{h} = \frac{L}{ns}$$

ist eine zusammengesetzte Netztafel (Maschinenkarte) auf doppelt-logarithmischem Papier anzulegen.

Bereiche:

$$1 \leqq \frac{t_h}{\text{min}} \leqq 100, \quad 0{,}1 \leqq \frac{s}{\text{mm}} \leqq 10,$$

$$\frac{L}{\text{mm}} = 10, 20, \ldots, 100, \quad \frac{n}{\text{min}^{-1}} = 11, 22, 45, 90, 180, 360.$$

Es bedeuten:

L die Drehlänge,

n die Umdrehungen des Werkstückes,

s den Vorschub,

t_h die Hauptzeit (Schnittdauer für die Drehlänge L).

Lösung: Mit

$$x = \frac{t_h}{\text{min}}, \quad y = \frac{L}{\text{mm}}, \quad u = \frac{n}{\text{min}^{-1}}, \quad v = \frac{s}{\text{mm}}$$

entsteht die Zahlenwertgleichung

$$x = \frac{y}{uv},$$

die in

$$x = \frac{y}{z}$$

$$z = uv$$

zu zerlegen ist.
Beide Gleichungen besitzen die Form der Schlüsselgleichung (22) für doppelt-logarithmisches Netz und ergeben Parallelentafeln.

a) Teilnomogramm $x = \frac{y}{z}$

Auf Grund der geforderten Werte ist es ratsam, y als Parameter zu wählen. Die Zeicheneinheiten werden nach vorhandenem Funktionspapier etwa mit $l_x = l_z = 50$ mm gewählt, dabei wird x auf der Ordinatenachse aufgetragen. Für die vorgegebenen Werte des Parameters werden Punkte zur Ermittlung der Linien der Geradenschar berechnet. Danach kann die linke Hälfte von Tafel 35 angelegt werden. Die Werte $1 \cdots 100$ für die Hilfsvariable z sind nicht an die Abszissenachse angeschrieben, da sie nicht benötigt werden, sondern lediglich die Werte $10 \cdots 100$ für den Parameter y. (Die Numerierung der Diagonalen stimmt mit der Bezifferung eines Teils der z-Leiter überein.)
Die z-Teilung wird mit der Leitlinie auf den rechten Rand übertragen und steht dort mit derselben Zeicheneinheit als Ausgangsleiter für das zweite Teilnomogramm zur Verfügung.

b) Teilnomogramm $z = uv$

Da für u nur einige Werte vorgesehen sind, wird es als Parameter benützt, v wird auf der Abszissenachse mit der durch das Netz festliegenden Zeicheneinheit und dem gegebenen Bereich aufgetragen. Die Geraden der Schar werden wieder aus geeigneten Punkten ermittelt, wobei für die Anlage des rechten Teiles von Tafel 35 die nicht angeschriebenen Werte der Hilfsvariablen z benötigt werden.

Ablesebeispiel: $s = 0{,}6$ mm, $n = 22\ \mathrm{min}^{-1}$, $L = 100$ mm $\rightarrow$ $t_h \approx 7{,}5$ min. (Der Wert der Hilfsvariablen $z \approx 13$ ist ohne Bedeutung.) Die Lauflinie geht entsprechend den vorgegebenen Werten vom rechten Teil des Nomogramms nach dem linken.

1.4.3. Verbindung von Leitertafeln

Die Darstellung einer Funktion mit vier Variablen durch eine zusammengesetzte Leitertafel soll am Beispiel der Funktionsgleichung

$$v = \frac{xy}{u}$$

gezeigt werden. Die Zerlegung erfolgt in

$$z = xy$$

$$v = \frac{z}{u}.$$

Die Darstellung dieser Funktionen in Form von Leitertafeln ist schematisch in Bild 57 gezeigt, wobei auf Einzelheiten (Zeicheneinheiten, Abstandsverhältnisse usw.) nicht eingegangen wird. Es ist jedoch schon angedeutet, daß die u-Leiter auf Grund der Division durch u gegenläufig geteilt ist.

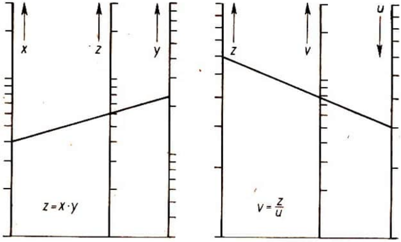


Bild 57

Die Verbindung der beiden Teilnomogramme muß über die z-Leiter erfolgen. Im genannten Beispiel sind beide z-Leitern logarithmisch zu teilen. Durch geeignete Wahl der übrigen Zeicheneinheiten und der Abstände läßt es sich erreichen, daß

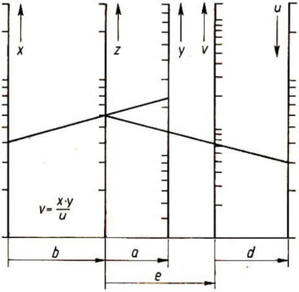


Bild 58

auch die Zeicheneinheiten der beiden z-Leitern übereinstimmen. So ist die in Bild 58 angedeutete Vereinigung der beiden Nomogramme zu einer **zusammengesetzten Leitertafel** oder **Verbundtafel** möglich.

Das Ablesen erfolgt in zwei Schritten, die auch in Bild 58 angedeutet sind: Durch die Punkte zu den gegebenen x- und y-Werten wird eine Ablesegerade gelegt. Durch deren Schnittpunkt mit der z-Leiter und den Punkt für den gegebenen u-Wert geht eine zweite Ablesegerade, die im Schnittpunkt mit der v-Leiter das Ergebnis anzeigt. Auf der Leiter für die Hilfsvariable z schneiden sich die beiden Ablesegeraden. Dort liegen die **Dreh-** oder **Zapfenpunkte** der Fluchtlinien; deshalb heißt sie **Zapfenlinie**. Der Wert der Hilfsvariablen wird im allgemeinen nicht benötigt, daher ist eine Bezifferung der Zapfenlinie nicht erforderlich. Gelegentlich wird auf ihr eine beliebige reguläre Teilung angebracht, damit der Schnittpunkt der ersten Geraden als Ausgangspunkt für die zweite Gerade festgehalten werden kann.

Die Zerlegung der Funktion in Teilfunktionen ist an sich willkürlich, zu vermeiden ist nur eine Form, bei der die Hilfsvariable in beiden Teilnomogrammen auf der Ergebnisleiter erscheint, da dann das Aufstellen einer gemeinsamen Gleichung für die z-Leiter umständlich wird.

In manchen Fällen ist es zu empfehlen, die z-Leiter in beiden Teilnomogrammen zur Außenleiter zu machen, indem z. B. durch Wahl einer negativen Zeicheneinheit (gegenläufige Teilung) ein negatives Abstandsverhältnis erzeugt wird. Die beiden Teilnomogramme liegen dann auf verschiedenen Seiten der Zapfenlinie, so daß die Übersichtlichkeit größer wird. Dieser Aufbau ist vor allem zu empfehlen, wenn die beiden Leitern für die Hilfsvariable nicht zur Deckung gebracht werden können, sondern durch eine Zapfenschar verbunden werden müssen. Andererseits kann durch einen solchen Aufbau das Nomogramm zu breit und damit unhandlich werden. Allgemeine Regeln lassen sich nicht aufstellen, in jedem Einzelfall muß die Anordnung gewählt werden, die ein handliches und nicht zu stark verschachteltes Nomogramm ergibt, bei dem die Ablesegeraden die Leitern nicht zu flach schneiden.

BEISPIELE

1. Der Leistungsbedarf P eines Motors ist

$$P = \frac{Fv}{\eta}.$$

Hierbei sind F die Last, v die Geschwindigkeit und η der mechanische Wirkungsgrad. Für den praktischen Gebrauch sind die Bereiche $0{,}1 \leqq \eta \leqq 1$; $10\,\mathrm{kp} \leqq F \leqq 100\,\mathrm{kp}$; $0{,}1\,\mathrm{ms^{-1}} \leqq v \leqq 3\,\mathrm{ms^{-1}}$ vorgegeben. Es ist eine Leitertafel mit der Höhe 180 mm und Breite 100 mm zu entwerfen.

Lösung: Mit

$$x = \frac{F}{\mathrm{kp}}, \quad y = \frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}, \quad u = \eta, \quad w = \frac{P}{\mathrm{kpms^{-1}}}$$

heißt die Zahlenwertgleichung

$$w = \frac{xy}{u}.$$

Sie entspricht damit im Aufbau dem oben behandelten Beispiel und den Verhältnissen von Bild 58.

a) Teilnomogramm $z = xy$

Logarithmieren ergibt $\lg z = \lg x + \lg y$ und damit Übereinstimmung mit der Schlüsselgleichung (25) mit $A = B = C = 1$. Alle Leitern erhalten logarithmische Teilungen. Nach (4) folgt

$$l_x \leqq \frac{180\,\mathrm{mm}}{\lg 100 - \lg 10} = 180\,\mathrm{mm}$$

$$l_y \leqq \frac{180\,\mathrm{mm}}{\lg 3 - \lg 0{,}1} = 122\,\mathrm{mm}.$$

Mit $l_x = 180$ mm, $l_y = 120$ mm läßt sich nach (26) das Abstandsverhältnis ermitteln:

$$\frac{a}{b} = \frac{A \cdot l_y}{B \cdot l_x} = \frac{1 \cdot 120\,\mathrm{mm}}{1 \cdot 180\,\mathrm{mm}} = \frac{2}{3},$$

das zunächst versuchsweise mit $a = 20$ mm, $b = 30$ mm befriedigt werden soll. Nach (27) gilt für die z-Leiter $l_z = 72$ mm, und aus $x_0 = 10$, $y_0 = 0{,}1$ folgt für den Anfangspunkt $z_0 = 1$. Mit diesen Werten geht die Zapfenlinie in das zweite Teilnomogramm ein.
Mit den berechneten Zeicheneinheiten und Leiterabständen kann die linke Hälfte von Tafel 36 angelegt werden.

b) Teilnomogramm $w = \dfrac{z}{u}$

Wieder ergibt Logarithmieren eine Gleichung der Form (25)

$$\lg w = \lg z - \lg u,$$

wobei jetzt $A = 1, B = -1, C = 1$ ist. Die z-Leiter liegt vom vorangegangenen Nomogramm her fest ($l_z = 72$ mm, $z_0 = 1$). Für das geforderte Intervall gilt:

$$l_u \leqq \frac{180\,\mathrm{mm}}{\lg 1 - \lg 0{,}1} = 180\,\mathrm{mm}.$$

Bei der durch Bild 58 gegebenen Anordnung der Leitern ist die u-Leiter wegen des negativen B gegenläufig zu teilen, also $l_u = -180$ mm mit $u_0 = 1$, $u_n = 0{,}1$.
Die Leiterabstände sind lt. Bild 58 mit d und e bezeichnet, es gilt:

$$\frac{d}{e} = \frac{A l_u}{B l_z} = \frac{1 \cdot (-180 \text{ mm})}{-1 \cdot 72 \text{ mm}} = \frac{5}{2}.$$

Falls $d = 50$ mm und $e = 20$ mm gewählt werden, fallen die y- und w-Leiter zusammen ($a = e$). Das bringt keine Schwierigkeiten mit sich, da sich die beiden Teilungen an verschiedenen Seiten des Trägers anbringen lassen.
Mit dieser Wahl der Leiterabstände wird die geforderte Tafelbreite eingehalten,

$$b + e + d = 100 \text{ mm},$$

es braucht also nachträglich nichts mehr geändert zu werden. Für die Zeicheneinheit der w-Leiter ergibt sich nach (27)

$$l_w = \frac{d}{d+e} \cdot \frac{C}{A} \cdot l_z = 51{,}43 \text{ mm}.$$

Aus $z_0 = 1$, $u_0 = 1$ folgt $w_0 = 1$.
Damit kann die Tafel 36 vervollständigt werden.

Ablesebeispiele:

a) $F = 60$ kp, $v = 2 \text{ ms}^{-1}$, $\eta = 0{,}5 \rightarrow P = 240 \text{ kpms}^{-1}$;

b) $P = 20 \text{ kpms}^{-1}$, $\eta = 0{,}64$, $v = 0{,}25 \text{ ms}^{-1} \rightarrow F = 51{,}2$ kp.

2. Es ist eine zusammengesetzte Leitertafel zur Ermittlung der Masse m (in kg) von Eisenrohren ($\varrho = 7{,}85 \text{ kg dm}^{-3}$) zu entwickeln, die die Länge l, den äußeren Durchmesser D und den inneren Durchmesser d haben.

Bereiche: $0 \leqq \frac{d}{\text{mm}} \leqq 100$

$0 \leqq \frac{D}{\text{mm}} \leqq 150$

$1 \leqq \frac{l}{\text{m}} \leqq 20$

Maximale Höhe und Breite 100 mm

Lösung: Für die Masse gilt die Formel

$$m = \varrho \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)\, l.$$

Mit dem gegebenen Wert für ϱ und den vorgegebenen Einheiten ergibt sich entsprechend den Umformungen in 1.1.2., Beispiel 1:

$$\frac{m}{\text{kg}} = 6{,}16 \cdot 10^{-3} \left[\left(\frac{D}{\text{mm}}\right)^2 - \left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2\right] \cdot \frac{l}{\text{m}}$$

und mit den Abkürzungen

$$x = \frac{d}{\text{mm}}, \quad y = \frac{D}{\text{mm}}, \quad u = \frac{l}{\text{m}}, \quad v = \frac{m}{\text{kg}}$$

$$v = 6{,}16 \cdot 10^{-3}(y^2 - x^2) \cdot u.$$

Diese Gleichung soll als Verbundtafel mit der Zerlegung

$$z^2 = y^2 - x^2$$

$$v = 6{,}16 \cdot 10^{-3}\, z^2 u$$

dargestellt werden.

Um im ersten Teilnomogramm einheitliche Leiterteilungen zu erhalten, wurde als Hilfsvariable z^2 gewählt.

Während die erste Gleichung bereits der Schlüsselgleichung (25) entspricht, wird dies für die zweite Gleichung erst durch Logarithmieren erreicht:

$$\lg v = 2 \lg z + \lg u + \lg (6{,}16 \cdot 10^{-3}).$$

Daraus ergibt sich, daß im ersten Teilnomogramm die z-Leiter quadratisch, im zweiten logarithmisch zu teilen ist. Für z stehen sich also zwei nichtkongruente Leitern gegenüber, die nach Bild 50 in 1.4.1. durch eine Zapfenschar verbunden werden.

Dafür ist es ratsam, die Leitertafel nach Bild 59 anzulegen. Die z-Leitern sollen also in beiden Teilnomogrammen Außenleitern sein. Die Zeicheneinheiten auf den beiden z-Leitern sind so zu wählen, daß der wichtigste Bereich mit genügender Genauigkeit übertragen wird.

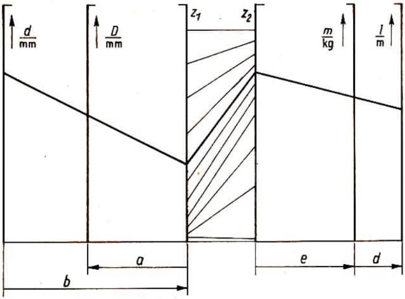


Bild 59

a) Teilnomogramm $z^2 = y^2 - x^2$

Es ergibt sich laut (25) eine Leitertafel mit $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$ und quadratisch geteilten Leitern.

Zeicheneinheiten:

$$l_x \leqq \frac{100\text{ mm}}{100^2 - 0} = 0{,}01\text{ mm}$$

$$l_y \leqq \frac{100\text{ mm}}{150^2 - 0} = 0{,}0044\text{ mm}$$

Wenn eine geringe Einschränkung des Zahlenbereiches auf der y-Leiter zugelassen wird, kann $l_x = 0{,}01$ mm und $l_y = 0{,}005$ mm gewählt werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{A\,l_y}{B\,l_x} = \frac{-1 \cdot 0{,}005\text{ mm}}{1 \cdot 0{,}01\text{ mm}} = -\frac{1}{2}$$

z wird rechte Außenleiter mit $a = -20$ mm, $b = 40$ mm.

$$l_{z1} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{C}{A} \cdot l_x = \frac{-20\text{ mm}}{20\text{ mm}} \cdot \frac{1}{-1} \cdot 0{,}01\text{ mm} = 0{,}01\text{ mm}$$

Anfangspunkte: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_{01} = 0$. Die z_1-Leiter umfaßt damit einen Bereich von 0 bis 100, sie wird jedoch im endgültigen Nomogramm nicht beziffert (Tafel 37).

b) Teilnomogramm $v = 6{,}16 \cdot 10^{-3}\, z^2 u$

Aus dem Vergleich von

$$\lg v = 2 \lg z + \lg u + \lg (6{,}16 \cdot 10^{-3})$$

mit (25) findet man $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$. Der aus dem linken Teilnomogramm stammende Bereich von z $(0 \cdots 100)$ kann nicht vollständig übertragen werden, da die logarithmische Teilung nicht mit Null beginnen kann.
Als wichtigster Bereich wird der von 10 bis 100 herausgegriffen.

$$l_{z2} \leqq \frac{100\text{ mm}}{\lg 100 - \lg 10} = 100\text{ mm}$$

$$l_u \leqq \frac{100\text{ mm}}{\lg 20 - \lg 1} = 76{,}8\text{ mm}$$

Endgültig wird gewählt $l_{z2} = 100$ mm, $l_u = 75$ mm.

$$\frac{d}{e} = \frac{A\,l_u}{B\,l_{z2}} = \frac{2 \cdot 75\text{ mm}}{1 \cdot 100\text{ mm}} = \frac{3}{2}$$

$$d = 30\text{ mm}, \quad e = 20\text{ mm}$$

Mit diesen Maßen und der Breite des 1. Nomogramms ergibt sich eine Gesamtbreite von 90 mm, so daß für die Zapfenschar noch etwa 10 mm zur Verfügung stehen. Der Abstand der z-Leitern ist beliebig, er ist nur so zu wählen, daß die Zuordnungsgeraden nicht zu steil verlaufen.

$$l_v = \frac{d}{d+e} \cdot \frac{C}{A}\, l_{z2} = \frac{30\text{ mm}}{50\text{ mm}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100\text{ mm} = 30\text{ mm}$$

Anfangspunkte: $z_{02} = 10$, $u_0 = 1 \;\rightarrow\; v_0 = 0{,}616$.
Damit kann die vollständige Tafel 37 angelegt werden.

Ablesebeispiel: $d = 50$ mm, $D = 60$ mm, $l = 5$ m $\rightarrow$ $m = 34$ kg.

1.4.4. Verbindung von Netz- und Leitertafeln

Es ist durchaus möglich, die Teilfunktionen, die bei der Zerlegung der darzustellenden Gleichung entstehen, *teilweise durch Netztafeln* und *teilweise durch Leitertafeln* darzustellen. Die Verbindung ist einfach möglich, wenn eine Leiter der Leitertafel gleichzeitig als Achse der sich anschließenden Netztafel verwendet werden kann. Alle behandelten Verknüpfungen lassen sich natürlich auch auf mehr als zwei Nomogramme anwenden. Dabei ist es häufig nützlich, zwischen Netztafeln Leitertafeln zwischenzuschalten, da so der Übergang vereinfacht wird, indem Leitlinien, Zapfenscharen usw. gespart werden. Das gilt vor allem dann, wenn Additionen auftreten, die unmittelbar auf die Schlüsselgleichung der Leitertafel führen.

Vergleich zwischen Netz- und Leitertafeln

Es entsteht nun überhaupt die Frage, welche Tafelart für eine bestimmte Anwendung vorzuziehen ist. Allgemeine Regeln lassen sich nicht aufstellen. Die Netztafel ist, vor allem wenn krummlinige Scharen oder spezielle Funktionsnetze zugelassen werden, umfassender anzuwenden als die Leitertafel, die einen speziellen Aufbau ihrer Schlüsselgleichung besitzt. Die *Netztafel* gestattet weiterhin einen *besseren Einblick in die Eigenschaften der dargestellten Gesetze* (Kurvenform usw.), während die *Leitertafel* ein *reines Recheninstrument* darstellt. Die Leitertafel ist dagegen übersichtlicher, besitzt einen einfacheren Aufbau, benötigt häufig weniger Platz bei gleicher Genauigkeit, und alle Größen lassen sich leicht auf den Leitern ablesen, während bei der Netztafel für den Parameter nur einzelne Werte erfaßt werden können. Bei der Ablesung einer Leitertafel wird ein Hilfsmittel (Lineal o. ä.) und eine glatte Unterlage benötigt, die Netztafel enthält alle zur Ablesung nötigen Führungslinien in sich selbst. Eine Netztafel behält ihre Struktur auch bei einer Deformation, z. B. durch Falten oder Verbiegung, bei der Leitertafel dagegen wird die Ablesegerade u. U. ein anderes Ergebnis liefern.

BEISPIEL

Für die Aufgabenstellung lt. Beispiel 2 des vorangegangenen Abschnittes ist ein Nomogramm herzustellen, das aus einer Leiter- und einer Netztafel zusammengesetzt ist.

Lösung: Die Gleichung

$$v = 6{,}16 \cdot 10^{-3}(y^2 - x^2)\, u$$

mit den Teilgleichungen

$$z^2 = y^2 - x^2$$
$$v = 6{,}16 \cdot 10^{-3}\, z^2 u$$

legt es nahe, den ersten Teil wegen der direkten Übereinstimmung mit der Schlüsselgleichung (25) als Leitertafel beizubehalten und aus Tafel 37 zu übernehmen. Dagegen kann die zweite Teilfunktion als Netztafel dargestellt werden, die unmittelbar an die quadratische Leiter $Z = l_z \cdot z^2$ für die Hilfsvariable angeschlossen werden kann. Dadurch wird das quadratische Glied im Leiteraufbau berücksichtigt, so daß eine lineare Beziehung zwischen den dargestellten Längen übrigbleibt. Die Achse für v kann also regulär geteilt werden. Als Parameter wird u gewählt, es ergibt sich auf Grund des linearen Zusammenhanges eine Geradenschar. Im Grunde ist ein Netz mit quadratischer Teilung für z und linearer Teilung für v erforderlich. Da aber für z die Werte nicht benötigt werden, sondern nur Führungslinien für die Ablesung, kann das Nomogramm auf mm-Papier angelegt werden (Tafel 38). Die angeschriebenen Werte von z werden nur bei der Anlage des Nomogramms zur Ermittlung der Parameterlinien aus zwei Punkten $(z;v)$ gebraucht. Als Ablesebeispiel ist wiederum wie in Tafel 37 $d = 50\,\text{mm}$, $D = 60\,\text{mm}$, $l = 5\,\text{m} \;\rightarrow\; m \approx 34\,\text{kg}$ eingetragen, jedoch ist in diesem Bereich das vorliegende Nomogramm ungenau. Als zweites Ablesebeispiel wurde noch $d = 80$ mm, $D = 110$ mm, $l = 12$ m $\rightarrow$ $m \approx 420$ kg eingetragen.

Das Beispiel zeigt, daß durch die Kombination von Netz- und Leitertafel die mit großen Ungenauigkeiten behaftete Verwendung einer Zapfenschar gespart werden kann.
Die Lösung dürfte die günstigste sein, da eine Darstellung der Funktion durch zwei Netztafeln die Anlage eines speziellen, doppelt-quadratischen Netzes für die erste Teilfunktion verlangt hätte.

AUFGABEN

43. Für die Formel

$$s = \frac{pd}{2k}$$

ist ein Nomogramm aus zwei Netztafeln aufzubauen. Mit der Gleichung kann die Wanddicke s eines Rohres von der lichten Weite d berechnet werden, das einem Druck p ausgesetzt ist, wenn die zulässige Höchstbelastung k beträgt.

Bereiche: $0 \leqq \dfrac{p}{\text{kp}\,\text{cm}^{-2}} \leqq 75$

$$100 \leqq \frac{d}{\text{mm}} \leqq 1000$$

$$\frac{k}{\text{kp}\,\text{cm}^{-2}} = 500,\ 600,\ 700,\ 800,\ 1000,\ 1500,\ 2000$$

$$0 \leqq \frac{s}{\text{mm}} \leqq 30$$

44. Für den Vergleich verschiedener Fördermengen von Kohle wird auf einen gleichen Wassergehalt umgerechnet. Für die Kohlenmenge m mit dem Wassergehalt w (in %), die der Menge M mit dem Wassergehalt W entspricht, gilt

$$m(100\% - w) = M(100\% - W).$$

Es ist ein kombiniertes Nomogramm aus zwei gleichartigen Netztafeln mit den Bereichen

$$0 \leqq \frac{m}{\text{t}},\ \frac{M}{\text{t}} \leqq 800$$

$$\frac{w}{\%},\ \frac{W}{\%} = 0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40$$

zu entwerfen.

Ablesebeispiel: $m = 700$ t, $w = 40\%$, $W = 30\%$, $M = ?$

Es ist zu überlegen, wie auf Grund der Gleichartigkeit der entstehenden Teilnomogramme die Tafel vereinfacht werden kann.

45. a) Für folgende Formeln ist je eine Netztafel mit dem Parameter n auf doppelt-logarithmischem Papier mit $l_x = l_y = 50$ mm anzufertigen:

1. $v = \pi d n$

mit den Intervallen für

den Durchmesser $1 \leqq \frac{d}{\text{mm}} \leqq 100,$

die Schnittgeschwindigkeit $1 \leqq \frac{v}{\text{m}\,\text{min}^{-1}} \leqq 50$

und mit den Drehzahlen $n = 32, 51, 80, 128, 202\ \text{min}^{-1}$.

2. $T = \frac{L}{ns}$

mit der Werkstücklänge $L = 1\ \text{m} = 1000\ \text{mm}$, den Intervallen für

den Vorschub $0{,}1 \leqq \frac{s}{\text{mm}} \leqq 10,$

die Schnittzeit $0{,}1 \leqq \frac{T}{\text{min}} \leqq 10$

und denselben Werten für die Drehzahlen wie bei $v = \pi d n$.

b) Beide Teilnomogramme sind mit Hilfe der Kurvenschar für den Parameter n zu einem Nomogramm zu verknüpfen.

46. Für die Gleichung

$$T = \frac{L}{ns}$$

ist in den Bereichen

$$10 \leqq \frac{L}{\text{mm}} \leqq 1000,$$

$$0{,}1 \leqq \frac{s}{\text{mm}} \leqq 10,$$

$$1 \leqq \frac{n}{\text{min}^{-1}} \leqq 1000$$

eine Verbundleitertafel mit der Zerlegung

$$\xi = \frac{L}{n} \quad \text{und} \quad T = \frac{\xi}{s}$$

anzulegen (Höhe 150 mm, Breite 100 mm).

47. Für den Wärmedurchgang durch eine Wand gilt

$$Q = kA\Delta t,$$

wobei Q die Wärmemenge, A die Fläche, Δt das Temperaturgefälle und k die Wärmedurchgangszahl bedeuten.
Es ist ein kombiniertes Netz- und Leitertafelnomogramm zu entwerfen mit folgenden Angaben:

$\frac{k}{\text{kcal m}^{-2}\,\text{h}^{-1}\,\text{grd}^{-1}}$		
5	(Glas	0,3 cm dick)
3,7	(Stahlbeton	5,0 cm dick)
3,0	(Stahlbeton	12,0 cm dick)
2,1	(Holz	5,0 cm dick)
1,7	(Ziegel	25,0 cm dick)
1,3	(Ziegel	38,0 cm dick)
1,1	(Ziegel	51,0 cm dick)

$$1 \leqq \frac{A}{\text{m}^2} \leqq 10; \qquad 1 \leqq \frac{\Delta t}{\text{grd}} \leqq 50; \qquad 1 \leqq \frac{Q}{\text{kcal h}^{-1}} \leqq 1000$$

48. Die beiden Gleichungen aus Aufgabe 45 sind für beliebiges L in folgender Zerlegung darzustellen

$$n = \frac{v}{\pi d} \quad \text{(Netztafel)}$$

$$h = sn \quad \text{(Leitertafel)}$$

$$T = \frac{L}{h} \quad \text{(Netztafel).}$$

Ablesebeispiel: $d = 60$ mm, $v = 50\ \text{m}\,\text{min}^{-1}$, $s = 0{,}8$ mm, $L = 1000$ mm $\rightarrow$ $T = ?$

2. Matrizenrechnung

2.1. Die Matrix[1])

2.1.1. Anwendungsbeispiele aus Ökonomie und Technik

Die Matrizenrechnung hat in den letzten Jahren für die schnelle Erfassung und die quantitative Auswertung ökonomischer und technologischer Prozesse immer größere Bedeutung gewonnen. Sie ist zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. So lassen sich z. B. fast alle statistischen Ermittlungen in Matrizenform auswerten. Hierzu zwei einfache Beispiele:
Die Tagesproduktion eines Betriebes ergab für die Produkte A, B und C die folgende Qualitätsverteilung:

Qualität \ Produkte	A	B	C
Q	120	95	84
I	440	290	76
II	56	130	120
III	20	85	130

Das rechteckige System dieser *Qualitätsmatrix* läßt erkennen, daß die Zeilen und die Spalten von unterschiedlicher Bedeutung sind. Die einzelnen Spalten lassen die Gesamtmenge je *Produkt*, die einzelnen Zeilen hingegen die Gesamtmenge der einzelnen *Qualitäten* stück- oder mengenmäßig erkennen.

In einem Großbetrieb ergab sich im Monat Januar für die einzelnen Teilbetriebe folgender Verbrauch an Energie und Hilfsstoffen:

Betrieb \ Verbrauch	Kohle (t)	Strom (MWh)	Wasser (m^3)	Holz (m^3)
A	600	37,5	5000	60
B	450	50,0	3200	80
C	320	42,8	2500	30

[1]) matricula (lat.) das Verzeichnis, die Ordnung, die Anordnung

Während in der zuerst angeführten *Qualitätsmatrix* die Spaltensummen die Gesamtproduktion der einzelnen Produkte A, B und C und die Zeilensummen die Gesamtzahl der Produkte je Qualität angeben, lassen sich bei der *Verbrauchsmatrix* nur die Elemente der einzelnen Spalten sinnvoll addieren. Die Spaltensummen geben den Gesamtverbrauch der 3 Teilbetriebe an Kohle, Strom, Wasser und Holz an. Die Addition der Elemente der einzelnen Zeilen hingegen ist zunächst wenig aussagekräftig, da ungleichnamige Größen nicht zusammengefaßt werden können. Werden jedoch die einzelnen verbrauchten Mengen jeweils mit dem entsprechenden Kostenfaktor k_i multipliziert, so geben die einzelnen Zeilensummen die in jedem Teilbetrieb anfallenden Gesamtkosten K_i für den Monat Januar an.

2.1.2. Die Koeffizientenmatrix

Werden für die in der Verbrauchsmatrix gegebenen Mengen die Kosten für Kohle mit k_1 MDN/t, für Strom mit k_2 MDN/MWh, für Wasser mit k_3 MDN/m³ und für Holz mit k_4 MDN/m³ eingesetzt, ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
K_1 &= 600\,k_1 + 37{,}5\,k_2 + 5000\,k_3 + 60\,k_4\\
K_2 &= 450\,k_1 + 50{,}0\,k_2 + 3200\,k_3 + 80\,k_4\\
K_3 &= 320\,k_1 + 42{,}8\,k_2 + 2500\,k_3 + 30\,k_4
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieses linearen Gleichungssystems stimmen mit den Elementen der gegebenen Verbrauchsmatrix überein. Die Matrix

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 600 & 37{,}5 & 5000 & 60\\ 450 & 50 & 3200 & 80\\ 320 & 42{,}8 & 2500 & 30 \end{pmatrix}$$

ist die zu dem gegebenen linearen Gleichungssystem gehörige **Koeffizientenmatrix**.

Allgemein kann jeder Matrix eine lineare Beziehung und umgekehrt jeder linearen Beziehung eine Matrix zugeordnet werden.

In diesem Abschnitt wurden als Anwendungsbeispiele für Matrizen eine *Qualitätsmatrix*, eine *Verbrauchsmatrix* und die **Koeffizientenmatrix** gezeigt. Aufgabe der Matrizenrechnung ist es nun zu untersuchen, wie derartige rechteckige Systeme sinnvoll miteinander verknüpft werden können, und zu definieren, welcher Zusammenhang unter den einzelnen Verknüpfungen jeweils verstanden werden soll. Das wird in 2.2., Relationen und Operationen mit Matrizen, geschehen.

2.1.3. Definitionen, Begriffe, Symbolik

Die in 2.1.2. zwischen dem System $k_1, k_2, \ldots, k_n$, den Kosten je Einheit, und dem System $K_1, K_2, \ldots, K_m$, den Gesamtkosten je Teilbetrieb, dargelegten linearen Beziehungen haben die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n &= K_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n &= K_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \cdots + a_{mn}k_n &= K_m \end{aligned}$$

Die Beziehungen sind durch das Schema der Koeffizienten eindeutig festgelegt. Ein solches rechteckiges Schema wird **Matrix** genannt.

Definition:

Eine Matrix ist ein rechteckiges, nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema von $m \cdot n$ Elementen.

Dabei sind m und n natürliche Zahlen: $m \in N$[1]), $n \in N$.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Matrix als selbständige mathematische Größe anzusehen und sie durch ein mathematisches Symbol zu kennzeichnen.

Als Symbole für Matrizen dienen die großen Frakturbuchstaben bzw. in der Schreibschrift die großen deutschen Buchstaben. Im Druck können Matrizen auch durch fette oder halbfette Antiquabuchstaben gekennzeichnet werden. Außerdem ist es zulässig, Matrizen durch Unterstreichen großer Buchstaben zu symbolisieren.
Die Zusammengehörigkeit der Elemente wird durch Zusammenfassen in einer Klammer dokumentiert.

Es gilt also:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Neben runden Klammern sind auch eckige Klammern und senkrechte Doppelstriche zur Kennzeichnung von Matrizen zugelassen.
Außerdem kann eine Matrix dadurch symbolisiert werden, daß das allgemeine Element a_{ik}, das als Repräsentant aller $m \cdot n$-Elemente gilt, in Klammern gesetzt wird.

$$\boxed{\mathfrak{A} = (a_{ik})} \tag{36}$$

Ebenso kann geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \quad \text{oder} \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ik} \|$$

[1]) N: Symbol für die Menge der natürlichen Zahlen (vgl. [1])

Durch die doppelten Indizes ist die Stellung jedes einzelnen Elements a_{ik} im System eindeutig festgelegt. So steht das Element a_{23} im Kreuzungspunkt der zweiten Zeile und der dritten Spalte.
Bei jedem a_{ik} gibt also das i die Nummer der Zeile und das k die Nummer der Spalte an, in deren Kreuzungspunkt das Element a_{ik} steht. Die Menge der Elemente einer Zeile der Matrix bilden einen **Zeilenvektor** und die Menge der Elemente einer Spalte einen **Spaltenvektor**.

Jede Matrix hat m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren.

In der in 2.1.1. aufgestellten Qualitätsmatrix können die vier Zeilenvektoren als Qualitätsvektoren und die drei Spaltenvektoren als Produktionsvektoren bezeichnet werden.
Vektoren werden durch kleine Frakturbuchstaben bzw. in der Schreibschrift durch kleine deutsche Buchstaben gekennzeichnet. Außerdem können Vektoren in allen den für Matrizen zugelassenen Formen durch entsprechende kleine Buchstaben symbolisiert werden, so z. B. durch Unterstreichen kleiner Buchstaben oder durch Fett- oder Halbfettdruck kleiner Antiquabuchstaben. Die Stellung der einzelnen Vektoren innerhalb des Matrizensystems wird ebenfalls durch Indizes gekennzeichnet. Um die Zeilenvektoren und die Spaltenvektoren zu unterscheiden, soll festgelegt werden, bei *Zeilenvektoren* den *Index* stets *hoch* und bei *Spaltenvektoren* den *Index tief* zu setzen.

Es ist also:

$$\mathfrak{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Vektoren kann eine Matrix wie folgt dargestellt werden:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^1 \\ \mathfrak{a}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{a}^m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n)$$

Diese Darstellung von Matrizen stimmt formal mit der Darstellung von Vektoren überein. Wird eine Matrix wie die Matrix $\mathfrak{A}$ als Spaltenvektor geschrieben, dann sind dessen Elemente $\mathfrak{a}^i$ Zeilenvektoren. Wird die Matrix umgekehrt, wie die Matrix $\mathfrak{B}$, als Zeilenvektor geschrieben, dann sind seine Elemente $\mathfrak{b}_k$ Spaltenvektoren.

2.1.4. Typ der Matrix

Nachdem die Matrizen in 2.1.1. und 2.1.2. nach ihrem Inhalt untersucht und unterschieden wurden, sollen sie jetzt nach ihrer Struktur untersucht werden.

Die Anzahl der Zeilen und Spalten bestimmen den **Typ der Matrix**. Man sagt:

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist eine Matrix vom Typ (m, n) oder eine (m, n)-Matrix.

Allgemein wird der Typ einer Matrix gekennzeichnet, indem die Anzahl der Zeilen und der Spalten tief und in Klammern gesetzt werden. Man schreibt:

$$\boxed{\mathfrak{A}_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}} \tag{37}$$

wobei der Zeilenindex i von 1 bis m und der Spaltenindex k von 1 bis n läuft.
Während die Symbolik

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})$$

nur allgemein kennzeichnet, daß irgendeine Matrix vorliegt, gibt die Symbolik

$$\mathfrak{A}_{(m,n)} = (a_{ik})_{(m,n)}$$

an, daß es sich um eine Matrix von einem ganz bestimmten Typ, nämlich vom Typ (m, n), handelt.
Eine Matrix vom Typ (2,3) wird demnach allgemein wie folgt geschrieben:

$$\mathfrak{A}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren sind also *Matrizen vom Typ* $(1, n)$ und *Spaltenvektoren* sind *Matrizen vom Typ* $(m, 1)$.

Ist im Sonderfall die Anzahl m der Zeilen gleich der Anzahl n der Spalten, liegt eine **quadratische Matrix** n-ter Ordnung vor; so ist z. B.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} x & u & a \\ y & v & b \\ z & w & c \end{pmatrix}$$

eine quadratische Matrix dritter Ordnung. Wie bei Determinanten [1] sind auch hier Haupt- und Nebendiagonale zu unterscheiden. So sind zum Beispiel in der gegebenen Matrix x, v, c die Elemente der Haupt- und z, v, a die Elemente der Nebendiagonalen.

Zu jeder *quadratischen Matrix* $\mathfrak{A}$ existiert die *zugehörige Determinante* $\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|$.

Während die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

zum Beispiel das rechteckige Koeffizientenschema des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 5x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$

darstellt, hat die zugehörige Determinante

$$\det \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

den festen Wert -4. Der Wert einer zweireihigen Determinante ist bekanntlich gleich der folgenden Differenz:

Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus Produkt der Elemente der Nebendiagonalen.

$$1 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = -4$$

Jede Determinante drückt einen Zahlenwert aus, während eine Matrix eine Anordnung von Elementen ist und keinen Zahlenwert besitzt.

2.1.5. Einige besondere Matrizen

Es sollen nunmehr einige Matrizen auf die Besonderheit ihres strukturellen Aufbaus hin untersucht werden.

2.1.5.1. Die Nullmatrix

Definition:

Eine Matrix heißt dann und nur dann Nullmatrix, wenn alle ihre Elemente Null sind.

Im Falle einer einreihigen Matrix spricht man auch vom Nullvektor. Die Nullmatrix kann jeden Typ annehmen. Es ist jedoch nicht üblich, bei der Nullmatrix den Typ im Symbol mit anzugeben. So ist beispielsweise die aus zwei Zeilen und drei Spalten bestehende Nullmatrix

$$\mathfrak{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die aus m Zeilen und n Spalten bestehende Nullmatrix

$$\mathfrak{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Das Symbol $\mathfrak{O}$ ist nicht die Zahl Null, sondern der große Buchstabe $\mathfrak{O}$.

2.1.5.2. Die transponierte Matrix

Definition:

Vertauscht man in einer gegebenen Matrix die Zeilen gegen die entsprechenden Spalten oder umgekehrt, so erhält man die **transponierte Matrix**[1] $\mathfrak{A}^T$.

Aus $\mathfrak{A}_{(m,n)}$ erhält man die transponierte Matrix $\mathfrak{A}^T_{(n,m)}$ und aus $\mathfrak{a}_{(m,n)}$ den transponierten Vektor $\mathfrak{a}^T_{(n,m)}$.

BEISPIEL

Zur Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

ist die transponierte Matrix $\mathfrak{A}^T$ zu bilden.

Lösung:

Nach der Definition sind die Zeilen gegen die entsprechenden Spalten zu vertauschen. Es ist

$$\mathfrak{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{A}^T$ wird auch *gestürzte Matrix* genannt. Die gestürzte Matrix der gestürzten Matrix ist wiederum die ursprüngliche Matrix. Es gilt demnach:

$$\boxed{(\mathfrak{A}^T)^T = \mathfrak{A}} \tag{38}$$

[1] Neben $\mathfrak{A}^T$ findet man in der Literatur als Symbole für die transponierte Matrix noch $\mathfrak{A}'$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$. In diesem Buch soll ausschließlich das Symbol $\mathfrak{A}^T$ benutzt werden

Bei einreihigen Matrizen ist für

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{a}^{\mathrm{T}} = (a_1\ a_2 \ldots a_n)$$

und für

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b} = (b_1\ b_2 \ldots b_m) \qquad \mathfrak{B}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Eine einzeilige Matrix ist die Transponierte einer einspaltigen Matrix und umgekehrt. Diese Eigenschaft wird oft im Drucksatz ausgenutzt. Da die Spaltenvektoren im Druck meist viel Platz benötigen, wird an ihre Stelle gern der gestürzte Spaltenvektor, nämlich der Zeilenvektor $\mathfrak{a}^{\mathrm{T}}$, gesetzt.

2.1.5.3. Besonderheiten einiger quadratischer Matrizen

Definition:

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen Null sind, heißt **Diagonalmatrix.**

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Definition:

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente der Hauptdiagonalen Eins und alle anderen Elemente Null sind, heißt **Einheitsmatrix.**

$$\text{Für } n = 3 \text{ ist } \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{allgemein ist } \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Definition:

Eine quadratische Matrix heißt *symmetrisch*, wenn sie ihrer Transponierten gleich ist.

det $\mathfrak{A}$ ist dann eine symmetrische Determinante.
Zum Beispiel ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 3 & 11 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ eine symmetrische Matrix.}$$

Es ist: $\boxed{\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\mathrm{T}} \quad \text{und} \quad a_{ik} = a_{ki}}$ (39)

Im einzelnen ist: $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}^3 = \mathfrak{a}_3$.

Definition:

Eine Matrix, deren Elemente in der Hauptdiagonalen alle Null sind, während die zur Hauptdiagonalen symmetrischen Elemente sich jeweils nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißt **antimetrische** oder **schiefsymmetrische Matrix.**

Zum Beispiel ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & a \\ 3 & 0 & 1 \\ -a & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ eine antimetrische Matrix.}$$

Für *antimetrische Matrizen* gilt stets

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = -\mathfrak{A} \qquad \text{(vgl. 2.2.3.).} \tag{40}$$

2.2. Relationen und Operationen

Aufgabe der Matrizenrechnung, des **Matrizenkalküls**[1]), ist es, zwischen linearen Systemen, die durch die Elemente der jeweiligen Matrizen gegeben sind, Beziehungen aufzudecken und zu untersuchen sowie diese Systeme durch entsprechende Operationen sinnvoll zu verknüpfen. Da Matrizen rechteckige Systeme, bei denen lediglich die Anordnung der Elemente entscheidend ist, und keine Zahlenwerte darstellen, sind die für das Rechnen mit Zahlenwerten bekannten Rechenoperationen nicht ohne weiteres auf die Matrizenrechnung übertragbar. Es ist deshalb notwendig, *die einzelnen Verknüpfungen von Matrizen sorgfältig zu definieren und den Gültigkeitsbereich der einzelnen Definitionen exakt abzugrenzen.* Ähnliche Überlegungen mußten in der Arithmetik bereits beim Aufbau der einzelnen Zahlenbereiche durchgeführt werden. So sind z. B. die Subtraktion und die Division im Bereich der natürlichen Zahlen nur begrenzt und erst im Körper der rationalen Zahlen unbeschränkt durchführbar. Im folgenden Abschnitt sollen die Verknüpfungen im einzelnen definiert werden.

[1]) Kalkül von calculus (lat.) Rechenstein zum Rechnen auf dem Rechenbrett; Rechnung

2.2.1. Gleichheit zweier Matrizen

In 2.1.2. wurde als Anwendungsbeispiel u. a. die Verbrauchsmatrix für den Monat Januar betrachtet. Wenn der Verbrauch für den Monat Februar dem für den Monat Januar gleich sein soll, dann muß jeder Teilbetrieb im Monat Februar von jedem Posten genau die Menge verbrauchen, die er im Monat Januar benötigt hat. Es darf weder ein zusätzlicher Verbrauch hinzukommen, noch dürfen weitere Teilbetriebe in die Untersuchung einbezogen werden.
Entsprechend wird auch die Gleichheit zweier Matrizen definiert.

Definition:

Zwei Matrizen sind einander nur dann gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und wenn sie in allen ihren entsprechenden Elementen übereinstimmen.

So folgt zum Beispiel aus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{lll} a_{11} = -3 & a_{12} = 5 & a_{13} = 8 \\ a_{21} = 7 & a_{22} = 4 & a_{23} = 6. \end{array}$$

Im Gegensatz hierzu sind bekanntlich Determinanten einander gleich, wenn sie denselben Wert haben, während die Elemente verschieden sein können.
Für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$,
aber

$$\det \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \det \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

also ist $\det \mathfrak{A} = \det \mathfrak{B}$.

2.2.2. Addition und Subtraktion von Matrizen

Wenn aus den Verbrauchsmatrizen der Monate Januar, Februar und März die Verbrauchsmatrix für das I. Quartal gebildet werden soll, setzt das voraus, daß die zu addierenden Matrizen vom gleichen Typ sein müssen und daß jeweils die einander entsprechenden Elemente der drei Monatsmatrizen zu addieren sind. Dasselbe gilt sinngemäß für die Subtraktion. Um aus der Quartalsmatrix den Verbrauch für die Monate Januar und Februar zu ermitteln, sind die Elemente der Matrix des Monats

März von den entsprechenden Elementen der Quartalsmatrix zu subtrahieren. Die Definition für die Addition und die Subtraktion von Matrizen entspricht wiederum vollkommen diesem Sachverhalt.

Definition:

Matrizen werden addiert oder subtrahiert, indem die einander entsprechenden Elemente addiert oder subtrahiert werden.

Das bedeutet, daß nur **Matrizen von gleichem Typ** addiert oder subtrahiert werden können.

Ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (c_{ik})$,

dann ist jedes $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

BEISPIEL

Es sind die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

zu addieren.

Lösung: Nach der Definition ist jedes $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, also:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Hierbei ist es offensichtlich gleich, ob zur Matrix $\mathfrak{A}$ die Matrix $\mathfrak{B}$ oder umgekehrt zur Matrix $\mathfrak{B}$ die Matrix $\mathfrak{A}$ addiert wird, denn bei Vertauschung der Matrizen wird lediglich in den Elementen der Summenmatrix die Reihenfolge der Summanden vertauscht, während der Wert der Elemente unverändert bleibt.
Es gilt also:

$$\boxed{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}} \tag{41}$$

Ebenso gilt:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}).$$

Die Addition von Matrizen ist kommutativ und assoziativ [1].

Ferner gilt:

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{O} = \mathfrak{A}.$$

Die Nullmatrix spielt bei der Addition und der Subtraktion von Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl Null bei der Addition und Subtraktion von Zahlen.

Die Nullmatrix muß nach der Definition der Addition und der Subtraktion von Matrizen stets *vom Typ der ursprünglichen Matrix sein.* Es ist zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

2.2.3. Multiplikation einer Matrix mit dem Faktor k

Sind in der in 2.1.1. gegebenen Verbrauchsmatrix die in jedem der ersten drei Monate des Jahres verbrauchten Mengen gleich, so ergibt sich die Verbrauchsmatrix für das I. Quartal durch einfache Multiplikation aller Elemente der Matrix für den Monat Januar mit drei. Umgekehrt kann bei gleichbleibendem Verbrauch der Monatsverbrauch durch einfache Division aller Elemente der Quartalsmatrix durch drei ermittelt werden.
Diesem Tatbestand entspricht die folgende

Definition:

> Eine Matrix wird mit einem Faktor k multipliziert, indem *jedes Element* der Matrix mit k multipliziert wird.

Die *Division* einer Matrix durch k kann als Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ aufgefaßt werden; sie ist somit auch in der obigen Definition enthalten.
Für $k > 0$ und $k \in N$ läßt sich die Multiplikation einer Matrix mit dem Faktor k auf die Addition von Matrizen zurückführen. So ist z. B. für $k = 2$

$$2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Während bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Faktor k jedes Element der Matrix mit dem Faktor k zu multiplizieren ist, sind bei der Multiplikation einer Determinante mit dem Faktor k nur die Elemente einer Reihe mit dem Faktor k zu multiplizieren. Es ist:

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

oder
$$3\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 6 \\ 12 & -15 \end{pmatrix},$$

aber
$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

oder
$$3\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & 2 \\ 12 & -5 \end{vmatrix}$$

$$3\,(35 - 8) = 105 - 24 = 105 - 24$$

$$81 = 81 = 81$$

Die Regel für die Multiplikation einer Matrix mit einem Faktor ist umkehrbar.

> Haben *alle* Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor k, so kann dieser vor die Matrix gestellt werden.

Auf diese Weise ist es oft möglich, bei betragsmäßig sehr großen oder sehr kleinen Zahlen für die weitere Rechnung bequemere Ausdrücke zu erhalten.

BEISPIELE

Es sollen in den folgenden Matrizen die Elemente weitgehend vereinfacht werden.

1. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 875 & 625 \\ 1375 & 250 \end{pmatrix}$$

Lösung: Der gemeinsame Faktor 125 ist vor die Matrix zu stellen.

$$\mathfrak{A} = 125 \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0{,}00670 & -0{,}00042 \\ 0{,}00028 & 0{,}00300 \end{pmatrix}$$

Lösung: Der gemeinsame Faktor 10^{-3} ist vor die Matrix zu stellen.

$$\mathfrak{B} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 6{,}7 & -0{,}42 \\ 0{,}28 & 3 \end{pmatrix}$$

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Faktor k haben das *kommutative*, das *assoziative* und das *distributive* Gesetz Gültigkeit. Diese seien unter Verzicht auf eine Beweisführung genannt:

Kommutatives Gesetz: $$\boxed{k\mathfrak{A} = \mathfrak{A}k} \tag{42a}$$

Assoziatives Gesetz: $$\boxed{k(l\mathfrak{A}) = (kl)\mathfrak{A} = kl\mathfrak{A}} \tag{42b}$$

Distributives Gesetz: $$\boxed{(k \pm l)\,\mathfrak{A} = k\mathfrak{A} \pm l\mathfrak{A}} \tag{42c}$$

Die in 2.1.4. angeführte Eigenschaft antimetrischer Matrizen, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = -\,\mathfrak{A}$$

ausgedrückt wird, kann nunmehr an einem Beispiel erläutert werden.
Wird die antimetrische Matrix dritter Ordnung

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Faktor -1 multipliziert, so ergibt sich die Matrix

$$-\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Andererseits erhält man durch Transponieren der gegebenen antimetrischen Matrix $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

d. h., es ist im Beispielfall

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = -\mathfrak{A}.$$

Auf den allgemeinen Beweis wird verzichtet.

Die bisherigen Operationen mit Matrizen sind sehr einfach. Sie sollen, ehe nach einigen Übungen zu einem der Schwerpunkte der Matrizenrechnung, der Multiplikation mehrerer Matrizen miteinander, übergegangen wird, nochmals kurz zusammengefaßt werden.
Die Definitionen für die Gleichheit, die Addition und die Subtraktion von Matrizen sowie für die Multiplikation mit einem Faktor k ließen sich sinnvoll erklären. Sie stimmen mit den in den Beispielen durchgeführten Überlegungen vollkommen überein. Gleichheit zweier Matrizen bedeutet im Gegensatz zur Gleichheit von Determinanten nicht Zahlenwertgleichheit, sondern *Übereinstimmung in allen einander entsprechenden Elementen*. Addition und Subtraktion sind im Gegensatz zur Zahlenrechnung *nicht unbeschränkt* durchführbar. Sie bleiben auf Matrizen vom gleichen Typ beschränkt. Dabei sind jeweils die einander entsprechenden Elemente zu addieren bzw. zu subtrahieren. Bei der Multiplikation (Division) mit einem Faktor k sind *alle* Elemente der Matrix mit dem Faktor k zu multiplizieren (dividieren).

AUFGABEN

49. Es ist die Formel

$$k(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = k\mathfrak{A} + k\mathfrak{B}$$

an einem Beispiel vom Typ (3,4) zu erläutern.

50. Die folgenden Matrizen sollen addiert bzw. subtrahiert werden.

a) $$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v & w & x \\ y & z & r & t \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 4 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 6 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 \\ 5 & -6 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 8 & 15 \\ 4 & 7 & 8 \\ 21 & 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \\ 36 & -15 & -8 \end{pmatrix}$$

51. Das Ergebnis der Aufgabe 50c ist mit dem Faktor $3a$ zu multiplizieren.

52. Es soll gezeigt werden, daß für Aufgabe 50b die Gleichung

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B})$$

Gültigkeit hat.

53. $$\begin{pmatrix} 21 & -12 & 21 \\ 15 & 33 & -48 \\ -9 & 0 & -15 \end{pmatrix} - (+3) \begin{pmatrix} 7 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & -16 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

54. Für Determinanten, die einer quadratischen Matrix zugeordnet sind, gilt:

$$|k\mathfrak{A}| = k^n |\mathfrak{A}|.$$

Diese Formel ist an einem Beispiel mit $n = 3$ zu erläutern.

2.2.4. Multiplikation mehrerer Matrizen

2.2.4.1. Multiplikation zweier Matrizen

Elementar gesehen hat die Multiplikation zweier Matrizen die Substitution zweier linearer Gleichungssysteme zum Inhalt. Beispiele hierzu ergeben sich im täglichen Leben in großer Anzahl. An einer einfachen Rohstoffberechnung sollen sowohl der Inhalt als auch der Rechengang der Matrizenmultiplikation geklärt werden.
Für die Produktion der Endprodukte E_1 und E_2 werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und für diese wiederum die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt.
Im einzelnen werden gebraucht:

Für eine Einheit E_1: 3 Einheiten Z_1 und 4 Einheiten Z_2,

für eine Einheit E_2: 2 Einheiten Z_1 und 3 Einheiten Z_2,

für eine Einheit Z_1: 1 Einheit R_1 und 2 Einheiten R_3,

für eine Einheit Z_2: 2 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3.

Dieser Sachverhalt läßt sich gleichungsmäßig wie folgt ausdrücken:

$$\text{I} \quad \begin{aligned} E_1 &= 3\,Z_1 + 4\,Z_2 \\ E_2 &= 2\,Z_1 + 3\,Z_2 \end{aligned} \qquad \text{II} \quad \begin{aligned} Z_1 &= 1\,R_1 + 2\,R_3 \\ Z_2 &= 2\,R_2 + 3\,R_3. \end{aligned}$$

Die zu den einzelnen Gleichungssystemen gehörigen Koeffizientenmatrizen sind:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung des Rohstoffverbrauchs für je eine Einheit der Endprodukte erfolgt durch schrittweises Einsetzen[1]):

$$Z \leftarrow R,$$

$$\text{III/1} \quad \begin{aligned} E_1 &= 3(1R_1 + 0R_2 + 2R_3) + 4(0R_1 + 2R_2 + 3R_3) \\ E_2 &= 2(1R_1 + 0R_2 + 2R_3) + 3(0R_1 + 2R_2 + 3R_3). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen der entsprechenden Summanden ergibt:

$$\text{III/2} \quad \begin{aligned} E_1 &= (3 \cdot 1 + 4 \cdot 0)\, R_1 + (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2)\, R_2 + (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3)\, R_3 \\ E_2 &= (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0)\, R_1 + (2 \cdot 0 + 3 \cdot 2)\, R_2 + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)\, R_3. \end{aligned}$$

Schließlich führt das Ausrechnen der Klammerausdrücke zur endgültigen Lösung:

$$\text{III/3} \quad \begin{aligned} E_1 &= 3R_1 + 8R_2 + 18R_3 \\ E_2 &= 2R_1 + 6R_2 + 13R_3. \end{aligned}$$

Für 1 Einheit E_1 werden also 3 Einheiten R_1, 8 Einheiten R_2 und 18 Einheiten R_3 und für 1 Einheit E_2 2 Einheiten R_1, 6 Einheiten R_2 und 13 Einheiten R_3 benötigt. Diesem Gleichungssystem, das durch Substitution des Systems II in das System I entstanden ist, ist die Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

Die Koeffizientenmatrix ist in dem angenommenen Beispiel gleich der Verbrauchsmatrix für das geplante Produktionsprogramm.

Die gleiche Matrix ergibt sich, wenn die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in folgender Weise miteinander verknüpft werden.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite der Gleichung stimmt dabei vollkommen mit den Koeffizienten der rechten Seite des Systems III/2 überein.

Das Ausrechnen der Elemente des Systems führt schließlich zu dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A} & \cdot & \mathfrak{B} & = & \mathfrak{C} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3 & 8 & 18 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

[1]) Das Symbol $Z \leftarrow R$, gelesen R eingesetzt in Z, bedeutet hier, und entsprechend an allen folgenden Stellen, daß das System R in das System Z eingesetzt werden soll

Mit allgemeinen Elementen geschrieben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Die in dieser Weise vorgenommene Verknüpfung der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ soll **Matrizenprodukt** genannt werden.
Die **Matrizenmultiplikation** hat also eine *lineare Substitution zum Inhalt*. Dem Einsetzen eines Systems B (Matrix $\mathfrak{B}$) in ein System A (Matrix $\mathfrak{A}$) entspricht *die Multiplikation der Matrix $\mathfrak{A}$ mit der Matrix $\mathfrak{B}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$*:

Definition: $\boxed{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \triangleq A \leftarrow B}$ (43a)

d. h., die Matrix $\mathfrak{A}$ ist mit der Matrix $\mathfrak{B}$ von rechts multipliziert.
Das Beispiel läßt klar erkennen, wie eine solche Matrizenmultiplikation ausgeführt wird:
Das Element 3, das in der Matrix $\mathfrak{C}$ im Kreuzungspunkt der ersten Zeile und der ersten Spalte steht, ist dadurch entstanden, daß jedes Element der ersten Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ mit dem entsprechenden Element der ersten Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$ multipliziert wurde und die erhaltenen Produkte anschließend addiert wurden. Eine so erhaltene Produktsumme nennt man **skalares Produkt**. Diese Bezeichnung ist der Vektoralgebra entnommen. Das Element $c_{11} = 3$ ist also das skalare Produkt der ersten Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ und der ersten Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$.
In der Vektorschreibweise geschrieben ist

$$c_{11} = \mathfrak{a}^1 \mathfrak{b}_1.$$

Ebenso ist das Element 18 das skalare Produkt der ersten Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ und der dritten Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$: $c_{13} = \mathfrak{a}^1 \mathfrak{b}_3$, und das Element 13 ist das skalare Produkt der zweiten Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ und der dritten Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$: $c_{23} = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}_3$.
Ebenso sind die Elemente

$$\begin{aligned} c_{12} &= \mathfrak{a}^1 \mathfrak{b}_2 = 8 \\ c_{21} &= \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}_1 = 2 \\ c_{22} &= \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}_2 = 6 \ \text{ skalare Produkte.} \end{aligned}$$

Das nachfolgende Beispiel zeigt nochmals deutlich, daß jedes Element c_{ik} der Produktmatrix $\mathfrak{C}$ das skalare Produkt der i-ten Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ und der k-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{B}$ ist:

$$c_{ik} = \mathfrak{a}^i \mathfrak{b}_k,$$

und wie diese Skalarprodukte zu bilden sind.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u & a & 4 \\ y & v & b & 0 \\ z & w & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+7z & 2u+3v+7w & 2a+3b+7c & 15 \\ 8x+\ \ y+3z & 8u+\ \ v+3w & 8a+\ \ b+3c & 35 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrix $\mathfrak{A}$ vom *Typ* (2,3) mit der Matrix $\mathfrak{B}$ vom *Typ* (3,4) von rechts ergibt die Produktmatrix $\mathfrak{C}$ vom *Typ* (2,4).
In der Symbolik des Matrizenkalküls geschrieben[1]):

$$\mathfrak{A}_{(2,3)} \cdot \mathfrak{B}_{(3,4)} = \mathfrak{C}_{(2,4)}.$$

Da bei der Matrizenmultiplikation jedes Element der Zeilenvektoren von $\mathfrak{A}$ mit jedem Element der Spaltenvektoren von $\mathfrak{B}$ multipliziert werden muß, ist die Matrizenmultiplikation nur möglich, wenn die Zeilen von $\mathfrak{A}$ und die Spalten von $\mathfrak{B}$ gleich viel Elemente haben. Das bedeutet, daß die Matrix $\mathfrak{A}$ so viel Spalten haben muß, wie die Matrix $\mathfrak{B}$ Zeilen hat. Diese Bedingung wird als **Verkettung** bezeichnet.

Am Typ der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist zu ersehen, ob die Matrizenmultiplikation möglich und *von welchem Typ die Produktmatrix* $\mathfrak{C}$ *ist.* Die Produktmatrix $\mathfrak{C}$ hat so viel Zeilen wie die Matrix $\mathfrak{A}$ und so viel Spalten wie die Matrix $\mathfrak{B}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathfrak{A}_{(m,n)} \arrow[rr, bend left, leftrightarrow, "\text{Typ } \mathfrak{C}"] \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\text{Verkettung}"'] & \cdot & \mathfrak{B}_{(n,p)} & = & \mathfrak{C}_{(m,p)}
\end{tikzcd}$$

Das Produkt zweier Matrizen kann nunmehr wie folgt definiert werden:

Definition:

Unter dem Produkt einer (m, n)-Matrix $\mathfrak{A}$ mit einer (n, p)-Matrix $\mathfrak{B}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ versteht man die (m, p)-Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$, in der jedes Element c_{ik} das *skalare Produkt* der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ (des Zeilenvektors $\mathfrak{a}^i$) mit der k-ten Spalte von $\mathfrak{B}$ (dem Spaltenvektor $\mathfrak{b}_k$) ist.

Es ist: $c_{ik} = \mathfrak{a}^i \cdot \mathfrak{b}_k$.

Die Matrizenmultiplikation wurde aus der linearen Substitution hergeleitet. Daraus folgt, daß die Matrizenmultiplikation in der Regel nicht kommutativ sein kann.

$$\boxed{\mathfrak{B}\mathfrak{A} \triangleq B \leftarrow A} \qquad (43\,\text{b})$$

Im Ausgangsbeispiel bedeutet das den sinnlosen rückwärtigen Produktionsverlauf. Das System A der Zwischenprodukte würde in das System B der Rohstoffe eingesetzt.

Das Matrizenprodukt ist **nicht kommutativ**, d. h., im allgemeinen sind $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ verschiedene Matrizen, sofern sie überhaupt in beiden Reihenfolgen verkettbar sind.

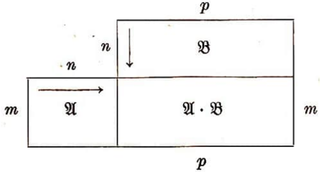
Auf weitere Besonderheiten der Matrizenmultiplikation wird in 2.5.3. eingegangen werden. Zunächst sollen aber einige praktische Hinweise für die Matrizenmultiplikation erfolgen.

[1]) Gelesen: Matrix $\mathfrak{A}$ zwei drei mal Matrix $\mathfrak{B}$ drei vier ist gleich Matrix $\mathfrak{C}$ zwei vier

2.2.4.2. Das Schema von Falk

Bei umfangreichen Matrizen, wie sie fast ausschließlich in der Praxis vorkommen, wird der für die Multiplikation nötige Rechenaufwand sehr groß. Selbst wenn die Rechenarbeit ausschließlich von Maschinen erledigt wird, kommt es doch gerade wegen des Umfanges der Matrizen darauf an, ein Höchstmaß an Übersichtlichkeit beim Rechengang zu gewährleisten und darüber hinaus die Zwischenergebnisse laufend durch entsprechende Proben überprüfen zu können. Das *Schema von* FALK[1]) hat den großen Vorzug, daß es diese beiden Forderungen maximal erfüllt. Bei der Multiplikation $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ werden die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht wie bisher nebeneinander gestellt. Vielmehr wird die Matrix $\mathfrak{B}$ mit ihrer linken unteren Ecke an die rechte obere Ecke der Matrix $\mathfrak{A}$ angefügt. Im weiteren Verlauf werden wie bisher die skalaren Produkte gebildet. Aus der Anordnung der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Schema ergibt sich, daß das für die Produktmatrix $\mathfrak{C}$ freibleibende rechte untere Rechteck des Schemas Platz für genau m Zeilen und p Spalten hat. Jedes Element c_{ik} der Produktmatrix $\mathfrak{C}$ steht dann im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ und der k-ten Spalte von $\mathfrak{B}$, deren skalares Produkt es ist. Das linke obere Rechteck des Schemas bleibt frei. In dieses Rechteck kann zur besseren Übersicht die geforderte Multiplikation eingetragen werden.

Schema von Falk



BEISPIELE

1. Gegeben sind die Matrizen:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es sollen die Matrizenprodukte $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ gebildet werden.

Lösung:

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}} & 2 & 0 \\ & & -1 & 3 \\ \hline 1 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & 2 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}} & 1 & -2 \\ & & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 8 & 14 \end{array}$$

---

[1]) SIGURD FALK, Professor an der TH Braunschweig

In beiden Aufgaben sind die Vektoren, deren skalares Produkt jeweils das Element c_{22} angibt, durch Schraffierung hervorgehoben. Das wird zur besseren Veranschaulichung des Rechenvorganges auch in den nächsten Beispielen noch für einzelne Elemente erfolgen.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenprodukte $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ sind zu bestimmen.

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 4 \\ & \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} & & 2 & 3 \\ & & & -1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & -3 \\ \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} & & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 7 \end{array}$$

Multiplikationsproben

Weitgehende Sicherheit für die Richtigkeit der ermittelten c_{ik} läßt sich entweder durch die **Zeilensummen-** oder durch die **Spaltensummenprobe** erreichen. In beiden Fällen können Fehler in den c_{ik} nur dann übersehen werden, wenn sich in der betreffenden Zeile oder in der betreffenden Spalte zufällig mehrere Fehler kompensieren. Um die **Zeilensummenprobe** durchzuführen, wird an die Matrix $\mathfrak{B}$ der Zeilensummenvektor $\mathfrak{b}$ als zusätzliche Spalte angefügt. Der Zeilensummenvektor wird als Spaltenvektor wie alle anderen Spalten von $\mathfrak{B}$ ebenfalls mit den einzelnen Zeilen von $\mathfrak{A}$ multipliziert und der so entstehende Spaltenvektor $\mathfrak{c}$ an die Matrix $\mathfrak{C}$ als zusätzlicher $(p + 1)$-ter Vektor angefügt. *Der Spaltenvektor $\mathfrak{c}$ ist gleich dem Zeilensummenvektor der Matrix $\mathfrak{C}$.*

Multiplikationsmodell mit Zeilensummenprobe:

	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$

Es ist also $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Das Verfahren soll zunächst an je einer Lösung der Beispiele 1 und 2 gezeigt werden.

zu 1.

		2	0	2
		−1	3	2
1	−2	4	−6	−2
3	4	2	12	14

zu 2.

		2	1	−3	0
		−1	0	2	1
1	4	−2	1	5	4
2	3	1	2	0	3
−1	2	−4	−1	7	2

Merke:

Beim Aufstellen des Schemas Zeilensummenvektor als zusätzliche Spalte anfügen. *Die Produktmatrix zeilenweise berechnen und keine neue Zeile beginnen, ehe die vorhergehende überprüft ist.*

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist einleuchtend. Die Elemente der Matrizen sind Zahlenwerte, *Skalare*, deshalb ist das für die Zahlenrechnung gültige *distributive* Gesetz

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

auch für die Probe der Matrizenmultiplikation anwendbar.
Manchmal ist es günstiger, nicht mit der Zeilensummenprobe, sondern mit der *Spaltensummenprobe* die Richtigkeit der Lösung zu überprüfen. Im Schema ist dann der Spaltensummenvektor a der Matrix $\mathfrak{A}$ als zusätzlicher Zeilenvektor hinzuzufügen.

Multiplikationsmodell mit Spaltensummenprobe:

	$\mathfrak{B}$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}$

In diesem Falle ergibt der Spaltensummenvektor $\mathfrak{a}$ der Matrix $\mathfrak{A}$ mit der Matrix $\mathfrak{B}$ von rechts multipliziert ($a \leftarrow B$) den Spaltensummenvektor $\mathfrak{c}$ der Matrix $\mathfrak{C}$.

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{c}.$$

Die beiden bereits mit Hilfe der Zeilensummenprobe überprüften Matrizenprodukte der Beispiele 1 und 2 sollen anschließend nochmals mit Hilfe der Spaltensummenprobe überprüft werden.

zu 1.

		2	0
		−1	3
1	−2	4	−6
3	4	2	12
4	2	6	6

zu 2.

		2	1	−3
		−1	0	2
1	4	−2	1	5
2	3	1	2	0
−1	2	−4	−1	7
2	9	−5	2	12

Die Richtigkeit der Spaltensummenprobe ergibt sich ebenfalls aus dem distributiven Gesetz. Das soll abschließend für den speziellen Fall zweier Matrizen mit allgemeinen Elementen gezeigt werden.

		b_{11}	b_{12}
		b_{21}	b_{22}
a_{11}	a_{12}	$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$	$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$
a_{21}	a_{22}	$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$	$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$
$a_{11} + a_{21}$	$a_{12} + a_{22}$	$(a_{11} + a_{21})b_{11} + (a_{12} + a_{22})b_{21}$	$(a_{11} + a_{21})b_{12} + (a_{12} + a_{22})b_{22}$

Der allgemeine Aufbau des FALKschen Schemas für zwei Matrizen mit Zeilen- und Spaltensummenprobe läßt sich durch allgemeine Symbole wie folgt darstellen:

Multiplikationsmodell mit Zeilen- und Spaltensummenprobe

	$\mathfrak{B}_{(n,\,p)}$	$\mathfrak{z}_B$ $(n, 1)$
$\mathfrak{A}_{(m,\,n)}$	$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{(m,\,p)}$	$\mathfrak{z}_C$ $(m, 1)$
$\mathfrak{s}_{A\,(1,\,n)}$	$\mathfrak{s}_{C\,(1,\,p)}$	

Die Vektoren sind mit kleinen deutschen Buchstaben ($\mathfrak{s}$ Spalten-, $\mathfrak{z}$ Zeilensummenvektor) bezeichnet. Die Klammern geben den Typ der Matrix, die Indizes bei den Zeilen- bzw. Spaltenvektoren die zugehörige Matrix an.

Im nachfolgenden Beispiel sollen beide Proben gezeigt werden.

					1	0	2	3
					3	−1	0	2
					0	2	1	3
					1	0	0	1
					2	0	−1	1
1	2	3	4	0	11	4	5	20
2	0	3	0	1	4	6	6	16
3	4	0	0	0	15	−4	6	17
1	0	−1	0	1	3	−2	0	1
7	6	5	4	2	33	4	17	

Selbstverständlich genügt für das Lösen des Multiplikationsmodells stets nur eine Probe. Die zweite Probe wurde nur übungsweise durchgeführt. Die Produktmatrix $\mathfrak{C}$ ist bei Anwendung der Zeilensummenprobe zeilenweise und bei Anwendung der Spaltensummenprobe spaltenweise zu berechnen. *Jede fertige Zeile bzw. Spalte ist sofort auf ihre Richtigkeit zu überprüfen.* Erst dann sollte mit der Berechnung der nächsten Zeile bzw. Spalte begonnen werden.

2.2.4.3. Kommutative Matrizen, Nullteiler

In 2.2.4.1. wurde bereits die Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes für die Matrizenmultiplikation nachgewiesen. Neben dem Matrizenprodukt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ existiert für die beiden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ das Matrizenprodukt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nur in zwei Sonderfällen:

1. bei quadratischen Matrizen,
2. wenn der Typ von $\mathfrak{A}$ gleich ist dem Typ von $\mathfrak{B}^T$.

Auch in diesen beiden Fällen ist jedoch im allgemeinen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

1. Fall:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$				
		−1	2	1
		1	3	4
2	0	−2	4	2
−1	3	4	7	11

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$				
		2	0	2
		−1	3	2
−1	2	−4	6	2
1	3	−1	9	8

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

2. Fall:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schon am Typ der beiden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist zu erkennen, daß die beiden Matrizenprodukte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ungleich sind.

$$\mathfrak{A}_{(2,3)} \cdot \mathfrak{B}_{(3,2)} = \mathfrak{C}_{(2,2)} \qquad \mathfrak{B}_{(3,2)} \cdot \mathfrak{A}_{(2,3)} = \mathfrak{C}_{(3,3)}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$				
			4	1
			−3	2
			−1	0
−1	3	0	−13	5
2	−1	5	6	0
1	2	5	−7	5

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$					
		−1	3	0	2
		2	−1	5	6
4	1	−2	11	5	14
−3	2	7	−11	10	6
−1	0	1	−3	0	−2

Also ebenfalls: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$

Bei quadratischen Matrizen kann es vorkommen, daß das *Matrizenprodukt* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *dem Matrizenprodukt* $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ *gleich ist.* Solche Matrizenpaare werden **vertauschbare** oder **kommutative Matrizen** genannt. Ähnliche Abweichungen von sonst allgemeingültigen Regeln kommen bereits beim Rechnen in den einzelnen Zahlenbereichen vor. So ist z. B. $4^2 = 2^4$, obwohl Basis und Exponent nicht vertauschbar sind.
Abschließend sollen zwei Beispiele für *kommutative Matrizen* gebracht werden:

1. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$				
		−4	3	−1
		9	2	11
−1	1	13	−1	12
3	1	−3	11	8

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$				
		−1	1	0
		3	1	4
−4	3	13	−1	12
9	2	−3	11	8

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

2. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$					
			2	−1	6
			−4	2	2
			0	−5	4
2	−3	1	16	−13	10
0	1	−2	−4	12	−6
2	−1	1	8	−9	14
4	−3	0	20	−10	18

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$						
			2	−3	1	0
			0	1	−2	−1
			2	−1	1	2
2	−1	6	16	−13	10	13
−4	2	2	−4	12	−6	2
0	−5	4	8	−9	14	13

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

Um nochmals beide Probemöglichkeiten zu zeigen, wurde im letzten Beispiel einmal mit der Zeilensummenprobe und einmal mit der Spaltensummenprobe gerechnet.

Ebenso ist es möglich, daß *das Produkt zweier Matrizen die Nullmatrix ergibt, obwohl keine der beiden Matrizen selbst eine Nullmatrix ist. Derartige Matrizenpaare* nennt man **Nullteiler**.

Beispiele für *Nullteiler* sind:

1. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 4 & -12 & 8 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 10{,}5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr|r} & & & 4 & -3 & 1 & 2 \\ & \mathfrak{A}\mathfrak{B} & & 2 & 6 & -1 & 7 \\ & & & 1 & 10{,}5 & -2 & 9{,}5 \\ \hline 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$$

2. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rr} & & & 2 & 4 \\ & \mathfrak{A}\mathfrak{B} & & 3 & 6 \\ & & & 1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$$

Aus den nachfolgenden Beispielen sind leicht die folgenden Beziehungen zu erkennen:

$$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{O} = \mathfrak{O} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{O}} \tag{44a}$$

und

$$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A}} \tag{44b}$$

Die Nullmatrix und die Einheitsmatrix spielen also bei der Matrizenmultiplikation die gleiche Rolle wie die Null und die Eins bei der Multiplikation von Zahlen.

Es ist $$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und
$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

2.2.4.4. Multiplikation mit der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$

Da in der Diagonalmatrix alle nichtdiagonalen Elemente gleich Null sind, ergeben sich bei der *Multiplikation mit der Diagonalmatrix* gegenüber der allgemeinen Matrizenmultiplikation *wesentliche Vereinfachungen.*

BEISPIEL

Es soll für die nachstehenden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ sowohl das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ als auch das Produkt $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$ gebildet werden.

Lösung:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & \mathfrak{A}\mathfrak{D} & & 0 & 2 & 0 & 2 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 3 & -2 & 1 & -3 & -4 & 1 & -6 \\ -4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc|c} & & & 3 & -2 & 1 & 2 \\ & \mathfrak{D}\mathfrak{A} & & -4 & 1 & 3 & 0 \\ & & & 2 & -1 & -2 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}$$

Die allgemeine Darstellung läßt das Bildungsgesetz der Produktmatrix klar erkennen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & d_1 & 0 & 0 \\ & \mathfrak{A}\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_1 & & 0 & d_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & d_3 \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & a_{13}d_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & a_{23}d_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}d_1 & a_{32}d_2 & a_{33}d_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & \mathfrak{D}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_2 & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline d_1 & 0 & 0 & a_{11}d_1 & a_{12}d_1 & a_{13}d_1 \\ 0 & d_2 & 0 & a_{21}d_2 & a_{22}d_2 & a_{23}d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & a_{31}d_3 & a_{32}d_3 & a_{33}d_3 \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{ik}d_k \qquad\qquad c_{ik} = a_{ik}d_i$$

Ergebnis:

> Eine Matrix $\mathfrak{A}$ wird mit einer Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ von rechts (links) multipliziert, indem jedes Element einer Spalte (Zeile) von $\mathfrak{A}$ mit dem Element der entsprechenden Spalte (Zeile) von $\mathfrak{D}$ multipliziert wird.

AUFGABEN

In den Aufgaben 55 bis 70 ist jeweils mit Hilfe des Schemas von Falk das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zu bilden und eine Probe durchzuführen.

55. $\mathfrak{A} = (a_1 \; b_1 \; c_1) \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

56. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = (a_2 \; b_2 \; c_2)$

57. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

58. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

59. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

60. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

61. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & -6 \\ -8 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 6 & -8 \\ -7 & 3 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

62. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & 6 \\ 3 & -8 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

63. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

64. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

65. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

66. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

67. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

68. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 69. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

70. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Es soll versucht werden, in den Aufgaben 71 bis 76 neben dem Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ jeweils auch das Produkt $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$ zu bilden.

71. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 72. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

73. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 74. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

75. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 76. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -3 \\ 25 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 25 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

In den Aufgaben 77 bis 84 sind die Matrizenpaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach Nullteilern und kommutativen Matrizen zu untersuchen.

77. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 13 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

78. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

79. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

80. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ 81. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -16 & -49 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -11 & -28 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

82. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 83. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

84. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.2.4.5. Anwendung der Multiplikation zweier Matrizen

Darstellung eines linearen Gleichungssystems in Matrizenform

Wird im linearen (m,n)-System

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

gesetzt, so ergibt sich die sehr übersichtliche matrizenmäßige Schreibweise des linearen Systems:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}} \tag{45}$$

Durch Bilden des Matrizenproduktes $\mathfrak{A}$ mal $\mathfrak{x}$ läßt sich leicht überprüfen, daß die rechte Seite des Gleichungssystems diesem Produkt gleich ist (vgl. Aufgabe 57). Diese einfache Schreibweise verkürzt nicht nur wesentlich die Schreibarbeit, sondern erhöht auch außerordentlich die Übersichtlichkeit. Sie wird deshalb gern zur Darstellung von Operationen, so u. a. auch bei der Ableitung der Kehrmatrix, angewandt.

Matrizenmäßige Darstellung von Materialverbrauchsnormen

Beim Erfassen technologischer und ökonomischer Zusammenhänge ergeben sich in den meisten Fällen folgende Teilschritte:

1. Erfassen der quantitativen Verhältnisse und Abhängigkeiten,
2. Aufstellen der Produktionsmatrix und Aufspalten in Untermatrizen,
3. Durchrechnen des Matrizenmodells,
4. Überprüfen des vorgesehenen Programms auf seine Durchführbarkeit.

   Schließlich macht sich gegebenenfalls das

5. Aufstellen und Überprüfen eines neuen Programms notwendig.

Diese fünf Arbeitsstufen sind am nachfolgenden Beispiel deutlich erkennbar.

1. Erfassen der quantitativen Verhältnisse

Ein Betrieb stellt die Produkte A, B, C und E her. Zur Fertigung werden außer dem Zwischenprodukt D die Rohstoffe f, g und h benötigt. Im einzelnen liegt folgende mengenmäßige Abhängigkeit, bezogen auf je eine Einheit der Produkte A, B, C, D und E, fest:

Materialverbrauchsnorm A Material B: 12,5 Material E: 2,5	Materialverbrauchsnorm B Material f: 0,3 Material g: 4
Materialverbrauchsnorm C Material D: 7,1 Material f: 0,8	Materialverbrauchsnorm E Material g: 10 Material h: 2,2
Materialverbrauchsnorm D Material E: 10,4 Material g: 3	

Aus den Materialverbrauchsnormen ist zu erkennen, daß B und E sowohl End- als auch Zwischenprodukte sind.

2. Aufstellen der Produktionsmatrix

Um den kausalen[1] Zusammenhang zwischen dem Einsatz und dem Produktionsausstoß festzuhalten, werden sogenannte **Umsatzmatrizen** aufgestellt. Im vorliegenden Falle soll in die Umsatzmatrix der Bedarf für je eine Einheit der vier Endprodukte eingesetzt werden. Die den Betriebsablauf eindeutig bestimmenden Größen, in unserem Falle die Menge der Fertigprodukte, werden als **Durchsatzgrößen** bezeichnet. Durchsatzgrößen können beispielsweise die Mengen der eingesetzten Roh-

[1]) causa (lat.) Ursache, Grund

stoffe oder die Lohnkosten, der Verbrauch an Elektroenergie, Heizmaterial oder Wasser u. a. sein.
Das Aufstellen der Umsatzmatrizen erfolgt mit Hilfe von erfahrungsstatistischen Werten und setzt gründliche Kenntnisse aller technologischen Zusammenhänge innerhalb der einzelnen Betriebe voraus. Die Umsatzmatrix soll nicht nur Auskunft über die benötigten Rohstoffe, sondern über den *gesamten mengenmäßigen Ablauf des Produktionsprozesses geben.*
Aus den Materialverbrauchsnormen entnehmen wir folgende mathematischen Zusammenhänge:

$$\text{(I)}\quad A = 12{,}5\,B + 2{,}5\,E \qquad \text{(II)}\quad \begin{aligned} B &= 0{,}3\,f + 4\,g \\ E &= \phantom{0{,}3\,f + 1}10\,g + 2{,}2\,h \end{aligned}$$

Um den Rohstoffbedarf für A zu bestimmen, ist zunächst das System (II) in das System (I) einzusetzen: $\mathrm{I} \leftarrow \mathrm{II}$.
In Matrizenform gebracht, bedeutet das die Multiplikation

$$(12{,}5 \quad 2{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}3 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & 2{,}2 \end{pmatrix} = (3{,}75 \quad 75 \quad 5{,}5).$$

Die erste Gleichung des zur Rohstoffmatrix gehörenden Systems lautet somit:

$$A = 3{,}75f + 75g + 5{,}5h.$$

Die Gleichung für B ist der Materialverbrauchsnorm sofort zu entnehmen:

$$B = 0{,}3f + 4\,g.$$

Für das Produkt C ergeben sich folgende Beziehungen:

$$C = 7{,}1D + 0{,}8f, \quad D = 10{,}4E + 3g, \quad E = 10g + 2{,}2h.$$

Daraus ergibt sich C durch schrittweise Substitution wie folgt:

$$\begin{aligned} C &= 7{,}1D + 0{,}8f = 73{,}84E + 21{,}3g + 0{,}8f = \\ &= 0{,}8f + 759{,}7g + 162{,}45h \end{aligned}$$

Für das Produkt E erhält man wiederum aus der Materialverbrauchsnorm sofort die Gleichung

$$E = 10g + 2{,}2h.$$

Der Gesamtbedarf an Zwischenprodukten und Rohstoffen für je eine Einheit der vier Fertigprodukte A, B, C und E, der aus der Materialverbrauchsnorm und aus den von ihr abgeleiteten vier Gleichungen ermittelt wurde, ergibt, spaltenweise nebeneinandergesetzt, die Umsatzmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ E \\ D \\ \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & E \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2{,}5 & 0 & 73{,}84 & 1 \\ 0 & 0 & 7{,}1 & 0 \\ \hline 3{,}75 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 75 & 4 & 759{,}7 & 10 \\ 5{,}5 & 0 & 162{,}45 & 2{,}2 \end{array}\right) \end{array}$$

Die so gewonnene Umsatzmatrix $\mathfrak{U}$ kann in die Rohstoffmatrix $\mathfrak{R}$ (unter dem Strich) und die Matrix $\mathfrak{P}$ der Fertig- und Zwischenprodukte (über dem Strich) aufgespalten werden:

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ sind Teilmatrizen der Matrix $\mathfrak{U}$. Aus $\mathfrak{R}$ ist der *Rohstoffbedarf* einschließlich des Bedarfs für die Zwischenprodukte und aus $\mathfrak{P}$ der *Umschlag aller Produkte* innerhalb des Betriebsablaufs, der z. B. für den Transport und die Lagerung von Interesse ist, zu erkennen.

3. Durchrechnen des Matrizenmodells

Für den Monat Februar soll der Betrieb folgende Auflage haben:

12 t Produkt A, 96 t Produkt B,

5 t Produkt C, 34 t Produkt E.

Um den Rohstoffbedarf und den gesamten mengenmäßigen Umsatz für die gegebene Planauflage zu ermitteln, ist die Umsatzmatrix $\mathfrak{U}$, die für je eine Mengeneinheit aufgestellt wurde, mit dem Vektor $\mathfrak{w}$, der in diesem Falle die geforderten Planzahlen als Elemente enthält,

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 96 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

zu multiplizieren:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ E \\ D \\ \\ f \\ g \\ h \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & E \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2{,}5 & 0 & 73{,}84 & 1 \\ 0 & 0 & 7{,}1 & 0 \\ \hline 3{,}75 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 75 & 4 & 759{,}7 & 10 \\ 5{,}5 & 0 & 162{,}45 & 2{,}2 \end{array}\right) \end{array}
\begin{pmatrix} 12 \\ 96 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 12 \\ 246 \\ 5 \\ 433{,}2 \\ 35{,}5 \\ \hline 77{,}8 \\ 5422{,}5 \\ 953{,}05 \end{array}\right)$$

In Matrizenschreibweise wird diese Aufgabe durch die Gleichung

$$\mathfrak{U}\mathfrak{w} = \mathfrak{b}$$

ausgedrückt. Bei Aufspaltung von $\mathfrak{U}$ in die Teilmatrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ lautet die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix} \mathfrak{w} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{r} \end{pmatrix}$$

4. Überprüfen des vorgesehenen Programms

Der Teilvektor $\mathfrak{r}$ des Vektors $\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{r} \end{pmatrix}$ gibt den Rohstoffbedarf für die vier Produkte A, B, C und E an, während der Teilvektor $\mathfrak{p}$ wichtige betriebstechnische Hinweise geben kann. So läßt der Teilvektor $\mathfrak{p}$ z. B. erkennen, daß insgesamt 433,2 t vom Produkt E produziert werden müssen, wovon fast 370 t als Zwischenprodukt in das Endprodukt C eingehen. Es ist zu überprüfen, ob die Kapazität des Teilbetriebes für die 433 t ausreicht. Außerdem sind Transport und Lagermöglichkeiten für diese Mengen zu berücksichtigen und der Arbeitskräfteplan ist dementsprechend aufzustellen. Schon dieses eine Beispiel zeigt, daß die gesamte Umsatzmatrix $\mathfrak{U}$ bzw. der Bedarfsvektor $\mathfrak{b}$ weit aussagekräftiger als die Teilmatrix $\mathfrak{R}$ bzw. der Teilvektor $\mathfrak{r}$ sind, aus denen lediglich der Rohstoffbedarf für das geplante Programm zu ersehen ist.

5. Aufstellen und Überprüfen des neuen Programms

Falls beispielsweise die Rohstoffe für das vorgesehene Produktionsprogramm nicht ausreichen, muß ein neues Programm aufgestellt und überprüft werden (s. hierzu Aufgabe 87).

2.2.4.6. Matrizen von Matrizen

In 2.2.4.5. wurde die Produktionsmatrix in die beiden Untermatrizen (Blöcke) $\mathfrak{P}$, die Matrix der Zwischen- und Endprodukte, und $\mathfrak{R}$, die Rohstoffmatrix, aufgeteilt.

Wie in diesem Beispiel *kann jede Matrix in Blöcke aufgespalten werden*; so kann z. B. die Matrix

$$\mathfrak{A} = \left.\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ \hline \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{23} \end{array}\right.$$

in sechs Blöcke aufgeteilt werden.

Das *Aufteilen in Untermatrizen* bringt bei der Multiplikation von Matrizen besonders dann wesentliche Erleichterungen, wenn es durch geschickte Aufteilung gelingt, daß einzelne Blöcke solche speziellen Matrizen wie die Nullmatrix, die Einheitsmatrix oder eine Diagonalmatrix ergeben (s. Aufgaben 85, 86). Das ist beispielsweise bei der Matrix

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ möglich.}$$

Ebenso macht sich in der Praxis bei sehr umfangreichen Matrizen eine Aufteilung in Blöcke notwendig, insbesondere dann, wenn der Umfang der Matrix die Kapazität der zur Verfügung stehenden Rechenautomaten übersteigt (vgl. 5.3.11.).

Im folgenden Beispiel sollen die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach Aufteilung in Blöcke miteinander multipliziert werden.

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \hline \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{array}\right) \qquad \mathfrak{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{12} \\ \hline \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{array}\right)$$

Abgesehen davon, daß die Elemente der beiden Matrizen selbst Matrizen sind und deshalb bei der Multiplikation zweier Elemente die Verkettung zu beachten ist, wird die Multiplikation in der bisherigen Weise durchgeführt.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{22} \\ \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{11} & \mathfrak{C}_{12} \\ \mathfrak{C}_{21} & \mathfrak{C}_{22} \end{pmatrix}$$

BEISPIEL

Die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

sollen nach Zerlegung in Blöcke miteinander multipliziert werden.

Lösung: 1. Vorteilhafte Zerlegung in Blöcke

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{cccc:cc} 1 & -2 & 3 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ \hdashline 3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \mathfrak{B} = \left(\begin{array}{ccc:cc} 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 4 \\ \hdashline -2 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 5 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

Die gestrichelten Linien kennzeichnen die vorgesehene Zerlegung in Blöcke.

2. Multiplikation nach Zerlegung in Blöcke:

a) $\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} = \mathfrak{C}_{11}$

$$\begin{array}{cccc|ccc|c} & & & & 2 & 4 & 0 & 6 \\ & \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11} & & & 1 & 3 & 1 & 5 \\ & & & & 0 & 5 & -2 & 3 \\ & & & & 4 & -7 & 3 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 13 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 14 & -20 & 13 & 7 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 10 & -35 & 13 & -12 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 7 & -2 & 2 & 7 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|c} \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} & & -2 & -3 & -1 & -6 \\ & & 8 & 4 & 5 & 17 \\ \hline 6 & 1 & -4 & -14 & -1 & -19 \\ 2 & -1 & -12 & -10 & -7 & -29 \\ 1 & 2 & 14 & 5 & 9 & 28 \\ 2 & -3 & -28 & -18 & -17 & -63 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11} & + & \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} & = & \mathfrak{C}_{11} \\ \begin{pmatrix} 0 & 13 & -8 \\ 14 & -20 & 13 \\ 10 & -35 & 13 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} -4 & -14 & -1 \\ -12 & -10 & -7 \\ 14 & 5 & 9 \\ -28 & -18 & -17 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -4 & -1 & -9 \\ 2 & -30 & 6 \\ 24 & -30 & 22 \\ -21 & -20 & -15 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{22} = \mathfrak{C}_{12}$

$$\begin{array}{cccc|cc|c} & & & & 3 & 1 & 4 \\ & & & & 0 & -2 & -2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12}} & -1 & -1 & -2 \\ & & & & 0 & 4 & 4 \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 9 & 10 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 13 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 6 & 8 & 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc|c} \multicolumn{2}{c|}{} & -1 & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{22}} & 8 & 2 & 10 \\ \hline 6 & 1 & 2 & 8 & 10 \\ 2 & -1 & -10 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 15 & 5 & 20 \\ 2 & -3 & -26 & -4 & -30 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} & + & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{22} & = & \mathfrak{C}_{12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 9 \\ -1 & 13 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -10 & 0 \\ 15 & 5 \\ -26 & -4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -9 & 9 \\ 14 & 18 \\ -20 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) $\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{C}_{21}$

$$\begin{array}{cccc|ccc|c} & & & & 2 & 4 & 0 & 6 \\ & & & & 1 & 3 & 1 & 5 \\ \multicolumn{4}{c|}{\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{11}} & 0 & 5 & -2 & 3 \\ & & & & 4 & -7 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 & -2 & -1 & 39 & -9 & 29 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 4 & -17 & 4 & -9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cc|ccc|c} \multicolumn{2}{c|}{} & -2 & -3 & -1 & -6 \\ \multicolumn{2}{c|}{\mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{12}} & 8 & 4 & 5 & 17 \\ \hline 0 & 1 & 8 & 4 & 5 & 17 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{11} & + & \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{12} & = & \mathfrak{C}_{21} \\ \begin{pmatrix} -1 & 39 & -9 \\ 4 & -17 & 4 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 7 & 43 & -4 \\ 6 & -14 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) $$\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} = \mathfrak{C}_{22}$$

$$\begin{array}{cccc|cc|c}
 & & & & 3 & 1 & 4\\
 & & & & 0 & -2 & -2\\
 & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} & & & -1 & -1 & -2\\
 & & & & 0 & 4 & 4\\
\hline
3 & 1 & 2 & -2 & 7 & -9 & -2\\
-2 & 0 & 1 & 2 & -7 & 5 & -2\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & -1 & 1 & 0\\
 \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} & & 8 & 2 & 10\\
\hline
0 & 1 & 8 & 2 & 10\\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} & + & \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} & = & \mathfrak{C}_{22}\\
\begin{pmatrix} 7 & -9\\ -7 & 5\end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 8 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 15 & -7\\ -6 & 4\end{pmatrix}
\end{array}$$

3. **Lösungsschema nach Falk:**

$$\begin{array}{cccc:cc|ccc:cc|c}
 & & & & & & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 & 10\\
 & & & & & & 1 & 3 & 1 & 0 & -2 & 3\\
 & & & & & & 0 & 5 & -2 & -1 & -1 & 1\\
 & & & \mathfrak{A}\mathfrak{B} & & & 4 & -7 & 3 & 0 & 4 & 4\\
\hdashline
 & & & & & & -2 & -3 & -1 & -1 & 1 & -6\\
 & & & & & & 8 & 4 & 5 & 8 & 2 & 27\\
\hline
1 & -2 & 3 & 0 & 6 & 1 & -4 & -1 & -9 & 2 & 10 & -2\\
0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -30 & 6 & -9 & 9 & -22\\
-1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 2 & 24 & -30 & 22 & 14 & 18 & 48\\
2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -21 & -20 & -15 & -20 & 4 & -72\\
\hdashline
3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 7 & 43 & -4 & 15 & -7 & -54\\
-2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 6 & -14 & 5 & -6 & 4 & -5\\
\hline
\end{array}$$

AUFGABEN

In den Aufgaben 85 und 86 ist das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$

a) mit Hilfe des Schemas von Falk in der bisherigen Weise,

b) durch Zerlegen in Blöcke zu bilden. Dabei ist die für den Rechengang günstigste Zerlegung in Teilmatrizen zu suchen.

85. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 5 & 0\\ 2 & 8 & 6 & -3 & 5\\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -6 & 1\\ -1 & 0 & -2 & 4 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

86.
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

87. Im Anwendungsbeispiel Materialverbrauchsnorm (2.2.4.5.) stehen vom Rohstoff g nur 4000 t zur Verfügung. Nach Berücksichtigung des unbedingt notwendigen Bedarfs der vier Produkte wird folgende Aufteilung vorgeschlagen:

Produkt	*A*	*B*	*C*	*E*
Menge	4 t	80 t	4 t	34 t

Es ist zu überprüfen, ob die 4000 t des Rohstoffes g für die vorgesehene Produktion ausreichen; der zu den neuen Planzahlen gehörige Bedarfsvektor $\mathfrak{b}$ ist aufzustellen:
Hinweis: Um zu überprüfen, ob die 4000 t ausreichen, wird zunächst nur der Vektor $\mathfrak{r}_2$ des Rohstoffes g (7. Zeile der Matrix $\mathfrak{U}$) mit dem neuen Durchsatzvektor $\mathfrak{d}_2$ multipliziert.

88. In dieser Aufgabe wird der Durchsatz durch die Lohnkosten bestimmt.
In einem chemischen Betrieb werden an sechs Apparateeinheiten die Arbeiter wie folgt nach den acht Lohngruppen für Produktionsarbeiten entlohnt:

Apparateeinheit 1: 1 Arbeiter Lohngruppe 1
3 Arbeiter Lohngruppe 4
2 Arbeiter Lohngruppe 7

Apparateeinheit 2: 2 Arbeiter Lohngruppe 3
1 Arbeiter Lohngruppe 5
1 Arbeiter Lohngruppe 6
1 Arbeiter Lohngruppe 8

Apparateeinheit 3: 2 Arbeiter Lohngruppe 2
1 Arbeiter Lohngruppe 4
1 Arbeiter Lohngruppe 8

Apparateeinheit 4: 2 Arbeiter Lohngruppe 1
1 Arbeiter Lohngruppe 5
2 Arbeiter Lohngruppe 8

Apparateeinheit 5: 3 Arbeiter Lohngruppe 2
1 Arbeiter Lohngruppe 5
2 Arbeiter Lohngruppe 7

Apparateeinheit 6: 1 Arbeiter Lohngruppe 1
2 Arbeiter Lohngruppe 3
3 Arbeiter Lohngruppe 5
1 Arbeiter Lohngruppe 8

Der Stundenlohn betrage in den einzelnen Lohngruppen:

Lohngruppe	1	2	3	4	5	6	7	8
MDN	1,50	1,55	1,65	1,80	1,95	2,10	2,35	2,65

Es ist die Lohnmatrix für den Gesamtbetrieb aufzustellen. Mit Hilfe der Matrizenrechnung sind die Lohnkosten der einzelnen Apparateeinheiten und des Gesamtbetriebes für eine Stunde zu ermitteln.

2.2.4.7. Multiplikation von mehr als zwei Matrizen

Die Multiplikation von mehr als zwei Matrizen ist auf die Multiplikation von zwei Matrizen zurückzuführen und stellt eine mehrfache lineare Substitution dar.
Eine Rohstoffberechnung soll das wiederum zeigen.
Es ist der tägliche Rohstoffbedarf für die Produktion von 30 t vom Produkt A_1 und 20 t vom Produkt A_2 zu ermitteln. Für eine Einheit vom Produkt A_1 werden 0,5 Einheiten vom Zwischenprodukt B_1 und 0,6 Einheiten vom Zwischenprodukt B_3 und für eine Einheit vom Produkt A_2 0,4 Einheiten vom Zwischenprodukt B_1 und 0,7 Einheiten vom Zwischenprodukt B_2 benötigt. Ferner werden für die Zwischenprodukte folgende Rohstoffe gebraucht.

Für eine Einheit B_1:	0,3	Einheiten	vom	Rohstoff	C_1
	0,5	,,	,,	,,	C_2
	0,3	,,	,,	,,	C_3
Für eine Einheit B_2:	0,3	,,	,,	,,	C_1
	0,4	,,	,,	,,	C_3
	0,4	,,	,,	,,	C_4
Für eine Einheit B_3:	0,6	,,	,,	,,	C_2
	0,3	,,	,,	,,	C_3
	0,2	,,	,,	,,	C_4

Die Gesamtproduktion und die einzelnen verbrauchten Mengen lassen sich in folgende drei Gleichungssysteme zusammenfassen.

$$\text{I} \quad R = 30A_1 + 20A_2$$

Dem Gleichungssystem I entspricht die Matrix

$$\mathfrak{A} = (30 \quad 20)$$

$$\text{II} \qquad \begin{aligned} A_1 &= 0{,}5B_1 + 0{,}6B_3 \\ A_2 &= 0{,}4B_1 + 0{,}7B_2 \end{aligned}$$

Dem Gleichungssystem II entspricht die Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} \qquad \begin{aligned} B_1 &= 0{,}3C_1 + 0{,}5C_2 + 0{,}3C_3 \\ B_2 &= 0{,}3C_1 + 0{,}4C_3 + 0{,}4C_4 \\ B_3 &= 0{,}6C_2 + 0{,}3C_3 + 0{,}2C_4 \end{aligned}$$

Dem Gleichungssystem III entspricht die Matrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Um die benötigten Rohstoffmengen zu ermitteln, muß eine zweimalige lineare Substitution durchgeführt werden.

$$\mathrm{I} \leftarrow \mathrm{II} \leftarrow \mathrm{III}$$

Dabei ist es gleich, in welcher Reihenfolge substituiert wird.

$$\text{a)} \quad (\mathrm{I} \leftarrow \mathrm{II}) \leftarrow \mathrm{III} \qquad \text{b)} \quad \mathrm{I} \leftarrow (\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{III})$$

Im Falle a) wird zunächst das System II der Zwischenprodukte in das System I der Endprodukte eingesetzt, und so werden die benötigten Zwischenprodukte ermittelt. Schließlich wird das System III der Rohstoffe in das System (I/II) der Zwischenprodukte eingesetzt. Im Falle b) wird zuerst das System III der Rohstoffe in das System II der Zwischenprodukte eingesetzt und schließlich das so gewonnene neue (II/III)-System in das System I der Endprodukte. Beide Wege führen zum gleichen Endergebnis.
Auf die Matrizenrechnung übertragen, verlangt die zweifache Substitution, daß ein Matrizenprodukt aus drei Matrizen gebildet wird.

$$A \leftarrow B \leftarrow C \triangleq \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$$

Dem Fall a) entspricht dann die Produktbildung $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$ und dem Fall b) die Produktbildung $\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{C})$.

Es ist also: $$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{C})} \tag{46}$$

Das assoziative Gesetz der Multiplikation gilt auch für die Multiplikation von Matrizen.

Je nachdem, in welcher Reihenfolge die Matrizen miteinander multipliziert werden, erfolgt eine **Erweiterung des Schemas von Falk** nach rechts oder nach unten. Im ersten Falle ist nur die Spaltensummenprobe, im zweiten Falle nur die Zeilensummenprobe anwendbar.

Fall a):	$(\mathrm{I} \leftarrow \mathrm{II}) \leftarrow \mathrm{III}$					0,3	0,5	0,3	0
	$\triangleq (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$		0,5	0	0,6	0,3	0	0,4	0,4
			0,4	0,7	0	0	0,6	0,3	0,2
	30	20	23	14	18	11,1	22,3	17,9	9,2
	30	20	23	14	18	11,1	22,3	17,9	9,2

Fall b):	$\mathrm{I} \leftarrow (\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{III})$			0,3	0,5	0,3	0	1,1
	$\triangleq \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$			0,3	0	0,4	0,4	1,1
				0	0,6	0,3	0,2	1,1
	0,5	0	0,6	0,15	0,61	0,33	0,12	1,21
	0,4	0,7	0	0,33	0.20	0,40	0,28	1,21
	30	20		11,1	22,3	17,9	9,20	60,5

Für das vorgesehene Produktionsprogramm werden 11,1 Einheiten vom Rohstoff R_1, 22,3 Einheiten vom Rohstoff R_2, 17,9 Einheiten vom Rohstoff R_3 und 9,2 Einheiten vom Rohstoff R_4 benötigt.

Das **allgemeine Modell für die Multiplikation dreier Matrizen** nimmt stets eine der beiden Formen an:

	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{z}_1$
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}\mathfrak{C}$	$\mathfrak{z}_2$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$	$\mathfrak{z}_3$

mit *Zeilensummenprobe*

	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$
$\mathfrak{s}_1$	$\mathfrak{s}_2$	$\mathfrak{s}_3$

mit *Spaltensummenprobe*

In beiden Fällen steht *im linken unteren Feld der linke Faktor, dem sich die restlichen Faktoren nach oben oder nach rechts oben anschließen.*

BEISPIEL

Es ist das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ für

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu bilden. Abschließend ist die Anzahl der in den beiden Anordnungen jeweils zu bildenden Skalarprodukte zu vergleichen.

Lösung: *mit Zeilensummenprobe:*

				0	2	−4	−2
				1	0	2	3
		4	−2	−2	8	−20	−14
		−2	0	0	−4	8	4
		0	2	2	0	4	6
		3	1	1	6	−10	−3
5	4	−2	0	−14	24	−76	−66
0	3	1	2	4	0	8	12
0	−7	4	1	9	34	−50	−7

Es sind $4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = (4 + 3) \cdot 3$, also 21 Skalarprodukte zu bilden.

mit Spaltensummenprobe:

				4	−2			
				−2	0			
				0	2	0	2	−4
				3	1	1	0	2
5	4	−2	0	12	−14	−14	24	−76
0	3	1	2	0	4	4	0	8
0	−7	4	1	17	9	9	34	−50
5	0	3	3	29	−1	−1	58	−118

Es sind $3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 3(2 + 3)$, also 15 Skalarprodukte zu bilden.

Die gezeigten Schemata lassen sich für eine beliebige Anzahl von Matrizen erweitern.

Allgemeines Schema mit Zeilensummenprobe:

	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{z}_1$
$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{z}_2$
$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{z}_3$
. . . . .	. . . .	. . .
$\mathfrak{A}_{n-1}$	$\mathfrak{A}_{n-1}\cdots\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{z}_{n-1}$
$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{A}_{n-1}\cdots\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{z}_n$

Allgemeines Schema mit Spaltensummenprobe:

	$\mathfrak{A}_{n-1}$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_1$
$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{A}_{n-1}$	$\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{A}_{n-1}\cdots\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{A}_{n-1}\cdots\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{A}_{n-1}\cdots\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$
$\mathfrak{s}_n$	$\mathfrak{s}_{n-1}$	$\mathfrak{s}_3$	$\mathfrak{s}_2$	$\mathfrak{s}_1$

Die Matrizenmultiplikation ist für unbegrenzt viele Faktoren durchführbar unter der Voraussetzung, daß die einzelnen Matrizen in der beabsichtigten Reihenfolge miteinander verkettbar sind. Unabhängig von der Anzahl der Faktoren hat die Produktmatrix stets so viel Zeilen wie die erste und so viel Spalten wie die letzte Matrix (vgl. Aufbau des Schemas von FALK).

$$\mathfrak{A}_{(m,\,n)}\cdot\mathfrak{A}_{(n,\,p)}\cdot\mathfrak{A}_{(p,\,q)}\cdot\mathfrak{A}_{(q,\ )}\ldots\mathfrak{A}_{(\ ,\,u)}\cdot\mathfrak{A}_{(u,\,v)}=\mathfrak{A}_{(m,\,v)}$$

Welche der beiden Anordnungen im einzelnen Falle vorteilhafter ist, hängt außer von solchen Erwägungen wie Papierformat und Größe der Matrix, vor allem von der Anzahl der zu berechnenden Skalarprodukte ab (vgl. Beispiel S. 151).

Anordnung im Schema von FALK **nebeneinander**:

	$\mathfrak{B}_{(n,\,p)}$	$\mathfrak{C}_{(p,\,q)}$	$\mathfrak{D}_{(q,\,r)}$
$\mathfrak{A}_{(m,\,n)}$	$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_{(m,\,p)}$	$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_{(m,\,q)}$	$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_{(m,\,r)}$
$\mathfrak{s}_1$	$\mathfrak{s}_2$	$\mathfrak{s}_3$	$\mathfrak{s}_4$

Es sind $mp + mq + mr = m(p + q + r)$ Skalarprodukte zu bilden (vgl. Beispiel S. 151).

Diese Anordnung ist besonders vorteilhaft, wenn die erste Matrix $\mathfrak{A}$ eine Zeilenmatrix ist, denn dann ist $m = 1$.

Anordnung im Schema von Falk **untereinander**:

	$\mathfrak{D}_{(q,r)}$	z_1
$\mathfrak{C}_{(p,q)}$	$\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(p,r)}$	z_2
$\mathfrak{B}_{(n,p)}$	$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(n,r)}$	z_3
$\mathfrak{A}_{(m,n)}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}_{(m,r)}$	z_4

Es sind $pr + nr + mr = r(p + n + m)$ Skalarprodukte zu bilden (vgl. Beispiel S. 151).

Diese Anordnung ist besonders vorteilhaft, wenn die letzte Matrix $\mathfrak{D}$ eine Spaltenmatrix ist, denn dann ist $r = 1$.
Allgemein gilt: Ist die Produktmatrix vom Typ (m, r) und ist $m < r$, so ist es vorteilhaft, das Falksche Schema von links nach rechts aufzubauen. Ist dagegen $m > r$, so ist es günstiger, wenn von oben nach unten gerechnet wird. Bei sehr umfangreichen Matrizen schreibt man die Ausgangsmatrizen und die Matrizen für die Zwischenprodukte getrennt auf die einzelnen Blätter, die dann im Sinne der Falkschen Anordnung aneinandergefügt werden.

AUFGABEN

Es sind die folgenden Matrizenprodukte jeweils in der in der Aufgabe gegebenen Faktorenfolge zu bilden:

89. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

90. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

91. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 & 0 \\ 6 & 2 & 8 & -7 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 8 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

92. $\mathfrak{A} = (-3 \ \ -1 \ \ 4) \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

93. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

2.3. Die Kehrmatrix

2.3.1. Definition der Kehrmatrix

Neben der Matrizenmultiplikation ist in der Matrizenrechnung die Berechnung der **Kehrmatrix** von besonderer Bedeutung. Ebenso spielt die Kehrmatrix bei der Lösung einer großen Anzahl praktischer Probleme eine außerordentliche Rolle. So wird mit Hilfe der Kehrmatrix in 2.5.1. der Rücklauf nicht restlos aufgearbeiteter Rohstoffe quantitativ erfaßt. In 2.5.2. wird die Teilumkehr der Kopplungsmatrix zur Strukturmatrix mit Hilfe der Kehrmatrix durchgeführt.

Die Elemente der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sollen die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

sein, das durch die Matrizengleichung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \qquad \text{mit}$$

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden kann.

Wird das angegebene Gleichungssystem nach den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ aufgelöst, so erhält man das sogenannte inverse Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \dots + \alpha_{1n} y_n \\ x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \dots + \alpha_{2n} y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \dots + \alpha_{nn} y_n, \end{aligned}$$

dessen Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

als Kehrmatrix oder inverse Matrix zu $\mathfrak{A}$ bezeichnet und durch $\mathfrak{A}^{-1}$ symbolisiert wird. Dieser Vorgang wird Umkehrung des Gleichungssystems genannt.

Aus $$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} \tag{47a}$$

erhält man durch Umkehrung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{y}. \tag{47b}$$

Wird in den Gleichungen

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{y}$$

auf den rechten Seiten für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wechselweise jeweils die rechte Seite der anderen Gleichung eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{x}.$$

In 2.2.4.3. wurde gezeigt, daß die Matrix $\mathfrak{A}$ durch Multiplikation mit der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ reproduziert wird. Die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ist die Matrix, mit der $\mathfrak{A}$ von rechts oder von links multipliziert wiederum $\mathfrak{A}$ ergibt.

Aus

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}$$

folgt daher:

$$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}} \tag{48}$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{-1}$ sind demnach *vertauschbare* oder *kommutative* Matrizen.

Die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ist die Matrix, mit der die ursprüngliche Matrix $\mathfrak{A}$ von rechts oder von links multipliziert die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ergibt.

Das Matrizenprodukt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$ kann als Analogon[1]) zum Produkt $a \cdot b$ der reellen Zahlen a und $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ angesehen werden. In Analogie hierzu wird die Kehrmatrix zu $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^{-1}$ symbolisiert.
Die Tatsache, daß das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ergibt, wird bei der Probe zur Überprüfung der aus der ursprünglichen Matrix errechneten Kehrmatrix benutzt.
Es muß sein:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Es bleibt nun die Frage offen, *wie* zu einer gegebenen Matrix die zugehörige Kehrmatrix berechnet wird. Das entsprechende Verfahren kann erst dargelegt werden, nachdem durch den folgenden Abschnitt Kenntnisse über Determinanten vermittelt bzw. wiederholt worden sind.

2.3.2. Einiges über Determinanten

Ob zur Matrix $\mathfrak{A}$ die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ überhaupt existiert, ist von der zugehörigen Determinante det $\mathfrak{A}$ abhängig.

Deshalb ist es notwendig, auch im Zusammenhang mit der Bestimmung der Kehrmatrix mit Hilfe von Adjunkten, sich nochmals kurz zusammenfassend mit Determinanten zu beschäftigen. Dabei soll weitgehend auf die Behandlung der Determinanten in [1] zurückgegriffen werden.
Determinanten haben im Gegensatz zu Matrizen einen ganz bestimmten Zahlenwert. Der Wert einer dreireihigen Determinante kann beispielsweise mit Hilfe der Regel von Sarrus bestimmt werden.

[1]) Analogon (griech.) gleichartiger Fall

Für vier- und mehrreihige Determinanten erfolgt die Bestimmung des Wertes der Determinante durch Entwicklung nach einer Reihe [1].
Ehe auf die Entwicklungssätze für Determinanten ausführlicher eingegangen werden kann, sollen die bei der Entwicklung nach einer Reihe benötigten Sätze und Definitionen ohne Beweisführung nochmals zusammengefaßt werden.
Für das Rechnen mit Determinanten gelten u. a. die folgenden Regeln (Beweisführung vgl. [1]):

1. Sind sämtliche Elemente einer Reihe Null, dann ist der Wert der Determinante Null.
2. Determinanten mit gleichen oder proportionalen parallelen Reihen haben den Wert Null.
3. Ein allen Elementen einer Reihe einer Determinante gemeinsamer Faktor kann vor die Determinante gesetzt werden.
4. Wird zu einer Reihe einer Determinante ein Vielfaches einer Parallelreihe addiert, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
5. Werden eine Zeile und eine Spalte einer Determinante gestrichen, so ergeben die restlichen Elemente, zu einer neuen Determinante zusammengefaßt, die zu dem im Kreuzungspunkt der gestrichenen Reihen stehenden Element gehörige **Unterdeterminante**.
6. Die Unterdeterminante ist, je nachdem die Summe der Indizes des zugehörigen Elements *gerade* oder *ungerade* ist, mit einem *positiven* oder einem *negativen* Vorzeichen versehen.
   Man sagt: *Das zur Unterdeterminante gehörige Element steht an gerader oder an ungerader Stelle.*
   Solche *mit Vorzeichen versehenen Unterdeterminanten* heißen **Adjunkten**.
   Adjunkten werden durch *große Buchstaben* zuzüglich doppelten Indizes gekennzeichnet. A_{23} ist die zum Element a_{23} gehörige Adjunkte.

Nach dieser kurzen Zusammenstellung der für die Entwicklung nach einer Reihe benötigten Lehrsätze, Erklärungen und Definitionen soll nunmehr auf die Entwicklungssätze ausführlich eingegangen werden.

Entwicklungssätze für Determinanten

Lehrsatz:

> Werden die Elemente einer Reihe, d. h. einer Zeile oder einer Spalte, jeweils mit der zugehörigen Adjunkte multipliziert und anschließend die Produkte addiert, so ergibt die Produktsumme den Wert der Determinante.

Die n-reihige Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kann entweder nach einer Spalte (zum Beispiel der 3. Spalte)

$$A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + \cdots + a_{n3}A_{n3}$$

allgemein:

$$A = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i}\, A_{\varrho k} \text{ (für } i = k)$$

oder nach einer Zeile (zum Beispiel der 2. Zeile)

$$A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$

allgemein:

$$A = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho}\ A_{k\varrho} \quad \text{(für } i = k)$$

entwickelt werden.
Es ist also:

$$\boxed{\sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho}\, A_{k\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i}\, A_{\varrho k} = A \quad \text{(für } i = k)} \tag{49}$$

BEISPIEL

Es ist der Wert der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 12 & 8 & -6 & 4 \\ -10 & -7 & 7 & -3 \\ 14 & 13 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

zu berechnen.

Lösung: Um die Berechnung zu vereinfachen, wird die Determinante mit Hilfe der Determinantengesetze so umgeformt, daß in der Reihe, nach der die Determinante entwickelt werden soll, bis auf ein Element möglichst alle anderen Elemente Null werden. Es ist dann nur ein einziges Produkt $a_{ik}A_{ik}$ zu bilden, da in allen anderen der Faktor a_{ik} gleich Null ist. Die n-reihige Determinante wird auf diese Weise auf eine $(n - 1)$-reihige Determinante reduziert. *Dieses Verfahren ist für jede n-reihige Determinante anwendbar*, wenn es auch in vielen Fällen sehr aufwendig ist. Ein in jeder Hinsicht ökonomischeres Verfahren zur Berechnung von Determinanten wird in 2.4.5. gebracht.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 12 & 8 & -6 & 4 \\ -10 & -7 & 7 & -3 \\ 14 & 13 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

Von der zweiten Zeile ist das Doppelte der ersten und von der vierten Zeile das Dreifache der ersten Zeile zu subtrahieren, während zur dritten Zeile das Doppelte der ersten Zeile zu addieren ist.

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$a_{21} = 2$ steht an ungerader Stelle. Um die zugehörige Adjunkte A_{21} zu ermitteln, ist deshalb vor die entsprechende Unterdeterminante der Faktor -1 zu setzen.

$$D = 2(-1) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Von der ersten Zeile ist das Vierfache der zweiten Zeile, und von der dritten Zeile ist das Einfache der zweiten Zeile zu subtrahieren.

$$D = -2 \begin{vmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$b_{21} = +1$ steht gleichfalls an ungerader Stelle. Deshalb ist wiederum vor die B_{21} bestimmende Unterdeterminante der Faktor -1 zu setzen.

$$D = (-2)(+1)(-1) \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = 2(-7+4) = \underline{\underline{-6}}$$

Hinweis: Der Einfachheit halber läßt man die runden Klammern vor den Determinanten in der Praxis weg und multipliziert den vor der Adjunkte stehenden Faktor mit -1.

Für die Entwicklung der Kehrmatrix nach Adjunkten ist außerdem die Beziehung

$$\sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} A_{k\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i} A_{\varrho k} \quad \text{für} \quad i \neq k \text{ von Bedeutung.}$$

Es soll deshalb für $n = 3$ die Produktsumme sowohl für $i = k$, als auch für $i \neq k$ ermittelt werden.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Wird die Determinante nach der 2. Zeile entwickelt, so ist

$$\sum_{\varrho=1}^{3} a_{2\varrho} A_{2\varrho} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = A\,.$$

In diesem Falle ist $i = k = 2$.

Ist $i \neq k$, wird z. B. für $i = 1$ und für $k = 2$ eingesetzt, entsteht

$$\sum_{\varrho=1}^{3} a_{1\varrho} A_{2\varrho} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}.$$

Es sind jetzt die *Elemente der ersten Zeile* mit den entsprechenden *Adjunkten der zweiten Zeile multipliziert* worden.

Das ergibt:

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Genau wie die dreireihige Determinante nach einer Reihe entwickelt wurde, kann umgekehrt *die Produktsumme wiederum zu einer dreireihigen Determinante zusammengefaßt werden,* wenn die Vorzeichen und die einzelnen Elemente in den Adjunkten entsprechend angeordnet sind. In der vorliegenden Produktsumme können die zu den Adjunkten gehörigen Elemente ihrem Vorzeichen entsprechend Elemente der zweiten Zeile sein. Die drei zweireihigen Adjunkten lassen sich dann wie folgt zu einer dreireihigen Determinante zusammenfügen. Diese Determinante soll mit $\tilde{A}$ bezeichnet werden. Es ist dann:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

In der Determinante $\tilde{A}$ stimmen alle entsprechenden Elemente in der ersten und zweiten Zeile überein. Der Wert der Determinante $\tilde{A}$ ist daher Null. Das für $n = 3$ Gezeigte ist für jedes beliebige n nachweisbar.
Allgemein gilt:

Werden die Elemente einer Reihe der Determinante mit den entsprechenden Adjunkten einer Parallelreihe multipliziert, so hat die Produktsumme den Wert Null.

Es ist also:

$$\boxed{\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i} A_{\varrho k} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho} A_{k\varrho} \quad \begin{cases} = A & \text{für } i = k \\ = 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}} \tag{50}$$

AUFGABEN

94. Es ist die algebraische Summe der zu den Matrizen der Aufgabe 49c gehörigen drei Determinanten zu bilden.
95. Es ist der Wert der zu den Matrizen in den Aufgaben 77 und 78 gehörigen vier Determinanten zu berechnen.
96. Es ist der Wert folgender Determinanten zu bestimmen:

a)
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -13 & 12 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b)
$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ 9 & -10 & -6 & 3 \\ -4 & 14 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

2.3.3. Berechnung der Kehrmatrix mit Hilfe von Adjunkten

Um die Koeffizienten des inversen Gleichungssystems zu ermitteln, muß das gegebene System

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgelöst werden (vgl. 2.3.1.). Die Auflösung des Systems kann mit Hilfe von Adjunkten erfolgen. Zu diesem Zwecke werden alle Gleichungen des Systems je mit der entsprechenden Adjunkte einer Spalte, also mit $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$, multipliziert, so zum Beispiel mit den Adjunkten der zweiten Spalte.
Für $k = 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y_1 \cdot A_{12} &= A_{12}\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
y_2 \cdot A_{22} &= A_{22}\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n \cdot A_{n2} &= A_{n2}\,(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\,.
\end{aligned}$$

Beide Seiten des Systems addiert und entsprechend zusammengefaßt ergibt:

$$\begin{aligned}
y_1A_{12} + y_2A_{22} + \cdots + y_nA_{n2} &= \left\{\begin{aligned}
&x_1(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + \cdots + a_{n1}A_{n2}) \\
&+ x_2(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{n2}A_{n2}) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ x_n(a_{1n}A_{12} + a_{2n}A_{22} + \cdots + a_{nn}A_{n2})
\end{aligned}\right. \\
&= 0 + Ax_2 + 0 + 0 + \cdots + 0 = \\
&= Ax_2\,.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite ergeben alle Klammerausdrücke mit Ausnahme des zweiten den Wert Null. In diesen Klammern wurden jeweils die Elemente einer Spalte mit den entsprechenden Adjunkten einer *parallelen* Spalte multipliziert (vgl. 2.3.2.). Lediglich in der Klammer der zweiten Zeile werden alle Elemente der zweiten Spalte der Matrix mit der zugehörigen Adjunkte multipliziert. Diese Klammer ergibt also den Determinantenwert A.
Es ist demnach

$$y_1A_{12} + y_2A_{22} + \cdots + y_nA_{n2} = Ax_2$$

oder allgemein:

$$y_1A_{1k} + y_2A_{2k} + \cdots + y_nA_{nk} = Ax_k$$

und nach x_k aufgelöst:

$$x_k = \frac{A_{1k}y_1 + A_{2k}y_2 + \cdots + A_{nk}y_n}{A}.$$

Da im Nenner des Bruches der Determinantenwert A steht, ist x_k genau dann berechenbar, wenn das System quadratisch und der Wert der Determinante $A \neq 0$ ist.

Quadratische Matrizen, deren zugehörige Determinante $\det \mathfrak{A} \neq 0$ ist, heißen *reguläre* Matrizen im Gegensatz zu *singulären* Matrizen, bei denen die zugehörige Determinante $\det \mathfrak{A} = 0$ ist.

> Die *Umkehrung der Matrix $\mathfrak{A}$ ist genau dann möglich,* wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ quadratisch und ihre zugehörige Determinante $\det \mathfrak{A} \neq 0$ ist, d. h., *wenn die Matrix $\mathfrak{A}$ eine reguläre Matrix ist.*

Die Auflösung des gegebenen linearen Systems nach den x_k mit Hilfe der oben entwickelten Formel wird **Cramerscher Hauptfall** genannt. Das gegebene System zeilenweise nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgelöst, ergibt das inverse System:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{A}\,(A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + \cdots + A_{n1}y_n)\\
x_2 &= \frac{1}{A}\,(A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{n2}y_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= \frac{1}{A}\,(A_{1n}y_1 + A_{2n}y_2 + \cdots + A_{nn}y_n).
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses inversen Systems ist die Matrix:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix, in der man jedes Element durch $\det \mathfrak{A}$ zu dividieren hat, ist die gestürzte Matrix der Adjunkten.

> *Die gestürzte Matrix der Adjunkten* heißt **adjungierte Matrix** und wird mit $\mathfrak{A}_{ad}$ gekennzeichnet.

Für die Ermittlung der Kehrmatrix ergibt sich nach den bisherigen Überlegungen folgender Lösungsweg:

> Um die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ einer gegebenen regulären Matrix $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, ersetzt man in der transponierten Matrix $\mathfrak{A}^T$ jedes Element durch die entsprechende Adjunkte und dividiert die so erhaltene adjungierte Matrix $\mathfrak{A}_{ad}$ durch $\det \mathfrak{A}$.

Es ist also:

$$\boxed{\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A}_{\text{ad}}} \tag{51}$$

Zur Erläuterung sei die zu der Matrix 2. Ordnung

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ gehörende Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ berechnet.

Es ist

$$\mathfrak{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \mathfrak{A}_{\text{ad}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus $\mathfrak{A}_{\text{ad}}$ erhält man durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{\det \mathfrak{A}}$ die Kehrmatrix:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

und durch Berechnung der zur gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ gehörenden Adjunkten schließlich:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathfrak{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Werden die Elemente der adjungierten Matrix $\mathfrak{A}_{\text{ad}}$ mit dem Faktor $\frac{1}{\det \mathfrak{A}}$ multipliziert, dann entstehen die Glieder:

$$\frac{A_{11}}{\det \mathfrak{A}}, \quad \frac{A_{21}}{\det \mathfrak{A}}, \quad \text{allgemein} \quad \frac{A_{ki}}{\det \mathfrak{A}}.$$

Die durch den Wert der Determinante dividierten Adjunkten heißen **reduzierte Adjunkten.**

Die *Elemente der Kehrmatrix* $\mathfrak{A}^{-1}$ sind also *reduzierte Adjunkten.*

BEISPIEL

1. Es ist die Kehrmatrix zur Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 18 \\ 5 & 6 & 3 \\ 10 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$ zu bilden.

Lösung:

Bei der Bildung der Kehrmatrix mit Hilfe von Adjunkten sind folgende Teilschritte zu beachten:

1. Überprüfen der Umkehrbarkeit der gegebenen Matrix.
2. Aufstellen der adjungierten Matrix $\mathfrak{A}_{\text{ad}}$.
3. Dividieren der Matrix $\mathfrak{A}_{\text{ad}}$ durch $\det \mathfrak{A}$.
4. Probe.

Zu 1. Der gemeinsame Faktor 5 der Elemente der ersten Spalte wird vor die Determinante gesetzt und in der neuen Determinante von der ersten Zeile das Fünffache der zweiten Zeile und von der dritten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile subtrahiert.

$$\det \mathfrak{A} = 5\begin{vmatrix} 5 & 30 & 18 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathfrak{A} = 5(-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5(+3) = \underline{\underline{-15}}$$

Da $\det \mathfrak{A} \neq 0$ ist, ist die Matrix $\mathfrak{A}$ regulär, und $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert.

Zu 2.

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{9}} \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-12}} \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-18}}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-5}} \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 25 & 18 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-5}} \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 25 & 18 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{15}}$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-5}} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 25 & 30 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = \underline{\underline{25}} \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 25 & 30 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

Zu 3. Division von $\mathfrak{A}_{ad}$ durch $\det \mathfrak{A} = -15$

$$\mathfrak{A}^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -12 & -18 \\ -5 & -5 & 15 \\ -5 & 25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Zu 4. Probe:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 18 \\ 5 & 6 & 3 \\ 10 & 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die zur Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 30 & 6 & 11 \\ 18 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

gehörige Kehrmatrix $\mathfrak{B}^{-1}$ ist

$$\mathfrak{B}^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -5 & -5 \\ -12 & -5 & 25 \\ -18 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist durch Nachrechnen zu überprüfen.
Die Matrix $\mathfrak{B}$ ist nichts anderes als die gestürzte Matrix $\mathfrak{A}^T$ des vorangegangenen Beispiels.
Es gilt also in diesem Falle:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^T.$$

Die Kehrmatrix $\mathfrak{B}^{-1}$ wiederum ist, wie aus dem Ergebnis zu ersehen ist, die gestürzte Matrix der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$.
Damit ist am Beispiel gezeigt, daß

$$\boxed{\mathfrak{B}^{-1} = (\mathfrak{A}^T)^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})^T} \quad \text{ist.} \tag{52}$$

Dieser Zusammenhang ist allgemeingültig:

Die Kehrmatrix der transponierten Matrix ist gleich der Transponierten der Kehrmatrix.

Der *Beweis* für die Allgemeingültigkeit dieses Satzes soll an dieser Stelle nicht geführt werden.

BEISPIEL

2. Es ist zu untersuchen, ob die Matrix $\mathfrak{A}$ umkehrbar ist:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: In der zugehörigen Determinante

$$\det \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

werden aus der ersten Zeile der gemeinsame Faktor 4 und aus der zweiten der gemeinsame Faktor 10 vor die Determinante gesetzt.

$$\det \mathfrak{A} = 40 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

In der ersten und zweiten Zeile sind alle entsprechenden Elemente gleich: Der Wert der Determinante ist deshalb 0. $\mathfrak{A}$ ist also eine *singuläre Matrix.* $\mathfrak{A}^{-1}$ *existiert nicht.*

AUFGABEN

Zu den folgenden Matrizen ist jeweils die Kehrmatrix zu bestimmen.

97. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -0{,}04 & 1 \end{pmatrix}$ 98. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 99. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

100. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 101. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 102. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Anleitung: In den Aufgaben 101 und 102 sind die Elemente der Kehrmatrix durch gemeine Brüche auszudrücken.

103. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

104. Mit den Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Richtigkeit der Gleichung $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}$ zu zeigen, indem $\mathfrak{B}^{-1}$ ermittelt und die drei Matrizen nach dem Schema von Falk mit Einschalten der *Spaltensummenprobe* miteinander multipliziert werden.

2.4. Der verkettete Gaußsche Algorithmus[1])

Die Berechnung der Kehrmatrix mit Hilfe von Adjunkten läßt zwar die Bedingungen, unter denen eine Matrizenumkehr überhaupt nur möglich ist, und die Zusammenhänge zwischen der ursprünglichen Matrix und der Kehrmatrix klar erkennen; das Verfahren ist aber andererseits so aufwendig, daß es für die Umkehr von Matrizen größeren Umfangs ungeeignet ist. Es kommt darauf an, ein Verfahren zu finden, das übersichtlich und besonders für Rechenmaschinen geeignet ist. Ein solches Schema läßt sich aus dem Gaussschen Algorithmus heraus entwickeln.

2.4.1. Problemstellung

Der Gausssche Algorithmus wird ausführlich im Band „Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen“ [1] behandelt.
Er hat das Ziel, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_n \end{array}$$

1) Die Bezeichnung für dieses Rechenverfahren ist nicht immer einheitlich. Oft wird es auch „*abgekürzter Gaußscher Algorithmus*“ oder „*modernisierter Algorithmus*“ genannt. Das Verfahren selbst wird von verschiedenen Seiten angegeben, so z. B. bei Cholesky (1924) und bei Banachiewicz (1938). Es muß jedoch angenommen werden, daß Gauss (vgl. 4.7.1.) selbst bereits die Möglichkeit der Verkettung bekannt war, das Verfahren aber zu seiner Zeit wegen des Fehlens der dazu notwendigen Rechenmaschinen für die Praxis keine Bedeutung hatte und deshalb auch von Gauss nicht weiter verfolgt wurde

durch fortgesetzte Elimination der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der zweiten bis n-ten Gleichung in das gestaffelte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= b_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ b_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

umzuformen. Das gestaffelte b-System wird dann schrittweise von x_n beginnend über x_{n-1}, x_{n-2} bis zu x_1 aufgelöst.
Die Elimination der Variablen erfolgt mit Hilfe des Additionsverfahrens [1].
Der GAUSSsche Algorithmus in der bisher behandelten Form hat den Nachteil, daß bei größeren Gleichungssystemen umfangreiche Schreibarbeiten notwendig sind. Es muß deshalb das Ziel sein, einen Weg zu finden, der *ohne Einschalten der Zwischensysteme* vom rechteckigen a-System sofort *zum gestaffelten dreieckigen b-System führt.*

2.4.2. Das Verfahren des verketteten Algorithmus

Die folgenden Betrachtungen sollen sich nur auf Gleichungssysteme beschränken, deren zugehörige Koeffizientenmatrix *regulär* ist, d. h., $\det \mathfrak{A} \neq 0$ (vgl. [1]).
Dabei wird *aus dem Gaußschen Algorithmus schrittweise der verkettete Algorithmus entwickelt.*
Aus dem nachfolgenden Gleichungssystem sollen die Variablen x_1 und x_2 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= 3 \qquad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= a_1 \\ 15x_1 - 12x_2 &= 69 \qquad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= a_2 \end{aligned}$$

Um die Schreibarbeiten auf ein Mindestmaß zu reduzieren, werden nur die Koeffizienten und die absoluten Glieder in das Lösungsschema übernommen und die Variablen weggelassen.

$$\begin{array}{rr|r} 3 & 3 & 3 \\ 15 & -12 & 69 \\ \hline -5 & \multicolumn{1}{|r|}{-27} & 54 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ \hline c_{21} & \multicolumn{1}{|c|}{a'_{22}} & a'_2 \end{array}$$

Um x_1 aus der zweiten Gleichung zu eliminieren, ist die erste Gleichung mit -5 zu multiplizieren und zur zweiten Gleichung zu addieren. Die erste Gleichung eines jeden Systems wird in diesem Zusammenhang **Eliminationsgleichung** genannt. Der Faktor, mit dem die Eliminationsgleichung zu multiplizieren ist, bewirkt mit der anschließenden Addition, daß in der zweiten Gleichung des Systems das Glied x_1 mit dem Koeffizienten a_{21} verschwindet ($a'_{21} = 0$). Der Faktor, der die Elimination der Variablen x_k bewirkt, soll dem Koeffizienten a_{ik} der Variablen x_k entsprechend mit c_{ik} bezeichnet werden.

Im vorliegenden Falle ist

$$c_{21} = \frac{15}{-3} \qquad \text{allgemein } c_{21} = \frac{a_{21}}{-a_{11}} = \frac{a_{21}}{-b_{11}}.$$

Die Eliminationsgleichungen, die ersten Gleichungen der beiden Systeme, des a-Systems und des a'-Systems, werden zum neuen dreieckigen b-System zusammengefaßt. Durch das Element c_{ik} wird dieses schließlich zum rechteckigen System ergänzt. Außerdem wird in einer zuzüglichen (dritten) Zeile der Lösungsvektor angegeben.

3	3	3
-5	-27	54
3	-2	

b_{11}	b_{12}	b_1
c_{21}	b_{22}	b_2
x_1	x_2	

Um vom rechteckigen a-System unmittelbar zum gestaffelten b/c-System übergehen zu können, ist es notwendig, die Abhängigkeit der b_{ik} und der c_{ik} von den a_{ik} zu untersuchen. Das gleiche gilt für die a_i und die b_i.
Die beiden Systeme in einem Schema zusammengefaßt, ergeben:

3	3	3
15	-12	69
3	3	3
-5	-27	54
3	-2	

$\mathfrak{x} = (3, -2)$.

a_{11}	a_{12}	a_1
a_{21}	a_{22}	a_2
b_{11}	b_{12}	b_1
c_{21}	b_{22}	b_2
x_1	x_2	

$\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$.

Die erste Zeile des a-Systems wird als Eliminationsgleichung unverändert in das b-System übernommen.

Es ist also: $b_{11} = a_{11} \qquad b_{12} = a_{12} \qquad b_{1k} = a_{1k}$.

Als nächstes Element ist das Element c_{21}, der Faktor, mit der die Eliminationsgleichung zu multiplizieren ist, zu ermitteln.

Es ist: $\quad c_{21} = \frac{15}{-3} = -5 \qquad c_{21} = \frac{a_{21}}{-b_{11}}.$

Das Element b_{22} ergibt sich schließlich wie folgt:

$$b_{22} = -12 + (-5) \cdot 3 \qquad b_{22} = a_{22} + c_{21} \cdot b_{12}.$$

Zum Schluß wird das b-System nach den Variablen x_k aufgelöst.

Es ist:
$$x_2 = \frac{54}{-27} \qquad\qquad x_2 = \frac{b_2}{b_{22}}$$
$$x_2 = -2$$
$$x_1 = \frac{3-3(-2)}{3} \qquad\qquad x_1 = \frac{b_1 - b_{12}x_2}{b_{11}}$$
$$x_1 = 3$$

Bei größeren Systemen lassen sich die Elemente c_{ik} ebenfalls zu einer Dreiecksmatrix $\mathfrak{C}$ zusammenfassen. Die Elemente der Matrix $\mathfrak{C}$ sind unterhalb der Hauptdiagonalen angeordnet. Im Rechenschema des verketteten Algorithmus werden die beiden Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zu einer Matrix zusammengefaßt, in der die Elemente der Hauptdiagonalen und die darüberliegenden Elemente die Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$ und die unter der Hauptdiagonalen liegenden Elemente die Elemente der Matrix $\mathfrak{C}$ sind.

Das lineare Gleichungssystem mit zwei Variablen läßt den Weg erkennen, der zum verketteten Algorithmus führt. Wie die Berechnung der Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$ und der Matrix $\mathfrak{C}$ im einzelnen erfolgt, soll an einem Gleichungssystem mit vier Variablen entwickelt werden:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 20 \\ -6x_1 - 5x_2 \phantom{{}+6x_3} + 2x_4 &= -45 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -\ 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 58 \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_4 \end{aligned}$$

Die Anwendung des GAUSSschen Algorithmus ergibt das Schema

$$\text{I.}\quad \begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\ -6 & -5 & 0 & 2 & -45 \\ 2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\ 4 & 6 & 2 & -3 & 58 \\ \hline 3 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ -1 & -8 & 7 & -6 & -23 \\ -2 & 0 & 4 & -3 & 18 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 7 \\ & 0 & 4 & -3 & 18 \\ \hline & & -4 & 5 & -10 \\ \hline \end{array} \qquad \text{II.}\quad \begin{array}{cccc|c} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & \mathbf{a_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_4 \\ \hline c_{21} & \mathbf{a'_{22}} & \mathbf{a'_{23}} & \mathbf{a'_{24}} & \mathbf{a'_2} \\ c_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & a'_3 \\ c_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & a'_4 \\ \hline & c_{32} & \mathbf{a''_{33}} & \mathbf{a''_{34}} & \mathbf{a''_3} \\ & c_{42} & a''_{43} & a''_{44} & a''_4 \\ \hline & & c_{43} & \mathbf{a'''_{44}} & \mathbf{a'''_4} \\ \hline \end{array}$$

Zur Berechnung der vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 werden nur die vier Eliminationsgleichungen benötigt, die im Druck hervorgehoben sind. Die Koeffizienten der vier

Eliminationsgleichungen bilden, wie auf S. 168 gezeigt wurde, die Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$. In das vereinfachte Rechenschema werden nur noch die Elemente der Ausgangsmatrix $\mathfrak{A}$, der beiden Dreiecksmatrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sowie die zugehörigen Absolutglieder der Gleichungen in der folgenden Anordnung geschrieben:

$$
\text{I.}\quad
\begin{array}{rrrr|r}
2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\
-6 & -5 & 0 & 2 & -45 \\
2 & -5 & 6 & -6 & -3 \\
4 & 6 & 2 & -3 & 58 \\
\hline
2 & 3 & -1 & 0 & 20 \\
3 & 4 & -3 & 2 & 15 \\
-1 & 2 & 1 & -2 & 7 \\
-2 & 0 & -4 & 5 & -10 \\
\hline
1 & 7 & 3 & -2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\text{II.}\quad
\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_4 \\
\hline
b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_1 \\
c_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_2 \\
c_{31} & c_{32} & b_{33} & b_{34} & b_3 \\
c_{41} & c_{42} & c_{43} & b_{44} & b_4 \\
\hline
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 &
\end{array}
$$

$$\mathfrak{x} = (1, 7, 3, -2) \qquad\qquad \mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Die direkte Abhängigkeit der b_{ik} und c_{ik} von den a_{ik} ist aus den Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ auf S. 169 zu erkennen.

Hinweis: Es ist ratsam, beim Studium der folgenden allgemeinen Berechnungen aller Elemente parallel die Berechnung mit den Koeffizienten des Systems I durchzuführen.

Die Elemente der ersten Zeile von $\mathfrak{B}$ stimmen überein mit denen der ersten Zeile von $\mathfrak{A}$:

$$b_{11} = a_{11} \qquad b_{12} = a_{12} \qquad b_{13} = a_{13} \qquad b_{14} = a_{14}.$$

Zur Berechnung der übrigen Zeilen von $\mathfrak{B}$ werden die Elemente der Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ benötigt.
Es ergibt sich die erste Zeile der Matrix $\mathfrak{A}'$ mit den Elementen a'_{2k}, indem die Elemente der ersten Zeile von $\mathfrak{A}$ mit

$$c_{21} = \frac{a_{21}}{-b_{11}}$$

multipliziert und die Produkte zu den entsprechenden Elementen der zweiten Zeile von $\mathfrak{A}$ addiert werden, in Formeln:

$$b_{22} = a'_{22} = a_{22} + c_{21} b_{12}$$

$$b_{23} = a'_{23} = a_{23} + c_{21} b_{13}$$

$$b_{24} = a'_{24} = a_{24} + c_{21} b_{14}$$

Entsprechend ergeben sich für die übrigen Zeilen von $\mathfrak{A}'$:

$$
\begin{aligned}
a'_{32} &= a_{32} + c_{31}b_{12} \qquad & a'_{42} &= a_{42} + c_{41}b_{12}\\
a'_{33} &= a_{33} + c_{31}b_{13} \qquad & a'_{43} &= a_{43} + c_{41}b_{13}\\
a'_{34} &= a_{34} + c_{31}b_{14} \qquad & a'_{44} &= a_{44} + c_{41}b_{14}
\end{aligned}
$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}''$ berechnen sich nach dem gleichen Verfahren, wobei die Elemente der Eliminationszeile von $\mathfrak{A}'$ mit

$$c_{32} = \frac{a'_{32}}{-a'_{22}} = (a_{32} + c_{31}b_{12}) : (-b_{22})$$

bzw.

$$c_{42} = \frac{a'_{42}}{-a'_{22}} = (a_{42} + c_{41}b_{12}) : (-b_{22})$$

multipliziert und zu den entsprechenden Elementen der vorletzten bzw. letzten Zeile von $\mathfrak{A}''$ addiert werden, in Formeln:

$$
\begin{aligned}
b_{33} &= a''_{33} = a'_{33} + c_{32}a'_{23} = a_{33} + c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23}\\
b_{34} &= a''_{34} = a'_{34} + c_{32}a'_{24} = a_{34} + c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
a''_{43} &= a'_{43} + c_{42}a'_{23} = a_{43} + c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23}\\
a''_{44} &= a'_{44} + c_{42}a'_{24} = a_{44} + c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24}.
\end{aligned}
$$

Schließlich erhält man das Element a'''_{44} durch Multiplikation der Eliminationszeile von $\mathfrak{A}''$ mit

$$c_{43} = \frac{a''_{43}}{-a''_{33}} = (a_{43} + c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23}):(-b_{33})$$

und Addition zu den Elementen der letzten Zeile von $\mathfrak{A}''$:

$$b_{44} = a'''_{44} = a''_{44} + c_{43}a''_{34} = a_{44} + c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34}.$$

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Übersicht.

Berechnung von $\mathfrak{B}$

1. Zeile:
$$
\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11}\\
b_{12} &= a_{12}\\
b_{13} &= a_{13}\\
b_{14} &= a_{14}
\end{aligned}
$$

2. Zeile:
$$
\begin{aligned}
b_{22} &= a_{22} + c_{21}b_{12}\\
b_{23} &= a_{23} + c_{21}b_{13}\\
b_{24} &= a_{24} + c_{21}b_{14}
\end{aligned}
$$

3. Zeile: $b_{33} = a_{33} + c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23}$

$$b_{34} = a_{34} + c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24}$$

4. Zeile: $b_{44} = a_{44} + c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34}$

Berechnung von $\mathfrak{C}$

1. Spalte: $c_{21} = a_{21}:(-b_{11})$

$$c_{31} = a_{31}:(-b_{11})$$
$$c_{41} = a_{41}:(-b_{11})$$

2. Spalte: $c_{32} = (a_{32} + c_{31}b_{12}):(-b_{22})$

$$c_{42} = (a_{42} + c_{41}b_{12}):(-b_{22})$$

3. Spalte: $c_{43} = (a_{43} + c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23}):(-b_{33})$

In gleicher Weise lassen sich die Formeln für die Absolutglieder berechnen. Es ist

$$b_1 = a_1$$
$$b_2 = a_2 + c_{21}b_1$$
$$b_3 = a_3 + c_{31}b_1 + c_{32}b_2$$
$$b_4 = a_4 + c_{41}b_1 + c_{42}b_2 + c_{43}b_3.$$

Die Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 ergeben sich durch Auflösung des gestaffelten Gleichungssystems mit der Dreiecksmatrix $\mathfrak{B}$ wie folgt:

$$x_4 = b_4 : b_{44}$$
$$x_3 = (b_3 - b_{34}x_4) : b_{33}$$
$$x_2 = (b_2 - b_{23}x_3 - b_{24}x_4) : b_{22}$$
$$x_1 = (b_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4) : b_{11}.$$

Aus den für ein Gleichungssystem mit vier Variablen abgeleiteten Formeln läßt sich erkennen, daß es unabhängig von der Anzahl der Variablen ein allgemeines Gesetz zur Berechnung der Elemente von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ geben muß. Folgende Formeln sind allgemeingültig[1]):

$$\boxed{\begin{aligned} b_{ik} &= a_{ki} + c_{i1}b_{1k} + c_{i2}b_{2k} + c_{i3}b_{3k} + \cdots + c_{i,\,i-1}b_{i-1,\,k} \text{ für } i \leqq k \\ b_i &= a_i + c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + c_{i3}b_3 + \cdots + c_{i,\,i-1}b_{i-1} \\ c_{ik} &= \frac{a_{ik} + c_{i1}b_{1k} + c_{i2}b_{2k} + c_{i3}b_{3k} + \cdots + c_{i,\,k-1}b_{k-1,\,k}}{-b_{kk}} \text{ für } i > k \end{aligned}} \qquad (53)$$

[1]) Auf den Beweis soll an dieser Stelle verzichtet werden

Die Formeln (53) lassen erkennen, daß in ähnlicher Weise wie bei der Matrizenmultiplikation Skalarprodukte zu bilden sind. Im einzelnen gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} b_{ik} &= a_{ik} + \text{skalares Produkt } i\text{-te Zeile von } \mathfrak{C} \\ &\qquad \text{mal } k\text{-te Spalte von } \mathfrak{B} \end{aligned}} \tag{53a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_{i} &= a_{i} + \text{skalares Produkt } i\text{-te Zeile von } \mathfrak{C} \\ &\qquad \text{mal Spalte der Absolutglieder von } \mathfrak{B} \end{aligned}} \tag{53b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ik} &= (a_{ik} + \text{skalares Produkt } i\text{-te Zeile von } \mathfrak{C} \\ &\qquad \text{mal } k\text{-te Spalte von } \mathfrak{B}) : (-b_{kk}) \end{aligned}} \tag{53c}$$

Auch bei der Berechnung der x_i sind Skalarprodukte zu bilden. Es gilt allgemein:

$$\boxed{x_i = [b_i - (b_{in}x_n + b_{i,n-1}x_{n-1} + \cdots + b_{i,i+1}x_{i+1})] : b_{ii}} \tag{54}$$

Bei den x_i wird ebenfalls zuerst das skalare Produkt gebildet.

BEISPIEL

Das nachstehende lineare Gleichungssystem mit vier Variablen ist mit Hilfe des verketteten Algorithmus zu lösen.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= -4 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4 &= -9 \\ x_1 - 7x_2 + 10x_3 - 10x_4 &= -13 \end{aligned}$$

Lösungsschema:

1	−2	3	−4	−2
1	−3	5	−6	−4
1	−4	6	−8	−9
1	−7	10	−10	−13
1	−2	3	−4	−2
−1	−1	2	−2	−2
−1	−2	−1	0	−3
−1	−5	−3	4	8
5	4	3	2	

$\mathfrak{x} = (5, 4, 3, 2)$

allgemein:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_4
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	b_3
c_{41}	c_{42}	c_{43}	b_{44}	b_4
x_1	x_2	x_3	x_4	

$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Lösungsschritte:

Beginnend mit der ersten Zeile von $\mathfrak{B}$ wird abwechselnd eine Zeile von $\mathfrak{B}$ und eine Spalte von $\mathfrak{C}$ schrittweise in der nachstehenden Reihenfolge ermittelt:

1. Schritt:	$b_{1k} = a_{1k}$	und	
	$b_1 = a_1$		(1. Zeile $\mathfrak{B}$-Matrix)
2. Schritt:	$c_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{-a_{11}}$		(1. Spalte $\mathfrak{C}$-Matrix)
3. Schritt:	$b_{2k} = a_{2k} + c_{21}b_{1k}$	und	
	$b_2 = a_2 + c_{21}b_1$		(2. Zeile $\mathfrak{B}$-Matrix)
4. Schritt:	$c_{i2} = \dfrac{a_{i2} + c_{i1}b_{12}}{-b_{22}}$		(2. Spalte $\mathfrak{C}$-Matrix)
5. Schritt:	$b_{3k} = a_{3k} + c_{31}b_{1k} + c_{32}b_{2k}$	und	
	$b_3 = a_3 + c_{31}b_1 + c_{32}b_2$		(3. Zeile $\mathfrak{B}$-Matrix)
6. Schritt:	$c_{i3} = \dfrac{a_{i3} + c_{i1}b_{13} + c_{i2}b_{23}}{-b_{33}}$		(3. Spalte $\mathfrak{C}$-Matrix)
7. Schritt:	$b_{4k} = a_{4k} + c_{41}b_{1k} + c_{42}b_{2k} + c_{43}b_{3k}$	und	
	$b_4 = a_4 + c_{41}b_1 + c_{42}b_2 + c_{43}b_3$		(4. Zeile $\mathfrak{B}$-Matrix)

Abschließend ist das gestaffelte Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{B}$ mit x_4 beginnend nach den Variablen x_i aufzulösen.

$$4x_4 = 8 \qquad -1x_3 + 0\cdot 2 = -3 \qquad -1x_2 + 2\cdot 3 - 2\cdot 2 = -2$$
$$x_4 = 2 \qquad x_3 = 3 \qquad x_2 = 4$$
$$x_1 - 2\cdot 4 + 3\cdot 3 - 4\cdot 2 = -2$$
$$x_1 = 5$$

Das allgemeine Lösungsschema für den verketteten Algorithmus für ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen sieht also wie folgt aus:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\cdots$	$\cdots$	a_{1n}	a_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\cdots$	$\cdots$	a_{2n}	a_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\cdots$	$\cdots$	a_{3n}	a_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{n4}	$\cdots$	$\cdots$	a_{nn}	a_n
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	$\cdots$	$\cdots$	b_{1n}	b_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	$\cdots$	$\cdots$	b_{2n}	b_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	$\cdots$	$\cdots$	b_{3n}	b_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. .
c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	c_{n4}	$\cdots$	$c_{n,n-1}$	b_{nn}	b_n
x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	

2.4.3. Rechenproben[1])

Eine so komplizierte Rechenoperation, wie sie der verkettete Algorithmus darstellt, erfordert die laufende Kontrolle der Zwischenergebnisse. Die b_{ik}-*Elemente* der Matrix $\mathfrak{B}$ werden mit Hilfe der Zeilensummenprobe überprüft. Zu diesem Zwecke wird im bisherigen Lösungsschema der Matrix $\mathfrak{A}$ als weitere zusätzliche Spalte die Zeilensummenspalte mit den Elementen s_i (s. Modell S. 177) angefügt. Für jedes s_i gilt dann:

$$s_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + a_i . \qquad i \leqq k \tag{55}$$

Mit dieser Spalte werden die gleichen Umformungen wie mit allen anderen Spalten der Matrix $\mathfrak{A}$ durchgeführt. Die Umformung dieser Spalte führt zu den Elementen

$$t_i = s_i + c_{i1} s_1 + c_{i2} s_2 + \cdots + c_{i,\,i-1} s_{i-1} .$$

Die Werte t_i müssen bei richtiger Rechnung die Zeilensummen der Matrix $\mathfrak{B}$ einschließlich der Spalte $\mathfrak{b}$ ergeben, also

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} + b_i , \qquad 1 \leqq k . \tag{56}$$

Die c_{ik}-*Elemente* der Matrix $\mathfrak{C}$ werden mit Hilfe der *Spaltensummenprobe* überprüft. Zu diesem Zwecke werden die Zeilen der Matrix $\mathfrak{A}$ durch eine weitere Zeile mit den Spaltensummen σ_k ergänzt. Lediglich aus Platzgründen wird diese $(n+1)$-te Zeile als erste Zeile über das gesamte System geschrieben. Schließlich werden die Zeilen- und Spaltensummen der Matrix $\mathfrak{A}$ durch das im Kreuzungspunkt der Zeilen- und der Spaltensummen stehende Element Σ kontrolliert.
Es ist

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k . \tag{57}$$

Am Ende jeder Spalte der c_{ik} ist als weiteres zusätzliches Element das aus der $(n+1)$-ten Zeile, der Spaltensummenzeile der Matrix $\mathfrak{A}$, hervorgehende c_{ik} zu bestimmen. Die Elemente der $(n+1)$-ten Zeile sind mit σ_k bezeichnet, entsprechend sollen die Probenelemente zu den Spalten von $\mathfrak{C}$ mit τ_k bezeichnet werden. Die τ_k werden wie die c_{ik} berechnet. Es ist:

$$\tau_k = (\sigma_k + \tau_1 b_{1k} + \tau_2 b_{2k} + \cdots + \tau_{k-1} b_{k-1,\,k}) : (-b_{kk}) .$$

Die τ_k sind gleich den Spaltensummen von $\mathfrak{C}$ vermindert um 1:

$$\tau_k = \sum_{i=k+1}^{n} c_{ik} - 1 . \tag{58}$$

[1]) Vgl. hierzu Lösungsschemata S. 177

Die Richtigkeit dieser Summenformel soll für τ_1 für den Fall $i = 4$ gezeigt werden. Behauptet wird:

$$\tau_1 = \sum_{i=2}^{4} c_{i1} - 1.$$

Es ist:

$$\sum_{i=2}^{4} c_{i1} = \frac{a_{21} + a_{31} + a_{41}}{-a_{11}}$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1}{-b_{11}} = \frac{a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41}}{-a_{11}} \qquad (b_{1k} = a_{1k};\ \text{vgl. S. 171})$$

$$\tau_1 = \frac{a_{11}}{-a_{11}} + c_{21} + c_{31} + c_{41}$$

$$\tau_1 = \sum_{i=2}^{4} c_{i1} - 1$$

$\frac{a_{11}}{-a_{11}}$ ist nichts anderes als der im Lösungsschema vernachlässigte Faktor $c_{11} = -1$, der lediglich im Ausgangssystem zur Elimination der Eliminationsgleichung (s. 2.4.2.) benötigt wurde. Das gleiche gilt für alle anderen Elemente $c_{ii} = -1$. Beim Zusammenschieben der beiden Dreiecksmatrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{C} \rightleftarrows \mathfrak{B}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}$$

konnte auf die c_{ii}-Elemente verzichtet werden, da sie im Gegensatz zu den b_{ii}-Elementen für den weiteren Rechengang nicht benötigt werden. Bei der Spaltensummenprobe der c_{ik} treten sie jedoch wieder in Erscheinung.
Im folgenden Beispiel soll das lineare Gleichungssystem I von S. 169 unter Einschaltung aller Proben mit Hilfe des verketteten Algorithmus gelöst werden.

BEISPIEL

1.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}- 6x_4} &= 20 \\ -6x_1 - 5x_2 \phantom{{}+ 6x_3} + 2x_4 &= -45 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 58 \end{aligned}$$

2	−1	7	−7	30	31
2	3	−1	0	20	24
−6	−5	0	2	−45	−54
2	−5	6	−6	−3	−6
4	6	2	−3	58	67
2	3	−1	0	20	24
3	4	−3	2	15	18
−1	2	1	−2	7	6
−2	0	−4	5	−10	−5
−1	1	−5	−1		
1	7	3	−2		

$\mathfrak{x} = (1, 7, 3, -2)$

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_1	s_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_2	s_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_3	s_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_4	s_4
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_1	t_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_2	t_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	b_3	t_3
c_{41}	c_{42}	c_{43}	b_{44}	b_4	t_4
τ_1	τ_2	τ_3	τ_4		
x_1	x_2	x_3	x_4		

$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Die Proben für das Gleichungssystem erfolgen entweder wie bisher, indem die vier für die Variablen x_1 bis x_4 gefundenen Zahlenwerte in jede der vier Gleichungen des Systems eingesetzt werden, oder in abgekürzter Form. Bei der abgekürzten Form der Probe werden diese vier Zahlenwerte jeweils mit der zugehörigen Spaltensumme multipliziert. Es gilt dann:

$$\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3 + \cdots + \sigma_k x_k + \sigma(-1) = 0.$$

Das Verfahren eignet sich besonders für das maschinelle Rechnen. Es schließt jedoch einander kompensierende Fehler nicht aus. Im obigen Beispiel ergibt das skalare Produkt aus der Spaltensummenzeile und der Lösungszeile der Variablen, vermindert um die Summe der absoluten Glieder:

$$2 \cdot 1 + (-1)\,7 + 7 \cdot 3 + (-7)\,(-2) + 30\,(-1) = 0.$$

Das **Lösungsschema des verketteten Algorithmus einschließlich aller Proben**, der Proben für die b_{ik}, die c_{ik}, die b_i und die x_k, hat nunmehr folgendes Aussehen:

σ_k	σ	Σ
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{s}$
$\mathfrak{C}$ \ $\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{t}$
τ		
$\mathfrak{x}$		

Um für die Elemente der Hauptdiagonalen möglichst ganzzahlige Werte zu bekommen, durch die b_{ii} muß ja bei der Berechnung der c_{ik} dividiert werden, ist es oft ratsam, eine Vertauschung der Gleichungen innerhalb des Systems vorzunehmen (s. 2.4.6.).

BEISPIEL

2. Folgendes Gleichungssystem soll nach den Variablen x_k aufgelöst werden

$$\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 14\\
x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 10\\
x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7\\
2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 25
\end{aligned}$$

Lösung: In diesem Falle genügt es bereits, die 1. Gleichung als vierte Gleichung zu setzen und die übrige Reihenfolge unverändert zu lassen, um im weiteren Rechengang weitgehend Brüche zu vermeiden.

8	0	13	1	56	78
1	1	4	-4	10	12
1	-1	3	-1	7	9
2	-2	4	8	25	37
4	2	2	-2	14	20
1	1	4	-4	10	12
-1	-2	-1	3	-3	-3
-2	-2	-2	10	11	19
-4	-1	$-\frac{13}{2}$	-54	$-\frac{189}{2}$	$-\frac{297}{2}$
-8	-4	$-\frac{15}{2}$	-1		
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{7}{4}$		

$$\mathfrak{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

AUFGABEN

In den Aufgaben 105 bis 111 sind die linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des verketteten Algorithmus einschließlich aller Proben zu lösen.

105.
$$\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}-x_2} + 3x_3 - 2x_4 &= -1\\
2x_1 - x_2 \phantom{{}+3x_3-2x_4} &= -6\\
-3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4\\
4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3
\end{aligned}$$

106.
$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0\\
2x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}-3x_4} &= 66\\
3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+2x_3} - 3x_4 &= 74\\
0{,}5x_1 \phantom{{}+2x_2} - 3x_3 + 2x_4 &= 15
\end{aligned}$$

107.
$$\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 &= -3\\
x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 &= 11\\
-x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 12x_4 &= 1\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 9
\end{aligned}$$

108.
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -15\\
2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 &= 17\\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 2\\
3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 12x_5 &= -16\\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 21x_5 &= -2
\end{aligned}$$

109.
$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 5\\
2x_2 + x_3 + x_4 &= 5\\
2x_3 + x_4 + x_5 &= 7\\
x_1 + 2x_4 + x_5 &= 12\\
x_1 + x_2 + 2x_5 &= 11
\end{aligned}$$

110.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15\\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 &= 57\\
x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 + 81x_5 &= 179\\
x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 64x_4 + 256x_5 &= 453\\
x_1 + 5x_2 + 25x_3 + 125x_4 + 625x_5 &= 975
\end{aligned}$$

111.
$$\begin{aligned}
x_1 + x_3 \qquad &= 2\\
x_2 + x_4 \qquad &= 2\\
x_1 - x_2 - x_5 &= -1\\
3x_1 + x_2 - x_6 &= 3\\
7x_3 + 5x_4 - x_6 &= 11\\
2x_2 - 10x_4 - 5x_5 &= -13
\end{aligned}$$

2.4.4. Reihenvertauschung bei $b_{ii} = 0$

Der *verkettete Algorithmus* setzt zunächst voraus, daß alle *Elemente* b_{ii} *der Hauptdiagonalen ungleich Null* sind. Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, müssen entweder die Zeilen oder die Spalten der Matrix so vertauscht werden, daß in der Hauptdiagonalen keine Nullelemente mehr auftauchen.

Diese Vertauschungen sind ohne jeden Einfluß auf die Lösungen, denn eine *Vertauschung der Zeilen bedeutet* ja lediglich eine *Vertauschung der einzelnen Gleichungen* und die *Vertauschungen der Spalten eine Vertauschung der Variablen* innerhalb des Gleichungssystems.

In gleicher Weise kann verfahren werden, wenn die b_{ii} zwar nicht gleich Null, aber angenähert Null sind oder sich für den weiteren Rechengang ungünstige Terme, z. B.

Brüche, ergeben (Beispiel S. 178). Bei dem in Aufgabe 109 gegebenen Gleichungssystem können Brüche in der Hauptdiagonalen ohne jede Vertauschung anfangs dadurch vermieden werden, daß das Aufspalten der Matrix nicht mit der ersten, sondern mit der letzten Zeile begonnen wird.

4	4	4	4	4	40	60
2	1	1	0	0	5	9
0	2	1	1	0	5	9
0	0	2	1	1	7	11
1	0	0	2	1	12	16
1	1	0	0	2	11	15
-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{44}{9}$	$-\frac{176}{9}$	$-\frac{220}{9}$
0	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$
0	0	2	1	1	7	11
-1	-1	0	2	-1	1	1
1	1	0	0	2	11	15
-4	0	-2	$-\frac{4}{9}$	-1		
2	1	0	3	4		

$\mathfrak{x} = (2, 1, 0, 3, 4)$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}- 3x_4} &= 20 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 58 \\ -6x_1 - 5x_2 \phantom{{}+ 2x_3} + 2x_4 &= -45 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= -3 \end{aligned}$$

führt bereits in der zweiten Zeile zum Nullelement in der Hauptdiagonalen ($b_{22} = 0$). Diese Schwierigkeit kann durch Zeilenvertauschung überwunden werden. Wird die *zweite Zeile* als *vierte Zeile* geschrieben, und die übrige Reihenfolge unverändert beibehalten, ergibt sich das bereits in 2.4.3., S. 177, gelöste Gleichungssystem.
Ebenfalls könnte das Gleichungssystem durch *Vertauschung der zweiten und der dritten Spalte* ohne Schwierigkeiten wie folgt gelöst werden.

x_1	x_3	x_2	x_4		
2	7	-1	-7	30	31
2	-1	3	0	20	24
4	2	6	-3	58	67
-6	0	-5	2	-45	-54
2	6	-5	-6	-3	-6
2	-1	3	0	20	24
-2	4	0	-3	18	19
3	$\frac{3}{4}$	4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{57}{2}$	$\frac{129}{4}$
-1	$-\frac{7}{4}$	2	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$
-1	-2	1	-1		
1	3	7	-2		
x_1	x_3	x_2	x_4		

$\mathfrak{x} = (1, 7, 3, -2)$

Bei größeren Gleichungssystemen würden sich bei mehrmaligen Vertauschungen umfangreiche Schreibarbeiten notwendig machen, die sich vermeiden lassen, wenn die Umformungen in der folgenden Weise vorgenommen werden. Sobald in der Hauptdiagonale ein Nullelement auftaucht, werden die *nächsten Elemente der betreffenden Spalte* nach der Formel der b-Elemente berechnet. Das *nächste von Null verschiedene Element* wird als *Diagonalelement* genommen. Anschließend werden die *Elemente der zu diesem Diagonalelement gehörigen Zeile* bestimmt. In gleicher Weise wird mit den folgenden Spalten verfahren. Dabei werden die jeweils bereits fertigen Zeilen übersprungen. Die Diagonalelemente werden zur Kennzeichnung quadratisch umrandet. *Die Diagonalelemente und alle ihnen in der Zeile folgenden Elemente sind b-Elemente.* Die *b-Elemente* sind im nachfolgenden Lösungsschema *halbfett gedruckt. Die den Diagonalelementen in der Spalte folgenden Elemente sind c-Elemente,* soweit sie nicht bereits als b-Elemente festgelegt sind. Alle Elemente des neuen Systems werden in der bisherigen Weise berechnet (s. 2.4.2.). Beim Bilden der skalaren Produkte ist lediglich die veränderte Zuordnung der Zeilen und der Spalten zu beachten. *Es sind jeweils die Zeilen und Spalten einander zugeordnet, in deren Schnittpunkt das Diagonalelement steht.*

BEISPIEL

Das oben gelöste lineare Gleichungssystem soll nunmehr mit Hilfe des verketteten Algorithmus ohne Vertauschung der Zeilen oder der Spalten gelöst werden.

Lösungsschema:

2	−1	7	−7	30	31
2	3	−1	0	20	24
4	6	2	−3	58	67
−6	−5	0	2	−45	−54
2	−5	6	−6	−3	−6
2	**3**	**−1**	**0**	**20**	**24**
−2	0	**4**	**−3**	**18**	**19**
3	**4**	**−3**	**2**	**15**	**18**
−1	2	$-\frac{1}{4}$	$\mathbf{-\frac{5}{4}}$	$\mathbf{\frac{5}{2}}$	$\mathbf{\frac{5}{4}}$
−1	1	$-\frac{5}{4}$	−1		
1	7	3	−2		

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_1	s_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_2	s_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_3	s_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_4	s_4
$\mathbf{b_{11}}$	$\mathbf{b_{12}}$	$\mathbf{b_{13}}$	$\mathbf{b_{14}}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{t_1}$
c_{21}	c_{22}	$\mathbf{b_{23}}$	$\mathbf{b_{24}}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{t_2}$
c_{31}	$\mathbf{b_{32}}$	$\mathbf{b_{33}}$	$\mathbf{b_{34}}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{t_3}$
c_{41}	c_{42}	c_{43}	$\mathbf{b_{44}}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{t_4}$
τ_1	τ_2	τ_3	τ_4		
x_1	x_2	x_3	x_4		

Der Lösungsweg soll abschließend nochmals schrittweise aufgezeigt werden. Zu jedem Schritt sind die Formeln angegeben, aus denen hervorgeht, wie die einzelnen Elemente entstanden sind. Dabei sind die im Anschluß an den ausführlichen Lösungsweg angegebenen Zuordnungen der Spalten und der Zeilen zu beachten.

Lösungsweg:

2	−1	7	−7	30	31
2	3	−1	0	20	24
4	6	2	−3	58	67
−6	−5	0	2	−45	−54
2	−5	6	−6	−3	−6
2	**3**	**−1**	**0**	**20**	**24**
−2	0				
3	**4**	**−3**	**2**	**15**	**18**
−1	2				
2	**3**	**−1**	**0**	**20**	**24**
−2	0	**4**	**−3**	**18**	**19**
3	**4**	**−3**	**2**	**15**	**18**
−1	2	$-\frac{1}{4}$			

b-Elemente sind in den einzelnen Schritten wiederum halbfett gedruckt.

1. Schritt

Diagonalelemente der 1. u. 2. Spalte

$$b_{1k} = a_{1k} \qquad c_{i1} = \frac{a_{i1}}{-b_{11}}$$

$$b_{3k} = a_{3k} + c_{31} b_{1k}$$

$$c_{42} = \frac{a_{42} + c_{41} b_{1k}}{-b_{32}}$$

2. Schritt

Diagonalelement der 3. Spalte

$$b_{2k} = a_{2k} + c_{21} b_{1k} + c_{22} b_{3k}$$

$$c_{43} = \frac{a_{43} + c_{41} b_{13} + c_{42} b_{33}}{-b_{23}}$$

$\boxed{2}$	3	-1	0	20	24
-2	0	$\boxed{4}$	-3	18	19
3	$\boxed{4}$	-3	2	15	18
-1	2	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{5}{4}}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$
-1	1	$-\frac{5}{4}$	-1		
1	7	3	-2		

3. Schritt

Diagonalelement der 4. Spalte

$$b_{4k} = a_{4k} + c_{41}b_{1k} + c_{42}b_{3k} + c_{43}b_{2k}$$
$$b_{44} = a_{44} + c_{41}b_{14} + c_{42}b_{34} + c_{43}b_{24}$$
$$b_4 \;= a_4 + c_{41}b_1 + c_{42}b_3 + c_{43}b_2$$

Anmerkung: Rechengang für c_{43} ist im Modell durch Kreise gekennzeichnet.

Es sind folgende Zuordnungen[1] *gegeben:*

$$\begin{array}{lcccc} \text{Spalte} & 1. & 2. & 3. & 4. \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Zeile} & 1. & 3. & 2. & 4. \end{array}$$

AUFGABEN

Die folgenden Gleichungssysteme sind mit Hilfe des verketteten Algorithmus ohne Vertauschung der Zeilen oder der Spalten zu lösen.

112.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 7 \\ -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= -10 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 10x_5 &= 17 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 5 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 \end{aligned}$$

113.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 8x_4 - 5x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= -10 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 + x_5 &= -5 \end{aligned}$$

2.4.5. Berechnung von det $\mathfrak{A}$

Mit Hilfe des verketteten Algorithmus wurde die quadratische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[1]) Auf diese Zuordnung wird in 2.4.5. weiter eingegangen

in die Dreiecksmatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

umgeformt (vgl. auch [1]).

$\mathfrak{B}$ ist dadurch entstanden, daß wiederholt ein Vielfaches der Elemente einer Zeile von $\mathfrak{A}$ zu den Elementen einer anderen Zeile von $\mathfrak{A}$ addiert oder subtrahiert wurde. Nach den Determinantengesetzen ändert sich der Wert einer Determinante nicht, wenn zu einer Reihe ein Vielfaches einer Parallelreihe addiert oder subtrahiert wird. Demnach gilt für die beiden den Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugeordneten Determinanten:

$$\det \mathfrak{A} = \det \mathfrak{B}.$$

Nach den Entwicklungsformeln für Determinanten (s. 2.3.2.) ist $\det \mathfrak{B}$ wie folgt zu berechnen:

$$\det \mathfrak{B} = b_{11} B_{11}$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & b_{33} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad B_{11} = b_{22} B_{22}$$

$$\det \mathfrak{B} = b_{11} b_{22} B_{22}$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} b_{33} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad B_{22} = b_{33} B_{33}$$

$$\det \mathfrak{B} = b_{11} b_{22} b_{33} B_{33}$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} b_{44} & \dots & b_{4,n-1} & b_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad B_{33} = b_{44} B_{44}$$

Schließlich:

$$\det \mathfrak{B} = b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} \dots B_{n-2}$$

$$B_{n-2} = \begin{pmatrix} b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{n-2} = b_{n-1,n-1} b_{nn}$$

Also ist: $$\boxed{\det \mathfrak{B} = b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} \dots b_{n-1,n-1} b_{nn}} \tag{59}$$

det $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen der Matrix $\mathfrak{B}$.

Anders ausgedrückt:

det $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente b_{ii}.

BEISPIEL

Zu berechnen ist der Wert der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lösung:

4	4	4	4	4	20
1	1	0	0	2	4
1	0	0	2	1	4
2	1	1	0	0	4
0	2	1	1	0	4
0	0	2	1	1	4
$\boxed{1}$	1	0	0	2	4
-1	$\boxed{-1}$	0	2	-1	0
-2	1	$\boxed{1}$	-2	-3	-4
0	$+2$	-1	$\boxed{7}$	1	8
0	0	-2	$-\frac{5}{7}$	$\boxed{\frac{44}{7}}$	$\frac{44}{7}$
-4	0	-4	$-\frac{12}{7}$	-1	

$$A = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 7 \cdot \frac{44}{7}$$

$$\underline{\underline{A = -44}}$$

Soll für das Gleichungssystem im Beispiel S. 182/183 der Wert der Koeffizientendeterminante berechnet werden, so ist zu beachten, daß *eine* Vertauschung vorgenommen worden ist, die der Vertauschung zweier Reihen einer Determinante entspricht. Das Zuordnungsschema auf S. 182 zeigt, daß in einem Falle eine größere Ordnungszahl vor einer kleineren steht. Das Produkt der gekennzeichneten *Diagonalelemente* gibt daher nach den Determinantengesetzen den mit *-1 multiplizierten Wert der zugehörigen Determinante* an. Es ist

$$D = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)(-1)$$

$$\underline{\underline{D = 40}}$$

AUFGABEN

Mit Hilfe des verketteten Algorithmus sind die folgenden Determinanten zu berechnen:

114. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ 115. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

116. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 117. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 118. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -10 & 3 \\ 4 & 4 & 14 & -6 \end{vmatrix}$

2.4.6. Rang der Matrix

Definition:

> Der Rang einer quadratischen Matrix ist gleich der Ordnungszahl r der nicht verschwindenden Unterdeterminante größter Ordnung.

Gesucht ist der Rang der quadratischen Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 11 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Wert der zugehörigen Determinante $D = \det \mathfrak{A}$ soll mit Hilfe des verketteten Algorithmus berechnet werden:

$$\begin{array}{rrrr|r}
5 & 7 & 15 & 21 & 48 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 7 & 14 \\
3 & 5 & 9 & 11 & 28 \\
2 & -2 & 6 & -2 & 4 \\
-1 & 1 & -3 & 5 & 2 \\
\hline
\boxed{1} & 3 & 3 & 7 & 14 \\
-3 & \boxed{-4} & 0 & -10 & -14 \\
-2 & -2 & 0 & \boxed{4} & 4 \\
1 & 1 & 0 & -0{,}5 & 0 \\
\hline
-5 & -2 & 0 & -1{,}5 &
\end{array}$$

In der *dritten Spalte* sind außer dem ersten Element *alle weiteren Elemente Null.* Auch durch Zeilen- oder durch Spaltenvertauschung kann daher in dieser Spalte kein von Null verschiedenes Element für die Hauptdiagonale gewonnen werden.
Der Wert der vierreihigen Determinante ist deshalb gleich Null. Werden die vierte Zeile und die dritte Spalte, in deren Schnittpunkt das Element Null steht, gestrichen, so hat die dabei entstandene Unterdeterminante D_{43} den Wert -16. Die in der vierreihigen Determinante nicht verschwindende Unterdeterminante größter Ordnung ist dreireihig.
Die gegebene Matrix $\mathfrak{A}$ ist deshalb vom Rang $r = 3$.
Der Rang der Matrix hätte ebenso durch Entwicklung der zugehörigen Determinante $D = \det \mathfrak{A}$ nach ihren Unterdeterminanten bestimmt werden können (vgl. 2.3.2.). Dabei zeigt sich, daß außer D_{43} noch weitere dreireihige Unterdeterminanten nicht verschwinden. *Für die Rangbestimmung reicht* jedoch der Nachweis *für das Nichtverschwinden einer einzigen Unterdeterminante maximaler Ordnung aus.* Abschließend sollen die gegebene vierreihige Determinante D nach der ersten Spalte entwickelt und zwei (D_{11} und D_{43}) der 16 möglichen dreireihigen Unterdeterminanten berechnet werden.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & -8 & 0 & -16 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 11 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \qquad D_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \qquad = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= -(-3) \cdot 64 \qquad = (64 - 80)$$

$$D_{11} = 192 \qquad D_{43} = -16$$

Für **quadratische Matrizen** gelten hinsichtlich des Rangs der Matrix folgende Beziehungen:
Für reguläre Matrizen gilt $r = n$. Der Rang r der Matrix ist gleich der Anzahl n der Reihen.
Entsprechend gilt *für singuläre Matrizen* $r < n$. Die *Differenz* $d = n - r$ wird als **Defekt** oder **Rangabfall** oder auch als **Nullität** der Matrix bezeichnet.
Für **nichtquadratische Matrizen** vom Typ (m,n) ist der Rang

im Falle $m > n$ $\quad r \leqq n$

und im Falle $m < n$ $\quad r \leqq m$.

Der Rang r einer Matrix ist höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n (vgl. nachstehende Beispiele).

$r = n$ bzw. $r = m$ *setzt* stets *voraus, daß* die Gleichungen des Systems bzw. *die Vektoren der Matrix voneinander unabhängig sind.*

BEISPIELE

1. Gesucht ist der Rang r der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

6	14	4	14	38
3	5	2	8	18
3	7	2	7	19
0	2	0	−1	1
0	0	0	0	0
3	5	2	8	18
−1	2	0	−1	1
0	−1	0	0	0
0	0	0	0	0
−2	−2	–	–	–

$r = 2$

Um den Rang r mit Hilfe des verketteten Algorithmus bestimmen zu können, wurde als vierte Zeile der Nullvektor hinzugefügt. Die erste und die dritte Spalte sind voneinander abhängig. In der Hauptdiagonalen sind nur zwei von Null verschiedene Elemente möglich.

2. Gesucht ist der Rang der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 6 & 12 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

6	16	1	1	0	24
2	2	3	−4	0	3
2	4	1	−1	0	6
−4	−4	−4	6	0	−6
0	2	−4	5	0	3
6	12	5	−5	0	18
$\boxed{2}$	2	3	−4	0	3
−1	$\boxed{2}$	−2	3	0	3
2	0	$\boxed{2}$	−2	0	0
0	−1	1	0	0	0
−3	−3	−1	0	0	0
−3	−5	−1	0	0	

$r = 3$

Zwischen den 4 Spaltenvektoren besteht folgende lineare Abhängigkeit:

$$2\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_3 + 2\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_2$$

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

oder $2\mathfrak{a}_1 + 2\mathfrak{a}_3 + 2\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{o}$.

Lineare Abhängigkeit liegt stets dann vor, wenn zwischen den Zeilenvektoren oder zwischen den Spaltenvektoren einer Matrix der folgende Zusammenhang besteht:

$$c_1\mathfrak{a}_1 + c_2\mathfrak{a}_2 + \cdots + c_p\mathfrak{a}_p = \mathfrak{o},$$

wobei nicht alle c_i gleich Null sind.

Eine solche lineare Abhängigkeit ist nicht immer sofort an der Matrix zu erkennen [1]. Ob eine lineare Abhängigkeit vorliegt, kann, wie die Beispiele gezeigt haben, mit Hilfe des verketteten Algorithmus überprüft werden.

Nichtquadratische Matrizen sind weder regulär noch singulär.

Falls die entsprechenden Vektoren voneinander unabhängig sind, werden die Matrizen **zeilenregulär** für $r = m < n$ und **spaltenregulär** für $r = n < m$ genannt. *Quadratische Matrizen sind* wegen $r = m = n$ *zugleich zeilenregulär und spaltenregulär*, also allgemein **regulär**.

AUFGABEN

Es ist der Rang folgender Matrizen zu bestimmen:

119. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

120. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

121. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

122. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

123. $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2.4.7. Berechnung der Kehrmatrix mit Hilfe des verketteten Algorithmus

Nach der Definition ist die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ die Matrix, die, mit der Matrix $\mathfrak{A}$ von links oder von rechts multipliziert, die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ergibt (vgl. S. 156):

$$\boxed{\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}}$$

Für $n = 3$ gilt demnach:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der *ersten* Spalte der Einheitsmatrix sind die skalaren Produkte der entsprechenden Zeile von $\mathfrak{A}$ und der *ersten* Spalte von $\mathfrak{A}^{-1}$.

$$\text{I} \quad \begin{aligned} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + a_{13}\alpha_{31} &= 1 \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{31} &= 0 \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} &= 0 \end{aligned}$$

In Matrizendarstellung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}_1.$$

Entsprechend sind die Elemente der *zweiten* Spalte der Einheitsmatrix die skalaren Produkte der entsprechenden Zeile von $\mathfrak{A}$ und der *zweiten* Spalte von $\mathfrak{A}^{-1}$.

$$\text{II} \quad \begin{aligned} a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} &= 0 \\ a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{32} &= 1 \\ a_{31}\alpha_{12} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} &= 0 \end{aligned}$$

In Matrizendarstellung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{y}_2.$$

Ebenso sind die Elemente der *dritten* Spalte der Einheitsmatrix die skalaren Produkte der entsprechenden Zeile von $\mathfrak{A}$ und der *dritten* Spalte von $\mathfrak{A}^{-1}$.

$$\text{III} \quad \begin{aligned} a_{11}\alpha_{13} + a_{12}\alpha_{23} + a_{13}\alpha_{33} &= 0 \\ a_{21}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{23}\alpha_{33} &= 0 \\ a_{31}\alpha_{13} + a_{32}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} &= 1 \end{aligned}$$

In Matrizendarstellung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{y}_3.$$

In den Gleichungssystemen I bis III bestehen die rechten Seiten, die Spaltenvektoren $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$, jeweils aus einer Spalte der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$. Die α_{ik} sind die zu bestimmenden Variablen, während die y-Vektoren als Elemente die absoluten Glieder enthalten. Die Gleichung

$$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}} \tag{60}$$

die **Definitionsgleichung für die Kehrmatrix,** ist ein spezieller Fall der allgemeinen Gleichung

$$\boxed{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}} \tag{61}$$

der **Definitionsgleichung für die Matrizendivision,** (s. 2.4.8.). Die Matrix $\mathfrak{X}$ setzt sich aus den Spaltenvektoren der zu bestimmenden α-Elemente der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

zusammen, während die Matrix $\mathfrak{Y}$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ mit den Spaltenvektoren

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Inhalt hat.

Das Bestimmen der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ erfolgt also durch die Lösung der durch die Elemente der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ und der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ festgelegten n Gleichungssysteme.

Um die n Gleichungssysteme lösen zu können, wird im Schema des verketteten Algorithmus an die Matrix $\mathfrak{A}$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ mit den absoluten Gliedern der Gleichungssysteme als Spalten angefügt (s. Beispiel S. 192). Alle Elemente der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ werden als absolute Glieder bei der Umformung genau wie die bisherigen Glieder behandelt. Die entsprechenden Elemente des neuen Systems werden also wie die Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$ des neuen Lösungsschemas ermittelt. Für die Proben werden die Elemente der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ mit in die Zeilensummen und die Spaltensummen aufgenommen. Durch die Ausdehnung der Operationen auf die *Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ wird* diese genau *wie die Matrix $\mathfrak{A}$ in zwei Dreiecksmatrizen aufgespalten.* Dabei sind in der umgeformten Matrix alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen Null, alle Elemente der Hauptdiagonalen eins, während die Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen verschiedene Werte annehmen können. Die Elemente der durch das Umformen der Einheitsmatrix gewonnenen beiden Dreiecksmatrizen, der Nullmatrix und der Gammamatrix[1]), sind ebenfalls in die Zeilensummenprobe aufzunehmen. Zum Schluß wird das *gestaffelte B-System n-mal nach den Spalten der durch das Umformen der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ entstandenen Matrix Γ aufgelöst.*

[1]) Zur Gammamatrix gehören auch alle Elemente der Hauptdiagonalen

BEISPIEL

Es ist die zur Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

gehörende Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ zu berechnen.

Lösungsschema:

5	2	−2	−1	1	1	1	1	8
1	0	−1	−3	1	0	0	0	−2
2	−1	0	3	0	1	0	0	5
−2	3	1	2	0	0	1	0	5
4	0	−2	−3	0	0	0	1	0
1	0	−1	−3	1	0	0	0	−2
−2	−1	2	9	−2	1	0	0	9
2	3	5	23	−4	3	1	0	28
−4	0	−0,4	−0,2	−2,4	−1,2	−0,4	1	−3,2
−5	2	−1,4	−1					
−19	−2	−56	12	1	0	0	0	
−9	−1	−27	6	0	1	0	0	
−3	0	−9	2	0	0	1	0	
8	1	23	−5	0	0	0	1	

Allgemeines Lösungsschema für $n = 4$:

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	1	1	1	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0	s_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0	s_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0	s_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1	s_4
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	1	0	0	0	t_1
c_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	γ_{21}	1	0	0	t_2
c_{31}	c_{32}	b_{33}	b_{34}	γ_{31}	γ_{32}	1	0	t_3
c_{41}	c_{42}	c_{43}	b_{44}	γ_{41}	γ_{42}	γ_{43}	1	t_4
τ_1	τ_2	τ_3	τ_4					
α_{11}	α_{21}	α_{31}	α_{41}	1	0	0	0	
α_{12}	α_{22}	α_{32}	α_{42}	0	1	0	0	
α_{13}	α_{23}	α_{33}	α_{43}	0	0	1	0	
α_{14}	α_{24}	α_{34}	α_{44}	0	0	0	1	

Die Anordnung der α-Elemente läßt erkennen, daß das Lösungsschema nicht sofort zur Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ führt, sondern zunächst die Transponierte der Kehrmatrix $(\mathfrak{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ (linke untere Ecke des Schemas) bestimmt wird. Das ist bei der Durchführung der Probe (rechte untere Ecke des Schemas) zu beachten. Um die erste Spalte der Einheitsmatrix zu ermitteln, sind die Zeilen der Matrix $\mathfrak{A}$ nicht mit der ersten Spalte, sondern mit der ersten Zeile der α-Elemente skalar zu multiplizieren. Allgemein sind bei der Probe für eine Spalte der Einheitsmatrix jeweils die *skalaren Produkte der Zeilen von* $\mathfrak{A}$ *mit der entsprechenden Zeile von* $(\mathfrak{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ *zu bilden.*

Das allgemeine Lösungsschema für die Berechnung der Kehrmatrix mit Hilfe des verketteten Algorithmus hat einschließlich aller Proben folgendes Aussehen.

σ	e	Σ
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{s}$
$\mathfrak{C}$ \ $\mathfrak{B}$	Γ \ $\mathfrak{D}$	$\mathfrak{t}$
τ		
$(\mathfrak{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$	$\mathfrak{E}$	

AUFGABEN

Für die gegebenen Matrizen $\mathfrak{A}$ ist
a) nachzuweisen, daß die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ *existiert*, und
b) die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ zu berechnen.

124. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

125. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 10 & 11 & 7 \\ 25 & 30 & 18 \end{pmatrix}$$

Die Aufgaben 126 und 127 sind *durch Vertauschen der Zeilen* so zu lösen, daß Brüche im gestaffelten BC-System vermieden werden.

126. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

127. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

128./129. Es ist nochmals zu den in den Aufgaben 126 und 127 gegebenen Matrizen die Kehrmatrix zu berechnen. Dabei sind *ohne Vertauschung der Zeilen* im gestaffelten BC-System Brüche weitgehend zu vermeiden.

In gleicher Weise sind die Kehrmatrizen in den folgenden beiden Aufgaben zu berechnen.

130. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

131. $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4.8. Matrizendivision

Da es in der Matrizenrechnung keine Multiplikation im Sinne der Zahlenmultiplikation gibt, kann es auch keine Umkehrung der Multiplikation, *keine Division von Matrizen im Sinne der Zahlendivision* geben. Es muß deshalb wiederum definiert werden, welche Verknüpfung von Matrizen als Matrizendivision bezeichnet werden soll. In 2.4.7. wurde bereits auf die Definitionsgleichung für die Matrizendivision (61)

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$$

hingewiesen.
Nach dieser Gleichung ist die Matrix $\mathfrak{X}$ die Matrix, mit der die Matrix $\mathfrak{A}$ von rechts multipliziert werden muß, um das Matrizenprodukt $\mathfrak{Y}$ zu erhalten.
Aus

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$$

folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A})\, \mathfrak{X} &= \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{X} &= \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{X} &= \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{Y} \end{aligned}$$

Das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$ kann wiederum als Analogon zum Produkt $by = x$ der reellen Zahlen y und $b = \frac{1}{a}$, also $\frac{y}{a} = x$, angesehen werden (vgl. 2.3.1.).
Deshalb wird diese Operation als Matrizendivision bezeichnet.
Da für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht gilt, existiert neben (I) noch

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{X}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{Y}.$$

Aus

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{Y}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1}) &= \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \\ \mathfrak{X}_1 \mathfrak{E} &= \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \\ \mathfrak{X}_1 &= \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{A}^{-1} \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}$ regulär ist.
Entsprechend dem nichtkommutativen Charakter der Matrizenmultiplikation sind also bei der Matrizendivision zwei verschiedene Aufgaben zu unterscheiden. Die Lösung beider Divisionsaufgaben kann mit Hilfe der Kehrmatrix erfolgen. Die tatsächliche Ausführung der Matrizendivision, also die Berechnung der Matrizenprodukte $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{A}^{-1}$, erfolgt jedoch meist nur in den Fällen durch Multiplikation, in denen die Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ohnehin bekannt ist. In der Aufgabe $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ zum Beispiel erfolgt die Berechnung der Matrix $\mathfrak{X}$ in gleicher Weise wie die Berechnung der Kehrmatrix $\mathfrak{A}^{-1}$, nur wird *an die Stelle der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ die Matrix $\mathfrak{Y}$ ins Lösungsschema eingesetzt.* Als Ergebnis erscheint dann in der linken unteren Ecke des Schemas nicht $\mathfrak{X}$, sondern $\mathfrak{X}^T$. Bei der Probe werden die einzelnen Spalten von $\mathfrak{Y}$ wieder dadurch ermittelt, daß die skalaren Produkte der Zeilen von $\mathfrak{A}$ mit der jeweils entsprechenden Zeile von $\mathfrak{X}^T$ gebildet werden (rechte untere Ecke des Schemas, S. 195).

BEISPIEL

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

Es ist die Matrix $\mathfrak{X}$ zu bestimmen, mit der die Matrix $\mathfrak{A}$ von rechts multipliziert werden muß, um die Produktmatrix $\mathfrak{P}$ zu erhalten. Zur Vermeidung von Brüchen werden die Zeilen im Lösungsschema vertauscht.

Lösung:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{P} \tag{1}$$

Die Matrix $\mathfrak{X}$ ist gesucht; sie wird mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus entsprechend der Gleichung $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$ berechnet.

Lösungsschema:

8	3	6	18	22	5	62
1	0	2	3	7	0	13
4	1	3	10	15	5	38
3	2	1	5	0	0	11
1	0	2	3	7	0	13
−4	1	−5	−2	−13	5	−14
−3	−2	5	0	5	−10	0
−8	−3	−1				
3	−2	0	3	7	0	
5	−8	1	10	15	5	
4	−5	−2	5	0	0	

Ergebnis:

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Allgemeines Lösungsschema für die Matrizendivision:

σ		Σ
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{s}$
$\mathfrak{C}$ \ $\mathfrak{B}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{t}$
τ		
$\mathfrak{X}^{\mathrm{T}}$	$\mathfrak{P}$	

Die Matrix $\mathfrak{X}$ könnte auch wie folgt berechnet werden:

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{P}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{P}}}.$$

AUFGABE

132. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 7 & 17 & 17 \\ 16 & 35 & 27 \\ 1 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

Es ist die Matrix $\mathfrak{B}$ zu berechnen, mit der $\mathfrak{A}$ von rechts multipliziert $\mathfrak{P}$ ergibt.

2.5. Anwendung der Matrizenrechnung

Die Matrizenrechnung kann sowohl *in der Technik der einzelnen Industriezweige als auch bei ökonomischen Untersuchungen* vielseitig angewendet werden. Dabei reichen in den meisten Fällen die im Lehrbuch behandelten Methoden zur Lösung des Problems aus. Ein sehr einfaches Beispiel ist die in 2.2.4.5. gezeigte Ermittlung von Materialverbrauchsnormen.

Bei mehrstufigen oder bei gekoppelten Betrieben gibt die Matrizenrechnung die Möglichkeit, Folgeerscheinungen einer geplanten Maßnahme in allen Produktionsstufen quantitativ zu erfassen, was sonst bei der Verkettung der einzelnen Teilbetriebe nicht mit der für die sozialistische Planwirtschaft erforderlichen Exaktheit möglich ist. Das gilt besonders auch für solche Prozesse, in denen ein Teil der Produktion für die eigene Produktion wieder benötigt wird.

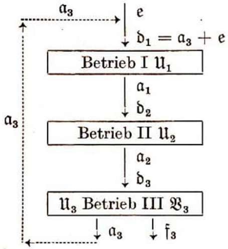
Ein charakteristisches Beispiel hierzu ist die betriebliche Verbindung einer Kohlengrube mit einem Kraftwerk. Um Energie zu erzeugen, wird Kohle gebraucht. Ein Teil der erzeugten Energie wird aber wiederum für die Förderung der zur Energieerzeugung notwendigen Kohle benötigt. Das gleiche Problem tritt auf, wenn Teile der in der letzten Produktionsstufe erzeugten Produkte oder Abfallprodukte wieder in den Beginn des Produktionsprozesses oder eine der vorangegangenen Produktionsstufen eingesetzt werden.

Weiterhin können mit Hilfe der aufgestellten Matrizenmodelle beispielsweise die *Betriebsüberwachung*, die *Kostenberechnung* und viele *Planungsaufgaben* wesentlich erleichtert werden. Aus den angeführten Anwendungsmöglichkeiten sollen nunmehr einige Beispiele ausführlicher behandelt werden.

2.5.1. Aufstellen einer Kopplungsmatrix für dreistufigen Produktionsbetrieb mit Rücklauf nicht restlos aufgearbeiteter Rohstoffe

Ausgangspunkt für das Aufstellen eines Matrizenmodells oder einer Kopplungsmatrix ist in den meisten Fällen das **ökonomische Flußbild**.

Flußbild:



Das Flußbild zeigt den Produktionsablauf in einem dreistufigen Betrieb. Das hier entwickelte *ökonomische Flußbild* wird sich sehr oft vom *technologischen Flußbild*, das in den meisten Fällen *detaillierter* sein muß, wesentlich unterscheiden. Im ökonomischen Flußbild bilden alle ökonomisch zusammenfaßbaren Produktionsstufen eine Einheit. Bei einfachen Verhältnissen werden die quantitativen Abhängigkeiten durch Zahlenwerte im Flußbild ausgewiesen, so daß die Kopplungsmatrix sofort aus dem Flußbild heraus aufgestellt werden kann. Sind die quantitativen Abhängigkeiten im einzelnen nicht so einfach zu überblicken, werden für die einzelnen Produktionsstufen **Umsatzmatrizen** aufgestellt und die **Kopplungsmatrix** mit Hilfe der Matrizenmultiplikation bestimmt. Im Flußbild sind die Umsatzmatrizen für die einzelnen Teilbetriebe, die aus statistischen Angaben über einen längeren Zeitraum hinweg gewonnen wurden, mit $\mathfrak{U}_i$ bezeichnet. $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ sind die Umsatzmatrizen der Betriebe I und II. $\mathfrak{U}_3$ ist die Umsatzmatrix für den von der Endstufe III nach Betrieb I erfolgenden Rücklauf, während die Umsatzmatrix für den Produktionsausstoß, die Fertigprodukte, mit $\mathfrak{B}_3$ gekennzeichnet ist. Die Durchsätze durch die Teilbetriebe sind mit $\mathfrak{d}_1$ bis $\mathfrak{d}_3$ und die Ausgänge mit $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_3$ gekennzeichnet, wobei $\mathfrak{a}_3$ den Rücklauf an I und $\mathfrak{f}_3$ den Ausstoß der Fertigprodukte zum Inhalt haben, $\mathfrak{e}$ ist der Einsatzvektor der Rohstoffe. Seine Elemente lassen die Mengen der jeweils eingesetzten Rohstoffe erkennen. Beim Aufstellen der Umsatzmatrizen wird vom „*theoretischen*" Einsatz ausgegangen. Es wird angenommen, daß jeweils nur je eine Einheit jedes Rohstoffes in den Produktionsprozeß eingesetzt wird.

Aus dem Flußschema ist zu erkennen, daß $\mathfrak{d}_1$ in $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{d}_2$ in $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{d}_3$ in $\mathfrak{U}_3$ bzw. $\mathfrak{d}_3$ in $\mathfrak{B}_3$ eingesetzt wird. Nach der Definition der Matrizenmultiplikation bedeutet aber ein jedes solches Einsetzen die Multiplikation zweier Matrizen. Aus dem Flußschema ergibt sich daraus der folgende matrizenmäßige Zusammenhang:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{e}\\
&\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{U}_1\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2\\
(1)\quad &\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_3\\
&\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_3\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{d}_1\\
&\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{B}_3\mathfrak{d}_3 = \mathfrak{B}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{d}_1.
\end{aligned}
$$

Um die Ausbeute $\mathfrak{f}_3$ ermitteln zu können, muß noch der in $\mathfrak{d}_1$ enthaltene und bisher noch unbekannte *Vektor* $\mathfrak{a}_3$ *errechnet werden*. Wird in die oben für $\mathfrak{a}_3$ ermittelte Formel $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{e}$ eingesetzt, so ergibt das:

$$\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{e}).$$

Diese Gleichung wird schrittweise nach $\mathfrak{a}_3$ aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{e}\\
(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{e}\\
\mathfrak{a}_3 &= (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^{-1}\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\mathfrak{e}.
\end{aligned}
$$

Einfacher als $\mathfrak{a}_3$ ist $\mathfrak{d}_1$ zu berechnen:

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{e}$$
$$\mathfrak{d}_1 = [(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)^{-1}\,\mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{E}]\,\mathfrak{e}.$$

Die letzte Gleichung läßt sich zu

$$\mathfrak{d}_1 = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)^{-1}\,\mathfrak{e}$$

zusammenfassen.
Diese Gleichung kann nur richtig sein, wenn

$$(2)\quad (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)^{-1}\,\mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{E} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)^{-1}$$

ist, was es zu beweisen gilt.
Um den Ausdruck zu vereinfachen, wird $\mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{A}$ gesetzt. Das ergibt:

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{E} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}.$$

Diese Gleichung wird gliedweise von links mit der Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ multipliziert. Das ist auf Grund der Art der Matrizen möglich, weil

1. Verkettbarkeit besteht (Matrix, Kehrmatrix, Einheitsmatrix),
2. det $\mathfrak{A} \neq 0$ vorausgesetzt werden kann und
3. die Umformung äquivalent ist (was allerdings im Rahmen dieses Buches nicht bewiesen werden kann). Somit erhält man

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{E} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}.$$

Unter Anwendung der bereits entwickelten Sätze folgt daraus

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}.$$

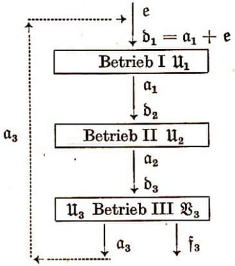
Damit ist nachgewiesen, daß die Gleichung (2) richtig ist.
Für die Kehrmatrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1)^{-1}$ soll fernerhin der Einfachheit halber künftig in allen Formeln die Bezeichnung $\tilde{\mathfrak{U}}$ eingeführt werden. Es ist dann

$$(3)\quad \begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= \tilde{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{e} \\ \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d}_2 &= \mathfrak{U}_1\,\tilde{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{e} \\ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{d}_3 &= \mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\tilde{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{e} \\ \mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\tilde{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{e} \\ \mathfrak{f}_3 &= \mathfrak{V}_3\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\tilde{\mathfrak{U}}\,\mathfrak{e}. \end{aligned}$$

Die einzelnen Durchsätze und Ausgänge stellen Matrizenprodukte dar, die in der **Mehrstufennormtabelle** formelmäßig zusammengefaßt sind. Daneben ist zur Berechnung der einzelnen Matrizenprodukte das **Multiplikationsmodell** nach dem Schema von FALK entwickelt (vgl. S. 199).

Flußbild, Mehrstufennormtabelle und Multiplikationsmodell sind verschiedene Darstellungsweisen des gleichen Sachverhalts.

Flußbild



Mehrstufennormtabelle formelmäßig

	$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{d}_1$	$(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^{-1} = \tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{d}_3$	$\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{f}_3$	$\mathfrak{V}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$

Multiplikationsmodell

	$\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{U}_1$	$\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{U}_2$	$\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{U}_3$	$\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$
$\mathfrak{V}_3$	$\mathfrak{V}_3\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1\tilde{\mathfrak{U}}$

Aus den Gleichungen (3), S. 198, ist zu erkennen, daß zur Berechnung der effektiven Auslastung der Teilbetriebe die Zeilen der Matrizenprodukte des Multiplikationsmodells jeweils mit dem Einsatzvektor $\mathfrak{e}$, der die Mengen der einzelnen eingesetzten Rohstoffe enthält, zu multiplizieren ist. Die Summe der Elemente des dabei entstehenden Spaltenvektors zeigt die Gesamtauslastung der betreffenden Betriebsstufe unter Berücksichtigung des vorgegebenen Rohstoffeinsatzes an. Die *Berechnung der Auslastung* der Teilbetriebe *erfolgt bei der Kopplungsmatrix* also *auf der Grundlage der Rohstoffeinsätze*. Ebenso werden auf der Grundlage der Rohstoffeinsätze die Mengen der Fertigprodukte ermittelt. *In den meisten Fällen* sind jedoch nicht die *Rohstoffmengen vorgegeben*, sondern es sind vielmehr aus den dem Betrieb für die Fertigprodukte vorgegebenen Planzahlen die Auslastungen der einzelnen Betriebsstufen und die benötigten Rohstoffe zu ermitteln. *Zu diesem Zweck muß die Kopplungsmatrix zur* **Struktur-** oder **Planmatrix** *umgeformt werden.*

2.5.2. Teilumkehr der Kopplungsmatrix zur Strukturmatrix

Zur Fertigung der Produkte P_1 und P_2 werden die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 eingesetzt. Aus jedem der drei Rohstoffe können jeweils beide Produkte hergestellt werden. Der Rohstoff R_3 ist ein Abfallprodukt, das in bestimmten Mengen anfällt. Es soll der Bedarf an R_1 und R_2 unter Berücksichtigung des Anfalls von R_3 für ein vorgegebenes Produktionsprogramm bestimmt werden. Die Auslastung der Teilbetriebe und die von P_1 und P_2 produzierten Mengen beim Einsatz von je einer Einheit der drei Rohstoffe sind aus der nachstehenden Kopplungsmatrix zu ersehen.

Kopplungsmatrix

	R_1	R_2	R_3
Betrieb I	1,10327	1,06522	1,13548
Betrieb II	1,49188	1,30835	1,50361
Betrieb III	1,00389	0,92122	0,87841
Rücklauf an Betr. I	0,10327	0,06522	0,13548
Produkt P_1	0,85548	0,31195	0,66984
Produkt P_2	0,05076	0,54233	0,12108

Anmerkung: Um für die in diesem Beispiel angeführten Zahlenwerte eine *absolute Genauigkeit* auf drei Stellen nach dem Komma zu gewährleisten, sind *zwei Schutzstellen* mitgeführt. Da die einzelnen Elemente der Matrix jeweils mit den Durchsatzgrößen zu multiplizieren sind, ergeben sich immer dann, wenn die Genauigkeit der Ergebnismatrix nicht genügend gesichert ist, besonders für ökonomische Untersuchungen relativ große, nicht tragbare Abweichungen.
Näheres über Runden, Genauigkeitsdefinition und Schutzstellen ist in 5.1.2. und 5.1.3. nachzulesen.

Schematisch kann die Kopplungsmatrix wie folgt dargestellt werden:

		$\mathfrak{d}$		$\mathfrak{t}$
		R_1	R_2	R_3
$\mathfrak{a}$	D_1 D_2 D_3 A_3	$\mathfrak{Q}_{11}$		$\mathfrak{Q}_{12}$
$\mathfrak{f}$	P_1 P_2	$\mathfrak{Q}_{21}$		$\mathfrak{Q}_{22}$

Die *Durchsätze* und die *Einflußgrößen* sind die *Teilvektoren*, mit denen die *Blöcke der Kopplungsmatrix* zu multiplizieren sind. Die Elemente des Durchsatzvektors $\mathfrak{d}$ sind die zu bestimmenden Mengen der Rohstoffe R_1 und R_2. *Fest vorgegebene Größen*

werden in diesem Zusammenhang als *Einflußgrößen* bezeichnet und zum Vektor $\mathfrak{t}$ zusammengefaßt. Einflußgröße ist im vorliegenden Falle lediglich R_3.
Aus der schematischen Darstellung der Kopplungsmatrix ergibt sich die **Kopplungsgleichung**:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{f} \end{pmatrix} = \mathfrak{K} \begin{pmatrix} \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \end{pmatrix}$$

Nach *Aufspalten der Matrix* $\mathfrak{K}$ in Blöcke kann die Kopplungsgleichung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{d} + \mathfrak{Q}_{12}\mathfrak{t}$$

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{Q}_{21}\mathfrak{d} + \mathfrak{Q}_{22}\mathfrak{t}.$$

In diesem Gleichungssystem sind die Einflußgrößen $\mathfrak{t}$ und die benötigten Fertigprodukte $\mathfrak{f}$ vorgegeben. Zu bestimmen sind $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{f} - \mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{Q}_{22}\mathfrak{t}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{Q}_{11}(\mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{f} - \mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{Q}_{22}\mathfrak{t}) + \mathfrak{Q}_{12}\mathfrak{t}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{f} + (\mathfrak{Q}_{12} - \mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{Q}_{22})\mathfrak{t}.$$

Das **Schema der Strukturmatrix** sieht demnach wie folgt aus:

		$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{t}$
		P_1	P_2	R_3
$\mathfrak{a}$	D_1, D_2, D_3, A_3	$\mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{Q}_{21}^{-1}$		$\mathfrak{Q}_{12} - \mathfrak{Q}_{11}\mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{Q}_{22}$
$\mathfrak{d}$	R_1, R_2	$\mathfrak{Q}_{21}^{-1}$		$-\mathfrak{Q}_{21}^{-1}\mathfrak{Q}_{22}$

Wie das Schema erkennen läßt, *kann aus der Kopplungsmatrix nur dann die Strukturmatrix abgeleitet werden, wenn die Teilmatrix* $\mathfrak{Q}_{21}$ quadratisch und *regulär ist.* Die Planmatrix muß also immer so aufgestellt werden, daß die *Anzahl der Durchsätze und die Anzahl der Fertigprodukte übereinstimmen.*
Das zu erreichen setzt gründliche Kenntnis sowohl des technologischen Ablaufs als auch der ökonomischen Zusammenhänge voraus. Die durchgerechnete Strukturmatrix hat in dem angeführten Zahlenbeispiel folgendes Aussehen:

Strukturmatrix

Ausgangs-zahlen	P_1	P_2	R_3
R_1	1,21024	−0,69614	−0,72639
R_2	−0,11327	1,90904	−0,15526
D_1	1,21456	1,26552	0,16870
D_2	1,65734	1,45914	0,21679
D_3	1,11060	1,05980	0,00617
A_3	0,10830	0,04561	0,05034

Um die Auslastung der einzelnen Produktionsstufen und die Mengen der benötigten Rohstoffe zu ermitteln, ist jede Zeile der Strukturmatrix mit dem Vektor, der als Elemente die vorgegebenen Größen P_1, P_2 und R_3 enthält, zu multiplizieren.
Aus der Strukturmatrix ist zu erkennen, daß für eine eingesetzte Einheit R_3 0,72639 Einheiten R_1 und 0,15526 Einheiten R_2 eingespart werden. Die negativen Vorzeichen in der ersten und zweiten Spalte sind wie folgt zu erklären. Die Kopplungsmatrix S. 200 läßt erkennen, daß R_1 besonders für die Produktion von P_1 und R_2 besonders für die Produktion von P_2 geeignet ist. Für die Produktion von einer Einheit P_1 werden 1,21024 Einheiten R_1 benötigt. Dabei werden gleichzeitig gewisse Mengen P_2 produziert, wodurch eine Einsparung von 0,11327 Einheiten R_2 eintritt. Umgekehrt werden für die Produktion von einer Einheit P_2 1,90904 Einheiten R_2 benötigt und durch die gleichzeitige Produktion von P_1 0,69614 Einheiten R_1 eingespart.
Das kleine Beispiel zeigt, daß durch die Matrizendarstellung ein umfassender Einblick auch in die Einzelheiten des Produktionsgeschehens ermöglicht wird.

3. Linearoptimierung

3.1. Einführung

3.1.1. Problemstellung

Unter den Problemen, vor die sich Industrie und Wirtschaft gestellt sehen, nehmen die **optimalen Entscheidungsfindungen** eine bedeutende Stellung ein. Es handelt sich dabei darum, aus der Vielzahl der möglichen Lösungen für eine gestellte Aufgabe die unter bestimmten Gesichtspunkten *optimale*[1]) *Lösung* herauszufinden. Bei der Kompliziertheit der Probleme, die es heute zu bewältigen gilt, ist es nicht mehr möglich, optimale Lösungen allein auf Grund gesammelter Erfahrungen zu ermitteln, sondern es sind wissenschaftliche Methoden nötig, um richtige Entscheidungen zu treffen. Unter ihnen nehmen die mathematischen Methoden eine Vorrangstellung ein.
Bei der Ermittlung optimaler Entscheidungen ist das grundlegende mathematische Hilfsmittel die **Optimierungsrechnung**. Zu ihr gehören die Differentialrechnung, bestimmte Methoden der Wahrscheinlichkeitslehre und der mathematischen Statistik sowie die lineare, die nicht-lineare und die dynamische Optimierung [36].
Die lineare Optimierung wird bereits weitgehend in der Industrie und in der Wirtschaft verwendet, da eine Vielzahl der zu lösenden Probleme auf lineare Zusammenhänge führt. Selbst ein Teil der nicht-linearen Probleme läßt sich noch auf lineare Ansätze zurückführen, die sehr brauchbare Näherungslösungen ergeben (vgl. 3.4.3.). Die Linearoptimierung[2]) nimmt durch diese weitgehende Anwendbarkeit in der Praxis eine zentrale Stellung innerhalb der Optimierungsrechnung ein.

> Die Linearoptimierung umfaßt diejenigen mathematischen Verfahren, die das Maximum oder das Minimum einer linearen Funktion unter einschränkenden Bedingungen für die Variablenbelegung ermitteln.

Die Bestimmung eines Extremwertes ist aus der Differentialrechnung bekannt. Sie wird dort auf *nicht-lineare* Funktionsgleichungen einer oder mehrerer unabhängiger Variabler angewendet. Die Voraussetzung dafür, daß ein Extremwert vorhanden sein kann, ist die Differenzierbarkeit der Funktion mindestens in einer gewissen Umgebung des relativen Maximums oder Minimums; die *notwendige Bedingung* für seine

---

[1]) Optimum (lat.) Bestwert

[2]) Nach der englischen Bezeichnung *Linear-Programming*; in der Literatur auch noch als *Linearprogrammierung* zu finden

Existenz ist bei *einer* unabhängigen Variablen durch die Gleichung $f'(x) = 0$ gegeben, die erfüllbar sein muß. Bei *mehreren* unabhängigen Variablen müssen entsprechend die partiellen Ableitungen den Wert Null annehmen können.
Für die Extremwertberechnungen linearer Funktionen versagen die Methoden der Differentialrechnung. Lineare Funktionen sind zwar differenzierbar, da aber ihre ersten Ableitungen stets konstant sind, kann die für einen Extremwert bestehende notwendige Bedingung nicht erfüllt werden. Die Frage nach dem Extremwert einer linearen Funktion geht bei den Problemen der Linearoptimierung von wesentlich anderen Gesichtspunkten aus als in der Differentialrechnung. Sie wird erst sinnvoll durch die stets mit auftretenden Nebenbedingungen.
Die mathematische Behandlung und Durchdringung der Linearoptimierung kann heute als *abgeschlossene Theorie* betrachtet werden. Diese ist allerdings nicht mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln zu bewältigen. Sie läßt sich mit Hilfe der Matrizenrechnung *darstellen*, geht aber in ihren wissenschaftlichen Anforderungen weit über den Rahmen dieses Lehrbuches hinaus.
Die *Verfahren* dagegen beruhen auf algebraischen Grundlagen und sind im Gegensatz zur Theorie verhältnismäßig einfach. Es werden Algorithmen[1]) entwickelt, die ein rationelles Lösen kleinerer Probleme ohne Rechenautomaten ermöglichen, die aber auch für Probleme mit einer großen Zahl von Variablen auf Rechenautomaten übertragbar sind (vgl. 3.4.2.).
Erste Arbeiten zur mathematischen Lösung von Problemen der Linearoptimierung erschienen 1939 von Prof. J. W. KANTOROWITSCH in Leningrad[2]). Die Forschung wurde während des zweiten Weltkrieges vor allem in den USA fortgesetzt. Nachdem ihre Bedeutung und ihre Anwendungsmöglichkeit für die Wirtschaft erkannt worden war, wurde die Forschung auf diesem Gebiet sehr intensiv betrieben. Einen besonderen Aufschwung nahm die Entwicklung, nachdem DANTZIG 1947 ein Verfahren zur Lösung des allgemeinen linearen Optimalproblems gefunden hatte, das er als **Simplexmethode**[3]) bezeichnete.
Obwohl man heute auch noch andere Methoden kennt, kommt der Simplexmethode mit ihren Weiterentwicklungen und Abarten eine besondere Bedeutung zu. Sie ist auf alle Probleme der Linearoptimierung anwendbar und ist verhältnismäßig einfach zu handhaben.
Aus der großen Zahl der Probleme, die mit Hilfe der Linearoptimierung gelöst werden können, seien zur Einführung die folgenden genannt:

Produktionsplanung

Es ist für einen Betrieb ein Produktionsprogramm so aufzustellen, daß die Herstellung der vorgesehenen Produkte einen maximalen Reingewinn erbringt. Die Herstellung wird bestimmt durch den für die benötigten Maschinen bekannten Maschinenzeitfonds[4]) in einem bestimmten Zeitabschnitt und durch die Maschineneinsatzzeiten je Einheit des Produktes.

---

[1]) Algorithmus (arab.) mechanisiertes Rechenverfahren (vgl. GAUSSscher Algorithmus [**1**]). Weiteres in 5.3.7.
[2]) „Mathematische Methoden in der Organisation und Planung der Produktion" (russ.)
[3]) vgl. 3.2.3.1.
[4]) Fonds (franz.) Vorrat an bestimmten Mitteln, hier Arbeitszeiten der Maschinen

Ebenso kann nach der maximalen Zahl der erzeugten Produkte in einem festgelegten Zeitraum gefragt sein, wobei die zur Verfügung stehenden Mengen der Rohstoffe und der Rohstoffverbrauch je Einheit des Produktes der Berechnung zugrunde gelegt werden können. Auch die Minimierung der Selbstkosten oder die Maximierung des Deviseneinganges können Ziele der Produktionsplanung sein.

Mischungsberechnung

Zur Fütterung eines Viehbestandes ist die billigste Mischung herzustellen, die die zur Aufzucht nötige Mindestmenge an einzelnen Nährstoffen enthält. Für die Futtermittel, die verwendet werden können, sind der Gehalt an diesen Nährstoffen und der Preis je Einheit bekannt.

Transportplanung

Die Belieferung von n Verbrauchern durch m Erzeuger mit einem austauschbaren Gut ist so zu planen, daß eine bestimmte Zahl von Routen mit einem minimalen Transportaufwand (transportierte Einheit mal km) gefahren wird oder daß die Gesamtkosten des Transportes ein Minimum werden. Dazu müssen die Länge der Fahrstrecken von jedem Erzeuger zu jedem Verbraucher bzw. die Transportkosten je Einheit des transportierten Gutes bekannt sein.

Um eine optimale Entscheidung für einen Problemkreis zu finden, wie er etwa dem genannten entspricht, sind 5 wesentliche Arbeitsabschnitte zu bewältigen:

1. Abschnitt: **Das Aufstellen des allgemeinen Modells**

Dieses stellt die mathematisch genaue Formulierung des Problems unter Verwendung allgemeiner Zahlensymbole dar.

2. Abschnitt: **Die Aufbereitung des Problems**

Sie besteht darin, daß alle notwendigen Daten ermittelt werden. Dazu gehören die Einsatzgrößen, wie Kapazität, Materialbedarf, Maschinenzeitfonds, Gewinn oder Unkosten je Einheit des Produktes, einerseits und die auf das Problem zutreffenden technisch-ökonomischen Kennzahlen, wie Verbrauchsnormen, Maschineneinsatzzeiten, Wegelängen, andererseits.

3. Abschnitt: **Das Aufstellen des speziellen mathematischen Modells**

In das allgemeine Modell werden die ermittelten Daten eingesetzt (vgl. 3.1.2.).

4. Abschnitt: **Die Lösung des Modells**

Das vorliegende Lehrbuch vermittelt Grundkenntnisse zur Lösung von Normalaufgaben der Linearoptimierung. Diese sollen den Ingenieur wie den Ingenieurökonom befähigen, so weit in die Probleme einzudringen, daß er sie erkennen lernt, um später kleinere Aufgaben auf betrieblicher Ebene selbst lösen zu können, und daß er bei größeren Problemen in entsprechendem Maße über den Gesamtkomplex orientiert ist.

Theoretische Grundlagen werden unter Verzicht auf Beweise nur in dem Maße herangezogen, in dem sie zum Verständnis der Probleme wie auch der weiterführenden Literatur unbedingt nötig sind; auf eine allgemeine Darlegung wird im Rahmen dieses Lehrbuches bewußt verzichtet.

5. Abschnitt: **Die Auswertung der Lösung**

Die erhaltene Lösung erfordert eine Umsetzung in die Praxis unter Berücksichtigung aller gegebenen technischen, technologischen und ökonomischen Gegebenheiten. Da es vielfach verschiedene gleichwertige Lösungen für ein Problem gibt, die Varianten[1]) genannt werden, ist außerdem zu entscheiden, welche dieser Varianten für die praktische Ausführung die günstigste ist.

3.1.2. Das allgemeine mathematische Modell der Linearoptimierung

Mathematische Modelle[2]) spiegeln ganz allgemein einen Teil der Wirklichkeit in mathematischer Formulierung wider.

Da die Vielzahl der Verflechtungen und gegenseitigen Beziehungen innerhalb der Wirklichkeit sehr groß ist, muß für das Modell eine Auswahl getroffen werden, die eine Vereinfachung des Problems bedeutet. Dabei darf das Ziel der gestellten Aufgabe nicht verschoben werden, das Wesentliche des Problemkomplexes muß deutlich erkennbar und die Möglichkeit der rechentechnischen Behandlung gewährleistet sein.

Wenn diese Gesichtspunkte beachtet werden, läßt jedes Modell Erkenntnisse über bestehende Zusammenhänge gewinnen, die ohne die mathematische Formulierung und Lösung nicht oder nur viel unklarer oder auch unvollständiger ermittelt werden könnten.

Die Auswahl der Einflußgrößen, die für einen Prozeß als entscheidend angesehen werden sollen und die deshalb in das Modell aufgenommen werden müssen, ist im allgemeinen recht schwierig und erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen Ingenieuren, Ingenieur-Ökonomen und Mathematikern.

Zuerst soll ein solches Modell für ein vereinfachtes Problem aus der Produktionsplanung (vgl. S. 204) aufgestellt werden.

Die Probleme müssen allerdings im Rahmen des Lehrbuches eine noch wesentlich weitergehende Vereinfachung als in der Praxis erfahren; außerdem sind alle Zahlenwerte bewußt einfach gewählt. Nur so ist es möglich, die mathematischen Grundlagen des Gebietes ohne besondere Schwierigkeiten für eine erste Einführung darzulegen.

Modell für ein optimales Produktionsprogramm

Ein Betrieb ist mit der Herstellung zweier Produkte P_1 und P_2 beauftragt.
Der Reingewinn beträgt für

P_1 je Einheit des Produktes 20 MDN, für
P_2 je Einheit des Produktes 10 MDN.

---

[1]) Variante von varius (lat.) verschieden; hier veränderte, aber gleichwertige Lösung
[2]) Modell (ital.) Muster, Nachbildung

Zur Fertigung eines jeden Einzelproduktes werden je 3 Maschinen benötigt. Die Maschinenzeitfonds, die für einen bestimmten Zeitraum nicht überschritten werden können, und die Durchlaufzeiten der Produkte durch die Maschinen sind aus Tabelle 1 zu entnehmen. Es ist für den in Frage kommenden Zeitraum ein Produktionsprogramm so aufzustellen, daß ein maximaler Reingewinn erzielt wird.

Für die Modelle der Optimierungsrechnung muß an erster Stelle das **Optimalitätskriterium** festgelegt werden, d. h., es ist diejenige Größe auszuwählen, für die das Optimum gesucht ist.

Dieses Optimalitätskriterium ist im vorliegenden Falle der Reingewinn, der durch die Produktion erzielt wird. Die Reingewinne je Einheit der Produkte sind bekannt. Damit hängt der maximale Gesamtgewinn nur noch von der Stückzahl der beiden Produkte P_1 und P_2 ab, die mit x_1 und x_2 bezeichnet werden sollen.

Tabelle 1

Maschinen	Durchlaufzeiten		Maschinenzeitfonds
	h		h
	P_1	P_2	
M_1	30	10	3000
M_2	40	30	6000
M_3	10	20	2000

Der mit diesen Stückzahlen zu erzielende Reingewinn läßt sich mathematisch durch die Gleichung

$$20x_1 + 10x_2 = z \to \max$$

beschreiben, d. h., x_1 und x_2 sollen so bestimmt werden, daß z einen maximalen Wert annimmt. Der Wert von z ist also noch nicht bekannt, man nennt z einen **variablen Parameter**.

Da die Gleichung die analytische Darstellung einer linearen Funktion ist, die das Ziel des Produktionsprogramms angibt, nennt man diese Funktion die **Zielfunktion** des Modells. Diese wird, wie ersichtlich, vom Optimalitätskriterium her bestimmt. Die beiden Variablen entscheiden mit ihrer Belegung, welchen Wert z im Höchstfall annehmen kann. Sie heißen deshalb **Entscheidungsvariablen**[1]).

Die Daten der Tabelle 1 beschränken jedoch die Möglichkeiten für die Variablenbelegung der Zielfunktion und geben damit der Frage nach dem Extremwert erst einen realen Sinn.

Die erste Zeile der Tabelle besagt, daß x_1 Produkte der ersten Art eine Bearbeitungszeit von $30 \cdot x_1$ Stunden durch die Maschine M_1 erfordern und x_2 Produkte der

[1]) In der Literatur teilweise auch Prozeßvariable genannt

anderen Art eine Bearbeitungszeit von $10 \cdot x_2$ Stunden durch dieselbe Maschine. Die Summe dieser Zeiten darf aber den Fonds von 3000 h nicht überschreiten. Dieser Tatbestand läßt sich in Form einer Ungleichung ausdrücken:

$$30x_1 + 10x_2 \leqq 3000.$$

Diese Ungleichung ergibt zusammen mit den Ungleichungen, die für die beiden anderen Maschinen entsprechend der zweiten und dritten Zeile in Tabelle 1 aufzustellen sind, das System der **Nebenbedingungen**:

$$\begin{aligned} 30x_1 + 10x_2 &\leqq 3000 \\ 40x_1 + 30x_2 &\leqq 6000 \\ 10x_1 + 20x_2 &\leqq 2000. \end{aligned}$$

In diesen Nebenbedingungen treten die Kennzahlen (technische Daten) als konstante Koeffizienten und die Einsatzgrößen als konstante Absolutglieder auf.
Da die Mengenzahlen x_1 und x_2 für praktische Probleme nur Sinn haben, wenn sie nicht negativ sind, müssen die Nebenbedingungen noch durch die **Nichtnegativitätsbedingungen** ergänzt werden:

$$x_1 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0.$$

Damit ist das mathematische Modell gefunden. Die Problemstellung für das optimale Produktionsprogramm heißt nunmehr in mathematischer Formulierung:

Für die

Zielfunktion[1] $\quad 20x_1 + 10x_2 = z \quad$ ((1))

ist unter den

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &(11) \quad 30x_1 + 10x_2 \leqq 3000 \\ &(12) \quad 40x_1 + 30x_2 \leqq 6000 \\ &(13) \quad 10x_1 + 20x_2 \leqq 2000 \end{aligned}$$

mit den

Nichtnegativitätsbedingungen $\quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$

das Maximum zu berechnen.

Mathematische Modelle, bei denen *alle* Koeffizienten und die Absolutglieder der Nebenbedingungen bekannt und konstant sind, heißen **deterministische Modelle**[2].

[1]) Im Zusammenhang mit den Modellen wird die analytische Darstellung der Zielfunktion nur kurz als „Zielfunktion" bezeichnet; sonst wird zu besonderer Kennzeichnung statt „Funktionsgleichung" im allgemeinen die Bezeichnung „Gleichung der Zielfunktion" gebraucht

[2]) determinare (lat.) begrenzen, abgrenzen

Verallgemeinerung

Von dem entwickelten Einzelmodell ausgehend, soll das allgemeine Modell aufgestellt werden.
Die Zahl der Entscheidungsvariablen ist in den seltensten Fällen auf zwei beschränkt; sie sei gleich n. Mit c_i als den Konstanten, deren Wahl durch das Optimalitätskriterium entschieden wird (wie Gewinn je Einheit des Produktes), ergibt sich allgemein die analytische Darstellung der

Zielfunktion

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = z,$$

deren Maximum oder Minimum gesucht wird.
Bezeichnet man die Kennzahlen mit a_{ik} und die Einsatzgrößen mit a_k (im Beispiel Durchlaufzeiten und Maschinenzeitfonds), so lauten, ebenfalls in allgemeiner Form, die

Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll}
(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \lesseqqgtr a_1 \\
(2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \lesseqqgtr a_2 \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \lesseqqgtr a_m
\end{array}$$

mit den

Nichtnegativitätsbedingungen

$$\begin{array}{l}
x_1 \geqq 0 \\
x_2 \geqq 0 \\
\dots \\
x_n \geqq 0.
\end{array}$$

Die Nebenbedingungen bleiben bei diesen Modellen nicht allein auf die Kleiner-Gleich-Beziehungen beschränkt; es treten auch Größer-Gleich-Beziehungen auf. Einzelne Nebenbedingungen können sogar in Form von Gleichungen gegeben sein. Zu Maximierungsaufgaben gehört aber im *Normalfall* stets die Kleiner-Gleich-Beziehung.

Eine besonders einfache Darstellung erfahren die Modelle der Linearoptimierung durch die Matrizenschreibweise.
Mit der Kennzahlenmatrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} \quad \mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

lautet das Modell für die Maximierung:

Zielfunktion $\mathfrak{c}^{\mathrm{T}}\mathfrak{x} = z$

Nebenbedingungen $\mathfrak{A}\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{o}$ (62)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{c}^{\mathrm{T}}\mathfrak{x} &= z \\ \mathfrak{A}\mathfrak{x} &\leqq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{x} &\geqq \mathfrak{o} \end{aligned}} \qquad (62)$$

Im folgenden werden nur Maximierungsprobleme behandelt, was ohne Einschränkung des Gesamtproblems geschehen kann, da Maximierungs- und Minimierungsaufgaben so in wechselseitiger Beziehung stehen, daß die eine stets in die andere überführt werden kann (vgl. 3.2.3.5.).

BEISPIELE

1. Es sollen zwei Produkte A und B aus den Grundmaterialien m_1 und m_2 hergestellt werden, für welche die Kennzahlen bekannt sind. Außerdem sind auch die Einsatzzahlen für die Arbeitskräfte und die Kennzahl der für das Produkt A benötigten Spezialmaschine bekannt[1]).
Tabelle 2 gibt die Aufwandszahlen je Einheit des Produktes an. Dabei stehen für einen bestimmten Zeitraum folgende Kapazitäten zur Verfügung, die nicht überschritten werden dürfen:

Material m_1: 10000 t
Material m_2: 10000 t
Arbeitskräfte: 300
Spezialmaschinen: 3

Tabelle 2

Produkt	Material m_1	Material m_2	Arbeitskräfte	Spezialmaschinen
	t	t		
A	2	10	0,2	0,005
B	16	5	0,4	—

[1]) In Anlehnung an eine Demonstrativrechnung zur optimalen Produktionsvariante nach [34]

Gesucht ist das mathematische Modell für ein Produktionsprogramm, dessen Optimalitätskriterium die Zahl der herzustellenden Produkte bei den gegebenen Kapazitätsbeschränkungen ist.

Lösung: Es handelt sich um eine Maximierungsaufgabe, bei der die größte Anzahl der Produkte gesucht wird. Die Zahl der Produkte A sei mit x_1 und die Zahl der Produkte B mit x_2 bezeichnet. Ihre Summe soll ein Maximum werden. Daraus ergibt sich die Gleichung der Zielfunktion

$$x_1 + x_2 = z \to \max. \qquad ((2))$$

Die Nebenbedingungen werden durch die Beschränkungen im Aufkommen und durch die Aufwandszahlen in Tabelle 2 bestimmt.

$$\begin{array}{llll}
(21) & 2x_1 + 16x_2 \leqq 10000 & & (m_1) \\
(22) & 10x_1 + 5x_2 \leqq 10000 & & (m_2) \\
(23) & 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \leqq 300 & & (\mathrm{AK}) \\
(24) & 0{,}005x_1 \leqq 3 & & (\mathrm{M}) \\
\text{mit} & x_1, x_2 \geqq 0 & &
\end{array}$$

Anmerkung: Die Nichtnegativitätsbedingung wird weiterhin immer in dieser Kurzform in die Modelle aufgenommen.

2. Für ein Tieraufzuchtprogramm stehen 3 Futtermittel A, B und C zur Verfügung, die zwei unentbehrliche Nährstoffe N_1 und N_2 enthalten. Tabelle 3 gibt den Anteil dieser Nährstoffe je Mengeneinheit (ME) der Futtermittel an; dazu sind in der dritten Zeile die Preise je ME in MDN aufgenommen.

Tabelle 3

	A	B	C
N_1	0,2	0,4	0,1
N_2	0,3	—	0,2
P (MDN)	17	4	8

Eine Mischung aus den 3 Futtermitteln soll *mindestens* 12 ME des ersten und 8 ME des zweiten Nährstoffes enthalten; sie soll außerdem möglichst billig sein.
Es ist zu ermitteln, wieviel ME eines jeden Futtermittels für diese Mischung genommen werden müssen und was die Mischung kostet.

Wie lautet das mathematische Modell dieser Aufgabe?

Lösung: Das Optimalitätskriterium sind die Kosten, die ein Minimum werden sollen. Daraus ergibt sich die Gleichung der Zielfunktion, wenn die benötigte Menge von A mit x_1, die anderen Mengen entsprechend bezeichnet werden:

$$17x_1 + 4x_2 + 8x_3 = z \to \min \qquad ((3))$$

Die Nebenbedingungen werden aus den ersten beiden Zeilen der Tabelle 3 ermittelt.

$$
\begin{array}{llr}
(31) & 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 \geqq 12 & (N_1) \\
(32) & 0{,}3x_1 \phantom{+ 0{,}4x_2} + 0{,}2x_3 \geqq 8 & (N_2) \\
\text{mit} & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 &
\end{array}
$$

Jetzt treten in den Nebenbedingungen Größer-Gleich-Beziehungen auf, da die Aufgabe der im Futter enthaltenen Mengeneinheiten an Nährstoffen eine *Mindestangabe* ist, die nicht *unterschritten* werden darf.

3.2. Die Lösung des linearen Optimierungsproblems

3.2.1. Allgemeine Grundbegriffe

In den folgenden Ausführungen werden die wichtigsten Grundbegriffe erläutert, die zum Verständnis der Lösungsverfahren der Linearoptimierung nötig sind. Damit soll eine Einordnung in die theoretischen Grundlagen gegeben werden, die sich allerdings auf Wesentlichstes in elementarer Darstellung beschränken muß. Es wird aber für den interessierten Leser möglich sein, sich mit Hilfe der in [1] gegebenen Grundlagen sowie der Matrizenrechnung, wie sie im vorliegenden Buch geboten wird, in die für ihn in Frage kommende Literatur wie [29], [36] u. a. einzuarbeiten und damit noch tiefer in das Gebiet einzudringen.

Der n-dimensionale Raum

In geometrischer Deutung bildet die Menge aller geordneten Zahlenpaare die Ebene, die Menge aller geordneten Zahlentripel den dreidimensionalen Raum.
In der Linearoptimierung treten im allgemeinen Modelle mit mehr als zwei oder drei Variablen auf. Die Lösung eines Modells mit n Variablen erfordert die Berechnung eines n-Tupels von Zahlenwerten.
Ein solches n-Tupel läßt sich geometrisch zunächst nicht mehr deuten. Man hat jedoch die Verhältnisse des zwei- und dreidimensionalen „Raumes" verallgemeinert und definiert:

> Die Menge aller geordneten n-Tupel bildet den **n-dimensionalen Raum**. Jedes n-Tupel bestimmt einen „Punkt" dieses Raumes.

Der n-dimensionale Raum wird kurz mit R_n bezeichnet.

Konvexe[1]) Punktmengen

Definition:

> Eine beliebige Punktmenge des n-dimensionalen Raumes R_n heißt **konvex**, wenn außer zwei ihr zugehörigen Punkten P_1 und P_2 auch alle Punkte der Verbindungsstrecke P_1P_2 mit zur betreffenden Menge gehören.

[1]) konvex (lat.) nach außen gewölbt, erhaben

Bild 60 und Bild 61 zeigen zwei konvexe und zwei nicht-konvexe Punktmengen in der Ebene.

Jede konvexe Punktmenge besteht im allgemeinen aus zwei Teilmengen: aus der Menge der inneren Punkte und aus der Menge der Randpunkte.

Kann man einen Punkt P_i einer konvexen Menge M in eine Teilmenge M_{1i} *einschließen*, die *ganz* in M enthalten ist ($M_{1i} \subset M$), so heißt P_i **innerer Punkt** der

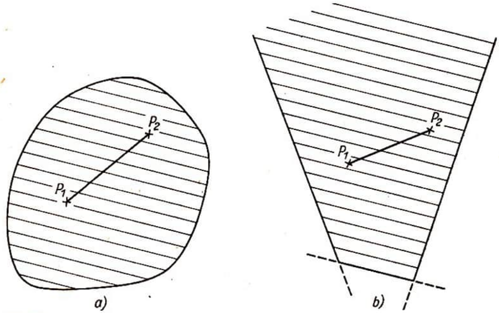


Bild 60

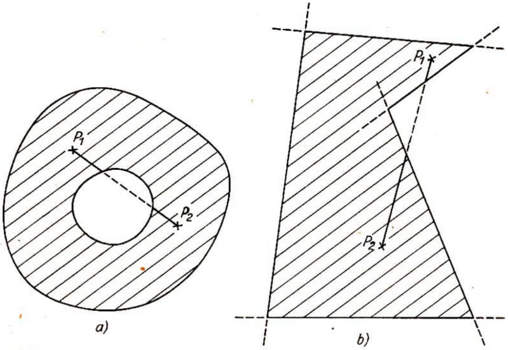


Bild 61

Menge. Ist die *Einschließung* eines Punktes P_r dagegen *nur* so möglich, daß die Menge M_{1r} nicht völlig in M enthalten ist, so heißt P_r **Randpunkt** der konvexen Menge (Bild 62).

Unter den Randpunkten konvexer Mengen nehmen die **extremalen Punkte** [29] eine besondere Stellung ein.

Definition:

> Extremale Punkte einer konvexen Punktmenge sind diejenigen Randpunkte, die *nicht innere Teilpunkte* einer Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte der Menge sein können.

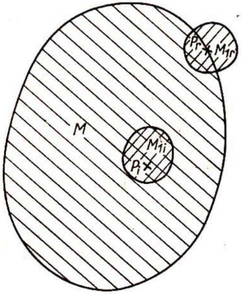


Bild 62

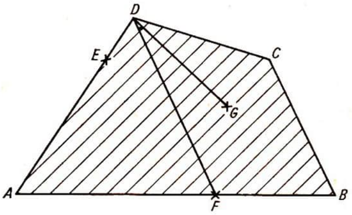


Bild 63

In Bild 63 kann jeder Randpunkt (z. B. E) außer A, B, C und D als innerer Teilpunkt der einzelnen n-Eck-Seiten angesehen werden. Für die genannten vier Punkte dagegen ist es in keiner Weise möglich, eine zur Menge gehörende Strecke zu finden, in der sie als innere Teilpunkte enthalten sind. Es handelt sich also bei diesen vier Punkten um Extremalpunkte. Bild 60a z. B. zeigt eine konvexe Punktmenge, deren Randpunkte sämtlich Extremalpunkte sind.

> Konvexe Punktmengen, die *allseitig begrenzt* sind, heißen **beschränkt**; ist das nicht der Fall, so sind es **unbeschränkte** Mengen.

Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft sollen wieder der zwei- und der dreidimensionale Raum herangezogen werden. Alle geschlossenen Figuren der Ebene sind beschränkte konvexe Punktmengen, wenn sie der gegebenen Definition (S. 212, konvexe Punktmengen) genügen.

Bild 60a wiederum stellt eine solche Punktmenge dar, Bild 60b dagegen eine unbeschränkte konvexe Punktmenge des R_2. Im R_3 sind alle regelmäßigen Vielflache, die Kugel oder das Ellipsoid einerseits und ein in der Achsenrichtung unbegrenzter Zylinder andererseits als Beispiel anzuführen.

Die Hyperebene

Eine lineare Funktion mit zwei Variablen bestimmt, auch wieder geometrisch betrachtet, eine Gerade in der Ebene, d. h., sie umfaßt eine Teilmenge aller geordneten Zahlenpaare. Im dreidimensionalen Raum R_3 beschreibt eine lineare Funktion mit drei Variablen eine Ebene als Teilmenge aller geordneten Zahlentripel.
In entsprechender Verallgemeinerung definiert man nunmehr:

> Eine lineare Funktion mit n Variablen bestimmt eine **Hyperebene** des n-dimensionalen Raumes.

Wendet man diese Bezeichnung konsequent für alle n an, so folgt daraus, daß die Gerade die Hyperebene des zweidimensionalen „Raumes" R_2 ist.

Konvexe Polyeder[1])

Definition:

> Beschränkte konvexe Punktmengen, die von Hyperebenen begrenzt sind und die eine endliche Anzahl extremaler Punkte haben, heißen **konvexe Polyeder**.

Die Extremalpunkte konvexer Polyeder werden **Eckpunkte** genannt. Es sind also z. B. alle regelmäßigen n-Ecke im R_2 und alle regelmäßigen Vielflache im R_3 konvexe Polyeder. Unregelmäßige n-Ecke und Vielflache gehören nur dann zu den konvexen

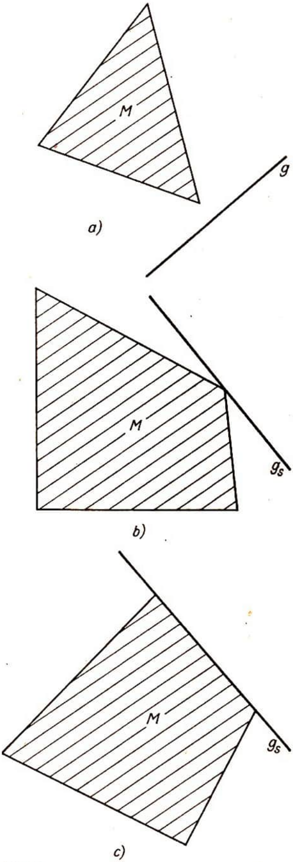


Bild 64

[1]) Polyeder (griech.) Vielflach

Polyedern, wenn keine der begrenzenden Hyperebenen die Punktmenge durchdringt, da sie dann nicht mehr konvex ist (vgl. Bild 61 b).

Die konvexen Polyeder des R_2 werden speziell konvexe *Polygone*[1]) genannt; durch diese besondere Bezeichnung erspart sich die Angabe des zugehörigen Raumes.

Konvexe Polyeder und Stützebenen

Es soll zunächst wieder der R_2 betrachtet werden. Zwischen einem konvexen Polygon und einer Geraden, die das Polygon *nicht durchdringt*, können folgende Beziehungen bestehen:

Der Durchschnitt von Gerade und Polygon ist

1. **leer**; er besteht
2. aus **einem Punkt**, der dann *Eckpunkt* des Polygons sein muß, oder
3. aus der **Punktmenge einer das Polygon begrenzenden Strecke** (Bild 64).

Im R_3 kann der nicht-leere Durchschnitt zwischen einem konvexen Polyeder und einer ganz auf einer Seite dieses Polyeders liegenden Ebene aus einem Eckpunkt, aus der Punktmenge einer begrenzenden Kante des Polyeders oder aus der Punktmenge einer begrenzenden Fläche des Polyeders bestehen.

Definition:

Hyperebenen, die mit einem konvexen Polyeder *nur Randpunkte* gemeinsam haben, heißen **Stützebenen**.

Im R_2 handelt es sich in diesem Falle um *Stützgeraden*.

3.2.2. Die graphische Lösung

3.2.2.1. Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Die Lösungsmengen von Systemen linearer Ungleichungen mit zwei Variablen lassen sich im R_2 graphisch darstellen.

Vorbetrachtung

Eine lineare (Funktions-)Gleichung der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

hat als Lösungsmenge die Menge der geordneten Paare $(x_1; x_2)$, die die Gleichung erfüllen.

$$L = \{(x_1; x_2) \mid (x_1; x_2) \in R \times R \wedge a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1\} \qquad [1]$$

Diese Menge der geordneten Paare kann als Punktmenge einer Geraden g aufgefaßt werden, die der gegebenen linearen Gleichung unter Bezugnahme auf ein cartesisches

---

[1]) Polygon (griech.) Vieleck

Koordinatensystem $(x_1; x_2)$ entspricht. Durch diese Gerade g wird die Ebene in zwei Halbebenen geteilt, für die je eine der beiden Ungleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \lesseqgtr a_1 \quad \text{gilt.}$$

BEISPIELE

1. Es ist die Gerade $g \equiv 2x_1 + 4x_2 - 8 = 0$ zu zeichnen und zu untersuchen, für welche Halbebene die Größer-Beziehung, für welche die Kleiner-Beziehung gilt.

Lösung:

Da die Geradengleichung in der Allgemeinform gegeben ist, zeichnet man sie vorteilhaft durch Bestimmen der Achsenabschnitte ($x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$). Die Gerade schneidet danach die x_2-Achse in $(0; 2)$ und die x_1-Achse in $(4; 0)$.

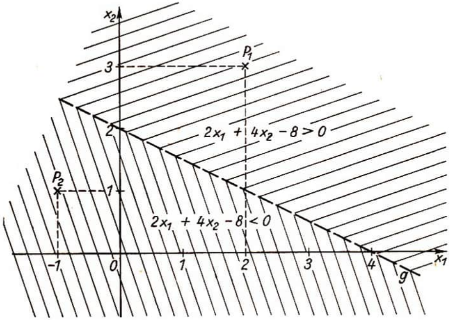


Bild 65

Für die geforderte Untersuchung wird in jeder der beiden Halbebenen (Bild 65) ein beliebiger Punkt gewählt, dessen Koordinaten in die Kurvengleichung der Geraden einzusetzen sind.

$P_1(2; 3)$: $\quad 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 8 > 0$

$P_2(-1; 1)$: $\quad 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 - 8 < 0$

Durch die Wahl weiterer Punkte in den einzelnen Halbebenen läßt sich zeigen, daß sich die Größenbeziehung nicht ändert. Das Ergebnis des vorliegenden Beispiels lautet deshalb:

Für die Halbebene, die P_1 enthält, gilt die Größer-Beziehung; für die Halbebene mit P_2 die Kleiner-Beziehung.

Man erkennt, daß die Entscheidung über die Art der Beziehung bereits nach der Untersuchung *eines* Punktes gefällt werden kann.

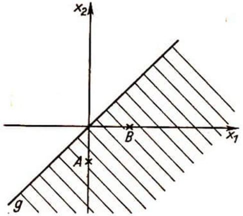


Bild 66

2. Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x_1 - x_2 \geqq 0$$

mit $(x_1; x_2) \in R \times R$ graphisch darzustellen.

Lösung: Die Gerade $x_1 - x_2 = 0$ ist die unter 45° ansteigende Winkelhalbierende des Koordinatensystems.
Da es sich um eine Größer-*Gleich*-Beziehung handelt, wird die Lösungsmenge durch eine Halbebene *einschließlich* der begrenzenden Gerade dargestellt (Bild 66).
Die beiden Punkte $A\ (0; -1)$ und $B\ (1; 0)$ erfüllen beide die Größer-Beziehung, so daß die der Grenzgeraden g zugeordnete Halbebene die untere ist.

AUFGABEN

Die folgenden Punktmengen sind graphisch darzustellen:

133. $\{(x_1; x_2) \mid (x_1; x_2) \in R \times R \ \wedge\ x_1 \leqq 5\}$

134. $\{(x_1; x_2) \mid (x_1; x_2) \in R \times R \ \wedge\ x_1 - 3x_2 - 6 \geqq 0\}$

135. $\{(x_1; x_2) \mid (x_1; x_2) \in R \times R \ \wedge\ x_2 + 3 < 0\}$

System mit zwei Ungleichungen

Liegt ein System mit zwei Ungleichungen vor, so ergibt sich die Lösungsmenge dieses Systems als Durchschnitt der beiden einzelnen Lösungsmengen,

z. B. (1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqq a_1$

(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqq a_2$,

$$L = \{(x_1; x_2) \mid (x_1; x_2) \in R \times R \wedge a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqq a_1 \wedge a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqq a_2\}.$$

In der graphischen Darstellung erhält man *den* Teil der Ebene, der beiden den Ungleichungen zugeordneten Halbebenen gleichzeitig angehört ($L = L_1 \cap L_2$); dazu kommen zwei Halbgeraden als zugehörige Grenzen, wenn die Gleichheitsbeziehung mit enthalten ist.

BEISPIEL

3. Es ist graphisch festzustellen, welche Wertepaare $(x_1; x_2) \in R \times R$ die Ungleichungen

(1) $x_1 - 2x_2 \leqq 2$

(2) $x_1 + \ x_2 \leqq 6$ erfüllen.

Lösung: Die zu (1) und (2) gehörenden Grenzgeraden werden gezeichnet und die zugehörigen Halbebenen entsprechend schraffiert. Der in Bild 67 doppelt schraffierte Teil der Ebene einschließlich der stark ausgezogenen Halbgeraden enthält die Punktmenge, die dem Durchschnitt der beiden einzelnen Lösungsmengen entspricht. Das Ergebnis zeigt, daß die beiden voneinander unabhängigen und sich nicht widersprechenden Ungleichungen als Lösung eine *unbeschränkte konvexe Punktmenge* haben.

AUFGABEN

136. Kann die Lösungsmenge eines Systems von *zwei Ungleichungen* mit zwei Variablen auch leer sein? Es ist

a) festzustellen, welche Ungleichheitsbedingungen dann gelten und welche Eigenschaft die beiden Grenzgeraden haben müssen;

b) ein entsprechendes Beispiel aufzustellen und graphisch auszuwerten.

137. Die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 - 2x_2 \leqq 6 \\ (2) & 3x_1 + 5x_2 \geqq 15 \end{array}$$

ist graphisch zu bestimmen.

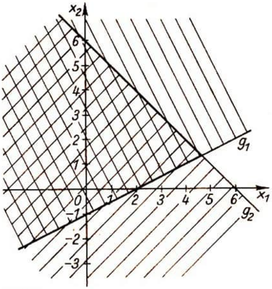


Bild 67

Systeme mit mehr als zwei Ungleichungen

Bei den Problemen der Linearoptimierung liegen im allgemeinen mehr als zwei Ungleichungen vor (vgl. 3.1.2.).
Zunächst sollen **Ungleichungen mit Kleiner-Gleich-Beziehungen** betrachtet werden, wobei aber stets die Nichtnegativitätsbedingungen der mathematischen Modelle als Ungleichungen mit in das System einbezogen sind.

Satz:

Die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems der Form

$$\boxed{\begin{array}{r} \mathfrak{A}\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{x} \geqq \mathfrak{o} \end{array}} \tag{63}$$

wird bei n Variablen durch ein konvexes Polyeder im n-dimensionalen Raum dargestellt, falls die Ungleichungen **verträglich** sind.

Als **verträglich** werden Ungleichungen bezeichnet, die einander nicht widersprechen.
Dieser Satz kann allgemein hier nicht bewiesen werden. Die beiden folgenden Beispiele zeigen den Sachverhalt durch die graphische Darstellung für $n = 2$.

BEISPIELE

4. Es ist die Lösungsmenge für das Ungleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x_1 + 2x_2 & \leqq & 16 \\ (2) & 6x_1 + 5x_2 & \leqq & 60 \\ (3) & x_2 & \leqq & 7 \\ (4) & x_1 & \geqq & 0 \\ (5) & x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

graphisch zu ermitteln.

Lösung:

Jede Ungleichung bestimmt eine Halbebene einschließlich der Grenzgeraden. Die Gerade g_1 wird mit Hilfe des Abschnittes auf der x_2-Achse und des Richtungsfaktors, g_2 mit Hilfe beider Achsenabschnitte gezeichnet. Der Durchschnitt aller Halbebenen ist ein konvexes Polygon in Gestalt eines Fünfecks. Die einzelnen Halbebenen sind in Bild 68 durch Pfeil und durch teilweise Schraffur angegeben. Alle inneren Punkte sowie die Randpunkte stellen den Bereich B der Lösungsmenge des Systems dar, der durch die Ungleichungen (4) und (5) auf den 1. Quadranten des Bezugssystems beschränkt ist.

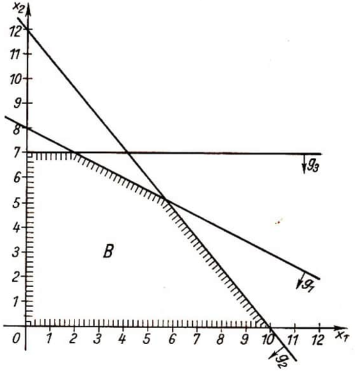


Bild 68

5. Desgl. für

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x_1 + 4x_2 \leqq 24 \\ (2) & x_1 + 2{,}5x_2 \leqq 20 \\ (3) & -2x_1 + 3x_2 \leqq 6 \\ (4) & 2x_1 - x_2 \leqq 10 \\ (5) & x_1 \geqq 0 \\ (6) & x_2 \geqq 0 \end{array}$$

Lösung: Nach Bild 69 umschließen die Geraden, die zu den Ungleichungen (1), (3), (4) sowie (5) und (6) gehören, wieder ein konvexes Polygon, während die Gerade, die die durch (2) bestimmte Halbebene begrenzt, außerhalb verläuft. Infolgedessen hat die Ungleichung (2) keinen Einfluß auf die Begrenzung der Lösungsmenge. Sie steht aber auch nicht im Widerspruch zu den anderen Ungleichungen, da jeder Punkt des konvexen Lösungspolygons auch (2) erfüllt.

Eine Ungleichung eines Systems, die keinen Einfluß auf die Bildung der Lösungsmenge nimmt und die zu den anderen Ungleichungen nicht im Widerspruch steht, heißt *überflüssig*. Man kann sie ohne Änderung der Lösungsmenge aus dem System aussondern.

Bei der technisch-ökonomischen Deutung des angewandten Problems aber vermittelt auch eine überflüssige Ungleichung wertvolle Einblicke. Darauf wird in 3.2.2.2. noch eingegangen.

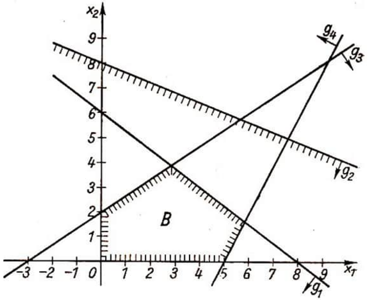


Bild 69

Da es bei mehr als zwei Variablen u. U. schwierig und zeitaufwendig ist, überflüssige Ungleichungen aufzufinden, und da sie andererseits für den Praktiker aussagekräftig sind, sondert man sie im allgemeinen nicht aus. Die Lösungsverfahren der Linearoptimierung erfordern eine solche Aussonderung nicht, sie enthalten im Ergebnis auch für diese Ungleichungen eine entsprechende Aussage.

Zu **Minimierungsproblemen** gehört im Normalfall ein Ungleichungssystem der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{x} &\geqq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{x} &\geqq \mathfrak{o} \end{aligned}} \tag{64}$$

Für ein solches System *kann* der Lösungsbereich *unbeschränkt* sein, wie es für das folgende Ungleichungssystem mit zwei Variablen zutrifft.

$$\begin{aligned}
&(1) & -\tfrac{3}{8}x_1 + x_2 &\geqq 6 \\
&(2) & 3x_1 + 2x_2 &\geqq 15 \\
&(3) & -3x_1 + 2x_2 &\geqq 0 \\
&(4) & x_1 &\geqq 0 \\
&(5) & x_2 &\geqq 0 \;.
\end{aligned}$$

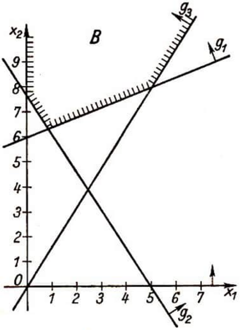


Bild 70

Die graphische Darstellung der einzelnen Halbebenen in Bild 70 zeigt, daß der Lösungsbereich B in Richtung positiver x_1 und x_2 nicht begrenzt ist. Er stellt eine unbeschränkte konvexe Punktmenge dar. Die Ungleichung (5) $x_2 \geqq 0$ erweist sich außerdem als überflüssig.

Es gibt aber auch unter den Problemen der Linearoptimierung solche mit Ungleichungssystemen, die *sowohl* Größer- *als auch* Kleiner-Gleich-Beziehungen enthalten.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{x} &\lesseqgtr \mathfrak{a} \\ \mathfrak{x} &\geqq \mathfrak{o} \end{aligned}} \tag{65}$$

Bei diesen Systemen *kann* es vorkommen, daß die Lösungsmenge *leer* ist. Als Beispiel wird wieder ein Ungleichungssystem in zwei Variablen gewählt.

$$\begin{aligned}
&(1) & x_1 &\leqq 6 \\
&(2) & -x_1 + 3x_2 &\leqq 3 \\
&(3) & -x_1 + x_2 &\geqq 2 \\
&(4) & x_1 &\geqq 0 \\
&(5) & x_2 &\geqq 0.
\end{aligned}$$

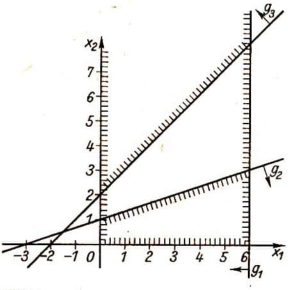


Bild 71

Aus der graphischen Darstellung (Bild 71) ist ersichtlich, daß es keinen Punkt im R_2 gibt, der allen Halbebenen *gleichzeitig* angehört. Die Ungleichungen sind *unverträglich*; ihr Durchschnitt ist leer.
Eine leere Lösungsmenge läßt bei Problemen der Praxis darauf schließen, daß entweder das mathematische Modell nicht richtig aufgestellt wurde oder daß das vorliegende Problem nicht mit den Mitteln der Linearoptimierung gelöst werden kann.

AUFGABEN

Für die folgenden Ungleichungssysteme sind die Lösungsbereiche zu zeichnen. Es ist festzustellen

a) welcher Art die Lösungsmenge ist, b) ob es überflüssige Ungleichungen gibt,
c) ob die Ungleichungen verträglich oder unverträglich sind.

138.
$$\begin{array}{lrl} (1) & x_1 + x_2 & \leqq 55 \\ (2) & 3x_1 + x_2 & \leqq 90 \\ (3) & x_2 & \leqq 45 \\ (4) & x_1 & \geqq 0 \\ (5) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

139.
$$\begin{array}{lrl} (1) & 3x_1 + 4x_2 & \leqq 12 \\ (2) & 5x_1 - 4x_2 & \geqq 40 \\ (3) & x_1 & \geqq 0 \\ (4) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

140.
$$\begin{array}{lrl} (1) & 3x_1 + 4x_2 & \leqq 12 \\ (2) & 5x_1 - 4x_2 & \leqq 40 \\ (3) & x_1 & \geqq 0 \\ (4) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

141.
$$\begin{array}{lrl} (1) & x_1 + 2x_2 & \geqq 80 \\ (2) & 3x_1 + 2x_2 & \geqq 240 \\ (3) & x_1 & \geqq 20 \\ (4) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

142.
$$\begin{array}{lrl} (1) & -x_1 + 2x_2 & \leqq 6 \\ (2) & 2x_1 + 3x_2 & \geqq 24 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geqq 16 \\ (4) & x_1 & \geqq 0 \\ (5) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

143.
$$\begin{array}{lrl} (1) & -x_1 + 2x_2 & \leqq 6 \\ (2) & 2x_1 + 3x_2 & \geqq 24 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \leqq 16 \\ (4) & x_1 & \geqq 0 \\ (5) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

144.
$$\begin{array}{lrl} (1) & -x_1 + 2x_2 & \leqq 6 \\ (2) & 2x_1 + 3x_2 & \geqq 24 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \leqq 16 \\ (4) & -2x_1 + 4x_2 & \geqq 20 \\ (5) & x_1 & \geqq 0 \\ (6) & x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

3.2.2.2. Mathematische Modelle mit zwei Variablen

Die im vorangehenden Abschnitt besprochenen Ungleichungssysteme stellen im mathematischen Modell die einschränkenden Nebenbedingungen für die in der Zielfunktion enthaltenen Entscheidungsvariablen dar.

Das im Normalfall durch die Nebenbedingungen bestimmte konvexe Polyeder enthält die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems. Aus ihr sind diejenigen n-Tupel der Entscheidungsvariablen zu bestimmen[1]), die die Zielfunktion zu einem Maximum (Minimum) werden lassen.

Man nennt deshalb die Punktmenge des konvexen Polyeders den **Bereich der zulässigen Lösungen des Modells**.

Die graphische Lösung des Modells ((1)) aus 3.1.2. (S. 208) erläutert diesen Tatbestand.

Das Modell lautet:

Zielfunktion		$20x_1 + 10x_2 = z \to \max$	((1))
Nebenbedingungen	(11)	$30x_1 + 10x_2 \leqq 3000$	
	(12)	$40x_1 + 30x_2 \leqq 6000$	
	(13)	$10x_1 + 20x_2 \leqq 2000$	
	mit	$x_1, \quad x_2 \geqq 0.$	

Es wird zunächst, 3.2.2.1. entsprechend, das durch die Nebenbedingungen bestimmte Polygon gezeichnet (Bild 72). Dabei ist festzustellen, daß die Punktmenge des Vierecks $P_0P_1P_2P_3$ diejenige ist, die *allen* Ungleichungen genügt. Die Ungleichung (12) mit der Grenzgeraden g_2 ist deshalb eine überflüssige Ungleichung.

Das Maximum der Zielfunktion ist im Bereich des konvexen Polygons zu suchen, das den Bereich B der zulässigen Lösungen umfaßt. Zu diesem gehören sowohl alle inneren Punkte als auch alle Randpunkte.

Die graphische Darstellung der Zielfunktion selbst ergibt bei veränderlichem Parameter z eine parallele Geradenschar in der Ebene. Wenn es einen Punkt P_n gibt, der z zu einem Maximum werden läßt, muß dieser Punkt der Durchschnitt zwischen dem Bereich der zulässigen Lösungen und einer der Geraden sein.

Um einen solchen Punkt zu finden, greift man aus der Schar der Geraden (z_n) eine mit willkürlich gewähltem z heraus[2]). Es ist vielfach üblich und läßt später deutlich die Zusammenhänge mit der analytischen Lösung erkennen, wenn man $z = z_0 = 0$ wählt.

Diese Hilfsgerade ($x_2 = -2x_1$) mit dem Richtungsfaktor -2, die durch den Koordinatenursprung geht, wird in das Diagramm eingezeichnet.

Mit (z_0) ist bereits *eine* zulässige Lösung des Problems gefunden; sie ist durch die Koordinaten des Punktes P_0 gegeben. Es ist $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und damit auch der Wert der Zielfunktion gleich Null.

Diese Lösung entspricht dem „Nullprogramm" der Produktion: Es wird kein Produkt hergestellt, ein Gewinn kann demnach noch nicht erzielt werden; die Maschinen stehen in vollem Umfang zur Verfügung. Nunmehr wird die Gerade (z_0) parallel in Richtung wachsender Achsenabschnitte verschoben, was eine Vergrößerung des z-Wertes bedeutet. In Bild 72 ist eine dieser Parallelen (z_3) eingezeichnet. Der zu (z_3) gehörige Zahlenwert z_3 kann z. B. durch die Koordinaten von $P_3(0;100)$ ermittelt werden. Diese ergeben, eingesetzt in die Zielfunktion, $z_3 = 1000$. Die maximale

[1]) Wenn die Lösung des Problems Varianten (vgl. 3.1.1.) hat, gibt es mehrere n-Tupel, anderenfalls nur ein einziges (vgl. S. 227/228)

[2]) (z_n) mit $n \in N$ wird als Symbol zur Bezeichnung einzelner Geraden der Schar gewählt

Lösung wird aber erst durch *die* Gerade erreicht, die durch P_2 geht, da diese dann Stützgerade mit dem größten x_2-Achsenabschnitt ist. Eine weitere Verschiebung ist nicht möglich; die Gerade würde den Bereich der zulässigen Lösungen verlassen.

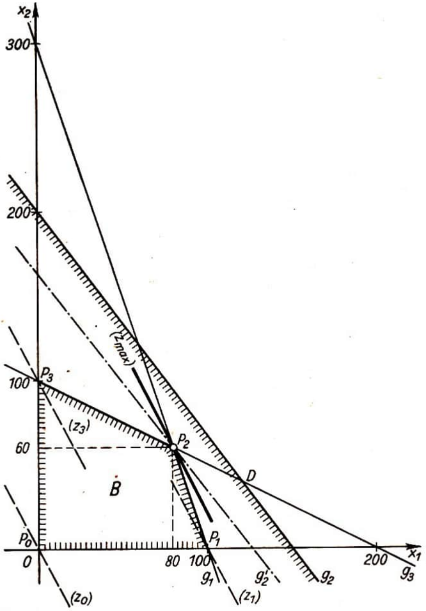


Bild 72

Durch die Koordinaten von P_2 ist die Lösung des Problems[1]) bestimmt:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 80 \\ x_2 &= 60 \end{aligned}}$$

und $z_{\max} = 20 \cdot 80 + 10 \cdot 60,$

$$\underline{\underline{z_{\max} = 2200.}}$$

[1]) Auf eine mengentheoretische Schreibweise der Lösung wird wegen der Besonderheit des Problems (vgl. auch: Analytische Lösung) verzichtet

Das optimale Produktionsprogramm lautet:

Es sind in dem vorgesehenen Zeitraum 80 Produkte A und 60 Produkte B herzustellen, wenn unter den gegebenen Bedingungen ein maximaler Reingewinn erzielt werden soll; dieser beträgt 2200 MDN.
Mit diesem Ergebnis ist die rein mathematische Aufgabe gelöst. Die graphische Darstellung ermöglicht aber ein noch tieferes Eindringen in die gesamte Problematik durch die Deutung der überflüssigen Ungleichung, die zur Grenzgeraden g_2 gehört. Der Zeitfonds der Maschine M_2 nimmt keinen Einfluß auf das Maximalprogramm. Damit ist aber nicht gesagt, daß diese Maschine nicht zum Einsatz käme; sie ist ja zur Herstellung der Produkte unbedingt nötig. Die Gerade g_2 macht jedoch eine Aussage über den Zeitfonds dieser Maschine. Er wird, da g_2 außerhalb des Polygons liegt, auch bei dem Maximalprogramm nicht ausgelastet. Um festzustellen, in welchem Maße diese Maschine bei dem berechneten Programm eingesetzt werden muß, verschiebt man die Gerade bis zum Durchgang durch P_2: (g_2'). Der benötigte Zeitfonds wird geringer. Er läßt sich berechnen, wenn man die Koordinaten von P_2 in die zu (12) gehörende *Gleichung* einsetzt, da es sich nicht um einen beliebigen Punkt der durch die Ungleichung bestimmten Halbebene, sondern speziell um einen Punkt der Geraden handelt. Es ergibt sich aus (12)

$$40 \cdot 80 + 30 \cdot 60 = 5000, \quad \text{d. h.,}$$

die Maschine M_2 wird für das Optimalprogramm nur mit 5000 h beansprucht, während M_1 und M_3 eine volle Auslastung erfahren.

An 3 weiteren einfachen Modellen soll mit 3 Zielfunktionen bei gleichbleibenden Nebenbedingungen gezeigt werden, wie sich eine *Änderung der Zielfunktion* auswirken kann.

Zielfunktion
$$2x_1 + 3x_2 = z \to \max \tag{(4a)}$$
$$2x_1 + x_2 = z \to \max \tag{(4b)}$$
$$3x_1 + 3x_2 = z \to \max \tag{(4c)}$$

Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lrl}
(41) & 2x_1 + 2x_2 & \leqq 24 \\
(42) & -4x_1 + 3x_2 & \leqq 12 \\
(43) & x_1 & \leqq 10 \\
(44) & x_2 & \leqq 7 \\
\text{mit} & x_1, \quad x_2 & \geqq 0
\end{array}$$

Die Bilder 73a, b, c zeigen die Lösungen dieser 3 Modelle. Aus ihnen ist folgendes ersichtlich:

1. Die Nebenbedingungen bilden ein konvexes Polygon; es existiert für jede Zielfunktion ein Maximalwert, der stets auf dem Rande des Polygons liegt.
2. Die Maximallösung wird im allgemeinen in *einem* Eckpunkt angenommen; welcher Eckpunkt in Frage kommt, hängt von den Koeffizienten in der analytischen Darstellung der Zielfunktion ab (Bild 73a u. b).

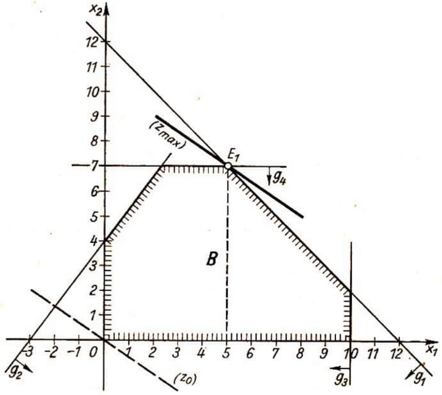


Bild 73 a

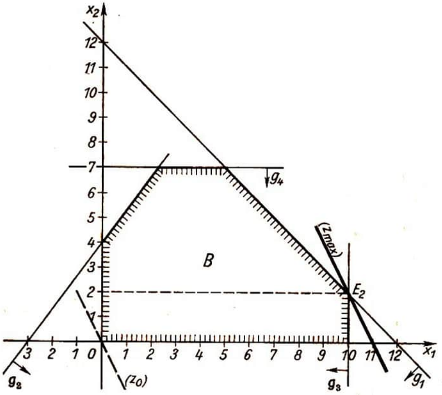


Bild 73 b

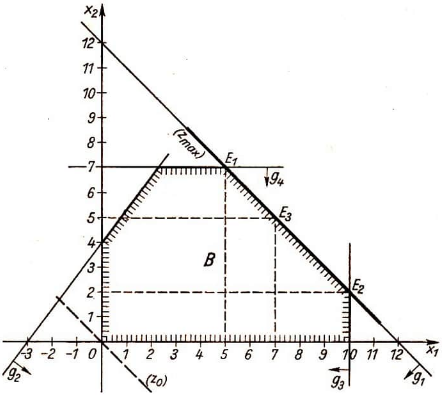


Bild 73c

Hat die zur Zielfunktion gehörige Gerade die gleiche Richtung wie eine das Polygon begrenzende Gerade, so besteht der Durchschnitt zwischen der Maximalgeraden der Zielfunktion und der Menge der zulässigen Lösungen aus der Punktmenge einer Polygonseite, zu der dann *zwei* Eckpunkte gehören.

Die drei Lösungen heißen:

(4a) $\underline{\underline{z_{\max} = 31}}$

(4b) $\underline{\underline{z_{\max} = 22}}$

(4c) $\underline{\underline{z_{\max} = 36}}$

Der Leser überzeuge sich von der Richtigkeit der Zahlenwerte durch Einsetzen der Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte, die den Diagrammen zu entnehmen sind. Für 4c ergibt jeder Punkt der Strecke E_1E_2 (z. B. E_3) denselben Maximalwert.

Die mit Hilfe der einzelnen Modelle im R_2 gewonnenen Erkenntnisse erfahren durch das **Eckenprinzip von** Dantzig ihre Verallgemeinerung für den R_n, die ohne Beweis als Satz gegeben wird.

Eine lineare Funktion mit n Variablen nimmt auf dem durch die Nebenbedingungen bestimmten konvexen Polyeder des n-dimensionalen Raumes ihr Optimum in mindestens einem Eckpunkt an.

Wird das Optimum in mehr als einem Eckpunkt erreicht, so wird es in gleicher Weise in allen *den* Punkten des Polyeders angenommen, die zwischen diesen Eckpunkten liegen. Diese können zu einer Kante oder zu einer begrenzenden Fläche des Polyeders gehören. Die dann vorhandenen unendlich vielen Lösungs-n-tupel für den Optimalwert sind *Varianten* der Lösung.
Um noch weitere Einsichten in die Zusammenhänge zu vermitteln und bestimmte Probleme der analytischen Lösung vorzubereiten, wird als Beispiel einer graphischen Lösung das Modell ((2)) aus 3.1.2. behandelt.

BEISPIEL

1. Zielfunktion $x_1 + x_2 = z \to \max$ ((2))

Nebenbedingungen

(21)	$2x_1 + 16x_2 \leqq 10000$		(m_1)
(22)	$10x_1 + 5x_2 \leqq 10000$		(m_2)
(23)	$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \leqq 300$		(AK)
(24)	$0{,}005x_1 \leqq 3$		(M)
mit	$x_1,\ x_2 \geqq 0$		

Es ist für einen bestimmten Zeitraum das optimale Produktionsprogramm graphisch zu ermitteln.

Lösung: Um ein übersichtliches Diagramm zu erhalten, das eine gute Möglichkeit der Auswertung bietet, ist es zuerst nötig, sich über die Größe der Zeichnung und über den anzuwendenden Maßstab Klarheit zu verschaffen (1.1.3.1.).
Zu diesem Zwecke seien für die Nebenbedingungen die Achsenabschnitte der einzelnen Geraden zusammengestellt.

(21)	$x_{11} = 5000$	$x_{21} = 625$
(22)	$x_{12} = 1000$	$x_{22} = 2000$
(23)	$x_{13} = 1500$	$x_{23} = 750$
(24)	$x_{14} = 600$	

Die Achsenabschnitte x_{11}, x_{13} und x_{22} fallen aus der sonstigen Größenordnung erheblich heraus. Man wählt deshalb für die Zeichnung dieser drei Geraden die Richtungsfaktoren

$$m_1 = -\frac{1}{8}, \quad m_2 = -2 \quad \text{und} \quad m_3 = -\frac{1}{2}.$$

Auf Grund dieser Überlegungen wird das zur Verfügung stehende Blatt eingeteilt und das Lösungspolyeder gezeichnet (Bild 74). Es ist festzustellen, daß das System der Nebenbedingungen wieder eine überflüssige Ungleichung (22) enthält.
Die Gerade der Zielfunktion ist unter 135° geneigt. In diesem Falle ist es zweckmäßiger, die Hilfsgeraden nicht durch den Ursprung gehen zu lassen; es wurde (z') gewählt.

Die Parallelverschiebung von (z') ergibt, daß die Zielfunktion im Eckpunkt P_2 ihr Maximum annimmt.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 600 \\ x_2 &= 450 \end{aligned}}$$

und $\quad z_{\max} = 600 + 450$

$$\underline{\underline{z_{\max} = 1050}}$$

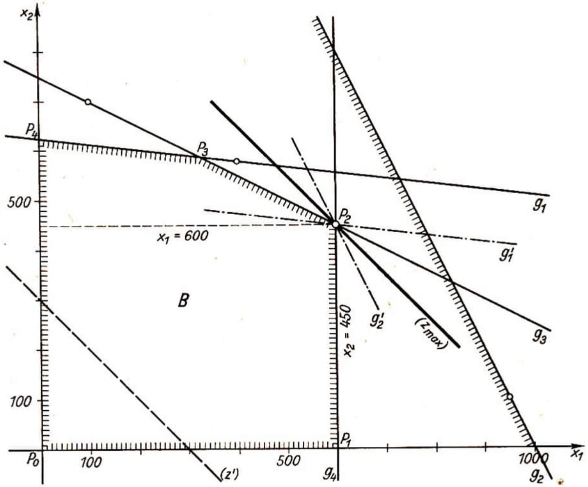


Bild 74

Ergebnis: Das Produktionsprogramm erreicht für den in Betracht gezogenen Zeitraum mit der Herstellung von 600 Produkten A und 450 Produkten B einen maximalen Produktionsausstoß von 1050 Produkten.

Die graphische Darstellung ermittelt aber noch weitere Einsichten, die mit zur Lösung des Gesamtproblems gehören.

a) Die Materialien m_1 und m_2 werden nicht voll ausgelastet.

Die Kennzeichen dafür sind die folgenden:

g_1 ist eine Begrenzungsgerade des Polyeders; die zugehörige Ungleichung ist demnach nicht überflüssig, ihre Grenzgerade verläuft aber oberhalb des Lösungseckpunktes. Dagegen gehört g_2 zur überflüssigen Ungleichung, sie verläuft völlig außerhalb des Bereiches der zulässigen Lösungen.

b) Durch Verschiebung der Geraden g_1 und g_2 durch den Lösungseckpunkt P_2 läßt sich der tatsächliche Materialverbrauch ermitteln.
Die Koordinaten $x_1 = 600$ und $x_2 = 450$ müssen die zu g_1' und g_2' gehörenden Gleichungen erfüllen.

Es ist

$$g_1' \equiv 2x_1 + 16x_2 = a_1 \;\rightarrow\; 2 \cdot 600 + 16 \cdot 450 = \underline{\underline{8400 = a_1}}$$

und

$$g_2' \equiv 10x_1 + 5x_2 = a_2 \;\rightarrow\; 10 \cdot 600 + 5 \cdot 450 = \underline{\underline{8250 = a_2}}.$$

Daraus ergeben sich als Überschuß

von m_1 $\quad 10000\,\text{t} - 8400\,\text{t} = \underline{\underline{1600\,\text{t}}}$ und

von m_2 $\quad 10000\,\text{t} - 8250\,\text{t} = \underline{\underline{1750\,\text{t}}}.$

Dieselben Werte sind auch durch Ablesen der Achsenabschnitte der verschobenen Geraden unter entsprechender Umrechnung zu gewinnen.
c) Aus dem Diagramm ist endlich noch zu erkennen, daß die das Produktionsprogramm beherrschenden Einflußgrößen die Zahl der Arbeitskräfte (g_3) und der Spezialmaschinen (g_4) sind.

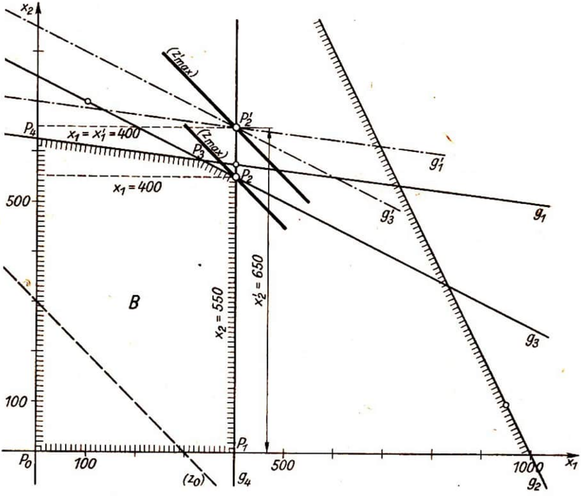


Bild 75

2. Kurz vor dem Anlauf des eben aufgestellten Produktionsprogramms falle für längere Zeit eine der Spezialmaschinen aus. Es ist mit Hilfe des Diagramms zu untersuchen,

a) wieviel Produkte bei unveränderten übrigen Nebenbedingungen hergestellt werden könnten und

b) ob das geplante Programm mit 1050 Produkten durch mögliche Veränderungen in den sonstigen Kapazitäten trotz des Maschinenausfalls aufrechterhalten werden kann.

Lösung zu 2a): Das Modell verändert sich nur in der Nebenbedingung

$$(24) \qquad 0{,}005x_1 \leqq 2$$

Es wird das Diagramm mit dieser Änderung noch einmal gezeichnet (Bild 75). Das Maximum wird jetzt auch im Punkt P_2 erreicht; da dieser aber eine Lageveränderung erfahren hat, ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 400 \\ x_2 &= 550 \\ \underline{\underline{z_{1\max}}} &\underline{\underline{= 950}} \end{aligned}}$$

Ergebnis zu 2a): Der Ausfall der Maschine hat zur Folge, daß vom Produkt A 200 Stück weniger, vom Produkt B dagegen 100 Stück mehr erzeugt werden können; der Produktionsausstoß beträgt 950 Produkte.
Es ist eine Verschiebung der Produktion zugunsten des Produktes B eingetreten.
Aus dem Diagramm ist weiterhin zu ersehen, daß auch bei diesem Programm die Materialien m_1 und m_2 noch nicht voll aufgebraucht werden, obwohl die Relationen jetzt andere als vorher sind.

Lösung zu 2b): Die zu erzeugende Menge der Produkte A ist durch die zum Einsatz kommenden Spezialmaschinen mit $x_1 = 400$ festgelegt.
Sollen wieder 1050 Produkte erzeugt werden, so ist zu untersuchen, ob es möglich ist, von Produkt B 650 Stück herzustellen. Es wird im Diagramm der Punkt P_2' (400; 650) markiert, und es werden die Geraden g_1 und g_3 so verschoben, daß sie durch diesen Punkt gehen. Das bedeutet eine Erhöhung der Materialmenge von m_1 und der Zahl der Arbeitskräfte.

Berechnung dieser Erhöhungen:

$$\begin{aligned} m_1{:} \quad & 2x_1 + 16x_2 = a_1' \\ & 2 \cdot 400 + 16 \cdot 650 = 800 + 10400 \\ & \underline{\underline{a_1' = 11200}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{AK:} \quad & 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 = a_3' \\ & 0{,}2 \cdot 400 + 0{,}4 \cdot 650 = 80 + 260 \\ & \underline{\underline{a_3' = 340}} \end{aligned}$$

Ergebnis zu 2b): Der Ausstoß von 1050 Produkten kann mit 400 Produkten A und 650 Produkten B bei folgenden Maßnahmen gewährleistet werden:

Erhöhung der Menge des Materials m_1 von 10000 t auf 11200 t und Erhöhung der Zahl der Arbeitskräfte von 300 auf 340.

AUFGABE

145. Es ist das mathematische Modell ((5)) graphisch zu lösen.

$$\begin{array}{llrl} \text{Zielfunktion} & & 5x_1 + 3x_2 = z \to \max & \qquad ((5)) \\ \text{Nebenbedingungen} & (51) & x_1 + x_2 \leqq 14 & \\ & (52) & 4x_1 + 9x_2 \leqq 81 & \\ & (53) & x_1 \leqq 11 & \\ & \text{mit} & x_1, \quad x_2 \geqq 0 & \end{array}$$

3.2.3. Die analytische Lösung

3.2.3.1. Vorbetrachtungen

Das graphische Verfahren ist auf Probleme mit zwei Variablen beschränkt. Bei drei Variablen wäre eine graphische Lösung wohl theoretisch noch möglich, bei mehr Variablen dagegen versagt das Verfahren ganz. Deshalb kann für solche Probleme nur eine analytische Methode zum Ziel führen, wie im folgenden dargestellt werden soll.
Da das Eckenprinzip von Dantzig für jedes n-dimensionale Problem gilt, bleiben die für den R_2 im Hinblick auf die graphische Methode erläuterten Grundlagen dieselben.

Es sei noch einmal zusammenfassend wiederholt:

Der Bereich der zulässigen Lösungen wird durch die Nebenbedingungen auf ein n-dimensionales Polyeder beschränkt, auf dessen Rand die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einem Eckpunkt annimmt. *Die Koordinaten dieses Eckpunktes stellen das n-Tupel der Entscheidungsvariablen dar, das die Zielfunktion zu einem Maximum werden läßt.*

Zwischen dem graphischen und dem analytischen Lösungsweg besteht der folgende grundlegende Unterschied:

Bei der graphischen Lösung wird jede der Nebenbedingungen unabhängig von der anderen betrachtet. Durch Verwendung der in der Kleiner-Gleich-Beziehung enthaltenen Gleichung wird Stück für Stück der Rand des zweidimensionalen Polyeders gezeichnet und so vom Rand aus das Gebiet der zulässigen Lösungen ermittelt.
Die analytische Lösung dagegen kann diese Art des schrittweise konstruktiven Vorgehens nicht übernehmen. Es ist im R_n nicht möglich, die von Hyperebenen begrenzten Halbräume, die durch die einzelnen Ungleichungen mit n Variablen dargestellt werden, auch einzeln zu ermitteln und zu dem Lösungspolyeder zusammenzusetzen. Für das analytische Lösungsverfahren, das für alle $n \geqq 2$ anwendbar sein muß, ergeben sich deshalb zwei Forderungen: Die Nebenbedingungen sind als ein geschlossenes System von Ungleichungen zu behandeln, das in seiner Gesamtheit alle Punkte des Lösungspolyeders enthält. Unter diesen Punkten muß derjenige Eckpunkt gefunden werden, dessen Koordinaten den Extremwert der Zielfunktion bestimmen.

Dieser Grundgedanke liegt dem Simplexverfahren zugrunde.

Anmerkung: Ein Simplex ist jedes konvexe Polyeder im R_n, das $n+1$ Ecken besitzt, z. B. im R_2 das Dreieck, im R_3 das Vierflach. Jedes n-dimensionale Polyeder läßt sich in entsprechende Simplexe zerlegen. Das Iterationsverfahren[1]) der Simplexmethode beruht auf dieser Tatsache.

Die Erfüllungsmenge eines Ungleichungssystems ist aber nicht unmittelbar zu berechnen. Dieses System muß erst in ein System von Gleichungen verwandelt werden, was durch Hinzufügen sogenannter **Schlupfvariablen** zu jeder einzelnen Ungleichung geschieht. Diese Schlupfvariablen stellen den Ausgleich zwischen der Kleiner- und der Gleichbeziehung dar.

Gegeben sei das folgende Modell:

$$\begin{array}{lll} \text{Zielfunktion} & & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = z \to \max \qquad ((6)) \\ \text{Nebenbedingungen} & (61) & 2x_1 + 12x_2 + x_3 \leqq 75 \\ & (62) & 28x_1 + 8x_2 \leqq 62 \\ & (63) & 7x_1 + 35x_2 + 6x_3 \leqq 98 \\ & (64) & 10x_2 + 9x_3 \leqq 90 \\ & \text{mit} & x_1, x_2, x_3 \geqq 0 \end{array}$$

Die Nebenbedingungen gehen durch Einführung der Schlupfvariablen w_n in das nachstehende Gleichungssystem über

$$\begin{array}{ll} (61)' & 2x_1 + 12x_2 + x_3 + w_1 = 75 \\ (62)' & 28x_1 + 8x_2 + w_2 = 62 \\ (63)' & 7x_1 + 35x_2 + 6x_3 + w_3 = 98 \\ (64)' & 10x_2 + 9x_3 + w_4 = 90 \end{array}$$

Außerdem bezieht man in dieses Gleichungssystem zur Berechnung des Optimalwertes sofort die Funktionsgleichung der Zielfunktion in der Form

$$(65)' \quad 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 - z = 0$$

mit ein. Es ist damit ein inhomogenes unterbestimmtes Gleichungssystem zu lösen [1], das im Beispielfall 5 Gleichungen mit 8 Variablen, zu denen auch z gehört, enthält.

In der Verallgemeinerung dieses Falles von $n = 3$ Variablen sollen die wichtigsten Grundlagen, auf denen die Durchführung des Simplexverfahrens beruht, zusammengestellt werden.

1. Aus einem System von m Ungleichungen mit n Variablen x_i, $i = 1 \dots n$,

$$\text{I} \quad \begin{array}{ll} (11) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqq a_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqq a_m \end{array}$$

[1]) iterativ (lat.) wiederholend

ergibt sich durch Einführung von m Schlupfvariablen w_k, $k = 1 \dots m$, das System der Gleichungen

$$\text{II} \quad \begin{array}{ll} (21) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + w_1 = a_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (2m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + w_m = a_m \end{array}$$

Dieses ist ein **lineares inhomogenes und unterbestimmtes Gleichungssystem mit m Gleichungen und $n + m$ Variablen.**

Ein solches System hat im allgemeinen unendlich viele Lösungen, die dadurch gefunden werden können, daß man n *beliebige* Variablen als *freie* Variablen wählt. Die übrigen m Variablen lassen sich in Abhängigkeit von ihnen berechnen [1].

2. Neben den Entscheidungsvariablen des Gleichungssystems unterliegen auch die Schlupfvariablen der Nichtnegativitätsbedingung, da sie den Differenzbetrag zwischen beiden Seiten der zum Modell gehörenden Ungleichungen darstellen:

$$x_1, \dots, x_n \geqq 0 \quad \text{und} \quad w_1, \dots, w_m \geqq 0.$$

3. **Eine Lösung des Optimierungsproblems heißt zulässig, wenn für alle Variablen diese Nichtnegativitätsbedingung erfüllt ist.**

Haben in einer zulässigen Lösung die n freien Variablen den Wert Null und sind die übrigen m Variablen alle positiv, so liegt eine **Basislösung** vor.

Die von Null verschiedenen Variablen bilden eine **Basis**, sie heißen **Basisvariablen**, während die übrigen als **Nichtbasisvariablen** bezeichnet werden.

In jeder Basislösung entspricht das n-Tupel der Entscheidungsvariablen einem Eckpunkt des Bereichs der zulässigen Lösungen (vgl. S. 223).

Daraus geht hervor, daß die Zahl der Basislösungen *endlich* ist. Unter ihnen gibt es *mindestens eine*, die den Maximalwert für z liefert (vgl. S. 227), also Optimallösung ist.

4. Zur Berechnung der Optimallösung bezieht man in das Gleichungssystem II (vgl. o.) die Funktionsgleichung der Zielfunktion in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - z = 0$$

mit ein.
Damit hat man ein **Gleichungssystem** von $m + 1$ **Gleichungen** mit $n + m + 1$ **Variablen zu lösen:**

n Entscheidungsvariablen, m Schlupfvariablen, z als variabler Parameter.

Für dieses erweiterte System ist z stets eine Basisvariable, die aber eine gesonderte Stellung einnimmt (vgl. S. 237).

Mit der Einbeziehung der Zielfunktion in das Gleichungssystem wird es möglich, *z gleichzeitig* mit den Variablen einer Basislösung zu berechnen; außerdem kann im Verlaufe der Rechnung sofort erkannt werden, ob das Optimum bereits gefunden ist oder nicht.

Das *Simplexverfahren* geht bei der Berechnung von einer ersten Basislösung, der **Anfangslösung**, aus und ermittelt schrittweise die Optimallösung. Es gehört daher zu den *Iterationsverfahren.*

Die Iterationsschritte sind Transformationen[1]) des aus dem gegebenen Modell entwickelten Gleichungssystems, die, geometrisch gedeutet, von Eckpunkt zu Eckpunkt des Lösungspolyeders führen. Dabei enthält das Verfahren die Möglichkeit in sich, Eckpunkte zu „überspringen", was eine „automatische" Verminderung der Anzahl der Iterationsschritte bedeutet.

3.2.3.2. Die Simplextransformationen

An dem Modell ((1)) soll das Simplexverfahren auf der Grundlage der linearen Algebra entwickelt werden. Es wird absichtlich auf das einfache Beispiel mit zwei Variablen zurückgegriffen, um die Durchsichtigkeit der Darstellung zu gewährleisten und um den Vergleich mit der graphischen Lösung (vgl. 3.2.2.2.) zu ermöglichen. Das Verfahren läßt sich dann ohne weiteres auf jede Anzahl von Variablen übertragen.

Anmerkung: Die Gleichungssysteme, die in den folgenden Ausführungen auftreten, sind zum Zwecke der Entwicklung des Rechenschemas auf der beiliegenden Übersichtstafel (Beilage 2) geordnet zusammengestellt. Es ist ratsam, beim Studium dieses Abschnittes diese Tafel mit hinzuzuziehen.

Das auf Seite 223…225 graphisch gelöste Modell ((1)) lautet:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Zielfunktion} & 20x_1 + 10x_2 = z \to \max & \qquad ((1)) \\
\text{Nebenbedingungen (11)} & 30x_1 + 10x_2 \leqq 3000 & \\
\text{(12)} & 40x_1 + 30x_2 \leqq 6000 & \\
\text{(13)} & 10x_1 + 20x_2 \leqq 2000 & \\
\text{mit} & x_1, \quad x_2 \geqq 0 &
\end{array}
$$

Bestimmung der Anfangslösung

Durch Einführung der Schlupfvariablen in die Nebenbedingungen und durch Umstellung der Gleichung der Zielfunktion entsteht das Gleichungssystem I.

$$
\text{I} \quad
\begin{array}{llr}
(11) & 30x_1 + 10x_2 + w_1 & = 3000 \\
(12) & 40x_1 + 30x_2 \qquad + w_2 & = 6000 \\
(13) & 10x_1 + 20x_2 \qquad\qquad + w_3 & = 2000 \\
(14) & 20x_1 + 10x_2 \qquad\qquad\qquad - z & = 0 \\
\text{mit} & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, z \geqq 0 &
\end{array}
$$

[1]) Transformation (lat.) Umformung; hier Umformung eines Gleichungssystems in ein anderes

Es liegen 4 Gleichungen mit 6 Variablen vor, so daß 2 Variablen als Nichtbasisvariablen mit dem Wert Null zu belegen sind.

Für die Anfangslösung (1. Basislösung) wählt man stets die Entscheidungsvariablen als Nichtbasisvariablen.

Das System I enthält dann in jeder Gleichung nur *eine* Basisvariable (alle w_k sowie z), deren Werte sofort ablesbar sind. Löst man das System nach den Basisvariablen auf, so erhält man die **Basisdarstellung** der Anfangslösung:

$$w_1 = 3000 - 30x_1 - 10x_2 \tag{11}$$

$$w_2 = 6000 - 40x_1 - 30x_2 \tag{12}$$

$$w_3 = 2000 - 10x_1 - 20x_2 \tag{13}$$

$$-z = 0 - 20x_1 - 10x_2 \tag{14}$$

Diese Basisdarstellung zeigt die Abhängigkeit der Basisvariablen von den Nichtbasisvariablen. Da die letzteren in unserem Falle gleich Null sind, erhält man die folgende

Anfangslösung:

Nichtbasisvariable	Basisvariable
$x_1 = 0$	$w_1 = 3000$
$x_2 = 0$	$w_2 = 6000$
	$w_3 = 2000$
	$z = 0$

Diese Lösung entspricht derjenigen, die man im graphischen Verfahren durch die Wahl der ersten Zielgeraden (z_0), die durch $P_0(0;0)$ hindurchgeht, erhält. Die in ihr enthaltenen Werte der Entscheidungsvariablen sind also die Koordinaten eines Eckpunktes des Lösungspolyeders; die *Anfangslösung ist eine Ecklösung.*
Diese ermöglicht auch sofort eine Deutung des Produktionsprogramms. Es wird kein Erzeugnis produziert (Nullprogramm); der Reingewinn z ist demzufolge gleich Null. Die Schlupfvariablen geben genau die einzelnen Maschinenzeitfonds an, die noch in voller Höhe zur Verfügung stehen. Die Schlupfvariablen sind also nicht nur notwendige Zusatzvariablen, sondern sie haben eine wichtige Bedeutung, die aus den folgenden Umrechnungen noch klarer werden wird.
Eine *Verbesserung der Anfangslösung* kann nur erfolgen, wenn eine Entscheidungsvariable zur Basisvariablen wird. Das kann aber allein durch den Austausch mit einer der Basisvariablen in der Anfangslösung geschehen: $x_i \leftrightarrow w_k$.
Eine Transformation des Gleichungssystems I in ein System II hat das Ziel, wieder Gleichungen zu bekommen, die jeweils nur *eine* der neuen Basisvariablen enthalten. Dann ist erneut eine Basisdarstellung möglich, aus der sich die verbesserte Lösung sofort entnehmen läßt.

Vorbereitung der 1. Transformation

Zur *Bestimmung der Austauschvariablen* sind zwei Überlegungen nötig:

1. Die Gleichung der Zielfunktion $20x_1 + 10x_2 = z$ läßt erkennen, daß z in größerem Maße von x_1 als von x_2 bestimmt wird (Vergleich der Koeffizienten). Es ist deshalb im allgemeinen üblich, die Variable mit größtem positivem Koeffizienten in dieser Funktionsgleichung (hier x_1) als neue Basisvariable zu wählen.
2. Nach dieser Feststellung ist zu ermitteln, gegen welches w_k die Variable x_1 ausgetauscht werden kann.
   Dazu bildet man die Quotienten q aus dem Absolutglied der Gleichungen (11) ... (13) und aus den entsprechenden Koeffizienten der neuen Basisvariablen x_1. Das ergibt für

$$(11)\quad q_1 = 3000 : 30 = 100 = q_{\min}$$

$$(12)\quad q_2 = 6000 : 40 = 150$$

$$(13)\quad q_3 = 2000 : 10 = 200$$

Für (14) entfällt die Quotientenbildung, da diese Gleichung die Variable z enthält, die *nie* aus der Basis eliminiert wird.

Satz:

Der *kleinste nichtnegative* Quotient gibt jeweils an, gegen welche Basisvariable auszutauschen ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes, der allgemein nicht bewiesen werden soll, ist auf Grund der folgenden Überlegungen einzusehen: Man wähle w_2 als Austauschvariable für x_1; damit sind x_2 und w_2 die neuen Nichtbasisvariablen mit dem Wert Null. Sie treten beide in der Gleichung (12) auf; aus dieser Gleichung erhält man demnach

$$(12)\quad x_1 = 6000 : 40 = 150 \qquad \text{und mit diesem Wert aus}$$

$$(11)\quad 30 \cdot 150 + w_1 = 3000; \qquad w_1 = -1500$$

Dieses Ergebnis widerspricht der Nichtnegativitätsbedingung für die Schlupfvariablen (vgl. S. 234), so daß w_2 nicht Austauschvariable sein kann. Für w_3 als Austauschvariable würden die beiden anderen Schlupfvariablen negativ, so daß nur die zu $q_{\min}$ gehörende Schlupfvariable aus der Gleichung (11) für den ersten Austausch in Frage kommt: $x_1 \leftrightarrow w_1$. Die nachfolgende Transformation bestätigt, daß in diesem Falle die Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt werden. *Negative Quotienten* können ebenfalls, wie spätere Beispiele zeigen, vorkommen. Sie sind jedoch nicht für das Austauschkriterium verwendbar, da sonst auch die Bedingung, daß alle Variablen nichtnegativ sein müssen, verletzt würde.

1. Transformation des Gleichungssystems

Da die beiden Variablen x_1 und w_1 in (11) enthalten sind, wird diese Gleichung nach der neuen Basisvariablen x_1 aufgelöst; den für x_1 erhaltenen Term setzt man in die anderen Gleichungen ein und eliminiert damit x_1 aus diesen Gleichungen.

$$\text{II}' \quad \begin{aligned}
&(21)' \quad x_1 = 100 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1\\
&(22)' \quad 40\left(100 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1\right) + 30x_2 + w_2 = 6000 \quad \text{oder}\\
&\qquad x_2\left(30 - 40\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 40\cdot\frac{1}{30}\right) + w_2 = 6000 - 40\cdot 100\\
&(23)' \quad 10\left(100 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1\right) + 20x_2 + w_3 = 2000 \quad \text{oder}\\
&\qquad x_2\left(20 - 10\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 10\cdot\frac{1}{30}\right) + w_3 = 2000 - 10\cdot 100\\
&(24)' \quad 20\left(100 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1\right) + 10x_2 - z = 0 \quad \text{oder}\\
&\qquad x_2\left(10 - 20\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 20\cdot\frac{1}{30}\right) - z = 0 - 20\cdot 100
\end{aligned}$$

Nach Berechnung der Klammerinhalte erhält man das neue Gleichungssystem:

$$\text{II} \quad \begin{array}{llcr}
(21) & x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{30}w_1 & = & 100\\[4pt]
(22) & \frac{50}{3}x_2 - \frac{4}{3}w_1 + w_2 & = & 2000\\[4pt]
(23) & \frac{50}{3}x_2 - \frac{1}{3}w_1 \qquad + w_3 & = & 1000\\[4pt]
(24) & \frac{10}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 \qquad\qquad - z & = & -2000
\end{array}$$

Da wieder nur je eine Basisvariable in jeder der Gleichungen enthalten ist, findet man durch Umstellung die *Basisdarstellung* des vorangehenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcl}
(21) & x_1 & = & 100 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1\\[4pt]
(22) & w_2 & = & 2000 - \frac{50}{3}x_2 + \frac{4}{3}w_1\\[4pt]
(23) & w_3 & = & 1000 - \frac{50}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1\\[4pt]
(24) & -z & = & -2000 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{2}{3}w_1
\end{array}$$

Daraus folgt als

1. verbesserte Lösung

Nichtbasisvariable		Basisvariable
$x_2 = 0$		$x_1 = 100$
$w_1 = 0$		$w_2 = 2000$
		$w_3 = 1000$
	und	$z = 2000$

Diese sagt aus, daß die alleinige Herstellung des Produktes A mit $x_1 = 100$ Stück einen Reingewinn von 2000 MDN ergibt.

Die *Belegungen der Schlupfvariablen* geben die unausgenutzte Arbeitszeit der Maschinen an. Diese ist für die Maschine M_1 gleich Null (volle Auslastung), während sie für M_2 noch 2000 h und für M_3 noch 1000 h beträgt.

Die *Belegungen der Entscheidungsvariablen* entsprechen geometrisch den Koordinaten des Eckpunktes $P_1(100;0)$, durch den die Zielgerade (z_1) hindurchgeht (vgl. Bild 72). Es handelt sich also wieder um eine Ecklösung des Ausgangsmodells. Die Lagen der Geraden g_2 und g_3 zu (z_1) bestätigen die Tatsache, daß bei dieser Lösung die Zeitfonds w_2 und w_3 nicht aufgebraucht werden.

Die Aufnahme von x_2 an Stelle von x_1 in die Basis hätte eine Ecklösung für den Punkt P_3 (0;100) als erste verbesserte Lösung ergeben; allerdings, wie das Diagramm zeigt, mit $z < 2000$. Da die Gerade (z_1) noch keine Stützgerade ist (vgl. S. 216), kann die vorliegende Lösung nicht Optimallösung sein. Es muß eine weitere Verbesserung geben.

Vorbereitung der 2. Transformation

Die Gleichung (24) in der Form

$$z = \frac{10}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 + 2000$$

sagt aus, daß z nur für $x_2 > 0$ zunehmen kann, dagegen für $w_1 > 0$ abnehmen würde. Folglich ist x_2 als neue Basisvariable zu wählen. *Das analytische Kennzeichen der möglichen Verbesserung besteht also darin, daß die Gleichung der Zielfunktion noch positive Koeffizienten enthält.*

Wie bei der ersten Verbesserung werden die Quotienten aus den Absolutgliedern von II und den Koeffizienten von x_2 gebildet:

$$(21)\quad q_1 = 100 : \frac{1}{3} = 300$$

$$(22)\quad q_2 = 2000 : \frac{50}{3} = 120$$

$$(23)\quad q_3 = 1000 : \frac{50}{3} = 60 = q_{\min}$$

(24) entfällt

Auf Grund der Bedingung $w_k \geqq 0$ muß jetzt x_2 gegen w_3 ausgetauscht werden.

2. Transformation des Gleichungssystems

Man löst (23) nach der neuen Basisvariablen x_2 auf und setzt den erhaltenen Term in die weiteren Gleichungen ein. Bei sofortigem Zusammenfassen der Variablen ergibt sich

$$\text{III}'\quad\begin{array}{lllcl}
(33)' & x_2 = \frac{1}{50}w_1 - \frac{3}{50}w_3 + 60 & & & \\
(31)' & x_1 + w_1\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{50}\right) & & = & 100 - \frac{1}{3}\cdot 60 \\
(32)' & w_1\left(-\frac{4}{3}+\frac{50}{3}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0-\frac{50}{3}\cdot\frac{3}{50}\right) + w_2 & & = & 2000 - \frac{50}{3}\cdot 60 \\
(34)' & w_1\left(-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0-\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{50}\right) - z & & = & -2000 - \frac{10}{3}\cdot 60
\end{array}$$

Nach Berechnung der Klammerinhalte geht III′ in das neue Gleichungssystem III über:

$$\text{III}\quad\begin{array}{llcl}
(31) & x_1 + \frac{2}{50}w_1 - \frac{1}{50}w_3 & = & 80 \\
(32) & -w_1 + w_2 - w_3 & = & 1000 \\
(33) & +x_2 - \frac{1}{50}w_1 + \frac{3}{50}w_3 & = & 60 \\
(34) & -\frac{3}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_3 - z & = & -2200
\end{array}$$

Ohne daß man erst in die Basisdarstellung umformt, kann aus III die **2. verbesserte Lösung** sofort abgelesen werden:

Nichtbasisvariable		Basisvariable
$w_1 = 0$		$x_1 = 80$
$w_3 = 0$		$w_2 = 1000$
		$x_2 = 60$
	und	$z = 2200$

Die jetzige Basislösung enthält eine neue Ecklösung. Die Zielgerade geht durch den Punkt $P_2(80;60)$. Sie hat, wie Bild 72 zu entnehmen ist, mit dem Bereich der zulässigen Lösungen nur noch diesen Eckpunkt gemeinsam, ist also Stützgerade. Es handelt sich deshalb bei der 2. Verbesserung bereits um die *Optimallösung*. Die in der Basis enthaltene Schlupfvariable w_2 gibt an, daß nunmehr allein M_2 nicht voll ausgelastet ist. Die Gleichung (12) des Ausgangssystems ist demnach, wie schon von der graphischen Darstellung her bekannt, eine überflüssige Gleichung. Ihre Einbeziehung in die Rechnung nimmt keinen Einfluß auf den Maximalwert, läßt aber

sofort durch die genaue Zahlangabe über die Nichtauslastung einer Maschine einen Einblick in das Produktionsgeschehen zu.
Die Tatsache, daß es sich bei der 2. verbesserten Lösung um die Optimallösung handelt, ist analytisch aus der z-Zeile des Systems III zu erkennen. Die Gleichung (34) wird nach z aufgelöst:

$$(34) \quad z = -\frac{3}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_3 + 2200.$$

Die Variablen w_1 und w_3 sind Nichtbasisvariablen mit dem Wert Null. Eine weitere Transformation des Gleichungssystems III würde $w_1 > 0$ oder $w_3 > 0$ ergeben und damit nach (34) den Wert von z nur verkleinern (negative Werte für die Variablen sind nicht zulässig). Es bestätigt sich also, daß der für z gefundene Wert der Maximalwert ist.
Die analytische Lösung (Ecklösung) des Modells ((1)) stimmt mit der graphischen überein:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 80 \\ x_2 &= 60 \\ z_{\max} &= 2200 \end{aligned}}$$

mit einem freien Maschinenzeitfonds von 1000 h für die Maschine M_2.

3.2.3.3. Der Simplexalgorithmus

Bei der Transformation der Gleichungssysteme ist festzustellen, daß sich gewisse Rechenvorgänge mehrfach wiederholen. Es liegt also der Bestimmung der Optimallösung mit Hilfe der Simplextransformationen ein bestimmter Algorithmus zugrunde. An Hand der Übersicht über die Transformationen nach Beilage 2 sollen die einzelnen Schritte des Simplexalgorithmus erarbeitet werden.

Vorbereitung für den Übergang zu einem neuen Gleichungssystem

1. Regel:

Die z-Zeile gibt mit einem ihrer *positiven* Koeffizienten die Nichtbasisvariable an, die nun in die Basis übernommen werden soll.

Anmerkung: Bei positiven Koeffizienten mit voneinander verschiedenen Werten wählt man im allgemeinen den größeren.

Nach Beilage 2:

$$(14) \to x_1; \qquad (24) \to x_2.$$

Die Spalte der neuen Basisvariablen heißt **Schlüsselspalte**. Nach Beilage 2:

System I → 1. Spalte; System II → 2. Spalte

2. Regel:

Es werden für die einzelnen Gleichungen die Quotienten aus dem Absolutglied und dem jeweiligen Koeffizienten der Schlüsselspalte gebildet. Die Gleichung mit $q_{\min} > 0$ enthält die Basisvariable, die nunmehr Nichtbasisvariable werden muß.

Nach Beilage 2:

$$(11) \to w_1 \qquad \text{und} \qquad (23) \to w_3.$$

Die Zeile dieser Gleichung nennt man **Schlüsselzeile.**
Im *Kreuzungspunkt* von *Schlüsselspalte* und *Schlüsselzeile* steht der Koeffizient der *neuen Basisvariablen*, der **Hauptelement**[1]) genannt wird[2]).

Nach Beilage 2:

$$\text{System I}: \quad \text{1. Spalte und 1. Zeile} \to 30$$

$$\text{System II}: \quad \text{2. Spalte und 3. Zeile} \to \frac{50}{3}$$

Umrechnungsregeln für das Aufstellen des neuen Gleichungssystems

3. Regel:

Die Schlüsselzeile wird als erste umgerechnet, indem man alle ihre Elemente durch das Hauptelement teilt.

Nach Beilage 2:

$$(11) : 30 \to (21) \qquad \text{und} \qquad (23) : \frac{50}{3} \to (33)$$

Die übrigen Zeilen werden nach folgender Regel elementweise umgerechnet:

4. Regel:

Koeffizient der neuen Zeile
ist gleich
Koeffizient der ursprünglichen Zeile
minus
Produkt aus
Koeffizient der Schlüsselspalte und
jeweils entsprechendem Koeffizienten
der **umgerechneten** Schlüsselzeile.

Nach Beilage 2:

$$(22) \to (12) - 40 \cdot (21) \qquad \text{oder} \qquad (23) \to (13) - 10 \cdot (21) \qquad \text{usw.}$$

---

1) auch Pivot-Element; pivot (franz.) Zapfen, Angel
2) Diese Bezeichnung „Element" bezieht sich bereits auf die Berechnung mittels der Simplextabelle, die die Matrix der Koeffizienten enthält

Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis in der *z-Zeile keine positiven Koeffizienten* mehr enthalten sind.
Nach Beilage 2: (34) → optimal

Die Simplextabelle

Zur Verkürzung des Verfahrens rechnet man, den entwickelten Regeln entsprechend, in einer Tabelle, der *Simplextabelle*, in die nur die Koeffizienten und die Absolutglieder der Gleichungssysteme aufgenommen werden.

Tabelle 4

Nummer der Gleichg.	Basis-variable	Rechen-vorschrift	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_m	q
(11)	w_1		30	10	1	0	0	3000	100 ← *Sz*
(12)	w_2		40	30	0	1	0	6000	150
(13)	w_3		10	20	0	0	1	2000	200
(14)	$-z$		20	10	0	0	0	0	—
			↑ *Ss*						

Für das vorangehend berechnete Beispiel ergeben sich drei Tabellen (Tab. 4 bis 6), die die Gleichungssysteme I bis III enthalten. Der Aufbau der Tabelle 4 (Gleichungssystem I) sei spaltenweise erläutert:

1. Spalte: Die Gleichungen werden mit Doppelziffern numeriert; die erste Ziffer gibt die Nummer *der Tabelle innerhalb der Rechnung* an, die zweite Ziffer die Nummer *der Zeile*.

2. Spalte: Die Basisvariablen der Anfangslösung, die nach dem Gleichungssystem I bestimmt wurden, erscheinen jeweils in der Zeile der Gleichung, in der sie auftreten.

3. Spalte: Die Rechenvorschrift wird erst von der zweiten Tabelle an eingetragen.

4. bis 8. Spalte: Diese Spalten enthalten die Koeffizientenmatrix des ersten Gleichungssystems. Dabei ist zu beachten, daß in jeder Zeile (Gleichung) die Koeffizienten für *alle* vorkommenden Variablen aufgenommen werden, und zwar in der Reihenfolge: Entscheidungsvariable — Schlupfvariable; z allerdings steht nur in der Basis der letzten Zeile (Zielfunktion), da es stets Basisvariable ist und nie ausgetauscht wird.

9. Spalte: An die Koeffizientenmatrix schließt sich der Vektor der Absolutglieder an.

10. Spalte: Diese ist den Quotienten aus den Absolutgliedern und den Koeffizienten der Schlüsselspalte vorbehalten und bleibt zunächst unausgefüllt.

Die Anfangslösung, die aus dem System I gewonnen worden war, ist auch der Tabelle 4 zu entnehmen. Der *Zahlenwert der einzelnen Basisvariablen* steht jeweils in der Spalte der *Absolutglieder*. Die außer den Basisvariablen im *Kopf der Tabelle* stehenden Variablen sind Nichtbasisvariablen mit dem Wert Null.

Es sind also für die Anfangslösung die

Nichtbasisvariablen	und die Basisvariablen
$x_1 = 0$	$w_1 = 3000$
$x_2 = 0$	$w_2 = 6000$
	$w_3 = 2000$
	und $z = 0$

Nach Ermittlung der Schlüsselspalte und der Schlüsselzeile in Tabelle 4 wird die zweite Tabelle (Tab. 5) erarbeitet. Das erfolgt genau nach den gegebenen Regeln (S. 241 und 242).

Tabelle 5

Nummer der Gleichg.	Basis-variable	Rechen-vorschrift	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_m	q
(21)	x_1	$\boxed{(11):30 \rightarrow (21)}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	0	0	100	300
(22)	w_2	(12)—40·(21)	0	$\frac{50}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	2000	120
(23)	w_3	(13)—10·(21)	0	$\boxed{\frac{50}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1000	60 ← *Sz*
(24)	$-z$	(14)—20·(21)	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	—2000	—
				↑ *Ss*					

Die *Reihenfolge* für das Aufstellen der neuen Tabelle sei im folgenden kurz zusammengestellt:

— Numerierung
— Eintragung der Basis *mit der neuen Basisvariablen*
— Eintragung der Rechenvorschrift, beginnend mit der Vorschrift für die Umrechnung der Schlüsselzeile (in der Tabelle besonders gekennzeichnet).
Diese Rechenvorschrift, geltend für jedes einzelne Element der jeweiligen Zeile, umfaßt in Kurzform die 3. und 4. Umrechnungsregel.
— eigentliche Rechnung entsprechend der Vorschrift, auch wieder mit der Umrechnung der Schlüsselzeile beginnend.

Die Arbeitsteilung: *Eintragen der Rechenvorschrift — Rechnen nach dieser Vorschrift* macht die Umrechnung übersichtlicher und sollte immer erfolgen. Wird eine nochmalige Überprüfung der Rechnung nötig, so wird diese durch die notierte Rechenvorschrift wesentlich erleichtert.

Für alle weiteren Tabellen, die bis zur Optimallösung erforderlich sind, gilt dieselbe Reihenfolge der Erarbeitung.
Aus Tabelle 5 ist die

1. verbesserte Lösung

abzulesen (Basisvariable → Absolutglied)

Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
$x_1 = 100$	$x_2 = 0$
$w_2 = 2000$	$w_1 = 0$
$w_3 = 1000$	
und $z = 2000$	

Da in der z-Zeile noch ein positiver Koeffizient enthalten ist, wiederholt sich der Algorithmus und führt zur nächsten Tabelle (Tab. 6).

Tabelle 6

Nummer der Gleichg.	Basis-variable	Rechen-vorschrift	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_m	q
(31)	x_1	$(21)-\frac{1}{3}\cdot(33)$	1	0	$\frac{2}{50}$	0	$-\frac{1}{50}$	80	—
(32)	w_2	$(22)-\frac{50}{3}\cdot(33)$	0	0	-1	1	-1	1000	—
(33)	x_2	$\boxed{(23):\frac{50}{3}\rightarrow(33)}$	0	1	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{3}{50}$	60	—
(34)	$-z$	$(24)-\frac{10}{3}\cdot(33)$	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	-2200	—

In der z-Zeile der Tabelle 6 stehen für die Nichtbasisvariablen nur noch negative Koeffizienten, deshalb ist die *zweite verbesserte Lösung*, die aus dieser Tabelle abzulesen ist, zugleich die **Optimallösung**.

Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
$x_1 = 80$	$w_1 = 0$
$w_2 = 1000$	$w_3 = 0$
$x_2 = 60$	
und $z = 2200$	

Die Schlußfolgerungen, die aus dieser Optimallösung zu ziehen sind, wurden bereits im Anschluß an die graphische Lösung (S. 225) dargelegt.
In Tabelle 7 sind die drei Tabellen für dieses Beispiel so zusammengefaßt, wie sie bei der fortlaufenden Rechnung geschrieben werden.

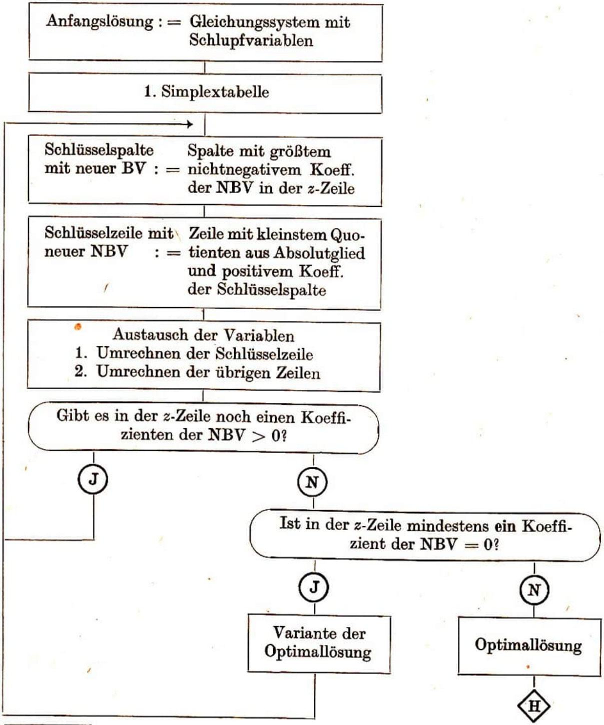
Tabelle 7: Simplextabelle zu Modell ((1))

Nummer der Gleichung	Basis	Rechenvorschrift	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_k	q		S $\left(x_i + w_k + \frac{a_k}{100}\right)$	D
(11)	w_1		$\boxed{30}$	10	1	0	0	3000	← 100 →	$q_{\min}$	71	
(12)	w_2		40	30	0	1	0	6000	150		131	
(13)	w_3		10	20	0	0	1	2000	200		51	
(14)	$-z$		20	10	0	0	0	0	—		30	
(21)	x_1	$\boxed{(11):30 \to (21)}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	0	0	100	300		$\frac{71}{30}$	0
(22)	w_2	$(12) - 40 \cdot (21)$	0	$\frac{50}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	2000	120		$\frac{109}{3}$	0
(23)	w_3	$(13) - 10 \cdot (21)$	0	$\boxed{\frac{50}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1000	← 60 →	$q_{\min}$	$\frac{82}{3}$	0
(24)	$-z$	$(14) - 20 \cdot (21)$	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	-2000	—		$-\frac{52}{3}$	0
(31)	x_1	$(21) - \frac{1}{3} \cdot (33)$	1	0	$\frac{2}{50}$	0	$-\frac{1}{50}$	80			$\frac{91}{50}$	0
(32)	w_2	$(22) - \frac{50}{3} \cdot (33)$	0	0	-1	1	-1	1000			9,0	0
(33)	x_2	$\boxed{(23):\frac{50}{3} \to (33)}$	0	1	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{3}{50}$	60			$\frac{82}{50}$	0
(34)	$-z$	$(24) - \frac{10}{3} \cdot (33)$	0	0	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	-2200			$-\frac{114}{3}$	

Anschließend ist, unter Einbeziehung der Variantenberechnung (3.2.3.4., 1. Sonderfall), ein Ablaufschema für den Simplexalgorithmus aufgestellt.

Anmerkung: Es wurde als Abkürzung für Basisvariable BV und für Nichtbasisvariable NBV benutzt.

Ablaufschema[1]) für den Simplexalgorithmus



[1]) Erklärung der Symbole und Kästchenformen in 5.3.6.

Rechenkontrollen

Während der Berechnung einer Simplextabelle und nach ihrer Fertigstellung ist es möglich, die Rechnung zu kontrollieren, so daß sich Rechenfehler immer wieder beseitigen lassen.
Bei dem in den vorangehenden Darlegungen beschriebenen Aufbau der Simplextabelle sind die folgenden Kontrollen anwendbar:

1. Mit der **Zeilensummenprobe** (vgl. Matrizenmultiplikation) wird die *laufende Rechnung* überprüft. Die Simplextabelle wird um zwei Spalten erweitert (vgl. Tab. 7).
   Die S-Spalte der Ausgangstabelle enthält die Summe der Koeffizienten und des Absolutgliedes der jeweiligen Zeile.
   Die Rechenvorschriften der nächsten Tabellen werden entsprechend auch auf die S-Spalte angewendet.
   Die Rechenkontrolle für alle Tabellen muß dann ergeben, daß *die Summe der Zeilenelemente* (Koeffizienten und Absolutglied) *jeder Zeile vermindert um das zur Zeile gehörende Element der S-Spalte gleich Null ist.* Dieses Ergebnis wird in die D-Spalte (Differenzspalte) eingetragen. Wird mit Dezimalzahlen gerechnet, was in der Praxis meist der Fall ist (Tischrechenmaschinen!), so kann die Kontrolle natürlich kleine Abrundungsfehler enthalten.

   Mit dieser Kontrolle ist es möglich, die Rechnung einer jeden Zeile zu kontrollieren, ehe man zur nächsten übergeht.

Anmerkung: Sind die Absolutglieder wesentlich größer als die Koeffizienten, so kann man zum Ausgleich auch einen um eine Zehnerpotenz verkleinerten Wert addieren. In Tabelle 7 wurde stets mit $a_k/100$ gerechnet. Die Kontrollmöglichkeit wird davon nicht beeinflußt.

Ebenfalls zur Kontrolle können die beiden nächsten Tatsachen benutzt werden:

2.1. In der z-Zeile einer jeden Tabelle haben die Koeffizienten der Basisvariablen bei richtiger Rechnung stets den Wert Null.

2.2. Die Spalten der Basisvariablen ergeben *ohne* die Koeffizienten der z-Zeile stets eine *Einheitsmatrix*, wenn sie in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, die der Zeile der Basisvariablen entspricht.

Diese Tatsache folgt aus den Simplextransformationen, deren Ziel es ist, stets nur *eine* Basisvariable in einer Gleichung zu haben.[1])

In Tabelle 7 z. B. ist die Reihenfolge der Basisvariablen x_1, w_2, x_2. Die zugehörigen Spaltenvektoren bilden die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_{(3,3)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Endlich kann man auch noch die Werte der Entscheidungsvariablen, die sich für die Optimallösung ergeben haben, in das Modell einsetzen und so die Übereinstimmung mit dem berechneten Optimalwert für z und mit den aus den Belegungen der Schlupfvariablen sich ergebenden Aussagen feststellen.

---

[1]) Bei ausreichender Übung kann dieses benutzt werden, um die Simplextabelle zu verkleinern (vgl. [29])

Für das berechnete Modell findet man für die

$$\text{Zielfunktion} \qquad 20 \cdot 80 + 10 \cdot 60 = 1600 + 600$$
$$z_{max} = 2200$$

und für die

$$\begin{aligned} \text{Nebenbedingungen (11)} \quad & 30 \cdot 80 + 10 \cdot 60 && = 3000 \rightarrow w_1 = 0 \\ (12) \quad & 40 \cdot 80 + 30 \cdot 60 = 5000 < 6000 && \rightarrow w_2 = 1000 \\ (13) \quad & 10 \cdot 80 + 20 \cdot 60 && = 2000 \rightarrow w_3 = 0 \end{aligned}$$

BEISPIEL

Ein Betrieb hat die Möglichkeit, kurzfristig aus Abfallstoffen drei Produkte P_1, P_2, P_3 zusätzlich zu erzeugen, deren Reingewinn je Einheit der Produkte 10 MDN, 6 MDN und 4 MDN beträgt.
Es ist zu untersuchen, in welcher Anzahl die Produkte hergestellt werden müssen, damit der Reingewinn für dieses Zusatzprogramm möglichst groß ist.
Die Verbrauchsnormen und die vorhandenen Kapazitäten sind der Tabelle 8 zu entnehmen.

Tabelle 8

Material	Verbrauchsnormen ME			vorhandene Menge
	P_1	P_2	P_3	
A_1	2	1	6	300
A_2	6	5	2	540
A_3	4	2	4	320

Lösung: Das Optimalitätskriterium ist wieder der Reingewinn. Die Zahl der drei Produkte wird mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet, so daß auf Grund der Gewinne pro Stück die Zielfunktion lautet

$$10x_1 + 6x_2 + 4x_3 = z \rightarrow \max. \tag{(7)}$$

Die zugehörigen einschränkenden Nebenbedingungen werden mit Hilfe der Tabelle 8 aufgestellt:

$$\begin{aligned} (71) \quad & 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leqq 300 \qquad (A_1) \\ (72) \quad & 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leqq 540 \qquad (A_2) \\ (73) \quad & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqq 320 \qquad (A_3) \\ \text{mit} \quad & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqq 0 \end{aligned}$$

Dieses Modell ((7)) wird durch Einführung der Schlupfvariablen in ein Gleichungssystem umgewandelt, das die Grundlage zum Tabellenrechnen bildet.

$$\begin{aligned} (11) \quad & 2x_1 + x_2 + 6x_3 + w_1 && = 300 \\ (12) \quad & 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + w_2 && = 540 \\ (13) \quad & 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + w_3 && = 320 \\ (14) \quad & 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 - z && = 0 \end{aligned}$$

Da vier Gleichungen mit 7 Variablen vorliegen, erfolgt die Lösung des Systems durch Bestimmen von drei Nichtbasisvariablen. Als solche werden wieder die Entscheidungsvariablen mit dem Wert Null belegt.
Die *Anfangslösung* lautet nach dieser Festsetzung

Nichtbasisvariablen		Basisvariablen
$x_1 = 0$		$w_1 = 300$
$x_2 = 0$		$w_2 = 540$
$x_3 = 0$		$w_3 = 320$
	und	$z = 0$

Nunmehr beginnt die Rechnung, wie sie in Tabelle 9 enthalten ist. Nach den vorausgehenden Ausführungen erübrigt sich eine nochmalige Erläuterung. Zu beachten ist allerdings, daß die Quotientenbildung für die Zeile (21) entfällt, da der Koeffizient der Schlüsselspalte den Wert Null hat (Division durch Null nicht erklärt!).
Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß das für zwei Entscheidungsvariablen erarbeitete Verfahren ohne jede Schwierigkeit auch bei mehr Variablen angewendet werden kann.

Anmerkung: Das Nachrechnen der Tabelle 9 als selbständige Übung ist unbedingt durchzuführen mit Anwendung der möglichen Kontrollen (S. 248).

Die *Optimallösung* heißt:

Nichtbasisvariablen		Basisvariablen
$w_2 = 0$		$x_1 = 65$
$w_3 = 0$		$x_2 = 30$
$x_3 = 0$		$w_1 = 140$
	und	$z = 830$

Damit ist die optimale Belegung der Entscheidungsvariablen sowie $z_{\max}$ gefunden.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 65 \\ x_2 &= 30 \\ x_3 &= 0 \\ \text{und} \quad z_{\max} &= 830 \end{aligned}}$$

Diese Lösung sagt aus, daß aus dem vorhandenen Abfallmaterial 65 Stück von P_1 und 30 Stück von P_2 mit einem Reingewinn von 830 MDN erzeugt werden können. Das Material A_1 wird dabei nicht voll aufgebraucht; die Herstellung des Produktes P_3 wird als ungünstig erkannt, da x_3 in der Simplextabelle als Nichtbasisvariable mit dem Wert Null erscheint.

AUFGABEN

Es sind die folgenden Modelle für Maximierungsprobleme analytisch zu lösen mit Zeilensummenprobe.

Anleitung: Bei der Berechnung ist zu beachten, daß negativen Quotienten keine Aussage für den Variablenaustausch entnommen werden kann. Ihre Einbeziehung würde eine negative Entscheidungsvariable zur Folge haben, also aus dem Bereich der zulässigen Lösungen herausführen.

Tabelle 9: Simplextabelle zu Modell ((7))

Nummer der Gleichung	Basis	Rechenvorschrift	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	a_k	q		S $\left(x_i + w_k + \frac{a_k}{10}\right)$	D
(11)	w_1		2	1	6	1	0	0	300	150		40	
(12)	w_2		6	5	2	0	1	0	540	90		68	
(13)	w_3		$\boxed{4}$	2	4	0	0	1	320 ←	— 80 ←	— $q_{\min}$	43	
(14)	$-z$		10	6	4	0	0	0	0	—		20	
(21)	w_1	(11) — 2 · (23)	0	0	4	1	0	$-\frac{1}{2}$	140	entf.		18,5	0
(22)	w_2	(12) — 6 · (23)	0	$\boxed{2}$	-4	0	1	$-\frac{3}{2}$	60 ←	— 30 ←	— $q_{\min}$	3,5	0
(23)	x_1	$\boxed{(13):4 \rightarrow (23)}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	80	160		10,75	0
(24)	$-z$	(14) — 10 · (23)	0	1	-6	0	0	$-\frac{5}{2}$	-800	—		87,5	0
(31)	w_1	(21) — 0 · (32)	0	0	4	1	0	$-\frac{1}{2}$	140			18,5	0
(32)	x_2	$\boxed{(22):2 \rightarrow (32)}$	0	1	-2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	30			1,75	0
(33)	x_1	(23) — $\frac{1}{2}$ · (32)	1	0	2	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	65			9,875	0
(34)	$-z$	(24) — 1 · (32)	0	0	-4	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	-830			$-89,25$	0

146. a) Modell ((4b)), S. 225
b) Modell ((4a)), S. 225

Die erhaltenen Lösungen sind mit den durch das graphische Verfahren erhaltenen Ergebnissen zu vergleichen.

147. a) Zielfunktion $2x_1 + x_2 = z \to \max$

Nebenbedingungen
(1) $4x_1 + 4x_2 \leqq 28$
(2) $2x_1 \leqq 10$
(3) $-x_1 + 3x_2 \leqq 9$
mit $x_1, \quad x_2 \geqq 0$

b) Zielfunktion $2x_1 + 3x_2 = z \to \max$

Nebenbedingungen
(1) $4x_1 + 4x_2 \leqq 28$
(2) $2x_1 \leqq 10$
(3) $-x_1 + 3x_2 \leqq 9$
mit $x_1, \quad x_2 \geqq 0$

Die Modelle enthalten die gleichen Zielfunktionen wie in Aufgabe 146; durch die neuen Nebenbedingungen werden die Ergebnisse verändert. Geometrische Deutung?

148. Zielfunktion $3x_1 + x_2 = z \to \max$

Nebenbedingungen
(1) $2x_1 + x_2 \leqq 20$
(2) $6x_1 + x_2 \leqq 48$
(3) $3x_1 + 4x_2 \leqq 54$
mit $x_1, \quad x_2 \geqq 0$

149. Modell ((5)), S. 232

150. Modell ((2)), Aufgabenstellung S. 210

Die Rechnung ist
a) mit dem Einsatz von 3 Spezialmaschinen und
b) mit dem Einsatz von nur 2 Spezialmaschinen durchzuführen.

Auch hier zeigt der Vergleich mit der graphischen Lösung (S. 228 bis 231) die bestehenden Zusammenhänge.

Tabelle 10 (Aufgabe 151)

		A_1	A_2	B	Kapazität
Rohstoff I	t	4	3	2	108
Rohstoff II	t	4	3	6	300
Maschine 1	h	—	0,5	5	200
Maschine 2	h	0,4	—	2	100
Reingewinn	MDN	6	7	16	

151. Ein Betrieb stellt zwei Erzeugnisse A und B her; dabei kann A zwei Fertigungswege durchlaufen (A_1, A_2), während das bei B nicht der Fall ist.
Für die Rohstoffe und die Maschinen, die zur Fertigung benötigt werden, sind die Kennzahlen und die Einsatzgrößen für einen bestimmten Zeitraum nach Tabelle 10 bekannt.
Es ist mit Hilfe der Simplexmethode zu berechnen, wieviel Produkte A auf jedem der Fertigungswege und wieviel Produkte B in dem in Frage kommenden Zeitraum hergestellt werden müssen, wenn der Reingewinn (vgl. Tab. 10) möglichst groß werden soll.

3.2.3.4. Sonderfälle

1. Sonderfall: Es existieren mehrere Optimallösungen

Wenn in der z-Zeile der Simplextabelle für die *Nichtbasisvariablen* nur noch negative Koeffizienten vorhanden sind, ist die Optimallösung gefunden, die in diesem Fall die einzige ist.

Wenn dagegen in der z-Zeile für die Nichtbasisvariablen teilweise oder überhaupt die Koeffizienten Null auftauchen, ist ein weiterer Variablenaustausch möglich.

Dieser führt jedoch stets zu demselben Wert der Zielfunktion, so daß man bei Durchführung eines solchen Austausches eine **Variante der Optimallösung** erhält.
Die folgende, nur teilweise angeführte Aufgabe soll diesen Tatbestand erläutern.
Eine Maximierungsaufgabe habe die Zielfunktion

$$x_1 + 2x_2 + 6x_3 = z \to \max \qquad ((8))$$

Zum Modell, das hier nicht vollständig angeführt wird, gehören zwei Nebenbedingungen, die das Einführen von zwei Schlupfvariablen erfordern. Im Verlauf der Rechnung erhält man die dritte Transformation, wie sie Tabelle 11 zeigt.

Tabelle 11

Nr.	Basis	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	a_k	q
(31)	x_1	1	0	2	−3	−2	8	
(32)	x_2	0	1	2	2	1	6	
(33)	$-z$	0	0	0	−5	0	−20	

Mit dieser Tabelle ist die Optimallösung gefunden, da es keinen Koeffizienten in der z-Zeile mehr gibt, der größer als Null ist. Die Lösung heißt:

Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
$x_1 = 8$	$x_3 = 0$
$x_2 = 6$	$w_1 = 0$
und $z = 20$	$w_2 = 0$

Um die Bedeutung der Null-Koeffizienten (in der z-Zeile) für die Nichtbasisvariablen x_3 und w_2 zu erkennen, schreibt man die z-Zeile der Tabelle entsprechend als Gleichung:

$$(33) \quad z = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 5w_1 + 0 \cdot w_2 + 20.$$

Aus ihr ist zu ersehen, daß sich z bei Aufnahme von x_3 oder von w_2 in die Basis dem Wert nach nicht mehr ändern kann (Koeffizient Null), während eine Aufnahme von w_1 in die Basis den Wert für z verkleinern würde. Daraus folgt:

Der Koeffizient Null, der in der z-Zeile für eine Nichtbasisvariable vorkommt, kann als positiver Koeffizient gewertet werden, und es ist ein weiterer Variablenaustausch möglich, falls in der *Spalte des Null-Koeffizienten* mindestens ein Koeffizient vorkommt, der *größer als Null* ist.

Diese einschränkende Bedingung muß erfüllt sein, damit es auch mindestens einen Quotienten $0 < q < \infty$ gibt, der Voraussetzung für eine Berechnung im Bereich der zulässigen Lösungen ist. Es ist also festzustellen, daß die gefundene Optimallösung eine erste Variante ist; weiterer Variablenaustausch führt zur Berechnung anderer gleichwertiger Varianten.
Von Tabelle 11 ausgehend, wird x_3 gegen x_2 ausgetauscht ($q_{\min} = 3$), so daß man Tabelle 12 erhält.
Aus ihr ist die **2. Variante** der Optimallösung zu entnehmen.

Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
$x_1 = 2$	$x_2 = 0$
$x_3 = 3$	$w_1 = 0$
und $z = 20$	$w_2 = 0$

Tabelle 12

Nr.	Basis	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	a_k	q
(41)	x_1	1	-1	0	-5	-3	2	
(42)	x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	3	
(43)	$-z$	0	0	0	-5	0	-20	

Tabelle 13

Nr.	Basis	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	a_k	q
(51)	x_1	1	2	6	1	0	20	
(52)	w_2	0	1	2	2	1	6	
(53)	$-z$	0	0	0	-5	0	-20	

Aus denselben Überlegungen heraus kann, wieder von Tabelle 11 ausgehend, auch w_2 gegen x_2 ausgetauscht werden. Es ist dabei $q_{\min} = 6$, da ein negativer Quotient nicht zulässig ist. Tabelle 13 enthält diese Transformation, nach der es eine **3. Variante** gibt:

	Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
	$x_1 = 20$	$x_2 = 0$
	$w_2 = 6$	$x_3 = 0$
und	$z = 20$	$w_1 = 0$

Dieselbe Tabelle erhält man auch, wenn, von Tabelle 12 ausgehend, w_2 gegen x_3 ausgetauscht wird ($q_{\min} = 6$). Ein weiterer Austausch nach dieser Tabelle ergibt keine neue Variante, sondern würde wieder auf Tabelle 11 zurückführen.
Die drei Belegungen für die Entscheidungsvariablen heißen somit:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 8 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Optimallösung	Optimallösung	Optimallösung
1. Variante	2. Variante	3. Variante

Alle drei Tabellen enthalten dieselbe z-Zeile, das Kennzeichen dafür, daß es sich zwar um verschiedene, aber *gleichwertige* Lösungen handelt.

Die Kontrolle über die Zielfunktion bestätigt diese Tatsache:

Zielfunktion $\quad x_1 + 2x_2 + 6x_3 = z \to \max$

Optimallösung

1. Variante $\quad 8 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0 = \underline{\underline{20}}$

2. Variante $\quad 2 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = \underline{\underline{20}}$

3. Variante $\quad 20 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = \underline{\underline{20}}$

Ökonomisch ist die Lösung des Modells folgendermaßen zu deuten:

Ein Produktionsprogramm von 3 Produkten P_1, P_2 und P_3 ist bei gegebenen Kapazitätsbeschränkungen zweier benötigter Materialien optimal, wenn

1. nur die Produkte P_1 und P_2 in der errechneten Menge hergestellt werden; die durch w_1 und w_2 vertretenen Kapazitäten werden bei diesem Programm voll in Anspruch genommen;

2. dasselbe Programm wird ebenfalls unter voller Inanspruchnahme der Kapazitäten realisiert, wenn nur P_1 und P_3 in den errechneten Mengen hergestellt werden;
3. auch eine ausschließliche Herstellung von P_1 sichert das Optimalprogramm. Dabei wird die zweite Kapazität (w_2) nicht einmal voll ausgelastet.

Wiederum können es im Einzelfall nur ökonomisch-technologische Gesichtspunkte sein, die entscheiden, welches der mathematisch völlig gleichwertigen Programme realisiert werden soll.

Es sei endlich noch die geometrische Deutung des vorliegenden Problems gegeben. Durch die beiden Nebenbedingungen und die Nichtnegativitätsbedingung für die Entscheidungsvariablen ist ein konvexes Polyeder im R_3 gegeben. Dieses wird von zwei durch die Nebenbedingungen bestimmten Ebenen und durch die drei von den positiven Achsen x_1, x_2 und x_3 aufgespannten Ebenen begrenzt.

Die durch die Zielfunktion bestimmte Ebene muß mit dem Lösungspolyeder *drei Eckpunkte* gemeinsam haben, da es drei gleichwertige Optimallösungen gibt, die nach dem Satz von DANTZIG Ecklösungen sind. Das ist nur möglich, wenn die Ebene der Zielfunktion mit einer der beiden Polyederebenen, die den Nebenbedingungen entsprechen, zusammenfällt.

Den drei Lösungen zufolge muß im ersten Fall der Eckpunkt in der $(x_1; x_2)$-Ebene liegen, im zweiten Fall in der $(x_1; x_3)$-Ebene und im dritten Fall auf der x_1-Achse.

Die übrigen, unendlich vielen Lösungen (Varianten), die es dann noch gibt und die den Punkten der zwischen den genannten Ecken liegenden Polyederebene entsprechen, kann man durch Linearkombinationen erhalten, auf die im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden kann [29].

2. Sonderfall: Die Ausartung des Problems

Eine Ausartung oder Degeneration[1]) liegt dann vor, wenn in der **Basis** einer Simplextabelle eine der Basisvariablen den Wert Null annimmt. Die Ursache dazu liegt immer in der vorangehenden Tabelle, in der $q_{\min}$ nicht eindeutig bestimmbar ist. Dieser Sachverhalt sei an einem formalen Beispiel gezeigt. Bei der Berechnung einer Maximierungsaufgabe habe sich Tabelle 14 als zweite Transformation ergeben.

Das Programm ist noch nicht optimal, da in der z-Zeile für x_2 ein positiver Koeffizient steht. Damit ist die Schlüsselspalte bestimmt. Bei der Festlegung der Schlüsselzeile ist folgendes festzustellen: Der Quotient q_{23} entfällt als Kriterium für die weitere Berechnung, da er negativ ist. Die beiden anderen Quotienten q_{21} und q_{22} haben denselben Wert, so daß die erste oder die zweite Zeile gleichberechtigt als Schlüsselzeile gewählt werden kann.

In Tabelle 15 ist zuerst (21) als Schlüsselzeile der Berechnung zugrunde gelegt; in der nachfolgenden Tabelle 16 die Zeile (22).

Mit Tabelle 15 ist die Optimallösung gefunden; die *Basisvariablen* sind

$$\boldsymbol{x_2 = 4}, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 7 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{z = 22}.$$

Tabelle 16 ist auch wieder eine Optimaltabelle mit den *Basisvariablen*

$$x_1 = 0, \quad \boldsymbol{x_2 = 4}, \quad w_3 = 7 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{z = 22}.$$

[1]) Degeneration (lat.) Entartung

Tabelle 14

Nr	Basis	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_k	q
(21)	x_1	1	$\boxed{2}$	2	0	0	8	$4 \xrightarrow{Sz}$ Tab. 15
(22)	w_2	0	1	3	1	0	4	$4 \xrightarrow{Sz}$ Tab. 16
(23)	w_3	0	-1	2	0	1	3	entfällt
(24)	$-z$	0	3	-2	0	0	-10	
			$\uparrow$ *Ss*					

Tabelle 15

Nr.	Basis	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_k
(31)	x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	4
(32)	w_2	$-\frac{1}{2}$	0	2	1	0	0
(33)	w_3	$\frac{1}{2}$	0	3	0	1	7
(34)	$-z$	$-\frac{3}{2}$	0	-5	0	0	-22

Tabelle 16

Nr.	Basis	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	a_k
(41)	x_1	1	0	-4	-2	0	0
(42)	x_2	0	1	3	1	0	4
(43)	w_3	0	0	5	1	1	7
(44)	$-z$	0	0	-11	-3	0	-22

Aus dem Vergleich der beiden Maximallösungen ist ersichtlich, daß die *Basislösung* für die *von Null verschiedenen Basisvariablen* dieselbe ist, unabhängig davon, welche der beiden in Frage kommenden Zeilen als Schlüsselzeile gewählt wurde.
Man kann in diesem Falle die beiden Lösungen *nicht* als Varianten bezeichnen, da die Belegungen der Entscheidungsvariablen die gleichen sind.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}}$$

Es genügt deshalb, bei einer Ausartung nur *eine* Optimallösung zu berechnen. Es ist allerdings nicht immer so wie im Beispielfall, daß die Berechnung nach jeder der

Schlüsselzeilen mit gleichem q auch die Optimallösung ergibt. Bei beliebiger Wahl einer der in Frage kommenden Schlüsselzeilen kann es vorkommen, daß nach einer Anzahl von Iterationsschritten die Ausgangstabelle wieder erreicht wird. Die Berechnung muß dann mit der nächsten der „gleichberechtigten" Schlüsselzeilen durchgeführt werden. Um sich diesen „Irrweg" zu ersparen, wende man die folgende Regel an, deren Beweis nicht gegeben werden kann:

Tritt in einer Simplextabelle mehrfach derselbe Quotient für eine Schlüsselspalte auf, so sind die Koeffizienten der ersten Schlupfvariablen durch die entsprechenden Elemente dieser Schlüsselspalte zu teilen. Der kleinste dieser Quotienten, die auch negativ sein können, bestimmt die zu wählende Schlüsselzeile [29].

Sollten diese Zusatzquotienten nicht alle ihrem Wert nach verschieden sein, so wendet man dasselbe Kriterium der Reihe nach so lange auf die nächsten Schlupfvariablen an, bis eine eindeutige Festlegung der Schlüsselzeile möglich ist. Diese tritt auf jeden Fall bei einer der Schlupfvariablen ein, falls es überhaupt eine weitere Lösung gibt.
In dem angeführten Beispiel erfolgt die Entscheidung durch dieses Kriterium bereits bei der ersten Schlupfvariablen und verweist auf die erste Zeile als Schlüsselzeile (Tab. 17).

Tabelle 17

Nr.	...	x_2	w_1	w_2	w_3	a_k	$q_{\min}$	q_{w_1}
(21)	...	$\boxed{2}$	2	0	0	8	4 ⟵	$\boxed{2:2=1}$
(22)	...	$\boxed{1}$	3	1	0	4	4	$3:1=3$

Die Anwendung dieser Regel kann erhebliche Rechenarbeit ersparen; sie sollte immer bei ausgearteten Problemen angewendet werden, da sie sehr schnell die *auf jeden Fall* günstigste Zeile ermittelt.

AUFGABEN

Die folgenden Modelle sind zu berechnen:

152. Modell ((4c)), S. 225

153. Zielfunktion $x_1 + x_2 = z \to \max$

Nebenbedingungen
$$\begin{array}{ll} (1) & 4x_1 + 4x_2 \leqq 28 \\ (2) & 2x_1 \leqq 10 \\ (3) & -x_1 + 3x_2 \leqq 9 \\ \text{mit} & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

154. Zielfunktion $6x_1 + 2x_2 = z \to \max$

Nebenbedingungen
$$\begin{array}{ll} (1) & x_1 + x_2 \leqq 60 \\ (2) & 3x_1 + x_2 \leqq 90 \\ (3) & x_2 \leqq 45 \\ \text{mit} & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array}$$

Das Ergebnis der Aufgabe 153 ist mit Hilfe der graphischen Darstellung des Modells zu begründen.

Anleitung: Bei der ersten Transformation der Aufgaben 153 und 154 ist es günstig, x_1 als neue Basisvariable zu wählen.

3.2.3.5. Das duale Problem

Aus jedem Modell der Linearoptimierung läßt sich ein mit ihm in engem Zusammenhang stehendes zweites Modell ableiten; man sagt, daß zu jedem **primalen** Problem ein **duales** gehört. Ohne die theoretische Begründung geben zu können, die auch wieder weit über den Rahmen des vorliegenden Lehrbuches hinausführen würde, soll dieses Dualitätsprinzip im folgenden dargelegt werden, da seine Kenntnis wesentliche Vorteile bei der Lösung einzelner Aufgaben bieten kann.
Es gilt der **Dualitätssatz**[1]):

Zu jedem primalen Problem der Linearoptimierung, das einen endlichen Optimalwert z_p besitzt, gehört ein duales Problem, dessen Optimallösung denselben Wert für z_d hat:

$$\boxed{z_p = z_d} \tag{66}$$

Ist dabei der Optimalwert für das primale Problem ein Minimum, so ist der duale Optimalwert ein Maximum und umgekehrt.
Diese Tatsache ermöglicht es, primale Minimierungsaufgaben wieder auf Maximierungsaufgaben zurückzuführen[2]).
Das duale Problem wird ebenfalls mit dem Simplexalgorithmus gelöst. Seiner Lösung ist außer dem gemeinsamen Optimalwert auch die Lösungsmenge des primalen Problems zu entnehmen.

Ermittlung des dualen Problems

Als **primales Problem** sei Modell ((3)) von S. 211/212 der Ermittlung zugrunde gelegt.

Zielfunktion $\quad 17x_1 + 4\;\;x_2 + 8\;\;x_3 = z_p \to \min \qquad ((3))_p$

Nebenbedingungen $(31)_p \quad 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 \geqq 12$

$(32)_p \quad 0{,}3x_1 \qquad\qquad + 0{,}2x_3 \geqq \;\;8$

mit $\quad x_1, x_2, x_3 \geqq 0.$

Zu dieser Primalaufgabe gehört das in Tabelle 18 aufgeschriebene Koeffizientenschema, das die 2,3-Koeffizientenmatrix der Ungleichungen, den Spaltenvektor der dazugehörigen Absolutglieder und den zur Gleichung der Zielfunktion gehörenden Zeilenvektor enthält.

[1]) Dualität (lat.) Zweigliederung, Vertauschbarkeit

[2]) Über die Methoden der unmittelbaren Lösung von Minimierungsaufgaben, die neben den Schlupfvariablen noch die Einführung sog. *künstlicher Variablen* erfordern, vgl. [29, 33, 36]

Durch Transponieren dieses Schemas entsteht das duale Schema (Tab. 19). Dieses enthält nunmehr eine 3,2-Koeffizientenmatrix mit dem entsprechenden Spaltenvektor der neuen Absolutglieder und dem Zeilenvektor für die Gleichung der dualen Zielfunktion.

Tabelle 18

	x_1	x_2	x_3	a_k
$(1)_p$	0,2	0,4	0,1	12
$(2)_p$	0,3	0	0,2	8
z_p	17	4	8	min

Tabelle 19

	y_1	y_2	b_k
$(1)_d$	0,2	0,3	17
$(2)_d$	0,4	0	4
$(3)_d$	0,1	0,2	8
z_d	12	8	max

Nach dem zweiten Schema erfolgt das Aufstellen des dualen Modells. Es enthält in drei Ungleichungen nur noch zwei Variablen[1]) y_1 und y_2. Die Absolutglieder sind gleich den Koeffizienten in der Gleichung der primalen Zielfunktion; die Koeffizienten von z_d dagegen sind die Absolutglieder des ersten Problems.
Somit ergibt sich das **duale Modell**:

Zielfunktion $\quad 12y_1 + \quad 8y_2 = z_d \to \max \qquad ((3))_d$

Nebenbedingungen
$$\begin{array}{ll} (31)_d & 0{,}2y_1 + 0{,}3y_2 \leqq 17 \\ (32)_d & 0{,}4y_1 \qquad\qquad \leqq \ \ 4 \\ (33)_d & 0{,}1y_1 + 0{,}2y_2 \leqq \ \ 8 \\ \text{mit} & \quad y_1, \qquad y_2 \geqq \ \ 0 \end{array}$$

Die allgemeine Darstellung in Matrizenschreibweise zeigt deutlich die Zusammenhänge der beiden Probleme.

Primales Modell		**Duales Modell**
$\mathfrak{b}^T\mathfrak{x} = z_p \to \min$	Zielfunktion	$\mathfrak{a}^T\mathfrak{y} = z_d \to \max$
$\mathfrak{A}\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{a}$	Nebenbeding.	$\mathfrak{A}^T\mathfrak{y} \leqq \mathfrak{b}$
$\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{o}$		$\mathfrak{y} \geqq \mathfrak{o}$
n Variablen und m Ungleichungen		m Variablen und n Ungleichungen

[1]) Über die Deutung dieser Variablen als *Scheinkosten* vgl. [37]; [38, S. 41]

Die Lösung des Dualproblems

Um die Zusammenhänge zwischen den Lösungsmengen beider Systeme richtig verstehen zu können, werden das primale und das duale Modell zu Gleichungssystemen mit Hilfe von Schlupfvariablen umgeformt.

Primales Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{llr} (11)_p & 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}1x_3 - w_1 & = 12 \\ (12)_p & 0{,}3x_1 \phantom{+ 0{,}4x_2} + 0{,}2x_3 - w_2 & = 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{3 Entscheidungs-,} \\ \text{2 Schlupfvariablen} \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} (13)_p & 17x_1 + 4x_2 + 8x_3 - z_p & = 0 \\ \text{mit} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ w_1,\ w_2 \geqq 0 & \end{array}$$

Anmerkung: Die Schlupfvariablen, die den Ausgleich zur Größer-Beziehung herstellen sollen, müssen diesmal abgezogen werden. Über die Konsequenzen, die sich daraus für das unmittelbare Rechenverfahren ergeben, vergleiche man die auf S. 259 angegebene Literatur.

Duales Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{llr} (11)_d & 0{,}2y_1 + 0{,}3y_2 + v_1 & = 17 \\ (12)_d & 0{,}4y_1 \phantom{+ 0{,}3y_2} + v_2 & = 4 \\ (13)_d & 0{,}1y_1 + 0{,}2y_2 + v_3 & = 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{2 Entscheidungs-,} \\ \text{3 Schlupfvariablen} \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} (14)_d & 12y_1 + 8y_2 - z_d & = 0 \\ \text{mit} & y_1,\ y_2,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \geqq 0 & \end{array}$$

Das zweite Gleichungssystem soll analytisch gelöst werden. Es liegen 4 Gleichungen mit 6 Variablen vor; als freie Variablen werden wieder die Entscheidungsvariablen, hier y_1 und y_2, mit dem Wert Null belegt. Daraus ist die *Anfangslösung* bestimmt:

Nichtbasisvariablen	Basisvariablen
$y_1 = 0$	$v_1 = 17$
$y_2 = 0$	$v_2 = 4$
	$v_3 = 8$
	$z_d = 0$

Diese ist die Grundlage zur Berechnung der Simplextabelle (Tab. 20). Im allgemeinen[1]) interessiert die Lösung des dualen Problems nicht. Die Berechnung dient in der Hauptsache dazu, auf dem Wege über die Maximierung auch die Lösung des Minimalproblems zu erhalten.

[1]) Vgl. Fußnote 1, S. 260

Tabelle 20

Nr.	Basis	Rechenvorschrift	y_1	y_2	v_1	v_2	v_3	b_k	q
(11)	v_1		0,2	0,3	1	0	0	17	85
(12)	v_2		$\boxed{0{,}4}$	0	0	1	0	4 ←	−10
(13)	v_3		0,1	0,2	0	0	1	8	80
(14)	$-z$		12	8	0	0	0	0	—
(21)	v_1	(11) − 0,2 · (22)	0	0,3	1	$-\frac{1}{2}$	0	15	50
(22)	y_1	$\boxed{(12) : 0{,}4 \to (22)}$	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	10	—
(23)	v_3	(13) − 0,1 · (22)	0	$\boxed{0{,}2}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	7 ←	−35
(24)	$-z$	(14) − 12 · (22)	0	8	0	−30	0	−120	—
(31)	v_1	(21) − 0,3 · (33)	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{2}$	4,5	
(32)	y_1	(22) − 0 · (33)	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	10	
(33)	y_2	$\boxed{(23) : 0{,}2 \to (33)}$	0	1	0	$-\frac{5}{4}$	5	35	
(34)	$-z$	(24) − 8 · (33)	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{-20}$	$\boxed{-40}$	$\boxed{-400}$	

Bestimmung der primalen Lösung aus der dualen Tabelle

1. $z_{\min} = z_{\max} = 400$ (Dualitätssatz).
2. Die Variablen beider Gleichungssysteme sind paarweise einander so zugeordnet, wie die folgende Übersicht zeigt:

dual		**primal**
Entscheidungsvariable	↔	Schlupfvariable
Schlupfvariable	↔	Entscheidungsvariable
Basisvariable	↔	Nichtbasisvariable
Nichtbasisvariable	↔	Basisvariable

Das ergibt für das behandelte Beispiel die nachstehende Tabelle der Variablenpaare

dual:	y_{1B}	y_{2B}	v_{1B}	v_{2NB}	v_{3NB}	z_{max}
primal:	w_{1NB}	w_{2NB}	x_{1NB}	x_{2B}	x_{3B}	z_{min}

Diesen Variablen werden die mit (-1) multiplizierten Werte der letzten Zeile der dualen Simplextabelle zugeordnet, so daß eine dreizeilige Tabelle entsteht:

y_{1B}	y_{2B}	v_{1B}	v_{2NB}	v_{3NB}	z_{max}
w_{1NB}	w_{2NB}	x_{1NB}	x_{2B}	x_{3B}	z_{min}
0	0	0	20	40	400

Die beiden umrandeten Zeilen enthalten die

Optimallösung des primalen Problems:

	Basisvariablen	Nichtbasisvariablen
	$x_2 = 20$	$x_1 = 0$
	$x_3 = 40$	$w_1 = 0$
und	$z = 400$	$w_2 = 0.$

Daraus ergibt sich als Lösung des Modells $((3))_p$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 20 \\ x_3 &= 40 \\ z_{min} &= 400 \end{aligned}}$$

Vergleicht man die Werte der Entscheidungsvariablen des Minimierungsproblems mit der letzten Zeile der Dualtabelle (20), so erkennt man nach den obigen Darlegungen, daß die volle Lösung der Primalaufgabe unmittelbar aus der dualen Tabelle zu entnehmen ist; die umrandeten Koeffizienten der Schlupfvariablen in der letzten z-Zeile sind lediglich mit (-1) zu multiplizieren.

BEISPIEL

Berechnung eines Schichtplanes[1])

Ein Arbeitstag von 24 Stunden soll in vier Schichten eingeteilt werden, beginnend mit 0 Uhr. Jeder Arbeiter hat, begründet durch die Art der Arbeit, zwei Schichten hintereinander ab-

[1]) Aufgabe nach [33]

zuleisten, darf aber nur jeden zweiten Tag eingesetzt werden. Die nötige Besetzung der einzelnen Schichten ist unterschiedlich und verlangt als Mindestzahl 4, 8, 8, 6 Arbeitskräfte. Die Mindestzahl der Arbeitskräfte, mit der dieser Schichtplan erfüllt werden kann, ist zu berechnen.

Lösung: Die gegebene Sachlage wird durch die folgende Übersicht geklärt.

Schicht	I	II	III	IV
beginnende Arbeiter	x_1	x_2	x_3	x_4
Arbeiter aus der *vorherigen* Schicht	x_4	x_1	x_2	x_3
Gesamtzahl der Arbeiter je Schicht	$x_1 + x_4$	$x_2 + x_1$	$x_3 + x_2$	$x_4 + x_3$
Mindestzahl an Arbeitern	4	8	8	6

Aus dieser Übersicht lassen sich die Gleichung der Zielfunktion und die Nebenbedingungen für den *ersten Tag* sofort erkennen.

$$\begin{array}{ll} \text{Zielfunktion} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = z \to \min \\ \text{Nebenbedingungen} & x_1 + x_2 \geqq 8 \\ & x_2 + x_3 \geqq 8 \\ & x_3 + x_4 \geqq 6 \\ & x_1 + x_4 \geqq 4 \end{array}$$

Dieselbe Übersicht könnte für den *zweiten Tag* aufgestellt werden, etwa mit der Bezeichnung $\overline{x}_i$ für die entsprechende Anzahl der Arbeitskräfte.
Da aber im *Zahlenwert* die x_i und die $\overline{x}_i$ einander gleich sind, gelten die Nebenbedingungen für beide Schichttage in derselben Form.
Am zweiten Schichttag arbeiten jedoch andere Arbeitskräfte, so daß die Gleichung der Zielfunktion, die die Gesamtzahl der Arbeitskräfte minimieren soll, die Form

$$\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} \overline{x}_i = z \to \min$$

annimmt. Weil aber

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} \overline{x}_i$$

ist, erhält man als Modell des Schichtplanes das folgende:

$$\text{Zielfunktion} \qquad 2\sum_{i=1}^{4} x_i = z \to \min \tag{(9)}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Nebenbedingungen} & (91) & x_1 + x_2 \geqq 8 \\ & (92) & x_2 + x_3 \geqq 8 \\ & (93) & x_3 + x_4 \geqq 6 \\ & (94) & x_1 + x_4 \geqq 4 \\ & \text{mit} & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqq 0 \end{array}$$

Die Aufgabe wird zweckmäßig unter Verwendung des Dualitätsprinzips gelöst. Über die Tabellen 21 und 22 erhält man das duale Modell.

Tabelle 21: Minimierungsproblem

x_1	x_2	x_3	x_4	a_k
1	1	0	0	8
0	1	1	0	8
0	0	1	1	6
1	0	0	1	4
2	2	2	2	min

Tabelle 22: Maximierungsproblem

y_1	y_2	y_3	y_4	b_k
1	0	0	1	2
1	1	0	0	2
0	1	1	0	2
0	0	1	1	2
8	8	6	4	max

Zielfunktion $\quad 8y_1 + 8y_2 + 6y_3 + 4y_4 = z_d \to \max \qquad ((9))_d$

Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{llllll}
(91)_d & y_1 & & & + y_4 & \leqq 2 \\
(92)_d & y_1 & + y_2 & & & \leqq 2 \\
(93)_d & & y_2 & + y_3 & & \leqq 2 \\
(94)_d & & & y_3 & + y_4 & \leqq 2 \\
\text{mit} & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geqq 0
\end{array}
$$

Das duale Modell hat die gleiche Anzahl von Variablen wie das primale. Es hat als Maximierungsproblem aber den Vorteil, ohne künstliche Variablen (vgl. Fußnote 2, S. 259) gelöst werden zu können. Außerdem sind die Koeffizienten der Zielfunktion nicht alle einander gleich, so daß die Wahl der ersten Schlüsselspalte einfacher ist (vgl. Aufgabe 155a).
In der dualen Optimaltabelle erscheint eine Null für eine der Nichtbasisvariablen; das weist darauf hin, daß es für die Aufgabe mehr als eine Lösung gibt (vgl. Aufgabe 155b).
Die Optimallösung, die man erhält, wenn in der Simplextabelle y_1 oder y_2 zuerst in die Basis übernommen werden, lautet:

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
x_1 & = 0 \\
x_2 & = 8 \\
x_3 & = 0 \\
x_4 & = 6 \\
z_{\min} & = 28
\end{array}}
$$

Die Verteilung auf den Schichtplan sieht danach folgendermaßen aus:

Schicht	I	II	III	IV
Gesamtzahl der Arbeiter je Schicht	$x_1 + x_4$	$x_1 + x_2$	$x_2 + x_3$	$x_3 + x_4$
	$0 + 6$	$0 + 8$	$8 + 0$	$0 + 6$
	6	8	8	6

Das bedeutet, daß die vier Schichten auf nur zwei zusammenfallen, zu denen 6 bzw. 8 Arbeiter gehören, also je Tag 14 Arbeiter.
Die Überprüfung zeigt, daß mit diesem Ergebnis Zielfunktion und Nebenbedingungen erfüllt werden.

AUFGABEN

155. a) Die für das vorangehende Beispiel gegebene Lösung des Schichtplanes ist durch Berechnung der entsprechenden Simplextabelle zu prüfen.
b) Eine *Variante* der Optimallösung hat das Ergebnis

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 0.$$

Wie sieht der Schichtplan jetzt aus? Wieviel verschiedene Gruppen von Arbeitskräften müssen eingesetzt werden?

156. Das folgende Modell ist mit Hilfe des Dualitätsprinzips zu lösen:

$$\begin{array}{lll}
\text{Zielfunktion} & & 4x_1 + 16x_2 + 10x_3 = z \to \min \\
\text{Nebenbedingungen} & (1) & 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 \geqq 14 \\
 & (2) & 2x_2 + x_3 \geqq 11 \\
 & \text{mit} & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geqq 0
\end{array}$$

Anmerkung: Es wurden zur Einführung Modelle mit nur oberen Grenzen (Kleiner-Gleich-Beziehung) und mit nur unteren Grenzen (Größer-Gleich-Beziehung) behandelt. Beide können — unter Beachtung des Dualitätsprinzips — mit dem allgemeinen Simplexverfahren gelöst werden. Darüber hinaus ist es möglich, Probleme mit unteren Grenzen direkt durch Einführung der bereits erwähnten künstlichen Variablen zu lösen.
In der Praxis kommen außerdem häufig Probleme vor, die in den Nebenbedingungen obere und untere Grenzen sowie Gleichungen enthalten. Auch sie sind mit Hilfe der künstlichen Variablen lösbar. Daneben hat man aber für derartige Aufgaben weitere spezielle Methoden entwickelt (vgl. vor allem [29, 33, 36] und entsprechende Einzelveröffentlichungen).

3.3. Das Transportproblem als Spezialfall der Linearoptimierung

3.3.1. Allgemeine Grundlagen

Die Transportoptimierung ist ein Spezialfall der Linearoptimierung, dem in der Planung größte Bedeutung zukommt. Die gesetzlichen Bestimmungen tragen dieser Bedeutung Rechnung.
Es handelt sich dabei in erster Linie um die Minimierung der Güterströme für austauschbare Güter zwischen Erzeugern und Verbrauchern, wie den Transport von Ziegeln, Kies, Benzin, Öl u. a. Nach den Erfahrungen, die bei der Anwendung dieser Planungsmethode gemacht worden sind, kann eine Senkung der Transportwegelängen bzw. der Transportkosten erreicht werden, die zwischen 10% und 30% liegt.
Die letzte Angabe läßt bereits erkennen, daß es zwei Optimalitätskriterien gibt:

1. den **Gesamttransportaufwand** (tkm)[1]), falls die Beförderung des Gutes mit *gleichartigen* Transportmitteln möglich ist, oder
2. die **Gesamttransportkosten** (MDN), wenn verschiedenartige Transportmittel Verwendung finden müssen.

[1]) Gewählt wird Tonne (t) als Maßeinheit; je nach befördertem Gut kann es natürlich auch eine andere Maßeinheit sein

Die Grundlage der Berechnungen bilden neben den Produktionskapazitäten und den Bedarfsmengen im ersten Falle die Entfernungen (km) oder im zweiten Falle die Transportkosten (MDN je t) zwischen Erzeuger und Verbraucher.
Diese Transportkosten ermitteln sich entweder aus den einzelnen km-Preisen und bilden die *reinen* Transportkosten, oder sie setzen sich aus den reinen Kosten und dem Preis der Wareneinheit zusammen. Das letztere ist dann nötig, wenn die Herstellungskosten für *eine* Produktart bei den verschiedenen Herstellern unterschiedlich sind.
Als Spezialfall der Linearoptimierung ist das Transportproblem prinzipiell auch mit Hilfe der Simplexmethode lösbar.
Die besondere Form jedoch, die das mathematische Modell hat, macht das Simplexverfahren durch die Größenordnung der meisten Probleme sehr arbeitsaufwendig, während das Transportmodell andererseits die Möglichkeit enthält, für seine Lösung aus dem allgemeinen Simplexverfahren spezielle Verfahren zu entwickeln, die den Rechenaufwand verringern.

3.3.2. Das mathematische Modell der Transportaufgabe

Entwicklung an einem Beispiel

Drei Erzeuger E_i sollen vier Verbraucher V_k mit einem bestimmten Gut versorgen (vgl. S. 205). Die Zuordnung von Erzeuger zu Verbraucher ist so zu planen, daß der Transportaufwand in tkm ein Minimum wird.
Für einen bestimmten Zeitraum sind bekannt:

die Produktionskapazitäten der Erzeuger		der Bedarf der Verbraucher	
E_1	20 t	V_1	17 t
E_2	15 t	V_2	18 t
E_3	20 t	V_3	8 t
	55 t	V_4	12 t
			55 t

Die Entfernungen in Kilometern von jedem Erzeuger zu jedem Verbraucher sind in einer **Entfernungsmatrix** in Tabelle 23 zusammengefaßt. Bezeichnet man die noch unbekannten Liefermengen des Erzeugers E_i zum Verbraucher V_k mit x_{ik}, so erhält man Tabelle 24 als **Matrix der Liefermengen**, die um die Spalte der Kapazitäten und um die Zeile der Bedarfsmengen ergänzt ist.

Tabelle 23: Entfernungsmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4	
E_1	11	3	8	15	
E_2	6	2	5	1	
E_3	1	6	7	4	

Tabelle 24: Matrix der Liefermengen

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	20
E_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15
E_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	20
Bedarf t	17	18	8	12	55

Da im vorliegenden Beispiel Bedarf und Kapazität in ihrer Summe einander gleich sind, handelt es sich um ein **ausgeglichenes Problem**.
Der Gesamttransportaufwand G, der ein Minimum werden soll, berechnet sich aus den beiden Matrizen und ergibt die

Zielfunktion
$$\begin{aligned} G = 11x_{11} &+ 3x_{12} + 8x_{13} + 15x_{14} \\ + \ 6x_{21} &+ 2x_{22} + 5x_{23} + x_{24} \\ + \ x_{31} &+ 6x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \to \text{min.} \end{aligned}$$

Diese Zielfunktion unterliegt einschränkenden **Nebenbedingungen**, die sich aus Kapazität und Bedarf nach Tabelle 24 sowie aus der Nichtnegativitätsbedingung ergeben. Sie lauten:

$$\begin{aligned} &(11) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20 \\ &(12) \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 15 \\ &(13) \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \end{aligned}$$

den Zeilen von Tabelle 24 entsprechend

und

$$\begin{aligned} &(21) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 17 \\ &(22) \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 18 \\ &(23) \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 8 \\ &(24) \quad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 12 \end{aligned}$$

den Spalten von Tabelle 24 entsprechend

mit $x_{ik} \geqq 0$ für alle i und k.

Damit ist für die gegebene Aufgabe das mathematische Modell gefunden.

Allgemeine Formulierung des Modells

Bezeichnet man mit

c_{ik} die Entfernung von E_i zu V_k in km bzw. die entsprechenden Transportkosten in MDN,
a_i die Produktionskapazitäten von E_i
b_k den Bedarf von V_k,
x_{ik} die Liefermengen, so kann man wieder zwei Matrizen aufstellen:

die Entfernungsmatrix (Kostenmatrix) der c_{ik} und die Matrix der Liefermengen x_{ik}, die beide in Tabelle 25 zusammengefaßt und durch die Kapazitäten a_i und die Bedarfsmengen b_k ergänzt sind.

Tabelle 25

	V_1	V_2	$\cdots$	V_n	Kap.
E_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}	$\cdots$	c_{1n} / x_{1n}	a_1
E_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}	$\cdots$	c_{2n} / x_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
E_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} / x_{mn}	a_m
Bedarf	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

Für das **ausgeglichene Problem** gilt die Grundbedingung

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{n} b_k} \qquad (67)$$

Das Modell läßt sich unmittelbar aus Tabelle 25 entnehmen.

Zielfunktion

$$\begin{aligned} G = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \to \min \end{aligned}$$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &(11) & x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} &= a_1 \\ &(12) & x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} &= a_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ &(1m) & x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} &= a_m \\ &(21) & x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} &= b_1 \\ &(22) & x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} &= b_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ &(2n) & x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} &= b_n \end{aligned}$$

mit $x_{ik} \geqq 0$ für alle i und k (Nichtnegativitätsbedingungen)

In Summenschreibweise läßt sich das Modell übersichtlicher darstellen:

Zielfunktion

$$G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_{ik} \to \min^{1)}$$

Nebenbedingungen

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1) & \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = a_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ (2) & \sum_{i=1}^{m} x_{ik} = b_k & k = 1, 2, \ldots, n \\ & \text{mit } x_{ik} \geqq 0 & \text{für alle } i \text{ und } k \end{array}} \qquad (68)$$

Die Besonderheiten des Transportmodells

1. Das Transportmodell unterscheidet sich von dem allgemeinen Modell der Linearoptimierung vor allem dadurch, daß die Nebenbedingungen in Form von **Gleichungen** gegeben sind.
   Diese Gleichungen ergeben ein **inhomogenes lineares Gleichungssystem von $m + n$ Gleichungen mit $m \cdot n$ Variablen.**
   Dabei bilden sich zwei Gruppen; jede Variable kommt in jeder Gruppe nur einmal vor, außerdem haben alle Koeffizienten den Wert Eins.
2. Das System dieser $m + n$ Gleichungen kann stets um eine Gleichung vermindert werden, die linear von den anderen Gleichungen abhängig ist.

   Der Nachweis für diese Behauptung läßt sich für die Nebenbedingungen des Modells auf S. 268 dadurch führen, indem man zeigt, daß beispielsweise die Gleichung (24) implizit in den anderen Gleichungen enthalten ist. Man addiert die Gleichungen (11) bis (13) sowie die Gleichungen (21) bis (23) und erhält die Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 55 \\ s_2 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} \phantom{{}+x_{14}} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \phantom{{}+x_{24}} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \phantom{{}+x_{34}} = 43 \end{aligned}$$

   Die Differenz $s_1 - s_2$ ergibt genau die Gleichung

$$(24) \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 12$$

   Den *allgemeinen Nachweis* dieser Eigenschaft kann man erbringen, wenn man den **Rang** des Gleichungssystems der Nebenbedingungen bestimmt. Er ist bei $m + n$ Gleichungen, deren Koeffizienten sämtlich den Wert eins haben, stets $r = m + n - 1$. Das bedeutet, daß eine von den $m + n$ Gleichungen von den anderen abhängig ist (vgl. 2.4.6. und [1]).
3. Die analytische Lösung der Transportaufgabe kann ohne Schlupfvariablen erfolgen, weil die Nebenbedingungen bereits ein Gleichungssystem bilden. Es ist folglich aus der Menge der zulässigen Lösungs-n-Tupel der *Entscheidungsvariablen* dasjenige Tupel zu bestimmen, das die Zielfunktion zu einem Minimum werden läßt. Jedes Lösungs-n-Tupel enthält mn Variablen. Das sind mehr Variablen als Gleichungen, so daß wieder zwischen Basisvariablen und *freien* Nichtbasisvariablen zu unterscheiden ist.

---
1) Vgl. 4.1.2.4.

Weil sich das System auf $m + n - 1$ unabhängige Gleichungen reduziert, ist es im Falle der Widerspruchslosigkeit stets durch **$m + n - 1$ von Null verschiedene Basisvariablen** lösbar.
Die Nichtbasisvariablen werden auch beim Transportproblem mit dem Wert Null belegt. Damit wird aus dem Bereich der zulässigen Lösungen wieder eine *Basislösung* bestimmt. Diese legt die Zahl der einzelnen Transportwege $(m + n - 1)$ fest und gibt im Falle der Optimallösung den geringsten Transportaufwand an.

3.3.3. Die Lösung des Transportproblems

Die Berechnung erfolgt wie bei der allgemeinen Simplexmethode in zwei wesentlichen Teilen:

1. Ermittlung einer beliebigen Anfangslösung,
2. schrittweise Verbesserung dieser Anfangslösung.

Bemerkenswert ist dabei, daß die Berechnungsverfahren nicht unmittelbar vom Modell der Transportoptimierung ausgehen, sondern daß die Anfangslösung wie die weiteren Verbesserungen sofort in die Matrix der Liefermengen eingetragen werden.

3.3.3.1. Anfangslösung nach der aufsteigenden Indexmethode

Diese Methode wird an dem unter 3.3.2. angeführten Problem erläutert. Von Tabelle 23 ausgehend, die als Tabelle 26 noch einmal aufgenommen ist, legt man die Matrix der Liefermengen mit Kapazitäten und Bedarfsmengen an, läßt aber zunächst die Felder der x_{ik} frei (Tab. 27).

Tabelle 26: Entfernungsmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	11	3	8	15
E_2	6	2	5	1
E_3	1	6	7	4

Tabelle 27: Matrix der Liefermengen

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1					20
E_2					15
E_3					20
Bedarf t	17	18	8	12	55

Auf diese freien Felder werden nun die zu transportierenden Mengen verteilt. Dafür schreibt die **aufsteigende Indexmethode** die folgende *Regel* vor:

Es sind diejenigen Felder (ik) mit der höchstmöglichen Zahl von Mengeneinheiten zu besetzen, die in der Entfernungsmatrix (Kostenmatrix) die kleinsten Koeffizienten c_{ik} aufweisen, beginnend mit dem am niedrigsten besetzten Feld.

Bei dieser Verteilung wie bei den weiteren Verteilungen ist zu beachten, daß

1. die durch Kapazität und Bedarf gegebenen Beschränkungen (Nebenbedingungen) berücksichtigt werden und daß
2. die Zahl der besetzten Felder, die man **Knotenpunkte** nennt, nach den vorausgegangenen Darlegungen (Basislösung) stets $m + n - 1$ beträgt.

Das letztere ist bei *richtiger Anwendung der Indexmethode* im allgemeinen für die Anfangslösung gewährleistet, sollte aber immer kontrolliert werden, um Schwierigkeiten in der weiteren Berechnung zu vermeiden.

Der Regel entsprechend besetzt man in Tabelle 27 unter Beachtung aller Bedingungen der Reihe nach folgende Felder (zur besseren Übersicht Tab. 26 und 27 herausschreiben):

①: (31) mit 17 t (Spaltensumme!)
Damit ist der Bedarf von V_1 gedeckt; (11) und (21) werden durch einen Strich gesperrt.

②: (24) mit 12 t (Spaltensumme!)
Bedarf von V_4 gedeckt; (14) und (34) werden gesperrt.

③: (22) mit 3 t (Zeilensumme!)
Es ist nunmehr die Kapazität von E_2 ausgeschöpft; (23) wird gesperrt.

④: (12) mit 15 t (Spaltensumme!)
Bedarf von V_2 gedeckt; (32) wird gesperrt.

Die letzten Belegungen ergeben sich jetzt ohne Rücksicht auf die Größe der Feldkoeffizienten, allein im Hinblick auf die Randbedingungen:

⑤: (33) mit 3 t und

⑥: (13) mit 5 t.

Tabelle 28 enthält diese Feldbesetzung und stellt somit die *Anfangslösung* des Problems dar.

Kontrolle: 1. Die Zahl der Knotenpunkte beträgt $6 = 3 + 4 - 1$.
2. Die Randbedingungen sind sämtlich erfüllt.

Damit ist eine erste Basislösung gefunden. Tabelle 28 enthält nur die Werte der Basisvariablen; den freien Feldern sind die Nichtbasisvariablen mit der Belegung Null zuzuordnen.

Ergebnis: $G_A = (15 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 3 \cdot 7)\ \text{tkm}$

$$\underline{\underline{G_A = 141\ \text{tkm}}}$$

Dieses Ergebnis stellt in bezug auf das Optimum eine Näherungslösung dar.

Tabelle 28: Anfangslösung

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	—	15	5	—	20
E_2	—	3	—	12	15
E_3	17	—	3	—	20
Bedarf t	17	18	8	12	55

Die aufsteigende Indexmethode ist in verschiedener Hinsicht vorteilhaft:

— sie ist einfach und durchsichtig in der Anwendung;
— sie bedarf keiner Zwischenrechnung;
— sie liefert meist eine Anfangslösung, die in verhältnismäßig wenig Schritten zur Optimallösung führt.

Demgegenüber steht allerdings ein Nachteil:

— die letzten Felder, die besetzt werden müssen, haben oft ungünstig hohe Feldkoeffizienten.

Dieser Nachteil wird aber bei der folgenden schrittweisen Verbesserung wieder aufgehoben.

AUFGABEN

Die *Anfangslösung* für einen Transportplan ist nach der aufsteigenden Indexmethode zu bestimmen. In Aufgabe 157 ··· 159 sind die Matrizen der c_{ik} einschließlich der beschränkenden Randbedingungen a_i und b_k gegeben.

157. Tab. 29

158. Tab. 30

159. Tab. 31

Tabelle 29: Entfernungsmatrix

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
B_1	10	2	9	15	8	170
B_2	12	3	5	7	9	100
B_3	13	6	4	4	11	90
b_k	100	70	60	90	40	360

Tabelle 30: Kostenmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
E_1	3	6	12	15	100
E_2	12	8	21	9	70
E_3	7	3	13	20	60
E_4	12	8	7	10	40
b_k	20	80	120	50	270

Tabelle 31: Kostenmatrix

	A	B	C	D	a_i
E	4	12	15	21	6
F	3	7	10	16	10
G	14	6	3	5	4
b_k	4	8	2	6	20

3.3.3.2. Iteration nach der Distributionsmethode

Die Distributionsmethode[1]) ermöglicht eine Verbesserung der Anfangslösung durch eine *Umverteilung* der Mengen, die die Anfangslösung bilden.
Eine solche Umverteilung kann aber nicht beliebig vorgenommen werden. Sie muß es durch eine bestimmte Systematik ermöglichen, die Zuordnungen von Erzeuger zu Verbraucher so zu verändern, daß unter *Beibehaltung der Zahl der Knotenpunkte und unter Einhaltung der Nebenbeschränkungen ein geringeres Transportaufkommen* erreicht wird.

Die Systematik der Umverteilung

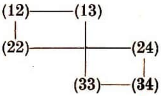
1. *Umverteilungswege*

Eine Umverteilung kann nur in einem **rechtwinkligen Polygonzug** erfolgen. Dieser hat als Eckpunkte besetzte Felder und *ein* Leerfeld (L); der Polygonzug muß sich durch senkrecht aufeinanderstehende Seiten schließen lassen. Es ist aber nicht nötig, daß die Eckfelder eines solchen Polygonzuges unmittelbar nebeneinanderliegen, sondern es können sich dazwischen Felder befinden, die nicht von der Umverteilung betroffen werden.

[1]) distributio (lat.) Verteilung; diese Methode ist auch bekannt als Stepping-Stone-Methode (engl.) Stein-Stoß-Methode

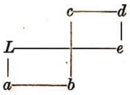
Polygonzug der Umverteilung

nach Tabelle 28:



mit (34) als Leerfeld

allgemein:

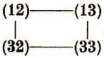


mit L als Leerfeld

Ein besonders einfacher Polygonzug ist das *Rechteck*, das natürlich den oben genannten Bedingungen genügen muß.

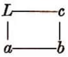
Umverteilungsrechteck

nach Tabelle 28:



mit (32) als Leerfeld

allgemein:



mit L als Leerfeld

2. *Grundprinzip der Umverteilung*

Die Umverteilung der Mengen beginnt in einem Feld, das in gleicher Zeile oder Spalte mit dem Leerfeld liegt, und besetzt von ihm aus das Leerfeld mit einer Menge, die durch die Spalten- und Zeilensumme begrenzt wird. Über die anderen Felder des Umverteilungsweges wird der Ausgleich vorgenommen.
Die Bilder 76 und 77 zeigen das Prinzip einer Umverteilung, bei der Spalten- und Zeilensummen erhalten bleiben. Die Pfeile innerhalb des Umverteilungsweges deuten an, von welchen Feldern eine Menge x subtrahiert wird, die zum nächsten Feld zu addieren ist.

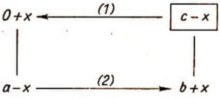


Bild 76

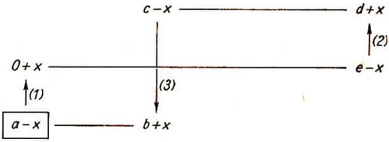


Bild 77

3. *Durchführung der Umverteilung*

Unter Einhaltung der gekennzeichneten Wege sind zwei Regeln zu beachten:

Vorzeichenregel

Die Felder des Umverteilungsweges werden *abwechselnd* mit Plus und Minus versehen, wobei das *Leerfeld stets ein Pluszeichen* erhält.

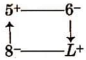
Diese Festsetzung entspricht der Subtraktion und der Addition einer bestimmten Umverteilungsmenge, wie sie in den Bildern 76 und 77 durch $+x$ und $-x$ gekennzeichnet ist.

Mengenregel

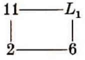
| Innerhalb eines Polygonzuges wird stets die **kleinste Menge** umverteilt, die sich auf einem mit **Minuszeichen** versehenen Feld befindet.

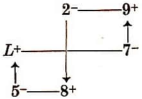
Diese Regel bestimmt die Menge, die umverteilt werden kann, ohne daß die Nebenbedingungen verletzt oder die Zahl der Knotenpunkte geändert wird.

Die folgenden Umverteilungen erläutern den Inhalt beider Regeln.

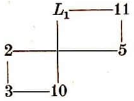


$\longrightarrow$ Umverteilung von 6 ME Transportgut ergibt $\longrightarrow$





$\longrightarrow$ Umverteilung von 2 ME Transportgut ergibt $\longrightarrow$



Die Feldbewertung

Eine jede Umverteilung der beschriebenen Art ist aber nur dann sinnvoll, wenn eine bestimmte Menge des Transportgutes *von einem Feld mit hoher* km-*Zahl auf ein anderes mit geringerer* km-*Zahl* gelegt werden kann. Um die günstigste Möglichkeit der Umverteilung planvoll finden zu können, führt man eine sogenannte **Feldbewertung** durch.
Diese soll an Hand der Anfangslösung, die für die in 3.3.3.1. gegebene Aufgabe gefunden wurde, erläutert werden.
Die Tabellen 32 und 33 geben noch einmal die Entfernungsmatrix und die Anfangslösung dieser Aufgabe an (vgl. S. 277).
Die Feldbewertung wird für alle Leerfelder durchgeführt. Zuerst ist der Umverteilungsweg festzulegen.
Das Feld (32) der Tabelle 33 z. B. kann über folgenden Weg besetzt werden:

$$(33)^- \rightarrow (32)^+ - (12)^- \rightarrow (13)^+.$$

Danach muß entschieden werden, ob diese Umverteilung zu einer Verminderung des Transportaufkommens führt. Dazu schreibt man die den Feldern des Verteilungsweges zugeordneten km-Zahlen in derselben Reihenfolge und mit demselben Vorzeichen auf:

$(33)^-$	$(32)^+$	$(12)^-$	$(13)^+$
-7	$+6$	-3	$+8$

Die Umbesetzung $(33) \rightarrow (32)$ bringt demnach eine Verminderung um *einen* Transportkilometer je Tonne mit sich $(-7+6=-1)$, während die ausgleichende Umbesetzung $(12) \rightarrow (13)$ eine *Zunahme von* fünf Transportkilometern je Tonne zur Folge hat $(-3+8=+5)$. Damit würde insgesamt eine Zunahme von 4 tkm erreicht, so daß diese Umverteilung ausscheidet.

Tabelle 32: Entfernungsmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	11	3	8	15
E_2	6	2	5	1
E_3	1	6	7	4

Tabelle 33: Anfangslösung

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	—	15^{+}	5^{-}	—	20
E_2	—	3^{-}	+	12	15
E_3	17	—	3	—	20
Bedarf t	17	18	8	12	

In Kurzform nimmt man die Bewertung durch Bildung der Summe der mit Vorzeichen versehenen km-Zahlen vor, wie es nachstehend für drei Felder der Tabelle 33 gezeigt ist.

Leerfeld	Umverteilungsweg	Bewertung
(32)	$(33)^- \rightarrow (32)^+ - (12)^- \rightarrow (13)^+$	$-7+6-3+8=+4$
(23)	$(13)^- \rightarrow (23)^+ - (22)^- \rightarrow (12)^+$	$-8+5-2+3=-2$
(21)	$(22)^- \rightarrow (21)^+ - (31)^- \rightarrow (33)^+ - (13)^- \rightarrow (12)^+$	$-2+6-1+7-8+3=+5$

Auch die Bewertungszahlen der übrigen Leerfelder der Anfangslösung haben positive Bewertungszahlen. Da nur eine negative Bewertungszahl eine Einsparung an tkm mit sich bringt, führt allein die Besetzung des Feldes (23) zu einer verbesserten Lösung. Der Umverteilungsweg ist in Tabelle 33 einschließlich der Vorzeichen eingezeichnet. Auf Grund der Mengenregel lassen sich drei Mengeneinheiten umverteilen. In Tabelle 34 ist die entsprechende Veränderung vorgenommen, die zur *1. verbesserten Lösung* führt.

Tabelle 34: Verbesserung (Optimallösung)

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	—	18	2	—	20
E_2	—	—	3	12	15
E_3	17	—	3	—	20
Bedarf t	17	18	8	12	

Die Bewertungszahlen der Leerfelder, die Tabelle 34 enthält, lauten:

$$\begin{array}{lll} (11):\ +9 & (14):\ +11 & (21):\ +7 \\ (22):\ +2 & (32):\ +\ 4 & (34):\ +1. \end{array}$$

Da alle Zahlen positiv sind, ist keine Verbesserung mehr möglich. Tabelle 34 stellt den *Optimalplan* des Problems dar. Aus seiner Feldbesetzung ergibt sich im Zusammenhang mit der Entfernungsmatrix (Tab. 32) das Minimum des Transportaufwandes:

$$G_{\min} = (18 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 12 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 3 \cdot 7)\ \text{tkm}$$
$$\underline{\underline{G_{\min} = 135\ \text{tkm}.}}$$

Wenn man für jeden Iterationsschritt den Transportaufwand berechnet — was im allgemeinen geschehen sollte —, so läßt sich G_{n+1} aus G_n einfacher nach folgender Regel ermitteln:

> Der neue Transportaufwand G_{n+1} ist gleich der Differenz aus dem alten Aufwand G_n und dem Produkt aus der Einsparung je transportierte Einheit und der umverteilten Menge.

Allerdings setzt diese Berechnung voraus, daß vorher kein Rechenfehler gemacht wurde.

3.3.3.3. Iteration nach der modifizierten Distributionsmethode

Da die Bewertung der Leerfelder nach der allgemeinen Distributionsmethode vor allem bei größeren Problemen sehr arbeitsaufwendig ist, wird sie bei der modifizierten[1]) Distributionsmethode unter Beibehaltung der Grundprinzipien so schematisiert, daß die Bestimmung aller Polygonzüge für die Besetzung der Leerfelder wegfällt und sich allein auf das für die Besetzung günstigste Feld reduziert.

[1]) modifizieren (lat.) abwandeln, auf das rechte Maß bringen

Das Verfahren wird, um Vergleichsmöglichkeiten zu geben, wieder an dem bereits gelösten Beispiel entwickelt, ausgehend von der Entfernungsmatrix (Tab. 35) und der Anfangslösung (Tab. 36).
Das abgeänderte Verfahren ermittelt für alle Felder **fiktive**[1]) **Kosten**, auch Potentiale[2]) genannt [29]; das sind Kennzahlen, die der Entfernungsmatrix zugeordnet werden und die eine relative Bewertung in bezug auf die Knotenpunkte ermöglichen.

Tabelle 35: Entfernungsmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	11	3	8	15
E_2	6	2	5	1
E_3	1	6	7	4

Tabelle 36: Anfangslösung

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	—	15	5	—	20
E_2	—	3	—	12	15
E_3	17	—	3	—	20
Bedarf t	17	18	8	12	55

Die Berechnung der fiktiven Kosten

Diese wird zunächst schrittweise durchgeführt.
Es ist eine Hilfstabelle nötig (Tab. 37), in die man unter besonderer Kennzeichnung (Kreise) die c_{ik} der in der Anfangslösung besetzten Felder einträgt. Diese Tabelle wird durch die Spalte der v_i und die Zeile der w_k ergänzt, deren Werte die Grundlage zur Ermittlung der fiktiven Kosten f_{ik} bilden. In Tabelle 38 sind in alle Leerfelder die Symbole für die noch *unbekannten* Zahlenwerte der f_{ik} eingetragen. Der Zusammenhang, der zwischen den f_{ik} *aller* Felder und den Hilfsgrößen v_i, w_k besteht, ist durch die Gleichung

$$\boxed{f_{ik} = v_i + w_k} \qquad \text{für alle } i \text{ und } k \tag{69}$$

festgelegt.

Tabelle 37

	V_1	V_2	V_3	V_4	v_i
E_1		3	8		
E_2		2		1	
E_3	1		7		
w_k					

Tabelle 38

	V_1	V_2	V_3	V_4	v_i
E_1	f_{11}	3	8	f_{14}	v_1
E_2	f_{21}	2	f_{23}	1	v_2
E_3	1	f_{32}	7	f_{34}	v_3
w_k	w_1	w_2	w_3	w_4	

[1]) fiktiv (franz.) angenommen, nur erdacht
[2]) Potential (lat.) Wirksamkeit, Einfluß

Für die Gleichung (69) sind aber, je nach der Art der Felder (ik), zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Für die **Knotenpunkte** muß

$$\boxed{f_{ik} = v_i + w_k = c_{ik}} \quad \text{sein;} \tag{69a}$$

2. für die **Leerfelder** aber gilt

$$\boxed{f_{ik} = v_i + w_k \lesseqgtr c_{ik}} \tag{69b}$$

Die erste Bedingung ermöglicht es, nach Tabelle 38 mit Hilfe der eingetragenen km-Zahlen (Knotenpunkte) die folgenden Gleichungen aufzustellen:

(1) $v_1 + w_2 = 3$
(2) $v_1 + w_3 = 8$
(3) $v_2 + w_2 = 2$
(4) $v_2 + w_4 = 1$
(5) $v_3 + w_1 = 1$
(6) $v_3 + w_3 = 7$

Das ist ein Gleichungssystem von 6 Gleichungen mit 7 Variablen (v_i und w_k). Es ist also unter der Annahme *einer freien* Variablen (Nichtbasisvariable), der ein bestimmter Wert zugeordnet werden kann, lösbar. Zur Vereinfachung der Rechnung wählt man den Wert Null für diese Nichtbasisvariable. Da es gleichgültig ist, welche der Variablen zur Nichtbasisvariablen gemacht wird, nimmt man zweckmäßig diejenige, zu der in Spalte oder Zeile die meisten Knotenpunkte gehören.

Im Beispiel wird v_1 gleich Null gesetzt. Damit ergeben sich für die anderen Variablen der Reihe nach die Werte

(1) $w_2 = 3$ (3) $v_2 = -1$ (6) $v_3 = -1$
(2) $w_3 = 8$ (4) $w_4 = 2$ (5) $w_1 = 2$.

Diese Werte werden in die vorbereitete Tabelle eingetragen, so daß sich Tabelle 39 ergibt.

Tabelle 39

	V_1	V_2	V_3	V_4	v_i
E_1	f_{11}	3	8	f_{14}	0
E_2	f_{21}	2	f_{23}	1	−1
E_3	1	f_{32}	7	f_{34}	−1
w_k	2	3	8	2	

Nunmehr können auch die $f_{ik} = v_i + w_k$ für die *Leerfelder* ausgerechnet werden.

$f_{11} = 0 + 2 = 2$ $f_{23} = -1 + 8 = 7$
$f_{14} = 0 + 2 = 2$ $f_{32} = -1 + 3 = 2$
$f_{21} = -1 + 2 = 1$ $f_{34} = -1 + 2 = 1.$

Tabelle 40 enthält neben den vorher berechneten v_i und w_k nun auch diese f_{ik}; sie stellt damit die vollständige *Matrix der fiktiven* Kosten dar.

Tabelle 40: f_{ik}-Matrix

	V_1	V_2	V_3	V_4	v_i
E_1	2	3	8	2	0
E_2	1	2	7	1	-1
E_3	1	2	7	1	-1
w_k	2	3	8	2	

Relative Bewertung der Felder

Durch die Subtraktion der f_{ik}-Matrix von der c_{ik}-Matrix (Entfernungsmatrix) ergibt sich die d_{ik}-Matrix der Differenzen, die als **Matrix der Feldbewertung** oder **Bewertungsmatrix** bezeichnet wird.

$$\underset{c_{ik}\text{-Matrix}}{\begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & 15 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}} - \underset{f_{ik}\text{-Matrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{d_{ik}\text{-Matrix}}{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 13 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

In allen drei Matrizen sind die Knotenpunkte besonders gekennzeichnet. Aus der Bewertungsmatrix ist ersichtlich, daß sie durch die Differenzbildung den Wert Null erhalten haben. Die Bewertungszahlen der Leerfelder sind größer oder kleiner als Null. Es kann auch vorkommen, daß die Bewertungszahl eines *Leerfeldes gleich Null* wird, was aber bei dem vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist.
Die Bewertungszahlen d_{ik} geben die Kostenveränderung bei der Umverteilung *einer Mengeneinheit* an. Die Besetzung von Leerfeldern mit

$d_{ik} > 0$ führt zu einer Verschlechterung des Planes: die „Kosten"[1]) werden, gemessen am bereits vorliegenden Plan, größer;

$d_{ik} < 0$ führt zu einem verbesserten Transportplan; die „Kosten" werden entsprechend niedriger;

$d_{ik} = 0$ ändert die „Kosten" nicht.

Wird ein mit Null bewertetes Leerfeld besetzt, so ergibt sich eine Variante des bereits ermittelten Planes, die im Falle der Optimallösung für die *Realisierung* des Transportplanes günstiger sein kann als die zuerst gefundene Lösung.

---

[1]) Die Bewertung durch fiktive Kosten ist auch bei der Berechnung des Transportaufwandes anzuwenden

Die Ermittlung der Bewertungsmatrix

Die in den einzelnen Schritten dargelegte Ermittlung der Matrix der Feldbewertung kann man praktisch so durchführen, daß eine kombinierte Matrix der c_{ik}, f_{ik} berechnet wird, aus der sich schnell und übersichtlich die d_{ik}-Matrix der Bewertung ergibt. Tabelle 41 und 42 zeigen diese beiden Matrizen.

Tabelle 41: Kombinierte c_{ik}, f_{ik}-Matrix

	1	2	3	4	v_i
1	11 / 2	3 / 3	8 / 8	15 / 2	0
2	6 / 1	2 / 2	5 / 7	1 / 1	−1
3	1 / 1	6 / 2	7 / 7	4 / 1	−1
w_k	2	3	8	2	

Tabelle 42: Bewertungsmatrix

d_{ik}	1	2	3	4
1	9	0	0	13
2	5	0	−2	0
3	0	4	0	3

Dabei wird die Matrix der c_{ik}, f_{ik} in der nachstehenden Reihenfolge aufgebaut:

1. Eintragung der c_{ik} in die oberen Dreieckfelder mit Kennzeichnung der Knotenpunkte;
2. Eintragung der $f_{ik} = c_{ik}$ für diese Knotenpunkte in die unteren Dreiecksfelder;
3. Berechnung der v_i und der w_k mit Hilfe der Knotenpunkte;
4. Berechnung der f_{ik} für die Leerfelder.

Die Differenzbildung $c_{ik} - f_{ik} = d_{ik}$ führt zur Matrix der Feldbewertung (Tab. 42).

Anmerkung: Da die Tabellen der fiktiven Kosten nur Hilfstabellen sind, kann man, wie es in den beiden letzten Tabellen ausgeführt ist, die Feldbezeichnung allein mit den entsprechenden Ordnungszahlen durchführen.

Hat man im Aufstellen der Bewertungsmatrix mit Hilfe der fiktiven Kosten einige Übung erlangt, so kann das Verfahren wesentlich gekürzt werden:
Die km-Matrix wird mit hinreichend großer Feldeinteilung und mit Kennzeichnung der Knotenpunkte abgeschrieben. Nachdem alle v_i und w_k berechnet sind, erfolgt für die Bewertung der Leerfelder *gleichzeitig* mit der Berechnung der f_{ik} die Differenzbildung $c_{ik} - f_{ik}$.
Da positive d_{ik} zu keiner Planverbesserung führen, interessiert nur ihr Vorzeichen, nicht aber ihr Zahlenwert. Deshalb versieht man in diesem Falle die km-Zahl des bewerteten Leerfeldes nur mit einem Pluszeichen (Tab. 43).
Ist dagegen $d_{ik} \leqq 0$, so wird die volle Differenzzahl zusätzlich in das entsprechende Feld geschrieben.

Tabelle 43 enthält diese Kurzform der Bewertung; sie hat dieselbe Aussagekraft wie Tabelle 42. Auch aus ihr ist ersichtlich, daß nur die Besetzung des Feldes (23) eine Planverbesserung mit sich bringen kann. Durch die Kennzeichnung der Knotenpunkte ist der Umverteilungsweg sofort sichtbar. Die Umverteilung von drei Mengeneinheiten (vgl. Anfangslösung Tab. 33) ergibt die *1. verbesserte Lösung* (Tab. 44).

Tabelle 43: Bewertungsmatrix

	1	2	3	4	v_i
1	11^+	③	⑧	15^+	0
2	6^+	②	$\boxed{5^{-2}}$	①	-1
3	①	6^+	⑦	4^+	-1
w_k	2	3	8	2	

Tabelle 44

	V_1	V_2	V_3	V_4	Kap. t
E_1	—	18	2	—	20
E_2	—	—	3	12	15
E_3	17	—	3	—	20
Bedarf t	17	18	8	12	

Aus ihr ist der Transportaufwand im Zusammenhang mit den km-Zahlen der Tabelle 35 zu berechnen:

$$G_1 = (18 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 12 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 3 \cdot 7)\ \text{tkm}$$

$$\underline{\underline{G_1 = 135\ \text{tkm.}}}$$

Um die Möglichkeit einer weiteren Verbesserung zu finden, wird eine neue Feldbewertung durchgeführt, deren Ergebnis Tabelle 45 ist.

Tabelle 45

	1	2	3	4	v_i
1	11^+	③	⑧	15^+	8
2	6^+	2^+	⑤	①	5
3	①	6^+	⑦	4^+	7
w_k	-6	-5	0	-4	

Da sich jetzt für alle Leerfelder $d_{ik} > 0$ ergibt, liegt, wie es schon mit der allgemeinen Distributionsmethode gefunden wurde, mit der 1. Verbesserung bereits der Optimalplan vor: $G_1 = G_{min}$.
Aus der Entwicklung des analytischen Lösungsverfahrens einer Transportaufgabe ist zu erkennen, daß den beiden Hauptteilen (Anfangslösung und schrittweise Verbesserung) wieder ein Algorithmus zugrunde liegt. Dieser besteht, ausgehend von der Anfangslösung in den beiden bis zur Optimallösung immer wiederkehrenden Operationen **Bewertung** und **Umverteilung**.
Der Ablauf der Berechnungen ist in dem Ablaufschema auf S. 285 noch einmal zusammengefaßt.

BEISPIEL

Vier Fabriken eines Bezirkes erzeugen ein gleiches Produkt, das von 6 zentralen Abnehmern gebraucht wird. Die Transportkosten je Einheit des Produktes sind für alle Routen von Fabrik zu Abnehmern in der Kostenmatrix (Tab. 46) zusammengestellt. Die Kapazitäten der Fabriken und die Bedarfshöhen der Abnehmer je Quartal sind die folgenden:

Kapazität	F_1	F_2	F_3	F_4
t	2300	1400	1700	1100

Bedarf	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
t	1300	700	900	1200	600	1800

Tabelle 46: Kostenmatrix (MDN je t)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
F_1	3	8	3	9	8	12
F_2	1	3	4	10	13	8
F_3	6	4	6	5	6	4
F_4	19	12	8	9	7	7

Es ist der optimale Transportplan für den Zeitraum eines Quartals aufzustellen; die entsprechenden minimalen Transportkosten sind zu berechnen.

Lösung: In der Tabelle für die Anfangslösung (Tab. 47) werden Kapazität und Bedarf in der Maßeinheit 100 t aufgenommen. Die Verwendung der aufsteigenden Indexmethode gewährleistet eine zulässige Anfangslösung mit $9 = 4 + 6 - 1$ von Null verschiedenen Basisvariablen.

Anmerkung: Die in Tabelle 47 hinter den einzelnen Mengen stehenden umrandeten (□) Zahlen geben die Reihenfolge an, in der die einzelnen Felder beim Aufstellen der Anfangslösung belegt wurden. Aus Tabelle 46 und Tabelle 47 ergeben sich die Gesamtkosten G_A.

$$G_A = 100\,(9 \cdot 3 + 12 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 13 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 11 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 7)\ \text{MDN}$$

$$\underline{\underline{G_A = 31\,200\ \text{MDN}}}$$

Ablaufschema des Transportalgorithmus

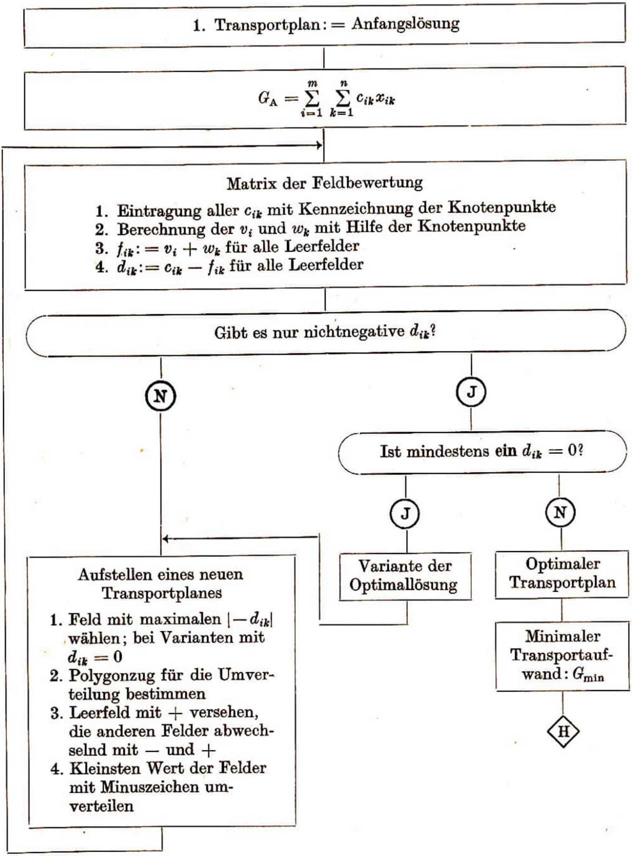


Tabelle 47: Anfangslösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	—	—	$9\,\boxed{3}$	$12\,\boxed{9}$	$2\,\boxed{8}$	—	23
F_2	$13\,\boxed{1}$	$1\,\boxed{2}$	—	—	—	—	14
F_3	—	$6\,\boxed{4}$	—	—	—	$11\,\boxed{5}$	17
F_4	—	—	—	—	$4\,\boxed{7}$	$7\,\boxed{6}$	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	65

Durch die Matrix der 1. Feldbewertung (Tab. 48) wird der für die Umverteilung günstigste Polygonzug (Tab. 49) gefunden, der das Feld (11) zum neuen Knotenpunkt macht. Eine Besetzung der Felder (12) oder (34) mit der Bewertungszahl Null würde eine Variante der Anfangslösung geben. Das läßt man hier unberücksichtigt, da die Berechnung von Varianten nur bei Optimallösungen sinnvoll ist.

Tabelle 48: 1. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6	v_i
1	3^-	$8\,\boxed{0}$	3	9	8	12^+	0
2	1	3	4^+	10^+	13^+	8^+	−5
3	6^+	4	6^+	$5\,\boxed{0}$	6^+	4	−4
4	19^+	12^+	8^+	9^+	7	7	−1
w_k	6	8	3	9	8	8	

Tabelle 49: Polygonzug für die 1. Umverteilung

	1	2	3	4	5	6
1	+				−2	
2	−13	+1				
3		−6				+11
4					+4	−7

In den Polygonzug sind die Feldbesetzungen eingetragen, damit die Menge, die umverteilt werden kann, schnell ersichtlich ist. Es sind hier 2 ME (d. s. 200 t), deren Umsetzung auf die *1. verbesserte Lösung* (Tab. 50) führt.
Die Ermittlung der Transportkosten G_1 ergibt

$$\underline{\underline{G_1 = 30600 \text{ MDN}}}.$$

Die 2. Feldbewertung (Tab. 51) zeigt, daß es zwei Möglichkeiten der Verbesserung gibt. Das absolut höher bewertete Feld (34) muß besetzt werden, da damit die größere Verminderung der Kosten je umverteilte Mengeneinheit verbunden ist. Den zugehörigen Polygonzug mit den entsprechenden Feldmengen zeigt Tabelle 52. Es werden 400 t mit einer Einsparung von 3 MDN je Tonne umverteilt. Daraus ergibt sich die *2. verbesserte Lösung* (Tab. 53).
Auch diese Lösung ist wieder zu bewerten (Tab. 54). Nunmehr sind alle Bewertungszahlen positiv, d. h., Tabelle 53 stellt den Optimalplan dar. Die minimalen Transportkosten betragen

$$\underline{\underline{G_{\min} = 29400 \text{ MDN}}}.$$

Tabelle 50: 1. verbesserte Lösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	2	—	9	12	—	—	23
F_2	11	3	—	—	—	—	14
F_3	—	4	—	—	—	13	17
F_4	—	—	—	—	6	5	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Tabelle 51: 2. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6	v_i
1	3	8^+	3	9	8^+	12^+	0
2	1	3	4^+	10^+	13^+	8^+	−2
3	6^+	4	6^+	5^{-4}	6^+	4	−1
4	19^+	12^+	8^+	$9\ \boxed{-2}$	7	7	2
w_k	3	5	3	9	5	5	

Tabelle 52: Polygonzug für die 2. Umverteilung

	1	2	3	4	5	6
1	+2			−12		
2	−11	+3				
3		−4		+		
4						

Tabelle 53: 2. verbesserte Lösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	6	—	9	8	—	—	23
F_2	7	7	—	—	—	—	14
F_3	—	—	—	4	—	13	17
F_4	—	—	—	—	6	5	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Tabelle 54: 3. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6
1	3	8^+	3	9	8^0	12^+
2	1	3	4^+	10^+	13^+	8^+
3	6^+	4^+	6^+	5	6^+	4
4	19^+	12^+	8^+	9^+	7	7
w_k	3	5	3	9	8	8

Die Bewertungszahl Null für Feld (15) in Tabelle 54 sagt aus, daß es für den Optimalplan noch eine Variante durch das Besetzen dieses Feldes gibt. Tabelle 55 und Tabelle 56 enthalten den Umverteilungsweg und den neuen Transportplan.

Tabelle 55: Polygonzug für die 3. Umverteilung

	1	2	3	4	5	6
1				−8	+	
2						
3				+4		−13
4					−6	+5

Tabelle 56: 2. Variante der Optimallösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	6	—	9	2	6	—	23
F_2	7	7	—	—	—	—	14
F_3	—	—	—	10	—	7	17
F_4	—	—	—	—	—	11	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Die Berechnung der Kosten nach Tabelle 56 führt auf das bereits gewonnene Ergebnis, wie es bei einer Variante sein muß.

$$G_{\text{Var}} = 29\,400 \text{ MDN} = G_{\min}$$

(Text zu den Tabellen 57 bis 64 auf S. 289 oben)

Tabelle 57: Kostenmatrix

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
F_1	3	8	3	9	8	12
F_2	1	3	4	10	13	8
F_3	6	4	6	5	6	4
F_4	19	12	8	9	7	7

Tabelle 58: Anfangslösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	+	—	9	12	−2	—	23
F_2	−13	+1	—	—	—	—	14
F_3	—	−6	—	—	—	+11	17
F_4	—	—	—	—	+4	−7	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Tabelle 59: 1. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6	v_i
1	3^{-3}	$8^{\boxed{0}}$	3	9	8	12^+	0
2	1	3	4^+	10^+	13^+	8^+	−5
3	6^+	4	6^+	$5^{\boxed{0}}$	6^+	4	−4
4	19^+	12^+	8^+	9^+	7	7	−1
w_k	6	8	3	9	8	8	

Tabelle 60: 1. verbesserte Lösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	+2	—	9	−12	—	—	23
F_2	−11	+3	—	—	—	—	14
F_3	—	−4	—	+	—	13	17
F_4	—	—	—	—	6	5	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Bei der praktischen Durchführung einer Berechnung erweist es sich als zweckmäßig, den durch die Feldbewertung bestimmten Polygonzug jeweils in die vorangehende Lösungstabelle einzutragen. Eine entsprechende Zusammenstellung der für die Handrechnung unbedingt nötigen Tabellen (Tab. 57 ··· 64) zeigt, wie eine solche Rechnung ohne Zwischennotizen durchzuführen ist.

Tabelle 61: 2. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6	v_i
1	③	8^+	③	⑨	8^+	12^+	0
2	①	③	4^+	10^+	13^+	8^+	−2
3	6^+	④	6^+	$\boxed{5^{-3}}$	6^+	④	−1
4	19^+	12^+	8^+	$9\,\boxed{-2}$	⑦	⑦	2
w_k	3	5	3	9	5	5	

Tabelle 62: 2. verbesserte Lösung
1. Variante der Optimallösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	6	—	9	$^-8$	$\boxed{+}$	—	23
F_2	7	7	—	—	—	—	14
F_3	—	—	—	$^+4$	—	$^-13$	17
F_4	—	—	—	—	$^-6$	$^+5$	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

Tabelle 63: 3. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	6	v_i
1	③	8^+	③	⑨	$\boxed{8^0}$	12^+	0
2	①	③	4^+	10^+	13^+	8^+	−2
3	6^+	4^+	6^+	⑤	6^+	④	−4
4	19^+	12^+	8^+	9^+	⑦	⑦	−1
w_k	3	5	3	9	8	8	

Tabelle 64: 2. Variante der Optimallösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Kap. 100 t
F_1	6	—	9	2	6	—	23
F_2	7	7	—	—	—	—	14
F_3	—	—	—	10	—	7	17
F_4	—	—	—	—	—	11	11
Bedarf 100 t	13	7	9	12	6	18	

AUFGABEN

160. Es ist der optimale Transportplan für die in Tabelle 65 gegebene Kostenmatrix, die zugleich die einschränkenden Randbedingungen enthält, zu berechnen.

161. Desgl. für Tabelle 66.

162. Desgl. (einschließlich der Varianten) für Tabelle 67.

163. Drei Fahrzeugparks P_i stellen ihre Fahrzeuge vier Baustellen B_k zur Verfügung. Die Fahrzeuge sind den Baustellen so zuzuordnen, daß die Gesamtweglänge der Anfahrt ein Minimum wird.

Es verfügt P_1 über 20, P_2 über 8 und P_3 über 13 Fahrzeuge, während B_1 4, B_2 als Großbaustelle 21, B_3 7 und B_4 9 Fahrzeuge benötigt. Die Entfernungen in Kilometern sind in Tabelle 68 enthalten.

Tabelle 65

	I	II	III	IV	a_i
1	3	5	6	12	62
2	4	7	9	7	58
3	13	3	9	12	76
4	8	8	12	15	43
b_k	16	85	112	26	

Tabelle 66

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
E_1	6	3	5	11	4	185
E_2	1	6	4	5	12	100
E_3	5	16	8	10	15	130
E_4	13	15	20	2	9	85
b_k	50	170	70	90	120	

Tabelle 67

	1	2	3	4	a_i
1	4	1	6	13	13
2	7	3	4	12	7
3	3	4	6	8	9
4	9	10	7	9	12
5	8	13	5	8	6
6	12	18	4	7	18
b_k	23	14	17	11	

Tabelle 68: Entfernungsmatrix

	B_1	B_2	B_3	B_4	
P_1	10	3	8	7	
P_2	3	7	4	1	
P_3	5	2	3	6	

164. Drei Kiesgruben beliefern sechs Verbraucher. Die Kostensätze des Transportes sind in Tabelle 69 angegeben.

Tabelle 69: Kostenmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
K_1	10	3	18	7	15	9
K_2	2	12	4	1	6	11
K_3	5	2	13	6	14	3

Für einen bestimmten Zeitraum beträgt das Aufkommen der Kiesgruben für

K_1	K_2	K_3
210 t	150 t	130 t,

der Verbrauch dagegen beläuft sich in demselben Zeitraum

für	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
auf	100 t	60 t	90 t	80 t	110 t	50 t.

Es ist der optimale Transportplan aufzustellen; die Minimalkosten sind diesem Plan entsprechend zu berechnen.

3.3.4. Sonderfälle

1. Sonderfall: Unausgeglichene Transportprobleme

In der Praxis stimmen im allgemeinen Bedarf und Kapazität nicht überein. In diesem Falle spricht man von **unausgeglichenen Problemen**. Diese lassen sich jedoch stets auf das Normalproblem zurückführen.

1. Fall: Überwiegt die Kapazität, so wird ein **fiktiver Verbraucher** eingeführt, dessen Bedarf gleich dem vorhandenen Produktionsüberschuß ist.

$$\sum a_i > \sum b_k$$

$$\sum a_i = \sum b_k + b_f.$$

Die Entfernungen des fiktiven Verbrauchers V_f vom Erzeuger bzw. die ihm zuzuschreibenden Transportkosten sind natürlich gleich Null zu setzen.
Der Transport von einem Erzeuger zum fiktiven Verbraucher bedeutet zunächst Lagerung bei diesem Erzeuger (die Lagerunkosten werden vernachlässigt).

2. Fall: Bei nicht gedecktem Bedarf wird ein **fiktiver Erzeuger** E_f eingesetzt, dessen Kapazität gleich der fehlenden Bedarfsmenge ist.

$$\sum a_i < \sum b_k$$
$$\sum a_i + a_f = \sum b_k.$$

Auch hier werden die Felder der Entfernungs- oder Kostenmatrix, die dem Erzeuger E_f zugeordnet sind, mit Null besetzt.
Fiktive Erzeuger dürfen nicht ohne weiteres eingesetzt werden, vor allem nicht bei umfassender Optimierung. Über die in diesem Falle bestehenden Möglichkeiten vgl. [27, S. 17].
Die Berechnung einer durch eine fiktive Spalte oder Zeile erweiterten Tabelle erfolgt wie im Normalfall. Allerdings werden bei der Bestimmung der Anfangslösung die Felder des *fiktiven* Verbrauchers bzw. Erzeugers *zuletzt* besetzt.

BEISPIEL

Drei Betonwerke L_i beliefern vier Baustellen B_k. Die Kostenmatrix gibt die jeweiligen Transportkosten von L_i zu B_k für die Einheit (ME) des transportierten Gutes in MDN an (Tab. 70).

Tabelle 70: Kostenmatrix

	B_1	B_2	B_3	B_4	
L_1	10	3	8	7	
L_2	3	7	4	1	
L_3	5	2	3	6	

Die Produktionshöhen der Betonwerke betragen in einem bestimmten Zeitraum für

L_1	L_2	L_3
230 ME	160 ME	140 ME

In demselben Zeitraum besteht folgender Bedarf der Baustellen

B_1	B_2	B_3	B_4
190 ME	60 ME	150 ME	40 ME

Es sind die minimalen Transportkosten mit Hilfe eines Optimalplanes zu ermitteln.

Lösung: Es ist

$$\begin{array}{r} \sum a_i = 530 \text{ ME} \\ \sum b_k = 440 \text{ ME} \\ \hline \sum a_i - \sum b_k = 90 \text{ ME} \end{array} \quad \text{und damit}$$

Die Tabelle der Anfangslösung muß deshalb zusätzlich die Spalte B_f des fiktiven Verbrauchers (Baustelle) mit einem Bedarf von 90 ME erhalten.
In Tabelle 71 ist die Reihenfolge der Feldbesetzung angegeben; daraus ist ersichtlich, daß das Feld $(1f)$ als letztes besetzt wurde.

Tabelle 71: Anfangslösung

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	Kap. ME
L_1	$70\boxed{6}$	—	$70\boxed{5}$	—	$90\boxed{7}$	230
L_2	$120\boxed{4}$	—	—	$40\boxed{1}$	—	160
L_3	—	$60\boxed{2}$	$80\boxed{8}$	—	—	140
Bedarf ME	190	60	150	40	90	

Für die Anfangslösung betragen die Transportkosten

$$\underline{\underline{G_A = 2020 \text{ MDN}.}}$$

Nunmehr läuft der Algorithmus wie bei einem normalen Problem ab.
Die Tabellen 72 ⋯ 75 enthalten die Berechnungen bis zur Optimallösung

$$\underline{\underline{G_{\min} = 1740 \text{ MDN}.}}$$

Die *erste Feldbewertung* (Tab. 72) enthält zwei Möglichkeiten der Verbesserung: Umverteilung auf Feld (12) und auf Feld (14). In Tabelle 73 sind die beiden Umverteilungswege eingezeichnet. Man sieht, daß sie völlig unabhängig voneinander sind. Deshalb kann man beide Umverteilungen gleichzeitig vornehmen.
Das Ergebnis liegt in Tabelle 74 vor.

Tabelle 72: 1. Feldbewertung

	1	2	3	4	f	v_i
1	10	$\boxed{3^{-4}}$	8	$\boxed{7^{-1}}$	0	0
2	3	7^+	4^+	1	0^+	−7
3	$5\boxed{0}$	2	3	6^+	0^+	−5
w_k	10	7	8	8	0	

Tabelle 73: Umverteilungswege nach Tab. 72

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f
L_1	−70	+	−70	+	90
L_2	+120			−40	
L_3		−60	+80		

Die *zweite Bewertung* (Tab. 75) bringt nur noch positive Bewertungszahlen außer der Null auf Feld (31). Deshalb liegt mit Tabelle 74 bereits die Optimallösung vor, die jedoch noch eine zweite Variante hat, die hier nicht ausgerechnet wurde.
Nach dem Ergebnis für das vorliegende Beispiel wird die Differenzmenge von 90 ME im Betonwerk L_1 gelagert und kann von da aus anderweitig Verwendung finden.
Zu bemerken ist noch, daß es bei größeren Problemen durchaus möglich ist, daß die Umverteilung auch eine Änderung in der Besetzung der fiktiven Spalte mit sich bringt.

Tabelle 74: 1. verbesserte Lösung (1. Variante der Optimallösung)

	B_1	B_2	B_4	B_4	B_f	Kap. ME
L_1	30	60	10	40	90	230
L_2	160	—	—	—	—	160
L_3	—	—	140	—	—	140
Bedarf ME	190	60	150	40	90	

Tabelle 75: 2. Feldbewertung

	1	2	3	4	f	v_i
1	10	3	8	7	0	0
2	3	7^+	4^+	1^+	0^+	-7
3	$\boxed{5^0}$	2^+	3	6^+	0^+	-5
w_k	10	3	8	7	0	

AUFGABE

165. Vier Erzeuger beliefern vier Verbraucher mit einem austauschbaren Gut. Die Kostenmatrix ist in Tabelle 76 gegeben. In einem Monat erzeugen

E_1	E_2	E_3	E_4
70 t	60 t	90 t	50 t

und verbrauchen

V_1	V_2	V_3	V_4
10 t	75 t	100 t	25 t.

Welches sind die minimalen Transportkosten?

Welche Mengen des erzeugten Gutes werden nicht ausgeliefert?

Tabelle 76: Kostenmatrix

	V_1	V_2	V_3	V_4	
E_1	3	7	6	16	
E_2	8	5	9	7	
E_3	14	3	10	12	
E_4	4	11	12	15	

2. Sonderfall: Ausgeartete Transportprobleme

Wie bei jedem Problem der Linearoptimierung liegt auch beim Transportproblem eine Ausartung vor, wenn in einer Zwischenlösung oder in der Optimallösung eine *Basisvariable* den Wert *Null* annimmt (vgl. S. 256).
In der Transporttabelle macht sich das dadurch bemerkbar, daß sich die Zahl der Knotenpunkte vermindert und weniger als $m + n - 1$ beträgt.
Eine solche Verminderung tritt immer nur dann auf, wenn zwei negativ anzusetzende Felder eines Umverteilungsweges mit der gleichen kleinsten Mengenzahl x_{ik} (Basisvariablen) belegt sind. Die Ursachen der Ausartung liegen also im allgemeinen auch in der vorangehenden Tabelle. Bild 78 zeigt das Prinzip eines solchen Umverteilungsfalles.

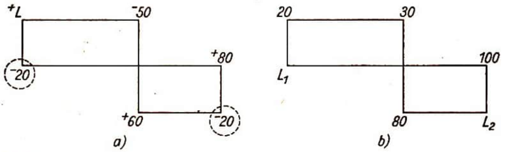


Bild 78

Bei der Art des Transportalgorithmus entsteht nun eine besondere Schwierigkeit dadurch, daß man nicht ohne weiteres erkennen kann, welche der beiden in Frage kommenden Variablen x_{ik} als Nichtbasisvariable und welche als Basisvariable mit dem Wert Null zu wählen ist. Das kommt daher, daß es prinzipiell gleich ist, bei welchem Feld die Umverteilung begonnen wird. Es steht nur fest, daß eines der entstandenen Leerfelder, L_1 oder L_2, mit Null belegt werden muß. Die Klärung erfolgt bei der Feldbewertung. Die fiktiven Kosten lassen sich nur bei entsprechendem Anschluß über die Knotenpunkte berechnen. Das führt zwangsläufig zur richtigen Wahl dieser Null-Basisvariablen. Stehen zwei Felder zur Wahl, so wählt man zweckmäßig dasjenige mit kleinstem c_{ik} zur Belegung mit Null. Diese Belegung wird dann nachträglich noch in die vorangehende Lösungsmatrix eingetragen. Falls es sich in der weiteren Berechnung eines Problems als notwendig erweist, kann auch diese Null wie jede andere Belegung umverteilt werden.

BEISPIEL

Als Beispiel wird von Aufgabe 157 die Kostenmatrix (Tab. 77) und die Anfangslösung (Tab. 78) übernommen (vgl. S. 296).
Die Feldbewertung (Tab. 79) weist nach, daß durch die Besetzung der drei Leerfelder (22) (23) und (25) eine Verbesserung des Planes erzielt werden kann.
In Tabelle 80 ist zuerst die Umverteilung von 60 ME auf das Feld (23) vorgenommen worden. Der Umverteilungsweg ist in Tabelle 78 bereits eingezeichnet. Die verbesserte Lösung (Tab. 80) enthält jetzt einen Knotenpunkt weniger. Die erforderliche Zahl von 7 Knotenpunkten ist nicht mehr vorhanden; es liegt eine *Ausartung* vor.

Tabelle 77: Kostenmatrix

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	10	2	9	15	8
B_2	12	3	5	7	9
B_3	13	6	4	4	11

Tabelle 78: Anfangslösung

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
B_1	60	70	—	—	40	170
B_2	40	—	+	−60	—	100
B_3	—	—	−60	+30	—	90
b_k	100	70	60	90	40	360

Tabelle 79: 1. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	v_i
1	10	2	9^+	15^+	8	0
2	12	3 $\boxed{-1}$	5 −2	7	9 $\boxed{-1}$	2
3	13^+	6^+	4	4	11^+	−1
w_k	10	2	5	5	8	

Tabelle 80: 1. verbesserte Lösung (ausgeartet)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
B_1	60	70	—	—	40	170
B_2	40	—	60	—	—	100
B_3	—	—	—	90	—	90
b_k	100	70	60	90	40	

Tabelle 81

	1	2	3	4	5	v_i
1	10	2	9	15	8	0
2	12	3	5	7	9	2
3	13	6	4	4	11	?
w_k	10	2	3	?	8	

Nunmehr ist die Feldbewertung, wie Tabelle 81 zeigt, nicht vollständig durchführbar. Die Berechnung der v_1 und w_k stockt bei v_3 und w_4, da kein *Anschluß-Knotenpunkt* vorhanden ist. Ein Leerfeld muß durch Besetzen mit Null zum Knotenpunkt werden; es kann nur (24) mit $c_{24} = 7$ oder (33) mit $c_{33} = 4$ sein. Wegen des kleineren Wertes wird c_{33} als Knotenpunkt gewählt. Die Tabellen 82 und 83 geben die verbesserte Lösung mit voller Zahl der Knotenpunkte und die vollständige Bewertung dieser Lösung wieder.
Die weitere Verbesserung, die nach Tabelle 83 möglich ist, wird in Aufgabe 166 berechnet

Tabelle 82:
1. verbesserte Lösung mit 7 Knotenpunkten

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	a_i
B_1	60	70	—	—	40	170
B_2	40	—	60	—	—	100
B_3	—	—	0	90	—	90
b_k	100	70	60	90	40	

Tabelle 83: 2. Feldbewertung

	1	2	3	4	5	v_i
1	10	2	9^+	15^+	8	0
2	12	$3\boxed{-1}$	5	7^+	$9\boxed{-1}$	2
3	13^+	6^+	4	4	11^+	1
w_k	10	2	3	3	8	

AUFGABEN

166. Die zweite Feldbewertung (Tab. 83) des vorangehenden Beispiels zeigt zwei Möglichkeiten der Planverbesserung.

Es ist die Verbesserung durchzuführen,

a) die ohne Ausartung möglich ist. Nach nochmaliger Bewertung ist die Aufgabe zu Ende zu führen. Was ergibt sich?

b) die auf eine nochmalige Ausartung führt. Die beiden Lösungswege sind zu vergleichen.

167. Für die in Aufgabe 158 (Tab. 30) ermittelte Anfangslösung ist die Optimallösung zu berechnen.

168. Desgl. für Aufgabe 159 (Tab. 31). Alle Umverteilungsmöglichkeiten, die sich bei den Bewertungen ergeben, sind zu untersuchen.

3.3.5. Weitere Lösungsverfahren

Als weitere Methode zur Bestimmung einer Anfangslösung wird vielfach das *Nordwestecken-Verfahren* genannt (z. B. [36]). Dieses erfordert aber im allgemeinen bei der nachfolgenden Rechnung eine größere Zahl von Iterationen als die Indexmethode.
Dagegen liefert die **Approximationsmethode**[1]) von VOGEL [27] meist Anfangslösungen, die der Optimallösung sehr nahe kommen und die bei gewissen Problemen bereits als gute Näherungslösungen ohne weitere Rechnung verwendet werden können.
Von den weiteren Verfahren zur Lösung des Transportproblems sei neben der **Ungarischen Methode** [29] noch die **Methode der lösenden Summanden** [24] von KANTOROWITSCH/LURJE (vgl. S. 204) genannt. Dieses fordert allerdings die volle Durchrechnung eines Problems bis zur

[1]) Approximation (lat.) Annäherung

Optimallösung, ohne daß man wie bei der Distributionsmethode zulässige Zwischenlösungen erhält. Das Verfahren weist aber zwei wesentliche Vorteile auf:

- es ist unempfindlich gegen Ausartungen und
- es ermöglicht eine **Nachrechnung** eines vorliegenden Optimalplanes bei notwendig werdender Anpassung an Veränderungen im Bedarf und im Aufkommen (d. h., es ist keine völlige Neuberechnung nötig).

Bei der Distributionsmethode muß man in solchen Fällen eine Neuberechnung durchführen.

3.4. Schlußbetrachtungen

Im folgenden soll noch ein kurzer Überblick über die weiteren Anwendungsmöglichkeiten der Linearoptimierung, über den Einsatz von Rechenautomaten für die Lösung großer Aufgaben und über weitere Optimierungsarten gegeben werden. Die Fülle der Probleme, die dabei behandelt werden könnte, sprengt bei weitem den Rahmen des vorliegenden Lehrbuches und greift auch weitgehend in Spezialgebiete der Technologie und der Ökonomie über.
Es ist deshalb nur möglich, unter ordnenden Gesichtspunkten die hauptsächlichsten Probleme in allgemeiner Formulierung zu erwähnen, ohne selbst hierbei vollständig sein zu können. Für den Einzelfall muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden[1]).

3.4.1. Anwendungsmöglichkeiten

Die Grundlage der Linearoptimierung ist das lineare **deterministische** Modell (vgl. S. 208), das *bekannte und konstante Parameter* (Koeffizienten und Absolutglieder) enthält. Dieses ist vor allem auf drei Problemkreise anwendbar.

Verteilungsprobleme

Zielsetzung: Es soll durch eine günstigste Verwendung von Einsatzgrößen, die in *beschränkten Mengen* vorhanden sind, das Optimum eines gestellten Zieles erreicht werden.
Hierzu gehören vor allem Probleme der *Produktionsplanung*. Zu den behandelten kommen noch die folgenden hinzu:
Für einen *Sortimentsplan* sind die Proportionen, in denen die einzelnen Erzeugnisse hergestellt werden sollen, vorgeschrieben (z. B. $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1{,}5 : 4$). Unter optimaler Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Einsatzgrößen ist dieser Sortimentsplan zu berechnen.
Bei *vorgeschriebenem Produktionsplan* können für die Herstellung der einzelnen Produktarten verschiedene Technologien angewendet werden. Die Selbstkosten sind dadurch zu minimieren, daß für jede Produktart die geeignetste Technologie bestimmt wird, wobei die Aufrechterhaltung der Produktionsauflage gesichert sein muß.

---
[1]) vgl. Literaturverzeichnis

Auswahlproblem

Zielsetzung: Einsatzgrößen, die zunächst *keiner Beschränkung* unterliegen, sollen so zusammengestellt werden, daß bei minimalem Verbrauch der Mittel oder bei geringsten Kosten, die durch den Verbrauch entstehen, ein gestelltes Ziel erreicht wird.

Solche Probleme sind u. a. die folgenden:

Ernährungspläne: Für eine zielgerichtete Ernährung (Diät) sind bestimmte Nahrungsmittel so zusammenzustellen, daß eine unbedingt erforderliche Menge an Nährwerten oder an Wirkstoffen bei minimalem Gesamtquantum oder bei minimalen Ausgaben für die Nahrung garantiert wird.

Futterpläne: Sie enthalten dasselbe Problem in bezug auf Futtermittel, deren Zusammensetzung so festzulegen ist, daß sie die auf jeden Fall notwendigen Nährwerte in vorgeschriebenen Mengen enthalten.

Pläne für sonstige Mischungen mit gegebenen Anforderungen, wie z. B. Heizstoffmischungen. Einzelne Bestandteile, deren Heizwerte bekannt sind, sollen so gemischt werden, daß ein vorgegebener bzw. maximaler Heizwert erreicht wird.
Ähnliches gilt auch für Gasmischungen, für Legierungen u. a.

Zuschnittprobleme: Durch geeignete Anordnung auszuschneidender Teile aus gegebenem Material ist ein minimaler Abfall zu erzielen.

Schichtpläne: Bei minimalem Einsatz von Arbeitskräften müssen die Forderungen eines Schichtplanes erfüllt werden, wobei im allgemeinen noch weitere Bedingungen auftreten als die im Beispiel (S. 263) angeführten.

Die beiden genannten Problemkreise erfordern eine Lösung mit dem allgemeinen Simplexalgorithmus, während der folgende dritte Problemkreis, soweit er lineare Probleme betrifft, mit dem Transportalgorithmus gelöst werden kann.

Zuteilungsprobleme

Zielsetzung: Bei *beschränkten Mengen* vorhandener Einsatzgrößen ist eine *optimale Zuteilung der Mengen* so vorzunehmen, daß bekannte Forderungen bei minimalem Aufwand befriedigt werden.
Neben dem besprochenen allgemeinen Transportproblem, das auch für die Zuführung elektrischer Energie zu den Verbraucherzentren Anwendung findet, umfaßt das Zuteilungsproblem noch vielerlei verschiedene, z. T. erweiterte Probleme:

Das Transportproblem mit Kapazitätsbeschränkung

Dieses besteht darin, daß für einzelne Strecken des Transportplanes nur eine bestimmte Menge an Transportgut befördert werden kann. (Die Zahl der Knotenpunkte bleibt dann nicht mehr $m + n - 1$.)

Der zusammengesetzte Transportplan

Es wird nicht nur die Anfahrtstrecke der Wagen eines Wagenparks zu den ersten Einsatzorten minimiert (vgl. Aufg. 163), sondern Hin- *und* Rückfahrt für den Fall, daß die letztere von einem anderen als dem ersten Einsatzort erfolgt.

Die Leerfahrtminimierung

Diese verlangt eine Minimierung aller Leerfahrten von der Anfahrt eines Fahrzeuges über die Leerfahrten zwischen Entlade- und Beladestellen bis zur Rückkehr in den Standort.

Das Standortproblem

Das Optimierungskriterium für die Lösung dieses Aufgabenkomplexes ist die Lage eines Betriebes, eines Kühlhauses o. ä. sowohl zu den Liefer- als auch zu den Abnehmerbetrieben. Die Lösung erfolgt als sogenanntes *mehrstufiges* Transportproblem[1]).

3.4.2. Der Einsatz von Rechenautomaten

Viele Praxisprobleme sind so umfangreich, daß sie mit dem **Rechenautomaten** gelöst werden müssen.

Der in der DDR vor allem zur Verfügung stehende Digitalrechner ZRA I (Zeiß-Rechen-Automat I) hat aber eine verhältnismäßig beschränkte Speicherkapazität (vgl. 5.3.12.). Es ist deshalb wichtig zu wissen, welchen Begrenzungen die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Variablen unterliegen, wenn Modelle der Linearoptimierung mit diesem Automaten berechnet werden sollen.

Für die allgemeinen Probleme der Linearoptimierung lautet die einschränkende Ungleichung[2])

$$\boxed{(m + 2)\,(n + 3) \leqq 3755} \tag{70}$$

mit m als Anzahl der Nebenbedingungen und n als Anzahl der Entscheidungsvariablen. Für eine bestimmte Zahl der Nebenbedingungen läßt sich nach (70) die mögliche Anzahl der Entscheidungsvariablen berechnen, z. B.

$m =$	10	15	30
$n \leqq$	309	217	114

Die entsprechende Ungleichung[2]) für Transportprobleme mit m Lieferwerken und n Verbrauchern heißt

$$\boxed{(m + 4)\,(n + 6) \leqq 3735} \tag{71}$$

[1]) In der Weiterentwicklung der Lösung dieses Problems bemüht man sich allerdings, nicht nur die Transportfrage, sondern auch Investitionsfragen u. a. mit einzubeziehen

[2]) Die Kapazitätsbegrenzungen sind außer vom Automaten auch vom Programm abhängig; es gibt Programme für spezielle Lösungsmethoden, bei denen die Grenzen höher liegen

Hier sieht die Zuordnung zu denselben Werten von m folgendermaßen aus:

$m =$	10	15	30
$n \leqq$	260	190	103

Um trotz der verhältnismäßig kleinen Speicherkapazität des ZRA I auch größere als die durch (70) und (71) begrenzten Probleme rechnen zu können, wird z. B. hinsichtlich der Produktionsplanung daran gearbeitet, den Automaten durch besondere Formen der Dateneingabe für die Verarbeitung einer größeren Zahl von Daten zu erschließen [25].
Bei Transportproblemen reduziert man die Koeffizientenmatrix vor der Berechnung, soweit es möglich ist. Das kann erreicht werden, wenn Lieferbeziehungen durch die gegenseitige Lage von Erzeuger zu Verbraucher oder durch bestehende *notwendige* Vereinbarungen bereits festgelegt sind. Dann können (unter gleichzeitiger Korrektur von Kapazität und Bedarf) die entsprechenden Spalten- oder Zeilenvektoren aus der Matrix gestrichen werden. Außerdem ist es möglich, durch das Zusammenfassen verschiedener, sehr nahe beieinanderliegender Verbraucher die Variablenzahl herabzusetzen.
Die Lösungsverfahren der Linearoptimierung sind größtenteils für den ZRA I programmiert; die Programme liegen in den Rechenzentren vor.

3.4.3. Weitere Optimierungsarten

Die Linearoptimierung gehört als mathematische Methode, die für Planungsfragen Anwendung findet, zusammen mit anderen Methoden in das Gebiet der **Planungsforschung**, das auch unter dem Namen **Operations Research**[1]) bekannt ist.
Sie ist von allen Verfahren, die mit diesem Oberbegriff umfaßt werden, das ausgereifteste und hat *bis jetzt* in der Praxis die breiteste Anwendung gefunden.
Die Voraussetzungen, die für das entsprechende Modell notwendig sind, werden in der Praxis weitgehend erfüllt oder können in guter Näherung als erfüllt betrachtet werden. Wenn das aber nicht mehr der Fall ist, gibt es weitere Methoden der Optimierung, die dann angewendet werden können.

Die parametrische Optimierung

Es kommt in der Praxis häufig vor, daß für einen mit den Mitteln der Linearoptimierung errechneten Optimalplan die Parameter nicht *dauernd konstant* bleiben, sondern sich im Planungszeitraum ändern. Dann entsteht die Frage, ob und in welchem Maße der Plan an Realität verliert.
In zwei Spezialfällen kann das Problem mit Hilfe der Simplexmethode gelöst werden, und zwar sogar so, daß der bereits vorliegende Plan als Grundlage der Untersuchung genommen werden kann. Dadurch erübrigt sich eine völlige Neuberechnung.

---

[1]) operation (engl.) Untersuchung, Forschung
research (engl.) Verfahren, Wirkung

Die eine Form der Nachrechnung ist möglich, wenn sich nur die *Koeffizienten der Zielfunktion* ändern. Von der Simplextabelle her gesehen heißt das, daß allein die letzte Zeile eine Veränderung erfährt. Diese besteht darin, daß zu den entsprechenden Elementen ein additiver Parameter hinzukommt; deshalb heißt dieser spezielle Fall der linearen Optimierung auch *parametrische Optimierung*. Geometrisch bedeutet die alleinige Änderung der Koeffizienten in der Gleichung der Zielfunktion die Beibehaltung des Bereichs der zulässigen Lösungen. Bei einer Zielfunktion im R_2 ändert sich mit den Koeffizienten die Richtung der Zielgeraden. Der zusätzliche Parameter in der z-Zeile der Tabelle gibt an, innerhalb welcher Grenzen die Koeffizientenwerte liegen können, ohne daß eine bereits vorliegende Ecklösung aufgegeben werden muß, und für welche Parameterwerte eine andere Ecklösung eintritt. Der Optimalwert verändert sich natürlich in jedem Fall, während, wie dargelegt, die Struktur des Planes in gewissen Grenzen erhalten bleiben kann.

Nehmen dagegen in einem Planzeitraum allein die *Absolutglieder der Nebenbedingungen* andere Werte an, so kann in diesem zweiten Falle die parametrische Optimierung auf das *duale* Problem ebenso angewendet werden wie vorher auf das primale.
Wenn sich jedoch die *Koeffizienten der Nebenbedingungen* ändern, so führt das zu sehr komplizierten Problemen, für die eine Zurückführung auf die Linearoptimierung nicht mehr möglich ist.

Die konvexe Optimierung

Die Bedingung der *Linearität* der Zielfunktion und der Nebenbedingungen ist nicht für alle Probleme der Praxis aufrechtzuerhalten. Modelle, für die eine derartige Abweichung zutrifft, werden mit Hilfe der **nicht-linearen Optimierung** gelöst.

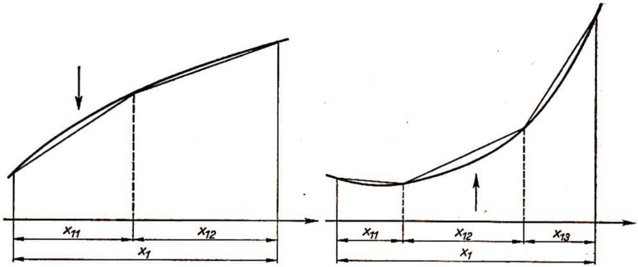


Bild 79

Aber auch hier gibt es in gewissen Grenzen einen Spezialfall, auf den die Linearoptimierung noch anwendbar ist. Das trifft zu, wenn *die Zielfunktion des Modells nicht mehr linear ist, die Nebenbedingungen aber noch lineare Gleichungen oder Ungleichungen* sind.

Die graphische Darstellung einer Zielfunktion mit zwei Variablen ergibt dann nicht mehr eine Gerade, sondern eine gekrümmte Kurve. Ist diese Kurve bei einem Maximalproblem von oben konvex und bei einem Minimalproblem von unten konvex (Bild 79), so kann man sie abschnittsweise durch Sehnen einer Geraden hinreichend annähern. Die aus Bild 79 ersichtliche Unterteilung bedeutet durch die dann notwendig werdende Zerlegung von x_1 in x_{1k} mit $k = 1, 2, \ldots$ eine Vermehrung der Zahl der Variablen. Damit erhöht sich der Rechenaufwand z. T. beträchtlich.
Wendet man auf das so zerlegte Problem die Linearoptimierung an, die wegen der Krümmungsart der Kurve konvexe Optimierung heißt, so ergibt sich eine gute Näherungslösung. Im Falle starker Krümmung ist das Verfahren aber nicht mehr anwendbar, und man muß zur nicht-linearen Optimierung übergehen.

Die dynamische Optimierung

Diese befaßt sich mit *zeitabhängigen* linearen wie nicht-linearen Problemen.
Die Bestimmung der Parameter, also der Ausgangsdaten, als Grundlage des Modells stellt den Techniker, Technologen und Ökonomen vor noch größere Schwierigkeiten als bei den vorgenannten Problemen einschließlich der Linearoptimierung mit ihren Regelfällen. Um für die dynamische Optimierung brauchbare Ausgangsdaten zu erhalten, stellt die Mathematik ein weiteres Hilfsmittel mit den Methoden der *statistischen Analyse* zur Verfügung (vgl. Teil 4.).

Die ganzzahlige Optimierung

In den Fällen der Linearoptimierung, in denen die Entscheidungsvariablen Symbole für eine gesuchte Anzahl sind, müssen die für solche Probleme berechneten Lösungen ganzzahlig sein.
Das *Verfahren von* Gomory ermöglicht es, daß eine bereits ermittelte Optimallösung, die nicht ganzzahlig ist, schrittweise in eine solche umgerechnet werden kann [33].

Es muß noch besonders betont werden, daß der Wert *aller* Verfahren, die eine quantitative Erfassung und optimale Lösung von Problemen der Praxis ermöglichen, mit der Güte und Zuverlässigkeit der verwendeten Parameter steht und fällt. Jede Nachlässigkeit bei ihrer Ermittlung mindert den Wert einer Berechnung oder macht sie völlig wertlos.

Die Planungsforschung führt schließlich über ihr eigentliches Gebiet der Lösung von Planungsaufgaben hinaus in das Gebiet der **Kybernetik**[1]). Diese wendet mathematische Modelle, die in der Planungsforschung entwickelt wurden, zur Lösung der ihr eigenen und sehr verzweigten Fragestellungen an.
Andererseits aber bestehen zwischen den in der Technologie und Ökonomie wichtigen mathematischen Theorien Zusammenhänge, die kybernetischen Charakter tragen [32, 38]. Die wissenschaftliche Forschung wird auf diesen Gebieten noch über die bereits bestehenden Erkenntnisse hinaus zu Ergebnissen kommen, die sich weitgehend auf die Praxis auswirken können.

---

[1]) Kybernetik (griech.) Kunst des Steuermanns; G. Klaus: „Kybernetik ist die Theorie der dynamischen, selbstregulierenden und selbstorganisierenden Systeme“

4. Mathematische Grundlagen der Statistik

4.1. Grundbegriffe

4.1.1. Einführung

Zur Lenkung und Leitung technischer und ökonomischer Prozesse kommt man im gegenwärtigen Zeitpunkt nicht mehr ohne Anwendung der Statistik aus. Die sich ständig weiterentwickelnde Automatisierung des Produktionsablaufes, die Kompliziertheit der innerbetrieblichen sowie der gesamtvolkswirtschaftlichen Verflechtungen erfordern daher von jedem Ingenieur und Ökonomen anwendungsbereite mathematisch-statistische Kenntnisse. Sie dienen dazu, naturwissenschaftliche, technologische und sozialökonomische Vorgänge quantitativ zu erfassen, sie zu untersuchen und qualitativ zu beurteilen.
Das Anwendungsgebiet der Statistik und ihrer mathematischen Verfahren reicht sehr weit; es erstreckt sich, von der Industrie ausgehend, über das Verkehrswesen, den Handel, die nichtmateriellen Bereiche (z. B. Sport und Gesundheitswesen) bis zur Auswertung der verschiedensten Fragen, die die Bevölkerungsbewegung betreffen. Die Statistik bildet somit ein unentbehrliches Hilfsmittel für eine exakte Analyse und Planung auf allen Gebieten der Volkswirtschaft.
Die praktischen Verfahren der Statistik beruhen auf mathematischen Methoden. Diese sollen in den nachfolgenden Ausführungen vermittelt werden. Vorher wird auf das Rechnen mit zwei wichtigen Symbolen, dem **Summenzeichen** und dem **Produktzeichen**, eingegangen. Die entsprechenden Rechenregeln sind sowohl für das Verständnis dieses Lehrbuchteiles als auch für das weiterführende Studium statistischer, wirtschaftsmathematischer und spezieller ökonomischer Literatur wichtig.

4.1.2. Das Summenzeichen

4.1.2.1. Die Bedeutung des Summenzeichens

Das bekannte *Summenzeichen* $\sum$ ist ein Kurzzeichen zur Symbolisierung einer Summe. Der Vorteil in der Anwendung dieses Symbols besteht darin, daß man mit ihm umfangreiche Summenausdrücke in eine kurze und übersichtliche Form bringen und mit diesen bestimmte Rechenoperationen ausführen kann, ohne *die Summe selbst zu kennen.* Beispielsweise kann die Summe der ersten zehn Kubikzahlen folgendermaßen geschrieben werden:

$$1 + 8 + \cdots + 729 + 1000 = \sum_{x=1}^{10} x^3$$

Dabei ist jedoch zu beachten, daß die **Summationsvariable** (hier x) nur ganzzahlige Werte ($x \in G$)[1]) annehmen darf. Um die betreffende Summe genau definieren zu können, sind die *untere* und die *obere* Summationsgrenze anzugeben. Belegt man die Summationsvariable mit derjenigen ganzen Zahl, die untere (obere) Summationsgrenze ist, so erhält man den ersten (letzten) Summanden der Summe.
Umgekehrt gelangt man von der symbolischen Schreibweise zur ausführlich geschriebenen Summe, indem man die Summationsvariable eine (im allgemeinen echte) Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen durchlaufen läßt. Diese Teilmenge beginnt mit dem Zahlwert der unteren Grenze und schließt mit dem der oberen Grenze.
Die folgenden Beispiele zeigen die Anwendung des Summenzeichens:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{x=1}^{6} 2x,$$

$$-2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 = \sum_{\lambda=1}^{6} (-2)^\lambda,$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \frac{6}{11} + \frac{7}{13} = \sum_{x=1}^{7} \frac{x}{2x-1} = \sum_{x=0}^{6} \frac{x+1}{2x+1},$$

$$\sum_{\lambda=4}^{7} (2\lambda - 1) = \sum_{\lambda=3}^{6} (2\lambda + 1) = 7 + 9 + 11 + 13.$$

Vielfach ist es aber üblich und auf Grund der Aufgabenstellung auch nötig, die einzelnen Summanden durch ein mit Index versehenes allgemeines Zahlensymbol darzustellen, wie es in den vorangegangenen Teilen des Lehrbuches bereits verwendet wurde. Dann stehen am Summensymbol die Grenzen des *Summationsindexes*, der nunmehr nur dem Bereich der natürlichen Zahlen angehören kann.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i,$$

$$a_5 b_5 + a_6 b_6 + \cdots + a_{15} b_{15} = \sum_{i=5}^{15} a_i b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{8} b_i^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_8^2,$$

$$\sum_{i=4}^{6} \frac{b_i}{a_i} = \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_6}{a_6}.$$

---

[1]) G ist das Symbol für den Bereich der ganzrationalen Zahlen; vgl. [1]

Allgemein:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad \begin{matrix} m \in N \\ n \in N \end{matrix} \qquad m < n} \tag{72}$$

Die Anzahl der Glieder dieser Summe beträgt $(n - m + 1)$, mit m als unterer und n als oberer Summationsgrenze.
Mitunter wird eine andere, auf GAUSS zurückgehende Summensymbolik verwendet. Man schreibt dann an Stelle von

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{auch} \quad [a],$$

so daß gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = [a].$$

Gelesen: Summe aller a; das bedeutet die Summation sämtlicher auftretenden a_i-Werte.

4.1.2.2. Die Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen

Wie in 4.1.2.1. ausgeführt wurde, können bei Verwendung des Summenzeichens mit den allgemeinen Termen bestimmte Rechenoperationen durchgeführt werden, ohne daß die einzelnen Summanden oder die Summe selbst bekannt sind. Dies geschieht auf Grund der nachfolgend abgeleiteten Rechenregeln, die auch in ihrer Umkehrung gültig sind.

1. Regel

Ist über eine endliche Anzahl von Summen zu summieren, so kann man auch über jeden Summanden dieser Summen einzeln summieren und danach die sich ergebenden Zwischensummen addieren.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{73a}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \end{aligned}$$

Für die *Subtraktion* gilt die entsprechende Regel:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{73b}$$

Es ist dabei zu beachten, daß diese Rechenregeln nur für die *Addition* und *Subtraktion* von *Summen* gelten. Ist über ein Produkt zu summieren,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i,$$

so sind stets zuerst die Multiplikationen auszuführen und anschließend die Produkte $a_i \cdot b_i$ zu addieren.
Es gilt somit allgemein

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \quad (n > 1)}\ ^{1)} \tag{74}$$

2. Regel

Steht hinter einem Summenzeichen im allgemeinen Summanden ein **konstanter Faktor**, so kann dieser vor das Summensymbol geschrieben werden.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{75}$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \cdots + c \cdot a_n =$$

$$= c \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3. Regel

Sind zwei mit Summensymbolen geschriebene Summen zu addieren, so können diese durch eine Summe ausgedrückt werden, wenn die allgemeinen Summanden übereinstimmen und die untere Grenze der zweiten Summe sich unmittelbar an die obere Grenze der ersten Summe anschließt. Als Summationsgrenzen werden dann die untere Grenze des ersten und die obere Grenze des zweiten Terms gesetzt.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (m < n)} \tag{76}$$

[1]) Es ist zu überlegen, welche Belegungen für a_i und b_i in dieser Formel das Gleichheitszeichen als Sonderfall zulassen.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n) =$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Schließt sich die untere Grenze der zweiten Summe nicht unmittelbar an die obere Grenze der ersten Summe an, so gilt

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{m} a_i \qquad (k < m < n)} \tag{77a}$$

und

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{k-1} a_i \qquad (m < k < n)} \tag{77b}$$

Beweis:

für $k < m < n$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) +$$
$$+ (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) +$$
$$+ (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{m} a_i$$

für $m < k < n$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n) =$$
$$= [a_1 + a_2 + \cdots + a_m + (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{k-1}) +$$
$$+ a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n] - (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{k-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{k-1} a_i$$

4. Regel

Steht hinter einem Summenzeichen nur eine **Konstante**, so kann das Summensymbol weggelassen werden, wenn man die Konstante mit der Anzahl der Summanden multipliziert.

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1) \cdot c \qquad (m < n)} \tag{78}$$

Beweis:

$$\sum_{i=m}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} c - \sum_{i=1}^{m-1} c = \underbrace{(c + c + \cdots + c)}_{n \text{ Summanden } c} - \underbrace{(c + c + \cdots + c)}_{(m-1) \text{ Summanden } c} =$$

$$= \underbrace{c + c + \cdots + c}_{[n-(m-1)] \text{ Summanden } c} = (n - m + 1) \cdot c.$$

5. Regel

Ist eine endliche Summe von Funktionstermen zu differenzieren, so kann jeder Term einzeln differenziert und danach die Summe gebildet werden.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_i(x)} \tag{79}$$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_1(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_2(x) + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_i(x)$$

4.1.2.3. Die Transformation des Summationsindexes

In vielen Fällen macht sich bei der Anwendung des Summensymbols eine *Transformation des Summationsindexes* erforderlich, um mit den gegebenen Summen leichter weiterrechnen zu können. Diese Transformation führt zu **keiner** wertmäßigen Veränderung der Summe und deren Glieder, sondern stellt lediglich eine formale Umgestaltung der Summenausdrücke dar.

Hat man in der Summe

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad (m < n)$$

den Summationsindex i auf den neuen Index k entsprechend der *Transformationsgleichung* $i = k - c + m$ zu transformieren, wobei c eine Konstante darstellt, so ergibt sich als neuer allgemeiner Summand a_{k-c+m}. Aus $i = m$ folgt dann für die untere Summationsgrenze $m = k - c + m$ und somit $k = c$; für $i = n$ geht die obere Grenze über in $n = k - c + m$, das heißt, $k = n + c - m$.
Es gilt daher

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=c}^{n+c-m} a_{k-c+m}} \tag{80}$$

Die Übereinstimmung der Glieder beider Summen zeigt die ausführliche Schreibweise:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n;$$

$$\sum_{k=c}^{n+c-m} a_{k-c+m} = a_{c-c+m} + a_{c+1-c+m} + \cdots + a_{n+c-m-c+m} =$$

$$= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

BEISPIELE

1. Man berechne aus den Zahlen

a_i	2	3	5	6	10
z_i	3	2	7	5	3

a) $\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot z_i,$

b) $\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot \sum_{i=1}^{5} z_i.$

Lösung:

a) $\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot z_i = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 3 = \underline{\underline{107}}$

b) $\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot \sum_{i=1}^{5} z_i = (2 + 3 + 5 + 6 + 10) \cdot (3 + 2 + 7 + 5 + 3) = \underline{\underline{520}}$

2. Es ist zu berechnen

$$\sum_{x=1}^{6} (2x + 5) + \sum_{x=1}^{6} (3x - 4).$$

Lösung:

$$\sum_{x=1}^{6} (2x + 5) + \sum_{x=1}^{6} (3x - 4) = \sum_{x=1}^{6} (2x + 5 + 3x - 4) = \sum_{x=1}^{6} (5x + 1) =$$

$$= 5 \sum_{x=1}^{6} x + \sum_{x=1}^{6} 1 = 5 \cdot 21 + 6 \cdot 1 = \underline{\underline{111}}$$

3. Man transformiere in dem Ausdruck

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (m < n)$$

den Summationsindex i auf k mittels der Transformationsgleichung $i = k + m - 2$.

Lösung:

allgemeiner Summand	a_{k+m-2}
untere Grenze	$m = k + m - 2 \rightarrow k = 2$
obere Grenze	$n = k + m - 2 \rightarrow k = n + 2 - m$

Es gilt also

$$\underline{\underline{\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=2}^{n+2-m} a_{k+m-2}}}\,.$$

4. Man berechne

$$\sum_{i=5}^{12} a,$$

wobei unter a eine Konstante verstanden werden soll.

Lösung:

$$\sum_{i=5}^{12} a = (12 - 5 + 1) \cdot a = \underline{\underline{8a}}$$

4.1.2.4. Doppelsummen

In vielen praktischen Aufgaben treten Anordnungen von Elementen in folgender Form auf:

$$\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & \ldots & b_n & S
\end{array}$$

wobei die Elemente Zahlenwerte oder Größen darstellen (vgl. 2.1).
Gelten nun in obiger Tabelle folgende Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen:

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} &= a_1 \\
a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} &= a_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} &= a_m
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{m1} &= b_1 \\
a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{m2} &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{mn} &= b_n\,,
\end{aligned}$$

so gilt allgemein

$$\text{(I)} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{für die } \textbf{Zeilensummen}$$

und

$$\text{(II)} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{für die } \textbf{Spaltensummen}.$$

Da nun weiterhin

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

bzw.

$$S = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{ist,}$$

folgt hieraus unter Verwendung der Gleichung (I) bzw. (II) für die Gesamtsumme

$$S = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \cdots + a_{m1} + \\ + a_{m2} + \cdots + a_{mn}$$

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}} \tag{81}$$

Ein Vergleich der beiden Doppelsummen $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$ und $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$ zeigt, daß die Reihenfolge der Summation vertauschbar ist.

AUFGABEN

169. Man berechne den Preisindex von LASPEYRES[1]) für vier Waren nach der Formel

$$I_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^{(1)} \cdot q_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} \cdot q_i^{(0)}}.$$

Dabei bedeuten

$p_i^{(1)}$ Preis der i-ten Ware im Berichtszeitraum

$p_i^{(0)}$ Preis der i-ten Ware im Basiszeitraum

$q_i^{(0)}$ Verbrauchsmenge der i-ten Ware im Basiszeitraum.

---

[1]) Unter dem Preisindex versteht man die Entwicklung der Preise ausgewählter Waren vom Basiszeitraum zum Berichtszeitraum unter Berücksichtigung der verbrauchten Mengen
LASPEYRES, ETIENNE; deutscher Statistiker, 1834 bis 1913

Folgendes statistisches Material ist gegeben

	Ware A	Ware B	Ware C	Ware D
$p_i^{(0)}$	–,50 MDN	1,60 MDN	1,05 MDN	2,50 MDN
$p_i^{(1)}$	–,45 MDN	1,25 MDN	1,– MDN	1,50 MDN
$q_i^{(0)}$	1000 kg	800 kg	1100 kg	100 kg

170. Es ist zu berechnen

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

für a) a_i: 1, 3, 4, 7, 2, 10; b) a_i: 3, 2, 6, 10, 13, 5.

171. Es ist der mittlere Fehler[1])

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \text{mit} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

für folgende Meßwerte zu berechnen:

x_i: 7, 9, 10, 12, 14.

172. Es sind folgende Reihen unter Verwendung des Summenzeichens darzustellen:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

b) $1/2 + 3/4 + 5/6 + 7/8 + 9/10 + 11/12$

c) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36$.

173. Man berechne die Ausdrücke

a) $\sum_{x=1}^{4} \frac{x}{2x+1}$ b) $\sum_{x=1}^{5} (6x^3 + 6)$.

174. Man berechne die lineare Streuung nach der Formel

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

aus dem Zahlenmaterial der Aufgabe 171.

[1]) Diese wie alle entsprechenden weiteren Aufgaben sollten mit fünfstelligen Logarithmen gerechnet werden. Die Lösungen zu den Aufgaben wie zu den Beispielen sind mit der vollen Ziffernfolge angegeben. Über das Runden bei der praktischen Auswertung vgl. 5.1.2.

4.1.3. Das Produktzeichen

4.1.3.1. Die Bedeutung des Produktzeichens

Das Produktzeichen Π[1] ist das Kurzzeichen für die Symbolisierung eines Produktes. Auch mit diesem Symbol lassen sich bestimmte Rechenoperationen ausführen, ohne daß das Produkt selbst oder die einzelnen Faktoren bekannt sind.

Allgemein wird das Produkt aller a_i $(i = m, m+1, \ldots, n)$ mit Hilfe des Produktzeichens Π wie folgt geschrieben:

$$\boxed{\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n \,, \quad \begin{matrix} m \in N \\ n \in N \end{matrix} \quad m < n} \tag{82}$$

Gelesen: Produkt aller a_i, von i gleich m bis n.

Der Term a_i stellt darin den *allgemeinen Faktor* mit i als *Multiplikationsindex* dar; m und n sind die *Multiplikationsgrenzen*. Die *Anzahl der Faktoren* des Produktes beträgt $(n - m + 1)$ mit m als unterer und n als oberer Grenze.

Ist zum Beispiel die Belegung

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 2, \quad a_5 = 12$$

gegeben, so folgt aus Formel (82), wenn $m = 1$ und $n = 5$,

$$\prod_{i=1}^{5} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 12 = \underline{\underline{1440}}.$$

Hat man dagegen das Produkt aus den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 zu bilden, so kann dies dargestellt werden durch

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = \prod_{x=1}^{6} (2x - 1).$$

Für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n folgt dann

$$\boxed{1 \cdot 2 \cdots n = n!\,^{2)} = \prod_{x=1}^{n} x} \tag{83}$$

4.1.3.2. Die Regeln für das Rechnen mit dem Produktzeichen

Analog zum Summenzeichen gibt es auch bei dem Produktsymbol bestimmte Rechenregeln, nach denen gerechnet werden kann, ohne daß das Produkt bzw. die einzelnen Faktoren näher bekannt sind.

---

[1] Π: Pi — großer Buchstabe für das P des griechischen Alphabets

[2] $n!$: gelesen „n Fakultät"

1. Regel

Ist eine endliche Anzahl von Produkten zu multiplizieren, so können auch die Multiplikanden und Multiplikatoren einzeln multipliziert und danach die sich ergebenden Zwischenprodukte miteinander multipliziert werden.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i} \qquad (84\,\text{a})$$

Beweis:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = (a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2) \cdots (a_n \cdot b_n) =$$
$$= (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

Für die *Division* gilt entsprechend:

Ist eine endliche Anzahl von Quotienten zu multiplizieren, so können auch die Dividenden und Divisoren einzeln multipliziert und danach die sich ergebenden Zwischenprodukte dividiert werden.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(a_i : b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i : \prod_{i=1}^{n} b_i} \qquad (84\,\text{b})$$

Es ist zu beachten, daß diese Rechenregeln nur für die *Multiplikation von Produkten und Quotienten* gelten! Sind dagegen *Summen* oder *Differenzen* zu multiplizieren,

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i),$$

so sind stets zuerst die Additionen bzw. Subtraktionen auszuführen, und anschließend ist zu multiplizieren.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) \neq \prod_{i=1}^{n} a_i \pm \prod_{i=1}^{n} b_i \quad (n > 1)}\ ^{1)} \qquad (85)$$

2. Regel

Steht hinter einem Produktzeichen ein **konstanter Faktor**, so kann dieser vor das Produktsymbol geschrieben werden, wenn man ihn mit der Anzahl der Faktoren des Produkts potenziert.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad (86)$$

[1]) Vgl. Fußnote S. 308

Beweis:

$$\prod_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = (c \cdot a_1) \cdot (c \cdot a_2) \cdots (c \cdot a_n) =$$
$$= \underbrace{(c \cdot c \cdots c)}_{n \text{ Faktoren } c} \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$$

3. Regel

Sind zwei mittels Produktzeichens geschriebene Produkte miteinander zu multiplizieren, so können diese durch *ein* Produktsymbol ausgedrückt werden, wenn die allgemeinen Faktoren übereinstimmen und die untere Grenze des zweiten Produkts sich unmittelbar an die obere Grenze des ersten Produkts anschließt. Als Multiplikationsgrenzen werden dann die untere Grenze des ersten und die obere Grenze des zweiten Produkts angesetzt.

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad (m < n)} \tag{87}$$

Beweis:

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_m)\,(a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n) =$$
$$= (a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Schließt sich die untere Grenze des zweiten Produktes nicht unmittelbar an die obere Grenze des ersten Produktes an, so gilt allgemein:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=k}^{m} a_i \qquad (k < m < n)} \tag{88a}$$

und

$$\boxed{\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i : \prod_{i=m+1}^{k-1} a_i \qquad (m < k < n)} \tag{88b}$$

Beweis:

für $k < m < n$:

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_m) \times$$
$$\times (a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n) =$$
$$= (a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n) \times$$
$$\times (a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_m) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=k}^{m} a_i$$

für $m < k < n$:

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} a_i = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_m) \cdot (a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_n) =$$

$$= [a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \cdot (a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{k-1}) \times$$

$$\times\ a_k \cdot a_{k+1} \cdots a_n] : (a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{k-1}) = \prod_{i=1}^{n} a_i : \prod_{i=m+1}^{k-1} a_i$$

4. Regel

Steht hinter einem Produktzeichen nur eine **Konstante**, so kann das Produktsymbol weggelassen werden, wenn man die Konstante mit der Anzahl der Faktoren potenziert. Die Anzahl dieser Faktoren ergibt sich nach der Vorschrift: Obere Grenze minus untere Grenze plus eins.

$$\boxed{\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1} \qquad (m < n)} \tag{89}$$

Beweis:

$$\prod_{i=m}^{n} c = \prod_{i=1}^{n} c : \prod_{i=1}^{m-1} c = \underset{n \text{ Faktoren } c}{(c \cdot c \cdots c)} : \underset{(m-1) \text{ Faktoren } c}{(c \cdot c \cdots c)} =$$

$$= \frac{c^n}{c^{m-1}} = c^{n-(m-1)} = c^{n-m+1}$$

AUFGABEN

175. Man berechne aus den Zahlen

a_i	2	3	5	6	10
z_i	3	2	7	5	3

a) $\prod_{i=1}^{5} (a_i + z_i)$

b) $\prod_{i=1}^{5} a_i + \prod_{i=1}^{5} z_i$.

176. Es ist zu berechnen

a) $\prod_{x=1}^{6} (2x + 5) \cdot \prod_{x=1}^{6} (3x - 4)$

b) $\prod_{i=4}^{7} 3$.

177. Man berechne aus den Zahlen

$$a_i\colon\ 3,\ 5,\ 4,\ 9$$

das geometrische Mittel nach der Formel

$$G = \sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} a_i}\,.$$

4.2. Die Mittelwerte

4.2.1. Die Bedeutung der Mittelwerte und ihre wichtigsten Arten

Die Mittelwerte spielen in der statistischen Analyse eine große Rolle. Man bezeichnet sie auch als statistische Maßzahlen. Der Mittelwert charakterisiert eine zu untersuchende Reihe von Meßwerten durch einen einzigen Wert und ermöglicht den Vergleich verschiedener Meßreihen, die dasselbe Merkmal betreffen (z. B. Zugfestigkeit, Durchmesser einer Welle, Montageleistung usw.).

Die für die Praxis wichtigsten Mittelwerte sind

1. das **arithmetische Mittel** ($\bar{x}$ oder A)
2. das **geometrische Mittel** ($\mathring{x}$ oder G)
3. das **quadratische Mittel** (Q)
4. das **harmonische Mittel** (H)
5. der **Zentralwert** oder **Median** ($\tilde{x}$ oder Z)
6. der **häufigste Wert**, das **Dichtemittel** oder der **Modalwert** (D).

Bei den ersten vier Mittelwerten gehen die einzelnen Beobachtungs- oder Meßwerte *wertmäßig* in die Berechnung des Mittels ein, während bei den beiden letzten Mittelwerten die Beobachtungswerte nur *nach ihrer Lage* innerhalb der Beobachtungsreihe berücksichtigt werden. Daher bezeichnet man den Zentralwert und den häufigsten Wert als *Mittelwerte der Lage.*

Mit diesen sechs statistischen Maßzahlen sind jedoch noch nicht alle Mittelwerte erfaßt; denn im mathematischen Sinne kann jeder Wert, der zwischen dem kleinsten und dem größten Wert einer Meßreihe liegt, als Mittelwert aufgefaßt werden.

Welcher Mittelwert im einzelnen bei einer statistischen Untersuchung heranzuziehen ist, hängt jeweils von der zu untersuchenden Erscheinung, von dem Zahlenmaterial und vom Untersuchungszweck ab.

4.2.2. Die für die Praxis wichtigsten Mittelwerte

4.2.2.1. Das arithmetische Mittel

Das **arithmetische Mittel** einer Reihe von Beobachtungswerten ist der bekannteste und in der statistischen Praxis am häufigsten benutzte Mittelwert. Er wird im allgemeinen Sprachgebrauch als *Durchschnittswert* bezeichnet und findet Anwendung zum Beispiel bei der Berechnung des durchschnittlichen Materialverbrauchs, der durchschnittlichen Produktion innerhalb eines bestimmten Zeitraumes, des durchschnittlichen Tagesumsatzes einer Verkaufsstelle, bei der Ermittlung des durchschnittlichen Monatslohnes pro Arbeiter, des durchschnittlichen Pro-Kopf-Verbrauchs an den einzelnen Nahrungs- und Genußmitteln sowie bei der Berechnung des Durchschnitts vieler technischer Meßreihen.

Das einfache arithmetische Mittel

Das einfache arithmetische Mittel wird berechnet, indem die Summe aller statistischen Beobachtungswerte durch ihre Anzahl dividiert wird.

Formelmäßig wird das **einfache arithmetische Mittel** aus den n Beobachtungswerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wie folgt definiert:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \tag{90a}$$

Unter Verwendung des Summensymbols:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{90b}$$

BEISPIEL

1. Bei der Untersuchung der Zugfestigkeit σ_B von Formstahl M 20 wurden folgende Meßwerte gefunden.

(kp/mm^2):	37,5	41,2	39,3	42,8	36,9
	38,5	39,8	38,9	37,1	38,4

Man berechne die durchschnittliche Zugfestigkeit aus diesen Meßwerten.

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(37{,}5 + 41{,}2 + 39{,}3 + 42{,}8 + 36{,}9 + 38{,}5 + 39{,}8 + 38{,}9 + 37{,}1 + 38{,}4)$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = 39{,}04}}$$

Die durchschnittliche Zugfestigkeit beträgt 39,04 kp/mm^2.

Das gewogene arithmetische Mittel

Das arithmetische Mittel tritt bei praktischen Berechnungen sehr oft in gewogener Form auf. Zur Herleitung dieser Formel soll von folgendem Beispiel ausgegangen werden.

BEISPIEL

2. Die Untersuchung der Bearbeitungszeit von 20 Stück eines bestimmten Erzeugnisses ergab

Stücknummer	Bearbeitungszeit in Minuten	Stücknummer	Bearbeitungszeit in Minuten
1	5,3	11	5,3
2	6,2	12	5,5
3	5,8	13	6,1
4	5,3	14	5,3
5	5,8	15	4,8
6	4,9	16	5,2
7	5,3	17	5,3
8	5,8	18	6,1
9	5,8	19	4,9
10	4,9	20	5,2

Es ist die durchschnittliche Bearbeitungszeit je Stück dieses Erzeugnisses zu berechnen.

Lösung: Da einzelne Bearbeitungszeiten mehrmals auftreten, kann folgende *primäre Verteilungstafel* aufgestellt werden:

Bearbeitungszeit in Minuten	Häufigkeit des Auftretens
4,8	einmal
4,9	dreimal
5,2	zweimal
5,3	sechsmal
5,5	einmal
5,8	viermal
6,1	zweimal
6,2	einmal

Statt nach Formel (90a, b) sämtliche Beobachtungswerte zu addieren und durch ihre Anzahl (20) zu dividieren, gelangt man auf den gleichen Durchschnitt, wenn man jede Bearbeitungszeit mit der **Häufigkeit** ihres Auftretens multipliziert, diese Produkte addiert und durch die Gesamtzahl aller in die Untersuchung einbezogenen Erzeugnisse dividiert.

$$\bar{x} = \frac{4{,}8 \cdot 1 + 4{,}9 \cdot 3 + 5{,}2 \cdot 2 + 5{,}3 \cdot 6 + 5{,}5 \cdot 1 + 5{,}8 \cdot 4 + 6{,}1 \cdot 2 + 6{,}2 \cdot 1}{1 + 3 + 2 + 6 + 1 + 4 + 2 + 1}$$

$$\underline{\underline{x = 5{,}44}}$$

Die durchschnittliche Bearbeitungszeit pro Erzeugnis beträgt dann 5,44 Minuten.

Die Faktoren, mit denen die Bearbeitungszeit zu multiplizieren ist, werden als **Häufigkeiten** oder **Gewichte** (h_i oder z_i) bezeichnet, da sie angeben, wie oft bzw. mit welchem Gewicht der betreffende Meßwert x_i in die Berechnung des Mittels eingehen soll. Der Nenner setzt sich dann aus der Summe aller Häufigkeiten zusammen.

Allgemein kann das **gewogene arithmetische Mittel** wie folgt definiert werden:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 h_1 + x_2 h_2 + \cdots + x_n h_n}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}} \tag{91 a}$$

unter Verwendung des Summensymbols:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} \sum_{i=1}^{n} x_i h_i} \tag{91 b}$$

Wird zur Vereinfachung die Gesamtzahl der Beobachtungswerte gleich N gesetzt[1]), also

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = N, \tag{92}$$

so geht Formel (91 b) über in

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i h_i} \tag{91 c}$$

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke (90b) und (91c) zeigt, daß das *einfache arithmetische Mittel ein Sonderfall des gewogenen Mittels* ist, der genau dann eintritt, wenn die Häufigkeiten (Gewichte) für alle Beobachtungswerte $x_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ gleich sind, das heißt, wenn gilt

I) $\qquad h_i = h \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Beweis:

Unter Zugrundelegung der Beziehung (I) geht Formel (91c) über in

(IIa) $\qquad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i h$.

Daraus folgt nach (75):

(IIb) $\qquad \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot h \sum_{i=1}^{n} x_i$,

---

[1]) Aus dem Zusammenhang heraus ist dieses N nicht mit dem Symbol für den Bereich der natürlichen Zahlen zu verwechseln

und nach (92)

(III) $$N = \sum_{i=1}^{n} h = h \cdot n.$$

Substituiert man (III) in (IIb), so ergibt sich

(IV) $$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

also das einfache arithmetische Mittel.
Bei vielen praktischen Aufgabenstellungen ist das zu untersuchende Zahlenmaterial nicht in Form von Einzelwerten (Beobachtungswerte der Urliste), sondern *gruppiert*, d. h. durch eine **Häufigkeitstabelle**, gegeben. Bei der Berechnung des arithmetischen Mittels setzt man in diesem Falle voraus, daß sich die Beobachtungswerte gleichmäßig über jede Gruppe verteilen und somit alle Werte innerhalb einer Gruppe durch ihre Gruppenmitte repräsentiert werden können. An die Stelle der nicht bekannten Einzelwerte treten in der Formel (91c) die **Gruppenmitten** m_i, die mit der Anzahl h_i der Elemente je Gruppe zu multiplizieren sind. Die Formel lautet dann

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} m_i h_i \quad \text{mit} \quad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{93}$$

BEISPIEL

3. Auf einer automatisch arbeitenden Drehmaschine werden Wellen bestimmter Abmessung hergestellt. Zur Kontrolle werden die Durchmesser der Werkstücke überprüft. Es ergibt sich dabei folgende Häufigkeitstabelle für die in Mikrometern gemessenen Abweichungen vom Nennmaß.

Gruppengrenzen in µm	Häufigkeiten[1] in Stück
15,0 ··· 20,0	2
20,0 ··· 25,0	5
25,0 ··· 30,0	18
30,0 ··· 35,0	32
35,0 ··· 40,0	35
40,0 ··· 45,0	20
45,0 ··· 50,0	8

Es ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ zu berechnen.

[1] Fällt ein Meßwert auf die Gruppengrenze, so wird je ein halber Wert den beiden angrenzenden Gruppen zugeordnet. Um eine eindeutige Eingruppierung zu erreichen, können die Gruppen auch wie folgt gebildet werden:

15,0 ··· unter 20,0
20,0 ··· unter 25,0 usw.

Lösung: Da die Einzelabweichungen wertmäßig nicht bekannt sind, werden alle Meßwerte innerhalb einer Gruppe durch die jeweilige **Gruppenmitte** ersetzt. Man geht dabei von der auf S. 323 dargelegten Annahme aus, daß sich die einzelnen Beobachtungswerte einer jeden Gruppe *angenähert gleichmäßig* auf die Gruppe verteilen und somit die Gruppenmitten als Durchschnittswert der Elemente einer jeden Gruppe aufgefaßt werden können.

Damit ergibt sich folgendes Rechenschema:

Gruppengrenzen in µm	Gruppenmitte m_i	Häufigkeiten h_i	$m_i h_i$
15,0 ··· 20,0	17,5	2	35,0
20,0 ··· 25,0	22,5	5	112,5
25,0 ··· 30,0	27,5	18	495,0
30,0 ··· 35,0	32,5	32	1040,0
35,0 ··· 40,0	37,5	35	1312,5
40,0 ··· 45,0	42,5	20	850,0
45,0 ··· 50,0	47,5	8	380,0
		$\sum_{i=1}^{n} h_i = 120$	$\sum_{i=1}^{n} m_i h_i = 4225,0$

$$\bar{x} = \frac{1}{120} \cdot 4225,0 = 35,21$$

Die durchschnittliche Abweichung vom Nennmaß beträgt 35,21 µm je Welle.

Die mathematischen Eigenschaften des arithmetischen Mittels

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten mathematischen Eigenschaften dienen einerseits der vereinfachten Berechnung des arithmetischen Mittels und bilden andererseits die Grundlage bestimmter Aufgabenstellungen.

1. Eigenschaft

Die Summe der Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel ist gleich *Null* (**Schwerpunktseigenschaft** des arithmetischen Mittels).

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) h_i = 0} \tag{94}$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) h_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i - \frac{1}{N} \cdot N \sum_{i=1}^{n} x_i h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i h_i - \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = 0$$

2. Eigenschaft

Subtrahiert man von den zu mittelnden Beobachtungswerten dieselbe konstante Zahl c, so ändert sich auch das arithmetische Mittel um diese Zahl c.

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)h_i = \bar{x} - c} \tag{95}$$

Beweis:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)h_i = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i h_i - c\sum_{i=1}^{n}h_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i h_i - \frac{1}{N}\cdot c\cdot N =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i h_i - c = \bar{x} - c$$

Diese Eigenschaft wird zur vereinfachten Berechnung des arithmetischen Mittels angewendet. Für das Beispiel 3 ergibt sich dann mit $c = 32{,}5$ folgendes vereinfachtes Rechenschema:

Gruppenmitte m_i	reduzierte Gruppenmitte $m_i - c$	Häufigkeiten h_i	$(m_i - c)h_i$
17,5	−15	2	− 30
22,5	−10	5	− 50
27,5	− 5	18	− 90
32,5	0	32	0
37,5	+ 5	35	+175
42,5	+10	20	+200
47,5	+15	8	+120
		$\sum_{i=1}^{n}h_i = 120$	$\sum_{i=1}^{n}(m_i - c)h_i = 325$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 32{,}5)h_i + 32{,}5 = 35{,}21$$

3. Eigenschaft

Multipliziert man die zu mittelnden Beobachtungswerte x_i mit derselben konstanten Zahl c, so multipliziert sich auch das arithmetische Mittel mit dieser Zahl c.

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}c\cdot x_i h_i = c\cdot\bar{x}} \tag{96}$$

Beweis:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} c \cdot x_i h_i = \frac{1}{N} \cdot c \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = c \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i h_i = c \cdot \bar{x}$$

4. Eigenschaft

Dividiert (multipliziert) man alle Häufigkeiten mit derselben konstanten Zahl c, so ändert sich das arithmetische Mittel nicht.

$$\boxed{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{h_i}{c}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{h_i}{c}} = \bar{x}} \qquad (97)$$

Beweis:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{h_i}{c}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{h_i}{c}} = \frac{\frac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i h_i}{\frac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i h_i = \bar{x}$$

5. Eigenschaft

Das arithmetische Mittel besitzt die **quadratische Minimumeigenschaft**, das heißt, die Summe der Quadrate der Abstände aller Beobachtungswerte vom arithmetischen Mittel ist kleiner als der Abstand von irgendeinem anderen Wert.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 h_i = \text{Minimum}} \qquad (98)$$

Beweis:

Man geht aus von

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - k)^2 h_i$$

und untersucht, für welchen Wert von k die Funktion S ein Minimum hat (Extremaufgabe). Die Lösung ergibt sich, indem die Funktion S nach k differenziert und die erste Ableitung gleich Null gesetzt wird.

$$S'(k) = \frac{\mathrm{d}S(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\sum_{i=1}^{n} (x_i - k)^2 h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(x_i - k)^2 h_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - k) h_i (-1) = -2\sum_{i=1}^{n} (x_i - k) h_i$$

Aus $S'(k) = 0$ folgt

$$-2\sum_{i=1}^{n}(x_i - k)h_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i h_i - k\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$$

$$k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i h_i,$$

das heißt, für $k = \bar{x}$ nimmt die Funktion S einen Extremwert an. Die Art des Extremums wird an Hand der 2. Ableitung untersucht.

$$S'(k) = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - k)h_i$$

$$S''(k) = -2\sum_{i=1}^{n}(-1)\,h_i$$

$$S''(k) = 2N$$

Da stets $N > 0$, folgt hieraus für die 2. Ableitung $S'' > 0$. Dies stellt aber die Bedingung für ein Minimum dar. Die Ausgangsfunktion S hat daher an der Stelle

$$k = \bar{x}$$

ein Minimum.

6. Eigenschaft

Das arithmetische Mittel einer Gesamtmasse ist gleich dem gewogenen arithmetischen Mittel der gemittelten Teilmassen, wobei die Zahl der Elemente (genannt „Umfang") dieser Teilmassen die Gewichte (Häufigkeiten) darstellt.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot N_1 + \bar{x}_2 \cdot N_2}{N_1 + N_2}} \tag{99}$$

Beweis:

1. Teilmasse: Umfang $N_1 = \sum_{i=1}^{m} h_i$; $\quad \bar{x}_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{m} x_i h_i$

2. Teilmasse: Umfang $N_2 = \sum_{i=m+1}^{n} h_i$; $\quad \bar{x}_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=m+1}^{n} x_i h_i$

Gesamtmasse: Umfang $N = \sum_{i=1}^{n} h_i; \qquad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i h_i$

$$\frac{\bar{x}_1 \cdot N_1 + \bar{x}_2 \cdot N_2}{N_1 + N_2} = \frac{\left[\frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{m} x_i h_i\right] \cdot N_1 + \left[\frac{1}{N_2} \sum_{i=m+1}^{n} x_i h_i\right] \cdot N_2}{N_1 + N_2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i h_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i h_i}{N_1 + N_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i h_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i h_i = \bar{x}$$

AUFGABEN

178. Es ist das arithmetische Mittel aus folgenden Zahlen zu berechnen

a)

a_i	3	4	7	8	11
h_i	2	1	3	5	2

b)

a_i	253	268	259	269	273	264
h_i	11	17	19	8	15	11

179. Die Planerfüllung für die sieben Betriebe einer VVB betrug

Betrieb A 105% bei einem Plan in Höhe von 1000000 MDN
Betrieb B 101% bei einem Plan in Höhe von 5000000 MDN
Betrieb C 108% bei einem Plan in Höhe von 2500000 MDN
Betrieb D 98% bei einem Plan in Höhe von 3000000 MDN
Betrieb E 102% bei einem Plan in Höhe von 1000000 MDN
Betrieb F 92% bei einem Plan in Höhe von 2000000 MDN
Betrieb G 110% bei einem Plan in Höhe von 4000000 MDN.

Wie hoch war die durchschnittliche Planerfüllung der VVB?

4.2.2.2. Das geometrische Mittel

Das einfache geometrische Mittel

Allgemein wird das *einfache geometrische Mittel* aus den n Beobachtungswerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wie folgt definiert:

$$\boxed{\mathring{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \tag{100a}$$

und unter Verwendung des Produktzeichens:

$$\boxed{\mathring{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \tag{100b}$$

Es muß dabei vorausgesetzt werden, daß sämtliche Beobachtungswerte **positiv** sind, das heißt $x_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Für die Berechnung dieses Mittels verwendet man die Logarithmenrechnung.

Nach dem Logarithmieren der beiden Seiten in (100b) und anschließender Umformung ergibt sich das sogenannte *logarithmische Mittel*

$$\boxed{\lg \mathring{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lg x_i} \tag{101}$$

Der Logarithmus des geometrischen Mittels ist gleich dem arithmetischen Mittel der Logarithmen aller zu mittelnden Meßwerte.

Das gewogene geometrische Mittel

Auch bei dem geometrischen Mittel gibt es eine gewogene Form, die jedoch in der Praxis wenig benutzt wird. Sie lautet

$$\mathring{x} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i}} \qquad \text{mit} \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

oder in logarithmischer Form

$$\lg \mathring{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \lg x_i .$$

Die praktische Anwendung des geometrischen Mittels

Das geometrische Mittel wird vor allem in der ökonomischen Statistik angewendet. Dort dient es zur Berechnung des **durchschnittlichen Wachstumstempos** oder der **durchschnittlichen Zuwachsrate** von zeitlichen Entwicklungen. Unter dem durchschnittlichen Wachstumstempo bzw. der durchschnittlichen Zuwachsrate versteht man die durchschnittliche prozentuale Entwicklung, das heißt **auf** wieviel Prozent (Wachstumstempo) bzw. **um** wieviel Prozent (Zuwachsrate) sich die untersuchte Erscheinung von Zeitraum zu Zeitraum verändert. Die Verwendung des arithmetischen Mittels würde in diesem Falle zu einem *falschen* Ergebnis führen.

BEISPIELE

1. In der Montageabteilung eines Maschinenbaubetriebes entwickelte sich die Montageleistung von 1960 bis 1966 wie folgt:

   1960 ··· 1961 Steigerung auf 102% der Vorjahresleistung
   1961 ··· 1962 Steigerung auf 104% der Vorjahresleistung
   1962 ··· 1963 Steigerung auf 103% der Vorjahresleistung
   1963 ··· 1964 Steigerung auf 106% der Vorjahresleistung
   1964 ··· 1965 Steigerung auf 106% der Vorjahresleistung
   1965 ··· 1966 Steigerung auf 110% der Vorjahresleistung.

   Wie groß ist das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo?

Lösung: Da das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo aus einer zeitlichen Entwicklung zu berechnen ist, muß die Formel (100a) herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, daß — unabhängig davon, ob nach dem Wachstumstempo oder der Zuwachsrate gefragt ist — die Prozentzahlen stets in Form der „**Steigerung auf**" soundsoviel Prozent angesetzt werden müssen. Da $100\% = \frac{100}{100}$, schreibt man anstelle der Prozentzahlen 102%, 104%, ... die entsprechenden Zahlenwerte 1,02; 1,04; ....

$$\mathring{x} = \sqrt[6]{1{,}02 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}10}$$

Daraus folgt nach (101)

$$\lg \mathring{x} = \frac{1}{6} (\lg 1{,}02 + \lg 1{,}04 + \lg 1{,}03 + 2 \cdot \lg 1{,}06 + \lg 1{,}10)$$

$$\underline{\underline{\mathring{x} = 1{,}0514.}}$$

Das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo beträgt 105,14%, das entspricht einer durchschnittlichen jährlichen Zuwachsrate von 5,14%. Die Montageleistung stieg also im Durchschnitt pro Jahr *auf* 105,14% bzw. *um* 5,14%.

Liegt anstatt einer prozentualen Entwicklung eine absolute Entwicklung vor, so ist es bei der Berechnung des Wachstumstempos nicht erforderlich, erst auf die prozentuale Entwicklung umzurechnen und dann die Formel (100a) anzuwenden. Es kann vielmehr sofort aus der gegebenen absoluten Entwicklung die durchschnittliche prozentuale Steigerung ermittelt werden, wie folgendes Beispiel zeigt.

2. In einer Werkzeugmaschinenfabrik werden bestimmte Maschinen für den Export hergestellt. Die Exportlieferungen entwickelten sich in den letzten 5 Jahren wie folgt:

1962	20000 Stück
1963	20200 Stück
1964	21008 Stück
1965	22058 Stück
1966	23161 Stück.

Es ist die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate zu berechnen.

Lösung: Bei Verwendung der Formel (100a) muß zunächst eine Umrechnung der absoluten in die relative Entwicklung vorgenommen werden,

$$1962 \cdots 1963 \quad \frac{20200}{20000} = 1{,}01$$

$$1963 \cdots 1964 \quad \frac{21008}{20200} = 1{,}04$$

$$1964 \cdots 1965 \quad \frac{22058}{21008} = 1{,}05$$

$$1965 \cdots 1966 \quad \frac{23161}{22058} = 1{,}05,$$

wobei aber für die weitere Rechnung nur die Quotienten gebraucht werden. Es ergibt sich dann

$$\text{(I)} \qquad \mathring{x} = \sqrt[4]{\frac{20200}{20000} \cdot \frac{21008}{20200} \cdot \frac{22058}{21008} \cdot \frac{23161}{22058}}.$$

Nach dem Kürzen im Radikanden verbleibt unter dem Wurzelzeichen nur der Quotient aus der Stückzahl des letzten Jahres (1966) und der Stückzahl des 1. Jahres (1962)

(II) $$\mathring{x} = \sqrt[4]{\frac{23161}{20000}}$$

$$\mathring{x} = 1{,}0374.$$

Die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate beträgt also 3,74%.

Bezeichnet man allgemein die absoluten Entwicklungszahlen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so läßt sich die Formel für **das durchschnittliche Wachstumstempo** wie folgt darstellen:

$$\boxed{\overline{W} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} \cdot 100\%} \tag{102}$$

Da in (102) der Radikand das Verhältnis Endglied zu Anfangsglied ausdrückt, kann diese Formel auch in den Fällen angewendet werden, wo die prozentuale Entwicklung über einen größeren Zeitraum gegeben ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

3. Die Produktion von Wechselstrommotoren stieg in der DDR von 1959 bis 1963 um 53,4%. Wie groß ist die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

Lösung: Es liegt hier eine Gesamtsteigerung auf 153,4% vor, das heißt, der Quotient aus Endglied und Anfangsglied der absoluten Entwicklung beträgt 1,534, also

$$\frac{x_5}{x_1} = 1{,}534.$$

Wird dieser Wert in Formel (102) eingesetzt, so ergibt sich

$$\overline{W} = \sqrt[4]{1{,}534} \cdot 100\%$$

$$\overline{W} = 111{,}29\%,$$

das entspricht einer durchschnittlichen jährlichen Zuwachsrate von 11,29%.

AUFGABEN

180. Es ist das geometrische Mittel aus folgenden Zahlen zu berechnen

a) 1, 3, 4, 7, 2, 10

b) 3, 2, 6, 10, 13, 5

c)

a_i	3	4	7	8	11
h_i	2	1	3	5	2

181. Die industrielle Produktion an Roheisen stieg in der DDR von 1955 bis 1963 um 41,8%. Man berechne das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo.

182. In der DDR wurden im Jahre 1958 38422 Stück PKW und
im Jahre 1963 84290 Stück PKW produziert.
Wie groß ist die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

183. Die Produktion eines Industriebetriebes stieg in der Zeit von 1960 bis 1965 wie folgt:

1960 ⋯ 1961	Steigerung um 5%
1961 ⋯ 1962	Steigerung um 3%
1962 ⋯ 1963	Steigerung um 7%
1963 ⋯ 1964	Steigerung um 9%
1964 ⋯ 1965	Steigerung um 13%.

a) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate für diesen Zeitraum?

b) Wie hoch ist die Produktion im Jahre 1965, wenn 1960 15000 kg produziert wurden?

4.2.2.3. Das quadratische Mittel

Das quadratische Mittel hat als selbständiger Mittelwert keine praktische Bedeutung. Die Berechnungsformel bildet jedoch die Grundlage für die *quadratische Streuung*, die auch als *mittlere quadratische Abweichung* oder *Standardabweichung* bezeichnet wird. Das **einfache quadratische Mittel** aus den n Beobachtungswerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird wie folgt definiert:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}\,.} \tag{103a}$$

oder unter Verwendung des Summenzeichens:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \tag{103b}$$

Das **gewogene quadratische Mittel** hat dann die Form

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{x_1^2 h_1 + x_2^2 h_2 + \cdots + x_n^2 h_n}{N}}\,; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{104a}$$

oder

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 h_i}\,; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{104b}$$

BEISPIEL

Wie groß ist das quadratische Mittel aus den Zahlen

a) x_i: 2, 3, 6, 7, 10

b)

x_i	2	3	6	7	10
h_i	2	4	3	5	1

Lösung:

a) $$Q = \sqrt{\frac{1}{5}\,(2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2)}$$

$$\underline{\underline{Q = 6{,}2929}}$$

b) $$Q = \sqrt{\frac{1}{15}\,(2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 3 + 7^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 1)}$$

$$\underline{\underline{Q = 5{,}7562}}$$

4.2.2.4. Das harmonische Mittel

Bei bestimmten Untersuchungen in der ökonomischen Statistik wird das **harmonische Mittel** angewendet. Dieser Mittelwert ist der **Reziprokwert des arithmetischen Mittels der reziproken Einzelwerte** und wird allgemein definiert durch:

$$\boxed{H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}} \tag{105a}$$

oder

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}} \quad \textbf{einfaches harmonisches Mittel} \tag{105b}$$

und

$$\boxed{H = \frac{N}{\frac{1}{x_1}\,h_1 + \frac{1}{x_2}\,h_2 + \cdots + \frac{1}{x_n}\,h_n}; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{106a}$$

oder

$$\boxed{H = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\,h_i}; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \quad \textbf{gewogenes harmonisches Mittel} \tag{106b}$$

BEISPIELE

1. Wie groß ist das harmonische Mittel aus den Zahlen

a) x_i: 3, 4, 6, 8, 9

b)

x_i	3	4	6	8	9
h_i	2	3	1	4	2

Lösung:

a) $$H = \frac{5}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}}$$

$$\underline{\underline{H = 5{,}0704}}$$

b) $$H = \frac{12}{\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{9} \cdot 2}$$

$$\underline{\underline{H = 5{,}2048}}$$

In der Statistik wird das harmonische Mittel dann angewendet, wenn der Durchschnitt aus dem Verhältnis zweier Größen zu berechnen ist.

2. Auf zwei Webautomaten verschiedener Konstruktion wird ein und dasselbe Erzeugnis hergestellt. Der Automat A hat eine Leistung von 30 m/h, der Automat B eine Leistung von 50 m/h. Wie hoch ist die durchschnittliche Produktion pro Stunde, wenn auf der Maschine A 240 m und auf der Maschine B 400 m produziert wurden?

Lösung:

Es ist der Durchschnitt aus den unterschiedlichen Leistungen (m/h) zu ermitteln, wobei die produzierten Mengen (m) die Gewichte (h_i) darstellen.

$$H = \frac{640}{\frac{1}{30} \cdot 240 + \frac{1}{50} \cdot 400}$$

$$\underline{\underline{H = 40}}$$

Die durchschnittliche Leistung beträgt demnach 40 m/h.

Auf denselben Wert gelangt man durch folgende Überlegung:

30 m/h entspricht bei 240 m einem Zeitaufwand von 8 Stunden,
50 m/h entspricht bei 400 m einem Zeitaufwand von 8 Stunden.

Zur Herstellung von insgesamt 640 m Gewebe benötigt man dann mit diesen beiden Maschinen 16 Stunden, das bedeutet einen Durchschnitt von 640 m : 16 h = 40 m/h.

3. Wie ändert sich die Durchschnittsleistung, wenn bei gleicher Webgeschwindigkeit wie in der vorangehenden Aufgabe auf dem Automaten A 160 m und auf dem Automaten B 300 m hergestellt werden?

Lösung:

$$H = \frac{460}{\frac{1}{30} \cdot 160 + \frac{1}{50} \cdot 300}$$

$$\underline{\underline{H = 40{,}588}}$$

Die durchschnittliche Leistung beträgt 40,59 m/h.

AUFGABEN

184. Ein Kraftwagen legt eine Strecke von 250 km zurück. Davon fährt er 100 km mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h und 150 km mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h. Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit für die 250 km?

185. Man berechne das quadratische und das harmonische Mittel aus folgenden Zahlen

a) 1, 3, 4, 7, 2, 10

b) 3, 2, 6, 10, 13, 5

c)

a_i	3	4	7	8	11
h_i	2	1	3	5	2

d)

a_i	1	2	4	5	7
h_i	3	5	7	4	1

4.2.2.5. Der Zentralwert oder Median

Neben den bisher behandelten Mittelwerten — arithmetisches Mittel, geometrisches Mittel, quadratisches Mittel, harmonisches Mittel —, bei denen die einzelnen Meßwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *wertmäßig* in die Berechnung des Mittels eingehen, gibt es noch die **Mittelwerte der Lage**, bei denen nur die Stellung der einzelnen Meßwerte zueinander von Bedeutung ist. Zu dieser Gruppe von Mittelwerten gehört der **Zentralwert** oder Median, zu dessen Ermittlung die Beobachtungswerte der Urliste der Größe nach zu ordnen sind.
Für eine Meßreihe mit einer ungeraden Anzahl von Beobachtungswerten ist dann der Median der mittelste Zahlenwert, dessen Ordnungszahl man nach der Formel

$$\boxed{\frac{n+1}{2}} \tag{107a}$$

(n Anzahl der Meßwerte) findet.

Für eine Meßreihe mit einer geraden Anzahl von Beobachtungswerten gibt es nicht nur einen, sondern zwei mittlere Werte, deren Ordnungszahlen sich aus den Formeln

$$\boxed{\frac{n}{2} \quad \text{und} \quad \frac{n}{2}+1} \tag{107b}$$

ergeben, wobei n wieder die Anzahl der Meßwerte angibt.
In diesem Falle legt man als Zentralwert das arithmetische Mittel aus diesen beiden mittelsten Werten fest. Darüber hinaus kann jedoch auch jeder beliebige Zahlenwert zwischen den beiden mittelsten Beobachtungswerten einschließlich dieser selbst als Median aufgefaßt werden, da alle diese Werte die gleiche mathematische Eigenschaft, die sogenannte lineare Minimumeigenschaft des Zentralwertes, besitzen (vgl. Seite 338).

BEISPIELE

1. Wie groß ist der Median für die Meßreihe des Beispiels 1 in 4.2.2.1. (Zugfestigkeit von Formstahl M 20)?

   Lösung: Die Meßwerte werden der Größe nach geordnet und anschließend durch Abzählen der bzw. die Zentralwerte ermittelt.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
36,9	37,1	37,5	38,4	38,5	38,9	39,3	39,8	41,2	42,8

   Da es sich um eine gerade Anzahl von Meßwerten handelt, existieren zwei mittlere Elemente, und zwar das

$$\frac{n}{2}\text{-te Element:} \qquad 5.\ \text{Element:} \qquad 38{,}5 = \tilde{x}_1$$

   und das

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right)\text{-te Element:} \qquad 6.\ \text{Element:} \qquad 38{,}9 = \tilde{x}_2.$$

   Im Falle einer geraden Anzahl von Meßwerten ist es nun üblich, nicht mit den beiden Zentralwerten $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ zu arbeiten, sondern das arithmetische Mittel aus beiden anzusetzen:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2} = \frac{38{,}5 + 38{,}9}{2}$$

$$\underline{\underline{\tilde{x} = 38{,}7.}}$$

   Der Zentralwert beträgt 38,7 kp/mm².

Die Berechnung des Zentralwertes aus gruppiertem Material zeigt das folgende Beispiel.

2. Bei der Kontrolle der Durchmesser von 120 Wellen ergab sich nachstehende Häufigkeitstabelle für die in Mikrometern gemessenen Abweichungen vom Nennmaß.

Gruppengrenzen in µm	Häufigkeiten in Stück
15,0 ··· 20,0	2
20,0 ··· 25,0	5
25,0 ··· 30,0	18
30,0 ··· 35,0	32
35,0 ··· 40,0	35
40,0 ··· 45,0	20
45,0 ··· 50,0	8

   Es ist der Median dieser Verteilung zu berechnen.

Lösung: Die Ordnungszahl des Zentralwertes beträgt $\frac{n}{2} = 60$, das heißt, der 60. Meßwert entspricht dem Median[1]). Es wird jetzt durch Bildung der **Kumulreihe** ermittelt, in welche Gruppe dieses 60. Element entfällt. *Die Kumulreihe ergibt sich durch auflaufende Summierung der Gruppenhäufigkeiten.*

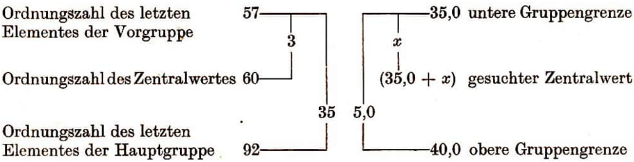
Gruppengrenzen in µm	Häufigkeiten in Stück	Kumulreihe in Stück
15,0 ··· 20,0	2	2
20,0 ··· 25,0	5	7
25,0 ··· 30,0	18	25
30,0 ··· 35,0	32	57
35,0 ··· 40,0	35	92
40,0 ··· 45,0	20	112
45,0 ··· 50,0	8	120

Das 60. Element liegt in der Gruppe 35,0 µm bis 40,0 µm, da die Ordnungszahlen für die Elemente dieser Gruppe von 58 bis 92 laufen. Als Näherungswert für $\tilde{x}$ kann nun die Gruppenmitte angenommen werden, also

$$\underline{\underline{\tilde{x} = 37{,}5.}}$$

Der Median beträgt 37,5 µm.

Mit Hilfe einer *linearen Interpolation* kann jedoch ein verfeinerter Median gefunden werden. Man setzt dabei — analog zum arithmetischen Mittel — voraus, daß sich die einzelnen Meßwerte annähernd gleichmäßig auf die Gruppen verteilen. Folgende Gegenüberstellung führt dann auf die gesuchte Proportion.



Die Proportion lautet

$$x : 5{,}0 = 3 : 35$$
$$x = 0{,}43,$$

[1]) Bei gruppiertem Zahlenmaterial mit gerader Anzahl von Beobachtungswerten wird als Median nur der Meßwert mit der Ordnungszahl $n/2$ berücksichtigt

daraus folgt

$$\tilde{x} = 35{,}0 + 0{,}43$$
$$\tilde{x} = 35{,}43.$$

Der verfeinerte Median beträgt 35,43 µm.

Der Zentralwert besitzt eine bestimmte mathematische Eigenschaft, die als **lineare Minimumeigenschaft** bezeichnet wird. Man formuliert diese wie folgt:

Die Summe der absoluten Beträge der Abweichungen aller Meßwerte vom Median ist kleiner als von irgendeinem anderen Wert.

Allgemein dargestellt

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}|\, h_i < \sum_{i=1}^{n} |x_i - k|\, h_i \qquad \text{für } x \neq k} \tag{108}$$

Auf den Beweis dieser Eigenschaft soll im Rahmen dieses Lehrbuches verzichtet werden.

In der Praxis wird der Median dem arithmetischen Mittel dann vorgezogen, wenn

a) bei gruppiertem Material die untere bzw. obere Grenze der beiden äußersten Gruppen fehlen (offene Flügelgruppen),

b) unter den Beobachtungswerten einige extreme Werte auftreten, die das arithmetische Mittel stark beeinflussen und zu einer fiktiven Größe machen würden,

c) sich wertmäßige Veränderungen der Meßwerte unterhalb und oberhalb des Zentralwertes nicht auf den Mittelwert auswirken sollen.

AUFGABE

186. Bei der Untersuchung von Textilfaserstoffen wurden die Pflanzenfaser Flachs und die Tierfaser Wolle auf ihre Reißlänge analysiert. Es ergaben sich für je 400 Versuche folgende Häufigkeitsverteilungen:

Flachs: Reißlänge [Gruppenfasern] in km	Anzahl der Versuche
30···40	14
40···50	25
50···60	55
60···70	100
70···80	120
80···90	70
90···100	16

Wolle: Reißlänge [Gruppenfasern] in km	Anzahl der Versuche
10···11	40
11···12	150
12···13	110
13···14	75
14···15	20
15···16	5

Es ist der verfeinerte Median für beide Verteilungen zu berechnen.

4.2.2.6. Der häufigste Wert, das Dichtemittel oder der Modalwert

Auch der **Modalwert** ist bis zu einem gewissen Grade von den Einzelwerten unabhängig. Er ist definiert als derjenige Wert einer Menge von Meßwerten, der am *häufigsten* auftritt. Daher findet man das **Dichtemittel**, indem man die Häufigkeit h_i betrachtet und das zu der *maximalen* Häufigkeitszahl gehörende Einzelelement abliest. Für Beispiel 2 in 4.2.2.1. (S. 321) ergibt sich dann aus der primären Verteilungstafel der Zahlenwert

$$\underline{\underline{D = 5{,}3}}\,,$$

also ein Dichtemittel von 5,3 min.
Bei gruppiertem Zahlenmaterial kann — analog zum Median — eine verfeinerte Berechnung mittels Interpolation vorgenommen werden. Statt angenähert die Mitte der am stärksten besetzten Gruppe als D anzusetzen, werden dabei die Häufigkeiten der beiden Nachbargruppen mit berücksichtigt.
Die Berechnung wird an Beispiel 3 in 4.2.2.1. (S. 323) gezeigt.

Gruppengrenzen in µm	Häufigkeiten in Stück
15,0 ··· 20,0	2
20,0 ··· 25,0	5
25,0 ··· 30,0	18
30,0 ··· 35,0	32
35,0 ··· 40,0	35
40,0 ··· 45,0	20
45,0 ··· 50,0	8

Ausgangspunkt ist die Gruppe mit der maximalen Häufigkeit $h_{\max} = 35$. Der zu berechnende Wert D liegt also zwischen 35,0 und 40,0. Als Näherungswert würde sich ergeben

$$\underline{\underline{D = 37{,}5}}\,,$$

d. h. 37,5 µm, als Dichtemittel.
Zur verfeinerten Berechnung werden die Häufigkeiten der beiden Nachbargruppen in die Betrachtung einbezogen. Bei symmetrischer Verteilung, z. B.

Gruppengrenzen in µm	Häufigkeiten in Stück
. . . . .	. . .
30,0 ··· 35,0	32
35,0 ··· 40,0	35
40,0 ··· 45,0	20
. . . . .	. . .

würde das Dichtemittel tatsächlich auf die Gruppenmitte 37,5 μm entfallen. Jede Veränderung der Häufigkeiten der Vor- und Nachgruppe führt jedoch zu einer Verschiebung von D. Es muß daher hier eine Gegenüberstellung der Häufigkeiten und der Gruppengrenzen vorgenommen werden, aus der sich die Proportion ableiten läßt.

Häufigkeit der Vorgruppe	32		35,0	untere Gruppengrenze
		3	x	
Häufigkeit der Hauptgruppe	35		$(35{,}0 + x)$	Dichtemittel
		15	$(5{,}0 - x)$	
Häufigkeit der Nachgruppe	20		40,0	obere Gruppengrenze

Die Proportion lautet

$$x : (5{,}0 - x) = 3 : 15$$
$$x = 0{,}83.$$

Das Dichtemittel errechnet sich demnach aus

$$D = 35{,}0 + 0{,}83$$

zu $\underline{\underline{35{,}83\ \mu\text{m}.}}$

Gruppen, die wie die oben erwähnte Hauptgruppe eine größere Häufigkeit haben als ihre Nachbargruppen, sollen kurz als „Häufungsstellen" bezeichnet werden (vgl. „relatives Maximum" in der Differentialrechnung).
Es gibt auch Meßreihen mit mehreren Häufungsstellen. Für solche Reihen existieren dann auch mehrere Dichtemittel. In diesem Fall charakterisiert das arithmetische Mittel nicht die Gesamtreihe; seine Berechnung hat keinen Sinn. Es muß hier jeder „Gipfelbezirk" (mit je einer Häufungsstelle) gesondert betrachtet und seine Dichtemittel berechnet werden.

AUFGABE

187. Für das Zahlenmaterial der Aufgabe 186 in 4.2.2.5. ist der verfeinerte Modalwert zu berechnen.

4.2.2.7. Die Größenbeziehungen zwischen den Mittelwerten

Zwischen dem arithmetischen, geometrischen, quadratischen und harmonischen Mittel aus den n Meßwerten einer Meßreihe bestehen bestimmte Größenbeziehungen.
Bezeichnet man den kleinsten Meßwert mit $x_{\min}$, den größten Meßwert mit $x_{\max}$, so gilt allgemein für verschiedene $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\boxed{x_{\min} < H < \mathring{x} < \bar{x} < Q < x_{\max}} \tag{109a}$$

und für gleiche $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\boxed{x_{\min} = H = \mathring{x} = \bar{x} = Q = x_{\max}} \tag{109b}$$

Der Beweis dieser Größenbeziehungen soll nur für eine Meßreihe aus zwei Einzelwerten geführt werden. Der allgemeine Beweis für n Beobachtungswerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ führt über den Rahmen des Lehrbuches hinaus, so daß darauf verzichtet wird.

Beweis:

a) Sind x_1 und x_2 zwei beliebige **positive Meßwerte**, so gilt

$$H < \mathring{x}$$

oder

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} < \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Denn es ist

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} < \sqrt{x_1x_2}$$

$$\frac{4x_1^2x_2^2}{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} < x_1x_2$$

$$4x_1^2x_2^2 < x_1x_2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$0 < x_1x_2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$0 < x_1x_2(x_1 - x_2)^2.$$

Diese Ungleichung ist sowohl richtig für $x_1 > x_2$ als auch für $x_1 < x_2$, so daß damit auch die Ausgangsbeziehung

$$H < \mathring{x}$$

richtig und bewiesen ist.
Sind beide Meßwerte gleich, also $x_1 = x_2$, so wird $(x_1 - x_2) = 0$, das heißt, es ergibt sich

$$0 = x_1x_2(x_1 - x_2)^2,$$

daraus folgt

$$H = \mathring{x}.$$

b) Sind x_1 und x_2 zwei beliebige verschiedene Meßwerte, so gilt

$$\bar{x} < Q$$

oder

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Denn es ist

$$\frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 < 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$0 < (x_1 - x_2)^2.$$

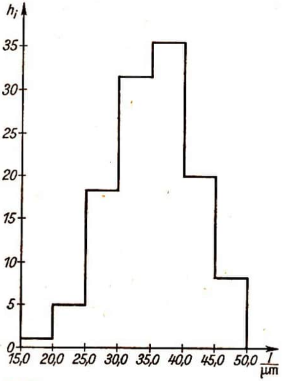


Bild 80

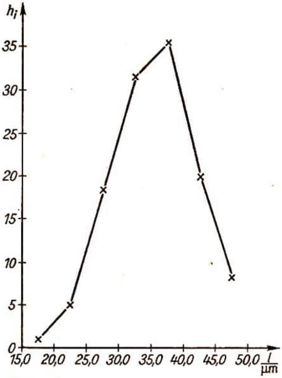


Bild 81

Diese Ungleichung ist sowohl richtig für $x_1 > x_2$ als auch für $x_1 < x_2$, so daß damit auch die Ungleichung

$\bar{x} < Q$ bewiesen ist.

Ist $x_1 = x_2$, so wird die Ungleichung zu der Gleichung

$$0 = (x_1 - x_2)^2$$

und somit $\bar{x} = Q$.

c) Entsprechend läßt sich der Beweis für $\mathring{x} < \bar{x}$ führen, so daß durch die drei Teilbeweise die Richtigkeit der Formeln (109a) und (109b) nachgewiesen ist.

Zusatz: die Ungleichung $\bar{x} < Q$ gilt, für sich genommen, auch für Meßwerte $x_i < 0$ (vgl. Definition von Q).

Zwischen dem arithmetischen Mittel, dem Median und dem Modalwert können bei eingipfligen Häufigkeitsverteilungen (Verteilung mit einer Häufungsstelle) folgende Größenbeziehungen bestehen:

$$\bar{x} < \tilde{x} < D \qquad \bar{x} = \tilde{x} = D \qquad \bar{x} > \tilde{x} > D.$$

Welche dieser drei Beziehungen bei gegebenem gruppiertem Zahlenmaterial auftritt, hängt von der **Art der Häufigkeitsverteilung** ab. Die graphische Darstellung dieser Häufigkeitsverteilung kann nun auf verschiedene Weise erfolgen.
Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der horizontalen Achse (Abszissenachse) die Gruppengrenzen und auf der Ordinatenachse die Häufigkeiten auf und zeichnet über jeder Gruppe ein Rechteck von der Höhe h_i ein, so ergibt sich ein sogenanntes **Treppenpolygon** oder **Staffelbild.**
Zeichnet man dagegen in das Koordinatensystem die Punkte $P_i(m_i; h_i)$ mit m_i als Gruppenmitten ein und verbindet sie geradlinig, so erhält man ein sogenanntes **Häufigkeitspolygon.**
An Beispiel 3 in 4.2.2.1. (S. 323) soll der Unterschied in der Darstellung veranschaulicht werden (vgl. Bilder 80 und 81, S. 342).

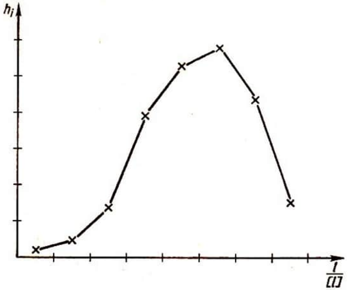


Bild 82. Rechtssteile Verteilung

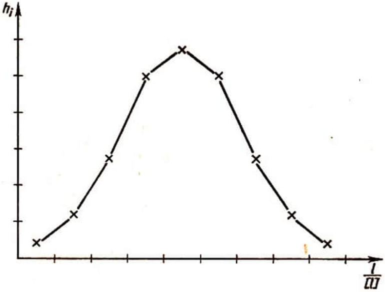


Bild 83. Symmetrische Verteilung

Die Lage der Mittelwerte $\bar{x}$, $\tilde{x}$ und D hängt nun von der Schiefheit der Verteilung ab. Bei einer **rechtssteilen Verteilung** (*rechtsseitige Asymmetrie*) (Bild 82, S. 343), wie sie im obigen Beispiel auftritt, gilt

$$\bar{x} < \tilde{x} < D,$$

bei einer **symmetrischen Verteilung** (Bild 83, S. 343)

$$\bar{x} = \tilde{x} = D$$

und bei einer **linkssteilen Verteilung** (*linksseitige Asymmetrie*) (Bild 84)

$$\bar{x} > \tilde{x} > D.$$

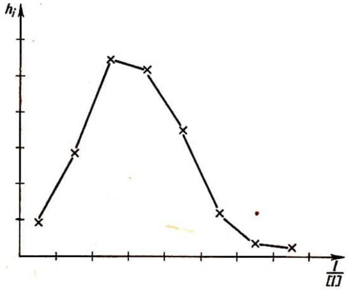


Bild 84. Linkssteile Verteilung

Diese Größenbeziehungen folgen aus den verschiedenen Eigenschaften dieser Mittel, und zwar beim

arithmetischen Mittel:	*Schwerpunktseigenschaft*
Median:	*lineare Minimumeigenschaft*
Dichtemittel:	*Maximum der Häufigkeitsverteilung.*

Außer der Darstellung in Form von Häufigkeitsverteilungen, aus der sich unmittelbar die Anzahl der Beobachtungswerte innerhalb einer bestimmten Gruppe ablesen läßt, gibt es noch die **Summenverteilung.** Diese umfaßt die kumulierten Häufigkeiten, wie sie zur Berechnung des Zentralwertes aus gruppiertem Material erforderlich sind. Auf der Abszissenachse werden in diesem Falle die Gruppengrenzen, in Richtung der Ordinatenachse *über den* jeweiligen *Gruppengrenzen* die kumulierten Häufigkeiten aufgetragen. Es ergibt sich dann das **Summenpolygon**, das für obiges Beispiel die aus Bild 85 ersichtliche Form hat.

Bild 86 zeigt die Summenverteilung in skizzierter Darstellung.
Aus der Summenverteilung kann stets die Gesamtzahl der Meßwerte bis zu einer bestimmten Gruppe abgelesen werden.

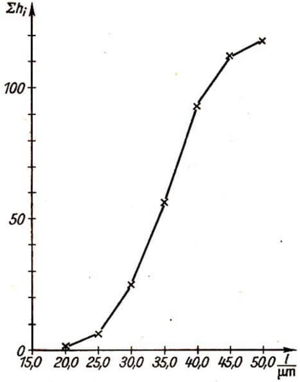


Bild 85

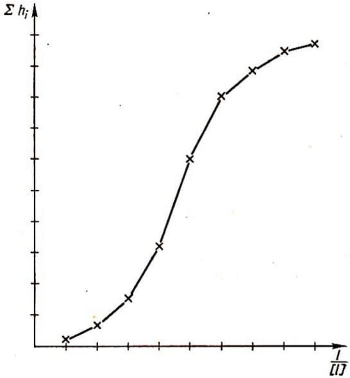


Bild 86

AUFGABEN

188. Bei Qualitätsüberprüfungen werden in einem Glühlampenwerk 400 Speziallampen einer bestimmten Produktionsserie auf ihre Brenndauer untersucht. Dabei ergibt sich folgende Häufigkeitstabelle:

Brenndauer in Stunden	Häufigkeiten in Stück	Brenndauer in Stunden	Häufigkeiten in Stück
0 ··· 50	5	250 ··· 300	120
50 ··· 100	10	300 ··· 350	110
100 ··· 150	8	350 ··· 400	50
150 ··· 200	26	400 ··· 450	8
200 ··· 250	60	450 ··· 500	3

Es sollen folgende Teilaufgaben gelöst werden:

a) Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$,
b) Berechnung des Zentralwertes $\tilde{x}$,
c) Berechnung des Dichtemittels D,
d) graphische Darstellung der Häufigkeits- und Summenverteilung.

189. Die Transportleistung stieg in der DDR von 1955 mit 3194 Mio tkm auf 6201 Mio tkm im Jahre 1963. Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate?

190. Bei einer Prüfungsarbeit ergeben sich in 4 Seminargruppen folgende Durchschnittszensuren:

Seminar	A_1	A_2	A_3	A_4
Durchschnitts-note	2,51	2,23	2,81	2,79
Zahl der Schüler	25	23	28	20

Man berechne den Gesamtdurchschnitt für sämtliche vier Seminargruppen.

191. Die Produktion von Elektroenergieerzeugung entwickelte sich in der DDR wie folgt:

Jahr	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Produktion in GWh	34874	37248	40305	42515	45063	47450

a) Wie hoch war die jährliche Durchschnittsproduktion für diesen Zeitraum?

b) Welches durchschnittliche jährliche Wachstumstempo ergab sich?

c) Wie hoch war die durchschnittliche jährliche absolute Zunahme?

192. Bei der Untersuchung der Streckgrenze σ_S von Manganvergütungsstahl 30 Mn 5 ergaben sich folgende Meßwerte in kp/mm^2:

44,2	48,5	47,8	54,0	49,5	47,4	45,1	48,4	47,1	54,8
46,9	52,6	43,2	48,3	47,6	48,1	44,8	51,9	49,9	42,4
43,7	51,3	48,5	46,2	46,0	46,7	51,6	45,3	53,8	55,0
48,2	42,8	47,9	45,0	47,3	44,0	44,5	47,1	48,8	47,8
50,6	53,1	43,8	45,4	44,1	49,1	46,9	47,5	50,0	48,3

a) Es ist aus diesem Urmaterial (Urliste) zu berechnen:

aa) das arithmetische Mittel,

ab) der Median.

b) Es ist die Häufigkeitstabelle aufzustellen, indem Gruppen mit einer Gruppenbreite von 1 kp/mm^2, ausgehend von der unteren Grenze 42,0 kp/mm^2, gebildet werden. Anschließend ist aus diesem gruppierten Material

ba) das arithmetische Mittel,

bb) der Median zu ermitteln.

4.3. Die statistische Streuung

4.3.1. Die Bedeutung der Streuung und ihre Arten

Es genügt im allgemeinen nicht, Meßreihen durch die Mittelwerte allein zu charakterisieren und zu beschreiben, da zwei Meßreihen aus verschiedenen Beobachtungswerten z. B. ein und dasselbe arithmetische Mittel besitzen können.

1. Meßreihe (x_i):	1	4	8	13	18	$\bar{x} = 8{,}8$;
2. Meßreihe (y_i):	5	6	8	11	14	$\bar{y} = 8{,}8$.

Ein Vergleich beider Reihen zeigt, daß zwar $\bar{x} = \bar{y}$ ist, daß sich jedoch die empirischen Werte beider Meßreihen durch die Lage zu dem betreffenden Mittelwert unterscheiden. Diese Ausbreitung der Beobachtungswerte um einen feststehenden Wert nennt man die **Streuung**, zu deren Berechnung verschiedene Streuungsmaße zur Verfügung stehen. Die in der Praxis am häufigsten benutzten Streuungsmaße sind

1. die **Variationsbreite** (Spannweite) R,
2. die **durchschnittliche Abweichung** (lineare Streuung) d,
3. die **mittlere Abweichung** (mittlere quadratische Abweichung, quadratische Streuung, Standardabweichung) s.

4.3.2. Die für die Praxis wichtigsten Streuungsmaße

4.3.2.1. Die Variationsbreite

Das am einfachsten zu berechnende Streuungsmaß ist die **Variationsbreite** oder **Spannweite** R. Sie ist definiert als *Differenz* zwischen dem *größten* und dem *kleinsten* Beobachtungswert einer Meßreihe:

$$\boxed{R = x_{\max} - x_{\min}} \tag{110}$$

Für die beiden Meßreihen (x_i) und (y_i) sind die Spannweiten

$$R_1 = 18 - 1 = 17$$
$$R_2 = 14 - 5 = 9.$$

Da die Spannweite nur zwei Meßwerte einer Reihe berücksichtigt und die Verteilung aller übrigen Werte unberücksichtigt läßt, kann dieses Streuungsmaß nur bei Beobachtungsreihen von geringem Umfang angewendet werden. Je größer die Anzahl der Meßwerte wird, um so weniger ist R als Streuungsmaß geeignet.

4.3.2.2. Die durchschnittliche Abweichung

Die **durchschnittliche Abweichung** oder **lineare Streuung** d wird definiert durch

$$\boxed{d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} |x_i - M|\, h_i; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{111a}$$

Die durchschnittliche Abweichung oder lineare Streuung d ist das gewogene arithmetische Mittel aus den absoluten Beträgen der Abweichungen der Einzelwerte von einem feststehenden typischen Wert M der Meßreihe. Dabei wird für M entweder der Median $\tilde{x}$ oder das arithmetische Mittel $\bar{x}$ angesetzt.

Für $h_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ geht die Formel (111a) über in

$$\boxed{d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - M|} \tag{111b}$$

Liegt gruppiertes Material in Form einer Häufigkeitstabelle vor, so werden an Stelle der unbekannten Einzelwerte x_i die Gruppenmitten m_i angesetzt

$$\boxed{d = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} |m_i - M|\, h_i; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{111c}$$

BEISPIELE

1. Die durchschnittliche Abweichung vom Median für die beiden Meßreihen (x_i) und (y_i) ergibt sich nach Formel (111b):

Meßreihe (x_i): $d_1 = \frac{1}{5}(|1-8| + |4-8| + |8-8| + |13-8| + |18-8|)$

$d_1 = 5{,}2.$

Meßreihe (y_i): $d_2 = \frac{1}{5}(|5-8| + |6-8| + |8-8| + |11-8| + |14-8|)$

$d_2 = 2{,}8.$

Aus $d_1 > d_2$ folgt, daß die Elemente der zweiten Beobachtungsreihe enger um den Mittelwert 8 liegen als die Elemente der Meßreihe (x_i).

2. Es ist für Beispiel 2, S. 321 (in 4.2.2.1.) die durchschnittliche Abweichung vom Median zu berechnen.

Lösung: Die primäre Verteilungstafel lautet

x_i	h_i	x_i	h_i
4,8	1	5,5	1
4,9	3	5,8	4
5,2	2	6,1	2
5,3	6	6,2	1

Berechnung des *Zentralwertes:*

Die Ordnungszahlen der beiden mittelsten Elemente sind

$$\frac{n}{2} = 10 \quad \text{und} \quad \frac{n}{2} + 1 = 11,$$

so daß sich ergibt

$$\tilde{x}_1 = 5{,}3 \qquad \tilde{x}_2 = 5{,}3 \qquad \tilde{x} = 5{,}3.$$

Die durchschnittliche Abweichung errechnet sich dann nach der Formel (111a)

$$\underline{\underline{d = 0{,}33}}\,,$$

das heißt, die durchschnittliche Abweichung der Einzelwerte vom Median beträgt 0,33 Minuten.

Dieses Streuungsmaß findet jedoch in der Technik bei der statistischen Qualitätskontrolle und anderen speziellen Prüfverfahren zur Überwachung und Verbesserung der Produktion keine Anwendung. Man benutzt es lediglich bei der Untersuchung sozial-ökonomischer Erscheinungen, wenn es um eine einfache und schnelle Berechnung der Streuung für Vergleichszwecke geht.

4.3.2.3. Die mittlere Abweichung

Die **mittlere Abweichung** s, auch *mittlere quadratische Abweichung, quadratische Streuung* oder **Standardabweichung** genannt, ist das in der mathematischen Statistik gebräuchlichste Streuungsmaß. Für eine Meßreihe aus n Beobachtungswerten x_1, $x_2, \ldots, x_n$ wird die mittlere Abweichung definiert durch

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 h_i}\,; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{112a}$$

wobei s stets auf das arithmetische Mittel $\bar{x}$ bezogen wird. Für $h_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ geht die Formel (112a) über in

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \tag{112b}$$

Liegt gruppiertes Material in Form einer Häufigkeitstabelle vor, so werden an Stelle der unbekannten Einzelwerte x_i wiederum die *Gruppenmitten* m_i angesetzt.

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{x})^2 h_i}\,; \qquad N = \sum_{i=1}^{n} h_i} \tag{112c}$$

Im Nenner der Formeln (112a, b, c) steht die um eins verminderte Gesamtzahl der Meßwerte. $N - 1$ bzw. $n - 1$ stellt hier die Anzahl der voneinander unabhängigen Beobachtungswerte dar. Man sagt in diesem Falle, daß die Zahl der Freiheitsgrade $N - 1$ bzw. $n - 1$ beträgt.

Für die beiden Meßreihen

1.	(x_i):	1	4	8	13	18	$\bar{x} = 8{,}8$
2.	(y_i):	5	6	8	11	14	$\bar{y} = 8{,}8$

ergeben sich nach Formel (112b) folgende mittlere Abweichungen:

1. Meßreihe

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}[(1-8{,}8)^2 + (4-8{,}8)^2 + (8-8{,}8)^2 + (13-8{,}8)^2 + (18-8{,}8)^2]}.$$

Nach der Subtraktion und dem anschließenden Potenzieren ergibt sich dann

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}(60{,}84 + 23{,}04 + 0{,}64 + 17{,}64 + 84{,}64)}.$$

Die mittlere quadratische Abweichung für die erste Meßreihe beträgt somit

$$\underline{\underline{s_1 = 6{,}8338}},$$

2. Meßreihe

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}[(5-8{,}8)^2 + (6-8{,}8)^2 + (8-8{,}8)^2 + (11-8{,}8)^2 + (14-8{,}8)^2]}.$$

Nach der Zusammenfassung des Radikanden und anschließendem Radizieren ergibt sich für die mittlere quadratische Abweichung der zweiten Meßreihe

$$\underline{\underline{s_2 = 3{,}7013}}.$$

In der sozial-ökonomischen Statistik wird die Standardabweichung oft mit σ bezeichnet und wie folgt definiert:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 h_i}$$

bzw.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

wobei die Überlegungen über die Zahl der Freiheitsgrade keine Berücksichtigung finden. Diese beiden Formeln entsprechen dem in 4.2.2.3. behandelten *quadratischen Mittel Q*.

BEISPIEL

Es ist für Beispiel 2, S. 321 (in 4.2.2.1.) die mittlere Abweichung s zu berechnen.

Lösung: Arithmetisches Mittel $\bar{x} = 5{,}44$;

$$s = \sqrt{\frac{1}{19}\left[(4{,}8 - 5{,}44)^2 \cdot 1 + (4{,}9 - 5{,}44)^2 \cdot 3 + \cdots + (6{,}2 - 5{,}44)^2 \cdot 1\right]}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{19} \cdot 3{,}4880}$$

$$\underline{\underline{s = 0{,}42847.}}$$

Die mittlere Abweichung der Bearbeitungszeit vom arithmetischen Mittel beträgt je Erzeugnis 0,428 Minuten.

Da das arithmetische Mittel $\bar{x}$ meist eine gebrochene Zahl ist, gestaltet sich die Berechnung der Standardabweichung sehr umständlich. Ein Runden von $\bar{x}$ vor der Differenzenbildung und vor dem Quadrieren würde zu Fehlern führen. Man kann in diesem Falle die bei dem arithmetischen Mittel behandelten mathematischen Eigenschaften zur vereinfachten Berechnung der Streuung s anwenden, indem man die Abweichungen nicht von $\bar{x}$, sondern von einem günstigeren Wert k bildet. Die vereinfachte Berechnungsformel für s^2 ergibt sich dann wie folgt (vgl. Fußnoten 1 und 2):

$$\text{(I)} \qquad s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 h_i = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - k) + (k - \bar{x})]^2 h_i =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum (x_i - k)^2 h_i + 2\sum (x_i - k)(k - \bar{x}) h_i + \sum (k - \bar{x})^2 h_i\right].$$

Nach Anwendung der Rechenregeln für das Summenzeichen geht Formel (I) über in

$$\text{(II)} \qquad s^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum (x_i - k)^2 h_i - 2(\bar{x} - k)\sum (x_i - k) h_i + (k - \bar{x})^2 \sum h_i\right].$$

Wendet man nun auf das mittlere Glied die Beziehung (95)

$$(\bar{x} - k) = \frac{1}{N}\sum (x_i - k) h_i$$

an und setzt im letzten Glied

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i h_i \quad \text{und} \quad \sum h_i = N,$$

[1]) Für das Quadrat der mittleren Abweichung findet sich in der Statistik auch die Bezeichnung **Varianz**

[2]) Bei den folgenden Ableitungen werden bei dem Summenzeichen die unteren und oberen Grenzen weggelassen

so ergibt sich

$$\text{(III)} \quad s^2 = \frac{1}{N-1}\left\{\sum (x_i - k)^2 h_i - \frac{2}{N}\sum (x_i - k)\, h_i \cdot \sum (x_i - k)\, h_i + \right.$$

$$\left. + \left[k - \frac{1}{N}\sum x_i h_i\right]^2 \cdot N\right\} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left\{\sum (x_i - k)^2 h_i - \frac{2}{N}\left[\sum (x_i - k)\, h_i\right]^2 + \frac{1}{N}\left[N \cdot k - \sum x_i h_i\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left\{\sum (x_i - k)^2 h_i - \frac{2}{N}\left[\sum (x_i - k)\, h_i\right]^2 + \frac{1}{N}\left[\sum k h_i - \sum x_i h_i\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left\{\sum (x_i - k)^2 h_i - \frac{2}{N}\left[\sum (x_i - k)\, h_i\right]^2 + \frac{1}{N}\left[\sum (x_i - k)\, h_i\right]^2\right\} =$$

$$\text{(IV)} \quad = \frac{1}{N-1}\left\{\sum (x_i - k)^2 h_i - \frac{1}{N}\left[\sum (x_i - k)\, h_i\right]^2\right\}$$

oder

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum (x_i - k)^2 h_i}{N-1} - \frac{N}{N-1}\left[\frac{\sum (x_i - k)\, h_i}{N}\right]^2} \qquad (113\,\text{a})$$

Für Formel (113a) kann auch geschrieben werden

$$\boxed{s^2 = s_k^2 - \frac{N}{N-1} \cdot \bar{x}_k^2} \qquad (113\,\text{b})$$

wobei definiert ist

s_k^2: Varianz, bezogen auf die Konstante k,

$\bar{x}_k$: arithmetisches Mittel aus den um k reduzierten Einzelwerten.

Aus Formel (113a) folgt für Meßreihen mit geringem Umfang, indem $k = 0$ gesetzt wird:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum x_i^2 h_i}{N-1} - \frac{N}{N-1} \cdot \bar{x}^2} \qquad (114)$$

Für das obige Beispiel ergibt sich dann folgende vereinfachte Berechnung der Streuung:

$$k = 5{,}3$$

$$\bar{x}_k = \frac{(-0{,}5)\cdot 1 + (-0{,}4)\cdot 3 + (-0{,}1)\cdot 2 + 0\cdot 6 + 0{,}2\cdot 1 + 0{,}5\cdot 4 + 0{,}8\cdot 2 + 0{,}9\cdot 1}{20}$$

$$\bar{x}_k = 0{,}14; \qquad \bar{x}_k^2 = 0{,}0196$$

$$s_k^2 = \frac{(-0{,}5)^2\cdot 1 + (-0{,}4)^2\cdot 3 + (-0{,}1)^2\cdot 2 + 0^2\cdot 6 + 0{,}2^2\cdot 1 + 0{,}5^2\cdot 4 + 0{,}8^2\cdot 2 + 0{,}9^2\cdot 1}{19}$$

$$s_k^2 = \frac{3{,}88}{19}$$

$$s^2 = \frac{3{,}88}{19} - \frac{20\cdot 0{,}0196}{19}$$

$$s = \sqrt{\frac{3{,}488}{19}}$$

$$\underline{\underline{s = 0{,}42847.}}$$

Bei gruppiertem Zahlenmaterial sind in der Formel (113a) die Werte x_i durch die *Gruppenmitten* m_i zu ersetzen.

Zum Vergleich von Streuungen verschiedener Meßreihen ist es erforderlich, das Streuungsmaß s nicht absolut, sondern bezogen auf das arithmetische Mittel der betreffenden Meßreihe auszudrücken. Dieses relative Streuungsmaß, das als **Variationskoeffizient** oder **Variabilitätskoeffizient** bezeichnet wird, gibt an, um wieviel Prozent die Meßwerte im Durchschnitt vom Mittelwert abweichen. Der Variationskoeffizient wird definiert durch

$$\boxed{v = \frac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%} \tag{115}$$

Für obiges Beispiel ergibt sich

$$v = \frac{0{,}42847}{5{,}44}\cdot 100\%$$

$$\underline{\underline{v = 7{,}88\%.}}$$

AUFGABEN

193. Man berechne für das Zahlenmaterial der Aufgabe 188, Seite 345,

a) die Standardabweichung s,
b) den Variationskoeffizienten v.

194. Es ist unter Zugrundelegung der in Aufgabe 192, Seite 346, gefundenen Häufigkeitstabelle zu berechnen
   a) die Standardabweichung s,
   b) der Variationskoeffizient v.

195. Wie groß ist für das Zahlenmaterial der Aufgabe 190, Seite 346, die lineare Streuung um das arithmetische Mittel?

196. Man berechne aus der Meßreihe

   4, 5, 8, 11, 15

   a) die Spannweite,
   b) die durchschnittliche Streuung um den Median,
   c) die mittlere Abweichung.

4.4. Die Methode der kleinsten Quadrate

4.4.1. Die Entwicklungsrichtungen empirischer Zeitreihen

Unter einer **Zeitreihe** oder **dynamischen Reihe** versteht man die Entwicklung einer ökonomischen Erscheinung in der Zeit, das heißt eine Aufeinanderfolge von empirischen Werten, die einem bestimmten *Zeitpunkt* oder *Zeitraum* zugeordnet sind. In jeder Zeitreihe kommt eine bestimmte Entwicklungsrichtung, die als **Grundrichtung**, **Entwicklungstendenz** oder **Trend**[1]) der Reihe bezeichnet wird, zum Ausdruck. Die Entwicklungstendenz ist bei den einzelnen Zeitreihen verschieden stark ausgeprägt, je nachdem, ob störende Faktoren periodischer (Saisoneinflüsse) oder zufälliger Art auf die zu untersuchende Entwicklung einwirken. Es werden in der Statistik sechs verschiedene Grundrichtungen unterschieden:

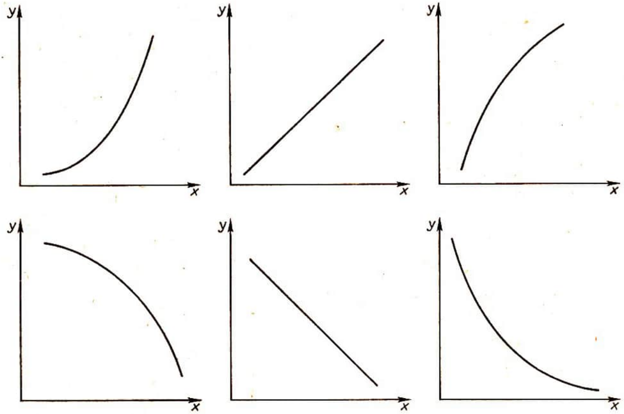
1. *progressiv* steigend	2. *geradlinig* steigend	3. *degressiv* steigend
4. *progressiv* fallend	5. *geradlinig* fallend	6. *degressiv* fallend.

Die Begriffe „progressiv" und „degressiv" geben dabei die Art der Veränderung der Entwicklungsrichtung an, die in den Bildern 87 ⋯ 92 skizziert ist.
Die Entwicklungsrichtungen, die sich bei den statistischen Zeitreihen nur in der Tendenz durchsetzen, sind aus der Differentialrechnung bekannt, wo folgende Beziehungen gelten:

progressiv steigend:	$y' > 0;$	$y'' > 0$	*konvexer Verlauf* der Kurve
geradlinig steigend:	$y' > 0;$	$y'' = 0$	*linearer Verlauf* der Kurve
degressiv steigend:	$y' > 0;$	$y'' < 0$	*konkaver Verlauf* der Kurve
progressiv fallend:	$y' < 0;$	$y'' < 0$	*konkaver Verlauf* der Kurve
geradlinig fallend:	$y' < 0;$	$y'' = 0$	*linearer Verlauf* der Kurve
degressiv fallend:	$y' < 0;$	$y'' > 0$	*konvexer Verlauf* der Kurve

[1]) Trend (engl.) Grundrichtung eines statistisch erfaßten Verlaufes

In 4.2.2.7. wurde ausgeführt, daß die graphische Darstellung der empirischen Häufigkeitsverteilung ein Treppen- bzw. Häufigkeitspolygon ergibt. Auch die Darstellung von Zeitreihen liefert stets einen **Polygonzug**, da es sich hier um empirisches Zahlenmaterial handelt, das als solches nicht in geschlossener analytischer Dar-



Bilder 87 ··· 92

stellung zusammengefaßt werden kann. Für weitergehende Analysen ist es jedoch erforderlich, die Gleichung einer *Funktion* bestimmten Typs zu finden, deren *graphische Darstellung den Polygonzug ersetzt.* An diese Funktion, die den empirischen Verlauf in seiner Grundrichtung widerspiegeln soll, müssen zwei Forderungen gestellt werden.

a) Sie soll sich ‚*möglichst gut*' an die statistischen Werte anpassen,
b) sie soll jedoch nicht jede Schwankung des empirischen Materials berücksichtigen, sondern die Tendenz, den Trend, innerhalb des zu untersuchenden Zeitraums veranschaulichen.

Die Forderung b) bedeutet eine Abstraktion von den mehr oder weniger großen zufälligen Schwankungen, denen eine jede ökonomische Erscheinung unterworfen ist. Eine Funktion, die nach der **Methode der kleinsten Quadrate** (*Methode der kleinsten Quadratsumme*) ermittelt wird, erfüllt beide Bedingungen.

4.4.2. Die Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung der Trendfunktion

4.4.2.1. Das Wesen der Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde von dem deutschen Mathematiker GAUSS im Zusammenhang mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen entwickelt. Sie ist jedoch nicht nur auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränkt, sondern kann auch auf die Analyse von Zeitreihen sowie allgemein zur Berechnung von **Näherungsfunktionen** auf der Grundlage empirischen Zahlenmaterials angewendet werden. Der Grundgedanke dieser Methode ist die Berechnung einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ aus gegebenen statistischen Beobachtungswerten, wobei für die Funktion f folgende Bedingung gelten muß:

Die Summe der Quadrate aller Abweichungen der einzelnen Funktionswerte y_i von den entsprechenden statistischen Werten s_i soll ein Minimum ergeben[1]).

$$\text{(I)} \quad S = (s_1 - y_1)^2 + (s_2 - y_2)^2 + \cdots + (s_n - y_n)^2 \to \min$$

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} (s_i - y_i)^2 \to \min} \tag{116a}$$

oder

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} [s_i - f(x_i)]^2 \to \min} \tag{116b}$$

Diese Summe (Abweichungsquadratsumme) ist eine Funktion. Die Forderung, sie zu einem Minimum zu machen, wird als GAUSSsche Minimumbedingung bezeichnet.

4.4.2.2. Die allgemeine Herleitung der Normalgleichungen für eine Näherungsfunktion m-ten Grades

Die Trendfunktion f ist eine Näherungsfunktion, die als ganze rationale Funktion m-ten Grades angesetzt werden kann und deren Koeffizienten a_j berechnet werden müssen.

Die Gleichung einer ganzen rationalen Funktion m-ten Grades lautet allgemein:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m.$$

Man ersetzt nun in (116b) die $f(x_i)$ durch die entsprechenden Terme $a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m$ und erhält

$$\text{(II)} \quad S = \sum_{i=1}^{n} (s_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m)^2 \to \min$$

---

[1]) Daher die Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate" oder „Methode der kleinsten Quadratsumme"

In dieser Funktionsgleichung sind bekannt

die statistischen Werte s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$
die Zeitwerte (Jahre o. ä.) x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$
und unbekannt die Koeffizienten a_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$
der zu berechnenden Näherungsfunktion S.

Diese Koeffizienten, die so berechnet werden müssen, daß für sie die Funktionsgleichung (II) ihr Minimum annimmt, sind also die Variablen der Funktion. Daraus folgt, daß das Minimum einer Funktion mit $(m + 1)$ unabhängigen Variablen $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ gefunden werden muß. Dazu sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung zu bilden und gleich Null zu setzen. Das ergibt ein Gleichungssystem, aus dem die gesuchten Koeffizienten der Trendfunktion berechnet werden können. Die Gleichungen dieses Systems werden als **Normalgleichungen** bezeichnet.
Unter Berücksichtigung der Regeln für das Rechnen mit dem Summenzeichen ergibt sich dann[1])

$$\text{(III)}\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a_0} &= \sum[-2(s_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \cdots - a_mx_i^m)]\\
\frac{\partial S}{\partial a_1} &= \sum[-2x_i(s_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \cdots - a_mx_i^m)]\\
\frac{\partial S}{\partial a_2} &= \sum[-2x_i^2(s_i - a_0 - a_1x_i - a_2x^i - \cdots - a_mx_i^m)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial S}{\partial a_m} &= \sum[-2x_i^m(s_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \cdots - a_mx_i^m)].
\end{aligned}$$

Nach dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen (III) und nach anschließender Umformung ergibt sich das System der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
\sum s_i &= a_0 \cdot n + a_1\sum x_i + a_2\sum x_i^2 + \cdots + a_m\sum x_i^m\\
\sum s_ix_i &= a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + a_2\sum x_i^3 + \cdots + a_m\sum x_i^{m+1}\\
\sum s_ix_i^2 &= a_0\sum x_i^2 + a_1\sum x_i^3 + a_2\sum x_i^4 + \cdots + a_m\sum x_i^{m+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum s_ix_i^m &= a_0\sum x_i^m + a_1\sum x_i^{m+1} + a_2\sum x_i{}^{m+2} + \cdots + a_m\sum x_i^{2m}.
\end{aligned}\tag{117}$$

Aus diesem Gleichungssystem können also, wie bereits dargelegt, die gesuchten Koeffizienten $a_j (j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ der Trendfunktion $f\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$

---

[1]) In den folgenden Darstellungen wird auf die Angabe der Summationsgrenzen verzichtet

nach den bekannten Methoden berechnet werden. Die dazu erforderlichen Größen

$$n; \quad \sum s_i, \quad \sum s_i x_i, \quad \ldots \quad, \quad \sum s_i x_i^m;$$
$$\sum x_i, \quad \sum x_i^2, \quad \sum x_i^3, \quad \ldots \quad, \quad \sum x_i^{2m}$$

lassen sich aus dem statistischen Material bestimmen.

Auf die Beweisführung, daß es sich hierbei tatsächlich um das Minimum der Abweichungsquadratsumme handelt, soll im Rahmen dieses Lehrbuches verzichtet werden.

In der Regel kommt man in der statistischen Analyse der Zeitreihen mit ganzen rationalen Funktionen 1. und 2. Grades aus. Im Falle einer **linearen** Grundtendenz nimmt das Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der linearen Funktion die Form

$$\boxed{\begin{aligned} \sum s_i &= a_0 \cdot n + a_1 \sum x_i \\ \sum s_i x_i &= a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 \end{aligned}} \tag{118a}$$

an, und bei einer degressiven bzw. progressiven Tendenz zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion geht das System (117) über in

$$\boxed{\begin{aligned} \sum s_i &= a_0 \cdot n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 \\ \sum s_i x_i &= a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 \\ \sum s_i x_i^2 &= a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 \end{aligned}} \tag{118b}$$

Die praktische Berechnung soll an folgender Aufgabe veranschaulicht werden.

BEISPIEL

Die Produktion von Wechselstrommotoren verlief in der DDR von 1955 bis 1963 wie folgt:

Jahr	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
1000 Stück	205	226	263	283	263	287	306	329	403

a) Wie lautet die Gleichung der Trendfunktion 1. Grades für diesen Zeitraum?

b) Es sind der empirische Verlauf sowie die lineare Trendfunktion graphisch in einem Koordinatensystem darzustellen.

Lösung: a) Das empirische Zahlenmaterial wird in Form einer Tabelle dargestellt, wobei den Jahren zur vereinfachten Berechnung als Zeitwerte die Ordnungszahlen von 1 bis 9 zugeordnet werden. Aus dem ersten Teil der Tabelle werden dann die erforderlichen Größen

$$n; \quad \sum s_i, \quad \sum s_i x_i; \quad \sum x_i, \quad \sum x_i^2,$$

die im Gleichungssystem (118a) enthalten sind, ermittelt.

Jahre	Zeitwerte x_i	empirische Werte (1000 Stück) s_i	$s_i x_i$	x_i^2
1955	1	205	205	1
1956	2	226	452	4
1957	3	263	789	9
1958	4	283	1132	16
1959	5	263	1315	25
1960	6	287	1722	36
1961	7	306	2142	49
1962	8	329	2632	64
1963	9	403	3627	81
$n = 9$	$\sum x_i = 45$	$\sum s_i = 2565$	$\sum s_i x_i = 14016$	$\sum x_i^2 = 285$

Die *Normalgleichungen* lauten dann

$$2565 = 9a_0 + 45a_1$$

$$14016 = 45a_0 + 285a_1.$$

Nach der Additionsmethode ergibt sich

$$\underline{\underline{a_0 = 185{,}75}}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 19{,}85.}}$$

Die Gleichung der linearen Trendfunktion lautet dann

$$\text{(IV)} \quad \underline{\underline{y = 185{,}75 + 19{,}85x.}}$$

In der folgenden Tabelle werden die empirischen Werte den Funktionswerten (Trendwerten) gegenübergestellt (vgl. Bild 93).

s_i	205	226	263	283	263	287	306	329	403
y_i	206	225	245	265	285	305	325	345	364
$d_i = s_i - y_i$	-1	$+1$	$+18$	$+18$	-22	-18	-19	-16	$+39$

b) Vgl. Bild 93

Mit Hilfe der Trendfunktion (IV) ist es nun möglich, Trendwerte, die über den untersuchten Zeitraum hinausgehen, zu *extrapolieren*. Der Näherungswert für das Jahr 1964 ergibt sich dann durch Substitution des Zeitwertes $x = 10$ in die Funktionsgleichung (IV)

$$1964: \quad x = 10 \quad y = 384\,000 \text{ Stück}.$$

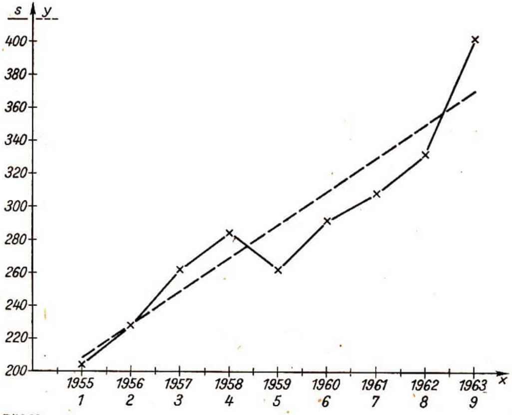


Bild 93

Die Näherungswerte für 1965 und 1966 betragen

1965: $x = 11$ $y = 404000$ Stück

1966: $x = 12$ $y = 424000$ Stück.

Aus der Definition der Minimumbedingung folgt, daß die Methode der kleinsten Quadrate ihrem Wesen nach ein *arithmetisches Mittel*, angewandt auf *Zeitreihen*, darstellt. Nach den mathematischen Eigenschaften für das arithmetische Mittel gelten die Beziehungen

(Va) $S = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \text{Minimum}$ (quadratische Minimumeigenschaft)

(Vb) $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ (Schwerpunktseigenschaft).

Beide Bedingungen sind von der berechneten linearen Funktion erfüllt, denn (Va) entspricht dem Ansatz

(VIa) $S = \sum (s_i - y_i)^2 \to \min$

und (Vb) der Gleichung

(VIb) $\sum (s_i - y_i) = 0.$

4.4.2.3. Die vereinfachte Berechnung der Trendfunktion

Werden die Zeitwerte x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ so angesetzt, daß die Bedingung

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)} \tag{119}$$

erfüllt ist, so reduziert sich das Gleichungssystem (118a) für eine lineare Funktion auf

$$\boxed{\begin{aligned} \sum s_i &= a_0 \cdot n \\ \sum s_i x_i &= a_1 \sum x_i^2 \end{aligned}} \tag{120a}$$

und das System (118b) für eine quadratische Funktion auf

$$\boxed{\begin{aligned} \sum s_i &= a_0 \cdot n + a_2 \sum x_i^2 \\ \sum s_i x_i &= a_1 \sum x_i^2 \\ \sum s_i x_i^2 &= a_0 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^4 \end{aligned}} \tag{120b}$$

Diesen Ansatz erhält man jedoch nur, wenn man der einen Hälfte der Zeitabschnitte *positive* und der anderen Hälfte *negative* x_i-Werte zuordnet.

Dabei sind, gleiche Abstände der x_i-Werte vorausgesetzt, zwei Fälle zu unterscheiden:

1. die Beobachtungsreihe umfaßt eine **ungerade Anzahl** von statistischen Werten,
2. die Beobachtungsreihe umfaßt eine **gerade Anzahl** von statistischen Werten.

Im Falle einer *ungeraden Anzahl* von s_i-Werten muß zunächst das mittelste Glied der Reihe nach dem Term $\frac{n+1}{2}$ (Ordnungszahl des Zentralwertes) bestimmt werden, wobei n die Gesamtzahl der empirischen Werte darstellt. Dem mittelsten Zeitabschnitt ordnet man dann den Zeitwert Null zu, die zeitlich früheren Beobachtungsintervalle erhalten $-1, -2, -3, \ldots$ und die zeitlich späteren $+1, +2, +3, \ldots$ im Ansatz.
Bei einer *geraden Anzahl* von s_i-Werten müssen dagegen die *beiden* mittleren Glieder, also das $\frac{n}{2}$-te und $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-te Zeitintervall, mit -1 und $+1$ angesetzt werden, während den vorangehenden Zeitabschnitten die **ungeraden negativen Zahlen** $-3, -5, -7, \ldots$ und den folgenden Zeitabschnitten die **ungeraden positiven Zahlen** $+3, +5, +7, \ldots$ zugeordnet werden. In beiden Fällen ist dann die Bedingung (119) erfüllt.

Zur Veranschaulichung der verkürzten Trendberechnung greifen wir auf das Zahlenmaterial des Beispiels in diesem Abschnitt zurück.

Jahre	Zeitwerte x_i	empirische Werte s_i	$s_i x_i$	x_i^2
1955	-4	205	-820	16
1956	-3	226	-678	9
1957	-2	263	-526	4
1958	-1	283	-283	1
1959	0	263	0	0
1960	$+1$	287	$+287$	1
1961	$+2$	306	$+612$	4
1962	$+3$	329	$+987$	9
1963	$+4$	403	$+1612$	16
$n = 9$	$\sum x_i = 0$	$\sum s_i = 2565$	$\sum s_i x_i = 1191$	$\sum x_i^2 = 60$

$$\underline{\underline{2565 = 9a_0}}$$

$$\underline{\underline{1191 = 60a_1}}$$

$$\underline{\underline{a_0 = 285}} \qquad \underline{\underline{a_1 = 19,85}}$$

Die Näherungsfunktion lautet dann in analytischer Darstellung

$$\text{(VII)} \qquad \underline{\underline{y = 285 + 19,85x.}}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Funktion (VII) als Definitionsbereich für den Zeitraum von 1955 bis 1963

$$-4 \leqq x \leqq +4$$

und die in 4.4.2.2. gefundene Funktion (IV) für den gleichen Zeitraum den Definitionsbereich

$$+1 \leqq x \leqq +9$$

besitzt. Bei Berücksichtigung dieses unterschiedlichen Definitionsbereiches ergeben sich für beide Funktionen die gleichen Funktionswerte.

$y = 285 + 19,85x$

Jahre	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
x_i	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y_i	206	225	245	265	285	305	325	345	364

$y = 185,75 + 19,85x$

Jahre	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
x_i	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$
y_i	206	225	245	265	285	305	325	345	364

4.4.2.4. Der Grad der Anpassung der Trendfunktion an den empirischen Verlauf

Da die Trendfunktion einen dynamischen Mittelwert darstellt, kann man den Grad der Anpassung an den empirischen Verlauf mittels der Formel für die mittlere Abweichung (quadratische Streuung) messen (vgl. S. 350). Dazu setzt man

$$x_i = s_i$$

und

$$\bar{x} = y_i$$

und erhält als **Grad der absoluten Anpassung**

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum(s_i - y_i)^2}{n}}} \tag{121}$$

Für die relative Streuung, für den **Grad der relativen Anpassung** ergibt sich der Variationskoeffizient

$$\boxed{v = \frac{\sigma}{\frac{\sum s_i}{n}} \cdot 100\%} \tag{122}$$

wobei als Bezugsbasis das arithmetische Mittel der statistischen Werte s_i, also $\bar{s} = \sum s_i : n$, steht.
In dem Beispiel dieses Abschnittes betragen die absolute und die relative Anpassung

$$\underline{\underline{\sigma = \sqrt{\frac{3596}{9}} = 19{,}989}}; \text{ das sind } 19{,}989 \text{ T Stck.}$$

$$\text{und} \quad \underline{\underline{v = \frac{19{,}989}{285} \cdot 100\% = 7{,}0137\%}}.$$

AUFGABEN

197. Die Spareinlagen pro Kopf der Bevölkerung bei den Kreditinstituten der DDR entwickelten sich wie folgt:

Jahr	Pro-Kopf-Betrag in MDN	Jahr	Pro-Kopf-Betrag in MDN
1952	111	1958	650
1953	140	1959	810
1954	206	1960	992
1955	276	1961	1151
1956	344	1962	1226
1957	515		

Man ermittle die Gleichung der Trendfunktion 2. Grades für diesen Zeitraum und berechne den absoluten und relativen Grad der Anpassung der Trendfunktion an den empirischen Verlauf.

198. Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung des Einzelhandelsumsatzes pro Kopf der Bevölkerung in der DDR von 1951 bis 1962.

Jahr	Umsatz pro Kopf in MDN	Jahr	Umsatz pro Kopf in MDN
1951	1170	1957	1990
1952	1370	1958	2200
1953	1510	1959	2430
1954	1650	1960	2610
1955	1760	1961	2780
1956	1840	1962	2760

Es ist

a) die Gleichung der linearen Trendfunktion für diesen Zeitraum aufzustellen und

b) der absolute und relative Grad der Anpassung der Trendfunktion an den empirischen Verlauf zu berechnen.

199. Die industrielle Produktion an chemischen Apparaten, Pumpen und Kompressoren entwickelte sich in der DDR wie folgt:

Jahr	Produktion in Mill. MDN
1955	297,8
1958	394,3
1960	585,8
1962	770,2
1963	803,1

Man ermittle die lineare Näherungsfunktion, die dem Trend der durch obige statistische Zahlen gegebenen empirischen Entwicklung entspricht, und interpoliere die fehlenden Werte.

4.5. Die lineare Regression und Korrelation

4.5.1. Die lineare Regression

4.5.1.1. Das Wesen und die Bedeutung der Regression

In 4.2. und 4.3. wurden die Meßreihen jeweils nur in bezug auf **ein** meßbares Merkmal X untersucht. Zur Charakterisierung dienten dabei die aus den einzelnen Beobachtungswerten errechneten Mittelwerte und Streuungsmaße; die graphische Darstellung der Verteilung dieser Meßwerte erfolgte in Form eines Häufigkeits- und

Summenpolygons. Bei vielen statistischen Untersuchungen liegen nun **zwei** Meßreihen (x_i) und (y_i) mit den Merkmalen X und Y vor, die daraufhin untersucht werden sollen, ob zwischen ihnen eine bestimmte **Abhängigkeit** besteht. Dabei werden in den meisten Fällen keine eindeutigen **funktionalen** Zuordnungen existieren, sondern zwischen den Meßwerten x_i und y_i wird ein sogenannter **korrelativer**[1]) Zusammenhang bestehen. Darunter versteht man den Zusammenhang zwischen zwei Variablen X und Y, deren einzelne Meßwerte x_i und y_i bestimmten *statistischen* Gesetzen unterliegen. Zu jedem Wert der Variablen X gehören dann verschiedene Werte von Y, deren Verteilung jedoch durch X bedingt ist. Ebenso ist jedem Wert der Variablen Y eine bestimmte Verteilung von X zugeordnet. Dieser korrelative Zusammenhang wird auch als **stochastischer**[2]) Zusammenhang bezeichnet. Die Untersuchung dieser Beziehungen kann nun mit Hilfe der **Regression**[3]) erfolgen. Die **Regressionsgleichung**, die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wird, ist dann die *analytische Darstellung* der Zuordnung zwischen den beiden Variablen X und Y.
Im folgenden wollen wir uns auf lineare Regressionsgleichungen[4]) beschränken.

4.5.1.2. Die Berechnung der linearen Regressionsgleichung

Die Berechnung der linearen Regressionsgleichung soll an folgender Aufgabe dargestellt werden.
In einem metallurgischen Betrieb wird für Forschungszwecke an 25 Stahlstäben gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlenstoffgehalts die Zugfestigkeit σ_B gemessen. Es ergeben sich folgende Meßwerte:

C-Gehalt (X) in %	σ_B (Y) in kp/mm²	C-Gehalt (X) in %	σ_B (Y) in kp/mm²	C-Gehalt (X) in %	σ_B (Y) in kp/mm²
0,10	35,8	0,15	38,7	0,25	47,3
0,30	52,2	0,55	78,3	0,70	92,9
0,15	40,0	0,60	82,2	0,55	75,8
0,60	84,9	0,20	41,1	0,65	86,0
0,70	88,5	0,40	61,0	0,70	92,3
0,20	43,4	0,40	62,5	0,40	65,0
0,50	72,1	0,25	50,1	0,65	88,8
0,20	44,5	0,60	80,0	0,30	55,1
0,30	56,8				

Es ist die Abhängigkeit der Zugfestigkeit vom Kohlenstoffgehalt zu untersuchen.
Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Zugfestigkeit und Kohlenstoffgehalt werden die in der *Urliste* ungeordneten Wertepaare $(x_i; y_i)$ nach der unab-

---

[1]) korrelativ (lat.) einander wechselseitig bedingend
[2]) stochastisch (griech.) mutmaßlich; wird verwendet, wenn eine Größe eine zweite beeinflußt, sie aber nicht ausschließlich bestimmt
[3]) Regression (lat.) Rückbildung
[4]) Von linearer Regression spricht man, wenn man den korrelativen Zusammenhang zwischen X und Y durch eine Gerade darstellen kann

hängigen Variablen X (Kohlenstoffgehalt) geordnet und in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Punkte eingetragen (Bild 94).

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0,10	35,8	0,25	47,3	0,40	62,5	0,60	82,2
0,15	38,7	0,25	50,1	0,40	65,0	0,60	84,9
0,15	40,0	0,30	52,2	0,50	72,1	0,65	86,0
0,20	41,1	0,30	56,8	0,55	75,8	0,65	88,8
0,20	43,4	0,30	55,1	0,55	78,3	0,70	88,5
0,20	44,5	0,40	61,0	0,60	80,0	0,70	92,3
						0,70	92,9

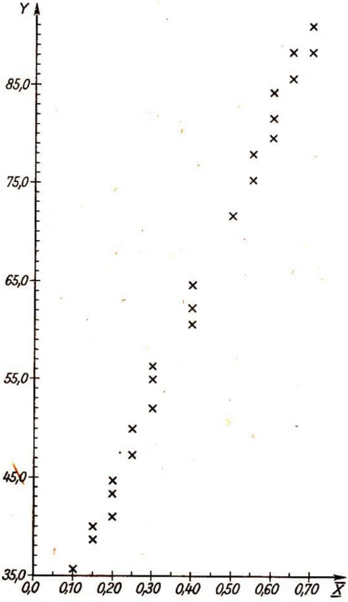


Bild 94

Es zeigt sich hier keine funktionale Zuordnung zwischen X und Y, da zu ein und demselben x-Wert mehrere y-Werte gehören und somit eine Streuung bei der abhängigen Variablen vorliegt. Aber trotz dieser Streuung kommt sowohl in der Tabelle als auch in der graphischen Darstellung eine bestimmte Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck, die darin besteht, daß mit wachsendem X auch Y zunimmt. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate kann man nun eine *lineare Funktion* mit der Funktionsgleichung

(I) $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$

bestimmen, die sich dem *Punkteschwarm* möglichst gut anpaßt. Diese Gerade wird als **Regressions-** oder **Beziehungsgerade** bezeichnet. Nach dem GAUSSschen Minimumprinzip (116a) gilt

(II) $S = \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2 \to \min$[1].

bzw.

(III) $S(a_0; a_1) = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \to \min$

[1] Die Summationsgrenzen werden weggelassen

mit y_i: Meßwerte der abhängigen Variablen (Zugfestigkeit in kp/mm²),
x_i: Meßwerte der unabhängigen Variablen (Kohlenstoffgehalt in %),
a_0: unbekanntes Absolutglied der Regressionsgleichung,
a_1: unbekannter Koeffizient der Regressionsgleichung, der den Anstieg der Regressionsgeraden, also den Zuwachs von y je Einheit von x angibt. Dieser Richtungsfaktor wird auch als **Regressionskoeffizient** bezeichnet.

Nach dem partiellen Differenzieren des Funktionsterms $S(a_0; a_1)$ nach a_0 und a_1 und anschließendem Nullsetzen der Ableitungen ergeben sich folgende Normalgleichungen:

$$\text{(IVa)} \qquad \sum y_i - a_0 \cdot n - a_1 \sum x_i = 0$$

$$\text{(IVb)} \qquad \sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0.$$

Dividiert man (IVa) durch n, so erhält man

$$\text{(V)} \qquad \frac{\sum y_i}{n} - a_0 - a_1 \frac{\sum x_i}{n} = 0$$

bzw.

$$\text{(VIa)} \qquad \bar{y} - a_0 - a_1 \bar{x} = 0$$

und nach a_0 aufgelöst

$$\text{(VIb)} \qquad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}.$$

Aus der Gleichung (IVb) folgt nach Substitution von (VIb)

$$\sum x_i y_i - (\bar{y} - a_1 \bar{x}) \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i + a_1 \bar{x} \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0$$

und für a_1 (Regressionskoeffizient)

$$\boxed{a_1 = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}} \qquad (123\,\text{a})$$

Die lineare Regressionsgleichung (I) lautet dann

$$\boxed{\tilde{y} = \bar{y} + \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i} \cdot (x - \bar{x})} \qquad (124)$$

Für die numerische Bestimmung des Regressionskoeffizienten a_1 ist es günstiger, diesen wie folgt umzuformen

$$a_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \tag{123b}$$

oder

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{123c}$$

Für obiges Beispiel ergibt sich folgende Rechentabelle, in der zur Vereinfachung von jedem x_i-Wert 0,40 und von jedem y_i-Wert 70,0 subtrahiert wird.

x_i	y_i	$x_i - 0{,}40$	$y_i - 70{,}0$	$(x_i-0{,}40)(y_i-70{,}0)$	$(x_i-0{,}40)^2$	$(y_i-70{,}0)^2$	$x_i y_i$
0,10	35,8	−0,30	−34,2	10,260	0,0900	1169,64	3,580
0,15	40,0	−0,25	−30,0	7,500	0,0625	900,00	6,000
0,15	38,7	−0,25	−31,3	7,825	0,0625	979,69	5,805
0,20	41,1	−0,20	−28,9	5,780	0,0400	835,21	8,220
0,20	43,4	−0,20	−26,6	5,320	0,0400	707,56	8,680
0,20	44,5	−0,20	−25,5	5,100	0,0400	650,25	8,900
0,25	47,3	−0,15	−22,7	3,405	0,0225	515,29	11,825
0,25	50,1	−0,15	−19,9	2,985	0,0225	396,01	12,525
0,30	52,2	−0,10	−17,8	1,780	0,0100	316,84	15,660
0,30	55,1	−0,10	−14,9	1,490	0,0100	222,01	16,530
0,30	56,8	−0,10	−13,2	1,320	0,0100	174,24	17,040
0,40	61,0	0,00	− 9,0	0,000	0,0000	81,00	24,400
0,40	62,5	0,00	− 7,5	0,000	0,0000	56,25	25,000
0,40	65,0	0,00	− 5,0	0,000	0,0000	25,00	26,000
0,50	72,1	+0,10	+ 2,1	0,210	0,0100	4,41	36,050
0,55	75,8	+0,15	+ 5,8	0,870	0,0225	33,64	41,690
0,55	78,3	+0,15	+ 8,3	1,245	0,0225	68,89	43,065
0,60	80,0	+0,20	+10,0	2,000	0,0400	100,00	48,000
0,60	82,2	+0,20	+12,2	2,440	0,0400	148,84	49,320
0,60	84,9	+0,20	+14,9	2,980	0,0400	222,01	50,940
0,65	86,0	+0,25	+16,0	4,000	0,0625	256,00	55,900
0,65	88,8	+0,25	+18,8	4,700	0,0625	353,44	57,720
0,70	88,5	+0,30	+18,5	5,550	0,0900	342,25	61,950
0,70	92,3	+0,30	+22,3	6,690	0,0900	497,29	64,610
0,70	92,9	+0,30	+22,9	6,870	0,0900	524,41	65,030
10,40	1615,3	0,40	−134,7	90,320	0,9800	9580,17	764,440

Daraus folgt nach (95)

$$\bar{x} = \frac{0{,}40}{25} + 0{,}40 = 0{,}416$$

$$\bar{y} = -\frac{134{,}7}{25} + 70{,}0 = 64{,}612,$$

nach (123c) der Regressionskoeffizient:

$$a_1 = \frac{25 \cdot 90{,}320 - 0{,}40 \cdot (-134{,}7)}{25 \cdot 0{,}9800 - 0{,}16}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 94{,}983}}$$

und nach (124) die Regressionsgleichung:

$$\tilde{y} = 64{,}612 + 94{,}983 \cdot (x - 0{,}416)$$

$$\underline{\underline{\tilde{y} = 25{,}099 + 94{,}983\,x,}}$$

gültig im Definitionsbereich

$$0{,}10 \leqq x \leqq 0{,}70.$$

Der Regressionskoeffizient a_1 gibt nun an, um wieviel Kilopond je Quadratmillimeter die Zugfestigkeit zunimmt, wenn der Kohlenstoffgehalt um 1% ansteigt. Dies entspricht bei einer Zunahme des Kohlenstoffgehaltes um 0,10% einer Zunahme der Zugfestigkeit um 9,4983 kp/mm².

Zur Berechnung der Streuung um die Beziehungsgerade verwendet man die mittlere Abweichung, wobei die Zahl der Freiheitsgrade $(n - 2)$ ist.

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2}} \quad (125)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{23} \cdot 70{,}90}$$

$$\underline{\underline{s = 1{,}7558,}}$$

die Streuung beträgt demnach 1,7558 kp/mm² (Bild 95).

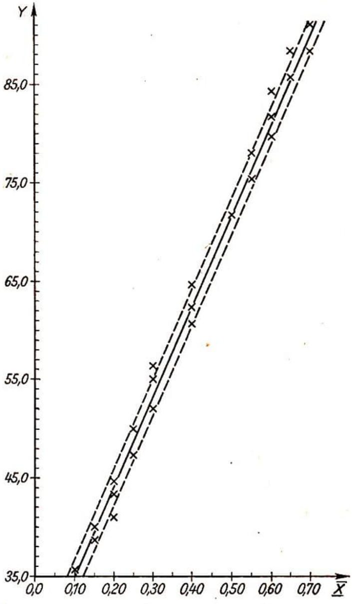


Bild 95

Neben der linearen Regressionsgleichung

$$\text{(I)} \qquad \tilde{y} = a_0 + a_1 x,$$

in der a_1, der Regressionskoeffizient, den Anstieg der Geraden zur **x-Achse**, also den durchschnittlichen Zuwachs von y pro Einheit von x angibt, kann **theoretisch** stets eine zweite Regressionsgleichung berechnet werden. In dieser tritt als unabhängige Variable das Merkmal Y und als abhängige Variable das Merkmal X auf. Die analytische Darstellung dieser Funktion lautet

$$\text{(VII)} \qquad \tilde{x} = b_0 + b_1 y.$$

Hierin drückt b_1 als Regressionskoeffizient den Anstieg der Beziehungsgeraden zur **y-Achse**, also den durchschnittlichen Zuwachs von x pro Einheit von y aus. Nach Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Funktion (VII) ergibt sich für die Regression von x auf y:

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}. \tag{126}$$

Für obiges Beispiel beträgt die Regression von x auf y

$$b_1 = \frac{2311{,}8800}{221360{,}16}$$

$$\underline{\underline{b_1 = 0{,}0104.}}$$

Da es sich bei diesen statistischen Untersuchungen um *stochastische Abhängigkeiten* handelt, ist meist nur *eine Regression* von Bedeutung und sinnvoll, in diesem Beispiel also nur die Funktionsgleichung (I). Diese trägt mit ihrer Zuordnung $y(x)$ der Tatsache Rechnung, daß das Merkmal Y (Zugfestigkeit) von dem Merkmal X (Kohlenstoffgehalt) abhängt.

4.5.2. Die lineare Korrelation

Wie in 4.5.1.2. ausgeführt wurde, gibt der Regressionskoeffizient a_1 den durchschnittlichen Zuwachs des Merkmals Y pro Einheit des Merkmals X an. Geometrisch bedeutet dies den Anstieg der Regressionsgeraden zur Achse der unabhängigen Variablen X. Der Regressionskoeffizient ist jedoch kein Maß für die Stärke des Zusammenhanges bzw. für den Grad der Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen X und Y.

Zur Messung des **Grades der Abhängigkeit** verwendet man

a) den **Korrelationskoeffizienten** r_{xy},

b) das **Bestimmtheitsmaß** B_{xy}.

4.5.2.1. Der Korrelationskoeffizient r_{xy}

Der **Korrelationskoeffizient** r_{xy} einer Meßreihe mit den Wertepaaren $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ ist ein Maß für die Straffheit des linearen Zusammenhanges zwischen den x_i- und den y_i-Werten und ist definiert als

$$\boxed{r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}}} \tag{127a}$$

Der Korrelationskoeffizient r_{xy} kann daher gemäß Definition alle Werte von -1 bis $+1$ annehmen, so daß stets gilt

$$-1 \leqq r_{xy} \leqq +1 .$$

Bei $r_{xy} < 0$ [wenn $\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) < 0$] spricht man von einer **negativen** (*ungleichsinnigen*) **Korrelation**, das bedeutet, zu *großen Werten* von X gehören *kleine Werte* von Y und umgekehrt. $r_{xy} > 0$ [wenn $\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) > 0$] wird dagegen als **positive** (*gleichsinnige*) **Korrelation** bezeichnet, das bedeutet, zu *großen Werten* von X gehören *große Werte* von Y und umgekehrt. $r_{xy} = +1$ bzw. $r_{xy} = -1$ gibt eine **vollständige positive** bzw. **vollständige negative Korrelation** an, bei $r_{xy} = 0$ existiert überhaupt keine Abhängigkeit zwischen X und Y.

Wird nun der Korrelationskoeffizient r_{xy} durch Erweitern mit $\frac{1}{n-1}$ umgeformt, so geht die Formel (127a) über in

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n-1}\sum(y_i - \bar{y})^2}}. \tag{127b}$$

Darin stellt der Radikand auf der rechten Seite der Gleichung das Produkt der Varianzen von x und y, also s_x^2 und s_y^2 (Formel 112b) dar. Definiert man weiterhin

$$\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}\right] = s_{xy} \tag{128}$$

als **Kovarianz** zwischen den x_i- und y_i-Werten, so folgt für den Korrelationskoeffizienten r_{xy}

$$\boxed{r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}} \tag{127c}$$

Aus dem Regressionskoeffizienten a_1 (123b), dem Korrelationskoeffizienten r_{xy} und den Streuungen s_x und s_y lassen sich dann noch folgende Zusammenhänge herleiten:

$$a_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$\boxed{a_1 = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}} \tag{129}$$

und für den Korrelationskoeffizienten

$$\boxed{r_{xy} = a_1 \cdot \frac{s_x}{s_y}} \tag{127d}$$

4.5.2.2. Das Bestimmtheitsmaß B_{xy}

In der Praxis wird in vielen Fällen statt des Korrelationskoeffizienten r_{xy} das **Bestimmtheitsmaß** B_{xy} verwendet. Dieses *Bestimmtheitsmaß* einer Meßreihe mit den Wertepaaren $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ ist definiert als

$$\boxed{B_{xy} = r_{xy}^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}} \tag{130a}$$

B_{xy} kann daher nur die Werte von 0 bis 1 annehmen. Für eine streng **lineare Abhängigkeit** zwischen X und Y gilt dann $\boldsymbol{B_{xy} = 1}$. Liegt überhaupt kein Zusammenhang zwischen beiden Variablen vor, so ist $\boldsymbol{B_{xy} = 0}$.
Verwendet man zur Darstellung des Bestimmtheitsmaßes B_{xy} den Korrelationskoeffizienten r_{xy} nach Formel (127d), so erhält man

$$\boxed{B_{xy} = a_1^2 \cdot \frac{s_x^2}{s_y^2}} \tag{130b}$$

Setzt man nun für die Varianzen von x und y nach Formel (112b)

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{und} \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 \qquad \text{ein,}$$

so folgt

$$B_{xy} = a_1^2 \cdot \frac{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum [a_1 (x_i - \bar{x})]^2}{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2}. \tag{131}$$

Da nach (123a) und (124) gilt

$$(\tilde{y}_i - \bar{y}) = a_1 (x_i - \bar{x}),$$

nimmt schließlich das Bestimmtheitsmaß folgende Form an

$$\boxed{B_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})^2}} \tag{132}$$

das heißt:

Das Bestimmtheitsmaß B_{xy} einer Meßreihe mit den Wertepaaren $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$ ist das Verhältnis der Streuung der aus der Regressionsgeraden berechneten Funktionswerte zur Gesamtstreuung.

Aus der Rechentabelle des Beispiels in 4.5.1.2. und der Formel (113b) ergeben sich für die *Varianzen* von x und y

$$s_x^2 = \frac{0{,}9800}{24} - \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{0{,}40}{25}\right)^2$$

$$s_x^2 = 0{,}040567;$$

$$s_y^2 = \frac{9580{,}17}{24} - \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{-134{,}7}{25}\right)^2$$

$$s_y^2 = 368{,}9336$$

und für die *Kovarianz* nach Formel (128)

$$s_{xy} = \frac{1}{24}\left[90{,}320 - \frac{0{,}40 \cdot (-134{,}7)}{25}\right]$$

$$s_{xy} = 3{,}853133 > 0.$$

Daraus folgt für r_{xy} und B_{xy} nach (127c) und (130a)

$$r_{xy} = \frac{3{,}853133}{\sqrt{0{,}040567 \cdot 368{,}9336}}$$

$$\underline{\underline{r_{xy} = +0{,}996}}$$

$$B_{xy} = (+0{,}996)^2 = \frac{3{,}8531^2}{0{,}040567 \cdot 368{,}9336}$$

$$\underline{\underline{B_{xy} = 0{,}992.}}$$

Der Korrelationskoeffizient für vorstehende Aufgabe beträgt $r_{xy} = +0{,}996$ oder 99,6%, das Bestimmtheitsmaß $B_{xy} = 0{,}992$ oder 99,2%. Es liegt daher eine sehr starke *positive Abhängigkeit* der Zugfestigkeit vom Kohlenstoffgehalt vor.

AUFGABEN

200. Es ist die Regressionsgleichung sowie der Grad der Abhängigkeit der Bruchdehnung vom Kohlenstoffgehalt für folgende 25 Messungen zu berechnen.

C-Gehalt in %	Bruchdehnung δ in %	C-Gehalt in %	Bruchdehnung δ in %	C-Gehalt in %	Bruchdehnung δ in %
0,70	9,9	0,10	30,5	0,55	16,4
0,40	22,1	0,60	14,9	0,15	30,4
0,15	28,6	0,30	24,9	0,20	27,9
0,60	12,0	0,70	11,0	0,20	31,0
0,25	24,8	0,40	20,5	0,65	11,0
0,65	12,4	0,20	29,4	0,30	23,0
0,50	20,2	0,70	12,1	0,25	26,0
0,30	26,1	0,40	19,0	0,60	13,1
0,55	17,6				

201. Bei der Untersuchung des Einflusses der relativen Luftfeuchtigkeit auf den Feuchtigkeitsgehalt bei Faserstoffen wurden bei Wolle folgende Meßwerte ermittelt.

rel. Luftfeuchtigk. φ in % (X)	Wassergehalt W in % (Y)	rel. Luftfeuchtigk. φ in % (X)	Wassergehalt W in % (Y)
10	5	70	17
90	26	20	9
20	8	40	13
40	12	40	11
50	14	50	12
70	18	70	19
80	21	80	22
90	25	90	24
10	4	50	13
10	6	50	17

Man berechne:

a) die Beziehungsgerade $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$,

b) die Streuung um die Beziehungsgerade,

c) den Korrelationskoeffizienten r_{xy},

d) das Bestimmtheitsmaß B_{xy}.

4.6. Die Kombinatorik

4.6.1. Das Wesen und die Bedeutung der Kombinatorik

In Wirtschaft und Technik treten sehr häufig Aufgaben auf, bei denen nach bestimmten Anordnungen und Zusammenstellungen von Elementen einer Menge gefragt wird oder bei denen die Anzahl dieser Elemente zu berechnen ist. Aufgaben dieser Art gehören in das Gebiet der **Kombinatorik** oder **Kombinationslehre**[1]). Sie beschäftigt sich mit den *Gesetzen der Zusammenstellungen und möglichen Anordnungen von endlich vielen, beliebig gegebenen Elementen einer Menge X*. Zur Bezeichnung der Elemente werden als Symbole Ziffern oder Buchstaben verwendet. **Gleiche Elemente** werden stets durch **gleiche Symbole**, **verschiedene** durch **unterschiedliche Symbole** ausgedrückt. Die Zusammenstellungen aus diesen Elementen heißen auch **Komplexionen**[2]).
Treten in zwei Komplexionen nicht genau die gleichen Elemente auf, wie z. B. die aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 gebildeten Zusammenstellungen

123 und 1453,

[1]) kombinieren (lat.) verbinden, verknüpfen
[2]) Komplexion (lat.) Zusammenfassung

oder sind die Elemente in unterschiedlicher Anzahl enthalten

122344 und **112344,**

so gelten diese Zusammenstellungen stets als *verschieden.*

Sind dagegen in zwei Komplexionen genau die *gleichen* Elemente in der *gleichen* Anzahl, nur in unterschiedlicher Anordnung enthalten, so unterscheidet man bei den kombinatorischen Aufgaben, je nachdem, ob diese Komplexionen als gleich oder verschieden aufgefaßt werden sollen,

a) Zusammenstellungen **ohne Berücksichtigung der Anordnung,**
b) Zusammenstellungen **mit Berücksichtigung der Anordnung.**

Die Zuordnung zu der einen oder anderen Art hängt dabei von der Natur der zu lösenden Aufgabe ab.
Einige praktische Beispiele aus dem Verkehrs- und Nachrichtenwesen, der Lagerhaltung und der Rechentechnik sollen die Bedeutung der Kombinatorik veranschaulichen.

1. Das Morsealphabet besteht aus den beiden Elementen Punkt und Strich. Wieviel verschiedene Zeichen können aus diesen Elementen gebildet werden, wenn man festlegt, daß nicht mehr als fünf Elemente je Zeichen verwendet werden sollen?
2. Wieviel Fernsprechanschlüsse lassen sich insgesamt im Selbstwählverkehr einrichten, wenn nur fünfstellige Rufnummern verwendet werden sollen? Wie groß ist die Zahl der Anschlüsse, die allgemein zur Verfügung stehen, wenn die Rufnummern, die mit Null beginnen, für Sonderanschlüsse freigehalten werden?
3. Bei der Lagerhaltung kennzeichnet man häufig Material unterschiedlicher Abmessung und Rohstoffzusammensetzung durch Farbmarkierungen. Wieviel verschiedene Sorten Rohre können gekennzeichnet werden, wenn drei Farben zur Verfügung stehen und jede Sorte mit drei verschiedenfarbigen Ringen am unteren Ende des Rohres markiert wird?
4. Bei der Programmsteuerung von Maschinen sowie auf dem Gebiete der Statistik zur Erfassung und Auswertung von ökonomischen Daten besitzt die Lochkarte eine große Bedeutung. Sie ist nach dem Dezimalsystem aufgebaut und besteht aus 80 Lochspalten zu je 10 Lochstellen, die mit 0 bis 9 beziffert sind. Wieviel verschiedene Lochkombinationen sind möglich, wenn jede Lochreihe nur einmal gelocht werden darf und nicht gelochte Reihen unzulässig sind?

4.6.2. Die verschiedenen Arten von Komplexionen

In der Kombinationslehre werden drei verschiedene Arten von Komplexionen unterschieden

1. die **Permutationen**
2. die **Variationen**
3. die **Kombinationen.**

Jede kombinatorische Aufgabe läßt sich auf eine dieser drei Arten zurückführen.

4.6.2.1. Die Permutationen

Man bezeichnet jede Komplexion, in der *alle n gegebenen Elemente* in irgendeiner Anordnung nebeneinanderstehen, als **Permutation**[1]) dieser n Elemente.

Da es bei diesen Permutationen nur auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, folgt daraus, daß zwei Permutationen derselben n Elemente dann und nur dann einander gleich sind, wenn die Reihenfolge in beiden Zusammenstellungen übereinstimmt. Unterschiedliche Anordnung der Elemente bedeutet stets verschiedene Permutationen.

Permutationen voneinander verschiedener Elemente

Aus den beiden Elementen

1 und 2

können die Permutationen

12 und 21

gebildet werden. Die Anzahl der Permutationen beträgt

$$P_2 = 2 = 1 \cdot 2.$$

Der Index 2 gibt hier die Anzahl der zu permutierenden Elemente an.
Sind die drei Elemente 1, 2, 3 gegeben, so ist es möglich, jedes dieser drei Elemente an die erste Stelle zu setzen und alle Permutationen der zwei restlichen Elemente ($P_2 = 1 \cdot 2$) folgen zu lassen. Man erhält dann

123 213 312

132 231 321.

Die Anzahl der Vertauschungen ist daher

$$P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Bei vier Elementen 1, 2, 3, 4 gibt es

$$P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Permutationen, da jedes der vier Elemente an erster Stelle stehen kann und für die übrigen drei Elemente $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Permutationen existieren.

---

[1]) Permutation (lat.) Tausch, Vertauschung

Allgemein ergibt sich für die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen:

Die Anzahl P_n der Permutationen von n voneinander verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n,

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \tag{133a}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Der Satz ist für $n = 1$ und $n = 2$ richtig.

b) Schluß von k auf $k + 1$: Wenn der Satz für $n = k$ als bewiesen angenommen wird und somit $P_k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$ gilt, so ist er auch für die nächst höhere Anzahl von $(k + 1)$ Elementen, d. h. für $n = k + 1$, richtig; denn jedes der $(k + 1)$ Elemente kann an die erste Stelle gesetzt werden, so daß $(k + 1)$ Arten von Permutationen unterschieden werden können, indem jedesmal die mit dem gleichen Element beginnenden Permutationen zu einer Art zusammengefaßt werden. Die Permutationen jeder einzelnen Art erhält man dann, indem man auf das erste, die Art kennzeichnende Element alle Permutationen der restlichen k Elemente folgen läßt, für die nach Voraussetzung $P_k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ Anordnungsmöglichkeiten existieren. Daraus folgt für die Anzahl der Permutationen aus $(k + 1)$ verschiedenen Elementen

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k+1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1).$$

Führt man als abkürzende Schreibweise für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n das Symbol $n!$ ein, also

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

(gelesen: n Fakultät), so geht die Formel (133a) über in

$$\boxed{P_n = n!} \tag{133b}$$

Man beachte, daß das Symbol $n!$ nur für *nichtnegative ganzzahlige* Werte von n gilt mit der Festlegung $0! = 1! = 1$; [1].
Für $n!$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 2\\
3! &= 6\\
4! &= 24\\
5! &= 120\\
6! &= 720\\
7! &= 5040\\
8! &= 40320\\
9! &= 362880\\
10! &= 3628800.
\end{aligned}$$

Ist nicht nur die Anzahl der einzelnen Permutationen zu berechnen, sondern sind diese auch darzustellen, so ist es erforderlich, die Vertauschungen in eine übersichtliche und eindeutige Reihenfolge zu bringen, damit keine Permutation übersehen oder doppelt angesetzt wird. Da man von der natürlichen Reihenfolge der Elemente

$$1, 2, 3, \ldots$$

bzw. $a, b, c, \ldots$

ausgeht und die Permutationen wie in einem Wörterbuch anordnet, bezeichnet man dies als **lexikographische Anordnung** oder **Reihenfolge**. Es wird hierbei zwischen einem „**höheren**" und einem „**niedrigeren**" Element unterschieden. So sagt man, das Element 2 bzw. b sei auf Grund der natürlichen Reihenfolge höher als das Element 1 bzw. a oder umgekehrt 1 bzw. a sei niedriger als 2 bzw. b. Für die *lexikographische Anordnung* gilt folgende Vorschrift:
Man beginnt mit der Permutation, die die Elemente in der natürlichen Reihenfolge umfaßt. Die zweite Permutation ergibt sich dann, indem man in der vorangehenden Anordnung von rechts nach links gehend, das erste Element, das niedriger ist als ein rechts von ihm stehendes, aufsucht und dieses Element durch das nächst höhere aller hinter ihm stehenden Elemente ersetzt. Dabei bleiben die vorangehenden Elemente unverändert, während die noch fehlenden in der natürlichen Anordnung folgen.
Für die vier Elemente 1, 2, 3, 4 ergibt sich nach obiger Vorschrift folgende lexikographische Anordnung

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

Stehen zwei Elemente einer Permutation entgegen ihrer natürlichen Reihenfolge, so bilden diese eine **Inversion.**
In der Permutation

3241

stellen die Elemente

3 und 2
3 und 1
2 und 1
4 und 1

jeweils eine Inversion, insgesamt also vier Inversionen, dar. Die Anzahl ist in den einzelnen Anordnungen unterschiedlich. Werden in einer beliebigen Permutation aus n verschiedenen Elementen zwei benachbarte Elemente miteinander vertauscht, dann verändert sich die Anzahl der Inversionen stets um 1. Sie nimmt um 1 zu, wenn die zwei zu permutierenden Elemente vor der Vertauschung *keine Inversion* bildeten, und um 1 ab, wenn beide Elemente vorher entgegen der natürlichen Reihenfolge standen, also *eine Inversion* zum Ausdruck brachten.

Permutationen von n Elementen, die nicht alle voneinander verschieden sind

Aus den Elementen

$$a, \quad b_1, \quad b_2, \quad c$$

können nach Formel (133b) insgesamt

$$P_4 = 4! = 24$$

Permutationen gebildet werden. Die lexikographische Anordnung lautet

(1)	ab_1b_2c	(7)	b_1ab_2c	(13)	b_2ab_1c	(19)	cab_1b_2
(2)	ab_1cb_2	(8)	b_1acb_2	(14)	b_2acb_1	(20)	cab_2b_1
(3)	ab_2b_1c	(9)	b_1b_2ac	(15)	b_2b_1ac	(21)	cb_1ab_2
(4)	ab_2cb_1	(10)	b_1b_2ca	(16)	b_2b_1ca	(22)	cb_1b_2a
(5)	acb_1b_2	(11)	b_1cab_2	(17)	b_2cab_1	(23)	cb_2ab_1
(6)	acb_2b_1	(12)	b_1cb_2a	(18)	b_2cb_1a	(24)	cb_2b_1a.

Werden nun die Indizes 1 und 2 als Unterscheidungsmerkmal weggenommen, so fallen je zwei der 24 Permutationen zu einer zusammen, und zwar diejenigen, in denen eine Vertauschung der beiden Elemente b_1 und b_2 auftritt.

z. B. acb_1b_2 und acb_2b_1 werden zu $acbb$

oder b_1cb_2a und b_2cb_1a werden zu $bcba$ usw.

Die Anzahl der Permutationen reduziert sich demnach auf

$$P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Sind nun allgemein unter den n Elementen n_1 gleiche Elemente, so fallen — da für n_1 Elemente $n_1!$ Permutationen existieren, die sich in diesem Falle nicht voneinander unterscheiden — insgesamt $n_1!$ Permutationen zu einer zusammen, und die Gesamtzahl der möglichen Vertauschungen beträgt

$$P_n^{(n_1)} = \frac{n!}{n_1!}.$$

In diesem Symbol $P_n^{(n_1)}$ ist n_1 kein Exponent, sondern gibt nur an, wieviel Elemente gleicher Art auftreten.

Existieren mehrere Gruppen gleicher Elemente, so ergibt sich aus obigen Überlegungen:

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich n_1 gleiche Elemente einer ersten, n_2 einer zweiten Art usw. befinden, beträgt

$$\boxed{P_n^{(n_1;n_2;\ldots)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}} \tag{134}$$

BEISPIELE

1. Auf wieviel verschiedene Arten lassen sich die Elemente

a, b, c, d, e

anordnen?

Lösung: Nach Formel (133b) ergeben sich $P_5 = 120$ Permutationen.

2. Wieviel Permutationen gibt es bei folgenden Elementen:

1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6?

Lösung: Nach Formel (134) ergeben sich

$$P_{13}^{(2;3;2;4)} = \frac{13!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4!} = 10810800.$$

3. Wieviel Permutationen gibt es bei den Elementen

$a, b, c, d, e, f,$

die mit

a) a, b) ab, c) cfd beginnen?

Lösung:

a) Da das Element a fest an der ersten Stelle verbleibt, dürfen nur die restlichen fünf Elemente permutiert werden. Es gibt somit

$P_5 = 120$ Permutationen,

die mit a beginnen.

b) Es gibt nur vier zu permutierende Elemente.

$P_4 = 24$ Permutationen

beginnen daher mit ab.

c) Mit cfd beginnen $P_3 = 6$ Permutationen.

4.6.2.2. Die Variationen

Unter Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) versteht man die aus k Elementen bestehenden Zusammensetzungen, die sich aus den n Elementen **unter Berücksichtigung ihrer Anordnungen** innerhalb der Komplexionen bilden lassen.

Es wird hierbei zwischen

1. Zusammenstellungen **mit Wiederholung**
2. Zusammenstellungen **ohne Wiederholung**

unterschieden, je nachdem, ob in diesen Komplexionen gleiche Elemente auftreten oder nicht.

Variationen ohne Wiederholung

Bei den drei Elementen 1, 2, 3 stellen die *Variationen 1. Klasse* die Elemente selbst dar:

1 2 3,

ihre Anzahl ist

$$V_3^{(1)} = 3.$$

Die in der Klammer stehende hochgestellte Zahl gibt die Klasse der Variationen an. Die *Variationen 2. Klasse* ergeben sich durch eine Anzahl jeweils zweier Elemente und deren verschiedene Permutationen:

12 21 31

13 23 32.

Die Anzahl beträgt

$$V_3^{(2)} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Die *Variationen 3. Klasse* ergeben sich, wenn alle drei gegebenen Elemente herausgegriffen und permutiert werden. Dies ist jedoch identisch mit den Permutationen von diesen drei Elementen.

123 213 312

132 231 321,

ihre Anzahl ist gleich

$$V_3^{(3)} = P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Sind im allgemeinen Falle n Elemente gegeben, so ist die Anzahl der Variationen von diesen n Elementen zur

1. Klasse: $V_n^{(1)} = n,$

da die Variationen mit den Elementen selbst übereinstimmen.

2. Klasse: $V_n^{(2)} = n \cdot (n-1),$

da jedes der n Elemente mit den übrigen $(n-1)$ Elementen in einer Komplexion auftreten muß.

3. Klasse: $V_n^{(3)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2),$

da jede der $n \cdot (n-1)$ Variationen zur 2. Klasse mit den restlichen $(n-2)$ Elementen verbunden wird.

$$\begin{array}{llll}
123 & 213 & 312 & \ldots\ n12 \\
124 & 214 & 314 & \ldots\ n13 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
12n & 21n & 31n & \ldots\ n1(n-1) \\
132 & 231 & 321 & \ldots\ n21 \\
134 & 234 & 324 & \ldots\ n23 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
13n & 23n & 32n & \ldots\ n2(n-1) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
1n(n-1) & 2n(n-1) & 3n(n-1) & \ldots\ n(n-1)(n-2)
\end{array}$$

Für die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung gilt dann:

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung beträgt

$$\boxed{V_n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)} \tag{135}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Der Satz ist für $k = 1$ und $k = 2$ richtig.
b) Wenn $n > 1$ und k eine der bestimmten Zahlen

$$1, 2, \ldots, m, \ldots, (n-1)$$

ist und der Satz für $k = m$ als bewiesen angenommen wird und somit richtig ist, folgt daraus auch die Richtigkeit für $k = m + 1$, das heißt für die Variationen $(m + 1)$-ter Ordnung; denn für jede Variation m-ter Ordnung beträgt die Anzahl der restlichen, nicht in dieser Variation vorkommenden Elemente $(n - m)$. Setzt man nun der Reihe nach jeweils eines dieser restlichen $(n - m)$ Elemente an das Ende der betrachteten Variation m-ter Ordnung, so ergeben sich $(n - m)$ Variationen $(m + 1)$-ter Ordnung. Führt man dies für alle

$$V_n^{(m)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - m + 1)$$

m-ter Ordnung aus, so lassen sich daraus sämtliche Variationen $(m + 1)$-ter Ordnung bilden, und zwar jede nur einmal. Ihre Anzahl ist dann $(n - m)$-mal so groß wie für die Variationen m-ter Ordnung, also

$$V_n^{(m+1)} = V_n^{(m)} \cdot (n - m) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n - m + 1) \cdot (n - m).$$

Daraus folgt für $k = m + 1$ die Formel (135).

Variationen mit Wiederholung

In den bisherigen Variationen trat jedes der n Elemente nur einmal auf. Es ist aber auch möglich, daß sich die Elemente unbeschränkt oft wiederholen. Zusammenstellungen dieser Art werden **Variationen mit Wiederholung** genannt.
Bei den drei Elementen 1, 2, 3 stellen die *Variationen 1. Klasse mit Wiederholung* die Elemente selbst dar:

1 2 3,

ihre Anzahl ist demnach

$$Vw_3^{(1)} = 3.$$

Die *Variationen 2. Klasse mit Wiederholung* ergeben sich, indem jedes dieser drei Elemente mit jedem, auch *mit sich selbst*, in einer Komplexion auftritt,

11 21 31

12 22 32

13 23 33.

Die Anzahl beträgt

$$Vw_3^{(2)} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9.$$

Bei den *Variationen 3. Klasse mit Wiederholung* wird jede der neun Variationen 2. Klasse nochmals mit jedem der drei Elemente verbunden.

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

Insgesamt ist die Anzahl der Variationen 3. Klasse mit Wiederholung

$$Vw_3^{(3)} = 9 \cdot 3 = 3^3 = 27.$$

Liegen im allgemeinen Falle n Elemente vor, so können folgende n^2 Variationen zur 2. Klasse mit Wiederholung gebildet werden:

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 21 & 31 & \dots & n1 \\ 12 & 22 & 32 & \dots & n2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1n & 2n & 3n & \dots & nn \end{array}$$

Allgemein gilt dann für eine beliebige k-te Klasse:

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung beträgt

$$\boxed{Vw_n^{(k)} = n^k} \qquad (136)$$

Beweis:

a) Der Satz ist richtig für $k = 1$ und $k = 2$.
b) Wenn der Satz für $k = m$ als bewiesen angenommen wird und somit richtig ist, so gilt er auch für $k = m + 1$; denn die Variationen $(m + 1)$-ter Ordnung ergeben sich aus den laut Voraussetzung vorhandenen n^m Variationen m-ter Ordnung, indem man zu einer jeden von ihnen der Reihe nach jeweils eines der gegebenen n Elemente am Ende hinzufügt. Die Anzahl beträgt dann

$$Vw_n^{(m+1)} = Vw_n^{(m)} \cdot n = n^m \cdot n = n^{m+1}.$$

Dies ist aber gleich der Aussage des Satzes für $k = m + 1$.

BEISPIELE

1. Man berechne die Anzahl der folgenden Variationen

   a) $V_7^{(5)}$, b) $Vw_3^{(4)}$, c) $Vw_5^{(2)}$, d) $V_5^{(2)}$.

   Lösung:

   a) $V_7^{(5)} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

   b) $Vw_3^{(4)} = 3^4 = 81$

   c) $Vw_5^{(2)} = 5^2 = 25$

   d) $V_5^{(2)} = 5 \cdot 4 = 20$

2. Wieviel verschiedene Variationen 4. Klasse mit und ohne Wiederholung gibt es von den Elementen

   a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

   b) 1, 3, 5, 7, 9?

   Lösung:

   a) $Vw_{10}^{(4)} = 10^4 = 10000$; $V_{10}^{(4)} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

   b) $Vw_5^{(4)} = 5^4 = 625$; $V_5^{(4)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

4.6.2.3. Die Kombinationen

Unter Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse (Ordnung) versteht man die aus k Elementen bestehenden Zusammensetzungen, die sich aus den n Elementen **ohne Berücksichtigung ihrer Anordnung** innerhalb der Komplexionen bilden lassen.

Auch bei den Kombinationen wird — wie bei den Variationen — zwischen

1. Zusammenstellungen **mit Wiederholung**
2. Zusammenstellungen **ohne Wiederholung**

unterschieden, je nachdem, ob in diesen Komplexionen gleiche Elemente auftreten oder nicht.

Kombinationen ohne Wiederholung

Bei den drei Elementen 1, 2, 3 stellen die *Kombinationen zur 1. Klasse* die Elemente selbst dar:

$$1 \quad 2 \quad 3,$$

ihre Anzahl ist

$$C_3^{(1)} = 3.$$

Die *Kombinationen 2. Klasse* ergeben sich, wenn zu jedem Element — soweit möglich — noch ein in der natürlichen Anordnung folgendes Element hinzugefügt wird.

12 23

13

Die Anzahl beträgt

$$C_3^{(2)} = 3.$$

Es muß hierbei beachtet werden, daß eine Vertauschung innerhalb der Komplexionen zu keiner neuen Kombination führt, da zum Beispiel die Zusammenstellungen

12 und 21

zwar verschiedene Variationen, aber **ein und dieselbe Kombination** zum Ausdruck bringen. Daher werden zweckmäßigerweise die Elemente in den einzelnen Kombinationen ihrer natürlichen Reihenfolge nach geordnet.

Kombinationen zur 3. Klasse:

123

$$C_3^{(3)} = 1.$$

Hat man im allgemeinen Falle n Elemente, so beträgt die Anzahl der Kombinationen von diesen n Elementen zur

1. Klasse:

$$C_n^{(1)} = n,$$

da diese Kombinationen mit den Elementen selbst übereinstimmen.

2. Klasse:

$$C_n^{(2)} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

Dies folgt aus der Anzahl der Variationen zur 2. Klasse $V_n^{(2)} = n(n-1)$, wenn man von denjenigen Variationen, die sich durch die Anordnung ihrer Elemente voneinander unterscheiden, stets nur eine Zusammenstellung herausgreift. Dabei fallen bei zwei Elementen jeweils

$$P_2 = 2! = 2$$

Komplexionen in eine zusammen, also

$$C_n^{(2)} = \frac{V_n^{(2)}}{P_2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$\begin{array}{llll}
12 & 23 & \dots & (n-1)n \\
13 & 24 & \dots & \\
14 & 25 & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
1(n-2) & 2(n-1) & \dots & \\
1(n-1) & 2n & \dots & \\
1n & & &
\end{array}$$

3. Klasse:

$$C_n^{(3)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Von den möglichen Variationen zur 3. Klasse $V_n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$ treten jeweils $P_3 = 3! = 6$ Zusammenstellungen auf, die sich nur durch die Anordnung ihrer Elemente voneinander unterscheiden, daher

$$C_n^{(3)} = \frac{V_n^{(3)}}{P_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Für die Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung ergibt sich dann allgemein:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung beträgt

$$\boxed{C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}} \qquad (137\,a)$$

Auf den Beweis soll hier verzichtet werden.
Für Quotienten der Art, wie sie auf der rechten Seite der Formel (137 a) vorkommen, wurde von Leonhard Euler [1]) eine abkürzende Schreibweise eingeführt. Unter der Voraussetzung, daß n eine reelle ($n \in R$) und k eine natürliche ($k \in N$) Zahl bedeutet, gilt

$$\boxed{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \binom{n}{k}} \qquad (138)$$

Das **Eulersche Symbol** $\binom{n}{k}$ wird gelesen: n über k.

---

[1]) Leonhard Euler; schweizerischer Mathematiker, Physiker und Astronom, 1707—1783

Nach Formel (138) läßt sich zum Beispiel das Symbol $\binom{6}{3}$ als ein Quotient darstellen, dessen Nenner das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis 3 darstellt und dessen Zähler ebenfalls aus drei Faktoren besteht, beginnend mit 6, jeder folgende um 1 kleiner als der vorangehende,

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Unter Verwendung dieses Symbols ergibt sich dann für die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung:

$$\boxed{C_n^{(k)} = \binom{n}{k}; \quad (n \geqq k)} \tag{137b}$$

mit n als Anzahl der gegebenen Elemente und k als Klasse der Kombination.

Im Band „Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen" [1] wird das Eulersche Symbol ausführlich behandelt. Es seien an dieser Stelle nur noch einmal die wichtigsten diesbezüglichen Formeln zusammengestellt:

1. $\binom{n}{1} = n$ für $n \in R$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $n \in R$, $k \in N \setminus \{0\}$ (Summeneigenschaft)

3. $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ für $n \in R$, $k \in N$

4. $\binom{n}{k} = 0$ für $n \in N$, $k \in N$ und $n < k$

5a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \in N$, $k \in N \setminus \{0\}$ und $n > k$ (Symmetrieeigenschaft)

5b) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ für $k = n$ und $k = 0$ (Sonderfall)

BEISPIELE

1. Es ist die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung aus
   a) 5 Elementen zur 2. Klasse,
   b) 8 Elementen zur 4. Klasse,
   c) 2 Elementen zur 2. Klasse zu berechnen.

Lösung:

a) $$C_5^{(2)} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

b) $$C_8^{(4)} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

c) $$C_2^{(2)} = \binom{2}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$$

2. Wieviel Kombinationen zur 4. Klasse von den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beginnen mit

a) 1, b) 2, c) 3, d) 13, e) 124?

Lösung:

a) Da es sich um Kombinationen zur 4. Klasse handelt, können auf das Element 1 nur jeweils drei der restlichen 5 Elemente folgen. Die Anzahl ergibt sich daher aus der Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten der fünf Elemente 2, 3, 4, 5, 6 zur 3. Klasse.

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

1234	1245	1345	1456
1235	1246	1346	
1236	1256	1356	

b) Auf das Element 2 können nur noch die restlichen vier Elemente 3, 4, 5, 6 bis zu Erfüllung der Klassenzahl folgen.

$$\binom{4}{3} = 4$$

2345 2346 2356 2456

c) Auf das Element 3 können nur die Elemente 4, 5, 6 folgen.

$$\binom{3}{3} = 1$$

3456

d) Es bleiben die drei Elemente 4, 5, 6 übrig, aus denen die Kombinationen zur 2. Klasse zu bilden sind.

$$\binom{3}{2} = 3$$

1345 1346 1356

e) Auf 124 kann nur noch eines der beiden Elemente 5 und 6 folgen

$$\binom{2}{1} = 2$$

1245 1246.

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind neben den bisherigen Betrachtungen noch folgende drei Aufgabenstellungen von Bedeutung.

I. Wieviel Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse gibt es, die von den **n Elementen m vorgegebene enthalten** ($m \leqq k$)?

Da m Elemente von den n vorgegeben sind, fehlen bei den Kombinationen k-ter Ordnung aus den restlichen $(n - m)$ Elementen jeweils noch $(k - m)$ Elemente bis zur erforderlichen Klassenzahl k. Es sind daher aus diesen $(n - m)$ Elementen die Kombinationen zur $(k - m)$-ten Klasse zu bilden und diese zu den vorgeschriebenen Elementen hinzuzufügen. Es ergibt sich somit:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung, die m vorgegebene Elemente aus den n enthalten, beträgt

$$\boxed{C_{n-m}^{(k-m)} = \binom{n-m}{k-m} \qquad (m \leqq k)} \tag{139}$$

BEISPIEL

3. Wieviel Kombinationen ohne Wiederholung von den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur 4. Klasse enthalten die Elemente 2 und 6?

Lösung:

Nach Formel (139) ergibt sich mit $n = 6$, $k = 4$ und $m = 2$

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6.$$

Es sind das die 6 Kombinationen

1236 1246 1256 2346 2356 2456.

II. Wieviel Kombinationen aus n Elementen zur k-ten Klasse gibt es, die von den **n Elementen m vorgegebene nicht enthalten?**

Da keines dieser m vorgegebenen Elemente in den Kombinationen zur k-ten Klasse auftreten soll, dürfen sie nicht in die Bildung der Kombinationen einbezogen werden. Es bleiben somit nur die restlichen $(n - m)$ Elemente übrig. Daraus folgt:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung, die von m vorgegebenen Elementen aus den n keines enthalten soll, beträgt

$$\boxed{C_{n-m}^{(k)} = \binom{n-m}{k} \qquad (m \leqq k)} \tag{140}$$

BEISPIEL

4. Wieviel Kombinationen von den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur 4. Klasse enthalten die Elemente 2 und 6 nicht?

Lösung:

Nach Formel (140) ergibt sich mit $n = 6$, $k = 4$ und $m = 2$

$$C_4^{(4)} = \binom{4}{4} = 1.$$

Es ist dies die Kombination

1345.

III. Wieviel Kombinationen aus n Elementen zur k-ten Klasse gibt es, die **mindestens eines von den m vorgegebenen aus den n Elementen enthalten?**

Die Anzahl ergibt sich als Differenz aus der Gesamtzahl der möglichen Kombinationen und der nach Formel (140) berechneten Zusammenstellungen. Daraus folgt:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Wiederholung, die mindestens eines der m vorgegebenen Elemente aus den n Elementen enthalten, beträgt

$$\boxed{C_n^{(k)} - C_{n-m}^{(k)} = \binom{n}{k} - \binom{n-m}{k}} \tag{141}$$

BEISPIEL

5. Wieviel Kombinationen von den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur 4. Klasse enthalten mindestens eines der 2 vorgegebenen Elemente 2 und 6?

Lösung:

Aus Formel (141) folgt für $n = 6$, $k = 4$ und $m = 2$

$$C_6^{(4)} - C_4^{(4)} = 14.$$

Die Anzahl der Kombinationen beträgt 14.

Kombinationen mit Wiederholung

Allgemein gilt für die Kombinationen mit Wiederholung:

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholung beträgt

$$\boxed{Cw_n^{(k)} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k} = \binom{n+k-1}{k}} \tag{142}$$

Auf den Beweis dieser Formel soll im Rahmen dieses Lehrbuches verzichtet werden.

BEISPIEL

6. Es ist die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zur
   a) 1. Klasse,
   b) 2. Klasse,
   c) 8. Klasse zu berechnen.

Lösung:

Nach Formel (142) ergibt sich

a) für $n = 6, k = 1$: $\quad Cw_6^{(1)} = \binom{6}{1} = 6,$

das sind die Elemente selbst

1 2 3 4 5 6

b) für $n = 6, k = 2$: $\quad Cw_6^{(2)} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$

11	22	33	44	55	66
12	23	34	45	56	
13	24	35	46		
14	25	36			
15	26				
16					

c) für $n = 6, k = 8$: $\quad Cw_6^{(8)} = \binom{13}{8} = 1287.$

AUFGABEN

202. Wie lautet die 400. Permutation aus den Elementen a, b, c, d, e, f bei lexikographischer Anordnung?

203. Wieviel Kombinationen zur 3. Klasse von den Elementen 1 bis 8 enthalten keines der Elemente 1, 2, 3?

204. Wieviel verschiedene Skatspiele kann ein Spieler erhalten, wenn er von den 32 Blatt jeweils 10 bekommt?

205. Wieviel verschiedene Skatspiele können insgesamt an 3 Mitspieler ausgeteilt werden?

206. Wieviel Permutationen gibt es aus den Elementen a, a, a, b, c, c, und die wievielte Permutation ist bei lexikographischer Anordnung die Zusammenstellung $cbacaa$?

207. Wie lautet die 13. Kombination mit Wiederholung zur 6. Klasse von den drei Elementen a, b, c?

208. Wieviel Möglichkeiten gibt es im Zahlenlotto für
   a) einen Zweier,
   b) einen Dreier
   c) einen Vierer,
   d) einen Fünfer?

209. Wieviel Kombinationen 4. Klasse von 7 Elementen ohne Wiederholung gibt es, wenn mindestens eines der 3 vorgegebenen Elemente aus den 7 enthalten sein soll?

210. Wieviel Kombinationen 4. Klasse von 7 Elementen ohne Wiederholung gibt es, wenn keines der drei vorgegebenen Elemente aus den 7 enthalten sein soll?

211. Wieviel Kombinationen 4. Klasse von 7 Elementen ohne Wiederholung gibt es, wenn alle 3 vorgegebenen Elemente aus den 7 enthalten sein sollen?

212. Das Morsealphabet besteht aus den beiden Elementen Punkt und Strich.
Wieviel verschiedene Zeichen können aus diesen Elementen gebildet werden, wenn man festlegt, daß nicht mehr als fünf Elemente je Zeichen verwendet werden sollen?

213. Wieviel Fernsprechanschlüsse lassen sich insgesamt im Selbstwählverkehr einrichten, wenn nur fünfstellige Rufnummern verwendet werden sollen? Wie groß ist die Zahl der Anschlüsse, die allgemein zur Verfügung stehen, wenn die Rufnummern, die mit 0 beginnen, für Sonderanschlüsse freigehalten werden?

214. Bei der Lagerhaltung kennzeichnet man häufig Materialien unterschiedlicher Abmessungen und Rohstoffzusammensetzungen durch Farbmarkierungen. Wieviel verschiedene Sorten Rohre können gekennzeichnet werden, wenn drei Farben zur Verfügung stehen und jede Sorte mit drei verschiedenfarbigen Ringen am unteren Ende des Rohres markiert wird?

215. Bei der Programmsteuerung von Maschinen sowie auf dem Gebiet der Statistik zur Erfassung und Auswertung von ökonomischen Daten besitzt die Lochkarte eine große Bedeutung. Sie ist nach dem dekadischen System aufgebaut und besteht aus 80 Lochspalten zu je zehn Lochstellen, die mit 0 bis 9 beziffert sind. Wieviel verschiedene Lochkombinationen sind möglich, wenn jede Lochreihe nur einmal gelocht werden darf und nicht gelochte Reihen unzulässig sind?

216. Bei der Qualitätskontrolle wird aus einer Produktionsserie eine bestimmte Anzahl Erzeugnisse ausgewählt und untersucht. Aus dem Ergebnis der Stichprobe schließt man dann auf die Qualität der gesamten Serie.
Wieviel verschiedene Stichprobenmöglichkeiten gibt es bei einer Produktionsserie von 1000 Stück, wenn die Stichprobe einen Umfang von

a) 10 Stück,
b) 50 Stück haben soll?

217. Der Leiter eines Montagebetriebes will sich über den Einsatz seiner Mitarbeiter einen ständigen Überblick verschaffen. Er bedient sich dabei einer Magnettafel mit ein- und mehrfarbigen Symbolen, die jeweils einzelne Mitarbeiter repräsentieren. Es sind verschiedene Farben bzw. Farbzusammenstellungen erforderlich für

8 Ingenieure
28 Meister
55 Facharbeiter.

Es ist die Anzahl der verschiedenen Farben für folgende Varianten zu berechnen.

a) Einfarbige Symbole.
b) Zweigeteilte Symbole, die gleich- oder verschiedenfarbig sein können.
c) Dreigeteilte Symbole, die gleich- oder verschiedenfarbig sein können.
d) Viergeteilte Symbole, die gleich oder verschieden sein können.
e) Übersichtliche Markierung:

Ingenieure	einfarbig
Meister	zweifarbig (nicht spiegelbildlich), zweigeteilt
Facharbeiter	dreifarbig, dreigeteilt.

4.7. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.7.1. Allgemeine Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die die Grundlage der mathematischen Statistik bildet, ist schon verhältnismäßig alt. Sie entstand im Verlaufe des 17. Jahrhunderts im Zusammenhang mit dem Bestreben, die Erfolgschancen bei Glücksspielen zu berechnen. Als Begründer der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man die Mathematiker Pascal (1623 bis 1662) und Fermat (1601 bis 1665) ansehen. Zur Weiterentwicklung trugen in den vergangenen Jahrhunderten im wesentlichen die Arbeiten von Huygens (1629 bis 1695), J. Bernoulli (1654 bis 1705), Moivre (1667 bis 1754), Laplace (1749 bis 1827), Gauss (1777 bis 1855) und Poisson (1781 bis 1840) bei. Laplace führte erstmals eine genaue Definition des Begriffes **Wahrscheinlichkeit** ein, die man heute als **klassische Definition** bezeichnet, und formulierte die Regeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten. Im Verlaufe des 19. und 20. Jahrhunderts befaßten sich auch russische Mathematiker mit den Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, unter anderem Tschebyscheff (1821 bis 1894) und Markow (1856 bis 1922). Der sowjetische Mathematiker Kolmogorow begründete mit seinen Arbeiten die heutige moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem er sie zu einer exakten mathematischen Disziplin machte und den **axiomatischen Begriff der Wahrscheinlichkeit** einführte.
In den letzten Jahrzehnten hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Praxis eine immer größere Bedeutung erlangt. Heute kommt man bei ökonomischen und technischen Berechnungen ohne sie nicht mehr aus. Sie bildet die Grundlage der Versicherungsmathematik, der Stichprobentheorie, der statistischen Qualitätskontrolle und wird außerdem in der Wirtschaft zur Leitung und Planung der Produktion sowie in der Physik, der Biologie und der Chemie angewendet. Anhand einiger vereinfachter Beispiele soll die praktische Bedeutung und die Aufgabenstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung veranschaulicht werden.

1. Bei der Untersuchung von je 500 Störungen an einem automatischen Webstuhl wurde festgestellt, daß im Durchschnitt

   266 Störungen durch Fadenriß,

   145 Störungen durch Stromausfall,

   54 Störungen durch Ausfall einer Baugruppe

   und 35 Störungen sonstiger Art

   hervorgerufen wurden.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der vier gesondert ausgewiesenen Ursachenkomplexe?

2. Von der Gütekontrolle eines Produktionsbetriebes wird festgestellt, daß in den über einen längeren Zeitraum unter gleichen Bedingungen produzierten Losen in Höhe von 750 Stück im Durchschnitt 15 Stück je Los Ausschuß sind. Wie groß ist die Ausschußwahrscheinlichkeit?

3. Bei der Untersuchung der Produktion eines Betriebes ergab sich, daß im Durchschnitt 92% der Gesamtproduktion fehlerfrei waren und 50% davon das Gütezeichen Q hatten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Erzeugnis dieses Produktionsbetriebes das Gütezeichen Q besitzt?
4. Ein Gerät enthält 5 Baugruppen, die bei Funktionstüchtigkeit einwandfrei arbeiten müssen. Die Zulieferbetriebe garantieren für jede einzelne Baugruppe eine Funktionssicherheit von 85%. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für die Funktionstüchtigkeit des gesamten Gerätes, wenn die Baugruppen ohne weitere Prüfung verwendet werden?

Die folgenden Abschnitte sollen eine *Einführung* in die Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung geben. Dabei werden sich die Ausführungen auf den *klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff* und seine Anwendung beschränken[1]).

4.7.2. Zufällige Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit den in Natur und Gesellschaft auftretenden **zufälligen Erscheinungen** (*zufälligen Ereignissen*), die **Massencharakter** haben, und untersucht deren **Gesetzmäßigkeiten**. Der Massencharakter einer solchen Erscheinung kommt darin zum Ausdruck, daß sie sich unbegrenzt oft oder in einer großen Anzahl wiederholt bzw. wiederholen läßt.

Unter den zufälligen Ereignissen versteht man solche Ereignisse, die bei bestimmten gegebenen Bedingungen eintreten können, aber nicht unbedingt eintreten müssen.

Man sagt dann, das Eintreffen des Ereignisses sei vom *Zufall* abhängig.
Der Begriff des zufälligen Ereignisses soll an folgenden Beispielen veranschaulicht werden.

1. Wirft man eine Münze auf den Boden, so kann entweder „Zahl" oder „Wappen" nach oben zeigen. Welches der beiden Ereignisse eintritt, kann jedoch nicht vorhergesagt werden. Das Ergebnis des Versuches (Werfen der Münze) — „Zahl" oder „Wappen" — bezeichnet man als zufälliges Ereignis.
2. Würfelt man mit einem „idealen" Würfel, so kann entweder das Ereignis „1" oder „2" oder ... oder „6" auftreten. Da das Wurfergebnis nicht vorausbestimmt werden kann, spricht man auch hier von zufälligen Ereignissen.
3. Die Gesamtproduktion eines Betriebes wird auf Ausschuß untersucht. Für jedes einzelne Erzeugnis gibt es entweder das Ereignis „fehlerfrei" oder „Ausschuß". Da man nicht voraussagen kann, ob das zu überprüfende Erzeugnis das Prädikat „fehlerfrei" oder „Ausschuß" erhält, liegen wieder zufällige Ereignisse vor.

Diesen zufälligen Erscheinungen und Ereignissen stehen die **deterministischen** gegenüber. Unter den **deterministischen Ereignissen** versteht man solche, bei denen man *unter bestimmten gegebenen Bedingungen das Ereignis mit Bestimmtheit voraussagen kann.*

---

[1]) Als weiterführende Literatur vgl. vor allem [40, 45, 46].

Die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen auf Grund der Zufälligkeit der zu untersuchenden Erscheinungen und Ereignisse niemals unmittelbare Schlußfolgerungen für den **konkreten Einzelfall** zu. Die berechnete mathematische Wahrscheinlichkeit wird sich erst bei einer **genügend großen Anzahl** von Einzelversuchen durchsetzen, das heißt, die Regeln und Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewinnen erst bei einer genügend großen Anzahl von Einzelfällen Gültigkeit. So bedeutet zum Beispiel eine Wahrscheinlichkeit von 0,50 (50%) für das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses *nicht*, daß bei 10 Versuchen dieses Ereignis *unbedingt* fünfmal auftreten muß; es kann vielmehr auch bei allen 10 Versuchen bzw. in keinem einzigen Versuch eintreffen. Erst mit größer werdender Versuchsanzahl wird sich für die Wahrscheinlichkeit der Wert 0,50 durchsetzen.
Bezeichnet man die zufälligen Ereignisse mit A_i, so kann man nun weiter unterscheiden.

1. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ werden als die **einzig möglichen** bezeichnet, wenn unter bestimmten gegebenen Bedingungen eines dieser Ereignisse **unbedingt** eintreten muß,

   z. B. a) „Zahl" und „Wappen" sind die einzig möglichen Ereignisse, die beim Werfen einer Münze eintreten können.

   b) „1", „2", …, „6" sind die einzig möglichen Ereignisse, die beim Würfeln mit einem Würfel auftreten können.

   c) „fehlerfrei" und „Ausschuß" sind die einzig möglichen Ereignisse bei der Untersuchung des Produktionsausstoßes.

2. Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind **unvereinbar**, wenn das Eintreffen des einen Ereignisses das Eintreffen des anderen vollkommen **ausschließt**,

   z. B. a) „Zahl" und „Wappen" sind bei einem Wurf mit einer Münze unvereinbare Ereignisse, da das Eintreffen des Ereignisses „Zahl" das Eintreten des Ereignisses „Wappen" vollkommen ausschließt.

   b) „1", „2", …, „6" sind bei einem Wurf mit einem Würfel unvereinbare Ereignisse, da das Eintreffen eines dieser sechs Ereignisse das Auftreten der übrigen ausschließt.

   c) Bei der Prüfung eines Erzeugnisses auf „fehlerfrei" oder „Ausschuß" sind diese beiden Ereignisse ebenfalls unvereinbar miteinander, da sie sich gegenseitig ausschließen.

Zwischen den einzelnen Ereignissen können nun bestimmte weitere Beziehungen bestehen, die im folgenden untersucht werden sollen. Zur Darstellung dieser Relationen wird auf die Formulierung und die Symbolik der Mengenlehre zurückgegriffen [1].

3. Wenn unter bestimmten gegebenen Bedingungen aus dem Eintreten des Ereignisses A stets das Eintreten des Ereignisses B folgt, so bezeichnet man A als **Teilereignis** von B und schreibt

$$\boxed{A \subset B \quad \text{oder} \quad B \supset A} \tag{143}$$

(gelesen: A zieht B nach sich bzw. A ist ein Teilereignis von B),

z. B. das Werfen einer „2“ mit einem Würfel sei das Ereignis A, das Eintreffen des Ereignisses „gerade Zahl“ sei B. Dann gilt

$$A \subset B,$$

da A ein Teilereignis von B ist.

4. Wenn unter bestimmten gegebenen Bedingungen die Ereignisse A und B stets **zugleich** eintreten bzw. nicht eintreten, so bezeichnet man A und B als **gleichwertige** oder **äquivalente Ereignisse** und schreibt

$$\boxed{A = B} \tag{144}$$

Es gilt in diesem Falle

$$A \subset B \text{ und gleichzeitig } B \subset A\,,$$

z. B.: Hat man einen sechsseitigen Würfel, dessen Seiten verschiedenfarbig gekennzeichnet sind, und ordnet man der roten Seitenfläche (Ereignis A) eine bestimmte Bedeutung (Ereignis B) zu, so stellen das Eintreten des Ereignisses A (rote Seitenfläche) und das Eintreten des Ereignisses B (die der roten Seitenfläche zugeordnete Bedeutung) äquivalente Ereignisse dar, so daß gilt,

$$A \subset B \text{ und gleichzeitig } B \subset A,$$

also $\quad A = B.$

5. Unter der **(logischen) Summe** der Ereignisse A und B versteht man dasjenige Ereignis C, in dem **mindestens eines** der beiden Ereignisse A und B eingetreten ist. Man schreibt

$$\boxed{C = A \cup B} \tag{145}$$

(gelesen: C ist gleich A vereinigt mit B),

z. B.: Das Werfen einer „2“ sei das Ereignis A, das Eintreffen des Ereignisses „6“ sei B. Dann versteht man unter dem Ereignis

$$C = A \cup B$$

das Eintreten von 2 oder 6 (da bei einem Wurf mit einem Würfel das Eintreten von 2 und 6 nicht möglich ist).

6. Unter dem **(logischen) Produkt** der Ereignisse A und B versteht man dasjenige Ereignis C, in dem **gleichzeitig** das Ereignis A und B eingetreten ist. Man schreibt

$$\boxed{C = A \cap B} \tag{146}$$

(gelesen: C ist gleich A geschnitten mit B),

z. B.: Das Werfen einer „2“ sei das Ereignis A, das Eintreffen des Ereignisses „gerade Zahl“ sei B.
Dann versteht man unter dem Ereignis

$$C = A \cap B$$

das Eintreten des Ereignisses „2“.

7. Unter der (**logischen**) **Differenz** der Ereignisse A und B versteht man dasjenige Ereignis C, bei dem das **Ereignis A eingetreten**, das **Ereignis B** jedoch **nicht** eingetreten ist. Man schreibt

$$\boxed{C = A \setminus B} \tag{147}$$

(gelesen: C ist gleich der Differenz von A und B),

z. B.: Das Werfen einer geraden Zahl sei das Ereignis A, das Eintreten des Ereignisses „2“ sei B. Dann versteht man unter dem Ereignis

$$C = A \setminus B$$

das Eintreffen entweder von 4 oder von 6.

8. Ein Ereignis wird als **sicheres Ereignis** E bezeichnet, wenn es unter bestimmten gegebenen Bedingungen **unbedingt** eintreten muß,

z. B.: Das Werfen von „1“ oder von „2“ oder ... oder von „6“ stellt das sichere Ereignis E dar, da eine dieser sechs Augenzahlen unbedingt eintreten muß.

9. Ein Ereignis wird als **unmögliches Ereignis** $\varnothing$ bezeichnet, wenn es unter bestimmten gegebenen Bedingungen **niemals** eintreten kann,

z. B.: Das Werfen einer 7 stellt ein unmögliches Ereignis $\varnothing$ dar, da der Würfel nur die Augenzahlen 1 bis 6 aufweist.

10. Zwei Ereignisse werden als einander **entgegengesetzte Ereignisse** bezeichnet, wenn bei Nicht-Eintreten von A das Ereignis $\overline{A}$ eintreten **muß.** $\overline{A}$ nennt man dann das zu A **komplementäre Ereignis**. Es gilt stets

$$\boxed{A \cup \overline{A} = E \quad \text{und} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing} \tag{148}$$

z. B. das Werfen des „Wappens“ sei das Ereignis A.
Das Ereignis „Zahl“ ist das zu A komplementäre Ereignis $\overline{A}$. Dann ist es **sicher**, daß eines der beiden Ereignisse eintreten muß: $A \cup \overline{A} = E$,
und es ist **unmöglich**, daß beide Ereignisse gleichzeitig eintreten:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing .$$

11. Unter dem **Ereignisfeld** $\mathfrak{A}$ versteht man die Menge M aller zufälligen Ereignisse, die bei einer bestimmten Aufgabenstellung unter bestimmten gleichbleibenden Bedingungen eintreten oder nicht eintreten können. Die **möglichen Ereignisse**

bilden dann die **Unter-** oder **Teilmengen** des Ereignisfeldes. Die aus nur **einem Element** bestehenden (einelementigen) **Teilmengen** bezeichnet man als die **elementaren Ereignisse** $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zum Ereignisfeld $\mathfrak{A}$ gehören ferner das sichere Ereignis E, das unmögliche Ereignis $\varnothing$ sowie die aus den unter 5., 6., 7. und 10. angeführten Operationen hervorgehenden Ereignisse.

4.7.3. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Man bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A mit $P(A)$ und definiert:

> Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Eintreten eines Ereignisses A ist gleich dem Verhältnis der Anzahl der dem Eintreten des Ereignisses A günstigen zur Gesamtzahl aller möglichen Ereignisse (Versuchsergebnisse).

Dies ist die von LAPLACE aufgestellte klassische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Dabei ist zu beachten, daß die Gesamtzahl aller möglichen Versuchsergebnisse (Ereignisse) nur die **möglichen und unvereinbaren Ereignisse** enthalten darf und diese stets **gleich wahrscheinlich** sein müssen.
Wird dann die Anzahl der dem Eintreten des Ereignisses A günstigen Versuchsergebnisse mit m und die Gesamtzahl aller unvereinbaren und gleich möglichen Versuchsergebnisse mit n bezeichnet, so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \tag{149}$$

Aus (149) folgt, daß der LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsbegriff nur auf Ereignisfelder mit einer **endlichen Anzahl** von Elementarereignissen anwendbar ist.
Neben dieser klassischen Definition gibt es noch andere Wahrscheinlichkeitsdefinitionen (statistische, geometrische, axiomatische), auf die in diesem Rahmen jedoch nicht eingegangen werden kann.
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ soll an folgenden einfachen Beispielen veranschaulicht werden.

BEISPIELE

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Eintreffen des Ereignisses „gerade Zahl“ bei einem Wurf mit einem Würfel?

   Lösung:

   Die Gesamtzahl der einzig möglichen, unvereinbaren und gleich wahrscheinlichen Ereignisse beträgt $n = 6$, nämlich die Zahlen 1, 2, …, 6. Die Anzahl der für das Eintreffen des Ereignisses „gerade Zahl“ günstigen Fälle beträgt $m = 3$, nämlich 2, 4, 6. Daraus ergibt sich

   $$P(A) = \frac{3}{6}$$

   $$\underline{\underline{P(A) = 0{,}5}}.$$

2. Vgl. erste Aufgabenstellung in 4.7.1., S. 394.

   Lösung:

	$n = 500$	
Fadenriß	$m_1 = 266$	$P(A_1) = \dfrac{266}{500} = 0{,}532 \triangleq 53{,}2\%$
Stromausfall	$m_2 = 145$	$P(A_2) = \dfrac{145}{500} = 0{,}290 \triangleq 29{,}0\%$
Ausfall einer Baugruppe	$m_3 = 54$	$P(A_3) = \dfrac{54}{500} = 0{,}108 \triangleq 10{,}8\%$
sonstige Störungen	$m_4 = 35$	$P(A_4) = \dfrac{35}{500} = 0{,}070 \triangleq 7{,}0\%.$

3. Vgl. zweite Aufgabenstellung in 4.7.1., S. 394.

   Lösung:

   $n = 750;$ $m = 15$ $P(A) = \dfrac{15}{750} = 0{,}020 \triangleq 2{,}0\%.$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, daß man bei einmaligem Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel

   a) eine Zehn,
   b) eine Eichel-Karte,
   c) eine Eichel-Zehn erhält?

   Lösung:

   a) $n = 32$ Karten insgesamt; $m = 4$, da viermal die Zehn enthalten ist.

   $$P(A) = \frac{4}{32} = 0{,}125 \triangleq 12{,}5\%$$

   b) $n = 32$ Karten insgesamt; $m = 8$, da insgesamt 8 Eichel-Karten enthalten sind.

   $$P(A) = \frac{8}{32} = 0{,}250 \triangleq 25{,}0\%$$

   c) $n = 32$ Karten insgesamt; $m = 1$, da nur einmal die Eichel-Zehn enthalten ist.

   $$P(A) = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \triangleq 3{,}125\%.$$

Aus der Definition der Wahrscheinlichkeit ergibt sich weiterhin:

1. Die Wahrscheinlichkeit für ein **sicheres Ereignis** E beträgt

$$\boxed{P(E) = 1} \tag{150}$$

da in diesem Falle alle n möglichen Ereignisse günstig sind, das heißt $m = n$ und somit

$$P(E) = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit für ein unmögliches Ereignis $\varnothing$ beträgt

$$\boxed{P(\varnothing) = 0} \tag{151}$$

da in diesem Falle kein einziges der möglichen Ereignisse günstig ist, das heißt, $m = 0$ und somit

$$P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit für ein mögliches, aber nicht sicheres Ereignis A beträgt

$$\boxed{0 < P(A) < 1} \tag{152}$$

da in diesem Falle stets die Anzahl der günstigen Ereignisse kleiner als die Gesamtzahl aller möglichen Ereignisse ist, das heißt $m < n$, und somit stellt $P(A)$ einen echten Bruch dar.

4. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{A}$, das dem Ereignis A entgegengesetzt ist, beträgt

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)} \tag{153}$$

da die Summe der beiden Ereignisse A und $\overline{A}$ ein sicheres Ereignis E darstellt, das heißt

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

5. Wenn ein Ereignis A ein Teilereignis von B ist, das heißt, das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich ($A \subset B$), dann gilt

$$\boxed{P(A) \leqq P(B)} \tag{154}$$

Denn die dem Ereignis A günstigen Fälle bilden eine Untermenge von der Menge der dem Ereignis B günstigen Fälle, und somit ist

$$m_A \leqq m_B,$$

das heißt

$$\frac{m_A}{n} \leqq \frac{m_B}{n}$$

oder $$P(A) \leqq P(B).$$

4.7.4. Die Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten

4.7.4.1. Die Additionsregel für Wahrscheinlichkeiten

Das Additionstheorem läßt sich wie folgt formulieren:

> Für zwei **unvereinbare Ereignisse** A_1 und A_2, deren Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$ und $P(A_2)$ betragen, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der beiden Ereignisse, das heißt **entweder** A_1 **oder** A_2, gleich der Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)} \tag{155a}$$

Allgemein gilt dann für ***n* paarweise unvereinbare Ereignisse**

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)} \tag{155b}$$

BEISPIELE

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, daß man beim einmaligen Ziehen aus einem Skatspiel entweder eine Sieben, eine Acht oder eine Neun erhält?

   Lösung:

   Es handelt sich hier um paarweise unvereinbare Ereignisse, da stets nur eines dieser Ereignisse auftreten kann. Die Einzelwahrscheinlichkeiten betragen

   für Ereignis „Sieben" (A_1): $P(A_1) = \frac{1}{8}$

   für Ereignis „Acht" (A_2): $P(A_2) = \frac{1}{8}$

   für Ereignis „Neun" (A_3): $P(A_3) = \frac{1}{8}$,

   so daß sich als Wahrscheinlichkeit für die logische Summe aus den Ereignissen A_1, A_2 und A_3 nach Formel (155b) ergibt

   $$\underline{\underline{P(A)}} = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = \underline{\underline{0{,}375}}.$$

   Auf das gleiche Ergebnis gelangt man auch durch folgende Überlegung. In dem Kartenspiel befinden sich $n = 32$ Blatt, darunter viermal eine Sieben, viermal eine Acht und viermal eine Neun, die alle ein günstiges Ereignis darstellen, also $m = 12$. Nach Formel (149) erhält man dann

   $$\underline{\underline{P(A)}} = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = \underline{\underline{0{,}375}}.$$

2. In einer Urne befinden sich 5 schwarze (Ereignis A_1), 12 weiße (Ereignis A_2), 23 rote (Ereignis A_3) und 20 grüne (Ereignis A_4) Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man beim Ziehen eine rote oder eine grüne Kugel erhält?

Lösung:

Da es sich um die Wahrscheinlichkeit für die logische Summe aus den Ereignissen A_3 und A_4 handelt, ergibt sich nach Formel (155b)

$$\underline{\underline{P(A)}} = P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) = \frac{23}{60} + \frac{20}{60} = \underline{\underline{0{,}717.}}$$

Hat man nun nicht zwei paarweise unvereinbare Ereignisse, sondern **zwei beliebige Ereignisse** A_1 und A_2 vorliegen, so gilt folgender Additionssatz:

Für zwei beliebige, sich **nicht notwendig einander ausschließende Ereignisse** A_1 und A_2, deren Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$ und $P(A_2)$ betragen, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der beiden Ereignisse, das heißt **entweder** A_1 **oder** A_2, gleich der Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten **vermindert** um die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten **sowohl** des Ereignisses A_1 **als auch** des Ereignisses A_2.

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} \qquad (156)$$

BEISPIEL

3. Bei Stichprobenüberprüfungen einer Abfüllmaschine ergab sich, daß im Durchschnitt be 900 Paketen von 1000 das Gewicht im vorgeschriebenen Streuungsbereich $(a \pm \varepsilon)$ g bleibt, bei 560 Paketen zwischen a g und $(a + \varepsilon)$ g liegt und bei 625 Paketen das Gewicht größer oder gleich dem Nenngewicht a g ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Gewicht eines Paketes unter der unteren zulässigen Grenze $(a - \varepsilon)$ g liegt?

Lösung:

Ereignis A_1: Gewicht liegt im vorgeschriebenen Streuungsbereich $(a \pm \varepsilon)$ g.

$$P(A_1) = \frac{900}{1000} = 0{,}900$$

Ereignis A_2: Gewicht ist größer oder gleich dem geforderten Nenngewicht a g.

$$P(A_2) = \frac{625}{1000} = 0{,}625$$

Ereignis $A_3 = A_1 \cap A_2$: Gewicht liegt zwischen a g und $(a + \varepsilon)$ g.

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{560}{1000} = 0{,}560$$

Nach Formel (156) gilt dann

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}900 + 0{,}625 - 0{,}560$$
$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}965.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gewicht eines Paketes im vorgeschriebenen Streuungsbereich liegt oder größer als das Nenngewicht a g ist, beträgt 0,965 ≙ 96,5%. Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, daß das Gewicht eines Paketes unter der unteren zulässigen Grenze $(a - \varepsilon)$ g liegt,

0,035 ≙ 3,5%.

4.7.4.2. Die Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten

Das Multiplikationstheorem läßt sich wie folgt formulieren:

Für zwei voneinander unabhängige Ereignisse A_1 und A_2, deren Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$ und $P(A_2)$ betragen, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten **sowohl** des einen Ereignisses (A_1) **als auch** des anderen Ereignisses (A_2) gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)} \qquad (157\,\mathrm{a})$$

Allgemein gilt dann für n voneinander unabhängige Ereignisse

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)} \qquad (157\,\mathrm{b})$$

BEISPIELE

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zweimaligem Werfen einer Münze beide Male das Ereignis „Zahl" eintritt?

Lösung:

Ereignis A_1: „Zahl" beim ersten Wurf,
Ereignis A_2: „Zahl" beim zweiten Wurf.

Es handelt sich hier um voneinander unabhängige Ereignisse, die Wahrscheinlichkeiten betragen

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Da sowohl das Ereignis A_1 als auch das Ereignis A_2 eintreffen soll, gilt nach der Formel (157a)

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{P(A) = \frac{1}{4}}}.$$

2. Vgl. vierte Aufgabenstellung in 4.7.1., S. 395.

Lösung: Für jede einzelne Baugruppe wird eine Funktionssicherheit (Ereignis „fehlerfrei") in Höhe von $P(A_i) = 0{,}85$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ garantiert. Damit das Gerät einsatzfähig ist, muß jede Baugruppe fehlerfrei sein, das heißt, es muß **sowohl** das Ereignis A_1, **als auch** A_2, **als auch** … **als auch** A_5 eintreten. Die einzelnen Baugruppen sind voneinander unabhängig, so daß nach Formel (157b) folgt

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_5)$$

$$\underline{\underline{P(A)}} = 0{,}85^5 = \underline{\underline{0{,}444}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren eines Gerätes ohne weitere Prüfung der verwendeten Baugruppen beträgt 0,444 (44,4%). Die Wahrscheinlichkeit für ein nicht einsatzfähiges Gerät ist dann

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$\underline{\underline{P(\overline{A}) = 0{,}556}} \quad (55{,}6\%).$$

4.7.4.3. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten

In den bisherigen Ausführungen wurden jeweils **voneinander unabhängige** Ereignisse zugrunde gelegt. Darunter versteht man solche Ereignisse, bei denen das Eintreffen des einen Ereignisses (A_1) sich nicht auf die Bedingungen für das Eintreffen des anderen Ereignisses (A_2) auswirkt. Die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$ und $P(A_2)$ bezeichnet man dann als **unbedingte Wahrscheinlichkeiten.**
Dies trifft jedoch nicht auf alle Aufgabenstellungen zu. In einer Reihe von Fällen ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A_1 unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß ein zweites Ereignis A_2 schon mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eingetreten ist. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeiten** und schreibt dafür $P(A_1/A_2)$.
Sie ist gleich dem Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_1 \cap A_2$ und der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A_2, vorausgesetzt $P(A_2) > 0$. Es gilt dann

$$\boxed{P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \quad \text{für } P(A_2) > 0} \qquad (158\text{a})$$

$$\boxed{P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \quad \text{für } P(A_1) > 0} \qquad (158\text{b})$$

Für bedingte Wahrscheinlichkeiten nimmt dann der Multiplikationssatz folgende Form an:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1/A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)} \qquad (158\,\text{c})$$

das heißt:

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses $A_1 \cap A_2$ ist gleich dem Produkt aus der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_2 (bzw. A_1) und der bedingten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_1 (bzw. A_2), berechnet unter der Voraussetzung, daß das Ereignis A_2 (bzw. A_1) schon eingetroffen ist.

BEISPIEL

Dieser Sachverhalt soll an der dritten Aufgabenstellung in 4.7.1., S. 395, erläutert werden.

Lösung des Beispiels 3: Bezeichnet man mit A_1 das Ereignis „fehlerfrei" und mit A_2 das Ereignis „Gütezeichen Q", so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A_1 0,92 und für das Eintreffen des Ereignisses A_2 0,50. Da jedoch nur solche Ereignisse das Gütezeichen Q erhalten können, die fehlerfrei sind, setzt das Eintreffen des Ereignisses A_2 voraus, daß das Ereignis A_1 schon eingetreten ist. Es handelt sich also um eine *bedingte Wahrscheinlichkeit*, die mit $P(A_2/A_1)$ bezeichnet wird. In der Aufgabe kommt dies in folgender Formulierung zum Ausdruck:

92% der Gesamtproduktion fehlerfrei, **davon** 50% Gütezeichen.

Es gilt somit

$$P(A_1) = 0{,}92$$

$$P(A_2/A_1) = 0{,}50$$

und für die Wahrscheinlichkeit $P(A_1 \cap A_2)$ nach Formel (158c)

$$\underline{\underline{P(A_1 \cap A_2)}} = 0{,}92 \cdot 0{,}50 = \underline{\underline{0{,}46}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Erzeugnis das Gütezeichen Q besitzt, beträgt 0,46 (46,0%).

4.7.4.4. Die totale Wahrscheinlichkeit

Die totale Wahrscheinlichkeit soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

BEISPIEL

Zwei Betonplattenwerke liefern gleiche Fertigteile an eine Großbaustelle. Dabei umfaßt die Lieferung des Betriebes I 600 Stück mit einer Ausschußquote von 2% und die des Betriebes II 900 Stück bei einem Ausschußprozentsatz von 1,5%. Zwecks Überprüfung wird aus einer beliebigen der beiden Lieferungen ein Fertigteil entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man gerade ein Ausschußteil erhält?

Lösung: Ereignis A_1: Fertigteil aus der Lieferung des Betriebes I,
Ereignis A_2: Fertigteil aus der Lieferung des Betriebes II,
Ereignis B: Fertigteil entspricht nicht den Anforderungen.

Bekannt sind aus der Aufgabenstellung die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(B/A_1) = 0{,}020$$
$$P(B/A_2) = 0{,}015.$$

Nach Formel (149) ergibt sich für die unbedingten Wahrscheinlichkeiten für A_1 und A_2

$$P(A_1) = \frac{600}{1500} = \frac{2}{5},$$
$$P(A_2) = \frac{900}{1500} = \frac{3}{5}.$$

Gesucht ist die unbedingte Wahrscheinlichkeit $P(B)$, das heißt die Wahrscheinlichkeit für ein Fertigteil, das nicht der TGL entspricht, unabhängig vom Herstellungsort.
Da das nicht der TGL entsprechende Teil entweder vom Betrieb I oder dem Betrieb II produziert sein muß und sich die Ereignisse A_1 und A_2 gegenseitig ausschließen, muß sich das Ereignis B zusammensetzen aus

$$\textbf{entweder } (A_1 \cap B) \quad \text{oder} \quad (A_2 \cap B).$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann der Additionssatz (155a)

$$\text{(I)} \quad P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B).$$

Wendet man weiterhin auf die Glieder der rechten Seite von (I) den **Multiplikationssatz für beliebige Ereignisse** (158c) an, so geht (I) über in

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} \tag{159}$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall des Satzes über die totalen Wahrscheinlichkeiten.
Für das vorliegende Beispiel ergibt sich

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot 0{,}020 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}015$$

$$\underline{\underline{P(B) = 0{,}017.}}$$

AUFGABEN

218. Bei der Qualitätskontrolle werden gleiche Erzeugnisse, die auf verschiedenen Maschinen produziert wurden, auf ihre Zugfestigkeit geprüft. Dabei wird festgestellt, daß im Durchschnitt 96% der auf der Maschine I hergestellten Erzeugnisse, 92% der auf der Maschine II und 89% der auf der Maschine III produzierten Erzeugnisse den Anforderungen genügen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

a) zwei auf den verschiedenen Maschinen I und II
b) zwei auf den verschiedenen Maschinen I und III
c) zwei auf den verschiedenen Maschinen II und III

hergestellte Erzeugnisse die erforderliche Zugfestigkeit besitzen?

219. In zwei Betrieben I und II werden insgesamt 9000 Elektromotoren gleichen Typs produziert, die ein dritter Betrieb für die Weiterverarbeitung benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein gelieferter Motor im Betrieb I hergestellt wurde, beträgt 2/3; die Wahrscheinlichkeit, daß ein geliefertes Erzeugnis sowohl der TGL entspricht als auch im Betrieb I produziert wurde, ist 5/9.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Erzeugnis der TGL entspricht, unter der Voraussetzung, ein Produkt des Betriebes I zu sein?

220. In einem Produktionsbetrieb arbeiten drei automatische Taktstraßen. Statistische Untersuchungen haben nun ergeben, daß für jede der drei Taktstraßen im Durchschnitt folgende Ausfallwahrscheinlichkeit je Schicht besteht:

Taktstraße I	$P(A_1) = 0{,}08$
Taktstraße II	$P(A_2) = 0{,}13$
Taktstraße III	$P(A_3) = 0{,}19.$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß während einer Schicht

a) keine der drei Taktstraßen ausfällt,

b) alle Taktstraßen ausfallen,

c) wenigstens eine der drei Taktstraßen ohne Störung arbeitet?

221. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter drei aus einem Skatspiel gezogenen Karten

a) eine „Zehn“

b) mindestens eine „Zehn“

befindet?

222. Es wird mit einem Würfel sechsmal gewürfelt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß keine „Sechs“ fällt?

223. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei sechsmaligem Würfeln mit einem Würfel mindestens eine Sechs fällt?

4.7.4.5. Die Zufallsgrößen

Diskrete und stetige Zufallsgrößen

In 4.7.2. wurde dargestellt, daß sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den zufälligen Erscheinungen (Ereignissen), die Massencharakter besitzen, befaßt und deren Gesetzmäßigkeiten untersucht. Dabei wurde stets nur die Frage gestellt, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten bzw. Nichteintreten eines Ereignisses A unter bestimmten Bedingungen ist. Zur weiteren Untersuchung und Beschreibung solcher zufälligen Massenerscheinungen sind nun Zahlenangaben über die Versuchsergebnisse in ihrer *Gesamtheit* erforderlich. Diese Zahlenangaben sind nicht *konstant*, sondern werden auf Grund zufälliger Einflüsse *variieren*.
Unter einer **zufälligen Variablen** oder **Zufallsgröße** X versteht man dann eine solche veränderliche Größe, die unter bestimmten konstanten Bedingungen — durch den Zufall bedingt — unterschiedliche Werte annehmen kann. Dabei tritt jeder Wert dieser Zufallsgröße mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf.

Man unterscheidet zwei Arten von Zufallsvariablen:

1. **diskrete** Zufallsgrößen
2. **stetige** Zufallsgrößen.

Eine *diskrete* (diskontinuierliche) Variable liegt dann vor, wenn sie *endlich* oder *abzählbar unendlich viele* Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ annehmen kann. Diese Werte x_i nennt man die *Realisierungen* der Zufallsgröße X.
Bei einer *stetigen* Größe kann dagegen *jeder beliebige Zahlenwert* eines bestimmten vorgegebenen Intervalles auf der Zahlengeraden angenommen werden.[1])
So stellen z. B. die verschiedenen Ergebnisse der Würfe mit einem Würfel eine diskrete Zufallsvariable dar, da nur die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 als Realisierungen x_i der Zufallsgröße X auftreten können.
Man schreibt dann

$$A_i = \{X = i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Weitere diskrete Zufallsgrößen sind die Anzahl der durch Störungen ausfallenden Maschinen während eines bestimmten Zeitraumes, die *qualitativen* Ereignisse „fehlerfrei" und „fehlerhaft", denen man die Zahlen 1 und 0 zuordnen kann, usw.
Beispiele für *stetige* Zufallsgrößen sind unter anderem die Meßwerte für die Zugfestigkeit und die Meßwerte bei Gewichts- und Längenmessungen. Stetige Zufallsvariablen treten in der Technik allgemein überall dort auf, wo Abweichungen von einem vorgegebenen Nennmaß vorkommen können.
Man schreibt dann

$$A = \{x_1 \leqq X \leqq x_2\}.$$

x_1 und x_2 stellen die Grenzen des Intervalles dar, innerhalb dessen die Realisierungen der Zufallsgröße X, die dem Ereignis A zugeordnet wurde, liegen, wenn das Ereignis A eintritt.

4.7.4.6. Die allgemeine Verteilungsfunktion

Hat man eine Zufallsgröße X statistisch zu untersuchen und zu charakterisieren, so muß man die Verteilung der *Wahrscheinlichkeiten*, das heißt die Wahrscheinlichkeiten für alle Werte, die die zufällige Variable X annehmen kann, kennen.
Im Falle einer **diskreten Zufallsveränderlichen** X gibt die Verteilung

$$\boxed{P(X = x_i) = p(x_i)} \tag{160}$$

die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße X den Wert x_i annimmt.

---

[1]) vgl. [1]

Die theoretische **Verteilungsfunktion** wird definiert durch die Funktionsgleichung

$$\boxed{F(x) = F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p(x_i)} \tag{161}$$

worunter man die Wahrscheinlichkeit versteht, daß die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der kleiner als ein vorgegebenes x ist. Die unter dem Summenzeichen stehende Symbolik $x_i < x$ drückt aus, daß über alle $x_i < x$ zu summieren ist. Für die Summe aller $p(x_i)$ muß dann gelten

$$\boxed{p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) + \dots = \sum_i p(x_i) = 1} \tag{162}$$

da das Eintreffen eines beliebigen Ereignisses aus der Gesamtzahl aller möglichen Ereignisse ein *sicheres* Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 1$ darstellt. Als *Beispiel* zur Erläuterung der Verteilung und der Verteilungsfunktion *diskreter* Zufallsgrößen nehmen wir das Werfen eines Würfels.

Die Zufallsvariable X kann in diesem Falle als Realisierungen die Werte $x_i = i$ $(i = 1, 2, \dots, 6)$ annehmen, so daß gilt

$$A_i = \{X = i\} \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind

$$p(x_i) = P(X = i) = \frac{1}{6} \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Die Funktionswerte der Verteilungsfunktion lauten dann nach (161)

$$\text{für } x \leqq 1\colon F(1) = P(X < 1) = \sum_{x_i < 1} P(X = x_i) = \sum_{x_i < 1} p(x_i) = 0,$$

da ein Wurf mit einer Augenzahl kleiner als 1 ein unmögliches Ereignis $\varnothing$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\varnothing) = 0$ ist;

$$\text{für } x = 2\colon\; F(2) = P(X < 2) = \sum_{x_i < 2} P(X = x_i) = \sum_{x_i < 2} p(x_i) = \frac{1}{6},$$

da ein Wurf mit einer Augenzahl kleiner als 2 eine Wahrscheinlichkeit von $P(A_1) = \frac{1}{6}$ besitzt;

$$\text{für } x = 3\colon F(3) = P(X < 3) = \sum_{x_i < 3} P(X = x_i) = \sum_{x_i < 3} p(x_i) =$$

$$= P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

Es handelt sich hier um die Wahrscheinlichkeit, daß *entweder* eine 1 *oder* eine 2 geworfen wird.

Für $x = 4$: $F(4) = P(X < 4) = \sum\limits_{x_i<4} p(x_i) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) = \frac{1}{2}$.

Dies stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß *entweder* eine 1 oder eine 2 *oder* eine 3 geworfen wird.

$$\text{Für } x = 5: \quad F(5) = P(X < 5) = \sum_{x_i<5} p(x_i) = \frac{2}{3},$$

$$\text{für } x = 6: \quad F(6) = P(X < 6) = \sum_{x_i<6} p(x_i) = \frac{5}{6},$$

$$\text{für } x > 6: \quad P(X \leqq 6) = \sum_{x_i\leqq 6} p(x_i) = 1,$$

da ein Wurf, bei dem eine der 6 Augenzahlen auftreten muß, ein sicheres Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 1$ darstellt. Die graphische Darstellung dieser diskreten Verteilungsfunktion (Bild 96) liefert eine Treppenkurve (vgl. 4.2.2.7.).

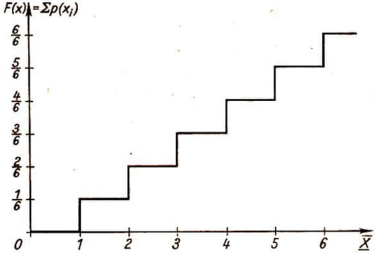


Bild 96

Analog zur Berechnung des arithmetischen Mittels und der quadratischen Streuung bei statistischen Meßreihen (vgl. 4.2.2.1. und 4.3.2.3.) kann man die Verteilungsfunktionen durch den *Erwartungswert* (Mittelwert) sowie durch die *Varianz* näher charakterisieren. Unter dem **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsgröße X, den man mit EX, μ_X oder μ bezeichnet, versteht man das *gewogene arithmetische Mittel* aus den möglichen Realisierungen x_i dieser Zufallsgröße X und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$, also

$$\boxed{\mu_X = EX = \frac{x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \cdots + x_n \cdot p(x_n) + \cdots}{p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n) + \cdots}} \qquad (163\,\text{a})$$

Da für den Nenner von (163a) $\sum_i p(x_i) = 1$ gilt, geht die Formel für den Erwartungswert über in

$$\boxed{\mu_X = EX = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \cdots + x_n \cdot p(x_n) + \cdots} \tag{163b}$$

oder

$$\boxed{\mu_X = EX = \sum_i x_i \cdot p(x_i)} \tag{163c}$$

wobei über alle $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ zu summieren ist.
Die **Varianz** einer diskreten Zufallsgröße X wird dann wie folgt definiert

$$\boxed{\sigma_X^2 = D^2X = E(X - EX)^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)} \tag{164}$$

Als mittlere quadratische Streuung ergibt sich die Quadratwurzel aus der Varianz σ_X^2

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot p(x_i)}.$$

Im obigen Würfelbeispiel beträgt der Erwartungswert:

$$\mu_X = EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\underline{\underline{\mu_X = EX = 3{,}5}}$$

die Varianz:

$$\underline{\underline{\sigma_X^2 = D^2X = 2{,}9167}}$$

die Streuung:

$$\underline{\underline{\sigma_X = 1{,}7078.}}$$

Der Erwartungswert liegt daher angenähert zwischen

$$3{,}5 - 1{,}7 = 1{,}8 \quad \text{und} \quad 3{,}5 + 1{,}7 = 5{,}2.$$

Für die *stetigen Zufallsgrößen* ergibt sich für die theoretische **Verteilungsfunktion** F

$$\boxed{F(x) = F_X(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,\mathrm{d}z} \tag{165}$$

Man versteht darunter die Wahrscheinlichkeit, daß die stetige Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der kleiner als ein vorgegebenes x ist. $p(x)$ stellt eine *nichtnegative integrierbare* Funktion dar, die als **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte** bezeichnet wird.

Geometrisch kann man $F(x) = P(X < x)$ als die links von einem vorgegebenen x gelegene Fläche der Dichtefunktion $p(x)$ interpretieren.

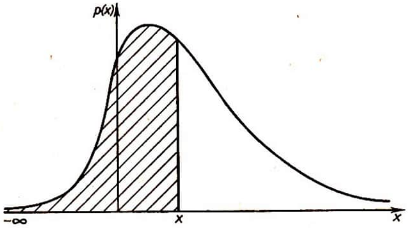


Bild 97

Es gilt dann die Beziehung[1])

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1} \tag{166}$$

die an die Stelle der Gleichung (162) bei diskreten Verteilungsfunktionen tritt.
Für den *Erwartungswert* EX und die *Varianz* σ^2 einer stetigen Zufallsgröße X ergibt sich analog zu den Formeln (163c) und (164) bei diskreten Größen

$$\boxed{\mu_X = EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{167}$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = D^2X = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{168}$$

4.7.4.7. Einige spezielle Verteilungen

Die Binomialverteilung

Zur Erklärung der Binomial- oder Bernoulli-Verteilung gehen wir von folgendem Beispiel aus.

---
[1]) vgl. [2]

BEISPIEL

1. In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel (Ereignis A) zu ziehen, beträgt $P(A) = p$ und für eine weiße Kugel (Ereignis $\overline{A}$) $P(\overline{A}) = q$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in n Zügen x_i schwarze und $(n - x_i)$ weiße Kugeln zu ziehen?
Nach jeder einzelnen Ziehung soll die gezogene Kugel wieder in die Urne **zurückgelegt** werden!

Lösung: Werden $k = 2$ Kugeln aus der Urne entnommen — *mit Zurücklegen* —, so können folgende zufällige Ereignisse eintreten

AA		zweimal schwarz $\triangleq$ nullmal weiß
$A\overline{A}$	$\overline{A}A$	einmal schwarz, einmal weiß $\triangleq$ einmal weiß, einmal schwarz
$\overline{A}\overline{A}$		nullmal schwarz $\triangleq$ zweimal weiß.

Für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich nach dem *Multiplikationssatz* für *voneinander unabhängige Ereignisse*

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) = p \cdot p = p^2$$

$$P(A \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(\overline{A}) = p \cdot q = pq$$

$$P(\overline{A} \cap A) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = q \cdot p = qp$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = q \cdot q = q^2$$

und somit für die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn die Zufallsveränderliche X — Anzahl der schwarzen Kugeln — die Werte $x_0 = 0$ (0 schwarze Kugeln), $x_1 = 1$ (1 schwarze Kugel), $\ldots, x_n = n$ (n schwarze Kugeln) annehmen kann:

$$P(X = 0) = p(x_0) = q^2$$

$$P(X = 1) = p(x_1) = 2qp$$

$$P(X = 2) = p(x_2) = p^2$$

$$\sum_i P(X = i) = \sum_i p(x_i) = q^2 + 2pq + p^2 = (q + p)^2 = 1,$$

da eines dieser vier Ereignisse ($A \cap A$, $A \cap \overline{A}$, $\overline{A} \cap A$, $\overline{A} \cap \overline{A}$) unbedingt eintreten muß.
Für $k = 3$ Kugeln erhält man bei *Zurücklegen* folgende Möglichkeiten mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

AAA	$P(X = 3) = p(x_3) = p^3$	(dreimal schwarz)
$AA\overline{A}$, $A\overline{A}A$, $\overline{A}AA$	$P(X = 2) = p(x_2) = 3p^2q$	(zweimal schwarz, einmal weiß)
$A\overline{A}\overline{A}$, $\overline{A}A\overline{A}$, $\overline{A}\overline{A}A$	$P(X = 1) = p(x_1) = 3pq^2$	(einmal schwarz, zweimal weiß)
$\overline{A}\overline{A}\overline{A}$	$P(X = 0) = p(x_0) = q^3$	(nullmal schwarz)

$$\sum_i P(X = i) = \sum_i p(x_i) = q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (q + p)^3 = 1.$$

Führt man diese Betrachtungen fort, so ergibt sich im allgemeinen Falle für $k = n$ Ziehungen mit **Zurücklegen** unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes [1]

$$P(X = 0) = p(x_0) = \binom{n}{0} q^n$$

$$P(X = 1) = p(x_1) = \binom{n}{1} pq^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(X = i) = p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(X = n) = p(x_n) = \binom{n}{n} p^n$$

sowie

$$\sum_i P(X = i) = \sum_i p(x_i) = (q + p)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} p^n = 1 .$$

Die Wahrscheinlichkeit, in n Zügen x_i schwarze und $(n - x_i)$ weiße Kugeln zu ziehen (*mit Zurücklegen*), ist demzufolge

$$\boxed{P(X = x_i) = p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}} \tag{169}$$

Die Parameter der binomischen Verteilung sind n und p. Ist $x_i < 0$ und $x_i > n$, so gilt

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} = 0.$$

Für $p = q = 1/2$ liegt eine *symmetrische Verteilung* vor.

Die Gleichung der **Verteilungsfunktion** für die Binomialverteilung lautet dann

$$\boxed{F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}} \tag{170}$$

BEISPIEL

2. a) Man berechne die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Stichprobe vom Umfang $n = 40$ aus einer Produktionsserie von $N = 10000$ Stück und einem Ausschußprozentsatz von $p = 10\%$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den 40 ausgewählten Stück genau 10 Ausschußstücke sind?

c) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für höchstens 5 Ausschußstücke in der zugrunde gelegten Stichprobe?

Lösung: a) Da die zu untersuchende Produktionsserie einen verhältnismäßig großen Umfang besitzt, kann die Aufgabe als eine *Verteilung mit Zurücklegen* aufgefaßt werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ausschußstück wird als konstant angenommen und beträgt $P(A) = p = 0{,}10$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines fehlerfreien Stückes ist dann $P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0{,}90$.
Nach Formel (170) ergibt sich im Beispielsfall für die Binomialverteilung

$$\sum_{x_i<x} P(X = x_i) = \sum_{x_i<x} p(x_i) = \binom{40}{0} 0{,}90^{40} + \binom{40}{1} 0{,}10 \cdot 0{,}90^{39} + \cdots +$$

$$+ \binom{40}{39} 0{,}10^{39} \cdot 0{,}90 + \binom{40}{40} 0{,}10^{40}.$$

Die Ausrechnung liefert dann folgende Einzel- und Summenwahrscheinlichkeiten für die verschiedene Anzahl Ausschußstücke.

Anzahl der Ausschußstücke (i)	Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = i) = p(x_i)$	Summenwahrscheinlichkeit $\sum_i P(X = i) = \sum_i p(x_i)$
0	0,0148	0,0148
1	0,0657	0,0805
2	0,1423	0,2228
3	0,2003	0,4231
4	0,2058	0,6289
5	0,1647	0,7936
6	0,1067	0,9003
7	0,0576	0,9579
8	0,0264	0,9843
9	0,0104	0,9947
10	0,0036	0,9983
11	0,0011	0,9994
12	0,0003	0,9997
13	0,0001	0,9998

b) Aus der Binomialverteilung für $n = 40$ und $x_i = 10$ folgt dann

$$P(X = 10) = p(x_{10}) = \binom{40}{10} 0{,}10^{10} \cdot 0{,}90^{30} = 0{,}0036,$$

das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß unter den 40 ausgewählten Stück der Stichprobe sich genau 10 Ausschußstücke befinden, beträgt 0,0036 (0,36%).

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß in der Stichprobe höchstens 5 Ausschußstücke sind, ist

$$P(X \leqq 5) = \sum_{i=0}^{5} p(x_i) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=5) = 0{,}7936.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 0,7936 (79,36%).

Der *Erwartungswert* und die *Varianz* der *Binomialverteilung* ergeben sich aus den Formeln (163c) und (164).

(I) $$\mu_X = EX = \sum_i x_i\, p(x_i) = \sum_i x_i \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} =$$

$$= 0 + \binom{n}{1} p q^{n-1} + 2\binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} p^{n-1} q + n \binom{n}{n} p^n =$$

$$= np\left[\binom{n-1}{0} q^{n-1} + \binom{n-1}{1} p q^{n-2} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} p^{n-2} q + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1}\right] =$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

Da $(q+p) = 1$, gilt für den **Erwartungswert** der Binomialverteilung

$$\boxed{\mu_X = EX = n \cdot p} \tag{171}$$

(II) $$\sigma_X^2 = D^2 X = \sum_i (x_i - \mu_X)^2\, p(x_i) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Nach dem Ausmultiplizieren und Umformen des allgemeinen Summanden in (II) folgt

(III) $$\sigma_X^2 = \sum_i x_i^2 \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} - 2\mu_X \sum_i x_i \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} + \mu_X^2 \sum_i \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}.$$

Für die erste Summe kann dann geschrieben werden

$$\sum_i x_i^2 \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} = n(n-1)\,p^2 + np,$$

für die zweite Summe nach den Formeln (I und 171)

$$\sum_i x_i \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} = np,$$

für die dritte Summe nach Formel (162)

$$\sum_i \binom{n}{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i} = 1,$$

so daß die Gleichung (III) übergeht in

$$\sigma_X^2 = n(n-1)\,p^2 + np - 2n^2p^2 + n^2p^2 = np(1-p).$$

Die **Varianz** der Binomialverteilung beträgt daher

$$\boxed{\sigma_X^2 = npq} \tag{172a}$$

und die **Streuung**

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{npq}} \tag{172b}$$

Für obiges Beispiel ergibt sich unter Verwendung der Formeln (171) und (172)

$$\underline{\underline{\mu_X}} = EX = 40 \cdot 0{,}10 = \underline{\underline{4{,}0}}$$

und $$\underline{\underline{\sigma_X^2}} = D^2X = 40 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}90 = \underline{\underline{3{,}6}}$$

$$\sigma_X = \sqrt{3{,}6} = 1{,}8973,$$

das heißt, der Erwartungswert liegt bei 4 und die Streuung bei angenähert 2 Ausschußstücken.

Die hypergeometrische Verteilung

Wie in den vorangehenden Ausführungen dargelegt wurde, geht man bei der *Binomialverteilung* davon aus, daß die aus einer *beliebig großen Ausgangsgesamtheit* ausgewählten Einheiten wieder *zurückgelegt* werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A konstant bleibt. Für den Umfang der Ausgangsgesamtheit wurde dabei keine Einschränkung getroffen. Demgegenüber wendet man die **hypergeometrische Verteilung** dann an, wenn eine Stichprobe vom Umfang n **ohne Zurücklegen** aus einer **endlichen** Grundgesamtheit vom Umfang N vorliegt.
Die Aufgabenstellung für eine hypergeometrische Verteilung soll an folgendem Beispiel erläutert werden.
In einer Urne befinden sich insgesamt N Kugeln, von denen s schwarz und $(N-s)$ weiß sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in n Zügen x_i schwarze und $(n-x_i)$ weiße Kugeln zu ziehen? Die gezogenen Kugeln werden **nicht** wieder in die Urne **zurückgelegt!**
Nach der Kombinatorik gibt es für das Ziehen von n Kugeln aus einer Grundgesamtheit vom Umfang N $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten. Dabei lassen sich s schwarze Kugeln auf $\binom{s}{x_i}$ verschiedene Weise ziehen, während für die weißen Kugeln $\binom{N-s}{n-x_i}$ Möglichkeiten existieren. Jede der Kombinationen für die schwarzen Kugeln läßt sich dann mit jeder der $\binom{N-s}{n-x_i}$ Kombinationen für die weißen Kugeln verbinden, so daß sich

nach Formel (149) für diese *hypergeometrische Verteilung* ergibt

$$\boxed{P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{\binom{s}{x_i}\binom{N-s}{n-x_i}}{\binom{N}{n}}} \tag{173}$$

Führt man als Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel entsprechend der vorhandenen Anzahl

$$\frac{s}{N} = p$$

ein, so geht (173) mit $s = Np$ und $q = 1 - p$ über in die Formel (174) für die hypergeometrische Verteilung

$$\boxed{P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{\binom{Np}{x_i}\binom{Nq}{n-x_i}}{\binom{N}{n}}} \tag{174}$$

Der **Erwartungswert** EX und die **Varianz** beträgt dann

$$\boxed{\mu_X = EX = np} \tag{175}$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = D^2X = npq\,\frac{N-n}{N-1}} \tag{176}$$

Für $N = 30$, $n = 3$, $p = 0{,}2$, $x_1 = 1$ ergibt sich z. B. bei hypergeometrischer Verteilung der Elemente

$$P(X = x_1) = p(x_1) = \frac{\binom{30 \cdot 0{,}2}{1}\binom{30 \cdot 0{,}8}{2}}{\binom{30}{3}}$$

$$\underline{\underline{P(X = 1) = 0{,}408}}$$

$$\underline{\underline{\mu_X = 0{,}6}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_X^2 = 0{,}447}}\,.$$

Im Vergleich dazu die Werte für eine Binomialverteilung

$$\underline{\underline{P(X=1)=0{,}384}}$$

$$\underline{\underline{\mu_X=0{,}6}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_X^2=0{,}48.}}$$

Die Normalverteilung

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Verteilungen *diskreter Zufallsgrößen* ist die **Normal-** oder **Gauss-Verteilung** eine *stetige* (kontinuierliche) Verteilung. Für eine stetige Zufallsvariable gibt es eine Wahrscheinlichkeitsdichte, im Gegensatz zur diskreten Zufallsvariablen ist hier die Wahrscheinlichkeit im Einzelpunkt Null. Diese Gausssche **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte** wird definiert durch die Funktionsgleichung

$$\boxed{\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)}\tag{177}$$

mit $\mathrm{e}=2{,}718\,281\,828\ldots$ und $\pi=3{,}141\,592\,653\ldots$ sowie μ (Erwartungswert) und σ^2 (Varianz) als Parameter der Normalverteilung. Bei bekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2 ist dann die Wahrscheinlichkeitsdichte eindeutig bestimmt.

Aus der Differentialrechnung [2] ergibt sich für das Maximum und für die Wendepunkte der Dichtefunktion

$$x_{\max}=\mu$$

$$x_w=\mu\pm\sigma.$$

Nach (165) lautet die Gleichung für die **Verteilungsfunktion** der Normalverteilung

$$\boxed{P(X<x)=\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(z;\mu,\sigma^2)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z}\tag{178}$$

Sie gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß X einen Wert annimmt, der kleiner als ein vorgegebenes x ist.

Nach (166) gilt dann

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x;\mu,\sigma^2)\,\mathrm{d}x=1}\tag{179}$$

Für die Parameter $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ gehen die Gleichungen (177) und (178) über in die *normierte* oder *standardisierte* Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion. Es ist dann

$$\boxed{\varphi(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)} \tag{180}$$

und

$$\boxed{\Phi(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z} \tag{181}$$

Die graphische Darstellung der Normalverteilung ergibt für $\mu = 0$ und verschiedene σ Kurven der Art, wie sie in Bild 98 dargestellt sind.
Ein Vergleich der verschiedenen Werte von σ zeigt, daß die Gaussssche *Glockenkurve* um so steiler verläuft, je kleiner die Streuung σ ist.
Fragt man nun nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Wert zwischen zwei fest vorgegebenen Schranken t_1 und t_2 liegt, so geht Formel (178) über in

$$P(t_1 < X < t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x; \mu, \sigma^2)\,\mathrm{d}x.$$

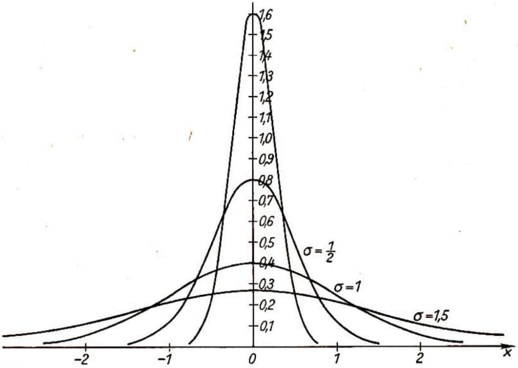


Bild 98

Dies entspricht dem Anteil der unter der Glockenkurve $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ zwischen t_1 und t_2 gelegenen Fläche an der Gesamtfläche.
In der mathematischen Statistik haben folgende Intervalle eine besondere Bedeutung:

$\{\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma\}$: $\quad P(|X - \mu| < 1 \cdot \sigma) = 0{,}6827$, das heißt, 68,27%

aller Werte liegen im sogenannten *einfachen* Streuungsbereich.

$\{\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma\}$: $\quad P(|X - \mu| < 2 \cdot \sigma) = 0{,}9545$, das heißt, 95,45%

aller Werte liegen im sogenannten *doppelten* Streuungsbereich.

$\{\mu - 3 \cdot \sigma < X < \mu + 3 \cdot \sigma\}$: $\quad P(|X - \mu| < 3 \cdot \sigma) = 0{,}9973 \approx 1$, das heißt, „fast"

sämtliche Werte der Zufallsvariablen X (insgesamt 99,73%) liegen im dreifachen Streuungsbereich.
Analog dazu ergeben sich bei vorgegebenen Prozentsätzen folgende Streuungsbereiche

$$
\begin{aligned}
P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) &= 0{,}95 \quad &\text{für} \quad k &= 1{,}960\\
P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) &= 0{,}99 \quad &\text{für} \quad k &= 2{,}576\\
P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) &= 0{,}999 \quad &\text{für} \quad k &= 3{,}291\,.
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Gaussschen Wahrscheinlichkeitsdichte sowie der Verteilungsfunktionen wird an Hand von Tabellen vorgenommen, die in Tabellensammlungen und in der angeführten Spezialliteratur zu finden sind. Dort wird auch umfassender auf die gesamte Problematik sowie auf die praktischen Anwendungsmöglichkeiten auf dem *Gebiet der statistischen Qualitätskontrolle* eingegangen.

5. Praktisches Rechnen

5.1. Numerisches Rechnen

5.1.1. Einführung

Bei praktischen Anwendungen der Mathematik in Technik und Wirtschaft sind im allgemeinen solche Aufgaben zu lösen, die sich sowohl hinsichtlich ihrer Aufgabenstellung als auch in den zu wählenden Methoden häufig von den Verfahren und Vorstellungen unterscheiden, die sonst in der Mathematik verwendet werden. Deshalb soll eine Reihe von Hinweisen zum **numerischen Rechnen** besonders festgehalten werden. Diese beziehen sich sowohl auf das elementare Zahlenrechnen als auch auf gewisse Verfahren der Mathematik, die besonders für die Durchführung von praktischen Rechnungen aufgestellt worden sind. Dabei wird grundsätzlich nur das Prinzip erläutert werden. Die numerische Mathematik stellt einen umfangreichen, fast selbständigen Zweig der Mathematik dar, über den zahlreiche zusammenfassende Darstellungen existieren [3, 52, 53].

Fertigkeiten im praktischen Rechnen sind für Ingenieure, Techniker und Ökonomen aller Richtungen von großer Wichtigkeit. Leider werden häufig die Belange des praktischen Rechnens sehr stiefmütterlich behandelt. Fälle, in denen qualifizierte Menschen bei der Durchführung einfachster Rechnungen regelrecht versagen oder sich zumindest mit großem Formelapparat statt einfacher Überschlagsrechnungen abquälen, sind nicht selten. Mathematische „Laien" können oft gefühlsmäßig die Größenordnung eines Resultates schneller schätzen als ein „Fachmann", der sich zu sehr an die „exakte" Rechnung klammert. Und es wirkt dann immer peinlich, wenn man sich nach langer Rechnung „nur" um einige Zehnerpotenzen geirrt hat.

Die Durchführung von Rechnungen im Kopf, das Überschlagen, Schätzen und näherungsweise Rechnen müssen laufend geübt werden. Auch der Einsatz modernster Rechenautomaten verlangt, daß Aussagen über die Art, die Vorzeichen, die Tendenz, die Anzahl usw. der Resultate schnell getroffen werden können.

5.1.2. Grundbegriffe des numerischen Rechnens

Die Grundbegriffe des numerischen Rechnens sollen an Hand einiger Beispiele (Tabelle 84) erläutert werden, auf die später immer wieder Bezug genommen wird. Dabei wird für einige mathematische Probleme die Lösung als Symbol und als Zahlenwert angegeben.

Tabelle 84

Lfd. Nr.	Mathematisches Problem	Symbol	Numerische Darstellung
1	Verhältnis Kreisumfang zum Durchmesser	π	3,141 592 653 ...
2	Verhältnis Würfeldiagonale zur Seite	$\sqrt{3}$	1,732 050 807 ...
3	Zahlenwert für das Volumen eines Würfels mit der Seite 3,5	$3{,}5^3$	42,875
4	Reelle Lösung der Gleichung $x^3 - 16x^2 + 52x - 49 = 0$	x	12,009 980 069 ...
5		lg 2	0,301 029 996 ...
6		$\frac{97}{56}$	1,732 142 857 ...
7		$\sin^5 30°$	0,031 25

Häufig ist mit dem Symbol allein eine Vorschrift zur Berechnung der Zahl verbunden (Beispiele 2, 3, 5, 6, 7), die sich allerdings, wie in den letzten drei Beispielen, nicht in wenige Worte kleiden läßt. Das Symbol charakterisiert die Zahl in ihrer vollen Genauigkeit. Es ist deshalb zu empfehlen, *solange wie möglich mit den mathematischen Symbolen zu rechnen*, und erst am Schluß der Rechnung die Zahlenwerte einzusetzen.

Die ziffernmäßige Darstellung der durch das Symbol gekennzeichneten Zahl soll die **numerische Darstellung** der Zahl genannt werden.

Diese Darstellung erfolgt im **Dezimalsystem**[1]). Für andere Zwecke, etwa bei der Verwendung in Rechenautomaten, ist auch das **Dualsystem**[2]) üblich (vgl. [1]). Weitere Darstellungen sind denkbar. In der Tabelle 84 sind, soweit notwendig, jeweils neun Dezimalziffern nach dem Komma angegeben worden. Die Punkte in 1, 2, 4, 5 und 6 deuten an, daß zur genauen Darstellung noch weitere Ziffern notwendig sind. Die durch das Problem oder das Symbol gelieferte Vorschrift gestattet es, prinzipiell jede noch so weit rechts vom Komma stehende Dezimalziffer der betreffenden Zahl zu bestimmen, wenn es unter Umständen auch mit beträchtlichem Aufwand verbunden ist. Dabei wäre es eigentlich, bis auf die Fälle endlicher Dezimalbrüche (Beispiele 3 und 7), notwendig, stets die angedeuteten Punkte für die noch fehlenden Stellen mitzuschreiben.

BEISPIEL

1. Die Fläche A eines Kreises mit dem Radius $r = 2$ cm ist zu bestimmen.

   Lösung: Es ist $A = r^2 \cdot \pi$. Wenn für π eine Darstellung mit fünf Dezimalziffern gewählt wird ($\pi = 3{,}14159\ldots$), ergibt sich mit $r = 2$ cm
   $A = 2^2 \cdot 3{,}14159\ldots\ \text{cm}^2 = 12{,}56636\ldots\ \text{cm}^2$

---

[1]) decem (lat.) zehn

[2]) duo (lat.) zwei; auch Binärsystem von bini (lat.) je zwei, ist üblich

Diese Darstellung erweckt den Eindruck, daß alle Ziffern bis zur fünften Dezimalstelle richtig sind und nur noch weitere Stellen hinzukommen. Das ist jedoch falsch, wie eine Rechnung mit einer genaueren Darstellung von π zeigt, die $\underline{\underline{A = 12{,}56637 \ldots \text{ cm}^2}}$ ergibt.

Wie das Beispiel zeigt, ist die Darstellung einer Zahl mit den Punkten unzweckmäßig, da sie zu falschen Schlüssen führen kann.
Für die Praxis des zahlenmäßigen Rechnens ist deshalb prinzipiell eine Beschränkung auf eine bestimmte Anzahl von Stellen und ein Abbrechen der Zahl nötig. Anstelle der exakten Zahl wird also ein (hinreichend genauer) **Näherungswert** verwendet. So werde im obigen Beispiel für π der Wert $\pi^* = 3{,}14$ als Näherung benutzt. Es entsteht mit $A^* = 12{,}56 \text{ cm}^2$ ebenfalls eine Näherung für die Lösung. Es ist nun zu untersuchen, wie sich der durch die Verwendung von π^* entstandene kleine Fehler (der sogenannte *Abbrechfehler*) auf A^* auswirkt. π^* heißt der numerische Wert der Zahl π. Ein anderer numerischer Wert wäre $\pi^{**} = 3{,}14159$, falls mit höherer Genauigkeit gearbeitet werden muß.

Der **numerische Wert** einer Zahl ist ein hinreichend genauer Näherungswert mit einer begrenzten Anzahl von Stellen.

Er ist ein Ersatzwert für die unhandliche numerische Darstellung, der mit einem Fehler behaftet ist und dessen Einfluß auf die folgende Rechnung abgeschätzt werden muß. Mit solchen Ersatzwerten muß laufend gerechnet werden. Diese Rechnungen unterliegen bestimmten Regeln und Gesetzen.

Zur Unterscheidung von den exakten Rechnungen soll das Rechnen mit numerischen Werten als **numerisches Rechnen** bezeichnet werden.

Numerisches Rechnen ist im täglichen Leben in den vielfältigsten Formen notwendig. Meßergebnisse und Resultate statistischer Erhebungen sind numerische Werte, denn die zu erfassenden Größen können nur mit einer beschränkten Genauigkeit angegeben werden. Alle wissenschaftlichen und technischen Untersuchungen sind, sobald Zahlenrechnungen auftreten, numerische Rechnungen im obigen Sinne. Das gleiche gilt für Bilanzierungen, Planungen, Kalkulationen, sobald mit genäherten Größen gearbeitet wird. In all diesen Fällen muß man sich über die Größenordnung des Fehlers und die Güte des Ergebnisses eine genaue Vorstellung verschaffen.

Runden

Um den beim Herstellen numerischer Werte entstehenden Fehler möglichst klein zu halten, wird die letzte stehenbleibende Stelle gerundet. Dies geschieht nach folgenden Regeln:

1. Ist die erste wegzulassende Ziffer 0; 1; 2; 3 oder 4, so wird **abgerundet**, das heißt, die stehenbleibenden Ziffern werden nicht verändert.
2. Ist die erste wegzulassende Ziffer 6; 7; 8 oder 9, so wird **aufgerundet**, das heißt, die letzte stehenbleibende Ziffer wird um 1 erhöht.
3. Ist die erste wegzulassende Ziffer eine 5, so gelten folgende Anweisungen:

   a) Folgen auf die fragliche 5 noch weitere *von Null verschiedene* Ziffern, so ist *aufzurunden*.

b) Folgen auf die fragliche 5 *keine weiteren Stellen* oder *nur noch Nullen*, so ist für das Runden *die Art dieser* 5 entscheidend.
Ist bekannt, daß die 5 durch Aufrunden entstanden ist, so wird abgerundet.
Ist bekannt, daß die 5 durch Abrunden entstanden ist, so wird aufgerundet.
Ist von der fraglichen 5 nicht bekannt, durch welche Art von Runden sie entstanden ist, oder ist sicher, daß sie eine „genaue" 5 ist (das heißt, daß sie überhaupt nicht durch Runden entstanden ist), dann wird so auf- oder abgerundet, daß die letzte stehenbleibende Ziffer gerade wird.

Die letzte Regel hat den Zweck, daß bei einer größeren Menge von Zahlen durchschnittlich ebenso oft abgerundet wie aufgerundet wird. Dadurch vermeidet man außerdem bei einer nachfolgenden Division durch 2 ein erneutes Runden.
Die obigen Festlegungen entsprechen den TGL 0-1333 vom Juli 1962. Sie gelten nicht für das Geld- und Finanzwesen.
Die gerundeten Zahlen sind teils größer, teils kleiner als die exakten Werte (Rundungsfehler). Es ist jedoch nicht zu empfehlen, die Art der Rundung durch besondere Zeichen anzudeuten und diese in der folgenden Rechnung zu beachten. Der Mehraufwand an Arbeit wird nicht durch einen entsprechenden Gewinn an Genauigkeit gerechtfertigt. Ist der durch die Rundung bedingte Genauigkeitsverlust zu hoch, so soll die Rechnung mit einer größeren Anzahl von Stellen durchgeführt werden.

BEISPIEL

2. Die numerischen Darstellungen aus Tabelle 84 sollen auf zwei bzw. vier Stellen nach dem Komma gerundet werden.

Lösung:

Lfd. Nr.	Symbol	Numerischer Wert, gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma		4 Stellen nach dem Komma	
1	π	3,14	(1)	3,1416	(2)
2	$\sqrt{3}$	1,73	(1)	1,7321	(3a)
3	$3{,}5^3$	42,88	(3b)	42,8750	(1)
4	x	12,01	(2)	12,0100	(2)
5	lg 2	0,30	(1)	0,3010	(1)
6	$\frac{97}{56}$	1,73	(1)	1,7321	(1)
7	$\sin^5 30°$	0,03	(1)	0,0312	(3b)

In Klammern ist der jeweilige Rundungsfall angegeben. Nr. 4, letzte Spalte, zeigt, daß beim Aufrunden unter Umständen mehrere Zehnerüberträge auftreten können.

Fehler und Genauigkeit

Es ist notwendig, diese Begriffe etwas genauer zu umreißen.

Die Differenz zwischen einem Näherungswert x^* einer Zahl und ihrem exakten Wert x heißt **absoluter Fehler** Δx^* der Näherung. Es gilt also

$$\Delta x^* = x^* - x.$$

Im allgemeinen kann der Fehler nicht genau angegeben, sondern nur in seiner ungefähren Größe abgeschätzt werden. Dabei interessiert nur der Betrag und nicht das Vorzeichen. So ist bei Rundungen auf zwei Stellen nach dem Komma $|\Delta x^*| \leq 0{,}005 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, bei Rundungen auf vier Stellen nach dem Komma $|\Delta x^*| \leq 0{,}00005 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.
Ein Vergleich der Beispiele 3 und 7, besonders unter den auf zwei Stellen nach dem Komma gerundeten Werten, zeigt, daß das Ergebnis für Beispiel 3 eine größere Aussagekraft besitzt als das für Beispiel 7, obwohl für beide Werte der absolute Fehler in der gleichen Größenordnung liegt. Dies lehrt, daß es in vielen Fällen praktischer ist, den Fehler in bezug auf die Größenordnung der Zahl zu betrachten.

Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum exakten Wert der Zahl x heißt **relativer Fehler** $\varrho(x^*)$ der Näherung.

$$\varrho(x^*) = \frac{\Delta x^*}{x} = \frac{x^* - x}{x} \approx \frac{\Delta x^*}{x^*}$$

Der relative Fehler wird häufig in Prozenten ausgedrückt. Es genügt, den relativen Fehler auf wenige Stellen anzugeben. Deshalb wird bei seiner Berechnung im allgemeinen auch der Näherungswert x^* als Bezugsgröße gewählt, da x selbst nicht bekannt ist.

BEISPIEL

3. Für die im Beispiel 2, Spalte 3, angegebenen Werte sollen die Beträge der relativen Fehler (in %) bestimmt werden.

Lösung:

Lfd. Nr.	Symbol	Relativer Fehler
1	π	0,051%
2	$\sqrt{3}$	0,12%
3	$3{,}5^3$	0,012%
4	x	0,00017%
5	lg 2	0,34%
6	$\frac{97}{56}$	0,12%
7	$\sin^5 30°$	4,0%

Für die Praxis des Zahlenrechnens ist es wichtiger, daß man statt der Größe des Fehlers die Anzahl der Stellen der Näherung kennt, auf die man sich verlassen kann. Dazu werden die Begriffe **führende Null** und **bedeutsame Ziffer** eingeführt.

Alle Nullen, die vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer einer Zahl stehen, werden *führende Nullen* genannt. Sie dienen normalerweise nur zur Festlegung der Kommastelle.

So besitzt lg 2 eine und $\sin^5 30°$ zwei führende Nullen (siehe Tabelle 84). Stehen vor dem Komma Ziffern, die von Null verschieden sind, so ist es nicht üblich, noch führende Nullen anzugeben.

Eine Ziffer in einer Näherung x^* heißt *bedeutsam*, wenn

1. der Betrag des absoluten Fehlers Δx^* kleiner ist als eine halbe Einheit derjenigen Stelle, auf der die Ziffer steht, und
2. sie nicht führende Null ist.

Statt bedeutsamer Ziffer wird hier auch *verbürgte* oder *gesicherte* Ziffer geschrieben werden. Entsteht die Näherung nur durch Rundung, so sind alle Ziffern bedeutsam.

In den folgenden Beispielen sind die verbürgten Ziffern halbfett gedruckt:

n	x_n	x_n^*	$\lvert \Delta x_n^* \rvert$
1	112,351	112,354	0,003
2	112,351	112,359	0,008
3	112,351	112,347	0,004
4	112,351	112,346	0,005
5	12,00998	12,0100	0,00002
6	12,00994	12,0100	0,00006
7	0,0081718	0,0081712	0,0000006
8	0,0081718	0,0081717	0,0000001

Die Ziffern, in denen (von links beginnend) die Näherung mit der Zahl übereinstimmt, müssen nicht unbedingt mit den bedeutsamen identisch sein, wie die Beispiele 2 bis 7 zeigen.
Die gesicherten Ziffern bestimmen die **Genauigkeit** einer Näherung.

Unter **absoluter Genauigkeit** ist dabei die Angabe der Stelle zu verstehen, an der (nach rechts hin) die letzte bedeutsame Ziffer steht.

In den oben angeführten Näherungen ist beispielsweise bei x_1^* und x_3^* eine absolute Genauigkeit bis zur zweiten Stelle nach dem Komma vorhanden. Man sagt auch, diese Zahlen sind auf **zwei Stellen nach dem Komma** genau, wobei der Zusatz *nach dem Komma* unbedingt angegeben werden muß, um die hier vorliegende absolute Genauigkeit auch zum Ausdruck zu bringen.

Die Anzahl aller verbürgten Ziffern ohne Rücksicht auf die Lage des Kommas heißt die **relative Genauigkeit** der Näherung.

So besitzen x_1^*, x_3^*, x_4^* und x_6^* eine fünfstellige Genauigkeit, oder auch: Sie sind auf **fünf Stellen genau**. Entsprechend sind x_2^* und x_8^* auf vier, x_5^* auf sechs und x_7^* auf drei Stellen genau.
Ist jedoch die absolute Genauigkeit maßgebend, so gilt: x_1^*, x_3^* und x_4^* sind auf zwei, x_5^* auf vier, x_6^* auf drei, x_7^* auf fünf, x_8^* auf sechs Stellen und x_2^* auf eine Stelle nach dem Komma genau.
Die nicht gesicherten Ziffern sind als überflüssige Ziffern zu betrachten und unter Rundung wegzulassen. Sie belasten ohne Nutzen die nachfolgende Rechnung und täuschen eine nicht vorhandene Genauigkeit vor.

Bemerkungen zur Schreibweise

Es ist unhandlich, beim numerischen Rechnen die Näherungswerte beständig durch besondere Zeichen (hier *) von den exakten Werten zu unterscheiden. Da letztere bei empirischen Werten im allgemeinen sowieso nicht bekannt sind und bei mathematischen Symbolen (sofern sie für unendliche Dezimalbrüche stehen) nicht angegeben werden können, wird bei numerischen Rechnungen grundsätzlich nur mit numerischen Werten gearbeitet und auf deren besondere Kennzeichnung verzichtet, d. h. einfach $\pi = 3{,}14$ geschrieben. Damit ist gemeint, daß für den exakten Wert π der Ersatzwert 3,14 gewählt wird. Dabei werden nur bedeutsame Ziffern angeschrieben.
Auch das Gleichheitszeichen bekommt beim numerischen Rechnen einen neuen Sinn. Eigentlich dürfte nur das Ungefähr-Zeichen ($\approx$) in numerischen Rechnungen verwendet werden, da ja keine exakte Gleichheit vorliegt, denn alle Größen und Beziehungen sind mit kleinen Fehlern behaftet. Es wird jedoch vereinbart, daß das Gleichheitszeichen beim numerischen Rechnen die Gleichheit im Rahmen der vorhandenen Genauigkeit zum Ausdruck bringt (**numerische Gleichheit**). Es steht zwischen dem mathematischen Symbol und dem zugehörigen numerischen Wert oder innerhalb der fortlaufenden numerischen Rechnung. In diesem Sinne ist die folgende Rechnung völlig korrekt:

$$\pi \cdot \sqrt{3} = 3{,}14159 \cdot 1{,}73205 = 5{,}44139 \tag{181}$$

Jedesmal liegt nur eine Genauigkeit im Rahmen der gewählten sechsstelligen Genauigkeit vor. Das Gleichheitszeichen ist hier als „Gleichheit bis auf einen Fehler in der sechsten Stelle" aufzufassen. So sind auch die beiden folgenden Gleichungen durchaus zulässig:

$$\sqrt{3} = 1{,}732; \quad \frac{97}{56} = 1{,}732$$

Doch darf jetzt nicht

$$\sqrt{3} = \frac{97}{56}$$

geschrieben werden; denn jetzt werden zwei mathematische Symbole durch ein Gleicheitszeichen verbunden, das dann im exakten Sinne gilt. Nunmehr ist das Zeichen $\approx$ angebracht. Die Anzahl der notierten Stellen charakterisiert die Genauigkeit der Zahl. Überflüssige Ziffern täuschen eine nicht vorhandene höhere Genauigkeit vor und sind grundsätzlich wegzulassen. Falls (181) in der Gestalt

$$\pi \cdot \sqrt{3} = 3{,}14159 \cdot 1{,}73205 = 5{,}44139\,09595 \tag{182}$$

geschrieben wird, wäre zu vermuten, daß das Resultat auf zehn Stellen nach dem Komma genau ist. Dies ist offensichtlich nicht der Fall, denn es gilt

$$\pi \cdot \sqrt{3} = 5{,}44139\,80927\ldots$$

Die letzten fünf Stellen in (182) sind überflüssig. Es ist gedankenlos, sie aufzuschreiben, nur weil sie beim Ausrechnen mit der Maschine mit entstehen. Das konsequente

Weglassen überflüssiger Stellen erspart es, laufend die Genauigkeit der Werte gesondert anzuschreiben, um die verbürgten von den unbedeutsamen Ziffern zu trennen.
Sind die letzten gesicherten Ziffern zufällig Nullen, so sind diese mitzuschreiben, um die vorhandene Genauigkeit zum Ausdruck zu bringen, z. B.

$$3{,}583 + 2{,}717 = 6{,}300 .$$

Das Ergebnis besagt, daß drei bedeutsame Stellen nach dem Komma existieren. Aus einem Ergebnis 6,3 wäre diese Tatsache nicht mehr zu erkennen. Umgekehrt ist es nicht gestattet, einem Dezimalbruch Nullen anzufügen, wenn die dann angegebene Genauigkeit nicht gesichert ist. Schwierigkeiten entstehen, wenn bei großen Zahlen die verbürgten Ziffern allein vor dem Komma stehen. Sind z. B. von einer Zahl 6130000 nur vier Stellen als gesichert zu betrachten, so muß das entweder durch besondere (z. B. kursive) Schreibweise der nur zum Auffüllen benötigten Nullen oder durch Abtrennen von Zehnerpotenzen angedeutet werden:

$$6130\mathit{000} \qquad \text{bzw.} \qquad 6{,}130 \cdot 10^6 .$$

BEISPIEL

4. Es ist die Fläche eines Kreises mit dem Radius $r = 215$ mm mit $\pi = 3{,}14$ zu bestimmen.

Lösung: Bei formaler Ausführung der Rechnung ergibt sich

$$A = 215^2 \cdot 3{,}14 \text{ mm}^2 = 145146{,}5 \text{ mm}^2 .$$

Auf Grund der wenigen Stellen für π sind jedoch nur die ersten drei Stellen wirklich gesichert, so daß nur maximal vier Stellen angegeben werden dürfen.

$$A = 145\mathit{100} \text{ mm}^2 = 1{,}451 \cdot 10^5 \text{ mm}^2 .$$

Jede übertriebene Genauigkeit erschwert die Rechnung. Nur selten werden bei technischen Rechnungen mehr als vier Stellen Genauigkeit benötigt. Die Forderung nach einer außergewöhnlich hohen Genauigkeit in einer Rechnung ist oft nur das Zeichen einer schlechten Theorie, die ihr zugrunde liegt.
Ist eine vielstellige Rechnung trotzdem notwendig, so ist es ratsam, sie zunächst mit weniger Stellen, etwa nur mit Hilfe des Rechenstabes, durchzuführen. Mit einer solchen Vorrechnung werden dann die genaueren Werte kontrolliert.

AUFGABEN

224. Die folgenden Zahlen sind auf drei Stellen hinter dem Komma zu runden, so daß sie gleiche absolute Genauigkeit erhalten. Die Beträge der absoluten und relativen Fehler (letztere in %) sind anzugeben.

a)	17,32085	b)	−1,532099	c)	0,09998
d)	2,09949	e)	−0,007155	f)	0,6565
g)	185,7399	h)	1768,3215	i)	−6,88251

225. Die in Aufgabe 224 angegebenen Zahlen sind auf drei bedeutsame Ziffern zu runden, so daß sie gleiche relative Genauigkeit erhalten. Die Fehler sind wie in Aufgabe 224 zu vermerken.

5.1.3. Rechnen mit numerischen Werten

Ausgehend von den in 5.1.2. eingeführten Begriffen der absoluten und relativen Genauigkeit sollen im folgenden einige Regeln für das praktische Rechnen angegeben werden. Dabei wird bewußt auf die vollständige Theorie der Fehlerfortpflanzung verzichtet, sondern es werden entsprechend dem üblichen Vorgehen bei der Durchführung von numerischen Rechnungen Hinweise über die Anzahl der notwendigen und zulässigen Stellen und über die Güte eines Ergebnisses gegeben. Dadurch wird es möglich, besonders empfindliche Stellen einer Rechnung zu erkennen, d. h. die Stellen, wo eine erhöhte Genauigkeit erforderlich ist. Andererseits können geeignete Hinweise ein etwaiges Mitführen von unnötigen Stellen ersparen.
Die in die Rechnung eingehenden Werte sind in der Regel selbst numerische Werte (etwa Meßwerte). Da im Laufe einer längeren Rechnung beständig gerundet werden muß, überlagern sich die Rundungsfehler mit den Fehlern der **Eingangswerte**. Um den durch sie dargestellten Informationsinhalt möglichst wenig durch die Rechnung zu verfälschen, werden die Zwischenresultate mit mehr Stellen notiert, als die Eingangswerte an sich verlangen. Die Rechnung wird dann mit sogenannten **Schutzstellen** durchgeführt. Diese werden in diesem Kapitel zur Unterscheidung von den geltenden Stellen durch Kleindruck angedeutet. Im allgemeinen genügt eine Schutzstelle, denn weitere Stellen erhöhen ohne weiteren Nutzen die notwendige Rechenarbeit.
Für eine genauere Fehlerabschätzung, vor allem bei sehr empfindlichen Rechnungen, sind die *Regeln der Fehlerfortpflanzung* zu verwenden, bei denen für den absoluten und relativen Fehler ähnliche Regeln gelten, wie sie hier für die Genauigkeit angegeben werden [53, S. 56 bis 110].

Addition und Subtraktion

Bei der Addition von numerischen Werten sollen nach Möglichkeit alle Summanden dieselbe *absolute Genauigkeit* besitzen, das heißt, die bedeutsamen Ziffern sollen bis zu derselben Stelle reichen. Dann besitzt auch das Ergebnis eine Genauigkeit bis zu dieser Stelle.

Ist beispielsweise $\pi + \sqrt{3}$ zu addieren, so ist zu bilden

$$\pi + \sqrt{3} = 3{,}1416 + 1{,}7321 = 4{,}8737\,,$$

dagegen wäre folgende Rechnung ungeschickt:

$$\pi + \sqrt{3} = 3{,}1416 + 1{,}73 = 4{,}87\,.$$

Die hohe Genauigkeit des ersten Summanden kommt durch die wenigen Stellen des zweiten nicht zur Wirkung. Das Resultat kann also auch nur mit zwei Stellen nach dem Komma angeschrieben werden. Gedankenlos und falsch ist es, die Zahl 4,8716, die durch formale Addition entsteht, als Resultat anzugeben. Ein Vergleich mit der korrekten vierstelligen Rechnung zeigt, daß die letzten zwei Stellen darin sinnlos und sogar falsch sind.

Da die Fehler der einzelnen Zahlen positiv oder negativ sein können und sowieso der ungünstigste Fall zu betrachten ist, in dem sich diese Fehler vergrößern und nicht aufheben, gelten alle Überlegungen zugleich auch für die Subtraktion.
Wenn in einer Summe Glieder mit unterschiedlicher Genauigkeit auftreten, bestimmen die Summanden mit der *geringsten absoluten Genauigkeit* die absolute Genauigkeit der Summe. Die geltenden Stellen der Summe reichen nicht weiter als in diesen Gliedern. Man nennt diese deshalb die *für die Genauigkeit entscheidenden* Glieder.

BEISPIEL

1.
$$\left.\begin{array}{r} 19{,}3872 \\ 4{,}572968 \\ 6{,}8821 \\ 4{,}01 \\ 11{,}61592 \\ 12{,}84 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{r} 19{,}38_7 \\ 4{,}57_3 \\ 6{,}88_2 \\ 4{,}01 \\ 11{,}61_6 \\ 12{,}84 \\ \hline 59{,}30_8 \end{array} = \underline{\underline{59{,}31}}$$

Hier entscheiden der vierte und sechste Summand über die Genauigkeit der Summe. Es wird mit einer Schutzstelle gerechnet, d. h., es wird in die dritte Stelle nach dem Komma gerundet, dann addiert und schließlich das Resultat mit zwei Stellen niedergeschrieben. Weitere Stellen haben keinen Sinn.
Mit den Zahlen werden auch ihre (absoluten) Fehler addiert. Auf Grund unterschiedlicher Vorzeichen dieser Fehler heben sich diese teilweise gegeneinander auf, doch muß man in ungünstigen Fällen mit einer Häufung rechnen, wenn sehr viele für die Genauigkeit entscheidende Glieder oder, was häufig ist, wenn alle Summanden die gleiche absolute Genauigkeit besitzen. Es tritt dann ein Genauigkeitsverlust ein. Bei weit mehr als zehn für die Genauigkeit entscheidenden Summanden ist damit zu rechnen, daß eine oder mehr Stellen an Genauigkeit verlorengehen.
Besondere Vorsicht ist bei der Subtraktion geboten, wenn die Zahlen sich fast wegheben, oder mit anderen Worten, wenn eine **Differenz fast gleicher Zahlen** zu bilden ist. Beispielsweise sei im Verlauf einer Rechnung zu bestimmen

$$D = \sin 61° - \sin 60° = 0{,}8746 - 0{,}8660 = 0{,}0086\,.$$

Die Wahl vierstelliger Sinuswerte liefert auch ein auf vier Stellen nach dem Komma genaues Resultat, doch sind von diesen nur zwei bedeutsam. Bei der Bildung von Differenzen fast gleicher Zahlen wird die relative Genauigkeit des Resultates stark vermindert.
Wird das Ergebnis nun mit einer großen Zahl multipliziert, so kann bei oberflächlicher Arbeitsweise der Genauigkeitsverlust unbemerkt bleiben. Die Gefahr ist dann besonders gegeben, wenn die Zwischenrechnung nicht vorliegt, wie es bei Rechenautomaten der Fall ist. Differenzen fast gleicher Zahlen sind häufige Fehlerquellen numerischer Rechnungen. Sie sind deshalb nach Möglichkeit zu vermeiden. Dazu ist es notwendig, die Aufgabe formelmäßig anders zu lösen. Im obigen Fall kann D auch in der Form

$$D = 2 \cdot \cos 60{,}5° \cdot \sin 0{,}5° = 0{,}008594$$

gebildet werden, wobei eine vierstellige Logarithmentafel für die Rechnung ausreicht. Auch ein Rechenstab hätte bereits ein besseres Ergebnis geliefert. Durch Reihenentwicklung, Umstellung in der Reihenfolge von Rechenschritten oder andere Hilfsmittel lassen sich solche Genauigkeitsverluste häufig vermeiden.

Multiplikation und Division

Ähnlich wie bei Addition und Subtraktion gelten auch hier für beide Grundrechenarten gleichartige Gesetze, wobei jetzt die *relative Genauigkeit* der beteiligten Operanden für die Genauigkeit der Resultate bestimmend ist.

> Bei der Multiplikation und Division sind, soweit möglich, für alle Operanden die gleiche Anzahl bedeutsamer Ziffern (die gleiche relative Genauigkeit) zu wählen. Diese ist dann auch für das Resultat verbindlich.

Unter Operanden werden dabei entweder die zu multiplizierenden Faktoren oder die Dividenden und Divisoren verstanden.

BEISPIELE

2. $\pi \cdot \lg 2 = 3{,}1416 \cdot 0{,}30103 = \underline{\underline{0{,}94572}}$ (5stell. Rechnung)

3. $3{,}5^3 \cdot \sin^5 30^\circ = 42{,}8 \cdot 0{,}0312 = \underline{\underline{1{,}34}}$ (3stell. Rechnung)

4. $\sqrt{3} : x = 1{,}732051 : 12{,}00998 = \underline{\underline{0{,}1442176}}$ (7stell. Rechnung)

5. $\dfrac{148{,}3 \cdot 0{,}04793}{8{,}384} = \underline{\underline{0{,}8478}}$ (4stell. Rechnung)

Falls die relative Genauigkeit der Operanden nicht übereinstimmt, so bestimmen die Operanden mit der *geringsten (relativen) Genauigkeit* die relative Genauigkeit des Resultates. Das Produkt oder der Quotient besitzt nicht mehr bedeutsame Ziffern als einer dieser Operanden. Man bezeichnet deshalb die Operanden mit der geringsten Stellenzahl als *die für die Genauigkeit entscheidenden.* Bei allen Genauigkeitsbetrachtungen ist hier die Lage des Kommas innerhalb der Operanden von untergeordneter Bedeutung (im Gegensatz zu Addition und Subtraktion).

BEISPIELE

6. $19{,}837 \cdot 0{,}0475 \cdot 12{,}95388 = 19{,}8_4 \cdot 0{,}0475 \cdot 12{,}9_5 = 12{,}2_0 = \underline{\underline{12{,}2}}$

7. $18{,}352^2 \cdot 2{,}47 \cdot 5{,}8821 = 18{,}3_5{}^2 \cdot 2{,}47 \cdot 5{,}88_2 = 489_2 = 489\mathit{0} = \underline{\underline{4{,}89 \cdot 10^3}}$

In beiden Aufgaben bestimmt jeweils der vorletzte Faktor die Anzahl der gesicherten Ziffern des Produktes. Im letzten Ergebnis dient die kursiv gedruckte Null nur zum Auffüllen bis zum Komma, ohne daß sie eine bedeutsame Ziffer ist. Schutzstellen werden im Endresultat nicht mehr mitgeschrieben.
Bei umfangreichen Aufgaben empfiehlt es sich, auch hier alle Operanden bis auf eine Schutzstelle zu runden, um die Rechnung nicht unnötig zu belasten. So ist

$$\frac{4{,}835 \cdot 12{,}66673^2 \cdot 105{,}639}{185{,}642 \cdot 593{,}7 \cdot 0{,}176652} = \frac{4{,}835 \cdot 12{,}66_7{}^2 \cdot 105{,}6_4}{185{,}6_4 \cdot 593{,}7 \cdot 0{,}1766_5} = \frac{8195_4}{1946_9} = 4{,}209_4 = \underline{\underline{4{,}209}}\,.$$

Der erste bzw. vorletzte Operand bestimmen die vierstellige Genauigkeit des Resultates.
Ähnlich wie bei der Addition sind bei der Multiplikation und Division bei einer großen Anzahl von Operanden Genauigkeitsverluste durch Häufung der Fehler zu erwarten. Bei Produkt- und Quotientenbildungen ist bei weit mehr als zehn für die Genauigkeit entscheidenden Operanden damit zu rechnen, daß eine oder mehr Stellen an Genauigkeit verlorengehen.
Bei Addition und Subtraktion ist die *absolute*, bei Multiplikation und Division die *relative Genauigkeit* für die Güte des Resultates entscheidend. Da alle Grundrechnungsarten im ständigen Wechsel auftreten, ist dauernde Sorgfalt bezüglich der entstehenden Fehler notwendig. Dabei hilft die schon mehrmals erwähnte Regel, bei numerischen Rechnungen jeweils nur die verbürgten Stellen (bei Zwischenresultaten zuzüglich einer Schutzstelle) aufzuschreiben. Die Anzahl der notierten Ziffern ist ständig ein Maß für die Genauigkeit der Zahlen.

BEISPIEL

8. $0{,}00329 \cdot 17{,}48576 - 753{,}29661 \cdot 0{,}03276 + 0{,}65201 \cdot 3{,}76590$
$= 0{,}00329 \cdot 17{,}4_9 - 753{,}3_0 \cdot 0{,}03276 + 0{,}65201 \cdot 3{,}7659_0$
$= 0{,}0575_4 - 24{,}67_8 + 2{,}4554_0 = 0{,}05_8 - 24{,}67_8 + 2{,}45_5$
$= -22{,}16_5 = \underline{\underline{-22{,}16}}$

Es wird jeweils zuerst gerundet, und erst dann werden die vorgeschriebenen Rechenoperationen ausgeführt.

Dadurch vermeidet man umfangreiche und unnötige Zahlenrechnungen. Der gesamte Rechengang zeigt, daß das Resultat nur mit den angegebenen vier Stellen verbürgt ist. Der entscheidende Engpaß für die Genauigkeit des Resultates ist der zweite Faktor des mittleren Gliedes, wie leicht zu erkennen ist. Dieser Effekt tritt ein, obwohl einmal alle Faktoren die gleiche Stellenzahl nach dem Komma aufweisen und zum anderen der erste Faktor eine noch kleinere relative Genauigkeit besitzt. Es kann also aus den vorgegebenen Werten nicht ohne weiteres auf die Güte des Resultates geschlossen werden. Diese Schwierigkeit tritt besonders dann auf, wenn bei automatischer Rechnung die Zwischenresultate mit zu großer Stellenzahl bestimmt und die Schutzstellen nicht mehr unterschieden werden.
Es ergibt sich daraus die Forderung, *alle in eine Rechnung eingehenden Zahlen der gleichen Kategorie*[1]) (etwa die Elemente einer Matrix, einer Tabelle o. ä.) *und die entsprechenden Zwischenwerte in derselben Größenordnung* zu halten. Dann ist es leichter möglich, für eine Anzahl gleichartiger Rechnungen und Resultate eine globale Festlegung über die Genauigkeit zu treffen. Es vereinfacht sich auch die maschinelle Durchführung der Rechnung, wenn beständig Zahlen der gleichen Größenordnung auftreten.

Halblogarithmische Schreibweise von Zahlen

Um extrem große bzw. kleine Zahlen übersichtlich zu notieren, ist es ratsam, Ziffernfolge und Größenordnung zu trennen. Der gleiche Gedanke liegt auch der sogenannten

[1]) Kategorie (griech.) Gruppe oder Klasse, in die etwas eingeordnet wird

Gleitkommadarstellung in elektronischen Rechenautomaten zugrunde. Dazu wird von der vorliegenden Zahl eine Zehnerpotenz so abgetrennt, daß die bedeutsamen Ziffern in der ersten Stelle vor dem Komma beginnen.

BEISPIELE

9. $42{,}875 = 4{,}2875 \cdot 10^1$
10. $0{,}03125 = 3{,}125 \cdot 10^{-2}$
11. $630\mathit{000} = 6{,}300 \cdot 10^5$

Allgemein bedeutet dies, daß eine Zahl x in der Gestalt

$$x = m \cdot 10^n \quad (n \in G)$$

geschrieben wird, wobei die sogenannte **Normierungsforderung**

$$1 \leq m < 10 \tag{183}$$

beachtet werden muß.
In etwas großzügiger Entlehnung eines Begriffes aus der Logarithmenrechnung heißt m die **Mantisse** der Zahl x; sie charakterisiert die Folge der geltenden Ziffern. Wie das letzte Beispiel zeigt, spart man bei halblogarithmischer Schreibweise großer Zahlen die Angabe von Füllnullen ($\mathit{0}$). Die ganze Zahl n heißt **Exponent** von x; dieser charakterisiert die Größenordnung der Zahl.

Die halblogarithmische Darstellung von Zahlen wird vor allem verwendet, wenn Zahlen unterschiedlicher Größenordnung im Laufe einer Rechnung vorkommen.

Die Zahlen lassen sich dann übersichtlicher schreiben, Rechen- und besonders Kommafehler werden leichter vermieden.

Alle Zahlen bis auf die Null lassen sich in die halblogarithmische Gestalt bringen. Diese Ausnahmerolle der Null bereitete auch den Konstrukteuren von Rechenautomaten Schwierigkeiten. Es wird vereinbart, daß die Zahl Null einfach durch das Symbol **0**, ohne Angabe einer Mantisse oder eines Exponenten, bezeichnet wird. Von dieser „exakten" Null unterscheiden sich solche Werte, die nur im Rahmen der gegebenen Rechen- oder Meßgenauigkeit gleich Null sind. Dann ist die halblogarithmische Schreibweise durchaus berechtigt. Heißt es beispielsweise „Zwischen zwei Meßpunkten einer elektrischen Schaltung besteht eine Spannung von $0{,}0 \cdot 10^{-3}$ V", so bedeutet dies, daß die Messungen auf 0,1 mV genau durchgeführt wurden und im Rahmen dieser Meßgenauigkeit keine Spannung anliegt.
Falls bei einem Zwischenresultat die Forderung (183) nicht erfüllt ist, muß erneut eine Zehnerpotenz aus der Mantisse abgespaltet und der Exponent entsprechend verändert werden. Dieser Vorgang heißt **Normalisieren**. So ist

$$0{,}00763 \cdot 10^{-2} = 7{,}63 \cdot 10^{-5}$$
$$1793{,}8 \cdot 10^{27} = 1{,}7938 \cdot 10^{30}.$$

Besteht umgekehrt die Notwendigkeit, eine Zahl mit einem vorgeschriebenen Exponenten weiterzuverwenden, so soll die dazu notwendige Umformung der Zahl **Ein-**

richten genannt werden. Soll etwa $z = 7{,}63 \cdot 10^{-4}$ auf den Exponenten -1 eingerichtet werden, so ist jetzt $z = 0{,}00763 \cdot 10^{-1}$ zu schreiben. Ausgehend von obigem Beispiel ist dann auch folgende Schreibweise berechtigt:

$$0{,}0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} = 0{,}000 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{V} = 0{,}0000\,\mathrm{V}.$$

Mit diesen Begriffen lassen sich Regeln für das Rechnen mit halblogarithmischen Zahlen formulieren.

Addition und Subtraktion mit halblogarithmischen Zahlen

Wie aus den Regeln der Potenzrechnung sofort folgt, können Zahlen in halblogarithmischer Darstellung nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten besitzen. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so sind sie vor der Rechnung auf den *größten vorkommenden Exponenten* einzurichten.
Zahlen mit gleichen Exponenten werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Mantissen addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Exponenten zunächst beibehält. Das Resultat wird anschließend wieder normalisiert.

BEISPIELE

12.
$$\begin{array}{r} 7{,}314 \cdot 10^{-3} \\ +2{,}942 \cdot 10^{-3} \\ -3{,}815 \cdot 10^{-3} \\ \hline 6{,}441 \cdot 10^{-3} \\ \hline\hline \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{r} 7{,}314 \cdot 10^{-3} \\ +8{,}538 \cdot 10^{-3} \\ \hline 15{,}852 \cdot 10^{-3} \end{array} = \underline{\underline{1{,}5852 \cdot 10^{-2}}}$$

14.
$$\left.\begin{array}{r} 9{,}314 \cdot 10^{-3} \\ +1{,}63 \cdot 10^{-5} \\ +8{,}6228 \cdot 10^{-4} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 9{,}314 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}0163 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}86228 \cdot 10^{-3} \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 9{,}314 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}016_3 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}862_3 \cdot 10^{-3} \\ \hline 10{,}192_6 \cdot 10^{-3} \end{array} = \underline{\underline{1{,}0193 \cdot 10^{-2}}}$$

Multiplikation und Division mit halblogarithmischen Zahlen

Die Multiplikation und Division von Zahlen mit ungleichen Exponenten bereitet keine Schwierigkeiten. Aus den Regeln der Potenzrechnung folgt sofort, daß zwei Zahlen in halblogarithmischer Schreibweise multipliziert bzw. dividiert werden, indem die Mantissen multipliziert bzw. dividiert und die Exponenten addiert bzw. subtrahiert werden. Das Resultat ist wieder zu normalisieren.

BEISPIELE

15. $5{,}39737 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}771 \cdot 10^{4} = (5{,}397_4 \cdot 1{,}771) \cdot 10^{-2+4} = 9{,}558_8 \cdot 10^{2} = \underline{\underline{9{,}559 \cdot 10^{2}}}$

16. $5{,}39737 \cdot 10^{-2} : 1{,}771 \cdot 10^{4} = (5{,}397_4 : 1{,}771) \cdot 10^{-2-4} = 3{,}047_6 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{3{,}048 \cdot 10^{-6}}}$

Bei fortgesetzten Multiplikationen und Divisionen empfiehlt es sich, die Mantissen- und Exponentenrechnung voneinander zu trennen.

BEISPIEL

17. Es ist

$$K = \frac{(a^2 - b^2)\, c}{(bc - a)\, a}$$

mit den Werten $a = 6{,}732 \cdot 10^{-13}$, $b = 4{,}927 \cdot 10^{-15}$ und $c = 8{,}663 \cdot 10^{1}$ zu berechnen.

Lösung:

$$K = \frac{(6{,}732^2 \cdot 10^{-26} - 4{,}927^2 \cdot 10^{-30}) \cdot 8{,}663 \cdot 10^1}{(4{,}927 \cdot 8{,}663 \cdot 10^{-14} - 6{,}732 \cdot 10^{-13}) \cdot 6{,}732 \cdot 10^{-13}} =$$

$$= \frac{(6{,}732^2 - 0{,}04927^2) \cdot 8{,}663}{(4{,}927 \cdot 8{,}663 \cdot 10^{-1} - 6{,}732) \cdot 6{,}732} \cdot \frac{10^{-26} \cdot 10^1}{10^{-13} \cdot 10^{-13}} =$$

$$= \frac{(45{,}32_0 - 0{,}00_2) \cdot 8{,}663}{(4{,}268_3 - 6{,}732) \cdot 6{,}732} \cdot 10^1 = \frac{45{,}31_8 \cdot 8{,}663}{-2{,}463_7 \cdot 6{,}732} \cdot 10^1 =$$

$$= - \frac{4{,}531_8 \cdot 8{,}663}{2{,}463_7 \cdot 6{,}732} \cdot 10^2 = - \frac{39{,}25_9}{16{,}58_6} \cdot 10^2 = -2{,}367_0 \cdot 10^2 =$$

$$= \underline{\underline{-2{,}367 \cdot 10^2}}$$

AUFGABEN

226. Die Differenz

$$D = \cos 23{,}5^\circ - \cos 23^\circ$$

ist mit vierstelligen Funktionstafeln

a) direkt

b) unter Beachtung des Additionstheorems

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

zu berechnen. Die beiden Resultate sind bezüglich der erzielbaren Genauigkeit zu vergleichen.

227. $27{,}635 \cdot 0{,}0173 - 79{,}48 \cdot 6{,}350$

228. $\dfrac{0{,}6161}{4{,}3825} - \dfrac{0{,}0199}{17{,}96042} + \dfrac{827{,}8}{173959}$

229. Es ist

$$A = \frac{a}{b-c} - \frac{d}{a+c}$$

mit den Werten

a) $a = 4{,}83 \cdot 10^{12}$; $b = 9{,}66 \cdot 10^{-5}$; $c = 3{,}85 \cdot 10^{-7}$; $d = 6{,}83 \cdot 10^{29}$

b) $a = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$; $b = 5{,}40 \cdot 10^{4}$; $c = 8{,}33 \cdot 10^{3}$; $d = 2{,}85 \cdot 10^{4}$

allein mit Hilfe des Rechenstabes zu bestimmen.

5.1.4. Rechenpläne und Rechenformulare

Um eine umfangreiche und komplizierte Rechnung fehlerfrei durchführen zu können, muß sie gut vorbereitet und weitgehend schematisiert werden, so daß die Verfolgung des Rechenganges keine große Aufmerksamkeit mehr erfordert. Der Rechner kann sich dann auf die jeweiligen Rechenoperationen konzentrieren und so Fehler beim Einstellen, Ablesen und Aufschreiben der Zahlen sowie bei der Benutzung der Rechenhilfsmittel, Rechenmaschinen, Funktionstafeln o. ä. vermeiden. Es müssen möglichst umfassende Kontrollen eingebaut und angewendet werden. Dies alles erfordert eine besondere Form der Vorbereitung einer Rechnung sowie Ordnung und Disziplin bei ihrer Durchführung.
Im folgenden sollen die wichtigsten Gesichtspunkte für die Anlage eines Rechenplanes dargestellt werden.

Analyse und Schematisierung des Rechenganges

Als Anweisung für eine Rechnung liegt im allgemeinen eine mathematische Formel vor, die jedoch häufig den Rechengang nur global festlegt und die Art und Reihenfolge der einzelnen Rechenschritte nicht eindeutig vorschreibt. Für die praktische Rechnung ist der Rechengang in eine genau festgelegte Folge von einzelnen Operationen aufzulösen, wobei auch alle Hilfsarbeiten, wie Aufsuchen in Tabellen, Interpolieren und alle Kontrollen fest einzuplanen sind. Dabei ist natürlich *die Form der Rechnung zu wählen, die den geringsten Aufwand erfordert.*

Aufstellen von Rechenformularen

Nachdem auf die beschriebene Weise der Rechenablauf festgelegt worden ist, muß er im nächsten Schritt in die Form einer Tabelle gebracht werden.

BEISPIEL

1. Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 4$ und $b = 3$ soll unter Beachtung der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

für die Werte $x = 0; 0{,}5; 1; \ldots; 4$
punktweise berechnet werden.

Lösung: Wegen der Symmetrie genügt es, die Koordinaten für die Punkte des ersten Quadranten zu ermitteln. Es ist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{mit} \quad \frac{b}{a} = 0{,}75 \quad \text{und} \quad a^2 = 16.$$

Für die Rechnung wird folgendes Schema benutzt:

x	x^2	$a^2 - x^2$	$\sqrt{a^2 - x^2}$	y
①	②	③	④	⑤
	①^2	16 − ②	$\sqrt{③}$	0,75 · ④
0	0	16	4	3
0,5	0,25	15,75	3,97	2,98
1	1	15	3,87	2,90
1,5	2,25	13,75	3,71	2,78
2	4	12	3,46	2,60
2,5	6,25	9,75	3,12	2,34
3	9	7	2,65	1,99
3,5	12,25	3,75	1,94	1,46
4	16	0	0	0

Alle Spalten werden durchnumeriert, die Nummern werden in Kreise geschrieben.
Drei Überschriftszeilen charakterisieren den Gang der Rechnung. In der ersten Zeile werden auf alle Fälle die Spalten gekennzeichnet, in denen die Eingangswerte (hier x) und die Resultate (hier y) stehen. Ferner können die einzelnen Operationen mit Hilfe der üblichen Formelzeichen erläutert werden, soweit nicht zu umfangreiche Ausdrücke entstehen.
Die zweite Zeile enthält die Spaltennummern.
In der dritten Zeile werden die einzelnen Schritte der Rechnung in besonders einprägsamer Weise vermerkt. Dabei wird jede Zahl, die für die betreffende Operation aus einer anderen Spalte entnommen werden muß, durch die betreffende Spaltennummer gekennzeichnet. So bedeutet z. B.

①^2: Die in der gleichen Zeile in Spalte 1 stehende Zahl soll in das Quadrat erhoben werden und das Resultat in die betreffende Spalte (hier Nr. 2) eingetragen werden.

16 − ②: Von der Zahl 16 soll die in Spalte 2 stehende Zahl abgezogen werden.

usw.
Die Rechnung ist so weit in Einzelschritte aufzulösen, daß keine Zwischenresultate mehr auf gesonderten Zetteln notiert werden müssen. Falls Maßeinheiten auftreten, müssen alle Zahlen derselben Spalte mit der gleichen Einheit behaftet sein, die dann grundsätzlich nicht mitgeschrieben wird. Sie kann bei Bedarf in der Überschriftenleiste angegeben werden. Soweit es möglich ist, werden jeweils die Werte einer Spalte nacheinander gerechnet, um routinemäßiges Rechnen zu ermöglichen.
Falls sehr viele Rechenoperationen auftreten und relativ wenige gleichartige Probleme durchzurechnen sind, ist es zu empfehlen, die Zeilen und Spalten des Schemas miteinander zu vertauschen. Die Erläuterungen stehen dann in den ersten drei Spalten, jeder neue Fall erfordert eine weitere Kolonne (vgl. Beispiel 3).
Ein Rechenschema in Tabellengestalt ist übersichtlich und in allen Schritten auch von anderen Personen zu kontrollieren. Falls eine Rechnung sehr häufig auftritt, lohnt sich die Anfertigung von gedruckten Rechenformularen. Dazu ist eine besonders sorgfältige Vorarbeit notwendig. Für das Formular sind alle üblichen Vorschriften

(Schriftleisten, Heftrand, Normschrift, Schreibmaschinenvorschub u. a.) zu beachten.

Kontrollierbarkeit der Rechnung

Man muß stets darauf gefaßt sein, daß sich trotz aller aufgewendeten Sorgfalt Fehler in die Rechnung einschleichen. Dabei sind nicht die kleinen und unvermeidlichen Abweichungen der numerischen Werte gegenüber den exakten Darstellungen, sondern es ist direktes falsches Rechnen, bedingt durch menschliches oder maschinelles Versagen, gemeint. Es gibt so viele Möglichkeiten dafür, wie falsches Abschreiben, Ablesen, Eintasten, Einstellen, falsche Vor- und Rechenzeichen, falsches Funktionieren der Geräte und Maschinen, Vertauschen von Seiten, Zahlen, Tasten, Tabellen usw., daß beständig Fehler erwartet werden müssen. Ganz besonders muß darauf hingewiesen werden, daß sich durch ein gutes Äußeres (und dazu gehört auch eine gut leserliche Schrift) mancher Flüchtigkeitsfehler von vornherein vermeiden läßt.
Man kann nicht kritisch genug gegen eigene und fremde Rechnungen sein. Auch in gedruckten Vorlagen können Fehler, und seien es nur Druckfehler, vorhanden sein. Deshalb bemühe man sich, Mittel und Wege zur Kontrolle der laufenden Rechnung und der Resultate zu finden. Die Möglichkeiten dafür hängen stark vom speziellen Problem ab, allgemeine Regeln lassen sich schwer angeben. Üblich sind: Summenkontrollen, Einsetzproben, Rechnung mit zwei verschiedenen Hilfsmitteln, etwa erst Rechenstab, dann Rechenmaschine, Differenzbildung bei Zahlenkolonnen, Auftragen der Ergebnisse, teilweise oder vollständige Wiederholung der Rechnung, Parallelrechnung von zwei Personen usw. Eine bloße Wiederholung der Rechnung stellt jedoch nur eine schwache Kontrolle dar, da oft auch der Fehler wiederholt wird. Eine Rechnung muß auch so angelegt sein, daß sie von anderen verfolgt und kontrolliert werden kann, deshalb darf keine Nebenrechnung fehlen, und jedes Zwischenresultat muß vermerkt sein.

BEISPIELE

2. Die Funktion $y = x^x$ ist für die Werte $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ \ldots$ mit Hilfe einer fünfstelligen Logarithmentafel zu tabellieren.

   Lösung: Wegen $\lg y = x \lg x$ wird folgendes Rechenschema verwendet:

x	$\lg x$	$\lg x$	$x \cdot \lg x$	$\lg y$		y
①	② lg ① lt. Tafel	③ Umrechn. von ②	④ ① · ③	⑤ Umrechn. von ④	⑥ Δ	⑦ Numerus zu ⑤
0,1	0,00000 − 1	−1,00000	−0,10000	0,90000 − 1	6	0,79433
0,2	0,30103 − 1	−0,69897	−0,13979	0,86021 − 1	6	0,72478
0,3	0,47712 − 1	−0,52288	−0,15686	0,84314 − 1	6	0,69685

usw.

Man beachte die Hilfswerte in den Spalten 3; 5 und 6, die auf Grund der Besonderheiten der Logarithmenrechnung mit niedergeschrieben werden müssen. Δ ist die Tafeldifferenz der Logarithmentafel. Es wird spaltenweise gerechnet.

3. Es ist die in der Nähe von $x_1 = 0{,}6$ liegende Nullstelle x^* der Funktion

$$y = \sin x - \frac{1}{x} + 1$$

mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens zu bestimmen. [2]

Lösung: Ausgehend von einer Näherung x_n wird durch

$$\Delta x_n = -y_n : y_n' = -\left(\sin x_n - \frac{1}{x_n} + 1\right) : \left(\cos x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)$$

eine Verbesserung zu x_n ermittelt.
Wegen der größeren Anzahl von Rechenschritten werden Zeilen und Spalten im Rechenschema miteinander vertauscht.

n	①		1	2	3
x_n	②		0,6	0,63	0,6294
$\frac{180}{\pi} \cdot x_n$	③	57,296 · ②	34,4	36,10	36,062
$\sin x_n$	④	sin ③°	0,56	0,589	0,5886
$\cos x_n$	⑤	cos ③°	0,82	0,808	0,8083
$1 : x_n$	⑥	1 : ②	1,67	1,587	1,5888
$1 : x_n^2$	⑦	⑥²	2,79	2,520	2,5243
y_n	⑧	④ + 1 − ⑥	−0,11	0,002	−0,0002
y_n'	⑨	⑤ + ⑦	3,61	3,328	3,3326
Δx_n	⑩	− ⑧ : ⑨	0,03	−0,0006	0,00006
x_{n+1}	⑪	② + ⑩	0,63	0,6294	0,62946

Für die Lösung gilt demnach $0{,}6294 < x^* < 0{,}6295$

AUFGABEN

230. Die beiden Funktionen

$$f_{1,2}: \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{1 + 4x^2}$$

sind für $-1 \leqq x \leqq +1$ in Schritten von $\Delta x = 0{,}1$ zu tabellieren. Die grafische Darstellung der Funktionen hat eine bemerkenswerte Gestalt.

231. Die Nullstelle der Funktion

$$g: \quad y = \sin x - \ln x$$

ist durch NEWTONsche Näherung zu bestimmen. Als Ausgangswert soll $x_1 = 2$ verwendet werden.

5.2. Tischrechenmaschinen

5.2.1. Einführung und Überblick

Neben Rechenstäben werden Tischrechenmaschinen am meisten als Rechenhilfsmittel verwendet. Ihr Einsatz mutet dem Rechner keine besonderen geistigen Anstrengungen zu und bringt die Vorteile, die mit jeder ziffernmäßig (digital[1])) durchgeführten Lösung einer Aufgabe verbunden sind:

1. Jedes Ergebnis kann bis in die **letzte** Stelle exakt ermittelt werden. Diese Forderung muß gerade bei allen Buchhaltungsproblemen erfüllt werden.
2. Jede noch so umfangreiche Rechnung kann so wiederholt werden, daß jedes Resultat genau mit den gleichen Ziffern wieder entstehen muß.
3. Die Genauigkeit der Resultate kann ohne Steigerung des gerätemäßigen Aufwandes erhöht werden.

Tischrechenmaschinen sind in vielen Arten und Fabrikaten allgemein verbreitet, sie sind für zahlreiche Verwaltungsaufgaben unentbehrlich. Trotz oder gar wegen des Aufkommens elektronischer Rechenautomaten ist ihre Verwendung für technisch-wissenschaftliche Berechnungen unumgänglich, so daß jeder Ingenieur in der Lage sein muß, solche Maschinen bedienen zu können.

Jede Tischrechenmaschine ist zunächst für die Durchführung von Additionen eingerichtet. Das gilt insbesondere für die **einfachen Addier- bzw. Saldiermaschinen**[2]). Nach der Anzahl der auf ihnen möglichen Grundrechenarten (Spezies), nämlich Addition und Subtraktion, werden diese Maschinen auch **Zwei-Spezies-Maschinen** genannt.

Durch eine zusätzliche Einrichtung, einen seitlich verschiebbaren **Schlitten**, der selbst Zähl- und Speichereinrichtungen trägt, lassen sich Multiplikationen mit Zehnerpotenzen realisieren. Dadurch wird es möglich, den Multiplikations- bzw. Divisionsvorgang in eine Folge von relativ wenigen Additionen bzw. Subtraktionen, verbunden mit entsprechenden Schlittenverschiebungen, aufzulösen.

Maschinen mit verschiebbarem Schlitten werden als **erweiterte Addiermaschinen** bezeichnet. Diese sind für alle vier Grundrechenarten eingerichtet, jedoch ist u. U. der Bedienungsaufwand für die einzelnen Operationen unterschiedlich. Von den einfachen, handbetriebenen „Kurbelmaschinen" abgesehen, können dabei entweder drei (Addition, Subtraktion, Division) bzw. alle vier Grundrechenarten automatisch ausgeführt werden. Solche Maschinen werden als **Halb-** bzw. als **Vollautomaten** bezeichnet.

Im folgenden soll insbesondere die Handhabung der erweiterten Addiermaschinen erläutert werden. Da die einzelnen Maschinentypen in ihrem Grundaufbau übereinstimmen, ist es möglich, ohne sich auf ein spezielles Fabrikat festlegen zu müssen, die prinzipielle Arbeitsweise zu erläutern und eine Anzahl Hinweise für den praktischen Gebrauch zu geben. Dabei muß grundsätzlich betont werden, daß genau wie etwa beim Gebrauch einer Schreibmaschine nur durch vielseitige Übung die notwendige Fertigkeit und Sicherheit für die rationelle Bedienung erlangt werden kann.

[1]) digit (engl.) Fingerbreite, Ziffer
[2]) saldieren — abrechnen

5.2.2. Grundaufbau und Zahldarstellung

Entsprechend den drei an jeder Rechenoperation beteiligten Zahlen (1. Operand, 2. Operand, Resultat) müssen drei Einstell- bzw. Ableseeinrichtungen vorhanden sein. Diese werden schlechthin **Werke** genannt. Es existieren:

I. das Umdrehungszählwerk U

II. das Resultatwerk R

III. das Einstellwerk E

Die angeführten römischen Zahlen kennzeichnen auch auf den Maschinen die entsprechenden Werke (Bilder 99, 100, 101).

Das Einstellwerk

Dieses Werk dient in erster Linie zur **Eingabe von Zahlenwerten**. Durch Einstellung von Hebeln bzw. Bedienung einer Tastatur lassen sich in jeder Stelle die entsprechenden Ziffern erzeugen, die in einer Anzeigevorrichtung sichtbar werden. Die einzelnen Stellen sind, auch in den anderen Werken, von rechts beginnend durchnumeriert (Bild 99). Eine besondere Eintastung des Kommas erfolgt nicht. Seine Lage innerhalb

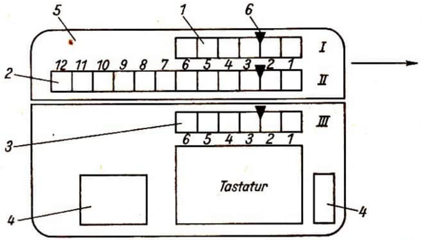


Bild 99. Grundaufbau einer Tischrechenmaschine. *1* Umdrehungszählwerk (U), *2* Resultatwerk (R), *3* Einstellwerk (E), *4* Funktionstasten, *5* Schlitten, *6* Kommaschieber

der Zahlen, insbesondere der Zwischen- und Endresultate, muß durch Überschlagsrechnungen verfolgt werden. Durch verschiebbare **Kommamarken (Kommaschieber)** läßt sich, besonders bei gleichartig sich wiederholenden Rechnungen, die Stellung des Kommas festhalten.

Das Resultatwerk

Hier entsteht bei **den ersten drei Grundrechenarten das Resultat** der Rechnung. Das Resultatwerk umfaßt etwa doppelt so viel Stellen wie eines der beiden anderen Werke. Dadurch gehen besonders bei der Multiplikation keine Resultatstellen verloren. Das Resultatwerk ist in dem beweglichen Schlitten eingebaut.

Das Umdrehungszählwerk

Jede Maschine enthält eine **Hauptwelle**, die bei Addition oder Subtraktion einmal gedreht werden muß. Der Antrieb erfolgt entweder von Hand (Kurbelmaschinen) oder über eine Kupplung durch Motorkraft. Die Anzahl der Umdrehungen dieser

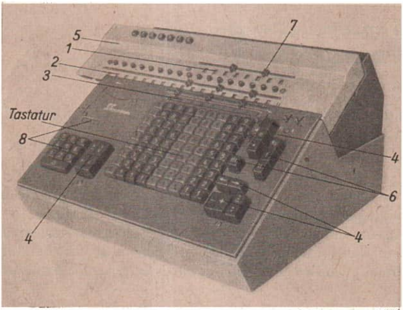


Bild 100. Vollautomatische Rechenmaschine Soemtron 215. *1* Umdrehungszählwerk (U), *2* Resultatwerk (R), *3* Einstellwerk (E), *4* Funktionstasten, *5* Schlitten *6* Löschtasten, *7* Kommaschieber, *8* Multiplikatorwerk

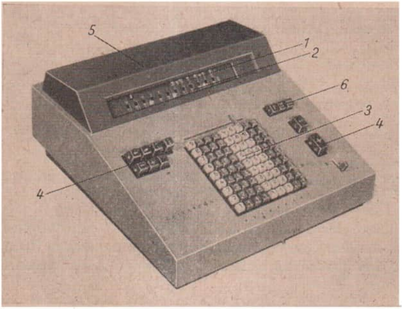


Bild 101. Halbautomatische Rechenmaschine Cellatron R 31. *1* Umdrehungszählwerk (U), *2* Resultatwerk (R), *3* Einstellwerk (E), *4* Funktionstasten, *5* Schlitten, *6* Löschtasten

Hauptwelle wird durch das Umdrehungszählwerk registriert. Befindet sich dabei der Schlitten in der **Grundstellung**, d. h., die Stellen mit gleichen Nummern von E und R liegen übereinander, so wird bei jeder Drehung in der letzten Stelle von U jeweils eine

Eins addiert. Ist der Schlitten um eine Stelle nach rechts verschoben, wird die Eins in die zweite Stelle eingetragen, bei Verschiebung um zwei Stellen entsprechend in die dritte Stelle usw. (Bild 102). Die Kenntnis dieser Tatsache ist für das Verständnis der Multiplikation wichtig. Das Umdrehungszählwerk befindet sich ebenfalls im Schlitten und hat etwa die gleiche Stellenzahl wie das Einstellwerk.

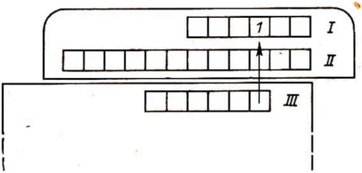


Bild 102. Schlitten um zwei Stellen nach rechts verschoben

Bei jeder Subtraktion wird je nach Schlittenstellung in der betreffenden Stelle von U jeweils um 1 zurückgezählt. Bei häufigen Subtraktionen, insbesondere bei der Durchführung der Division, muß positiv gezählt werden. Dazu kann die Zählrichtung in U durch einen Hebel umgestellt werden. Man sagt, das Umdrehungszählwerk wird **negativ geschaltet**. Dann wird bei jeder Subtraktion in der betreffenden Stelle eine Eins addiert, bei jeder Addition jedoch subtrahiert.

Funktionstasten

Zur Auslösung der einzelnen Rechenoperationen und anderer Vorgänge sind an allen Maschinen gewisse Funktionstasten vorhanden. So existiert auf alle Fälle für jedes Werk eine **Löschtaste** (oder Löschhebel), die ebenfalls durch die entsprechende römische Zahl gekennzeichnet ist. Bei halb- oder vollautomatischen Maschinen können durch weitere Funktionstasten die Operationen ausgelöst, der Schlitten verschoben oder andere Vorgänge eingeleitet werden. Die Wirkungsweise dieser Tasten wird im Zusammenhang mit den Rechenoperationen erläutert.

Zahldarstellung

Die einzelnen Werke sind zunächst nur dafür eingerichtet, jeweils eine positive ganze Dezimalzahl g aufzunehmen. Durch Festlegung der Kommastellung (Kommaschieber) können auch Dezimalbrüche dargestellt werden (Bild 103).

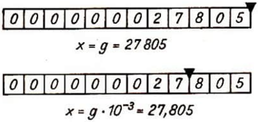


Bild 103. Zahldarstellung

Da die Stellenzahl begrenzt ist, ist auch die Darstellbarkeit von Zahlen beschränkt.

Um die Übungsaufgaben auch auf einfacheren Maschinen nachrechnen zu können, wird in den folgenden

Darlegungen grundsätzlich eine Maschine mit sechs Stellen in E und U und zwölf Stellen in R vorausgesetzt. In ein solches sechsstelliges Werk kann höchstens die Zahl 999999 eingetragen werden. Die größte im Resultatwerk mögliche Zahl ist demnach

$$999\,999\,999\,999. \tag{184}$$

Wird diese Zahl um 1 erhöht, müßte eigentlich

$$1\,\boxed{000\,000\,000\,000}$$

entstehen. Die Ziffer 1 in der 13. Stelle geht jedoch verloren, es wird nur der eingerahmte Teil angezeigt, es erscheint wieder die Zahl Null. Für den größten Teil der Aufgaben reicht die Stellenzahl (die **Kapazität**) der Werke aus, doch kann bei manchen Rechnungen der Fall eintreten, daß die Zahlen „überfließen". Da dann gerade die wichtigen führenden Stellen verlorengehen, ist besondere Vorsicht notwendig. Manche Maschinen zeigen deshalb eine solche Kapazitätsüberschreitung durch ein Signal (Glockenzeichen) an.

Umgekehrt entsteht beim Abziehen einer 1 von dem ursprünglich gelöschten Werk jetzt die Ziffernfolge (184). Um die Darstellung der negativen Zahlen zu demonstrieren, wird weiter rückwärts gezählt. Es entstehen der Reihe nach die folgenden Einstellungen:

000 000 000 000	0
999 999 999 999	−1
999 999 999 998	−2
999 999 999 997	−3
⋮	⋮
999 999 999 991	−9
999 999 999 990	−10
999 999 999 989	−11
⋮	⋮

Die vorderste Ziffer kann als Vorzeichen gedeutet werden. Ist diese 0, gilt die Zahl als positiv, ist sie 9, als negativ. Die negativen Zahlen erscheinen dabei als sogenannte Komplemente[1]). Sie sind Ergänzungen zu 10^6 bzw. 10^{12}. Die Ziffern des Betrages werden nach folgenden Regeln gefunden:

1. Alle rechts von der letzten nicht leeren Stelle liegenden Nullen ergeben wieder Nullen.
2. Die letzte nicht verschwindende Ziffer wird zu 10 ergänzt.
3. Alle nach links folgenden Stellen sind zu 9 zu ergänzen. Dabei ergeben alle von links her führenden Ziffern 9 führende Nullen, die im allgemeinen nicht geschrieben werden brauchen.

Die erste 9 links stellt das Minuszeichen dar.

[1]) complementum (lat.) Ergänzung

BEISPIEL

Die in R stehende Ziffernfolge 999 927 384 000 ist als negative Zahl zu deuten.

Lösung:

$$\begin{array}{cccccl}
9 & \underbrace{9\,9\;9}_{3.} & \underbrace{2\,7\;3\,8}_{3.} & \underset{2.}{4} & \underbrace{0\,0\,0}_{1.} & \text{Nummer der verwendeten Regel}\\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
- & & 7\,2\;6\,1 & 6 & 0\,0\,0 &
\end{array}$$

AUFGABEN

232. Die folgenden Einstellungen sind als negative Zahlen zu deuten:

a)	999 999 999 173	b)	999 917 300 000
c)	990 991 730 000	d)	900 000 000 001
e)	999 900 000 000	f)	987 654 321 000
g)	999 999 000 000	h)	989 999 999 999

233. Folgende negative Zahlen sind als Komplemente zu schreiben:

a)	−25	b)	−2 500
c)	−25 000 001	d)	−999
e)	−1 735 970 000	f)	−9 999 999 999
g)	−90 000 000 000	h)	−90 000 000 001

5.2.3. Addition

Jeder Stelle der drei Werke ist ein Zahnrad mit zehn Zähnen zugeordnet, das mit einer Ziffernrolle (Zählrolle) zur Anzeige der jeweiligen Stellung verbunden ist. Bei jeder Drehung der Hauptwelle werden die Zählrollen des Resultatwerkes um die Werte weitergedreht, die in den zugeordneten Stellen von E eingestellt sind. Steht z. B. in R die Zahl 250 und in E die 143 (Bild 104), so wird bei Addition die letzte Zählrolle von R um 3 Einheiten, also von 0 auf 3 gedreht. Die zweite wird von 5 um 4 Zähne auf 9, die dritte um einen Zahn weiter auf 3 gebracht. Als Resultat erscheint in R die Summe $250 + 143 = 393$.

Falls bei diesem Vorgang in R die Ziffer 9 überschritten wird, muß das sich links anschließende Zählrad noch zusätzlich um eine Ziffer weitergedreht werden. Es erfolgt ein sogenannter **Zehnerübertrag**. Zu seiner Verwirklichung sind besondere technische Einrichtungen vorhanden. Steht in der nächsten Stelle bereits die Ziffer 9, so wird daraus eine 0 und ein erneuter Übertrag in die darauf folgende Stelle wird notwendig. Auf diese Weise kann der Übertrag der Reihe nach noch durch mehrere Stellen und evtl. durch die ganze Zahl hindurchlaufen. Die Addition erfolgt demnach im Innern der Maschine in zwei Schritten, die dem Bedienenden allerdings kaum bewußt werden:

1. Weiterdrehung der Zählrollen von R um die in den jeweils zugeordneten Stellen von E stehenden Werte (Bildung der Halbsumme H) und Registratur von noch offenen Zehnerüberträgen Ü, die in Bild 105 durch * angedeutet werden.

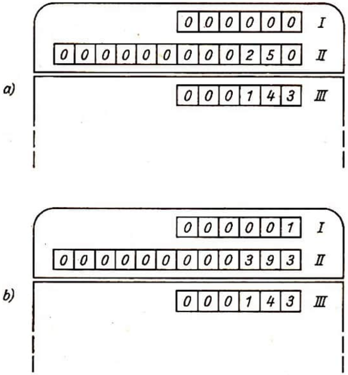


Bild 104. Addition.
a) vor Ausführung,
b) nach Ausführung

2. Ausführung der Zehnerüberträge, der Reihe nach von rechts nach links fortschreitend. Dabei können neue Zehnerüberträge notwendig werden (in Bild 105 durch (*) angedeutet).

Die beiden Schritte kann man an von Hand bedienten Maschinen beim langsamen Durchdrehen der Kurbel deutlich beobachten, insbesondere auch das Fortschreiten vielfacher Zehnerüberträge. Ein Übertrag, der über die Kapazität der Maschine hinausgeht (⊛ in Bild 105), geht verloren.

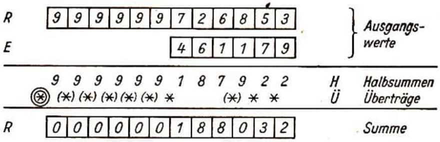


Bild 105. Addition und Zehnerüberträge

Um die praktische Durchführung der Rechenoperationen zu erläutern, werden die im einzelnen notwendigen Arbeitsgänge in der Gestalt einer Tabelle zusammengestellt. Um wirklich rationell rechnen zu können, muß erreicht werden, daß die dort angegebenen Maßnahmen durch vielfältige Übungen schließlich routinemäßig erledigt werden. Als Inhalt der Werke E, R bzw. U sind die Zahlen zu verstehen, die **nach** Ausführung der angegebenen Maßnahmen in dem betreffenden Werk erscheinen. Bleibt der Inhalt bei einem Vorgang unverändert, wird der alte Inhalt nicht nochmals aufgeführt.

Bedeutung der Symbole:

$a \to E$ Die Zahl a wird in das Einstellwerk eingetastet.

$+$ Die Hauptwelle der Maschine wird einmal (im positiven Sinne) gedreht, oder auch: Es wird die $\boxed{+}$-Taste gedrückt.

Arbeitsplan für die Addition $a + b$:

Nr.	Maßnahme	Inhalt der Werke E	R	U
1	Alle Werke löschen Schlitten in Grundstellung bringen Kommaschieber setzen	0	0	0
2	$a \to$ E	a		
3	$+$		a	1
4	E löschen	0		
5	$b \to$ E	b		
6	$+$		$a+b$	2

Bei der Addition weiterer Summanden werden die Schritte 4, 5 und 6 laufend wiederholt.
Bei zahlreichen Maschinentypen erfolgt die Löschung von E (Schritt 4) automatisch nach beendeter Addition, wenn nicht durch eine besondere Taste (**R-Taste** oder **Repetitionstaste**[1]) die Löschung verhindert wird. Die Summe entsteht auch bei mehr als zwei Summanden stets in R. Das Umdrehungszählwerk gibt die Anzahl der Summanden an (**Postenzähler**). Die Postenzahl dient als gewisse Kontrolle dafür, daß kein Summand vergessen wurde.
Die Zahlen werden in E und damit auch in R zur vollen Ausnutzung der Kapazität möglichst weit rechts eingetragen. Bei ganzen Zahlen nimmt die Stelle Nr. 1 die Einer auf. Bei der Addition von Dezimalbrüchen wird zunächst festgestellt, wieviel Stellen maximal nach dem Komma auftreten. Entsprechend werden sowohl für E als auch für R die Kommaschieber eingestellt und erst danach die Rechnung ausgeführt.

AUFGABEN

234. Die Stellung der Kommaschieber und der Stand des Umdrehungszählwerkes nach beendeter Rechnung soll vor Ausführung der folgenden Additionen angegeben werden:

a) 753 + 9 811 b) 978 536 + 999 998

c) 17,985 + 578,2 d) 385,27 + 662,853 + 88,1

e)
   1 983,2
 + 888,44
 + 37 785,625 4
 + 600,2
 + 7 852,98
 + 7,185 5

[1]) repetere (lat.) wiederholen

5.2.4. Subtraktion

Die Durchführung der Subtraktion unterscheidet sich nicht wesentlich von der Addition. Die Hauptwelle der Maschine muß rückwärts (negativ) gedreht werden, so daß die Zählrollen des Resultatwerkes um die in E stehenden Werte zurückgestellt werden. Dabei müssen beim Übergang einer Zählrolle von 0 nach 9 wieder entsprechende Zehnerüberträge in die nächste Stelle ausgelöst werden, die sich u. U. auch durch die ganze Zahl hindurch fortpflanzen können.
Die einzelnen für die Subtraktion notwendigen Schritte werden in dem folgenden Arbeitsplan zusammengestellt. Darin bedeutet

— Die Hauptwelle der Maschine wird einmal im negativen Sinne gedreht, oder auch: es wird die $\boxed{-}$-Taste gedrückt.

Die negative Drehung der Hauptwelle wird bei Handmaschinen entweder durch Drehung der Kurbel in negativem Sinne oder bei manchen Maschinen durch Umschaltung eines Hebels und positiver Drehung der Kurbel erreicht.

Arbeitsplan für die Subtraktion $a - b$

Nr.	Maßnahme	Inhalt der Werke		
		E	R	U
1	Alle Werke löschen Schlitten in Grundstellung bringen Kommaschieber setzen	0	0	0
2	$a \to$ E	a		
3	$+$		a	1
4	E löschen	0		
5	$b \to$ E	b		
6	$-$		$a-b$	0

Bei Addition oder Subtraktion weiterer Zahlen werden die Schritte 4, 5 und 6 laufend wiederholt, wobei in 6 entweder $+$ oder $-$ betätigt werden muß.
Ist das Resultat negativ, erscheint automatisch das Komplement der Zahl. Es ist also nicht notwendig, die Beträge der zu subtrahierenden Zahlen zu vergleichen, um das Vorzeichen der Differenz zu ermitteln. Es muß nur noch unterschieden werden können, ob das Resultat als direkte Zahl oder als Komplement vorliegt. Dies ist, falls nach links noch freie Stellen bleiben, immer möglich.

BEISPIELE

1. $a - b = 1\ 911 - 753$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{r} 000\ 000\ 001\ 911 = \langle \mathrm{R}\rangle^{1)} \\ 000\ 753 = \langle \mathrm{E}\rangle \end{array}\right\} \text{vor Ausführung der Subtraktion}$$

$\boxed{-}$

$$000\ 000\ 001\ 158 = \langle \mathrm{R}\rangle \quad \text{nach der Subtraktion}$$

↘ Zahl positiv

[1]) Das Zeichen ⟨...⟩ bedeutet „Inhalt von . . .“

2. $a - b = 685 - 2\ 195$

Lösung:

$$\boxed{-}\quad \begin{array}{r l} 000\ 000\ 000\ 685 = \langle R \rangle & \left.\begin{array}{l}\text{vor Ausführung}\\ \text{der Subtraktion}\end{array}\right. \\ 002\ 195 = \langle E \rangle & \\ \hline 999\ 999\ 998\ 490 = \langle R \rangle & \text{nach der Subtraktion} \\ \searrow -\ 1\ 510 \quad \text{Zahl negativ} & \end{array}$$

Statt eine (positive) Zahl zu subtrahieren, ist es prinzipiell auch möglich, ihr Komplement zu addieren.

BEISPIELE

3. $a - b = 1\,911 - 753 = -753 + 1\,911$

Lösung:

$$\boxed{+}\quad \begin{array}{r l} 999\ 999\ 999\ 247 = \langle R \rangle & \left.\begin{array}{l}\text{vor Ausführung}\\ \text{der Addition}\end{array}\right. \\ 001\ 911 = \langle E \rangle & \\ \hline 000\ 000\ 001\ 158 = \langle R \rangle & \text{nach der Addition} \\ \searrow \text{Zahl positiv} & \end{array}$$

4. $a - b = 685 - 2195 = -2195 + 685$

Lösung:

$$\boxed{+}\quad \begin{array}{r l} 999\ 999\ 997\ 805 = \langle R \rangle & \left.\begin{array}{l}\text{vor Ausführung}\\ \text{der Addition}\end{array}\right. \\ 000\ 685 = \langle E \rangle & \\ \hline 999\ 999\ 998\ 490 = \langle R \rangle & \text{nach der Addition} \\ \searrow -\quad 1\ 510 \quad \text{Zahl negativ} & \end{array}$$

Auf diese Weise lassen sich mehrere Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen addieren, ohne daß die Zwischenresultate und deren Vorzeichen verfolgt werden müssen.
Bei der Subtraktion einzelner Zahlen ist es selbstverständlich einfacher, den Betrag als das Komplement einzutasten.
Da bei einer Subtraktion in U jeweils um 1 rückwärts gezählt wird, zeigt das Umdrehungszählwerk nach beendeter Rechnung die Differenz der Anzahl der Additionen und der Anzahl der Subtraktionen an. Werden mehr Subtraktionen durchgeführt, wird die Differenz negativ und erscheint auch in U als Komplement. Bezüglich der Kommastellung gilt das unter Addition Gesagte.

AUFGABE

235. Die Stellung der Kommaschieber und der Stand des Umdrehungszählwerkes nach beendeter Rechnung soll vor Ausführung der folgenden Rechnungen angegeben werden:

a) $17958 - 8\,653$

b) $825{,}85 - 926{,}7288 + 81{,}621$

c) $-17{,}882 - 529{,}58 - 11{,}82 + 47{,}015\,32 - 112{,}629 + 772{,}4831$

d) $6\,622{,}4 + 553{,}18 - 991{,}3058 - 66{,}1239 + 3340 - 0{,}045\,51$

Addition und Subtraktion mit höherer Genauigkeit

Trotz der beschränkten Stellenzahl der Werke, insbesondere des Einstellwerkes, lassen sich auch „längere" Zahlen mit der Maschine addieren. Das Verfahren wird zunächst an einem Beispiel erläutert:

BEISPIEL

5. Es ist $\pi + \sqrt{2}$ auf 12 Stellen nach dem Komma genau zu bestimmen. Dabei ist $\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 590$ und $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 373$

   Lösung: Die Zahlen werden in Teile zerlegt, wobei das folgende **Lösungsschema** verwendet wird:

Zahl	Zahlenabschnitte 1	2	3	
π	3,	141 592	653 590	
$\sqrt{2}$	1,	414 213	562 373	
S_1	4,			Summe der 1. Abschnitte
S_2		555 805		Summe der 2. Abschnitte
S_3		1	215 963	Summe der 3. Abschnitte
$\pi + \sqrt{2}$	4,	555 806	215 963	

Die Ziffernfolgen der Summanden werden in mehrere Abschnitte von etwa gleicher Stellenzahl zerlegt, die getrennt addiert werden. Eventuelle Überträge an den Trennstellen sind in die voranstehenden Abschnitte zu übernehmen.
Bei Subtraktionen muß durch Überschlagsrechnung vermieden werden, daß das Endresultat als Komplement erscheint.

BEISPIEL

6. Es ist $S = \sqrt{3} - \pi$ auf 12 Stellen nach dem Komma zu bestimmen. $(\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 807\ 569)$

   Lösung: Zur Vermeidung von Komplementen wird $-S = \pi - \sqrt{3}$ errechnet.

   Lösungsschema

Zahl	1	2	3	
π	3,	141 592	653 590	
$\sqrt{3}$	1,	732 050	807 569	
D_1	2,			Differenz der 1. Abschnitte
D_2	... 999,	409 542		Differenz der 2. Abschnitte
D_3		... 999	846 021	Differenz der 3. Abschnitte
$\pi - \sqrt{3}$	1,	409 541	846 021	

   Also ist $S = -1{,}409\ 541\ 846\ 021$

Die Differenzen der Abschnitte 2 und 3 besitzen jeweils führende Ziffern 9. Diese sind als negativer Übertrag zu deuten und entsprechend zu berücksichtigen.

AUFGABEN

236. Es ist 4π durch fortgesetzte Addition auf 10 Stellen nach dem Komma zu berechnen, wobei eine Schutzstelle in der Rechnung mitzuführen ist.

237. $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ist auf 12 Stellen nach dem Komma genau zu bestimmen.

5.2.5. Multiplikation

Die Multiplikation zweier Zahlen wird auf fortgesetzte Addition des einen Faktors (des Multiplikanden) zurückgeführt.

Um

$$a \cdot b = 65782 \cdot 9165$$

zu berechnen, müßte der Multiplikand a so oft addiert werden, wie der Multiplikator b angibt. Dazu wären im vorliegenden Fall 9165 einzelne Additionen notwendig. Unter Ausnutzung der Schlittenbewegung kommt man allerdings mit bedeutend weniger Aufwand aus. Dazu wird der Schlitten entsprechend der Stellenzahl des Multiplikators (hier um drei Stellen) nach rechts verschoben. Steht a in E, so wird bei jeder Drehung der Hauptwelle jetzt das Tausendfache von a addiert, entsprechend wird U jeweils um 1000 vergrößert. Nach neun Additionen steht in U die Zahl 9000 und in R der Wert $a \cdot 9000$. Dann wird der Schlitten um eine Stelle nach links bewegt und entsprechend der zweiten Ziffer von b eine Addition durchgeführt. Ergebnis: 9100 in U und $a \cdot 9100$ in R. Auf diese Weise fortfahrend, wird in U die Zahl 9165 aufgebaut. Dazu sind insgesamt nur $9 + 1 + 6 + 5 = 21$ Additionen notwendig. In R ist das Produkt $a \cdot b = 602\,892\,030$ entstanden.
Unter der Voraussetzung, daß nicht mit einer vollautomatischen Maschine gerechnet wird, entsteht folgender Arbeitsplan:

Nr.	Maßnahme	Inhalt der Werke		
		E	R	U
1	Alle Werke löschen Schlitten in die Ausgangsstellung entsprechend der Stellenzahl von b bringen Kommaschieber setzen Automatische Löschung von E abstellen	0	0	0
2	$a \to$ E	a		
3	$b \to$ U		$a \cdot b$	b

Dabei bedeutet $b \to$ U, daß der Multiplikator b ziffernweise in das Umdrehungszählwerk hineingekurbelt wird. Unter Ausnutzung evtl. abwechselnder Additionen und

Subtraktionen kommt man unter Umständen mit noch weniger Operationen aus, als die Quersumme des Multiplikators angibt. Dazu wird, falls eine Ziffer größer als 5 ist (unter Umständen auch bei Gleichheit), die vorhergehende um 1 höher eingestellt und dann subtrahiert. So entsteht 9165 aus

1 Addition	in Stelle 5:	$\langle U \rangle = 10000$
1 Subtraktion	,, ,, 4:	$\langle U \rangle = 9000$
2 Additionen	,, ,, 3:	$\langle U \rangle = 9200$
3 Subtraktionen	,, ,, 2:	$\langle U \rangle = 9170$
5 ,,	,, ,, 1:	$\langle U \rangle = 9165$

mit insgesamt nur zwölf Kurbeldrehungen bzw. Einzeladditionen oder -subtraktionen. Dabei ist es zu empfehlen, den Multiplikator von links nach rechts, also mit der höchsten Stelle beginnend, aufzubauen, um auch hier mit der üblichen Leseart der Zahlen in Übereinstimmung zu bleiben. Der Schlitten muß dazu zuerst in die Ausgangsstellung (jetzt vier Stellen nach rechts) gebracht werden.

Bei vollautomatischen Maschinen (Bild 100) ist ein spezielles Multiplikator-Einstellwerk vorhanden. Bei diesen Maschinen wird durch eine gesonderte $\boxed{\times}$ -Taste die Multiplikation ausgelöst, die dann ohne äußere Eingriffe automatisch abläuft.

Die Lage des Kommas ist beim Rechnen mit Dezimalbrüchen vor Beginn der Rechnung in allen drei Werken durch Kommaschieber zu kennzeichnen.

Dabei hat das Produkt in R so viel Stellen nach dem Komma wie in den beiden Faktoren zusammen auftreten. Zur besseren Übersicht sind die Faktoren, falls möglich, möglichst weit rechts einzustellen bzw. in U zu erzeugen. Es empfiehlt sich, bei gleichartigen Aufgaben die Kommastellungen fest zu wählen, auch dann, wenn bei einzelnen Faktoren rechts Stellen freibleiben. Als Multiplikator wird der Faktor gewählt, der sich mit den wenigsten Kurbeldrehungen herstellen läßt. Dies ist in der Regel der *Faktor mit der geringeren Stellenzahl.*

AUFGABEN

238. Die folgenden Multiplikationen sind alle mit der gleichen Kommaeinstellung durchzuführen:

a) 17,38 · 2154; b) 8135,2 · 620,881
c) 1,857 · 49,57; d) 785,2 · 19,8
e) 6,851 · 639,06

239. Die folgenden Multiplikationen sind mit möglichst wenigen Kurbeldrehungen auszuführen. Die Anzahl ist anzugeben.

a) 5739 · 375; b) 9099 · 478
c) 686 · 7088; d) 87322 · 19939
e) 1004 · 997

Multiplikation mit erhöhter Genauigkeit

Wie bei der Addition gelingt es durch Zerlegung der Zahl in Abschnitte, auch längere Zahlen miteinander zu multiplizieren. Wird unter a_1 bzw. b_1 der vordere und unter a_2 bzw. b_2 der hintere Abschnitt einer Zahl a bzw. b verstanden, so errechnet sich das Produkt $a \cdot b$ nach der Formel

$$a \cdot b = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2.$$

Hierin ist der letzte Summand so klein, daß er im allgemeinen nur überschlagsweise ermittelt zu werden braucht, um Rundungseinflüsse zu berücksichtigen. Die Durchführung der Rechnung wird wieder an einem Zahlenbeispiel dargelegt.

BEISPIEL

1. Es ist $\pi \cdot \sqrt{2}$ auf 10 Stellen genau zu bestimmen. Die Rechnung ist mit einigen Schutzstellen durchzuführen.

   Lösung: Die einzelnen Zahlenabschnitte werden zunächst als ganze Zahlen betrachtet, entsprechend den Angaben in der linken Spalte des Schemas multipliziert und so in die betreffende Zeile eingetragen, daß die schraffierten Flächen frei bleiben.

   Lösungsschema

Zahl	Zahlenabschnitte 1	Zahlenabschnitte 2	Schutzstellen
$a = \pi$	3,14159	265359	
$b = \sqrt{2}$	1,41421	356237	
$a_1 b_1$	4,4428	679939	
$a_2 b_1$		037527	33
$a_1 b_2$		111915	06
$a_2 b_2$			09
$a \cdot b$	4,4428	829381	48

   Resultat: $a \cdot b = 4{,}442\ 882\ 938$

   Es genügen zwei Schutzstellen. Die begrenzte Genauigkeit der eingehenden Zahlen erfordert auf alle Fälle, daß noch gerundet wird.

Besondere Hinweise zur Multiplikation

Das Produktvorzeichen wird im Kopf bestimmt, während die Maschinenrechnung den Betrag des Resultates liefert. Das Rechnen mit Komplementen ist auf Addition und Subtraktion beschränkt. Beim Berechnen von Produkten aus drei Faktoren muß nach der ersten Multiplikation das Zwischenresultat aus R wieder in das Einstellwerk übernommen werden. Dieser Vorgang heißt **Rückübertragung**. Diese ist u. a. auch erforderlich, wenn eine Summe mit einer Zahl multipliziert werden muß, also ein Term der Gestalt $(a + b + c + \cdots) \cdot z$ gebildet werden soll. Die Summe entsteht zunächst in R, zur Durchführung der Multiplikation muß sie nach E rückübertragen werden. Eine Reihe von Rechenmaschinen haben dazu eine besondere Taste mit der Beschriftung „R" oder „Rü". Durch Betätigung dieser Taste werden die Ziffern in R, die je nach Schlittenstellung gerade über den Stellen von E stehen, nach dort übernommen und anschließend das gesamte Resultatwerk gelöscht. Mit dem Schlitten kann also auch die Zahl verschoben und so in eine günstige Lage nach E zurückgebracht werden.

BEISPIEL

2. Es ist $a = 1{,}25992$ in die dritte Potenz zu erheben. Da a gerundet ist, braucht a^3 nur auf etwa sechs Stellen genau ermittelt zu werden.

   Lösung: Nach Ausführung der ersten Multiplikation ist der in Bild 106a angegebene Stand der Werke erreicht. Von dem Produkt in E interessieren nur die vorderen Stellen. Der Schlitten muß also vor Ausführung der Rückübertragung so nach rechts verschoben werden,

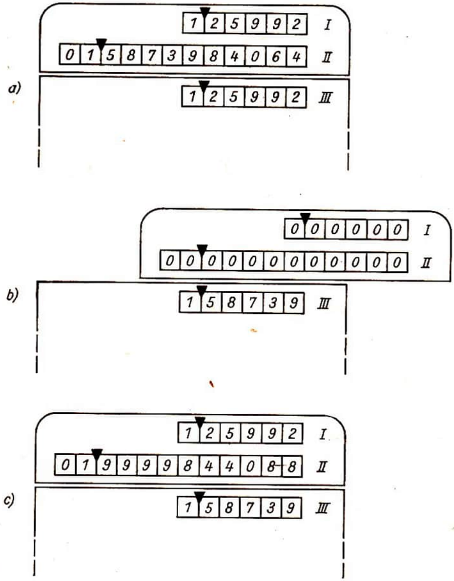


Bild 106. Berechnung eines dreifachen Produktes

daß die ersten Stellen des Produktes nach E übernommen werden (Bild 106b). Nach erneuter Multiplikation mit a ist schließlich das Resultat (Bild 106c) entstanden. Wie aus dem Ergebnis ($a^3 \approx 2$) folgt, ist im Rahmen der angegebenen sechs Stellen $a = \sqrt[3]{2}$.

AUFGABEN

240. Man berechne π^2 auf 10 Stellen genau.

241. Es ist das Quadrat der Zahl $a = 1{,}414\ 213\ 566\ 58$ auf 12 Stellen zu berechnen. Am Resultat läßt sich ablesen, auf wieviel Stellen a mit dem Wert von $\sqrt{2}$ übereinstimmt.

242. Es ist 2^{72} mit möglichst wenigen Multiplikationen zu berechnen.

Anleitung: Ausgehend von $2^9 = 512$ ist 2^{72} durch dreimaliges Quadrieren zu bestimmen.

243. Der Vektor $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 17{,}76 \\ -4{,}382 \\ 6{,}02 \\ 21{,}781 \end{pmatrix}$ ist mit dem Skalar $\lambda = 12{,}387$ zu multiplizieren. Die Komponenten des Resultatvektors sind auf vier Stellen nach dem Komma zu runden.

244. Es ist eine Tabelle der Werte $n!$ für $n = 1, 2, \ldots, 15$ aufzustellen. Dabei ist zuerst $15!$ möglichst rationell (durch geschickte Zusammenfassung der Faktoren) zu ermitteln und dann die Tabelle durch schrittweises Mutliplizieren zu errechnen. Der Wert für $15!$ ergibt sich damit zum zweiten Mal (Kontrolle!).

245. Es ist eine Tabelle der Potenzen a^k für $a = 2, 3, \ldots, 9$ und $k = 2, 3, \ldots, 10$ aufzustellen. Dabei sollen zunächst die höchsten Potenzen mit möglichst wenigen Multiplikationen errechnet werden, die sich dann zur Kontrolle bei der schrittweisen Multiplikation nochmals ergeben.

5.2.6. Skalarprodukte

Bei zahlreichen Rechenverfahren kommen Terme der Gestalt

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

vor, also Summen einfacher Produkte. Es ist möglich, solche Produktsummen oder Skalarprodukte (vgl. 2.2.4.1., S. 127) ohne Aufschreiben von Zwischenresultaten zu berechnen. Die Teilsummen laufen automatisch in R auf, da jede Multiplikation aus einer Anzahl von *Einzeladditionen* besteht und die dabei auftretenden Summanden jeweils der schon vorhandenen Summe hinzugefügt werden. Falls eines der Produkte negativ wird, ist es nicht notwendig, zuerst den Betrag zu ermitteln und diesen gesondert von der bereits vorhandenen Teilsumme abzuziehen. Es wird durch eine Folge von *Einzelsubtraktionen* gerade das Komplement des Produktes erzeugt und sogleich addiert. Dazu wird das Umdrehungszählwerk negativ geschaltet, so daß trotz Ausführung von Subtraktionen in U kein Komplement entsteht. Bei vollautomatischen Maschinen kann durch eine Taste $\boxed{\underline{\times}}$ (**Minusmultiplikation**) das Komplement automatisch gebildet und addiert werden. Das Resultat entsteht in jedem Fall vorzeichenrichtig, ganz gleich, welche Vorzeichen die einzelnen Teilsummen getragen haben.

Alle Teilprodukte müssen mit der gleichen Kommastellung errechnet werden. Da bei vielen Problemen die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ einerseits und die $b_1, b_2, \ldots$ andererseits jeweils in der gleichen Größenordnung liegen, lassen sich die Kommaschieber für E und U und damit auch in R für alle Produkte fest einstellen. Dann ist eine laufende Addition der Teilprodukte gestattet.
Nach diesen Vorbemerkungen ergibt sich folgender Arbeitsplan für die Bildung von Skalarprodukten:

Nr.	Maßnahme	Inhalt der Werke		
		E	R	U
1	Alle Werke löschen Kommaschieber setzen Automatische Löschung von E abstellen	0	0	0
2	$a_1 \to$ E	a_1		
3	Schlitten in die Ausgangsstellung bringen			
4	$b_1 \to$ U		$a_1 \cdot b_1$	b_1
5	E und U löschen	0		0
6	$a_2 \to$ E	a_2		
7	Schlitten in die Ausgangsstellung bringen			
8	$b_2 \to$ U		$a_1 b_1 + a_2 b_2$	b_2

Bei weiteren Summanden werden die Schritte 5, 6, 7 und 8 entsprechend mit a_3, b_3; a_4, b_4; ... wiederholt.

BEISPIEL

Es ist $S = 15{,}382 \cdot 3{,}17 - 48{,}221 \cdot 4{,}18 + 24{,}96 \cdot 9{,}29$ zu berechnen.

Lösung: Die jeweils ersten Faktoren kommen nach E, da sie mehr Stellen besitzen. Das Komma wird in E um drei, in U um zwei und in R um fünf Stellen nach links versetzt eingestellt.

Es entstehen der Reihe nach die folgenden Zwischenergebnisse:

Nr. des Schrittes	Inhalt der Werke		
	E	R	U
1	0	0	0
2, 3, 4	015,382	000 004 8,76 094	000 3,17
5, 6, 7, 8	048,221	999 984 7,19 716	(—) 4,18
5, 6, 7, 8	024,960	000 007 9,07 556	000 9,29

Ergebnis: $\underline{\underline{S = 79,\ 075\ 56}}$

Trotz negativer Zwischensumme entsteht das Resultat betrags- und vorzeichenrichtig.

AUFGABEN

246. Die Summen

a) $S = 107{,}3 \cdot 0{,}018 + 325{,}2 \cdot 0{,}165 - 488 \cdot 0{,}096,$

b) $S = -77{,}89 \cdot 1{,}5 + 95{,}663 \cdot 2{,}4 - 36{,}801 \cdot 3{,}4$

sind zu berechnen.

247. Es soll das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} +0{,}8175 \\ -0{,}6627 \\ +0{,}4343 \\ -0{,}6003 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -26{,}85 \\ -33{,}62 \\ +60{,}25 \\ -21{,}98 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

248. Es ist durch Nachrechnen zu prüfen, daß

$$x_1 = 21{,}83; \; x_2 = -14{,}67; \; x_3 = 85{,}29; \; x_4 = 6{,}85$$

die Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$\begin{aligned} 2{,}853\,x_1 - 0{,}697\,x_2 - 9{,}003\,x_3 - 9{,}856\,x_4 &= -762{,}87 \\ 6{,}997\,x_1 - 11{,}598\,x_2 + 11{,}529\,x_3 - 16{,}783\,x_4 &= 1191{,}23 \\ 7{,}985\,x_1 + 7{,}385\,x_2 - 6{,}804\,x_3 - 10{,}961\,x_4 &= -589{,}42 \\ 3{,}667\,x_1 + 5{,}21\,x_3 - 25{,}17\,x_4 &= 352{,}00 \end{aligned}$$

Die Differenzen zwischen den linken und den rechten Seiten sind anzugeben.

5.2.7. Division

Der Divisionsvorgang wird ähnlich wie bei der manuellen Rechnung in eine Folge von Subtraktionen aufgelöst.

Es wird festgestellt, wie oft der Divisor vom Dividenden abgezogen werden kann. Diese Anzahl stellt den Quotienten dar. Um mit wenigen Subtraktionen auskommen zu können, wird wie bei der Multiplikation die Möglichkeit der Schlittenverschiebung ausgenützt. Um die Kapazität des Umdrehungszählwerkes, in dem der Quotient entsteht, voll zu nutzen, wird zunächst der Schlitten ganz nach rechts gebracht, der Dividend in die linke Seite von R addiert und der Divisor in E so eingestellt, daß sofort eine, aber nicht mehr als 9 Subtraktionen möglich sind. Bild 107a zeigt für das Beispiel

$$24\,594\,000\,000 : 240\,360$$

die entsprechende Einstellung. Das Umdrehungszählwerk ist negativ zu schalten, damit in U der Quotient nicht als Komplement erscheint.
Der Divisor wird in dieser Schlittenstellung von dem Dividenden so oft wie möglich abgezogen. Die erste Stelle von U zeigt die Anzahl der Subtraktionen an (Bild 107b). Der verbleibende Rest in R ist kleiner als der Wert in E. Anschließend wird der Schlitten um eine Stelle nach links gerückt und, falls möglich, erneut subtrahiert. In Bild 107c ist diese Verschiebung bereits ausgeführt, eine Subtraktion ist allerdings noch nicht möglich, als nächste Resultatstelle erscheint 0. Wird der Schlitten nochmals um eine Stelle gerückt, so sind dann insgesamt zwei Subtraktionen möglich.

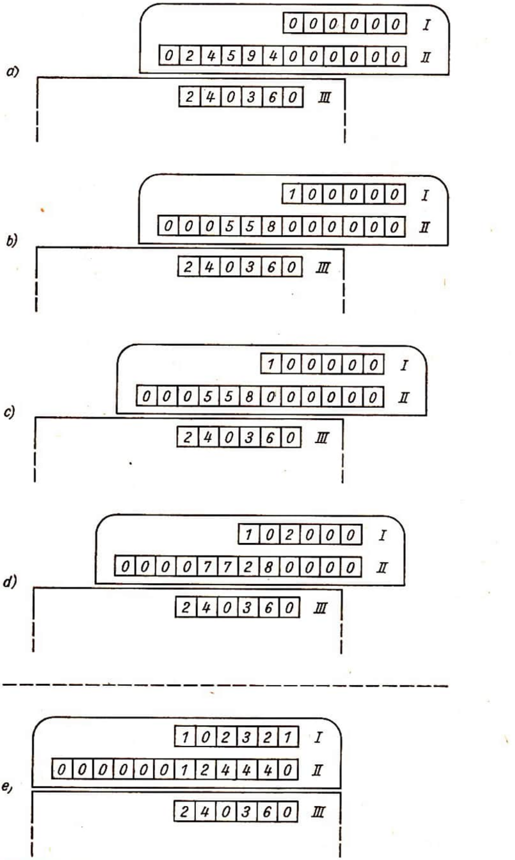


Bild 107. Divisionsvorgang

das Resultat ist in Bild 107d dargestellt. In dieser Weise wird die Rechnung fortgesetzt, bis schließlich in U das endgültige Resultat und in R der verbleibende Rest entstanden sind. Als Resultat des in Bild 107 dargestellten Divisionsvorgangs ergibt sich 102 321, Rest 124 440.
Bei der Division wird die Stellung des Resultatkommas am besten nach Eintragung der beiden Operanden durch einen Überschlag ermittelt und entsprechend der Kommaschieber eingestellt. Es ist überhaupt dringend zu empfehlen, beim Maschinenrechnen laufend im Kopf das Vorzeichen, die Größenordnung und evtl. auch den Wert der ersten Ziffer des Resultates zu verfolgen, um grobe Irrtümer weitgehend auszuschließen. So kann bei einer Division, falls der Divisor ungünstig eingestellt war, der Fall eintreten, daß gerade die ersten Ziffern des Quotienten verlorengehen. Bild 108a zeigt die falsch eingestellten Eingangswerte und Bild 108b das entsprechend falsche Resultat. Man vergleiche damit das Resultat in Bild 107e.

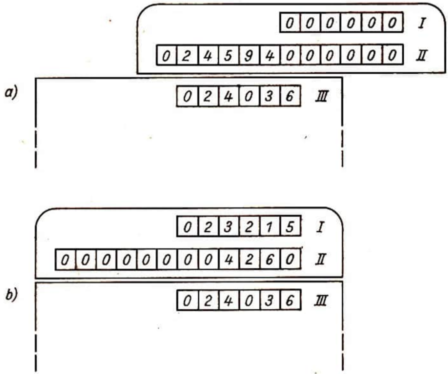


Bild 108. Division mit falsch eingestellten Werten

Statt beim Divisionsvorgang laufend darauf zu achten, ob die Differenz in R noch größer als der Divisor ist, wird besser so lange subtrahiert, bis der Rest in R das Vorzeichen wechselt, was an der Komplementbildung und am Glockenzeichen zu erkennen ist. Dann wird der Schlitten nach links gerückt. In der nächsten Stellung wird nun so lange addiert, bis wieder das Vorzeichen umschlägt. Auf diese Weise kann durch abwechselnde Addition und Subtraktionen der Quotient leichter ermittelt werden.
Bei etwa auftretenden negativen Zahlen wird die Maschinenrechnung nur mit den Beträgen durchgeführt und das Vorzeichen nachträglich hinzugefügt.

Der Ausführung der Division $a:b$ liegt also folgender Arbeitsplan zu Grunde:

Nr.	Maßnahme	Inhalt der Werke E	R	U
1	Alle Werke löschen Schlitten ganz nach rechts bringen U negativ schalten Automatische Löschung von E abstellen	0	0	0
2	$a \to$ E	a		
	+		a	999 999
	E und U löschen	0		0
3	$b \to$ E	b		
	Dividend und Divisor möglichst weit links und in solcher gegenseitiger Lage eingeben, daß wenigstens eine, aber nicht mehr als 9 Subtraktionen möglich sind.			
4	Divisor so lange von R subtrahieren, bis das Vorzeichen umschlägt.			
5	Schlitten um eine Stelle nach links verschieben			
6	Divisor so lange zu R addieren, bis das Vorzeichen umschlägt			
7	Schlitten um eine Stelle nach links verschieben			
8	Wiederholung mit 4, solange sich der Schlitten noch nicht in der Grundstellung befindet.			
	Ergebnis:	b	Rest	Quotient

Bei halb- und vollautomatischen Maschinen kann sowohl die Übernahme des Dividenden aus dem Einstellwerk in das Resultatwerk (Schritt Nr. 2, sogenannte Divisionsvorbereitung) als auch der eigentliche Divisionsvorgang (Schritt 4 bis 8) durch Tastendruck ausgelöst werden. Dabei besteht leicht die Möglichkeit, daß bei zu kleinem Divisor, insbesondere falls versehentlich $b = 0$ wirksam wird, der Divisionsvorgang kein Ende findet. An diesen Maschinen ist deshalb eine Taste **Divisions-Stopp** vorgesehen, durch die der Divisionsvorgang sofort unterbrochen werden kann. Dem Anfänger ist zu raten, sich über die Lage dieser Taste rechtzeitig zu informieren, um die Maschine bei Fehlbedienung wieder abschalten zu können. Notfalls ist der Netzstecker zu ziehen.

Wird der Divisionsrest wieder in den linken Teil des Resultatwerkes gebracht und die Division fortgesetzt, entstehen weitere Stellen des Quotienten. Auf diese Weise kann die Genauigkeit des Resultates gesteigert werden.

AUFGABEN

249. Der Wert der folgenden Quotienten ist zu berechnen:

a) $64066 : 206$; b) $38911 : (-233)$;

c) $9690138 : 2799$; d) $-395787483 : (-12321)$;

250. a) $39{,}772 : 0{,}326$; b) $-1220{,}951 : 36{,}23$
c) $32{,}83335 : 0{,}04509$; d) $71986{,}9685 : (-53{,}135)$;

251. Man bestimme auf sechs gesicherte Dezimalen
a) $47{,}8827 : 736{,}98$; b) $0{,}0685 : 0{,}008538$
c) $853{,}27 : (-6197{,}3)$; d) $670\,349 : 0{,}670\,346$

252. Man berechne auf drei Stellen nach dem Komma genau (zusätzlich eine Schutzstelle in der Zwischenrechnung):
a) $\dfrac{6{,}837}{4{,}331} - \dfrac{28{,}27}{21{,}04}$; b) $\dfrac{77{,}69 \cdot 8{,}3007}{512{,}3 \cdot 0{,}3418}$
c) $(38{,}578 \cdot 4{,}359 - 122{,}32) : 4{,}557$; d) $(5{,}27 \cdot 0{,}385 - 3{,}55 \cdot 1{,}736) : 0{,}1467$.

253. Die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$11{,}38\,x - 26{,}49\,y = -\ 4{,}53$$
$$18{,}27\,x + 14{,}33\,y = \ \ 39{,}27$$ sind zu bestimmen.

Anleitung: Das Gleichungssystem ist zunächst mit allgemeinen Zahlensymbolen als Koeffizienten formelmäßig aufzulösen. In diese Formeln sind die vorgegebenen Werte einzusetzen. Die Rechnung ist möglichst rationell zu gestalten (Rechenschema).

5.2.8. Berechnung von Quadratwurzeln

Mit einer Tischrechenmaschine ist es in einfacher Weise möglich, auch Quadratwurzeln zu berechnen. Es wird zunächst die Größenordnung der gesuchten Wurzel $x = \sqrt{a}$ mit $a > 0$ bestimmt. Dazu muß der Radikand a, vom Komma ausgehend, in Gruppen zu je zwei Ziffern nach links bzw. nach rechts hin eingeteilt werden, je nachdem, ob besetzte Stellen vor oder führende Nullen nach dem Komma vorhanden sind. Die Anzahl dieser Gruppen entspricht der Anzahl der Stellen vor oder der Nullen nach dem Komma in der gesuchten Wurzel. Aus der ersten oder den ersten beiden Gruppen wird ein Näherungswert x_0 für die Wurzel (im Kopf oder mit dem Rechenstab) bestimmt, der mit der Maschine mehrmals verbessert wird.
Dazu muß zu x_0 eine Korrektur Δx so bestimmt werden, daß

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

eine bessere Näherung für $x = \sqrt{a}$ ist. Dies verlangt

$$x_1^2 = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \approx a \tag{185}$$

Da x_0 bereits eine Näherung für $\sqrt{a}$ darstellt, wird Δx klein gegen x_0 sein, so daß $(\Delta x)^2$ in (185) vernachlässigt werden kann.
Es wird also Δx so bestimmt, daß

$$x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x = a$$

wird. Daraus entsteht wegen $x_0 \neq 0$

$$x_0 + 2\Delta x = \frac{a}{x_0}$$

oder, nachdem auf beiden Seiten x_0 addiert wurde,

$$2x_0 + 2\Delta x = 2(x_0 + \Delta x) = 2x_1 = \frac{a}{x_0} + x_0$$

also

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)} \tag{186}$$

eine Formel, die die grobe Näherung x_0 wesentlich zu verbessern gestattet.

BEISPIEL

1. **Es ist $x = \sqrt{2}$ durch einen Iterationsschritt nach (186) zu bestimmen.**

Lösung: Als Näherung dient $x_0 = 1{,}4$. Dann wird

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1{,}4 + \frac{2}{1{,}4}\right) = \frac{1}{2}(1{,}4 + 1{,}428) \tag{187}$$

$$x_1 = 1{,}414.$$

Auf der Maschine ist lediglich die Division $a : x_0 = 2 : 1{,}4$ durchzuführen.

Die neue Näherung x_1 als Mittelwert der alten Näherung x_0 und dem Quotienten $a:x_0$ besteht zunächst aus den Stellen, die in den beiden Zahlen gemeinsam vorhanden sind [in (187) fett gedruckt]. Dazu kommt die halbe Summe der beiden Reste, die leicht und ohne Rechenmaschine bestimmt werden kann.
Der Wert x_1 wird in gleicher Weise weiter verbessert. Denn, ausgehend von (186), gilt allgemein

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{188}$$

BEISPIEL

2. **Die Lösung von Beispiel 1 ist weiter zu verbessern.**

Lösung: Mit (188) wird $\sqrt{2}$ genauer bestimmt und die gesamte Rechnung nochmals zusammengestellt:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1{,}4 & a : x_0 = 1{,}42857 \\ x_1 = 1{,}414 & a : x_1 = 1{,}41442 \\ x_2 = 1{,}41421 & a : x_2 = 1{,}41421 \end{array}$$

Bei jedem Iterationsschritt verdoppelt sich etwa die Anzahl der endgültig errechneten Stellen. Nur diese werden zur Korrektur herangezogen. Das Verfahren wird beendet, wenn im Rahmen der Kapazität der Maschine keine Verbesserung mehr möglich ist. Dies tritt nach zwei, spätestens nach drei Schritten ein, da das Verfahren sehr rasch konvergiert, wenn ein einigermaßen günstiger Ausgangswert x_0 vorliegt.
Solange es die Kapazität der Maschine zuläßt, wird nach der Formel (188) gerechnet.

Bei Anwendung der Beziehung

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2\,x_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{189}$$

die sich aus (188) durch beiderseitige Subtraktion von x_n ergibt, läßt sich eine weitere Korrektur ermitteln, die die Stellenzahl der Wurzeln nochmals verdoppelt.

BEISPIEL

3. Ausgehend von dem obigen Resultat im 2. Beispiel wird

$$\Delta x = \frac{2 - x_2^2}{2x_2} = \frac{2 - 1{,}41421^2}{2 \cdot 1{,}41421} = \frac{2 - 1{,}9999899241}{2{,}82842} =$$

$$= \frac{0{,}0000100759}{2{,}82842} = 0{,}00000356237$$

also ist $\sqrt{2} = 1{,}4142135624$.

Zur Übung und schematischen Zusammenstellung der Rechnung werden noch zwei weitere Quadratwurzeln errechnet.

BEISPIELE

4. Man bestimme $x = \sqrt{767}$ auf 10 gültige Dezimalen.

Lösung: Es existieren zwei Zifferngruppen vor dem Komma, also besitzt die Wurzel zwei Stellen vor dem Komma, sie hat die Gestalt

$$x = \bullet\,\bullet, \ldots$$

Als erste Näherung dient $x_0 = 28$.

Lösungsschema:

n	x_n	$a : x_n$
0	28	27,3928
1	27,69	27,6995
2	27,6947	27,6948

Nachverbesserung nach (189):

$$\Delta x = \frac{767 - x_2^2}{2x_2} = \frac{767 - 766{,}99640809}{55{,}3894} = \frac{0{,}00359191}{55{,}3894} = 0{,}0000648483$$

also $\underline{\underline{x = \sqrt{767} = 27{,}694764 85\,.}}$

5. Man bestimme $x = \sqrt{0{,}0000783}$ auf 10 Stellen genau.

Lösung: Es existieren zwei Zifferngruppen mit Nullen nach dem Komma, also hat die Wurzel zunächst zwei Nullen nach dem Komma, sie hat demnach die Gestalt $x = 0{,}0\,0 \ldots$ Der Rechenstab liefert als erste Näherung $x_0 = 0{,}0088$.

Lösungsschema:

n	x_n	$a : x_n$
0	0,0088	0,00889772
1	0,008849	0,00884845
2	0,00884872	0,00884873

Nachverbesserung:

$$\Delta x = \frac{0{,}0000783 - 0{,}0000782998456384}{0{,}01769744} = \frac{0{,}0000000001543616}{0{,}01769744} =$$

$$= 0{,}0000000087222$$

also $$\underline{\underline{x = \sqrt{0{,}0000783} = 0{,}008848728722\,.}}$$

AUFGABEN

254. Man berechne auf 10 (bedeutsame) Stellen

a) $\sqrt{6852}$ b) $\sqrt{0{,}000818}$

255. Es ist die Länge der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seiten $a = 36{,}28$ cm und $b = 58{,}19$ cm mit der gleichen (absoluten) Genauigkeit wie die der vorgegebenen Größen zu bestimmen (eine Schutzstelle während der Rechnung).

256. a) Die Länge (der Betrag) des Vektors

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 4{,}82 \\ 12{,}98 \\ -6{,}27 \end{pmatrix}$$

ist zu berechnen.

b) Welche Komponenten hat der zugehörige Einheitsvektor?

257. Zur Berechnung einer Kubikwurzel wird zu einer Näherung x_0 durch Addition von

$$\Delta x = \frac{a - x_0^3}{3x_0^2} \tag{190}$$

eine wesentlich verbesserte Näherung ermittelt.

a) Die Formel (190) ist, ausgehend von $(x_0 + \Delta x)^3 = a$, zu beweisen.

b) Es ist $\sqrt[3]{2}$ auf 10 verbürgte Ziffern zu bestimmen.

5.3. Programmgesteuerte Rechenautomaten

5.3.1. Problemstellung

Die früher in zahlreichen Wirtschaftszweigen vorherrschende schwere körperliche Arbeit (Bergbau, Transport, Bauwesen u. a.) ist in zunehmendem Maße durch technische Hilfsmittel erleichtert worden. Es ist ein wichtiges Merkmal der Technik, daß physisch schwere Arbeiten durch Maschinen erledigt bzw. erst möglich werden. Auf dieses Ziel waren in der Hauptsache die technischen Bestrebungen der vergangenen Jahrhunderte ausgerichtet. Demgegenüber gewinnt in jüngster Zeit ein anderes, nicht minder wichtiges Merkmal der Technik steigende Bedeutung, nämlich die Möglichkeit, monotone, sich mit gewisser Regelmäßigkeit wiederholende Arbeitsgänge durch technische Einrichtungen erledigen zu lassen. Man denke etwa an solche Arbeiten in Fließbändern, die im Einzelfall keine großen Kräfte verlangen, jedoch durch ihre gleichmäßige Wiederholung bald mehr zu einer geistigen Anstrengung werden. Hier helfen Automaten oder gar Taktstraßen. Auch für Vorgänge wie das Abzählen, Numerieren, Beschriften oder Registrieren von gleichen oder ähnlichen Gegenständen oder Vorgängen, die in großen Stückzahlen vorkommen, sind Maschinen möglich. Es handelt sich hier um geistige Arbeit, die mechanisiert und automatisiert wird. Dem gleichen Zweck dient auch der Einsatz von Buchhaltungsmaschinen oder Meß-, Steuer-, Regel- und Kontrolleinrichtungen. So stellt die Durchführung von Zahlenrechnungen, besonders wenn ein Problem sehr oft in ähnlicher Weise, nur mit abgeänderten Zahlenwerten oder mit großer Genauigkeit, erledigt werden muß, monotone geistige Arbeit dar. Auch hierfür werden schon seit einigen Jahrzehnten Maschinen und neuerdings komplette Automaten, sogenannte Rechenautomaten, eingesetzt. Diese liefern die Ergebnisse in der Regel schneller, präziser und häufig sogar billiger, als es mit den herkömmlichen Rechenhilfsmitteln (Rechenstab, Tischrechenmaschine, Nomogramm, Tabelle usw.) auch in gut organisierten Rechenbüros möglich ist. Oft kann jedoch kein Vergleich darüber angestellt werden, da die Lösung komplizierter Probleme überhaupt erst durch Rechenautomaten möglich wurde. Sie sind speziell dafür eingerichtet, numerische Berechnungen auszuführen, aber auch vorgeschriebene Entscheidungen zu erledigen und Informationen zu speichern. Ein Rechenautomat ist wie jede andere automatische Einrichtung so konstruiert, daß alle vorgesehenen Operationen, für die er gebaut und eingestellt wurde, mit hoher Geschwindigkeit und großer Sorgfalt, gepaart mit zahlreichen Kontrollen, ausgeführt werden. Unterläuft bei dem Bau oder der Bedienung ein Fehler, werden also falsche Anweisungen erteilt, so werden sie mit der gleichen Präzision, natürlich falsch, erledigt. Ein solcher Automat verhält sich wie ein gewissenhafter Sklave, der jeden Auftrag mit größter Sorgfalt erledigt, jedoch nie nach dessen Sinn und Nutzen fragt. Ein Automat besitzt keine Phantasie, kann also keine eigenschöpferische, geistige Arbeit leisten oder keine grundsätzlich neuen Ideen hervorbringen. Er bleibt ohne den bedienenden Menschen eine leblose Maschine. Deshalb sollte man Bezeichnungen wie *Elektronengehirn* oder gar *Denkmaschine*, wie man sie immer wieder findet, vermeiden. Sie wecken falsche Vorstellungen. Ein

Rechenautomat ist letzten Endes nur ein hochkompliziertes Werkzeug in den Händen von Menschen, die es in den materiellen oder geistigen Produktionsprozessen einsetzen.

5.3.2. Analog- und Digitalrechenautomaten

Man unterscheidet zwei grundlegende Typen von Rechenautomaten: Analog- und Digitalrechenautomaten.

Analogrechenautomaten

Hier werden die in einem mathematischen oder technischen Problem vorkommenden Größen durch geeignete physikalische Größen ersetzt, die den gleichen Gesetzmäßigkeiten genügen. Das mathematische Problem wird durch ein leichter zu beherrschendes, analoges physikalisches Problem gelöst.

Als Beispiel möge der Rechenstab betrachtet werden. Multiplikation und Division werden auf das Aneinanderfügen von Strecken zurückgeführt. Den arithmetischen Operationen mit Zahlen entsprechen analoge Operationen mit geeigneten physikalischen Größen, hier Längen. Eine Steigerung der Rechengenauigkeit verlangt im allgemeinen größere Sorgfalt bei der Herstellung des Rechenstabes. Die Fertigungstoleranzen[1]) bestimmen also wesentlich die Genauigkeit und setzen einer Steigerung bald eine Grenze.
Moderne Analogrechenautomaten verwenden im allgemeinen die *elektrische Spannung als analoge Vergleichsgröße*. Die verschiedenen, als Rechengrößen auftretenden Spannungen werden durch elektronische Bausteine entsprechend dem vorliegenden Problem verknüpft. Auch hier verlangt eine größere Genauigkeit enger tolerierte Bauelemente und größere Sorgfalt bei der Herstellung des Rechenautomaten, erhöht jedoch nicht dessen Umfang. Analogrechenautomaten werden für *spezielle Probleme* eingesetzt und ermöglichen dort ohne große Vorbereitungen und mit relativ geringem Aufwand einen Überblick über die Lösungsmöglichkeiten, da die eingehenden Parameter leicht abgeändert und so verschiedene Variationen untersucht werden können. Hierin und in den geringen Anschaffungskosten liegt ihr Vorteil gegenüber den Ziffernrechenautomaten.

Digitalrechenautomaten

Das Wort **digital** bedeutet soviel wie „mit Ziffern arbeitend“.

Ein **Digital**- oder **Ziffern-Rechenautomat** verwendet also auch intern die **ziffernmäßige Darstellung** von Zahlen.

Dies geschieht durch technische Bauelemente, die durch genau voneinander abgegrenzte Zustände oder Einstellungen den Wert einer Ziffer darstellen können. Durch Wiederholung und Koppelung dieser Bauelemente werden alle Ziffern einer

[1]) tolerantia (lat.) Duldung, hier technisch zulässige Abweichungen vom vorgeschriebenen Maße

Zahl und die Rechenoperationen realisiert. Die Möglichkeit zur Verwirklichung digitaler Rechengeräte bieten *Zahnräder oder Zahnstangen mit wohldefinierten Raststellungen*, die jeweils einer bestimmten Ziffer entsprechen. Zahnräder und Zahnstangen sind wesentliche Bestandteile mechanischer Rechenmaschinen. Will man mit ihnen eine höhere Rechengenauigkeit erzielen, muß man die Anzahl der Bauelemente vergrößern, da im allgemeinen für jede vorkommende Stelle wieder die gleichen Typen verwendet werden. Eine Vergrößerung der Rechengenauigkeit verlangt größeren Aufwand, also etwa mehr Zahnräder, ohne daß jedoch deren Fertigungsgüte erhöht werden muß. Dies ist ein grundsätzlicher Vorteil aller Digitalgeräte.
Moderne Digitalrechenautomaten verwenden *elektrische und elektronische Bauelemente*, die bei hoher Funktionssicherheit auch hohe Rechengeschwindigkeiten ermöglichen. Sie besitzen in der Regel *zwei extreme und wohldefinierte Betriebszustände* (Relais angezogen oder abgefallen, Röhre oder Transistor von Strom durchflossen oder gesperrt, zwei mögliche Magnetisierungsrichtungen, Impuls positiv oder negativ usw.), so daß Zahlensysteme mit der *Grundzahl* 2 (Dualzahlen) eine wichtige Rolle spielen. Zur Darstellung vielstelliger Zahlen und anderer umfangreicher Informationen und für deren Verarbeitung ist ein entsprechend hoher Aufwand an Bauelementen notwendig.
Digitalgeräte sind also gegenüber etwa vergleichbaren Analoggeräten wesentlich umfangreicher und aufwendiger und entsprechend teuerer. Jedoch haben sie den Vorteil *universeller Verwendbarkeit*. Während Analoggeräte nur auf wenigen für sie zugeschnittenen Gebieten eingesetzt werden, besitzen Digitalgeräte ein breites Anwendungsfeld auf vielen Gebieten der Wissenschaft, der Technik und der Verwaltung, wobei manche Einsatzmöglichkeit noch zu erschließen ist. Dabei denke man nicht nur an die Möglichkeit zur automatischen Durchführung von Rechenarbeiten. Viel wichtiger sind Probleme jeder Form der Daten- und Informationsverarbeitung.
Der Hauptvorteil der Rechenautomaten wird von Laien oft in ihrer überraschend hohen Arbeitsgeschwindigkeit gesehen. Einzelne Rechenoperationen werden oft nur in Bruchteilen von Milli- und sogar Mikrosekunden ausgeführt. Diese äußerst kurzen Operationszeiten können jedoch nur dann sinnvoll ausgenützt werden, wenn es gelingt, eine sinnvolle Folge von Operationen ohne äußeren Eingriff ablaufen zu lassen. Deshalb ist als wesentlichstes Charakteristikum eines Rechenautomaten die Möglichkeit der automatischen Steuerung eines Rechenprogrammes zu nennen. Das Herstellen von Programmen, das **Programmieren**, wie man kurz sagt, ist die wichtigste Vorbereitungsarbeit zur Durchführung automatischer Rechnungen.

5.3.3. Grundsätzlicher Aufbau von Rechenautomaten

Ein Rechenautomat wirkt in gewisser Weise wie ein automatisiertes Rechenbüro, beide sind im Aufbau miteinander vergleichbar (Bild 109). Ein Rechenbüro kann als eine in sich abgeschlossene Einrichtung aufgefaßt werden, die auch räumlich in einem oder mehreren zusammenliegenden Zimmern untergebracht ist. Den dort beschäftigten Menschen, den **Rechnern**, stehen außer den üblichen Bürohilfsmitteln einmal **Tischrechenmaschinen**, zum anderen spezielle **Formulare und Tabellen** zur Verfügung. Von außen werden an das Rechenbüro zweierlei Arten von Informationen

herangetragen: einmal das durchzurechnende Verfahren als **Rechenvorschrift**, etwa in der Gestalt besonders hergerichteter Rechenformulare, und zum anderen die Zahlenwerte, mit denen die Rechnung begonnen werden soll (**die Eingangswerte**). Dazu ist in irgendeiner Weise eine Verbindung mit der Außenwelt notwendig, die „**Eingang**" genannt werden soll.
Der Rechner veranlaßt die Entgegennahme neuer Eingangsinformationen. Dabei werden die Zahlen teils in die Rechenmaschine, teils in Formulare und Tabellen übernommen. Entsprechend der Rechenvorschrift werden in der zeitlich richtigen Reihenfolge die Rechenoperationen auf der Rechenmaschine ausgelöst, Zwischenresultate an vorgeschriebener Stelle notiert und eventuell in Abhängigkeit von den Ergebnissen

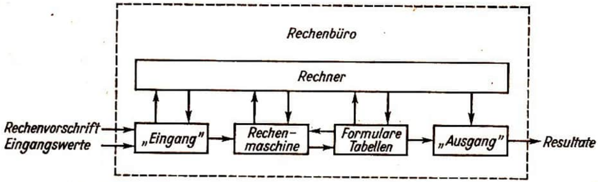


Bild 109. Aufbau eines Rechenbüros

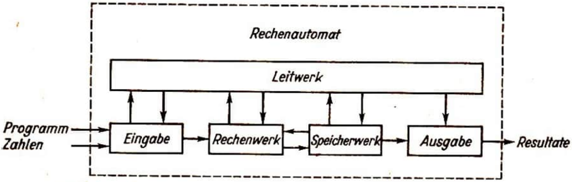


Bild 110. Aufbau eines Rechenautomaten

der weitere Ablauf der Rechnung festgelegt. Entstehen dabei Werte, die vom Auftraggeber verlangt wurden, so werden diese als **Resultate**, entsprechend geordnet und dargestellt, über einen „**Ausgang**" der Außenwelt wieder zugänglich gemacht. Zwischen den einzelnen Teilen eines Rechenbüros besteht ein Informationsfluß, der in Bild 109 durch Pfeile angedeutet wird.
Ein ähnlicher Aufbau kann einem Rechenautomaten zugrunde gelegt werden. Er ist im allgemeinen auch äußerlich eine in sich abgeschlossene Anlage, die, grob gegliedert, die in Bild 110 angegebenen Baugruppen enthält. Das eigentliche **Rechenwerk** nimmt dabei in der Regel nur einen verhältnismäßig kleinen Raum ein. Es erledigt die arithmetischen Grundoperationen. Das **Speicherwerk** stellt eine besondere Baugruppe dar, die sowohl Zahlen (Eingangswerte und Zwischenresultate) als auch das Rechenprogramm für längere Zeit festhalten kann. Das **Leitwerk** steuert das

Zusammenspiel der einzelnen Baugruppen, das im folgenden noch genauer studiert werden muß. Im Gegensatz zum Rechenbüro mit dem nur symbolisch angedeuteten Ein- bzw. Ausgang sind **Eingabe** und **Ausgabe** selbständige und wichtige Teile eines Rechenautomaten. Da in seinem Innern die Informationen verschlüsselt und für die elektronische Verarbeitung besonders angepaßt dargestellt werden, muß die Eingabe die von den Eingabemedien[1]) (Lochband, Lochkarte usw.) kommenden Zahlen und Befehle abgreifen, umformen und auf Grund der unterschiedlichen Arbeitsgeschwindigkeiten zeitlich anpassen. Die entgegengesetzte Aufgabe kommt der Ausgabe zu. Zu ihr gehört oft ein (mechanisches) Druckwerk, das dann entsprechend den vorliegenden Resultaten und in Abhängigkeit von dem verlangten Druckbild angesteuert werden muß. Ein- und Ausgabe werden mit dem gemeinsamen Begriff **periphere Geräte** belegt. Wie die Erfahrungen zeigen, mindert die mangelhafte Ausrüstung eines Rechenautomaten mit peripheren Anlagen beträchtlich dessen Wert.

5.3.4. Mathematische Grundlagen

Wie in 5.3.2. bereits erwähnt, werden die Bauelemente in den elektronischen Rechenanlagen im allgemeinen nur in zwei extremen Betriebszuständen verwendet. Dann ist von vornherein eine hohe technische Sicherheit gewährleistet, da Abweichungen der Betriebsdaten, wie sie durch unterschiedliche Fertigung oder Verschleiß entstehen, in gewissem Umfang ohne Einfluß auf die Betriebsfähigkeit des Automaten sind. Es ist nur notwendig, daß die beiden Betriebszustände sicher voneinander unterschieden werden können. Diese technisch bedingte Zweiwertigkeit verlangt eine besondere Form der Informationsdarstellung. Als Grundlage der Logik wird eine Elementarinformation verwendet, für die es nur zwei Möglichkeiten gibt. Diese wird allgemein **Bit**[2]) genannt. Aus diesen Bits werden alle im Automaten vorkommenden **Zahlen** und Rechenanweisungen, die sogenannten **Befehle**, ganz gleich welcher Gestalt, aufgebaut. Die beiden Möglichkeiten eines Bits werden mit **0** (Null) oder **L** (symbolische Eins zur Unterscheidung von der Ziffer 1) bezeichnet. Im folgenden werden einige Beispiele für zweiwertige Informationen angegeben:

Informationsträger	Möglicher Zustand 0	Möglicher Zustand L
Elementarspeicher	leer, gelöscht	gefüllt, erregt
Lochkarte, Lochstreifen (an vorgegebener Stelle)	ohne Loch	mit Loch
Relais	abgefallen	angezogen
Röhre, Transistor	stromlos	stromführend
Lampe	dunkel	hell
Vorzeichen	positiv	negativ
Ventil	geöffnet	gesperrt
Antwort auf Entscheidungen	Nein	Ja

[1]) medium (lat.) hier im Sinne von „Mittel"

[2]) Abkürzung für binary digit (engl.) zweiwertige Ziffer

Dezimalsystem

Zur Vorbereitung des Folgenden werden einige bekannte Tatsachen über das allen Lesern vertraute Dezimalsystem zusammengestellt.

1. Es existieren zehn Ziffern, die kleinste ist die Null.
2. Alle Zahlen werden durch ein Stellenwertsystem mit Stellenwertfaktoren in der Gestalt von Zehnerpotenzen dargestellt.
3. Die Ziffer 0 charakterisiert eine fehlende Zehnerpotenz.
   So hat die Zahl 73071 den Wert

$$7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

   Alle Ziffern werden je nach der Lage innerhalb der Zahl mit Zehnerpotenzen multipliziert, und die Produkte werden addiert.
4. Die Multiplikation (Division) mit einer Zehnerpotenz bewirkt lediglich eine Links- (Rechts-) Verschiebung der Ziffern.
5. Die Addition (und Subtraktion) von Zahlen wird auf $10 \cdot 10 = 100$ Elementaraufgaben, das sogenannte kleine *Eins-und-Eins*, zurückgeführt. Entsprechend werden für die Multiplikation (und Division) die $10 \cdot 10 = 100$ Aufgaben des kleinen *Einmaleins* benötigt.

Liegt eine Zahl als Bruch $Z:N$ ($Z \in G$, $N \in G$) vor, so können folgende Fälle eintreten:

6. Der Dezimalbruch $Z:N$ bricht ab ($7 : 125 = 0{,}056$).
7. In jedem anderen Fall liefert $Z:N$ einen periodischen Dezimalbruch ($7 : 26 = 0{,}\overline{2692307}\ldots$).

Ferner gilt:

8. Ist eine Zahl nicht in der Gestalt $Z:N$ darstellbar, so entspricht ihr ein nichtperiodischer Dezimalbruch (irrationale Zahl).

Alle unter 1 bis 8 aufgeführten Sätze gelten fast wörtlich auch für jedes andere Zahlensystem mit beliebiger **Grundzahl** $g > 1$, wenn man die 10 durch g und das Wort „Dezimal-" entsprechend ersetzt. Die Wahl der 10 als Grundzahl ist an sich willkürlich, sie hat ihre Ursache in den 10 Fingern der beiden Hände, die zuerst zum Zählen und Rechnen dienten. Dabei stellt die 10 nicht einmal die praktischste Lösung dar (die 12 wäre wegen der günstigen Teilbarkeit in mancher Hinsicht geeigneter gewesen), doch hat sich das Dezimalsystem im täglichen Leben auch international so durchgesetzt, daß für eine Änderung keine Möglichkeit mehr besteht.

Dualsystem

Die Grundzahl ist hier $g = 2$. Jede Dualstelle wird durch ein *Bit* realisiert. Eigenschaften des Dualsystems:

1. Es existieren zwei Ziffern, nämlich 0 und L.
2. Alle Zahlen werden durch eine Summe geeigneter Potenzen von 2 dargestellt.
3. Die Ziffer 0 charakterisiert eine fehlende, die Ziffer L eine vorhandene Potenz von 2 des betreffenden Exponenten.

BEISPIELE

1. $105 = 64 + 32 + 8 + 1 =$
$= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$=$ LL0 L00L

2. $73071 = 2^{16} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$
$=$ L 000L LL0L 0LL0 LLLL.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die duale gegenüber der dezimalen Darstellung etwa die dreifache Anzahl von Ziffern verlangt. Das Schriftbild wäre für den täglichen Gebrauch unbequem und unhandlich. Der Vorteil des Dualsystems kommt durch die einfachen Möglichkeiten zur technischen Verwirklichung der Speicher- und Rechenvorgänge im Automaten zum Ausdruck. Obwohl der Benutzer in der Regel die interne duale Darstellung nicht benötigt, ist es vorteilhaft, zum Verständnis der Wirkungsweise eines Automaten sich eine Vorstellung vom dualen Zählen und Rechnen zu verschaffen (ausführliche Behandlung beider Systeme in [1]). Tabelle 85 gibt zum

Tabelle 85

dezimal	dual	dezimal	dual
0	0000	16	L 0000
1	000L	17	L 000L
2	00L0	18	L 00L0
3	00LL	19	L 00LL
4	0L00	20	L 0L00
5	0L0L	21	L 0L0L
6	0LL0	22	L 0LL0
7	0LLL	23	L 0LLL
8	L000	24	L L000
9	L00L	25	L L00L
10	L0L0	26	L L0L0
11	L0LL	27	L L0LL
12	LL00	28	L LL00
13	LL0L	29	L LL0L
14	LLL0	30	L LLL0
15	LLLL	31	L LLLL

Vergleich die Zahlen von 0 bis 31 in dezimaler und dualer Form. Die Dualziffern werden beim Schreiben, von rechts (beim Komma) beginnend, in Gruppen zu je vier Bits, zu sogenannten **Tetraden**[1]), zusammengefaßt. Bei längeren Dualzahlen schreibt man oft an Stelle der Tetraden sofort die dezimalen Werte. Es werden also die Zahlen von 0 bis 15 als Ziffern eines Zahlensystems mit der Grundzahl $g = 16$ (**Sechzehnersystem** oder **Hexadezimalsystem**) aufgefaßt.

[1]) tetra (griech.) vier

BEISPIEL

3. 73071 = L 000L LL0L 0LL0 LLLL =
= 1 1 13 6 15 oder 1.1.13.6.15

4. Die Multiplikation (Division) mit einer Potenz von 2 bewirkt lediglich eine Links- (Rechts-) Verschiebung der Ziffern.

BEISPIELE

4. LL0L · L0 = L L0L0 (13 · 2 = 26)
5. L L00L · L 0000 = L L00L 0000 (25 · 16 = 400)
6. L 00L0 0LL0 : L0 = L00L 00LL (294 : 2 = 147)
7. L 0LL0 0000 : L000 = L0 LL00 (352 : 8 = 44)

5. Die Addition (und Subtraktion) von Dualzahlen wird auf nur $2 \cdot 2 = 4$ Elementaraufgaben des kleinen *Eins-und-Eins* zurückgeführt. Diese sind

$$0 + 0 = 0; \quad 0 + \mathrm{L} = \mathrm{L};$$
$$\mathrm{L} + 0 = \mathrm{L}; \quad \mathrm{L} + \mathrm{L} = \mathrm{L0}.$$

Nur bei der letzten entsteht ein **Übertrag** in die nächste Stelle. Zur Erläuterung der Addition wird in allen beteiligten Zahlen jeweils die gleiche Stelle betrachtet. In den beiden Summanden mögen dort die Ziffern a und b stehen. Weiterhin kann noch ein Übertrag $Ü$ aus der vorhergehenden Stelle auftreten. Die Größen a, b und $Ü$ gelten als duale Eingangswerte für die Berechnung der entsprechenden Resultatziffer. a, b und $Ü$ sind dabei gleichberechtigt. Es müssen also nur vier Fälle unterschieden werden, die in Tabelle 86 dargestellt sind. Darin bedeutet: $Ü_1$ den erneuten Übertrag in die nächste Stelle und S die Ziffer, die im Resultat in der betreffenden Stelle erscheint.

Tabelle 86

Eingangswerte			$Ü_1$	S
0	0	0	0	0
0	0	L	0	L
0	L	L	L	0
L	L	L	L	L

BEISPIEL

8. 45 = L0 LL0L
249 = LLLL L00L
L LLLL 00L Überträge

294 = L 00L0 0LL0

Auch das kleine **Einmaleins** besteht nur aus $2 \cdot 2 = 4$ einfachsten Aufgaben:

$$0 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot \mathrm{L} = 0;$$
$$\mathrm{L} \cdot 0 = 0; \quad \mathrm{L} \cdot \mathrm{L} = \mathrm{L}.$$

Die praktische Multiplikation zweier Dualzahlen reduziert sich damit auf bloße Verschiebungen und Additionen.

BEISPIEL

9. LL0L · LL0L0 (= 13 · 26)

```
LL0L
 LL0L
  0000
   LL0L
    0000
L0L0L00L0  (= 338)
```

Ähnlich einfach verlaufen die inversen Rechenoperationen Subtraktion und Division.

6. Der Dualbruch $Z:N$ bricht ab, falls N eine Potenz von 2 ist.

BEISPIELE

10. 45 : 8 = 5,625 = L0L, L0L
11. 3 : 64 = 0,046875 = 0, 0000 LL

7. Trifft 6. nicht zu, so liefert $Z:N$ einen periodischen Dualbruch:

BEISPIELE

12. 1 : 3 = 0,333 ... = 0,0L0L L0L0 L0L0 ...
13. 1 : 10 = 0,1 = 0,000L L00L L00L ...

Man erkennt, daß abbrechenden Dezimalbrüchen nicht unbedingt endliche Dualbrüche entsprechen müssen. Diese Feststellung ist wichtig, da ein großer Teil der Eingabewerte Dezimalzahlen mit begrenzter Stellenzahl sind. Diese erscheinen dann in einem Automaten mit volldualer Darstellung in der Regel als periodische Dualbrüche, die nicht vollständig angegeben werden können. Als Folge der unvermeidlichen Abbrech- oder Rundungsfehler werden die Zahlen nicht exakt dargestellt.

8. Eine Zahl, die kein Bruch ganzer Zahlen ist, liefert einen nichtperiodischen Dualbruch (π = LL, 00L0 0L00 00LL LLLL ...).

Zahlreiche Rechenautomaten verwenden die Zahlen in der dualen Darstellung. Sie ermöglicht es, relativ einfach aufgebaute Rechenwerke einzusetzen, die entsprechend wenig Material und Kosten erfordern.

Die Umrechnung der Zahlen aus dem Dezimal- in das Dualsystem heißt **Konvertierung**[1]), der umgekehrte Vorgang **Rückkonvertierung**. Beides sind Operationen, die in jedem dual rechnenden Automaten neben den Grundrechenarten zur Verfügung stehen. Eine Umrechnung von Hand ist nicht notwendig und bei der großen Anzahl der zu verarbeitenden Zahlen auch nicht sinnvoll.

Moderne Automaten rechnen im Dezimalsystem. Dazu werden die Zahlen nur ziffernweise dual verschlüsselt. Die einfachste Möglichkeit dafür besteht darin, für jede Dezimalziffer die zugehörige Tetrade anzugeben (direkte Verschlüsselung). Dann wäre

73071 = 0LLL 00LL 0000 0LLL 000L.

[1]) convertere (lat.) verwandeln

Jeder Dezimalziffer werden also grundsätzlich vier Bits zugeordnet. Von den insgesamt möglichen 16 Tetraden[1]) werden allerdings nur 10 genutzt, die sechs restlichen (die sogenannten Pseudotetraden) dürfen nie auftreten. Tritt dies trotzdem ein, liegt ein technischer Fehler vor, der durch laufende automatische Kontrolle entdeckt werden kann. Dezimal rechnende Automaten besitzen damit eine erhöhte technische Sicherheit, sie bedürfen keiner Konvertierungs- und Rückkonvertierungsoperationen und entsprechen in ihrer Arbeitsweise mehr den im täglichen Leben üblichen dezimalen Rechnungen. Diesen Vorteilen steht im Vergleich zu dual rechnenden Automaten ein höherer Aufwand gegenüber, da dezimale Rechenwerke wesentlich komplizierter als duale sind.

Feste und variable Wortlänge

Ein großer Teil der Rechenautomatentypen ist bezüglich der Speicher so eingerichtet, daß für jeweils eine Zahl ein **Speicherplatz** (**Speicherzelle**, kurz **Zelle** genannt) vorgesehen ist. Jede Zahl hat die *gleiche Länge*, d. h. die gleiche, einheitlich für den ganzen Automaten festgelegte Anzahl von Bits. Eine Zelle kann weiterhin je einen, bei manchen Automaten auch jeweils zwei oder drei Befehle (eine Befehlsgruppe) aufnehmen. Da eine Zelle wahlweise eine Zahl oder eine Befehlsgruppe enthalten kann, werden beide Begriffe in mancher Hinsicht gleichwertig behandelt. Es ist deshalb für sie der gemeinsame Oberbegriff **Wort** geprägt worden. Automaten der oben geschilderten Art besitzen **feste Wortlänge**. Dabei trägt jede Zelle eine sie kennzeichnende Nummer, ihre **Adresse**. Man sagt, der Speicher ist **wortweise adressiert**. Bei Automaten mit fester Wortlänge sind auch die Rechenwerke auf diese Länge eingerichtet, alle Rechenoperationen werden mit der vollen Stellenzahl durchgeführt, unabhängig davon, ob die Zahlen das ganze Wort belegen oder nicht. Entsprechend ist auch die Dauer der Operationen von der Anzahl der besetzten Stellen unabhängig. Die mögliche Genauigkeit wird durch die Wortlänge beschränkt. Bei der Auslegung eines Automaten mit fester Wortlänge ist man zu einem Kompromiß gezwungen. Ein zu kurzes Wort beschränkt die Genauigkeit, ein zu langes erhöht die Rechenzeiten, ferner wird der Speicherraum nicht optimal genutzt.

Die angeführten Schwierigkeiten umgeht man durch eine andere Organisation des Speichers, die allerdings nur bei der Verwendung von (ziffernweise dual verschlüsselten) Dezimalzahlen sinnvoll ist. Es wird in jeder Speicherzelle jeweils nur eine Ziffer (Zeichen) aufbewahrt, der Speicher ist **ziffernweise** (zeichenweise) **adressiert**. Die Zahlen werden durch die Adresse ihrer ersten Ziffer zu den Rechenoperationen aufgerufen. Das Ende der Zahlen und die Lage des Kommas werden durch besondere Bits gekennzeichnet. Automaten dieser Art arbeiten mit **variabler Wortlänge**. Von besonderem Vorteil ist dabei die völlig freie Wahl in der Aufteilung des gesamten Speicherraumes.

Festes und gleitendes Komma

Für die Darstellung von Zahlen in Rechenautomaten ist es wichtig, eine Angabe für deren Größenordnung, oder, was auf das gleiche hinauskommt, für die Lage des Kommas zu haben. Bei fester Wortlänge kann eine grundsätzliche Vereinbarung

[1]) siehe Tabelle 85, linke Seite

derart getroffen werden, daß einheitlich für alle Worte des Automaten eine feste Stelle das Komma trägt. Möglichkeiten sind (Bild 111):

1. Komma am Anfang des Wortes, alle Zahlen sind betragsmäßig kleiner als 1.
2. Komma am Ende des Wortes, es treten nur ganze Zahlen auf.
3. Komma an fester Stelle im Innern des Wortes, die Zahlen können einen ganzen und einen gebrochenen Anteil besitzen.

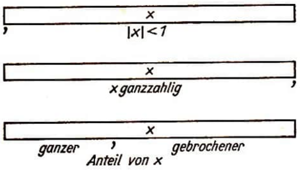


Bild 111. Zahldarstellungen im festen Komma

Alle drei Arten werden mit dem Stichwort **Zahldarstellung im festen Komma** belegt. Diese ermöglicht, das Rechenwerk des Automaten relativ einfach zu gestalten. Auf der anderen Seite sind jedoch die Möglichkeiten zur Darstellung von Zahlen beschränkt. Um möglichst viele gültige Ziffern zu verwerten, müssen auch die links gelegenen Stellen genutzt werden. Oder mit anderen Worten: An der Spitze der Zahl dürfen nicht zu viele führende Nullen stehen. Es ist jedoch darauf zu achten, daß keine Zahlen, auch keines der zahlreichen Zwischenresultate, den zulässigen Bereich überschreiten. Sonst entsteht ein **Überlauf**, der angezeigt wird und gewöhnlich den Automaten anhält, da die nachfolgende Rechnung sinnlos werden kann. Beim Rechnen im *festen Komma* muß man im voraus die Größenordnung der vielen Zwischenergebnisse übersehen und eventuell durch Multiplikation mit geeigneten Maßstabsfaktoren dafür sorgen, daß die bedeutsamen Ziffern den Bereich weder nach links noch nach rechts verlassen. Im ersten Fall entsteht Überlaufstopp, im zweiten verringert sich die relative Genauigkeit. Da ein Wort nur eine begrenzte Stellenzahl hat (etwa 10 bis 100 Bits), sind auch die zulässigen Größenordnungen von Zahlen sehr beschränkt.

Die angeführte Schwierigkeit wird umgangen, indem auch innerhalb des Automaten die in 5.1.3. erläuterte **halblogarithmische Darstellung** von Zahlen benutzt wird. In Rechenautomaten wird dabei oft $g = 2$ als Grundzahl gewählt. Dann muß verlangt werden, daß die Mantisse m einer Normierungsforderung

$$0{,}5 \leqq |m| < 1$$

genügt. Die Größenordnung der Zahl wird durch den Exponenten angegeben.

BEISPIELE

14. $z_1 = -1000 \quad = -0{,}1 \quad \cdot 10^4 \;= -0{,}\mathrm{LLLL\,L0L} \cdot 2^{10}$

15. $z_2 = \quad 0{,}0625 = \quad 0{,}625 \cdot 10^{-1} = \quad 0{,}\mathrm{L} \cdot 2^{-3}.$

Zur Darstellung von Zahlen in halblogarithmischer Darstellung wird das Wort in zwei im allgemeinen fest begrenzte Abschnitte eingeteilt, in denen Mantisse und Exponent getrennt gespeichert werden. Dabei ist es notwendig und sinnvoll, beide mit

Vorzeichen zu versehen. Bild 112 zeigt die Zahlen des obigen Beispieles in der internen Darstellung. Eine solche Wiedergabe von Zahlen wird auch als **Gleitkommadarstellung** bezeichnet. Die Verwendung von Zahlen im *gleitenden Komma* ermöglicht einen sehr weiten Bereich der zulässigen Größenordnungen. Der Programmierer braucht im allgemeinen keine gesonderten Überlegungen mehr zur Vermeidung von Bereichsüberschreitungen anzustellen.

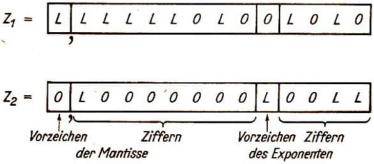


Bild 112. Zahldarstellungen im beweglichen Komma

Die Rechenwerke für Gleitkommazahlen sind verständlicherweise komplizierter, in der Regel existiert je eines zur getrennten Verarbeitung von Mantisse und Exponent. Auch Konvertierung und Rückkonvertierung im gleitenden Komma erfordern erheblich größeren Aufwand.

5.3.5. Aufbereitung von Problemen

Ein wissenschaftliches, technisches, ökonomisches oder anderes Problem, das mit Rechenautomaten bearbeitet werden soll, ist erst sorgfältig aufzubereiten, ehe die maschinelle Bearbeitung möglich ist. Diese Arbeit kann oft so umfangreich sein, daß sich bei der Bearbeitung von Einzelfällen der Einsatz eines Automaten nicht mehr lohnt. Der Vorteil der Rechentechnik wird gerade dann besonders wirksam, wenn Rechenarbeiten vorliegen, die sich in ihrem Grundaufbau immer wiederholen und sich nur in dem zu verarbeitenden Zahlenmaterial unterscheiden, denn dann sind die Vorbereitungsarbeiten nur einmal durchzuführen. Diese bestehen etwa in folgenden Schritten:

1. **Problemstellung:** Es ist ratsam, den Sachverhalt der Aufgabenstellung zu fixieren, Abgrenzungen zu treffen und Teilziele festzulegen. Eine klare und einwandfreie Festlegung eines zu bearbeitenden technischen, ökonomischen oder organisatorischen Problems bereitet oft mehr Schwierigkeiten als die eigentliche Programmierung.
2. **Mathematische Formulierungen:** Durch Abstraktion und Idealisierung ist es möglich, den Sachverhalt der Aufgabenstellung in mathematischer Symbolik darzustellen (Aufstellung eines mathematischen **Modells**[1]) des jeweiligen Problems). Im allgemeinen sind das Gleichungen oder Ungleichungen, Differentialgleichungen oder Berechnungsvorschriften, ferner insbesondere bei organisatorischen Problemen

---

[1]) vgl. dazu auch 3.1.2.

auch Ketten von Fallunterscheidungen, Listen o. ä. Ferner sind Randbedingungen, Sonderfälle und Genauigkeitsforderungen festzulegen.

3. **Auswahl des numerischen Lösungsverfahrens:** Da einerseits zahlreiche mathematische Aufgabenstellungen keine direkten formelmäßigen und exakten Lösungen besitzen (man denke etwa an das umfangreiche Gebiet der Differentialgleichungen) und weil andererseits die Anwendung von Rechenautomaten die Auflösung des Rechenprozesses in arithmetische Grundoperationen und gewisse logische Entscheidungen verlangt und die Anzahl der Stellen und damit die Genauigkeit der Zahl begrenzt ist, sind besondere Rechenverfahren auszuwählen. Dies ist die Aufgabe der numerischen oder praktischen Mathematik, die mit dem Aufkommen der Rechenautomaten verständlicherweise stark an Bedeutung gewonnen hat. Die Verfahren sind so auszuwählen, daß bei erträglichem Rechenaufwand die durch den Rechenprozeß unvermeidlichen Genauigkeitsverluste ein festzulegendes Maß nicht überschreiten.

4. **Schematisierung des Rechenablaufes:** Der zeitliche Ablauf und die mögliche Verflechtung einschließlich aller Wiederholungen des Rechenprozesses ist möglichst anschaulich und wirksam darzustellen. Methoden und Beispiele dazu werden in den nächsten Abschnitten ausführlicher behandelt. Eine klare Planung des Rechenablaufs stellt die wesentlichste Vorbereitung für die eigentliche Programmierung dar.

5. **Programmierung:** Darunter wird die Herstellung des Maschinenprogrammes einschließlich der Eingabeanweisungen verstanden. Der gesamte Rechenprozeß besteht aus einzelnen Rechenoperationen, die dem Automaten Schritt für Schritt vorgeschrieben werden müssen. Diese Einzelanweisungen nennt man allgemein Befehle, ihre Gesamtheit in der richtigen, dem Problem angepaßten Reihenfolge das **Programm.** Es ist die Arbeitsvorschrift, nach der die gesamte Rechnung und die dazugehörige Organisation abläuft. Letztere kann einen beträchtlichen Teil der Gesamtarbeit des Automaten darstellen. So werden solche Operationen wie das Bereitstellen neuer Operanden, das Abspeichern der Resultate, die Durchführung von Entscheidungen, das Abändern von Befehlen, das Suchen in Listen usw. durch organisatorische Befehle ausgelöst, denen die eigentlichen arithmetischen Operationen gegenübergestellt werden müssen. Auf Einzelheiten der Programmierung wird später eingegangen werden.

6. **Programmerprobung:** Das fertiggestellte Programm ist praktisch nie fehlerfrei. Es ist an Hand von Testbeispielen unter Umständen stückweise zu erproben. Erst ein vollständig, auch hinsichtlich möglicher Varianten geprüftes Programm kann für Nutzrechnungen freigegeben werden.

7. **Durchführung der Rechnung:** Als letztes folgt schließlich die eigentliche Berechnung des geforderten Problems und die anschließende Auslieferung der Resultate. Man versieht die Beschreibung der Programme mit sogenannten Regieanweisungen, die die Wiederholung einer Rechnung mit erprobtem Programm auch nach längerer Zeit ohne das Studium seiner Einzelheiten ermöglicht. Die Regieanweisungen liefern Einzelheiten über die Eingabe und die Bedienung eines Programms und des Automaten; sie geben Auskunft über die Bedeutung der angegebenen Werte.

Die Schritte 1 bis 4 sind auch dann notwendig, wenn kein Rechenautomat zur Verfügung steht, das Problem also mit anderen, einfacheren Hilfsmitteln gelöst werden muß. Die Aufstellung eines Rechenablaufplanes (Schritt 4) ist auf alle Fälle noch weitestgehend unabhängig vom Typ des Automaten, während die Schritte 5 bis 7 automatgebunden sind. Bei der Aufstellung des Rechenprogrammes müssen die zur Verfügung stehende Speicherkapazität, die zu erwartende Rechenzeit, die Genauigkeit der Rechnung und die entstehenden Kosten aufeinander abgestimmt werden. Damit bestimmen wesentliche Maschineneigenschaften letzten Endes auch die möglichen Problemstellungen und die zu wählenden Lösungsverfahren. Durchgreifende Kontrollen sind mit einzuplanen, die möglichst sowohl technische als auch durch das Verfahren bedingte Fehler erfassen und anzeigen, soweit das nicht automatisch erfolgt. Die Verantwortung für nicht oder zu spät erkannte Fehler kann im Prinzip nicht dem Automatenhersteller oder dem Wartungspersonal zur Last gelegt werden.

5.3.6. Flußbildtechnik

Flußbilder oder **Flußdiagramme** schematisieren in übersichtlicher Weise den Ablauf einer Rechnung und werden deshalb vielfach angewendet. Besonders dem Lernenden geben sie einen raschen und einprägsamen Überblick über die Verflechtung und Zuordnung einzelner Teile des Programmes. Grundlage bildet ein neuer Typ von Gleichungen, die sogenannten Rechenplangleichungen (allgemein kurz **Plangleichungen** genannt). Hier wird dem Gleichheitszeichen zur Andeutung des Berechnungsvorganges eine Richtung erteilt. Das neue Zeichen wird zur Unterscheidung jetzt **Ergibtzeichen** genannt. Zur Kenntlichmachung wird ein Doppelpunkt vorgesetzt. Die Iterationsformel zur Berechnung von $\sqrt{a}$ [vgl. (188) auf Seite 464] lautete

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \tag{188}$$

wobei x_n ein Näherungswert für $\sqrt{a}$ ist. Als Plangleichung setzt man (188) in der Gestalt an

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Diese Plangleichung sagt jetzt aus, daß sich x_{n+1} durch zahlenmäßige Ausrechnung des auf der rechten Seite stehenden Terms ergibt. Die durch das Ergibtzeichen $:=$ ausgedrückte Beziehung ist nicht symmetrisch. Die linke Seite ergibt sich stets aus der rechten. Eine Umkehrung ist nicht möglich.
Das Ergibtzeichen kann in zweierlei Hinsichten, die jedoch auf das gleiche hinauslaufen, aufgefaßt und auch entsprechend gelesen werden.

BEISPIELE

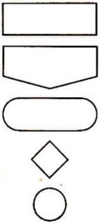
1. $x_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{x}{a_n}\right)$
2. $S := \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

3. $k := k + 1$
4. $S := S + a_{ik} x_k$
5. $m := 1$
6. $\alpha_0 := \frac{1}{4} \pi$.

1. Lesart: ... **ergibt sich aus** ...
   Für die rechts stehenden Zahlensymbole werden die Zahlenwerte eingesetzt; der gesamte Term wird ausgerechnet. Das Ergebnis wird mit dem links stehenden Symbol bezeichnet (Beispiele 1 und 2). Dabei ist genau der durch den Ausdruck angedeutete Rechenweg einzuhalten. Für Beispiel 2 heißt das, daß die Differenz der Quadrate der angegebenen trigonometrischen Funktionen, nicht aber der negative Cosinus des doppelten Winkels zu bilden ist, obwohl beide Größen wegen $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$ einander gleich wären. Die Beispiele 3 und 4 lehren, daß ein rechtsstehendes Zeichen wieder für den gesamten Ausdruck verwendet werden kann. Hierin unterscheiden sich Plangleichungen ganz wesentlich von den gewöhnlichen Gleichungen, denn die Schreibweise mit dem üblichen Gleichheitszeichen hätte in diesen Beispielen keinen Sinn.
2. Lesart: ... **wird gleich** ... **gesetzt.**
   Beim Setzen von Anfangs- und Ausgangswerten ist diese Lesart besonders nützlich (Beispiele 5 und 6). Im 3. Fall heißt das, daß der momentane Wert von k um 1 zu vergrößern ist.
   Entsprechend Beispiel 4: Zu dem zur Zeit vorliegenden Zahlenwert von S ist $a_{ik} x_k$ zu addieren.

Beim Aufstellen von Flußdiagrammen werden die Plangleichungen in Kästchen eingetragen, deren äußere Form einen Hinweis auf die Funktion im Rechenablauf gibt. Folgende Typen werden unterschieden:

1. **Operationskästchen:**
2. **Druckkästchen:**
3. **Fragekästchen:**
4. **Organisationshinweise:**
5. **Besondere Angaben:**



Weitere Typen für spezielle Anwendungen existieren noch bzw. sind möglich. Hier werden nur die wichtigsten Arten behandelt, um das Prinzip der Flußbildtechnik zu erläutern. Die Flußbildzeichen sind noch nicht allgemein standardisiert.

Bemerkungen zu den oben angegebenen Zeichen:

Zu 1. Es umfaßt jeweils eine Plangleichung.

Zu 2. Es kann ebenfalls eine Plangleichung eingetragen werden, deren Resultat gedruckt werden soll.

Zu 3. Es enthält eine meist formelmäßig gehaltene Frage, die nur mit Ja oder Nein beantwortet werden kann (Alternativfrage). Je nach der Antwort verzweigt sich der Rechengang.

Zu 4. Organisationshinweise sind:

◇A	Anfang der Rechnung
◇H	Halt der Rechnung

Zu 5. Es kommen in Frage:

J	Antwort Ja	in Auswertung einer Frage
N	Antwort Nein	
5	Fortsetzungsmarke (Konnektor)[1]	

Konnektoren werden verwendet, wenn das Flußdiagramm wegen Platzmangels an einer anderen Stelle fortgesetzt werden muß. Sie sind möglichst zu vermeiden. Unterschiedliche Größen der Zeichen je nach dem vorliegenden Inhalt sind erlaubt. Die einzelnen zu einem Programm gehörigen Kästchen werden durch Leitlinien zur Andeutung des Rechenablaufes verbunden.

BEISPIELE

7. Es ist eine Tabelle für $\sqrt{a}$ mit den zugehörigen Argumenten zu drucken, wobei die Argumente bei $a = a_0$ beginnen und bei $a = a_n$ enden sollen. Die Schrittweite betrage Δa. Ferner wird gefordert, daß die berechneten Wurzelwerte nicht mehr als $\pm\,\varepsilon$ vom wahren Wert abweichen.

Erläuterung: Für $a_0 = 10$, $\Delta a = 2$ und $a_n = 20$ entsteht die nebenstehende Tabelle 87.

Tabelle 87

a	$\sqrt{a}$
10	3,1623
12	3,4641
14	3,7417
16	4,0000
18	4,2426
20	4,4721

Lösung: Die Quadratwurzeln werden durch mehrfache Anwendung der Formel (188) bestimmt. Dabei muß die Rechnung auf Grund des vorgeschriebenen höchst zulässigen Fehlers so oft wiederholt werden, bis schließlich

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \tag{191}$$

wird, d. h., zwei aufeinanderfolgende Iterationswerte sich um weniger als $\pm\,\varepsilon$ unterscheiden. Die Betragszeichen in (191) sind notwendig, da die Differenz $x_{n+1} - x_n$ wechselnde Vorzeichen besitzen kann.

Bild 113 zeigt den Ablauf des Programms. Es besteht aus zwei ineinandergeschachtelten Zyklen. Der innere bewirkt die iterative Berechnung der Quadratwurzel aus a, der äußere das Weiterrücken in den Zeilen der Tabelle. Sämtliche Fragestellungen erfordern Vorzeichenentscheidungen. Die Werte a_0, Δa, a_n, x_0 und ε sind vorgegebene, während a, x_n und x_{n+1} Hilfsgrößen der Zwischenrechnung sind. Anfangs wird a auf den Anfangswert a_0 gebracht (1) und dann gedruckt (2). (3) setzt den Anfangswert der Iteration, die in (4) und (5) so oft wiederholt wird, bis die Differenz aufeinander folgender Resultate betragsmäßig kleiner als ε wird.

[1]) conectere (lat.) zusammenfügen, verbinden

x_n ist dann die gesuchte Wurzel, die gedruckt werden kann ⑥. Falls a den Wert a_n noch nicht erreicht hat ⑦, so wird nach Erhöhung des Argumentes die gesamte Rechnung wiederholt, wobei als erstes der neue Radikand gedruckt wird ②. Anderenfalls erfolgt Halt ⑧. Auf die an sich notwendige Diskussion weiterer Einzelheiten des Flußdiagramms wird verzichtet.

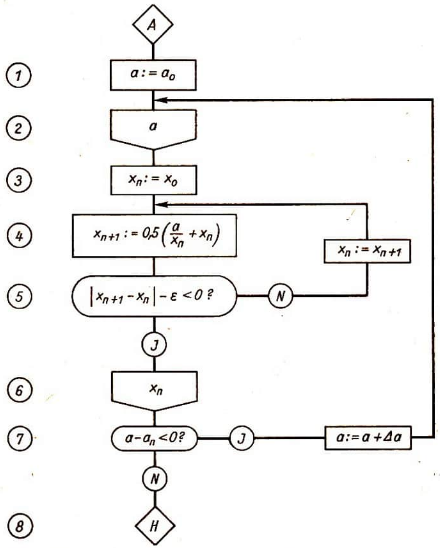


Bild 113. Flußdiagramm für eine Quadratwurzeltabelle

8. Es ist das Produkt zweier Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1l} & \cdot\cdot & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot\cdot & a_{il} & \cdot\cdot & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{ml} & \cdot\cdot & a_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot\cdot & b_{1k} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdot\cdot & b_{lk} & \cdot\cdot & b_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdot\cdot & b_{pk} & \cdot\cdot & b_{pn} \end{pmatrix}$$

elementweise zu berechnen (vgl. 2.2.4.1.). Die Elemente der Produktmatrix sind

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} \quad \text{für} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m \text{ und} \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{192}$$

Lösung: Das zugehörige Flußdiagramm ist in Bild 114 dargestellt. Hier liegen drei ineinandergeschachtelte Zyklen vor. Im innersten wird schrittweise das Skalarprodukt (192) aufgebaut. Dabei ist unter S die jeweils aufgelaufene Teilsumme zu verstehen. Die Operationen ⑤ und ⑥ werden entsprechend den p Summanden des Skalarproduktes auch p-mal durchgeführt, wobei der Laufindex l sich bei jeder Wiederholung um 1 erhöht. Der mittlere Zyklus dient zur Be-

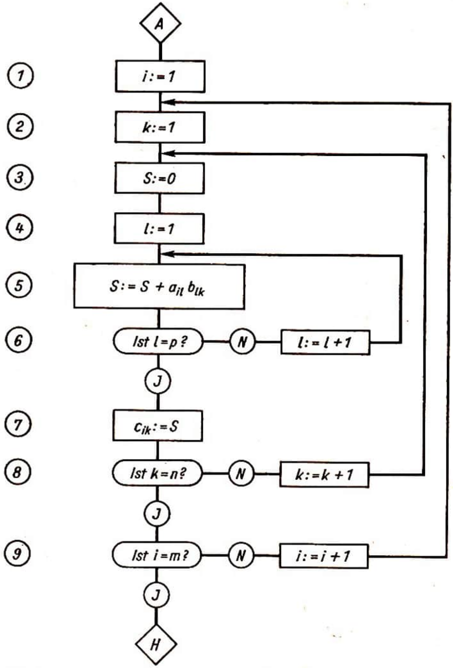


Bild 114. Flußdiagramm „Multiplikation zweier Matrizen“

rechnung der Elemente einer Zeile der Produktmatrix, während der äußere Zyklus deren einzelne Zeilen der Reihe nach bestimmt. Die meisten Informationen in diesem Flußdiagramm betreffen das Setzen (①, ②, ④) und Weiterzählen von Indizes bzw. die Durchführung von Entscheidungen über ihren Stand (⑥, ⑧, ⑨). Eine eigentliche arithmetische Operation erfolgt nur in ⑤. In ⑦ wird jeweils ein fertig errechnetes Element der Produktmatrix weggespeichert.

Der zur Organisation der Rechnung notwendige Aufwand ist im Vergleich dazu relativ hoch. Dies ist eine allgemeine Erscheinung. Je größer der Grad der Automatisierung einer Rechnung, desto höher ist der Organisationsaufwand. Das Rechnen mit Indizes ist beim Programmieren immer wieder notwendig. In den Rechenautomaten sind dazu besondere Hilfsmittel geschaffen worden (Indexregister).

5.3.7. Algorithmische Programmbeschreibung

Flußdiagramme beschreiben die Lösung einer Aufgabe mit Rücksicht auf den zeitlichen Ablauf der numerischen Rechnung. Die formelmäßige Lösungsvorschrift, für die praktische Durchrechnung hinreichend schematisiert und geordnet, wird als der **Algorithmus**[1]) ihrer Lösung bezeichnet. Flußdiagramme sind eine Möglichkeit zur Darstellung von Algorithmen. Sie sind einprägsam, jedoch etwas starr und erfordern relativ viel Zeichenarbeit. Wegen spezifischer Maschineneigenschaften wird die endgültige Form der Flußdiagramme oft erst nach Abschluß der Programmerprobung festgesetzt. Trotzdem geben sie im allgemeinen kein getreues Abbild des Maschinenprogramms, ganz abgesehen davon, daß sie bei umfangreichen Problemen viele Seiten füllen und damit auch keine rechte Übersicht bieten. Aus den angeführten Gründen geht man bei den Vorbereitungsarbeiten für automatisch zu bearbeitende Berechnungen allgemein wieder von Flußdiagrammen ab und beschränkt sich auf eine äußerst klare Gliederung und Schematisierung der gesamten Programmbeschreibung. Diese wird in wohl umrissene Teilabschnitte zerlegt, die mit Nummern (Marken) versehen werden. Zur Beschreibung der Teilaufgaben können weiterhin Plangleichungen verwendet werden. Durch Einfügung textlicher Erläuterungen, Angabe spezieller Verfahren usw. wird das Verständnis des Programmablaufes erleichtert. Dabei wird die Form nicht bis ins einzelne vorgeschrieben. Wenn die Erläuterung von Einzelheiten für die Aufstellung und das Verständnis des Programmes nicht notwendig ist, genügen allgemeingehaltene Anweisungen. Umgekehrt lassen sich die Algorithmen auch ohne Flußdiagrammsymbole bis in alle Einzelheiten genau beschreiben. Eine solche Festlegung von Verfahren soll **algorithmische Programmbeschreibung** genannt werden. Einzelheiten zu ihrer Aufstellung werden bewußt nicht in Regeln gefaßt, um kein starres Schema festzulegen, sondern an Hand von Beispielen erläutert.

BEISPIEL

1. Es ist unter den gleichen Voraussetzungen wie im Beispiel 7 des vorigen Abschnittes eine Quadratwurzeltabelle aufzustellen.

Lösung:

Marke	Beschreibung
1	$a := a_0$
2	Druck a; $x_n := x_0$
3	$x_{n+1} := 0{,}5\,(a : x_n + x_n)$; falls $\lvert x_{n+1} - x_n\rvert < \varepsilon$ ist, weiter mit 4, sonst $x_n := x_{n+1}$ und Wiederholung mit 3
4	Druck x_n; falls $a = a_n$ ist, erfolgt Halt, sonst $a := a + \Delta a$ und Wiederholung mit 2

[1]) vgl. 3.1.1., S. 204

Diese Beschreibung legt alle Einzelheiten fest, ohne auf spezielle Maschineneigenschaften einzugehen. Mit der Kenntnis des Ergibtzeichens ist diese algorithmische Programmbeschreibung sofort und ohne weitere Erläuterungen verständlich. Ist die Angabe von Einzelheiten nicht notwendig, so genügt etwa die folgende Beschreibung:

Für die Werte $a = a_0; a_0 + \Delta a; \ldots; a_n$ ist durchzuführen:

1. Druck a
2. Iterative Berechnung und anschließender Druck von $\sqrt{a}$.

BEISPIEL

2. Die Berechnung des Produktes der beiden Matrizen von Beispiel 8 des vorigen Abschnittes ist mit der algorithmischen Programmbeschreibung darzulegen.

Lösung:

Marke	Beschreibung
1	$i := 1$
2	$k := 1$
3	$l := 1;\ S := 0$
4	$S := S + a_{il} b_{lk}$; falls $l < p$ ist, wird $l := l + 1$ und Wiederholung mit 4, sonst weiter mit 5
5	$c_{ik} := S$; falls $k < m$ ist, wird $k := k + 1$ und Wiederholung mit 3, sonst weiter mit 6
6	Falls $i < n$ ist, wird $i := i + 1$ und Wiederholung mit 2, sonst Halt

Werden bei einer äußerst detaillierten algorithmischen Beschreibung von Programmen sorgfältig genormte Symbole zugrunde gelegt und für die Struktur der Beschreibung unbedingt einzuhaltende Formen mit fest umrissenem Zeichenvorrat festgelegt, so entsteht die Möglichkeit, diese Programmnotierung unmittelbar, umgesetzt auf ein geeignetes Eingabemedium, in den Automaten einzugeben. Dieser stellt dann mit Hilfe eines Übersetzungsprogrammes das eigentliche Maschinenprogramm ohne menschliches Zutun her. Der Vorgang und das Verfahren werden **automatische Programmierung** genannt. Diese setzt sich immer mehr durch und ist bei neueren Automaten die übliche Art der Programmherstellung. Eine sehr oft verwendete algorithmische Sprache ist in [49] dargestellt.

5.3.8. Struktur und Arbeitsweise eines Rechenautomaten

Im Rahmen dieses gedrängten Überblicks über die Wirkungsweise von Rechenautomaten soll nur auf den wichtigsten Typ, auf die **Einadreßmaschine**, eingegangen werden, da sich dieser in der Entwicklung des Rechenmaschinenbaus durchgesetzt hat. Andere Arten, insbesondere die **Fünf-** und **Dreiadreßmaschine**, spielten in der Entwicklung eine wichtige Rolle. Es sollen solche Begriffe erläutert werden, die zum allgemeinen Wissen gehören, wenn man sich mit Rechenautomaten beschäftigen will. Die hier vermittelten Kenntnisse werden beim Studium von Bedienungsanleitungen, Programmieranweisungen und Prospekten für Rechenautomaten gewöhnlich vorausgesetzt.

Zur Erläuterung der Einadreßmaschine werden zunächst die für den internen Rechenvorgang wichtigen Baugruppen **Speicherwerk**, **Rechenwerk** und **Leitwerk** betrachtet (siehe 5.3.3.).

Der Automat kann sowohl aus den numerierten Zellen seines Speichers die dort stehenden Informationen herauslesen, wobei der Speicherinhalt erhalten bleibt, als auch neue errechnete Zahlen in einer vorgeschriebenen Speicherzelle eintragen. Die Befehle müssen also die Adressen der Zahlen enthalten, die an der jeweiligen Operation beteiligt sind. Das sind bei den üblichen Rechenoperationen drei Stück, die beiden durch die Rechnung zu verknüpfenden Operanden und das Resultat. Bei einer *Dreiadreßmaschine* werden ihre Adressen einzeln im Befehl angegeben. Bei der *Fünfadreßmaschine* kommen dazu noch zwei weitere Adressen, die erstere nennt den Speicherplatz des Befehls, der bei positivem Resultat als nächster verarbeitet wird, die zweite wird entsprechend bei negativem Ergebnis wirksam. Damit lassen sich Entscheidungen realisieren.

Bei der *Einadreßmaschine* wird durch eine generelle Vereinbarung über die Speicherung eines Operanden und des Resultates und durch **organisatorische Befehle** erreicht, daß in jedem Befehl jeweils nur eine Adresse steht, durch die eine neue Zahl in den Rechenprozeß einbezogen wird. Der Einadreßbefehl enthält im einfachsten Fall eine Angabe über die Art der durchzuführenden Operation und die eine Adresse (Bild 115).

Bild 115. Einadreßbefehl: (Op) Operationsteil, (Adr) Adreßteil

Die grundsätzliche Vereinbarung besteht darin, daß vor Ausführung jedes Befehles der erste Operand bereits in einem besonderen Speicher zur Verfügung steht, in den dann auch das Resultat eingetragen wird. Speichereinrichtungen für ein Wort oder nur einen Wortteil, die für bestimmte Funktionen im Automaten vorgesehen sind, werden **Register** genannt. Im Gegensatz zum eigentlichen Speicherwerk, dem **Hauptspeicher**, stehen die Informationen in den Registern unmittelbar, ohne besondere **Such-** und **Zugriffszeiten**, zur Verfügung. Der angeführte Sonderspeicher heißt **Resultatregister** (auch *Rechenwerksregister*) und wird durch R gekennzeichnet. Unter $\langle R \rangle$ ist diejenige Zahl zu verstehen, die jeweils in R eingetragen ist. Bei der Ausführung eines Einadreßbefehles wirkt $\langle R \rangle$ als erster Operand. Der zweite Operand wird durch die Adresse des Befehls bestimmt. Beide Zahlen werden auf Grund der Operationsangabe im Befehl rechnerisch verknüpft und das Resultat wieder nach R gebracht. Durch diese besondere Art der Befehlsabarbeitung wird die logische Struktur des Automaten bestimmt, die aus Bild 116 hervorgeht.

Deutlich werden dort die beiden Baugruppen Speicherwerk und Rechenwerk erkannt. Zum Speicher mit seinen ab 0 adressierten Speicherplätzen gehört auf alle Fälle noch eine im allgemeinen auch aufwendige Einrichtung, die **Zellenwähler** genannt werden soll. Sie hat eine Doppelfunktion. Einmal müssen die im nächsten Schritt benötigten Zahlen oder Befehle aus der durch die jeweilige Adresse bestimmten Speicherzelle herausgeholt werden. Dieser Vorgang wird mit **Lesen**, teilweise auch mit **Hören** in Anlehnung an die bei Schallaufzeichnung durch Magnetbänder übliche

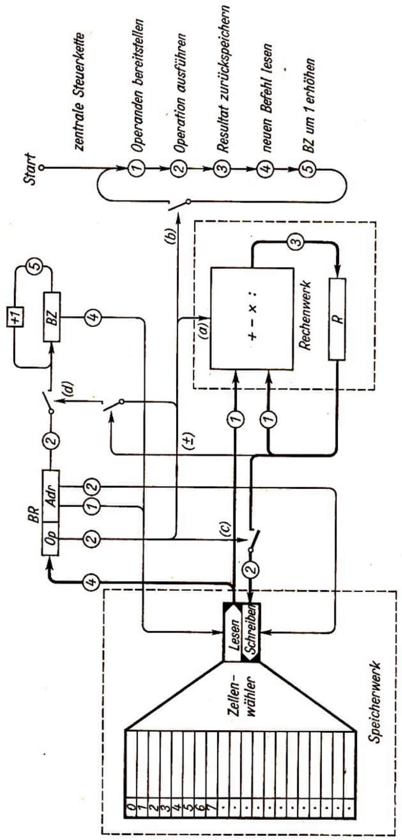


Bild 116. Vereinfachte Prinzipdarstellung einer Einadreßmaschine

Sprechweise, bezeichnet. Zum anderen muß der Zellenwähler die Eintragung eines neuen Resultates bei den Speicherbefehlen gewährleisten, dieser Vorgang wird **Schreiben**, teilweise auch **Sprechen** (siehe oben) genannt. Der Zellenwähler umfaßt also unter anderem Lese- und Schreibverstärker einschließlich der dazu notwendigen Ansteuerungen.

Vom Speicher- und Rechenwerk abgesehen, werden die verbleibenden Baugruppen, die im Bild 116 dargestellt sind, unter dem Begriff *Leitwerk* zusammengefaßt. Das Leitwerk übernimmt die zentrale Steuerung des Automaten und organisiert das Zusammenspiel aller Baugruppen.

Zum Leitwerk gehört zunächst eine Einrichtung, die **zentrale Steuerkette** genannt werden soll. Sie bestimmt den zeitlichen Ablauf der zu einem **Elementarzyklus** gehörigen Teiloperationen. In einem solchen Zyklus wird jeweils ein Befehl des Programms vollständig abgearbeitet. Da dazu eine Reihe von Einzelschritten gehören, enthält die zentrale Steuerkette eine Anzahl (hier fünf) Stellungen, wobei zur folgenden erst dann übergegangen wird, wenn die vorhergehende erledigt ist. Bild 116 gibt nur eine vereinfachte Darstellung des Prinzips einer Einadreßmaschine. In Wirklichkeit sind die Bauelemente der Steuerkette mit dem gesamten Leitwerk und mit den anderen Baugruppen des Automaten durch Signal- und Rückmeldeleitungen so verflochten, daß rein äußerlich und auch von den logischen Schaltplänen her eine klare Trennung nicht so ohne weiteres möglich ist. Zum Verständnis der Wirkungsweise des Automaten ist die besondere Darstellung der Steuerkette jedoch von Vorteil.

Als zweite wichtige Einrichtung des Leitwerkes ist das **Befehlsregister** (*BR*) zu nennen. In ihm steht jeweils der Befehl, der während des betreffenden Zyklus abgearbeitet wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß zu Beginn des Zyklus der neue Befehl bereits im Befehlsregister enthalten ist, während mit dem letzten Takt des Zyklus der nächste Befehl herangeholt wird. Das Befehlsregister ist so eingerichtet, daß Teile, evtl. nur einzelne Bits des Befehls, zu unterschiedlichen Zeiten entsprechend den von der Steuerkette kommenden Impulsen abgefragt, entschlüsselt und als Steuersignale den Baugruppen der Maschine zugeleitet werden.

Ein weiteres Hilfsregister, der **Befehlszähler** (*BZ*), registriert jeweils die Speicherplatzadresse des Befehls, der als nächster ausgeführt werden soll. Der Befehlszähler ist in seiner Länge so dimensioniert, daß gerade eine Adresse darin aufbewahrt werden kann.

In Bild 116 kennzeichnen dick ausgezogene Linien die Verbindungen, über die vollständige Zahlen oder Befehle geleitet werden, während die anderen, dünner gezeichneten Pfeile den Weg von Steuersignalen angeben. Die eingetragenen Marken charakterisieren jeweils den durch die Steuerkette bestimmten Zeitpunkt, zu dem der betreffende Weg geöffnet wird. Während der einzelnen Takte der Steuerkette werden folgende Schritte der Befehlsabarbeitung erledigt:

①: Bei allen arithmetischen Operationen werden hier die beiden Operanden bereitgestellt. Der erste Operand kommt grundsätzlich aus dem Resultatregister, der zweite wird auf Grund der Adressenangabe im Speicherwerk gelesen und ebenfalls ins Rechenwerk gebracht.

②: Auslösung der Operation. Befehle für arithmetische Vorgänge liefern Steuersignale für das Rechenwerk (*a*); sogenannte organisatorische Befehle bewirken Steuerungen im Leitwerk. Diese sind die folgenden:

1. Bei einem **Haltbefehl** wird in der zentralen Steuerkette (symbolisch) ein Schalter geöffnet, der die Abarbeitung des nächsten Befehles verhindert (*b*). Ein erneuter Start der Rechnung kann dann nur durch ein äußeres Signal, etwa durch Handbedienung, erfolgen.
2. Bei **Speicherbefehlen** steuert die Adresse die Schreibseite des Zellenwählers. Der Inhalt von R wird zur angewählten Speicherzelle transportiert (*c*). Dabei kann zusätzlich noch befohlen werden, ob $\langle R\rangle$ erhalten bleibt oder ob das Resultatregister gelöscht wird. Nach einer Löschung steht die Zahl Null in R.
3. Die Vorgänge bei **Sprungbefehlen** werden noch gesondert erläutert. Es wird hier der Schalter (*d*) wirksam.

③: Das Resultat der Rechnung wird wieder nach R gebracht. Dieser Takt entfällt bei organisatorischen Operationen.

④: Bereitstellung des nächsten Befehls. Der Inhalt des Befehlszählers, d. h. die Adresse des nächsten Befehls, wird zur Leseseite des Zellenwählers überführt. Damit kann der neue Befehl im Hauptspeicher gelesen und ins Befehlsregister eingetragen werden.

⑤: Im allgemeinen stehen zeitlich nacheinander abzuarbeitende Befehle auch in aufeinanderfolgenden Zellen des Hauptspeichers. Es muß also in jedem Elementarzyklus nach dem Lesen des neuen Befehls der Befehlszählerstand um 1 erhöht werden, um beim nächsten Durchlauf der Steuerkette den folgenden Befehl ins Befehlsregister holen zu können. Dazu ist dem Befehlszähler eine Zähleinrichtung zugeordnet (in Bild 116 durch $\boxed{+1}$ angedeutet), durch die $\langle BZ\rangle$ um 1 erhöht wird.

Nach Ausführung des Taktes ⑤ folgt, falls kein Haltbefehl vorlag, wieder der Takt ①, d. h., der nächste Befehl wird abgearbeitet. Die Steuerkette ist geschlossen. Der beständige Umlauf eines Steuersignales (oft *Steuerbit* genannt) bewirkt die fortlaufende Abarbeitung der gespeichert vorliegenden Befehle, also des gesamten Programms.

Wirkungsweise der Sprungbefehle

Sprungbefehle unterbrechen die fortlaufende Abarbeitung der gespeicherten Befehle. Durch sie wird die Rechnung an einer anderen, durch die Adresse des Sprungbefehles gekennzeichneten Stelle des Programms fortgesetzt.
Die Ausführung eines Sprungbefehles besteht darin, im Takt ② die Adresse (die **Sprungadresse**) in den Befehlszähler zu bringen. Dazu wird in der Verbindung vom Befehlsregister zum Befehlszähler (symbolisch) ein Schalter geschlossen (*d*). Der alte Inhalt des Befehlszählers wird durch die Sprungadresse überschrieben.
Zur Verwirklichung von Entscheidungen müssen zusätzlich noch **bedingte Sprungbefehle** eingebaut werden. Ein bedingter Sprungbefehl wird nur dann als Sprungbefehl wirksam, wenn eine vorgeschriebene Bedingung (etwa das Vorliegen eines positiven Resultates) erfüllt ist, anderenfalls wird der Befehl überlaufen, bewirkt also keine Änderung am momentanen Zustand des Befehlszählers. Die Bedingbarkeit ist in Bild 116 durch einen zusätzlichen, vom Vorzeichen des Resultates ($\pm$) gesteuerten Schalter angedeutet, der das Schließen des Schalters (*d*) verhindern kann. Die Takte ④ und ⑤ werden auch bei Sprungbefehlen wie oben beschrieben ausgeführt. Da bereits

im Takt ② die Sprungadresse in den Befehlszähler übernommen worden ist, wird im Takt ④ der Befehl, der unter der Sprungadresse steht, ins Befehlsregister gebracht.
Mit der Einadreßmaschine ist ein gewisser Abschluß der Automatenentwicklung erreicht worden. Ein großer Teil aller gegenwärtigen Rechenautomaten sind im Prinzip Einadreßmaschinen. Doch zeigt die Praxis des Programmierens, daß für die zahlreich notwendigen Adressenrechnungen technische Hilfsmittel angebracht sind. Dies führt zu einer wesentlichen Erweiterung der Einadreßmaschine, indem zusätzlich zu dem bereits erläuterten Rechenwerk noch ein spezielles **Adressen-Rechenwerk** und **Indexregister** zur Speicherung von Adressenangaben hinzukommen (Einzelheiten dazu in [48], Seite 69–81). Weiterhin gehören zu jedem Automaten periphere Aggregate zur Ein- und Ausgabe von Informationen bzw. zur Speicherung großer Datenmengen.
Der technische Aufbau von Rechenautomaten kann in diesem gedrängten Überblick nicht dargelegt werden. Solche Kenntnisse sind für den Benutzer von Rechenautomaten im Grunde auch nicht notwendig, wenngleich beim tieferen Eindringen in die Probleme auch die Technik der Automaten studiert werden muß (vgl. [50, 54, 55]).

5.3.9. Programmbeispiel für eine einfache Einadreßmaschine

Zur Demonstration wird ein Programm für eine gedachte Einadreßmaschine mit einfachstem **Befehlsschlüssel** angegeben. Unter diesem Begriff wird die Gesamtheit aller in einem Automaten möglichen Befehle verstanden. Vor der Darlegung des Beispiels muß zunächst der Befehlsschlüssel erläutert werden. In der folgenden Zusammenstellung der vorgesehenen Befehle stehen in der ersten Spalte die Symbole, die in die **Programmformulare** eingetragen werden. Die zweite Spalte gibt die ausführliche Bezeichnung des Symbols. In der dritten Spalte bedeutet A die in dem jeweiligen Befehl angegebene Adresse, $\langle A\rangle$ ist der Inhalt der betreffenden Zelle. Man beachte, daß bei den Sprungbefehlen die Adresse A selbst, und nicht $\langle A\rangle$, in den Befehlszähler gebracht wird.

Befehlsliste:

Operations-symbol	Bezeichnung	Wirkung des Befehls
$+$	plus	$\langle R\rangle := \langle R\rangle + \langle A\rangle$
$-$	minus	$\langle R\rangle := \langle R\rangle - \langle A\rangle$
$\times$	mal	$\langle R\rangle := \langle R\rangle \cdot \langle A\rangle$
S	Speichern ohne Löschen	$\langle A\rangle := \langle R\rangle$; $\langle R\rangle$ bleibt erhalten
$\not{S}$	Speichern mit Löschen	$\langle A\rangle := \langle R\rangle$; danach $\langle R\rangle := 0$
$\rightarrow$	Unbedingter Sprung	$\langle BZ\rangle := A$
$\oplus\!\rightarrow$	Sprung bei plus	$\langle BZ\rangle := A$, falls $\langle R\rangle > 0$ ist
$\ominus\!\rightarrow$	Sprung bei minus	$\langle BZ\rangle := A$, falls $\langle R\rangle < 0$ ist
D	Druck	Druck von $\langle R\rangle$, danach $\langle R\rangle := 0$
H	Halt	Haltbefehl

Mit diesen Befehlen entsteht das auf Seite 493 angegebene Programm zur Aufstellung einer Quadratwurzeltabelle, dessen prinzipieller Ablauf bereits ausführlich erläutert wurde. Alle Befehle und die dem Programm fest zugeordneten Zahlenwerte (die **Programmkonstanten**) sowie die für die Speicherung von Zwischenresultaten vorgesehenen **Arbeitszellen** werden auf einem *Programmformular* notiert.
Nach sorgfältigem Studium des Flußdiagramms (Bild 113) bzw. der Programmbeschreibung (S. 485) für dieses Beispiel ist das Verständnis des vorliegenden Programms einfach. Es wird vorausgesetzt, daß sich das gesamte Programm bereits im Speicher befindet, zur Eingabe sind besondere Hinweise notwendig.
Im Programmformular steht links zunächst eine Spalte für die Speicherplatzadressen. An dieser Stelle im Hauptspeicher steht der rechts angegebene Befehl. Der dick eingerahmte Teil kennzeichnet die Informationen, die wirklich in den Speicher des Automaten eingegeben werden. Durch Abänderung der Werte von a_0, Δa und a_n können beliebige Quadratwurzeltabellen erzielt werden. Genauere Festlegungen über die Darstellung der Zahlen in dem gedachten Automaten wären im Grunde noch zu treffen. Die Arbeitszellen müssen von Programm und Zahlen freigehalten werden. Sie werden erst während der Rechnung beschrieben und dienen als Speicher für Zwischenresultate. Beim Aufstellen von Programmen, die ohne Programmierhilfsmittel unmittelbar in der im Automaten verwendeten Form aufgeschrieben werden (Programmieren im Maschinencode[1]), werden die Befehlsadressen zuletzt eingetragen. Die jeweils zu verwendende Zahl wird zunächst unter „Symbolische Adresse" vermerkt, die wahre Adresse ist dann am Schluß zum Befehl hinzuzufügen. In der Spalte mit der Überschrift $\langle R \rangle$ wird der jeweilige Inhalt des Resultatregisters **nach** Ausführung der in der gleichen Zeile stehenden Operation notiert. Die Erläuterungen schließen sich an die Gliederung der algorithmischen Programmbeschreibung Seite 485 an. Für den Ablauf des Programms wird vorausgesetzt, daß durch eine Generallöscheinrichtung im Automaten zu Beginn der Rechnung alle Register gelöscht werden. In R steht also am Anfang die Zahl Null. Deshalb kann durch die Addition im 1. Befehl (der in Zelle 0 steht) sofort der Ausgangswert nach R gebracht werden. Beachtenswert ist die Bildung des Betrages, die nicht durch einen Befehl direkt verwirklicht werden kann (Zeile 11—13). Diese Operation muß programmiert werden. Ein Größenvergleich (zwischen $x_{n+1} - x_n$ und ε) wird durch Differenzbildung auf eine Vorzeichenentscheidung geführt, die durch bedingte Sprungbefehle ($\oplus\!\!\rightarrow$ bzw. $\ominus\!\!\rightarrow$) ausgewertet wird. Die gleiche Bemerkung gilt für den Test auf Tabellenende.
Das Beispiel gibt eine Vorstellung dafür, daß für einfache Probleme die Programmierung für eine Einadreßmaschine ohne große Anleitung verstanden werden kann. Schwierigkeiten entstehen dann, wenn das Programm Rechnungen mit Adressen oder, was auf das gleiche hinausläuft, mit Indizes verlangt.

5.3.10. Rechenkontrollen

Wie bei der Handrechnung müssen auch bei der automatischen Durchrechnung größerer Probleme Rechenfehler durch Proben und Kontrollen erkannt und Maßnahmen zu ihrer Beseitigung eingeleitet werden. Man geize nicht mit Rechenzeit,

[1]) code (franz.) Gesetzbuch; hier im Sinne von „Befehlsschlüssel"

Speicherplatz	Befehl Op	Befehl Adr	Symb. Adr.	⟨R⟩	Erläuterungen
0	$+$	33	a_0	a_0	1. Festlegung des Tabellenanfanges
→ 1	S	38	a	a	
2	D			0	2. Druck a
3	$+$	30	x_0	x_0	Festlegung des Iterationsanfanges
4	$\not{S}$	36	x_n	0	
→ 5	$+$	38	a	a	3. Durchrechnung von
6	:	36	x_n	$a:x_n$	
7	$+$	36	x_n	$a:x_n + x_n$	$x_{n+1} := 0{,}5\,(a:x_n + x_n)$
8	$\times$	31	0,5	x_{n+1}	
9	S	37	x_{n+1}		
10	$-$	36	x_n	$x_{n+1} - x_n$	
11	$\oplus\!\rightarrow$	14			
12	$\not{S}$	39	H	0	Bildung des Betrages
13	$-$	39	H	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	
→14	$-$	32	ε	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert - \varepsilon$	
15	$\not{S}$	39	H	0	Entscheidung
16	$\ominus\!\rightarrow$	20			$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert < \varepsilon$?
17	$+$	37	x_{n+1}	x_{n+1}	Rückstellung des
18	$\not{S}$	36	x_n	0	Iterationswertes
19	$\rightarrow$	5			
→20	$+$	36	x_n	x_n	4. Druck des Resultates $\sqrt{a}$
21	D			0	
22	$+$	38	a	a	
23	$-$	35	a_n	$a - a_n$	Test auf Tabellenende
24	$\oplus\!\rightarrow$	29			
25	$\not{S}$	39	H	0	
26	$+$	38	a	a	Weiterzählung im
27	$+$	34	Δa	$a + \Delta a$	Argument
28	$\rightarrow$	1			
→29	H				
30	1, 0000		Zahl x_0		vorgegebene Zahlenwerte
31	0, 5000		,, 0,5		
32	0, 0001		,, ε		
33	10, 0000		,, a_0		
34	2, 0000		,, Δa		
35	20, 0000		,, a_n		
36			Arbeitszelle x_n		
37			,, x_{n+1}		
38			,, a		
39			,, H		

denn der eventuell größere Aufwand macht sich durch die erhöhte Sicherheit wieder bezahlt. Die Richtigkeit der Resultate muß weitestgehend gewährleistet werden. Die Möglichkeiten für Kontrollen werden durch das Problem bestimmt. Im folgenden sollen nur einige allgemeine Hinweise genannt werden.

Mit **Summenkontrollen** wird ein gegebenes und zu übertragendes Zahlenmaterial geprüft. Wird zum Beispiel in einer Matrix noch eine zusätzliche Spalte der negativen Zeilensummen mit gespeichert, so ergibt dann die Summe jeder jetzt um ein Element erweiterten Zeile den Wert Null. Diese Summen werden automatisch geprüft oder ausgedruckt. Damit läßt sich die Richtigkeit der Lochung oder der Übernahme in den Speicher kontrollieren. Eventuell aufgetretene Fehler sind dann leicht zu lokalisieren. Falls durch die Summenbildung die Gefahr der Bereichsüberschreitung gegeben ist, kann diese durch abwechselnde Addition und Subtraktion verringert werden. Bei Rechnungen mit Matrizen erweist sich die Mitnahme von Zeilensummen durch die Rechnung als wirksame Kontrolle während des gesamten Rechenvorgangs (vgl. 2.2.4.2., S. 130···133 und 3.2.3.3., S. 248). In gleicher Weise kann durch Summenbildung die Eingabe erprobter Programme geprüft werden. Man addiert einfach alle Befehle und Konstanten wie Zahlen und merkt sich das Resultat, die sogenannte *Programmsumme*. Eventuelle Überschreitungen des Zahlenbereichs sind zu unterdrücken.

Einsetzproben: Ermittelte Lösungen werden in die Ausgangsgleichungen eingesetzt und damit festgestellt, wie weit diese den geforderten Bedingungen entsprechen. Damit entsteht auch eine Aussage über die erzielte Genauigkeit.

Bei **Doppelrechnungen** werden bestimmte Programme oder Teile davon zur Kontrolle grundsätzlich zweimal durchgerechnet und die Resultate verglichen, die bis auf die letzte Stelle übereinstimmen müssen. Doppelrechnungen erweisen sich gegen zufällige (technisch bedingte) Fehler wirksam, systematische Fehler können im allgemeinen nicht erkannt werden.

Kontrolle auf **Symmetrie**: Bleiben gewisse Symmetrieeigenschaften des Zahlenmaterials (Matrizen, Feldverteilungen) auch nach der Rechnung erhalten, so können diese zur Kontrolle verwendet werden; dabei darf jedoch die Symmetrie im Programm nicht berücksichtigt werden. Es liegt dann ebenfalls eine gewisse Doppelrechnung vor, deshalb gilt das dort Gesagte.

Bei Berechnungen von **Funktionswerten** bieten sich entsprechend dem Charakter der betreffenden Funktion unter Umständen besondere Kontrollen an. Hat man z. B. einen Funktionswert $y \approx \sqrt{x}$ berechnet, so muß

$$|x - y^2| - \varepsilon < 0$$

bei einem geeigneten Wert von ε sein. Bei den trigonometrischen Funktionen ist

$$|\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1| - \varepsilon < 0$$

eine brauchbare Kontrolle, wenn zu einem vorgegebenen Argument α sowohl der Sinus- als auch der Cosinuswert berechnet werden muß.

5.3.11. Beurteilung von Rechenautomaten

Im folgenden sollen einige Gesichtspunkte zum Vergleich von Rechenautomaten verschiedener Typen dargelegt werden.

1. *Rechengeschwindigkeit*: Sie wird entweder durch Angabe von Zeiten für die Dauer der einzelnen Grundoperationen oder aber durch die Festlegung der Anzahl von Operationen je Sekunde mitgeteilt, die im Mittel abgearbeitet werden können. Beide Angaben sind mit Vorsicht zu werten, da neben den arithmetischen Operationen bei der Abarbeitung eines Programms zahlreiche Organisationsoperationen zu erledigen sind, die ein Programm auch zeitlich stark belasten können. Einen besseren Vergleich zwischen verschiedenen Automatentypen bezüglich ihrer Rechengeschwindigkeiten erhält man, wenn auf jedem Automaten das gleiche Programm durchgerechnet wird und die Rechenzeiten für die gesamte Durchrechnung gegenübergestellt werden.
   Die Bedeutung der Rechengeschwindigkeit für die Beurteilung eines Rechenautomaten wird oft überbewertet. Die folgenden Punkte sind jedoch in gleicher Weise entscheidend für den Wert eines Automaten.
2. *Speicherkapazität*: Es wird die Anzahl der Zahlen oder Befehle oder bei variabler Wortlänge die Anzahl der Ziffern oder Zeichen angegeben, die maximal im Speicher untergebracht werden kann. Bei ökonomischen und organisatorischen Problemen sind oft umfangreiche Speicherkapazitäten notwendig. Wertvoll ist die Möglichkeit zur schrittweisen Vergrößerung des Speichers durch Anschaffung von weiteren Zusatzgeräten.
3. *Periphere Geräte*: Die Bedeutung der peripheren Geräte wurde bereits angedeutet. Sie bestimmen entscheidend die Möglichkeit zum vielseitigen und bequemen Einsatz der Rechenanlage.
   Anschlußmöglichkeiten für verschiedenartige Ein- und Ausgabegeräte (Lochband, Lochkarte, Schreibmaschine, Fernschreiber, Magnetband, Schnelldrucker mit der Möglichkeit zur Text- und Tabellengestaltung, Schreib- und Zeichengeräte, Analoganzeige usw.) sind von hohem Wert.
4. *Kontrollen und technische Sicherheit*: Trotz der hohen Rechengeschwindigkeit ergeben sich häufig Rechnungen, die sich über viele Stunden hinziehen, während der kein Rechenfehler entstehen darf. Man muß also eine weitgehende technische Sicherheit für alle Teile des Automaten fordern. Dabei sind die Bedingungen wesentlich härter als etwa bei einem Fernsehempfänger oder einem anderen elektronischen Gerät, bei dem ein gelegentlich kurzzeitiger Fehler im allgemeinen keinen Einfluß auf die weitere Funktion hat. Bei einem Rechenautomaten geht ein falsches Resultat in die nachfolgende Rechnung ein und macht diese auch dann wertlos, wenn kein neuer technischer Fehler auftritt. Da diese trotz sorgfältiger Bauweise nie völlig zu vermeiden sind, müssen umfassende Kontrollen eingebaut oder programmierbar sein. Es muß gewährleistet werden, daß jeder auftretende Fehler möglichst kurz nach seinem Entstehen registriert wird.
5. *Wartungsarbeiten und Unterhaltungskosten*: Beide möchten möglichst niedrig liegen. Moderne Rechner bedürfen kaum mehr einer täglichen Wartung und eines ständigen Personals dafür.
6. *Programmierbarkeit und Programmbibliothek*: Das bequeme und schnelle Herstellen der Rechenprogramme hängt wesentlich von dem Befehlsschlüssel ab, der dem Automaten zugrunde liegt. Die Möglichkeit zur Verwendung leicht zugänglicher und universell anwendbarer Programmiersprachen und zur Einrichtung von

Programmbibliotheken erhöht den Wert des Automaten. Die Grundausrüstung mit Bibliotheksprogrammen wird gewöhnlich mit der Maschine mitgeliefert bzw. steht dem Benutzer kostenlos zur Verfügung.

5.3.12. Beispiele spezieller Automaten

In diesem Abschnitt sollen aus der Vielzahl der Rechenautomatentypen zwei herausgegriffen werden, die bei uns in größeren Stückzahlen eingesetzt sind. Sie stehen damit auch einem allgemeinen Benutzerkreis zur Verfügung.

Rechenautomat ZRA 1

Es handelt sich um einen Rechenautomaten mittlerer Geschwindigkeit, der ursprünglich wesentlich zur Lösung wissenschaftlich-technischer Aufgaben projektiert worden war. Der **ZRA 1** (Zeiss-Rechenautomat 1) wurde in dem VEB Carl Zeiss Jena entwickelt und bis 1964 in mehreren Dutzend Exemplaren in Serie gebaut, die im wesentlichen zur Deckung des Inlandbedarfes dienten. Damit ist der ZRA 1 in der Deutschen Demokratischen Republik trotz zahlreicher Ergänzungen, die in einzelnen Rechenzentren hinzugefügt worden sind, zu unserem Standardautomaten der Mittelklasse geworden [51].

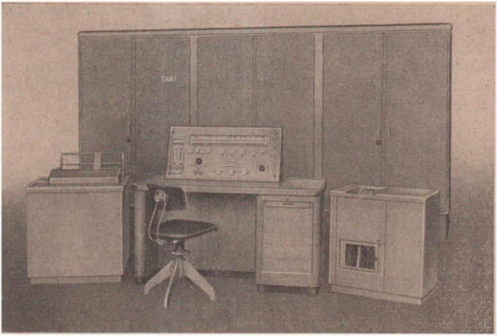


Bild 117. Gesamtansicht des Rechenautomaten ZRA 1

Der Automat wird von einem gesonderten Kommandopult aus bedient (Bild 117). Die Eingabe von Zahlen und Befehlen erfolgt durch Lochkarten über einen speziellen Kartenabtaster. Lochstreifen-Eingabe und -Ausgabe kann nachträglich eingebaut werden. Die Ausgabe der Resultate geschieht in der Regel auf einem Drucker, der in der ursprünglichen Anlage auf 60 mm breite Streifen alle Zahlen untereinander schrieb, dabei können bis zu 12 Zeichen auf einmal ausgegeben werden. In sehr

vielen ZRA 1-Stationen sind in der Zwischenzeit Zusatzeinrichtungen zur Gestaltung von Tabellen geschaffen worden.
Die eigentliche Rechenelektronik ist in einem dreiteiligen Schrank untergebracht, der auch den Speicher mit der zugehörigen Ansteuerung enthält. Außerdem gehören noch Stromversorgungs- und Netzgeräte zum Automaten.
Die gesamte für Rechen- und Steuervorgänge notwendige Elektronik ist aus Ferritkernen aufgebaut. Sie umfaßt Rechenwerk, Leitwerk, Register und Speicheransteuerung (Zellenwähler), so daß für die an sich verschiedenartigsten Baugruppen die gleichen Bauelemente verwendet wurden.
Die Wortlänge beträgt (intern) 48 Bits (Bild 118). Es ist sowohl Festkomma- als auch Gleitkommaarithmetik möglich, wobei letztere in der Regel angewendet wird. Die Mantisse umfaßt neun Dezimalziffern, während der Exponent von -19 bis $+19$ variieren kann. Die darstellbare Genauigkeit und der mögliche Zahlenbereich reichen für alle praktischen Probleme aus. Die Speicherkapazität beträgt 4096 Worte, dazu kommen acht Schnellspeicher.

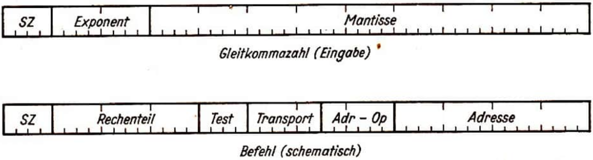


Bild 118. Wortdarstellung im ZRA 1. (*SZ*) Sonderzeichen

Der ZRA 1 wird für fast alle vorkommenden technisch-wissenschaftlichen Berechnungen eingesetzt, soweit nicht extrem hohe Arbeitsgeschwindigkeiten oder Speicherkapazitäten notwendig werden. Durch Ergänzungen und Änderungen wird der Automat in zunehmendem Maße auch für ökonomische Probleme (vgl. 3.4.2.) und teilweise sogar für Buchhaltungsarbeiten verwendet.

Kleinrechenautomat SER 2b

Dieses Gerät, das als Kleinrechner projektiert worden ist, stellt auch äußerlich eine ansprechende Einrichtung eines modernen Büros dar (Bild 119). Es ist für kleinere Konstruktionsbüros und besonders für Verwaltungsstellen mit sich häufig wiederholenden Rechenvorgängen gedacht. Da die Bedienung gegenüber Großgeräten wesentlich einfacher, ständiges Wartungspersonal nicht erforderlich und der Anschaffungspreis niedriger ist, wird ein rentabler Einsatz auch dann gewährleistet sein, wenn eine beständige Auslastung nicht gegeben ist. Der Wert eines Kleinrechners besteht gerade darin, daß ein beständiger, operativer Einsatz ohne Beachtung von Rechenzeitbelegungsplänen möglich ist.
Der Rechenautomat hat äußerlich die Größe eines Schreibtisches, in dessen linker Seite alle wesentlichen Aggregate untergebracht sind. Eine elektrische Schreib-

maschine dient als Ein- und Ausgabeeinrichtung. Mit ihr können die zu verarbeitenden Daten und die Befehle in den Rechner eingegeben werden.
Als zusätzliche Eingabegeräte existieren zwei Lochband-Lesegeräte. Der Speicher besitzt 127 Plätze für 10stellige Dezimalzahlen (zuzüglich Komma und Vorzeichen) und getrennt davon 127 Speicherplätze für je drei Einzelbefehle. Die auf den ersten Blick geringe Speicherkapazität ist jedoch der einleitend dargelegten Konzeption des Rechners angepaßt, da die Eingabe über Lochband als äußerer Speicher mit unbegrenzter Kapazität aufgefaßt werden kann. Unbequem erscheint die starre Trennung in Befehls- und Zahlenspeicher.

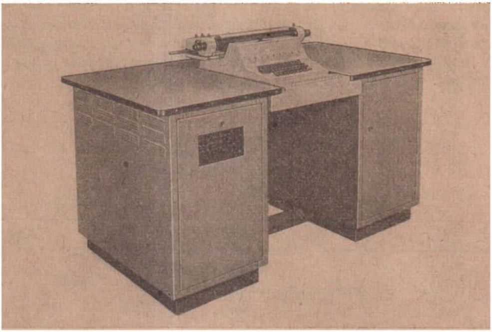


Bild 119. Kleinrechenautomat SER 2b

Der Automat stellt eine ausgesprochene Einadreßmaschine ohne Erweiterung durch Indexregister dar. Er benutzt Gleitkommazahlen mit 10stelliger Mantisse, wobei auch intern mit Dezimalzahlen gerechnet wird. Der Exponent (hier *Kommainformation* genannt) kann von 0 bis -7 variieren. Durch die Verwendung von Dezimalziffern werden Konvertierung und Rückkonvertierung und die dabei entstehenden Fehler grundsätzlich vermieden, was besonders den Einsatz des Rechners bei kaufmännischen Rechnungen rechtfertigt.
Der elektronische Teil des Rechenautomaten ist aus Halbleiterbauelementen (Transistoren und Dioden) in gedruckten Schaltungen aufgebaut. Damit wird die gedrängte Bauweise verständlich.

5.3.13. Anwendungsmöglichkeiten und Ausblick

Die ersten Rechenautomaten wurden vornehmlich für militärisch-technische Zwecke (Durchrechnung von Geschoßbahnen) entwickelt. Doch auch auf vielen anderen Gebieten der Technik, in denen umfangreiche Rechenarbeiten auftreten, werden

Rechenautomaten in steigendem Umfang eingesetzt. Hier sind zu nennen: Hochbau, Tiefbau, Flugzeug- und Raketenbau, Schiffbau, Brücken- und Straßenbau, Kerntechnik, Bau von Energieanlagen. Daneben werden Rechenautomaten auch für die Lösung rein wissenschaftlicher Probleme verwendet, wobei auch solche Gebiete wie Medizin, Landwirtschaft, Sprachwissenschaften, in denen bisher keine engen Beziehungen zur Mathematik bestanden, ihr Interesse bekunden. Zahlreiche Zweige der Wissenschaft, an der Spitze die mathematische Logik und die numerische Mathematik, aber auch viele technische Gebiete haben durch das Aufkommen der elektronischen Rechentechnik starke Impulse zu ihrer Weiterentwicklung erhalten. Neben diesen nun schon klassischen Gebieten der Rechentechnik werden Rechenautomaten allgemein zur Verarbeitung umfangreicher Datenmengen eingesetzt. Dabei kann es sich etwa um die Auswertung von Meßserien, von Volkszählungen oder Inventuren, um Bilanzierungen, um die Gestaltung von Fahrplänen, um Platzkartenreservierung, Aufstellung von Stundenplänen, Produktionsplänen u. a. handeln. Mit den letzten Beispielen kommt man zu der in den letzten Jahren immer stärker in Erscheinung tretenden Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie. Neben den zuerst automatisierten Buchhaltungsproblemen treten Planungs- und Optimierungsaufgaben auf. Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die automatische Regelung von Produktionsprozessen. Hier sind Geräte mit besonderen Eigenschaften, die auf den speziellen technologischen Prozeß zugeschnitten sind, sogenannte Prozeßrechner, entwickelt worden. Sie werden eingesetzt bei der Steuerung von Kraftwerken, von Chemieanlagen, von Hochöfen, Walzstraßen usw., also überall dort, wo in einem umfangreichen und mehr oder weniger stetigen Produktionsvorgang zahlreiche Meßwerte berücksichtigt werden müssen, um eine sichere und möglichst optimale Fahrweise zu erzielen. Diese Meßwerte werden in dem Rechner zu Steuersignalen für den Fertigungsprozeß umgesetzt.

In den vergangenen zwanzig Jahren seit dem Aufkommen der ersten Rechenautomaten sind zahlreiche Typen von Rechenautomaten entwickelt worden. Viele davon wurden in mehr oder weniger großen Stückzahlen in Serie gebaut. Je nach der vorgesehenen Anwendung, den gewählten Bauelementen und angeschlossenen Aggregaten entstanden die unterschiedlichsten Geräte. Angesichts dieser Vielfalt sind die Grenzen zu benachbarten Gebieten nicht so scharf zu ziehen. So besitzen komplizierte Steuerungseinrichtungen, moderne Fernmeldevermittlungsanlagen, Sicherungsanlagen usw. manchmal bald den Charakter von Rechenautomaten. Auch in hochkomplizierten Maschinen wie Buchungsmaschinen, gewissen Lochkartenmaschinen, modernen Schreibautomaten u. a. werden oft Bauteile und gewisse Arbeitsweisen, die bei Rechenautomaten üblich sind, verwendet. So kann man sich einen Schreib- oder Setzautomaten vorstellen (vielleicht gibt es so etwas sogar schon), der mit einem adressierbaren Speicher mittlerer Größe verbunden ist. Gewisse häufig wiederkehrende Buchstabenfolgen, Worte, Sätze oder ganze Passagen aus Briefen oder anderen Schriftstücken werden von der Schreiberin während der ersten Niederschrift zusammen mit allen Steuersignalen für die Schreibmaschine in bestimmte Speicherzellen übernommen. Beim erneuten Auftreten dieser Begriffe genügt eine einzige Auslösung, um sie von der Maschine automatisch auszuschreiben. Ein solcher Automat wirkt wie eine Schreibmaschine mit wesentlich vergrößerter Tastenzahl, bei deren Anschlag nicht nur ein einzelner Buchstabe, sondern ganze Satzteile und mehr geschrieben werden können. Eine solche Anlage müßte teilweise direkt programmierbar sein, um einen gewissen Schreibkomfort wie selbständiges Abteilen, Ausgleich des rechten Randes, unterschiedlichen Wagenvorschub je nach Buchstabenbreite, Ankündigung von Zeilen- und Seitenende, Papierwechsel, Schriftartenwechsel, Steuerung von parallel geschalteten Schreibmaschinen usw. automatisch zu bewirken.

Man erkennt, wie Prinzipien der Technik von Rechenautomaten auch in solche Gebiete eindringen, die im Grunde nichts mit numerischen Rechnungen mehr zu tun haben. Solche Geräte haben mit den Rechenautomaten nur noch die folgende Eigenschaft gemeinsam: Auf Grund genau vorgeschriebener Regeln und Verfahren, die durch gewisse Einstellungen und Eingabeinformationen festzulegen sind, wird eine Folge von Steuersignalen für eine Ausgabeeinrichtung ausgelöst.

Die elektronischen Rechenautomaten im engeren Sinne haben einen gewissen Abschluß in ihrer Entwicklung gefunden. Sie werden wohl noch schneller, billiger, komfortabler und wartungsfreier werden, doch liegt das Schwergewicht der weiteren Entwicklung mehr auf dem Gebiet komplizierter Steuerungseinrichtungen, die den Charakter von **Datenverarbeitungsanlagen** erhalten. Hierzu gehören Steuerungen und Überwachungen von technischen und technologischen Prozessen (in Kraftwerken, Verbund- und Verkehrsnetzen, bei Informationsübertragungen, Fertigungsvorgängen, Taktstraßen usw.). Ein weiterhin wichtiges Gebiet ist eine Automatisierung aller Buchhaltungsprobleme, wie Buchungsvorgänge (Sparkassen, Banken, Handel, Wirtschaft), Inventuren, Statistiken (Meldeämter) mit ihren millionenfach gleichen Routinearbeiten. Es wird deshalb immer mehr üblich, statt von elektronischer Rechentechnik umfassender von elektronischer Datenverarbeitung zu sprechen.

Mit dieser Aufzählung sind die Anwendungsmöglichkeiten für Rechenautomaten durchaus nicht erschöpft.

Es ist in den nächsten Jahren mit einem ständig steigenden Einsatz von Rechenautomaten und ganz besonders von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen in den verschiedensten Zweigen der Wirtschaft, der Verwaltung, der Forschung, der Lehre usw. zu rechnen. Dies bringt eine Umwälzung vieler gewohnter Vorgänge und Erscheinungen des gesellschaftlichen Lebens mit sich. Die automatische Datenverarbeitung stellt einen wesentlichen Anteil der vor uns stehenden technischen Revolution dar. Jeder Ingenieur muß deshalb heutzutage Kenntnisse über das Wesen und die Anwendungsmöglichkeiten der elektronischen Rechentechnik und der automatischen Datenverarbeitung in seinem Fachgebiet besitzen, wenn er seine Aufgaben umfassend und mit den modernsten Mitteln lösen will.

Lösungen

1. $$v = \pi \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{n}{\text{min}^{-1}} \cdot \text{mm} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \frac{1\ \text{m}}{1000\ \text{mm}}$$

$$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}} = \frac{\pi}{1000} \cdot \frac{d}{\text{mm}} \cdot \frac{n}{\text{min}^{-1}}$$

$$\underline{\underline{z = 0{,}00314\, x \cdot y}}$$

mit $x = \dfrac{d}{\text{mm}}$, $y = \dfrac{n}{\text{min}^{-1}}$, $z = \dfrac{v}{\text{m} \cdot \text{min}^{-1}}$

2. $$\frac{m}{l} = \pi \left[\left(\frac{d}{\text{mm}}\right) \cdot \left(\frac{s}{\text{mm}}\right) + \left(\frac{s}{\text{mm}}\right)^2\right] \frac{\varrho}{\text{kg dm}^{-3}} \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot \frac{1\ \text{m}^2}{10^6\ \text{mm}^2} \cdot \frac{10^3\ \text{dm}^3}{1\ \text{m}^3}$$

$$\frac{\frac{m}{l}}{\text{kg m}^{-1}} = \frac{\pi}{1000} \left[\left(\frac{d}{\text{mm}}\right) \cdot \left(\frac{s}{\text{mm}}\right) + \left(\frac{s}{\text{mm}}\right)^2\right] \cdot \frac{\varrho}{\text{kg dm}^{-3}}$$

$$\underline{\underline{x_4 = 0{,}00314\, (x_1 \cdot x_2 + x_2^2)\, x_3}}$$

mit

$$x_1 = \frac{d}{\text{mm}}, \quad x_2 = \frac{s}{\text{mm}}, \quad x_3 = \frac{\varrho}{\text{kg dm}^{-3}}, \quad x_4 = \frac{\frac{m}{l}}{\text{kg m}^{-1}}.$$

3. $$F = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-12}}{2} \frac{\text{As}}{\text{V m}} \frac{\left(\frac{U}{\text{V}}\right)^2 \cdot \frac{A}{\text{cm}^2}}{\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2} \cdot \frac{\text{V}^2\text{cm}^2}{\text{mm}^2} \cdot \frac{10^2\ \text{mm}^2}{1\ \text{cm}^2} =$$

$$= 4{,}43 \cdot 10^{-10} \frac{\left(\frac{U}{\text{V}}\right)^2 \cdot \frac{A}{\text{cm}^2}}{\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2} \cdot \frac{\text{VAs}}{\text{m}}.$$

Mit $1\ \text{VAs} = 1\ \text{Ws} = 0{,}102\ \text{kpm} = 0{,}102 \cdot 10^6\ \text{mpm}$ ist

$$F = 4{,}43 \cdot 10^{-10} \frac{\left(\frac{U}{\text{V}}\right)^2 \cdot \frac{A}{\text{cm}^2}}{\left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^2} \cdot \frac{\text{VAs}}{\text{m}} \cdot \frac{0{,}102 \cdot 10^6\ \text{mpm}}{1\ \text{VAs}}$$

$$\frac{F}{\mathrm{mp}} = 4{,}52 \cdot 10^{-5} \frac{\left(\frac{U}{\mathrm{V}}\right)^2 \cdot \frac{A}{\mathrm{cm}^2}}{\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)^2}.$$

4. Mit $x = \frac{R}{\Omega}$, $X_{\max} = 75$ mm, $x_0 = 20$, $\Delta X = 1$ mm und $\Delta x = 0{,}5$ ist

$$\Delta X = l_x \cdot \Delta x,$$

$$l_x = \frac{\Delta X}{\Delta x} = \frac{1 \text{ mm}}{0{,}5} = 2 \text{ mm}$$

und nach (2)

$$l_x(x_n - x_0) \leqq X_{\max}$$

$$x_n \leqq \frac{X_{\max}}{l_x} + x_0 = \frac{75 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} + 20 = \underline{\underline{57{,}5}}.$$

Es kann maximal der Bereich von 20 Ω bis 57,5 Ω auf der Leiter untergebracht werden.

5. Gegeben: $x_0 = 0$, $x_n = 120$, $\Delta X = 1$ mm, $\Delta x = 2$.

Es ist $l_x = \frac{\Delta X}{\Delta x} = 0{,}5$ mm,

$X_{\max} = 0{,}5$ mm $(120 - 0) = 60$ mm.

Aus $b = X_{\max}$ folgt $\frac{5\pi}{6} r = 60$ mm,

$$\underline{\underline{r = 22{,}9 \text{ mm}}}.$$

6. Es ist $x_0 = 1$, $x_n = 10$. Für die darzustellende Mantisseneinheit stehen 250 mm zur Verfügung, so daß $l_x = 250$ mm.

$$X = 250 \text{ mm} (\lg x - \lg 1) = 250 \text{ mm} \cdot \lg x$$

$x = 2$ $X = 250 \text{ mm} \cdot 0{,}301 = 75{,}25$ mm,

$x = 5$ $X = 250 \text{ mm} \cdot 0{,}699 = 174{,}75$ mm,

$x = 8$ $X = 250 \text{ mm} \cdot 0{,}903 = 225{,}75$ mm.

7. Es ist $f_{\max}(x) = -10$, $f_{\min}(x) = -20$, somit

$$l_x \leqq \frac{80 \text{ mm}}{-10 - (-20)} = 8 \text{ mm}$$

Leitergleichung $X = -8$ mm $(x - 20)$; s. Bild 120. Die Leiter beginnt mit $x = 20$, $X = 0$.

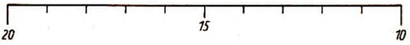


Bild 120

8. Zeicheneinheit $l_x \leqq \frac{100 \text{ mm}}{5^3 - 0^3} = 0{,}8$ mm

Gleichung der Leiter $X = 0{,}8 \text{ mm} \cdot x^3$.

Die Leiter wird punktweise bestimmt, z. B. aus

x	0	1	2	3	3,5	4	4,5	5
$\frac{X}{\text{mm}}$	0	0,8	6,4	21,6	34,4	51,2	72,9	100

Leiter s. Bild 121.

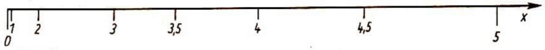


Bild 121

9. Es ist $f_{\min}(x) = f(0) = f(10) = 0$ und $f_{\max}(x) = f(5) = 25$

$$l_x \leqq \frac{75 \text{ mm}}{25 - 0} = 3 \text{ mm}.$$

Leitergleichung $X = 3 \text{ mm}\,(10x - x^2)$. Von $x = 5$ an ist die Leiter wieder gegenläufig. Die Leiter ist als x-Achse in Bild 25 (Seite 50) dargestellt.

10. $f(x) = \tan x°$, $x_0 = 0$, $x_n = 60$, $X_{\max} = 90$ mm.

$$l_x \leqq \frac{90 \text{ mm}}{\tan 60° - \tan 0°} = 52{,}0 \text{ mm}.$$

Zweckmäßigerweise wird $l_x = 50$ mm gewählt. Mit $X = 50 \text{ mm} \cdot \tan x°$ können beliebige Punkte der Teilung berechnet werden:

x	0	10	20	30	40	45	50	60
$\frac{X}{\text{mm}}$	0	8,8	18,2	28,9	42,0	50	59,6	86,6

Die Leiter kann ebenso nach Tafel 39 mit Hilfe eines Kreises mit Radius 50 mm konstruiert werden. Doch ist diese Konstruktion für $x > 45$ kaum noch brauchbar.
Die Schrittlänge kann von $\Delta x = 1$ am Anfang auf etwa $\Delta x = 0{,}3$ am Ende der Teilung verkleinert werden.

11. $X = 20 \text{ mm} \dfrac{2x + 7}{2x - 12} = 20 \text{ mm} \left(1 + \dfrac{9{,}5}{x - 6}\right)$

$x = -3{,}5 \quad X = 0$

$x = 6 \quad X = \infty$

$x = \infty \quad X = 20$ mm.

Die Konstruktion der Leiter aus diesen drei Punkten zeigt Tafel 40.

12. Aus $x = \dfrac{X}{Y}$ und $Y = 1000 \text{ mm} - X$ folgt

$$x = \frac{X}{1000 \text{ mm} - X}$$

und $X = 1000 \text{ mm} \dfrac{x}{x + 1}$.

Dies ist die Gleichung einer projektiven Leiter mit $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $l_x = 1000$ mm. Die im Maßstab 1 : 10 verkleinerte Leiter hat die Gleichung

$$X = 100\ \text{mm}\ \frac{x}{x+1} = 100\ \text{mm}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$

Die Konstruktion der projektiven Leiter erfolgt z. B. aus folgenden drei Punkten (Tafel 41):

$$x = 0 \quad X = 0$$

$$x = 1 \quad X = 50\ \text{mm}$$

$$x = \infty \quad X = 100\ \text{mm}$$

Die Teilung zwischen den Punkten A und B ist an dem Meßdraht der WHEATSTONEschen Brücke anzubringen.

13. Die Konstruktion und das Ergebnis der projektiven Interpolation ist in Tafel 42 dargestellt.

14. In Tafel 43 wurden zunächst die Punkte für ganzzahlige x im Intervall $2 \leqq x \leqq 5$ von der Kubikleiter aus Aufgabe 8 übertragen. Für die Punkte 2, 3, 4 bzw. 3, 4, 5 der Kubikleiter und beliebige reguläre Leitern wurden Projektionszentren P_1 und P_2 konstruiert und die Punkte für die Zehntel übertragen. Im mittleren Teil der Leiter unterscheiden sich die Ergebnisse der beiden Projektionsbüschel. Endgültig müßte dort der Mittelwert genommen werden. An der unteren Seite der Leiter sind zum Vergleich die aus der Leitergleichung $X = 0{,}8\ \text{mm}\ x^3$ berechneten Teilpunkte der Kubikleiter angetragen. Die Abweichung ist in der Mitte der Intervalle zwischen den ganzzahligen Werten am größten.

15. Da sich bei der graphischen Darstellung in Tafel 14 auf Millimeterpapier eine Gerade ergibt, liegt eine lineare Funktion mit der Gleichung

$$y = mx + b$$

vor, wobei $x = \dfrac{F}{\text{kp}}$, $y = \dfrac{l}{\text{mm}}$ ist.

Folgende Punkte können abgelesen werden

$$x = 0, \quad y = 15830$$

$$x = 5, \quad y = 15920$$

und ergeben eingesetzt

$$15830 = 0 + b$$

$$15920 = 5\,m + b.$$

Daraus folgt $b = 15830$, $m = 18$ und

$$y = 18x + 15830$$

$$\underline{\underline{\frac{l}{\text{mm}} = 18\,\frac{F}{\text{kp}} + 15830.}}$$

16. Das Auftragen der Werte auf lg-lg-Papier ergibt eine Gerade (Tafel 44), die zugehörige Funktionsgleichung lautet also

$$y = b \cdot x^n.$$

Mit den Punkten $x = 1$, $y = 4{,}8$ und $x = 5$, $y = 119{,}9$ folgt daraus

$$4{,}8 = b \cdot 1^n$$
$$119{,}9 = b \cdot 5^n$$

und weiter $b = 4{,}8$ sowie

$$\frac{119}{4{,}8} = 5^n \to n \cdot \lg 5 = \lg 119{,}9 - \lg 4{,}8$$
$$n = \frac{\lg 119{,}9 - \lg 4{,}8}{\lg 5} = \frac{2{,}0788 - 0{,}6812}{0{,}6989} = \frac{1{,}3976}{0{,}6989} \approx 2\,.$$

Damit ist

$$y = 4{,}8 \cdot x^2$$
$$\frac{s}{\text{mm}} = 4{,}8 \left(\frac{t}{\frac{1}{32}\,\text{s}}\right)^2 = 4{,}8 \cdot 1024\ \frac{t^2}{\text{s}^2}$$
$$\underline{\underline{s = 4{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}\, t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, t^2 \approx \frac{1}{2}\, g\, t^2\,.}}$$

17. Das Einsetzen der gegebenen Werte führt zu

$$p \cdot V^{1,4} = 1\ \text{at} \cdot (1\ \text{dm}^3)^{1,4}$$

und mit $x = \dfrac{V}{\text{dm}^3}$, $y = \dfrac{p}{\text{at}}$ zu

$$y = x^{-1,4}.$$

Das ist eine Gleichung von der Form (15), so daß die Darstellung im lg-lg-Netz zu erfolgen hat, das etwa mit $l_x = l_y = 50$ mm gewählt wird (Tafel 45). Die Gerade läßt sich z. B. aus den Punkten $x = 1$, $y = 1$ und $x = 0{,}1$, $y = 25{,}1$ zeichnen, wobei sich der letztere durch logarithmische Rechnung ergibt.

18. Die x-Achse ist reziprok, die y-Achse regulär zu teilen:

$$X = 10\ \text{mm} \cdot \frac{1}{x}$$
$$Y = \ \ 5\ \text{mm} \cdot y\,.$$

Dann ergibt sich zwischen X und Y eine lineare Beziehung und damit eine Gerade

$$\frac{Y}{5\ \text{mm}} = \frac{X}{10\ \text{mm}} + 2$$
$$Y = \frac{1}{2}\, X + 10\ \text{mm}\,.$$

Die Punkte $x = \infty$, $y = 2$ und $x = 0{,}1$, $y = 12$ dienen zum Zeichnen der Geraden (Tafel 46).

19. a) Die Funktionsgleichung lautet nach (15)

$$y = b \cdot x^n\,.$$

Das Einsetzen der gegebenen Punkte ergibt

$$\left.\begin{array}{l} 1 = b \cdot 1^n \\ 4 = b \cdot 2^n \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 1 \\ n = 2, \end{array}$$

also $\underline{\underline{y = x^2.}}$

b) Die Parallelen zu der Geraden haben die Gleichungen $y = Cx^2$, wobei C beliebige Werte annehmen kann.
In Tafel 47 sind einige Kurven dieser Schar für verschiedene C dargestellt.

20. a) Die Darstellung hat auf mm-lg-Papier zu erfolgen. Zum Zeichnen der Geraden können die Punkte $x = 0$, $y = 1$ und $x = 3$, $y = 19{,}68$ benutzt werden.

b) Die Parallelen zu $y = 2{,}7^x$ haben die Gleichung $y = C \cdot 2{,}7^x$. In Tafel 48 sind einige Kurven dieser Schar für verschiedene C dargestellt.

21. a) Die Netztafel mit regulär geteilten Achsen enthält Kurven für die einzelnen Werte des Parameters, die durch Wertetabellen ermittelt werden müssen (Tafel 49).

b) Nach Gleichung (23) ergibt sich im lg-lg-Netz eine Strahlentafel (Tafel 50). Zu beachten ist, daß jetzt im Gegensatz zu a) nur positive Werte von x und y dargestellt werden können. Alle Geraden gehen durch den Punkt $x = 1$, $y = 1$. Für jede Gerade wird ein zweiter Punkt zum Zeichnen berechnet, z. B. $z = \frac{1}{2}$, $x = 9$, $y = 3$.

22. Nach den Regeln für Logarithmen gilt

$$y = \log_z x = \frac{\lg x}{\lg z}.$$

Dies entspricht Gleichung (21), wobei für den Faktor z der Term $\frac{1}{\lg z}$ steht. Im lg-mm-Netz entsteht eine Strahlentafel. Für das Zeichnen wird der für alle Geraden gültige Punkt $x = 1$, $y = 0$ sowie ein weiterer gewählt, z. B. $z = 10$, $x = 10$, $y = 1$ (Tafel 51).

23. Der Zusammenhang lautet

$$P = \frac{W}{A}.$$

Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{W}{\text{TMDN}}, \quad z = \frac{A}{\text{Anzahl der Arbeiter}}$$

$$y = \frac{P}{\text{TMDN/Anzahl der Arbeiter}}$$

entsteht die Funktionsgleichung $y = \frac{x}{z}$, die lt. Gleichung (17) mit $\frac{1}{z}$ statt z eine Strahlentafel im regulären Netz ergibt, die mit den Zeicheneinheiten $l_x = 0{,}05$ mm, $l_y = 10$ mm in Tafel 52 dargestellt ist. Alle Geraden gehen durch den Ursprung, außerdem wird jeweils noch ein zweiter Punkt verwendet, z. B. $z = 200$, $x = 2000$, $y = 10$.

24. Mit $x = z_a$, $y = z_b$ und $z = i$ folgt $y = x \cdot z$. Da ein reguläres Netz gefordert ist, wird diese Gleichung lt. (17) als Strahlentafel mit dem Parameter $z = i$ dargestellt.

Zeicheneinheiten $l_x \leqq \frac{120 \text{ mm}}{120 - 10} = 1{,}09 \text{ mm}$

$$l_y \leqq \frac{150 \text{ mm}}{280 - 20} = 0{,}58 \text{ mm}$$

Mit $l_x = 1$ mm, $l_y = 0{,}5$ mm wird Tafel 53 angelegt. Für jede Gerade werden zwei Punkte berechnet, z. B. $i = 3{,}6$: $z_a = 10$, $z_b = 36$ und $z_a = 50$, $z_b = 180$.

Ablesebeispiel: $z_a = 95$, $i = \sqrt[10]{10} \to z_b = 120$.

25. Da die Basis der Exponentialfunktion nur einzelne Werte anzunehmen braucht und sich daher als Parameter eignet, wird von den möglichen Formen (19) und (23) die erstere bevorzugt. Mit den Abkürzungen

$$x = n, \; z = 1 + \frac{p}{100}, \quad y = \frac{b_n}{b_0} \text{ folgt}$$

$$y = z^x,$$

das auf mm-lg-Papier eine Strahlentafel ergibt. Die Anlage der Tafel 54 erfolgt mit $l_x = 10$ mm und $l_y = 250$ mm, wobei in y-Richtung nur ein kleiner Bereich benötigt wird.

26. Die vorgelegte Gleichung ist von der Form (18) und führt damit zu einer Parallelentafel im mm-lg-Netz.
Mit

$$x = \varphi, \quad y = \frac{L_e}{\text{cm}}, \quad z = \frac{L_a}{\text{cm}}$$

entsteht

$$y = z \cdot e^{-x} = z \cdot (e^{-1})^x = z \cdot 0{,}368^x.$$

Zeicheneinheiten: $l_x \leqq \frac{100 \text{ mm}}{4 - 0} = 25 \text{ mm}$

$$l_y \leqq \frac{100 \text{ mm}}{\lg 100 - \lg 1} = 50 \text{ mm}.$$

Es wird mm-lg-Papier mit $l_y = 40$ mm gewählt und die Abszissenachse mit $l_x = 20$ mm unterteilt (Tafel 55). Zum Zeichnen der Geraden kann die Tatsache Verwendung finden, daß für $x = 0$ gilt $y = z$, d. h., im Schnittpunkt auf der y-Achse stimmt der Wert des Parameters mit der Ordinate überein. Für eine Gerade wird ein zweiter Punkt berechnet, z. B. $z = 100$, $x = 4$, $y = 1{,}83$, alle übrigen Geraden verlaufen parallel zu dieser.

Ablesebeispiel: $L_a = 20$ cm, $\varphi = 0{,}8 \to L_e = 9{,}0$ cm.

27. Da für d_a nur einzelne Werte benötigt werden, wird es als Parameter gewählt. Mit

$$x = M, \quad y = \frac{d_e}{\text{mm}}, \quad z = \frac{d_a}{\text{mm}}$$

ergibt sich $y = x^{-1/2} \cdot z$. Das ist eine Gleichung von der Form (22) und ergibt im lg-lg-Netz eine Parallelentafel. Die geforderten Bereiche lassen ein Papier mit $l = 100$ mm zu (Tafel 56). Für $x = 1$ ist $y = z$ wie in Übung 26. Weitere Punkte werden möglichst mit Quadratzahlen für x gebildet, z. B. $z = 240$, $x = 4$, $y = 120$.

Ablesebeispiel: $d_a = 300$ mm, $M = 3 \to d_e = 173$ mm.

28. Entsprechend den geforderten Werten wird v als Parameter gewählt. Mit

$$x = \frac{F}{\text{kp}}, \quad y = \frac{P}{\text{PS}}, \quad z = \frac{v}{\text{m s}^{-1}}$$

folgt $y = \frac{1}{75}\, xz.$

Das entspricht (22) und führt auf lg-lg-Netz zu einer Parallelentafel. Die vorgeschriebenen Abmessungen und Wertebereiche erfordern ein Papier mit $l = 50$ mm (Tafel 57). Die Geraden werden aus geeigneten Punkten bestimmt, z. B. $z = 2$, $x = 75$, $y = 2$ und $z = 2$, $x = 750$, $y = 20$.

Ablesebeispiel: $F = 200$ kp, $v = 5\ \text{m s}^{-1} \rightarrow P = 13{,}3$ PS.

29. Mit denselben Abkürzungen wie in dem genannten Beispiel gilt

$$y = \frac{\pi}{1000}\, xz.$$

Die Darstellung im lg-lg-Netz erfolgt als Parallelentafel auf der Grundlage von Gleichung (22). Die Intervalle von x und y können wegen der logarithmischen Teilung nicht mehr mit Null beginnen. Es werde etwa $x_0 = y_0 = 10$ gewählt. Die geforderten Intervalle und Abmessungen werden mit $l = 62{,}5$ mm eingehalten (Tafel 58). Die Geraden werden aus geeigneten Punkten bestimmt, z. B.

$$z = 450, \quad x = 10, \quad y = 14{,}14$$
$$x = 100, \quad y = 141{,}4.$$

Die Ablesebeispiele führen auf dieselben Ergebnisse wie in Tafel 18.

30. Das vorgelegte Gesetz wird umgeformt:

$$v^2 = v_0^2 + g^2 t^2 =$$
$$= v_0^2 + 9{,}81^2\, \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}\, t^2.$$

Division durch $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ führt zu

$$\left(\frac{v}{\text{m s}^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\text{m s}^{-1}}\right)^2 + 96{,}24 \left(\frac{t}{\text{s}}\right)^2.$$

v_0 wird als Parameter gewählt. Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{t}{\text{s}}, \quad y = \frac{v}{\text{m s}^{-1}}, \quad z = \frac{v_0}{\text{m s}^{-1}}$$

folgt

$$y^2 = 96{,}24 x^2 + z^2.$$

Da diese Gleichung keiner behandelten Schlüsselgleichung entspricht, ist ein spezielles Funktionsnetz anzulegen. Quadratisch geteilte Leitern führen auf einen linearen Zusammenhang.

Das geforderte Intervall für x und die Werte für z erfordern für y einen Bereich von 0 bis 120. Daher folgt für die Zeicheneinheiten

$$l_x \leqq \frac{100 \text{ mm}}{10^2 - 0^2} = 1 \text{ mm}$$

$$l_y \leqq \frac{150 \text{ mm}}{120^2 - 0^2} = 0{,}0104 \text{ mm, gewählt } l_y = 0{,}01 \text{ mm}.$$

Mit diesen Einheiten ist für Tafel 59 ein quadratisches Netz anzulegen. Die Geraden sind aus geeigneten Punkten zu bestimmen, z. B.

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$$
$$x = 10, \quad y = 98{,}1.$$

Ablesebeispiel: $t = 8$ s, $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1} \rightarrow v = 84 \text{ ms}^{-1}$.

31. Mit f als Parameter und den Abkürzungen

$$x = \frac{b}{\text{cm}}, \quad y = \frac{g}{\text{cm}}, \quad z = \frac{f}{\text{cm}}$$

folgt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.
Da diese Gleichung unter den behandelten Schlüsselgleichungen nicht vorkommt, ist ein spezielles Netz mit Kehrwertleitern anzulegen, damit ein linearer Zusammenhang zwischen den Zeichenlängen entsteht.
Die Leitern werden nach

$$X = l_x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

$$Y = l_y \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)$$

mit $x_0 = y_0 = \infty$ und $l_x = l_y = 80$ mm geteilt. Diese Leitern entsprechen der in Bild 11 dargestellten. Zum Zeichnen der Geraden in Tafel 60 kann

$$x = \infty, \; y = z \quad \text{und} \quad y = \infty, \; x = z$$

verwendet werden.
Ablesebeispiel: $g = 3$ cm, $f = 2$ cm $\rightarrow b = 6$ cm.

32. In beiden Fällen handelt es sich um proportionale Umrechnungen, so daß sich jeweils beide Teilungen der Doppelleitern als reguläre Leitern mit unterschiedlichen Zeicheneinheiten ergeben, die entsprechend Tafel 61 angelegt werden können.

33. Aus einer Funktionstabelle für $\sin x$ wird an eine reguläre Leiter eine Sinusleiter mit $l = 60$ mm entsprechend Tafel 62 angelegt.

34. Mit $$x = \frac{F}{\text{kp}}, \quad y = \frac{v}{\text{m s}^{-1}}, \quad z = \frac{P}{\text{PS}}$$

entsteht $z = \frac{1}{75} xy$ und durch Logarithmieren

$$\lg z = \lg x + \lg y + \lg \frac{1}{75}.$$

Durch Vergleich mit (25) ergibt sich $A = B = C = 1$. Alle Leitern sind logarithmisch zu teilen.
Zeicheneinheiten der Außenleitern $l_1 = 75$ mm, $l_2 = 150$ mm
Abstandsverhältnis nach (26) $a : b = 2 : 1$.
Mit $a = 60$ mm, $b = 30$ mm wird die vorgeschriebene Breite der Tafel eingehalten. Für die Zeicheneinheit der Mittelleiter gilt nach (27) $l_3 = 50$ mm.

Der Anfangspunkt der Mittelleiter ergibt sich aus $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ zu $z_0 = \frac{1}{75} = 0{,}0133$. Damit kann Tafel 63 angelegt werden.

Ablesebeispiel: $F = 5$ kp, $v = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \to P = 0{,}4$ PS.

35. Nach dem angeführten Beispiel folgt mit

$$x = \frac{d}{\mathrm{mm}}, \quad y = \frac{l}{\mathrm{m}}, \quad z = \frac{m}{\mathrm{kg}}$$

die Zahlenwertgleichung

$$z = 6{,}16 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 y$$

und durch Logarithmieren

$$\lg z = 2 \lg x + \lg y + \lg (6{,}16 \cdot 10^{-3}).$$

Der Vergleich mit (25) führt zu $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$. Alle Leitern sind logarithmisch zu teilen, $l_1 = 50$ mm, $l_2 = 25$ mm.
Abstandsverhältnis $a : b = 1 : 1$, $a = 40$ mm, $b = 40$ mm. Die Mittelleiter ist mit $l_3 = 12{,}5$ mm und $z_0 = 6{,}16 \cdot 10^{-5}$ anzulegen. Die Leitertafel ist in Tafel 64 dargestellt.

Ablesebeispiel: $d = 2$ mm, $l = 50$ m $\to m = 1{,}2$ kg.

36. Logarithmieren ergibt

$$\lg z = 3 \lg x - \lg y$$

$A = 3$, $B = -1$, $C = 1$. Auf den Außenleitern ist je eine logarithmische Einheit aufzutragen, wobei eine Leiter gegenläufig zu teilen ist, $l_1 = 100$ mm, $l_2 = -100$ mm. Daraus folgt $a : b = 3 : 1$ und mit der Breite 80 mm: $a = 60$ mm, $b = 20$ mm. Die Mittelleiter ist mit $l_3 = 25$ mm und $z_0 = 0{,}1$ anzulegen (Tafel 65).

Ablesebeispiel: $x = 4$, $y = 6 \to z = 10{,}7$.

37. Mit $A = 10\,\mathrm{cm}^2$ und den Zahlenwerten

$$x = \frac{U}{\mathrm{V}}, \quad y = \frac{d}{\mathrm{mm}}, \quad z = \frac{F}{\mathrm{mp}}$$

wird das Ergebnis von Aufgabe 3 übergeführt in

$$z = 4{,}52 \cdot 10^{-4} \frac{x^2}{y^2}.$$

Nach dem Logarithmieren kann $A = 2$, $B = -2$, $C = 1$ abgelesen werden. Die gegebenen Wertebereiche führen zu $l_1 = 120$ mm, $l_2 = -60$ mm. Für die Leiterabstände folgt $a : b = 1 : 2$ und $a = 25$ mm, $b = 50$ mm. Die Mittelleiter erhält die Zeicheneinheit $l_3 = 20$ mm und den Anfangspunkt $z_0 = 0{,}102$ (Tafel 66).

Ablesebeispiel: $U = 30$ V, $d = 0{,}02$ mm $\to F = 10^3$ mp $= 1$ p.

38. Die vorgelegte Funktionsgleichung wird in der Form

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2$$

geschrieben. Wenn der gegebene Wert von ω eingesetzt und durch Ω^2 dividiert wird, folgt unter Beachtung von $1\,\Omega\mathrm{s} = 1\,\mathrm{H}$ die zugeschnittene Größengleichung

$$\left(\frac{Z}{\Omega}\right)^2 = \left(\frac{R}{\Omega}\right)^2 + 9{,}86 \cdot 10^4 \left(\frac{L}{\mathrm{H}}\right)^2,$$

die mit

$$x = \frac{R}{\Omega}, \quad y = \frac{L}{\mathrm{H}}, \quad z = \frac{Z}{\Omega}$$

in

$$z^2 = x^2 + 9{,}86 \cdot 10^4 \cdot y^2$$

übergeht. Der Vergleich mit der Schlüsselgleichung (25) zeigt, daß alle Leitern quadratisch geteilt werden müssen. Als Zeicheneinheiten der Außenleitern sind dann $l_1 = 0{,}0015$ mm und $l_2 = 150$ mm zu wählen.

Leiterabstände: $a : b = 10 : 9{,}86$ und $a = 50$ mm, $b = 49{,}3$ mm

Mittelleiter: $l_3 = 0{,}000\,755$ mm, $z_0 = 0$.

Das damit hergestellte Nomogramm (Tafel 67) zeigt, daß ein Gebrauch erst etwa ab $R = 50\,\Omega$, $L = 0{,}1$ H möglich ist.

Ablesebeispiel: $R = 160\,\Omega$, $L = 0{,}88\,\mathrm{H} \rightarrow Z = 319\,\Omega$.

39. Wenn der gegebene Wert für τ_{zul} und die Abkürzungen

$$x = \frac{d}{\mathrm{mm}}, \quad y = \frac{r}{\mathrm{mm}}, \quad z = \frac{F}{\mathrm{kp}}$$

eingesetzt werden, entsteht die Zahlenwertgleichung

$$z = 7 \cdot \frac{x^3}{y}$$

und nach dem Logarithmieren

$$\lg z = 3 \lg x - \lg y + \lg 7.$$

Alle Leitern sind logarithmisch zu teilen, die y-Leiter gegenläufig, Zeicheneinheiten $l_1 = 120$ mm, $l_2 = -120$ mm. Abstand der Leitern $a : b = 3 : 1$, $a = 60$ mm, $b = 20$ mm. Die Mittelleiter ist mit $l_3 = 30$ mm und $z_0 = 0{,}07$ anzulegen (Tafel 68).

Ablesebeispiel: $d = 1{,}5$ mm, $r = 30\,\mathrm{mm} \rightarrow F = 0{,}77$ kp.

40. Es ist $l_1 = l_2 = l_3$ und $a : b = 1 : 2$.
Aus der fortlaufenden Proportion in Abschnitt 1.3.2.

$$C : A : B = (a + b)\, l_3 : a l_1 : b l_2$$

folgt

$$C : A : B = 3 : 1 : 2.$$

Diese wird mit $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ befriedigt.
(Es können auch Vielfache dieser Zahlen gewählt werden, in der Schlüsselgleichung läßt sich dann kürzen.)

Da die Leitern logarithmisch geteilt sind, folgt nach der vereinfachten Schlüsselgleichung (25a)

$$3 \lg z = \lg x + 2 \lg y$$

oder

$$\underline{\underline{z^3 = x \cdot y^2.}}$$

41. Die Umformung ergibt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Mit den Zahlenwerten $x = \frac{R_1}{\Omega}$, $y = \frac{R_2}{\Omega}$, $z = \frac{R}{\Omega}$ entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

die vollständig dem Beispiel 1 aus 1.3.3. entspricht, so daß Tafel 69 nach den dort gegebenen Hinweisen angelegt werden kann.

42. Durch Umformung entsteht

$$\frac{R_x}{R_n} = \frac{X}{1000\ \mathrm{mm} - X}$$

$$\frac{\frac{R_x}{\Omega}}{\frac{R_n}{\Omega}} = \frac{\frac{X}{\mathrm{mm}}}{1000 - \frac{X}{\mathrm{mm}}}$$

und mit $x = \frac{R_x}{\Omega}$, $y = \frac{R_n}{\Omega}$, $z = \frac{X}{\mathrm{mm}}$

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{1000 - z}.$$

Dies entspricht der Schlüsselgleichung (35) für die N-Leitertafel. Die Außenleitern werden mit $l_1 = l_2 = 1$ mm regulär geteilt. Da $l_3 = 1$ ist, entspricht die rechte Seite $f_3(z)$ und hat nach der Herleitung von Formel (34) eine solche spezielle Form, daß die z-Leiter ebenfalls regulär zu teilen ist. Man bemerkt dies auch, wenn man $f_3(z) = \frac{z}{1000 - z}$ in Gleichung (34) einsetzt; dann folgt

$$Z = \frac{a}{1000} \cdot z.$$

Die Anlage der Tafel 70 bereitet nun keine Mühe mehr, die Mittelleiter wird so zwischen die Außenleiter gelegt, daß die vorgeschriebene Breite eingehalten wird, und mit der Zeicheneinheit $\frac{a}{1000}$ regulär unterteilt, wobei $a = 125$ mm berechnet wurde.

Ablesebeispiel: $R_n = 50\,\Omega$, $X = 250$ mm $\rightarrow$ $R_x = 16{,}7\,\Omega$.

43. Die Zerlegung der gegebenen Funktionsgleichung in

$$z = \frac{p \cdot d}{2}$$

und

$$s = \frac{z}{k}$$

ergibt 2 Gleichungen der Form (17), die als Strahlentafeln auf mm-Papier angelegt werden können. Im ersten Teilnomogramm wird p als Abszisse mit $l_x = 1$ mm und d als Parameter gewählt (Tafel 71). Die vertikale z-Teilung wird mit $l_z = 0{,}005$ mm angelegt, ohne beziffert zu werden. Von dieser Teilung geht das zweite Nomogramm aus, in dem k die Rolle des Parameters spielt. Die s-Leiter ist mit $l = 2{,}5$ mm angelegt.

Ablesebeispiel: $p = 20\,\mathrm{kp\,cm^{-2}}$, $d = 500$ mm, $k = 1000\,\mathrm{kp\,cm^{-2}} \to s = 5$ mm.

44. Mit der Hilfsvariablen h ergeben sich die beiden Teilfunktionen

$$h = m\,(100\,\% - w)$$

$$h = M\,(100\,\% - W).$$

Als Parameter wird w bzw. W gewählt. Entsprechend Gleichung (17) entstehen Strahlentafeln im mm-Netz (Tafel 72). Die vertikale Achse für die Hilfsvariable ist nicht gesondert eingezeichnet.

Ablesebeispiel: $m = 700$ t, $w = 40\%$, $W = 30\% \to M = 600$ t.

Da beide Nomogramme kongruent sind, braucht nur eines verwendet und dabei m und M bzw. w und W auf denselben Teilungen abgelesen zu werden. Das Ablesebeispiel führt dann entsprechend der gepunkteten Linie auf $W = 600$ t im linken Teilnomogramm.

45. Beide Gleichungen ergeben entsprechend (22) Parallelentafeln im lg-lg-Netz. In beiden Tafeln wird n als Parameter gewählt (Tafel 73 und 74). Bei geeigneter Wahl der Zeicheneinheiten haben die Linien für den Parameter in beiden Nomogrammen den gleichen Abstand voneinander. Wird das Nomogramm von Tafel 74 um die s-Achse umgeklappt, so daß die T-Teilung nach unten gerichtet ist, können die beiden Scharen zur Deckung gebracht werden. Damit lassen sich beide Teilnomogramme über die Linien für den Parameter miteinander verbinden, wobei die Teilungen an verschiedenen Seiten des Nomogramms anzubringen sind (Tafel 75). Während die Teilungen für d und s gleich gerichtet sind, sind die v- und T-Leitern entgegengesetzt gerichtet, so daß für T eigentlich eine weitere Schar von Netzlinien einzutragen wäre. Sie sind der besseren Übersicht halber jedoch weggelassen und auch nicht unbedingt nötig, da bei genügender Feinheit der T-Teilung die Werte genau genug abgelesen und die vorhandenen Netzlinien zur Führung benutzt werden können.

Ablesebeispiel: Für $d = 8$ mm, $v = 4\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ ist $n = 128\,\mathrm{min^{-1}}$ zu wählen; mit $s = 3$ mm ergibt sich $T = 2{,}6$ min.

46. Mit

$$x = \frac{L}{\mathrm{mm}}, \quad y = \frac{n}{\mathrm{min^{-1}}}, \quad z = \frac{\xi}{\mathrm{mm\,min}}$$

folgt für die erste Leitertafel $z = \dfrac{x}{y}$ und $\lg z = \lg x - \lg y$.

Zeicheneinheiten der Außenleitern: $l_1 = 75$ mm, $l_2 = -50$ mm
Abstände: $a : b = 2 : 3$, $a = 20$ mm, $b = 30$ mm
Ergebnisleiter für z: $l_3 = 30$ mm, $z_0 = 0{,}01$.

Mit z wie oben und $u = \dfrac{s}{\mathrm{mm}}$, $v = \dfrac{T}{\mathrm{min}}$ folgt für die zweite Leitertafel $v = \dfrac{z}{u}$ und $\lg v = \lg z - \lg u$.
Außenleitern: $l_3 = 30$ mm lt. 1. Teilnomogramm, $l_4 = -75$ mm.

Abstände: $d : e = 5 : 2$, $d = 50$ mm, $e = 20$ mm.
Ergebnisleiter für v: $l_5 = 21{,}43$ mm, $v_0 = 0{,}001$.
Die Träger der y- und v-Leiter fallen zusammen, die Teilungen werden auf entgegengesetzten Seiten des Trägers angebracht. Die Zapfenlinie wird nicht beschriftet (Tafel 76).
Ablesebeispiel: $L = 100$ mm, $n = 200$ min^{-1}, $s = 0{,}8$ mm $\rightarrow T = 0{,}6$ min

47. Wegen der beschränkten Anzahl der geforderten k-Werte liegt eine Verwendung von k als Parameter in einer Netztafel nahe. Mit k wird zunächst die andere durch die Bauausführung bestimmte Größe A zusammengefaßt.

Netztafel $z = k \cdot A$

Leitertafel $Q = z \cdot \Delta t$ bzw. $\lg Q = \lg z + \lg \Delta t$.

Da in der Leitertafel logarithmische Teilungen erforderlich sind, liegt auch für die Netztafel eine Darstellung im lg-lg-Netz lt. Gleichung (22) nahe. Das Netz wird mit $l = 62{,}5$ mm gewählt, so daß auch für die Einheit der z-Leiter in der anschließenden Leitertafel $l = 62{,}5$ mm festliegt. Dieselbe Einheit wird auch für die Δt-Leiter benutzt. Für die Abstände folgt $a : b = 1$ und für die Q-Leiter $l_3 = l/2$ mit $Q_0 = 1$ kcal h^{-1} (Tafel 77).
Ablesebeispiel: $A = 5$ m^2, Stahlbetonwand 12 cm dick, $\Delta t = 5$ grd $\rightarrow Q = 75$ kcal/h.

48. Die Gleichungen enthalten insgesamt 7 Variable, von denen sich 2 (n und h) eliminieren lassen.
Die Anlage der Netztafeln erfolgt lt. Gleichung (22) auf lg-lg-Papier. Die logarithmischen n- und h-Leitern werden mit s in einer Leitertafel zusammengefaßt. Bei der Koppelung durch die Leitertafel ist zu beachten, daß die s-Leiter Mittelleiter werden muß, damit sich nach beiden Seiten Netztafeln anschließen können (Tafel 78).
Ablesebeispiel: $d = 60$ mm, $v = 50$ m min^{-1}, ($n = 265$ min^{-1}), $s = 0{,}8$ mm, $L = 1000$ mm $\rightarrow T = 4{,}7$ min.

50. a) $\begin{pmatrix} 5+u & 6+v & 7+w & 4+x \\ 8+y & -6+z & 3+r & 2+t \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 0 & -2 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ -11 & 23 & 20 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} -3a & 30a & 0 \\ 0 & -6a & 9a \\ -33a & 69a & 60a \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 4 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -7 & -6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 0 & -2 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

55. $(a_1 : a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)$

56. $\begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot c_2 \\ b_1 \cdot a_2 & b_1 \cdot b_2 & b_1 \cdot c_2 \\ c_1 \cdot a_2 & c_1 \cdot b_2 & c_1 \cdot c_2 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} 12 & 20 \\ -3 & -11 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$ 59. $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 8 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ 60. $\begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 12 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} -16 & -39 & +51 & -37 & 51 \\ 22 & 6 & -36 & 22 & -6 \\ -39 & 57 & -25 & -8 & -22 \\ 23 & -33 & 22 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ 62. $\begin{pmatrix} 50 & 42 & 27 \\ 87 & -56 & -48 \\ 48 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

63. $\begin{pmatrix} 15 & 19 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 64. $\begin{pmatrix} 71 & 66 & 10 & 5 \\ 18 & 36 & 21 & -18 \\ 18 & -12 & -25 & 30 \\ 4 & 0 & -3 & 4 \\ 37 & 30 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

65. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 66. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 68. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

69. $\begin{pmatrix} -12 & 14 \\ 6 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ 70. $\begin{pmatrix} -4 & -7 & -2 & -6 \\ -9 & 0 & -3 & -6 \\ 2 & -8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

71. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -15 & -7 \\ 24 & 8 \end{pmatrix}$

72. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

73. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -14 \\ 14 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

74. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 110 & 9 & 62 \\ 35 & 0 & 14 \\ 25 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 26 & 47 \\ 65 & 96 \end{pmatrix}$

75. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

76. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 26 & -8 & 30 & 30 \\ -8 & 58 & 172 & -18 \\ 30 & 172 & 626 & 6 \\ 30 & -18 & 6 & 36 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 675 & 9 \\ 9 & 71 \end{pmatrix}$

77. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 21 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

78. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 28 \\ -5 & 4 & -14 \\ -5 & 4 & -14 \end{pmatrix}$

79. Weder Nullteiler noch vertauschbar.

80. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 17 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ nicht vertauschbar.

81. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 176 & 399 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ vertauschbar.

82. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ 21 & -6 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 22 & 56 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ nicht vertauschbar.

83. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$ vertauschbar.

84. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 24 & 15 & 0 \\ 21 & 6 & 3 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vertauschbar.

85. $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{E} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{O} & \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{22} \\ \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{E} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{O} & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 4 & -3 & 11 \\ 2 & 8 & 6 & 18 \\ 3 & -6 & 9 & 6 \\ \hdashline 0 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

86. $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}O & A_{11}B_{12} + A_{12}D \\ A_{21}B_{11} + A_{22}O & A_{21}B_{12} + A_{22}D \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{C} = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 11 & 1 & 13 \\ 6 & 10 & 11 & -13 \\ \hdashline 9 & -15 & 6 & -9 \\ 2 & -10 & 8 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$

87. $\mathfrak{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 \\ 130 \\ 4 \\ 339{,}4 \\ 28{,}4 \\ 42{,}2 \\ 3\,998{,}8 \\ 746{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ E \\ D \\ f \\ g \\ h \end{array}$

88.
$$
\begin{array}{c}
\\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix} 1{,}50 \\ 1{,}55 \\ 1{,}65 \\ 1{,}80 \\ 1{,}95 \\ 2{,}10 \\ 2{,}35 \\ 2{,}65 \end{pmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 11{,}60 \\ 10{,}00 \\ 7{,}55 \\ 10{,}25 \\ 11{,}30 \\ 13{,}30 \end{pmatrix} \\ \hline 64{,}00
\end{array}
$$

89.
$$
\begin{array}{rrr|rr|r}
 & & & 6 & 3 & 9 \\
 & & & 2 & 7 & 9 \\
 & & & 4 & 1 & 5 \\
\hline
4 & 7 & 8 & 70 & 69 & 139 \\
-6 & 3 & 5 & -10 & 8 & -2 \\
\hline
 & 7 & 5 & 440 & 523 & 963 \\
 & 8 & 3 & 530 & 576 & 1106
\end{array}
$$

90. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 46 & 28 & 46 \\ 20 & 10 & 20 \\ 9 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

91.
$$
\begin{array}{rrr|rrrr|rr}
 & & & & & & & -7 & -3 \\
 & & & 5 & 3 & -6 & 0 & 8 & -4 \\
 & & & 6 & 2 & 8 & -7 & 2 & 0 \\
 & & & 4 & 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 4 & 7 & 52 & 15 & 67 & -7 & -110 & -223 \\
3 & 2 & 1 & 31 & 14 & 3 & -11 & -99 & -160 \\
5 & 6 & 2 & 69 & 29 & 28 & -36 & -195 & -359 \\
\hline
8 & 12 & 10 & 152 & 58 & 98 & -54 & -404 & -742
\end{array}
$$

92. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = (8 \quad -32 \quad 36)$

93. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -448 & -637 \\ -1288 & -13 \end{pmatrix}$

94. $-884 - 962 - 81 = \underline{\underline{-1927}}.$

95. Aufgabe 77: $\det \mathfrak{A} = 0$ $\qquad \det \mathfrak{B} = 0$

Aufgabe 78: $\det \mathfrak{A} = 0$ $\qquad \det \mathfrak{B} = 0$

96. a)
$$
\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 0 \\ 1 & -13 & 16 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & -13 & 16 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} =
$$
$$
= \begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 65 & 35 & 16 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(5) \cdot \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = \underline{\underline{50}}
$$

b) $\underline{\underline{D = -76}}.$

97. $\mathfrak{A}^{-1} = \dfrac{1}{0{,}8}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0{,}04 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 6{,}25 \\ 0{,}05 & 1{,}25 \end{pmatrix}$

98. $\det \mathfrak{A} = 8 \quad \mathfrak{A}_{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

99. $\mathfrak{A}^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 6 & 10 & -5 \\ 12 & 12 & -12 \end{pmatrix}$

100. $\mathfrak{A}^{-1} = -\dfrac{1}{69}\begin{pmatrix} -3 & -30 & 24 \\ -10 & 15 & -12 \\ 4 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

101. $\mathfrak{A}^{-1} = \dfrac{1}{851}\begin{pmatrix} 91 & -17 & -4 \\ -24 & 98 & -27 \\ -11 & -26 & 94 \end{pmatrix}$

102. $\mathfrak{A}^{-1} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 6 & 2 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

103. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & -9 & -3 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -56 & -27 & -9 & 23 \\ 12 & 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

104.
$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 2 & 4 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\
 & & & -1 & 2 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
1 & -2 & 4 & -4 & 8 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
3 & -1 & 5 & 0 & 20 & -2 & 3 & -1 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 8 & 16 & 0 & 2 & 4 & 0 \\
\hline
6 & 1 & 9 & 4 & 44 & -2 & 6 & 1 & 9
\end{array}$$

105. $\mathfrak{x} = (-2,\ 2,\ 3,\ 4)$

106. Vierte Gleichung als erste setzen:
$\mathfrak{x} = (30,\ 10,\ 8,\ 12)$

107. $\mathfrak{x} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$

108. $\mathfrak{x} = (-3,\ 3,\ 4,\ 5,\ -2)$

109. Umordnen der Gleichungen
5., 4., 1., 2., 3. Gleichung
$\mathfrak{x} = (2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 4)$

110. $\mathfrak{x} = (5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$

111. $\mathfrak{x} = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

112. Zuordnung:
$$\begin{array}{llllll}
\text{Spalte} & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{Zeile} & 1. & 4. & 5. & 2. & 3.
\end{array}$$

Lösung:
$\mathfrak{x} = (14,\ 14,\ 13,\ 0,\ 2)$

113. Zuordnung:

$$\begin{array}{llllll} \text{Spalte} & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Zeile} & 1. & 3. & 5. & 2. & 4. \end{array}$$

Lösung:

$\mathfrak{x} = (-8, 2, 5, 2, 1)$

114. $D = 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-37)$

$\underline{\underline{D = -111}}$

115. $D = 1 \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 9$

$\underline{\underline{D = 90}}$

116. $D = 1 \cdot (-8) \cdot (-4) \cdot \frac{1}{4}$

$\underline{\underline{D = 8}}$

117. $D = 1 \cdot 1 \cdot (-28) \cdot 20 \cdot 8$

$\underline{\underline{D = -4480}}$

118. $D = -1 \cdot 7 \cdot 2\left(-\frac{78}{7}\right)$

$\underline{\underline{D = 156}}$

119. $r = 2$ **120.** $r = 2$ **121.** $r = 3$ **122.** $r = 5$ **123.** $r = 3$

124. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 5 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -1{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

125. $\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

126. Nach Vertauschung der ersten und zweiten Zeile werden Brüche im gestaffelten System vermieden.

8	6	13	1	1	1	30
1	2	3	0	1	0	7
3	1	4	1	0	0	9
4	3	6	0	0	1	14

$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

127. Zeilenfolge 2—3—1

$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{12} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

128. Gestaffeltes System Aufgabe 126 ohne Zeilenvertauschung:

$$\begin{array}{ccc} -3 & \boxed{-5} & -5 \\ \boxed{1} & 2 & 3 \\ -4 & -1 & \boxed{-1} \end{array}$$

129. Gestaffeltes System Aufgabe 127 ohne Zeilenvertauschung:

$$\begin{array}{ccc} 5 & \boxed{-12} & 5 \\ \boxed{-1} & -3 & 1 \\ 4 & -1 & \boxed{1} \end{array}$$

130. Gestaffeltes System

$$\begin{array}{ccc} -3 & \boxed{-8} & 0 \\ \boxed{1} & 4 & 2 \\ -5 & -\frac{19}{8} & \boxed{-7} \end{array}$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{28} & \frac{3}{28} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{19}{56} & -\frac{17}{56} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

131. Gestaffeltes System

$$\begin{array}{ccc} -3 & \boxed{2} & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 2 \\ -4 & -0{,}5 & \boxed{-2{,}5} \end{array}$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

132. $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

133. Bild 122

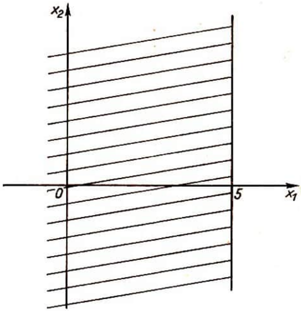


Bild 122

134. Bild 123

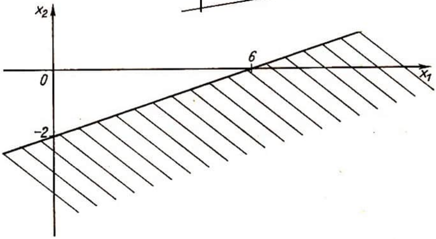


Bild 123

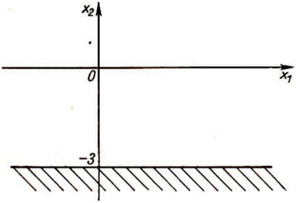


Bild 124

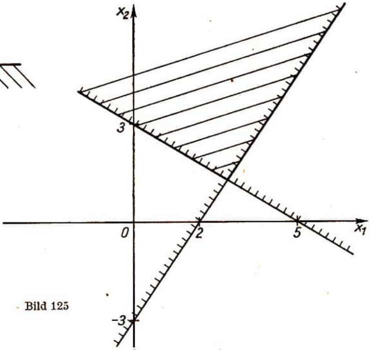


Bild 125

135. Bild 124

136. Die Lösungsmenge ist leer, wenn

a) eine Gerade als obere Grenze ($\leqq$), die andere als untere Grenze ($\geqq$) gegeben ist, und wenn die beiden Geraden parallel sind.

137. Bild 125

	a)	b)	c)
138.	beschränkte konvexe Menge;	keine	verträglich
139.	leere Menge;	(3) überflüssig;	unverträglich
140.	beschränkte konvexe Menge;	(2) überflüssig;	verträglich
141.	unbeschränkte konvexe Menge;	(1) überflüssig;	verträglich
142.	unbeschränkte konvexe Menge;	(4) überflüssig;	verträglich
143.	beschränkte konvexe Menge;	(4), (5) überflüssig;	verträglich
144.	leere Menge		unverträglich

145. $x_1 = 11 \quad x_2 = 3 \quad z_{\max} = 64$

Anleitung: Bei den Aufgaben 146 bis 154 sind die Werte für die Entscheidungsvariablen und für z angegeben. Es sind aber außerdem stets auch die Werte der Schlupfvariablen, die sich aus der Lösung ergeben, zu deuten.

146. a) $x_1 = 10 \quad x_2 = 2 \quad z_{\max} = 22$

b) $x_1 = 5 \quad x_2 = 7 \quad z_{\max} = 31$

147. a) $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad z_{\max} = 12$

b) $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad z_{\max} = 18.$

Die Bereiche der zulässigen Lösungen werden durch zwei verschiedene konvexe Polygone dargestellt; deshalb ergeben sich trotz gleicher Zielfunktionen zwei verschiedene Lösungs-Eckpunkte.

148. $x_1 = 7 \quad x_2 = 6 \quad z_{\max} = 27$

149. vgl. 145

150. 1. A: 600 B: 450 $z_{\max} = 1050$ Produkte

2. A: 400 B: 550 $z_{\max} = 950$ Produkte

3. A: 800 B: 350 $z_{\max} = 1150$ Produkte

151. A_1: 0 A_2: 10 B: 39 $z_{\max} = 694$ MDN

152. 1. Variante: $x_1 = 10 \quad x_2 = 2 \quad z = 36$

2. Variante: $x_1 = 5 \quad x_2 = 7 \quad z = 36$

153. 1. Variante: $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad z = 7$

2. Variante: $x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad z = 7$

154. a) 1. Variante: $x_1 = 30 \quad x_2 = 0 \quad z = 180$

2. Variante: $x_1 = 15 \quad x_2 = 45 \quad z = 180$

b) Die Zielgerade hat die gleiche Richtung wie die zur Ungleichung (2) gehörende Grenzgerade. Das Maximum wird in den beiden unter 154a) angegebenen Eckpunkten sowie in allen weiteren Punkten der zugehörigen Strecke angenommen.

155. b)

Schicht	I	II	III	IV
AK je Schicht	6 + 0	6 + 2	2 + 6	6 + 0

Es müssen 3 verschiedene Gruppen von AK eingesetzt werden: 6, 2, 6.

156. dual: $y_1 = 8 \quad y_2 = 2 \quad z_{\max} = 134$

primal: $x_1 = 6 \quad x_2 = 0 \quad z_{\min} = 134$

157. $G_A = 2320$ tkm 158. $G_A = 2230$ MDN

159. $G_A = 178$ MDN 160. $G_{\min} = 1470$ MDN

161. $G_{\min} = 2375$ MDN 162. $G_{\min} = 310$ MDN (3 Varianten)

163. $G_{\min} = 117$ tkm 164. $G_{\min} = 2960$ MDN

165. $G_{\min} = 1130$ MDN.

Es verbleiben 5 t bei E_2, 15 t bei E_3 und 40 t bei E_4

166. a) $G_{\min} = 2160$ MDN

Die dritte Feldbewertung zeigt, daß es eine Variante der Optimallösung gibt, wenn Feld (25) besetzt wird. Diese Variante enthält nur noch 5 Fahrtrouten (nochmalige Ausartung).

b) Der zweite Lösungsweg ergibt sofort die unter a) gefundene zweite Variante; wird in dieser (22) mit Null belegt, so erhält man die andere Variante.

167. $G_{\min} = 2090$ MDN

168. $G_{\min} = 154$ MDN

Die zweite Verbesserung ist ausgeartet; sie stellt bereits die Optimallösung dar, da für die beiden lt. Bewertung möglichen Verbesserungen nur eine Umverteilung der Null in Frage kommt.

169. $I_L = \dfrac{2700}{3185} = 0{,}848 \triangleq 84{,}8\%$

170. a) 4,5 b) 6,5

171. $\bar{x} = 10{,}4$ $s = 2{,}7018$

172. a) $\sum\limits_{x=1}^{5} 2x$ b) $\sum\limits_{x=1}^{6} \dfrac{2x-1}{2x}$ c) $\sum\limits_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} i^2$

173. a) $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 = 506/315 = 1{,}606$; b) 1380

174. 2,08

175. a) $5 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 13 = 42900$

b) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 2430$

176. a) -28302674400; b) $3^{7-4+1} = 3^4 = 81$

177. $\sqrt[4]{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9} = 4{,}8206$

178. a) $\dfrac{93}{13} = 7{,}154$ b) $c = 264$ $x = 264 + \dfrac{1}{3} = 264{,}333$

179. $\dfrac{105 \cdot 1 + 101 \cdot 5 + 108 \cdot 2{,}5 + 98 \cdot 3 + 102 \cdot 1 + 92 \cdot 2 + 110 \cdot 4}{18{,}5} = 102{,}7\%$

180. a) 3,4478 b) 5,3481 c) 6,6419

181. $\sqrt[8]{1{,}418} \cdot 100\% = 104{,}46\%$

182. 17,01%

183. a) 7,35% b) 21380 kg

184. 68,182 km/h

185. a) $Q = 5{,}4620$ b) $Q = 7{,}5608$ c) $Q = 7{,}5602$ d) $Q = 3{,}7683$
$H = 2{,}5793$ $H = 4{,}3575$ $H = 6{,}0407$ $H = 2{,}4412$

186. Flachs: $\tilde{x} = 70{,}50$; Wolle: $\tilde{x} = 12{,}09$

187. Flachs: $D = 72{,}86$; Wolle: $D = 11{,}73$

188. a) $\bar{x} = 280{,}625$

b) $\tilde{x} = 287{,}917$

c) $D = 292{,}857$

189. 8,65%

190. 2,59

191. a) 41242,5 GWh b) 106,35% c) 2515,2 GWh

192. aa) $\bar{x} = 47{,}856$

ab) $\tilde{x} = 47{,}7$; $\tilde{x}_1 = 47{,}6$ $\tilde{x}_2 = 47{,}8$

ba) $\bar{x} = 47{,}86$

bb) $\tilde{x} = 47{,}67$

193. a) $s = 76{,}986$ Formel (113b) $k = 275$

b) $v = 27{,}43\%$

194. a) $s = 3{,}1736$ Formel (113b) $k = 48{,}5$

b) $v = 6{,}63\,\%$

195. $d = 0{,}21$

196. a) $R = 11$ b) $d = 3{,}4$ c) $s = 4{,}5056$

197. a) $y = 513{,}90 + 121{,}37x + 6{,}98x^2$

b) $\sigma = \sqrt{\frac{14207}{11}} = 35{,}938;\quad v = 6{,}16\%$

198. a) $y = 2005{,}83 + 75{,}61x$

b) $\sigma = \sqrt{\frac{42300}{12}} = 59{,}371;\quad v = 2{,}96\%$

199.

Jahre	x_i
1955	1
1958	4
1960	6
1962	8
1963	9

$n = 5$

$y = 187{,}95 + 68{,}27x$

Jahre	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
y_i	256,2	324,5	392,8	461,0	529,3	597,6	665,8	734,1	802,4

200. $\bar{x} = 0{,}40/25 + 0{,}40 = 0{,}416;$ x_i-Werte um 0,40 verkleinert

$\bar{y} = 14{,}8/25 + 20 = 20{,}592;$ y_i-Werte um 20,0 verkleinert

$$a_1 = \frac{25 \cdot (-33{,}710) - 0{,}40 \cdot 14{,}8}{25 \cdot 0{,}9800 - 0{,}016} = -\frac{848{,}670}{24{,}34} = -34{,}867;\quad a_0 = 35{,}097$$

$$\tilde{y} = 35{,}097 - 34{,}867x$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{23} \cdot 47{,}63} = 1{,}4391$$

$$s_x^2 = \frac{0{,}9800}{24} - \frac{25 \cdot 0{,}40^2}{24 \cdot 25^2} = \frac{24{,}34}{600} = 0{,}040567$$

(nach Formel 113b)

$$s_y^2 = \frac{1239{,}62}{24} - \frac{25 \cdot 14{,}8^2}{24 \cdot 25^2} = \frac{30771{,}46}{600} = 51{,}285767$$

(nach Formel 113b)

$$s_{xy} = \frac{1}{24}\left[-33{,}710 - \frac{0{,}40 \cdot 14{,}8}{25}\right] = -1{,}41445 \text{ (nach Formel 128)}$$

$$r_{xy} = \frac{-1{,}41445}{\sqrt{0{,}040567 \cdot 51{,}285767}} = -0{,}981 \quad \text{(nach Formel 127c)}$$

$$B_{xy} = (-0{,}981)^2 = 0{,}962 \quad \text{(nach Formel 130a)}$$

201. $\bar{x} = 50 + 1{,}5 = 51{,}5;$ x_i-Werte um 50 verkleinert

$\bar{y} = -1/5 + 15 = 14{,}8;$ y_i-Werte um 15 verkleinert

$$a_1 = \frac{20 \cdot 3450 - 30 \cdot (-4)}{20 \cdot 14700 - 900} = \frac{69120}{293100} = 0{,}23582;\quad a_0 = 2{,}65527$$

a) $\tilde{y} = 2{,}65527 + 0{,}23582x$

b) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{18} \cdot 34} = 1{,}3744$

c) $s_x^2 = \frac{14700}{19} - \frac{20 \cdot 30^2}{19 \cdot 20^2} = \frac{293100}{380} = 771{,}3158$ (nach Formel 113b)

$s_y^2 = \frac{850}{19} - \frac{20 \cdot (-4)^2}{19 \cdot 20^2} = \frac{16984}{380} = 44{,}69474$ (nach Formel 113b)

$s_{xy} = \frac{1}{19}\left[3450 - \frac{30 \cdot (-4)}{20}\right] = 181{,}89474$ (nach Formel 128)

$r_{xy} = \frac{181{,}8947}{\sqrt{771{,}3158 \cdot 44{,}6947}} = 0{,}980$

d) $B_{xy} = 0{,}980^2 = 0{,}960$

202. Mit a beginnen $P_5 = 120$ Permutationen
mit b beginnen P_5 Permutationen, insgesamt 240
mit c beginnen P_5 Permutationen, insgesamt 360
mit d beginnen P_5 Permutationen, insgesamt 480
unter den letzten 120 befindet sich die 400. Permutation.
Mit da beginnen $P_4 = 24$ Permutationen, insgesamt 384
mit db beginnen P_4 Permutationen, insgesamt 408
unter den letzten 24 befindet sich die 400. Permutation.
Mit dba beginnen $P_3 = 6$ Permutationen, insgesamt 390
mit dbc beginnen P_3 Permutationen, insgesamt 396
mit dbe beginnen P_3 Permutationen, insgesamt 402
unter den letzten 6 befindet sich die 400. Permutation.
Mit $dbea$ beginnen $P_2 = 2$ Permutationen, insgesamt 398
mit $dbec$ beginnen P_2 Permutationen, insgesamt 400, also die 400. Permutation: $dbecfa$

203. 10 Kombinationen

204. $\binom{32}{10} = 64512240$

205. $\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = \frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!}$

206. $P_6^{(3;2)} = 60$
mit a beginnen $P_5^{(2;2)} = 30$ Permutationen
mit b beginnen $P_5^{(3;2)} = 10$ Permutationen, insgesamt 40
mit ca beginnen $P_4^{(2)} = 12$ Permutationen, insgesamt 52
mit $cbaa$ beginnen $P_2 = 2$ Permutationen, insgesamt 54, also ist $cbacaa$ die 55. Permutation.

207. Die 13. Kombination mit Wiederholung lautet $aabbcc$

208. a) $\binom{90}{2} = 4005$ b) $\binom{90}{3} = 117480$

c) $\binom{90}{4} = 2555190$ d) $\binom{90}{5} = 43949268$

209. $\binom{7}{4} - \binom{4}{4} = 34$

210. $\binom{4}{4} = 1$

211. $\binom{4}{1} = 4$

212. $Vw_2^{(1)} + Vw_2^{(2)} + Vw_2^{(3)} + Vw_2^{(4)} + Vw_2^{(5)} = 62$

213. Anschlüsse insgesamt: $10^5 = 100000$
Sonderanschlüsse: $10^4 = 10000$
allgemeine Anschlüsse: 90000

214. $P_3 = 6$

215. 10^{80}

216. a) $\binom{1000}{10}$

b) $\binom{1000}{50}$

217. a) 91 Farben

b) 10 Farben, denn $Vw_{10}^{(2)} = 10^2 = 100$ $(Vw_9^{(2)} = 81)$

c) 5 Farben, denn $Vw_5^{(3)} = 5^3 = 125$ $(Vw_4^{(3)} = 64)$

d) 4 Farben, denn $Vw_4^{(4)} = 4^4 = 256$ $(Vw_3^{(4)} = 81)$

e) 8 Ingenieure: 8 Farben
28 Meister: $C_8^{(2)} = 28$
55 Facharbeiter: $C_8^{(3)} = 56$,
8 Farben reichen also insgesamt aus, wenn die Ingenieure einfarbige, die Meister zweifarbige und die Facharbeiter dreifarbige Symbole erhalten.

218. a) $P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}96 \cdot 0{,}92 = 0{,}8832$

b) $P(A_1) \cdot P(A_3) = 0{,}96 \cdot 0{,}89 = 0{,}8544$

c) $P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}92 \cdot 0{,}89 = 0{,}8188$

219. Betrieb I (Ereignis A): $P(A) = 2/3$
Erzeugnis entspricht TGL (Ereignis B): $P(A \cap B) = 5/9$
gesucht: $P(B/A)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

220. a) $P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0{,}648324$

b) $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}001976$

c) Das Ereignis „wenigstens eine arbeitet“ ist das Komplementärereignis zu „alle fallen aus“.

$$P(A) = 1 - 0{,}001976 = 0{,}998024$$

221. a) $P(A) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} = 0{,}3048$

b) $P(A) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} + \dfrac{\binom{4}{2}\binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} + \dfrac{\binom{4}{3}\binom{28}{0}}{\binom{32}{3}} =$

$= 0{,}3048 + 0{,}0339 + 0{,}0008 = 0{,}3395$

oder: Das Ereignis „mindestens eine Zehn" ist das Komplementärereignis zu „keine Zehn", also

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{30}{3}} = 0{,}3395$$

222. Ereignis „6" — A; Ereignis „nicht 6" — $\bar{A}$; $P(\bar{A}) = \dfrac{5}{6}$

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}3349$$

223. Komplementärereignis zu „keine 6": $P = 1 - 0{,}3349 = 0{,}6651$

224. Es werden der Reihe nach der Größen x^*, $|\Delta x^*|$ und $|\varrho|$ angegeben.

a)	17,321;	0,00015;	0,00087%
b)	−1,532;	0,000099;	0,0065%
c)	0,100;	0,00002;	0,020%
d)	2,099;	0,00049;	0,023%
e)	−0,007;	0,000155;	2,2%
f)	0,656;	0,0005;	0,076%
g)	185,740;	0,0001;	0,000054%
h)	1768,322;	0,0005;	0,000028%
i)	−6,883;	0,00049;	0,0071%

225. Bedeutung der Größen wie in Aufgabe 224.

a)	17,3;	0,02085;	0,12%
b)	−1,53;	0,002099;	0,14%
c)	0,1000[1]);	0,00002;	0,020%
d)	2,10;	0,00051;	0,024%
e)	−0,00716;	0,000005;	0,070%
f)	0,656;	0,0005;	0,076%
g)	186;	0,2601;	0,14%
h)	1770 oder besser $1{,}77 \cdot 10^3$;	1,6785;	0,095%
i)	−6,88;	0,00251;	0,036%

[1]) Es empfiehlt sich hier, auch die Null in der vierten Stelle nach dem Komma anzugeben, da in diese Stelle gerundet wurde. Trotzdem liegt nur eine dreistellige Genauigkeit vor, da die Ziffer 1 erst durch Zehnerüberträge entstanden ist.

226. a) $D = 0{,}9171 - 0{,}9205 = \underline{\underline{-0{,}0034}}$

b) $D = -2 \cdot \sin 23{,}25° \cdot \sin 0{,}25° =$

$= -2 \cdot 0{,}3947 \cdot 0{,}004\,363 = \underline{\underline{-0{,}003\,444}}$

227. $0{,}478_1 - 504{,}6_9 = 0{,}4_8 - 504{,}6_9 = -504{,}2_1 = \underline{\underline{-504{,}2}}$

228. $0{,}1405_8 - 0{,}001\,10_8 + 0{,}004\,758_6 = 0{,}1405_8 - 0{,}0011_1 + 0{,}0047_6 = 0{,}1442_3 = \underline{\underline{0{,}1442}}$

229. a) $$\frac{4{,}83 \cdot 10^{12}}{9{,}66 \cdot 10^{-5} - 3{,}85 \cdot 10^{-7}} - \frac{6{,}83 \cdot 10^{29}}{4{,}83 \cdot 10^{12} + 3{,}85 \cdot 10^{-7}} =$$

$$= \frac{4{,}83 \cdot 10^{12}}{(9{,}66 - 0{,}04) \cdot 10^{-5}} - \frac{6{,}83 \cdot 10^{29}}{4{,}83 \cdot 10^{12}} = \frac{4{,}83}{9{,}62}\,10^{17} - \frac{6{,}83}{4{,}83}\,10^{17} =$$

$$= 0{,}502 \cdot 10^{17} - 1{,}414 \cdot 10^{17} = (0{,}502 - 1{,}414) \cdot 10^{17} =$$

$$= -0{,}912 \cdot 10^{17} = \underline{\underline{-9{,}12 \cdot 10^{16}}}$$

b) $$\frac{1{,}67 \cdot 10^{-3}}{5{,}40 \cdot 10^{4} - 8{,}33 \cdot 10^{3}} - \frac{2{,}85 \cdot 10^{4}}{1{,}67 \cdot 10^{-3} + 8{,}33 \cdot 10^{3}} =$$

$$= \frac{1{,}67 \cdot 10^{-3}}{(5{,}40 - 0{,}83) \cdot 10^{4}} - \frac{2{,}85 \cdot 10^{4}}{8{,}33 \cdot 10^{3}} = \frac{1{,}67}{4{,}57}\,10^{-7} - \frac{2{,}85}{8{,}33}\,10^{1} =$$

$$= 0{,}366 \cdot 10^{-7} - 0{,}342 \cdot 10^{1} = \underline{\underline{3{,}42}}$$

Da der Rechenstab zur Lösung dieser Aufgabe verwendet werden sollte, war es nicht möglich, noch zusätzliche Schutzstellen in der Rechnung zu verwerten.

230. Da die Funktionsgleichung das Argument x nur als Quadrat enthält, können die symmetrisch zur y-Achse gelegenen Werte gemeinsam berechnet werden.

x	$1 - x^2$	$\sqrt{1 - x^2}$	$1 + 4x^2$	$\frac{1}{1 + 4x^2}$	y_1	y_2
①	② $1 -$ ①^2	③ $\sqrt{②}$	④ $1 + (2$ ①$)^2$	⑤ 1 : ④	⑥ ③ − ⑤	⑦ − [③ + ⑤]
0	1	1	1	1	0	−2
±0,1	0,99	0,995	1,04	0,962	0,033	−1,957
±0,2	0,96	0,980	1,16	0,862	0,118	−1,842
±0,3	0,91	0,954	1,36	0,735	0,219	−1,689
±0,4	0,84	0,917	1,64	0,610	0,307	−1,527
±0,5	0,75	0,866	2,00	0,500	0,366	−1,366
±0,6	0,64	0,800	2,44	0,410	0,390	−1,210
±0,7	0,51	0,714	2,96	0,338	0,376	−1,052
±0,8	0,36	0,600	3,56	0,281	0,319	−0,881
±0,9	0,19	0,436	4,24	0,236	0,200	−0,672
±1,0	0	0	5,00	0,200	−0,200	−0,200

231. Es ist iterativ $x_{n+1} = x_n - y_n : y'_n$ mit

$$y_n = \sin x_n - \ln x_n \quad \text{und} \quad y' = \cos x_n - 1 : x_n$$

zu bestimmen.

n	①		1	2	3
x_n	②		2	2,24	2,2193
$\frac{180}{\pi} \cdot x_n$	③	57,296 · ②	114,6	128,34	127,16
	④	180 − ③	65,4	51,66	52,84
$\sin x_n$	⑤	sin ③°	0,91	0,7843	0,7972
$\cos x_n$	⑥	cos ③°	−0,42	−0,6203	−0,6040
$\lg x_n$	⑦	lg ②	0,30	0,3502	0,3463
$\ln x_n$	⑧	2,3026 · ⑦	0,69	0,8064	0,7974
$1 : x_n$	⑨	1 : ②	0,5	0,4464	0,4506
y_n	⑩	⑤ − ⑧	0,22	−0,0221	−0,0002
y'_n	⑪	⑥ − ⑨	−0,92	−1,0667	−1,0546
$-\Delta x_n$	⑫	⑩ : ⑪	−0,24	0,0207	0,0002
x_{n+1}	⑬	② − ⑫	2,24	2,2193	2,2191

Als gesicherter Wert für die Nullstelle kann $x_N = 2{,}219$ angegeben werden.

232. a) − 827
b) − 82700000
c) − 9008270000
d) − 99999999999
e) − 100000000
f) − 12345679000
g) − 1000000
h) − 10000000001

233. a) 999999999975
b) 999999997500
c) 999974999999
d) 999999999001
e) 998264030000
f) 990000000001
g) 910000000000
h) 909999999999

234. a) 10564; ⟨U⟩ = 2; Kommaschieber rechts von Stelle 1
b) 1978534; ⟨U⟩ = 2; ,, ,, ,, ,, 1
c) 596,185; ⟨U⟩ = 2; ,, ,, ,, ,, 4
d) 1136,223; ⟨U⟩ = 3; ,, ,, ,, ,, 4
e) 49117,6309; ⟨U⟩ = 6; ,, ,, ,, ,, 5

235. a) 9305 ; ⟨U⟩ = 0; ,, ,, ,, ,, 1
b) − 19,2578; ⟨U⟩ = 1; ,, ,, ,, ,, 5
c) 147,58742; ⟨U⟩ = +2; ,, ,, ,, ,, 6
d) 9458,10479; ⟨U⟩ = 0; ,, ,, ,, ,, 6

236.

Zahl	1	2	3	4
π	3,	14159	26535	9
π	3,	14159	26535	9
π	3,	14159	26535	9
π	3,	14159	26535	9
S_1	12,			
S_2		56636		
S_3		1	06140	
S_4			3	6
4π	12,	56637	06143	6

$4\pi = 12{,}5663706144$

237.

Zahl	1	2	3	4
$\sqrt{2}$	1,	414213	562373	1
$\sqrt{2}$	1,	414213	562373	1
S_1	2,			
S_2		828426		
S_3		1	124746	
S_4				2
$2\cdot\sqrt{2}$	2,	828427	124746	2
$\sqrt{3}$	1,	732050	807568	9
D_1	1,			
D_2		096377		
D_3		...999	317178	
D_4			...999	3
$2\sqrt{2}-\sqrt{3}$	1,	096376	317177	3

$$2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3} = \underline{\underline{1{,}096376317177}}$$

238. a) 37436,52

b) 5050991,1112

c) 92,05149

d) 15546,96

e) 4378,20006

239. a) 2152125; notwendige Kurbeldrehungen: $4 + 2^* + 5^* = 11$

b) 4349322; ,, ,, : $1 + 1^* + 1 + 1^* = 4$

c) 4862368; ,, ,, : $1 + 3^* + 1 + 1^* + 2^* = 8$

d) 1741113358; ,, ,, : $2 + 1^* + 4 + 1^* = 8$

e) 1000988; ,, ,, : $1 + 3^* = 4$

* negative Kurbeldrehungen

240.

Zahl	1	2	3
$a = \pi$	3,14159	265359	
$b = \pi$	3,14159	265359	
$a_1 b_1$	9,8695	877281	
$a_2 b_1$		083364	9
$a_1 b_2$		083364	9
$a_2 b_2$			0
$a \cdot b$	9,8696	044010	8

$$\underline{\underline{\pi^2 = 9{,}869604401}}$$

241.

Zahl	1	2	3
a	1,41421	356658	
$b = a$	1,41421	356658	
$a_1 b_1$	1,9999	899241	
$a_2 b_1$		050438	931
$a_1 b_2$		050438	931
$a_2 b_2$			127
a^2	2,0000	000118	989

Also ist $\underline{\underline{a^2 = 2{,}00000001190}}$

Es sei $\Delta = a - \sqrt{2}$ die Abweichung des Wertes a von $\sqrt{2}$. Dann errechnet sich aus

$$a^2 = (\Delta + \sqrt{2})^2 = \Delta^2 + 2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{2} + 2 = 2{,}00000001190$$

der Wert

$$\Delta = \frac{1{,}190}{2 \cdot \sqrt{2}}\, 10^{-8} = 0{,}42 \cdot 10^{-8},$$

da Δ^2 vernachlässigt werden darf. Die Zahl a stimmt also in den ersten neun Ziffern mit $\sqrt{2}$ überein.

242. $$2^9 = 512$$
$$2^{18} = 262144$$
$$2^{36} = 68719476736$$

Zur Berechnung des letzten Quadrates ist wieder ein Rechenschema anzulegen.

Zahl	1	2	3	4
$a = 2^{36}$	68719	476736		
$b = 2^{36}$	68719	476736		
$a_1 b_1$	4722	300961		
$a_2 b_1$		32760	821184	
$a_1 b_2$		32760	821184	
$a_2 b_2$			227277	213696
ab	4722	366482	869645	213696

Also ist $\underline{\underline{2^{72} = 4722366482869645213696}}$

243. $$\lambda \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 219{,}9931 \\ -54{,}2798 \\ 74{,}5697 \\ 269{,}8012 \end{pmatrix}$$

244. $15! = (2 \cdot 15) \cdot (5 \cdot 14) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (7 \cdot 13) \cdot (8 \cdot 12) \cdot (9 \cdot 11) \cdot 10 =$

$= (30 \cdot 70 \cdot 72) \cdot (91 \cdot 96) \cdot 99 \cdot 10 = 1512 \cdot 8736 \cdot 99 \cdot 1000 =$

$= 13208832 \cdot 99 \cdot 1000 = 1307674368000.$

$$\begin{aligned}
1! &= & 1\\
2! &= 2 \cdot 1! = & 2\\
3! &= 3 \cdot 2! = & 6\\
4! &= 4 \cdot 3! = & 24\\
5! &= 5 \cdot 4! = & 120\\
6! &= 6 \cdot 5! = & 720\\
7! &= 7 \cdot 6! = & 5040\\
8! &= 8 \cdot 7! = & 40320\\
9! &= 9 \cdot 8! = & 362880\\
10! &= 10 \cdot 9! = & 3628800\\
11! &= 11 \cdot 10! = & 39916800\\
12! &= 12 \cdot 11! = & 479001600\\
13! &= 13 \cdot 12! = & 6227020800\\
14! &= 14 \cdot 13! = & 87178291200\\
15! &= 15 \cdot 14! = & 1307674368000
\end{aligned}$$

245. Es wird zunächst für jede Grundzahl a die 5. Potenz als Produkt der 2. und 3. Potenz ermittelt. Durch Quadrieren entsteht dann sofort a^{10}.

$k \diagdown a$	2	3	4	5	6
2	4	9	16	25	36
3	8	27	64	125	216
4	16	81	256	625	1296
5	32	243	1024	3125	7776
6	64	729	4096	15625	46656
7	128	2187	16384	78125	279936
8	256	6561	65536	390625	1679616
9	512	19683	262144	1953125	10077696
10	1024	59049	1048576	9765625	60466176

$k \diagdown a$	7	8	9
2	49	64	81
3	343	512	729
4	2401	4096	6561
5	16807	32768	59049
6	117649	262144	531441
7	823543	2097152	4782969
8	5764801	16777216	43046721
9	40353607	134217728	387420489
10	282475249	1073741824	3486784401

246. a) 8,7414,

b) $-12{,}3672$.

247. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 39{,}691268$

248. Es werden für alle Gleichungen die Resultate S_i der linken Seiten nach Einsetzen der angegebenen Lösungen und die Differenzen D_i zwischen diesen Werten und den vorgegebenen rechten Seiten angeführt.

$$\begin{aligned} S_1 &= -\ 762{,}87349; & D_1 &= -0{,}00349 \\ S_2 &= 1191{,}23203; & D_2 &= 0{,}00203 \\ S_3 &= -\ 589{,}42141; & D_3 &= -0{,}00141 \\ S_4 &= 351{,}99701; & D_4 &= -0{,}00299. \end{aligned}$$

249. a) 311
b) 167
c) 3462
d) 32123

250. a) 122
b) −33,7
c) 728,11
d) −1354,79

251. a) 0,0649715
b) 8,02296
c) −0,137684
d) 1000004

Die letzte Ziffer der letzten Aufgabe brauchte entsprechend der Problemstellung an sich nicht mehr angegeben zu werden. Da an ihrer Stelle eine bedeutungslose Füllnull geschrieben werden müßte und die Zahl nur knapp über 1000000 liegt, ist die gewählte Schreibweise trotzdem zu empfehlen.

252. a) $1{,}578_6 - 1{,}343_6 = \underline{\underline{0{,}235}}$

b) $\dfrac{644{,}881_4}{175{,}104_1} = \underline{\underline{3{,}683}}$

c) $(168{,}161502 - 122{,}32) : 4{,}557 = 45{,}841502 : 4{,}557 = 10{,}059_6 = \underline{\underline{10{,}060}}$

d) $(2{,}02895 - 6{,}16280) : 0{,}1467 = -4{,}13385 : 0{,}1467 = -28{,}179_2 = -\underline{\underline{28{,}179}}.$

253. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

so daß nach folgendem Schema gerechnet werden kann:

①	②	③	④	①·④ − ②·③
$c_1 = -\ 4{,}53$	$c_2 = 39{,}27$	$b_1 = -26{,}49$	$b_2 = 14{,}33$	$D_1 = 975{,}3474$
$a_1 = 11{,}38$	$a_2 = 18{,}27$	$c_1 = -\ 4{,}53$	$c_2 = 39{,}27$	$D_2 = 529{,}6557$
$a_1 = 11{,}38$	$a_2 = 18{,}27$	$b_1 = -26{,}49$	$b_2 = 14{,}33$	$D = 647{,}0477$

und daraus

$$x = D_1 : D = \underline{\underline{1{,}50738}}; \quad y = D_2 : D = \underline{\underline{0{,}81857}}$$

Die Probe liefert (in Matrizenschreibweise)

$$\begin{pmatrix} 11{,}38 & -26{,}49 \\ 18{,}27 & 14{,}33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}50738 \\ 0{,}81857 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}5299349 \\ 39{,}2699407 \end{pmatrix}$$

Eine genauere Untersuchung an Hand dieser Resultate würde zeigen, daß die für die Lösung angeschriebenen Ziffern wirklich alle bedeutsam sind.

254. a)

n	x_n	$a : x_n$
0	82	83,56
1	82,78	82,7736
2	82,7768	82,7768

$$x = \frac{a - x_2^2}{2x_2} = \frac{6852 - 6851{,}99861824}{2 \cdot 82{,}7768} = 0{,}000008\,34627$$

also ist

$$\sqrt{6852} = \underline{\underline{82{,}77680835}}$$

b)

n	x_n	$a : x_n$
0	0,028	0,02921
1	0,02860	0,0286013
2	0,0286006	0,0286007

$$x = \frac{0{,}000818 - 0{,}000817994\,32036}{2 \cdot 0{,}0286006} = 0{,}000000099\,29223$$

also

$$\sqrt{0{,}000818} = \underline{\underline{0{,}02860069929}}.$$

255. $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4702{,}3145}$ cm mit $\sqrt{4702{,}3145} = 68{,}57_3$,

also ist

$$\underline{\underline{d = 68{,}57 \text{ cm}}}.$$

256. a) $|\mathfrak{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{231{,}0257} = 15{,}199_5 = \underline{\underline{15{,}20}}$

b) $\mathfrak{e}_a = \begin{pmatrix} 0{,}317 \\ 0{,}854 \\ -0{,}413 \end{pmatrix}$

257. a) Aus $(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = a$ folgt, da die Glieder mit $(\Delta x)^2$ und $(\Delta x)^3$ vernachlässigt werden können, die Beziehung

$$x_0^3 + 3x_0^2\Delta x = a \quad \text{oder} \quad 3x_0^2\Delta x = a - x_0^3$$

und daraus die Gleichung (190).

b) Es wird $x_0 = 1{,}26$ als Ausgangswert mit dem Rechenstab bestimmt. Die weitere Rechnung erfolgt am besten wieder in einem Rechenschema.

n	1		1	2
x_n	2		1,26	1,25992
x_n^2	3	2^2	1,5876	1,5873984064
x_n^3	4	2^3	2,000376	1,999995000191488
$a - x_n^3$	5	$a - 4$	−0,000376	0,000004999808512
$3x_n^2$	6	$3 \cdot 3$	4,7628	4,7621952192
Δx_n	7	$5 : 6$	−0,000079	0,00000104989

also ist

$$\sqrt[3]{2} = \underline{\underline{1{,}259921050}}.$$

LITERATUR- UND QUELLENNACHWEIS

Allgemeine Grundlagen

[1] Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen, Autorenkollektiv. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1965
[2] Analysis für Ingenieur- und Fachschulen, Autorenkollektiv. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1966
[3] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag 1957

Nomographie

[4] KÖRWIEN, H.: Graphisches Rechnen, 6. Auflage. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1952
[5] LUCKEY, P.: Nomographie, 7. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1953
[6] MÜLLER, A.: Nomographie für die technische Praxis. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1952
[7] PADELT, E., und H. LAPORTE: Einheiten und Größenarten der Naturwissenschaften. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1964
[8] SCHMID, W., A. HAENDEL und W. SCHÖNE: Graphisches Rechnen und Nomographie. Bergakademie Freiberg (Fernstudium) 1957
[9] SCHRÖDER, K.: Mathematik für die Praxis, Bd. 1, Abschnitt 12. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1964
[10] WERTH, E., und G. GRÖLL: Nomographie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1964

Matrizenrechnung

[11] Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme. Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft Nr. 9. Physica-Verlag Würzburg 1959
[12] DIETRICH/STAHL: Grundzüge der Matrizenrechnung. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1965
[13] JUNG, HEINRICH, W. E.: Matrizen und Determinanten. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1952
[14] KOCHENDÖRFER, R.: Determinanten und Matrizen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1957
[15] Mathematik für die Praxis. Ein Handbuch Bd. 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1964
[16] Matrizen. Herausgeber: Bergakademie Freiberg, Lehrbriefe 1 bis 3, 1963
[17] NEISS, Dr. FRITZ: Determinanten und Matrizen. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag 1948
[18] SCHIEMANN: Matrizenrechnung, Lehrbrief 1 und 2. Herausgeber: Ingenieurschule Chemie „Friedrich Wöhler" Leipzig 1962
[19] ZURMÜHL, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg, Springer-Verlag 1961

Linearoptimierung

[20] ALEXANDROFF, P. S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1964
[21] ANGERMANN, A.: Entscheidungsmodelle. Franz Nowack Verlag Frankfurt/Main
[22] BARSOW, A. S.: Was ist lineare Programmierung? Kleine naturw. Bibliothek, Reihe Mathematik, Bd. 2. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1964
[23] FINKELSTEIN, V.: Die Grundlagen der linearen Optimierung, in: Neue Technik im Büro, Heft 10. VEB Verlag Technik Berlin 1961
[24] HAMMER, W.: Transportkostensenkung durch Anwendung der Planungsforschung im Bauwesen. Bauplanung und Bautechnik, Heft 6, 1960
[25] HAMMERSCHMIDT, U.: Produktionsplanung mit Hilfe des Rechenautomaten ZRA I in: Mathematik und Wirtschaft Bd. 2. Verlag Die Wirtschaft 1964
[26] HELLWICH-RENNER: Optimierung des Transports von Baumaterialien. Schriftenreihe Ökonomie Nr. 911/2 der Deutschen Bauakademie Berlin 1962
[27] HOFMANN/SCHREITER/VOGEL: Optimierung der Lieferbeziehungen und des Transports. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin 1963
[28] KADLEC, V.: Mathematische Methoden und ihre Anwendung in der Volkswirtschaftsplanung. Verlag Die Wirtschaft Berlin 1962
[29] KREKO, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1964
[30] Linearprogrammierung im Transportwesen. Transpress VEB Verlag für Verkehrswesen Berlin 1961
[31] NAAS/SCHMID: Mathematisches Wörterbuch. Akademieverlag GmbH Berlin. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1961
[32] NEMTSCHINOW, W. S.: Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1963
[33] PIEHLER, J.: Einführung in die lineare Optimierung. Mathem.-naturw. Bibliothek, Reihe Mathematik, Bd. 35. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1962
[34] RENNER, A.: Die Bestimmung der optimalen Produktionsvariante in der Bauwirtschaft, in: Sozialistische Planwirtschaft, 4/62. Verlag Die Wirtschaft Berlin
[35] RICHTER, K.-J.: Einführung in die lineare Optimierung. Lehrmaterial für das Fachschulfernstudium, Ö 13, herausgeg. von der Zentralstelle für die Fachschulausbildung
[36] SADOWSKI, W.: Theorie und Methoden der Optimierungsrechnung in der Wirtschaft. Verlag Die Wirtschaft Berlin
[37] VAJDA, S.: Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele. Beiheft zur Zeitschrift Elektronische Rechenanlagen. R. Oldenbourg München 1961
[38] WINTGEN/SCHULZE, Kybernetische Probleme in der Ökonomie, in: Mathematik und Wirtschaft, Bd. 2. Verlag Die Wirtschaft Berlin 1964
[39] Zentralinstitut für Automatisierung Dresden, Anwendung der Mathematik in der Ökonomie, Dresden 1962 (als Manuskript gedruckt)

Mathematische Hilfsmittel der statistischen Analyse

[40] GNEDENKO, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Akademie-Verlag Berlin 1962
[41] GNEDENKO, B. W., und A. J. CHINTSCHIN: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961
[42] JAGLOM, A. M., und I. M. JAGLOM: Wahrscheinlichkeit und Information. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1960
[43] LINNIK, J. W.: Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1961

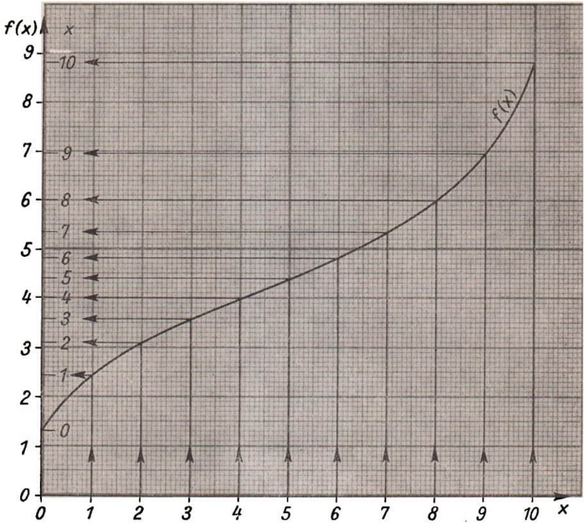
[44] Lorenz, P.: Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik. S. Hirzel Verlag Leipzig 1955
[45] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1962
[46] Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1965
[47] Weber, E.: Grundriß der biologischen Statistik. VEB Gustav Fischer Verlag Jena 1956

Praktisches Rechnen

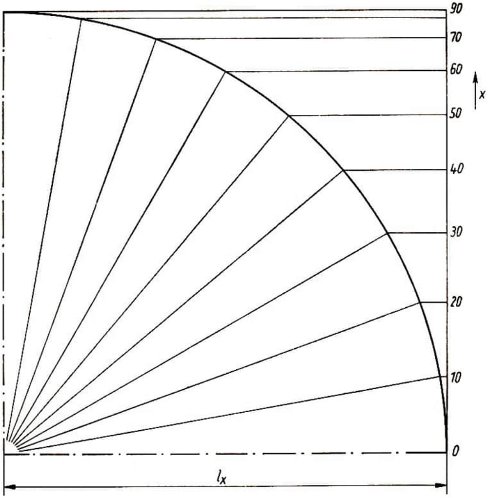
[48] „Aktuelle Probleme der Rechentechnik" (Bericht über das Internationale Mathematiker-Kolloquium, Dresden, 22. bis 27. November 1955). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1957
[49] ALGOL 60 (Bericht über die algorithmische Sprache). Akademie-Verlag Berlin 1962
[50] Anacker, W.: Theorie und Technik elektronischer digitaler Rechenautomaten, in: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker, Bd. IV, S. 661 ⋯ 734. Verlag für Radio—Foto—Kinotechnik GmbH Berlin-Borsigwalde
[51] Böttger, G., H. Kadow und I. Kerner: Programmieranweisung für den ZRA I. VEB Verlag Technik Berlin
[52] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin/Göttingen/Heidelberg Springer-Verlag 1955
[53] Heinrich, H.: Einführung in die Praktische Analysis. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1963
[54] Kitow, A. I., und N. A. Krinizki: Elektronische Digitalrechner und Programmierung. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1962
[55] Schröter, O.: Digitale Rechenautomaten, in: Handbuch der Automatisierungstechnik, S. 162 ⋯ 234. Verlag für Radio—Foto—Kinotechnik GmbH Berlin-Borsigwalde
[56] Schubert, G.: Digitale Kleinrechner. VEB Verlag Technik Berlin 1962
[57] Stuchlik, F.: Programmgesteuerte Universalrechner. VEB Verlag Technik Berlin 1964

SACHWORTVERZEICHNIS

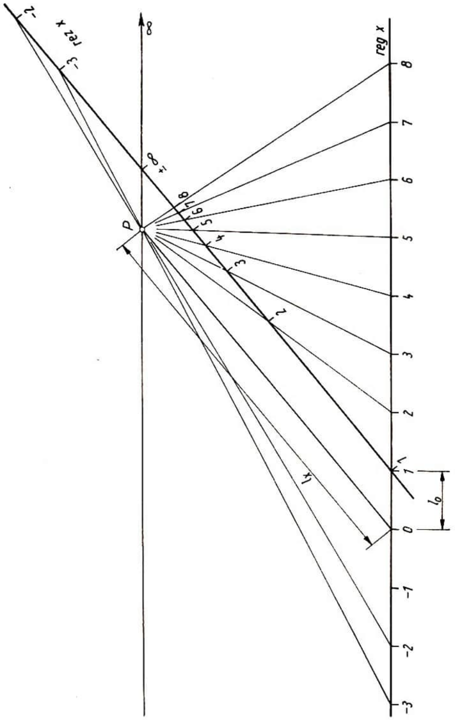
Tafelanhang zur Nomographie



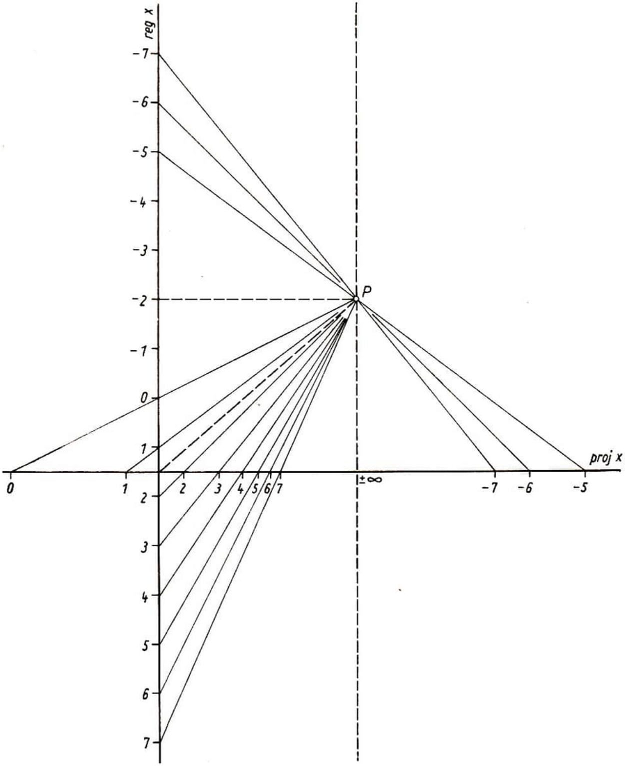
TAFEL 1



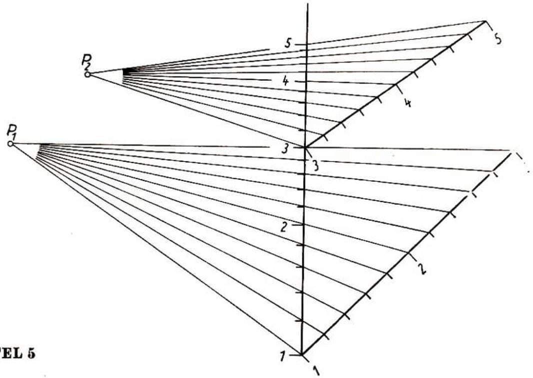
TAFEL 2



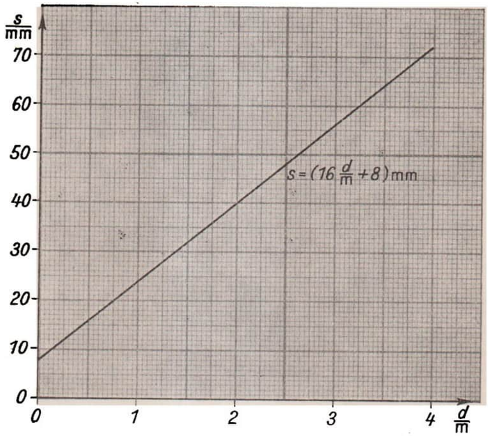
TAFEL 3



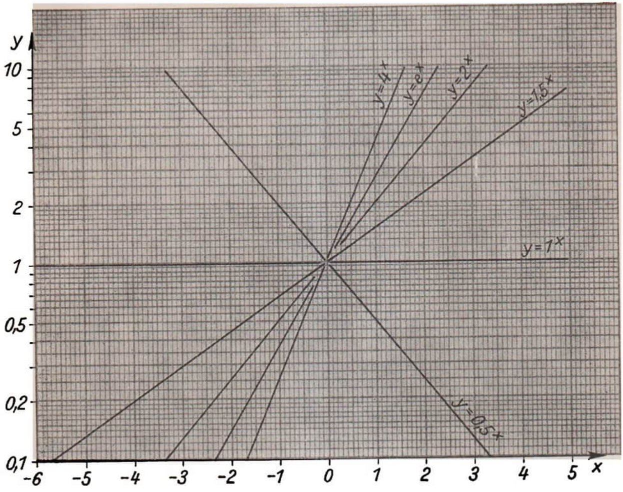
TAFEL 4



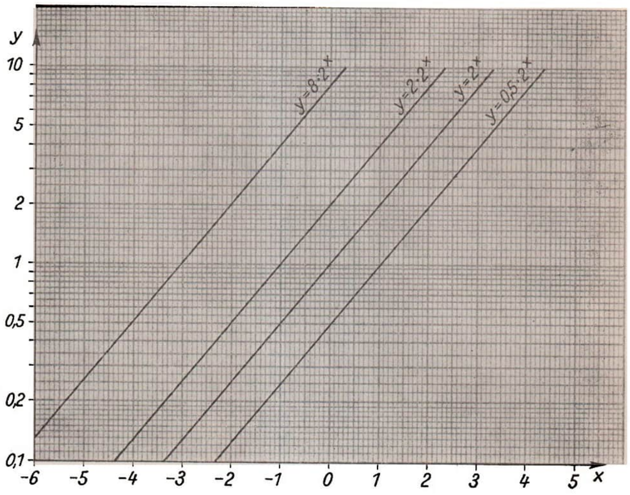
TAFEL 5



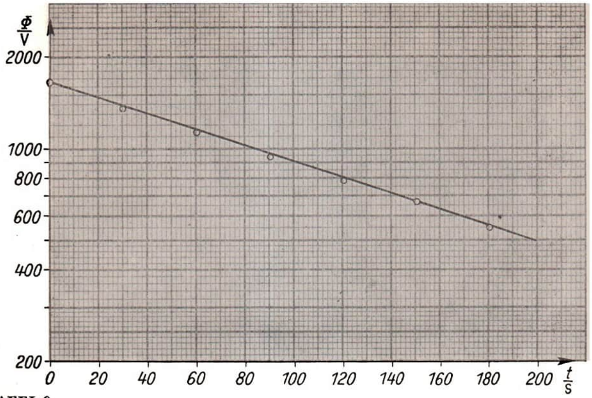
TAFEL 6



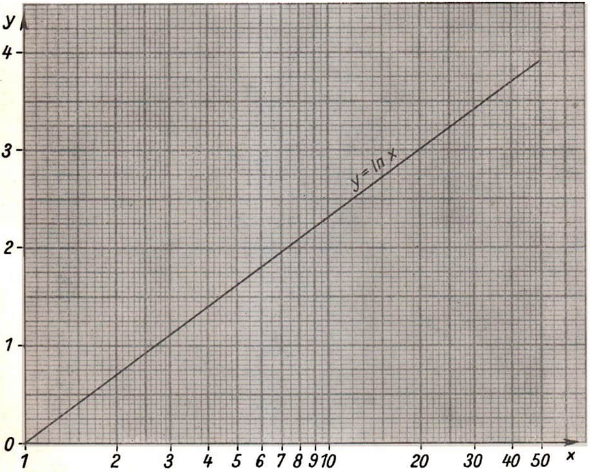
TAFEL 7



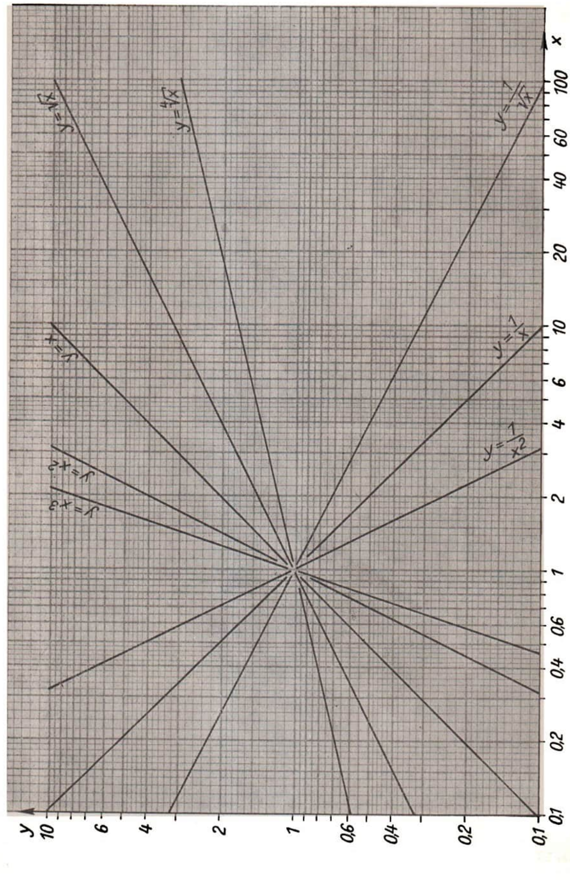
TAFEL 8



TAFEL 9

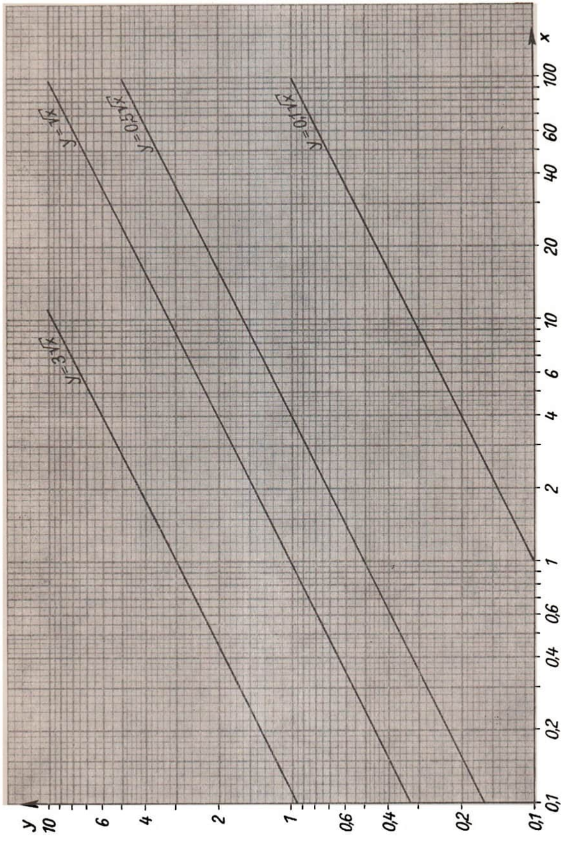


TAFEL 10

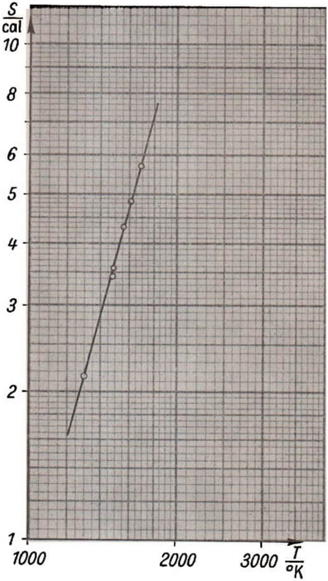


y = √x
y = ⁴√x
y = x
y = x²
y = x³
y = 1/√x
y = 1/x
y = 1/x²
x
0,1
0,2
0,4
0,6
1
2
4
6
10
20
40
60
100
y
10
6
4
2
1
0,6
0,4
0,2
0,1

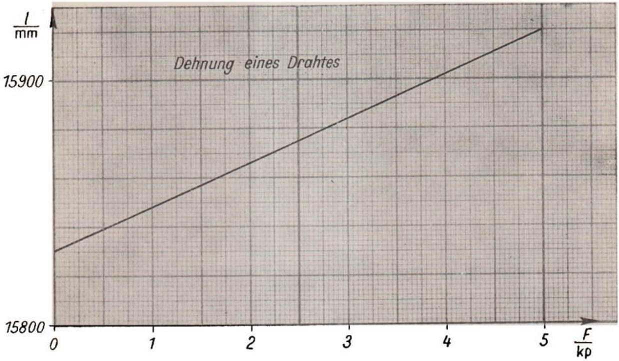
TAFEL 11

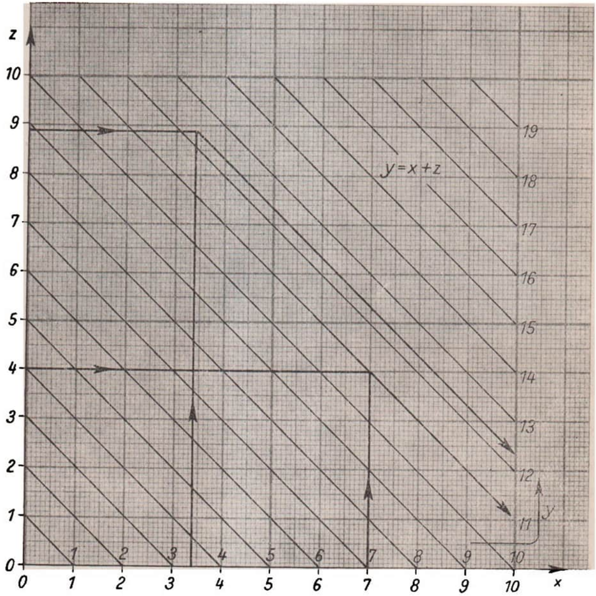

y = 3√x
y = √x
y = 0,5√x
y = 0,1√x
y
10
6
4
2
1
0,6
0,4
0,2
0,1
x
100
60
40
20
10
6
4
2
1
0,6
0,4
0,2
0,1

TAFEL 12

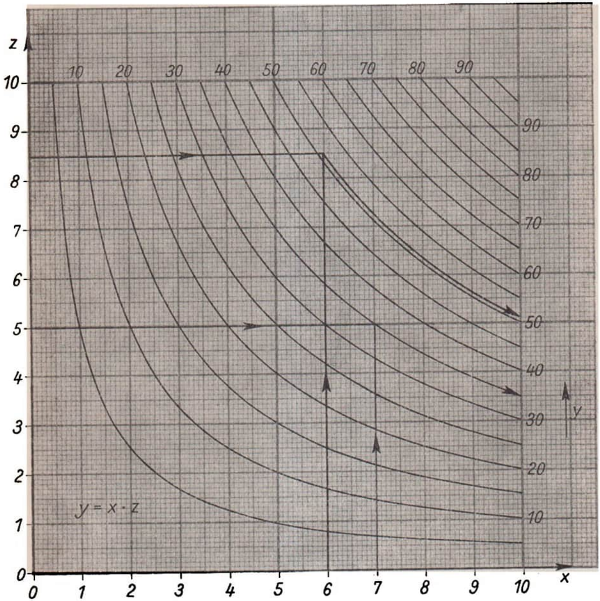


TAFEL 13

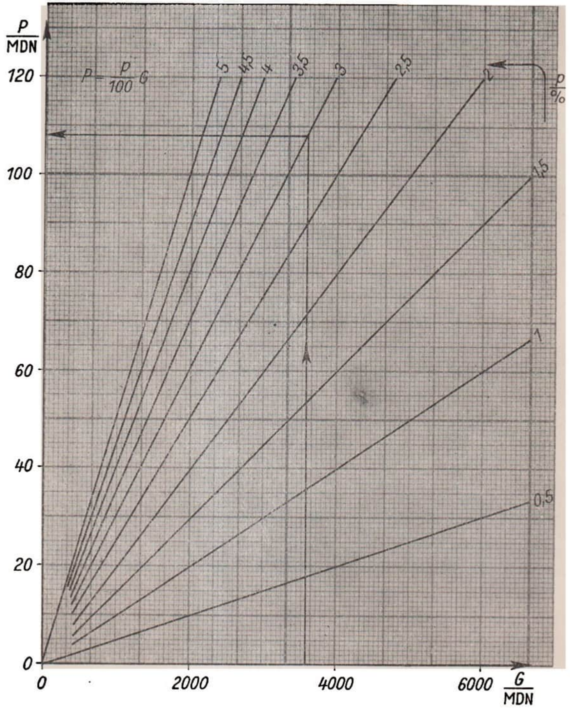

l / mm
15900
15800
Dehnung eines Drahtes
0
1
2
3
4
5
F / kp


z
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
y=x+z
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
y
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 x
1 2 3 4 5 6 7 8 9

TAFEL 15

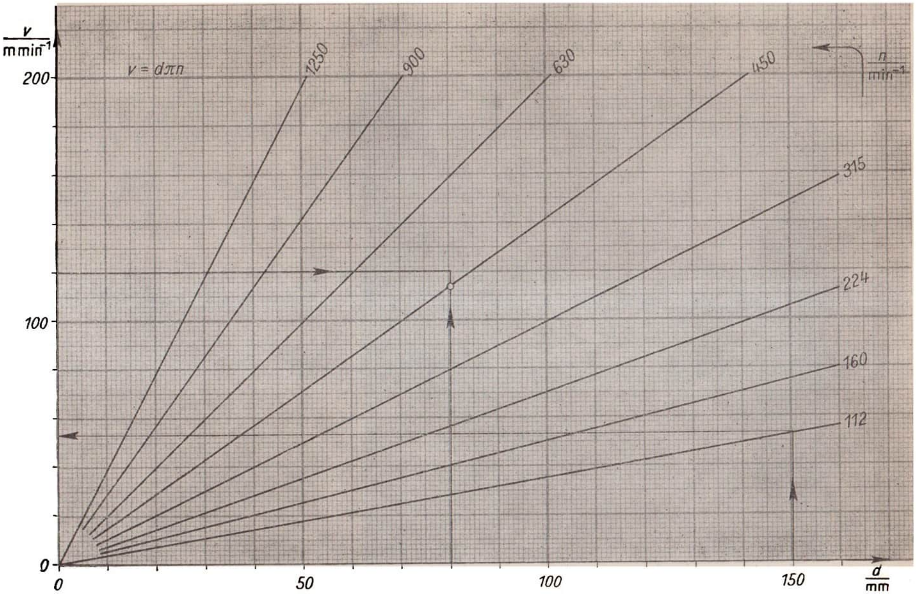

z
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90
90
80
70
60
50
40
30
20
10
y
y = x · z
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x

TAFEL 16



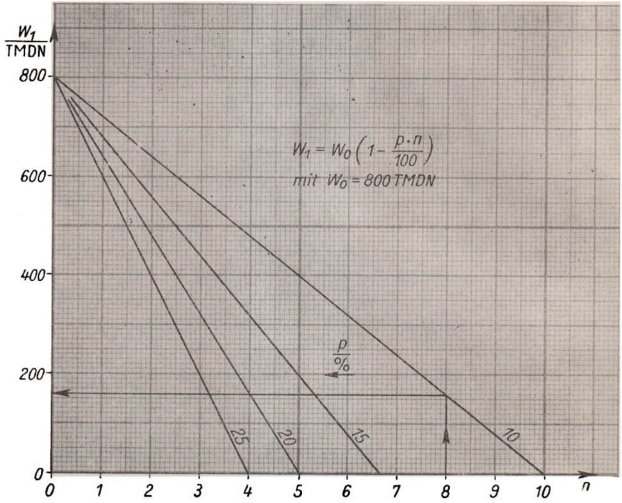
P/MDN
120
100
80
60
40
20
0
$P = \frac{p}{100} G$
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
p/%
0
2000
4000
6000
G/MDN

TAFEL 17

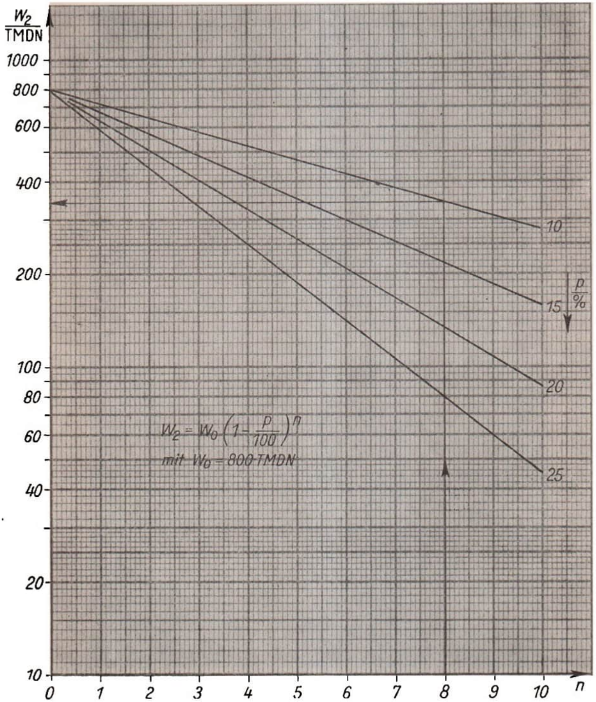


$\frac{v}{\mathrm{m\,min^{-1}}}$
200
100
0
$v = d\pi n$
1250
900
630
450
315
224
160
112
$\frac{n}{\mathrm{min^{-1}}}$
0
50
100
150
$\frac{d}{\mathrm{mm}}$

TAFEL 18

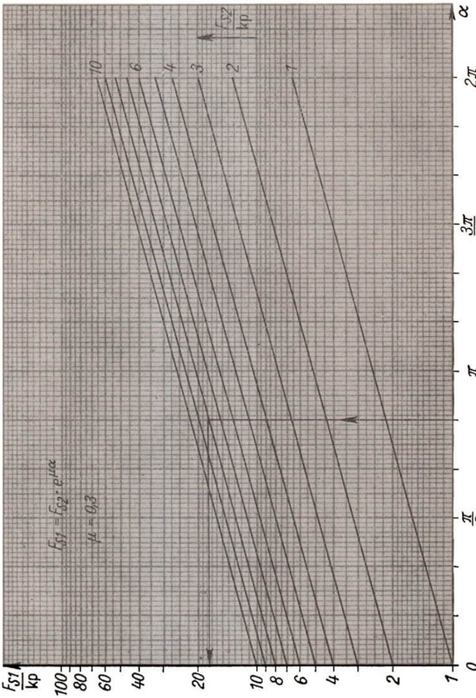

$\frac{W_1}{\text{TMDN}}$
800
600
400
200
0
$W_1 = W_0 \left(1 - \frac{p \cdot n}{100}\right)$
mit $W_0 = 800$ TMDN
$\frac{p}{\%}$
25
20
15
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n

TAFEL 19

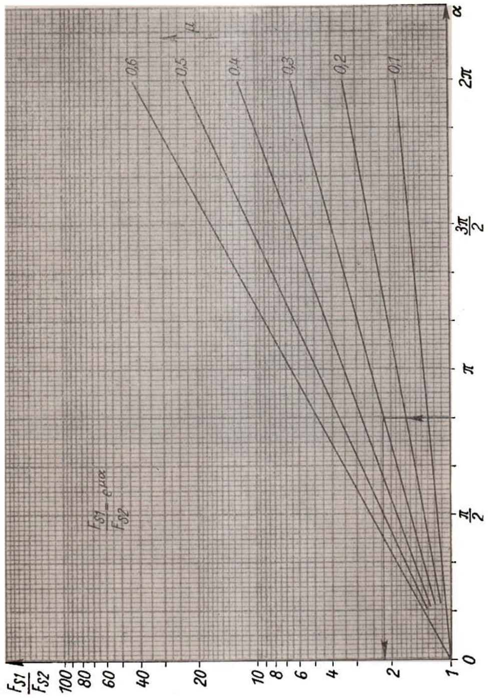


$\frac{W_2}{TMDN}$
1000
800
600
400
200
100
80
60
40
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n
10
15
20
25
$\frac{p}{\%}$
$W_2 = W_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$
mit W_0 = 800 TMDN

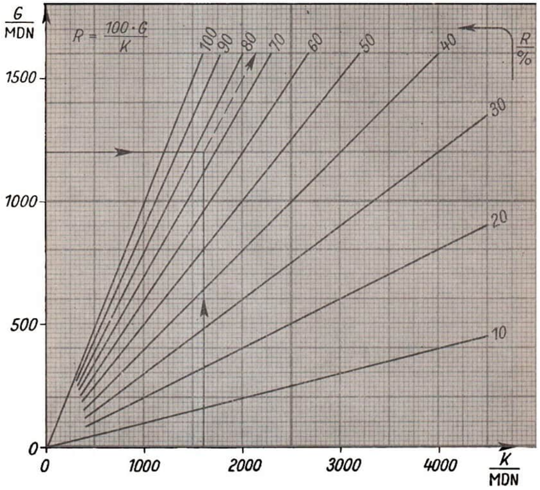
TAFEL 20


$F_{S1} = F_{S2} \cdot e^{\mu\alpha}$
$\mu = 0,3$
$\frac{F_{S1}}{kp}$
$\frac{F_{S2}}{kp}$
α
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
1
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
3

TAFEL 21

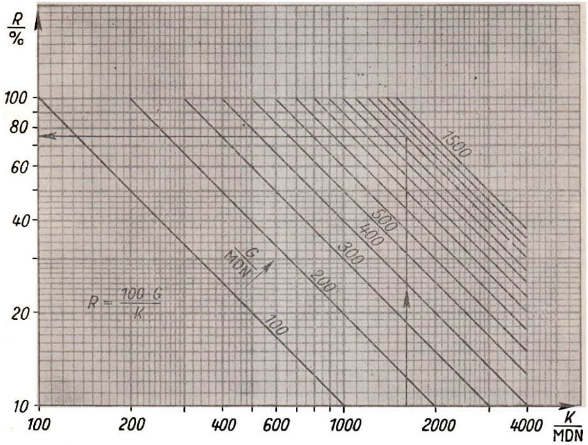

$\frac{F_{S1}}{F_{S2}} = e^{\mu\alpha}$
$\frac{F_{S1}}{F_{S2}}$
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
1
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
α
μ
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1

TAFEL 22

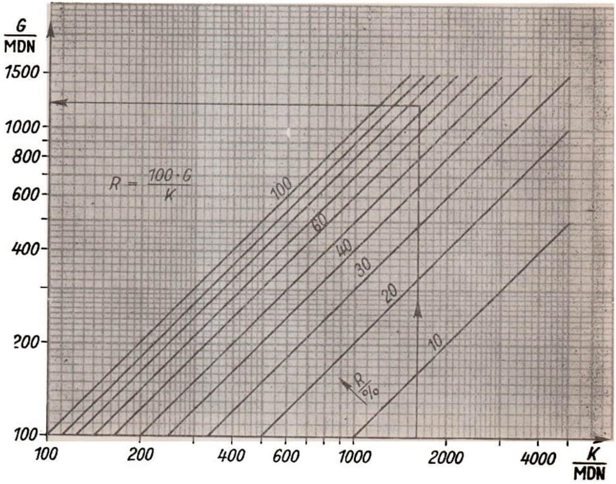


G / MDN
1500
1000
500
0
$R = \frac{100 \cdot G}{K}$
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
R / %
0
1000
2000
3000
4000
K / MDN

TAFEL 23

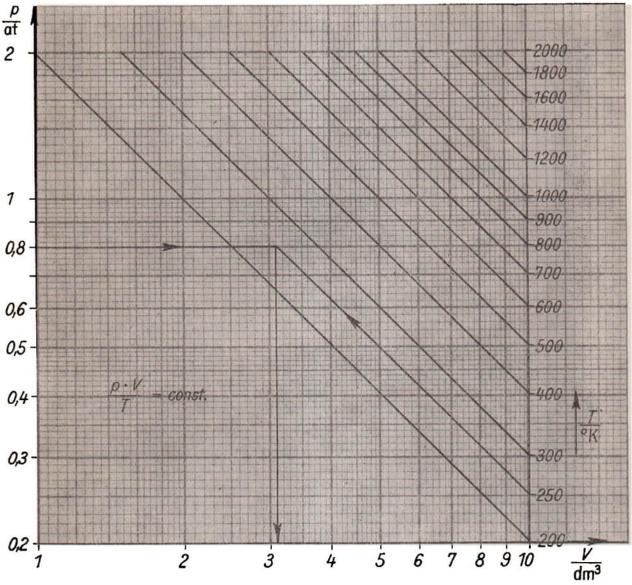

R
%
100
80
60
40
20
10
100
200
400
600
1000
2000
4000
K
MDN
G
MDN
1500
500
400
300
200
100
R = 100 · G / K

TAFEL 24



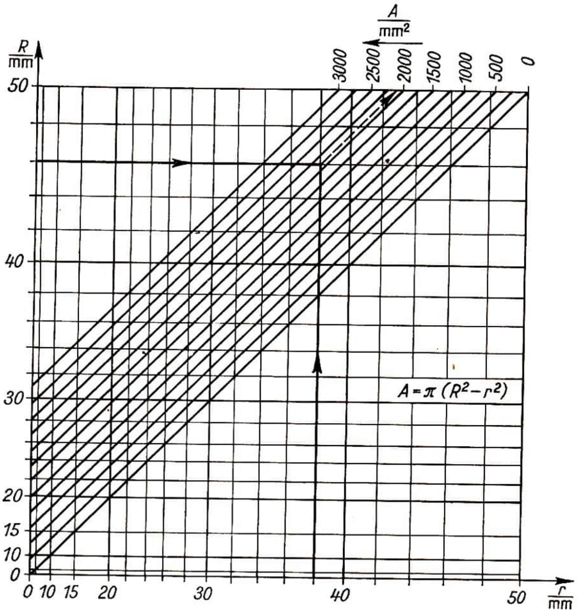
G / MDN
1500
1000
800
600
400
200
100
R = 100 · G / K
100
60
40
30
20
10
R / %
100
200
400
600
1000
2000
4000
K / MDN

TAFEL 25

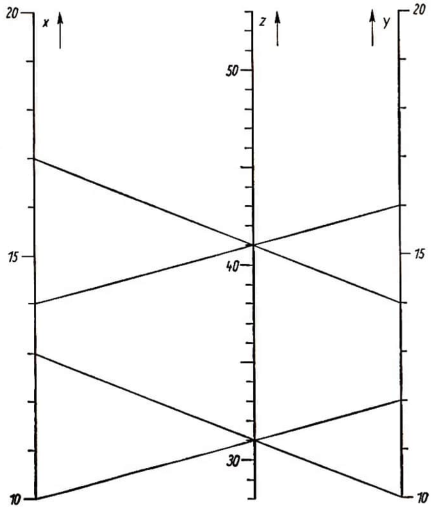


p/at
2
1
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
V/dm³
2000
1800
1600
1400
1200
1000
900
800
700
600
500
400
300
250
200
T/°K
p · V / T = const.

TAFEL 26

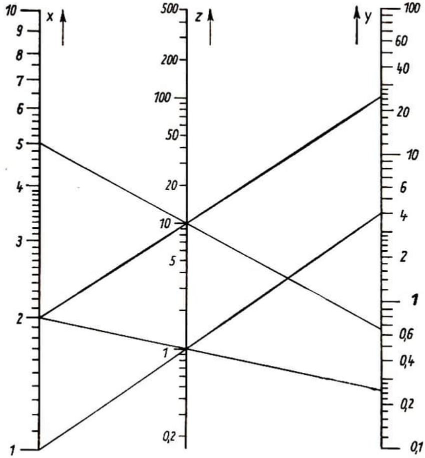

A/mm²
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
R/mm
50
40
30
20
15
10
0
0 10 15 20 30 40 50
r/mm
A = π (R² − r²)

TAFEL 27



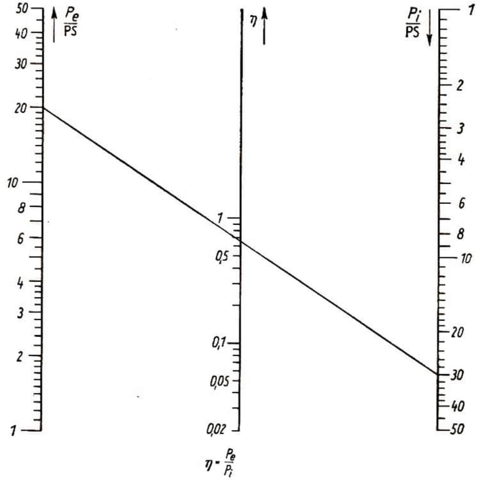
$2x+3y+6=2z$

TAFEL 28

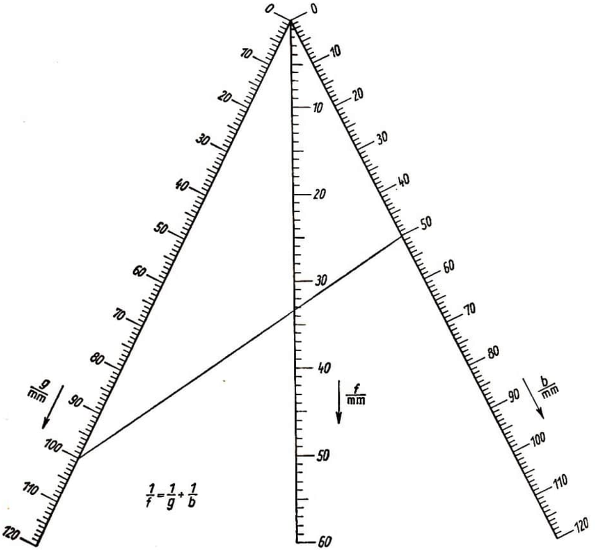


$z=\frac{1}{2}x^2\sqrt{y}$

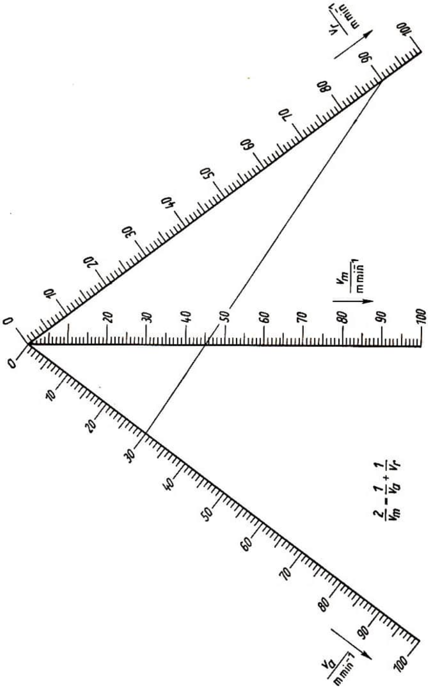
TAFEL 29


$\frac{P_e}{PS}$
50
40
30
20
10
8
6
4
3
2
1
η
1
0,5
0,1
0,05
0,02
$\frac{P_i}{PS}$
1
2
3
4
6
8
10
20
30
40
50
$\eta = \frac{P_e}{P_i}$

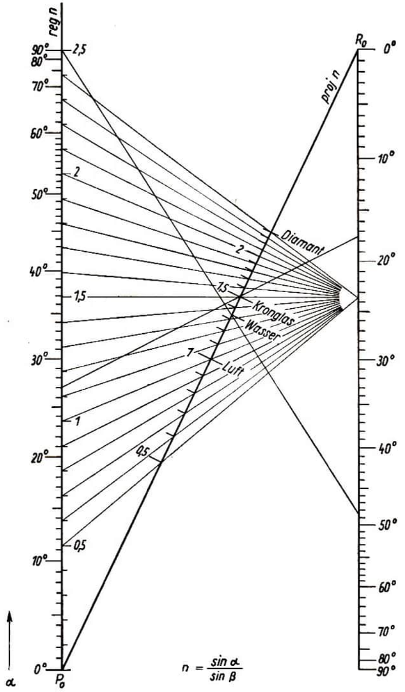
TAFEL 30


0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
$\frac{g}{mm}$
$\frac{f}{mm}$
$\frac{b}{mm}$
$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

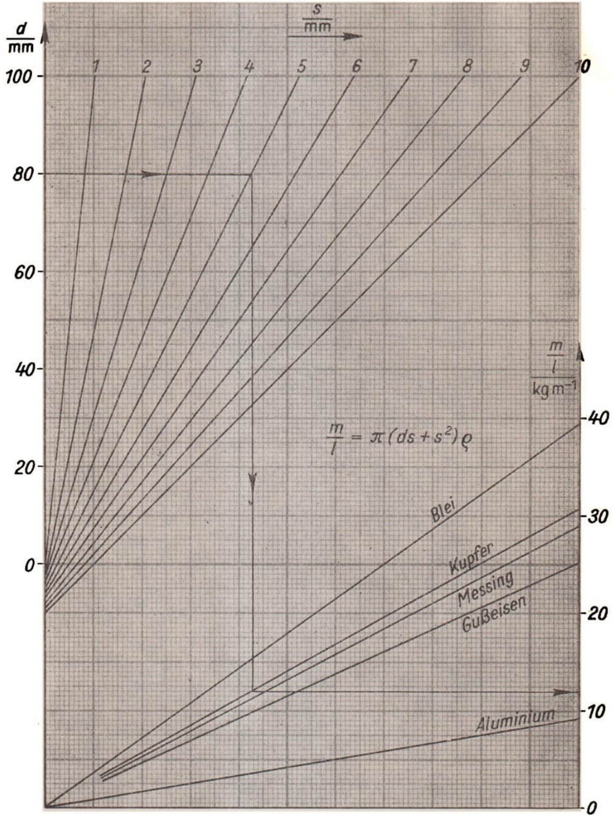
TAFEL 31


$\frac{v_r}{m\,min^{-1}}$
$\frac{v_m}{m\,min^{-1}}$
$\frac{v_a}{m\,min^{-1}}$
$\frac{2}{v_m} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r}$

TAFEL 32

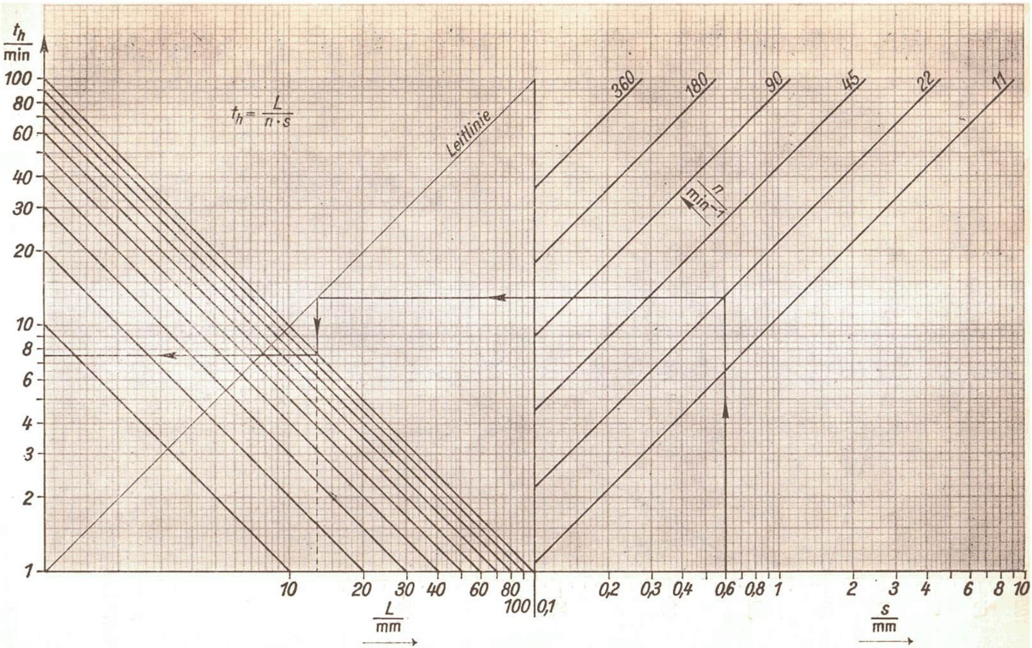

reg n
proj n
Diamant
Kronglas
Wasser
Luft
P_0
R_0
α
β
90° 80° 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0°
0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°
2,5 2 1,5 1 0,5
2 1,5 1 0,5
$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

TAFEL 33



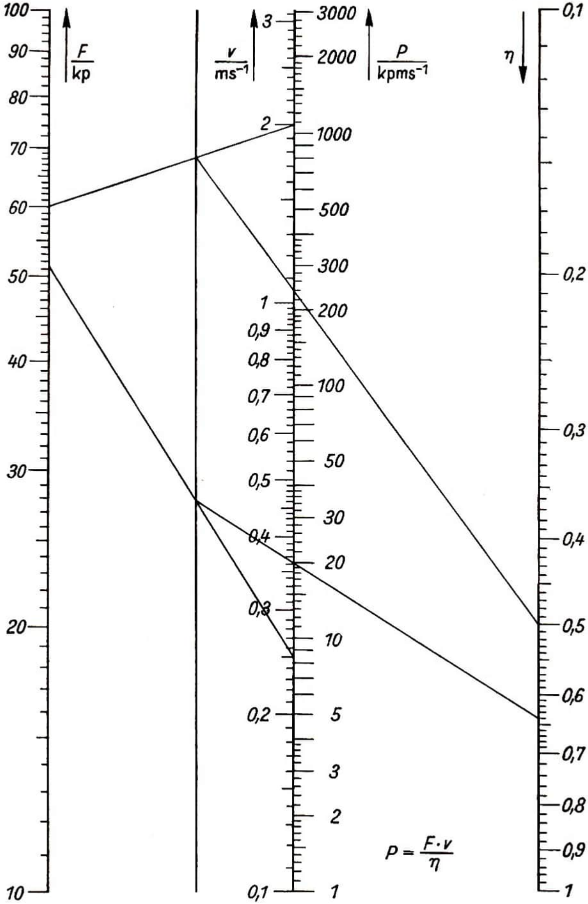
$\frac{d}{mm}$
$\frac{s}{mm}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
100
80
60
40
20
0
$\frac{m}{l}$
$kg\,m^{-1}$
40
30
20
10
0
$\frac{m}{l} = \pi(ds + s^2)\varrho$
Blei
Kupfer
Messing
Gußeisen
Aluminium

TAFEL 34



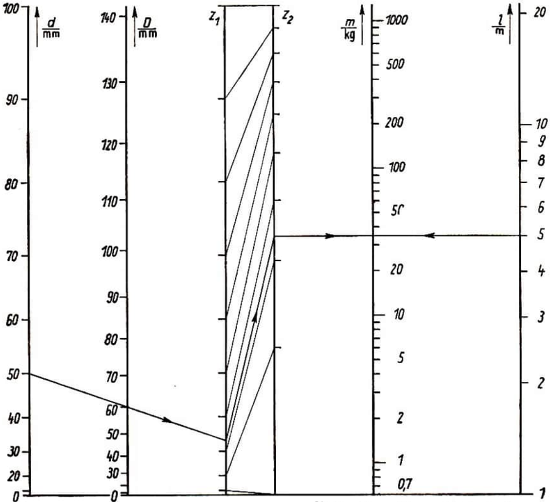
$\frac{t_h}{min}$
100
80
60
40
30
20
10
8
6
4
3
2
1
$t_h = \frac{L}{n \cdot s}$
Leitlinie
360
180
90
45
22
11
$\frac{n}{min^{-1}}$
10
20
30
40
60
80
100
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
3
4
6
8
10
$\frac{L}{mm}$
$\frac{s}{mm}$

TAFEL 35



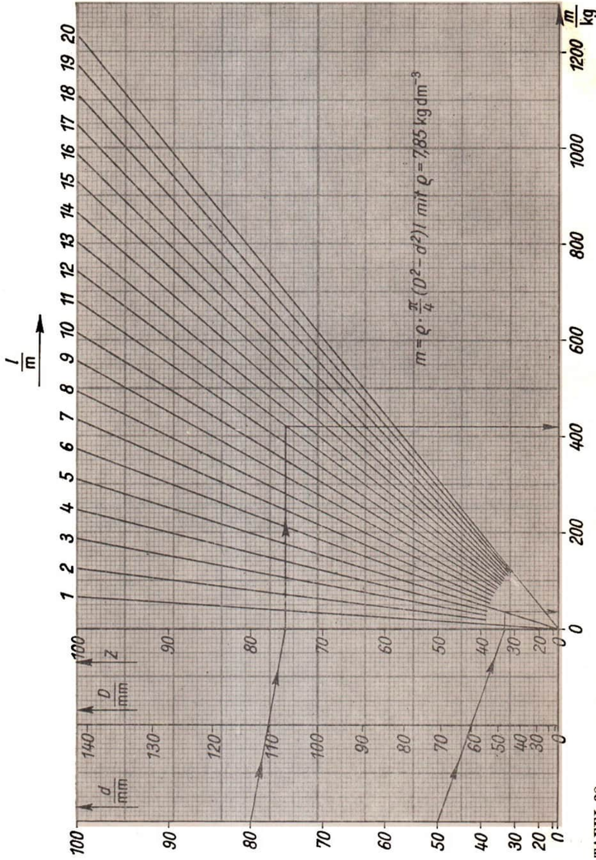
F / kp
v / ms⁻¹
P / kpms⁻¹
η
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
3
2
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
3000
2000
1000
500
300
200
100
50
30
20
10
5
3
2
1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
$P = \frac{F \cdot v}{\eta}$

TAFEL 36

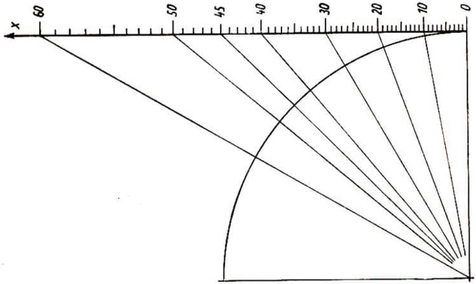


$m = \rho \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) l$ mit $\rho = 7{,}85$ kg dm^{-3}

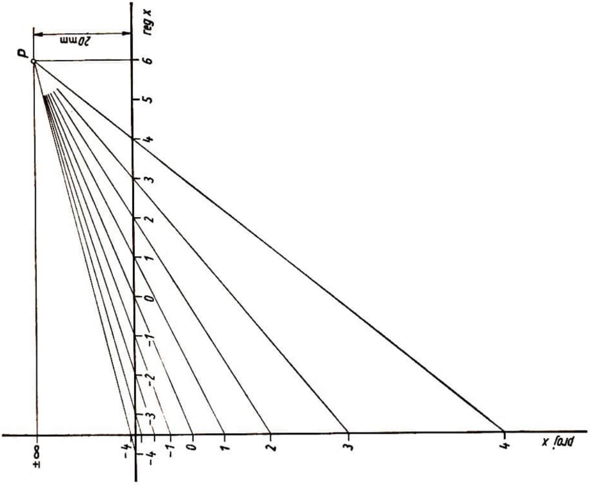
TAFEL 37


$m = \varrho \cdot \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,l$ mit $\varrho = 7{,}85\ \mathrm{kg\,dm^{-3}}$
$\frac{l}{\mathrm{m}}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
$\frac{m}{\mathrm{kg}}$
0 200 400 600 800 1000 1200
$\frac{d}{\mathrm{mm}}$
$\frac{D}{\mathrm{mm}}$
z
100 90 80 70 60 50 40 30 20 0
140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 30 0

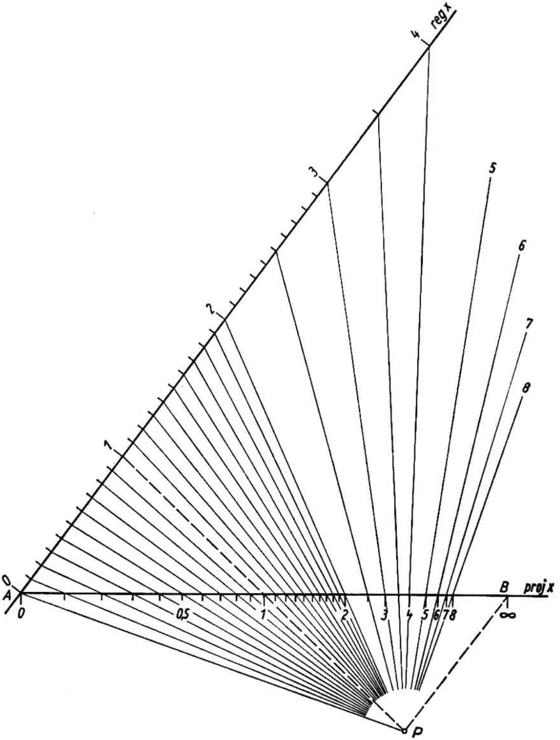
TAFEL 38



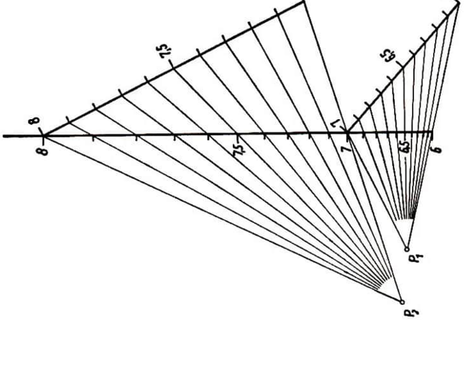
TAFEL 39



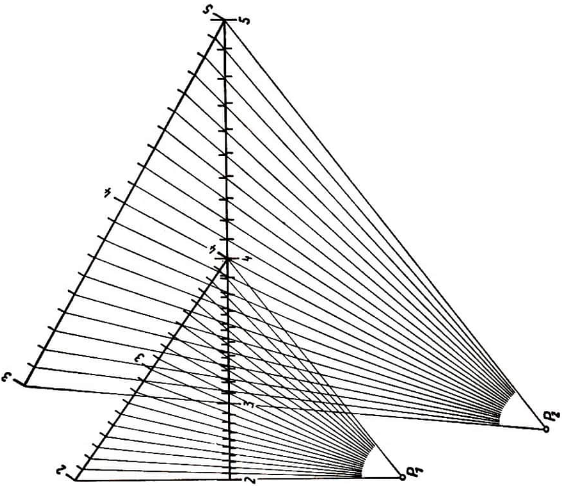
TAFEL 40



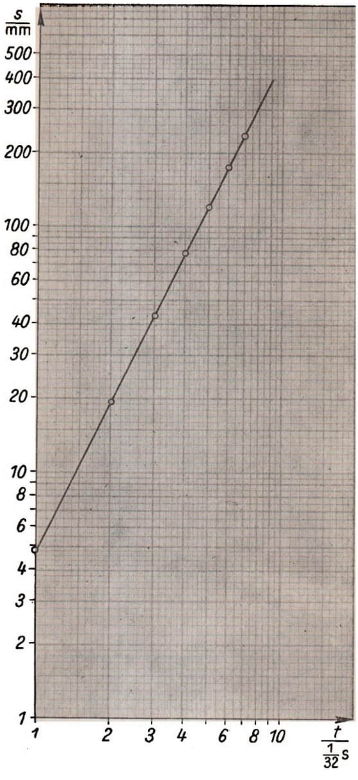
TAFEL 41



TAFEL 42

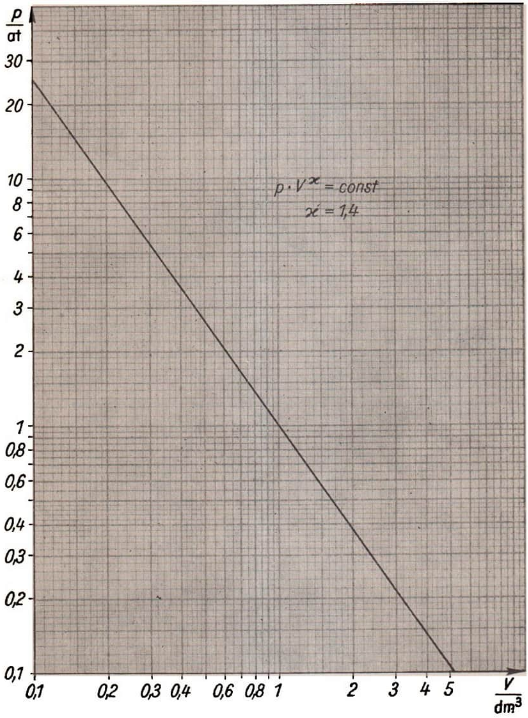


TAFEL 43



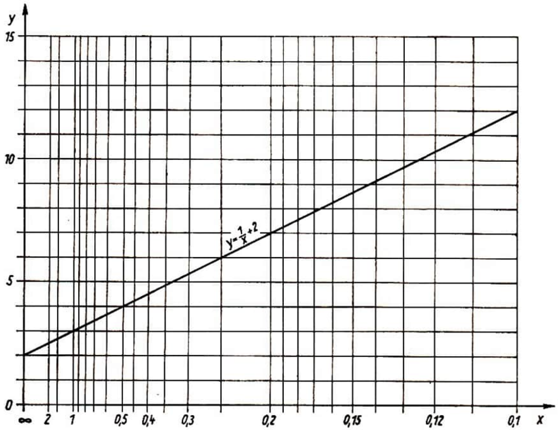
$\frac{s}{mm}$
500
400
300
200
100
80
60
40
30
20
10
8
6
4
3
2
1
1
2
3
4
6
8
10
$\frac{t}{\frac{1}{32}\,s}$

TAFEL 44

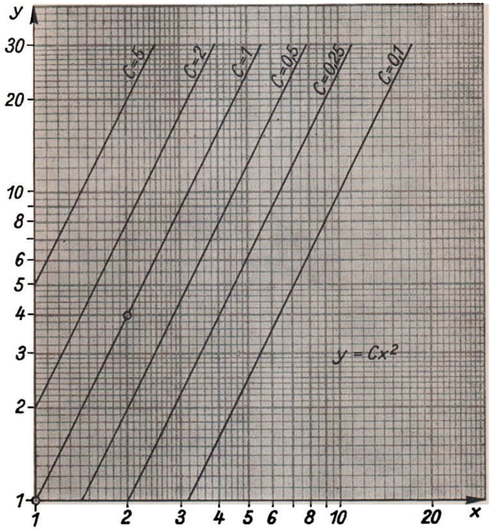


p/at
30
20
10
8
6
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
3
4
5
V/dm³
p · V^ϰ = const
ϰ = 1,4

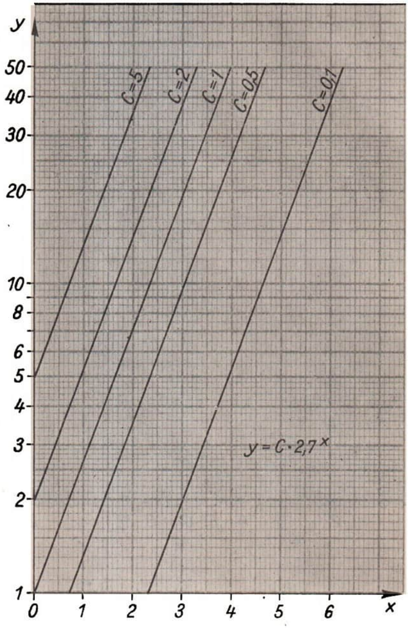
TAFEL 45



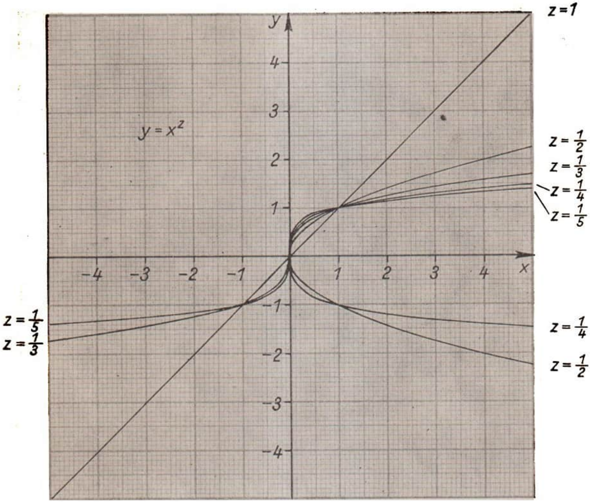
TAFEL 46



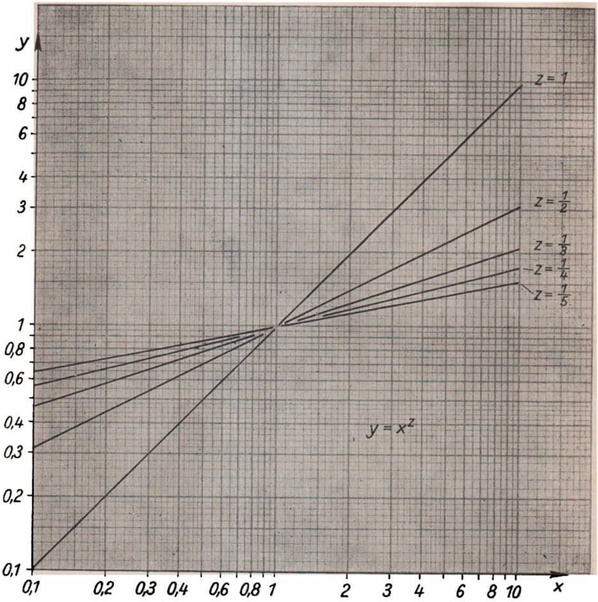
TAFEL 47



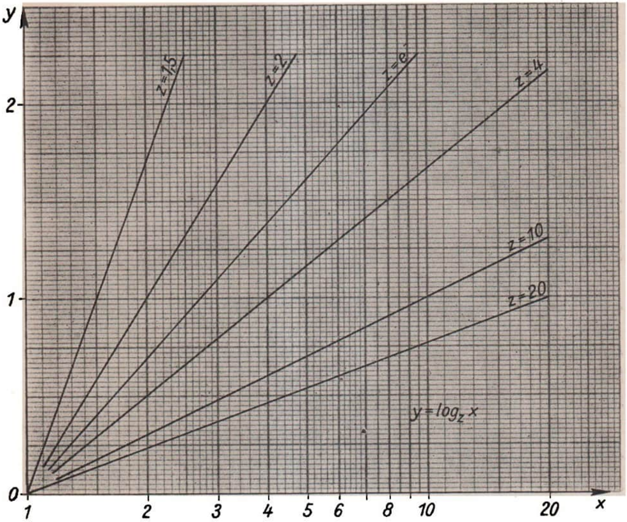
TAFEL 48



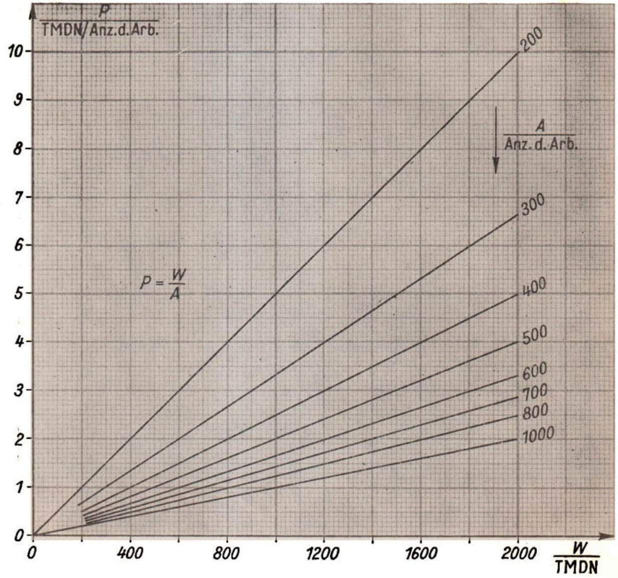
TAFEL 49


y
10
8
6
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
3
4
6
8
10
x
z = 1
z = 1/2
z = 1/3
z = 1/4
z = 1/5
y = x^z

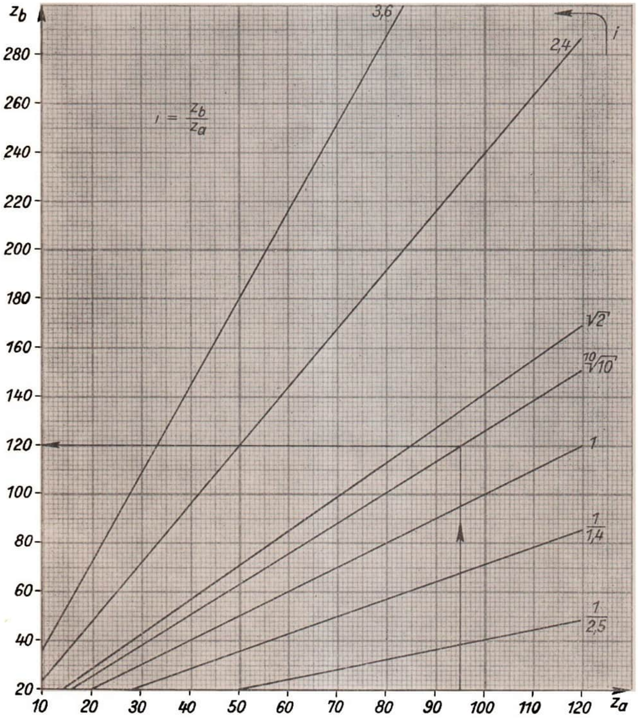
TAFEL 50



TAFEL 51

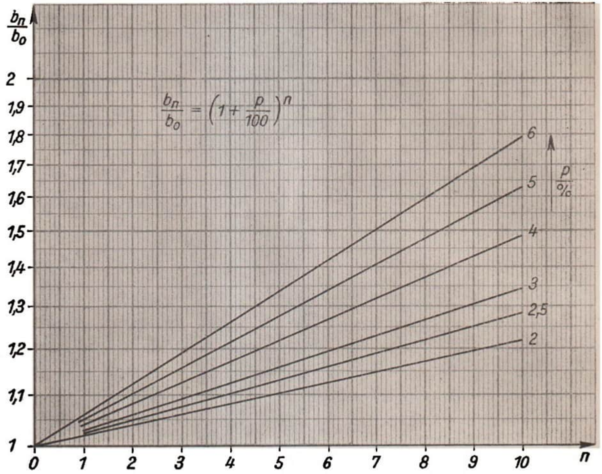

P / TMDN/Anz.d.Arb.
A / Anz.d.Arb.
$P = \frac{W}{A}$
200
300
400
500
600
700
800
1000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
400
800
1200
1600
2000
W / TMDN

TAFEL 52

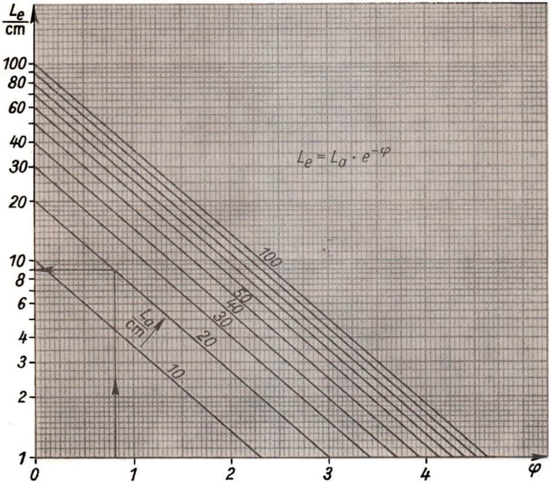


z_b
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
z_a
$i = \frac{z_b}{z_a}$
i
3,6
2,4
$\sqrt{2}$
$\sqrt[10]{10}$
1
$\frac{1}{1,4}$
$\frac{1}{2,5}$

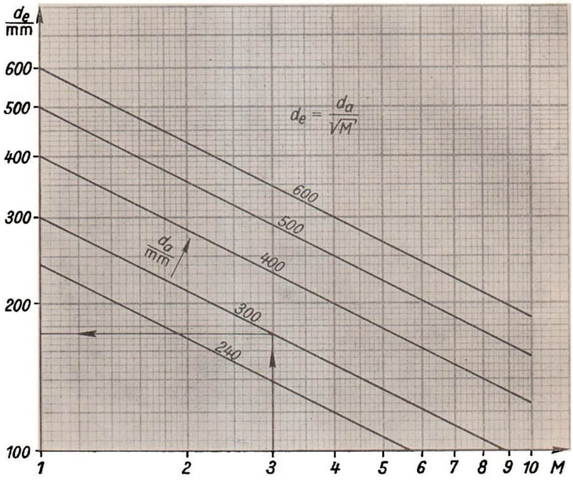
TAFEL 53


$\frac{b_n}{b_o}$
$\frac{b_n}{b_o} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
2
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
n
6
5
4
3
2,5
2
$\frac{p}{\%}$

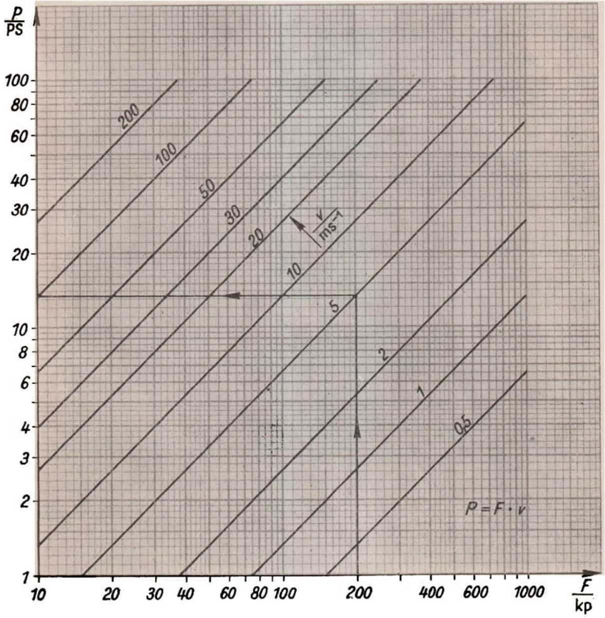
TAFEL 54


$\frac{L_e}{cm}$
100
80
60
40
30
20
10
8
6
4
3
2
1
0
1
2
3
4
φ
$L_e = L_a \cdot e^{-\varphi}$
100
50
40
30
20
10
$\frac{L_a}{cm}$

TAFEL 55

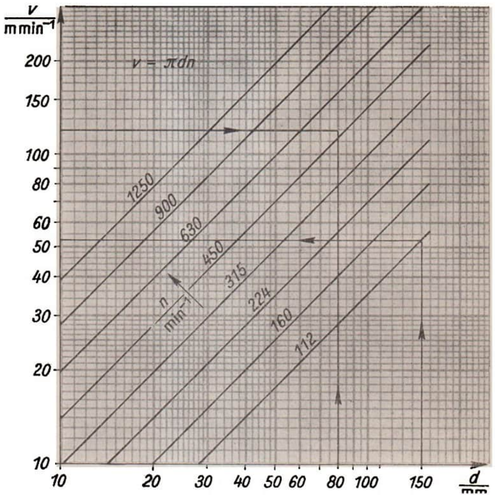

$\frac{d_e}{mm}$
600
500
400
300
200
100
$d_e = \frac{d_a}{\sqrt{M}}$
600
500
400
300
240
$\frac{d_a}{mm}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
M

TAFEL 56



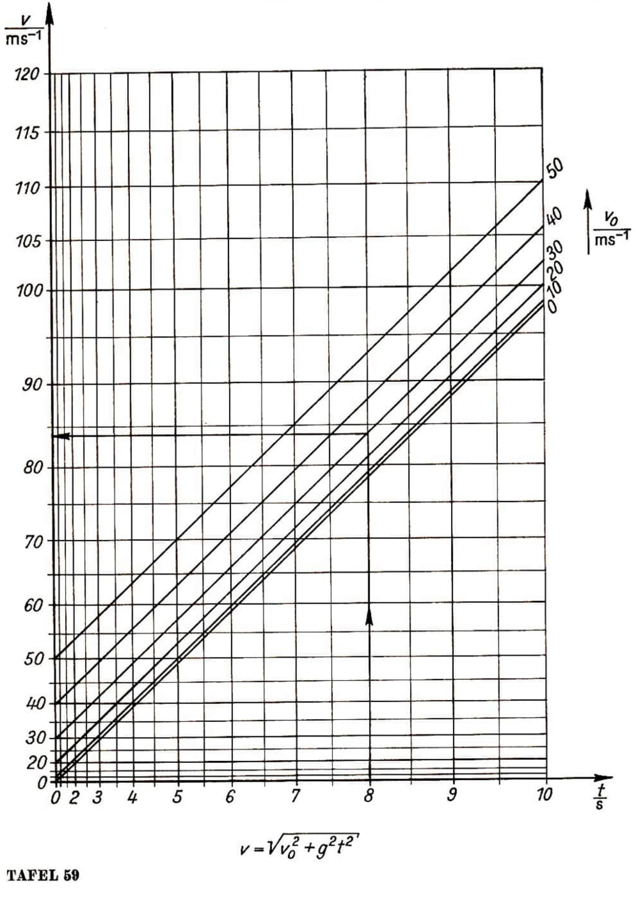
P/PS
100
80
60
40
30
20
10
8
6
4
3
2
1
10
20
30
40
60
80
100
200
400
600
1000
F/kp
200
100
50
30
20
10
5
2
1
0,5
v/ms-1
P = F · v

TAFEL 57



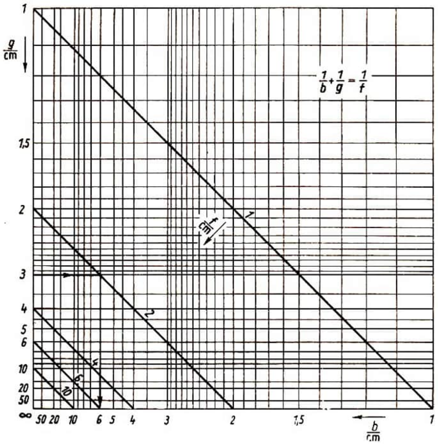
v / m min⁻¹
200
150
100
80
60
50
40
30
20
10
$v = \pi d n$
1250
900
630
450
315
224
160
112
n / min⁻¹
10
20
30
40
50
60
80
100
150
d / mm

TAFEL 58



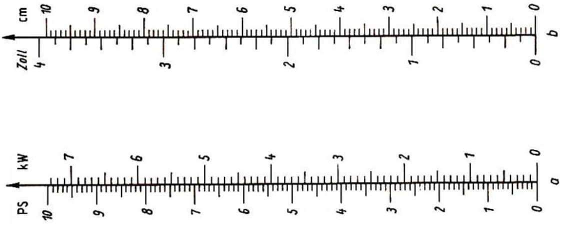
$\frac{v}{ms^{-1}}$
120
115
110
105
100
90
80
70
60
50
40
30
20
0
0 2 3 4 5 6 7 8 9 10
$\frac{t}{s}$
50
40
30
20
10
0
$\frac{v_0}{ms^{-1}}$
$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$

TAFEL 59

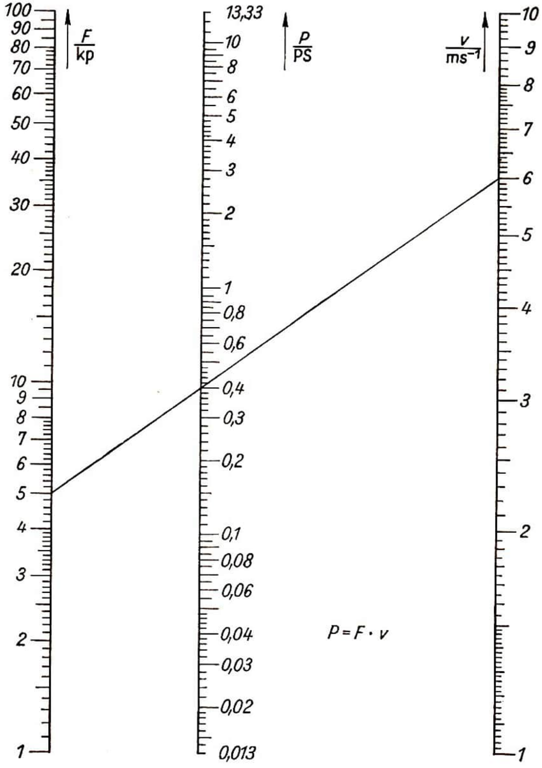

$\frac{g}{cm}$
$\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}$
$\frac{f}{cm}$
$\frac{b}{cm}$
1
1,5
2
3
4
5
6
10
20
50
∞
50 20 10 6 5 4 3 2 1,5 1
1
2
4
6
10

TAFEL 60

TAFEL 62

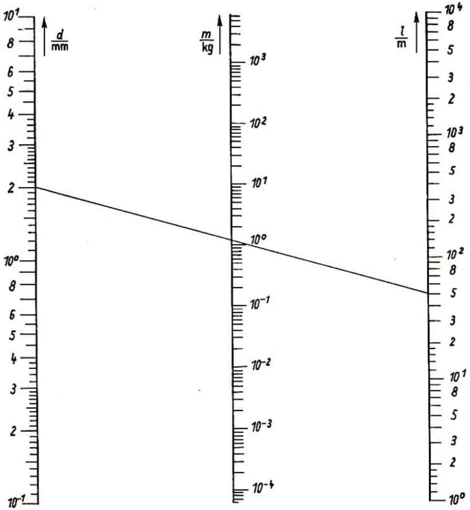


TAFEL 61

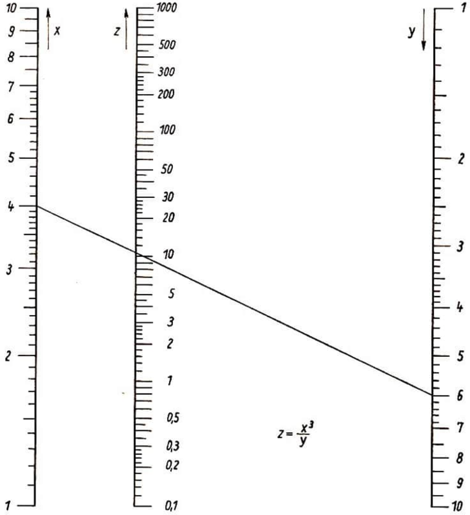


F / kp
P / PS
v / ms⁻¹
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
13,33
10
8
6
5
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,04
0,03
0,02
0,013
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
P = F · v

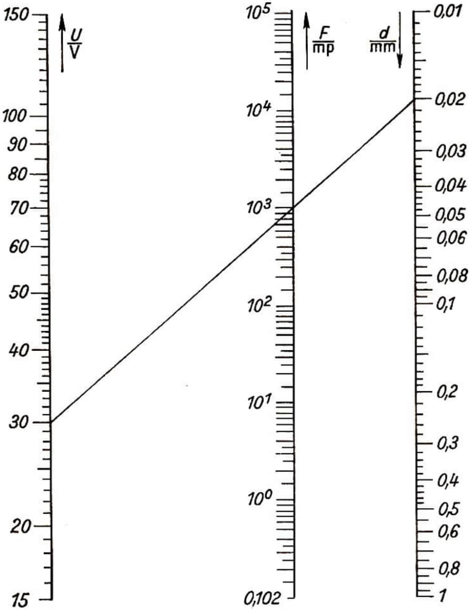
TAFEL 63



$$m = \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 l \quad \text{mit} \quad \rho = 7{,}85\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

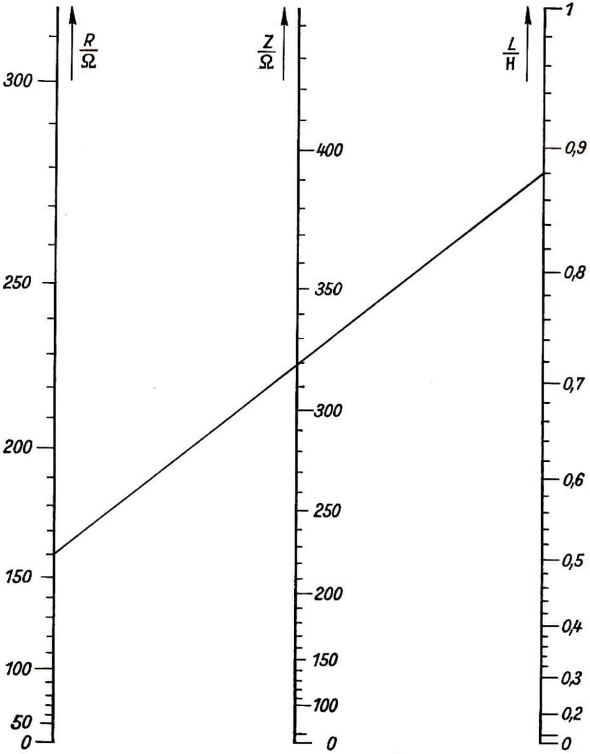

x
z
y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1000
500
300
200
100
50
30
20
10
5
3
2
1
0,5
0,3
0,2
0,1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$z = \frac{x^3}{y}$

TAFEL 65



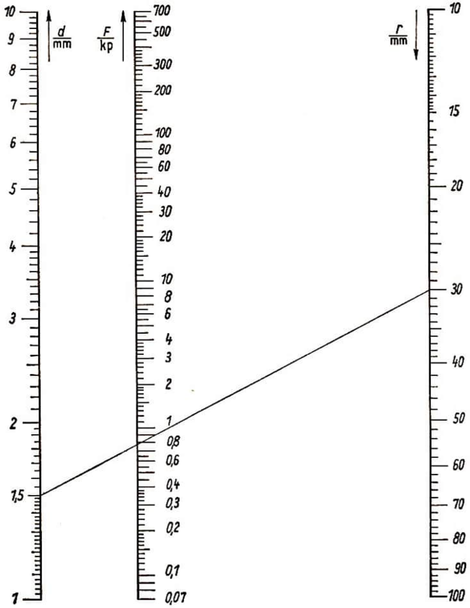
$$F = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{U^2 \cdot A}{d^2}\ ; \quad A = 10\,\mathrm{cm}^2\ ; \quad \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

TAFEL 66



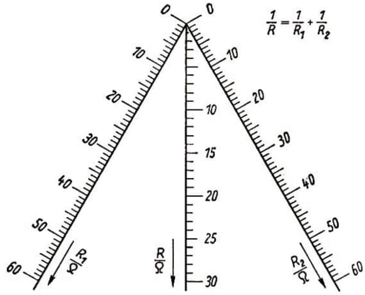
$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \omega = 314\ \frac{1}{s}$$

TAFEL 67

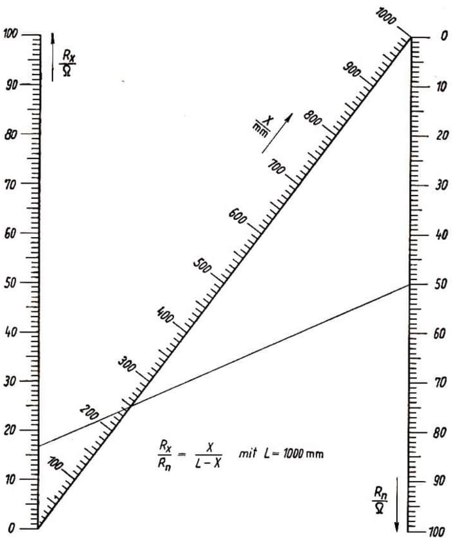


$$F = \frac{0{,}002\,\left(\frac{d}{\mathrm{mm}}\right)^3 \cdot \frac{\tau_{zul}}{\mathrm{kp\,cm^{-2}}}}{\frac{r}{\mathrm{mm}}}\ \mathrm{kp}\ ;\quad \tau_{zul} = 3500\ \mathrm{kp\,cm^{-2}}$$

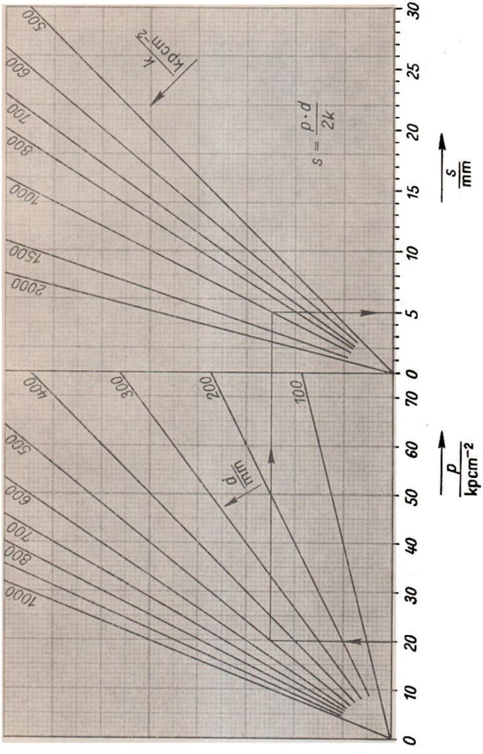
TAFEL 68



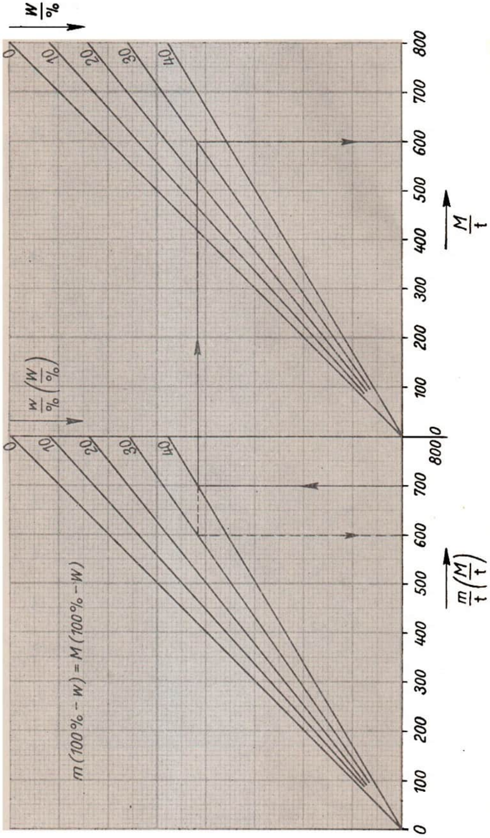
TAFEL 69



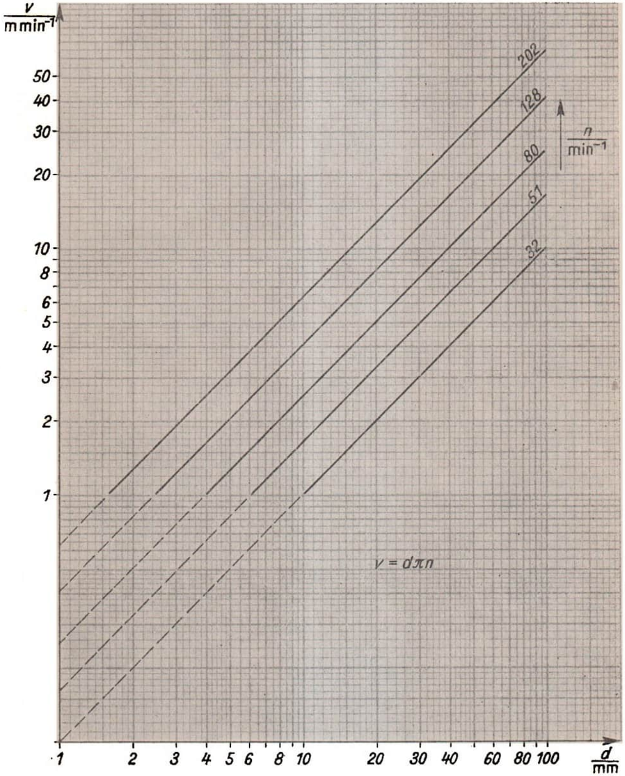
TAFEL 70


k / kpcm⁻²
500
600
700
800
1000
1500
2000
$s = \frac{p \cdot d}{2k}$
s / mm
0 5 10 15 20 25 30
d / mm
100
200
300
400
500
600
700
800
1000
p / kpcm⁻²
0 10 20 30 40 50 60 70

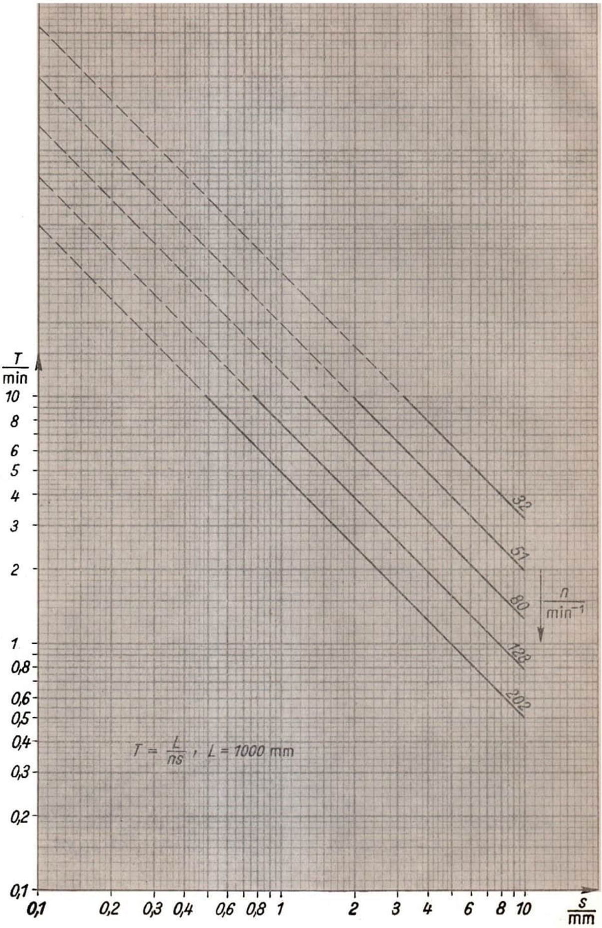
TAFEL 71


W/%
w/% (W/%)
m (100% − w) = M (100% − W)
M/t
m/t (M/t)
0
10
20
30
40
0
100
200
300
400
500
600
700
800

TAFEL 72

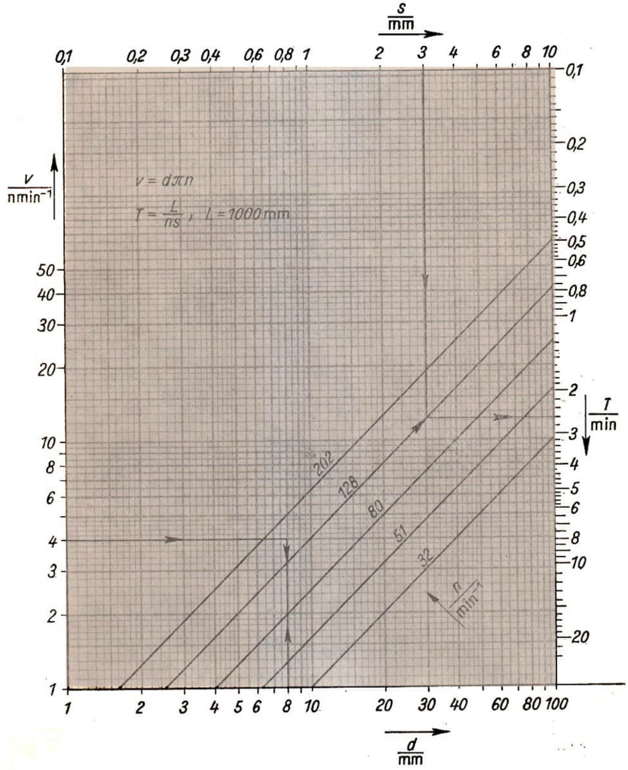

v / m min⁻¹
50
40
30
20
10
8
6
5
4
3
2
1
202
128
80
51
32
n / min⁻¹
v = dπn
1
2
3
4
5
6
8
10
20
30
40
60
80
100
d / mm

TAFEL 73



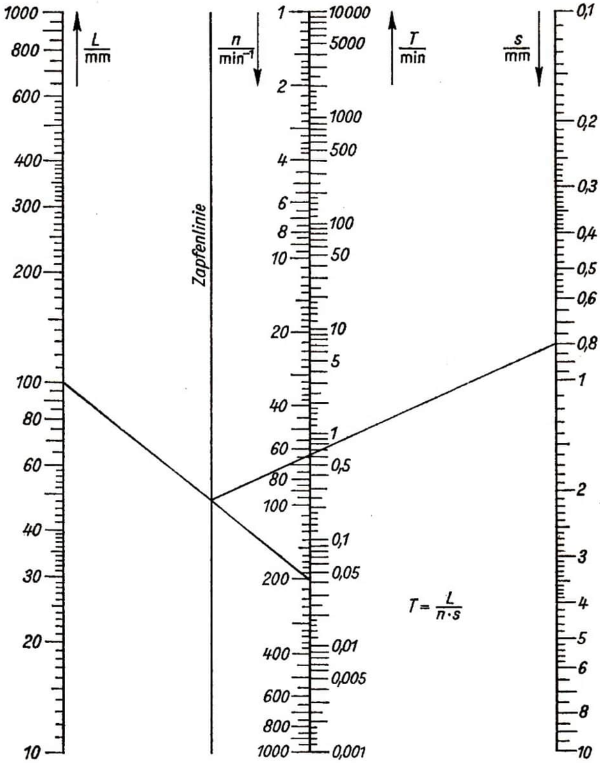
T / min
10
8
6
5
4
3
2
1
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
3
4
6
8
10
s / mm
32
51
80
128
202
n / min⁻¹
T = L / ns , L = 1000 mm

TAFEL 74



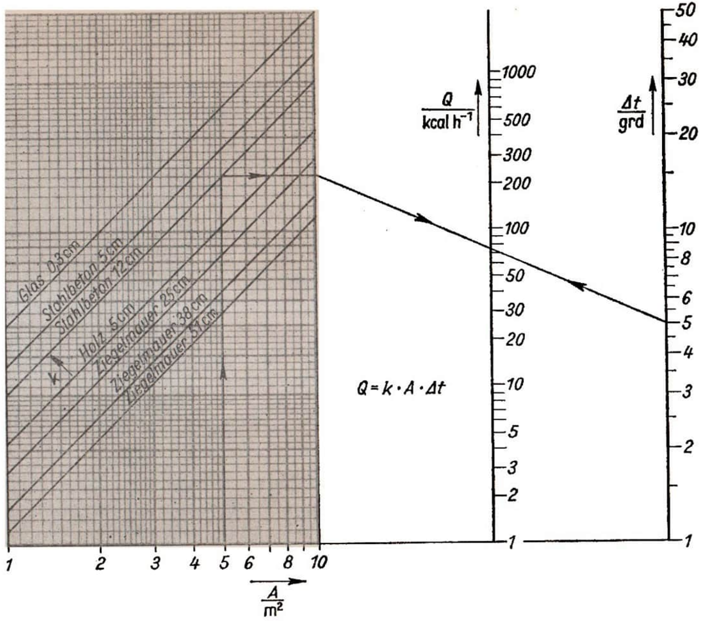
s / mm
0,1 0,2 0,3 0,4 0,6 0,8 1 2 3 4 6 8 10
v / n min⁻¹
50 40 30 20 10 8 6 4 3 2 1
v = dπn
T = L / ns , L = 1000 mm
202
128
80
51
32
n / min⁻¹
T / min
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,8 1 2 3 4 5 6 8 10 20
1 2 3 4 5 6 8 10 20 30 40 60 80 100
d / mm

TAFEL 75

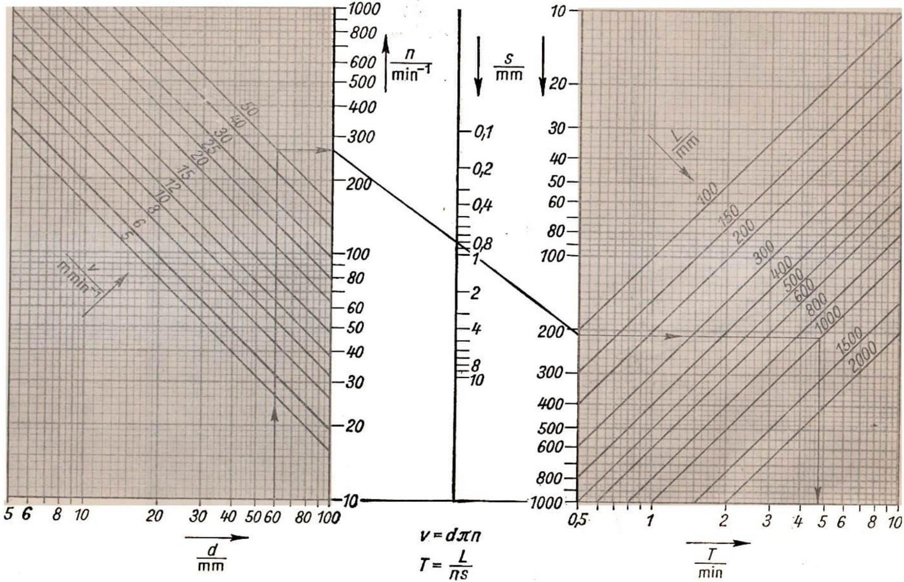


L/mm
n/min⁻¹
T/min
s/mm
Zapfenlinie
$T = \frac{L}{n \cdot s}$
1000
800
600
400
300
200
100
80
60
40
30
20
10
1
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
200
400
600
800
1000
10000
5000
1000
500
100
50
10
5
1
0,5
0,1
0,05
0,01
0,005
0,001
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,8
1
2
3
4
5
6
8
10

TAFEL 76


Glas 0,3 cm
Stahlbeton 5 cm
Stahlbeton 12 cm
Holz 5 cm
Ziegelmauer 25 cm
Ziegelmauer 38 cm
Ziegelmauer 51 cm
k
1
2
3
4
5
6
8
10
A/m²
Q = k · A · Δt
Q/kcal h⁻¹
1000
500
300
200
100
50
30
20
10
5
3
2
1
Δt/grd
50
40
30
20
10
8
6
5
4
3
2
1

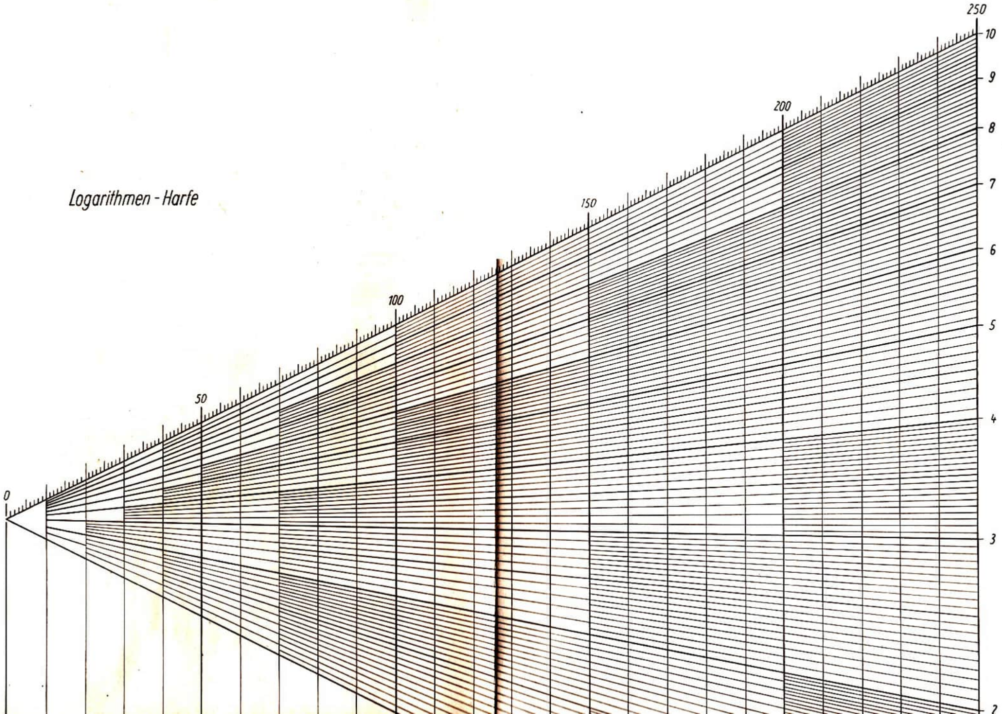
TAFEL 77

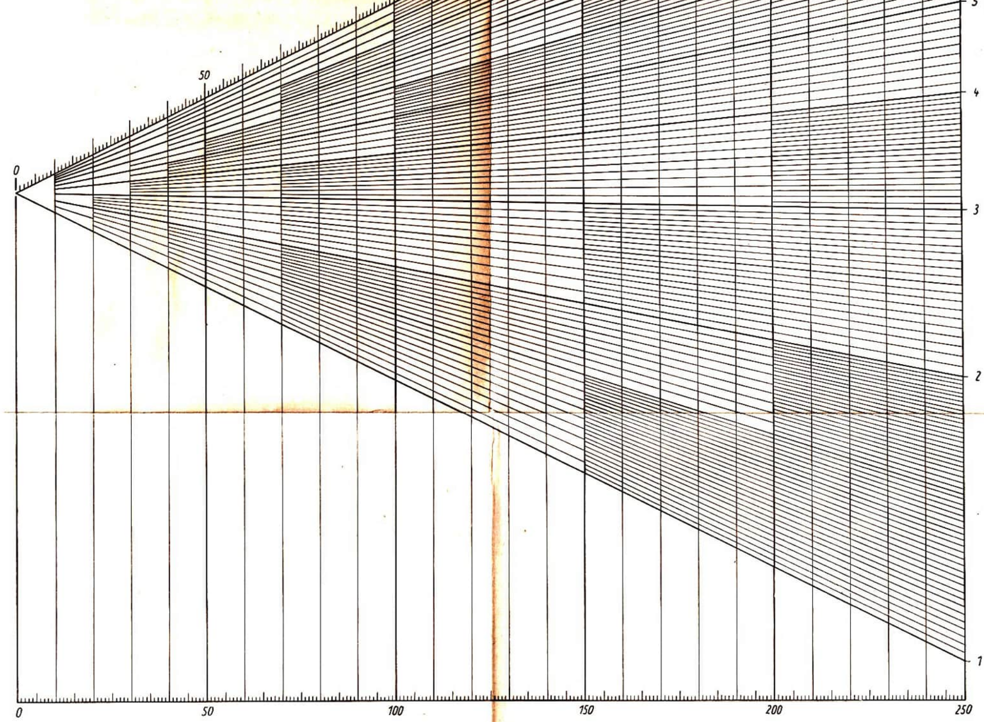


$\frac{d}{mm}$
$\frac{n}{min^{-1}}$
$\frac{v}{m\,min^{-1}}$
5 6 8 10 20 30 40 50 60 80 100
10 20 30 40 50 60 80 100 200 300 400 500 600 800 1000
5 6 8 10 12 15 20 25 30 40 50
$\frac{s}{mm}$
0,1 0,2 0,4 0,8 1 2 4 8 10
$\frac{L}{mm}$
100 150 200 300 400 500 600 800 1000 1500 2000
$\frac{T}{min}$
0,5 1 2 3 4 5 6 8 10
$v = d\pi n$
$T = \frac{L}{ns}$

TAFEL 78

Logarithmen - Harfe





Ausgewählte Kapitel, Beilage 1

Die Simplextransformationen für Modell ((1))

Zielfunktion: $20x_1 + 10x_2 = z \rightarrow \max$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
&(11)\quad 30x_1 + 10x_2 \leqq 3000\\
&(12)\quad 40x_1 + 30x_2 \leqq 6000\\
&(13)\quad 10x_1 + 20x_2 \leqq 2000\\
&\text{mit}\quad x_1,\ x_2 \geqq 0
\end{aligned}$$

II′

$$\boxed{(21)'}\quad x_1 = -\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{30}w_1 + 100$$

$$(22)'\quad x_2\left(30 - 40\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 40\cdot\frac{1}{30}\right) + w_2 = 6000 - 40\cdot 100$$

$$(23)'\quad x_2\left(20 - 10\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 10\cdot\frac{1}{30}\right) + w_3 = 2000 - 10\cdot 100$$

$$(24)'\quad x_2\left(10 - 20\cdot\frac{1}{3}\right) + w_1\left(0 - 20\cdot\frac{1}{30}\right) - z = 0 - 20\cdot 100$$

III′

$$(31)'\quad x_1 + w_1\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0 - \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{50}\right) = 100 - \frac{1}{8}\cdot 60$$

$$(32)'\quad w_1\left(-\frac{4}{3} + \frac{50}{8}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0 - \frac{50}{3}\cdot\frac{3}{50}\right) + w_2 = 2000 - \frac{50}{8}\cdot 60$$

$$\boxed{(33)'}\quad x_2 = \frac{1}{50}w_1 - \frac{3}{50}w_3 + 60$$

$$(34)'\quad w_1\left(-\frac{2}{3} + \frac{10}{8}\cdot\frac{1}{50}\right) + w_3\left(0 - \frac{10}{8}\cdot\frac{3}{50}\right) - z = -2000 - \frac{10}{8}\cdot 60$$

										q
I	(11)	$\boxed{30x_1}$	$+ 10x_2$	$+ w_1$				$=$	3000	100 ←
	(12)	$40x_1$	$+ 30x_2$		$+ w_2$			$=$	6000	150
	(13)	$10x_1$	$+ 20x_2$			$+ w_3$		$=$	2000	200
	(14)	$20x_1$	$+ 10x_2$				$- z$	$=$	0	—
II	(21)	$x_1 +$	$\frac{1}{3}x_2$	$+ \frac{1}{30}w_1$				$=$	100	300
	(22)		$\frac{50}{3}x_2$	$- \frac{4}{3}w_1$	$+ w_2$			$=$	2000	120
	(23)		$\boxed{\frac{50}{3}x_2}$	$- \frac{1}{3}w_1$		$+ w_3$		$=$	1000	60 ←
	(24)		$\frac{10}{3}x_2$	$- \frac{2}{3}w_1$			$- z$	$=$	-2000	—
III	(31)	x_1		$+ \frac{2}{50}w_1$		$- \frac{1}{50}w_3$		$=$	80	
	(32)			$- w_1$	$+ w_2 -$	w_3		$=$	1000	
	(33)		x_2	$- \frac{1}{50}w_1$		$+ \frac{3}{50}w_3$		$=$	60	
	(34)			$- \frac{3}{5}w_1$		$- \frac{1}{5}w_3$	$- z$	$=$	-2200	

Basislösungen

Zu I.: Anfangslösung		Zu II.: 1. verb. Lösung		Zu III.: Optimallösung	
Basis-variablen	Nichtbasis-variablen	Basis-variablen	Nichtbasis-variablen	Basis-variablen	Nichtbasis-variablen
$w_1 = 3000$	$x_1 = 0$	$x_1 = 100$	$x_2 = 0$	$x_1 = 80$	$w_1 = 0$
$w_2 = 6000$	$x_2 = 0$	$w_2 = 2000$	$w_1 = 0$	$w_2 = 1000$	$w_3 = 0$
$w_3 = 2000$		$w_3 = 1000$		$x_2 = 60$	
$z = 0$		$z = 2000$		$z = 2200$	