Methodische Beiträge zum Unterricht im Fach

MATHEMATIK

7

Arten mathematischer Schüleraufgaben

DEUTSCHES PÄDAGOGISCHES ZENTRALINSTITUT

Arten mathematischer Schüleraufgaben

Zur Klassifikation und zur didaktischen Funktion mathematischer Schüleraufgaben

Dr. Fritz Neigenfind
Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut Berlin

Herausgegeben vom
Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut
Sektion Unterrichtsmethodik und Lehrpläne –

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN · 1962

Redaktion:
Heinz Junge, Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut Berlin

Redaktionsschluß: 22. Februar 1962

ES 10 C · Best.-Nr. 27 952-1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/62 (E)
Satz und Druck: I/16/01 MV Potsdam A 480

Inhaltsübersicht

Einleitung

Der XXII. Parteitag der KPdSU weist der Menschheit den Weg in eine lichte Zukunft. Die großartige Perspektive des Kommunismus rückt in greifbare Nähe. In engster Freundschaft und Zusammenarbeit mit der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Ländern werden auch „wir in der DDR den Aufbau des Sozialismus vollenden und mit dem Aufbau des Kommunismus beginnen.“[1]

Die Vollendung des Aufbaus des Sozialismus vollzieht sich nicht von selbst; der volle Sieg des Sozialismus muß erkämpft und errungen werden. Wenngleich es keine Macht der Welt gibt, die uns daran hindern kann, den Weg zu Wohlstand und Glück des gesamten deutschen Volkes zu beschreiten, so hängt doch der Erfolg unseres Kampfes davon ab, in welchem Maße sich jeder einzelne für die Vollendung des Aufbaus des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik einsetzt.

N. S. Chruschtschow sagte bei der Erläuterung des Programms der Kommunistischen Partei der Sowjetunion auf dem XXII. Parteitag der KPdSU:

„Der wichtigste Bestandteil des kommunistischen Aufbaus ist die Erziehung der Menschen im Geiste des Kommunismus. Die Schaffung der höchsten Arbeitsproduktivität, die Entwicklung der kommunistischen gesellschaftlichen Beziehungen und die Durchsetzung der Regeln des kommunistischen Gemeinschaftslebens sind undenkbar ohne ein höheres Bewußtsein und kulturelles Niveau aller Mitglieder der Gesellschaft. Je höher das Bewußtsein der Mitglieder der Gesellschaft, je umfassender und breiter ihre schöpferische Aktivität, desto schneller und erfolgreicher werden wir das Programm des Aufbaus des Kommunismus verwirklichen.“[2]

Der Schule fällt bei der Erziehung derjenigen Menschen, die im Kommunismus leben und schaffen werden, eine besonders große und herrliche Aufgabe zu. Noch nie haben Pädagogen eine so klare Perspektive für ihre

[1] W. Ulbricht auf der 14. Tagung des ZK der SED. In: Der XXII. Parteitag der KPdSU und die Aufgaben in der Deutschen Demokratischen Republik. Dietz Verlag, Berlin 1961, Seite 33.

[2] N. S. Chruschtschow auf dem XXII. Parteitag der KPdSU. In: Der Triumph des Kommunismus ist gewiß. Dietz Verlag, Berlin 1961, Seite 254.

Bildungs- und Erziehungsarbeit besessen, noch nie haben sie ihre schwere und schöne Arbeit mit soviel Zuversicht leisten können, noch nie wurde ihnen von der gesamten Gesellschaft soviel Vertrauen geschenkt, soviel Hilfe und Unterstützung gewährt; aber auch noch nie war die Verantwortung der Pädagogen für die Zukunft der Menschheit größer als heute. Im Rechenschaftsbericht des Zentralkomitees der KPdSU heißt es klar:

„Die Erziehung des Menschen der kommunistischen Gesellschaft stellt an die Schule neue hohe Anforderungen."[3]

Auf dem 14. Plenum des ZK der SED wurden die Lehren des XXII. Parteitages der KPdSU ausgewertet und wegweisende Schlußfolgerungen für die weitere Arbeit in der DDR gezogen. Auch hier stand die Erziehung der Menschen im Mittelpunkt der Beratungen. Dabei konnte festgestellt werden:

„Auf dem VI. Pädagogischen Kongreß und nach den Maßnahmen vom 13. August gab das Ministerium für Volksbildung eine richtige Aufgabenstellung zur weiteren Durchführung der Beschlüsse des V. Parteitages. ... Nach dem VI. Pädagogischen Kongreß haben viele Lehrer und Erzieher mit großer Begeisterung begonnen, das Lernen an der Schule zu verbessern und das Niveau des polytechnischen Unterrichts zu erhöhen."[4]

Es geht in der gegenwärtigen Etappe der Entwicklung der sozialistischen Schule der Deutschen Demokratischen Republik also in erster Linie darum, die auf dem VI. Pädagogischen Kongreß gefaßten Beschlüsse zur Verbesserung der Lern- und Erziehungsarbeit zu verwirklichen. Die volle Durchsetzung und Realisierung der durch den VI. Pädagogischen Kongreß angeregten und eingeleiteten Maßnahmen stellt jeden Lehrer und jeden pädagogischen Wissenschaftler vor große Aufgaben, vor Aufgaben, deren Lösung zugleich ein wichtiger Beitrag für die schnellere Vollendung des Aufbaus des Sozialismus in der DDR ist.

Besondere Aufmerksamkeit schenkte der VI. Pädagogische Kongreß der Verbesserung des Mathematikunterrichts. In seiner Ansprache anläßlich des festlichen Empfangs von Teilnehmern des Kongresses hob der Erste Sekretär des ZK der SED und Vorsitzende des Staatsrates der DDR, Walter Ulbricht, die hohe Bedeutung des Mathematikunterrichts mit folgenden Worten hervor:

„Ein entscheidendes Problem ist, wie unsere pädagogische Arbeit so entwickelt werden kann, daß den Schülern hohe wissenschaftliche und fachliche Kenntnisse vermittelt werden, die sie befähigen, auch noch im Jahre 2000 ihren Mann im Leben zu stehen. Besonders wichtig sind — das kann

[3] Ebenda, Seite 101.

[4] W. Ulbricht auf der 14. Tagung des ZK der SED. A. a. O., Seite 121.

man gar nicht genug unterstreichen — Mathematik und die naturwissenschaftlichen Fächer."[5]

Um so schwerer wiegt eine solche Einschätzung des Leistungsstandes im Fach Mathematik, wie sie beispielsweise Prof. Kurt Hager, Kandidat des Politbüros und Sekretär des ZK der SED, in seinem Diskussionsbeitrag auf dem VI. Pädagogischen Kongreß vornahm. Er führte aus:

„Alle bisherigen Erfolge sind nur die ersten Schritte beim Aufbau unserer sozialistischen Schule. Alle Lehrer und Erzieher haben große Anstrengungen unternommen, die wir schätzen und anerkennen. Aber eine große Anzahl von Lehrern ist mit dem Erreichten selbst nicht zufrieden. Sie erkennen, daß es viele Schüler gibt, die noch nicht über ausreichende, exakte und feste Kenntnisse verfügen. Im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht ist das Grundwissen nicht ausreichend. Die Grundrechenarten werden von den Schülern zum Teil ungenügend beherrscht, was in den oberen Klassen deutlich sichtbar wird. Die Schüler beherrschen formal einzelne Rechenoperationen und Lösungswege; ihr mathematisches Denken ist ungenügend geschult."[6]

Neben verschiedenen anderen Ursachen für den unbefriedigenden Leistungsstand im Fach Mathematik spielt das Vorherrschen einer didaktisch und methodisch einseitigen und zum Teil sogar unzweckmäßigen Art der Behandlung mathematischer Aufgaben im Unterricht eine bedeutende Rolle. Vielfach wird eine Aufgabe wie die andere behandelt, eine neben die andere gestellt, Lösung an Lösung gereiht. Der Bildungs- und Erziehungserfolg ist demgemäß nicht so, wie er bei didaktisch und methodisch richtiger Gestaltung des Unterrichts sein könnte und müßte. Das ist um so bedeutsamer, als wohl in keinem anderen Unterrichtsfach das Lösen von Aufgaben durch Schüler eine so große Rolle spielt und einen so breiten Raum einnimmt wie im Fach Mathematik. Didaktische und methodische Unzulänglichkeiten beim Lösen mathematischer Aufgaben werden leicht zu grundsätzlichen Mängeln der Bildungs- und Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht der sozialistischen Schule und wirken sich in letzter Konsequenz auch auf den weiteren Aufbau des Sozialismus in der DDR aus. Es ist daher zu einem politisch und pädagogisch vordringlichen Anliegen geworden, die Methodik des Lösens mathematischer Aufgaben im Unterricht der sozialistischen Schule zu entwickeln.

Seitens der pädagogischen Wissenschaft ist zwar der hohe Wert einer für die Bildung und Erziehung zweckmäßigen Behandlung mathema-

[5] W. Ulbricht auf dem Empfang von Teilnehmern des VI. Pädagogischen Kongresses. In: Für die Verbesserung des Lernens und der sozialistischen Erziehung an den Oberschulen; Protokoll des VI. Pädagogischen Kongresses, Teil I. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961, Seite 9 f.

[6] K. Hager auf dem VI. Pädagogischen Kongreß. In: Protokoll I (s. Fußnote 5), Seite 93.

tischer Aufgaben im Unterricht seit langem erkannt; eine geschlossene, in der Praxis erhärtete Theorie der Methodik des Lösens mathematischer Aufgaben im Unterricht existiert jedoch noch nicht. Wohl gibt es besonders in der Sowjetpädagogik, aber auch in methodischen Arbeiten anderer sozialistischer Länder — zum Beispiel der ČSSR — wertvolle Beiträge zur Schaffung einer solchen für alle sozialistischen Schulen anwendungsfähigen Theorie. Vor allem liegen bereits in der Praxis erprobte Vorschläge zur systematischen Überwindung der verschiedenen Schwierigkeitsstufen mathematischer Aufgaben vor. Diese Ergebnisse der Untersuchungen der Methodiker des Mathematikunterrichts der befreundeten sozialistischen Länder stellen, obwohl sie sich in erster Linie mit Fragen des Rechenunterrichts der ersten Schuljahre befassen, für uns eine große Hilfe dar und gaben mir persönlich viele wertvolle Anregungen bei der Arbeit an dieser kleinen Schrift zur Klassifikation und zur didaktischen Funktion mathematischer Aufgaben für Schüler. Aber auch in der Sowjetunion und in den anderen sozialistischen Ländern werden die bisher erarbeiteten Hilfen für die Praxis des Mathematikunterrichts noch nicht als zufriedenstellende Lösung des umfassenden didaktischen und methodischen Problems angesehen.

Auch der vorliegende „Methodische Beitrag zum Unterricht im Fach Mathematik" ist nicht mehr als *ein Beitrag* zur Lösung des für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR besonders wichtig gewordenen umfassenden Problems einer Didaktik und Methodik der mathematischen Aufgaben für Schüler; eine tatsächlich zufriedenstellende Lösung kann nur in sozialistischer Gemeinschaftsarbeit unter Einbeziehen der Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht aller sozialistischen Länder geschaffen werden.

Mit der Veröffentlichung der hier vorgelegten Teilergebnisse kann aber nicht so lange gewartet werden, bis eine geschlossene Darlegung einer in allen Einzelheiten theoretisch untermauerten und praktisch erprobten Didaktik und Methodik mathematischer Aufgaben für Schüler möglich wird. In der Deutschen Demokratischen Republik traten nämlich in Zusammenhang mit der Herstellung immer engerer Beziehungen zwischen Schule und Leben Probleme auf, die es zu einer zwingenden Notwendigkeit werden lassen, sich über die Arten mathematischer Aufgaben für Schüler und über die didaktischen Funktionen der verschiedenen Aufgabentypen im einheitlichen Bildungs- und Erziehungsprozeß Gedanken zu machen. Beispielsweise wurde manchenorts das Lösen von Aufgaben technischen Inhalts als möglichst schnell anzustrebendes Ziel des Mathematikunterrichts angesehen. Die Behandlung einiger mathematischer Stoffgebiete wurde fast ausschließlich dem einen Zweck untergeordnet, mit Hilfe bestimmter mathematischer Kenntnisse die Schüler zu befähigen und zu veranlassen, Anwendungsaufgaben technischer Art zu lösen. Auf diese Weise sollte der Beitrag des Mathematikunterrichts für die polytechnische Bildung und Erziehung der Schüler verstärkt werden.

Solche fehlerhaften Überspitzungen und Verengungen haben nicht selten ihre Ursache in ideologischen Unklarheiten, besonders in Unklarheiten über Wesen, Inhalt und Rolle der polytechnischen Bildung und Erziehung im Rahmen der sozialistischen Bildung und Erziehung. Aber auch spezielle didaktische und methodische Fragen spielen eine Rolle. Schließlich dienen alle didaktischen und methodischen Einzelmaßnahmen der Erfüllung bestimmter Bildungs- und Erziehungsaufgaben, werden vom Lehrer angewandt, um zuvor wohlüberlegte Bildungs- und Erziehungsziele sicher zu erreichen. Die ideologischen Schwächen führten gemeinsam mit den pädagogischen in den letzten Jahren zu einem gewissen Praktizismus und Utilitarismus im Mathematikunterricht, zum Schematismus beim Lösen mathematischer Aufgaben und zum Absinken des Leistungsniveaus in bestimmten Bereichen der mathematischen Bildung der Schüler.

Zweifellos ist die Verstärkung der polytechnischen Bildung und Erziehung eine außerordentlich wichtige politische und pädagogische Aufgabe, die von unserer sozialistischen Schule gelöst werden muß. Ebenso steht fest, daß der Mathematikunterricht insgesamt und speziell auch durch das Lösen von Anwendungsaufgaben technischen Inhalts einen nicht zu unterschätzenden Beitrag für die Verstärkung der polytechnischen Bildung und Erziehung zu leisten hat. Darüber hinaus aber muß im Mathematikunterricht für die sozialistische Bildung und Erziehung, die wesentlich mehr umfaßt als nur die polytechnische Bildung und Erziehung, eine vielfältige Arbeit geleistet werden. Wird jedoch ein so wichtiges Mittel für die Gestaltung des Mathematikunterrichts, wie es zum Beispiel die mathematischen Aufgaben für Schüler sind, nur einseitig für die polytechnische Bildung und Erziehung genutzt oder gar vom Mittel in ein Ziel der Bildung und Erziehung umgewandelt, dann entstehen — trotz der zugrunde liegenden guten Absicht — Fehler, die dem Erfolg der gesamten Bildungs- und Erziehungsarbeit abträglich sind.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, einige der Unklarheiten zu beseitigen, die gegenwärtig daran hindern, das Lösen mathematischer Aufgaben bewußt und planmäßig in den Dienst der Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen zu stellen. Die hier aus theoretischen Erwägungen sowie aus praktischen Beobachtungen und Erfahrungen abgeleiteten Vorschläge werden mit der Hoffnung zur Diskussion gestellt, auf diese Weise mithelfen zu können, einen gewissen Schematismus, bestimmte Verengungen und Einseitigkeiten sowie Überspitzungen beim Lösen mathematischer Aufgaben durch Schüler zu überwinden und damit das Niveau des Mathematikunterrichts der deutschen sozialistischen Oberschule weiter zu heben. Es geht darum, die vorhandenen Möglichkeiten für die allseitige Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen auch im Mathematikunterricht voll auszuschöpfen und damit unsere Oberschule der Deutschen Demokratischen Republik auch auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts als leuchtendes Vorbild für die Schule des künftigen friedliebenden und sozialistischen Gesamtdeutschland auszubauen.

1. Begriff und Wesen mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen

Im allgemeinen denken Lehrer und Schüler aller Schularten und Klassenstufen kaum darüber nach, worin eigentlich das Charakteristische einer mathematischen Aufgabe für Schüler besteht und was für eine von Schülern angefertigte Lösung einer mathematischen Aufgabe typisch ist. Alle Rechen- und Mathematiklehrer lassen im Unterricht mathematische Aufgaben lösen, stellen weitere als Hausaufgaben; die Schüler finden die Lösung der einen Aufgabe, versagen beim Lösen der anderen. Es scheint für Lehrer und Schüler klar zu sein, welche Anforderungen an mathematische Aufgaben für Schüler zu stellen sind, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit ein Ergebnis als Lösung einer mathematischen Schüleraufgabe Anerkennung findet. Doch besteht wirklich Klarheit? Handelt es sich nicht vielmehr nur um gewisse Traditionen und Gewohnheiten, denen man im Mathematikunterricht seit vielen Jahrzehnten nachkommt?

Eine Befragung von Lehrern und Schülern erhärtet sofort die Vermutung, daß keineswegs Klarheit darüber besteht, worin das Wesentliche mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen zu sehen ist. Darüber hinaus zeigt eine genauere Analyse, daß durchaus keine einheitliche Meinung unter den Methodikern des Mathematikunterrichts, den Lehrern und den (reiferen) Schülern darüber existiert, welche Kriterien erfüllt sein müssen, um von einer mathematischen Schüleraufgabe und von der Lösung einer solchen Aufgabe sprechen zu können. Das beeinträchtigt naturgemäß von vornherein die planvolle und systematische Nutzung mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen für die sozialistische Bildung und Erziehung.

Es soll daher in diesem Abschnitt der Versuch unternommen werden, charakteristische Merkmale für mathematische Schüleraufgaben und für ihre Lösungen zusammenzustellen und zu erläutern. Dabei wird davon ausgegangen, daß diese Aufgaben nebst ihren Lösungen im Unterricht unserer sozialistischen Oberschule für die Bildung und Erziehung junger Menschen, die den Kommunismus erbauen werden, genutzt werden sollen. Es wird also von allem Anfang an das *pädagogische* Anliegen in den Vordergrund gerückt. Dabei wird nicht der Versuch unternommen, eine von den besonderen historischen Bedingungen des Bildungs- und Erziehungsgeschehens in den Schulen der sozialistischen Deutschen Demokratischen Republik losgelöste allgemeine Theorie der mathematischen Aufgaben und ihrer Lösungen zu geben. Nur durch den konkreten Bezug auf unsere gegenwärtige Schulsituation und auf die Perspektive der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in den Schulen der Deutschen Demokratischen Republik kann mit der theoretischen Erörterung des methodischen Problems der mathematischen Schüleraufgaben zugleich die politisch und pädagogisch außerordentlich wichtige Diskussion zu Fragen der Verbesserung des Mathematikunterrichts vorangebracht werden.

Eine Vorbemerkung zu dem Verfahren, stets die mathematische Aufgabe, den Prozeß der Lösung und die Lösung selbst gemeinsam zu betrachten, soll bereits hier gemacht werden. Es wäre ja durchaus denkbar, nur die Aufgaben, speziell ihren Inhalt und ihre Form, zu untersuchen, vom Lösungsprozeß und der Lösung aber abzusehen. Die Gründe für die gewählte Betrachtungs- und Darstellungsweise sind politisch-pädagogischer Art. Das wird bei den Einzeldarlegungen deutlich werden. Daher soll an dieser Stelle nur darauf hingewiesen werden, daß sich der Bildungs- und Erziehungsprozeß im Unterricht in erster Linie beim Lösen und bei der Diskussion der gefundenen Lösungen der mathematischen Schüleraufgaben vollzieht, nicht aber durch das Stellen von bestimmten Aufgaben bereits die erhofften Bildungs- und Erziehungserfolge eintreten oder als gesichert angesehen werden dürfen.

Nach einer Reihe von Untersuchungen und Gesprächen mit Lehrern aller Schulgattungen sowie mit pädagogischen Wissenschaftlern scheinen die folgenden vier Merkmale für mathematische Schüleraufgaben und ihre Lösungen wesentlich zu sein:

1. *Mathematische Aufgaben für Schüler fordern diese zum Lösen eines eindeutig bestimmten Problems auf;*
2. *dieses Problem ist für Schüler in weitgehend selbständig auszuübender Tätigkeit lösbar;*
3. *die Schüler vermögen das Problem mit Hilfe mathematischer Verfahren zu lösen;*
4. *das als Lösung vorgelegte Resultat der zielgerichteten Schülertätigkeit wird von den Schülern selbst als Lösung des vorgelegten Problems anerkannt.*

Zu 1.:

Der Aufforderungscharakter mathematischer Aufgaben für Schüler ist wohl allgemein unbestritten. Aber schon über die Art der Aufforderung gibt es Meinungsverschiedenheiten. Manche Lehrer vertreten die Ansicht, daß zu jeder mathematischen Schüleraufgabe eine Frage gehört oder zumindest durch ein Symbol, einen Imperativ(satz) oder irgendeinen anderen unmißverständlichen Hinweis dem Schüler klar gesagt werden muß, was er tun soll. Andere Lehrer lehnen die Frage im Aufgabentext ab, vermeiden auch Symbole, Imperative oder andere Hinweise auf das zu lösende Problem. Einige von ihnen gehen so weit, daß sie die üblichen Aufgabenstellungen durch Abbildungen, Tafeln, Tabellen, Modelle, Werkstücke oder andere Gegenstände aus der Produktion ersetzen.

Die oben gegebene Definition für mathematische Schüleraufgaben und für die Lösungen solcher Aufgaben läßt alle diese Aufforderungsmöglichkeiten zu, wenn nur die Forderung nach Eindeutigkeit der Problemstellung nicht verletzt wird. Die Gefahr dazu liegt bei den Aufforderungsarten nahe, bei denen Fragen und ähnliche Hinweise unterbleiben. Andererseits kann nicht bestritten werden, daß es für die Denkerziehung wertvoll ist, wenn die Schüler veranlaßt werden, selber das Problem aufzufinden, das in einer mathematischen Aufgabe verborgen ist. Ferner steht fest, daß durch ungeeignete Fragestellungen den Schülern nicht selten wesentliche Teile der Arbeit abgenommen werden, was speziell zu der unter 2. zu erörternden Forderung nach weitgehender Selbständigkeit beim Lösen der Aufgaben im Widerspruch steht.

Insgesamt kann die Art der Aufforderung nicht als wesentliches Merkmal für mathematische Schüleraufgaben angesehen werden. Man sollte sich vor allen Einseitigkeiten und Überspitzungen hüten. Vor allem ist es jedoch falsch, im Weglassen der Frage oder eines sonstigen Hinweises das Neue in der Methodik des Lösens von mathematischen Aufgaben durch Schüler erblicken zu wollen. Es gibt in der DDR solche Bestrebungen. Dabei wird völlig übersehen, daß bereits die bürgerliche Arbeitsschule durch diese methodische Einzelmaßnahme eine Reform des Mathematikunterrichts anstrebte. Das Neue in der Methodik der sozialistischen Schule ist nicht in einer solchen Einzelmaßnahme zu finden, sondern nur im Gesamtsystem der planmäßigen Einwirkungen auf den Schüler im einheitlichen Bildungs- und Erziehungsprozeß.

Die eifrigen Verfechter wort- und symbolfreier Aufforderungen sind zugleich diejenigen Methodiker des Mathematikunterrichts beziehungsweise diejenigen Lehrer, die sich mit der in der Definition geforderten *eindeutigen* Bestimmtheit des Problems jeder mathematischen Aufgabe für Schüler nicht ohne weiteres einverstanden erklären. Da aber mit Hilfe des Lösens mathematischer Aufgaben bestimmte Erkenntnisse durch die Schüler erarbeitet und vom Lehrer vorher genau festgelegte Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler entwickelt werden sollen, kann es nicht dem Zufall überlassen bleiben, ob ein Schüler tatsächlich das vom Lehrer ausgewählte Problem löst oder irgendein anderes der Aufgabe entnimmt. Es widerspricht den Grundprinzipien der marxistischen Pädagogik, wenn nicht dafür gesorgt wird, daß sich der Bildungs- und Erziehungsprozeß planmäßig und systematisch vollzieht. Der Lehrer wählt — so sollte es jedenfalls sein! — jede mathematische Schüleraufgabe unter ganz bestimmten Gesichtspunkten aus. Es ist also nicht gleichgültig, welches Problem gelöst wird. Im Mathematikunterricht kann nur intensiv gelernt und sozialistisch erzogen werden, wenn jeder Schüler, der sich anschickt, eine mathematische Aufgabe zu lösen, genau weiß, welches Problem von ihm gelöst werden soll.

Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt noch einmal das oben über die Art der Aufforderung Gesagte, dann wird deutlich, daß es falsch ist, den Schülern beispielsweise Kärtchen mit Zahlen zu übergeben und dann nur die Aufforderung „Rechnet!" anzuschließen. Sollen die Schüler addieren oder dividieren? Sollen sie Zahlenpaare bilden, Zahlen durch Differenzenbildung oder durch das Bilden von Verhältnissen vergleichen? Was sollen sie eigentlich tun? Was beabsichtigt der Lehrer? Die Minuten einer Unterrichtsstunde sind kostbar! Übergibt der Lehrer hingegen die Kärtchen mit den Zahlen 6, 2, 7, 9 einerseits, den Zahlen 12, 54, 36, 42 andererseits, verbunden mit der Aufforderung: „Sucht nach Zuordnungsmöglichkeiten der Zahlen der einen Seite zu den Zahlen der anderen Seite!", dann weiß jeder Schüler genau, welches mathematische Problem er lösen soll. Die gegebene Aufforderung ist keineswegs leicht für die Schüler, denn sie müssen erstens ordnen (2, 6, 7, 9 — 12, 36, 42, 54), zweitens rechnen ($2 \cdot 6 = 12$, $6 \cdot 6 = 36$, $7 \cdot 6 = 42$, $9 \cdot 6 = 54$), drittens die Zahlen der einen Spalte denen der anderen Spalte umkehrbar eindeutig zuordnen (2, 12; 6, 36; 7, 42; 9, 54).

Ebenso verhält es sich mit Problemstellungen aus der Geometrie. Es ist abzulehnen, wenn den Schülern Werkstücke, Meßinstrumente und Tabellenbücher mit der bloßen Aufforderung übergeben werden: „Arbeitet!". Wenn Schüler, die schon mehrfach ähnlichen Aufforderungen nachkommen mußten, schließlich wissen, daß sie das Gewicht des vorgelegten Werkstückes ermitteln sollen, so ist das nur günstig für ein rationelles Ausnutzen der Unterrichtszeit, spricht aber nicht etwa für solche methodischen Maßnahmen. Vollständig gleiche Bildungserfolge können nämlich in wesentlich kürzerer Zeit erreicht werden, wenn der Lehrer sofort fragt: „Wie groß ist das Gewicht des euch übergebenen Werkstücks?" Es ist ein gefährlicher Irrtum, anzunehmen, man könne die Bildungs- und Erziehungserfolge durch unkonkrete oder unbestimmte Problemstellungen erhöhen. Nicht *daß* die Schüler etwas tun, ist entscheidend, sonder *was sie tun, bestimmt die Ergebnisse* der Bildungs- und Erziehungsarbeit. Wir sollten in der Deutschen Demokratischen Republik sehr achtsam auf warnende Stimmen sowjetischer Pädagogen hören, die diese und ähnliche methodische Überspitzungen nicht nur als Absinken in Praktizismus bezeichnen, sondern darauf hinweisen, daß in der Sowjetunion ähnliche pädologische Fehler bereits vor etwa 30 Jahren im Zusammenhang mit dem Kampf gegen die Komplexmethode überwunden wurden.

Durch die Festlegung, daß jede mathematische Schüleraufgabe zum Lösen eines eindeutig bestimmten Problems auffordern muß, ist nichts darüber ausgesagt, ob die Formulierung der Aufgabe vom Lehrer oder vom Schüler vorgenommen wird. Es steht ohne Zweifel fest, daß ein selbständiges Aufsuchen *geeigneter* Probleme für mathematische Aufgaben und das Formulieren der Aufgaben aus erkannten, untersuchenswerten Problemstellungen von besonderem Wert für die Bildung und Erziehung der Schüler sind. Die Entscheidung darüber, ob ein Problem für eine im Mathematikunterricht zu lösende Aufgabe für Schüler geeignet ist, kann nur vom Lehrer getroffen werden. Das schließt aber nicht aus, die Schüler anzuregen, selbständig nach solchen Problemen Ausschau zu halten, die mit Hilfe mathematischer Verfahren in einer Schüleraufgabe gelöst werden können. Viele erfahrene Mathematiklehrer arbeiten dabei mit Schüleraufträgen, durch die sie die Schüler erstens für Probleme interessieren, die für die Bildungs- und Erziehungsarbeit von Bedeutung sind. Zweitens wird das Suchen der Schüler in bestimmte Bahnen gelenkt, wodurch die Aussicht auf Erfolg der Bemühungen der Schüler wesentlich gegenüber dem planlosen Suchen nach irgendwelchen Problemen gesteigert wird. Haben die Schüler weitgehend selbständig ein geeignetes Problem gefunden, dann sind sie meist auch in der Lage, die entsprechende mathematische Schüleraufgabe selbständig zu formulieren. Solche Formulierungsübungen sind von großem Wert. Sie stellen gewissermaßen die Umkehrung dessen dar, was im Schulalltag beim Lösen mathematischer Schüleraufgaben getan werden muß. Bei der Formulierung der Aufgabe geht es darum, das zu lösende Problem als Aufgabe zu fassen; hingegen muß beim Lösen einer mathematischen Schüleraufgabe, die keine bloße Aufforderung zur Ausführung einer bestimmten Rechnung oder Konstruktion ist, vom Schüler zuerst das zu lösende Problem erfaßt werden.

Übungen im eindeutigen Formulieren mathematischer Aufgaben für Schüler sind aber noch aus einem anderen Grunde wertvoll. Die Schüler lernen gerade bei Formulierungsversuchen genau auf die Bedeutung eines jeden Wortes, eines jeden Symbols, einer jeden sonstigen Festlegung achten. Jeder Lehrer weiß aus Erfahrung, daß es oftmals gar nicht leicht ist, eine mathematische Aufgabe für Schüler so zu formulieren, daß Fehldeutungen ausgeschlossen sind, daß die Formulierung verständlich ist, von überflüssigem Ballast frei bleibt und nicht bereits viel von der beim Lösen der Aufgabe vom Schüler zu leistenden Denkarbeit vorwegnimmt. Es ist wohl selbstverständlich, soll aber wenigstens einmal erwähnt werden, daß unsorgfältige und nachlässige Formulierungen von mathematischen Schüleraufgaben grundsätzlich und entschieden abgelehnt werden müssen. Insbesondere ist es Pflicht eines jeden Lehrers, die Hausaufgaben gründlich hinsichtlich der Klarheit der Formulierungen und der

Eindeutigkeit der Problemstellung zu überprüfen, denn bei der häuslichen Arbeit der Schüler kann der Lehrer nicht jederzeit helfend eingreifen. Entsprechend verschärfte Forderungen sind an solche mathematischen Schüleraufgaben zu stellen, die in Klassenarbeiten oder Prüfungen den Schülern zur Lösung vorgelegt werden.

Schließlich soll darauf aufmerksam gemacht werden, daß im ersten Teil der Definition für mathematische Schüleraufgaben und ihre Lösungen nichts weiter über das Problem ausgesagt wird, als daß es eindeutig bestimmt sein muß. Somit können Probleme aus allen Bereichen der mathematischen Wissenschaft, aus anderen Wissenschaften, aus der Natur und der Gesellschaft zum Gegenstand mathematischer Aufgaben für Schüler gemacht werden. Dennoch ist es für die Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen nicht etwa unwichtig, welche Probleme, welche Inhalte den Schülern durch das Lösen mathematischer Aufgaben erschlossen werden. Im Gegenteil, es ist von außerordentlich großer Bedeutung, genau festzulegen, was den Schülern durch das Lösen mathematischer Schüleraufgaben und durch das Diskutieren der Lösungen dieser Aufgaben besonders intensiv nahegebracht und verständlich gemacht werden soll. Das Fehlen einer inhaltlichen Festlegung der Probleme in der auf Seite 12 gegebenen Definition darf also nicht so gedeutet werden, als würde der Inhalt, die Art des eindeutig bestimmten Problems, nicht als wesentlich für eine mathematische Schüleraufgabe und ihre Lösung angesehen. Das Fehlen einer inhaltlichen Festlegung der Probleme soll vielmehr sichern, daß tatsächlich alle für die sozialistische Bildung und Erziehung wichtigen Probleme erfaßt werden können. Bei der Behandlung der Anwendungsaufgaben in Abschnitt 2.13 wird noch einmal auf diese Frage eingegangen.

Zu 2.:

Durch die an zweiter Stelle in der Definition mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen genannte Forderung nach weitgehend selbständiger Tätigkeit der Schüler beim Lösen des Problems ergeben sich einige Einschränkungen. Diese Einschränkungen sind aber nicht allein vom Inhalt des Problems her bestimmt, sondern ebenso auch durch den Schwierigkeitsgrad der Lösungstätigkeit.

Erstens soll durch die in der Definition getroffene Festlegung sichergestellt werden, daß Schülern nur solche Aufgaben im Unterrichtsprozeß zur Lösung vorgelegt werden, die gesellschaftlich bereits gelöst sind. In der mathematischen Wissenschaft noch ungelöste mathematische Probleme, die für die Schüler leicht verständlich sind — zum Beispiel der große Fermatsche Satz —, können und sollten den Schülern zwar im Unterricht bei passender Gelegenheit einmal genannt werden, gehören aber nicht zum Kreis derjenigen Probleme, zu deren Lösung die Schüler mittels einer mathematischen Schüleraufgabe aufgefordert werden dürfen.

Zweitens soll damit erreicht werden, daß auch solche Aufgaben, zu deren Lösung ein besonders hochentwickeltes mathematisches Wissen und Können gehört, ebenfalls nicht als mathematische Schüleraufgaben angesehen werden. Das gilt beispielsweise für Aufgaben, die bei mathematischen Wettstreiten zur Ermittlung junger mathematischer Talente genutzt werden. So wertvoll solche Aufgaben für den speziellen Zweck sind, für den sie geschaffen wurden, so können sie doch nicht als geeignet für den alltäglichen Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schule angesehen werden. Damit wird aber keineswegs gesagt, daß die Schüler nicht in besonderen Mathematikstunden auch mit solchen Aufgaben — zum Beispiel den Aufgaben aus den verschiedenen Stufen mathematischer Schülerolympiaden — unter Anleitung des Lehrers bekannt gemacht werden sollten.

Drittens sollen durch die Festlegungen in der gewählten Definition all diejenigen Aufgaben ausgeschlossen werden, zu deren Lösung bestimmte Spezialkenntnisse erforderlich sind. Beispielsweise sind solche Aufgaben, die für das Fachrechnen in der Berufsschule geeignet sind, nicht ohne weiteres auch als mathematische Schüleraufgaben anzusprechen. Erst recht gilt das für Aufgaben aus der Statik, der Elektrotechnik, der Projektierung, der Planung und Statistik und ähnlichen Bereichen, bei denen für die Lösung spezielle Formeln oder Gesetze sowie zum Teil auch mathematische Verfahren angewendet werden müssen, die nicht oder nur in einigen Grundzügen im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule gelehrt werden.

Viertens soll durch die Forderung nach weitgehend selbständiger Lösung der mathematischen Schüleraufgaben darauf hingewiesen werden, daß der Schüler tatsächlich das zur Lösung der Aufgaben notwendige mathematische Wissen und Können besitzen muß. An und für sich würde es genügen, als zweites Merkmal einer mathematischen Schüleraufgabe zu fordern, daß das in der Aufgabe enthaltene Problem, die Lösung sowie der Lösungsweg den Schülern vom Lehrer überhaupt verständlich gemacht werden können. Bei der wesentlich weiter gehenden Forderung in der auf Seite 12 gegebenen Definition für mathematische Schüleraufgaben und ihre Lösungen wird von einer sehr bedeutsamen Empfehlung des VI. Pädagogischen Kongresses ausgegangen.

Es heißt dort:

„Der Aufbau des Sozialismus kann nur mit der Schöpferkraft des werktätigen Volkes durchgeführt werden. Deshalb geht es bei der Entwicklung der Selbständigkeit um die Erziehung zur bewußten, zielgerichteten Arbeit, die getragen ist von gesellschaftlichen Motiven.

Sehr häufig wird die Selbsttätigkeit auch auf praktische Arbeiten der

Schüler, vor allem außerhalb des Unterrichts, beschränkt. Das ist einseitig. Alle Fähigkeiten und Fertigkeiten, auch die des geistigen Arbeitens, entwickelt der Mensch in der Tätigkeit. Der gesamte Unterricht muß deshalb so aufgebaut sein, daß die Schüler durch Selbsttätigkeit zur Selbständigkeit erzogen werden.

Die Selbständigkeit der Schüler wird vom Lehrer planmäßig entwickelt werden, wenn die Schüler in allen Unterrichtsfächern Möglichkeiten erhalten, Probleme und Aufgaben, für deren Lösung sie die notwendigen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten besitzen, zu durchdenken, selbst Lösungswege zu suchen, um so durch die eigene Auseinandersetzung mit Problemen zu sicheren und festen Kenntnissen und wirklich erworbenen Einsichten zu gelangen."[7]

Durch die Formulierungen des zweiten Merkmals mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen wird also versucht, den zitierten Empfehlungen des VI. Pädagogischen Kongresses nachzukommen. Dabei gilt es zu beachten, daß auf diese Weise bestimmte mathematische Aufgaben und ihre Lösungen, die im Unterricht eine wichtige Rolle spielen, hier aus dem Kreis der mathematischen *Schüler*aufgaben ausgeschlossen werden. Im Rahmen des gesamten Bildungs- und Erziehungsprozesses kann nicht darauf verzichtet werden, daß auch einmal der Lehrer einige mathematische Aufgaben löst, die Schüler hingegen den beim Lösungsprozeß vom Lehrer gegebenen Erläuterungen aufmerksam folgen und diese zu begreifen und zu verarbeiten trachten. Bekanntlich ist es nicht möglich und vor allem auch gar nicht sinnvoll, von Schülern beispielsweise mathematische Lösungsverfahren oder Beweise, die in Jahrhunderte währender gesellschaftlicher Arbeit entwickelt wurden, grundsätzlich durch das selbständige Lösen mathematischer Schüleraufgaben nachentdecken zu lassen. Entsprechende Versuche in der bürgerlichen Arbeitsschule erwiesen sich in der Praxis sehr bald als Irrwege, die zum Absinken des mathematischen Bildungsniveaus führten.

Im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule finden alle diejenigen Unterrichtsmethoden ihren Platz, die das intensive Lernen der Schüler sichern und zur Erreichung hoher Erfolge in der sozialistischen Erziehung beitragen. Daher werden auch mathematische Aufgaben, die im Unterricht vom Lehrer, nicht aber von den Schülern in weitgehend selbständiger Tätigkeit gelöst werden, unter bestimmten Bedingungen innerhalb des Unterrichtsprozesses angewendet. Als Hauptform der im Unterricht der sozialistischen Oberschule Verwendung findenden mathematischen Aufgaben ist jedoch die durch die Definition auf Seite 12 festgelegte Art von mathematischen Schüleraufgaben zu betrachten, die die

[7] Empfehlungen des VI. Pädagogischen Kongresses. In: Protokoll I (s. Fußnote 5), Seite 137.

Schüler zu hoher Aktivität und Selbständigkeit auffordern und damit besonders nachhaltig den Bildungs- und Erziehungsprozeß beeinflussen.

Zu 3.:

In der Definition mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen wird als wesentliches Merkmal genannt, daß zur Lösung des Problems mathematische Verfahren angewendet werden müssen. Diese Forderung scheint fast eine Selbstverständlichkeit zu sein. Sie ist aber in mehrfacher Hinsicht so bedeutungsvoll, daß sie gesondert genannt werden muß.

In der auf Seite 17 f. zitierten Empfehlung des VI. Pädagogischen Kongresses heißt es ausdrücklich, daß die Schüler „Aufgaben, für deren Lösung sie die notwendigen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten besitzen", selbständig lösen sollen. Was ist aber unter den hier genannten Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten, unter dem notwendigen Wissen und Können zu verstehen?

Das notwendige mathematische Wissen umfaßt einerseits Begriffe, Lehrsätze, Formeln usw., andererseits gehört aber auch die Kenntnis bestimmter Lösungsverfahren dazu. Die große Bedeutung dieses Teiles des mathematischen Grundwissens wird oftmals unterschätzt. Beispielsweise ist es ein unerläßlicher Bestandteil des mathematischen Grundwissens, Verfahren zum Lösen quadratischer Bestimmungsgleichungen oder zum Lösen von Systemen von Bestimmungsgleichungen zu kennen.

Ein Schüler wird nur dann ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und einem Winkel, der der Hypotenuse anliegt, konstruieren können, wenn er ein entsprechendes Konstruktionsverfahren kennt. Das bloße Kennen des Begriffs „rechter Winkel" und des Satzes des Thales beziehungsweise der Sätze der Ähnlichkeitslehre genügt nicht. Diese Wissensbestandteile werden erst im Zusammenhang mit bekannten Konstruktionsverfahren zu einem Wissen, das für das Lösen bestimmter mathematischer Aufgaben anwendungsbereit ist. Die als Beispiel gewählte planimetrische Konstruktionsaufgabe vermag ein Schüler erst dann tatsächlich selbständig und erfolgreich zu lösen, wenn er neben dem notwendigen Wissen das erforderliche Können besitzt. Nur wenn der Schüler im Besitz *aller* zur Lösung notwendigen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten ist, wenn er also anwendungsfähiges und anwendungsbereites Wissen und Können hat, ist er überhaupt in der Lage, selbständig mathematische Schüleraufgaben zu lösen.

Die Entwicklung von Fertigkeiten und Fähigkeiten erfolgt grundsätzlich nur in der Tätigkeit. Im Mathematikunterricht wird das mathematische Wissen und Können in starkem Maße im Rahmen der „weitgehend selbständig auszuübenden Tätigkeit" des Lösens mathematischer Schüleraufgaben entwickelt. Somit ist einerseits ein bestimmter Entwicklungsstand gewisser Fertigkeiten und Fähigkeiten Voraussetzung für das erfolgreiche Lösen mathematischer Schüleraufgaben, andererseits werden aber gerade die dabei benötigten Fertigkeiten und Fähigkeiten in erster Linie durch das weitgehend selbständige Lösen solcher Aufgaben entwickelt. Diese Dialektik des Bildungs- und Erziehungsprozesses muß vom Lehrer sehr genau beachtet werden. Es wird zugleich bereits an dieser Stelle deutlich, daß ein und dieselbe mathematische Aufgabe, in verschiedenen Phasen des Unterrichtsprozesses gestellt, keineswegs gleichartige Wirkungen auf die Bildung und Erziehung der Schüler haben muß.

Durch diese Betrachtungen wird nunmehr voll verständlich, weshalb in der Definition auf Seite 12 festgelegt wurde, nur solche Aufgaben als mathematische Schüleraufgaben anzusehen, bei deren Lösung *mathematische* Verfahren angewendet werden. Oftmals kann ein Problem auf verschiedenen Wegen gelöst werden; beispielsweise durch empirische Methoden, durch Probieren, durch Befragen anderer, durch Nachschlagen in der Literatur usw. Alle diese und viele weitere nichtmathematische Verfahren sind für die allseitige Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen von Bedeutung. Aber für die Systematik der Bildungs- und Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht ist es wesentlich, bestimmte Denk- und Arbeitsweisen, nämlich für die Mathematik als Wissenschaft typische Arbeitsweisen zum Schwerpunkt der Unterrichtsarbeit zu machen. Damit die Schüler befähigt werden, in zielgerichteter Tätigkeit Probleme mit Hilfe mathematischer Mittel und Methoden zu lösen, werden für die Lösung mathematischer Schüleraufgaben ausschließlich mathematische Verfahren zugelassen. Diese bedeutende Einschränkung hinsichtlich der Lösungsverfahren bedingt gleichzeitig eine wesentliche Einengung des Umfanges mathematischer Aufgaben für Schüler und macht es notwendig, einmal sehr sorgfältig zu überprüfen und zusammenzustellen, welche Arbeitsverfahren überhaupt als mathematische Verfahren anzusehen sind. Bei der Erörterung der didaktischen Funktion der verschiedenen Aufgabentypen wird diese wichtige Frage zum Teil mit beantwortet; eine voll befriedigende Antwort kann jedoch nur in einer gesonderten wissenschaftlichen Untersuchung gegeben werden.

Auf jeden Fall sollte, ehe ein Resultat als Lösung einer mathematischen Schüleraufgabe anerkannt wird, geprüft werden, ob dieses Resultat tatsächlich mit Hilfe mathematischer Verfahren gewonnen wurde. Je nach den Bildungs- und Erziehungsabsichten müssen die von den Schülern in zielgerichteter Tätigkeit erarbeiteten Aufgabenlösungen unterschiedlich beurteilt und bewertet werden. Beispielsweise kann das Bemühen der Schüler um eine Aufgabenlösung, wenn es nicht zum vollen Erfolg führte, zum Ausgangspunkt, zur Quelle neuen Wissenserwerbs gemacht werden, indem, an einen solchen Lösungsversuch anknüpfend, ein für die Schüler neues mathematisches Lösungsverfahren im Unterricht erarbeitet wird.

Insbesondere ergibt sich aus der hier dem Lösungsverfahren zugemessenen Bedeutung, daß der Lehrer bei der Kontrolle und Beurteilung von Schülerleistungen nicht nur danach fragen darf, ob die vorgelegten Resultate richtig oder falsch sind. Eine mathematische Schüleraufgabe ist selbst dann als ungelöst anzusehen, wenn ein richtiges Resultat vorliegt, dieses Resultat aber nicht mit mathematischen Verfahren gewonnen wurde. Allein daraus folgt, daß die sogenannte „absolute Zensierung", bei der nur bewertet wird, ob die in einer mathematischen Schüleraufgabe aufgeworfene Frage richtig oder falsch beantwortet ist, abzulehnen ist.

Zu 4.:

Bereits die letzten Betrachtungen bezogen sich nicht nur auf den Lösungsprozeß, sondern auch auf die Lösung selbst. Die Festlegungen im Punkt 4. der Definition auf Seite 12 beziehen sich nunmehr in erster Linie auf die Lösung. Bevor eine Erläuterung der Hauptgedanken dieses Punktes gegeben wird, soll etwas zu dem in der Definition benutzten Begriff der „zielgerichteten Schülertätigkeit" gesagt werden.

Angenommen, der Schüler habe das richtige Ergebnis einer Aufgabe finden können, obwohl er keine mathematischen Verfahren zur Lösung der Aufgabe anwandte. Dann wird im allgemeinen sein Probieren nicht unüberlegt oder gar plan- und absichtslos gewesen sein. Der Schüler übte also eine zielgerichtete Tätigkeit aus, benutzte nur dabei nicht die Mittel und Methoden, die für eine einwandfreie Lösung mathematischer Schüleraufgaben erforderlich sind. Daher darf der Lehrer keinen Schüler, der so gearbeitet hat, brüsk zurückweisen. Der Schüler hat sich gemüht. Er hat dabei schöpferische Kräfte entfaltet. Er hat bei seinem zielgerichteten Tun wichtige allgemeine geistige Fähigkeiten weiterentwickelt. Der Schüler verdient dafür Lob und Anerkennung. Er verdient diese anspornende Hilfe des Lehrers um so mehr, wenn er überzeugt ist, seine ihm gestellte Aufgabe erfolgreich gelöst zu haben.

Der Lehrer muß also mit pädagogischem Geschick und Takt dem Schüler klarmachen, weshalb sein richtiges Ergebnis nicht als Lösung der gestellten Schüleraufgabe anerkannt werden kann. Der Schüler muß zu der Einsicht geführt werden, daß „das als Lösung vorgelegte Resultat der zielgerichteten Schülertätigkeit" nicht „als Lösung des vorgelegten Problems anerkannt" werden kann. Gelenkt und gesteuert durch den Lehrer, wird der Schüler selbst zur Einsicht geführt, ob er ein ihm in Form einer mathematischen Schüleraufgabe gestelltes Problem erfolgreich gelöst hat oder nicht. Dabei trifft der Schüler die Entscheidung an Hand sachlicher, objektiver Kriterien. Nicht nur das „Was?", nicht nur das Resultat, sondern auch das „Wie"?, der Lösungsweg, ist für den Bildungserfolg der Arbeit mit mathematischen Schüleraufgaben von Bedeutung! Nur bei Berücksichtigung des Lösungsweges und -verfahrens können alle bildenden und erzieherischen Potenzen mathematischer Schüleraufgaben und ihrer Lösungen im Unterrichtsprozeß voll ausgeschöpft werden.

Damit Schüler zu entscheiden vermögen, ob sie eine ihnen gestellte mathematische Schüleraufgabe richtig gelöst haben, muß das Ergebnis ihres Lösungsversuchs stets in irgendeiner Weise kontrolliert werden. Meist wird die Kontrolle durch den Lehrer ausgeübt. Wenn der Lehrer ein ihm vorgelegtes Resultat als falsch zurückweist, so muß er aber die Schüler auch stets davon überzeugen, daß es tatsächlich falsch ist. Dabei darf es grundsätzlich keine „Meinungen“, „Ansichten“, „Deutungen“ usw. geben. Bei der Besprechung der ersten drei Merkmale mathematischer Aufgaben für Schüler wurde klar herausgestellt, daß Schülern nur solche Probleme in Form mathematischer Schüleraufgaben zur Lösung vorgelegt werden sollten, die eindeutig sind und ebenso eindeutig angebbare Lösungen haben. Jetzt werden diese Forderungen noch dahingehend ergänzt, daß die Lösung kontrollierbar sein muß, und zwar auch für Schüler. Kann der Lehrer ein Resultat der zielgerichteten Schülertätigkeit nicht als Lösung der gestellten mathematischen Schüleraufgabe akzeptieren, so sollte er im allgemeinen den Schülern nicht selber den Fehler zeigen. Er sollte die Schüler vielmehr zu einem erneuten Lösungsversuch auffordern und, soweit das möglich ist, ihnen dazu insofern eine wesentliche Hilfe gewähren, als er mithilft, die Fehlerquelle aufzudecken.

Sehr häufig vergleicht der Schüler das Ergebnis seines Lösungsversuches mit den Ergebnissen seiner Mitschüler. Auch hier ist vorauszusetzen, daß die tatsächlich richtige Lösung in der Klasse bekannt ist, sei es durch die Hilfe des Lehrers, sei es durch eine Probe oder anderweitige Kontrolle, die zulässig ist. Auf keinen Fall aber kann mit Hilfe eines Mehrheitsbeschlusses darüber entschieden werden, ob ein Resultat als Lösung einer mathematischen Schüleraufgabe anzuerkennen ist oder nicht. (Diese letzte Bemerkung ist leider nicht so überflüssig, wie die meisten Leser dieser Schrift annehmen werden!)

Als wertvollste und wichtigste Form der Kontrolle ist die Überprüfung des ermittelten Resultats durch eine Probe oder mit Hilfe eines anderen exakten Verfahrens, das Schüler bewußt und selbständig zur Kontrolle heranziehen, anzusehen. Um die Schüler planmäßig an die weitgehend selbständige Kontrolle aller Ergebnisse mathematischer Schüleraufgaben zu gewöhnen, sollte beispielsweise in der darstellenden Geometrie die Konstruktion einiger Kontrollpunkte ebenso zur vollständigen Lösung gehören, wie bei einer Bestimmungsgleichung die Probe Bestandteil der Lösung ist. Bei trigonometrischen Berechnungen sollte das Resultat wenigstens annähernd durch eine maßstäbliche Konstruktion geprüft werden. Viele Konstruktionsaufgaben lassen sich durch Messungen, aber auch in der Determination hinsichtlich der Richtigkeit der Lösung überprüfen.

Es gibt auch Aufgaben, deren Lösungen nicht allein mit mathematischen Verfahren nachprüfbar sind. Wenn beispielsweise beim Lösen von Anwendungsaufgaben den Schülern bestimmte Gesetzmäßigkeiten in der Natur oder im gesellschaftlichen Leben tiefer und weitgehender erschlossen werden sollen, dann ist oftmals eine Diskussion des Resultates unerläßlich, damit die Schüler tatsächlich das mit mathematischen Hilfsmitteln gewonnene Ergebnis als Lösung des vorgelegten Problems erkennen, anerkennen und daraus auch gegebenenfalls Schlußfolgerungen ziehen. Die Diskussion der Ergebnisse von Anwendungsaufgaben sollte in solchen Fällen, in denen es sich um in der Praxis überprüfbare Probleme handelt, auch tatsächlich zum Anlaß genommen werden, die Schüler zur direkten Kontrolle der Lösung des ihnen in Form einer mathematischen Schüleraufgabe gestellten Problems aufzufordern. Die Praxis tritt dann im Mathematikunterricht nicht nur als Quelle oder Anwendungsbereich mathematischer Erkenntnisse, sondern auch als Kriterium der Wahrheit erworbener Erkenntnisse in Erscheinung. Dadurch wird im Mathematikunterricht ein bedeutender Beitrag für die weltanschauliche Bildung und Erziehung der Schüler geleistet.

Dabei muß jedoch genau beachtet werden, daß es einerseits viele Probleme gibt, bei denen etwa eine Befragung von Facharbeitern aus Betrieben der Industrie und Landwirtschaft, eine Exkursion, ein naturwissenschaftliches Experiment oder eine andere Form der praktischen Überprüfung der mit Hilfe einer mathematischen Schüleraufgabe erarbeiteten Lösung des Problems ratsam und für die Bildung und Erziehung der Schüler von hohem Wert ist. Andererseits gibt es jedoch auch viele Probleme, bei denen solche Kontrollverfahren unzulässig sind. Während bei Problemen, die nicht der Mathematik selbst entstammen, bei deren Lösung aber mathematische Verfahren angewendet werden können oder auch müssen, im allgemeinen rein mathematische Kontrollverfahren nicht ausreichen, sind für die Überprüfung der Richtigkeit der Lösungen rein mathematischer Fragestellungen grundsätzlich nur solche Kontrollen möglich, die sich exakter mathematischer Verfahren bedienen. Beispielsweise werden in der Mathematik nur streng logisch geführte, deduktive Beweise als Sicherung induktiv, experimentell oder auf beliebige andere Weise gewonnener Erkenntnisse anerkannt, sobald sich diese Erkenntnisse nicht nur auf praktische Einzelfälle beziehen.

Der Schüler darf also im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule nicht nur lernen, bestimmte Probleme mit Hilfe mathematischer Verfahren richtig zu lösen, sondern er muß gleichzeitig dazu befähigt werden, die mit Hilfe mathematischer Verfahren gewonnenen Lösungen mit geeigneten Methoden zu überprüfen. Als grundsätzlich unzulässig werden dabei sowohl die Verwendung ungeeigneter Kontrollverfahren als auch die kritiklose Hinnahme eines Resultates angesehen. Leider treten beide Fehler im gegenwärtigen Mathematikunterricht noch immer auf.

Beispielsweise erlebte ich es, daß ein Lehrer die mathematische Schüleraufgabe stellte, die Summe der Innenwinkel eines ebenen Dreiecks zu ermitteln. Die Schüler fanden durch Messung Werte um 180°. Die daraus erwachsene Vermutung, daß die Winkelsumme im ebenen Dreieck 180° beträgt, wurde nunmehr mit Hilfe von Papiermodellen und Abreißen der Ecken gestützt. Danach wurde der Innenwinkelsatz als bewiesen betrachtet, „bewiesen“ durch ein experimentelles Verfahren! Es ist offenkundig, daß hier zur Kontrolle für das durch Messung gefundene Resultat ein ungeeignetes Verfahren gewählt wurde. Der Innenwinkelsatz mußte streng logisch, deduktiv bewiesen werden. Im übrigen fällt bei diesem Beispiel die tatsächliche Lösung des als mathematische Schüleraufgabe gestellten Problems so sehr mit der Kontrolle des weitgehend selbständig und in zielgerichteter Tätigkeit gewonnenen Resultates zusammen, daß von einer anzuerkennenden Lösung erst dann gesprochen werden darf, wenn der Beweis geführt ist. Das Abreißen der Ecken der Papiermodelle ist kein mathematisches Verfahren, kann also weder für die Lösung des gestellten mathematischen Problems ausreichen noch zur Kontrolle für ein auf anderem als auf rein mathematisch-deduktivem Wege gewonnenes Resultat dienen. Umgekehrt kann eine Probe für ein mit Hilfe einer Bestimmungsgleichung gelöstes praktisches Problem nicht anerkannt werden, wenn sich die Probe nur auf das rein Mathematische erstreckt, also zum Beispiel nur an der aus dem praktischen Sachverhalt zum Zwecke der Lösung des Problems aufgestellten Gleichung durchgeführt wird.

Häufiger noch als der eben besprochene Fehler, falsche beziehungsweise unzulässige Kontrollmethoden für die Überprüfung des Resultates anzuwenden, tritt der andere Fehler bei der unterrichtlichen Behandlung von mathematischen Schüleraufgaben in Erscheinung: Gar zu oft werden die Schüler nicht dazu veranlaßt, sich Gedanken über die von ihnen erarbeiteten Lösungen zu machen. Von Lehrern und Schülern wird eine gestellte Aufgabe nicht selten bereits dann als „erledigt“ betrachtet, wenn ein rechnerisch oder zeichnerisch ermitteltes Resultat vorliegt. Lehrer, die auf diese Weise eine Aufgabe an die andere reihen, ohne die Ergebnisse der zielgerichteten Schülertätigkeit als Lösungen gestellter Probleme zu untersuchen, lassen wesentliche Möglichkeiten des Mathematikunterrichts für die Bildung und Erziehung der Schüler ungenutzt. Die hohen Anforderungen, die durch den XXII. Parteitag der KPdSU, die 14. und 15. Tagung des ZK der SED, den VI. Pädagogischen Kongreß usw. für den Mathematikunterricht unserer sozialistischen Oberschule formuliert wurden, können nur erfüllt werden, wenn wir den gesamten Prozeß vom Aufstellen bis zum vollständigen Lösen und Kontrollieren mathematischer Schüleraufgaben bewußt und planvoll für das intensive Lernen und die sozialistische Erziehung nutzen.

2. Zur Klassifikation der verschiedenen Arten von mathematischen Schüleraufgaben

In der Literatur über Fragen der Methodik des Mathematikunterrichts findet man eine Vielzahl von Bezeichnungen für mathematische Schüleraufgaben. Beispielsweise wird von Übungsaufgaben und von Anwendungsaufgaben, von Beweisaufgaben und von Textaufgaben, von formalen Aufgaben und von Denkaufgaben gesprochen. Dabei wird im allgemeinen gar nicht geprüft, ob die gewählten Bezeichnungen sich ergänzen, ob Überschneidungen vorkommen, ob die Begriffe überhaupt auf der gleichen Ebene liegen. In manchen Fällen werden sogar Begriffsbildungen verwendet, die besser vermieden werden sollten.

Vergleicht man allein die kleine Auswahl von Bezeichnungen, die hier zusammengestellt ist, so wird bereits deutlich, daß ganz verschiedene Einteilungsgesichtspunkte in den Begriffsbildungen ihren Niederschlag gefunden haben. Die didaktische Funktion bestimmter Aufgaben im Unterrichtsprozeß führte zur Bezeichnung Übungsaufgabe, der Inhalt des mit Hilfe mathematischer Verfahren zu lösenden Problems wurde zum Anlaß genommen, bestimmte Aufgabentypen als Anwendungsaufgaben zu bezeichnen. Da durch manche Aufgaben nicht zum Rechnen oder zum Konstruieren aufgefordert, sondern die Durchführung eines Beweises verlangt wird, prägte man für solche mathematischen Schüleraufgaben den Namen Beweisaufgabe. Die Einkleidung des zu lösenden Problems in Worte, also ein rein äußerliches Merkmal, führte zur Unterscheidung zwischen sogenannten Textaufgaben und Aufgaben, die ohne einen besonderen Text den Schülern vorgelegt werden. Schon hier ist zu erkennen, daß didaktische Fragen, inhaltliche Gesichtspunkte, die anzuwendenden Lösungsverfahren oder auch rein äußerliche Merkmale zur Unterscheidung und Klassifikation der verschiedenen mathematischen Schüleraufgaben benutzt werden.

Noch komplizierter werden die pädagogischen und methodischen Probleme, wenn durch bestimmte Gegenüberstellungen versucht wird, eine Wertung vorzunehmen. In der oben aufgeführten Zusammenstellung kann das gleichzeitige Nennen von formalen Aufgaben und von Denkaufgaben bei oberflächlicher Betrachtung durchaus als wertende Gegenüberstellung gedeutet werden. Es wird, das sei bereits hier ausdrücklich hervorgehoben, weiter unten gezeigt werden, daß eine solche Gegenüberstellung in jeder Hinsicht unzulässig ist. Es wird ferner erörtert werden, daß sogar eine besondere Klassifizierung in Denkaufgaben und Aufgaben, die keine oder nur geringe Denkleistungen vom Schüler fordern, für die Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule völlig unangebracht ist.

Es erhebt sich somit die Frage, welche Einteilungsgesichtspunkte überhaupt einer Klassifikation mathematischer Aufgaben für Schüler zugrunde gelegt werden sollen.

Meines Erachtens sind nur die folgenden beiden Gesichtspunkte so allgemein, daß eine Zersplitterung in eine unüberschaubare Vielfalt vermieden werden kann, und zugleich so speziell, daß wesentliche Schlußfolgerungen für den Unterricht gezogen werden können:

a) *eine* **inhaltliche** *Klassifikation nach dem zu lösenden* **Problem;**
b) *eine* **didaktische** *Klassifikation nach der Verwendung im* **Unterrichtsprozeß.**

Darüber hinaus erweist es sich oftmals als zweckmäßig, innerhalb dieser grundsätzlichen Klassifikation weitere Unterteilungen vorzunehmen, und zwar insbesondere:

α) *nach den bei der Lösung anzuwendenden* **Verfahren;**
β) *nach der Art der* **Aufgabenstellung;**
γ) *nach dem Anteil des* **Mathematischen** *in der Problemstellung.*

Während die unter a) und b) genannten Gesichtspunkte in jedem Fall Anwendung finden, spielen die unter α) bis γ) genannten nur unter bestimmten Bedingungen eine Rolle. Daher sind in diesem Beitrag die Klassifizierungen, die sich aus der Berücksichtigung der unter α) bis γ) aufgeführten Gesichtspunkte ergeben, im Zusammenhang mit der Erörterung der Haupteinteilungsprinzipien a) und b) behandelt.

Da die Klassifikation der verschiedenen Aufgabentypen nicht Selbstzweck ist, sondern der Verbesserung der Bildungs- und Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht dienen soll, dürfen die hier zur Diskussion gestellten Klassifizierungsvorschläge vom Leser nicht als eine bloße Frage der Terminologie verstanden und gewertet werden, sondern als Versuch, auf einem engbegrenzten Gebiet der Methodik des Mathematikunterrichts zur Klärung einiger Grundfragen beizutragen. Zwar ist besonders für diejenigen Lehrer, die keine ausreichende fachliche und methodische Ausbildung für die Erteilung des Mathematikunterrichts in der sozialistischen Oberschule genießen konnten, dennoch aber im Fach Mathematik unterrichten, die Erarbeitung von sehr konkreten methodischen Handreichungen unerläßlich. Aber Maßnahmen solcher Art reichen nicht aus, um die Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule grundlegend zu verbessern. Nach meiner Meinung ist es dringend notwendig, eine größere Zahl von Einzeluntersuchungen zu speziellen Fragen und zu Grundproblemen der Methodik des Mathematikunterrichts durchzuführen und zur Diskussion zu stellen. Die Veröffentlichung des vorliegenden „Methodischen Beitrages“ soll uns in diesem Sinne einen Schritt näher heranführen an eine wissenschaftlich fundierte, breit und offen diskutierte und in der Praxis erprobte systematische Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule.

Die Schaffung einer wissenschaftlichen, systematischen Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule ist nicht möglich, wenn schon über die bei methodischen Diskussionen gebrauchten Begriffe keine Klarheit besteht. Der von der bürgerlichen Methodik überkommene Begriffsapparat erweist sich aber immer wieder als unzulänglich. Nicht nur, daß die in der bürgerlichen Methodik benutzten Begriffe oftmals gar nicht klar definiert sind, daß die Begriffe meist kein in sich logisch durchgegliedertes System bilden; im allgemeinen sind die in der bürgerlichen Methodik verwendeten Begriffe und Begriffssysteme viel zu eng, so daß das sich entwickelnde Neue gar nicht in der Methodik der sozialistischen Schule eingefangen werden kann. Das Wichtigste, das Neuartige, das für den Fortschritt auf dem Gebiete der Methodik Charakteristische bleibt durch die Benutzung überholter Begriffe und Begriffssysteme leicht außerhalb der Betrachtung oder wird zumindest nicht genügend in den Mittelpunkt der methodischen Diskussion gestellt. Daher soll durch die hier gegebene Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben nicht nur terminologische Klarheit geschaffen werden, es soll ein bescheidener Beitrag zur Realisierung der noch immer höchst aktuellen Forderungen gegeben werden, die bereits im Januar 1959 auf der 4. Tagung des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands ausgesprochen wurden und in den Thesen über die sozialistische Entwicklung des Schulwesens in der DDR in folgenden Worten ihren Niederschlag fanden:

„Die Entwicklung der sozialistischen Schule erfordert ein hohes wissenschaftliches Niveau des Unterrichts. Das wird dadurch erreicht, daß der Unterricht in allen Klassenstufen auf der Grundlage der neuesten Erkenntnisse der Wissenschaft erteilt, die Verbindung von Theorie und Praxis hergestellt und eine fortschrittliche Unterrichtsmethodik angewandt wird.“[8]

„Um die Wissenschaftlichkeit des Unterrichts zu heben, ist seine bessere methodische Gestaltung erforderlich. Viele Lehrer erteilen bereits einen methodisch gut durchdachten Unterricht. Es gibt aber in der methodischen Arbeit noch ernste Mängel.“[9]

[8] bis [11] Über die sozialistische Entwicklung des Schulwesens in der DDR (Thesen des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands); Thesen 13 und 20.

„Daraus ergibt sich für die pädagogische Wissenschaft die Aufgabe, die Unterrichtsmethoden der besten Lehrer zu studieren und wissenschaftlich zu verallgemeinern."[10]

„Den Schülern müssen Aufgaben gestellt werden, die sie selbständig lösen können und die ihre Denkfähigkeit entwickeln."[11]

2.1 Zur inhaltlichen Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben

Im Abschnitt 1 wurde dargelegt, daß mathematische Schüleraufgaben stets zur Lösung eines eindeutig bestimmten Problems auffordern. Es wurden dort jedoch über die Probleme selbst keine weiteren Aussagen gemacht. Nunmehr soll die erste wesentliche Einteilung mathematischer Schüleraufgaben dadurch gewonnen werden, daß die Art der zu lösenden Probleme beachtet wird.

Eine erste, grobe Einteilung kann man dadurch erhalten, daß man diejenigen Aufgaben aussondert, denen kein mathematisches Problem zugrunde liegt, obwohl bei der Lösung mathematische Verfahren Anwendung finden. Solche Aufgaben sollen künftig als *Anwendungsaufgaben* bezeichnet werden.

Für die Menge derjenigen mathematischen Schüleraufgaben, die keine Anwendungsaufgaben sind, empfiehlt sich die Unterscheidung in *formale Aufgaben* und in *eingekleidete Aufgaben.* Obwohl nämlich in beiden Fällen das mathematische Problem Ausgangspunkt für die Aufgabenstellung ist, wird bei formalen Aufgaben das Problem direkt genannt, bei eingekleideten Aufgaben jedoch nicht. Beispielsweise werden durch geometrische oder anschaulich-sachliche Einkleidung viele arithmetische Probleme für den Schüler oft sehr verdeckt. In diesem Fall kann er sein im Arithmetikunterricht erworbenes Wissen und Können nur anwenden, wenn er gleichzeitig seine geometrischen Kenntnisse oder sein Wissen über andere Sachverhalte ergänzt und vertieft. Auf diese Weise wird der Arithmetikunterricht für ihn interessanter, sein Lernen erfährt andere Motivationen usw.

Zwischen allen drei Aufgabentypen gibt es — das ist bei einer so wenig detaillierten Einteilung gar nicht anders zu erwarten — gewisse Grenzfälle und zum Teil sogar fließende Übergänge. Dennoch ist, wie die anschließend gegebenen Erläuterungen zeigen werden, die Grobmaschigkeit des hier zur Klassifikation benutzten Netzes für die methodische Arbeit von Vorteil.

2.11 Formale Aufgaben

Friedrich Engels schreibt im Anti-Dühring:

„Wie der Begriff der Zahl, so ist der Begriff der Figur ausschließlich der Außenwelt entlehnt, nicht im Kopf aus dem reinen Denken entsprüngen. Es mußte Dinge geben, die Gestalt hatten und deren Gestalten man verglich, ehe man auf den Begriff Figur kommen konnte. Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff. Daß dieser Stoff in einer höchst abstrakten Form erscheint, kann seinen Ursprung aus der Außenwelt nur oberflächlich verdecken. Um diese Formen und Verhältnisse in ihrer Reinheit untersuchen zu können, muß man sie aber vollständig von ihrem Inhalt trennen, diesen als gleichgültig beiseite setzen; so erhält man die Punkte ohne Dimensionen, die Linien ohne Dicke und Breite, die a und b und x und y, die Konstanten und die Variablen . . ."[12]

Aufgaben, in denen nur „die Punkte ohne Dimensionen, die Linien ohne Dicke und Breite, die a und b und x und y" vorkommen, Aufgaben, in denen „die Formen und Verhältnisse in ihrer Reinheit untersucht werden können", weil sie „vollständig von ihrem Inhalt getrennt" wurden, bezeichnen wir als **formale Aufgaben.**

Schon aus den Worten von *Friedrich Engels* kann abgelesen werden, daß es ein notwendiger Schritt beim Erkennen der Welt mit Hilfe mathematischer Methoden ist, von allen die Erkenntnis behindernden inhaltlichen Fragen abzusehen, um „die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff" tatsächlich erkennen zu können.

Aber auch von fachwissenschaftlicher, von methodischer und von psychologischer Sicht wird verständlich, weshalb formale Aufgaben für Schüler ein unerläßliches Mittel für die Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht sind.

Charakteristisch für die Arbeitsweise in der mathematischen Wissenschaft ist das Bestreben, möglichst Allgemeingültiges zu erkennen. Eine oftmals schier unüberschaubare Zahl von Einzelfällen wird durch das menschliche Denken erfaßt, indem mit Hilfe der formalisierenden Abstraktion einige wenige, jedoch wesentliche Merkmale ausgewählt und weitere Untersuchungen hinsichtlich dieser und nur dieser Merkmale angestellt werden. Dabei werden sehr tiefliegende Gesetzmäßigkeiten offenbar. Zugleich erhöht sich, da auf diese Weise neue Erkenntnisse über die Quantitätsverhältnisse und Raumformen der wirklichen Welt gewonnen werden, die Anwendbarkeit der mathematischen Wissenschaft ständig. Gerade gegenwärtig vollzieht sich der überaus bedeutsame Prozeß einer immer stärkeren Mathematisierung aller Wissenschaften.

Die typisch mathematische Arbeitsweise, das Verfahren des formalisierenden Abstrahierens, muß den Schülern der sozialistischen Oberschule

[12] F. Engels: Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft. Dietz Verlag, Berlin 1948, Seite 44 f.

vertraut werden. Das Lösen einer großen Zahl formaler Aufgaben für Schüler ist ein wichtiges Mittel zur Erfüllung dieses wesentlichen Bildungs- und Erziehungsauftrages an den Mathematikunterricht.

In den Darlegungen des Abschnitts 1 wurde hervorgehoben, daß eine mathematische Schüleraufgabe nur dann als gelöst angesehen werden kann, wenn sich der Schüler bei der Lösung mathematischer Verfahren bedient hat. Diese Verfahren müssen aber von den Schülern erlernt und schließlich so sicher beherrscht werden, daß sie dann auch zur Lösung beliebiger Probleme erfolgreich angewendet werden können. Das Lösen solcher formaler Aufgaben, bei denen die Verwendung bestimmter mathematischer Verfahren im Mittelpunkt des Lern- und Übungsprozesses steht, ist eine unerläßliche Voraussetzung für das weitgehend selbständige und erfolgreiche Lösen nichtformaler mathematischer Aufgaben für Schüler.

Formale Aufgaben werden jedoch nicht nur zur Übung bestimmter mathematischer Verfahren gelöst, sie spielen beispielsweise auch in der Wiederholung und bei der Festigung mathematischer Kenntnisse eine bedeutende Rolle. Das Lösen von formalen Aufgaben einer ganz bestimmten Art ermöglicht es dem Lehrer, gezielt und planvoll gerade das zu üben, was sich als übungsnotwendig erweist. Durch konzentrierte Arbeit mit Hilfe spezifischer formaler Aufgabentypen lassen sich Einzelfakten, bestimmte Gruppen von Lehrsätzen, Zahlbeziehungen, Konstruktionstechniken usw. in relativ kurzer Frist so festigen beziehungsweise eng begrenzte Fähigkeits- oder Fertigkeitskomplexe so entwickeln, daß spürbare Erfolge verzeichnet und dadurch die Unterrichtsergebnisse insgesamt verbessert werden können.

Schließlich lehrt die Psychologie, daß Neues um so leichter erworben wird, je klarer und übersichtlicher es an den Lernenden herangetragen wird. Wenn beispielsweise bei der Einführung in neue Gebiete, bei der Darlegung neuer Verfahren, bei der Erörterung neuer Zusammenhänge den Schülern von vornherein all das geboten würde, was es ratsam machte, den betreffenden Lehrstoff in den Lehrplan der allgemeinbildenden Schule aufzunehmen, so würde das bei weitem das Fassungsvermögen der Schüler übersteigen. In einfachsten Beispielaufgaben (vgl. Abschnitt 2.22) werden die Schüler vielmehr allmählich, jedoch stets an der optimalen Leistungsschranke gelegen, in das für sie Neuartige eingeführt. In intensivem Lernen verbinden die Schüler das Neue mit dem Bekannten, wenden das neuerworbene Wissen und Können in immer stärkerem Maße an, erschließen sich ständig komplizierter werdende Bereiche. Dabei spielt das weitgehend selbständige Lösen typischer formaler Aufgaben eine wesentliche Rolle. Die Bewältigung der in den formalen Aufgaben enthaltenen Schwierigkeiten ist die unerläßliche Voraussetzung für die Erreichung weiterer Bildungs- und Erziehungsziele.

Wenngleich formale Aufgaben im Mathematikunterricht notwendig sind, wenngleich sie durch keine andere Aufgabenart ersetzt werden können, so muß das Lösen formaler Aufgaben unbedingt ergänzt werden durch das Lösen von eingekleideten Aufgaben und von Anwendungsaufgaben. Kein Aufgabentyp läßt einen anderen im Unterricht überflüssig werden. Jede Einseitigkeit schadet. Insbesondere liegt bei der Überbetonung des Lösens formaler Aufgaben die Gefahr besonders nahe, daß der Mathematikunterricht formalistisch und lebensfremd wird. Ein Wesenszug der sozialistischen Schule besteht darin, daß der gesamte Unterricht eng mit dem Leben verbunden wird. Wenn im Mathematikunterricht nur oder zumindest in weit überwiegendem Maße formale Aufgaben gelöst werden, so bestehen zuwenig Möglichkeiten, die Verbindung zum Leben herzustellen, die Einheit von Theorie und Praxis zu wahren.

Nicht die formalen Aufgaben für Schüler sind zu verwerfen, sind zweitrangig oder minderwertig. Vielmehr erfüllt ein Unterricht, in dem den Schülern nicht deutlich wird, warum und wozu sie bestimmte formale Aufgaben, eingekleidete Aufgaben und Anwendungsaufgaben lösen müssen, nicht die an den Unterricht der sozialistischen Oberschule zu stellenden Forderungen, sinkt ab zu einem formalistischen Unterricht. Ein Unterricht, in dem den Schülern nicht die Zusammenhänge, die Beziehungen, die Gesetzmäßigkeiten, die Bedingtheiten des Geschehens in der Natur und der Gesellschaft gezeigt werden, in dem nur diese oder jene mathematische Aufgabe gelöst wird — ganz gleich, ob es sich dabei um eine formale Aufgabe, eine eingekleidete Aufgabe oder eine Anwendungsaufgabe handelt —, bereitet die Schüler nicht in hinreichendem Maße auf das Leben in der sozialistischen Gesellschaftsordnung vor, bleibt formalistisch. Der Formalismus im Mathematikunterricht kann also nicht dadurch beseitigt werden, daß aus ihm alle formalen Aufgaben verbannt werden. Es gilt vielmehr, den formalen Aufgaben im Unterrichtsprozeß genau den Platz zuzuordnen, der ihnen für den Erfolg der gesamten Bildungs- und Erziehungsarbeit zukommt.

Dabei sollten die folgenden Hinweise, die *G. Klaus* und *D. Wittich* in ihrem bemerkenswerten Artikel „Zu einigen Fragen des Verhältnisses von Praxis und Erkenntnis" geben, Beachtung finden:

„Aber auch im naturwissenschaftlichen Unterricht wurden bei dem Bemühen, eine möglichst enge Verbindung mit dem Leben herzustellen, teilweise einseitige und letzten Endes fehlerhafte Wege beschritten. Das beweist u. a. das schlechte Abschneiden unserer Schüler auf der ersten Mathematikerolympiade der Oberschulen der sozialistischen Länder 1959 in Bukarest. Eine bemerkenswerte Stelle des in der Zeitschrift ‚Mathematik und Physik in der Schule' über diese Olympiade gegebenen Berichtes lautet nämlich:

‚In der Arithmetik und in der Algebra wird in den anderen sozialistischen Staaten mehr Wert auf die Förderung des mathematischen Denkens durch formale Aufgaben gelegt als bei uns, während in unserem Mathematikunterricht die Anwendung einen sehr großen Raum einnimmt.'

Wir fragen uns: Was heißt denn hier ‚formal'? Weshalb haben die *andern* sozialistischen Länder mit ihren ‚formalen' Methoden so gut und wir mit unseren auf ‚Anwendung' orientierten Methoden so schlecht abgeschnitten? Es wurde offensichtlich für unseren Mathematikunterricht nur ungenügend oder gar nicht erkannt, daß die Beschäftigung mit formalen Aufgaben eine für die Entwicklung des mathematischen Denkens wichtige Form der mathematischen Praxis darstellt. Dieses Beispiel zeigt, daß eine zu enge Praxisauffassung auch den naturwissenschaftlichen Unterricht nachteilig beeinflussen muß."[13]

Trotz der weitgehenden Formalisierung, trotz der hochgradigen Abstraktion vom realen Sachverhalt bis zur formalen Aufgabe, können nach den unter α) und β) auf Seite 26 genannten Klassifikationsgesichtspunkten weitere Unterteilungen der formalen Aufgaben vorgenommen werden.

Im folgenden soll zuerst die *Klassifikation formaler Aufgaben nach den bei der Lösung anzuwendenden* **Verfahren** betrachtet werden. Dabei werden, unabhängig von durchaus vorkommenden Verschmelzungen mehrerer Lösungsverfahren, vier Haupttypen unterschieden.

Erstens treten formale Aufgaben im Unterricht in Form von *Rechenaufgaben* in Erscheinung. Es handelt sich dabei um Aufgaben, in denen in erster Linie die vier Grundrechenarten, das Potenzieren, das Radizieren und logarithmische Berechnungen als Lösungsverfahren Anwendung finden.

Es ist wohl ohne weitere Erläuterungen klar, daß das sichere und schnelle Rechnen mit natürlichen Zahlen, mit gemeinen Brüchen, mit Dezimalbrüchen, mit positiven und negativen Zahlen, mit beliebigen rationalen und schließlich mit beliebigen reellen Zahlen zum unerläßlichen mathematischen Grundwissen und -können zählt. Daher treten Rechenaufgaben in vielfältiger Form im Bildungs- und Erziehungsprozeß auf, beispielsweise mit bestimmten Zahlen und unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole, als Einzelaufgabe oder als Kettenaufgabe, als selbständige Aufgabe oder im Zusammenhang mit anderen Problemen. Für den zuletzt genannten Fall sei als Beispiel auf das Bilden von Produktgleichungen aus gegebenen Proportionen hingewiesen. Es erscheint aber nicht als sinnvoll, Rechenaufgaben noch nach anderen Gesichtspunkten zu gruppieren, denn dann würde das grundsätzliche Anliegen, nämlich die intensive Rechentätigkeit, die Konzentration von Lehrer und Schüler auf das Rechnen, durch untergeordnete Fragen verdeckt.

[13] Klaus, G., und Wittich, D.: Zu einigen Fragen des Verhältnisses von Praxis und Erkenntnis. In: „Deutsche Zeitschrift für Philosophie"; 9. Jahrgang 1961, Heft 11, Seite 1378.

Zweitens treten formale Aufgaben im Unterricht in Form von *Bestimmungsaufgaben* in Erscheinung. Darunter sind mathematische Schüleraufgaben zu verstehen, zu deren Lösung mathematische Verfahren benutzt werden müssen, die a) über das bloße Anwenden der Rechenregeln hinausgehen, die es b) ermöglichen, bestimmte gesuchte Größen aus bekannten Größen, die mit den gesuchten in einer bekannten Beziehung stehen, zu bestimmen. Als Beispiele seien erwähnt: das Ermitteln von Unbekannten durch rechnerisches oder graphisches Lösen von Bestimmungsgleichungen; das Aufsuchen unbekannter Größen mit Hilfe des Schließens oder der Anwendung von Formeln, zum Beispiel aus der Prozent- oder Zinsrechnung; das Bestimmen unbekannter Größen unter Benutzung von Formeln und Lehrsätzen aus der Geometrie; das Bilden von Ableitungen gegebener Funktionen in der Differentialrechnung usw. In all den genannten und ähnlich gelagerten Fällen treten bloße Berechnungen beziehungsweise Konstruktionen (vgl. unten) als Hilfstätigkeiten auf. Sicherheit im Rechnen und Konstruieren ist eine notwendige, jedoch ebensowenig wie die Kenntnis von speziellen Lösungsverfahren, Formeln, Lehrsätzen usw. für sich allein noch keine hinreichende Bedingung für das erfolgreiche Lösen von Bestimmungsaufgaben.

Zwischen den Bestimmungsaufgaben einerseits und Rechen- beziehungsweise Konstruktionsaufgaben andererseits kann keine feste Grenze angegeben werden. Denn selbst die Rechenaufgabe, 3 und 2 zu addieren, führt in der Form $3 + 2 = x$ (x als Unbekannte gedeutet) auf eine — wenn auch sehr einfache — Bestimmungsaufgabe. Diese Bestimmungsgleichung kann bei der Einführung in die Gleichungslehre durchaus von Bedeutung sein und beispielsweise mit Hilfe der Waage praktisch gelöst werden. Umgekehrt kann etwa die Bestimmungsaufgabe, zu drei gegebenen Größen die vierte Proportionale zu ermitteln, durchaus als Konstruktionsaufgabe gewertet werden, wenn zur Lösung ein auf der Ähnlichkeitslehre beruhendes geometrisches Verfahren Anwendung finden soll. Dennoch sollte in der Methodik des Mathematikunterrichts versucht werden, einen graduellen Unterschied zwischen den Bestimmungsaufgaben einerseits und den Rechen- beziehungsweise Konstruktionsaufgaben andererseits zu machen. Es ist nämlich für den Schüler wesentlich komplizierter, sein Wissen und Können zum Bestimmen unbekannter Größen richtig einzusetzen als nur zum Ausführen solcher in der Mathematik ständig wiederkehrender Tätigkeiten, die eine bloße Voraussetzung zum erfolgreichen Lösen von Bestimmungsaufgaben sind.

Schon aus der letzten Bemerkung wird klar, daß die Grenze nicht nur zwischen den Bestimmungsaufgaben und anderen Arten von formalen Aufgaben fließend ist, sondern auch zwischen den Bestimmungsaufgaben und bestimmten eingekleideten Aufgaben, insbesondere den mathematisch eingekleideten (vgl. Abschnitt 2.12). Trotzdem halte ich es nicht für angebracht, auf eine gesonderte Betrachtung der Bestimmungsaufgaben gänzlich zu verzichten. Speziell im Unterricht der oberen Klassen spielt das Erlernen wichtiger mathematischer Lösungsverfahren eine so bedeutende Rolle, daß es voll gerechtfertigt ist, einen besonderen Aufgabentyp herauszuheben, der in der Hauptsache zur Übung bestimmter mathematischer Verfahren im Mathematikunterricht Verwendung findet.

Drittens treten formale Aufgaben im Unterricht in Form von *Konstruktionsaufgaben* in Erscheinung. Es sei nur erinnert an die planimetrischen Grundkonstruktionen, an die Konstruktionen von Dreiecken, Vierecken und anderen einfachen geometrischen Figuren, an die Konstruktionen in der darstellenden Geometrie, aber auch an Konstruktionen, die in der Trigonometrie oder der analytischen Geometrie zur Kontrolle oder zur Erleichterung der Erkenntnisgewinnung dienen, ja selbst an Konstruktionen, die im Arithmetik- und Algebraunterricht zur Veranschaulichung benutzt werden.

Der Begriff der Konstruktionsaufgabe sollte heute nicht mehr so sehr eingeengt werden, wie das noch vor wenigen Jahrzehnten erfolgte. Damals wurden nur solche Aufgaben als Konstruktionsaufgaben angesehen, bei deren Lösung ausschließlich Zirkel und Lineal sowie unter Umständen Winkelmesser als Arbeitsgeräte zugelassen wurden. Heute sollten solche Zeichenhilfen wie Dreiecke zum Ziehen von Parallelen, Kurvenlineale zum Verbinden von Punkten im Achsenkreuz, ja selbst bestimmte Schablonen zum Zeichnen häufig vorkommender Kurven durchaus zugelassen werden. Es ist ein wesentlicher Bestandteil der polytechnischen Bildung, geeignete Arbeitsgeräte sinnvoll und zweckentsprechend zu benutzen.

Viertens treten formale Aufgaben in allen mathematischen Teildisziplinen als *Beweisaufgaben* auf. Darunter sind solche Aufgaben zu verstehen, durch die zum Beweisen oder Herleiten einer mathematischen Aussage aufgefordert wird. Dieser Aufgabentyp wird erst in letzter Zeit in der Schule wieder stärker beachtet; denn er ist für die Entwicklung des mathematischen Denkens der Schüler von größter Bedeutung.

Überblickt man die hier genannten vier Arten formaler Aufgaben, so erkennt man, daß die Unterteilung nach der beim Lösen der entsprechenden Aufgabe vorwiegend auszuübenden Tätigkeit vorgenommen worden ist. Die Schüler müssen rechnen, eine gesuchte Größe bestimmen, konstruieren oder eine mathematische Aussage beweisen beziehungsweise herleiten. Die Ausbildung der für das Lösen aller Arten mathematischer Schüleraufgaben benötigten Fähigkeiten und Fertigkeiten ist in der Tat ein wesentlicher Zweck des Lösens formaler Aufgaben.

Das Lösen formaler Aufgaben im Mathematikunterricht dient also dem Bekanntmachen mit mathematischen Verfahren und Arbeitsweisen und dem Entwickeln bestimmter Fähigkeiten und Fertigkeiten beim Anwenden dieser Verfahren und Arbeitsweisen. Daher treten formale Aufgaben besonders häufig als Beispielaufgaben und als Übungsaufgaben im Unterricht in Erscheinung; vgl. Abschnitt 2.2.

Oben wurden das Rechnen, das Bestimmen einer gesuchten Größe aus anderen Größen, die mit der gesuchten in einem gesetzmäßigen Zusammenhang stehen, das Konstruieren und das Beweisen beziehungsweise Herleiten mathematischer Aussagen als besonders bedeutsame mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten hervorgehoben. Es erhebt sich somit die Frage, ob damit bereits die Gesamtheit der im Mathematikunterricht zu entwickelnden Fähigkeiten und Fertigkeiten erschöpft ist.

Offenkundig spielen eine große Zahl weiterer Fähigkeiten und Fertigkeiten für ein erfolgreiches mathematisches Arbeiten eine Rolle. Erwähnt werden sollen nur das Raumvorstellungsvermögen, die Fähigkeit, Größenordnungen richtig abzuschätzen und zu erfassen, die konstruktive Phantasie, Fähigkeiten und Fertigkeiten im Messen, im Beobachten von sich bedingenden Veränderungen, im Umstrukturieren gegebener Sachverhalte. Diese und viele weitere Fähigkeiten und Fertigkeiten sind bei der Ausbildung sicheren und anwendungsbereiten mathematischen Wissens und Könnens von Bedeutung. Aber es erscheint nicht als gerechtfertigt, sie mit den obengenannten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen, Bestimmen, Konstruieren und Beweisen auf eine Stufe zu stellen. Während beispielsweise das Rechnen oder das Konstruieren weitgehend spezialisierte Tätigkeiten sind, ist die Fähigkeit, sich räumliche Beziehungen richtig vorzustellen, recht komplexer Art und in vielfältiger Form anwendbar. Auch die Entwicklung und Ausbildung von Fähigkeiten und Fertigkeiten im Beobachten sich bedingender Veränderungen erfolgt nicht nur im Rahmen des Mathematikunterrichts. Die Lösung dieser Bildungs- und Erziehungsaufgabe spielt im Unterricht nahezu aller Fächer eine bedeutende Rolle, ganz besonders im Physik-, Chemie- und Biologieunterricht.

Selbst das Messen kann nicht als charakteristische mathematische Tätigkeit gewertet werden. Es handelt sich hierbei um eine für die polytechnische Bildung und Erziehung höchst bedeutsame Grundfertigkeit, an deren Entwicklung und Ausbildung im Unterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule von möglichst vielen Seiten her gearbeitet werden muß. Beispielsweise haben Werkunterricht, naturwissenschaftlicher Unterricht und Unterricht in der sozialistischen Produktion wesentlich dazu beizutragen, daß die Schüler befähigt werden, praktische Messungen mit zweckmäßigen Meßgeräten und Meßmethoden in vielfältiger Form durchzuführen. Im Mathematikunterricht sind dazu einerseits bestimmte theoretische Grundlagen zu vermitteln, andererseits praktische Übungen mit denjenigen Meßgeräten auszuführen, die für das Lösen typisch mathematischer Aufgaben notwendig sind. So müssen die Schüler sicher mit Maßstab (Lineal) und Winkelmesser messen können, um zum Beispiel Konstruktionsaufgaben zu lösen oder mit Hilfe von Messungen bestimmte Zusammenhänge aufzuspüren, die dann als Vermutungen allgemeingültiger mathematischer Aussagen formuliert und schließlich exakt bewiesen werden. Das Messen spielt also auch im Mathematikunterricht eine Rolle, jedoch in prinzipiell anderer Form als das Rechnen, Bestimmen, Konstruieren oder Beweisen.

Unter diesem Gesichtspunkt sollte man den bei einigen Lehrbüchern der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule noch zu findenden Titel „Rechnen, Messen, Konstruieren" überprüfen. Man sollte ihn so abändern, wie es bei den Neubearbeitungen einiger Lehrbücher geschah, die diesen Titel trugen, heute aber wieder „Mathematik — Ein Lehrbuch für die Oberschule" heißen. Ebenso sollten die bei der Einführung des polytechnischen Unterrichts stark betonten Meßübungen an Werkstücken oder an Modellen wirklicher Gegenstände (z. B. Klassenarbeitssätze zu Querschnitten von Profilstählen u. ä.) nur dann durchgeführt werden, wenn sie sich als notwendig für die Lösung eines mathematischen Problems, als sinnvoll für die Steigerung des mathematischen Wissens und Könnens oder als echte Verbindung des Mathematikunterrichts mit dem Leben erweisen und gleichzeitig im echten Sinne polytechnisch bilden und erziehen helfen. Anderenfalls handelt es sich bei der Benutzung der entsprechenden Klassenarbeitssätze oftmals um eine die Schüler zwar interessierende Beschäftigung, sogar manchmal um eine Beschäftigung, die für kurze Zeit den Lerneifer und die Begeisterung für den Mathematikunterricht (dieser Art!) steigern hilft, nicht aber um intensives Lernen im Mathematikunterricht. Nicht zufällig haben uns sowjetische Pädagogen immer wieder darauf hingewiesen, daß es bei der Herstellung enger Verbindungen von Unterricht und Leben zu verhindern gilt, in praktizistische Tendenzen abzugleiten. Das Leistungsniveau des Mathematikunterrichts der Sowjetunion ist bekanntlich außerordentlich hoch. Die Erfolge der Sowjetschule müssen uns Vorbild und Ansporn für die Verbesserung unseres Mathematikunterrichts sein. Die Ergebnisse der intensiven Lern- und Erziehungsarbeit zeigen sich beispielsweise in den großartigen Leistungen der sowjetischen Gelehrten, Ingenieure, Techniker und Astronauten, die als erste den Weltraum eroberten. Das mathematische Wissen und Können der Sowjetmenschen ist dem der meisten Bürger der DDR weit überlegen. Die Mathematik ist in der Sowjetunion seit Jahren eine wahre Volkswissenschaft. Aber all diese Erfolge wurden erreicht durch einen Unterricht, der freigehalten wurde von Beschäftigungen praktizistischer Art, durch einen Unterricht, in dem das Mathematische im Vordergrund steht, in dem zum mathematischen Denken erzogen wird und die typischen mathematischen Grundfähigkeiten und -fertigkeiten nicht zuletzt durch das Lösen vieler formaler Aufgaben planmäßig und systematisch ausgebildet und entwickelt werden.

Bei der Klassifikation der formalen Aufgaben gilt es noch zwei weitere Gesichtspunkte zu beachten.

Erstens müssen aus methodischen und didaktischen Gründen die Aufgaben hinsichtlich des Schwierigkeitsgrades dadurch unterschieden werden, daß die Anzahl und die Art der auszuführenden Operationen beachtet werden. Zweitens muß darauf geachtet werden, ob und inwieweit die auszuführenden Operationen bei der Aufgabenstellung direkt gekennzeichnet werden.

In bezug auf die Anzahl der beim Lösen einer formalen Aufgabe auszuführenden Operationen lassen sich zwar keine festen Einteilungsprinzipien geben, wohl aber ist diese Frage bei der Auswahl der Aufgaben im Unterricht ständig zu beachten. Besonders im Rechenunterricht der Unterstufe spielt sie eine bedeutende Rolle.

Es ist keineswegs so, daß allein die Anzahl der gegebenen Zahlen und Verknüpfungszeichen bereits Auskunft darüber gibt, wie viele Operationen vom Schüler beim Lösen einer formalen Aufgabe tatsächlich auszuführen sind. Beispielsweise sind bei den Aufgaben $63 + 4$, $63 + 12$, $63 + 19$ und $63 + 39$ von Fall zu Fall verschieden viele Operationen auszuführen, da das Überschreiten der Zehner oder gar des Hunderters immer neue Teiloperationen erforderlich macht. Hinsichtlich der Anzahl der Rechenschritte ist es auch ein wesentlicher Unterschied, ob die Aufgabe $63 + 12$ oder die Aufgabe $63 \cdot 12$ gelöst werden soll.

Die zuletzt genannte Aufgabe ist bereits ein Beispiel dafür, daß beim Lösen formaler Aufgaben keineswegs immer nur *eine* Operation angewendet wird. Beim Lösen der Aufgabe $63 \cdot 12$ sind außer Multiplikationen auch Zerlegungen und Additionen notwendig. Der Lehrer muß sich bei der methodischen Vorbereitung seines Unterrichts stets völlige Klarheit darüber verschaffen, welche Operationen beim Lösen der von ihm ausgewählten mathematischen Schüleraufgaben tatsächlich Anwendung finden. Daher halte ich es auch nicht für angebracht, Rechenaufgaben hinsichtlich der in der Aufgabenstellung enthaltenen Operationsangaben zu klassifizieren. Beispielsweise erachte ich es nicht als zweckmäßig, von Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben zu sprechen. Die Aufgabe $63 \cdot 9$ beispielsweise lehrt, daß die Lösungen $60 \cdot 9 + 3 \cdot 9$ und $63 \cdot 10 - 63$ möglich und sinnvoll sind. Neben der Multiplikation erscheint die Addition ebenso zweckmäßig und sinnvoll wie die Subtraktion. Ist $63 \cdot 9$ daher eine Multiplikationsaufgabe, eine Additions-Multiplikations-Aufgabe oder eine Subtraktions-Multiplikations-Aufgabe? Es ist schon bei diesem relativ einfachen Beispiel klar, daß der Versuch einer Benennung von mathematischen Schüleraufgaben nach den beim Lösen anzuwendenden Rechenoperationen sehr bald zu einer völlig unübersichtlichen Terminologie führt. Zugleich wird deutlich, daß die beiden obengenannten Klassifizierungsgesichtspunkte — Anzahl und Art der auszuführenden Operationen einerseits, Kennzeichnung der Operationen in der Aufgabenstellung andererseits — nicht losgelöst voneinander betrachtet werden dürfen. Denn in der Aufgabe $6 \cdot 9$ wird die Multiplikation, die einzige auszuführende Operation, bei der Aufgabenstellung direkt gekennzeichnet; bei der Aufgabe $63 \cdot 9$ werden die im Lösungsprozeß auftretenden additiven oder subtraktiven Verknüpfungen nicht von vornherein in der Aufgabenstellung sichtbar gemacht.

Noch deutlicher wird das eben gekennzeichnete Problem, wenn in der Aufgabenstellung solche Formulierungen gewählt werden wie: „Ergänze 83 bis zum vollen Hunderter!", „Verdoppele das zuletzt gewonnene Resultat!", „Nimm $\frac{3}{4}$ von 8!", „Füge 5 hinzu!" usw. In all diesen Fällen sind die auszuführenden Rechenoperationen mit Hilfe von Begriffen aus der Umgangssprache beschrieben, sie sind durch einen Text umschrieben. Für formale Aufgaben dieser Art empfiehlt sich der Begriff *Textaufgabe*.

Ich bin mir dessen wohl bewußt, daß ich hier den Begriff *Textaufgabe* in wesentlich engerem Sinne gebrauche, als das im allgemeinen in der Literatur zur Methodik des Mathematikunterrichts üblich ist. Ich halte diese Einengung des Umfanges des Begriffs Textaufgabe für dringend notwendig, damit der prinzipielle Unterschied zwischen formalen Aufgaben, eingekleideten Aufgaben und Anwendungsaufgaben klarer erkannt werden kann. Denn alle drei Aufgabentypen können den Schülern in Form eines Textes gegeben werden. Nicht das Vorhandensein oder das Fehlen eines Textes entscheidet darüber, ob dem Schüler ein mathematisches Problem oder ein Problem aus einem anderen Bereich des Geschehens in Natur und Gesellschaft zur Lösung vorgelegt wird!

Man kann fragen, ob der Begriff Textaufgabe in der Methodik des Mathematikunterrichts überhaupt notwendig ist. Diese Frage darf, so meine ich, nicht mit einem bloßen Ja oder Nein beantwortet werden. Es wäre durchaus möglich, auf den Begriff Textaufgabe völlig zu verzichten. Hinsichtlich der Klassifikation wird er weder in der Reihe: formale Aufgabe — eingekleidete Aufgabe — Anwendungsaufgabe benötigt, noch korrespondiert er mit den Begriffen: Rechenaufgabe — Bestimmungsaufgabe — Konstruktionsaufgabe — Beweisaufgabe, die für die nähere Kennzeichnung von formalen Aufgaben geschaffen wurden. Der Begriff Textaufgabe verhilft nur zu einer rein äußerlichen Unterscheidung der formalen Aufgaben in solche, die durch einen Text gegeben, und in solche, die textfrei gestellt werden. Bei den textfrei gestellten Aufgaben sind Aufgaben wie 63 37 offenkundig nicht gleichzusetzen mit Aufgaben, bei denen mit Hilfe einer Skizze, einer Tabelle oder eines ähnlichen Abbildes mathematischer Sachverhalte zum Lösen eines bestimmten Problems aufgefordert wird. Man denke hier auch insbesondere an die Rechenbilder, die im Anfangsrechenunterricht verwendet werden. Die Menge der textfreien Aufgaben ist also in sich keineswegs einheitlich.

Umgekehrt sind auch bei Textaufgaben die Texte nicht als gleichwertig anzusehen, wie die folgenden Beispiele zeigen: „Bestimme das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 3, 4 und 6!"; „Das Doppelte einer Zahl ist gleich dem um 5 vermehrten Dreifachen der Hälfte dieser Zahl. Wie heißt die gesuchte Zahl?" Im ersten Beispiel ist die Angabe des mathematischen Auftrages in Worten deshalb notwendig, weil die in der Zahlentheorie gebräuchliche Symbolik $x = [3, 4, 6]$ den Schülern nicht bekannt ist. Im zweiten Beispiel aber ist die Bestimmungsgleichung $2x = 3 \cdot \frac{x}{2} + 5$ in Worte gefaßt, die Angabe der formalen Aufgabe in textfreier Form für die Schüler verständlich, die Verwendung von Worten also etwa ab Klasse 7 oder 8 nicht notwendig. Dennoch ist es didaktisch und methodisch von großem Wert, formale Bestimmungsaufgaben, wie die hier als Beispiel gewählte Bestimmungsgleichung, als Textaufgaben zu formulieren. Denn die Schüler müssen hier als ersten Lösungsschritt die textfreie formale Aufgabe aus dem gegebenen Text herauslesen und die entsprechende Gleichung aufstellen. Insofern stellt das Lösen von Textaufgaben dieser Art eine direkte Vorstufe für das Lösen von eingekleideten Aufgaben dar. Es gibt daher auch eine große Zahl von Methodikern, die Textaufgaben der zuletzt beschriebenen Art bereits zu den eingekleideten Aufgaben rechnen.

Es existieren somit durchaus Gründe, Textaufgaben in der Methodik des Mathematikunterrichts von textfreien Aufgaben zu unterscheiden. Jedoch sollte diese Unterscheidung dann und nur dann benutzt werden, wenn es bei didaktischen oder methodischen Erörterungen tatsächlich darum geht, den Prozeß des Herauslesens und Aufstellens der textfreien formalen Aufgabe aus der in Worten gegebenen formalen Aufgabe genauer zu analysieren. Mit anderen Worten: ich rate ab von einer gehäuften Benutzung des Begriffs Textaufgabe, wenn erstens nicht klar erklärt wird, daß unter Textaufgaben nur bestimmte formale Aufgaben gemeint sind, wenn zweitens kein zwingender methodischer Grund vorliegt, Textaufgaben von textfreien Aufgaben zu unterscheiden.

Wenn jedoch solche Fragen wie Erziehung zum mathematischen Denken, Wecken des Interesses für die Mathematik und ähnliche im Mittelpunkt der Diskussion stehen, dann ist es wesentlich besser, von Textaufgaben zu sprechen als von „Denkaufgaben“, „Problemaufgaben“, „Knobelaufgaben“, „Rätselaufgaben“ usw. Diese und ähnliche Ausdrücke sollten prinzipiell vermieden werden. Oder will man etwa mathematische Aufgaben für Schüler in Aufgaben, bei deren Lösung eine Denkleistung gefordert wird, und in Aufgaben, bei deren Lösung nicht gedacht zu werden braucht, einteilen? Selbst diejenigen Übungsaufgaben, mit deren Hilfe bestimmte Fertigkeiten automatisiert werden sollen, müssen im Unterricht so verwendet werden, daß den Schülern der Sinn und Zweck der Übung und die mathematischen Grundlagen der Lösungsverfahren jederzeit klar sind. Das Lösen einer jeden mathematischen Aufgabe für Schüler muß ein Beitrag für die Entwicklung des mathematischen Denkens sein, und sei er noch so klein und geringfügig. Denn das bloße Einprägen von Rechenschemata, der bloße Drill von Aufgabentypen bestimmter Art, ist nicht nur wertlos und führt zu keinem dauerhaften und anwendungsfähigen Wissen und Können, sondern verhindert sogar die planmäßige und systematische Entwicklung wesentlicher geistiger Fähigkeiten und Fertigkeiten und wird damit zu einer Ursache der Senkung des Leistungsniveaus im Mathematikunterricht.

Noch ein weiterer Grund existiert, solche Bezeichnungen wie „Denkaufgabe“, „Problemaufgabe“, „Knobelaufgabe“, „Rätselaufgabe“ usw. nicht zuzulassen. Durch diese Begriffsbildungen wird auf die Tätigkeiten „denken“, „Probleme lösen“, „knobeln“, „Rätsel raten“ usw. orientiert. Das sind aber keine typisch mathematischen Tätigkeiten. Es wird also auf Lösungsverfahren hingewiesen, die nicht zu den für die Lösung mathematischer Schüleraufgaben allein zugelassenen mathematischen Lösungsverfahren gehören. Rein äußerlich sind die hier abgelehnten Begriffsbildungen den bei der Einteilung der formalen Aufgaben benutzten Begriffen „Rechenaufgabe“, „Bestimmungsaufgabe“, „Konstruktionsaufgabe“ und „Beweisaufgabe“ recht ähnlich. Die Gefahr, sie mit diesen auf die gleiche Stufe zu setzen, liegt daher nahe. Daß das aber vom Inhalt und Wesen der auszuübenden Tätigkeiten völlig unmöglich ist, darf als offenkundig angesehen werden.

In den vorangegangenen Betrachtungen über Textaufgaben wurden bisher nur Beispiele aus dem Arithmetik- und Algebraunterricht betrachtet. Die Darlegungen haben aber für alle Bereiche des Mathematikunterrichts Gültigkeit. Das wird sofort deutlich, wenn man einige Beispiele aus dem Geometrieunterricht heranzieht. So sind die Texte der folgenden beiden Aufgaben recht verschieden voneinander, obwohl in beiden Fällen nur eine formale Konstruktionsaufgabe angegeben wird: „Zeichne ein Dreieck aus den drei gegebenen Seiten a = 3 cm, b = 4,5 cm, c = 5,2 cm!“; „Konstruiere einen Kreis durch die drei Punkte A, B und C, die folgende Lage zueinander haben: A ist von B 5,2 cm entfernt, B von C 3 cm, C von A 4,5 cm!“ Einmal ist in der zweiten Aufgabe die erste als Teilaufgabe enthalten, es werden also mehrere Operationen — hier Konstruktionen — beim Lösen dieser einen Aufgabe gefordert. Zum anderen ist bei der zweiten Aufgabe das geometrische Problem der Kreiskonstruktion mit Hilfe der Konstruktion der Mittelsenkrechten zu zwei Kreissehnen für den Schüler genauso verborgen wie die formale Bestimmungsgleichung im oben gegebenen Beispiel einer Textaufgabe, die an der Grenze zur eingekleideten Aufgabe steht.

Bei der Erörterung von Beweisaufgaben spielt das Problem der textfreien Aufgaben und der Textaufgaben in einem anderen Sinne eine Rolle als bei den Rechen-, Bestimmungs- und Konstruktionsaufgaben. Es ist zwar bei gewissen arithmetischen Beweisaufgaben möglich, fast ohne Text auszukommen, wie das folgende Beispiel lehrt: „Beweise unter Benutzung von $a(b + c) = ab + ac$ die Identität $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$!" Aber bei den meisten Beweisaufgaben, besonders bei Beweisaufgaben aus der Geometrie, ist ein Text unerläßlich. Dabei kann der Text so kurz gefaßt sein wie in: „Beweise, daß die Summe der Innenwinkel eines ebenen Dreiecks stets 180° beträgt!" Dennoch verrät auch dieser kurze Text bereits wesentlich mehr als der folgende, auf das gleiche Problem führende: „Leite die Formel für die Summe der Innenwinkel des Dreiecks her!" Im Unterschied zu den beiden vorangegangenen Beispielen wird hier weder das Resultat angegeben, noch erfolgt ein Hinweis auf die bei der Herleitung zu benutzenden Beweishilfsmittel. Da wesentliche Unterschiede hinsichtlich der Anforderungen, die an die Schüler gestellt werden, vorhanden sind, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, in der Methodik des Mathematikunterrichts zu unterscheiden zwischen Beweisaufgaben, die einen Beweis verlangen, und Beweisaufgaben, die eine Herleitung fordern. Die zuletzt genannte Form von Beweisaufgaben kann in didaktischer und methodischer Hinsicht in gewissem Maße mit den Textaufgaben verglichen werden. Die zuerst genannte Form sollte aber nur dann auf die gleiche Stufe mit textfreien, in mathematischer Symbolik gegebenen anderen formalen Aufgaben gestellt werden, wenn das zu Beweisende und die Beweishilfsmittel angegeben sind. Fehlt eine dieser beiden Angaben, so liegt eine höhere Schwierigkeitsstufe vor.

2.12 Eingekleidete Aufgaben

Als **eingekleidete Aufgaben** werden diejenigen mathematischen Aufgaben für Schüler bezeichnet, bei denen das zu lösende mathematische Problem nicht direkt genannt wird, sondern in irgendeiner anderen mathematischen oder sonstigen sachbezogenen Problemstellung verborgen ist. Je nach der Art der Einkleidung des zu lösenden mathematischen Problems kann somit unterschieden werden zwischen *mathematisch eingekleideten*

Aufgaben und *sachbezogen eingekleideten Aufgaben*. Letztere werden meist kurz als *Sachaufgaben* bezeichnet, wobei jedoch beachtet werden muß, daß der Begriff Sachaufgabe in der Literatur keineswegs immer eindeutig gebraucht wird. Beispielsweise bezeichnen manche Autoren sowohl sachbezogen eingekleidete Aufgaben als auch Anwendungsaufgaben als Sachaufgaben. Dadurch wird aber der wesentliche Unterschied zwischen eingekleideten Aufgaben und Anwendungsaufgaben verdeckt.

Für mathematisch eingekleidete Aufgaben existiert keine Kurzbezeichnung. Um von mathematisch eingekleideten Aufgaben sprechen zu können, ist es notwendig, daß die der eingekleideten Aufgabe zugrunde liegende formale Aufgabe einem anderen Bereich der Mathematik angehört als dem, dem die Einkleidung entnommen wird. Daher findet man in den Schulbüchern mathematisch eingekleidete Aufgaben meist unter den Übungsaufgaben zu einem bestimmten Stoffgebiet zusammengefaßt; zum Beispiel unter Überschriften wie: „Aus der Geometrie“, „Aus der Körperberechnung“, „Aus der Zahlentheorie“ usw.

Ein einfaches Beispiel soll die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Aufgabentypen verdeutlichen.

„$2 \cdot 1{,}5 \cdot 3$“ ist die (textfreie) formale Aufgabe, die — wenn die Reihenfolge der Faktoren als unwesentlich angesehen wird — beispielsweise auf folgende Weise in eine formale Textaufgabe umgewandelt werden kann: „Die Zahl 3 ist mit ihrer Hälfte malzunehmen, das Produkt ist anschließend zu verdoppeln!“

„Die Kanten eines Quaders messen 2 m, 1,5 m und 3 m. Bestimme seinen Rauminhalt!“, ist eine der möglichen mathematischen Einkleidungen der formalen Rechenaufgabe $2 \cdot 1{,}5 \cdot 3$.

Diese zuletzt genannte Einkleidung unterscheidet sich nur geringfügig von der folgenden:

„Eine Kiste besitzt die Kantenlänge 2 m, 1,5 m und 3 m. Bestimme ihren Rauminhalt!“

Dennoch liegt in diesem Fall bereits eine Sachaufgabe vor. Denn vom psychologischen Standpunkt ist es keineswegs gleichgültig, ob der Schüler ausschließlich mit abstrakten mathematischen Begriffen arbeitet oder ob er an Vorstellungen anknüpfen kann, die ihm aus dem täglichen Leben, aus seinem Erfahrungskreis bekannt und vertraut sind.

Wohl sind beim Lösen einer Sachaufgabe mehr Schritte zu tun als beim Lösen einer formalen Aufgabe, oft sogar auch mehr Schritte als beim Lösen einer mathematisch eingekleideten Aufgabe; dennoch aber ist das Lösen von sachbezogen eingekleideten Aufgaben eine Hilfe bei der Abstraktion, die den Schüler vom konkret Gegenständlichen zum abstrakt Mathematischen führt. Zugleich lernt der Schüler durch das Lösen von Sachaufgaben, auch rückläufig sein durch formalisierende Abstraktion erworbenes rein mathematisches Wissen immer wieder zur objektiven

Realität, zum Leben, zum aus der täglichen Erfahrung Bekannten in Beziehung zu setzen. Die ständige Beobachtung der Wechselbeziehungen zwischen der objektiv existierenden Realität und der richtigen Widerspiegelung der vorhandenen räumlichen Beziehungen und Quantitätsverhältnisse im Bereich des Begrifflichen, innerhalb der mathematischen Wissenschaft, ist wesentlich für das Verständnis der Mathematik und ihrer Denk- und Arbeitsweisen und ist zugleich bedeutsam für die weltanschauliche Bildung und Erziehung der Schüler.

Bei mathematisch eingekleideten Aufgaben ist es nicht immer möglich, klar zu unterscheiden, ob die betreffende Aufgabe als formale Aufgabe oder als eingekleidete Aufgabe zu betrachten ist. Die Entscheidung darüber kann nur gefällt werden, wenn die Verwendung der betreffenden Aufgabe im Unterrichtsprozeß betrachtet wird. Zum Beispiel kann die obengenannte Aufgabe, in der der Rauminhalt eines Quaders bestimmt werden soll, sowohl als eingekleidete Aufgabe im Rahmen der Behandlung der Multiplikation ganzer Zahlen mit Dezimalzahlen auftreten, etwa als einführende, besonders einfache und übersichtliche Beispielaufgabe; vgl. Abschnitt 2.22. Sie kann aber auch als formale Bestimmungsaufgabe in Erscheinung treten, denn es wird mit Hilfe der Formel $V = abc$ das Volumen V des Quaders aus den seine Größe bedingenden Kantenlängen bestimmt.

Es ist jedoch keineswegs immer so, daß mathematisch eingekleidete Aufgaben in anderen Unterrichtsabschnitten formale Aufgaben sein können. Wenn beispielsweise eine Strecke der Länge a gegeben wird und rechnerisch bestimmt werden soll, wie lang die beiden Teilstrecken sind, die entstehen, wenn diese Strecke nach dem Goldenen Schnitt geteilt wird, so führt die Lösung dieser Aufgabe auf eine quadratische Bestimmungsgleichung. Somit ist die gestellte Aufgabe eine eingekleidete Bestimmungsaufgabe aus der Planimetrie. Das Ergebnis des Lösungsversuches kann vom Schüler, wenn er die notwendigen geometrischen Kenntnisse besitzt, durch eine maßstabgerechte Konstruktion überprüft werden. Weil eine Kontrolle des Resultates grundsätzlich gefordert wird, verbirgt sich hinter der gestellten eingekleideten Aufgabe nicht nur eine formale Bestimmungsaufgabe, sondern zugleich eine formale Konstruktionsaufgabe. Wenn, wie im gewählten Beispiel, die Untersuchung mit allgemeinen Zahlsymbolen durchgeführt wird, muß der Schüler gleichzeitig noch eine formale Beweisaufgabe lösen. Denn bei der Lösung ist er gezwungen, die Formel $x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ herzuleiten.

Die an diesem Beispiel analysierte Erscheinung, daß bei einer mathematisch eingekleideten Aufgabe gegebenenfalls nicht nur *ein* bestimmter Typ von formalen Aufgaben gelöst werden muß, läßt es ratsam erscheinen, eingekleidete Aufgaben *nicht* hinsichtlich der ihnen zugrunde liegenden formalen Aufgaben zu unterteilen.

Schon das zuletzt erwähnte Beispiel einer mathematisch eingekleideten Aufgabe zeigt, daß beim Lösen solcher Aufgaben nicht nur die gerade im Unterricht zu behandelnden mathematischen Stoffgebiete als Gegenstand der Bildungs- und Erziehungsarbeit angesehen werden können, sondern auch andere Bereiche wiederholt, vertieft und ergänzt werden. Darin liegt ein besonders großer Wert der mathematisch eingekleideten Aufgaben. Mit ihrer Hilfe kann planmäßig und systematisch das Wissen und Können der Schüler gefestigt und bereichert werden.

Wenn beispielsweise im Rahmen der Differentialrechnung danach gefragt wird, welche Gestalt ein Rechteck haben muß, damit bei vorgegebenem Umfang der Flächeninhalt ein Maximum wird, so ist das eine eingekleidete Aufgabe, die auf eine formale Extremwertbestimmung zurückgeführt werden muß. Das Resultat dieser Bestimmungsaufgabe führt zu der Erkenntnis, daß sich die Rechteckseiten wie 1 : 1 verhalten müssen. Die Diskussion dieses Ergebnisses wiederum führt zu dem Satz: Unter allen Rechtecken gleichen Umfanges besitzt das Quadrat den größten Flächeninhalt. Damit ist das geometrische Wissen der Schüler im Rahmen der Differentialrechnung bereichert worden.

Aus der Erkenntnis, daß mathematisch eingekleidete Aufgaben zur Festigung und Ergänzung des mathematischen Wissens und Könnens genutzt werden können, ergibt sich für die Planung des Bildungs- und Erziehungsprozesses die Forderung, für bestimmte Unterrichtsabschnitte sorgfältig ausgewählte Bereiche festzulegen, denen die Mehrzahl der mathematisch eingekleideten Aufgaben entnommen werden soll. Im seit dem 1. September 1961 gültigen Lehrplan für die erweiterte Oberschule sind erste Versuche dieser Art zu finden, im Lehrplan der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule fehlen entsprechende Festlegungen noch. Es sollte daher als besonders wichtige Aufgabe eines jeden Mathematiklehrers angesehen werden, unter Berücksichtigung der Besonderheiten des Entwicklungsstandes der von ihm unterrichteten Klassen im Stoffverteilungsplan Bemerkungen über die Planung mathematisch eingekleideter Aufgaben aufzunehmen.

Wie die mathematisch eingekleideten Aufgaben nicht wahllos in den Unterrichtsprozeß einbezogen werden sollten, so sollte auch bei den sachbezogen eingekleideten Aufgaben sorgfältig überlegt werden, welche Sachprobleme bei den verschiedenen Stoffgebieten jeweils in den Mittelpunkt gerückt werden. Beispielsweise bieten sich an dieser Stelle viele Möglichkeiten, die Besonderheiten von Stadt- und Landschulen zu berücksichtigen.

Da die Sachbezüge den Schülern im Grundsätzlichen bekannt sein müssen, damit die anschauliche Grundlage wirksam, das Interesse geweckt und die Verbindung zum Leben hergestellt werden können, sind die Sachgebiete so auszuwählen, daß im Mathematikunterricht keine umfangreichen Sacherklärungen notwendig werden. Erweist es sich als unerläßlich für das Verständnis einer Sachaufgabe, zuerst den Sachverhalt mit Hilfe längerer Erläuterungen den Schülern zu erschließen, so ist die entsprechende Sachaufgabe für die betreffende Klasse ungeeignet. Denn es kann nur dann von rationeller Ausnutzung der Unterrichtszeit und von intensivem Lernen gesprochen werden, wenn die zu lösenden Bildungs- und Erziehungsaufgaben zielstrebig und ohne unnütze Umschweife in Angriff genommen werden. Damit keine vermeidbaren „Verlustzeiten" im Unterricht auftreten, ist es unerläßlich, in zweifacher Hinsicht die Voraussetzungen für ein erfolgreiches Lösen von Sachaufgaben zu schaffen: erstens müssen den Schülern die beim Lösen der zugrunde liegenden formalen Aufgabe anzuwendenden mathematischen Formeln, Sätze, Verfahren usw. bekannt sein; zweitens muß ihnen der für die Einkleidung benutzte Sachverhalt voll verständlich und klar sein. Durch diese zweite Bedingung unterscheiden sich Sachaufgaben in entscheidendem Maße von Anwendungsaufgaben; vgl. Abschnitt 2.13.

Ebenso unangebracht wie die Wahl von Sachverhalten, die den Schülern nicht vertraut sind, ist ein langatmiges Heranführen an das für die sachbezogene Einkleidung vorgesehene Problem, wenn den Schülern der entsprechende Fragenkomplex — wie oben gefordert — in hinreichendem Maße bekannt ist. Gerade in den Tagen, in denen ich diese Arbeit niederschrieb, erlebte ich bei einer im übrigen recht tüchtigen Lehrerin diesen Fehler in ausgeprägter Form.

Die Lehrerin beabsichtigte, in Klasse 6 Aufgaben folgender Art zu üben: $\frac{1}{4} \cdot 140$; $\frac{1}{2} \cdot 120$ usw. Mit Recht überlegte sich die Lehrerin, daß es sicher für die Schüler reizvoller und interessanter wäre, wenn diese Aufgaben nicht nur als formale Aufgaben gelöst, sondern in einer einfachen und durchsichtigen sachbezogenen Einkleidung, die das eigentliche mathematische Problem nicht sehr verdeckt, gestellt würden. Da es sich um eine Landschule handelte, wählte die Lehrerin folgende durchaus geeignete Fragestellung aus: Wieviel Kilogramm einer bestimmten Getreideart müssen in unserer LPG je Hektar ausgesät werden, damit ein guter Ernteertrag erwartet werden darf? Die entsprechenden Zahlenangaben waren beim Agronomen der LPG erfragt worden, leider nur durch die Lehrerin selber, nicht auch durch die Schüler.

Diese Vorüberlegungen waren alle gut, der Unterricht hätte zügig voranschreiten können. Wenige Sätze hätten genügt, den Schülern die Problemstellung zu erläutern; dann hätte bestimmt werden können, wie groß die benötigte Roggenmenge für $\frac{1}{4}$ ha im Schulgarten, für $3\frac{1}{2}$ ha auf diesem Feld, für $2\frac{1}{4}$ ha auf jenem Feld ist. Statt dessen wurde den Zwölfjährigen eine Rechengeschichte erzählt. Darin wurde ausgegangen vom Raten möglicher Berufe. Durch Befragen der Schüler wurde ermittelt, daß die Väter vieler Schüler Bauern sind. Als Arbeitsort dieser Väter wurde die örtliche LPG festgestellt. Nun mußten Arbeitstätigkeiten der Väter, die in der LPG arbeiten, genannt werden. Unter anderem wurde auch das Säen erwähnt. Aber noch ging die Lehrerin nicht dazu über, die betriebsame Erzählstunde in eine Mathematikstunde umzuwandeln. Nach weiteren Umwegen wurde schließlich von einem Gespräch mit dem Agronomen berichtet. Und dann wurde fast 3 Minuten geraten, wieviel Kilogramm Roggen, Weizen, Gerste je Hektar ausgesät werden müssen. Nachdem auf diese Weise etwa ein Viertel der Unterrichtsstunde verloren war, begannen endlich die geplanten Rechenübungen.

Die Unterrichtsstunde wurde hier vor allem deshalb so ausführlich dargelegt, weil anologe Fehler im Rechen- und Mathematikunterricht aller Klassenstufen, besonders aber in der Unterstufe, häufig auftreten. Durch solche fehlerhafte Verwendung sachbezogen eingekleideter Aufgaben wird auf keinen Fall zur Hebung, wohl aber oftmals zur Senkung des Leistungsniveaus im Mathematikunterricht beigetragen. Es steht ohne Zweifel fest, daß insbesondere im Anfangsunterricht Rechengeschichten, also eine besondere Form von sachbezogen eingekleideten Aufgaben, von großem Wert sind. Mit ihrer Hilfe wird den Schülern der Weg zum richtigen Gebrauch der mathematischen Begriffe (Zahlen, Verknüpfungsvorschriften usw.) erleichtert, wird der Übergang vom Konkret-Anschaulichen zum Abstrakt-Mathematischen und umgekehrt unterstützt. Auch in den mittleren Klassenstufen empfiehlt sich die häufige Verwendung sachbezogen eingekleideter Aufgaben auf Grund der noch immer recht stark an das Konkrete gebundenen Denkweise der Schüler, in Hinblick auf die Klärung und Entwicklung von Vorstellungen und Begriffen und nicht zuletzt als Übung im Erkennen und Isolieren mathematischer Beziehungen in praktischen Sachverhalten. Selbst in den Klassen 7, 8 und folgende sollte nicht auf das Lösen von Sachaufgaben verzichtet werden. Dabei ist es ratsam, die Einkleidungen oft solchen Problemkreisen zu entnehmen, die den Schülern vom Unterricht in der sozialistischen Produktion bekannt sind, Verbindungen und Koordinierungen zum Unterricht anderer Fächer ermöglichen, dem politischen und wirtschaftlichen Geschehen entstammen oder historisch von Interesse sind. Die bei der Einkleidung benutzten Angaben von Zahlen und sonstigen Daten müssen dabei stets mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen beziehungsweise diesen sinnvoll entsprechen. In dieser Hinsicht war es von der Lehrerin, deren Rechengeschichte oben kritisiert wurde, vollkommen korrekt, daß sie sich beim Agronomen nach den richtigen Zahlen erkundigt hatte.

Dafür, daß Sachaufgaben im Mathematikunterricht der oberen Klassen eine geringere Rolle spielen als in den unteren, sind zwei Gründe ausschlaggebend. Erstens können in den oberen Klassen in weit stärkerem Maße Anwendungsaufgaben gelöst werden als im Anfangsunterricht. Zweitens treten auch die mathematisch eingekleideten Aufgaben stärker in den Vordergrund. Entscheidend dafür ist, daß sich das Wissen und Können der Schüler im Verlauf des Schulbesuchs immer mehr ausweitet und zugleich vertieft. Daher können auf der Grundlage der umfangreicheren Allgemeinbildung und mathematischen Spezialbildung in den letzten Schuljahren bereits solche Aufgaben gelöst werden, zu denen die Schüler niedriger Klassen noch keinen Zugang finden. Umgekehrt besteht auf Grund der größeren Reife der Schüler auch nicht mehr die Notwendigkeit, formale Aufgaben besonders einzukleiden, um das Interesse anzuregen, den Unterricht reizvoller und ansprechender zu gestalten. Wenn ein Vierzehnjähriger noch nicht begriffen hat, weshalb und zu welchem Zweck er mathematische Verfahren erlernen und entsprechende Übungsaufgaben lösen muß, dann liegen schwerwiegende Fehler in der gesamten vorangegangenen Bildungs- und Erziehungsarbeit vor; Fehler, die nicht durch das Lösen von Sachaufgaben beseitigt werden können.

2.13 Anwendungsaufgaben

Bei **Anwendungsaufgaben** steht im Gegensatz zu den formalen und den eingekleideten Aufgaben nicht ein mathematisches Problem im Vordergrund, sondern es wird von anderen Fragestellungen ausgegangen, deren Beantwortung für die Bildung und Erziehung sozialistischer Patrioten von Wert und Bedeutung ist und mit Hilfe mathematischer Methoden erfolgt.

Die im mathematischen Fachunterricht erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten werden zum Lösen von Problemen angewendet, die nicht mehr nur als mathematische Probleme angesehen werden können. Das mathematische Wissen und Können wird genutzt für die Lösung solcher Bildungs- und Erziehungsaufgaben, die im Gesamtprozeß der sozialistischen Bildung und Erziehung gelöst werden müssen, die aber nicht unmittelbar und nicht ausschließlich durch den Mathematikunterricht, aber auch nicht ohne ihn gelöst werden können.

Beim Lösen von Anwendungsaufgaben zeigt sich somit der Anteil des Mathematikunterrichts an der sozialistischen Bildung und Erziehung besonders deutlich. Daher ist es auch kein Zufall, daß sich der Mathematikunterricht unserer Schule von dem der Schulen Westdeutschlands und anderer imperialistischer Staaten auf dem Gebiet des Lösens von Anwendungsaufgaben besonders augenscheinlich unterscheidet. Es ist für die polytechnische, die weltanschauliche, vor allem aber für die politisch-moralische Bildung und Erziehung junger Menschen von außerordentlich großer Bedeutung, mit welchen Problemkreisen sie im Mathematikunterricht mit Hilfe des Lösens von Anwendungsaufgaben bekannt gemacht werden.

Damit das Lösen von Anwendungsaufgaben den Schülern tatsächlich vertiefte Einsichten in bestimmte Verhältnisse in der Natur, der Technik und vor allem der gesellschaftlichen Praxis vermittelt, dürfen Anwendungsaufgaben nicht nur rein mathematisch gelöst und behandelt werden, sondern müssen die in ihnen enthaltenen Aussagen, insbesondere auch das gewonnene Ergebnis, gründlich und möglichst allseitig erörtert und ausgewertet werden. Nicht die Aufgabe allein, nicht der „Stoff" sichert den Erfolg der Bildungs- und Erziehungsarbeit. Wenn es schon bei eingekleideten Aufgaben, ja sogar bei manchen formalen Aufgaben nicht richtig ist, mit der Feststellung der Richtigkeit des gewonnenen Ergebnisses die im Unterricht behandelte Aufgabe als erledigt zu betrachten, so ist ein solches Verfahren beim Lösen von Anwendungsaufgaben gänzlich unzulässig. Der Hauptteil der Erziehungsarbeit vollzieht sich im allgemeinen im Anschluß an die mathematische Lösung einer Anwendungsaufgabe.

Das Lösen von Anwendungsaufgaben ist ein besonders wertvolles und geeignetes Mittel, den Mathematikunterricht eng mit dem Leben zu verbinden. An typischen Beispielen wird den Schülern beispielsweise gezeigt, wozu und wie mathematische Verfahren in der materiellen Produktion benutzt werden. Das in der Schule erworbene Wissen und Können wird auf diese Weise zum im Leben tatsächlich anwendungsfähigen Wissen und Können entwickelt. Zugleich wird es durch das Lösen einer größeren Zahl von Anwendungsaufgaben vom anwendungsfähigen zum anwendungsbereiten Wissen und Können. Erst wirklich anwendungsfähiges und anwendungsbereites mathematisches Wissen und Können rüstet den jungen Menschen dazu aus, aktiv und mit Erfolg am weiteren Aufbau des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik mitzuwirken.

Das zahlenmäßige Erfassen von Produktionsleistungen öffnet den Schülern den Blick und das Verständnis für den täglichen Kampf der Werktätigen um die Planerfüllung und -übererfüllung, für die Bedeutung der Neuererbewegung und des Produktionsaufgebotes, aber auch für die Probleme, Sorgen und Schwierigkeiten, die sich innerhalb der materiellen Produktion im Patenbetrieb, in der örtlichen LPG oder in einzelnen Industriezweigen ergeben. Gegebenenfalls können bei der Diskussion der Ergebnisse ganz bestimmte Schlußfolgerungen gezogen werden, beispielsweise für das Verhalten bei Arbeitseinsätzen. So beweisen die Vorkommnisse beim Kartoffellesen an verschiedenen Schulen recht klar, daß diejenigen Schüler, die durch das Lösen von Anwendungsaufgaben die Rolle auch der kleinen Kartoffeln für die Fütterung von Schweinen und damit wiederum für die menschliche Ernährung richtig erfaßt haben, eine vorbildliche Arbeitsmoral auf den Feldern zeigen. Hingegen verbuddeln nicht selten die Schüler, die keine entsprechenden Anwendungsaufgaben lösten und diskutierten, kleinere Kartoffeln mit dem Schuh im Feld, weil ihnen nicht klar, nicht quantitativ verständlich ist, welchen Schaden sie damit unserer Volkswirtschaft zufügen. Besonders bei Stadtkindern, die mit den Problemen der Landwirtschaft nicht genügend vertraut sind, verhilft die richtige erzieherische Nutzung geeigneter Anwendungsaufgaben vor Arbeitseinsätzen in der sozialistischen Landwirtschaft oft in überraschend starkem Maße zu einer vorbildlichen Arbeitshaltung und wird zu einem wesentlichen Beitrag zur sozialistischen Arbeitserziehung.

Durch das Lösen und Diskutieren von Anwendungsaufgaben, mit deren Hilfe eine Analyse der Entwicklung der Wirtschaft, der Kultur, der Wissenschaft, der Sozialfürsorge, der Sorge um die heranwachsende Generation usw. in den sozialistischen und in den heute noch kapitalistischen Ländern vorgenommen wird, wird den Schülern eindringlich die siegreiche Perspektive und die allseitige Überlegenheit der sozialistischen Gesellschaftsordnung gegenüber der kapitalistischen gezeigt. Damit wird nicht nur ein Beitrag für die politische Bildung der Schüler geleistet; bei richtiger erzieherischer Auswertung lernen die Schüler allmählich begreifen, daß es sich lohnt, für den Sozialismus und den Kommunismus zu kämpfen, daß es eine Pflicht eines jeden bewußten Staatsbürgers ist, sein sozialistisches Vaterland und mit ihm all die schwer und hart erkämpften Errungenschaften zu schützen und zu verteidigen, daß es eine zutiefst humanistische Aufgabe ist, sein Leben voll für das Glück und den Wohlstand der Millionen und aber Millionen Menschen der ganzen Welt einzusetzen, besonders auch für diejenigen Menschen, die heute noch in kolonialer oder halbkolonialer Abhängigkeit schmachten oder in kapitalistischen Staaten schonungslos ausgebeutet werden.

Damit das Lösen von Anwendungsaufgaben voll für die Bildung und Erziehung nutzbar gemacht werden kann, müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Beim Lösen von Anwendungsaufgaben sind den Schülern vertiefte Einsichten in bestimmte gesellschaftliche, technische oder naturwissenschaftliche Verhältnisse zu vermitteln.
2. Die Anwendungsaufgaben müssen in Problemstellung und Lösung die Realität und die Entwicklungstendenzen richtig widerspiegeln.
3. Die bei der Lösung anzuwendenden Verfahren sollten, besonders wenn es sich um technische oder naturwissenschaftliche Probleme handelt,

wenigstens im Prinzip mit den in der Praxis gebräuchlichen Verfahren übereinstimmen.

4. Umfang und Schwierigkeit der für das Verständnis des Sachverhaltes notwendigen Erklärungen sowie Zeit- und Kraftaufwand für Erläuterungen und für das Lösen der Anwendungsaufgaben müssen in ausgewogenem Verhältnis zur gesellschaftlichen Bedeutung der Probleme sowie zum mathematischen Bildungswert der Aufgaben stehen.

Im ersten Punkt werden drei große Bereiche genannt, denen die im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule zu behandelnden Anwendungsaufgaben hauptsächlich entnommen werden sollten. Wohl gibt es Bereiche der objektiven Realität, die hier nicht erfaßt werden, obwohl auch dort viele Probleme mit Hilfe mathematischer Verfahren gelöst werden. Sie sind hier deshalb nicht genannt worden, weil eine sorgfältige Überprüfung der Problemlage in diesen Bereichen — als Beispiel sei hier nur die Psychologie erwähnt — sehr schnell zu Widersprüchen mit den unter 3. und 4. erhobenen Forderungen führt. Da es sich bei den vorliegenden Untersuchungen um einen Beitrag zur Methodik des Mathematikunterrichts der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen, nicht aber spezieller Schulgattungen oder Studieneinrichtungen handelt, kann meiner Ansicht nach die im Punkt 1. ausgesprochene Einschränkung der Anwendungsbereiche um so eher akzeptiert werden, als die Gegenstandsbereiche des gesellschaftlichen Lebens, der Technik und der Naturwissenschaften außerordentlich umfangreich und vielfältig sind.

Von Bedeutung ist jedoch die Feststellung, daß meines Erachtens alle drei hier genannten Bereiche der objektiven Realität in engem Zusammenhang gesehen werden müssen. Wohl ist es nicht bei jeder einzelnen Anwendungsaufgabe möglich und oft auch gar nicht sinnvoll, Beziehungen zu allen drei Bereichen herzustellen. Beispielsweise aber sollten technische Probleme, wo irgend möglich, dazu genutzt werden, die Rolle des technisch-wissenschaftlichen Fortschritts beim Aufbau der sozialistischen und der kommunistischen Gesellschaftsordnung mit klären zu helfen, Verständnis für Probleme der Steigerung der Arbeitsproduktivität zu erzeugen, die naturwissenschaftlichen Grundlagen für den technisch-wissenschaftlichen Fortschritt herauszustellen. Es sei hier nur an folgende Worte aus dem Programm des Aufbaus des Kommunismus erinnert:

„Der Fortschritt der Wissenschaft und Technik unter den Verhältnissen des sozialistischen Wirtschaftssystems ermöglicht es, die Schätze und Kräfte der Natur am wirksamsten im Interesse des Volkes zu nutzen, neue Arten der Energie zu entdecken und neue Werkstoffe zu schaffen, Methoden der Beeinflussung der klimatischen Verhältnisse zu entwickeln und den Kosmos zu erschließen. Die Anwendung der Erkenntnisse der

Wissenschaft wird für ein mächtiges Wachstum der gesellschaftlichen Produktivkräfte zu einem entscheidenden Faktor ... Die weiteren Perspektiven des Fortschritts von Wissenschaft und Technik werden in der gegenwärtigen Periode vor allem durch die Errungenschaften der *führenden Zweige der Naturwissenschaft* bestimmt. Ein hohes Entwicklungsniveau der *Mathematik, Physik, Chemie und Biologie* ist unerläßlich für den Aufschwung und praktischen Nutzeffekt der technischen, medizinischen, landwirtschaftlichen und anderen Wissenschaften."[14]

Damit von vornherein der Blick offen ist für die vielfältige Durchdringung und wechselseitige Bedingtheit der gesellschaftlichen, technischen und naturwissenschaftlichen Probleme, wird davon abgesehen, die Anwendungsaufgaben hinsichtlich der speziellen Problemlage weiter zu klassifizieren. Wohl ist es ratsam, in den Schulbüchern, ähnlich wie bei mathematisch eingekleideten Aufgaben, bestimmte zusammenfassende Überschriften zu wählen, aber eine einseitige Behandlungs- und Deutungsweise von Anwendungsaufgaben im Unterrichtsprozeß widerspricht der Forderung nach allseitiger Bildung und Erziehung.

Leider muß gegenwärtig im Mathematikunterricht der Schulen der DDR oftmals verzeichnet werden, daß beim Lösen von Anwendungsaufgaben ungerechtfertigte Einseitigkeiten und Einengungen auftreten. Alle diese Einseitigkeiten und Einengungen sind dadurch gekennzeichnet, daß im Unterricht die Einheit von Politik und Pädagogik nicht richtig gesehen wird.

Die erste fehlerhafte Tendenz wird an den Schulen sichtbar, an denen der Mathematiklehrer versucht, der klaren und parteilichen Stellungnahme dadurch auszuweichen, daß er naturwissenschaftlich orientierte Anwendungsaufgaben in ungebührlichem Maße bevorzugt, höchstens zur Ergänzung einige technisch orientierte Anwendungsaufgaben hinzufügt, eindeutig politisch orientierte Anwendungsaufgaben aber zu vermeiden trachtet. Es bedarf an dieser Stelle keiner langen Ausführungen darüber, daß solche Lehrer den ihnen von der Gesellschaft erteilten Bildungs- und Erziehungsauftrag noch nicht verstanden haben und ihn also auch nicht realisieren.

Die zweite fehlerhafte Tendenz wurzelt oftmals in der guten Absicht, möglichst viel für die polytechnische Bildung und Erziehung der jungen Menschen zu tun. Dabei wird verkannt, daß die polytechnische Bildung und Erziehung zwar eine besonders wichtige und bedeutsame Seite der sozialistischen Bildung und Erziehung ist, daß letztere aber wesentlich mehr umfaßt. Ferner wird in solchen Fällen oft von einer zu engen Auffassung des Inhalts der polytechnischen Bildung und Erziehung ausgegangen oder

[14] Programm der Kommunistischen Partei der Sowjetunion. In: Programm und Statut der Kommunistischen Partei der Sowjetunion. Dietz Verlag, Berlin 1961, Seite 119.

es wird jede Beschäftigung mit irgendwelchen technischen Problemen als Beitrag zur polytechnischen Bildung und Erziehung gewertet. Offenbar sind die folgenden Worte aus dem Lehrplan für die erweiterte Oberschule nicht genügend bekannt und sollen daher für alle diejenigen Leser, die den Lehrplan der zwölfklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule nicht besitzen, hier wiedergegeben werden:

„Gründliches mathematisches Wissen und Können ist eine wichtige Voraussetzung und zugleich ein wesentlicher Bestandteil der polytechnischen Bildung und Erziehung... Den Schülern muß durch das Einbeziehen mathematischer Probleme aus der sozialistischen Produktion in den Unterricht die Bedeutung der Mathematik für die gesellschaftliche Entwicklung bewußt werden. Sie müssen zu der Einsicht gelangen, daß ihnen erst gründliches und anwendungsbereites mathematisches Wissen und Können ein tieferes Verständnis für einen großen Teil betriebsökonomischer und technischer Fragen ermöglicht.“[15]

Zusammen mit dem oben zitierten Auszug aus dem Programm der Kommunistischen Partei der Sowjetunion, in dem unmißverständlich die große Rolle der theoretisch-wissenschaftlichen Grundlagen für den gesellschaftlichen und technischen Fortschritt — beides gehört untrennbar zusammen — hervorgehoben wird, kann klar und unmißverständlich ausgesprochen werden, daß jegliche Form einseitiger Bevorzugung technisch orientierter Anwendungsaufgaben ebenso falsch ist wie die früher an unseren Schulen vorhandene Unterschätzung des Bildungs- und Erziehungswertes solcher Aufgaben. Technisch orientierte Anwendungsaufgaben haben im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule einen festen Platz. Sie können und dürfen nicht durch andere Formen mathematischer Schüleraufgaben ersetzt beziehungsweise verdrängt werden. Aber die gegenwärtig aus verschiedenen Gründen an manchen Schulen existierende Bevorzugung dieser Aufgaben führt zu praktizistischen Abweichungen im Mathematikunterricht.

Beim Lösen technisch orientierter Anwendungsaufgaben sollte im allgemeinen nicht die Technik allein, nicht das spezielle technische Problem für sich genommen, Gegenstand der unterrichtlichen Erörterungen sein. Vielmehr sollte einerseits auch auf die naturwissenschaftlichen Grundlagen des technischen Verfahrens eingegangen, andererseits aber vor allem der Einfluß und die Bedeutung des technisch-wissenschaftlichen Fortschritts für die schnellere Vollendung des Aufbaus des Sozialismus in der DDR am konkreten Beispiel betrachtet werden. Beim Diskutieren der Lösungen technisch orientierter Anwendungsaufgaben sollten Probleme der Steigerung der Arbeitsproduktivität in unseren volkseigenen indu-

[15] Lehrplan für die erweiterte Oberschule — Mathematik. Herausgegeben von der Regierung der Deutschen Demokratischen Republik, Ministerium für Volksbildung. Berlin 1961, Seite Ma/3.

striellen und landwirtschaftlichen Betrieben im Rahmen des umfassenden politischen und ökonomischen Kampfes um Frieden und Wohlstand in den Blickpunkt der unterrichtlichen Auswertung gerückt werden. Dann wird den Schülern an den konkreten Beispielen verständlich, inwiefern technischer und gesellschaftlicher Fortschritt untrennbar miteinander verbunden sind. Nicht das Lösen bestimmter Aufgabentypen, nicht das Studium und der Vergleich von Planziffern allein schaffen politische Überzeugungen, bewirken aus sozialistischem Bewußtsein geborene Verhaltensweisen. Das ständige Bemühen aller Lehrer, auch der Mathematiklehrer, um die Herstellung der Einheit von Politik und Pädagogik, von politischem und fachlichem Wissen und Können der Schüler ist die entscheidende Voraussetzung für die Verbesserung von Lern- und Erziehungserfolgen in der sozialistischen Schule. Das Lösen von Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht und auch im Unterricht anderer Fächer bietet dabei hervorragende Möglichkeiten. Sie gilt es voll zu nutzen.

Es soll zur Erläuterung des Punktes 1. von Seite 49 noch darauf hingewiesen werden, daß auch die Forderung, mit Hilfe des Lösens von Anwendungsaufgaben vertiefte Einsichten in bestimmte gesellschaftliche Verhältnisse zu vermitteln, nicht zu eng ausgelegt werden darf. Wohl spielen ökonomische Probleme eine wesentliche Rolle. Aber auch Fragen des kulturellen Lebens, des Militärwesens, insbesondere aber auch des Volksbildungswesens, sollten den Schülern durch das Lösen von Anwendungsaufgaben verständlich gemacht werden. Wenn die Schüler beispielsweise erkennen, welche großzügige Unterstützung in unserem Staat der Arbeiter und Bauern der heranwachsenden Generation gewährt wird, wenn sie diese Unterstützung der Kinder aller Schichten der Bevölkerung mit dem vergleichen, was in Westdeutschland die Kinder weiter Kreise der Bevölkerung entbehren müssen, wenn sie zugleich erkennen und durch quantitative Betrachtungen besser beurteilen lernen, wie die Mittel für die Volksbildung von den Werktätigen unserer Republik mühevoll erarbeitet, aber der Jugend gern gegeben werden, so kann auf diese Weise durch den Mathematikunterricht in starkem Maße dazu beigetragen werden, daß die Schüler eine bessere Lernhaltung zeigen, ein engeres Verbundenheitsgefühl zu unserem Staat bekommen und mit mehr Liebe und Achtung denjenigen gegenübertreten, die all das erkämpft und errungen haben, was heute die Jugend ihr eigen nennen darf.

Auch solche Probleme, die die Kinder ganz besonders ansprechen oder die für einige Zeit im Blickpunkt des gesellschaftlichen Interesses stehen, sollten überall dann, wenn es ohne Störung der Systematik des mathematischen Bildungsprozesses möglich ist, zum Lösen von Anwendungsaufgaben genutzt werden. Es sei nur an Probleme des Weltraumfluges, an die Friedensfahrt und andere sportliche Ereignisse, an Exkursionen, Wanderungen oder Urlaubsreisen erinnert. Abgesehen von anderen Bildungs- und Erziehungserfolgen, die mit dem Lösen solcher Anwendungsaufgaben erzielt werden können, bieten sich hier hervorragende Möglichkeiten, die Liebe zur Mathematik zu wecken. Und auch damit ist ein wichtiger Schritt in der Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen erreicht! Denn in der gegenwärtigen Epoche wird es immer deutlicher, daß schon in der sozialistischen, erst recht aber in der kommunistischen Gesellschaftsordnung die Mathematik zu einer wahren Volkswissenschaft werden muß.

Wenn im oben angegebenen Sinne das Lösen von Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht ganz bewußt, planmäßig und systematisch in den Dienst der sozialistischen Bildung und Erziehung gestellt wird, dann sind die im Punkt 2. auf Seite 49 genannten Forderungen eine unerläßliche Bedingung für den Erfolg der zu leistenden Arbeit. Die Einheit von Politik und Pädagogik, von politischem und fachlichem Wissen und Können bei allen Schülern kann nur dann hergestellt werden, wenn die den Anwendungsaufgaben zugrunde liegenden Angaben der Wirklichkeit entsprechen. Dabei ist vor allem die Entwicklung zu verdeutlichen, ist die Perspektive zu zeigen. Die politische Wirksamkeit der erzieherischen Bemühungen des Mathematiklehrers hängt davon ab, in welchem Maße er es versteht, die strenge Sachlichkeit und Nüchternheit der Mathematik zu nutzen und mit ihrer Hilfe den Schülern Zusammenhänge zu offenbaren und parteilich zu interpretieren. Große Agitationsreden des Mathematiklehrers verfehlen im allgemeinen ihre Wirkung auf die Schüler. Das „patriotische Schwänzchen" hat im Mathematikunterricht ebensowenig etwas zu suchen wie im Unterricht anderer Fächer der sozialistischen Schule. Aber der gesamte Mathematikunterricht muß so aufgebaut sein, daß er Einsichten vermittelt in politische Zusammenhänge, daß er die Perspektive deutlich zeigt, daß die bereits vollbrachten Leistungen der werktätigen Massen sowie der täglich neu zu führende Kampf um Frieden, Wohlstand und Glück aller Völker unmißverständlich sichtbar werden, daß die Objektivität der Mathematik zur bewußt genutzten höchsten Parteinahme wird.

Wenn im dritten Punkt der auf Seite 49 f. genannten Forderungen von einer prinzipiellen Übereinstimmung der Lösungsverfahren, die im Schulunterricht und in der Praxis angewendet werden, gesprochen wird, dann soll damit zum Ausdruck gebracht werden, daß der Unterricht in jeder Hinsicht eng mit dem Leben verbunden sein muß, daß keine grundsätzlichen Widersprüche zwischen Theorie und Praxis geduldet werden können. Denn schließlich muß vom Mathematikunterricht auch verlangt werden, daß in ihm den Schülern gezeigt wird, „wozu und wie mathematische Verfahren in der materiellen Produktion benutzt werden".[16]

Da im Unterricht der allgemeinbildenden Schule in keinem Fach alle in der Praxis gebräuchlichen Verfahren gelehrt werden können, ergibt sich hier eine echte pädagogische und vor allem methodische Problematik. Sollen etwa bestimmte Anwendungsbereiche, nur weil die in ihnen angewendeten Verfahren den Schülern nicht bekannt sind und — wegen der meist recht komplizierten theoretischen Grundlagen — auch nicht in wenigen Minuten oder Stunden erläutert werden können, gänzlich ausgeschlossen werden? Soll hier ein künstlicher Zaun zwischen Schule und Leben errichtet werden? Oder sollen den Schülern hier überholte, veraltete beziehungsweise gänzlich ungebräuchliche Lösungsverfahren als der Praxis entsprechende Verfahren gelehrt werden? Es ist wohl offenkundig, daß keine der hier gestellten Fragen mit „Ja" beantwortet werden darf.

Wie aber soll man sich im Mathematikunterricht verhalten, wenn in der Praxis andere Lösungsverfahren gebräuchlich sind, als dem Schüler bekannt und geläufig sind? Eine erste Antwort wird in der Formulierung der Bedingung 3. auf Seite 49 f. gegeben. Es wird keineswegs die vollständige Übereinstimmung der Verfahren gefordert, sondern nur ihre prinzipielle Gleichheit. Um den Schülern das Grundsätzliche beispielsweise aus der Vermessungstechnik zu erläutern, ist es nicht notwendig, daß mit Theodoliten gearbeitet wird. Es genügt durchaus, wenn die Schüler das Abstecken von Standlinien mittels Fluchtstäben erlernen und das Messen von Streckenlängen und von Winkeln mit solchen Geräten ausführen, die eine befriedigende Genauigkeit ergeben.

Selbst wenn das in der Praxis gebräuchliche Verfahren auch nicht im Prinzip anwendbar ist, so besteht noch immer nicht die Notwendigkeit, überhaupt keine mathematischen Aufgaben aus dem betreffenden Bereich zu lösen. Nur muß dann den Schülern gegenüber offen und klar ausgesprochen werden, daß in der Praxis andere Verfahren gebräuchlich sind. Es muß begründet werden, weshalb in der Schule mit anderen Verfahren gearbeitet werden muß. Dabei treten stets zwei Gesichtspunkte auf. Einmal muß den Schülern gesagt werden, weshalb ihnen trotzdem der betreffende Anwendungsbereich durch das Lösen mathematischer Aufgaben erschlossen werden soll. Zum anderen muß die Begrenztheit des Wissens und Könnens verdeutlicht werden.

Aufgaben solcher Art erfüllen nicht alle an eine echte Anwendungsaufgabe zu stellenden Bedingungen. Für sie jedoch eine neue Begriffsbildung zu wählen, ist unrationell. Es wird daher vorgeschlagen, solche Aufgaben als Übergangstyp von den sachgebunden eingekleideten Aufgaben zu den Anwendungsaufgaben anzusehen. Denn auch bei Sachaufgaben wurde die Forderung nach richtiger Widerspiegelung der

[16] Ebenda.

Realität erhoben. Es wurde ferner gefordert, daß der Sachverhalt für die Schüler im Wesentlichen klar und verständlich sein muß. Da aber zusätzlich neue, vertiefte Einsichten vermittelt werden sollen, gehen Aufgaben der eben beschriebenen Art doch über die bloßen Sachaufgaben hinaus.

Der an vierter Stelle auf Seite 50 genannte Punkt scheint vielleicht so klar und selbstverständlich zu sein, daß er von manchem Leser als überflüssig angesehen werden mag. Leider aber geschieht es im Unterricht nicht selten, daß Aufgaben gelöst werden, bei denen Aufwand und Ergebnis in keinem erträglichen Verhältnis stehen. Insbesondere werden oft technisch orientierte Aufgaben gelöst, bei denen die notwendigen Begriffs- und Sacherklärungen ein Vielfaches der Zeit kosten, die für das Lösen des mathematisch einfachen Problems aufzuwenden ist. Ja, es kommt sogar vor, daß in oberen Klassen Aufgaben gelöst werden, deren mathematischer Gehalt ohne Schwierigkeit von Schülern der Unterstufe bewältigt werden könnte. Wenn der technische Gehalt ebenfalls nicht von *besonderer* Bedeutung ist, so muß ganz klar gesagt werden, daß solche Aufgaben nicht in den Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule gehören.

Wenn die zugrunde liegenden technischen Probleme dem Schüler völlig fremd sind, so kann es nicht Aufgabe des Mathematikunterrichts sein, hier die Klärung herbeizuführen. Vielmehr gilt es, Anwendungsaufgaben zu lösen, für die aus der Erfahrung in der örtlichen Industrie oder Landwirtschaft das notwendige technische Grundwissen bereits erworben werden konnte. Nicht jede im Lehrbuch enthaltene Anwendungsaufgabe ist für jede Klasse geeignet. Die örtlichen Verhältnisse spielen gerade beim Lösen von Anwendungsaufgaben eine bedeutende Rolle. Speziell bei technisch orientierten Anwendungsaufgaben ist es nahezu unmöglich, allein durch das Lehrbuch das notwendige Aufgabenmaterial zur Verfügung zu stellen. Der Mathematiklehrer muß unter Ausnutzung der besonderen Kenntnisse, die sich die Schüler am UTP und in der örtlich stark verbreiteten Art der materiellen Produktion erwerben können, in enger Verbindung mit den Betreuern und den Ingenieuren und Facharbeitern geeignete Aufgaben selbst zusammenstellen.

Das hier für den technischen Bereich ausgeführte Problem spielt in allen anderen Bereichen die gleiche Rolle, tritt dort nur nicht so gehäuft in Erscheinung.

Außer dem Zeitaufwand für Begriffs- und Sacherklärungen ist im Punkt 4. auf Seite 50 der Zeit- und Kraftaufwand für das Lösen der mathematischen Aufgabe genannt. Damit soll in der Hauptsache auf zu umfangreiche numerische Berechnungen beziehungsweise geometrische Konstruktionen hingewiesen werden. In Verbindung mit den Forderungen aus Punkt 3. ist es durchaus zulässig, geeignete Vereinfachungen in den

Zahlbeziehungen oder den Lageverhältnissen vorzunehmen. Vor allem muß stets auf sinnvolles Runden bei längeren Berechnungen geachtet werden.

Wenn im Punkt 4. von einem „ausgewogenen Verhältnis zur gesellschaftlichen Bedeutung des Problems“ gesprochen wird, so ist damit das entscheidende Kriterium genannt. Wenn es im Verfolg ganz bestimmter Bildungs- und Erziehungsabsichten notwendig wird, umfangreichere Sacherklärungen zu geben, längere Rechnungen auszuführen, zeit- und kraftraubende Konstruktionen anzufertigen, dann ist das durchaus vertretbar. Aber der Lehrer muß sehr sorgfältig prüfen, ob gleichartige Bildungs- und Erziehungserfolge nicht auch auf anderem Wege erreicht werden können. Entscheidend sind also die Bildungs- und Erziehungsabsichten. Es sollten nur solche komplizierteren Aufgaben gelöst werden, mit deren Hilfe tatsächlich ein Beitrag für die sozialistische Bildung und Erziehung geleistet wird.

Insgesamt stellen richtig ausgewählte und sorgfältig zusammengestellte Anwendungsaufgaben ein unschätzbares Mittel für die Verbesserung der Bildungs- und Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule dar. Jedoch müssen sie in richtigen Proportionen mit formalen und eingekleideten Aufgaben im Unterricht verwendet werden; sie sind *ein Mittel, nicht das Ziel* der Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht.

2.2 Zur didaktischen Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben

Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben tritt im Unterricht in vielfältiger Art und Weise in Erscheinung. Das Lösen mancher Aufgaben dient der Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse oder Erkenntnisse, das Lösen anderer Aufgaben erfolgt unmittelbar in Zusammenhang mit dem Erwerb neuen Wissens. Bestimmte Aufgaben werden zu Übungs- oder Wiederholungszwecken gelöst. Weitere Aufgaben finden im Unterricht Verwendung, weil mit ihrer Hilfe das mathematische Wissen und Können der Schüler zu anwendungsbereitem Wissen und Können entwickelt werden soll. Es gibt kaum einen Bereich im gesamten Bildungs- und Erziehungsprozeß innerhalb des Mathematikunterrichts, in dem das Lösen mathematischer Schüleraufgaben keine Rolle spielt. Das kompliziert einerseits die didaktische Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben außerordentlich, macht sie aber anderseits dringend notwendig.

Nach den von mir durchgeführten Untersuchungen scheint es keine Aufgaben zu geben, die so charakteristische Merkmale tragen, daß sie prinzipiell nur bei der Vorbereitung des Wissenserwerbs, beim Erwerb neuen Wissens selbst, bei der Entwicklung bestimmter mathematisch bedeutsamer Fähigkeiten oder Fertigkeiten, bei der Festigung erworbenen Wissens und Könnens, bei der Anwendung der mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten oder in irgendeinem anderen Unterrichtsabschnitt verwendet werden könnten. Es erscheint mir daher ratsam, die didaktische Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben nicht nach den Aufgaben selbst, sondern nach der Funktion, die sie im Bildungs- und Erziehungsprozeß haben, vorzunehmen.

Wohl durchdringen sich im Bildungs- und Erziehungsprozeß Erwerb, Festigung und Anwendung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ständig; dennoch ist es für die didaktische Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben notwendig, bestimmte Bereiche relativ isoliert zu betrachten. Damit wird keineswegs der Versuch unternommen, an gewisse in der bürgerlichen Didaktik übliche „Formalstufentheorien", zum Beispiel im Sinne der Herbartschen Schule, anzuknüpfen. In den folgenden Ausführungen wird deutlich gezeigt werden, daß sich die hier aus methodologischen Gründen getrennt behandelten Abschnitte des einheitlichen Unterrichtsprozesses um so mehr wechselseitig durchdringen und fördern, je geeigneter und methodisch durchdachter die Auswahl der zu lösenden mathematischen Schüleraufgaben erfolgt.

Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben soll im folgenden betrachtet werden im Zusammenhang mit:

erstens der **Vorbereitung** *des Erwerbs neuer Kenntnisse,*
zweitens dem **Erwerb** *neuer Kenntnisse selbst,*
drittens der **Festigung** *des erworbenen Wissens und Könnens,*
viertens der **Anwendung** *des erworbenen Wissens und Könnens.*

2.21 Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben bei der Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse

Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben spielt bei der Vorbereitung auf den Erwerb neuer Kenntnisse und Erkenntnisse in dreifacher Hinsicht eine bedeutende Rolle:

a) für die *Motivation,*
b) für die *Bereitstellung notwendiger Voraussetzungen,*
c) für die direkte *Hinleitung zur neuen Erkenntnis.*

Zu a:

Es ist ein Wesenszug der sozialistischen Pädagogik, die Schüler zum bewußten Lernen anzuleiten. Dabei spielt eine bedeutende Rolle, in welchem Maße die Schüler einsehen, daß es notwendig ist, diese oder jene Einzelheit zu erlernen. Es genügt nicht, wenn die Schüler prinzipiell begriffen haben, daß es ihre wichtigste gesellschaftliche Pflicht ist, sich durch intensives Lernen auf ihre spätere aktive Mitarbeit in der sozialistischen beziehungsweise kommunistischen Gesellschaft vorzubereiten. Nicht nur eine im Grundsätzlichen positive Lernhaltung der Schüler ist vonnöten; die Schüler müssen auch im Einzelfall von vornherein wissen, worum es bei der demnächst zu leistenden Lernarbeit geht. Es sei nur nebenbei bemerkt, daß das ständige Wissen um die Einzelziele wesentlich dazu beiträgt, auch im Grundsätzlichen zu einer vorbildlichen Lernhaltung zu gelangen.

Das Lösen geeigneter mathematischer Schüleraufgaben ist ein wesentliches Mittel, den Lernwillen der Schüler mit Hilfe sachbedingter Motivationen zu entfachen. Zugleich hilft es damit, zu enge und pädagogisch ungeeignete Motivationen für die Lernarbeit bei den Schülern überwinden.

Zwei Arten der Motivbildung können bei der Verwendung mathematischer Schüleraufgaben unterschieden werden. Im ersten Fall werden außermathematische, im zweiten innermathematische Probleme in den Mittelpunkt gestellt.

Im ersten Fall wird das Interesse der Schüler an einem Problem aus dem täglichen Leben, aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht oder dem Unterricht in anderen Fächern, aus der Technik, aus dem Wirtschaftsleben, aus dem politischen Geschehen oder aus irgendeinem anderen Bereich von Natur und Gesellschaft geweckt. Es wird nachgewiesen, daß zur Lösung des Problems bestimmte mathematische Kenntnisse notwendig sind. Daran anknüpfend wird begonnen, die zur Lösung des gestellten Problems notwendigen mathematischen Kenntnisse zu erarbeiten.

Es ist offenkundig, daß in diesem Fall in erster Linie Anwendungsaufgaben, aber auch bestimmte Sachaufgaben den Schülern zum Lösen vorzulegen sind. Um geeignete Anwendungsgebiete beziehungsweise Sachgebiete auswählen zu können, ist es für den Mathematiklehrer wichtig, daß er die Interessen und Neigungen seiner Schüler sehr genau kennt. Denn es ist keineswegs so, daß ein und dieselbe Anwendungsbeziehungsweise Sachaufgabe bei allen Schülern einer bestimmten Altersstufe zur Motivation künftiger Lerntätigkeit geeignet ist. In dieser Hinsicht sollte sorgfältig geprüft werden, ob es tatsächlich sinnvoll ist, in den Lehrbüchern für alle größeren Unterrichtsabschnitte ein einheitliches Einführungsproblem zu erörtern.

So wertvoll manche Motivationen mit Hilfe von Anwendungs- oder Sachaufgaben sind, so müssen doch auch deutlich die Grenzen ihrer Verwendungsmöglichkeit dargelegt werden. Erstens kann bei ständig gleichbleibender Motivation mit Hilfe von Anwendungs- oder Sachaufgaben eine utilitaristische Betrachtungsweise der Mathematik erzeugt werden. Die Schüler lernen schließlich nur noch, wenn sie die unmittelbare

Nützlichkeit des zu Lernenden direkt und unmittelbar erkennen. Das ist gerade bei der Mathematik, einer der abstraktesten Wissenschaften überhaupt, außerordentlich bedenklich. Zweitens können die am Anfang gestellten Anwendungsaufgaben oder Sachaufgaben meist nicht direkt im Anschluß an ein oder zwei Einführungsbeispiele gelöst werden. Wenn tatsächlich das Interesse der Schüler durch konkrete Problemstellungen geweckt werden soll, so sind diese Problemstellungen meist so komplexer Natur, daß es längere Zeit währt, bis zur vollständigen Lösung geschritten werden kann. Auf jeden Fall muß aber innerhalb des gesamten Unterrichtsabschnittes das Einführungsbeispiel voll gelöst werden.

Die eben genannten Schwächen haften den Motivationen mit Hilfe innermathematischer Problemstellungen im allgemeinen nicht an. Sie deshalb grundsätzlich gegenüber den Motivationen mit Hilfe des Lösens von Anwendungs- oder Sachaufgaben zu bevorzugen, wäre falsch, ebenso falsch wie die Scheu davor, sie überhaupt zur Einführung zu benutzen.

Zur innermathematischen Motivation des Erwerbs neuer Kenntnisse geeignete mathematische Schüleraufgaben sind im allgemeinen formale Aufgaben oder mathematisch eingekleidete Aufgaben. Dabei können die Aufgaben so ausgewählt werden, daß analog zum eben behandelten Fall das mathematische Problem als reizvoll und interessant erscheint. Es kann aber auch im Zuge systematischer mathematischer Untersuchungen den Schülern klarwerden, in welcher Richtung ihre Kenntnisse der Vervollkommnung bedürfen.

Offenbar ist der zuletzt genannte Fall wesentlich anders gelagert als alle zuvor betrachteten Fälle. Es geht dabei im allgemeinen nämlich nicht mehr um das Wecken eines meist recht kurzlebigen Interesses für ein außer- oder innermathematisches Problem, sondern es handelt sich hierbei um die Ausnutzung bereits vorhandenen Lernwillens und schon existierenden Interesses an mathematischen Problemstellungen. Es ist also keineswegs in jeder Klasse sinnvoll, in dieser Form das Erlernen neuer mathematischer Regeln, Sätze, Formeln, Verfahren usw. begründen zu wollen. Es muß jedoch als ein Ziel der Bildungs- und Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht angesehen werden, die Schüler dahin zu führen, daß sie aus Interesse an der Mathematik selbst und aus grundsätzlicher Einsicht in die Rolle der Mathematik in nahezu allen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens hohe Lernleistungen im Mathematikunterricht vollbringen. Wenn dieses Bildungs- und Erziehungsziel nicht erreicht wird, so wird es kaum in absehbarer Zeit möglich sein, die Mathematik auch in der DDR zur Volkswissenschaft werden zu lassen.

Bei innermathematischen Motivationen für die kommende Lernarbeit sollte darauf geachtet werden, daß die Einführungsbeispiele leicht lösbar sind beziehungsweise die Lösung übersichtlich und vom Schüler ohne Schwierigkeiten zu durchschauen ist. Damit leitet die Motivation des

Kenntniserwerbs in vielen Fällen direkt zum Kenntniserwerb über. Eine Bemerkung erscheint an dieser Stelle noch angebracht. Auf Seite 40 wurde begründet, weshalb Bezeichnungen wie „Denkaufgabe“, „Problemaufgabe“, „Knobelaufgabe“, „Rätselaufgabe“ usw. nicht gebraucht werden sollten. Mit der Ablehnung dieser Begriffe ist jedoch keineswegs eine prinzipielle Ablehnung des Denksports, des Knobelns oder des Rätselratens verbunden. Speziell bei der innermathematischen Motivation des kommenden Lernprozesses ist es sehr zu begrüßen, wenn durch solche Verfahren, die im allgemeinen auch für die Entwicklung des Denkvermögens von Wert sind, die Freude am Lösen mathematischer Probleme geweckt wird. Es ist durchaus angebracht, den Schülern ab und zu eine komplizierte Textaufgabe oder eine mathematisch eingekleidete Aufgabe zur Lösung vorzulegen, die mit den bis dahin den Schülern bekannten mathematischen Lösungsverfahren noch nicht gelöst, wohl aber mit Hilfe einiger allgemeiner Überlegungen bewältigt werden kann. Es ist für die Schüler meist sehr reizvoll, im Anschluß an eine solche anstrengende Knobelei ein mathematisches Verfahren kennenzulernen, mit dessen Hilfe solche und viele weitere Probleme ohne große Mühe gelöst werden können.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zwar alle Arten von mathematischen Schüleraufgaben — formale Aufgaben, eingekleidete Aufgaben und Anwendungsaufgaben — in den Dienst der Motivation des Erwerbs neuer Kenntnisse gestellt werden können, daß jedoch die Benutzung eines jeden Aufgabentyps besonderen Bedingungen unterliegt und auch unterschiedliche Bildungs- und Erziehungserfolge mit sich bringt. Jede einseitige Bevorzugung einer bestimmten Aufgabenart ist somit abzulehnen.

Zu b:

Der Erfolg selbsttätiger Bemühungen von Schülern beim Lösen eines für sie neuen Problems, ganz gleich, ob es sich dabei um ein mathematisches Problem handelt oder nicht, hängt wesentlich davon ab, in welchem Maße alle Voraussetzungen für den Erfolg der Lösungsversuche geschaffen werden. Insbesondere ist es unerläßlich, daß die Schüler auch tatsächlich alle zum Lösen notwendigen Arbeitsmittel besitzen und über alle erforderlichen Arbeitstechniken verfügen. Daher ist jeder tüchtige Lehrer bestrebt, zu Beginn der Erarbeitung neuer Lehrstoffe das dazu benötigte Wissen und Können der Schüler möglichst umfassend zu reaktivieren. Neben anderen Formen der Wiederholung hat sich im Mathematikunterricht dabei auch das Lösen bestimmter mathematischer Schüleraufgaben bewährt.

Je nach dem besonderen Zweck der Wiederholung werden durch das Lösen wohlausgewählter Aufgaben bestimmte Regeln, Lehrsätze, Formeln, Verfahren oder ähnliches erneut ins Gedächtnis gerufen, werden bestimmte Rechengänge, Konstruktionen, Umformungen usw. geübt oder werden Zusammenhänge und Beziehungen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verdeutlicht. Es ist aber auch möglich, daß bestimmte physikalische, technische oder sonstige Gesetze wiederholt oder geklärt werden müssen. Diejenigen Aufgaben, die in der Wiederholung in erster Linie der Auffrischung mathematischen Wissens und Könnens der Schüler dienen, sollten stets völlig durchsichtig sein, das heißt, sie sollten von allen Umrankungen und jeglichem schmückenden Beiwerk freigehalten werden. Formale Aufgaben mit übersichtlichen Zahlen- und Lagebeziehungen sind somit am besten geeignet.

Die Forderung nach Klarheit und Übersichtlichkeit in Problemstellung und Lösung darf nicht verwechselt werden mit inhaltlicher Einfachheit. Wenn beispielsweise das Lösen quadratischer Bestimmungsgleichungen wiederholt werden soll, damit die Schüler bei der Durchführung von Kurvendiskussionen keine zusätzlichen Schwierigkeiten beim Aufsuchen der Abszissen der Extrema haben, so sind keineswegs nur rein quadratische Bestimmungsgleichungen zu wiederholen. Es genügt auch nicht, gemischt quadratische Bestimmungsgleichungen mit ganzzahligen Lösungen lösen zu lassen. Aber es wäre verfehlt, Bestimmungsgleichungen zu wählen, die erst durch komplizierte Umformungen — zum Beispiel Beseitigung von Klammern oder Bruchausdrücken — auf die Normalform gebracht werden müssen.

Wenn im Unterricht in der darstellenden Geometrie beispielsweise ebene Schnitte durch einfache Körper besprochen werden sollen, so ist es durchaus angebracht, die Bestimmung der wahren Größe einer Strecke als Vorbereitung auf das Neue zu wiederholen. Dabei genügt es aber wiederum nicht, wenn nur Konstruktionsaufgaben gelöst werden, in denen die Strecken in Front- oder Tiefenlage gegeben sind. Es sollten vielmehr in erster Linie allgemeine Lagen der Strecken zu den Bildtafeln gewählt werden; jedoch nur solche, daß die zugehörigen Konstruktionen klar und übersichtlich ausfallen und alle Konstruktionsschritte deutlich zu erkennen sind.

In den meisten Fällen sollten also im Rahmen der Wiederholung solche mathematischen Schüleraufgaben zur Bereitstellung notwendiger Voraussetzungen für den Erwerb neuen Wissens und Könnens genutzt werden, in denen das Grundsätzliche von den Schülern leicht erneut erkannt werden kann. Es ist empfehlenswert, wenn sich jeder Lehrer eine kleine Sammlung mathematischer Schüleraufgaben anlegt, in der die für die Wiederholung besonders geeigneten Aufgaben gekennzeichnet sind. Diese Sammlung kann, wie die Erfahrung lehrt, ohne Schwierigkeiten parallel zur laufenden Unterrichtsvorbereitung entwickelt werden. Ohne eine solche Aufgabensammlung ist es im allgemeinen sehr schwer, ein für eine bestimmte Wiederholung besonders geeignetes System mathematischer Schüleraufgaben zusammenzustellen. Denn an eine gute und umfassende Wiederholung zum Zwecke der Vorbereitung auf das Neue ist noch eine weitere wesentliche Forderung zu stellen: Die Schüler müssen beim Lösen einiger weniger Aufgaben wieder hinreichende Sicherheit im Lösen der entsprechenden Aufgabentypen erlangen und zugleich einen ausreichenden Überblick über die verschiedenen Lösungsfälle und -bedingungen gewinnen. Mit Hilfe der Gesamtheit der gelösten Aufgaben müssen die Schüler das früher Erlernte erneut so systematisieren, daß sie das Grundsätzliche und das Spezielle, das Allgemeine und das Besondere wieder voll erfassen.

So sind in den oben angeführten Beispielen durchaus auch Lösungen rein quadratischer Bestimmungsgleichungen als Spezialfälle zu wiederholen, sind Strecken in Front- oder Tiefenlage zu betrachten. Aber diese Fälle, die bei der Einführung am Anfang standen und für einige Zeit den Hauptinhalt des Unterrichts ausmachten, treten jetzt nur am Rande auf, werden als Spezialisierungen des Allgemeingültigen erkannt und behandelt.

Gerade die zuletzt angestellte Betrachtung zeigt deutlich, daß es nicht sinnvoll ist, einzelne Aufgaben als sogenannte Wiederholungsaufgaben zu klassifizieren.

Wohl ist an die mathematischen Schüleraufgaben, die in einer Wiederholung für die Bereitstellung notwendiger Voraussetzungen für den weiterführenden Unterricht genutzt werden sollen, die Forderung zu stellen, daß sie als Gesamtheit relativ vollständig sind, dem Schüler also einen hinreichenden Überblick vermitteln und völlige Klarheit über das Grundsätzliche schaffen. Wohl muß jede einzelne Aufgabe des in der Wiederholung benutzten Aufgabensystems für sich klar und übersichtlich sein und Typisches zeigen. Aber es kann nicht davon gesprochen werden, daß eine einzelne Aufgabe eine typische Wiederholungsaufgabe sei. Es kann höchstens auf Grund besonders klarer Zahlen- oder Lagebeziehungen festgestellt werden, daß eine bestimmte Aufgabe unter anderem gut im Rahmen einer Wiederholung benutzt werden könnte.

Zu c:

Häufig werden die Schüler nur bei der Festigung und der Anwendung bereits erworbenen Wissens und Könnens zu selbständiger Arbeit angeregt. Von mindestens gleicher Bedeutung ist jedoch das weitgehend selbsttätige und selbständige Aufsuchen und Gewinnen neuer Erkenntnisse durch die Schüler. Auch hier ist das Lösen bestimmter mathematischer Schüleraufgaben eine wichtige methodische Hilfe.

Wenn beispielsweise Schüler in einem beliebigen Dreieck die Mittelsenkrechten konstruieren, so kann die Lösung dieser Konstruktionsaufgabe in vielfacher Hinsicht für den weiteren Unterricht genutzt werden. Erstens vermag der Lehrer zu erkennen, ob alle Schüler die geometrischen Grundkonstruktionen des Halbierens einer Strecke und des Errichtens einer Senkrechten zu einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkt sicher beherrschen. Für die Schüler stellt die Lösung dieser Aufgabe zugleich eine entsprechende Wiederholung und Übung der genannten Grundkonstruktionen dar. Zweitens ist es beim Lösen dieser mathematisch eingekleideten Konstruktionsaufgabe notwendig, daß die Schüler sich volle Klarheit darüber verschaffen, was es bedeutet, wenn gesagt wird, daß eine Gerade senkrecht auf einer anderen steht. Denn die drei Dreieckseiten verlaufen ja nicht alle parallel zu den Rändern des Heftes oder Zeichenblattes; mindestens eine Dreieckseite verläuft „schräg" über das Blatt. Schon hierdurch kann das Lösen der mathematischen Schüleraufgabe zu einer direkten Hinleitung zu einer tieferen Erkenntnis über den Begriff der Orthogonalität zweier Geraden werden. Drittens wird, wenn jeder Schüler unabhängig vom anderen konstruiert, sehr schnell in der Klasse die Frage auftauchen, ob sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks stets in einem gemeinsamen Punkte schneiden. Die Schüler haben beim Lösen einer mathematischen Schüleraufgabe eine kleine „Entdeckung" gemacht, haben selbständig ein für sie interessantes Problem gefunden. Die weitere Diskussion der Lösung der gestellten mathematischen Schüleraufgabe führt direkt hin zur Umkreiskonstruktion am Dreieck. Das Lösen ein und derselben Aufgabe dient in dem geschilderten Fall also der Kontrolle der Schülerleistungen, der Übung bestimmter Grundkonstruktionen, der Vertiefung und Klärung wesentlicher mathematischer Grundbegriffe und der direkten Hinleitung zu neuen mathematischen Erkenntnissen der Schüler.

Abgesehen von der unter a) erwähnten Motivation des Lernens im folgenden Unterrichtsabschnitt, dient das systematische Nutzen selbständiger Schülerleistungen für den weitgehend selbsttätigen Erwerb neuen Wissens in hohem Grade der Denkerziehung. Es ist hinreichend bekannt, daß das mathematische Denken vieler Schüler gegenwärtig nicht befriedigt. Das empirische Entdecken mathematischer Zusammenhänge mit Hilfe des Lösens mathematischer Schüleraufgaben ist ein wertvolles Mittel zur Steigerung der Denkleistungen der Schüler. Daher sollten mathematische Schüleraufgaben künftig in stärkerem Maße bereits bei der Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse genutzt werden.

Damit mathematische Schüleraufgaben den eben geschilderten Zweck erfüllen, ist es vor allem wichtig, daß die Lösung und gegebenenfalls auch der Lösungsweg einer jeden Aufgabe eingehend diskutiert werden. Die entsprechenden Forderungen aus Abschnitt 2.1 erscheinen hier in neuer, für die methodische Gestaltung des Unterrichts bedeutsamer Sicht. Nicht die Fülle der gelösten Aufgaben bestimmt maßgeblich den

Bildungs- und Erziehungserfolg, sondern Intensität und Gründlichkeit der Behandlung einer jeden einzelnen mathematischen Schüleraufgabe und ihrer Lösung sind ausschlaggebend.

Bei der Diskussion der Lösung einer mathematischen Schüleraufgabe sollten auch mögliche Spezialisierungen oder Verallgemeinerungen beachtet werden. Damit werden den Schülern oftmals Wege zu weiteren neuen Erkenntnissen gebahnt. Wenn beispielsweise im Anschluß an die oben betrachtete Konstruktionsaufgabe gefordert wird, die Mittelsenkrechten eines rechtwinkligen Dreiecks zu konstruieren, so werden die Schüler erstens darauf hingewiesen, daß der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten in diesem speziellen Fall stets im Hypotenusenmittelpunkt liegt. Die Schüler werden dann sicher auch sehr bald feststellen, daß bei stumpfwinkligen Dreiecken der gesuchte Schnittpunkt außerhalb des Dreiecks liegt. Zugleich aber wird, ohne den Satz des Thales als Spezialfall des Peripheriewinkelsatzes gewinnen zu müssen, die für viele Dreieckkonstruktionen wichtige Erkenntnis erarbeitet, daß die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks stets mit einem Durchmesser des zugehörigen Umkreises zusammenfällt.

Man wende an dieser Stelle nicht ein, daß für solche und ähnliche Erörterungen im Unterricht keine Zeit wäre. Umgekehrt ist es! Der Lehrer, der sich für die intensive mathematische Durchdringung einer jeden Aufgabe nicht genügend Zeit nimmt, weil er möglichst viele Aufgaben lösen lassen will, lehrt die Schüler nicht das Grundsätzliche in den verschiedenen Aufgaben erkennen. Jede Aufgabe ist dann, auch wenn sie ein dem Schüler altbekanntes Problem enthält, völlig „neu". Werden hingegen Lösungen und Lösungsverfahren einer jeden Aufgabe gründlich durchleuchtet, so treten den Schülern im Laufe der Zeit immer mehr „gute, alte Bekannte" entgegen. Die Schüler gewinnen an Sicherheit, weil sie immer wieder auf bereits Gelöstes stoßen.

Das hier an einem Beispiel aus dem Geometrieunterricht Ausgeführte hat in allen Bereichen des Mathematikunterrichts Gültigkeit. Man denke beispielsweise an die Behandlung der binomischen Formeln. Jeder erfahrene Lehrer läßt diese Formeln von Schülern selbständig herleiten, indem er entsprechende zweigliedrige algebraische Summen multiplizieren läßt. Im Trigonometrieunterricht werden die Schüler zur Herleitung des Sinussatzes veranlaßt, wenn sie erkannt haben, daß durch zeitweilige Beachtung von Hilfsstücken – hier der Höhe – das für beliebige Dreiecke noch nicht gelöste Problem sofort lösbar wird, da es auf diese Weise auf ein Problem im rechtwinkligen Dreieck zurückgeführt wird. Natürlich müssen der Herleitung des Sinussatzes einige Aufgaben vorangehen, in denen die Zerlegung eines Dreiecks in zwei rechtwinklige Teildreiecke als zweckmäßige Lösungsmethode deutlich wird, beispielsweise bei Berechnungen im gleichschenkligen Dreieck.

Allen besprochenen Beispielen ist gemeinsam, daß bei der Wiederholung und Übung von Bekanntem neue Erkenntnisse angebahnt oder, wie das bei Herleitungen der Fall ist, direkt gewonnen werden. Es kommt also darauf an, zu Beginn eines neuen Unterrichtsabschnittes solche mathematischen Schüleraufgaben lösen zu lassen, die möglichst vielseitig der Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse dienen. Insbesondere sollte mehr darauf geachtet werden, ob und in welcher Form die Motivation, das Bereitstellen der notwendigen Voraussetzungen für die Erarbeitung und die direkte Hinleitung zur neuen Erkenntnis durch das weitgehend selbständige Lösen von mathematischen Schüleraufgaben bewirkt werden können. In einzelnen Fällen wird es sogar möglich sein, durch das Lösen einer charakteristischen Aufgabe alle genannten didaktischen Zielsetzungen zugleich zu erreichen. Als besonders geeignet in dieser Hinsicht erweisen sich mathematisch eingekleidete Aufgaben von der Art, wie sie am Beispiel der Konstruktion der Mittelsenkrechten eines Dreiecks erläutert wurde.

2.22 Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben beim Erwerb neuer Kenntnisse

Bereits im Abschnitt 2.21/c) war es nicht mehr möglich, zwischen der Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse und dem Prozeß des Kenntniserwerbs selbst genau zu unterscheiden. Vielmehr wurde als günstig herausgestellt, den Unterricht so zu gestalten, daß durch das Lösen bestimmter mathematischer Schüleraufgaben Kontrolle, Wiederholung, Festigung und Vertiefung, Hinführung und Gewinnung neuer Erkenntnisse möglichst weitgehend verschmelzen.

Im Verlauf des Unterrichtsprozesses tritt aber dann stets eine Phase auf, in der das neu erworbene Wissen, das bei den einzelnen Schülern von verschiedener Klarheit ist, systematisch und planmäßig zum sicheren Wissensschatz aller Schüler gemacht werden muß. Diffuses Wissen, Halbwissen, eine gewisse Ahnung ohne volle Einsicht in die zugrunde liegenden Beziehungen dürfen niemals zum Dauerzustand werden, weder bei einzelnen Schülern noch bei einer ganzen Klasse.

Auch in dieser Phase des Unterrichts ist es zweckmäßig, die Selbsttätigkeit der Schüler in starkem Maße zu beanspruchen. Schon aus diesem Grunde ist das weitgehend selbständige Lösen mathematischer Schüleraufgaben wieder ein vorzügliches methodisches Hilfsmittel, dessen sich der Lehrer bewußt bedienen sollte. Aber es bedarf dabei seitens des Lehrers sehr sorgfältiger methodischer Vorbereitung auf den Unterricht. Denn nicht jede Aufgabe, und mag sie fürs erste auch noch so einfach erscheinen, ist als *Beispielaufgabe* beim Erwerb neuer Kenntnisse geeignet.

Eine Beispielaufgabe muß erstens so schwierig sein, daß der Schüler nicht auf andere als die zu erarbeitende Art und Weise schnell die Lösung finden kann.

Sie muß zweitens so einfach, klar und übersichtlich sein, daß der Schüler das zu lösende Problem sofort erkennt und die gesamte Aufgabe überschaut.

Drittens muß das Lösungsverfahren einerseits alles Grundsätzliche des allgemeinen mathematischen Verfahrens zeigen, andererseits aber keine zusätzlichen Erschwernisse in sich bergen.

Viertens muß die Lösung einsichtig und für den Schüler auf anderem Wege nachprüfbar sein.

Fünftens müssen Aufgabe, Lösungsverfahren und Lösung eine insgesamt für den lernenden Schüler überblickbare Einheit bilden.

Wenn nicht gerade das Aufstellen der mathematischen Beziehungen aus praktischen Sachverhalten beziehungsweise das Lösen von eingekleideten Aufgaben oder von Anwendungsaufgaben gelehrt werden sollen, wenn also allgemeingültige mathematische Verfahren (Rechnen, Bestimmen, Konstruieren, Beweisen), von Schülern erlernt werden sollen, so kommen als Beispielaufgaben nur formale Aufgaben in Betracht.

Am Beispiel der Gleichungslehre soll gezeigt werden, wie sorgfältig der Lehrer bei der Auswahl und Anordnung von Beispielaufgaben vorgehen muß. Um lineare Bestimmungsgleichungen lösen zu lernen, muß der Schüler erfassen, wie er die Unbekannte x isoliert, wenn sie verknüpft ist:

a) multiplikativ mit einer ganzzahlig gegebenen Konstanten: $13x = 182$;

b) multiplikativ mit einer in Bruchform gegebenen Konstanten: $\frac{4}{5}x = 72$;

c) additiv (substraktiv) mit einer gegebenen Konstanten: $x \pm 53 = 117$;

d) multiplikativ und additiv mit gegebenen Konstanten: $7x + 22 = 99$;

e) mit Konstanten und auf einer Gleichungsseite mehrmals auftritt: $3x + 5 - 2x = 8$;

f) ebenso, jedoch so, daß beim Zusammenfassen ein Vielfaches der Unbekannten gewonnen wird: $5x + 5 - 2x = 8$;

g) mit Konstanten und auf beiden Gleichungsseiten auftritt: $3x + 5 = 2x + 8$;

h) ebenso, jedoch so, daß beim Ordnen ein Vielfaches der Unbekannten gewonnen wird: $5x + 7 = 2x + 19$;

i) ebenso, jedoch so, daß beim Ordnen ein in Bruchform gegebener Koeffizient bleibt: $\frac{3}{5}x + 8 = \frac{3}{10}x + 20$.

Bei allen hier gewählten Beispielen ist x eine positive ganze Zahl. Es würde den Rahmen dieses Beitrages sprengen, wenn nunmehr die verschiedenen Schwierigkeitsstufen für beliebige rationale x genannt würden. Für den Lehrer ist es jedoch notwendig, daß er bei seiner Unterrichtsvorbereitung für alle Schwierigkeitsstufen einige Beispielaufgaben auswählt, sie für die Behandlung im Unterricht in eine methodisch wohlüberlegte Reihenfolge bringt und vor allem von jeder Art ausreichend viele Beispielaufgaben in Reserve hat. Dabei kann sich der Lehrer nur selten allein auf das Lehrbuch stützen. Jedoch ist es dringend notwendig, daß der Lehrer genau weiß, welche Schwierigkeitsstufe bei jeder einzelnen Lehrbuchaufgabe vorliegt. Nur dann können methodische Fehler im Aufbau der Unterrichtsstunde und bei der Erteilung von Hausaufgaben vermieden werden. (In dieser Hinsicht wäre es vielfach besser, wenn keine Lösungshefte zur Verfügung stünden!)

So wie hier am Beispiel der linearen Bestimmungsgleichung verschiedene Schwierigkeitsfälle gezeigt wurden, sind auch auf allen anderen Gebieten des Mathematikunterrichts die verschiedenartigen Abstufungen sorgfältig zu beachten und dem methodischen Aufbau des Unterrichts zugrunde zu legen. Dabei müssen die Beispielaufgaben beim Kenntniserwerb alle Möglichkeiten erfassen. Da aber im allgemeinen die jeweils kompliziertere Schwierigkeitsstufe die niedrigere mit enthält, sollte im Unterricht zügig vorangeschritten werden, sollte nicht zu lange bei jedem Einzelfall verharrt werden. An die Schüler sind kontinuierlich wachsende Anforderungen zu stellen. Geeignet zusammengestellte Beispielaufgaben helfen sichern, daß die Schüler beim Erwerb neuer Kenntnisse stets an ihrer optimalen Leistungsgrenze gehalten werden. Es werden dabei Sprünge, die zu Lücken und Unsicherheiten im Schülerwissen führen, ebenso vermieden wie das Auftreten von Langeweile durch Unterforderung der Schüler.

An einigen Bespielen soll noch gezeigt werden, worauf beim Zusammenstellen geeigneter Systeme von Beispielaufgaben zu achten ist. Es ist eine sehr wichtige Aufgabe der Methodik des Mathematikunterrichts, für alle Bereiche zumindest Gesichtspunkte für das Aufstellen solcher Aufgabensysteme zu erarbeiten. Denn gegenwärtig ist es bekanntlich so, daß sowohl in der Methodik nur auf einzelnen Gebieten bereits geeignete Schwierigkeitsabstufungen erarbeitet wurden, als auch in den Lehrbüchern nur an einigen Stellen tatsächlich zufriedenstellende Sammlungen von Beispielaufgaben vorliegen.

Beim Rechnen unter Verwendung von Logarithmen muß erstens darauf geachtet werden, wie die entsprechenden Werte tabuliert sind (direkt in der Tafel angegeben, Interpolation notwendig, mit auf- oder abgerundeter 5 als letzter Ziffer, vier- oder fünfstellig, mit veränderter erster geltender Ziffer der Mantisse in der Zeilenmitte usw.). Zweitens muß bei der Division unterschieden werden, ob die Kennzahl des Quotienten positiv bleibt, ob die Kennzahl des Divisors mindestens Null oder negativ ist usw. Drittens muß beim Radizieren echter Brüche beachtet werden, ob die negative Kennzahl ein ganzzahliges Vielfaches des Radikanden ist oder nicht. Wenn also beispielsweise das Dividieren oder das Radizieren mit Hilfe von Logarithmen erstmalig durchgeführt werden soll, so muß sorgfältig darauf geachtet werden, daß die angeführten komplizierteren Fälle nicht bei den ersten Beispielen auftreten, aber auch im Gesamtsystem der Beispielaufgaben in der Phase des Erwerbs neuer Kenntnisse nicht unbeachtet bleiben.

Beim Konstruieren einfacher geometrischer Figuren muß darauf geachtet werden, daß die bei der Konstruktion benötigten Stücke in einfacher und übersichtlicher Lage zueinander liegen, daß aber andererseits nicht eine bestimmte Lage (parallel zu den Rändern des Zeichenblattes!) bevorzugt wird. Es dürfen nicht nur spitzwinklige Dreiecke, sondern es müssen ebenso auch recht- und stumpfwinklige konstruiert und untersucht werden. Es dürfen am Anfang im allgemeinen keine regelmäßigen Figuren gewählt werden, aber es dürfen auch keine so absonderlichen Figuren betrachtet werden, daß die zu gewinnenden Gesetze nur schwer zu erkennen sind. Die regelmäßigen Figuren und alle übrigen charakteristischen Spezialfälle müssen aber im Gesamtsystem der Beispielaufgaben enthalten sein. In vorbildlicher Art und Weise findet man solche Zusammenstellungen bei manchen Abbildungen in Lehrbüchern der darstellenden Geometrie. Dort sind beispielsweise bei der senkrechten Zweitafelprojektion Punkte oder Strecken im ersten Quadranten, in den übrigen Quadranten, in allgemeiner Lage und in besonderer Lage zu den Rißtafeln wiedergegeben. Im Unterricht sind entsprechende Beispielkonstruktionen unerläßlich.

Auch beim Beweisen und Herleiten mathematischer Aussagen muß beachtet werden, daß einerseits alle denkbaren Fälle erfaßt werden, andererseits mit dem übersichtlichsten Fall begonnen wird. Man denke hier etwa an die drei Fälle beim Beweis der Beziehung zwischen dem Zentriwinkel und den zugehörigen Peripheriewinkeln oder an den Sinussatz für spitz-, stumpf- und auch rechtwinklige Dreiecke usw.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß beim Erwerb neuer Kenntnisse bestimmte mathematische Schüleraufgaben gelöst werden sollten. Die dabei zu nutzenden Beispielaufgaben müssen zu einem System zusammengestellt und den Schülern so vorgelegt werden, daß diese beim Lösen stets das Neue und Grundsätzliche genau erfassen, dieses Grundsätzliche im Lernprozeß nach allen Möglichkeiten hin kennenlernen und dabei stets an der optimalen Leistungsgrenze beansprucht werden. Als Beispielaufgaben kommen bis auf inhaltlich bestimmte Ausnahmen nur formale Aufgaben in Frage.

2.23 Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben beim Festigen erworbenen Wissens und Könnens

Wohl in keinem Unterrichtsabschnitt ist das Lösen mathematischer Schüleraufgaben von größerer Bedeutung als beim Festigen bereits erworbenen mathematischen Wissens, bei der Weiterentwicklung bereits vorhandenen mathematischen Könnens. Mit vollem Recht wird im Lehrplan auf die große Bedeutung von Übung und Anwendung im Mathematikunterricht hingewiesen. Aber leider werden wohl auch in keinem Unterrichtsabschnitt so viele Fehler in der Verwendung mathematischer Schüleraufgaben gemacht wie beim Wiederholen, Üben und Anwenden. Bei der Vorbereitung auf den Erwerb neuer Kenntnisse liegen die Hauptfehler darin, daß die Vorbereitung nicht umfassend genug als wesentlicher Bestandteil des Bildungs- und Erziehungsprozesses genutzt wird. Bei der Erarbeitung des Neuen treten in erster Linie Fehler in der Hinsicht auf, daß Sprünge gemacht werden. Beim Festigen aber treten ganz verschiedenartige Fehler oftmals zugleich auf. Insbesondere werden erstens lange Zeit hindurch Aufgaben ein und derselben Schwierigkeitsstufe gelöst. Der Lehrer kann dabei nicht feststellen, ob die Schüler tatsächlich voranschreiten; den Schülern wird der Unterricht langweilig, weil sie nicht merken, daß sie vorankommen; sie spüren nicht die Grenzen ihres Könnens; sie glauben, das zu Übende bereits zu können. Zweitens werden die vielfältigen Formen des Mitübens und Wiederholens nicht rationell genutzt. Viele Reserven des Unterrichts bleiben ungenützt. Drittens werden Neuerwerb von Kenntnissen, Festigung und Anwendung des Gelernten oftmals voneinander getrennt, obwohl eine wechselseitige Durchdringung möglich und vor allem pädagogisch ratsam wäre. Über die zuerst und zuletzt genannten Fehler sollen hier keine weiteren Ausführungen gemacht werden, da in den Abschnitten 2.21 und 2.22 schon das in dieser Hinsicht Wesentliche gesagt ist und auch im Abschnitt 2.24 noch einmal auf diese Fragen eingegangen wird.

Der an zweiter Stelle genannte Fehler hat seine Hauptursache darin, daß oftmals nicht konkret genug gefragt wird, *was* eigentlich in einer Übungs- und Wiederholungsstunde gefestigt werden soll. Meist wird mehrere Stunden hintereinander angegeben: Dreieckskonstruktionen, Lösen quadratischer Bestimmungsgleichungen, Pyramidenberechnungen, Übungen zum Sinussatz usw. Das ist keine ausreichende Bestimmung des Übungs- oder Wiederholungsgebietes! Bekanntlich geht das Lösen von Beispielaufgaben beim Kenntniserwerb allmählich über in das Lösen weiterer Aufgaben zum Zwecke der Festigung und Anwendung des an den Beispielaufgaben erlernten Lösungsverfahrens. Also kann und darf in dieser Phase des Unterrichts nicht nur die gleiche Zielstellung gegeben, die gleiche Absicht verfolgt werden, die bereits beim Kenntniserwerb den

Unterrichtsinhalt bestimmte. Es treten weitere Bildungs- und Erziehungsabsichten neben die aus der Phase des Kenntniserwerbs vorhandenen. Und sie treten als gleichberechtigt, nicht etwa als nebensächlich, im Unterrichtsprozeß auf!

Einige Beispiele sollen das erläutern. Ich schließe dabei an die im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Problemkreise an. Angenommen, die Schüler seien in der Lage, lineare Bestimmungsgleichungen vom Typ $ax + b = cx + d$ im Prinzip zu lösen, so kann noch nicht erwartet werden, daß schon eine gewisse Fertigkeit im Lösen von Bestimmungsgleichungen dieser Art vorhanden ist. Das Lösen solcher Bestimmungsaufgaben ist also weiterhin zu üben. Aber bei der Festigung des erworbenen Grundwissens und -könnens aus der Gleichungslehre wird gleichzeitig in einer Unterrichtsstunde das Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche wiederholt und gefestigt. Als Koeffizienten werden somit gemeine oder dezimale Brüche oder beide gemischt verwendet. In einer anderen Stunde wird mit dem Lösen zugleich das Aufstellen von Bestimmungsgleichungen aus gegebenen Texten geübt. Es werden in dieser Stunde also ausschließlich Textaufgaben gelöst, die auf den angegebenen Gleichungstyp führen.

Wenn die Schüler das Multiplizieren mit Hilfe von Logarithmen im Prinzip beherrschen, sind dennoch weitere Übungen unerläßlich. Denn schließlich muß das Rechnen unter Verwendung von Logarithmen weitgehend automatisiert werden. In einer Übungsstunde werden daher Ausdrücke der Art $a^2 + b^2 - n \cdot a \cdot b \cdot c$ berechnet. Erstens wird dabei das Potenzieren als besondere Form des Multiplizierens verdeutlicht. Zweitens wird geübt, daß sorgfältig zwischen der Addition von Logarithmen und der von Numeri zu unterscheiden ist. Drittens aber wird das bei Berechnungen nach dem Kosinussatz häufig auftretende Schema bereits vorbereitend erarbeitet. Das Üben im Rechnen unter Verwendung von Logarithmen kommt dabei durchaus nicht zu kurz. Wenn a, b, c geeignet gewählt werden, zum Beispiel in Form von echten Brüchen, kann zugleich noch das Arbeiten mit komplizierteren Kennzahlen gefestigt werden.

Wenn bei Dreieckskonstruktionen in Klasse 6 nur immer und immer wieder Dreiecke nach dem Fall s, s, s konstruiert werden, so wird das den Schülern bereits beim dritten oder vierten Beispiel langweilig. Wenn aber das eine Mal ein beliebiges Dreieck aus drei Seiten, das andere Mal ein gleichseitiges aus einer Seite, das dritte Mal ein gleichschenkliges aus zwei Seiten konstruiert werden soll, so wird damit für Abwechslung gesorgt. Zugleich erkennen die Schüler, daß bei den speziellen Dreiecksformen „eigentlich“ doch alle drei Seiten für die Konstruktion zur Verfügung stehen.

In allen geschilderten Fällen wurde erworbenes Wissen und Können gefestigt. Aber es blieb nicht bei einer bloßen Festigung dessen, was gerade im Mittelpunkt der Unterrichtsarbeit stand. Es wurde wiederholt

(Bruchrechnung), ein weiteres Verfahren gleichzeitig gefestigt (Textaufgaben), Wissen vertieft (Potenzieren als spezielles Multiplizieren), das gerade zu Übende ergänzt (Unterbrechung der logarithmischen Rechnung), Neues vorbereitet (Typ Kosinussatz), Bekanntes spezialisiert (Dreieckskonstruktionen). Erst dann, wenn durch das Lösen einer mathematischen Schüleraufgabe ein mehrfacher Bildungs- und Erziehungserfolg erreicht wird, kann von einer vollen Ausnutzung der für die Festigung erworbenen Wissens und Könnens vorgesehenen Unterrichtszeit gesprochen werden. Hier liegt im übrigen das „methodische Geheimnis" vieler erfolgreicher Mathematiklehrer. In ihrem Unterricht werden tatsächlich 75 Prozent der Unterrichtszeit für die Übung und Anwendung des Gelernten verwendet, genau wie es der Lehrplan vorschreibt. Aber sie gehen zugleich auch in jeder Unterrichtsstunde vorwärts! Die Schüler lernen in einer Stunde lineare Bestimmungsgleichungen des Typs $ax + b = cx + d$ lösen. In der folgenden Stunde lernen sie das Lösen solcher Bestimmungsgleichungen, bei denen auch Brüche vorkommen. Das ist zwar an und für sich nichts Neues. Für die Schüler geschieht aber etwas Neues im Unterricht! Sie verlassen die Schule mit dem sicheren Wissen: „Heute haben wir im Mathematikunterricht *das* gelernt!" Und sie vermögen jenes „das" genau anzugeben.

Durch diese Erörterungen ist zugleich darauf hingewiesen, daß die Schüler in jeder Unterrichtsstunde genau wissen müssen, was sie üben, wiederholen, festigen oder neu erlernen sollen. Es ist daher gar nicht falsch, wenn beispielsweise in den täglichen Übungen am Beginn derjenigen Unterrichtsstunde, in der lineare Bestimmungsgleichungen mit beliebigen rationellen Koeffizienten gelöst werden sollen, in einigen Beispielaufgaben die Addition (Subtraktion) ungleichnamiger Brüche wiederholt wird. Dabei erfolgt an dieser Stelle natürlich eine Beschränkung auf die einfachsten Fälle: es werden Beispielaufgaben gelöst. Im folgenden Teil der Unterrichtsstunde treten dann auch die komplizierteren Fälle auf: es werden hier nämlich *Übungsaufgaben* gelöst.

Das Wesentliche einer Übungsaufgabe besteht darin, daß in ihr im Gegensatz zur Beispielaufgabe mindestens zwei mathematische Tätigkeiten, die inhaltlich in keinem direkten Zusammenhang stehen, ausgeübt werden. Übungsaufgaben sind also im Gegensatz zu Beispielaufgaben wesentlich komplexerer Natur. Dabei ist besonders hervorzuheben, daß das zu lösende Problem nicht immer in der reinen und übersichtlichen Form gegeben wird wie bei Beispielaufgaben. Daher kommen als Übungsaufgaben nicht nur formale Aufgaben in Frage, auch eingekleidete Aufgaben spielen eine bedeutende Rolle, ja selbst gewisse Anwendungsaufgaben dienen als Übungsaufgaben in erster Linie der Festigung erworbener Kenntnisse. Ferner unterscheiden sich Beispielaufgaben und Übungsaufgaben innerhalb der Lösung meist recht beträchtlich. Während bei Beispielaufgaben sofort und direkt das jeweilige Lösungsverfahren angewendet wird, müssen Übungsaufgaben meist erst so umgeformt werden, daß dieses Verfahren anwendbar wird.

Ich bin mir vollkommen darüber klar, daß der Begriff „Übungsaufgabe“ zur Zeit noch nicht allein im hier beschriebenen Sinne benutzt wird. Er wird oft auch für solche Aufgaben gewählt, die hier als Beispielaufgaben für die Phase des Kenntniserwerbs oder einer einführenden kurzen Wiederholung (tägliche Übung) bezeichnet werden. Ich halte es aber für sehr notwendig, deutlich zwischen dem Lösen von Beispielaufgaben in der Phase des Erlernens neuer mathematischer Verfahren und dem Lösen von Übungsaufgaben beim Festigen bereits erworbenen Wissens und Könnens zu unterscheiden. Denn nur dann werden wir im Unterricht dazu kommen, auch die der Übung, Wiederholung, Festigung und Anwendung des Erlernten zur Verfügung stehende Zeit voll und schöpferisch für das intensive Lernen der Schüler auszunutzen. Ich sehe hier nicht nur große Reserven zeitlicher Art. Vor allem kann durch erhöhte Anforderungen beim Üben erreicht werden, daß die Schüler auf allen wichtigen Gebieten des mathematischen Wissens und Könnens tatsächlich zu guten und sicheren Leistungen kommen, und zwar ohne zusätzlichen Stundenaufwand.

2.24 Das Lösen mathematischer Schüleraufgaben beim Anwenden des erworbenen Wissens und Könnens

Erst anwendungsbereites mathematisches Wissen und Können befähigt dazu, verschiedenartige Probleme erfolgreich mit Hilfe mathematischer Methoden und Verfahren zu lösen. Da das im Lernprozeß erworbene und gefestigte mathematische Wissen und Können keineswegs von vornherein bereits anwendungsbereit ist, sind besondere methodische Maßnahmen notwendig, die mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten auf die für die Anwendung notwendige Stufe zu heben. Dabei ist es im Unterrichtsprozeß im allgemeinen nicht möglich, die Festigung des erworbenen Wissens und Könnens und seine Weiterentwicklung zum anwendungsbereiten Wissen und Können klar zu unterscheiden. Auf jeden Fall aber ist weitgehende Selbsttätigkeit der Schüler sowohl bei der Festigung als auch bei der Anwendung des Erlernten unerläßlich. Es kommt darauf an, alle schöpferischen Fähigkeiten der Schüler zu aktivieren. Besonders durch weitgehend selbständiges Lösen geeigneter mathematischer Schüleraufgaben werden die Schüler angespornt, all ihre Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Lösung der gestellten Probleme einzusetzen und durch diese Tätigkeit zugleich zu vervollkommnen.

Der soeben gekennzeichnete wichtige Teil des Unterrichtsprozesses darf nicht verwechselt werden mit dem Lösen von Anwendungsaufgaben im Unterricht. Die Entwicklung erworbenen und gefestigten Wissens und Könnens zu anwendungsbereitem Wissen und Können umfaßt weit mehr als das Lösen einer größeren Anzahl von Anwendungsaufgaben.

Ganz allgemein gesehen, sind zwei große Bereiche zu unterscheiden, in denen die Schüler ihr erworbenes und gefestigtes mathematisches Wissen und Können anwenden lernen müssen:

a) innerhalb der Mathematik selbst,

b) außerhalb der Mathematik.

Die Beschränkung auf einen der beiden Bereiche führt zu schweren Fehlern in der Bildungs- und Erziehungsarbeit. Wenden die Schüler ihre mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten ausschließlich oder zum überwiegenden Teil nur bei der Lösung weiterer innermathematischer Probleme an, so wird ihr Wissen und Können einseitig, bleibt unter Umständen lebensfremd und kann nicht als anwendungsfähig im erforderlichen umfassenden Sinne bezeichnet werden. Wenden die Schüler hingegen ihre mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten nur oder zumindest in erster Linie in verschiedenartigen außermathematischen Bereichen an, so fehlt die unerläßlich notwendige Beschäftigung der Schüler mit dem eigentlich mathematischen Bereich der gesellschaftlichen Praxis. *G. Klaus* und *D. Wittich* haben in ihrem bereits erwähnten Aufsatz — vgl. Seite 31 f. — sehr klar nachgewiesen, daß mathematische Erkenntnisse sich vor allem auch in der ihnen adäquaten Form, also innerhalb der Mathematik selbst, bewähren müssen. Lernen die Schüler nicht in genügendem Maße das erworbene und gefestigte mathematische Wissen und Können zum Lösen weiterer mathematischer Probleme anwenden, so bleibt es nicht nur unvollständig, sondern wird eventuell zu einem rein praktizistischen Beherrschen einzelner Verfahren degradiert. Die schöpferischen mathematischen Kräfte der Schüler bleiben unterentwickelt, das mathematische Denken der Schüler bleibt auf einer so niedrigen Stufe, daß eine erfolgversprechende Anwendung echten mathematischen Wissens und Könnens in allen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis nicht erwartet werden kann.

Die tatsächliche Einheit von Theorie und Praxis im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule erfordert die Überwindung aller zu engen Auffassungen von „Theorie“ und „Praxis“. Bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, daß es von grundsätzlicher Bedeutung für die Verbesserung des Mathematikunterrichts unserer allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule ist, vorhandene Verengungen und Disproportionen zu überwinden. Das gilt vor allem im Bereich der Anwendung des mathematischen Wissens und Könnens.

Damit hier keine Mißverständnisse auftreten, soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß hier nicht der Versuch unternommen wird, den Mathematikunterricht an die Stelle zurückzuführen, an der er sich noch vor etwa einem halben Jahrzehnt befand. Die damals meist noch zu verzeichnende einseitige Bevorzugung des Innermathematischen und der zu jener Zeit noch häufig anzutreffende lebensfremde Verbalismus im Mathematikunterricht genügen den heutigen gesellschaftlichen Anforderungen ebensowenig wie damals. Aber es ist dem Durchbruch des Neuen auch hinderlich, wenn der gesamte Mathematikunterricht in erster Linie im Dienste einer recht eng aufgefaßten Produktionspraxis der Gegenwart gesehen wird.

Durchmustert man unter diesem Gesichtswinkel beispielsweise den Abschnitt „Über die Verbindung des Mathematikunterrichts mit der gesellschaftlichen Praxis" im „Methodischen Handbuch für den Lehrer — Mathematikunterricht"[17], so ist er ein getreues Spiegelbild der 1959/60 vorherrschenden einseitigen und damit fehlerhaften Auffassung von der Einheit von Theorie und Praxis im Mathematikunterricht. Zur Zeit der Erarbeitung des „Methodischen Handbuches" zeigte sich die neuartige Zuwendung der Schule zum Leben in der sozialistischen Gesellschaftsordnung am deutlichsten im Unterricht in der sozialistischen Produktion. Die Schüler lernten erstmalig in der Geschichte des deutschen Schulwesens die Existenzgrundlage der menschlichen Gesellschaft, die materielle Produktion, planmäßig kennen. Sie lernten die Arbeit würdigen, die Arbeiter, Bauern und anderen Werktätigen achten. Die systematische Erziehung unserer Jugend zur Liebe zur Arbeit und zu den arbeitenden Menschen hatte begonnen! Das durfte nicht ohne Einfluß auf den Mathematikunterricht bleiben, mußte auch in der Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule festen Fuß fassen. Es war somit 1959/60 durchaus richtig und notwendig, im „Methodischen Handbuch" möglichst konkrete und dabei zugleich recht allgemeine Vorschläge für die schöpferische, politisch-pädagogische Arbeit des Mathematiklehrers zu geben.

Heute wissen wir, daß die damals mit Recht hervorgehobenen neuen Formen und Möglichkeiten für die Gestaltung des Mathematikunterrichts nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Gesamtkomplex der engen Verbindung von Schule und sozialistischem Leben sind, daß die damals neu geknüpften Verbindungen nur einen Teil der Einheit von Theorie und Praxis im Mathematikunterricht darstellen.

Die seit etwa 1959 vollzogenen Schritte zur Herstellung einer engeren Verbindung von Mathematikunterricht und Leben, insbesondere von Mathematikunterricht und Produktionspraxis am Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion, werden heute keineswegs rückgängig gemacht. Das in einer großen Welle der Begeisterung seither in dieser Richtung

[17] Autorenkollektiv: Mathematikunterricht — Methodisches Handbuch für den Lehrer. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1960, Seiten 78 ff.

Erreichte ist ein wichtiger, fester und dauerhafter Bestandteil der Methodik des Mathematikunterrichts der sozialistischen Oberschule geworden. Nur darf sich darin die Pflege und die Entwicklung des Neuen nicht erschöpfen. Vor allem darf die eine Seite des Neuen nicht die anderen, zur Zeit noch schwächer entwickelten Seiten verdecken oder gar überwuchern. Es geht um die Entwicklung einer solchen Methodik des Mathematikunterrichts, die dazu hilft, die Schüler mit umfassendem, gründlichem, wissenschaftlich exaktem, lebensnahem und anwendungsbereitem mathematischen Wissen und Können auszurüsten. Und dabei spielt das Lösen gut ausgewählter und zweckmäßig zusammengestellter mathematischer Schüleraufgaben, mit deren Hilfe bestimmte mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten anwendungsbereit gemacht werden, eine entscheidende Rolle.

Formale Rechenaufgaben bieten nur selten Gelegenheit, vorhandenes Wissen und Können auf neuartige Probleme anzuwenden. Im allgemeinen dient das Lösen formaler Rechenaufgaben mehr der Festigung als der Anwendung, obwohl auch hier keine grundsätzliche Trennung vorgenommen werden kann. Das gilt insbesondere für die niedrigeren Klassenstufen. Beispielsweise kann man durchaus von einer Anwendung des Gelernten sprechen, wenn Schüler, die bisher nur durch zweistellige natürliche Zahlen dividiert haben, das dabei übliche Verfahren nunmehr selbständig bei der Division durch drei- und mehrstellige Divisoren heranziehen und erfolgreich benutzen. Ähnlich liegen die Dinge, wenn Schüler ihre Kenntnisse über Primzahlen und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bei der Addition ungleichnamiger Brüche anwenden. Dabei lehrt speziell das zuletzt genannte Beispiel, daß im Unterrichtsprozeß oftmals ein bestimmtes Wissen oder auch gewisse Fähigkeiten und Fertigkeiten erst im Rahmen des Lösens umfassenderer Probleme voll zur Geltung kommen. Daher ist es wichtig, daß der Lehrer sich darüber Klarheit verschafft, in welchen Fällen es unerläßlich ist, durch eine längere Übungsphase das erworbene Wissen und Können zu festigen, in welchen Fällen hingegen die Festigung mit der Anwendung verbunden werden kann.

Formale Bestimmungsaufgaben stellen hinsichtlich der innerhalb des Lösungsverfahrens anzuwendenden Rechnungen beziehungsweise Konstruktionen ein geeignetes Anwendungsgebiet dar. Es ist jedoch aus didaktischen und methodischen Gründen nicht zu empfehlen, hier bereits stets von Anwendung erworbenen mathematischen Wissens und Könnens zu sprechen. Im Abschnitt 2.23 wurde vielmehr gezeigt, daß viele Bestimmungsaufgaben als Übungsaufgaben zur Festigung verschiedener mathematischer Tätigkeiten genutzt werden können. Für formale Bestimmungsaufgaben gilt also etwa das gleiche wie für formale Rechenaufgaben: sie können unter gewissen Bedingungen auch zur Entwicklung anwendungsbereiten Wissens und Könnens genutzt werden, dienen aber im allgemeinen mehr der Festigung als der Anwendung.

Anders ist es bei Konstruktionsaufgaben. Eine große Zahl dieser formalen Aufgaben dient in starkem Maße der Entwicklung anwendungsbereiten mathematischen Wissens und Könnens. Es sei nur darauf hingewiesen, daß bei den meisten planimetrischen Konstruktionen ganz bestimmte Lehrsätze und Konstruktionsverfahren angewendet werden müssen. Es kommt aber darauf an, daß die Schüler tatsächlich erfassen, welche allgemeinen geometrischen Kenntnisse sie beim Lösen bestimmter Konstruktionsaufgaben anwenden. Das gilt in noch weit stärkerem Maße für Konstruktionsaufgaben aus der darstellenden Geometrie. Die dabei üblichen Verfahren sind alle mathematisch begründet, sind nicht eine bloße Sammlung von Zeichenvorschriften!

Unter den formalen Aufgaben sind es besonders die Beweisaufgaben, mit deren Hilfe vorhandenes zu anwendbarem Wissen und Können entwickelt wird. Bei der Erkenntnissicherung durch einen Beweis und bei der Erkenntnisgewinnung und -sicherung durch eine Herleitung muß stets auf bereits Erhärtetes zurückgegriffen werden, muß das zu Beweisende durch Anwendung des Bekannten und bestimmter Schlußweisen als gültig erwiesen werden. Nur sicheres, genaues und anwendungsbereites mathematisches Wissen und Können befähigt einen Schüler überhaupt dazu, eine für ihn bis dahin unbekannte mathematische Gesetzmäßigkeit allgemeingültig zu beweisen. Es wurde in der vorliegenden Arbeit schon mehrfach betont, daß das weitgehend selbständige Lösen von Beweisaufgaben im Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule mehr als bisher gepflegt werden muß. Nunmehr erfährt diese Forderung auch im Bereich der Anwendung des Erlernten erneut Gewicht.

Eine besondere Rolle im System der mathematischen Schüleraufgaben, mit deren Hilfe die Anwendbarkeit bereits vorhandenen mathematischen Wissens und Könnens gesteigert werden kann, spielen die sachbezogen eingekleideten Aufgaben. Ihre didaktische und methodische Hauptfunktion besteht darin, daß die Schüler mit ihrer Hilfe lernen, das mathematisch Wesentliche aus verschiedenartigen Einkleidungen zu isolieren. In dieser Hinsicht sind also die Sachaufgaben nur eine Vorstufe auf dem Weg zur Lösung von Anwendungsaufgaben. Wie aus den vorangegangenen Ausführungen klar ersichtlich ist, haben Sachaufgaben im Unterrichtsprozeß noch eine Reihe weiterer, wichtiger Aufgaben zu erfüllen. Aber im Rahmen der Entwicklung eines anwendungsbereiten Wissens und Könnens aus bereits vorhandenem und gefestigtem Wissen und Können stellen die Sachaufgaben im gesamten Bildungs- und Erziehungsprozeß nur eine notwendige Zwischenstufe dar. Man kann in gewisser Hinsicht sagen, daß Sachaufgaben notwendig sind, damit die Schüler das Formale des Lösens von Anwendungsaufgaben erlernen. Die Sachaufgaben spielen hier also eine ähnliche Rolle auf dem Weg zur Lösung von Anwendungsaufgaben wie die Textaufgaben auf dem Weg zur Lösung von eingekleideten Aufgaben.

Ganz anders verhält es sich mit den mathematisch eingekleideten Aufgaben. Sie können neben den Beweisaufgaben und manchen Konstruktionsaufgaben als der Haupttyp von mathematischen Schüleraufgaben bezeichnet werden, mit deren Hilfe die Schüler ihr erworbenes und gefestigtes mathematisches Wissen und Können im innermathematischen Bereich anwenden lernen.

Analog sind, wie insbesondere im Abschnitt 2.13 ausgeführt wurde, die Anwendungsaufgaben diejenigen mathematischen Schüleraufgaben, durch deren Lösung die Schüler befähigt werden, ihr mathematisches Wissen und Können zur Lösung wichtiger Probleme anzuwenden, die außerhalb der Mathematik eine große Rolle spielen.

Da durch die mathematisch eingekleideten Aufgaben und die Anwendungsaufgaben alle diejenigen für die Bildung und Erziehung sozialistischer Menschen wesentlichen Bereiche der gesellschaftlichen Praxis erfaßt werden, in denen mathematische Verfahren bei der Problemlösung von Bedeutung sind, spielen neben den formalen Aufgaben speziell diese beiden Arten mathematischer Schüleraufgaben im Unterricht der oberen Klassen die entscheidende Rolle, wobei aber jede Einseitigkeit im Bildungs- und Erziehungsprozeß unbedingt vermieden werden muß.

Übersichten

Inhaltliche Klassifikation mathematischer Schüleraufgaben

Formale Aufgaben:
Rechen-, Bestimmungs-, Konstruktions-, Beweisaufgaben;
textfreie Aufgaben, Textaufgaben.

2. Eingekleidete Aufgaben:
mathematisch eingekleidete Aufgaben, sachbezogen eingekleidete Aufgaben / Sachaufgaben.
3. Anwendungsaufgaben:
aus verschiedenen Bereichen, insbesondere aus den Naturwissenschaften, der Technik, dem gesellschaftlichen Leben.

Didaktische Funktion mathematischer Schüleraufgaben

1. Zur Vorbereitung des Erwerbs neuer Kenntnisse:
Motivation, Bereitstellung von Voraussetzungen, Hinleitung zur neuen Erkenntnis;
alle Aufgabentypen.
2. Beim Erwerb neuer Kenntnisse:
Beispielaufgaben.
3. Bei der Festigung des erworbenen Wissens und Könnens:
Übungsaufgaben.
4. Bei der Anwendung des erworbenen Wissens und Könnens:
insbesondere mathematisch eingekleidete Aufgaben und Anwendungsaufgaben, aber auch Beweis- und Konstruktionsaufgaben.