MINISTERRAT DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
MINISTERIUM FÜR VOLKSBILDUNG

Plan für den fakultativen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in der Erweiterten Oberschule

Lehrgang
Einführung in die Algebra

V
W
V
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 1984

Ministerrat der Deutschen Demokratischen Republik
Ministerium für Volksbildung

Plan für den fakultativen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in der Erweiterten Oberschule

Lehrgang
Einführung in die Algebra

V
W Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 1984
V

1. Auflage
Ausgabe 1984
Lizenz Nr. 203/1000/84 (E 00 30 23-1)
LSV 0645
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: (52) VOB Nationales Druckhaus Berlin
Bestellnummer: 709 077 9
00025

Der Plan für den fakultativen
mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht
in der Erweiterten Oberschule
Lehrgang Einführung in die Algebra
tritt am 1. September 1985 in Kraft.

Berlin, Januar 1984

Parr
Stellvertreter des Ministers
für Volksbildung

Inhaltsverzeichnis

Ziele und Aufgaben

Bei der Durchführung dieses Lehrgangs sind zwei eng miteinander verbundene Hauptziele zu verwirklichen.
Erstens sollen die Schüler an einige typische algebraisch-strukturelle Denk- und Arbeitsweisen herangeführt werden, die sie zur besseren Bewältigung wesentlicher Anforderungen im Studium der meisten mathematischen Disziplinen an Universitäten und Hochschulen befähigen. Dazu sollen sie - nach notwendiger Reaktivierung bzw. Neuaneignung von Elementen der Mengentheorie - mit dem Begriff der (binären) Operation, mit wesentlichen Eigenschaften von binären Operationen und besonderen Elementen aus Gebilden (spezielle Mengen, in denen jeweils eine spezielle Operation definiert ist) vertraut gemacht werden. Sie sollen aber auch - am Beispiel der Gruppe - an das axiomatische Arbeiten herangeführt werden. Dabei sollen ihre Fähigkeiten im Formulieren mathematischer Sachverhalte, im Definieren und Beweisen wesentlich weiterentwickelt werden.
Zweites Hauptziel ist eine wesentliche Festigung, teilweise auch Präzisierung und Vertiefung bisher erworbenen mathematischen Wissens und Könnens aus praktisch allen Teildisziplinen des obligatorischen Mathematikunterrichts. Indem im Lehrgang "Einführung in die Algebra" mit Elementen dieses Wissens und Könnens in vielfältiger Weise zu arbeiten ist, wird es nicht nur erneut zum Unterrichtsgegenstand, es erscheint auch in neuen Zusammenhängen und erfährt eine neue Ordnung nach übergeordneten Gesichtspunkten, was zielstrebig für seine Festigung zu nutzen ist.

Hinsichtlich der Weiterentwicklung des <u>mathematischen Wissens und Könnens</u> der Schüler werden im einzelnen folgende <u>Ziele</u> verfolgt:

Die Schüler sind mit grundlegenden Begriffen, Beziehungen und Aussagen über Mengen und Mengenoperationen, einschließlich der Begriffe "Produktmenge" und "Abbildung" sowie mit der dazugehörigen Symbolik vertraut, verstehen deren Anwendung auf die nachfolgenden Stoffe des Lehrgangs und können dieses Wissen beim Lösen von Aufgaben selbständig anwenden.
Der Begriff der binären Operation und charakteristische Eigenschaften von Operationen wie Kommutativität, Assoziativität, Umkehrbarkeit und Kürzbarkeit sind den Schülern soweit vertraut,

daß sie dieses Wissen auf ihnen aus dem obligatorischen Unterricht bekannte Operationen, auf bekannte Sachverhalte, die sie bislang nicht als Operationen kannten, sowie auf einige neu eingeführte Operationen sicher anwenden können. Sie haben die vorgenommene wesentliche Erweiterung des Begriffsumfangs für "Operation" und die Reichweite von Aussagen zu den genannten Eigenschaften von Operationen inhaltlich verstanden und sind in der Lage, spezielle Operationen auf das Erfülltsein der genannten Eigenschaften selbständig zu untersuchen wie auch umgekehrt zu gegebenen Eigenschaften Operationen mit diesen Eigenschaften zu ermitteln.
Die Schüler sind mit den Begriffen "neutrales Element" und "zueinander inverse Elemente" sowie mit weiteren damit zusammenhängenden Begriffen vertraut, haben die damit vorgenommenen allgemeinen Überlegungen verstanden und können Gebilde selbständig auf das Vorhandensein eines neutralen Elementes und von zueinander inversen Elementen untersuchen.
Mit den axiomatisch charakterisierten Begriffen "Gruppe" und "Halbgruppe", damit zusammenhängenden weiteren Begriffsbildungen und mit einigen Eigenschaften vor allem von Gruppen sind die Schüler soweit vertraut, daß sie die vorgesehenen allgemeinen Untersuchungen zu Gruppen und Halbgruppen verstehen und deren Ergebnisse auf spezielle Gruppen bzw. Halbgruppen selbständig anwenden können. Für Gebilde können die Schüler untersuchen, ob es sich um eine Gruppe bzw. Halbgruppe handelt. Sie können Gruppen - vor allem endliche Gruppen gleicher Ordnung - auf Isomorphie untersuchen.

Mit der Aneignung des vorstehend beschriebenen Wissens und Könnens festigen die Schüler ferner ihr Wissen und Können aus dem obligatorischen Mathematikunterricht, insbesondere

- ihr Verständnis für solche zentralen Begriffe des Fachlehrgangs wie Menge, Abbildung, Funktion, Rechenoperationen, geometrische Bewegungen und für damit zusammenhängende Begriffsbildungen sowie für weitere Begriffe (vgl. Abschnitt Inhalt des Lehrgangs),
- ihre Kenntnisse über Regeln für das Rechnen in verschiedenen Zahlbereichen, über Eigenschaften des kleinsten gemeinsamen Vielfachen und des größten gemeinsamen Teilers, über Eigenschaf-

ten geometrischer Abbildungen sowie über weitere Gegenstände in Abhängigkeit von den untersuchten Gebilden,
- ihre Fähigkeiten im Definieren von und im Operieren mit mathematischen Begriffen,
- ihre Fähigkeiten im Finden, Formulieren und Beweisen mathematischer Sätze.

In Einheit mit der Aneignung bzw. Festigung des vorstehend gekennzeichneten Wissens und Könnens ist bei der Durchführung des Lehrgangs ein wesentlicher Beitrag zur Weiterentwicklung der Befähigung der Schüler zu folgenden mathematischen Denk- und Arbeitsweisen sowie zur weiteren Ausbildung folgender fachspezifischer bzw. allgemein-geistiger Fähigkeiten zu leisten:

Im Mittelpunkt steht die Entwicklung der Befähigung zu algebraisch-strukturellem Denken und Arbeiten. Das soll dadurch erreicht werden, daß

- Gebilde und deren Eigenschaften zum Untersuchungsgegenstand gemacht werden,
- dabei für diese Gebilde nachgewiesen wird, daß sie gewisse Eigenschaften besitzen bzw. nicht besitzen,
- Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften untersucht werden,
- gewisse Eigenschaften vorgegeben und Gebilde gesucht werden, die diese Eigenschaften haben,
- Gebilde hinsichtlich ihrer Eigenschaften verglichen werden,
- darauf aufbauend die Begriffe Gruppe und Halbgruppe axiomatisch charakterisiert werden und weitere Untersuchungen vor allem zu Eigenschaften der Gruppe bzw. spezieller Gruppen bis hin zur Isomorphie durchgeführt werden.

Die Befähigung der Schüler zu mengentheoretisch-inhaltlichen Denk- und Arbeitsweisen ist dadurch weiterzuentwickeln, daß ihr Wissen und Können zu Mengen, Mengenoperationen und zum Abbildungsbegriff erweitert, präzisiert und vertieft wird und als Fundament für die im Lehrgang vorzunehmenden Begriffsbildungen sowie für die zahlreichen Untersuchungen zu Eigenschaften der betrachteten Gebilde und für die knappe und klare Fixierung der Untersuchungsgegenstände und -ergebnisse genutzt wird.

Die sprachlich-logischen Fähigkeiten der Schüler sind insbesondere unter folgenden Aspekten weiterzuentwickeln:
Fähigkeiten im Formulieren mathematischer Sachverhalte bzw. Aussagen sind unter besonderer Beachtung der richtigen Verwendung der neu vermittelten Elemente der mathematischen Fachsprache und Symbolik und normierter Redeweisen mit logischer Bedeutung sowie der dadurch möglich werdenden höheren sprachlichen Präzision und Ausdrucksfähigkeit bewußt und systematisch über das im obligatorischen Unterricht erreichte Niveau hinaus auszubilden. In diesem Zusammenhang erfordert auch das Arbeiten mit Definitionen, insbesondere ihre Erarbeitung, die Entwicklung des Definiens zum aktiven Wortschatz, die Verwendung des Definiendum beim Begründen, Beweisen und anderweitigen inhaltlichen Überlegungen besondere Aufmerksamkeit.
Die außerordentlich zahlreichen und vielfältigen Möglichkeiten zur Entwicklung des Beweisbedürfnisses, des Beweisverständnisses und der produktiven Fähigkeit zum relativ selbständigen Begründen und Beweisen sind im Rahmen der spezifischen Bedingungen für die Weiterentwicklung dieser Fähigkeiten bei den Schülern zu nutzen. Dabei sind für die Weiterentwicklung des Beweisverständnisses relativ abstrakte Beweisführungen hohen Allgemeinheitsgrades wie Sätze über Eigenschaften von Operationen, vor allem aber Sätze über Eigenschaften von Gruppen, die aus den Gruppenaxiomen hergeleitet werden können, ebenso geeignet wie die zahlreichen erforderlichen Nachweise, daß spezielle Operationen bzw. Gruppen gewisse Eigenschaften haben oder nicht haben. Letztere eignen sich aber auch in besonderem Maße für (zunehmend) selbständiges Begründen und Beweisen durch die Schüler.

Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts

Bei der Planung und Durchführung des Lehrgangs kommt es vor allem darauf an, daß die Schüler angemessene und anspruchsvolle mathematische Tätigkeiten auf einem möglichst hohen Niveau der Selbständigkeit auszuführen haben und den Unterricht durch aktive Mitarbeit bereichern. Insbesondere ist es wichtig, daß häufig durchgeführte Einzeluntersuchungen die Freude der Schüler am Entdecken entwickeln helfen und dadurch auch hinreichende Motivationen ge-

schaffen werden, sich mit anspruchsvollen abstrakten Überlegungen zu beschäftigen.
Das erfordert, der Reaktivierung, einer möglichst problemhaften Unterrichtsgestaltung und dem vielfältigen Arbeiten mit Aufgaben ständig die erforderliche Aufmerksamkeit zu schenken. Es ist aber auch darauf zu achten, daß die Anforderungen an relativ abstraktes Denken nicht abrupt, sondern schrittweise erhöht werden, um auch bei den recht abstrakten Unterrichtsgegenständen inhaltliches Verständnis zu erreichen. Auch wenn es keine längeren Phasen selbständiger Schülerarbeit wie im obligatorischen Unterricht (Stoffabschnitte "Übungen und Anwendungen" am Ende eines jeden Stoffgebietes) gibt, so sind doch Übungen - insbesondere auch solche mit differenzierter Aufgabenstellung - in ausreichender Zahl und im notwendigen zeitlichen Umfang zu planen und zu realisieren. Das vielfältige Aufgabenmaterial in dem von den Teilnehmern zu verwendenden Buch "Algebra - aller Anfang ist leicht"[1] ist entsprechend zu nutzen und vor allem durch zusätzliche einfache Aufgaben zu ergänzen.
Der Lehrgang kann sowohl für Schüler der Klasse 11 und der Klasse 12 getrennt oder auch gemeinsam durchgeführt werden. Es ist jedoch darauf zu achten, daß die Beispiele aus dem obligatorischen Mathematikunterricht der Abiturstufe entsprechend ausgewählt werden, insbesondere jeder Vorgriff auf Stoff aus dem obligatorischen Unterricht vermieden wird. Der Lehrgang kann mit einer wie mit zwei Wochenstunden durchgeführt werden, wobei es bei zwei Wochenstunden sinnvoll ist, den fakultativen Lehrgang "Komplexe Zahlen"[2] anzuschließen und sich dabei im Abschnitt "1.1. Algebraische Strukturen" dieses Lehrgangs auf die Behandlung der algebraischen Struktur "Körper" zu konzentrieren.

---

1 Kästner, H./Göthner, P.: Algebra - aller Anfang ist leicht. BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.

2 Pläne für den fakultativen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Lehrgang Komplexe Zahlen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969.

Thematische Übersicht

Gesamtstundenzahl für den Lehrgang: 25 Stunden

1.	Mengen und Abbildungen	5 bis 6 Stunden
1.1.	Mengen und Mengenoperationen	3 Stunden
1.2.	Abbildungen	2 bis 3 Stunden
2.	Operationen	10 bis 12 Stunden
2.1.	Operationen und ihre Eigenschaften	7 bis 8 Stunden
2.2.	Elemente eines Gebildes mit speziellen Eigenschaften	3 bis 4 Stunden
3.	Algebraische Strukturen, insbesondere Gruppen	7 bis 10 Stunden
3.1.	Gruppen und Halbgruppen	3 Stunden
3.2.	Eigenschaften von Gruppen	4 bis 7 Stunden

Inhalt des Lehrgangs

1. Mengen und Abbildungen — 5 bis 6 Stunden

Mit der Behandlung dieses Stoffgebietes ist jenes grundlegende Wissen der Schüler über Mengen, Mengenoperationen und Abbildungen sowie ihr Können zu dessen Anwendung in einem Umfang und auf einem Niveau auszubilden, wie das für eine rationelle Aneignung des Operationsbegriffs und damit zusammenhängender Begriffsbildungen und Aussagen erforderlich ist. Die als Stoff ausgewählten Elemente der Mengenlehre bilden in diesem Sinne also kein eigenständiges, geschlossenes Gebiet, sondern wurden mit Blick auf die erforderlichen Voraussetzungen für das zweite Stoffgebiet bestimmt. Dabei ist zu beachten, daß die Schüler über einschlägige Vorkenntnisse verfügen, die in geeigneter Weise zu nutzen sind. Sie bedürfen der Reaktivierung, aber auch in einigen Fällen der Verallgemeinerung und Präzisierung, und zwar so, daß die erforderlichen Erweiterungen im Wissen und Können der Schüler (Mengenoperationen und kartesisches Produkt von Mengen) möglichst rationell realisiert werden können.
Um dies zu erreichen, ist bei den einzelnen Unterrichtsthemen dieses Stoffgebietes von bereits Bekanntem und dessen Reaktivierung auszugehen, auf eine geschlossene Wiederholung der aus dem obligatorischen Mathematikunterricht bekannten Begriffe, Aussagen und Symbole der Mengenlehre vor der Behandlung der neuen Stoffelemente ist aber zu verzichten. Vielmehr sind unmittelbar an die einzelnen Reaktivierungen jeweils die vorgesehenen Vertiefungen und Erweiterungen anzuschließen, wobei im Interesse der Faßlichkeit ein schrittweises, mehr entwickelndes als systematisch-deduktives Vorgehen beachtet werden sollte. Die Lehrgangsteilnehmer sind zwar von Anfang an daran zu gewöhnen, mit den behandelten Begriffen und deren Definitionen, mit der Symbolik und mit den Sätzen in einfachen Fällen zunehmend selbständig zu operieren, jedoch wird diesbezüglich in diesem Stoffgebiet noch kein sicheres Können, sondern zunächst nur Verständnis der Grundlagen angestrebt. Für die erforderliche Könnensentwicklung bestehen durch die Notwendigkeit, das hier erworbene Wissen und Können zu Mengen, Mengenoperationen und Abbildungen in den folgenden Stoffgebieten ständig anzuwenden, im weiteren Verlauf des Lehrgangs günstige

Möglichkeiten. Dies gilt insbesondere für die sich an die vertiefende Behandlung des Abbildungsbegriffs unmittelbar anschließenden Untersuchungen zum Operationsbegriff im zweiten Stoffgebiet. Dort sind auch bestimmte Stoffteile wie die Nacheinanderausführung von Abbildungen und die Klasseneinteilung von Mengen eingefügt, obwohl sie thematisch zum ersten Stoffgebiet gehören.

Im <u>ersten Stoffabschnitt</u> "Mengen und Mengenoperationen" geht es zunächst um die Reaktivierung bzw. Vertiefung der in der nachfolgenden Stoffdarstellung genannten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre und um das Arbeiten mit ihnen in langsprachlicher Form und unter Verwendung der Symbolik der Mengenlehre. Dabei sind Mengendarstellungen in der Form $M = \{x \mid H(x)\}$ zu bevorzugen. Definitionen bereits bekannter Begriffe (wie Gleichheit zweier Mengen, Teilmenge und echte Teilmenge sowie Durchschnitt zweier Mengen) sollten nicht mitgeteilt, sondern unter aktiver Beteiligung der Schüler erarbeitet werden. Auf diese Weise sollen bessere Voraussetzungen für das Verständnis der anschließend zu behandelnden Definitionen für die Vereinigung und die Differenz zweier Mengen und die Komplementärmenge einer Menge bezüglich eines Grundbereichs sowie für deren Anwendung auf spezielle Mengen geschaffen werden. Dies ist notwendig, damit die folgenden Untersuchungen zu Eigenschaften von Mengenoperationen, insbesondere aber deren Beweise durch Rückgang auf Definitionen verstanden und nachvollzogen, in einfachen Fällen auch relativ selbständig durchgeführt werden können. Spezialisierungen behandelter Eigenschaften von Mengenoperationen (auf die leere Menge oder den Grundbereich) sollten die Schüler dann möglichst selbständig bearbeiten. In diesen Übungen sollen sie ferner lernen, die allgemeinen Begriffsbildungen und Einsichten selbständig auf konkrete Mengen anzuwenden. Zugleich ist dies zu nutzen, um das erreichte Verständnis der eingeführten Begriffe zu überprüfen und weiterzuentwickeln. Ob zum Beweisen von Eigenschaften der Mengenoperationen auch die Tabellenmethode eingeführt und verwendet wird, bleibt freigestellt.

Auch im <u>zweiten Stoffabschnitt</u> "Abbildungen" sollte eingangs an das im obligatorischen Mathematikunterricht erworbene Wissen und Können (zu "geordnetes Paar", "Menge geordneter Paare", "Abbildung", "Funktion") angeknüpft werden. Daran anschließend wird der wichtige Begriff "Produktmenge" ("Kreuzprodukt", "kartesisches Produkt") zweier Mengen gewonnen und definiert sowie durch Erarbeitung einiger seiner Eigenschaften und durch einfache Anwendungen gefestigt. Es erfolgt auch seine Erweiterung auf mehr als zwei Mengen sowie seine Spezialisierung auf zwei gleiche Mengen. Unter Verwendung von "Produktmenge" wird anschließend eine vertiefende Erarbeitung des an sich schon aus dem obligatorischen Unterricht bekannten Abbildungsbegriffs und einiger seiner Eigenschaften vorgenommen. Wegen seiner Bedeutung für den Lehrgang insgesamt ist hier (ebenso wie bei der Behandlung des Begriffs der Produktmenge) darauf zu achten, daß die neuen Einsichten einerseits mit Bekanntem - durch Verwenden vertrauter Beispiele - fest verknüpft, andererseits als Erkenntnisfortschritte nachdrücklich bewußtgemacht werden. Dabei muß eine Konzentration auf das für die anschließende Behandlung des Operationsbegriffs Wesentliche erfolgen.

1.1. Mengen und Mengenoperationen 3 Stunden

Wiederholen von "Menge", "Element", der Element-Mengen-Beziehung, von "die leere Menge", der dafür üblichen Symbole, von "endliche Menge", "unendliche Menge" und "Grundbereich", der Darstellung von Mengen in der Form M = ... an Hand vielfältiger Beispiele, teilweise als Übungen, dabei auch Einführen und Verwenden von Mengendarstellungen in der Form $M = \{x \mid H(x)\}$ sowie Verwenden von Venndiagrammen.
Definieren der Gleichheit zweier Mengen und der Teilmengenbeziehungen (Teilmenge und echte Teilmenge) zwischen zwei Mengen; Beispiele und Übungen zu Teilmengenbeziehungen zwischen gegebenen Mengen und zur Menge der Teilmenge einer gegebenen endlichen Menge, dabei Einführen von "zueinander elementfremde Mengen".

Wiederholen von "Durchschnitt" von Mengen und Erarbeiten einer Definition an Hand von Beispielen; Definieren von "Vereinigung" und "Differenz" von Mengen sowie von "Komplementärmenge" (einer Menge bezüglich ihres Grundbereichs), Einführen der entsprechenden Symbolik, dazu Beispiele und Übungen.

Sätze über Eigenschaften dieser Mengenoperationen (zum Teil mit Beweis):
- Kommutativität und Assoziativität von Durchschnitt und Vereinigung von Mengen,
- Beziehungen zwischen Durchschnitt und Vereinigung von Mengen,
- Beziehungen zwischen Mengenoperationen und Teilmengenbeziehungen,

dabei auch Übungen im Anwenden der Sätze, insbesondere auch auf die leere Menge und den Grundbereich.

1.2. Abbildungen — 2 bis 3 Stunden

Wiederholen und Definieren von "geordnetes Paar" von Elementen aus zwei Mengen und Definieren der Gleichheit zweier geordneter Paare; Definieren von "Produktmenge" ("Kreuzprodukt", "kartesisches Produkt") zweier Mengen, dazu Beispiele und Übungen, insbesondere auch für zwei gleiche Mengen; Einführen von "geordnetes Tripel" von Elementen aus drei Mengen.
Eigenschaften von Produktmengen, dabei Nachweis, daß im allgemeinen $A \times B \neq B \times A$ und $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$; Beziehungen zwischen Produktmengenbildungen und Mengenoperationen (mit Beweis einer der erhaltenen Regeln).
Wiederholen und Definieren von "Abbildung" (aus einer Menge in eine Menge) als Teilmenge der Produktmenge der beiden Mengen; Verwenden von "Bild" und "Urbild", von "Definitionsbereich" und "Wertebereich" einer Abbildung an Hand geeigneter Beispiele; Darstellen von Abbildungen (Pfeildiagramme); Beispiele und Übungen, dabei auch Wiederholen von "Funktion" und Definieren von "eindeutige Abbildung" und "eineindeutige Abbildung".

2. Operationen — 10 bis 12 Stunden

Zentrales Ziel der Behandlung dieses Stoffgebietes ist das Vertrautwerden der Schüler mit dem Begriff der (binären) Operation in einer Trägermenge, mit weiteren damit zusammenhängenden Begriffen sowie mit grundlegenden Eigenschaften von Operationen und mit Elementen der jeweiligen Trägermenge mit besonderen Eigenschaften. Auf diese Weise sollen die Schüler ein vertieftes Verständnis für umfangreiche Teile ihres mathematischen Wissens und Könnens erwerben und lernen, scheinbar sehr verschiedene Gegen-

stände unter einem einheitlichen übergeordneten Gesichtspunkt zu betrachten, dadurch für sie neue Zusammenhänge zu erkennen und all dies beim Bearbeiten mathematischer Probleme bzw. Aufgaben zu nutzen. In diesem Zusammenhang ist den Schülern bewußtzumachen, daß mit dem Operationssymbol "o" eine Variable für Operationssymbole eingeführt wird, was eine Erweiterung des bisher verwendeten Variablenbegriffs darstellt.
Schon im ersten Stoffabschnitt wird dabei das Ziel verfolgt, bewußt und planmäßig auf das Verständnis für abstrakte Betrachtungen zu algebraischen Strukturen im folgenden Stoffgebiet hinzuarbeiten. Noch stärker tritt dieses Ziel im zweiten Stoffabschnitt in den Vordergrund, wenn dort Gebilde auf die Existenz von Elementen mit besonderen Eigenschaften untersucht werden.
Im gesamten Stoffgebiet und ganz besonders am Anfang ist das Arbeiten mit vielfältigem Beispielmaterial unbedingt erforderlich. Dabei sollten diese Beispiele möglichst den im obligatorischen Unterricht behandelten Gegenstandsbereichen entnommen werden. Insbesondere sind jene speziellen Operationen hervorzuheben, die den Schülern aus dem obligatorischen Unterricht zwar dem Sachverhalt nach, bisher aber nicht als Operationen bekannt sind. Es sind aber auch einige Operationen neu einzuführen (siehe Abschnitt 2.1.), was zuvor die Einführung ihrer Trägermengen (zum Beispiel Restklassensysteme ganzer Zahlen modulo m) erfordert. Dem Arbeiten mit Operationstafeln (Verknüpfungstafeln) für endliche Trägermengen ist durchgehend - vor allem unter dem Aspekt der selbständigen Tätigkeit der Schüler - besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Bei der Behandlung dieses Stoffgebietes spielen das Definieren und das Anwenden der Definitionen bei Untersuchungen zu speziellen Operationen eine große Rolle. Damit soll zugleich erreicht werden, daß sich die Schüler zumindest die wichtigsten Begriffe inhaltlich fest aneignen und daß sie lernen, zunehmend selbständig damit zu arbeiten. Ferner ist der Weiterentwicklung von Beweisbedürfnis und der Fähigkeiten, Beweise nachzuvollziehen und einfache Beweise relativ selbständig zu finden sowie einzelne Beweisschritte zu begründen, besondere Auferksamkeit zu schenken. Die Untersuchungen von Gebilden auf ihre wesentlichen Eigenschaften bieten dafür vielfältige Möglichkeiten, die je nach dem erreichten Leistungsvermögen der Schüler differenziert zu

nutzen sind. Dabei ist auch - wie im Unterricht insgesamt - besondere Sorgfalt der Befähigung der Schüler zu exakter Verwendung der Fachsprache und Symbolik zu widmen. Dies erfordert nicht nur eine entsprechende ständige Vorbildwirkung des Lehrgangsleiters, sondern auch die Schaffung von hinreichenden Möglichkeiten für zusammenhängende sprachliche Äußerungen der Schüler.

Im ersten Stoffabschnitt ist von einem breit gefächerten Beispielmaterial für den Schülern bekannte spezielle binäre Operationen auszugehen, die zunächst als eindeutige Abbildungen (aus MxM in M) zu interpretieren sind. Damit wird zugleich die Erarbeitung des Begriffs der binären Operation motiviert, die dann in Form einer Definition erfolgt. Auf mögliche Verallgemeinerungen des Begriffs der binären Operation (n-stellige Operation in einer Menge M, eindeutige Abbildung aus dem kartesischen Produkt von endlich vielen verschiedenen Mengen auf eine Menge) ist nur hinzuweisen; der definierte Begriff der binären Operation wird nachfolgend als Operationsbegriff weiter verwendet. Um diesen Begriff und seine Definition zu festigen und seine Tragweite den Schülern bewußtzumachen, werden anschließend weitere aus dem obligatorischen Mathematikunterricht bekannte Sachverhalte daraufhin untersucht, ob sie Operationen sind oder nicht. Dabei sind Operationstafeln (Verknüpfungstafeln) für endliche Trägermengen einzuführen, und von hier ab ist bei allen sich bietenden Gelegenheiten von den Schülern mit diesem Hilfsmittel zunehmend selbständig zu arbeiten. Anschließend werden weitere Beispiele für binäre Operationen, insbesondere auch den Schülern noch nicht bekannte, eingeführt, um daran das Verständnis für den Operationsbegriff zu vertiefen sowie hiermit zusammenhängende Begriffsbildungen (siehe Abschnitt 2.1.) einzuführen bzw. zu definieren, zu festigen und bei der Untersuchung spezieller Operationen und ihrer Eigenschaften anzuwenden. Die einzelnen Untersuchungsergebnisse zu speziellen Operationen und ihren Eigenschaften sind in übersichtlicher Form festzuhalten, um damit zu Beginn der Behandlung des dritten Stoffgebietes rationell arbeiten zu können.

Im zweiten Stoffabschnitt werden hauptsächlich Elemente mit speziellen Eigenschaften von Gebilden zum Gegenstand von Untersuchungen gemacht. Ausgehend von geeigneten Beispielen und Gegenbeispielen werden Definitionen für "neutrales Element" und "zueinander inverse Elemente" gewonnen und für weitere Untersuchungen an Gebilden genutzt. Ferner ist durch Untersuchungen zu Existenz und Anzahl neutraler Elemente und zur Existenz eines inversen Elementes zu jedem Element der jeweils betrachteten Trägermenge bewußt und planmäßig auf die im nachfolgenden Stoffgebiet vorgesehenen allgemeinen Überlegungen zu Gruppen vorzubereiten. Die hier gewonnenen Ergebnisse sind in der vorbereiteten Übersicht der Ergebnisse zu den untersuchten Eigenschaften spezieller binärer Operationen einzutragen.

2.1. Operationen und ihre Eigenschaften 7 bis 8 Stunden

Interpretieren von bereits im obligatorischen Unterricht behandelten speziellen Operationen als Abbildungen und Herausarbeiten von gemeinsamen Eigenschaften dieser Abbildungen; Definieren von "zweistellige (binäre) Operation in der Menge M" als eindeutige Abbildung aus MxM in M. Einführen von "Trägermenge der Operation" und des allgemeinen Operationssymbols "o", seine Interpretation als Variable, Untersuchungen zum Definitionsbereich und zum Wertebereich von Operationen, Definieren von "vollständige Operation" und von "partielle Operation"; Hinweis auf Verallgemeinerungen des definierten Begriffs der binären Operation.
Untersuchen weiterer Beispiele vertrauter Operationen (teils auch als Übungen), dabei Einführen von "Abgeschlossenheit einer Menge bezüglich einer in ihr definierten Operation".
Einführen von weiteren speziellen Operationen nach entsprechenden Untersuchungen, insbesondere

- Zerlegungen von Mengen in nichtleere, elementfremde Teilmengen dieser Mengen, dabei Einführen von "Klasseneinteilung", insbesondere Zerlegung der Menge der ganzen Zahlen in Restklassen modulo m und Einführen von "Restklasse modulo m"; Definieren einer Addition und einer Multiplikation in Restklassen modulo m, Beispiele und Übungen zum Festigen der eingeführten Begriffe und zum Erkennen von Eigenschaften der definierten Operationen, dabei Einführen von "Operationstafel" (Verknüpfungstafel) und deren Verwendung.
- Einführen von "Nacheinanderausführung von Abbildungen" an Hand bekannter Beispiele, ihre wesentlichen Eigenschaften wie Asso-

ziativität und Nichtgültigkeit der Kommutativität (teils mit Beweis); weitere Beispiele und Übungen für das Nacheinanderausführen von Abbildungen einer Menge auf sich, insbesondere Permutationen und geometrische Bewegungen, deren Interpretation als Operationen.

Untersuchen von bisher betrachteten speziellen Operationen auf Kommutativität und Assoziativität, teilweise als Übungen; dabei Definieren von "kommutative Operation" und "assoziative Operation" und selbständige Arbeit mit Operationstafeln. Definieren von "umkehrbare Operation in einer Menge M", Untersuchen von bisher betrachteten speziellen Operationen auf Umkehrbarkeit, teilweise als Übungen.
Definieren von "kürzbare Operation" für vollständige Operationen, deren Vereinfachung für kommutative Operationen, Einführen von "reguläres Element"; Untersuchen von speziellen Operationen auf die Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit der Kürzungsregel, teilweise als Übungen; Satz, daß für umkehrbare Operationen, für die die Kürzungsregel gilt, die die Umkehrbarkeit definierenden Gleichungen eindeutig lösbar sind; dazu Beispiele und Übungen.
Einführen von Mengen, in denen zwei als "Multiplikation" bzw. "Addition" bezeichnete vollständige Operationen definiert sind, und Definieren von "Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition"; Untersuchen von Beispielen, teils als Übungen.

Abschließende Übungen im Untersuchen gegebener spezieller Operationen mit gegebenen Trägermengen auf deren Eigenschaften und im Ermitteln von Operationen und deren jeweilige Trägermenge aus gegebenen Eigenschaften der jeweils gesuchten Operation(en).

2.2. Elemente eines Gebildes mit speziellen Eigenschaften

3 bis 4 Stunden

Untersuchen von speziellen Operationen mit neutralem Element in der jeweiligen Trägermenge, Definieren von "neutrales Element bezüglich einer auf einer Menge definierten Operation", Einführen von "rechtsneutrales Element" und "linksneutrales Element"; Untersuchen weiterer Beispiele und Gegenbeispiele für Operationen mit neutralem Element (teilweise als Übungen), dabei Einführen von "Nullelement" (bei additiver Verknüpfung) und von "Einselement" (bei multiplikativer Verknüpfung), Nachweis, daß eine Operation in einer Menge M höchstens ein neutrales Element hat.

Untersuchen von speziellen Operationen mit einem neutralen Element n auf Paare von Elementen $[a;\bar{a}]$ für die $a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = n$ gilt; Definieren von "inverses Element $\bar{a}$ eines Elementes a bezüglich einer Operation o" und von "zueinander inversen Elementen" sowie von "rechtsinverses Element von a" und "linksinverses Element von a".
Weitere Beispiele und Gegenbeispiele für Operationen mit zueinander inversen Elementen, teilweise als Übungen.
Abschließende Übungen im Untersuchen von gegebenen Gebilden auf die Existenz- bzw. Nichtexistenz eines neutralen Elementes bzw. zueinander inverser Elemente; Zusammenstellung der Untersuchungsergebnisse in übersichtlicher Form.

3. <u>Algebraische Strukturen, insbesondere Gruppen</u>

<u>7 bis 10 Stunden</u>

Die Behandlung dieses Stoffgebietes erfolgt mit dem Ziel, in diesem Lehrgang einen relativen Abschluß beim Heranführen der Schüler an typische Denk- und Arbeitsweisen der Algebra zu erreichen. Das soll dadurch geschehen, daß der Gruppenbegriff sorgfältig herausgearbeitet und daran dann das axiomatische Arbeiten bzw. das Vorgehen beim Aufbau einer mathematischen Theorie demonstriert wird. Damit die Schüler diese für sie neuartige Denk- und Arbeitsweise sowohl hinsichtlich des verfolgten Anliegens als auch hinsichtlich der Tragweite der erzielten Ergebnisse inhaltlich verstehen, ist besondere Sorgfalt auf das Erarbeiten der Begriffe "Gruppe" und "Halbgruppe" und ihre Definition mittels Axiomensysteme zu verwenden. Insbesondere ist es notwendig, deren Erarbeitung durch geschicktes Anknüpfen an Bekanntes und klare Problemstellungen zu motivieren und die Lehrgangsteilnehmer aktiv in den Erkenntnisprozeß einzubeziehen. Letzteres gilt auch für das weitere Arbeiten mit diesen Begriffen, vor allem für die Nutzung des erarbeiteten Axiomensystems für das Erkennen weiterer Eigenschaften von Gruppen bzw. Halbgruppen.
Am Ende der Behandlung dieses Stoffgebietes sollen die Schüler verstanden haben, daß es solche Begriffsbildungen und die damit verbundenen Denk- und Arbeitsweisen ermöglichen, bisher erwor-

bene Einzelerkenntnisse zusammenzufassen und in knapper, übersichtlicher Form darzustellen, stark verallgemeinerte mathematische Probleme zu formulieren und zu lösen und dadurch Untersuchungen für eine große Zahl von Gebilden in sehr rationeller Weise durchzuführen. Da es nicht möglich ist, die Vorteile dieser überaus erkenntnisökonomischen Verfahrensweise der Algebra in der zur Verfügung stehenden Zeit und auf Grund noch fehlender stofflicher Voraussetzungen im einzelnen zu belegen, ist es wichtig, den Unterricht so zu gestalten, daß

- die Reichweite von gewonnenen abstrakten Einsichten vor allem durch Aufzeigen allgemeiner und spezieller Konsequenzen demonstriert wird,
- bei den Schülern Interesse an diesen Denk- und Arbeitsweisen entwickelt wird und sie angeregt werden, sich selbständig weiterführend mit Gruppen und anderen algebraischen Strukturen zu beschäftigen,
- durch einen Rückblick - etwa in der letzten Stunde des Lehrgangs - der beschrittene Erkenntnisweg noch einmal bewußtgemacht und ein Ausblick auf weitere Problemstellungen, aber auch auf außermathematische Anwendungen der Gruppentheorie vorgenommen wird.

Im <u>ersten Stoffabschnitt</u> dieses Stoffgebietes ist von einer vergleichenden Analyse der im zweiten Stoffgebiet erworbenen Erkenntnisse über Gebilde und deren Eigenschaften auszugehen, was an Hand der dort schrittweise erarbeiteten übersichtlichen Zusammenstellung geschehen sollte. An den dort vorkommenden Gebilden vom Typ $[M;\circ]$ bzw. vom Typ $[M;\circ_1;\circ_2]$ werden vergleichende Untersuchungen hinsichtlich gemeinsamer und unterschiedlicher Eigenschaften durchgeführt und die zahlreich vorkommenden Gruppen bzw. Halbgruppen hervorgehoben, auf die dann alle nachfolgenden Betrachtungen konzentriert werden. Danach erfolgt die axiomatische Definition der Begriffe "Gruppe" und "Halbgruppe" und das Arbeiten mit diesen Begriffen und Axiomen, wie das nachfolgend im Abschnitt 3.1. im einzelnen dargestellt ist. Auf die charakteristischen Eigenschaften eines Axiomensystems (Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit) sollte hier noch nicht eingegangen werden.

Im zweiten Stoffabschnitt steht eindeutig das Arbeiten mit dem Begriff der Gruppe und den für seine Definition benutzten **Axiomen** im Mittelpunkt. Dabei sollte unbedingt gemeinsam erarbeitet werden, wie unter ausschließlicher Nutzung der Gruppenaxiome durch logisches Schließen weitere Eigenschaften der Gruppe ermittelt werden können. Das Beweisen entsprechend einfacher Sätze der Gruppentheorie bildet hier in spezifischer Weise (minimaler Umfang der Beweismittel) einen Schwerpunkt im Unterricht. Das soll den Schülern einen Eindruck vermitteln, wie ein kleines Anfangsstück einer mathematischen Theorie aufgebaut wird. In diesem Zusammenhang können dann auch erläuternde Hinweise zu den charakteristischen Eigenschaften eines Axiomensystems eingefügt werden.

Aber auch mit Strukturtafeln für endliche Gruppen sollte gearbeitet werden. Dabei kommt es zum einen darauf an, die Widerspiegelung der Gruppeneigenschaften in Strukturtafeln herauszuarbeiten. Zum anderen sind aber auch Strukturtafeln für endliche Gruppen gleicher Ordnung in **ihrem** "Bau" zu vergleichen, und daran ist der Begriff "isomorph" einzuführen.

Die weitere Stoffauswahl sowie die Art und Weise der Stoffbehandlung ist in einem erheblichen Maße von der noch zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit abhängig. Was auf den dargestellten Aspekten aufbauend gegebenenfalls noch zu behandeln ist, ist im einzelnen aus der nachfolgenden Stoffdarstellung im Abschnitt 3.2. zu entnehmen. Unbedingt notwendig ist es jedoch, neben einem zusammenfassenden Rückblick auch auf weitere Problemstellungen und auf außermathematische Anwendungen der Gruppentheorie einzugehen, was in Vortragsform in der letzten Unterrichtsstunde des Lehrgangs geschehen sollte.

3.1. Gruppen und Halbgruppen — 3 Stunden

Untersuchungen an der erarbeiteten Übersicht für Gebilde und deren jeweilige Eigenschaften zur Gewinnung der allgemeinen Aufgabenstellung in diesem Stoffgebiet; Vergleichende Betrachtungen zu diesen Gebilden hinsichtlich gemeinsamer und unterschiedlicher Eigenschaften. Einschränken auf solche Gebilde, bei denen die vier Eigenschaften

- Abgeschlossenheit der Menge bezüglich der in ihr definierten Operation,
- Assoziativität der betreffenden Operation,
- Existenz eines neutralen Elementes in der Menge,
- Existenz eines inversen Elementes zu jedem Element der Menge

erfüllt sind. Definieren von "Gruppe" und "Halbgruppe" für eine nichtleere Menge M mit einer vollständigen binären Operation durch Angabe der entsprechenden Axiome, dabei Einführen von "Axiom" und von "algebraische Struktur".
Einführen von "endliche Gruppe", "Ordnung einer Gruppe" und "unendliche Gruppe" sowie Definieren von "kommutative Gruppe"; Beispiele und Übungen, insbesondere Untersuchungen an der Übersicht auf das Erfülltsein bzw. Nichterfülltsein der Gruppen- bzw. Halbgruppenaxiome und Angeben von Beispielen in der Übersicht für Halbgruppen, die keine Gruppen sind sowie von Gruppen, die keine kommutative Gruppen sind.

3.2. Eigenschaften von Gruppen — 4 bis 7 Stunden

Weitere Eigenschaften der Gruppe, die aus den Gruppenaxiomen abgeleitet werden können, insbesondere der Satz über die Existenz genau eines neutralen Elementes in der Gruppe und der Satz, daß es zu jedem Element der Gruppe genau ein inverses gibt; Konsequenzen aus diesen Sätzen bzw. deren Beweisen für Halbgruppen; additive und multiplikative Schreibweise für Gruppen.
Untersuchungen zur Lösbarkeit linearer Gleichungen $a \cdot x = b$ bzw. $y \cdot a = b$ in Gruppen; Hinweise auf die damit gezeigte Kürzbarkeit und eindeutige Umkehrbarkeit der Gruppenoperation sowie auf die Möglichkeit eines modifizierten Axiomensystems für den allgemeinen Gruppenbegriff; Übungen im Erkennen von Gruppeneigenschaften endlicher Gruppen in Strukturtafeln und Herleiten der Regel $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ für alle Gruppenelemente a und b sowie der Regel $(a^{-1})^{-1} = a$ für alle Gruppenelemente a.
Einführen von "Potenzen eines Gruppenelements", von "erzeugendes Element" und von "zyklische Gruppe" an Hand geeigneter Beispiele, dabei Untersuchungen an Strukturtafeln für endliche Gruppen gleicher Ordnung, insbesondere auch Vergleichen solcher Gruppen hinsichtlich Gemeinsamkeiten und Unterschiede in ihren Strukturtafeln (teils als Übungen), Einführen von "isomorph", weitere

Übungen im Untersuchen von endlichen Gruppen gleicher Ordnung auf Isomorphie; Hinweis auf das Vorgehen bei der Ausdehnung dieser Betrachtungen auf unendliche Gruppen, dabei Einführen von "operationstreue Abbildung" und Definieren von "isomorph", Beispiele wie $P^+;\cdot$ ist isomorph zu $P;+$ als theoretische Grundlage des Multiplizierens mit dem Rechenstab. Zusammenfassender Rückblick über das gewählte Vorgehen im Lehrgang insgesamt und Ausblick auf weitere typische Problemstellungen und Anwendungsmöglichkeiten der Gruppentheorie innerhalb und außerhalb der Mathematik.

Literatur für den Lehrgangsleiter

Asser, G.: Grundbegriffe der Mathematik, I (Mathematik für Lehrer, Band 1). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

Flachsmeyer, J./Prokaska, L.: Algebra (Mathematik für Lehrer, Band 3). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

Kuroš, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra (Studienbücherei). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

Felix, L.: Elementarmathematik in moderner Darstellung. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1966.

Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1982.

Monjallon, A.: Einführung in die moderne Mathematik. VEB Fachbuchverlag Leipzig.

Kurzwort: 00 30 23 [illegible] Algebra