Mehr Spaß mit dem Taschenrechner

Gilde/Altrichter

POLYTECHNISCHE BIBLIOTHEK

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dr.-Ing. E. h. Werner Gilde
Dr.-Ing. Siegfried Altrichter

Mehr Spaß mit dem Taschenrechner

4. Auflage

Mit 22 Bildern

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Dieser Band der Polytechnischen Bibliothek erscheint in Zusammenarbeit mit der »Urania« Gesellschaft zur Verbreitung wissenschaftlicher Kenntnisse.

Das Buch wird als technisch-wissenschaftliche Abhandlung unter der Nr. 118 des Zentralinstituts für Schweißtechnik der DDR, Halle (Saale), geführt.

4. Auflage
Lizenznummer 114-210/57/82
LSV 3009
Illustrationen: Gerhard Raschpichler, Leipzig
Gesamtgestaltung: Lore Jacobi, Leipzig
Printed in GDR
Satz: Messedruck Leipzig, Bereich Borsdorf, 7122 Borsdorf (III-18-328)
Fotomechanischer Nachdruck: Druckerei Märkische Volksstimme Potsdam
Redaktionsschluß: 15. 4. 1982
Bestellnummer: 546 409 5
DDR 5,50 M

Vorwort

Zahlen üben auf die meisten Menschen eine starke Anziehungskraft aus. Viele begabte Zeitgenossen befaßten sich mit den Zahlen und ihren Verhältnissen zueinander. Denken wir nur an *Pythagoras*, denken wir an die Gelehrten, die mit unendlicher Geduld die Zahlenwerte für π berechneten, denken wir an die Erfinder magischer Quadrate. Die Beispiele lassen sich beliebig vermehren.
Vergessen wir in diesem Zusammenhang aber auch die Gedächtnis- und Rechenkünstler nicht, einerlei ob sie im engsten Familienkreis oder im Varieté ihre Leistungen zeigen.
Es gab aber bisher eine schwer zu überschreitende Grenze für die Beschäftigung mit Zahlen, das ist das Rechnen selbst. Solange die Rechenarbeit im Kopf oder mit Bleistift und Papier durchgeführt werden muß, neigen die meisten Menschen zur Ablehnung.
Durch die Entwicklung der Taschenrechner ist hier ein grundsätzlicher Wandel eingetreten. Rechnen ist keine Arbeit, sondern ein Spaß, ein Vergnügen.
Mit dem Taschenrechner erhält man eine Anleitung geliefert. Falls es sich um einen komplizierteren Rechner handelt, erhält der Käufer sogar eine Anzahl Programme. Letzten Endes sind das aber immer Zusammenstellungen über die funktionellen Eigenschaften des Rechners. Jedoch lassen sich mit dem Taschenrechner vielseitige mathematische Probleme lösen. Der Sinn des Taschenrechners ist überhaupt, „langweilige" Arbeit abzunehmen, damit sich der Mensch in der dadurch gewonnenen Zeit schon wieder anderen Problemen zuwenden kann.
Das Buch soll an Beispielen zeigen, was ein Rechner alles kann, wozu er zu gebrauchen ist und wozu er nützt. Dabei lassen wir offen, ob es sich um einen Taschenrechner handelt, der „nur" die vier Grundrechenarten beherrscht, oder um einen, der bereits wie eine EDV-Anlage programmierbar ist.
Wenn wir im Buch auf das exakte mathematische Beiwerk verzichten, so geschieht es einmal aus dem Grunde, daß sich auch gut mit Zahlen umgehen läßt, ohne jedesmal auf die

Mengenlehre zurückzugreifen, und zum anderen aus der Tatsache, daß die elektronische Schaltung unseres Taschenrechners auch nur 1 und 0 „versteht".
Schließlich möchten wir noch den beiden Gutachtern, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. *Fritz Koch*, Köthen, und Herrn Diplomphysiker *Norbert Denkmann*, Leipzig, danken. Beide Wissenschaftler sind passionierte Nutzer eines Taschenrechners und haben keine Mühe gescheut, Wort für Wort und Zahl für Zahl des Manuskriptes kritisch zu prüfen.

Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

Bitte unbedingt lesen

1. Trotz aller Mühe der Autoren und des Verlages schleichen sich in ein Buch dieser Art Rechenfehler, logische Fehler, Ablesefehler und Druckfehler ein.
Falls Ihre Nachrechnungen andere Resultate ergeben, als wir sie hier angeben, so prüfen Sie das Ergebnis noch einmal. Bleibt Ihr Rechner bei seinem abweichenden Ergebnis, dann schreiben Sie uns bitte eine freundliche Postkarte.

2. Dies ist ein Buch, das dem Rechnerbesitzer Spaß machen soll. Wer will, kann – braucht aber nicht – etwas daraus lernen. Sie können bei jedem Abschnitt beginnen. Sie können es auch von rückwärts abschnittsweise lesen. Jedoch raten wir ab, es von vorn oder gar „systematisch" durcharbeiten zu wollen. Dafür ist es nicht gedacht.

3. Mit Absicht folgen die Abschnitte nicht nach ihrem Schwierigkeitsgrad. Auch auf eine Ordnung nach mathematischen Gesichtspunkten wurde verzichtet. Wir wollen nicht Mathematik lehren, dafür gibt es ausgezeichnete Bücher, sondern Freude am Rechnen wecken.

4. Da jeder Abschnitt für sich verständlich sein soll, sind einige Wiederholungen in den „Hinweisen" (mit Balken gekennzeichnete Stellen) beabsichtigt.

5. Die Verfasser benutzten mehrere Taschenrechner verschiedener Ausstattung. Diese Rechner (und auch die, die wir uns bei Freunden ansahen) waren in der Tastatur und in der Gebrauchsanweisung unterschiedlich.
Wir haben daher auch in unserem Text keine einheitlichen Formelzeichen, Symbole und Rechenabläufe benutzt, sondern immer die, die uns für den jeweiligen Abschnitt am günstigsten erschienen.

Ein Vergleich von Herz und Motor

Jeder Kraftfahrer wird zugeben, daß ein Motor, der 120000 km ohne größere Reparaturen zurücklegte, sich bewährt hat. Es wird nach dieser Laufstrecke, die immerhin dreimal um den Erdball reicht, Zeit, die Maschine auszuwechseln.
Nehmen wir an, der Kraftwagen gehörte einem vorsichtigen Fahrer, der auch im Stadtverkehr fuhr und immer alle Geschwindigkeitsbegrenzungen beachtete. Dann dürfte seine Durchschnittsgeschwindigkeit bei etwa 60 km/h liegen.
Die Laufzeit des Motors beträgt dann

$$120000 : 60 = 2000$$

Stunden. Das ist weniger als die Arbeitszeit eines Werktätigen in einem Jahr.
Bei einem Fahrer, der schnelle Fahrten auf der Autobahn durchführte, sinkt die Laufzeit des Motors weiter ab.
Wir bleiben bei diesem Beispiel, besonders bei den 2000 Stunden. Nachdem wir uns über diese überraschend kleine Zahl beruhigt haben, rechnen wir weiter. Uns interessiert, wieviel Umdrehungen die Kurbelwelle machte.
Die günstigste Drehzahl wird in den Fahrzeugbeschreibungen mit etwa 4000 Umdrehungen je Minute angegeben. Sie können natürlich auch in den Unterlagen Ihres Wagens nachsehen und die Zahlen daraus entnehmen.
Die Motorwelle machte also während ihrer Laufzeit

$$2000 \cdot 60 \cdot 4000 = 480000000$$

Umdrehungen. Das ist schon eine beachtliche Zahl!
Nun vergleichen wir den Motor einmal mit unserem „menschlichen Motor", unserem Herz.
Wenn wir ab 60 oder 65 Jahren Veteranen sind, so schlug unser Herz ununterbrochen durchschnittlich 80 mal in der Minute. Bei Kindern ist der Puls schneller, bei älteren Leuten langsamer. Jedenfalls arbeitet das Herz jährlich

$$24 \cdot 365 = 8760$$

Stunden. Das ist schon dreimal so lange wie ein Motor bis zur Generalreparatur. In einem Jahr schlägt es

$$8760 \cdot 80 \cdot 60 = 42\,048\,000 \text{ mal},$$

in 65 Jahren

$$42\,048\,000 \cdot 65 = 2\,733\,120\,000 \text{ mal}.$$

Das Ergebnis ist erstaunlich.
Das Herz arbeitet zwar langsamer als die Kurbelwelle eines Motors, aber in 11 Jahren pumpt es etwa so oft, wie die Welle sich im Laufe ihrer Tätigkeit dreht. Das sind insgesamt

$$2\,733\,120\,000 : 480\,000\,000 \approx 6$$

mal so viele Arbeitstakte.
Die Lebensdauer des Herzens ist sogar

$$65 \text{ Jahre} : 2000 \text{ Stunden} = 65 \cdot 365 \cdot 24 : 2000 = 284{,}7$$

mal so groß wie die eines Fahrzeugmotors.
Nach Aussagen der Mediziner hat unser Herz eine Leistung von 0,84 Watt.
Bei einem durchschnittlichen Verbrauch an Kraftstoff von 8 l/100 km mit einem Heizwert von $33{,}5 \cdot 10^6$ J/l beträgt die Antriebsenergie des Fahrzeugmotors

$$120\,000 \text{ km} \cdot \frac{8 \text{ l}}{100 \text{ km}} \cdot 33{,}5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{l}} = 3{,}22 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

Mit einem Wirkungsgrad von 35 % und bei 2000 Betriebsstunden entspricht das einer Leistung von

$$\frac{3{,}22 \cdot 10^{11} \text{ J} \cdot 0{,}35}{2000 \cdot 3600 \text{ s}} = 15\,653 \text{ W},$$

d.h., der Fahrzeugmotor hat eine etwa 18600fache Leistung gegenüber unserem Herzen.

Schneller als das Licht?

Die meisten Leser kennen die Geschichte des Wettlaufes zwischen dem Igel (sowie dessen Frau) und dem Hasen. Entgegen aller Theorie blieb der Igel Sieger. „Die Geschichte muß wahr sein, sonst könnte man sie nicht erzählen", so lautet der Anfang. Die folgende Geschichte muß auch wahr sein, sonst würde sie nicht in diesem Buch stehen.
Im Jahr 2050 züchtete ein Wissenschaftler eine neue Bakterienart. Das Züchtungsergebnis war 1/100 mm lang. Alle 20 Minuten verdoppelte es seine Länge, also nach 20 Minuten auf 2/100 mm, nach 40 Minuten auf 4/100 mm und nach einer Stunde immerhin auf 8/100 mm. Der Wissenschaftler war sehr stolz auf seine Züchtung. Daher teilte er sie durch Funk seinem Kollegen mit, der auf einer außerplanetarischen Station 21 Lichtstunden entfernt im All arbeitete.
Auf wieviel Millimeter war das neue Bakterium gewachsen, als der Funkspruch auf der Station ankam? Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Start des Signals mit der Entstehung des neuen Lebewesens zusammenfällt.
Zuerst machen wir uns Gedanken, wieviel Kilometer die außerplanetarische Station entfernt war. Das Funksignal durcheilt den Raum mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} 300\,000 \text{ km/s} &= 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ &= 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s} \end{aligned}$$

21 Stunden bestehen aus

$$21 \cdot 60 \cdot 60 = 75\,600$$

Sekunden.
Daher beträgt die Entfernung zur Station

$$7{,}56 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{11} = 2{,}27 \cdot 10^{16}$$

Millimeter, das sind $2{,}27 \cdot 10^{10}$ Kilometer.

Man sieht, in 21 Stunden kommt ein Funksignal ganz schön weit durch das Weltall.
Was ist in diesen 21 Stunden nun mit unserem Bakterium geschehen? Es hat sich jede Stunde dreimal auf das Doppelte verlängert. Als es in den ersten 20 Minuten um 1/100 mm wuchs, legte die elektromagnetische Welle 360 Millionen Kilometer zurück. Wenn das Funksignal empfangen wird, hat das Bakterium sich $21 \cdot 3 = 63$ mal in der Länge verdoppelt.
Für die geometrische Folge, die diesen Vorgang beschreibt, setzen wir

$$L_{\mathrm{Bak}} = L_0 \cdot 2^{63}$$

(vgl. Abschnitt „Zins und Zinseszins")

$$L_{\mathrm{Bak}} = 0{,}01 \cdot 2^{63}\ \mathrm{mm}$$
$$L_{\mathrm{Bak}} = 0{,}01 \cdot 9{,}22 \cdot 10^{18}\ \mathrm{mm}$$
$$L_{\mathrm{Bak}} = 9{,}22 \cdot 10^{16}\ \mathrm{mm} = 9{,}22 \cdot 10^{10}\ \mathrm{km}$$

Unser kleines Bakterium ist also enorm gewachsen. Wer nicht an die Richtigkeit der Gleichung glaubt und daher das Resultat anzweifelt, kann natürlich ohne Schwierigkeiten die Folge

$$0{,}01;\ 2 \cdot 0{,}01;\ 2 \cdot (2 \cdot 0{,}01);\ 2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 0{,}01)];\ \ldots$$

bis zu ihrem 64. Glied berechnen.

Bei Rechnern, die keine $\boxed{y^x}$-Taste haben, kann 2^{63} leicht berechnet werden, wenn beachtet wird, daß $2^{63} = 2^{64} : 2$ ist und $2^{64} = 2^{(2^6)}$ gesetzt wird. Nach Eingabe der „2" drücken wir also sechsmal hintereinander die Quadrattaste und teilen anschließend noch durch 2.

Das eigentlich Verblüffende ist, daß die Länge des Bakteriums (zumindestens auf dem Papier) nach 21 Stunden viermal so groß ist wie die vom Funkstrahl zurückgelegte Strecke.

Noch verblüffender ist, daß dieser Effekt trotz des „langsamen" Wachstums erreicht wird.
Wenn im Jahre 2050 wirklich ein Bakterienstamm gezüchtet würde, dessen Individuen immer länger würden, und die von der Relativitätstheorie geforderte Höchstgeschwindigkeit von 300000 km/s von ihm überschritten werden könnte und das Bakterium sich bei dieser Geschwindigkeit nicht einfach in Energie umwandelt und ... (es gibt sicher noch einige weitere „Wenns"), dann wäre das „wachsende Ende" des neuen Lebewesens schneller in der Raumstation als die Nachricht über seine Schöpfung.
Unser Computer hat uns hier eine Science-fiction-story vorgerechnet. Rechnerisch stimmt alles. Aber keine Rechnung führt über ihre Vorbedingungen hinaus. Wir haben hier physikalische Gesetze einfach „außer Kraft" gesetzt. Daher wurde das Resultat unsinnig.
Doch auch dies unsinnige Ergebnis kann uns etwas lehren. Lassen wir das Wachstum von Bakterien, von Öllachen, von Schutt und Müll oder von Abgasen in geometrischen Reihen ansteigen, so entzieht es sich jeder verstandesmäßigen Einschätzung. Ein Teich, der – kaum bemerkbar – zu 0,01 (1 %) mit Algen bedeckt ist, die wegen der Abwässer sich täglich plötzlich verdoppeln, ist in n Tagen völlig verschmutzt. In diesem Falle gilt

$$A = 0{,}01\,A \cdot 2^n$$

Wenn ein Exponent gesucht wird, logarithmieren wir

$$\lg A = \lg 0{,}01 + \lg A + n \cdot \lg 2$$

Das heißt

$$n = -\frac{\lg 0{,}01}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2} = \frac{2}{0{,}301} = 6{,}64 \approx 7$$

Nach wieviel Tagen wäre er zur Hälfte mit Algen bedeckt?

$$0{,}5\,A = 0{,}01\,A \cdot 2^n$$

Daraus ergibt sich $n = 5{,}67 \approx 6$.
Nach sechs Tagen wäre der Teich vielleicht noch zu retten. Einen Tag später ist er endgültig biologisch „umgekippt".
So schnell geht das!

Wir rechnen für unser Auto

Die Geschwindigkeit unseres Kraftfahrzeuges zeigt der Tachometer an. Irgendwelche Rechnerei ist hier nicht nötig. Anders sieht es mit der Durchschnittsgeschwindigkeit aus. Wenn ich die 194 km von Halle nach Berlin in 2 Stunden und 30 Minuten fahre, so beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit auf dieser Strecke

$$\frac{194\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h}} = 77{,}60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Auf dem Rückweg von Berlin nach Halle komme ich in den Feierabendverkehr und benötige 2 Stunden und 45 Minuten. Jetzt beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{194\,\text{km}}{2{,}75\,\text{h}} \approx 70{,}55\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit meiner Reise Halle – Berlin – Halle beträgt aber nicht

$$\frac{1}{2}\left(77{,}60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 70{,}55\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) = 74{,}07\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

sondern

$$\frac{2 \cdot 194\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h} + 2{,}75\,\text{h}} \approx 73{,}90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist das Verhältnis aus der gesamten Fahrstrecke und der dafür benötigten Fahrzeit. Wenn nun auf einer solchen Fahrt der Keilriemen reißt, so ist es mathematisch interessant zu berechnen, wie lang der Ersatzriemen sein muß. (In Wirklichkeit haben wir natürlich einen fertigen Riemen mit.)
Unser Bild zeigt die notwendigen Bestimmungsstücke. Es sind die Radien R und r der Scheiben und ihr Achsabstand a. Durch die Größe der Scheiben bedingt, liegt der Riemen ein gewisses Stück auf der Scheibe auf. Der Radius R

und r an dieser Stelle bildet mit dem Abstand a den Winkel α. Auf die Ableitung der Gleichung verzichten wir. Die Riemenlänge L beträgt

$$L = 2\left[\sqrt{a^2 - (R - r)^2} - \alpha\,(R - r) + \pi \cdot R\right]$$

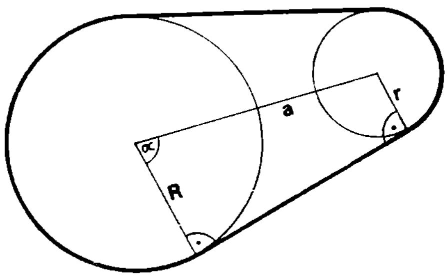

Bild 1. Aus diesen Angaben läßt sich die Länge eines Keilriemens berechnen

Ohne Rechner steht man einer solchen Gleichung ziemlich hilflos gegenüber. Sie wird noch komplizierter, wenn wir α bestimmen (wieder ohne Ableitung)

$$\alpha = \arccos \frac{R - r}{a} \text{ (im Bogenmaß bzw. in Radiant)}$$

Wir setzen den Wert für α ein

$$L = 2\left[\sqrt{a^2 - (R - r)^2} - (R - r) \arccos \frac{R - r}{a} + \pi \cdot R\right]$$

Nun brauchen Sie nur noch die Maße für R, r und a von Ihrem Wagenmotor abzunehmen.
Die Nichtautobesitzer helfen sich mit einem angenommenen Beispiel. Wir wählen

$$R = 2\,r$$

$$a = 2\,R = 4\,r$$

Dann vereinfacht sich die Gleichung.

$$L = 2\left[\sqrt{(4\,r)^2 - (2\,r - r)^2}\right.$$

$$\left. - (2\,r - r)\arccos\frac{2\,r - r}{4\,r} + \pi \cdot 2\,r\right]$$

$$L = 2\left(\sqrt{16\,r^2 - r^2} - r\arccos\frac{1}{4} + 2\pi\,r\right)$$

$$L = 2\,(\sqrt{15\,r^2} - r\arccos 0{,}25 + 6{,}28\,r)$$

Wer an seinem Rechner eine $\boxed{\text{rad}}$-Taste hat, muß sie hier bedienen, denn α muß im Bogenmaß angegeben werden.

$$\arccos 0{,}25 = 1{,}32 \text{ rad.}$$

Bei Rechnern, die nur mit Grad arbeiten, verwenden wir den Umrechnungsfaktor

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}017453 \text{ rad}$$

$$\arccos 0{,}25 = 75{,}52^\circ$$

$$75{,}52 \cdot 0{,}017453 = 1{,}32 \text{ rad}$$

$$L = 2\,(3{,}87\,r - 1{,}32\,r + 6{,}28\,r)$$

$$L = 17{,}66\,r = 8{,}83\,R$$

Wir vereinfachten zuerst die Gleichung und rechneten dann. Natürlich hätten wir auch mit der Originalgleichung direkt rechnen können.

ausrechnen.

Auf den Spuren des jungen *Gauß*

Aus der Kinderzeit des Mathematikers *Friedrich Gauß* wird folgende Geschichte erzählt:
„Eines Tages wollte der Schullehrer in der Klasse, zu der auch der kleine *Gauß* gehörte, einmal ein Weilchen seine Ruhe haben und gab daher den Kindern die Aufgabe, die Zahlen 1 bis 100 zusammenzuzählen. Während die ganze Klasse fieberhaft zu rechnen begann, überlegte *Gauß* erst einige Minuten, und dann schrieb er ziemlich rasch das Ergebnis hin. Vorbei war es nun mit der Ruhe des Herrn Lehrers." Wie war das geschehen?
Der Junge hatte ziemlich rasch folgendes bemerkt:
Wenn man eine Anzahl von fortlaufenden Zahlen 1 bis n addiert, so bilden die erste und letzte, zweite und vorletzte usw. immer gleiche Summen $n + 1$, und zwar $\frac{n}{2}$ solcher Pärchen. Bei ihm sah das sicher folgendermaßen aus

$$\underbrace{1 + \underbrace{2 + 3}_{5} + 4}_{5} = 10 = \frac{4}{2}(4 + 1)$$

Das mußte auch für $n = 100$ gelten, also war diese Summe

$$\frac{100}{2}(100 + 1) = 5050$$

Jetzt ändern wir die Aufgabe etwas um und fragen: Wie groß ist die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 23?
Schnell addieren wir $1 + 3 + 5$ usw. $= 144$. Gleichzeitig zählen wir mit, es sind 12 Zahlen.
Nun fragen wir nach der Summe der geraden Zahlen von 2 bis 24. Die Addition der 12 Zahlen ergibt 156.

$$\frac{12}{2}(1 + 23) = 144$$

$$\frac{12}{2}(2 + 24) = 156$$

Daraus leiten wir ab:
Die Summe s einer arithmetischen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

d.h. einer Reihe, die aus n Summanden besteht und für die die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, kann aus

$$s = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

berechnet werden, Dabei ist n die Anzahl der Glieder, a_1 das erste und a_n das letzte Glied.
Wie groß ist nun die Summe aller geraden Zahlen von 16 bis 50?
Hier müssen wir etwas überlegen.
Diese Reihe hat

$$\frac{50}{2} - \frac{14}{2} = 25 - 7 = 18$$

Glieder. Deshalb erhalten wir

$$s = \frac{18}{2}(16 + 50) = 594$$

Bemerkenswert ist, daß die Formel für die Berechnung der Summe s einer arithmetischen Reihe auch dann noch Gültigkeit hat, wenn die Reihe eine ungerade Anzahl von Gliedern aufweist.
Schließlich ändern wir die Originalaufgabe von *Gauß* noch etwas ab. Wie groß ist die Summe aller Zahlen von 19 bis 200?
Diese Reihe besteht aus $200 - 18 = 182$ Gliedern.
Die Summe ist

$$s = \frac{182}{2} \cdot (19 + 200) = 19929.$$

Bei diesen Aufgaben muß man also immer genau beachten, was gefragt ist: die Summe aller Zahlen oder die Summe aller geraden (ungeraden) Zahlen.

Die Schallplatte in Zahlen

Bei Benutzung unseres Taschenrechners ist die Berechnung einer Schallplatte ein besonderer Leckerbissen. Die Rillen auf der Platte bilden eine Spirale (wir sehen von den aufgezeichneten Schwingungen ab).
Spiralen zu berechnen ist ohne Hilfsmittel eine langweilige und langwierige Angelegenheit.
Unsere Schallplatte trägt eine *archimedische* Spirale, d.h., der Abstand zwischen zwei Rillen ist überall gleich (nochmals: wir beachten hier nicht die aufgezeichneten Schwingungen, die die Spirale zu einer spiralförmigen Zickzacklinie machen). Bei einer Mikroplatte befinden sich etwa 9 Rillen auf einem Millimeter Radius. Die Kerbgründe der Rillen (als mathematische Linie gedacht) liegen also $k = \frac{1}{9}$ mm $= 0{,}11$ mm auseinander.
Die äußere Rille liege z.B. 140 mm und die innere Rille 70 mm vom Mittelpunkt entfernt. Natürlich ändern sich diese Maße von Platte zu Platte etwas.
Erwähnt sei hier, daß z.B. Schneckenhäuser und aufgesprungene Spiralfedern eine logarithmische Spirale bilden. Bei ihnen nimmt der Abstand zwischen den Windungen zu, je weiter die Windung vom Ausgangspunkt entfernt liegt. Eine solche Spirale wäre natürlich für Schallplatten denkbar ungeeignet. Wir kennen bisher von unserer Schallplatte die folgenden Größen:

$$r = 140 \text{ mm}$$

$$r_{\min} = 70 \text{ mm}$$

$$k = 0{,}11 \text{ mm}$$

Mit diesen Werten können wir noch nicht die Spirale berechnen. Wir benötigen noch das Maß a, denn der Abstand zwischen zwei Spiralwindungen ist

$$k = 2\pi \cdot a$$

$$a = \frac{k}{2\pi} = 0{,}02 \text{ mm}$$

Im Bild wählten wir $a = 2$ mm, weil wir sonst eine Darstellung erhalten hätten, auf der die Windungen der Spirale kaum auseinanderzuhalten gewesen wären.

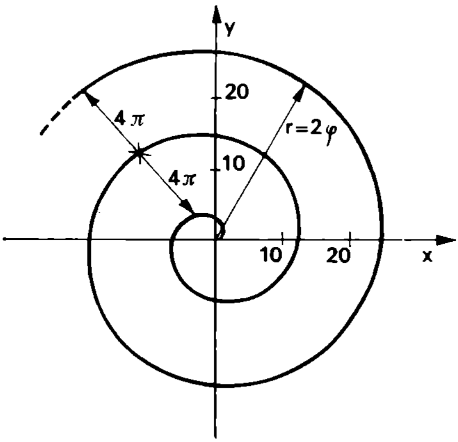

Bild 2. Die archimedische Spirale $r = a \cdot \varphi$ (in Polarkoordinaten) für $a = 2$ mm

Rechnen wir schnell zur Kontrolle (ein Vorteil des Rechners) die Spirale mit $a = 2$ mm durch.
In Polarkoordinaten ist

$$r = a \cdot \varphi$$

Der Winkel φ ist im Bogenmaß, also Radiant, gemessen. Wenn unser Rechner keine $\boxed{\text{rad}}$-Taste hat, müssen wir umrechnen

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = 57° \, 17' \, 45'' = 57{,}2957795\ldots°.$$

Rechnen wir r für 90° aus. Zuerst müssen wir 90° in rad bestimmen

$$90° = \frac{\pi}{180} \cdot 90 \text{ rad}$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Damit wird

$$r = a \cdot \varphi$$

$$r = \frac{2\,\mathrm{mm}\,\pi}{2} = 3{,}14\ \mathrm{mm}$$

Prüfen Sie im Bild nach. Die 90° werden von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeiger gemessen (eine Eigenheit der Mathematiker). Auf der positiven y-Achse finden wir tatsächlich den Wert 3,14. Wer einen Rechner besitzt, in dem die Polarkoordinaten unmittelbar in rechtwinklige Koordinaten umgerechnet werden können, kann jeden Punkt der Spirale in beiden Systemen angeben. Unter Verwendung der folgenden Formeln kann man das natürlich mit jedem anderen Rechner auch, vorausgesetzt, er hat Tasten für die Winkelfunktionen.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \qquad y = r \cdot \sin \varphi$$

Nachdem wir nun ausprobiert haben, daß sich archimedische Spiralen sehr einfach durch Polarkoordinaten beschreiben lassen, wenden wir uns wieder unserer Schallplatte zu. Wir möchten gern wissen, wie lang die Rillenspur ist. Die Länge s der Spirale vom Zentrum bis zum Punkt φ ist

$$s = \frac{a}{2}\left(\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \operatorname{arsinh} \varphi\right)$$

$\sinh \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ ist eine hyperbolische Funktion,
$\operatorname{arsinh} \varphi = \sinh^{-1} \varphi = \ln\left[\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right]$ ist die Umkehrfunktion dazu.
Damit ergibt sich

$$s = \frac{a}{2}\left\{\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \ln\left[\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right]\right\}$$

360° ist, in rad ausgedrückt, gleich

$$360 \cdot \frac{\pi}{180} = 2\pi$$

Damit wird die Gleichung schon sympathischer:

$$s = \frac{a}{2}\left\{\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right) + \ln\left[2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right]\right\}$$

Würden wir jetzt s ausrechnen, so erhielten wir den sehr kleinen Wert 0,425 mm. Das ist die Länge der ersten Windung um den Mittelpunkt der Platte. Dort befindet sich natürlich keine Windung. Die Spirale beginnt ja erst 70 mm vom Mittelpunkt entfernt. Daher müssen wir für jede weitere Windung 2π zum Winkel φ hinzufügen.

Überlegen wir: auf 1 mm sind 9 Windungen,
auf 70 mm sind 630 Windungen, aber diese sind gar nicht eingeprägt;
auf 140 mm sind 1260 Windungen.

Wir müssen also rechnen

$$s = s_{1260} - s_{630},$$

um die Länge der Windungen zu erhalten. Das ergibt den Innenwert

$$s_{630} = \frac{a}{2}\left\{630 \cdot 2\pi\sqrt{1 + 630^2 \cdot 4\pi^2}\right.$$

$$\left. + \ln\left[630 \cdot 2\pi + \sqrt{1 + 630^2 \cdot 4\pi^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{0{,}02\ \text{mm}}{2} \cdot 15\,668\,993{,}43$$

$$= 156\,689{,}93\ \text{mm}$$

und entsprechend den Außenwert

$$s_{1260} = \frac{a}{2}\left\{1260 \cdot 2\pi\sqrt{1 + 1260^2 \cdot 4\pi^2}\right.$$

$$\left. + \ln\left[1260 \cdot 2\pi + \sqrt{1 + 1260^2 \cdot 4\pi^2}\right]\right\}$$

$$= 626\,759{,}46\ \text{mm}$$

Die Gesamtlänge aller Rillen beträgt also

$$s = (626\,759{,}46 - 156\,689{,}93)\,\mathrm{mm} = 470\,069{,}53\,\mathrm{mm}.$$

Das sind rund 470 m.
Um Ihnen zu zeigen, daß man unter Umständen mit einer einfacheren Näherungsformel auch Werte erhalten kann, die völlig zufriedenstellend sind, führen wir noch folgende Rechnung durch.
Für große φ (diese Voraussetzung ist hier mit $\varphi = 630 \cdot 2\pi$ bzw. $\varphi = 1260 \cdot 2\pi$ durchaus erfüllt) gilt die vereinfachte Formel für die Länge einer Spirale

$$s = \frac{a}{2} \cdot \varphi^2$$

Damit erhalten wir

$$s_{630} = \frac{0{,}02\,\mathrm{mm}}{2} \cdot (630 \cdot 2\pi)^2 = 156\,689{,}8\,\mathrm{mm}$$

und

$$s_{1260} = \frac{0{,}02\,\mathrm{mm}}{2} (1260 \cdot 2\pi)^2 = 626\,759{,}4\,\mathrm{mm}.$$

Das ergibt eine Gesamtlänge von

$$626\,759{,}4\,\mathrm{mm} - 156\,689{,}8\,\mathrm{mm} \doteq 470\,069{,}6\,\mathrm{mm}.$$

Das ist millimetergenau die gleiche Länge.
Wir vermuten, daß die Frage nach ein paar Zehntel- oder Hundertstelmillimeter mehr oder weniger Rillenlänge Ihren musikalischen Genuß beim Anhören der Platte überhaupt nicht beeinträchtigt.

Die Berechnung des Mount Everest

Zu einem Zeitpunkt, als der Mount Everest noch nicht bestiegen war, kannte man doch schon seine genaue Lage und Höhe. Er wurde vermessen von einer Geometergruppe unter Leitung von einem Herrn *Everest.*
Natürlich ist es Ihnen im Prinzip bekannt, wie die Vermesser arbeiten. Sie messen eine Basislänge aus und bestimmen von den Endpunkten dieser Linie die Winkel zu den zu vermessenden Kirchtürmen und Straßenkreuzungen. Winkel lassen sich mit den üblichen Geräten genauer messen als Strecken, d.h., seit der Erfindung der Radartechnik ist es umgekehrt, aber wir bleiben in diesem Beispiel bei den Winkeln.
Die Arbeitsgruppe von Herrn *Everest* hatte also irgendwo am Fuße des Himalaja eine Basisstrecke festgelegt. Von ihren Endpunkten aus visierten die Geometer die Spitze eines (damals unbekannten) Berges an und maßen die Winkel.

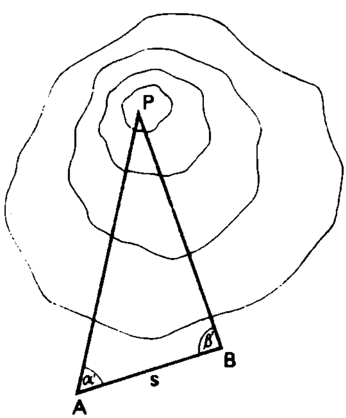

Bild 3. Geographische Ortung eines Punktes von einer Standlinie s aus (von oben gesehen)

Es ist verständlich, daß sie durch α und β die geographische Lage des Berges bestimmen konnten (obwohl die notwendige Rechnerei weit über das aus der Schule bekannte Maß der Dreiecksberechnung hinausgeht).

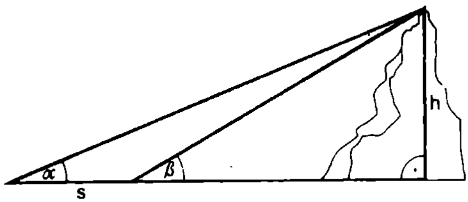

Bild 4. Der Berggipfel wird anvisiert, um seine Höhe h berechnen zu können

Überraschend war die Auswertung der Vertikalwinkel. Die Höhe eines Berges gegenüber der Basislinie beträgt

$$h = s \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

Nehmen wir an, die Basislinie s wäre 1000 m lang (als Engländer hatte *Everest* sicher ein Meilenmaß genommen). Sie soll (auch aus Gründen der Einfachheit) in Meereshöhe liegen. Welche Winkel wurden gefunden?
Jetzt zeigt unser Rechner wieder einmal seine großen Vorteile. Wir müssen die Größen von α und β in diesem Fall durch Ausprobieren finden, denn die wirklichen Messungen sind uns ja unbekannt. Wir kennen nur das Ergebnis. Der Berg besaß eine Höhe von etwa 8800 m. Er wurde benannt nach dem Mann, der ihn vermessen hat.
Bevor wir nun die Winkel abschätzen, überlegen wir:

1. Die Winkel werden klein gewesen sein, denn der Mount Everest liegt ein ganzes Stück im Himalaja drin, und wir befinden uns am Fuß der Berge.

2. Daher muß auch die Differenz $\beta - \alpha$ sehr klein sein.

Nun können Sie alle denkbaren Kombinationen ausprobieren. Wir entschieden uns für

$$h = 1000\,\text{m}\,\frac{\sin 6° \cdot \sin 5{,}93°}{\sin 0{,}07°} = 8839{,}26\,\text{m}$$

Vielleicht finden Sie andere Winkel?
Wie weit lag die Basis vom Mount Everest entfernt?
Da wir die Höhe $h = 8840$ m und den Winkel $\alpha = 6°$ kennen,

beträgt die Entfernung

$$E = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{8840 \text{ m}}{\tan 6°}$$

$$E = 84\,107 \text{ m} = 84{,}1 \text{ km}$$

Das ist ein vernünftiger Wert.
Nun sind natürlich nicht alle Vermessungsunternehmen so aufregend, wie die von Herrn *Everest*. Auf den Feldern und den Straßen sehen wir oft Gruppen, die mit dem Theodoliten und der Meßlatte umgehen.
Wenn der Vermesser durch das Fernrohr des Theodoliten auf die Meßlatte schaut, so kann er zwischen zwei parallelen Strichen im Fernrohr auf der Latte einen bestimmten Abstand L bestimmen. Gleichzeitig mißt er einen Winkel α zwischen der Visierlinie und der Waagerechten, falls das Gelände ansteigt oder abfällt.
Mit diesen beiden Werten errechnet er

die horizontale Entfernung $a = 100 \cdot L \cdot \cos^2 \alpha$,

die Höhendifferenz $h = 50 \cdot L \cdot \sin 2\alpha$.

Die Faktoren 100 und 50 ergeben sich aus der Gerätekonstanten.

In der Ebene ist $\alpha = 0°$ und $\cos^2 \alpha = 1$, damit sind $100\,L$ direkt die Entfernung. Hingegen ist $\sin 0° = 0$, und damit $h = 0$.

Für ganz genaue Messung ist (mit C als Gerätekonstante)

$$a = L \cdot C \cdot \cos^2 \alpha - \frac{L}{4\,C} \sin^2 \alpha.$$

Ohne Rechner muß es schrecklich gewesen sein, solche Aufgaben zu lösen.

Nachhilfe für Skatspieler

Das Skatspiel erfreut sich aus zwei Gründen allgemeiner Beliebtheit. Erstens gehört eine Portion Glück dazu, um längere Zeit immer „gute“ Karten zu erhalten, und zweitens gestatten die Spielregeln, durch Geschick die verschiedenen Kartenkombinationen vorteilhaft auszunutzen. Zum Beispiel kann ein Spieler „ganz schlechte“ Karten verwenden, um mit einem „Nullouvert“ zu gewinnen.
Passionierte Skatspieler behaupten, daß kein Spiel dem anderen gleiche. Stimmt das?
Um diese Frage zu entscheiden, greifen wir auf die Kombinatorik zurück. Nehmen wir an, das Spiel würde nur aus drei Karten, Bube (B), Dame (D), König (K), bestehen, so wären folgende Verteilungen möglich

BDK; BKD; DKB; DBK; KDB; KBD.

Von drei Elementen kann jedes zweimal an erster Stelle stehen. Die beiden anderen stehen dann an zweiter oder an dritter Stelle. Es sind $3 \cdot 2 = 6$ Permutationen möglich.
Bei 4 Karten gäbe es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Permutationen.
Die Mathematiker kürzen das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ durch das Symbol $n!$ (n Fakultät) ab. Also

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Bevor Sie jetzt 32! ausrechnen, müssen wir uns über eine Besonderheit des Skatspiels einigen. Es sind ja drei Spieler mit je 10 Karten beteiligt und – gleichsam als vierter Spieler – der Stock oder Skat mit 2 Karten. Daher ist die Zahl der möglichen Kombinationen

$$Z = \frac{32!}{10!\,10!\,10!\,2!}.$$

Es ist

$$32! = 2{,}63 \cdot 10^{35}$$

$$10! = 3628800$$

$$2! \cdot (10!)^3 = 9{,}56 \cdot 10^{19}$$

und daher

$$Z = 2{,}75 \cdot 10^{15}.$$

Natürlich interessiert sich ein echter Skatspieler auch dafür, ob es ihm vergönnt ist, alle diese Spiele jemals zu spielen. Nehmen wir an, ein Spiel dauert einschließlich des Mischens 5 Minuten. Das sind 12 Spiele in der Stunde. Ein fanatischer Spieler kann 16 Stunden täglich spielen, das sind 192 Spiele am Tag und 70080 Spiele im Jahr.

$$2{,}75 \cdot 10^{15} : 70080 = 3{,}92 \cdot 10^{10}$$

Jahre müßte Skat gespielt werden, um alle Spiele durchzuprobieren. Nun könnte vielleicht eines Tages theoretisch die gesamte Menschheit auf die Idee kommen, statt zu arbeiten, Dauerksat zu betreiben. Bei 5 Milliarden Menschen wären das jährlich

$$70080 \cdot 5000000000 : 3 = 1{,}168 \cdot 10^{14}$$

Spiele, da bekanntlich zu einem Skatspiel immer 3 Personen gehören. Für alle Spiele würde so eine Zeit von

$$2{,}75 \cdot 10^{15} : 1{,}168 \cdot 10^{14} = 23{,}54$$

Jahren benötigt.

Tatsächlich wäre es möglich, alle nur denkbaren Spiele in rund 23,5 Jahren mit Hilfe der gesamten Weltbevölkerung durchzuführen. (Es müßten sich nur außerplanetarische Lebewesen bereit erklären, uns während dieser Zeit zu ernähren.)

Mittelwert und Streuung

Wenn in einer Klasse von 30 Schülern beiderlei Geschlechts die durchschnittliche Körpergröße 1,60 m und die durchschnittliche Körpermasse 62,5 kg beträgt, dann heißt das durchaus nicht, daß auch nur ein einziger der jungen Leute diese Maße hat. Ein Hersteller für Jugendmode, der diese Angaben seinem Produktionsprogramm zugrunde legt und einen großen Teil seiner Produkte nach diesen Abmessungen produziert, plant völlig daneben. Das zeigt schon die Grenzen der Aussagekraft solcher Größen, so wichtig sie auch in manchen Zusammenhängen sein mögen. Außerdem ist es ja auch noch sehr wichtig, wie groß die Schwankungen um einen solchen mittleren Wert sind.
Damit haben wir auch gleich die beiden wichtigsten Kenngrößen der mathematischen Statistik kennengelernt:
den arithmetischen Mittelwert M (in der Technik meist als Durchschnitt bezeichnet) und die Standardabweichung s als Maß für die Streuung.
Das arithmetische Mittel berechnet sich nach der Formel

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Die Meßwerte sind x_i, die Zahl der Objekte ist n.
Die Einfachheit dieser Formel erklärt auch ihre Beliebtheit.
Die Standardabweichung s ist schon etwas aufwendiger in der Berechnung

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - M)^2}{n-1}}$$

Es müssen also die Differenzen aller Meßwerte zum Mittelwert gebildet und einzeln quadriert werden. Dann wird aufsummiert, durch $n - 1$ geteilt und daraus die Quadratwurzel gezogen.
Wenn n sehr groß ist, muß man sehr viele Additionen ausführen. In solchen Fällen geht man daher anders vor.

Zunächst einmal die Liste mit den Körperlängen der 30 Schüler.

1,43	1,48	1,62	1,65	1,69
1,44	1,50	1,63	1,67	1,69
1,46	1,52	1,64	1,67	1,70
1,46	1,53	1,64	1,68	1,70
1,47	1,55	1,64	1,68	1,70
1,47	1,55	1,65	1,68	1,71

Zur abgekürzten Berechnung von M und s wird zunächst eine sogenannte Klasseneinteilung vorgenommen, z.B. 1,40 bis 1,44, 1,45 bis 1,49 usw. Am bequemsten ist dazu eine Strichliste. Die Klassenmitten x_m betragen dann 1,42 m, 1,47 m, 1,52 m usw.
Dann verteilen wir Klassennummern: Die Klasse, in der wir den Mittelwert vermuten, bekommt eine Null (Ein Irrtum wirkt sich nicht auf das Ergebnis aus!). Nach oben und unten wird ganzzahlig weiternumeriert. Die folgende Tabelle zeigt die Vorgehensweise.

Klasse	Klassenmitte x_m	absolute Häufigkeit h_m	Klassennummer m	$m \cdot h_m$	$m^2 \cdot h_m$
1,40 ··· 1,44	1,42	2	− 3	− 6	18
1,45 ··· 1,49	1,47	5	− 2	− 10	20
1,50 ··· 1,54	1,52	3	− 1	− 3	3
1,55 ··· 1,59	1,57	2	0	0	0
1,60 ··· 1,64	1,62	5	+ 1	+ 5	5
1,65 ··· 1,69	1,67	9	+ 2	+ 18	36
1,70 ··· 1,74	1,72	4	+ 3	+ 12	36
Summen		$n = 30$		$A = +16$	$B = 118$

Mit dem angenommenen Mittelwert $\bar{x}$ (= 1,57 m) und der Klassenbreite d (= 0,05 m) gilt

$$M = \bar{x} + \frac{d \cdot A}{n} = 1{,}57\ \text{m} + \frac{0{,}05\ \text{m} \cdot (16)}{30} = 1{,}60\ \text{m}$$

und

$$s = d \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(B - \frac{A^2}{n}\right)}$$

$$= 0{,}05\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{29}\left(118 - \frac{16^2}{30}\right)} = 0{,}097\ \text{m} \approx 0{,}1\ \text{m}$$

Die genaueren Werte sind: $M = 1{,}5967$ und $s = 0{,}0958$.
Als Bezeichnung – besonders in den angelsächsischen Ländern – wird statt der Standardabweichung s häufig die sogenannte Varianz s^2 als Maß für die Streuung angegeben.
Wenn wir vom Mittelwert bzw. Durchschnitt reden, meinen wir fast immer das oben erwähnte arithmetische Mittel. Es gibt aber noch einige Fälle, wo die Angabe einer anderen Kenngröße aufschlußreicher ist.
Wenn z.B. die Meßwerte nicht symmetrisch um einen mittleren Wert schwanken, die Verteilung also schief ist, verwendet man den sogenannten Median (Zentralwert, Halbwert). Er gibt denjenigen beobachteten Wert an, der die Verteilung in zwei gleich große Hälften aufteilt, so daß jeder Teil 50 % der untersuchten Objekte enthält. Bei unseren Schülern wäre das die Körpergröße zwischen dem 15. und 16. Schüler, wenn wir sie der Größe nach geordnet haben. Nach der Liste ist das 1,64 m.
Zwei weitere Mittelwerte sind das geometrische und das harmonische Mittel.
Das erstere berechnet sich nach der Formel

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n},$$

wenn n Meßgrößen mit den (positiven) Werten x_1 bis x_n vorliegen. Es wird vorwiegend verwendet, wenn Durchschnittsangaben über Wachstumsprozesse gemacht werden sollen, die durch relative Angaben beschrieben werden, z.B. Prozentzahlen.

Ihr Gehalt sei innerhalb der letzten drei Jahre um 5, 8 und 8 Prozent (immer bezogen auf das Vorjahr) gewachsen.
Nach unserer Formel ergibt das eine durchschnittliche Gehaltserhöhung von

$$\sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot 8} = \sqrt[3]{320} = 6{,}84\,\%.$$

Schließlich gibt es noch das harmonische Mittel

$$M_{\mathrm{H}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Es dient zur Durchschnittsbildung für Geschwindigkeiten, Dichten und andere Größen, die durch Quotienten bestimmt sind.

Dazu stellen wir Ihnen folgende Aufgabe:
Sie fahren mit Ihrem Wagen mit einer Reisegeschwindigkeit von 60 km/h und haben unterwegs einen Hügel zu bewältigen. Sie fahren ihn mit 30 km/h hinauf. Wie schnell müssen Sie wieder bergab fahren, um Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beizubehalten? Wenn Sie jetzt an das arithmetische Mittel denken und „90 km/h" sagen, ist das falsch. Wenn Sie dagegen in die obenstehende Formel für $M_{\mathrm{H}} = 60$, für $n = 2$ und für $x_1 = 30$ einsetzen, ergibt sich für x_2 eine „unendlich große" Geschwindigkeit.
Das verstößt aber gegen die Straßenverkehrsordnung.
Unsere Formel schließt den Fall, daß die Durchschnittsgeschwindigkeit das Doppelte der einen Teilgeschwindigkeit beträgt, grundsätzlich aus.
Wenn Sie nun wirklich mit 30 km/h bergauf fahren und mit 90 km/h bergab, dann ist

$$M_{\mathrm{H}} = \frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{90}}\ \mathrm{km/h} = 45\ \mathrm{km/h}$$

Das ist Ihre tatsächliche Durchschnittsgeschwindigkeit für diese Berg- und Talfahrt.

Die Fibonacci-Zahlen

Der italienische Mathematiker *Leonardo Fibonacci* (1180 bis 1250) erfand eine merkwürdig anmutende Zahlenfolge: Das erste Glied ist eine Eins. Danach kommt noch eine Eins. Jedes weitere Glied ist dann die Summe der beiden vorhergehenden. Diese Zahlen bilden die Folge:
1; 1; 2(= 1 + 1); 3(= 2 + 1); 5(= 3 + 2); 8(= 5 + 3); 13(= 8 + 5); usw. So einfach das Bildungsgesetz dieser sogenannten *Fibonacci*-Folge mit Worten zu beschreiben ist, so kompliziert sieht die Formel für das allgemeine Glied aus. Es gilt nämlich für die n-te Zahl F_n:

$$F_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n \pm \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Das positive Vorzeichen zwischen den beiden Klammerausdrücken gilt für ungerade n, das negative für gerade n.

Das angezeigte Ergebnis müssen Sie auf eine ganze Zahl runden. Abweichungen davon beruhen auf Rundungsfehlern des Rechners, die vor allem beim Wurzelziehen entstehen.

Im Abschnitt „Der Goldene Schnitt" werden wir Ihnen zeigen, daß sich bei der Bestimmung des Zahlenwertes für das Verhältnis zweier Strecken, die durch den Goldenen Schnitt geteilt werden, eine quadratische Gleichung mit der Lösung $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ergibt.

Sie vermuten weiterhin, daß da einige Querverbindungen von den *Fibonacci*-Zahlen zur „mathematischen Ästhetik" existieren. Sie haben richtig vermutet. Die Mathematiker haben nämlich folgendes herausgefunden:
Wenn man zwei aufeinanderfolgende Zahlen der *Fibonacci*-Folge durcheinander dividiert, dann ergibt sich ein Näherungswert für das Verhältnis des Goldenen Schnittes. Diese

Näherung ist um so besser, je höher die Ordnung dieser beiden Glieder ist.
Sie können das selbst nachprüfen:

$$8 : 5 = 1{,}6$$
$$13 : 8 = 1{,}625$$
$$21 : 13 = 1{,}61$$
$$34 : 21 = 1{,}62$$
usw.

Aber auch die Biologen haben etwas mit den *Fibonacci*-Zahlen anfangen können. Sie stellten z.B. fest: Die Winkel zwischen benachbarten Blättern, die in Form einer Rosette um einen Zweig herum angeordnet sind, sind konstant und für jede Pflanzenart charakteristisch.
Am häufigsten kommen die folgenden Teile eines Vollwinkels von 360° vor:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{13};\ \frac{8}{21};\ \text{usw.}$$

Zähler und Nenner dieser Brüche gehören aber zur Folge der *Fibonacci*-Zahlen.
Für die Ausbildung eines Bienenstockes und auch den Bau eines Spinnennetzes gelten ähnliche Bedingungen.

Ums liebe Pi

Die alten Babylonier (einige tausend Jahre v. u. Z.) begnügten sich damit, die wichtige geometrische Kenngröße Pi (Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises) durch die Zahl 3 anzunähern.
Das schien für die damaligen Bedürfnisse des Bauwesens und der Landvermessung wohl auszureichen.

Auf einem altägyptischen Papyrus ist für π die schon wesentlich bessere Näherung von 3,1605 angegeben. Um 1600 berechnete der holländische Mathematiker *Ludolf van Ceulen* den Zahlenwert von π auf 35 Stellen nach dem Komma. Im vorigen Jahrhundert hat dann der Engländer *William Shanks* einen nicht unbeträchtlichen Teil seines Lebens dazu verwendet, die Zahl π auf über 700 Dezimalstellen zu berechnen.

Naheliegenderweise hat sich in den folgenden Jahrzehnten niemand gefunden, der den gesamten Berechnungsgang einmal überprüft hätte. Allerdings tauchte in zunehmendem Maße der Verdacht auf, daß mit dem Ergebnis etwas nicht in Ordnung sei. Theoretisch mußten nämlich alle Ziffern 0 bis 9 mit der gleichen Häufigkeit vorkommen. Es zeigte sich aber, daß die „7" statistisch zu selten auftrat.

Erst die moderne elektronische Rechentechnik bot die Möglichkeit, mit einem vergleichsweise geringen Aufwand der Zahl π noch einmal zu Leibe zu rücken. 1961 benötigte ein Computer weniger als 4 1/2 Stunden, um etwas über 100000 Dezimalstellen zu berechnen. Es wurde dazu eine Formel von *Gauß* verwendet:

$$\pi = 48 \arctan \frac{1}{18} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239},$$

wobei die Arkustangenswerte mit Hilfe der Reihenentwicklung

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

ermittelt werden können. Es zeigte sich, daß der oben erwähnte *William Shanks* sich tatsächlich verrechnet hatte, und zwar in der 528. Stelle. Auf Grund des verwendeten Berechnungsverfahrens waren alle weiteren Stellen ebenfalls falsch.

Es zeigte sich ferner, daß die Theorie wieder im Einvernehmen mit der Praxis stand: Alle Ziffern kommen nun annähernd mit der gleichen Häufigkeit vor, d.h. jede etwa 10000mal.

Es erhebt sich nun natürlich die Frage, wieviel Stellen wir für praktische Rechnungen überhaupt gebrauchen können. Falls Sie auf Ihrem Rechner keine Pi-Taste haben, wird damit auch Ihr Gedächtnisspeicher angesprochen.
Erwähnt sei, daß der Bruch $\frac{355}{113}$ die Zahl π mit einem Fehler annähert, der kleiner als $3 \cdot 10^{-7}$ ist.
Wenn Sie für Literatur ein besseres Gedächtnis haben als für „nackte" Zahlen, empfehlen wir Ihnen folgenden kleinen Vers aus unserer Schulzeit:

Wie, o dies π
macht ernstlich so vielen viele Müh.

Sie bemerken vielleicht schon, daß der poetische Gehalt des Spruches nicht sehr groß ist. Dafür enthält er in verschlüsselter Form die Zahl π auf 9 Stellen nach dem Komma.
Die Anzahl der Buchstaben in jedem Wort liefert nämlich in der gleichen Reihenfolge die gesuchte Ziffer, d.h.

$$3{,}141592653.$$

Wenn Sie über die neun Kommastellen verfügen, heißt das, die Abweichung vom „wahren" Wert π muß kleiner als fünf Zehnmilliardstel sein, d.h. $\Delta\pi < 5 \cdot 10^{-10}$.
Prüfen wir einmal, wie ein solcher Fehler in einer Eingangsgröße sich bei einer Berechnung auf die Ausgangsgröße auswirkt.
Nehmen wir einen Kreis mit dem Radius von 1 Kilometer. Größere Abmessungen technischer Gebilde sind im allgemeinen für Präzisionsbestimmungen uninteressant.
Der Umfang dieses Kreises beträgt $U = 2\pi\ R = \pi \cdot 2 \cdot 10^3$ m, dann ist der maximale Fehler des Umfanges

$$\Delta\ U = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot \Delta\pi = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot 5 \cdot 10^{-10}$$

$$= 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1\ \text{Mikrometer}.$$

Mit der gegebenen Genauigkeit von π ist also der Umfang unseres Kreises von exakt 2 km Durchmesser bis auf 1/1000 mm genau bestimmt. Wer wollte das nachmessen?

Was faßt ein Faß?

Im Jahre 1616 veröffentlichte der Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* eine umfangreiche Abhandlung über die Stereometrie von Fässern. Obwohl der Verdacht naheliegt, daß so kurz vor Ausbruch des 30jährigen Krieges die Konstruktion von Pulverfässern im Vordergrund gestanden hat, weist der Originaltitel „Nova stereometria doliorum vinariorum" eindeutig auf Weinfässer hin. Wir wollen uns hier, dem Zuge der Zeit entsprechend, mit Bierfässern befassen.

Als gute Näherung für das Volumen eines faßähnlichen Körpers gilt die Formel

$$V \approx \frac{H}{6} \cdot (A_0 + 4\,A_1 + A_2),$$

worin H die Höhe, A_0 die Grundfläche, A_1 die mittlere Querschnittsfläche und A_2 die Deckfläche des Fasses bedeutet (alles Innenmaße!). Wenn wir den üblichen Fall annehmen, daß Grund- und Deckfläche gleich sind, d. h.

$$A_0 = A_2 = \frac{\pi \cdot D_0^2}{4}$$

und alle Querschnittsflächen Kreisflächen sind, dann ergibt sich nach einigen Umformungen

$$V = \frac{\pi \cdot H}{12} \cdot D_0^2 \left[1 + 2\left(\frac{D_1}{D_0}\right)^2\right]$$

Die lichte Höhe eines Fasses sei 60 cm, der mittlere Innendurchmesser 50 cm, die Innendurchmesser unten und oben seien 40 cm.

Dann ist das Volumen unseres Fäßchens

$$V = \frac{\pi \cdot 0{,}6}{12} \cdot 0{,}16 \cdot [1 + 2 \cdot 1{,}25^2]\ \mathrm{m}^3$$

$$= 0{,}1037\ \mathrm{m}^3 \approx 104\ \text{Liter}.$$

Um ein paar Liter mehr oder weniger wollen wir dabei nicht streiten, denn die oben verwendete Formel ist eine erste Näherung.
Sie ist eine spezielle Anwendung der sogenannten *Kepler*schen Faßregel

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,y_1 + y_2)$$

Der linken Seite dieser Gleichung sieht man allerdings die Verwandtschaft mit unserem Faßproblem nicht mehr an.
Jetzt bedeutet h die Schrittweite $\left(\textit{hier}: h = \frac{H}{2}\right)$.
Für diejenigen, die keine „höhere Mathematik" in der Schule hatten, sei gesagt, daß das bestimmte Integral

$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,\mathrm{d}x$ [lies: Integral von x_0 bis $x_0 + 2\,h$ über $f(x)\,\mathrm{d}x$]

die Fläche unter einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ darstellt, und zwar zwischen $x = x_0$ und $x = x_0 + 2\,h$.

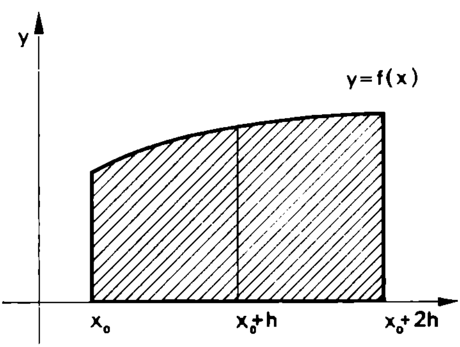

Bild 5. Die Fläche unter diesem Kurvenstück läßt sich mit der Keplerschen Faßregel berechnen

Dabei ist die Funktion $y = f(x)$ durch ein Parabelstück angenähert, das durch die Funktionswerte $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_0 + h)$ und $y_2 = f(x_0 + 2\,h)$ gelegt wird. Durch 3 Punkte kann immer eindeutig eine Parabel gelegt werden.

Nehmen wir an, wir wollen die Fläche berechnen, die zwischen der Kurve $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ und der x-Achse liegt, und zwar zwischen $x = 0$ und $x = 4$, das ist also die Lösung des Integrals

$$\int_0^4 \sqrt{x^2 + 3}\, dx .$$

Nach der *Kepler*schen Faßregel ist das

$$A \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4\, y_1 + y_2)$$

Dabei ist $2\,h = 4$, d.h. $h = 2$; $y_0 = \sqrt{0 + 3} = \sqrt{3}$

$$y_1 = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

$$y_2 = \sqrt{16 + 3} = \sqrt{19}$$

Dann beträgt

$$A \approx \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + \sqrt{19}\right) = 11{,}116 \text{ Flächeneinheiten}$$

Es sei hier verraten, daß die exakte Lösung des Integrals bzw. der gesuchten Fläche

$$A = 11{,}0788$$

ist.

Die Abweichung beträgt also 0,3 %.

Nun ist die *Kepler*sche Faßregel nur ein Sonderfall eines allgemeinen Verfahrens, das der englische Mathematiker *Thomas Simpson* (1710 bis 1761) entwickelt hat.

Der Grundgedanke der *Simpson*schen Regel besteht darin, daß beliebig viele Schrittfolgen nach der Faßregel hintereinandergeschaltet werden, um für ein bestimmtes Intervall die Fläche unter einer gegebenen Kurve zu berechnen, also eine numerische Integration durchzuführen. Dabei werden die Schrittlängen entsprechend kleiner und die Zahl der Parabelstückchen, durch die die gegebene Funktion ersetzt wird, größer. Das führt zu der besseren Näherungsformel

$$\int_{x_0}^{x_0+n\cdot 2h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + \cdots + 4\,y_{2n-1} + y_{2n})$$

Die innere Symmetrie des Klammerausdruckes bedarf keiner näheren Erläuterung.
Als Anwendungsbeispiel nehmen wir wieder das Integral

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x,$$

das wir jetzt in 4 Abschnitte aufteilen, indem wir 5 Funktionswerte verwenden. Dann ist $n = 2$ bzw. $h = 1$, und es folgt

$$A \approx \frac{1}{3}\cdot(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + y_4)\,.$$

Mit $y_0 = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$; $y_1 = \sqrt{1+3} = 2$; $y_2 = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$; $y_3 = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ und $y_4 = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$

ergibt sich

$$A \approx \frac{1}{3}\left(\sqrt{3} + 8 + 2\cdot\sqrt{7} + 4\cdot\sqrt{12} + \sqrt{19}\right)$$
$$= 11{,}079\cdots \approx 11{,}08$$

Die Abweichung vom exakten Wert ist jetzt völlig vernachlässigbar.
Nachdem Sie nun in der Lage sind, mit Hilfe Ihres Taschenrechners eine beliebig vorgegebene Funktion zahlenmäßig mit beliebiger Genauigkeit zu integrieren, wollen wir noch einmal zu unserem Faßproblem zurückkehren.
Bisher ging es immer darum, Kurven bzw. Funktionen zu integrieren, die formelmäßig gegeben waren. Dann kann man natürlich die benötigten Funktionswerte an den Stellen x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2\,h$ usw. jederzeit ausrechnen. In vielen

praktisch interessierenden Fällen müssen aber die Abmessungen an gegebenen Objekten ermittelt werden. So ist das auch bei der Gestalt unseres Fasses.
Vielleicht haben Sie schon bemerkt, daß die zu Anfang dieses Abschnittes vorgestellte Volumenformel dadurch aus der *Kepler*schen Faßformel entsteht, daß in der letzteren auf der rechten Seite die Schrittweite h durch $\frac{H}{2}$ ersetzt wird, während die Funktionswerte f_0, f_1 und f_2 durch die inneren Querschnittsflächen A_0, A_1, A_2 ersetzt werden. Naheliegenderweise läßt sich dann aus der *Simpson*schen Regel eine Volumenformel mit einer besseren Näherung gewinnen. Für interessierte Leser sei hier eingefügt, daß in den Konstruktionsbüros unserer Werften die Volumina der Schiffe mit Hilfe dieser *Simpson*schen Formel berechnet werden.
Wenn wir uns mit einer Viertelteilung unseres Fasses begnügen, dann ist $h = \frac{H}{4}$ und damit

$$V \approx \frac{H}{12} (A_0 + 4\,A_1 + 2\,A_2 + 4\,A_3 + A_4)$$

A_0 und A_4 sind Grund- bzw. Deckfläche, A_2 ist die Mittelfläche, A_1 und A_3 liegen in 1/4 bzw. 3/4 der Höhe H.
Aus den Symmetrieeigenschaften von Bierfässern schließen wir wieder:

$$A_0 = A_4 = \frac{\pi\,D_0^2}{4}; \; A_1 = A_3 = \frac{\pi\,D_1^2}{4}$$

Das ergibt nach einigen Umformungen

$$V \approx \frac{\pi \cdot H}{24} (D_0^2 + 4\,D_1^2 + D_2^2)$$

Nehmen wir an, wir haben D_1 zu 46 cm ermittelt.

Innendurchmesser
= Außendurchmesser — 2 · Wanddicke

Dann ist

$$V \approx \frac{\pi \cdot 0{,}6\,\mathrm{m}}{24} \cdot (0{,}4^2 + 4 \cdot 0{,}46^2 + 0{,}5^2)\,\mathrm{m}^2$$

$$= 0{,}0986\,\mathrm{m}^3 = 98{,}6\ \text{Liter}.$$

Das ist schon eine bessere Näherung, sowohl von der Mathematik als auch vom Verbraucher her gesehen. Wohl bekomm's!

Wir lösen Differentialgleichungen

Nachdem wir Ihnen im vorhergehenden Abschnitt gezeigt haben, wie Sie (ohne Kenntnis der sogenannten höheren Mathematik) Flächen berechnen können, die von krummlinigen Kurven begrenzt werden, sollen Sie jetzt erfahren, wie Sie einfache Differentialgleichungen numerisch, d.h. zahlenmäßig, lösen können.
Solche Differentialgleichungen spielen in allen Bereichen der Naturwissenschaft und Technik eine große Rolle. Sie enthalten außer der Variablen x und einer Funktion $y = f(x)$ auch noch die (im einfachsten Falle erste) Ableitung der Funktion y nach x, d.h. die Funktion y'.
Der einfachste Typ einer Differentialgleichung der ersten Ordnung sieht so aus:

$$y' = f(x, y)$$

Diese Gleichung zu lösen bedeutet, eine Funktion $y = g(x)$ zu finden, die die gegebene Differentialgleichung erfüllt. Prinzipiell ergeben sich unendlich viele Lösungsfunktionen, die sich lediglich durch eine Konstante unterscheiden.
Durch die Vorgabe eines Anfangswertepaares x_0 und y_0 ergibt sich dann eine ganz bestimmte Lösung.

Eine bewährte Methode der praktischen Mathematik zur numerischen Lösung solcher Differentialgleichungen ist das *Runge-Kutta*-Verfahren. Es geht aus von einem vorgegebenen Anfangswert x_0, y_0 und berechnet schrittweise weitere y-Werte, wenn die x-Werte jeweils um eine festgelegte Schrittweite h erhöht werden.
Das ergibt zahlenmäßig die weiteren Wertepaare

$x_0 + h; y\,(x_0 + h)$

$x_0 + 2\,h; y\,(x_0 + 2\,h)$ usw.,

aus denen sich die gesuchte Lösungsfunktion auch graphisch in einem x,y-Koordinatensystem darstellen läßt.
Auf eine mathematische Ableitung der beim *Runge-Kutta*-Verfahren verwendeten Formeln soll hier verzichtet werden. Sie würde den Rahmen dieses Buches sprengen und einen Nichtmathematiker vermutlich auch langweilen.
Sie haben die Gestalt:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[f\,(x_i;\, y_i) + f\,(x_{i+1};\, \delta_{i+1})] \text{ mit}$$

$$\delta_{i+1} = y_i + h \cdot f\,(x_i;\, y_i) \text{ und } x_i = x_0 + i \cdot h$$

$$\text{für } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Gegeben seien die Anfangswerte x_0 und y_0 sowie die Schrittweite h (und natürlich auch die zu lösende Differentialgleichung).
Es besteht kein Grund zur Beunruhigung. Sie werden an dem folgenden Beispiel schnell erkennen, welche Rechenoperationen sich hinter den obenstehenden Formeln verbergen.
Wir wollen nun die „lineare, homogene, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung“

$$y' = \sqrt{x} \cdot y$$

numerisch mit Hilfe unseres Taschenrechners und des *Runge-Kutta*-Verfahrens lösen.
Anfangswerte seien $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$. Wir wählen den Bereich $x = 1$ bis $x = 2$ mit einer Schrittweite $h = 0{,}2$.
Auf Grund der Gestalt unserer gegebenen Differentialgleichung ist $f\,(x_i;\, y_i) = \sqrt{x_i} \cdot y_i$

Der laufende Index i beginnt mit $i = 0$ und wird schrittweise (je Rechendurchlauf) um eins erhöht. Es sind dann

$$x_1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$$
$$x_2 = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$$
$$x_3 = \qquad\qquad 1{,}6 \text{ usw.}$$

Für $i = 0$ ist

$$\delta_1 = y_0 + h \cdot \sqrt{x_0} \cdot y_0 = 1 + 0{,}2 \cdot \sqrt{1} \cdot 1 = 1{,}2\,,$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[\sqrt{x_0} \cdot y_0 + \sqrt{x_1} \cdot \delta_1\right]$$
$$= 1 + \frac{0{,}2}{2}\left[\sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}2\right] = 1{,}231\,.$$

Für $i = 1$ ist

$$\delta_2 = y_1 + h \cdot \sqrt{x_1} \cdot y_1 = 1{,}231 + 0{,}2 \cdot \sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}231$$
$$= 1{,}501,$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[\sqrt{x_1} \cdot y_1 + \sqrt{x_2} \cdot \delta_2\right]$$
$$= 1{,}231 + \frac{0{,}2}{2}\left[\sqrt{1{,}2} \cdot 1{,}231 + \sqrt{1{,}4} \cdot 1{,}501\right]$$
$$= 1{,}543.$$

Entsprechend ergeben sich

$$y_3 = 1{,}967$$
$$y_4 = 2{,}547$$
$$y_5 = 3{,}346$$

In der folgenden Tabelle sind die näherungsweise nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren berechneten Werte $y_{(\text{näher})}$ und die aus der exakten Lösungsfunktion

$$y = e^{\frac{2}{3}(x^{3/2} - 1)}$$

berechneten Werte $y_{(\text{exakt})}$ angegeben. Die letzte Zeile enthält die prozentualen Abweichungen von diesen exakten Werten $\left(p = \frac{y_{\text{ex}} - y_{\text{näh}}}{y_{\text{ex}}}\right)$.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y_{(\text{näher})}$	1	1,231	1,543	1,967	2,547	3,346
$y_{(\text{exakt})}$	1	1,233	1,549	1,979	2,568	3,384
p	0 %	0,2 %	0,4 %	0,6 %	0,8 %	1,1 %

Es ist deutlich zu erkennen, daß die Abweichungen mit fortschreitender Berechnung immer größer werden, aber das ist eine prinzipielle Eigenschaft des verwendeten Verfahrens. Eine kleinere Schrittweite h würde eine höhere Genauigkeit ergeben, aber natürlich auch einen größeren Rechenaufwand.

Das „Nimm“-Spiel

Vielleicht sind Sie in einem geselligen Kreis schon einmal aufgefordert worden, das folgende Spiel mitzumachen und haben vermutlich dabei verloren, falls Sie die optimale Strategie nicht beherrschten. Wir möchten Sie daher im folgenden in die Geheimnisse dieses „Nimm“-Spiels einweihen.

Außerdem wollen wir Ihnen zeigen, wie Sie – ohne allzu viel dabei nachzudenken – mit Hilfe einer einfachen Rechenvorschrift und eines Taschenrechners der untersten Leistungsklasse gewinnen können.

Auf dem Tisch befindet sich eine vorher festgelegte Anzahl (N) von Streichhölzern. Zwei Parteien müssen abwechselnd mindestens 1, höchstens eine ebenso festgelegte

Anzahl p dem Haufen entnehmen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat verloren. N soll viel größer als p sein.
Um die Gewinnstrategie herauszubekommen, müssen wir das Spiel vom Ende her aufrollen. Dazu wählen wir als praktische Zahlen einmal $N = 20$ und $p = 4$. Es liegen also 20 Hölzchen auf dem Tisch, und jede Partei muß abwechselnd 1 bis 4 Hölzchen entnehmen.
Damit Ihr Gegner verliert, muß er zum Schluß 1 Streichholz vorfinden. (Falls es z.B. 3 sind, nimmt er 2 weg, und Sie sind am Zuge, müssen das letzte nehmen und haben damit verloren.) Wieviel Hölzer muß nun in der vorletzten Runde Ihr Gegner vor sich haben? Es sind offenbar 6. Wenn er nämlich 1, 2, 3 oder 4 entnimmt, nehmen Sie entsprechend 4, 3, 2 oder 1 auf, und es bleibt in jedem Falle für ihn zum Schluß nur eines übrig.
Durch eine analoge Weiterführung dieser Gedanken können Sie ableiten, daß Sie in der drittletzten Runde 11 Hölzchen für Ihren Gegner übrig lassen müssen, um zu gewinnen.
Die genannten Zahlen bilden aber die arithmetische Folge 1, 6, 11, 16 (bis man unterhalb von $N = 20$ angekommen ist, mehr sind ja nicht da!). Das entspricht ganz allgemein der Folge

$$1, p + 2, 2p + 3, 3p + 4, \ldots,$$

bis das nächste Glied N zu überschreiten droht.
Wenn Sie also am Zuge sind, müssen Sie so viele Streichhölzer wegnehmen, daß eine Anzahl aus der oben genannten Folge liegen bleibt. Das gilt für jede Phase des Spieles und natürlich auch für den Spielbeginn.
Daraus können Sie schon ersehen, daß Sie den ersten Zug haben müssen, wenn Sie das Spiel zwangsläufig gewinnen wollen. Sonst wendet nämlich Ihr Gegner die optimale Strategie an (falls er sie kennt), indem er in die genannte Zahlenfolge „hineinspringt“. Und *er* gewinnt.
Aber Sie sollten den Mut nicht verlieren. Vielleicht hat Ihr Gegner nur den ersten oder auch noch den zweiten Zug zufällig richtig gewählt. Sobald es Ihnen im Verlaufe des Spieles auch nur einmal gelingt, in die Zahlenfolge „hineinzukommen“, werden Sie gewinnen.
Es gibt einen einzigen Fall, wo Sie das Spiel eröffnen und

trotzdem nicht zwangsläufig gewinnen können (wenn die Gegenpartei die Gewinnstrategie anwendet):
Wenn nämlich die Zahl $N - 1$ durch $p + 1$ ohne Rest teilbar ist. Das können Sie aus der folgenden Rechenvorschrift ersehen. Aber vielleicht läßt sich das durch eine geeignete Festlegung von N und p von vornherein ausschließen.
Hier folgt nun der Berechnungsgang zur Gewinnstrategie:
Vor Ihnen liegen N Hölzchen auf dem Tisch. Sie müssen 1 bis maximal p Stück wegnehmen. (Verlangen Sie, daß $N - 1$ nicht ohne Rest durch $p + 1$ teilbar ist.)

1. Berechnen Sie den Quotienten $\frac{N-1}{p+1}$.
   Das ergibt eine ganze Zahl K und einen Rest (alles was hinter dem Komma steht!).

2. Multiplizieren Sie $p + 1$ mit K.

3. Subtrahieren Sie das Ergebnis von 2. von dem Wert $N - 1$. Das ergibt die Zahl der Hölzchen, die Sie wegnehmen müssen.

4. Verfahren Sie in jedem weiteren Schritt (mit jeweils einem anderen, kleineren Wert N) genauso nach Pkt. 1 bis 3.

Den Besuchern von Rechenzentren wird gern angeboten, einmal gegen den dort vorhandenen großen Computer das „Nimm“-Spiel zu machen. Im allgemeinen läßt man dem Gast den ersten Zug. Seien Sie frohgemut. Sie werden den Computer bezwingen, wenn Sie die obengenannte Strategie anwenden. Er arbeitet nämlich auch nur nach dem gleichen Programm wie Sie.
Wir beglückwünschen Sie jetzt schon zum Gewinn!

Der Goldene Schnitt

Schon im alten Griechenland war man davon überzeugt, daß sich die Schönheit von Sinneswahrnehmungen in bestimmten Zahlenbeziehungen widerspiegelt. Seit mehr als 2000 Jahren hat sich z.B. die Meinung behauptet, daß eine Strecke, die im Verhältnis des sogenannten „Goldenen Schnittes" geteilt wird, auf uns besonders ästhetisch wirkt. Das ist dann der Fall, wenn sich die Gesamtstrecke $a + b$ zur größeren Teilstrecke b verhält wie die letztere zur kleineren Teilstrecke a, d.h.,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

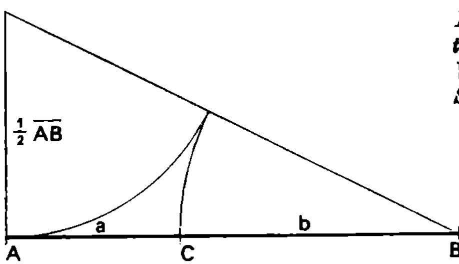

Bild 6. Der Punkt C teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnittes

Das gilt auch für flächenförmige Gebilde. Wir empfinden ein Rechteck als besonders ansprechend, wenn seine Seiten im Verhältnis

$$q = \frac{b}{a}$$

stehen.

Wir möchten Ihnen nun zeigen, wie Sie mit Hilfe Ihres Taschenrechners die „Schönheit" Ihrer graphischen Entwürfe überprüfen können.

Auf dem ersten Blick will es gar nicht einleuchten, daß sich aus der obenstehenden Formel für $\frac{b}{a}$ ein bestimmter Zahlen-

wert ausrechnen läßt. Aber, wie so oft im Leben, ist auch hier das Probieren das Beste.
Zunächst brauchen wir aber nicht den Taschenrechner, sondern einige Mathematikkenntnisse aus der Schule.
Wir multiplizieren die Gleichung $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$ mit dem Hauptnenner:

$$a^2 + b \cdot a = b^2,$$

bringen alles auf eine Seite: $b^2 - b \cdot a - a^2 = 0$ und teilen diese Gleichung durch a^2. Das ergibt die quadratische Gleichung für $q = \frac{b}{a}$:

$$q^2 - q - 1 = 0$$

Die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung, die in der sogenannten Normalform $x^2 + m\,x + n = 0$ vorliegt, lauten

$$x_{1,2} = \frac{m}{2} \cdot \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\,n}{m^2}}\right]$$

In unserem Falle (mit $m = -1$; $n = -1$) betragen sie dann

$$q = -\frac{1}{2} \cdot [-1 \pm \sqrt{5}] = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die Lösung mit dem negativen Vorzeichen wird – wie häufig in der Mathematik – unterschlagen, da ein negativer Wert für q keinen Sinn ergibt. Dann beträgt also $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
Der Wert auf 10 Stellen genau ist $q = 1{,}618033989$.
Das Verhältnis zweier Seiten in einem Rechteck nach dem Goldenen Schnitt beträgt also $q \approx 1{,}6$.
Für diejenigen, die sich diese Ableitung nicht merken können oder wollen, haben die Mathematiker noch zwei weitere Darstellungen von q gefunden, die den Vorzug haben, so „elegant“ auszusehen, daß man sie so schnell nicht wieder vergißt.

Die eine ist der unendliche Kettenbruch in der symbolischen Schreibweise [1; 1, 1, ...] (s. Abschnitt „Kettenbrüche“). Seine mathematische Darstellung ist

$$q = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots\cdots}}}}$$

Um mit dem Taschenrechner eine genügend genaue Näherung von q zu erhalten, rollen Sie den Kettenbruch zweckmäßigerweise von hinten her auf. Dazu geben Sie am einfachsten an Stelle der horizontalen Pünktchen eine „Eins“ ein, addieren dazu die danebenstehende Eins, drücken die Reziproktaste, addieren wieder Eins, drücken wieder die Reziproktaste usw.
Nach 16 solcher Dreierschritte erhalten Sie den Wert q auf 6 Nachkommastellen genau, d.h. $q = 1{,}618034$.
Wenn Sie mit einem anderen Anfangswert beginnen, ändert das kaum etwas an der Zahl der Schritte und schon gar nichts am Endresultat.

Die andere Art der Darstellung von q, die von den Mathematikern gefunden wurde und mindestens ebenso „elegant“ ist wie der Kettenbruch, ist die Form einer sogenannten Kettenwurzel, und zwar

$$q = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}\ .$$

Diese Berechnung empfiehlt sich natürlich nur dann, wenn Ihr Taschenrechner eine Wurzeltaste hat.

Prinzipiell läuft das Verfahren wie vorher ab. Sie wählen einen Ausgangswert (am besten wieder eine Eins) und rechnen von hinten nach vorn. Diesmal besteht jeder Zyklus aus den Schritten „Wurzel", „Plus", „Eins". Dafür sind Sie aber bereits nach 13 solcher Zyklen bei der gleichen Genauigkeit von 6 Nachkommastellen angelangt.

Daß die „mathematisierte Schönheit" auch heute durchaus noch aktuell ist, können Sie überprüfen, wenn Sie einmal anläßlich der Messe oder bei einer anderen Gelegenheit nach Leipzig kommen. Stellen Sie sich dort vor das „Alte Rathaus" und blicken zu dem aufgesetzten Türmchen.
Der Architekt hat es so angeordnet, daß es die gesamte Dachlinie im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.
Nun liegt die Vermutung nahe, daß z.B. auch unsere gebräuchlichsten Papierformate aus ästhetischen Gründen ein Seitenverhältnis von 1,6 aufweisen. Das ist aber nicht der Fall. An einem normalen Blatt Schreibpapier können wir feststellen, daß die beiden Seitenlängen ein Verhältnis von etwa 1,4 haben. Manche von Ihnen wissen vielleicht, daß der genauere Wert $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ beträgt.
Nur wenn ein Rechteck ein Seitenverhältnis von $\sqrt{2}:1$ hat, lassen sich nämlich durch eine fortlaufende Halbierung immer wieder Rechtecke mit dem gleichen Seitenverhältnis erzeugen, also geometrisch ähnliche Figuren. Und auf diese Bedingung kann man bei einer Formatserie nicht verzichten.
Als kritische Zeitgenossen wollen wir das kurz überprüfen: Wir gehen aus von einem Rechteck mit den Seiten 1,4 und 1 (in beliebigen Längeneinheiten). Das ergibt also das Verhältnis 1,4 $\left(\approx \sqrt{2}\right)$. Bei jedem Halbierungsschritt wird die längere Seite durch 2 geteilt, die kürzere bleibt so und wird beim nächstkleineren Rechteck zur längeren Seite.

b	a	b/a
1,4	1	1,4
1	0,7	1,4
0,7	0,5	1,4
0,5	0,35	1,4
	usw.	

Anders ist das, wenn wir mit einem Rechteck beginnen, dessen Seiten sich wie 1,6 : 1 verhalten, also wie der Goldene Schnitt:

b	a	b/a
1,6	1	1,6
1	0,8	1,25
0,8	0,5	1,6
	usw.	

Hier sind also zwei verschiedene „Rechteck-Familien" beteiligt. Die eine weicht sogar beträchtlich vom Goldenen Schnitt ab. Da bleiben wir dann doch lieber bei unserem Verhältnis $\sqrt{2}$ bzw. 1,4. Die Abweichung vom „ästhetisch optimalen" Seitenverhältnis 1,6 ist wohl auch noch tragbar.

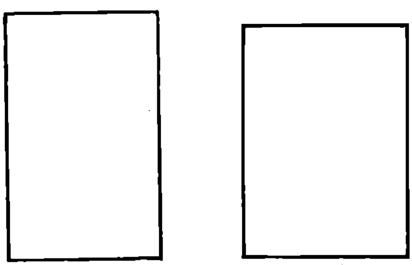

Bild 7. Bei der linken Figur stehen die Seiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes, bei der rechten beträgt es $\sqrt{2}:1$. Die Flächen sind gleich groß. Welches Rechteck finden Sie schöner?

Schließlich können wir uns die absoluten Seitenlängen unserer Papierformatreihe selbst ausrechnen, wenn wir nur wissen, von welcher oberen Blattgröße ausgegangen wird.
Da ist von dem Standardisierungsexperten festgelegt worden: Das Format A 0 soll die Fläche von genau einem Quadratmeter haben. Wegen $b : a = \sqrt{2}$ und $b_0 \cdot a_0 = 1\ \mathrm{m}^2$ ergibt sich für

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ \mathrm{m} = 0{,}841\ \mathrm{m} = 841\ \mathrm{mm}$$

und $$b_0 = \sqrt[4]{2}\ \mathrm{m} = 1{,}189\ \mathrm{m} = 1189\ \mathrm{mm}$$

Das ergibt, nach dem bewährten Halbierungsschema, folgende Tabelle (mit *b* ist immer die jeweils längere Seite bezeichnet worden):

Format	*b*	*a*	*b/a*
A 0	1,189 m	0,841	1,41
A 1	0,841	0,594	1,41
A 2	0,594	0,420	1,41
A 3	0,420	0,297	1,41
A 4	0,297	0,210	1,41
A 5	0,210	0,149	1,41
		usw.	

Prüfen Sie es einmal nach. Wenn Sie größere Abweichungen feststellen, können Sie die Sendung beim Papierlieferanten reklamieren.

Der kluge Hufschmied

Die folgende Aufgabe ist uralt und findet sich bei allen Völkern, die sich mit der Mathematik der Reihen befaßten. Die deutsche Version lautet meistens so:
Ein Hufschmied beschlägt ein Pferd. Jedes der 4 Hufeisen befestigt er mit 6 Nägeln, das ergibt insgesamt 24 Nägel.
Nun fragt er den Pferdebesitzer: „Wie willst Du bezahlen? Entweder für alle 24 Nägel 50,00 Mark oder für den ersten Nagel 1 Pfennig, für den nächsten Nagel 2 Pfennig, für den dritten Nagel 4 Pfennig usw.“
Natürlich entscheidet sich der Kunde für das Pfenniggeschäft. Wieviel muß er zahlen?

Nagel	Preis	Summe
1	0,01	0,01
2	0,02	0,03
3	0,04	0,07
4	0,08	0,15
5	0,16	0,31

Der Preis eines entsprechenden Nagels läßt sich leicht errechnen, indem man den Preis des vorhergehenden mit 2 multipliziert. Eine andere Möglichkeit ist es zu potenzieren, doch dann muß man von 2 ausgehen, weil $1^2 = 1$ ist. Bei 24 Nägeln müssen wir danach 23 als Exponent nehmen.
Natürlich haben die meisten Leser bemerkt, daß es sich bei dieser Aufgabe um eine geometrische Reihe handelt.
Das Endglied a_n (also dėr Preis des 24. Nagels) errechnet sich nach

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a_1 ist der Ausgangswert, bei uns also 0,01 Mark, q ist der Multiplikator, also 2.

$$a_{24} = 1 \cdot 2^{24-1} = 2^{23}$$

$$= 8\,388\,608 \text{ Pfennig}$$

Es kann sein, daß Ihr Rechner bei diesem Wert Schwierigkeiten macht. Die meisten Taschenrechner schreiben diesen Wert als Zehnerpotenz. Andere Rechner drücken zwar den Wert „normal" aus, jedoch infolge der Programmierung mit Kommastellen. Sollte der Wert für Ihren Minicomputer zu groß sein, so lassen Sie Ihr Pferd nur an 3 Hufen beschlagen.

Wir möchten natürlich gern wissen, wieviel der Pferdebesitzer insgesamt zahlen muß. Die Summe S_n errechnet sich nach

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

a_1 ist der Preis des ersten Nagels,
q ist der Multiplikator (= 2).

$$S_{24} = 1 \cdot \frac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 2^{24} - 1$$

Achtung: bei a_n steht 2^{24-1}; bei S_n heißt es hingegen $2^{24} - 1$.

$$S_{24} = 16777216 - 1$$

$$S_{24} = 16777215$$

Der Pferdebesitzer muß also 167772,15 M bezahlen.
Wenn Sie sich nochmals die Tabelle am Anfang dieses Abschnittes ansehen, so finden Sie, daß die Summe immer um 1 kleiner ist als das Doppelte des Preises des jeweils letzten Nagels.
Nun fragen wir noch, wieviel Nägel nach diesem Bezahlungssystem eingeschlagen werden, bis der Betrag von 50,00 Mark verbraucht ist. Wir erinnern uns, 50,00 Mark war der andere Preis für den Hufbeschlag. Jetzt gilt

$$S_n = 5000 = 2^k - 1$$

Die — 1 schenken wir uns, weil sie das Ergebnis nur unwesentlich ändert. An sich müßten wir die Gleichung logarithmieren, um k zu erhalten. Doch mit Probieren macht es mehr Spaß. Wir wissen

$$2^{10} = 1024 \approx 1000$$

Das ist ein Standardwert, der immer wieder vorkommt.

2^{11} ist also ≈ 2000

 $2^{12} \approx 4000$ (genau 4096 Pfennige = 40,96 M)

Durch Logarithmieren obiger Gleichung erhalten wir

$$k = \frac{\lg 5001}{\lg 2} = 12{,}288 \cdots$$

Also kann man mit 50,00 Mark immerhin 12 Nägel einschlagen lassen; das sind an jedem Hufeisen 3.
Mancher Leser wird die entsprechende Geschichte mit Reis- (oder Weizen-) Körnern kennen. Danach forderte der Erfinder des Schachspiels von einem indischen König auf das erste Feld 1 Korn und auf jedes weitere Feld doppelt so viel wie auf das jeweils vorhergehende. Da das Schachspiel 64 Felder hat, ergeben sich für die Anzahl a_{64} der Körner auf dem 64. Feld und die Gesamtzahl S_{64} aller Körner riesige Zahlen.
Es werden

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$$

Körner benötigt, um den Erfinder zu befriedigen.
Allein auf dem 64. Feld würden sich

$$a_{64} = 2^{64-1} = 2^{63} \approx 9{,}22 \cdot 10^{18}$$

Körner befinden.
Die Weizenernten der ganzen Welt reichen nicht aus, um diese Mengen aufzubringen. Wenn wir die Masse eines Weizenkorns zu 0,05 g annehmen, dann haben $1{,}84 \cdot 10^{19}$ Körner eine Masse von $1{,}84 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}05\ \text{g} = 920\,000\,000\,000\ \text{t}$. (Die jährliche Weltproduktion an Weizen beträgt etwa 250 000 000 t.)
Der Unterschied im Wachstum einer arithmetischen Reihe

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

und einer geometrischen Reihe

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

spielte auch weltanschaulich eine Rolle. Um 1800 behauptete der englische Geistliche *Malthus*, daß die Ernten in einer arithmetischen Reihe zunehmen, die Bevölkerung aber in einer geometrischen Reihe anwächst. Daher, so folgerte *Malthus*, muß es entweder zu einer Ernährungskatastrophe kommen, oder die Menschheit muß ihre Geburtenzahl senken. *Karl Marx* widersprach dieser These. Nach ihm gelingt es dem Menschen, die Ernährungsgrundlagen genügend schnell zu erhöhen, wenn man die politischen und wirtschaftlichen Verhältnisse in den Griff bekommt.
Das Beispiel zeigt sehr schön, daß die Mathematik mit ihren Formeln nur blind rechnet. Entscheidend sind die Voraussetzungen, nach denen wir die Ausgangsgröße wählen, nach denen wir die Gleichungen aussuchen und schließlich die Art, wie die Ergebnisse gedeutet werden. Wie wichtig die Auslegung ist, zeigen die Sätze:
Ich habe *nur* noch 50,00 Mark,
Ich habe *noch* 50,00 Mark.
Mathematisch sind sie gleichwertig. Die Bedeutung der beiden Feststellungen ist jedoch unterschiedlich.

Ein Abschnitt für Metallurgen

Natürlich können und dürfen auch Nicht-Metallurgen diesen Abschnitt lesen, vorausgesetzt, sie sind bereit mitzurechnen. Betrachten Sie einmal zwei Stähle

St 38 0,20 % C 0,30 %Si 0,5 % Mn 0,030 % P 0,030 % S

C 100 1,00 % C 0,30 % Si 0,5 % Mn 0,030 % P 0,030 % S

Sie unterscheiden sich in der chemischen Analyse nur durch den Kohlenstoffgehalt. Der St 38 hat 0,2 % C und der C 100 hat 1,00 % C, das sind 0,8 % C Unterschied. Im Verhalten sind aber beide Stähle völlig verschieden. Der St 38

läßt sich schweißen, er läßt sich nicht härten, er hat ein ausgezeichnetes Dehnungsvermögen. Der C 100 läßt sich nicht verschweißen, er wird beim Abschrecken mit Wasser glashart, sein Dehnungsvermögen ist außerordentlich gering.
In der chemischen Zusammensetzung sind beide Stähle zu 99,2 % gleich. Wie wird mit dem kleinen Betrag von 0,8 % Kohlenstoff ein so grundlegender Unterschied in den Eigenschaften erreicht?
Wir geben die Zusammensetzung von Stoffen meistens in Gewichtsprozenten an. Die Natur kann nicht „wiegen". Sie „zählt", wieviel Atome in ein bestimmtes Stoffvolumen hineinpassen. Rechnen wir einmal mit unserem Rechner so, wie die Natur „zählt".
In einem Grammol sind $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten (s. Abschnitt „Aus der Welt der Moleküle"). Der Einfachheit halber betrachten wir nur die Eisen- und Kohlenstoffatome. Die Atome des Mangans, Siliziums usw., die ja in beiden Stählen in gleicher Menge vorhanden sind (insgesamt etwa 1 Gewichtsprozent), beachten wir nicht.
Ein Grammol Eisen sind rund 56 g; 1 Grammol Kohlenstoff sind 12 g.
0,8 Gewichtsprozent Kohlenstoff von 56 g (wir rechnen mit diesem Wert, wobei die Gehalte an Legierungselementen nicht besonders beachtet werden) sind

$$\frac{56 \cdot 0{,}8}{100}\,\mathrm{g} = 0{,}45\,\mathrm{g}$$

Wenn in 1 Grammol (12 g) Kohlenstoff $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome vorhanden sind, so enthalten 0,45 g

$$\frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}45}{12}\,\text{Atome} = 2{,}26 \cdot 10^{22}\,\text{Atome}$$

Erstaunlicherweise bestehen 0,8 Gewichtsprozent Kohlenstoff zu 56 g Eisen aus $2{,}26 \cdot 10^{22}$ Atomen.
Eisen + 0,8 % Kohlenstoff enthalten danach

$$2{,}26 \cdot 10^{22} + 6{,}02 \cdot 10^{23} \approx 6{,}25 \cdot 10^{23}$$

Atome.

Achtung!

$10^{22} + 10^{23}$ ergeben **nicht** 10^{45}!!

$2{,}26 \cdot 10^{22} = 0{,}226 \cdot 10^{23}$

Diese $2{,}26 \cdot 10^{22}$ Kohlenstoffatome machen gegenüber der Gesamtanzahl ungefähr

$$\frac{0{,}226}{6{,}25} \approx 3{,}6\,\%$$

aus.

Wenn wir die Atome zählen, so beträgt der prozentuale Unterschied zwischen den beiden Stählen im Anteil der Kohlenstoffatome etwa 3,6 %. Das ist natürlich eine viel eindrucksvollere Zahl als 0,8 Gewichtsprozent. Und sie macht die Unterschiede zwischen den beiden Stählen auch verständlicher.

Allerlei Rechenkunststücke

Zu Zeiten unserer Großväter gab es noch Rechenkünstler, die komplizierte Aufgaben im Kopf lösten. Ein Zuschauer wurde aufgefordert, eine komplizierte Rechnung (natürlich mit Bleistift und Papier) auszuführen und das Resultat zu nennen. Der „Künstler" nannte dann sofort die Ausgangszahlen.

Im einfachsten Fall ging das so:

Denke Dir eine Zahl		8
multipliziere sie mit	2	$2 \cdot 8 = 16$
addiere	4	$16 + 4 = 20$
multipliziere mit	5	$20 \cdot 5 = 100$
addiere	12	$100 + 12 = 112$
nenne das Ergebnis		112

Du hast Dir 8 gedacht – großer Beifall!

Die entsprechende Gleichung läßt sich aus dem Rechengang ableiten

$$(x \cdot 2 + 4) \cdot 5 + 12 = 112$$
$$x \cdot 10 + 20 + 12 = 112$$
$$x \cdot 10 + 32 = 112$$
$$x = \frac{112 - 32}{10} = 8$$

Natürlich ist es keine Leistung, diese Rechnung im Kopf auszuführen.
Mit unserem Taschenrechner können wir nun mühelos beliebig viele Rechenkunststücke entwickeln. Man muß nur auf die Vorzeichenumkehr achten, je nachdem, ob der „Künstler" oder der Zuschauer rechnet. Weiter ist es günstig, die Rechnungen des Zuschauers so zu gestalten, daß sie zwar kompliziert sind, sich jedoch am Ende so weit aufheben, daß nur noch einfache Zahlen verwendet werden, um das gedachte Ergebnis zu „erraten". Dann kann der Zuschauer einen Taschenrechner benutzen, der durch den Kopfrechner spielend geschlagen wird.

Denke Dir eine ganze Zahl kleiner als 10	2
multipliziere sie mit π	6,28...
teile durch 4	1,57...
multipliziere mit 1,27	1,9949...
addiere 4	5,9949...
multipliziere mit 3	17,9847...
addiere 6	23,9847...

Durch die Benutzung des Rechners konnte hier ein neuer Trick eingebaut werden:

$$\frac{\pi \cdot 1{,}27}{4} \approx 1$$

Der Kopfrechner weiß also, daß die Kommastellen im Ergebnis Schwindel sind. Statt 23,9847... steht dort in Wirklichkeit ganz schlicht 24.
Die übrige Rechnung ist so aufgebaut, daß 18 subtrahiert

und der Wert durch 3 geteilt wird:

$$x = \frac{y - 18}{3}$$

Noch eindrucksvoller ist es, wenn man im Wettbewerb mit einem Taschenrechner im Kopf Kubikwurzeln zieht, und zwar gleich von sehr großen Zahlen. Besonders wirksam ist es, wenn der Rechenkünstler erklärt, daß nur teure Geräte Tasten für diesen Rechengang haben.
Auch hier steuert man den Rechengang unauffällig zu einem überschaubaren Ergebnis.

Denke Dir eine ganze Zahl zwischen 10 und 99	27
Nimm sie hoch 3	$27 \cdot 27 \cdot 27$
Sage das Ergebnis	19683
Dritte Wurzel aus 19683 ist 27.	

Im Kopf (oder auf einem Blatt Papier) haben sie die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned}
10^3 &= 1000\\
20^3 &= 8000\\
30^3 &= 27000\\
40^3 &= 64000\\
50^3 &= 125000\\
60^3 &= 216000\\
70^3 &= 343000\\
80^3 &= 512000\\
90^3 &= 729000\\
100^3 &= 1000000
\end{aligned}$$

Man sieht, in unserem Beispiel war 19683 ausgerechnet worden. Die dritte Wurzel muß also zwischen 20 (8000) und 30 (27000) liegen.
Nun müssen wir uns nochmals einige Zahlen merken.

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 8\\
3^3 &= 27
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4^3 &= 64\\
5^3 &= 125\\
6^3 &= 216\\
7^3 &= 343\\
8^3 &= 512\\
9^3 &= 729
\end{aligned}
$$

Eigentlich brauchen wir diese Zahlen ja nicht besonders zu behalten, denn sie stecken in der vorherigen Aufstellung 20^3 usw. bereits drin. Für uns sind hier nur die fettgedruckten Endziffern interessant. Jede Endziffer ist eindeutig einer potenzierten Zahl zugeordnet.
Daher wissen wir, bei 19683 muß wegen der Endziffer 3 die letzte Ziffer der dritten Wurzel also 7 sein.

Das Ergebnis ist $\sqrt[3]{19683} = 27$.
Falls wir nicht die Absicht haben, als Kopfrechner Beifall zu erringen, kann uns das kleine Kunststück auch bei der Benutzung unseres Rechners nutzen.
Wie schon erwähnt, die meisten Taschenrechner haben keine Taste für die dritte Wurzel oder gar für noch höhere Wurzeln.

Teure Rechner verwenden meistens die Taste $\frac{1}{x}$ und potenzieren dann mit der Taste y^x, weil $\sqrt[x]{A} = A^{1/x}$.
Alle anderen müssen entweder die entsprechenden Näherungsformeln verwenden (s. Abschnitt „Über das Wurzelziehen") oder laufend probieren. Wenn man weiß, $\sqrt[3]{427621}$ muß zwischen 70 (34300) und 80 (512000) liegen, so ist das bereits eine Hilfe.
Man versucht nun

$$
\begin{aligned}
75 \cdot 75 \cdot 75 &= 421875\\
76^3 &= 438976\\
75{,}5^3 &= 430368{,}88\\
75{,}25^3 &= 426107{,}83
\end{aligned}
$$

Wenn Sie durch Probieren ein Ergebnis suchen, so „halbieren" Sie immer das letzte Resultat. Verwenden Sie „an-

gemessene Sprünge". Die Reihe 10; 1; 0,5; 0,25; 0,13 führt am schnellsten und sichersten zum Ziel.
Wir probieren weiter

$$\begin{aligned}
75{,}38^3 &= 428\,320{,}04\\
75{,}31^3 &= 427\,127{,}90\\
75{,}35^3 &= 427\,808{,}86\\
75{,}33^3 &= 427\,468{,}29\\
75{,}34^3 &= 427\,638{,}55\\
75{,}335^3 &= 427\,553{,}41\\
75{,}338^3 &= 427\,604{,}49\\
75{,}339^3 &= 427\,621{,}52
\end{aligned}$$

Zwischendurch wird man immer wieder versucht sein, das Verfahren „Versuch und Irrtum" abzukürzen. Meistens ohne Erfolg. Unser Gehirn kann sich eine dritte Wurzel eben nicht vorstellen. Es ist ja der Vorteil unseres Minicomputers, daß er blitzschnell rechnet. Nutzen wir daher konsequent diese Eigenschaft aus!
Mit einem zehnstelligen Rechner ist

$$\sqrt[3]{427\,621} = 75{,}33896941$$

und $75{,}33896941^3 = 427\,621{,}0003$

Der Kampf um die letzte Dezimale

Der große deutsche Mathematiker *Friedrich Gauß* meinte: „Mangelnde mathematische Bildung zeigt sich am deutlichsten in äußerster Schärfe im Zahlenrechnen."
Ganze Generationen von Mathematiklehrern entschuldigten sich mit diesen Worten, wenn sie sich einmal verrechneten.
Unser Taschenrechner arbeitet nun mit 8 oder noch mehr Stellen. Da er mathematisch absolut ungebildet ist, ist es ihm einerlei, ob so viele Stellen sinnvoll sind oder nicht,

er zeigt sie an. Höherwertige Geräte haben Schaltungen, mit deren Hilfe der mathematisch geschulte Mensch ihnen befiehlt, nur eine bestimmte, sinnvolle Anzahl an Stellen nach dem Komma in der Anzeige aufleuchten zu lassen. Solche Rechner runden sogar automatisch die letzte Stelle auf oder ab.

Die einfacheren Geräte zeigen also die ausgerechneten Ziffernfolgen. Natürlich ist der Fehler winzig, wenn in der achten Stelle statt einer 6 eine 7 steht. Es ist nur interessant, daß selbst so „scharfe Zahlenrechner" irgendwo ihre Grenze finden.

Wir vergleichen einen einfachen Taschenrechner, der acht Stellen anzeigt, mit einem zehnstelligen. Dieser zehnstellige Rechner zeigt ohne besondere Aufforderung nur 2 Stellen hinter dem Komma an. Wir schalten seine Kommastellung so, daß er außerdem noch die gleiche Anzahl von Nachkommastellen zeigt wie das erste Gerät, und schließlich soll er noch das Ergebnis unter Ausnutzung aller seiner Stellen (10) zeigen.

Operation	einfacher Rechner mit 8 Stellen	Rechner mit 2	6	8
		Nachkommastellen		
125	125	125,00	125,000000	125,00000000
$\sqrt{125}$	11,180339	11,18	11,180340	11,18033989
$(\sqrt{125})^2$	**124,99998**	125,00	125,000000	125,00000010
$\sqrt{(\sqrt{125})^2}$	11,180338	11,18	11,180340	11,18033989
$(\sqrt{(\sqrt{125})^2})^2$	**124,99995**	125,00	125,000000	125,00000010

Zieht man aus der letzten Zahl des ersten Rechners wieder die Wurzel, so erhält man wieder 11,180338.

Es ist aber geradezu beruhigend, daß auch der kompliziertere Rechner bei der einfachen Gleichung

$$\sqrt{125} \cdot \sqrt{125} = 125$$

Schwierigkeiten hat. Wir wissen, es muß 125 herauskommen, doch der Computer weiß es nicht. Er kann nur auf eine ganz simple Art rechnen. Und Rechnen ohne Nachdenken kann zu seltsamen Ergebnissen führen. Noch größer werden die Rechenirrtümer, wenn wir mehrere Operationen durchführen, bei denen unendliche Dezimalbrüche miteinander verknüpft werden.

$1 : 3 = 0{,}33\ldots$

$\sqrt{0{,}33\ldots} = 0{,}5773502$ Der Rechner „vergißt" die folgende Ziffer 6 und rundet nicht auf.

$(\sqrt{0{,}33\ldots})^2 = 0{,}3333332$

$: 8 = 0{,}0416666$ Die folgende 5 wird nicht berücksichtigt.

$\cdot\, 8 = 0{,}3333328$

$\cdot\, 3 = 0{,}9999984$

Aus diesem Ergebnis könnte man infolge der „Genauigkeit" des Rechners die Wurzel ziehen und ähnliche Rechengänge durchführen.

Prüfen Sie, ob Ihr Rechner die letzte Ziffer rundet oder nicht.
Verwenden Sie nicht mehr Nachkommastellen als nötig sind.

Aus der Welt der Moleküle

Aus der Tatsache, daß die Atome und Moleküle klein sind, folgt, daß ihre Zahl sehr groß ist. Daher kommen in Rechnungen, die sich mit den Atomen befassen, meistens sehr große und sehr kleine Zahlen in einer Gleichung vor. Natürlich ist hierfür ein Taschenrechner besonders geeignet.

Aus dem Physik- oder Chemieunterricht ist Ihnen vielleicht noch die Zahl $6{,}02 \cdot 10^{26}$ oder $6{,}02 \cdot 10^{23}$ in Erinnerung. Sie erhält Namen wie spezifische Molekülzahl oder *Avogadro*sche Zahl. So ganz sind sich die Fachleute nicht einig.
Der Grundgedanke ist: Jede Menge von 1 Kilomol (die relative Atom- oder Molekülmasse in Kilogramm) besteht unabhängig von ihrer chemischen Beschaffenheit aus $6{,}02 \cdot 10^{26}$ Molekülen.

$$N = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{\text{mol}}$$

oder

$$N = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}}$$

Eisen hat die relative Atommasse 56. Folglich enthalten 56 g Eisen $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome. Daraus läßt sich die Masse eines Atoms (nicht mit relativer Atommasse verwechseln) errechnen:

$$56\ \text{g} : 6{,}02 \cdot 10^{23} = 9{,}3 \cdot 10^{-23}\ \text{g}$$

Eisen hat die Dichte $7{,}9\ \text{g/cm}^3$, d.h., ein Eisenwürfel von $1\ \text{cm}^3$ wiegt 7,9 g. 56 g Eisen haben danach das Volumen

$$\frac{56\ \text{g}}{7{,}9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 7{,}1\ \text{cm}^3$$

Wir rechnen hier nur mit ungefähren Werten.
In diesen $7{,}1\ \text{cm}^3$ sind die $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten. Wenn wir sie als kleine Würfel annehmen oder als aneinandergepackte Kugeln, so ist ihr Volumen

$$\frac{7{,}1}{6 \cdot 10^{23}}\ \text{cm}^3 \approx 1 \cdot 10^{-23}\ \text{cm}^3$$

und ihr Radius

$$\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-23}}{4\,\pi}}\ \text{cm} \approx 1 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$

Das ist auch tatsächlich der Atomradius, den die Wissenschaftler auf anderem Wege messen.
Das Atomvolumen von 10^{-23} cm³ verlockt uns, einmal auszurechnen, aus wieviel Atomen unsere Erde besteht. Dabei soll es uns auf ein paar mehr oder weniger nicht ankommen. Nehmen wir den ungefähren Radius mit

$$r = 6380 \text{ km} = 638\,000\,000 \text{ cm} = 6{,}38 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

an, so beträgt das Erdvolumen

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 10{,}87 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \; (\approx 11 \cdot 10^{11} \text{ km}^3)$$

Die mittlere Erddichte wird mit $5{,}5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ angegeben. Ein Kubikzentimeter Erde hat im Durchschnitt 5,5 g Masse, die gesamte Erde dann

$$10{,}87 \cdot 10^{26} \cdot 5{,}5 \text{ g} \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ g}$$

Der „offizielle" Wert beträgt $5{,}973 \cdot 10^{27}$ g. Unsere Überschlagsrechnung ist sehr gut.
Nun suchen wir immer noch die Zahl der Atome. Wir rechneten bereits mit der *Avogadro*-Konstanten

$$N = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\text{mol}}$$

Die relativen Atommassen schwanken von Wasserstoff = 1 bis Uran = 238. Für unsere Rechnung nehmen wir als Durchschnitt die relative Atommasse 100 an, d.h., in 100 g sind $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome enthalten. In $6 \cdot 10^{27}$ g Erdmasse sind dann

$$6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{10^{27} \cdot 6}{100} = 3{,}6 \cdot 10^{49}$$

Atome vorhanden.
Wer es nicht glaubt, braucht es nur nachzuzählen.
Wenn er in jeder Sekunde zehn Atome zählt, so sind das im Jahr

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 10 = 315360000$$
$$= 3{,}15 \cdot 10^8$$

Atome.

Die meisten Rechner der mittleren Klasse gestatten die Umrechnung großer Zahlen auf Zehnerpotenzen. Meistens wird dieser Vorgang in der Gebrauchsanweisung als wissenschaftliche Notierung bezeichnet.

Nachdem wir die Zahl der abgezählten Atome im Jahr kennen, ist es einfach, die Gesamtzeit auszurechnen:

$$3{,}6 \cdot 10^{49} : 3{,}15 \cdot 10^8 \approx 11{,}4 \cdot 10^{40}$$

Jahre.
Es lohnt sich danach nicht anzufangen. Vielleicht wird die Zeit aber nennenswert verkürzt, wenn wir die gesamte Menschheit von zur Zeit etwa 5 Milliarden dafür einsetzen?
Ergebnis:

$$11{,}4 \cdot 10^{40} : 5 \cdot 10^9 \approx 20 \cdot 10^{30}$$

Jahre.
Es ist daher besser, unserer Rechnung zu glauben und auf die Prüfung zu verzichten.

Wie entsteht ein Rundungsfehler?

Wer mit dem Rechenstab gearbeitet hat oder ihn gar noch verwendet, weiß, daß die Resultate mit etwa 1 % Fehler behaftet sind. Das hat in den meisten Fällen niemand gestört.
Wie bei jedem neuen Gerät verlangt man auch vom Taschenrechner, daß er „viel besser" sein muß als alles bisher Bekannte. Jedenfalls viel genauer als ein Rechenstab und auch genauer als die Logarithmentafeln.

Nun können wir ja leicht unserem Computer „Rundungsfehler" nachweisen. Zum Beispiel ist bei einem besonders genauen Gerät mit zehn Stellen Anzeige:

$$\ln 98765432 = 18{,}40825822$$

aber

$$e^{18{,}40825822} = 98765431{,}70$$

Versuchen wir uns einmal vorzustellen, wie dieser Unterschied in der letzten Stelle entsteht.
Der Rechner entwickelt $y = e^x$ in eine Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Dabei rechnet er die eingegebenen Reihenglieder so lange aus, bis er unter einem vorgegebenen Fehler liegt. Der „Fehler" in der letzten Stelle ist also vom Konstrukteur vorprogrammiert.
Machen wir uns die Sache an dem Beispiel $y = e^2$ klar.

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Sie können diese Aufgabe auch lösen, wenn Ihr Rechner keine $\boxed{e^x}$-Taste hat.

$$e^2 = 7{,}389056098$$

Wir schreiben das Ergebnis der einzelnen Glieder untereinander

		Σ
1	$= 1$	1
$\frac{2}{1}$	$= 2$	3
$\frac{2^2}{1 \cdot 2}$	$= 2$	5
$\frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$= 1{,}33\ldots$	6,33

$\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$= 0{,}6667$	6,999967
$\frac{2^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$	$= 0{,}266667$	7,266634
$\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$	$= 0{,}088889$	7,355523
$\frac{2^7}{7!}$	$= 0{,}025397$	7,380920
$\frac{2^8}{8!}$	$= 0{,}006349$	7,387269
$\frac{2^9}{9!}$	$= 0{,}001411$	7,388680
$\frac{2^{10}}{10!}$	$= 0{,}000282$	7,388962
$\frac{2^{11}}{11!}$	$= 0{,}000051$	7,389013

Wer will, kann noch weiterrechnen. Uns genügt es zu zeigen, mit welchen Arbeitsschritten der Taschenrechner vorgeht, und wir begreifen, daß der Konstrukteur irgendeine Genauigkeit vorgeben *muß*, sonst würde die Elektronik endlos weiter arbeiten. Prinzipiell würde sie es so lange durchhalten, bis ihr Speicher überläuft, weil die Fakultät zu groß wird. Infolge ihrer Konstruktion schaltet sie aber automatisch ab, weil das Ergebnis eines Gliedes keinen Einfluß mehr auf das gesamte Ergebnis hat.
Probieren wir

$$\frac{2^{20}}{20!} = \frac{1048576}{2{,}4329020 \cdot 10^{18}} = 4{,}3099804 \cdot 10^{-13}$$

Eine solche Genauigkeit ist natürlich unsinnig.
Andererseits können wir mit unserem bisherigen Ergebnis eine Probe machen. Es fällt besonders eindrucksvoll aus, wenn man einen Rechner besitzt, dessen Nachkommastellen gewählt werden können.

$\ln x$ ist die Umkehrung von e^x!

ln 7,3890 =	2,00	2 Stellen
	2,0000	4 Stellen
	1,99999	5 Stellen
	1,999992	6 Stellen

Je nach der Güte der Rechner runden Sie in der achten oder erst in der zehnten Stelle. Damit sind Genauigkeiten erzielt, die bisher in der Praxis des numerischen Rechnens nur in Sonderfällen erreichbar waren.

Ein Abschnitt über Rechner

Taschenrechner gibt es in so großer Anzahl, in so großer Typenvielzahl, und sie befinden sich in einer so schnellen technischen Entwicklung, daß es in einem Buch unmöglich ist, sich mit ihren Unterschieden im einzelnen zu befassen.
Warum es so viele Rechner gibt und warum ihre Zahl so schnell zunimmt, braucht nicht begründet zu werden.
Ihre schnelle technische Entwicklung zu ihrem bisherigen Stand und für die Zukunft beruht auf den Fortschritten in der Halbleitertechnik. Dort werden immer neue Entdeckungen gemacht. Die elektronischen Bausteine werden immer kleiner und immer leistungsfähiger. Betrachten wir den heutigen Stand und die Entwicklungsrichtung der kommenden Jahre, so zeichnen sich etwa die folgenden Grundtypen ab.

1. Der einfache Rechner, der die vier Grundrechenarten beherrscht, vielleicht ergänzt durch einige Zusatztasten wie $\boxed{\pi}$, $\boxed{\sqrt{x}}$ oder sogar einen Speicher $\boxed{M}$. Wahrscheinlich wird er sich als Massenware für den Jackentaschengebrauch halten.

2. Die nächste Stufe in der Qualität wird nicht etwa durch die Funktionstasten wie $\boxed{\sin x}$, $\boxed{x^2}$ oder $\boxed{\lg x}$ bedingt. Rechner mit einem halben Dutzend solcher Tasten sind auch nicht nennenswert teurer als die einfachen Geräte. Die Gebrauchswerteigenschaften ergeben sich aus den Rechenmöglichkeiten an Gleichungen wie

$$y = (7 + 8) \cdot \frac{2 - 3}{3 + 2}$$

Es ist einfach, einen Rechner zu entwickeln, der „nur" rechnet. Die erste Schwierigkeit entsteht, wenn er mit Rechenregeln fertig werden muß, also hier mit der Regel: Punktrechnung geht vor Strichrechnung.
Zwar versprechen die Prospekte meistens: „Sie rechnen, wie Sie die Gleichung lesen." Doch in der Gebrauchsanweisung für den Rechner finden wir, daß für die Lösung solcher Aufgaben bestimmte Regeln einzuhalten sind. Je nach Güte des Rechners muß man mit einem Speicher arbeiten und dort Zwischenergebnisse abspeichern, oder (bei besseren Produkten) man findet die beiden Klammer-Tasten. Mit diesen Tasten unterrichten wir den Computer, daß er das erste Ergebnis, also $(7 + 8)$, erst einmal speichern soll, bis wir $(2 - 3)$ ausgerechnet haben.
Eine andere Möglichkeit ist die „umgekehrte polnische Notation", über die noch gesprochen wird.

3. Ganz hochwertige Rechner lassen sich programmieren. Sie „verstehen" also wie eine große EDV-Anlage Befehle (etwa 50 bis 500). Sie können auch eine Anzahl logischer Entscheidungen fällen, z.B. $x > 0$ oder $x \neq 0$ nebst Sprungbefehl. Außerdem haben sie eine Anzahl Speicherplätze, die beim Abarbeiten des Programms gefüllt und wieder abgerufen werden können, z.B. der frei programmierbare sowjetische Taschenrechner „Elektronika BS-21".
Das Programmieren erfolgt auf Magnetkärtchen oder (wahrscheinlich vermehrt in der Zukunft) durch die elektronischen Bausteine selbst. Es gibt solche, die einen Befehl „behalten" (also programmiert sind) und auf einen anderen Befehl auch wieder „vergessen".
Die innere Logik dieser Rechner beruht entweder auf der Möglichkeit, durch „Klammer-auf"- und „Klammer-zu"-

Tasten Teile der Aufgabe zu speichern bzw. wieder abzurufen oder auf der umgekehrten polnischen Notation. Bei dieser gibt man zuerst die Zahlen ein und dann erst den Befehl, was mit ihnen geschehen soll. Vorbedingung für dieses Verfahren sind die „Stacks“, das sind Speicherplätze, in die jede eingegebene Zahl hineinrückt.

$5 \cdot (7 + 8)$ wird bei der umgekehrten polnischen Notation so eingegeben:

Eingabe	Anzeige	Inhalte der Stacks	
$\boxed{5}$	5.	—	z
		—	y
		5.	x
$\boxed{\text{Enter} \uparrow}$	5,00	—	z
		5.00	y
		5.00	x
$\boxed{7}$	7	—	z
		5.00	y
		7.	x
$\boxed{\text{Enter} \uparrow}$	7,00	5.00	z
		7.00	y
		7.00	x
$\boxed{8}$	8.	5.00	z
		7.00	y
		8.	x
$\boxed{+}$	15,00	—	z
		5.00	y
		15.00	x
$\boxed{\times}$	75,00	—	z
		—	y
		75.00	x

Beachten Sie, wie die eingegebenen Zahlen im Stack auf- und abwandern.
Die Vorteile sind: Einmal werden komplizierte Rechengänge einfacher (wenn man sich an diese Notation gewöhnt hat). Zum anderen werden bei der Programmierung weniger Rechenschritte benötigt (sehr wichtig!). Schließlich erlauben die Stacks noch verschiedene Manipulationen, die bei wissenschaftlichen Rechnungen bedeutungsvoll sein können.

Vor dem Kauf eines Rechners sollte man sich überlegen, was wirklich gerechnet werden soll! Ein komplizierter Rechner ist zwar teurer, aber nicht „besser", wenn für seine Logik kein Bedarf vorliegt.

Magische Quadrate

Vor 450 Jahren fertigte *Albrecht Dürer* seinen Stich „Melancholie" an. Dieses Bild zeigt unter anderen Symbolen ein magisches Quadrat. Magische Quadrate sind entsprechend angeordnete Zahlen, die in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen die gleiche Summe ergeben. Natürlich lassen sich auch andere magische Quadrate ersinnen. Zum Beispiel gibt es welche, die aus Buchstaben zusammengesetzt sind, die in allen Richtungen das gleiche Wort ergeben. Wir befassen uns hier nur mit Zahlenquadraten, und zwar mit dem, über das *Dürers* Figur so melancholisch nachdenkt. Nun kann man solche Quadrate mit verschiedenen Strategien auflösen. In jedem Fall ist die Lösung mit vielen Additionen verbunden. Sofort fühlen wir uns *Albrecht Dürer* haushoch überlegen, denn für die eigentliche Rechnerei haben wir unsere Minicomputer.
Am einfachsten ist es, wir schreiben alle vorkommenden Zahlen der Größe nach geordnet in unser Quadrat. *Dürers*

Quadrat hatte $4 \cdot 4 = 16$ Felder mit den Zahlen 1 bis 16. Es soll in jeder Richtung die Summe 34 zeigen.

34 ↖ ↗ 34

1	2	3	4	10	24
5	6	7	8	26	8
9	10	11	12	42	– 8
13	14	15	16	58	– 24

Summe 28 32 36 40

Differenz zu 34 6 2 —2 —6

Ohne jede Denkarbeit bilden wir ihre Summen und ihre Differenzen zu 34. Als erstes finden wir, daß die Diagonalen bereits die Summe 34 haben. Also werden wir diese Zahlen nicht versetzen.

Sehen wir uns weiter die Differenzen an, so finden wir, daß sie eine bestimmte Ordnung zeigen. Es gibt genau so viele „Plus-" wie „Minus-"differenzen.

Nehmen wir uns zuerst die größten Differenzen in der obersten und untersten Reihe vor.

$$
\begin{array}{r}
14 + 15 = 29 \\
2 + 3 = \underline{5} \\
\text{Differenz } 24
\end{array}
$$

24 ist gerade der Differenzbetrag. Daher tauschen wir 14 mit 2 und 3 mit 15.

1	14	15	4	34
5	6	7	8	
9	10	11	12	
13	2	3	16	34
	32	36		
	2	—2		

Vertauschen wir jetzt in den senkrechten Spalten 14 mit 15 und 3 mit 2, so ist die Differenz von 2 hier ebenfalls verschwunden. Arbeiten wir nach dem gleichen Schema die waagerechte Zeile 2 und 3 ab.

$$\begin{array}{r}
9 + 12 = 21 \\
5 + 8 = \underline{13} \\
8
\end{array}$$

und vertauschen wir 8 gegen 12 und 5 gegen 9. Dann ist nur noch die erste und letzte senkrechte Reihe übrig.

$$\begin{array}{r}
12 + 8 = 20 \\
5 + 9 = \underline{14} \\
6
\end{array}$$

Wir nehmen den entsprechenden Austausch vor und rechnen zur Kontrolle alle Zeilen nochmals durch.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Ein Vergleich mit dem Quadrat von *Dürer* zeigt aber andere Zahlenfolgen, als wir sie fanden. Am einfachsten leitet man durch Spiegelung andere Quadrate aus unserem ab.

1	15	14	4	¦	4	14	15	1
			6	¦	6			

Spiegel

Wir können auch den Spiegel horizontal legen

-·-·-·-·-·- Spiegel

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

oder alle Zahlen um die Diagonale D „herumklappen“

1	12	8	13
15	6	10	3
14	7	11	2
4	9	5	16

D

Natürlich kann man auch erst quer spiegeln und dann längs. *Dürers* Quadrat ist übrigens so aufgebaut, daß in der Mitte der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514 steht.

Der Platz für die Katze

Die folgende Aufgabe ist sicher manchem schon bekannt Doch werden die wenigsten Menschen sich der Mühe unterzogen haben, ihre Lösung rechnerisch nachzuprüfen. Erst unser Taschenrechner macht es mühelos möglich.
Um eine Apfelsine mit 10 cm Durchmesser ist straff ein Bindfaden gelegt. Als Umfang ergibt sich natürlich

$$U = 2\pi\, r_1 = 2 \cdot \pi \cdot 5\ \text{cm} = 31{,}4\ \text{cm}$$

Wir schneiden den Faden durch und knüpfen genau 1 m Band dazwischen. Den so hergestellten Bindfaden legen wir so um die Apfelsine herum, daß er überall den gleichen Abstand zu ihr hat. Wie groß ist dieser Abstand a?

$$\begin{aligned} U = 131{,}4\ \text{cm} &= 2\pi \cdot r_2 \\ 20{,}9\ \text{cm} &= r_2 \\ (20{,}9 - 5)\ \text{cm} &= r_2 - r_1 = a \approx 15{,}9\ \text{cm} \end{aligned}$$

Dieser 15,9 cm lange Zwischenraum rund um die Apfelsine ist gerade so viel, daß eine Katze hindurchschlüpfen kann.

Nun kommt das Erstaunlichste (für Leute, die sich noch wundern können; für die anderen ist das selbstverständlich): Wir legen ein Seil um den Äquator der als Kugel gedachten Erde. Damit es überall aufliegt und geschlossen ist, möge es eine Länge von genau 40000 km haben. Wir zerschneiden nun das Seil und verlängern es um einen Meter. Dann legen wir es in Gedanken mit überall dem gleichen Abstand wieder um die Erde herum.
Bevor wir uns an die eigentliche Rechenaufgabe machen, überlegen wir, um wieviel Prozent wir das Seil verlängerten.

$$1 : 40000000 \triangleq 0{,}0000025\,\%$$

Der Erdradius beträgt bei dem angenommenen Umfang von 40000 km

$$\frac{U}{2\,\pi} = r_1 = 6366{,}19772 \text{ km}.$$

Wir müssen hier bis auf Zentimeter genau rechnen.
Bei einem Umfang von 40000,001 km ist

$$\frac{U}{2\,\pi} = r_2 = 6366{,}19788 \text{ km}$$

$$r_2 - r_1 = a = (88 - 72) \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

Auch hier könnte eine Katze gerade unter dem gedachten Seil hindurchkriechen.

> Einfache Taschenrechner haben mit dieser Rechnung Schwierigkeiten mit den letzten Stellen. Wählen Sie dann die Kugel um ein paar Stellen kleiner. Das Prinzip wird auch bei $U = 4000$ km klar.

Wenn es auch an der Rechnung keinen Zweifel gibt, so ist ihr Ergebnis verblüffend.
Im täglichen Leben spielt dieser Gedankengang eine große Rolle in der Bekleidungsindustrie. Jedermann weiß, wie die Konfektionsgrößen innerhalb einer Nummer schwanken. Es gehört zu den stehenden Redensarten von Textilverkäufern: „Dieses Stück fällt besonders weit (oder eng) aus.“

Der Grund liegt einfach darin, daß die Industrie den Umfang eines Hosenbundes oder eines Pullis bei der Herstellung mißt und dabei kleine Unterschiede auftreten. Der Verbraucher trägt das Kleidungsstück aber nach dem Durchmesser, sonst rutscht die Hose, oder der Knopf geht nicht zu. Eine Daumenbreite (ungefähr 1 cm) Änderung im Umfang ergibt aber, unabhängig vom Umfang einen „Abstand vom Bauch“ von 1,6 mm. Bei mageren Leuten (mit kleinem Bauchumfang) wirken sich natürlich diese 1,6 mm viel mehr aus als bei dicken.

Spielerei mit Ziffern

Besitzer eines Klaviers oder einer Gitarre wissen, wieviel Spaß es macht, auf dem Instrument herumzuklimpern, also nicht *Bach* oder *Gershwin* zu spielen, sondern einfach Töne anzuschlagen.
Nebenbei bemerkt der Spieler dann, ob sein Instrument richtig gestimmt ist, oder ob irgendwo ein falscher Ton oder ein falscher Griff vorhanden ist.
Ähnlich können wir mit unserem Rechner vorgehen. Probieren wir die Ziffernfolgen 1, 2, 3 usw. einmal aus. Zum Beispiel so

$$\begin{array}{ll} 12 & \cdot 9 = 108 \\ 123 & \cdot 9 = 1107 \\ 1234 & \cdot 9 = 11106 \\ . & \quad . \quad\;\; . \\ . & \quad . \quad\;\; . \\ . & \quad . \quad\;\; . \\ 123456789 & \cdot 9 = 1111111101 \end{array}$$

Die meisten Rechner werden es nicht gestatten, mit neun oder zehn Stellen zu rechnen. Aber der Verlauf des Ergeb-

nisses der Multiplikation ist auch mit sieben- oder achtstelligen Geräten gut zu erkennen.
Das Entstehen der Zahlenfolge zeigt die Rechnung

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 12 \\ \hline 9 \\ 18 \\ \hline 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \cdot 123 \\ \hline 9 \\ 18 \\ 27 \\ \hline 1107 \end{array}$$

Falls uns die 0 stört, können wir überlegen, wie wir sie vermeiden. Probieren wir einfach jeweils die vorletzte Ziffer wegzulassen. (Das ist das ja Schöne am Rechner, daß wir unbegrenzt probieren können!) Also

$$\begin{array}{ll} 13 & \cdot 9 = 117 \\ 124 & \cdot 9 = 1116 \\ 1235 & \cdot 9 = 11115 \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ . & . \quad . \\ 12345679 & \cdot 9 = 111111111 \end{array}$$

Auch hier werden nicht alle Rechnertypen bis zum Schluß mithalten können.
Vielleicht hat es uns jetzt die Ziffernfolge von 1 bis 9 ohne 8 angetan.

$$\begin{array}{ll} 12345679 & \cdot 9 = 111111111 \\ & \cdot 8 = 98765432 \text{ alle Ziffern außer 1} \end{array}$$

Die meisten Rechner arbeiten mit acht Stellen. Sie lassen daher die Multiplikation mit 8 bereits zu.

$$\begin{array}{ll} 12345679 & \cdot 7 = 86419753 \text{ alle Ziffern außer 2} \\ & \cdot 6 = 74074074 \\ & \cdot 5 = 61728395 \text{ alle Ziffern außer 4} \\ & \cdot 4 = 49382716 \text{ alle Ziffern außer 5} \\ & \cdot 3 = 37037037 \\ & \cdot 2 = 24691358 \text{ alle Ziffern außer 7} \end{array}$$

Wir merken, die fehlenden Ziffern ergänzen den Multiplikator immer auf 9.
Es lassen sich nun auch andere Ziffernfolgen finden, die nur teilweise auffällige Ergebnisse liefern:

$$
\begin{aligned}
7654321 \quad & \cdot 9 = 68888889 \\
& \cdot 8 = 61234568 \\
& \cdot 6 = 45925926 \\
& \cdot 3 = 22962963
\end{aligned}
$$

Die Multiplikatoren 7, 5, 4 und 2 ergeben keine besonderen Resultate.

Falls Ihr Rechner einen Speicher hat, geben Sie natürlich die große Zahl ein und rufen sie bei Bedarf ab. Hat Ihr Rechner keinen Speicher, so empfiehlt sich der Rechengang:

Ausgangszahl

$\boxed{\times}$

$\boxed{9}$

$\boxed{=}$ Ergebnis

$\boxed{\div}$

$\boxed{9}$

$\boxed{=}$ Ausgangszahl

$\boxed{\times}$

$\boxed{8}$

usw.

Jetzt versuchen wir einmal, was sich mit einer Zahl anfangen läßt, die sich aus den gleichen Ziffern zusammensetzt:

$$\begin{array}{rl} 33333 & \cdot 9 = 299997 \\ & \cdot 8 = 266664 \\ & \cdot 7 = 233331 \\ & \text{— — — — —} \\ & \cdot 6 = 199998 \\ & \cdot 5 = 166665 \\ & \cdot 4 = 133332 \\ & \cdot 3 = 099999 \\ & \cdot 2 = 066666 \\ & \cdot 1 = 033333 \end{array}$$

Die ersten Ziffern des Ergebnisses sind 2 oder 1 oder 0, die letzten Ziffern

$$\begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Durch Probieren lassen sich viele andere Zahlen finden, die durch Multiplizieren oder Dividieren interessante Ergebnisse liefern.
In Hobby-Mathematikerkreisen ist die Zahl 142857 bekannt. $\left(\text{Diese Ziffernfolge ist die Periode von } \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}\ldots\right)$.

$$\begin{array}{rl} 142857 & \cdot 2 = 285714 \\ & \cdot 3 = 428571 \\ & \cdot 4 = 571428 \\ & \cdot 5 = 714285 \\ & \cdot 6 = 857142 \\ & \cdot 7 = 999999 \end{array}$$

Bis zum Multiplikator 6 erscheinen die Ziffern der Ausgangszahl immer in der gleichen Reihenfolge. Von 8 bis 13 erhält man zusätzlich eine neue erste Ziffer, und die letzte Ziffer ist um den Wert der ersten zu niedrig. Addiert man beide, so erhält man wieder die Ausgangszahlenfolgen.

$$\begin{array}{rl} 142857 & \cdot 8 = 1142856 \\ & \vdots \\ & \cdot 14 = 1999998 \end{array}$$

Wer will, kann selbst finden, nach welcher Rechenvorschrift es ab 15 weitergeht.

Das berühmte Siebzehneck

Auf dem Grabstein des Mathematikers *Carl Friedrich Gauß* ist ein 17-Eck eingemeißelt. Diese Figur soll auf die erste wissenschaftliche Veröffentlichung von *Gauß* hinweisen. Als neunzehnjährigem Studenten gelang ihm 1796 der Nachweis, daß innerhalb eines Kreises mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 17-Eck zu konstruieren ist.

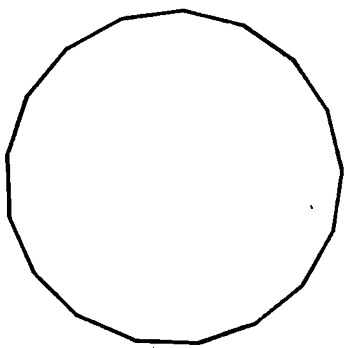

Bild 8. Das regelmäßige Siebzehneck

Es war seit langem ein mathematisches Problem, welche regelmäßigen Vielecke sich in einen Kreis hineinlegen lassen (nur mit Zirkel und Lineal gezeichnet).
Gauß fand die allgemeinen Bedingungen dafür, und bei dieser Gelegenheit probierte er sie am 17-Eck aus.
Die Tabelle auf S. 86 zeigt, wie mit wachsender Seitenzahl n sich die Zahl π herausbildet.
Für Liebhaber langer Rechnungen hinterließ *Gauß* in diesem Zusammenhang eine Gleichung zur Berechnung des $\cos\varphi$, wobei φ hier der Zentriwinkel des 17-Ecks ist.

$$\cos\frac{360^\circ}{17} = \cos 21^\circ\,10'\,35''$$
$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$
$$+ \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

Die meisten Rechner arbeiten bei Winkeln mit Dezimalstellen. Minuten und Sekunden vor der Eingabe in Dezimalstellen umrechnen.

Da ein Grad 60′ hat, ist

$$1' \approx 0{,}017\,°$$

$$10' \approx 0{,}17\,°$$

$$1'' = \frac{1°}{3600} \approx 0{,}00028°$$

$$35'' \approx 0{,}0097\,° \approx 0{,}01\,°$$

Also ist

$$21\,°\,10'\,35'' \approx 21{,}18\,°$$

$$\text{Kontrolle: } \frac{360°}{17} \approx 21{,}18\,°$$

Für die Rechnung der *Gauß*schen Gleichung muß sich jeder nach dem Leistungsvermögen seines Rechners eine eigene Strategie aufbauen.
Im einfachsten Fall sind alle Wurzeln auszurechnen und zu notieren.
Wer eine M-Taste zur Verfügung hat, kann abwechselnd Werte eingeben und wieder abrufen.

Meistens ist es günstig, komplizierte Gleichungen von der „innersten Wurzel her“ abzuarbeiten.
Falls Sie mit einer Vorzeichen-Umkehrtaste arbeiten, ($\boxed{\text{CHS}}$ oder $\boxed{+/-}$), können Sie bei $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ also folgendermaßen rechnen:

$$\boxed{17}\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{34}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{x}}$$

Wahrscheinlich müssen Sie die Gleichung mehrere Male durchrechnen, bis Sie das *Gauß*sche Ergebnis finden:

$$\cos 21{,}18\,° = 0{,}93245$$

Übersicht über regelmäßige konvexe Vielecke (r Umkreisradius)

n	Zentriwinkel	Seite
3	120°	$r\sqrt{3}$
4	90°	$r\sqrt{2}$
5	72°	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
6	60°	r
8	45°	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$
10	36°	$\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$
12	30°	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$
15	24°	$\frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$
16	22° 30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
17	21° 10′ 35 $\frac{5}{17}$″	$\approx 0{,}36749904\, r$
20	18°	$r\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}}$
24	15°	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
		allgemein:
		$s_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-s_n^2}}$

Umfang	Fläche
$2\,r \cdot 2{,}59807621\ldots$	$\frac{3}{4}\,r^2\sqrt{3} \approx 1{,}2990\,r^2$
$2\,r \cdot 2{,}82842712\ldots$	$2\,r^2$
$2\,r \cdot 2{,}93892626\ldots$	$\frac{5}{8}\,r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 2{,}3776\,r^2$
$2\,r \cdot 3$	$\frac{3}{2}\,r^2\sqrt{3} \approx 2{,}5981\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}06146746\ldots$	$2\,r^2\sqrt{2} \approx 2{,}8284\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}09016995\ldots$	$\frac{5}{4}\,r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 2{,}9389\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}10582854\ldots$	$3\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}11867536\ldots$	$\frac{15}{8}\,r^2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$ $\approx 3{,}0505\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}12144515\ldots$	$4\,r^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}0615\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}12374180\ldots$	$\approx 3{,}0706\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}12868930\ldots$	$\frac{5}{2}\,r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}} \approx 3{,}0902\,r^2$
$2\,r \cdot 3{,}13262862\ldots$	$6\,r^2\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}1058\,r^2$

Astronomische Größen

Die Astronomen geben die Entfernungen im Weltall meistens in Lichtjahren an. Das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt bei einer Geschwindigkeit von 300000 km/s.
Das Jahr hat

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31536000$$

Sekunden.
Multiplizieren wir diesen Wert mit 300000, so erhalten wir die zurückgelegte Strecke: $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.
Bis zum nächsten Fixstern Prox. Centauri ist es noch etwas weiter, nämlich $38 \cdot 10^{12}$ km.
Zum Polarstern sind es $380 \cdot 10^{12}$ km, wofür das Licht rund 40 Jahre benötigt.
Bis zu den am weitesten entfernten Welten soll das Licht etwa 10^{10} Jahre benötigen. Auf ein paar Jahre kommt es dabei nicht mehr an. Dem entspricht eine Entfernung von $9{,}46 \cdot 10^{22}$ km $\approx 10^{23}$ km.
Aus diesen unvorstellbaren Zahlen wird uns aber auch klar, welche Wunderwerke unsere Taschenrechner darstellen. Die meisten Geräte lassen Exponentialwerte bis $9{,}999999 \cdot 10^{99}$ zu. Wir können also in ihnen mit Leichtigkeit die Maße des Weltalls unterbringen. Die Entfernung zu seinen Grenzen, in Millimeter ausgedrückt, ergibt erst etwa 10^{29}.
Der englische Physiker *Eddington* hat sich Gedanken über eine große Zahl $N = 2{,}30 \cdot 10^{79}$ gemacht, die im Zusammenhang mit astrophysikalischen Rechnungen auftritt. Er nahm an, dieser ungeheure Wert bedeute die Zahl aller Protonen im Weltall.
Aus anderen Rechnungen erhält man die weiteren Konstanten 136 und 137 (ihre Bedeutung soll hier nicht erläutert werden).
Der deutsche Physiker *Ertel* machte nun den Ansatz

$$N = \frac{2^{136} \cdot 2^{137}}{2^{10}} = 1{,}48 \cdot 10^{79}$$

Dieser Wert stimmt mit dem Wert von *Eddington* gut überein. Wenn Ihr Rechner keine y^x-Taste hat, können Sie auch mit der lg-Taste die Aufgabe lösen.

Nun sind wir natürlich neugierig, wie groß die Masse der Protonen (der Atomrümpfe) im Weltall ist. Die Physiker geben die Masse eines Protons mit $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g an. Die gesamte Protonenmasse beträgt also

$$1{,}48 \cdot 10^{79} \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24}\,\text{g} = 2{,}44 \cdot 10^{55}\,\text{g}.$$

Da 1 Tonne = 1000 kg = 1000000 g = 10^6 g ist, folgt weiter

$$2{,}44 \cdot 10^{55}\,\text{g} = 2{,}44 \cdot 10^{49}\,\text{t}$$

Einstein gibt die Weltmasse mit $1{,}3 \cdot 10^{55}$ g an. Falls Sie die Aufgabe mitrechneten, können Sie mit Stolz sagen, daß Sie fast das gleiche Ergebnis wie *Einstein* fanden.
Weiter ist der Weltradius nach seiner Meinung augenblicklich $2{,}5 \cdot 10^{28}$ cm = $2{,}5 \cdot 10^{23}$ km groß.
Das „augenblicklich" bedeutet, daß sich dieser Wert ändert.
Da das Licht in einem Jahr $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km zurücklegt, beträgt der Weltenradius $2{,}6 \cdot 10^{10}$ Lichtjahre.
Nach den bisher benutzten Zahlen erscheinen 10^{23} geradezu klein.

Wieviel Tropfen sind im Meer?

In den Volksmärchen befassen sich einige Motive mit den Begriffen unendlich und ewig. Die Ewigkeit wird in einem deutschen Märchen so dargestellt: Fern in Arabien steht ein riesiger Berg, ganz aus einem Diamanten. Alle hundert Jahre kommt ein kleiner Vogel und wetzt seinen Schnabel an diesem Diamantberg. Wenn der kleine Vogel irgendwann einmal den gesamten Berg durch das Schnabelwetzen abgetragen hat, dann ist eine Sekunde der Ewigkeit um.

Zur Lösung dieses Problems ist unser Taschenrechner offensichtlich nicht geeignet.
Es gibt aber ähnliche Fragen, z.B.: Wieviel Tropfen sind im Weltmeer? Wer einmal über den Ozean fuhr oder flog und sich dabei seine Tiefe von einigen tausend Metern vorstellte, wird die Beantwortbarkeit der Frage anzweifeln.
Aber unser Computer schafft es!
Zuerst sehen Sie einmal in Ihrem Medizinschrank nach. Vielleicht haben Sie dort eine Arzneiflasche mit einem Tropfverschluß. Auf dem Boden der Flasche oder auf dem Etikett steht ihr Rauminhalt. Daraus können Sie bestimmen, wieviel Tropfen auf einen Kubikzentimeter gehen.
Sie werden finden, daß etwa 30 Tropfen einen Kubikzentimeter (Milliliter) füllen. Also, 1 Tropfen entspricht $\frac{1\ \mathrm{cm}^3}{30}$ $= 0{,}033\ \mathrm{cm}^3$. Aus dem Lexikon oder einem besseren Atlanten können Sie das Volumen aller Weltmeere entnehmen. Die Angaben liegen um

$$1{,}3 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}^3 = 1{,}3 \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^3 = 1{,}3 \cdot 10^{27}\ \mathrm{cm}^3$$

Die Zahl der Tropfen ist dreißigmal so groß, also

$$1{,}3 \cdot 10^{27} \cdot 30 = 3{,}9 \cdot 10^{28}$$

Zum Vergleich: 1 cm^3 gasförmiger Wasserstoff enthält $2{,}69 \cdot 10^{19}$ Moleküle, und 1 m^3 H_2 besteht danach aus $2{,}69 \cdot 10^{25}$ Molekülen. Nach diesem Vergleich erscheint die Tropfenzahl im Weltmeer nicht besonders groß.
Nun taucht die Frage auf, wie genau die Angabe $3{,}9 \cdot 10^{28}$ Tropfen eigentlich ist. Fachleute meinen, daß diese Zahl höchstens um den Faktor 2 falsch sein kann.
Wenn wir 800 Mark Gehalt beziehen, und der Lohnbuchhalter versieht sich um den Faktor 2, so erhalten wir entweder 400 Mark, was bei uns Protest auslöst, oder 1600 Mark, worüber wir staunen würden. Im Bereich der Lohnbuchhaltung ist jeder Faktor außer 1 als Fehler unzulässig.
Anders bei sehr großen Zahlen. Solange die Zehnerpotenz sich nicht ändert, liegt kein Grund zur Aufregung vor.

$$2 \cdot 3{,}9 \cdot 10^{28} = 7{,}8 \cdot 10^{28}$$

Die Größenordnung 10^{28} wird durch den Unsicherheitsfaktor nicht berührt.

Wie hoch sind wir?

Sie unternehmen eine Reise in die Berge. Auf einem Campingplatz übernachten Sie. Am Lagerfeuer taucht die Frage auf, wie hoch der Platz über dem Meeresspiegel liegt.
Falls Sie ein Barometer und den Rechner zur Hand haben, ist das kein Problem.
Als erste Näherung gehen Sie aus von dem mittleren Luftdruck auf Meereshöhe: 1013 mbar.
Der Luftdruck auf Ihrem Campingplatz soll 700 mbar betragen. Dann gilt für die Höhe H:

$$H = 7620\,\text{m} \cdot \ln\left(\frac{1013}{\text{Ortsluftdruck}}\right) = 7620\,\text{m} \cdot \ln\left(\frac{1013}{700}\right)$$

$$H = 7620 \cdot 0{,}37\ \text{m} = 2816\ \text{m}$$

Sie befinden sich wahrscheinlich kurz unter einem Gipfel irgendwo im Kaukasus.

> Sollte Ihr Rechner keine ln-Taste haben, so arbeiten Sie mit der lg-Taste:
>
> $\ln x = 2{,}3 \cdot \lg x$

Daraus wird die Höhengleichung

$$H = 7620\ \text{mm} \cdot 2{,}3 \cdot \lg\left(\frac{1013}{700}\right) = 2813\ \text{m}$$

Wegen der 3 m Höhendifferenz gegenüber der Gleichung mit ln lohnt es sich nicht zu streiten.
Vielleicht interessiert es Sie, wie niedrig der Luftdruck auf dem Mount Everest ist?
Der Mount Everest ist 8804 m hoch.
Wir verwenden die barometrische Höhenformel in ihrer

bekannten Form

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{H}{7620\,\mathrm{m}}}$$

(p Ortsluftdruck, p_0 Luftdruck auf Meeresniveau, H Höhe). Mit $H = 8804$ m erhalten wir

$$p = 1013\ \mathrm{mbar} \cdot e^{-\frac{8804}{7620}} = 319\ \mathrm{mbar}$$

Die Winkelmaße

Traditionsgemäß geben wir Winkel bei den meisten mathematischen Aufgaben in Grad, Minuten und Sekunden an. Die meisten Rechner sind auf Grad und Dezimalteile davon programmiert.

$$1^\circ = 60';\ 1' = 60'';$$

$$1' = \frac{1^\circ}{60} = 0{,}017^\circ;\ 1'' = \frac{1^\circ}{3600} \approx 0{,}00028^\circ$$

In alten Seegeschichten werden die Seeräuber drei Strich Backbord gesichtet.

$$32\ \text{Striche} = 360^\circ$$

$$1\ \text{Strich} = \frac{360^\circ}{32} = 11^\circ\,15' = 11{,}25^\circ$$

Ferner werden Winkel im Bogenmaß (Radiant) angegeben. Das Bogenmaß eines Winkels φ ist das Verhältnis aus dem Kreisbogen s, den die Schenkel des Winkels aus dem Kreisumfang eines Kreises mit dem Radius r um den Scheitel herausschneiden, zum Radius r. Obwohl das Bogenmaß als Verhältnis zweier Längen eine reine Zahl ist, kennzeichnet man es mit der „Einheit“ rad. Der Vollwinkel ist wegen $s = 2\pi r$ gleich

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \approx 6{,}2831853 \cdots$$

Weil andererseits der Vollwinkel gleich 360° ist, folgt

$$360° = 2\pi \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57{,}2957795 \ldots °$$

$$\approx 57° 17' 44{,}8''$$

und

$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = 0{,}0174532925 \ldots \text{ rad}$$

Manche Rechner haben eine Taste für die Umrechnung des Gradmaßes in das Bogenmaß und umgekehrt, andere haben eine Taste $\boxed{\text{grd} \leftrightarrow \text{rad}}$, mit der eingestellt werden kann, ob die eingegebenen oder berechneten Zahlen das Gradmaß oder das Bogenmaß bedeuten. Bei diesen rechnet man die beiden Winkelmaße entweder nach obigen Formeln um oder so, wie es die folgenden Beispiele zeigen:

Schalterstellung grd, sin 17° = 0,29237...
Schalterstellung rad, arcsin 0,29237... = 0,2967...
also: 17° = 0,2967... rad

Die umgekehrte Umrechnung sieht so aus:

Schalterstellung rad, sin 0,2967 = 0,29237...
Schalterstellung grd, arcsin 0,29237 = 17°
also: 0,2967 rad = 17°

Diese Methode führt aber nur für spitze Winkel φ ($0° < \varphi < 90°$ bzw. $0 \text{ rad} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1{,}570796 \ldots \text{ rad}$) immer zu richtigen Ergebnissen.
Damit ist die Möglichkeit der Winkel„einheiten“ noch nicht erschöpft. Es gibt auch die Teilung des Vollwinkels in Neugrad (Gon), Neuminuten (^{c}) und Neusekunden (^{cc}).

$$\text{Vollwinkel} = 400^g;\ 1^g = 100^c;\ 1^c = 100^{cc}$$

$$1^\circ = \frac{400^g}{360} = 1,\bar{1}\ldots^g;\ 1^g = 0{,}9^\circ$$

$$1' = 0{,}0\overline{185}^g\ldots$$

$$1'' = 0{,}00030864^g\ldots$$

Und zum Schluß nochmals eine Strichteilung, diesmal die militärische. Sie entstand aus dem Bedürfnis, Entfernungen zu schätzen. Wenn man den Vollwinkel in 6000 Teile teilt (Strich), so entspricht ein Winkel von 1 Strich auf 1 km Entfernung ungefähr einem Meter.

$$U = 2\pi \cdot r = 6{,}28 \cdot 1\ \text{km}$$

6,28 km werden auf 6 km abgerundet. Geteilt durch 6000 ergibt danach 1 Strich 1 m.
Die üblichen Marschkompasse sind wegen der besseren Übersichtlichkeit nur in 60 Striche geteilt.

$$1^\circ = 16{,}67\ \text{Striche.}$$

Wenn Sie Spaß daran haben, können Sie die folgende Aufgabe rechnen: Ein Soldat mißt zwischen zwei Gegenständen mit dem Marschkompaß 1000 Striche. Wie groß ist der Sinus davon? Er nennt einem Seemann den Sinuswert. Dieser errechnet den Arcsinus in Radiant und bestimmt daraus wieder die guten alten seemännischen Striche. Diesen Wert teilt er dann seinem Kapitän in Neugrad mit.
So verworren kann die Welt sein, wenn sich die Fachleute nicht auf eine Maßeinheit einigen.
Das Ergebnis der Aufgabe ist $66^g\ 67^c$ (ohne Gewähr!).

Winkelfunktionen (die Mathematiker nennen sie auch trigonometrische Funktionen) begegnen uns auf Schritt und Tritt in der Technik. Im folgenden wollen wir Ihnen zeigen, wie Sie auch mit einem Taschenrechner, der lediglich über die Grundrechenarten sowie eine Wurzel-, Reziprok- und Quadrattaste verfügt, die Werte für diese Funktionen ausrechnen können.
Die mathematischen Grundlagen des zu erläuternden Verfahrens bestehen in folgendem:
Alle sogenannten transzendenten Funktionen, zu denen auch die Winkelfunktionen gehören, sind durch Potenzreihen mit unendlich vielen Gliedern darstellbar. Die allgemeine Form lautet

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Natürlich müssen die Glieder von einer bestimmten Stelle ab immer kleiner werden, damit die Reihe konvergiert, d.h. trotz unendlich vieler Glieder einem endlichen Summenwert zustrebt.
Für die Kosinusfunktion $f(x) = \cos x$ haben die Mathematiker folgende Form der unendlichen Potenzreihe herausgefunden:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$$

Dabei ist $p!$ (sprich: p Fakultät) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \cdot p$
Diese Reihe konvergiert für alle x, aber um so besser bzw. schneller, je kleiner die Variable x ist. Das bedeutet auch, es sind weniger Glieder zur Berechnung zu berücksichtigen, um eine vorgegebene Genauigkeitsforderung zu erfüllen.
Der mathematische „Trick“ besteht nun darin, die Variable x durch eine Anzahl von Operationsschritten (z.B. Halbieren) so lange zu verkleinern, bis die ersten zwei oder drei Glieder der Reihe ausreichen, die Berechnung mit einer vorgegebenen Genauigkeit durchzuführen.

Nach erfolgter Anwendung der Näherungsformel muß in einem Rückwärtsgang (diesmal durch Verdoppeln der ermittelten Größe) mit der gleichen Schrittzahl der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt werden. Es ist üblich, die erste Schrittfolge Deflation, die zweite Inflation zu nennen. Als Basisfunktion zur Berechnung aller Winkelfunktionen bzw. ihrer Umkehrfunktionen ist aus verschiedenen mathematischen Gründen die Funktion $y = \cos x$ besonders geeignet. Wegen $\cos(-x) = \cos x$ brauchen immer nur positive Winkel verwendet zu werden, und zwar im Bogenmaß.

Die Umrechnungsformel für den Winkel α in sein Bogenmaß x ist:

$$x = \frac{2\,\pi \cdot \alpha}{360} = 0{,}0174532\ldots \cdot \alpha$$

Die Deflation besteht darin, den gegebenen Winkel x_0 (im Bogenmaß) n-mal zu halbieren, bis $x_n \leqq 0{,}3$ ist. Dann liefern die ersten drei Glieder der Reihenentwicklung einen Näherungswert für $y_n = \cos x_n$ von

$$y_n \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

mit einem Fehler $< 10^{-6}$.
Die letzte Gleichung ergibt, für den Taschenrechner günstig umgeformt,

$$y_n = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6}.$$

Beim Rückwärtsgang, der oben genannten Inflation, müssen nun die Winkel n-mal verdoppelt werden, um den Anfangszustand wieder herzustellen.
Wegen $\cos 2\,x = 2\cos^2 x - 1$ geschieht das nach der Formel

$$y_{i-1} = 2\,y_i^2 - 1$$

in n Schritten, bis der Wert y_0 erreicht ist.

Das für Kosinuswerte verwendete Schema sieht zusammengefaßt so aus:

Deflation	**Inflation**
x_0 (Bogenmaß)	$y_0 = \cos x_0$
$\downarrow$	$\uparrow$
n-mal halbieren	$y_{i-1} = 2\,y_i^2 - 1$ (n-mal)
$\downarrow$	$\uparrow$

$$x_n\ (\leqq 0{,}3) \longrightarrow \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6} = y_n$$

Die anderen drei gebräuchlichen Winkelfunktionen können über den Kosinus einfach berechnet werden, wenn man die folgenden Umrechnungsformeln benutzt (mit $y_0 = \cos x_0$):

$$\sin x_0 = \sqrt{1 - y_0^2}$$

$$\tan x_0 = \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1}$$

$$\cot x_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1}}$$

(Diese Gleichungen gelten nur für spitze Winkel x_0.) Dadurch wird der Durchlauf auf dem Taschenrechner nur um jeweils fünf Tastendrücke verlängert.

Als Beispiel wollen wir $y_0 = \cos 67\,°$ berechnen:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1{,}1693706 \\
x_1 &= 0{,}5846853 \\
x_2 &= 0{,}2923426 \quad (< 0{,}3) \\
y_2 &= 0{,}9575722 \qquad = \frac{\left(\frac{x_2^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6} \\
y_1 &= 0{,}8338891 \\
y_0 &= 0{,}3907421
\end{aligned}$$

Die Zahl der Tastendrücke beträgt dabei 34.

Ein genauerer Wert ist $\cos 67° = 0{,}390731128$, die Abweichung ist also $\Delta f \approx 1 \cdot 10^{-5}$.
Bei den Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen (auch Arkus- oder zyklometrische Funktionen genannt) sind die Variablen gegenüber den Winkelfunktionen vertauscht. Daher laufen die Rechenoperationen auch in einer umgekehrten Reihenfolge ab.
Wegen der trigonometrischen Formel

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}$$

werden die Deflationsschritte nach der Formel

$$x_{i+1} = \sqrt{\frac{x_i + 1}{2}}$$

berechnet. Die Deflation wird abgebrochen, sobald $x \geqq 0{,}9$ ist. Als Näherungsformel wird die Umkehrung der schon dargestellten Formel

$$y_n = \frac{\left(\frac{x_n^2}{2} - 3\right)^2 - 3}{6}$$

verwendet, d.h., letztere wird nach x_n aufgelöst, und es werden x_n und y_n vertauscht. Das ergibt für die Arcuscosinusberechnung das folgende Schema

$$\begin{array}{lcl}
\textbf{Deflation} & & \textbf{Inflation} \\
x_0 \ (|x_0| \leqq 1) & & y_0 = \arccos x_0 \\
\downarrow & & \uparrow \\
x_{i+1} = \sqrt{\dfrac{x_i + 1}{2}} & & y_{i-1} = 2\, y_i \ (n\text{-mal}) \\
\downarrow & & \uparrow \\
x_n \ (\geqq 0{,}9) \longrightarrow & \sqrt{6 \cdot \left(1 - \sqrt{\dfrac{1 + 2 \cdot x_n}{3}}\right)} & = y_n
\end{array}$$

Die anderen Arcusfunktionen lassen sich über den Arcuscosinus nach folgenden Formeln berechnen:

$$\arcsin x_0 = 1{,}5707963 - \arccos x_0$$

$$\arctan x_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

$$\operatorname{arccot} x_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2}+1}}$$

Dazu das folgende Beispiel:

$$y = \arcsin 0{,}5$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0{,}5 \\
x_1 &= 0{,}8660254 \\
x_2 &= 0{,}9659258 \quad (> 0{,}9) \\
y_2 &= 0{,}2618011 \qquad = \sqrt{6 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1+2x_2}{3}}\right)} \\
y_1 &= 0{,}5236022 \\
y_0 &= 1{,}0472045 = \arccos 0{,}5 \\
y &= \arcsin 0{,}5 = 1{,}5707963 - y_0 = 0{,}5235919
\end{aligned}$$

Dazu waren 41 Tastendrücke nötig. Der wahre Wert beträgt

$$\arcsin 0{,}5 = 0{,}5235988$$

Der Fehler beträgt also $\Delta f = 10^{-5}$.

Wenn Ihre Ansprüche an die Genauigkeit bei der Berechnung von Winkelfunktionen und deren Umkehrfunktionen geringer sind und die Eingabewerte eine gewisse Schranke nicht überschreiten, dann können Sie auch bequem die folgenden Näherungsformeln verwenden. Sie wurden aus den ersten beiden Gliedern der entsprechenden Reihenentwicklungen abgeleitet. Der Fehler ist dabei kleiner als 10^{-3}. Die Schranken sind mit angegeben, ebenfalls die auf 8 Nachkommastellen genauen Werte.

$\sin x \approx x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}63$ bzw. $36\,°$
Beispiel: $\sin 0{,}42$ ($= \sin 24\,°$) $\approx 0{,}408$
(genauerer Wert: 0,40776045)

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ für $|x| \leqq 0{,}39$ bzw. $22{,}5\,°$
Beispiel: $\cos 0{,}349$ ($= \cos 20\,°$) $\approx 0{,}939$
(genauerer Wert: 0,93971514)

$\tan x \approx x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}38$ bzw. $22°$
Beispiel: $\tan 0{,}349$ (= $\tan 20°$) $\approx 0{,}363$
(genauerer Wert: 0,36389566)

$\arcsin x \approx x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}42$ bzw. $24°$
Beispiel: $\arcsin 0{,}3 \approx 0{,}3045$
(genauerer Wert: 0,30469265)

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = 1{,}5708 - \arcsin x$
Beispiel: $\arccos 0{,}3 \approx 1{,}5708 - 0{,}3045 = 1{,}266$
(genauerer Wert: 1,26610367)

$\arctan x \approx x\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}35$ bzw. $20°$
Beispiel: $\arctan 0{,}3 \approx 0{,}291$
(genauerer Wert: 0,29145679)

$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x = 1{,}5708 - \arctan x$
Beispiel: $\operatorname{arccot} 0{,}3 \approx 1{,}5708 - 0{,}291 = 1{,}28$
(genauerer Wert: 1,27933953)

Gegebenenfalls können Sie auch die Beziehung

$\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$ verwenden.

Keine Angst vor Logarithmen

Viele Menschen, darunter auch solche mit einer technisch-naturwissenschaftlichen Grundausbildung, haben ein unangenehmes Gefühl, wenn sie das Wort „Logarithmus“ hören. Das liegt vielleicht auch mit daran, daß es etwas

fremdartig klingt. Dabei bedeutet es dasselbe wie die Begriffe „Exponent“ oder „Hochzahl“.
Das Aufsuchen von $\log_b a$ (lies: Logarithmus a zur Basis b) entspricht vollständig der mathematischen Fragestellung:

$b^x = a$ bzw. welche Potenz von b ist gleich a?

Die Abneigung gegen alles, was mit Logarithmen zusammenhängt, ist um so schwerer verständlich, als gerade die Logarithmenrechnung wie kaum eine andere mathematische Disziplin aus den Bedürfnissen der Praxis entstanden ist.
Die weite Verbreitung der sogenannten Rechenstäbe unterstreicht diese Feststellung. Mit Ihrem Taschenrechner haben Sie nun ein Gerät, das dem Rechenstab haushoch überlegen ist. (Es sei denn, es ist Stromausfall und die Batterien sind leer!)
Bevor wir uns der Praxis des logarithmischen Rechnens zuwenden, wollen wir Ihnen einige Funktionenklassen vorstellen, die damit zusammenhängen, und Näherungsverfahren erläutern, welche die Berechnung der entsprechenden Funktionswerte gestatten.
Da sind zunächst die Exponentialfunktionen. Ihr allgemeiner Typ hat die Form $y = b^x$. Wenn die Basis b gleich der „*Euler*schen Zahl“ e ist, ergibt sich die besonders wichtige Exponentialfunktion

$$y = e^x.$$

Ihre Reihendarstellung ist

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \text{für alle } x$$

Beachten Sie: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$

Diese unendliche Reihe ergibt für $x = 1$ auch gleich eine Berechnungsmöglichkeit für e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2{,}7182818\cdots$$

Eine unendliche Kettenbruchdarstellung der Zahl e haben wir in dem Abschnitt „Kettenbrüche" aufgezeigt.
Zur Berechnung der Funktionswerte $y = e^x$ verwenden wir die ersten 3 Glieder der Reihe. Das ergibt nach einer Umformung, die für Taschenrechner günstig ist,

$$y \approx \frac{(x+1)^2+1}{2}$$

Der Fehler ist kleiner als 10^{-4} für $x \leqq 0{,}01$.
Wir wenden wieder das Verfahren „Deflation/Inflation" an (s. vorhergehenden Abschnitt). Die Deflation erfolgt durch Halbierungsschritte.
Wegen $e^{x/2} = \sqrt{e^x}$ entspricht das einem n-maligen Wurzelziehen. Daher muß bei der Inflation n-mal quadriert werden. Das verwendete Schema sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Deflation} & & \textbf{Inflation} \\
x_0\ (>0) & & y_0 = e^{x_0} \\
\downarrow & & \uparrow \\
n\text{-mal halbieren} & & n\text{-mal quadrieren} \\
\downarrow & & \uparrow \\
x_n\ (\leqq 0{,}01) \longrightarrow & \dfrac{(x_n+1)^2+1}{2} & = y_n
\end{array}$$

Wenn der Eingabewert x_0 negativ ist (< 0), dann rechnen Sie mit dem positiven Wert und drücken zum Schluß die Reziproktaste $\left(\text{wegen } e^{-x} = \frac{1}{e^x}\right)$.
Die Umkehrfunktion von $y = e^x$ ist $y = \ln x$ (sprich: Logarithmus naturalis oder einfach „el" „en").
Sie liefert die natürlichen Logarithmen (d.h. zur Basis e). Daher wird auch die Näherungsformel für $y = e^x$ umgekehrt: $y = \frac{(x+1)^2+1}{2}$ wird nach x aufgelöst, und danach werden y und x vertauscht. Das ergibt

$$y = \sqrt{2x-1} - 1$$

 Daraus folgt das Berechnungsschema für $y = \ln x$.

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Deflation} & \textbf{Inflation} \\
x_0\ (\geqq 1) & y_0 = \ln x_0 \\
\downarrow & \uparrow \\
n\text{-mal Quadratwurzel ziehen} & n\text{-mal verdoppeln} \\
\downarrow & \uparrow \\
\multicolumn{2}{l}{x_n\ (\leqq 1{,}005) \longrightarrow \sqrt{2\,x_n - 1} - 1 = y_n}
\end{array}$$

Für $x_0 < 1$ führen Sie die Berechnung mit $\frac{1}{x_0}$ durch und versehen das Ergebnis mit einem Minuszeichen $\left(\text{wegen } \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0\right)$.
Wenn Sie den sogenannten dekadischen Logarithmus $\lg x$ berechnen wollen, verwenden Sie die Formel $\lg x = 0{,}4343 \cdot \ln x$.

Falls Sie den bei praktischen Problemen relativ häufig vorkommenden Ausdruck $y = a^b$ ($a > 0$, b beliebig) berechnen wollen und Ihr Taschenrechner keine $\boxed{y^x}$-Taste hat, kommen Sie auf folgendem Umweg zum Ziel:

Wegen der mathematischen Identität $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ berechnen Sie zunächst $\ln a$ nach dem zweiten Schema dieses Abschnittes, multiplizieren das Ergebnis mit b und berechnen dann $e^{b \cdot \ln a}$ nach dem ersten Schema.

Nun noch als Beispiel die Berechnung von $y = \ln 0{,}85$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{0{,}85} = 1{,}1764706 \\
x_1 &= 1{,}0846523 \\
x_2 &= 1{,}0414664 \\
x_3 &= 1{,}0205226 \\
x_4 &= 1{,}0102092 \\
x_5 &= 1{,}0050916 \\
x_6 &= 1{,}0025426 \quad (< 1{,}005) \\
y_6 &= 0{,}0025394 \ = \sqrt{2\,x_6 - 1} - 1 \\
y_5 &= 0{,}0050788
\end{aligned}$$

$y_4 = 0{,}0101576$
$y_3 = 0{,}0203152$
$y_2 = 0{,}0406304$
$y_1 = 0{,}0812608$
$y_0 = 0{,}1625216$
$y \;= -\,0{,}1625216$

Zahl der Tastendrücke: 31
Genauerer Wert: $\ln 0{,}85 = -\,0{,}1625189$, d.h., der Fehler ist $\Delta f < 10^{-5}$.
Wenn Ihr Rechner nicht über eine Wurzeltaste verfügt und die Variable x gewissen einschränkenden Bedingungen genügt, dann können Sie die Funktionswerte der Exponentialfunktionen und auch die Logarithmen nach den folgenden Näherungsformeln berechnen. Dabei beträgt die Abweichung vom wahren Wert maximal etwa 10^{-3}.

$$e^x \approx \frac{(x+1)^2+1}{2} \quad \text{für } |x| \leqq 0{,}18$$

Beispiel: $e^{0,15} \approx 1{,}16125$
(genauerer Wert: 1,161834242)

$$\ln(1+x) \approx \frac{1-(x-1)^2}{2} \quad \text{für } |x| \leqq 0{,}14$$

Beispiel: $\ln 0{,}9 = \ln(1-0{,}1) \approx -0{,}105$
(genauerer Wert: $-\,0{,}105360516$)

$$\lg(1+x) \approx 0{,}21715\,[1-(x-1)^2] \quad \text{für } |x| \leqq 0{,}21$$

Beispiel: $\lg 0{,}9 = \lg(1-0{,}1) \approx -\,0{,}0456$
(genauerer Wert: $-\,0{,}04575749071$)

Wir wollen Ihnen nun noch zeigen, daß man mit den Logarithmen durchaus etwas anfangen kann. International sind drei Arten von Logarithmen üblich, d.h. Funktionswerte der allgemeinen Darstellung $y = \log_b x$.

1. Natürliche Logarithmen. Ihre Basis ist gleich der *Euler*schen Zahl e. Schreibweise: $y = \ln x$.

Sie spielen eine bedeutende Rolle bei naturwissenschaftlichen Zusammenhängen.

2. Dekadische Logarithmen. Dabei ist die Basis $b = 10$. Schreibweise: $y = \lg x$. Sie sind speziell für unser Dezimalsystem geschaffen worden und liegen in unzähligen Tabellenwerken vor. Wenn ohne weitere Zusätze von Logarithmen gesprochen wird, dann sind die dekadischen gemeint.

3. Duale Logarithmen. Ihre Basis ist 2. Schreibweise: $y = \mathrm{lb}\, x$ (lies: binärer Logarithmus). Sie sind zusammen mit der elektronischen Rechentechnik aktuell geworden, da die letztere mit dem dualen Zahlensystem (Basis 2) operiert.

Die konstanten Faktoren, die eine Logarithmenart in die andere umzurechnen gestatten, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	ln	lg	lb
ln	1	$\ln 10 = 2{,}302585$	$\ln 2 = 0{,}693147$
lg	$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294$	1	$\lg 2 = 0{,}30103$
lb	$\frac{1}{\ln 2} = 1{,}442695$	$\frac{1}{\lg 2} = 3{,}321928$	1

Damit Sie praktisch mit den Logarithmen arbeiten können, sind hier die wichtigsten Rechenregeln dargestellt.

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log (a^n) = n \cdot \log a; \quad \text{für } a, b > 0; n \text{ beliebig}$$

$$\log \left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log a$$

Wie Sie sehen, wird beim logarithmischen Rechnen die

Rechenart um eine Stufe erniedrigt, aus der Multiplikation zweier Zahlen a und b wird die Addition ihrer Logarithmen usw. Das macht auch die Beliebtheit dieses Systems aus. Allerdings sind die Genauigkeitsansprüche ziemlich groß. Nicht umsonst gibt eine gute Logarithmentafel mindestens 6 Stellen nach dem Komma an.

Natürlich versagt die logarithmische Berechnung und damit auch der Rechenstab bei der Addition oder Subtraktion zweier Zahlen (es gibt ja keine Rechenart „darunter“) bzw. wenn sogenannte Kettenrechnungen auftreten, bei denen die 4 Grundrechenarten miteinander kombiniert auftreten. Dann erwacht Ihr Taschenrechner zu seiner wahren Größe!

Als Anwendungsbeispiel wählen wir aus dem Abschnitt „Geburtstage und Glücksspiele“ die Näherungsformel für die Wahrscheinlichkeit, daß von n Personen nicht zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Wir setzen dabei voraus, daß Ihr Taschenrechner keine y^x-Taste aufweist.

Dann ergibt sich aus der Formel

$$W_n \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 365} \cdot 365^{365} \cdot e^{-365}}{\sqrt{2\pi(365-n)} \cdot (365-n)^{365-n} \cdot e^{-(365-n)} \cdot 365^n}$$

für $n = 40$ und durch Wegkürzen von $\sqrt{2\pi}$ der Ausdruck

$$W_{40} \approx \frac{\sqrt{365} \cdot 365^{365} \cdot e^{-365}}{\sqrt{325} \cdot 325^{325} \cdot e^{-325} \cdot 365^{40}}$$

Wir fassen nun noch Potenzen mit der gleichen Basis zusammen und berücksichtigen, daß $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist.

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man ihre Exponenten addiert (subtrahiert).

Danach ergibt sich

$$W_{40} \approx \left(\frac{365}{325}\right)^{325,5} \cdot \frac{1}{e^{40}} = \frac{1{,}123077^{325,5}}{e^{40}}$$

 Das logarithmische Rechenschema sieht dann folgendermaßen aus:

$$\lg W_{40} = \lg \frac{1{,}123077^{325{,}5}}{e^{40}}$$

$$= 325{,}5 \cdot \lg 1{,}123077 - 40 \cdot \lg e$$

$$= -0{,}963484$$

Wenn aber $\lg W_{40} = -0{,}963484$ ist, dann ist

$$W_{40} = 10^{-0{,}963484} = 0{,}1087717$$

Aus $\lg a = c$ folgt $a = 10^c$ für beliebige c.

Sie haben also auf dem Umweg über die Logarithmenrechnung das gleiche Ergebnis erhalten wie auf Seite 160.

„Hyperbolicus“

Es gibt noch eine weitere Klasse von Funktionen, die eine selbständige Bedeutung haben, obwohl sie aus Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind. Das sind die Hyperbelfunktionen einschließlich ihrer Umkehrfunktionen. Besonders anspruchsvolle Taschenrechner verfügen über eigene Tasten dafür.
Die Bezeichnungen $y = \sinh x$ (lies „Sinus hyperbolicus“ oder auch „Hyperbelsinus“), $\cosh x$, $\tanh x$ und $\coth x$ deuten schon darauf hin, daß gewisse Ähnlichkeiten mit den Winkelfunktionen vorhanden sind. So ist z.B.

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x \quad \text{und} \quad \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$$

Die Definitionsgleichungen der hyperbolischen Funktionen sind:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Für große Werte von x werden die e^{-x}-Glieder sehr klein (bei $x = 10$ beträgt die Abweichung nur noch $\Delta f \approx e^{-10} \approx 5 \cdot 10^{-5}$), so daß gilt:

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{e^x}{2} \quad \text{und}$$

$$\tanh x \approx \coth x \approx 1$$

Der Hyperbelkosinus ist bei den Technikern auch noch unter dem Namen „Kettenlinie" bekannt geworden, weil diese Funktion die Lage einer frei durchhängenden Kette oder eines anderen mit Masse belegten biegeschlaffen Fadens beschreibt. Ob es sich dabei um eine Perlenkette handelt, die vom Hals einer Frau herabhängt, oder um das Transatlantikkabel, das sich über eine Tiefseeschlucht spannt, spielt keine Rolle.

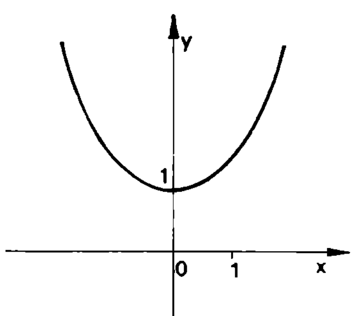

Bild 9. So hängt eine Kette durch

Die andere wichtige Hyperbelfunktion ist $\tanh x$. Sie ist auch als Wachstumsfunktion bekannt. Wir hatten schon gezeigt, daß sie sich für große positive und negative x-Werte asymptotisch (d.h. unendlich dicht) oben und unten den zwei Sättigungsgeraden im Abstand + 1 und — 1 parallel zur x-Achse nähert. Sie wird daher für Prognoseberechnungen verwendet, wenn Prozesse mit Sättigungscharakter ablaufen. Das ist aber häufig der Fall. Sowohl die Zunahme der Wissenschaftler in einem Lande als auch der Absatz von Fernsehern, Kühlschränken und Waschmaschinen ge-

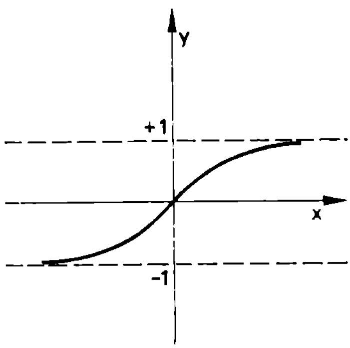

Bild 10. Die Tangens-hyperbolicus-Kurve. Die Sättigungsgeraden sind gestrichelt

horchen grundsätzlich einem Hyperbeltangens-Gesetz. Entscheidend ist, daß der Prozeß zunächst ganz schwach steigt (technische Neuheit, hoher Preis, Unvollkommenheiten in der Fertigung), dann stark zunimmt (Massenbedarfsartikel, große Stückzahlen, ausgereifte Konstruktion) und schließlich einem Sättigungswert zustrebt (mehr als einen Fernseher oder ein Auto braucht eine Familie normalerweise nicht).

Eine solche für Prognosezwecke wichtige Spezialform der Hyperbeltangens-Funktion ist

$$y = \frac{S}{2}\left(1 + \tanh\frac{x - C}{K}\right),$$

wobei x die Zeit darstellt, S eine Sättigungskonstante, C den Zeitpunkt der „Halbsättigung“ und K ein weiterer Parameter ist.

Der Bestand an Objekten zur Zeit x ist y. Wenn eine genügende Anzahl von Meßwerten (x_i, y_i) vorhanden sind, dann

lassen sich die Konstanten S, C und K bestimmen (s. Abschnitt „Lineare Regressionsrechnung"), und die Prognostiker haben die Möglichkeit, ein wenig über den gegenwärtigen Zeitpunkt hinaus die zu erwartenden Bedarfszahlen zu ermitteln.
Eine zahlenmäßige Berechnung der hyperbolischen Funktionswerte erfolgt wieder nach dem für Taschenrechner bewährten Verfahren (s. Abschnitt „Der mathematische Trick").
Zur Gewinnung einer Näherungsformel wird die Potenzreihe

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

nach dem dritten Glied abgebrochen.
Das ergibt nach einer geeigneten Umformung

$$y = \cosh x \approx \frac{\left(\frac{x^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6}$$

Das Berechnungsschema ist im folgenden dargestellt.

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Deflation} & & \textbf{Inflation} \\
x_0 & & y_0 = \cosh x_0 \\
\downarrow & & \uparrow \\
n\text{-mal halbieren} & & y_{i-1} = 2\,y_i^2 - 1 \\
\downarrow & & \uparrow \\
x_n\ (\leqq 0{,}3) \longrightarrow & \dfrac{\left(\frac{x_n^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6} & = y_n
\end{array}$$

Der relative Fehler ist dabei kleiner als 0,1 Promille. Die anderen drei hyperbolischen Funktionen sind aus $y = \cosh x$ in der folgenden Weise durchlaufend berechenbar:

$$\sinh x = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\tanh x = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}}$$

Als Zahlenbeispiel führen wir Ihnen die Berechnung von

$$y = \tanh 2{,}7$$

vor:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2{,}7 \\
x_1 &= 1{,}35 \\
x_2 &= 0{,}675 \\
x_3 &= 0{,}3375 \\
x_4 &= 0{,}16875 \quad (< 0{,}3) \\
y_4 &= 1{,}0142721 \qquad = \cosh x_4 = \frac{\left(\frac{x_4^2}{2} + 3\right)^2 - 3}{6} \\
y_3 &= 1{,}0574956 \\
y_2 &= 1{,}2365940 \\
y_1 &= 2{,}0583296 \\
y_0 &= 7{,}4734416 = \cosh x_0
\end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{y_0^2}} = y = 0{,}991007 = \tanh x_0$$

Ein genauerer Wert ist 0,9910075, d.h. $\Delta f < 10^{-6}$.
Die Zahl der notwendigen Tastendrücke war 48.
Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen werden Areafunktionen genannt. Wenn wir die oben dargestellte Näherungsformel für $y = \cosh x$ nach x auflösen und dann x mit y vertauschen, ergibt sich $y = \operatorname{arcosh} x$ (sprich: Area cosinus-hyperbolicus) zu

$$y = \operatorname{arcosh} x \approx \sqrt{6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + 2x}{3}} - 1\right)}$$

Damit ergibt sich das folgende Berechnungsschema

Deflation	**Inflation**
$x_0 \; (\geq 1)$	$y_0 = \operatorname{arcosh} x_0$
$\downarrow$	$\uparrow$
$x_{i+1} = \sqrt{\frac{x_i + 1}{2}}$	n-mal verdoppeln
$\downarrow$	$\uparrow$

$$x_n \; (\leq 1{,}04) \longrightarrow \sqrt{6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + 2x_n}{3}} - 1\right)} = y_n$$

Zwei der drei gebräuchlichen Areafunktionen hängen in der folgenden Weise von der verwendeten Basisfunktion arcosh x ab (für $x \geqq 1$):

$$\operatorname{arsinh} x = \operatorname{arcosh} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\operatorname{arcoth} x = \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

Bei diesen Funktionen sind also maximal 7 Tastendrücke vorzuschalten, ehe man den eigentlichen Rechengang durchführt. $y = \operatorname{artanh} x$ ist nur für $|x| < 1$ definiert.

$|x|$ lies „x absolut“ oder „Betrag von x“. $|x| < 1$ bedeutet: $-1 < x < +1$

Dafür gilt die folgende Formel:

$$\operatorname{artanh} x = \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Als Beispiel für eine zahlenmäßige Berechnung eines Areacosinuswertes geben wir Ihnen folgendes an:

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arcosh} 1{,}7 \\
x_0 &= 1{,}7 \\
x_1 &= 1{,}161895 \\
x_2 &= 1{,}0396862 \quad (< 1{,}04) \\
y_2 &= 0{,}2808101 = \operatorname{arcosh} x_2 = \sqrt{6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + 2x_2}{3}} - 1\right)} \\
y_1 &= 0{,}5616203 \\
y_0 &= 1{,}1232405
\end{aligned}$$

Ein genauerer Wert (auf 6 Nachkommastellen genau) ist

$$\operatorname{arcosh} 1{,}7 = 1{,}123231, \text{ d.h. } \Delta f \approx 10^{-6}$$

Die Zahl der notwendigen Tastendrücke in diesem Zahlenbeispiel betrug 29.

Wenn Sie mit etwas weniger genauen Werten zufrieden sind, dann können Sie auch die folgenden Näherungsformeln verwenden, die einen Fehler $\Delta f < 10^{-3}$ aufweisen, wenn die für x angegebenen Schranken eingehalten werden.

$\sinh x \approx x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}63$
Beispiel: $\sinh 0{,}3 \approx 0{,}3045$
(genauerer Wert: 0,30452029)

$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ für $|x| \leqq 0{,}39$
Beispiel: $\cosh 0{,}3 \approx 1{,}045$
(genauerer Wert: 1,04533851)

$\tanh x \approx x\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}42$
Beispiel: $\tanh 0{,}3 \approx 0{,}291$
(genauerer Wert: 0,29131261)
Probe: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\operatorname{arsinh} x \approx x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ für $|x| \leqq 0{,}42$
Beispiel: $\operatorname{arsinh} 0{,}3 \approx 0{,}2955$
(genauerer Wert: 0,29567305)

Hier sei noch angemerkt, daß man die Funktionswerte der Areafunktionen auch nach folgenden Formeln berechnen kann, sofern der Rechner die Taste $\boxed{\ln}$ hat:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

Tips für die meisten Rechnertypen

Da nicht alle mitgelieferten Gebrauchsanweisungen die Eigenschaften der einzelnen Rechner vollständig beschreiben, sollen hier einige ergänzende Hinweise gegeben werden. Dabei bleiben Rechner mit umgekehrter polnischer Notation zunächst unberücksichtigt.

1. Hat man versehentlich eine falsche Zahl eingegeben, so betätigt man anschließend die $\boxed{\mathrm{CE}}$-Taste, wodurch nur die letzte Eingabe gelöscht wird, und gibt dann die richtige Zahl ein. Bei einfacheren Rechnern, die eine solche Taste nicht aufweisen, kann man das Versehen korrigieren, indem man anschließend mit der falschen Zahl die inverse Rechenoperation ausführt. Diese Korrekturmöglichkeit ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn es sich um eine längere Rechnung handelt und das Versehen spät erfolgt, weil eine Gesamtlöschung mit Hilfe der $\boxed{\mathrm{C}}$-Taste eine Wiederholung der gesamten Rechnung nach sich ziehen würde. Bei manchen Rechnern erfolgt die Löschung der letzten Eingabe durch einmaliges Betätigen der $\boxed{\mathrm{C}}$-Taste, während zweimaliges Betätigen der $\boxed{\mathrm{C}}$-Taste Gesamtlöschung bedeutet.

2. Viele Rechner verfügen über eine Doppelbelegung der Tasten, um dadurch den Aufruf von möglichst vielen Funktionen zu gestatten. Hat man das Argument eingegeben und betätigt dann eine Funktionstaste, so gibt der Rechner unmittelbar den Funktionswert der Funktion an, deren Symbol sich *auf* der Funktionstaste befindet. Will man aber den Funktionswert der Funktion aufrufen, deren Symbol sich *über* der Funktionstaste befindet, so muß man vor Betätigung der Funktionstaste, aber nach Eingabe des Arguments, die $\boxed{\mathrm{F}}$-Taste drücken. Die Doppelbelegung der Funktionstasten ist bei den einzelnen Rechnern unterschiedlich. Hat zum Beispiel ein Rechner die Tastenbelegung $\overset{\sqrt{x}}{\boxed{x^2}}$, so fin-

det man mit der Tastenfolge $\boxed{7}$ $\boxed{x^2}$ das Quadrat von 7 und mit der Tastenfolge $\boxed{7}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{\sqrt{x}}$ die Quadratwurzel aus 7. Wurde nach Eingabe des Arguments versehentlich auf die $\boxed{\mathrm{F}}$-Taste gedrückt, so wird dieses Versehen mit Hilfe der $\boxed{\mathrm{CF}}$-Taste korrigiert.

3. Bei Rechnern mit einer Speichertaste $\boxed{\mathrm{M}}$ gibt man Zahlen in den Speicher ein durch Eintasten dieser Zahlen und anschließendes Drücken der $\boxed{=}$-Taste und der $\boxed{\mathrm{M}}$-Taste oder auch durch Drücken der Tasten $\boxed{\mathrm{STO}}$ $\boxed{\mathrm{M}}$. Wenn irgendwann eine andere Zahl in den Speicher eingegeben werden soll, muß bei den verschiedenen Rechnern unterschiedlich verfahren werden. Bei einigen Typen muß vor der neuen Eingabe in den Speicher die $\boxed{\mathrm{CM}}$-Taste gedrückt werden, während bei anderen sofort die neue Eingabe erfolgen kann, d.h. der bisherige Speicherinhalt „überschrieben" wird. Eine Überschreibung mit 0 bedeutet dann Löschung des Speicherinhalts. Hier sei erwähnt, daß es Rechner mit rechnenden Speichern $\boxed{\mathrm{M}+}$, $\boxed{\mathrm{M}-}$, $\boxed{\mathrm{M}\times}$, $\boxed{\mathrm{M}\div}$ gibt, die mit dem bisherigen Speicherinhalt und der neu eingegebenen Zahl die Rechenoperation ausführen, die hinter M angegeben ist, und das Ergebnis speichern. Will man einen dieser Speicher verwenden, um darin eine Zahl zu speichern, so ist unbedingt *vor* Eingabe der Zahl in den Speicher die $\boxed{\mathrm{CM}}$-Taste zu drücken, da sonst die entsprechende Speicheroperation ausgeführt und das Operationsergebnis statt der Zahl selbst gespeichert wird.
Der Aufruf eines Speicherinhalts wird bei den verschiedenen Rechnern ebenfalls unterschiedlich vorgenommen. Bei einigen genügt das Drücken der $\boxed{\mathrm{M}}$-Taste, bei anderen sind die Tasten $\boxed{\mathrm{RCL}}$ $\boxed{\mathrm{M}}$ zu drücken.

Viele Rechner verfügen über eine $\boxed{\mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{M}}$-Taste. Wird sie betätigt, so erfolgt daraufhin eine Vertauschung der Inhalte des Anzeigeregisters und des Speichers. Wenn also der Speicherinhalt einmal mit dieser Taste aufgerufen wird, so steht er später für einen erneuten Aufruf nicht mehr zur Verfügung.

Bei Rechnern, die mehrere Speicher haben, erfolgt das Einspeichern meistens nach Eintasten der Zahl mit Hilfe der Tastenfolge $\boxed{\text{STO}}\,\boxed{n}$ und der Aufruf mit Hilfe der Tastenfolge $\boxed{\text{RCL}}\,\boxed{n}$ (n steht für eine der Ziffern 0, 1, ..., 9). Hier ist es wichtig, daß man im Verlaufe einer Rechnung immer genau weiß, welche Zahl in welchem Speicher gespeichert ist.

4. Alle Rechner (auch die einfachsten) haben zwei Rechenregister X und Y, die der Aufnahme der Operanden bei den sogenannten zweistelligen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren mit beliebigen Exponenten) dienen. Bei der Aufgabe $5:2=$, die mit der Tastenfolge $\boxed{5}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{=}$ gelöst wird, nimmt der Rechner den ersten Operanden (Dividend 5) in das eine und den zweiten Operanden (Divisor 2) in das andere Rechenregister auf. Das X-Register ist identisch mit dem Anzeigeregister. Die Betätigung einer Operationstaste $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ oder $\boxed{y^x}$ nach Eingabe des ersten Operanden bewirkt stets, daß der Inhalt des X-Registers im Y-Register dupliziert wird. Bei Eingabe des zweiten Operanden wird der Inhalt des X-Registers „überschrieben“. Nach Betätigen der $\boxed{=}$-Taste wird die zuvor angewiesene Operation vom Rechner ausgeführt und das Ergebnis nicht nur im X-Register (Anzeige), sondern auch im Y-Register gespeichert, so daß anschließend unmittelbar mit diesem Zwischenergebnis weitergerechnet werden kann, falls es sich um eine umfangreiche Aufgabe handelt. Alle neueren Rechner arbeiten mit sogenannter Kurzwegtechnik, d.h. führen eine zweistellige Operation nicht nur dann aus, wenn die $\boxed{=}$-Taste, sondern auch wenn eine der Tasten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ oder $\boxed{y^x}$ betätigt wird.

In obigem Beispiel hat man also folgende Registerbelegungen:

Eingabe	X-Register	Y-Register
$\boxed{5}$	5	0
$\boxed{\div}$	5	5
$\boxed{2}$	2	5
$\boxed{=}$	2,5	2,5

5. Bei komplizierteren Berechnungen kommt es häufig vor, daß die Operanden einer zweistelligen Operation in umgekehrter Reihenfolge eingegeben werden müssen. Damit man auch in solchen Fällen zum richtigen Ergebnis gelangen kann, haben viele Rechner eine Taste $\boxed{X \leftrightarrow Y}$, mit deren Hilfe die Inhalte des X- und des Y-Registers miteinander vertauscht werden können. Hat man zum Beispiel die Aufgabe $3:(1+4)=$ zu lösen und weist der Rechner keine Klammertasten $\boxed{(}$ und $\boxed{)}$ auf, so gelangt man mit der Tastenfolge $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{X \leftrightarrow Y}$ $\boxed{=}$ zum Ziel. Dabei hat man folgende Registerbelegung:

Eingabe	X-Register	Y-Register
$\boxed{1}$	1	0
$\boxed{+}$	1	1
$\boxed{4}$	4	1
$\boxed{\div}$	5	5
$\boxed{3}$	3	5
$\boxed{X \leftrightarrow Y}$	5	3
$\boxed{=}$	0,6	0,6

In diesem Beispiel wurde vorausgesetzt, daß der Rechner mit Kurzwegtechnik arbeitet.

Mit einem Rechner älterer Bauart ohne Kurzwegtechnik wird die gleiche Aufgabe durch die Tastenfolge $\boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{X \leftrightarrow Y}\ \boxed{=}$ gelöst.

6. Es gibt Rechner, bei denen eine Hierarchie der zweistelligen Operationen einprogrammiert ist, d.h., die gewisse Operationen vorrangig vor anderen ausführen, und zwar Operationen 3. Stufe (Potenzieren) vorrangig vor solchen 2. Stufe (Multiplizieren, Dividieren) und diese wiederum vorrangig vor denen 1. Stufe (Addieren, Subtrahieren). Sie haben mehr als zwei Rechenregister. Mit einem solchen Rechner löst man die Aufgabe $7 - 5 \cdot 2^3 =$ durch die Tastenfolge $\boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$. Obwohl auch diese Rechner mit Kurzwegtechnik arbeiten, wird bei dem Befehl $\boxed{\times}$ nicht die Subtraktion $7 - 5$ und entsprechend bei dem Befehl $\boxed{y^x}$ nicht die Multiplikation $5 \cdot 2$ ausgeführt, weil jeweils eine höhere Rechenoperation, die Vorrang hat, folgt. Die Kurzwegtechnik tritt also nicht in Aktion, wenn auf eine beliebige Rechenoperation eine höhere folgt. Die Hierarchie ist besonders angenehm bei der Berechnung sogenannter Skalarprodukte $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$, die in Anwendungen häufig auftreten. Bei der Berechnung des Produktes von Summen und einigen anderen Aufgaben wirkt die Hierarchie dagegen lästig, weil durch sie erhöhter Bedienungsaufwand entsteht. Die Aufgabe $(2 + 3) \cdot (4 + 5) =$ zum Beispiel erfordert die Tastenfolge $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{M}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{M\times}$. Dagegen entspricht die Tastenfolge $\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ der Aufgabe $2 + 3 \cdot 4 + 5 =$.

7. Bei Rechnern mit Klammertasten $\boxed{(}$ und $\boxed{)}$ kann die Reihenfolge der Operationen durch das Setzen der Klammern willkürlich festgesetzt werden. Da auch diese Rechner mit Kurzwegtechnik arbeiten, sind nicht nur immer dann Klammern zu setzen, wenn in den Formeln welche auftreten, sondern auch in anderen Fällen, zum Beispiel bei der Berechnung von Skalarprodukten. So muß man die Aufgabe

$2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 =$ mit der Folge $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ lösen. Beim Setzen der schließenden Klammer $\boxed{)}$ wird das Zwischenergebnis $4 \cdot 5 = 20$ angezeigt. Interessiert man sich für das Zwischenergebnis nicht, so braucht $\boxed{)}$ nicht gedrückt zu werden, sondern nach Eingabe der 5 kann sofort die $\boxed{=}$-Taste betätigt werden. Besteht allerdings das Skalarprodukt aus mehr als zwei Summanden, so kann nur die allerletzte schließende Klammer entfallen. Bei diesen Rechnern ist es ferner wichtig zu wissen, wieviel Klammern ineinandergeschachtelt werden dürfen. Meistens sind es zwei, oft ist aber auch nur eine solche Schachtelung nicht möglich, und nur gelegentlich können mehr als zwei Klammern ineinandergeschachtelt werden. Einige Rechner haben Tasten $\boxed{((}$ und $\boxed{))}$ oder $\boxed{[(}$ und $\boxed{)]}$; bei ihnen können mindestens zwei Klammern verschachtelt werden. Wieviel es sind, muß man jeweils ausprobieren. Gewisse Rechner haben eine Fehleranzeige (besonderes Zeichen im Anzeigefeld, blinkende Anzeige oder anderes), die nicht nur bei unerlaubten Operationen (Division durch Null, Quadratwurzel aus negativem Radikanden u.a.) in Funktion tritt, sondern auch wenn mehr Klammern als erlaubt verschachtelt werden.

Um mit einem Rechner mit einfachen Klammern kompliziertere Ausdrücke berechnen zu können, muß man die Berechnung „von Innen" beginnen. Das gilt auch für Rechner mit Doppelklammern bei sehr komplizierten Ausdrükken. Gelegentlich muß man sogar Zwischenergebnisse speichern. Ziel einer guten Organisation der Rechnung ist immer (insbesondere, wenn der gleiche Rechengang mehrfach mit verschiedenen Zahlen wiederholt werden muß), mit möglichst wenigen Tastendrücken auszukommen und keine Zwischenergebnisse notieren zu müssen. Dabei leistet oft auch die $\boxed{X \leftrightarrow Y}$-Taste gute Dienste.

Rechner mit einfachen Klammern haben drei Rechenregister X, Y und Z, Rechner mit Doppelklammern haben vier Rechenregister X, Y, Z und T usw.

Die Aufgabe $2 : \left(3 - \sqrt{4 + 5 \cdot 6}\right)$ kann mit einem Rechner

ohne Klammertasten mit der Tastenfolge $\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{\times}\ \boxed{+/-}\ \boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$ gelöst werden (Ergebnis: $-0{,}13\ldots$). Wollte man sie allerdings lösen, indem die Zahlen in der Reihenfolge eingegeben werden, wie sie in dem Ausdruck auftreten, so wäre dafür schon ein Rechner mit Doppelklammern erforderlich. Die Tastenfolge lautet dann $\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{(}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{X \leftrightarrow Y}$ $\boxed{6}\ \boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$. Die beiden schließenden Klammern dürfen entfallen, wenn man sich nicht für die betreffenden Zwischenergebnisse interessiert. Lehrreich ist hier die Belegung der Rechenregister (s. Seite 121 oben).
An der Stelle (*) wird die nächste Operation angewiesen, damit der Rechner die Addition $4+5$ ausführt. Das hätte zwar auch durch Setzen der schließenden Klammer $\boxed{)}$ bewirkt werden können, doch würde der Rechner dann nach den Befehlen $\boxed{\sqrt{x}}\ \boxed{\times}$ die Subtraktion $3-\sqrt{4+5}$ ausführen, was ja noch nicht erwünscht ist, weil die Wurzel $\sqrt{4+5}$ vorher mit 6 multipliziert werden muß. An der Stelle (**) wird der Registertausch vorgenommen, weil die 9 nicht mehr für die weitere Rechnung benötigt wird und deshalb mit der 6 „überschrieben“ werden kann. Das „Überschreiben“ kann immer nur im X-Register erfolgen! Dieser Trick (Vorwegnahme einer Operationsanweisung, um die Kurzwegtechnik arbeiten zu lassen und anschließender Registertausch) kann häufig angewendet werden, wenn alle Register besetzt sind, eine Operation mit den Zahlen im X- und im Y-Register erwünscht ist und ein fünfter Operand in die Rechnung einbezogen werden soll.

8. Die Funktionswerte aller Funktionen von einer Variablen ($1/x$, $\sqrt{x}$, x^2, e^x, $\ln x$, 10^x, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$ $\operatorname{artanh} x$, $x!$ und gegebenenfalls weitere) ruft man auf, indem man stets *zuerst das Argument* eingibt und dann die betreffende Funktionstaste bzw. (bei Doppelbelegung der Tasten) die $\boxed{F}$-Taste und die betreffende Funktionstaste drückt. Natürlich können die hier genannten Funktionen nur dann

Eingabe	Register X	Y	Z	T	
2	2	0	0	0	
÷	2	2	0	0	
(	0	0	2	0	
3	3	0	2	0	
−	3	3	2	0	
(	0	0	3	2	
4	4	0	3	2	
+	4	4	3	2	
5	5	4	3	2	
×	9	9	3	2	(*)
$\sqrt{x}$	3	9	3	2	
X ↔ Y	9	3	3	2	(**)
6	6	3	3	2	
)	18	3	2	0	
)	−15	2	0	0	
=	$-0{,}1\bar{3}$...	$-0{,}1\bar{3}$...	0	0	

unmittelbar aufgerufen werden, wenn der Rechner die entsprechenden Funktionstasten aufweist. Bei den trigonometrischen Funktionen und den zyklometrischen Funktionen ist zu beachten, ob das Argument (bei den ersteren) im Gradmaß oder im Bogenmaß ein- oder ausgegeben werden soll. Einige Rechner haben eine Taste DEG↔RAD, mit der eingestellt werden kann, welches Winkelmaß verwendet wird.

Einfachere Rechner arbeiten nur mit dem Gradmaß und eventuell sogar richtig nur für einen bestimmten Winkelbereich, etwa von 0° bis 90°. Man prüft schnell nach, ob letzteres der Fall ist oder nicht, indem man zum Beispiel sin 600° oder $\cos\pi$ aufzurufen versucht (es müssen sich die Ergebnisse $-0{,}866\ldots$ bzw. -1 ergeben). $\cot\alpha$ bestimmt man wegen der Beziehung $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$ mit der Tastenfolge $\boxed{\alpha}$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{1/x}$. Entsprechend bestimmt man $\operatorname{arccot}\alpha$ wegen der Beziehung $\operatorname{arccot}\alpha = \arctan\frac{1}{\alpha}$ mit der Tastenfolge $\boxed{\alpha}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{arc}}$ $\boxed{\tan}$. Manche Rechner weisen eine Taste $\boxed{\text{INV}}$ für die Bestimmung der zyklometrischen und der Areafunktionen auf. Die Taste $\boxed{\text{INV}}$ wird vor der entsprechenden Taste für die trigonometrische oder hyperbolische Funktion gedrückt, um den Funktionswert der jeweiligen Umkehrfunktion aufzurufen (weiteres über die hyperbolischen und Areafunktionen s. Abschnitt „Hyperbolicus“).

9. Hat man versehentlich statt einer der Tasten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ eine andere von diesen gedrückt, so genügt es bei den komfortableren Rechnern, einfach die richtige Operationstaste zu drücken, um das Versehen zu korrigieren.
Bei den einfacheren Rechnern ist dieser Weg nicht gangbar. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Es wurde versehentlich eine der Tasten $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$ gedrückt. Zur Korrektur hat man $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ und dann die richtige Operationstaste zu drücken.
Es wurde versehentlich eine der Tasten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$ gedrückt. Zur Korrektur hat man $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ und dann die richtige Operationstaste zu drücken.

10. Es gibt Rechner, die bei zweistelligen Operationen nach dem Drücken der $\boxed{=}$-Taste noch den ersten oder den zweiten Operanden gespeichert haben und ebenso die Operations-

anweisung. Bei erneuter Betätigung der $\boxed{=}$-Taste wird dann mit dem gespeicherten Operanden und dem Ergebnis immer die gespeicherte Operation ausgeführt.
Beispiele:

Erster Operand gespeichert		Zweiter Operand gespeichert	
Eingabe	Anzeige	Eingabe	Anzeige
$\boxed{5}$	5	$\boxed{5}$	5
$\boxed{\times}$	5	$\boxed{\div}$	5
$\boxed{2}$	2	$\boxed{2}$	2
$\boxed{=}$	10	$\boxed{=}$	2.5
$\boxed{=}$	50	$\boxed{=}$	1.25
$\boxed{=}$	250	$\boxed{=}$	0.625
usw.		usw.	

Hat man einen solchen Rechner, so ist es also wichtig zu wissen, welcher der beiden Operanden gespeichert wird. Einige Rechner haben eine Taste $\boxed{K}$, mit der diese sogenannte Konstantenautomatik ein- und ausgestellt werden kann.

11. Zur Berechnung von $\sqrt[x]{y}$ bedenke man, daß $\sqrt[x]{y} = y^{1/x}$ ist. Durch Kombination der Tasten $\boxed{1/x}$ und $\boxed{y^x}$ kann also jede beliebige Wurzel aus einem beliebigen positiven Radikanden y gezogen werden.

12. Alle Rechner ermitteln die Funktionswerte von mehr oder minder vielen der unter 8. genannten Funktionen nach gewissen Näherungsmethoden und geben sie mit einer von Rechner zu Rechner unterschiedlichen Anzahl von Stellen an. Dabei runden einige Rechner die letzte angegebene Stelle

nach einer bestimmten Rundungsregel (sogenannte 4/5-Rundung), und andere wiederum schneiden die überzähligen Stellen einfach ab. Bei einem einfachen Aufruf eines Funktionswertes ist demnach die letzte Stelle unsicher, und zwar um so mehr, wenn der Rechner mit keiner Rundungsautomatik ausgestattet ist. Wenn in eine Rechnung sehr viele Funktionswerte eingehen, können sich die Fehler sehr „hochschaukeln" (weiteres s. Abschnitt „Fehler pflanzen sich fort"). Auch ein Minicomputer macht also Fehler!
Solche Fehler sind prinzipiell unvermeidbar, weil man stets nur mit einer begrenzten Anzahl von Stellen rechnen kann, und das kann auch ein Taschenrechner nur. Um der Gefahr des „Aufschaukelns" der Fehler zu begegnen, rechnen einige Taschenrechner intern mit mehr Stellen als sie anzuzeigen vermögen.

Wie hoch ist die Zuverlässigkeit?

Im Beruf und im Alltag sind wir von mehr oder weniger komplizierten technischen Geräten umgeben, sei es nun ein Auto, ein Fernseher oder ein elektrisches Meßgerät. Wenn eines versagt, hat das meist unangenehme Folgen bis hin zu einer akuten Lebensgefahr.
Da ist es naheliegend, daß man versucht hat, die „Zuverlässigkeit" eines Gerätes auch zahlenmäßig erfassen zu können. Sie benötigen dazu nur Ihren Taschenrechner, zwei einfache Definitionen und zwei ebenso einfache Rechenregeln.
Unter Zuverlässigkeit verstehen wir die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gerät während einer bestimmten, vorgegebenen Zeit störungsfrei arbeitet.
Nun ist aber ein solches Gerät im allgemeinen aus einer großen Anzahl von Bauteilen zusammengesetzt. Jedes dieser Teile verfügt – auf den gleichen Zeitraum bezogen – ebenfalls über eine bestimmte Zuverlässigkeit, die experimentell von einer großen Stückzahl ermittelt vorliegen muß. Prin-

zipiell sind dabei alle Teile „hintereinandergeschaltet", d.h., wenn auch nur eines in diesem Zeitraum ausfällt, versagt das ganze System.

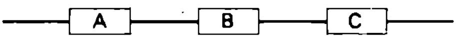

Bild 11. Die 3 Bauteile A, B und C sind im System hintereinandergeschaltet

Die entscheidende Frage ist dann: Wie setzt sich die Zuverlässigkeit eines Gerätes bzw. Systems rechnerisch aus den Zuverlässigkeiten der Einzelteile zusammen?
Wenn wir die Zuverlässigkeit mit z bezeichnen ($0 \leqq z \leqq 1$), dann ist die sogenannte Ausfallrate p die logische Ergänzung dazu, d.h.

$$p = 1 - z$$

Neben diesem Grundfall der Hintereinanderschaltung gibt es noch den der Parallelschaltung. Wir können das als Ersatzteilschaltung betrachten, das bedeutet, das System funktioniert dann, wenn mindestens eines der beiden Teile noch arbeitet.

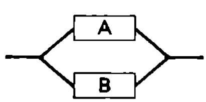

Bild 12. Die Bauteile A und B sind parallelgeschaltet (Ersatzteilschaltung)

Mit den folgenden beiden Regeln sind nun beliebige Kombinationen von Parallel- und Hintereinanderschaltungen rechnerisch zu erfassen.

1. Wenn Teile hintereinandergeschaltet sind, dann multiplizieren sich ihre Zuverlässigkeiten zu einer Gesamtzuverlässigkeit des Systems.

2. Wenn Teile parallelgeschaltet sind, dann multiplizieren sich ihre Ausfallraten zu einer Gesamtausfallrate des Systems.

Betrachten wir einmal den Fall 1. Nehmen wir an, Ihr Fernsehapparat besteht aus 100 hintereinandergeschalteten Teilen,

80 davon haben eine Zuverlässigkeit von 100 % (im Zeitraum der Garantie), 15 haben 95 % und 5 haben 90 %. Wie zuverlässig ist Ihr Gerät?
Die Berechnung ergibt

$$z_{ges} = 1^{80} \cdot 0{,}95^{15} \cdot 0{,}9^{5} \approx 0{,}274 \approx 27\,\%$$

Die Frage ist nun, wie hoch muß die Zuverlässigkeit der Bauteile sein, um eine Gesamtzuverlässigkeit von 90 % zu erreichen? Prüfen wir erst einmal, welche Bauteile uns so „reinreißen“. Die 15 verhältnismäßig guten Teile mit 95 % Zuverlässigkeit gehen mit

$0{,}95^{15} \approx 0{,}46$ in die Formel ein.

Die 5 schlechten Teile mit jeweils 90 % ergeben

$$0{,}9^{5} \approx 0{,}59$$

Das heißt, nicht nur der Gütegrad, auch die Zahl der schlechten Bauteile spielt eine Rolle. Daraus ergibt sich die überraschende Konsequenz, daß es unter Umständen weniger schlecht ist, ein oder zwei Bauteile mit sehr geringer Güte einzugeben als viele mit einer mittelmäßigen Güte.
Statt 5 Teile mit der Zuverlässigkeit von 0,9 kann ich auch nehmen: 3 Teile mit 100 % Sicherheit und zwei mit einer Zuverlässigkeit von 77 %, d.h.

$$1^{3} \cdot 0{,}77^{2} = 0{,}59 = 0{,}9^{5}$$

Wenn mir Bauteile einer bestimmten Qualitätsstufe mit $z < 1$ zur Verfügung stehen, so läßt sich trotzdem die Zuverlässigkeit eines daraus zusammengesetzten Systems bzw. Gerätes beliebig nahe an Eins bringen, und zwar durch Parallelschaltung von ein oder mehreren Ersatzteilen zu jedem Bauteil. Die folgenden Beispiele werden das deutlich machen.
Es gibt zwei Grenzfälle der Parallelschaltung mehrerer Bauteile, einmal in Form von zwei Strängen, zum anderen einzeln. In welcher Art die Zuschaltung der Ersatzteile erfolgt, ob also ein Schalter S Handbetrieb, einen mechanisierten

Einschub oder einen elektronischen Schalter darstellt, hängt ganz von den Ansprüchen ab, die von der Auswechslungsgeschwindigkeit her an das System gestellt werden.

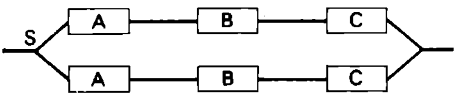

Bild 13. Parallelschaltung von 3 Bauteilen A, B und C (strangweise)
S Schalter

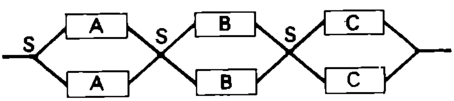

Bild 14. Parallelschaltung von 3 Bauteilen A, B und C (einzeln)
S Schalter

Das Wechseln eines Autoreifens läuft natürlich gemächlicher ab als das Zuschalten von elektronischen Ersatzteilen in der defekten Blindlandeautomatik eines großen Düsenflugzeuges. Vergleichen wir nun die beiden Fälle an Hand eines Beispieles miteinander. Wir nehmen an, die Zuverlässigkeit der Teile A, B und C sind

$$z_A = 0{,}90;\ z_B = 0{,}95;\ z_C = 0{,}97$$

Wir gehen hier und im folgenden von der naheliegenden Annahme aus, daß die zur Verfügung stehenden Ersatzteile den Originalen völlig gleichartig sind, d.h. auch die gleichen Zuverlässigkeiten aufweisen. Andernfalls werden die Berechnungen etwas aufwendiger.
Bei der strangweisen Parallelschaltung ergibt sich dann für Strang I

$$z_I = z_A \cdot z_B \cdot z_C = 0{,}90 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}97 = 0{,}829$$

Dann ist voraussetzungsgemäß auch $z_{II} = 0{,}829$.
Daraus folgt für die Ausfallraten

$$p_I = (1 - z_I) = 0{,}171 = p_{II}$$

sowie

$$p_{ges} = p_I \cdot p_{II} = p_I^2 = 0{,}171^2 = 0{,}029$$

Das ergibt wiederum $z_{ges} = 1 - p_{ges} = 0{,}971$

Die allgemeine Formel für den eben berechneten Fall lautet

$$z_{ges} = 1 - (1 - z_A \cdot z_B \cdot z_C)^2$$

Die Zuverlässigkeit unseres Systems mit einem Ersatzteilstrang beträgt also 97,1 %, das sind

$$\frac{97{,}1 - 82{,}9}{82{,}9} = 17\,\%$$

mehr als bei der ersatzteillosen Schaltung.
Falls wir mit dieser Zuverlässigkeit noch nicht zufrieden sind und mindestens 99% haben wollen, müssen wir einen weiteren Strang A, B und C zuschalten (bzw. einen entsprechenden Einschub griffbereit zur Verfügung stellen).

Das ergibt dann $p_{ges} = p_I^3 = 0{,}171^3 = 0{,}005$

sowie $$z_{ges} = 1 - p_{ges} = 0{,}995 = 99{,}5\,\%,$$

womit wir unser Ziel also erreicht haben.
Im Falle einer stückweisen Parallelschaltung gehen wir folgendermaßen vor:

$$p_I = p_A \cdot p_A = p_A^2 = (1 - z_A)^2$$

$$p_{II} = p_B \cdot p_B = p_B^2 = (1 - z_B)^2$$

$$p_{III} = p_C^2 = (1 - z_C)^2$$

Daraus folgt

$$z_I = 1 - p_I = 1 - (1 - z_A)^2$$

$$z_{II} = 1 - p_{II} = 1 - (1 - z_B)^2$$

$$z_{III} = 1 - p_{III} = 1 - (1 - z_C)^2$$

und schließlich

$$\begin{aligned} z_{ges} &= z_I \cdot z_{II} \cdot z_{III} \\ &= (1-(1-z_A)^2)\cdot(1-(1-z_B)^2)\cdot(1-(1-z_C)^2) \end{aligned}$$

Wenn wir nun unsere Werte einsetzen ($z_A = 0{,}9$; $z_B = 0{,}95$; $z_C = 0{,}97$), so ergibt sich

$$\begin{aligned} z_{ges} &= (1-0{,}1^2)\cdot(1-0{,}05^2)\cdot(1-0{,}03^2) \\ &= 0{,}99\cdot 0{,}9975\cdot 0{,}9991 = 0{,}9866 \approx 98{,}7\,\% \end{aligned}$$

Das ergibt gegenüber der ersatzteillosen Schaltung A—B—C eine Steigerung von

$$\frac{98{,}7-82{,}9}{82{,}9} \approx 19\,\%$$

Um auf unsere gewünschten 99 % zu kommen, brauchen wir jetzt nur dem schlechtesten Bauteil ein weiteres parallelzuschalten. Das ergibt dann für

$$\begin{aligned} z_{ges} &= (1-0{,}1^3)\cdot(1-0{,}05^2)\cdot(1-0{,}03^2) \\ &= 0{,}999\cdot 0{,}9975\cdot 0{,}9991 = 0{,}9956 \approx 99{,}6\,\% \end{aligned}$$

Bei stückweiser Parallelschaltung ergeben sich grundsätzlich günstigere Werte als bei strangweiser. Das könnte natürlich die Frage aufwerfen, warum man dann nicht immer den ersten Fall anwendet. Es ist aber einzusehen, daß zusätzlich „Schalter" S (wie immer man sie auch bezeichnen will) einen zusätzlichen Aufwand bedeuten. Bei unseren Beispielen hatten wir angenommen, daß solche „Schalter" eine Zuverlässigkeit von 100 % haben ($z_S = 1$). Wenn das nicht so ist, muß man sie als hintereinandergeschaltete Glieder entsprechend den Rechenregeln noch berücksichtigen.
Vielleicht können Sie jetzt schon abschätzen, wie katastrophal sich in einer Informationskette ein Mitarbeiter mit einer Zuverlässigkeit von etwa 50 % auswirken kann. Daher: Schalten Sie parallel, d.h., geben Sie wichtige Informationen gleichzeitig noch an andere Kollegen weiter!

Warum wachsen Kürbisse nicht auf Bäumen?

Es gibt eine Geschichte, in der von einem Mann berichtet wird, der gesagt haben soll, daß auf der Welt alles falsch eingerichtet sei. Beispielsweise (sagte dieser Mann) sei es doch offensichtlich ein Unsinn, daß die riesigen Eichbäume nur winzige Eicheln als Früchte tragen. Hingegen entwickle sich der große Kürbis aus einer sehr niedrigen Pflanze.

Nach dieser Naturkritik legte er sich im Schatten einer Eiche zum Schlafen. Jäh fuhr er auf, als ihm eine Eichel auf den Kopf fiel.

„Wie weise", rief er, „ist die Natur. Was wäre passiert, wenn die Eichel so groß wie ein Kürbis gewesen wäre?"

Warum sind Eicheln nicht kürbisgroß? Offensichtlich tragen hohe Bäume kleinere (Eicheln, Bucheckern) oder leichtere (Tannenzapfen) Früchte als kleinere Bäume (Birnen, Pflaumen) oder Kürbispflanzen (Kürbis, Melone).

Stellen wir uns eine Frucht in Kugelform vor. Der Einfachheit halber geben wir ihr die Dichte 2 g/cm³ und den Radius 1 cm. Dann ist das Volumen

$$V = \frac{4\pi}{3} 1^3 \text{ cm}^3 = 4{,}19 \text{ cm}^3$$

und wegen der Dichte $2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ hat die Frucht die Masse von 8,38 Gramm. Natürlich hängt die Frucht an einem Stengel. Er soll gerade fest genug sein, um sie zu tragen. Seine Tragfähigkeit (er ist nur auf Zug belastet) nehmen wir mit 10 g/cm² an. Er hat demnach eine Mindestfläche von 0,838 cm². Sein Radius beträgt

$$\sqrt{\frac{0{,}838}{\pi}} \text{ cm} = r = 0{,}52 \text{ cm}$$

Nun lassen wir die Frucht wachsen. Natürlich wächst der Stengel entsprechend mit.

Frucht		Stengel	
r/cm	V/cm³	r/cm	A/cm²
1	4,19	0,52	0,838
2	33,51	1,46	6,70
3	113,10	2,68	22,62
10	4188,79	16,33	837,76

Wer einen Rechner mit Speicher besitzt, wird den Wert $\frac{4}{3}\pi$ nur einmal ausrechnen.

Bei dem Vergleich von Frucht und Stiel beachten wir, daß wir zwar mit r rechneten, aber in der Natur betrachten wir den Durchmesser $2\,r$. Eine Frucht mit 20 cm Durchmesser würde in unserem Beispiel an einem Stiel von 32,66 cm Durchmesser sitzen.
Das ist natürlich nicht möglich. Man kann nun alle denkbaren Kombinationen zwischen Fruchtdurchmesser, Dichte und ertragbarer Spannung des Stengels durchspielen, was die Natur sicherlich im Laufe der Entwicklung auch tat, immer stößt man an Grenzen.
Die beste Lösung ist tatsächlich, Früchte von einer bestimmten Größe an einfach auf der Erde wachsen zu lassen.

Lineare Regressionsrechnung

Aus Messungen von zwei Variablen haben wir eine Anzahl Punkte gewonnen und diese in ein Achsenkreuz eingezeichnet. Natürlich möchten wir durch diese Punkte gern eine Gerade legen (die Punkte liegen ungefähr auf einer Geraden) und diese Gerade durch eine Gleichung ausdrücken:

$$y = a \cdot x + b$$

Wir versuchen, eine Gerade so zu legen, daß die Meßpunkte möglichst gleichmäßig zu beiden Seiten verteilt sind. Doch leider läßt sich unsere Gerade mit ziemlichem Spielraum verschieben, wobei jede Lage so gut wie eine andere erscheint. Unser Taschenrechner gestattet uns, die Konstanten a und b der Gleichung zu bestimmen und so die Gerade zu finden, die mit den Meßpunkten am besten übereinstimmt.
Das Verfahren der linearen Regression arbeitet mit folgenden Arbeitsschritten:

1. Liste die Punkte auf

2. Bilde: $\Sigma\, x$; $\Sigma\, y$; $\Sigma\, (x^2)$; $\Sigma\, (y^2)$; $\Sigma\, (x \cdot y)$

Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel, in dem die Werte für x und y gemessen wurden. Es gibt sehr gute Rechner, die nach Eingabe von x und y und Betätigen der entsprechenden Funktionstaste automatisch die Summenwerte ausrechnen und speichern. Doch im allgemeinen müssen wir sie gesondert ausrechnen, was selbst mit dem einfachsten Gerät kein Problem darstellt.

x	y	x^2	y^2	$x \cdot y$	n
5,0	13,7	25,0	187,7	68,5	1
7,2	18,8	51,8	353,4	135,4	2
11,3	26,4	127,7	697,0	298,3	3
23,8	53,1	566,4	2819,6	1263,8	4
45,4	98,2	2061,2	9643,2	4458,3	5
$\Sigma\, x$ $= 92{,}7$	$\Sigma\, y$ $= 210{,}2$	$\Sigma\, (x^2)$ $= 2832{,}1$	$\Sigma\, (y^2)$ $= 13700{,}9$	$\Sigma\, (x \cdot y)$ $= 6224{,}3$	$n = 5$

Bei der Aufstellung einer solchen Tabelle können alle Möglichkeiten des Rechners genutzt werden. Vielleicht gestattet Ihr Rechner, x^2 über eine $\boxed{\Sigma}$-Taste fortlaufend zu addieren. Oder man tippt x ein, bildet x^2, bildet mit der $\boxed{\sqrt{x}}$-Taste wieder x und multipliziert mit y.

 3. Nun können wir beginnen, die Konstanten a und b aus-

zurechnen:

$$a = \frac{\Sigma(x \cdot y) - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma(x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$= \frac{6224{,}3 - \frac{92{,}7 \cdot 210{,}2}{5}}{2832{,}1 - \frac{(92{,}7)^2}{5}} = 2{,}09 \approx 2{,}1$$

Beachten Sie den Unterschied zwischen $\Sigma\,(x^2)$ und $(\Sigma\, x)^2$

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - a\,\frac{\Sigma x}{n} = \frac{210{,}2}{5} - 2{,}1 \cdot \frac{92{,}7}{5} = 3{,}106 \approx 3{,}1$$

4. Daraus ergibt sich die Regressionsgleichung für unsere Werte

$$y = 2{,}1\,x + 3{,}1$$

5. Natürlich prüfen wir nach, ob die Gleichung stimmt, indem wir die x-Werte aus der Tabelle einsetzen. Die errechneten y-Werte stimmen ungefähr.
Wenn wir wissen wollen, wie genau dies „ungefähr" ist, errechnen wir das Bestimmtheitsmaß

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma(x \cdot y) - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y}{n}\right]^2}{\left[\Sigma(x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right] \cdot \left[\Sigma(y^2) - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}$$

Wer sich dieser Mühe unterzieht, wird finden, daß $r^2 = 0{,}9999885 \approx 1$ ist, d.h., unsere Regressionsgleichung stimmt sehr gut mit den Meßpunkten überein. Wir können nun die entsprechende Gleichung in unsere Graphik einzeichnen.

Wir finden auch die Regressionskonstanten für eine Gleichung

$$y = b\,e^{ax} \quad (b > 0)$$

Durch Logarithmieren (mit ln) erhalten wir die Geradengleichung

$$\ln y = a\,x + \ln b$$

Wir benötigen die ln-Taste und die e^x-Taste.

In unserer Tabelle und bei der Rechnung müssen wir also mit $\ln y$ arbeiten.

$$a = \frac{\Sigma\,(x \cdot \ln y) - \dfrac{\Sigma\,x \cdot \Sigma \ln y}{n}}{\Sigma\,(x^2) - \dfrac{(\Sigma\,x)^2}{n}}$$

b sieht wegen der e-Funktion etwas anders als bei anderen Regressionsrechnungen aus.

$$b = e^{\left[\frac{\Sigma \ln y}{n} - \frac{a \cdot \Sigma x}{n}\right]}$$

Für e-Funktionen liegen uns meistens Wertetafeln vor.

Beispiel

x	1,30	0,60	0,03	1,42	0,93
y	147,28	11,05	1,34	229,60	37,60

Es ist schwer, sich vorzustellen, daß die fünf Wertepaare zu einer sinnvollen Funktion gehören. Doch wir nehmen an, daß sie zu einer e-Funktion gehören sollen, weil sie bei

Zusammenhängen bestimmt wurden, die nach einer solchen Funktion verlaufen.

	x	x^2	y	$\ln y$	$x \cdot \ln y$
	1,30	1,69	147,28	4,99234	6,49004
	0,60	0,36	11,05	2,40243	1,44146
	0,03	0,00..	1,34	0,29267	0,00878
	1,42	2,02	229,60	5,43634	7,71960
	0,93	0,86	37,60	3,62700	3,37311
Σ	4,28	4,93		16,75078	19,03299

Es lohnt sich, ein Programm auszuarbeiten, um diese und ähnliche Tabellen mit möglichst wenig Schritten aufzustellen. Wer Rechner mit programmierter Statistikfunktion hat, benötigt natürlich keine Tabelle.

$$a = \frac{\Sigma (x \cdot \ln y) - \frac{\Sigma x \cdot \Sigma \ln y}{n}}{\Sigma (x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$a = \frac{19{,}03299 - \frac{4{,}28 \cdot 16{,}75078}{5}}{4{,}93 - \frac{4{,}28^2}{5}}$$

$$a = 3{,}71$$

$$b = e^{\left[\frac{\Sigma \ln y}{n} - \frac{a \cdot \Sigma x}{n}\right]}$$

$$b = e^{0{,}17440}$$

$$b = 1{,}19$$

Damit kommen wir zu der e-Funktion

$$y = 1{,}19\, e^{3{,}71 \cdot x}$$

Probe: für $x = 0{,}60$

$$y = 1{,}19\, e^{3{,}71 \cdot 0{,}60}$$

$$y = 11{,}02$$

Der gemessene Wert betrug 11,05.

Wir berechnen einen Rechenstab

Nach der Regressionsrechnung wagen wir uns nun an kompliziertere Kurvenanpassungen heran. Nehmen wir an, unsere Meßpunkte liegen in einer Graphik nicht auf einer Geraden, sondern deutlich auf einer Kurve – jedoch auf welcher?

Rein graphisch bietet sich die Erfahrung an: Trägt man Meßpunkte auf halb-logarithmisches Millimeterpapier auf oder nimmt man doppelt-logarithmisches Papier, so liegen sie oft auf einer Geraden.

Auf halb-logarithmischem Papier haben wir die Geradengleichung

$$y = a \lg x + b$$

Die Gleichung erfordert $x > 0$, und unser Rechner muß die Taste lg oder ln haben.

Mit einer solchen Gleichung macht es uns keine Schwierigkeiten, die Regressionskonstanten a und b zu finden.
Wir gehen genauso vor wie im Abschnitt „Lineare Regressionsrechnung". Nur statt mit x, $\Sigma\, x$, $\Sigma\, (x^2)$, $\Sigma\, (y \cdot x)$ arbeiten wir mit $\lg x$, $\Sigma \lg x$, $\Sigma\, (\lg x)^2$, $\Sigma\, (y \cdot \lg x)$ usw.

$$a = \frac{\Sigma\,(y \lg x) - \frac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma\,(\lg x)^2 - \frac{(\Sigma \lg x)^2}{n}}$$

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{a\,\Sigma \lg x}{n}$$

Das Bestimmtheitsmaß r^2 wird entsprechend gebildet.
Ein typisches Beispiel für einen logarithmischen Maßstab ist der Rechenstab. Wir interessieren uns einmal dafür, wieviel Millimeter die einzelnen Zahlen 2, 3, 4 usw. vom Beginn 1 entfernt sind. Dafür messen wir die Abstände für drei Zahlen aus.

x	Zahl	1	2	10
y	Abstand von 1 in mm	0	75,3	250

Da wir genau gemessen haben, versuchen wir mit diesen drei Werten die Gleichung

$$y = a \lg x + b$$

aufzustellen.

x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	y	$y \cdot \lg x$	
1	0	0	0	0	
2	0,30103	0,09062	75,3	22,668	$n = 3$
10	1,000	1	250	250	
Σ	1,30103	1,09062	325,3	272,668	

Wer einen Rechner mit $\boxed{\Sigma}$-Taste und mehreren Speichern hat, der die direkte Eingabe der Tabelle gestattet, kann sich natürlich das Aufschreiben ersparen.

Nun können wir die Regressionskonstanten bestimmen

$$a = \frac{\Sigma\,(y \cdot \lg x) - \dfrac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma y}{n}}{\Sigma\,(\lg x)^2 - \dfrac{(\Sigma \lg x)^2}{n}}$$

$$a = \frac{272{,}668 - \dfrac{1{,}30103 \cdot 325{,}3}{3}}{1{,}09062 - \dfrac{(1{,}30103)^2}{3}}$$

$$a = 249{,}99$$

$$b = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{a \cdot \Sigma \lg x}{n}$$

$$b = \frac{325{,}3}{3} - \frac{249{,}99 \cdot 1{,}30103}{3}$$

$$b = 0{,}02$$

Die gerechnete Gleichung für die Bemessung des Rechenstabes lautet:

$$y = 249{,}99 \lg x + 0{,}02$$

Bevor wir uns damit zufriedengeben, denken wir über die Stellen nach dem Komma nach. Bei unserer Messung hatten wir eine Nachkommastelle berücksichtigt (bei 75,3 mm). Daher wird die Gleichung zu

$$y = 250 \lg x + 0$$

Das ist tatsächlich die Gleichung, nach der ein 25-cm-Rechenstab aufgebaut ist.
Auf ein Bestimmtheitsmaß können wir in diesem Fall verzichten.

bei x	steht die Zahl von der 1 entfernt in mm
1	0
2	75,3
3	119,3
4	150,5
5	174,7
6	194,5
7	211,3
8	225,8
9	238,6
10	250,0

Natürlich können Sie mit diesen Überlegungen jeden Rechenstab von beliebiger Länge entwerfen.

Kurvenanpassung an eine Potenzfunktion

Wir trauen uns sogar an die Gleichung

$$y = b\,x^a$$

heran. Wenn wir sie logarithmieren, wird sie zu

$$\lg y = a \lg x + \lg b$$

$x > 0$; $y > 0$.
Wir müssen nun mit $\Sigma \lg y$ und $\Sigma \lg x$ arbeiten.
Wenn unser Rechner eine lg-Taste (oder ln-Taste) hat, macht das keine Schwierigkeit.
Wenn wir eine Regressionsrechnung durchführen, müssen wir

natürlich immer an die Berücksichtigung der Logarithmen denken (vgl. Abschnitt „Lineare Regressionsrechnung").

$$a = \frac{\Sigma (\lg y \cdot \lg x) - \dfrac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y}{n}}{\Sigma (\lg x)^2 - \dfrac{(\Sigma \lg x)^2}{n}}$$

$$\lg b = \frac{\Sigma \lg y}{n} - \frac{a\, \Sigma \lg x}{n}$$

Neben einer Regressionsrechnung können wir die logarithmische Geradengleichung auch verwenden, um Prognosen oder Pläne aufzustellen.
Es ist bekannt, daß die Kosten für eine Produktion mit zunehmender Produktionsdauer sinken. Bei den ersten Erzeugnissen fehlt es an technologischer Erfahrung, es sind auch Mängel oft noch in der Konstruktion vorhanden, einzelne Materialien wurden nicht bestellt usw. Daher liegen die Kosten für die ersten Erzeugnisse hoch. Im Laufe der Zeit werden diese Mängel behoben. Außerdem werden neue Vorrichtungen geschaffen, es werden Verbesserungsvorschläge gemacht, und die Erfahrung steigt. Dadurch sinken die Kosten. Dabei verläuft der Aufwand an Kosten (oder an Stunden) in einer Potenzkurve.

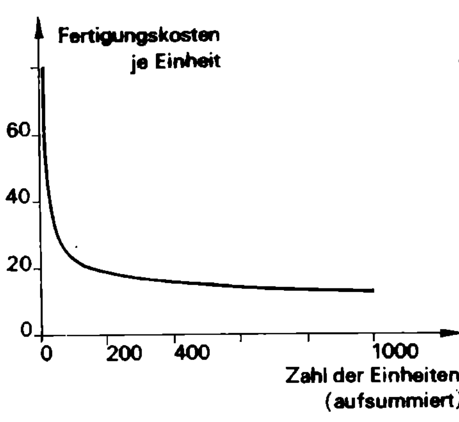

Bild 15. Die Fertigungskosten sinken nach einer Potenzfunktion

Niemand weiß genau, wenn der Kurvenanfang bekannt ist, wie die Kurve weitergeht. Daher wird ihr bekannter Teil auf doppeltlogarithmisches Papier übertragen. Die Verlängerung des bekannten Kurventeiles (jetzt einer Geraden) gibt Rückschlüsse auf das weitere Absinken des Aufwandes. Natürlich reizt diese Aufgabe jeden Taschenrechnerbesitzer. Als Beispiel wählen wir Zahlen aus der Zeit von 1958 bis 1961, weil wir damit unsere Ergebnisse nachprüfen können und schließen dann auf die folgenden Jahre.

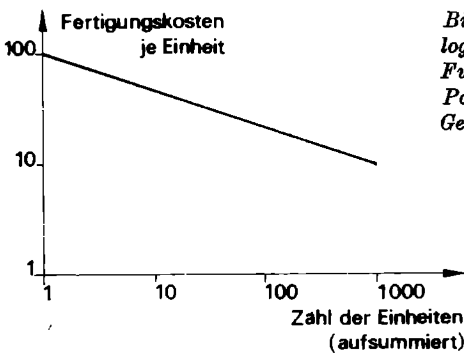

Bild 16. Im doppeltlogarithmischen Funktionsnetz wird die Potenzfunktion zu einer Geraden

In einem Institut werden ab 1958 Lichtpausen hergestellt. Festgehalten wurden die Zahl der Pausen und der Stundenaufwand für 10000 Stück.

Jahr	Stück	Stunden/ 10000
1958	20365	982
1959	22922	872
1960	55022	364
1961	48655	411

Mit diesen Angaben berechnen wir die Regressionskonstanten, wobei wir annehmen, daß es sich um eine Potenzfunktion vom Typ $y = b \cdot x^a$ handelt.

Eine Besonderheit der Kurve ist, daß x (also die Stückzahl) kumulativ angegeben wird.

Das heißt

1958 20365 Stück
1959 20365 + 22928 = 43293 usw.

Jahr	x	$\lg x$	$(\lg x)^2$	y	$\lg y$	$\lg y \cdot \lg x$
1958	20365	4,30888	18,56645	982	2,99211	12,89264
1959	43293	4,63642	21,49639	872	2,94052	13,63349
1960	98315	4,99262	24,92625	364	2,56110	12,78660
1961	146970	5,16723	26,70025	411	2,61384	13,50631
Σ		19,10515	91,68934		11,10757	52,81904

Beachten Sie die Unterschiede zwischen $(\Sigma \lg x)^2$ und $\Sigma (\lg x)^2$, ferner den Unterschied zwischen $\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y$ und $\Sigma (\lg y \cdot \lg x)$

$$a = \frac{\Sigma (\lg y \cdot \lg x) - \dfrac{\Sigma \lg x \cdot \Sigma \lg y}{n}}{\Sigma (\lg x)^2 - \dfrac{(\Sigma \lg x)^2}{n}}$$

$$n = 4$$

$$a = \frac{52{,}81904 - \dfrac{19{,}10515 \cdot 11{,}10757}{4}}{91{,}69008 - \dfrac{(19{,}10515)^2}{4}}$$

$$a = -0{,}53356$$

Wir arbeiten hier mit fünf Nachkommastellen, weil sonst die Unterschiede in den Logarithmen zu gering werden können.

$$\lg b = \frac{\Sigma \lg y}{n} - \frac{a \, \Sigma \lg x}{n}$$

$$\lg b = \frac{11{,}10757}{4} - \frac{(-0{,}53356) \cdot 19{,}10515}{4}$$

$$\lg b = 5{,}32533$$

$$b = 211\,509{,}56$$

Die Geradengleichung lautet also

$$\lg y = -0{,}53356 \lg x + 5{,}32533$$

und die Potenzfunktion

$$y = 211\,509{,}6 \cdot x^{-0{,}53356}$$

Überprüfen wir die letztere Gleichung mit den Werten des Jahres 1961 (146970 Lichtpausen).

$$y = 211\,509{,}6 \cdot 146\,970^{-0{,}53356}$$

$$y = 370 \text{ Stunden}$$

Wegen starker Schwankungen in der jährlichen Zahl der Pausen (1960 wurden mehr hergestellt als 1961) dürfen wir nicht zu viel von unserer Gleichung verlangen.
Wir können nun in jedem Jahr die Genauigkeit der Koeffizienten erhöhen, wenn wir die Tabelle mit $\Sigma\, x$, $\Sigma\, y$ usw. entsprechend mit den neuen Werten verlängern. Dabei müssen die Lichtpausen immer weiter summiert werden.
Uns liegen die Zahlen für die folgenden Jahre vor:

1962	54070 Stück + 146970	= 201040
1963	75370 Stück	= 276410
1964	80133 Stück	= 356543

Daraus ergibt sich mit

$y = 211\,509{,}6 \cdot x^{-0{,}53356}$ folgendes:

1962 werden für 10000 Pausen benötigt 313 Stunden (350)

1963 264 Stunden (220)

1964 230 Stunden (210)

In Klammern stehen die gemessenen Werte.
Wer Lust hat, kann mit den drei neuen Werten die Koeffizienten verbessern.

Die Suche nach der passenden Funktion

In dem Buch von *D'Arcy Thomson* „Über Wachstum und Form" finden sich nachstehende Angaben.
Die Stoffwechselaktivität verschiedener Säugetiere in 24 Stunden ist wie folgt geschätzt worden:

	Masse in kg	Stoffwechsel in kcal/kg	in kJ/kg
Meerschweinchen	0,7	223	933,7
Kaninchen	2	58	242,8
Mensch	70	33	138,2
Pferd	600	22	92,1
Elefant	4000	13	54,4
Wal	150000	1,7	7,1

Uns interessiert, ob es möglich ist, eine Gleichung zu finden, die den Zusammenhang (ungefähr) wiedergibt.
Dazu probieren wir die verschiedenen Anpassungen an Funktionen durch, wie sie in den entsprechenden Abschnitten beschrieben werden. Wir verzichten darauf, die einzelnen Arbeitsgänge hier zu wiederholen und geben zum Vergleich nur die Ergebnisse an.

1. Lineare Regression

$$y = a\,x + b$$

$$a = -\,4{,}705 \cdot 10^{-4}$$

$$b = 70{,}58$$

Das Bestimmtheitsmaß r^2 beträgt nur 0,12.

2. Logarithmische Regression

$$y = a + b \cdot \ln x$$

$$a = 128{,}27$$

$$b = -\,13{,}43$$

$$r^2 = 0{,}57$$

Natürlich läßt sich statt mit ln auch mit lg arbeiten. Das Bestimmtheitsmaß r^2 wird davon nicht berührt.

3. Anpassung an eine e-Funktion

$$y = a\,\mathrm{e}^{bx}$$

$$a = 42{,}55$$

$$b = -\,2{,}17 \cdot 10^{-5}$$

$$r^2 = 0{,}66$$

Hier rückt das Bestimmtheitsmaß langsam zu einem vernünftigen Wert.

4. Anpassung an eine Potenzfunktion

$$y = a\,x^b$$

$$a = 140{,}17$$

$$b = -\,0{,}34$$

$$r^2 = 0{,}93$$

Das Bestimmtheitsmaß von $r^2 = 0{,}93$ läßt eine ideale Kurvenanpassung erwarten. Stellt man die gemessenen Kilokalorien bzw. Kilojoule je Kilogramm Körpermasse den errechneten gegenüber, so erhalten wir folgendes Bild:

	gemessener Wert		errechneter Wert ($y = 140{,}17 \cdot x^{-0{,}34}$)	
	in kcal/kg	in kJ/kg	in kcal/kg	in kJ/kg
Meerschweinchen	223	934	158	662
Kaninchen	58	243	111	465
Mensch	33	138	33,5	140
Pferd	22	92	16	67
Elefant	13	54,5	8,5	35,6
Wal	1,7	7,1	2,5	10,5

Die Abweichungen der Werte voneinander sind trotz des hohen Bestimmtheitsmaßes erheblich. Wir müssen uns vorstellen, daß die gemessenen Werte als Streuwerte über und unter einer Kurve liegen, die durch die errechneten Werte gegeben ist.

Die Glockenkurve

Eines Tages kommt ein Bekannter, von Beruf Gütekontrolleur, zu Ihnen und bittet Sie um die Lösung eines Problems. Er weiß, daß Sie ein kluger Mensch sind und außerdem noch einen Taschenrechner haben. Es gilt, folgendes Problem zu lösen.

Eine Drehmaschine produziert Wellen eines gegebenen Durchmessers. Aus umfangreichen statistischen Untersuchungen an bisher hergestellten Wellen ist bekannt: Der Mittelwert der Wellen beträgt $M = 100$ mm, die Standard-

abweichung ist $s = 0{,}1$ mm. Der Abnehmer dieser Wellen verlangt, daß Maßabweichungen von 0,15 mm nach oben und unten nicht überschritten werden dürfen. Welcher Ausschuß ist nun prozentual zu erwarten?
Zunächst müssen Sie wissen, daß ein Merkmal x, das sich mit kleinen, zufällig bedingten Schwankungen um einen häufigsten Wert gruppiert, im allgemeinen normalverteilt ist. Das heißt, wenn man die Häufigkeiten über den entsprechenden x-Werten aufträgt, entsteht eine ganz bestimmte Kurve, die auch als *Gauß*sche Glockenkurve bezeichnet wird. Durch das arithmetische Mittel M und die Standardabweichung s (s. Abschnitt „Mittelwert und Streuung") ist die Verteilung eindeutig festgelegt. Aus Zweckmäßigkeitsgründen transformiert man noch die Werte durch die Gleichung

$$z = \frac{x - M}{s}$$

und nennt die graphisch dargestellte z-Verteilung die normierte *Gauß*sche Glockenkurve. Sie hat die Gestalt

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Noch wichtiger als die Kurve selbst ist die Fläche unter dieser Kurve.

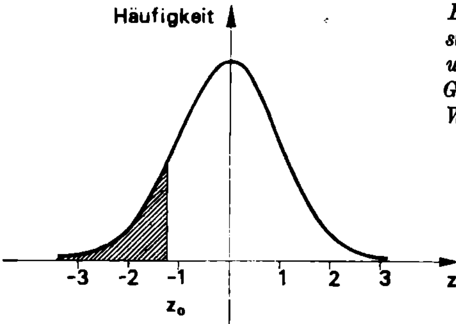

Bild 17. Das Flächenstück (von $-\infty$ bis z_0) unter der Gaußschen Glockenkurve ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß

Die Fläche von $z = -\infty$ bis $z = z_0$ ist nämlich ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der in der gesamten Menge

$$z\text{-Werte} \leqq z_0$$

vorkommen.
Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß diese *Gauß*sche Glockenkurve, obwohl sie nach beiden Seiten „nur" unendlich nahe an die x- bzw. z-Achse herankommt, doch eine endliche Fläche einschließt. Diese Gesamtfläche ist gleich eins. Und für diese Fläche unter der *Gauß*kurve von minus unendlich bis z haben die Mathematiker eine Formel gefunden, mit deren Hilfe Sie mit Ihrem Taschenrechner für einen gegebenen z-Wert ausrechnen können, wie groß die Wahrscheinlichkeit $P(z)$ dafür ist, daß Merkmale bis hin zur Größe z in der Gesamtmenge vorkommen. Diese Formel lautet:

$$P(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \frac{z^6}{3! \cdot 2^3 \cdot 7} + - \cdots\right)$$

Das allgemeine Gesetz, nach dem die weiteren Glieder dieser Reihe gebildet werden, können Sie sicher daraus erkennen.

> $n!$ (sprich „n Fakultät") bedeutet wieder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Nun zurück zu Ihrer Aufgabe. Wir wollen zunächst z für die obere zulässige Grenze ($x = 100{,}15$ mm) berechnen.
Mit der Formel $z = \frac{x - M}{s}$ (arithmetisches Mittel $M = 100$ mm; Standardabweichung $s = 0{,}1$ mm) ergibt sich dann

$$z = \frac{100{,}15 - 100}{0{,}1} = 1{,}5$$

und damit

$$P(1{,}5) = \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1{,}5}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1{,}5^2}{6} + \frac{1{,}5^4}{40} - \frac{1{,}5^6}{336} + \frac{1{,}5^8}{24 \cdot 144} - \frac{1{,}5^{10}}{120 \cdot 32 \cdot 11}\right)$$

$$= 0{,}5 + 0{,}5984\,(1 - 0{,}375 + 0{,}1266 - 0{,}034$$
$$+ 0{,}0074 - 0{,}0014)$$
$$\approx 0{,}933 = 93{,}3\,\%.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 93,3 % werden also die produzierten Wellen *unterhalb* der zulässigen Grenze von 100,15 mm liegen. Das bedeutet, etwa 7 % der Fertigung liegen oberhalb, also außerhalb dieser Grenze. Aus Symmetriegründen liegen ebenso viele Exemplare außerhalb der unteren zulässigen Grenze von 99,85 mm. Insgesamt ist also ein Ausschuß von 14 % zu erwarten.

Wir mußten bei der Berechnung von P die ersten 6 Glieder der Potenzreihe benutzen, um die zweite Nachkommastelle im Ergebnis zu sichern. Je größer der verwendete Wert von z ist, desto mehr Glieder müssen wir berücksichtigen, d.h., desto unhandlicher wird die Formel. Das hat die Mathematiker nicht ruhen lassen, und sie haben für große Werte von z die folgende Näherung gefunden (bei $z = 2$ ergibt sich eine Abweichung von etwa 2 % vom exakten Wert):

$$P(z) \approx 1 - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z \cdot \sqrt{2\pi}}$$

Mit dem Wert $z = 1{,}5$ ergibt sich dann

$$P(1{,}5) \approx 1 - \frac{e^{-\frac{1{,}5^2}{2}}}{1{,}5 \cdot \sqrt{2\pi}} = 0{,}9137 \approx 91{,}4\,\%$$

Das ergibt sogar $2 \cdot 8{,}6 = 17{,}2\,\%$ Ausschuß.

Für so kleine z-Werte beträgt die Abweichung vom wirklichen Wert bereits etwa 20 %, aber als erster Schätzwert würde das schon ausreichen.

Ob eine solche Ausschußquote für den Herstellerbetrieb noch zumutbar ist, oder ob man unbedingt eine neue Drehmaschine (mit einer im allgemeinen geringeren Streuung s um den Mittelwert M) anschaffen sollte, diese Entscheidung haben natürlich weder Sie noch Ihr Bekannter, der Gütekontrolleur, zu fällen. Aber Sie haben die Entscheidung durch klares Zahlenmaterial vorbereitet.

Über das Wurzelziehen

Beim Ziehen der Quadratwurzel waren die alten Babylonier unsere geistigen Väter. Sie benutzten dazu die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

Sie zerlegten also den Radikanden (das, was unter dem Wurzelzeichen steht) in eine Quadratzahl und den Rest und berechneten dann mit Hilfe der rechten Seite obenstehender Formel näherungsweise die Quadratwurzel.

Beispiel: $\sqrt{40} = \sqrt{6^2 + 4} \approx 6 + \frac{4}{2 \cdot 6} \approx 6{,}33$

(Ein genauerer Wert ist 6,3245553.)
Bessere Näherungen als nach dieser Formel erhält man mit einem Verfahren, das wir dem großen Naturforscher *Isaac Newton* verdanken und das auf *Heron von Alexandria* (um 100 u. Z.) zurückgeht. a_1 sei ein erster Schätzwert für $\sqrt{x}$. Dann berechnet man einen verbesserten Schätzwert a_2 mit Hilfe der Formel

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right)$$

und erforderlichenfalls weitere Verbesserungen a_{n+1} mittels

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \quad \text{für} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solche schrittweisen Verbesserungen nennt man Iterationsverfahren. Wenden wir das auf unsere $\sqrt{40}$ an! Als Schätzwert nehmen wir $\left(\text{da } \sqrt{36} = 6 \text{ und } \sqrt{49} = 7\right)$: $a_1 = 6{,}5$.
Dann ergibt sich der Reihe nach

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(6{,}5 + \frac{40}{6{,}5}\right) \approx 6{,}327$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(6{,}327 + \frac{40}{6{,}327}\right) \approx 6{,}32456$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\left(6{,}32456 + \frac{40}{6{,}32456}\right) \approx 6{,}324553$$

Damit sind (vergleiche mit dem oben angegebenen genaueren Wert) fünf Stellen nach dem Komma gesichert, und zwar nach nur 3 Iterationsschritten.

Übrigens können Sie noch einige Schritte dadurch einsparen, daß Sie im Verlaufe der Iteration die jeweils berechnete Näherung gleich im Register stehen lassen. Sie ist ja der Anfangswert für die nächste Berechnung.

Wenn Ihr Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste hat, können Sie die vorstehenden Zeilen vergessen. Es sei denn, Sie möchten die Qualität der babylonischen Mathematik nochmals überprüfen.

Auf einen kleinen Trick im Zusammenhang mit dem Wurzelziehen sei hier noch hingewiesen:

Falls Sie einen Ausdruck der Form $\sqrt{a^2+b^2}$ zu berechnen haben und Ihnen steht kein Speicherplatz für das Zwischenergebnis a^2 bzw. b^2 zur Verfügung, so ist folgende kleine Umformung zu empfehlen:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a \cdot \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

In dieser Form können Sie ohne Zwischenhalt das Ergebnis berechnen.

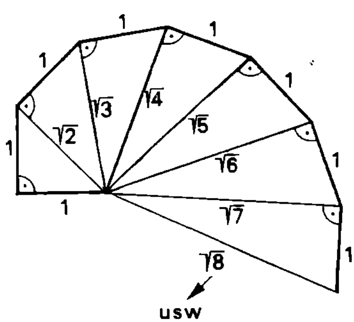

Bild 18. So kann man natürlich auch die Wurzel ziehen

Wie man „rein geometrisch“ (mit Hilfe des „Pythagoras“) die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ziehen kann, zeigen wir Ihnen in einer graphischen Darstellung (Bild 18).
So wie das Ziehen der Quadratwurzel nur ein Sonderfall des Ziehens der n-ten Wurzel aus einer Zahl darstellt, so ist auch die oben aufgeführte *Newton*sche Iterationsformel nur ein Sonderfall der allgemein gültigen Formel

$$\sqrt[n]{x} \approx \frac{n-1}{n}\left[a + \frac{x}{(n-1)\,a^{n-1}}\right]$$

Da wir in einer dreidimensionalen Welt leben, sind Kubikwurzeln noch besonders wichtig. Für diesen Fall ($n = 3$) lautet die vorstehende Formel

$$\sqrt[3]{x} \approx \frac{2}{3}\left[a + \frac{x}{2\,a^2}\right]$$

Als Beispiel berechnen wir damit $\sqrt[3]{10}$, mit der Ausgangsnäherung $a_0 = 2$. Bekanntlich ist ja $2^3 = 8$, liegt also nur geringfügig unter dem Radikanden.

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{5}{4}\right) = 2{,}17$$

$$a_2 = \frac{2}{3}\left(2{,}17 + \frac{5}{2{,}17^2}\right) = 2{,}154546$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(2{,}1545 + \frac{5}{2{,}1545^2}\right) = 2{,}1544346$$

$$a_4 = \frac{2}{3}\left(2{,}154435 + \frac{5}{2{,}154435^2}\right) = 2{,}1544346$$

Damit ist bereits die 7. Stelle nach dem Komma gesichert.
Die 4. Wurzel ist wieder einfach zu ziehen, indem man zweimal hintereinander die Quadratwurzel zieht, d.h. $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$.
Für die 5. Wurzel brauchen Sie wiederum die entsprechend (für $n = 5$) aufbereitete allgemeine Iterationsformel, während die 6. Wurzel durch eine Hintereinanderschaltung von

Quadrat- und Kubikwurzel ersetzbar ist, d.h. $\sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$.

Ganz allgemein gilt $\sqrt[m \cdot n]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$.

Das erläuterte Iterationsverfahren liefert im allgemeinen bei jedem Schritt zwei neue gesicherte Kommastellen. Sie sollten daher bei jeder Berechnungsstufe zwei Stellen mehr als vorher mitführen.

Wenn Ihr Rechner die Taste x^y aufweist, erübrigt sich für Sie das herkömmliche Wurzelziehen. Es gilt nämlich ganz allgemein $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Sie geben also den Wurzelexponenten ein, drücken die Reziproktaste, geben den Radikanden (den Wert unter der Wurzel) x ein (nach Rechnervorschrift, dabei wird das bereits vorhandene Ergebnis im Arbeitsspeicher weitergeschoben) und drücken die Funktionstaste x^y.

Falls beim Wurzelziehen die Variable x eine bestimmte Schranke nicht überschreitet und Sie sich mit einem Fehler kleiner als 1 Promille zufrieden geben, dann können Sie auch die folgenden Näherungsformeln verwenden:

1. $$\sqrt{1+x} \approx \frac{3 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}{2} \quad \text{für} \quad |x| \leqq 0{,}25$$

Beispiel: $\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1 + 0{,}1} \approx 1{,}049$
(genauerer Wert: 1,04880885)

$|x|$ (lies „x absolut") ist der Absolutbetrag der Größe x, d.h., die angegebene obere Schranke gilt also unabhängig vom Vorzeichen; das bedeutet mathematisch: $-0{,}25 \leqq x \leqq +0{,}25$.

2. $$\sqrt[3]{1+x} \approx \frac{5 - \left(\frac{2x - 3}{3}\right)^2}{4} \quad \text{für} \quad |x| \leqq 0{,}25$$

Beispiel: $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{1 - 0{,}2} \approx 0{,}9289$
(genauerer Wert: 0,92831777), x ist jetzt $-$ 0,2.

Wenn Sie mit Ihrem Rechner in einem Ausdruck $A - B$ zuerst B ausrechnen müssen (in den meisten Fällen sind Sie ja gezwungen, Formeln von innen her schrittweise zu berechnen), dann drücken Sie nach der Berechnung von B die Vorzeichentaste $\boxed{+/-}$ und addieren anschließend A.

Die doppelte Härte

Im Sprachgebrauch ist uns sofort klar, wenn wir hören, ein Stoff sei härter als ein anderer. Wenn wir den Begriff Härte aber genauer untersuchen, finden wir, daß es ihn mit einer einheitlichen Maßeinheit gar nicht gibt. Was ein Meter darstellt, ist sofort klar. Aber die Härte 1 gibt es nicht.
Nun sagen Sie vielleicht, Sie kennen die *Mohs*sche Härteskala, bei der Talk die Härte 1 und Diamant die Härte 10 haben. Richtig! Doch das ist die *Mohs*sche (Ritz-) Härte. Wir fragten aber nach dem Maß für die Härte ganz allgemein.
Es gibt kein Härtemaß. Es gibt nur Härten nach *Brinell*, *Rockwell* oder *Mohs*.
Die *Mohs*sche Härteskala ist völlig willkürlich. Sie setzt einfach 10 Mineralien fest, die die *Mohs*schen Härten 1, 2 bis 10 haben sollen. Das Mineral mit der niedrigeren Nummer wird von allen mit höheren Nummern geritzt.
Anders gingen *Brinell* und *Rockwell* sowie *Vickers* vor. Sie befaßten sich mit Metallen. In diese drückten sie mittels standardisierter Kräfte Stahlkugeln bestimmten Durchmessers (*Brinell*) oder Diamantpyramiden (*Rockwell*, *Vickers*). Anschließend wird der Eindruck ausgemessen.
 Befassen wir uns mit *Brinell* und fragen wir uns: Wie unter-

scheiden sich zwei Stähle, von denen der eine doppelt so hart sein soll wie der andere?
Die *Brinell*härte HB ist definiert

$$HB = \frac{\text{Prüflast}}{\text{Oberfläche des Kugeleindruckes}}$$

$$HB = \frac{F}{\frac{1}{2}\pi \cdot D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2F}{\pi \cdot D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}$$

Hierbei ist D der Durchmesser der Prüfkugel und d der Durchmesser des Eindruckes, den die Kugel hervorrief. Die Last F ist für Stahl mit $F = 30\,\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}\,D^2$ festgelegt, wenn D in Millimetern angegeben wird. Wir nehmen eine Kugel mit 5 mm Durchmesser.
Dann wird die Prüflast

$$F = 30\ \text{kp} \cdot 5^2 = 750\ \text{kp}$$

Aus der Gleichung für HB sehen wir, daß es mit dem berühmten gesunden Menschenverstand nicht möglich ist, etwas über den Unterschied der Stähle auszusagen. Zwar wird der Stahl mit der doppelt so hohen *Brinell*härte natürlich einen entsprechenden Wert für HB haben. Doch der ist ja nur eine errechnete Größe. Gemessen wird d. Und nur d gibt eine Stahleigenschaft wirklich wieder.
Führen wir also mit unserem Taschenrechner zwei Rechengänge durch, um uns über das Problem wirklich klar zu werden. Einmal errechnen wir die beiden Kugeldurchmesser d für den Fall

$$HB_2 = 2 \cdot HB_1$$

und dann errechnen wir beide *Brinell*härten HB für den Fall

$$d_2 = 0{,}5 \cdot d_1$$

(wenn der Stahl 2 härter als der Stahl 1 ist, muß d_2 kleiner werden!).
Nehmen wir eine *Brinell*härte für den „weicheren" Stahl

von 120 *Brinell*einheiten an, so beträgt im ersten Fall die Härte des „härteren“ Stahles natürlich 240 *Brinell*einheiten. Um die beiden d zu errechnen, nehmen wir eine Umformung der *Brinell*gleichung vor.

$$HB = \frac{2\,F}{\pi \cdot D\,(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

$$D - \sqrt{D^2 - d^2} = \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}$$

$$-\sqrt{D^2 - d^2} = \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB} - D$$

$$\sqrt{D^2 - d^2} = D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}$$

$$D^2 - d^2 = \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2$$

$$d^2 = D^2 - \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2$$

$$d = \sqrt{D^2 - \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2}$$

Für $HB_1 = 120$ kp/mm² erhalten wir $d_1 = 2{,}71$ mm.
Für den doppelten Wert $HB_2 = 240$ kp/cm² wird $d_2 = 1{,}95$ mm.

Mit steigender *Brinell*härte sinkt natürlich der Eindruckdurchmesser.
Jetzt errechnen wir die beiden *Brinell*härten für den Fall, daß der Kugeldurchmesser d um die Hälfte kleiner wird. Wir gehen aus von $d = 2{,}71$ mm. Dafür kennen wir die Härte 120 Brinell.
Für $d_2 = \frac{2{,}71}{2}$ mm wird die Härte

$$HB_2 = \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

$$= \frac{2 \cdot 750\ \text{kp}}{\pi \cdot 5 \cdot \left[5 - \sqrt{5^2 - \left(\frac{2{,}71}{2}\right)^2}\right] \text{mm}^2}$$

$$HB_2 = 510\ \text{kp/mm}^2$$

Die Gleichung gestattet verschiedene Rechengänge. Nur wenige Rechner werden sie „richtig herum" zu berechnen gestatten, also zuerst den Zähler und dann den Nenner eingehen lassen. Dazu werden nämlich mehrere Speicher und Stacks benötigt.
Meistens ist es vorteilhafter, die Rechnung mit d^2 zu beginnen. Wenn Ihr Rechner eine $\boxed{+/-}$-Taste hat, können Sie sie ausnutzen, damit die „Rechnung falsch herum" funktioniert. Sie beachten, daß $(D^2 - d^2) = (-d^2 + D^2)$.

Die Halbierung des Eindruckdurchmessers d bedeutet mehr als eine Vervierfachung von HB von 120 auf 510 kp/mm^2.
Wir sehen, daß es tatsächlich unmöglich ist, sich „Härte" vorzustellen. Nur die Schnelligkeit eines Rechners gestattet es, sich alle möglichen Fälle zahlenmäßig zu erarbeiten.

Geburtstage und Glücksspiele

Wir schrieben auch das Buch „Seltsames um den gesunden Menschenverstand", das im VEB Fachbuchverlag Leipzig erschien. In dem Abschnitt „Gibt es Pechsträhnen?" hatten wir die folgende Aufgabe vorgestellt:
In einer Schulklasse sitzen 40 Schüler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?
Wir hatten dem Leser dazu folgenden Trugschluß vorgeführt:
Das Jahr hat 365 Tage. Wenn wir von Geburtenhäufigkeiten infolge einiger besonderer Festtage (Fasching!) oder klimatischer Bedingungen (Frühlingswetter!) und vom 29. Februar einmal absehen, dann hat im Durchschnitt von den 40 Schülern alle 9 Tage einer Geburtstag. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Geburtstage zusammenfallen, ist daher

gering. Das klingt zwar vernünftig, ist aber falsch! Der Trugschluß beruht darauf, daß man automatisch Durchschnittswerte und Wahrscheinlichkeiten miteinander verquickt.
Wir hatten dort folgende Formel abgeleitet:

$$W_n = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

Darin bedeutet W_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von n willkürlich in einer Gruppe zusammengestellten Personen *nicht* zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von diesen n Geburtstagen doch zwei zusammenfallen, ist dann das logische Gegenteil davon, also $W_n' = 1 - W_n$.
Dazu schrieben wir: „Heutzutage wird es niemand einfallen, den Wert dieser Formel für $n = 40$ auszurechnen."
Hier irrten wir!
Wenn Ihr Taschenrechner eine $\boxed{y^x}$-Taste hat, so ist es geradezu notwendig, diese kleine Rechnung durchzuführen. Probieren Sie es bitte einmal bis mindestens $n = 25$.
Vorausgesetzt, Ihr Rechner verfügt auch noch über die Fähigkeit, große Zahlen in Exponentenschreibweise darzustellen, d.h. Werte zwischen 10^{-99} und 10^{+99} anzuzeigen (das ist aber meistens der Fall), dann erhalten Sie aus der Formel für W_n mit $n = 25$

$$W_{25} \approx 4{,}92 \cdot 10^{63} : 1{,}14 \cdot 10^{64} = 0{,}43$$

Daraus ergibt sich $W_{25}' = 1 - W_{25} = 0{,}57$.
Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit beträgt 57 %, daß von den 25 Schülern unserer Klasse mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben.
Um bei der soeben durchgeführten Rechnung den Zähler zu ermitteln, müssen Sie 25mal eine dreistellige Zahl eingeben und dazu jedesmal die Multiplikationstaste drücken. Das ist schon mit einer beachtlichen körperlichen Arbeit verbunden. Da ist es kein Wunder, daß die Mathematiker versucht haben, auf bequemeren Wegen zum Ziel zu gelangen.
Nehmen Sie erst einmal zur Kenntnis – Sie können es selbst durch ein Zahlenbeispiel nachprüfen –, daß folgende Be-

ziehung gilt:

$$p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \cdots \cdot (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$$

Darin bedeutet $p!$ (lies „p Fakultät") das Produkt aller natürlichen Zahlen von eins bis p, d.h. $p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot p$. Mit $p = 365$ und n = Anzahl der herausgegriffenen Personen geht unsere Formel für W_n über in

$$W_n = \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

Triumphieren Sie nun nicht zu früh, selbst wenn Sie über einen Supertaschenrechner verfügen, der u.a. eine Taste für die Fakultät „!" hat. 365! ist nämlich eine so gigantische Zahl, daß sie selbst der großzügigste Taschenrechner nicht mehr anzeigt. Es ist eine Eins mit fast 800 Nullen dahinter. Zum Glück hat der schottische Mathematiker *James Stirling* (1692 bis 1770) eine Formel gefunden, um die Fakultät einer Zahl näherungsweise so darzustellen, daß sie wenigstens mit Hilfe der Logarithmenrechnung (s. Abschnitt „Keine Angst vor Logarithmen") berechnet werden kann.
Die *Stirling*sche Formel lautet:

$$x! \approx \sqrt{2\pi\, x} \cdot x^x \cdot e^{-x}$$

Sie gilt um so besser, je größer x ist. Für $x = 5$ ergibt sie beispielsweise ≈ 118, während der genaue Wert 120 ist. Das ist ein Fehler von etwa 2 %. Mit $x = 10$ beträgt die Abweichung nur noch 1 %.
Mit der *Stirling*schen Näherungsformel geht unsere Formel

$$W_n = \frac{365!}{(365-n)!\,365^n} \quad \text{über in}$$

$$W_n = \frac{\sqrt{2\pi\, 365} \cdot 365^{365} \cdot e^{-365}}{\sqrt{2\pi\,(365-n)} \cdot (365-n)^{365-n} \cdot e^{(-365-n)} \cdot 365^n}$$

In dieser Form ist allerdings eine unmittelbare Berechnung auch noch nicht möglich, weil Zähler und Nenner gleicher-maßen riesige Zahlen ergeben. Es lassen sich nun einige Umformungen vornehmen (deren Darstellung wir Ihnen hier ersparen möchten). Danach ergibt sich

$$W_n \approx \left(1 - \frac{n}{365}\right)^{n - 365,5} \cdot e^{-n}$$

Diese Formel ist sehr geeignet für eine Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Taschenrechners, der eine $\boxed{y^x}$-Taste und eine $\boxed{e^x}$-Taste hat.

Beachten Sie: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Wenn Sie jetzt noch Lust haben und etwa eine Minute Zeit, dann können Sie auch den Wert für $n = 40$ ausrechnen, der die am Anfang dieses Abschnitts von uns gestellte Aufgabe löst.
Wir verraten Ihnen hier das Ergebnis: $W_{40} = 0{,}109$ bzw. $W_{40}' = 1 - 0{,}109 = 0{,}891$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß unter 40 Personen, die ganz willkürlich zusammengestellt wurden, mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, beträgt also 89,1 %.
Mit diesem Ergebnis in der Tasche können Sie nun getrost auf die Suche nach einem Partner gehen, der bereit ist, dagegen zu wetten (und der die mathematischen Hintergründe noch nicht überblickt). Als Gruppe von 40 Personen können Sie beispielsweise aus irgendeinem Band irgendeines Lexikons die dort mit Geburtstagen aufgeführten bedeutenden Persönlichkeiten heraussuchen. Wenn Sie 40 zusammen haben, hören Sie auf. Keine Angst, es wird schon klappen! 89 % Wahrscheinlichkeit entsprechen einer Gewinnchance von etwa 9 : 1. Damit könnten Sie schon Ihre Familie ernähren, wenn Sie nur genügend viele Wettpartner finden würden.
Da wir gerade bei Glücksspielen sind: es interessiert Sie sicher, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß Sie in einer Lotterie gewinnen, zum Beispiel wenn Sie bei „6 aus 49" mitspielen. Es geht also darum, aus den Zahlen 1 bis 49 möglichst die 6 „Richtigen" zu erraten, die in einer öffentlichen Ziehung dann ermittelt werden.
 Für die Wahrscheinlichkeit, einen solchen „Sechser" zu

tippen, geben die Mathematiker folgende Formel an:

$$W_6 = \frac{(49-6)!\cdot 6!}{49!}$$

Wenn Ihr Taschenrechner eine Fakultät-Taste („!") hat, dann genügen einige Tastendrucke, um das Ergebnis zu erhalten. Er verarbeitet in jedem Falle Werte bis 69!, da das die obere Anzeigegrenze von 10^{99} fast erreicht. Wenn keine solche Taste vorhanden ist, kürzen wir vorher 43! aus dem Zähler weg, so daß folgendes übrigbleibt:

$$W_6 = \frac{6!}{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}$$

Beachten Sie immer: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$

Hier ist das richtige Ergebnis: $W_6 = 7{,}151123842\cdot 10^{-8}$.
Der Kehrwert beträgt 13983816. So viele verschiedene Wettscheine müßten Sie ausfüllen, um garantiert den Hauptgewinn dabeizuhaben.
Falls Sie bescheidenere Ansprüche stellen und mit 5 „Richtigen" zufrieden sind, können Sie die Wahrscheinlichkeit W_5 nach der folgenden Formel ausrechnen:

$$W_5 = \frac{(49-6)!}{[49-6-(6-5])!\cdot(6-5)!}\cdot\frac{6!}{(6-5)!\cdot 5!}\cdot\frac{(49-6)!\cdot 6!}{49!}$$

Das sieht schlimmer aus, als es ist. Wir haben die Formel so vollständig und ungekürzt hingeschrieben, daß Sie auch noch die Wahrscheinlichkeit für einen „Vierer" bei „6 aus 49" ausrechnen können. Dazu müssen Sie überall, wo in der letzten Formel die „5" steht, eine „4" einsetzen.
Wenn Sie nun gar noch die Lotterie wechseln und ausrechnen wollen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für a „Richtige" beim Lotteriespiel „b aus c" ist, so ergibt sich ganz allgemein

$$W_a = \frac{(c-b)!}{[c-b-(b-a)]!\cdot(b-a)!}\cdot\frac{b!}{(b-a)!\cdot a!}\cdot\frac{(c-b)!\cdot b!}{c!}$$

Kehren wir noch einmal zurück zu unserer Wahrscheinlichkeit W_5 bei „6 aus 49". Wenn wir darin die Klammern ausrechnen und $1! = 1$ als Faktor weglassen, dann ergibt sich mit Hilfe einiger Kürzungen

$$W_5 = \frac{43! \cdot 6! \cdot 43! \cdot 6!}{42! \cdot 5! \cdot 49!} = \frac{43 \cdot 6 \cdot 720}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = 18{,}4 \cdot 10^{-6}$$

Wie groß Ihre Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lotteriespiel sind, wissen Sie nun oder können es doch ausrechnen.
Ob Sie dabei mehr Geld herausholen, als Sie hineinstecken, das können wir Ihnen natürlich nicht versprechen.

Lösen von Gleichungen

Einen beachtlichen Teil der Mathematikstunden in unserer Schulzeit haben wir zur Lösung von Gleichungen verwendet. Die Aufgaben waren oft so gestellt, daß sich schön ganzzahlige Werte ergaben.
In der Praxis sieht das meist anders aus. Die Ergebnisse sind nicht nur „krumme" Zahlen, sondern manche Gleichungen sind gar nicht mehr elementar lösbar, d.h., wir müssen Näherungsverfahren anwenden.
Zunächst einmal zu den Gleichungen, die in einem durchgehenden Rechengang zu lösen sind.
Eine Formel für quadratische Gleichungen $x^2 + a\,x + b = 0$ hatten wir im Abschnitt „Der Goldene Schnitt" angegeben.
Die nächsthöhere Klasse sind kubische Gleichungen. Ihre Normalform lautet

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Wenn bei dem Glied x^3 noch ein Zahlenfaktor steht, dividieren wir die ganze Gleichung noch durch diesen Faktor.
Die Koeffizienten a, b und c können natürlich auch Null sein.

Wir wollen uns im folgenden nur für die sogenannten reellen Wurzeln der Gleichungen interessieren, d.h. für die Stellen, an denen das Bild einer Funktion $y = f(x)$ in einem x,y-Koordinatensystem die x-Achse schneidet.
Folgende Fallunterscheidungen müssen noch getroffen werden:

1. Die kubische Gleichung hat nur eine reelle Lösung.

2. Sie hat 3 reelle Lösungen.

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.
Sie können durch eine kleine Skizze in einem Koordinatensystem mit wenigen Punkten prüfen, welcher der beiden Fälle vorliegt. Wenn Sie nicht gern zeichnen, können Sie auch rechnen:
Für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0$ ergibt sich Fall 1, für $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ Fall 2.
Wir benötigen die beiden Hilfsgrößen

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{und} \quad q = \frac{2}{27}\,a^3 - \frac{a\,b}{3} + c$$

Dann ergibt sich im

Fall 1:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$- \sqrt[3]{+\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}$$

Fall 2:

$(p < 0)$

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-p}{27}}} \cdot \cos\frac{\varphi}{3} - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-p}{27}}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) - \frac{a}{3}$$

11*

$$x_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-p}{27}}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right) - \frac{a}{3}$$

mit dem Hilfswinkel $\varphi = \arccos \dfrac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}$.

(Die Verschiedenartigkeit der Formeln rührt daher, daß die Fälle 1 und 2 mit unterschiedlichen Methoden gelöst wurden.)

Für die Lösung einer Gleichung 4. Grades in der Normalform

$$x^4 + a'\,x^3 + b'\,x^2 + c'\,x + d' = 0$$

stellen wir Ihnen das folgende Verfahren vor, das im wesentlichen von dem italienischen Mathematiker *Bombelli* etwa im Jahre 1570 entwickelt wurde.

Es wird zunächst die sogenannte kubische Resolvente

$$z^3 + k_1\,z^2 + k_2\,z + k_3 = 0$$

aufgestellt, mit

$$k_1 = b'$$

$$k_2 = a'\,c' - 4\,d'$$

$$k_3 = c'^2 + d'\,(a'^2 - 4\,b')$$

Dann wird mit dem vorher erwähnten Verfahren die kleinste reelle Lösung dieser kubischen Gleichung bestimmt, die wir mit z_1 bezeichnen wollen. Daraus wird die quadratische Gleichung für r gebildet:

$$r^2 + z_1\,r + d' = 0$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$r_1 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}$$

$$r_2 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}$$

Aus ihnen lassen sich zwei weitere Größen s_1 und s_2 bilden:

$$s_1 = \frac{a' \cdot r_1 - c'}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}}$$

$$s_2 = \frac{a' \cdot r_2 - c'}{-2 \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 - d'}}$$

Falls Sie bis dahin richtig gerechnet haben, muß gelten $s_1 \cdot s_2 = b' + z_1$

Die vier Lösungen der vorgegebenen Gleichung 4. Grades sind dann

$$x_1 = -\frac{s_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1}$$

$$x_2 = -\frac{s_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1}$$

$$x_3 = -\frac{s_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2}$$

$$x_4 = -\frac{s_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2}$$

Wenn Ihre Taschenrechneranzeige laut Gebrauchsanleitung beim Wurzelziehen einen Fehler signalisiert, dann ist der Wert unter der Wurzel negativ, die Lösung also nicht reell und für uns uninteressant.

In dem folgenden Rechenbeispiel zur Lösung einer Gleichung 4. Grades ist das Verfahren zur Lösung einer kubischen Gleichung enthalten.
Es sei die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 6x - 15 = 0$$

gegeben.

Als Koeffizienten der kubischen Resolvente ergeben sich

$$k_1 = 2,\ k_2 = 48,\ k_3 = 96.$$

Diese hat also die Gestalt

$$z^3 + 2\,z^2 + 48\,z + 96 = 0$$

Die Hilfsgrößen p und q zur Lösung dieser kubischen Gleichung sind

$$p = 48 - \frac{4}{3} = 46{,}67$$

und

$$q = \frac{2}{27} \cdot 8 - \frac{2 \cdot 48}{3} + 96 = 64{,}59$$

Der Wert $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ beträgt etwa $4807{,}1111 > 0$. Es liegt also Fall 1 vor, d.h., die kubische Resolvente hat nur eine reelle Lösung. Diese ist

$$z_1 = -2,$$

was man aus der unter Fall 1 angegebenen Formel erhält und auch durch Einsetzen bestätigt.
Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung

$$r^2 - 2\,r - 15 = 0$$

mit den Lösungen

$$r_1 = 5 \text{ und } r_2 = -3.$$

Für die Größen s_1 und s_2 erhält man

$$s_1 = -2,\ s_2 = 0.$$

Die Probe $s_1 \cdot s_2 = b + z_1$ ergibt $-2 \cdot 0 = 2 - 2$.
Wir haben also bisher richtig gerechnet.

Die 4 Lösungen unserer Gleichung 4. Grades sind dann:

$$x_1 = -\frac{s_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1} = 1 + \sqrt{-4} \quad \text{nicht reell!}$$

$$x_2 = -\frac{s_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 - r_1} = 1 - \sqrt{-4} \quad \text{nicht reell!}$$

$$x_3 = -\frac{s_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7320508$$

$$x_4 = -\frac{s_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 - r_2} = -\sqrt{3} \approx -1{,}7320508$$

Wir haben oben gesehen, daß Gleichungen 2., 3. und 4. Grades formelmäßig auflösbar sind, wobei lediglich Wurzeln gezogen werden müssen. Wenn die Unbekannte x in höheren Potenzen vorkommt, ist das prinzipiell nicht mehr möglich. Das gleiche gilt auch für sogenannte transzendente Gleichungen, in denen Ausdrücke wie $\sin x$, $\ln x$ usw. vorkommen.

Von Sonderfällen sehen wir einmal ab.

Zur Lösung solcher Gleichungen müssen Näherungsverfahren herangezogen werden.

Ein Verfahren, das bereits unsere Großeltern erfolgreich angewandt haben und das ganz mit elementaren Rechenoperationen arbeitet, ist die „Regula falsi“ (wörtlich übersetzt: Regel vom Falschen). Sie wird zuweilen auch als „Eingabeln“ bezeichnet.

Zunächst muß man sich durch Nachdenken, durch Probieren oder an Hand einer kleinen Skizze eine Vorstellung davon verschaffen, wo eine noch genauer zu bestimmende Lösung ungefähr liegt.

Nennen wir die genaue, aber unbekannte Lösung $\bar{x}$. Dann wählen wir zwei x-Werte x_0 und x_1, die beiderseits von $\bar{x}$ liegen. Die zugehörigen y-Werte y_0 und y_1, die aus der vorgegebenen Funktion berechnet werden müssen, haben dann umgekehrte Vorzeichen. Der Grundgedanke bei der Regula falsi besteht darin, daß durch die beiden Punkte P_0 (x_0, y_0) und P_1 (x_1, y_1) eine Gerade gelegt wird, deren Schnittpunkt mit der x-Achse einen ersten Näherungswert für das gesuchte $\bar{x}$ ergibt. Die Kurve $f(x)$ wird also durch ihre Sehne ersetzt.

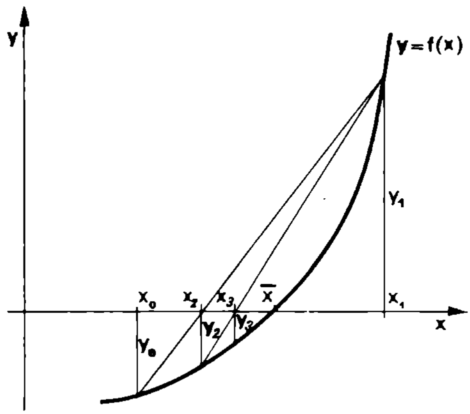

Bild 19. Mit Hilfe von Sekanten wird der gesuchte Schnittpunkt $\bar{x}$ „eingegabelt"

Formelmäßig ergibt sich die Näherung

$$\bar{x} \approx x_2 = x_1 - y_1 \cdot \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

Nun berechnen wir den zugehörigen Funktionswert $f(x_2) = y_2$. Er hat das entgegengesetzte Vorzeichen von y_1 oder von y_0. Gemäß unserem zeichnerischen Beispiel trifft der erstere Fall zu.

Durch die Punkte P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) wird nun wieder eine Sekante gezogen, deren Schnittpunkt mit der x-Achse die bessere Lösung x_3 ergibt usw.

$$\bar{x} \approx x_3 = x_2 - y_2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

Dazu ein Beispiel.
Es sei die Gleichung

$$f(x) = x^2 - \ln x - 2 = 0 \text{ zu lösen.}$$

Durch Probieren finden wir

$$f(x = 1) = -1 < 0$$

$$f(x = 2) = 1{,}307 > 0$$

Die gesuchte Lösung liegt also zwischen $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$, wobei $y_0 = -1$ und $y_1 = +1{,}307$ sind.

Dann ist $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 2 - 1{,}307 \cdot \dfrac{1}{2{,}307} = 1{,}433$

und $y_2 = (1{,}433)^2 - \ln 1{,}433 - 2 = -0{,}305$.
Da für $x_i < \bar{x}$ nun immer negative Funktionswerte y_i auftreten, bleibt der Endpunkt der Sekante P_1 (x_1, y_1) erhalten, während die anderen Koordinaten sich von Schritt zu Schritt ändern.

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = 2 - 1{,}307 \cdot \frac{2 - 1{,}433}{1{,}307 + 0{,}305}$$
$$= 1{,}541$$
$$y_3 = -0{,}058$$

Entsprechend ergeben sich noch

$$x_4 = 1{,}560 \text{ mit } y_4 = -0{,}010$$

und $$x_5 = 1{,}564 \text{ mit } y_5 = -0{,}002$$

Dieser Wert ist schon auf 3 Nachkommastellen genau und soll uns hier genügen.

Schiffsrouten und Luftstraßen

Schiffe auf großer Fahrt und Flugzeuge im Fernostverkehr bewegen sich möglichst auf dem kürzesten Weg zwischen Abgangsort und Zielort.
Auf der Erdkugel ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten immer der Großkreis. Erinnern wir uns: Ein Großkreis ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt (Erdmittelpunkt) zusammenfällt.

Der Äquator ist ein Großkreis, die Längengrade (die durch die Pole gehen) sind Großkreise. Aber die Breitengrade sind keine Großkreise.
Die übrigen Großkreise, die zwei Punkte verbinden, liegen auf der nördlichen Halbkugel so, daß ihr Bogen nordwärts geht. Wer also von Moskau nach New York fliegen will, nähert sich dabei dem Nordpol. Daher auch das Interesse der Fluggesellschaften an der „Polarroute".

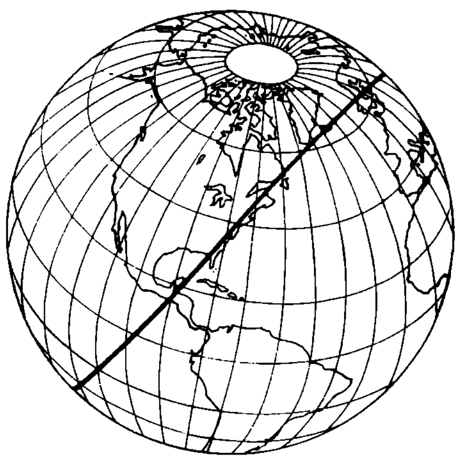

Bild 20. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche liegt auf einem Großkreis

Wie weit ist es von Berlin (Breite $B = 52°\,25'$N; Länge $L = 13°\,30'$E) nach Havanna (Breite $B = 23°\,15'$ N; Länge $L = 82°\,30'$ W) auf dem Großkreis?
Wir haben die geographische Lage der Flugplätze von Berlin und Havanna nur ungefähr angegeben, damit die Rechnungen übersichtlicher werden. Das E hinter der Länge von Berlin-Schönefeld bedeutet Ost (East). Ein O könnte mit einer Null verwechselt werden.
Berlin als Startort erhält hinter B und L den Index s. Der Zielort Havanna hat entsprechend den geographischen Koordinaten B_z und L_z.
Die Gleichung für den Großkreisabschnitt zwischen zwei

Punkten lautet

$$E = 60 \frac{\text{sm}}{1^\circ} \cdot \cos^{-1} [\sin B_s \cdot \sin B_z$$
$$+ \cos B_s \cdot \cos B_z \cdot \cos (L_z - L_s)],$$

wenn $\cos^{-1}$ im Gradmaß angegeben wird.
Vor der Einführung von Taschenrechnern war eine solche Gleichung der Schrecken der Navigatoren. In sechs Fällen mußte in Tafeln nachgeschlagen und interpoliert werden. Natürlich war das – neben der eigentlichen langweiligen Rechnerei – eine große Fehlerquelle.
Bevor wir mit unserem Computer die Arbeit eines hochqualifizierten Schiffsoffiziers oder Flugzeugführers übernehmen, noch einige Hinweise:

1. Ostlängen und Südbreiten müssen negativ eingegeben werden (Berlin liegt östlich vom Nullmeridian von Greenwich).

2. Nur wenige Rechner können mit Minuten und Sekunden rechnen. Sie müssen die Minuten in Dezimalen umrechnen (daher geben wir gerundete Werte an).

3. $\boxed{\cos^{-1}}$ ist auf vielen Rechnern als $\boxed{\text{arc}}$ auf der Tastatur. Zusätzlich muß dann noch die $\boxed{\cos}$-Taste benutzt werden.

4. Die Entfernung E wird in Seemeilen (1,852 km) errechnet.

Nun geht es los. Zuerst bestimmen wir die Dezimalen und Vorzeichen:

$$B_s = 52^\circ\, 25'\, \text{N} = 52{,}42^\circ$$

$$L_s = 13^\circ\, 30'\, \text{E} = 13{,}50^\circ$$

$$B_z = 23^\circ\, 15'\, \text{N} = 23{,}25^\circ$$

$$L_z = 82^\circ\, 30'\, \text{W} = 82{,}50^\circ$$

Wer das entsprechende Gerät besitzt, gibt die Minuten (und Sekunden) in der Form 0, MMSS ein und drückt dann die $\boxed{\text{HMS}}$-Taste.
Alle anderen rechnen $\frac{100}{60} \cdot 0{,}\mathrm{MM}$.

Mit diesem Wert gehen wir in die Großkreisgleichung.

$$E = 60\ \mathrm{sm} \cdot \cos^{-1} \{\sin 52{,}42° \cdot \sin 23{,}25° + \cos 52{,}42° \cdot \cos 23{,}25° \cdot \cos [82{,}50° - (-13{,}5°)]\}$$

Ein großer Vorteil gegenüber Tabellen ist, daß der Rechner Winkelfunktionen von Winkeln über 90 ° vorzeichenrichtig berechnet.

$$E = 60 \cdot \cos^{-1} (0{,}25426)\ \mathrm{sm}/1°$$

$$E = 60 \cdot 75{,}27\ \mathrm{sm}, \quad (\cos^{-1} 0{,}25426 \text{ in Grad!})$$

$$E = 4516\ \mathrm{sm}$$

Wer will, kann die Meilen in das vertrautere Maß Kilometer umrechnen:

$$E = 4516 \cdot 1{,}852\ \mathrm{km} = 8364\ \mathrm{km}$$

In Wirklichkeit ist der Weg größer, weil ein Flugzeug oder Schiff nicht ununterbrochen auf dem Großkreis steuern kann, denn es ändert sich ja dauernd der Kurswinkel (s. Bild 20). Noch größer ist die Entfernung für Flugzeuge, weil sie auf bestimmten Luftstraßen fliegen und dabei Kontrollpunkte ansteuern müssen.
Wenn Sie Lust und Zeit haben, so versuchen Sie einmal diese einfache nautische Aufgabe mit der Logarithmentafel zu lösen.

Besitzer von Taschenrechnern sind grundsätzlich sparsame Leute, die ihr gespartes Geld regelmäßig auf eine Bank überweisen lassen. Am Jahresende freuen sie sich über die Zinseneintragung im Sparbuch und rechnen nach, ob die Eintragung auch stimmt.

Die meisten Rechner haben eine $\boxed{\%}$-Taste. Einfacher ist es, Prozentsätze grundsätzlich als Hundertstel einzugeben, also 5 % = 0,05.

An Zinsen erhalten wir von der Sparkasse bei dem zur Zeit der Drucklegung dieses Buches gültigen Zinssatz $p = 3^1/_4\,\%$ $= 0{,}0325$

$$\text{Zinsen } Z = \text{Kapital } K \cdot \text{Zinssatz } p \cdot \text{Anzahl der Jahre}$$

Wenn wir also 1000 M ein Jahr auf der Bank liegen haben, bekommen wir als Zinsen

$$Z = K \cdot p \cdot 1 = 1000\text{ M} \cdot 0{,}0325 \cdot 1 = 32{,}50\text{ Mark}$$

Sollten wir das Kapital erst am 1. August einzahlen, so erhalten wir nur für 5 Monate Zinsen $\left(n = \frac{5}{12}\right)$:

$$Z = 1000\text{ M} \cdot 0{,}0325 \cdot \frac{5}{12} = 13{,}54\text{ Mark}$$

Wer ganz genau ist, kann für n auch Tage einsetzen. Die Sparkassen legen das Jahr mit 360 Tagen fest. Für die letzten 14 Tage des Jahres erhalten wir

$$Z = 1000\text{ M} \cdot 0{,}0325 \cdot \frac{14}{360} = 1{,}26\text{ Mark}$$

Fürsorgliche Eltern bringen bei der Geburt eines Kindes einen bestimmten Betrag zur Sparkasse und lassen ein Spar-

buch auf den Namen ihres Kindes ausstellen. Zum 18. Geburtstag ist dann das Ausgangskapital K_0 um einen sehr schönen Betrag angewachsen.
Die Zinsen eines jeden Jahres werden zum Kapital hinzugeschlagen und in den nächstfolgenden Jahren mit verzinst. Wir besitzen dann als Kapital K nach n Jahren bei dem Zinssatz p

$$K = K_0 (1 + p)^n$$

Zahlten die Eltern 1000 Mark ein, so stehen nach 18 Jahren bei 3,25 % auf dem Sparbuch

$$K = 1000\,(1{,}0325)^{18} \text{ Mark}$$

Wer auf seinem Rechner eine $\boxed{y^x}$-Taste hat, erhält

$$K = 1778{,}37 \text{ Mark}$$

Bei Rechnern mit Konstantenautomatik (der 2. Faktor sei Konstante) wird wie folgt getippt:

$$\boxed{1000}\ \boxed{\times}\ \boxed{1{,}0325}\ \underbrace{\boxed{=}\ \cdots\ \boxed{=}}_{18 \text{ mal}}$$

Alle anderen müssen etwas umständlicher arbeiten.
Als erste Näherung kann man festellen, wieviel Zinsen die Sparkasse gezahlt hätte, wenn keine Zinseszinsen berechnet worden wären:

$$Z = K \cdot p \cdot n = 1000 \text{ M} \cdot 0{,}0325 \cdot 18 = 585{,}00 \text{ Mark}$$

Wir sehen, die Differenz von 200 Mark gegenüber dem Zinseszins ist etwas groß. Diese Näherung ist nur brauchbar, wenn n klein ist, z.B. 5 Jahre.
Damit haben wir schon den Hinweis auf eine andere Näherungslösung. Wir berechnen die Zinsen für 6 Jahre (weil 18 sich durch 6 teilen läßt). Das so errechnete Kapital verzinsen wir dann nochmal 6 Jahre lang und schließlich wieder-

holen wir den Vorgang noch einmal

$$
\begin{aligned}
Z = 1000 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 195 \\
&\underline{+1000} \\
&= 1195 \\
1195 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 233{,}03 \\
&\underline{+1195{,}00} \\
&= 1428{,}03 \\
1428 \cdot 0{,}0325 \cdot 6 &= 278{,}46 \\
&\underline{+1428{,}03} \\
Z &= 1706{,}49 \text{ Mark}
\end{aligned}
$$

Nun beträgt der Unterschied zur richtigen Summe nur noch etwa 72,— Mark. Wer sein Bankkonto noch genauer wissen möchte, muß n kleiner machen, notfalls bis auf 1.

> Exponentialgleichungen lassen sich durch Logarithmieren in Geradengleichungen umwandeln.

Da viele Taschenrechner eine $\boxed{\text{lg}}$-Taste haben, logarithmieren wir die Zinseszinsgleichung:

$$\lg K = \lg K_0 + n \cdot \lg (1 + p)$$

$$\lg K = \lg 1000 + 18 \cdot \lg 1{,}0325$$

$$\lg K = 3 + 18 \cdot 0{,}013890$$

$$\lg K = 3{,}250021$$

$$K = 1778{,}37 \text{ (Mark)}$$

Vielleicht möchten Sie noch wissen, wieviel Jahre Ihr Geld auf der Bank liegen muß, bis sich der Betrag verdoppelt. Wir lassen also das Anfangskapital und setzen für das Endkapital $K = 2\,K_0$ und den Zinssatz $p = 3\,^1/_4\,\%$.
Dann erhalten wir die Gleichung

$$\lg 2\,K_0 = \lg K_0 + n \cdot \lg (1 + p)$$

und daraus

$$n = \frac{\lg 2\,K_0 - \lg K_0}{\lg(1+p)} = \frac{\lg 2}{\lg(1+p)}$$

$$\left(\approx \frac{0{,}3010}{0{,}4343\,p} \text{ für } p < 7\,\%\right)$$

Mit unserem angenommenen Anfangskapital von 1000 Mark erhalten wir

$$n = \frac{\lg 2000 - \lg 1000}{\lg(1 + 0{,}0325)} \text{ Jahre}$$

$$= 21{,}67 \text{ Jahre} = 21 \text{ Jahre } 8 \text{ Monate}$$

Wie lange müßten wir auf die Verdopplung des Kapitals warten bei einem höheren Zinssatz, z.B. 6,5 %?

$$n = \frac{\lg 2000 - \lg 1000}{\lg 1{,}065} \text{ Jahre} = 11{,}01 \text{ Jahre}$$

Abzahlung von Schulden

Schulden werden gemacht, bzw. Kredit wird aufgenommen, um für das geliehene Geld die entsprechenden Sachwerte zu kaufen. Es ist Auffassungssache, was der einzelne unter „entsprechend“ versteht. Allgemein zählt man Häuser dazu, weil die Abzahlung der Schuld für den Hauskauf die Miete spart. Auch Waschmaschinen und andere nützliche Gegenstände können auf Kredit gekauft werden.
Am besten ist es, mit dem Taschenrechner auszuprobieren, ob die Schulden mit dem Einkommen in einem bestimmten Verhältnis stehen.
Schulden (auch wenn sie Kredit oder Abzahlung genannt werden) setzen sich immer zusammen aus der Schuldsumme

und den Zinsen dieser Summe. Schuldenmachen kostet also Zinsen, und außerdem verliert man noch die Zinsen, die die Bank gezahlt hätte, wenn man erst gespart und dann gekauft hätte. Dafür kann und darf man den gekauften Gegenstand aber auch eher benutzen.
Angenommen Sie bauen ein Haus. Dafür nehmen Sie einen Kredit von 30000 Mark, rückzahlbar in einer bestimmten Zeit zu einem Zinssatz von 3 %. Meistens wird mit der Kreditgewährung gleich ein Tilgungsplan vorgesehen.
Danach haben Sie jährlich einen festen Betrag, die Annuität, zu zahlen, der Tilgung und Zinsen einschließt.
Nehmen wir an, Sie zahlen eine Annuität von 1000 Mark im Jahr. Dann sieht die Rechnung in den ersten drei Jahren wie folgt aus:

Jahr	Schuld in Mark	Annuität in Mark	Zinsen in Mark	Tilgung in Mark	Restschuld in Mark
1.	30000	1000	900,00	100,00	29900,00
2.	29900	1000	897,00	103,00	29797,00
3.	29797	1000	893,91	106,09	29690,91

Hier sieht man das Problem der meisten Schulden. Die Zinsen fressen in den ersten Jahren die Annuität, so daß für die eigentliche Tilgung nur eine geringe Summe übrigbleibt.
3 % Zinsen sind nur dann wenig, wenn man sie nicht zu zahlen braucht.
Die Tilgungsformel wird dadurch unüberschaubar, weil die Zahl n der Jahre, während deren man zahlen muß, im Exponenten steht:

$$S_n = T_1 \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}$$

S_n ist die abbezahlte Summe nach n Jahren, p ist der Zinssatz und T_1 ist der Tilgungsbetrag des ersten Jahres.
Prüfen wir die Gleichung für das dritte Jahr nach der oben

angeführten Tabelle, so ergibt sich

$$S_3 = 100\,\frac{1{,}03^3 - 1}{1{,}03 - 1}\ \text{Mark} = 309{,}09\ \text{Mark}$$

Die Gesamtschuld S ist abgezahlt, wenn $S_n = S$ ist

$$S_n = S = T_1 \cdot \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1}$$

Uns interessiert ja die Zeit n, die nötig ist, um unsere Schuld abzuzahlen. Wir müssen daher die Gleichung logarithmieren, um n „auf die eine Seite der Gleichung" zu bekommen und alle anderen, bekannten Werte „auf die andere Seite der Gleichung".

Wenn wir einen Exponenten als Unbekannte suchen und die übrigen Werte bekannt sind, logarithmieren wir die Gleichung.

$$y = x^n$$
$$\lg y = n \cdot \lg x$$
$$n = \frac{\lg y}{\lg x}$$

Daraus folgt für

$$S = T_1 \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p) - 1} \;\Big|\; : T_1$$

$$\frac{S}{T_1} = \frac{(1+p)^n - 1}{1 + p - 1} \;\Big|\; \cdot p$$

$$\frac{S \cdot p}{T_1} = (1+p)^n - 1 \;\Big|\; +1$$

$$\frac{S \cdot p}{T_1} + 1 = (1+p)^n$$

$$\lg\left[\frac{S \cdot p}{T_1} + 1\right] = n \cdot \lg(1+p) \;\Big|\; : \lg(1+p)$$

$$\frac{\lg\left[\frac{S \cdot p}{T_1} + 1\right]}{\lg(1+p)} = n$$

Diese Umformung ist so schön, daß wir es nicht übers Herz brachten zu schreiben: Wie man leicht sieht, erhält man durch Logarithmieren usw.
Nun prüfen wir, wieviel Jahre benötigt werden, um unsere 30000 Mark mit jährlich 1000 Mark abzuzahlen:

$$n = \frac{\lg\left[\frac{S \cdot p}{T_1} + 1\right]}{\lg(1+p)} = \frac{\lg\left[\frac{30000 \cdot 0{,}03}{100} + 1\right]}{\lg 1{,}03}$$

$$n = 77{,}9 \text{ Jahre} \approx 78 \text{ Jahre}$$

Interessant ist, daß die erste Tilgungsrate T_1 eine so entscheidende Rolle für die Größe der abgetragenen Schuld S_n spielt. Indirekt steckt da natürlich auch die Zinshöhe mit in diesem Betrag, denn die Zinsen werden ja von der Annuität abgezogen.
Also vor dem Kauf eines Hauses oder einer Waschmaschine auf Kredit erst den Taschenrechner benutzen.
Wieviel Geld hat nun der Hausbesitzer im Verlauf der 77,9 Jahre wirklich bezahlt? Das sind einfach

$$\begin{array}{ll} \text{Annuität} \cdot \text{Jahre} & = \text{Gesamtsumme} \\ \text{in Mark/Jahr} & \text{ in Mark} \\ 1000 \cdot 77{,}9 & = 77\,900 \end{array}$$

Ein erstaunlicher Betrag.
Je geringer der jährlich (oder monatlich) zurückzahlbare Betrag, desto höher wird die rückzahlbare Gesamtsumme.
Untersuchen wir einmal die „Gegenstrategie". Sie zahlen jährlich 1000 Mark auf ein Konto, bis Sie 30000 Mark zusammen haben. Der Betrag soll mit 3 % verzinst werden.
Am einfachsten übersehen wir die Sache mit einer kleinen Tabelle.

Jahr	zu verzinsende Summe in Mark	Zinsen in Mark	neuer Betrag in Mark
1	1000	30,00	1030
2	2030	60,90	2090,90
3	3090,90	92,73	3183,63
4	4183,63	125,51	4309,14

Es ist eine interessante Aufgabe, die einzelnen Rechnungen mit möglichst wenig Aufwand durchzuführen.

Zum Beispiel so:
„$1000 \cdot 0{,}03 =$ (Zinsen) $+ 1000 =$ (neuer Betrag) $+ 1000 =$ (zu verzinsende Summe im 2. Jahr) $\cdot 0{,}03$ usw.“

Mit der $\boxed{\text{M}}$-Taste geht es natürlich mit noch weniger Eingaben.

5	5309,14	159,27	5468,41
6	6468,41	194,05	6662,46
7	7662,46	229,87	7892,33
8	8892,33	266,77	9159,10

Nach acht Jahren haben wir bereits eine Jahresrate von 1000 Mark zusätzlich.

9	10159,10	304,77	10463,87
10	11463,87	343,92	11807,79
11	12807,79	384,23	13192,02

Wieder 1000 Mark durch Zinsen zusätzlich.

12	14192,02	425,76	14617,78
13	15617,78	468,53	16086,31
14	17086,31	512,59	17598,90
15	18598,90	557,97	19156,87
16	20156,87	604,71	20761,58
17	21761,58	652,85	22414,43
18	23414,43	702,43	24116,86
19	25116,86	753,51	25870,37
20	26870,37	806,11	27676,48
21	28676,48	860,29	29536,77
22	30536,77		

Nach etwas über 21 Jahren sind die 30000 Mark gespart. Dafür mußten nur 21000 Mark unmittelbar eingezahlt werden. Andererseits sind 21 Jahre eine lange Zeit, wenn man ein Haus kaufen möchte.

Die Beispiele sollen zeigen, daß es lohnt, über die günstigste Zahlungsstrategie nachzudenken. Dabei sind die Zinssätze und die Einzahlungshöhen genau zu beachten.

Wer einen Rechner mit umgekehrter polnischer Notation besitzt, berechnet diese Tabelle besonders einfach.

In verkürzter Form können wir den Wert kontrollieren, wenn wir die Zahlungsart als eine Rente betrachten. Dann gilt die Formel für eine „nachschüssige Zeitrente“.

$$S_{22} = 1000 \frac{1{,}03^{22} - 1}{1{,}03 - 1} = 30\,536{,}80 \text{ Mark}$$

Wir sehen, es ist der gleiche Ansatz wie die Tilgungsformel.

Rechnungen, die sich „besonders“ verhalten

Mathematiker und Unterhaltungskünstler haben eine riesige Menge von Ziffern, Zahlen und Rechnungen zusammengetragen, die sich irgendwie „besonders“ verhalten. Am meisten muß man staunen, daß diese Leute neben Scharfsinn und Geduld noch den Arbeitseifer aufbrachten, all die Rechnungen durchzuführen. Die folgenden Beispiele sollen die Benutzer von Taschenrechnern ermuntern, ihren Scharfsinn sprühen zu lassen, doch die Rechenarbeit ihrer Elektronik zu überlassen.
Es gibt eine Anzahl von Rechnungen, in denen jede Ziffer (ohne 0) genau einmal vorkommt:

$$\begin{aligned} 1738 \cdot 4 &= 6952 \\ 186 \cdot 39 &= 7254 \\ 198 \cdot 27 &= 5346 \\ 483 \cdot 12 &= 5796 \end{aligned}$$

Die Zahl solcher Gleichungen läßt sich durch Probieren und Überlegungen vermehren.
In den mathematischen Rechenaufgaben populärwissenschaftlicher Zeitschriften erscheint im Januar regelmäßig die Aufgabe, eine Gleichung aufzustellen, bei der auf der einen Seite die Jahreszahl, auf der anderen die gleiche Ziffernfolge steht.

$$\sqrt{1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7} = 1 + \sqrt{9}! + 7 + 7$$

$$-19 + 77 = (1 \cdot 9) + (7 \cdot 7)$$

$$1977 = (19 - 77) \cdot (19 - 77) - (197 \cdot 7) + \\ + (1 - 9 + 7 - 7)$$

$$1 : (9 \cdot 7 + 7) = 1! \cdot 9! : (7! \cdot 7!)$$

So wurde einmal vorgeschlagen

$$\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36$$

Der Taschenrechner gestattet nicht nur, schnell alle nur denkbaren Möglichkeiten durchzurechnen, er ermöglicht auch „unfaire“ Lösungen wie

$$1977 = 1 + 9^{3,25974758} + 7^3 + 7^3$$

Die 7^3 sind hierbei Schwindel. Es kann dort jede beliebige Potenz oder Wurzel stehen. Wichtig ist nur, alle willkürlich ausgesuchten Zahlenwerte von 1977 abzuziehen. Der Rest ist dann eine Potenz von 9. Schreibt man nämlich $1977 = 1 + 9^a + b$ mit willkürlichem b, so gilt

$$a = \frac{\lg(1976 - b)}{\lg 9}$$

Wir erinnern uns, unbekannte Exponenten finden wir durch Logarithmieren der Gleichung.

„Echter“ sieht schon diese Lösung aus

$$1977 = -1 + 9^{2,954286} + 7^{3,335832} + 7^{3.335832}$$

Doch auch hier wurde nur Rechenarbeit geleistet, jedoch kein Geist benutzt. 1977 + 1 wurde in drei gleiche Teile geteilt und dazu die Exponenten von 9 und 7 gebildet. Diese Methode ist ein gutes Beispiel, wie sich einfache Zahlen höchst eindrucksvoll „wissenschaftlich“ darstellen lassen. Ernster zu nehmen sind Gleichungen der folgenden Art:

$$95 : 5 = 9 + 5 + 5$$

$$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2$$

$$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$$

$$5^{6-2} = 625$$

$$2^{10} - 2 = 1022$$

$$\sqrt{121} = 12 - 1$$

$$\sqrt[3]{1331} = 1 + 3 + 3 + 1 + 3$$

Der sowjetische Mathematiker *Kordemski* trug viele solcher Aufgaben zusammen.
Es gibt Zahlen, bei denen sich die Summe und das Produkt durch die Reihenfolge der Ziffern unterscheiden:

$9 + 9 = 18$	$81 = 9 \cdot 9$
$47 + 2 = 49$	$94 = 47 \cdot 2$
$497 + 2 = 499$	$994 = 497 \cdot 2$

Auch hier lassen sich ähnliche Paare finden.
Suchen kann man auch nach den folgenden Zusammenstellungen:

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$$

$$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48.$$

Probieren Sie es mit dem Multiplikator wie 12; 13; 23; 24; 26.
Der russische Maler *Bogdanov-Belski* malte das Gemälde „Eine schwierige Aufgabe“. Auf dem Bild sind einige Schüler damit beschäftigt, eine Aufgabe zu lösen, die der Lehrer

an die Wandtafel geschrieben hat:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$

Für unsere Taschenrechner ist das natürlich eine Kleinigkeit. Nach dem Aufgabenteil

$$10^2 + 11^2 + 12^2$$

machen Sie bitte eine kurze Denkpause. Vielleicht können Sie dann schon die Lösung sagen?
Jedenfalls bemerken Sie beim Rechnen, daß

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

ist.
Die Mathematiker haben allgemein solche Zahlenfolgen gefunden:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$
$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

usw.

Sie können nun schnell ausrechnen, wie die mit 36^2 beginnende Gleichung lautet. Übrigens unterscheiden sich die Basen der ersten Quadrate in jeweilig aufeinanderfolgenden Gleichungen der Reihe nach um 7, 11, 15, 19, 23, ... (die Differenz aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge ist stets 4).
Gut für den Taschenrechner geeignet ist die Aufgabe, symmetrische Summen zu suchen. Man versteht darunter:

Nimm eine mehrstellige Zahl, z.B.	87
addiere ihre Umkehrung	+ 78
	165
addiere ihre Umkehrung	+ 561
	726
addiere ihre Umkehrung	+ 627
	1353
addiere ihre Umkehrung	+ 3531
	4884

Jetzt ist eine symmetrische Zahl entstanden. Nur wenige Ausgangszahlen ergeben innerhalb der Rechnerkapazität keine symmetrische Summe.
Die kleinen Beispiele dieses Abschnitts zeigen, daß der Taschenrechner uns zwar die mechanische Arbeit abnimmt, aber die guten Ideen muß jeder selbst haben.

Fehler pflanzen sich fort

Bei den meisten Berechnungen in der technischen Praxis begnügt man sich mit einem maximalen Fehler von 1 Promille bis 5 Prozent. So reicht es aus, den Faktor 10 statt des genaueren Faktors 9,81 zu verwenden, um beim Übergang von den alten Einheiten zum Internationalen Einheitensystem (SI) Kilopond in Newton umzuwandeln. Das ergibt einen Fehler von $\frac{10 - 9{,}81}{9{,}81} \approx 2\,\%$.
Bei einigen wissenschaftlichen Problemen der heutigen Technik, z.B. auf den Gebieten Raumfahrt und der experimentellen Atomphysik, reicht diese Genauigkeit allerdings nicht aus.
Beim Start des ersten künstlichen Mondsatelliten von einer Zwischenumlaufbahn mußte die benötigte sogenannte zweite kosmische Geschwindigkeitsstufe von etwa 11200 m/s mit einer Genauigkeit von einigen Zentimetern je Sekunde gewährleistet sein, sonst wäre der Mondsatellit zu einem Sonnensatelliten geworden. Das entspricht einem zulässigen Fehler von 2/1000 Promille $\left(\frac{2\text{ cm/s}}{11{,}2 \cdot 10^5\text{ cm/s}} \approx 2 \cdot 10^{-6}\right)$.
Noch höhere Genauigkeiten waren beim Bau eines riesigen Teilchenbeschleunigers, dessen Ringmagnet einen Durchmesser von 1,5 km hatte, einzuhalten.
Solche Genauigkeitsansprüche haben meist meßtechnische Konsequenzen. Unsere Taschenrechner haben zwar eine beeindruckende Rechengenauigkeit (von der noch beein-

druckenderen Rechengeschwindigkeit sehen wir hier einmal ganz ab), aber oft haben wir eine Formel auszurechnen, deren Eingangsgrößen Meßwerte sind. Diese sind von Natur her mit Fehlern behaftet. Im allgemeinen kann man die Schranken solcher Meßfehler abschätzen. Mit einer Meßuhr, die ein tausendstel Millimeter anzeigt, kann man nicht ein Zehntausendstel genau ausmessen.

Die Meßfehler sind im wesentlichen durch das Meßgerät und das zu messende Objekt selbst bestimmt. So wäre für die erwähnte Meßuhr die Angabe einer absoluten Fehlerschranke von $\Delta x \approx 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm sicher sinnvoll. Bezogen auf den Meßwert x, ergibt sich dann der relative Fehler $\frac{\Delta x}{x}$, der meist in Prozent angegeben wird.

Bei elektrischen Meßgeräten ist der letztere auf der Skala mit angegeben. Er bezieht sich auf den Vollausschlag im entsprechenden Meßbereich.

Im Zweifelsfall kann man auch die Messung mehrmals wiederholen und die halbe Differenz der beiden extremen Werte als Fehlerschranke verwenden, d.h. $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$.

Als Meßwert x nimmt man dann das arithmetische Mittel der Versuchsmessungen.

Nachdem wir nun den Begriff „Fehlerschranke“ definiert haben (wir wollen im folgenden kurz „Fehler“ dazu sagen), können wir auch die praktisch-mathematische Fragestellung formulieren, die uns hier am Herzen liegt: Wie wirken sich unvermeidbare Fehler in den Eingangsgrößen auf das formelmäßig zu berechnende Ergebnis aus?

Nehmen wir ein einfaches Beispiel: Sie möchten ein abgeschnittenes Stück von einem Baumstamm erwerben und interessieren sich für dessen Masse. Zur Ermittlung dieser Größe stehen Ihnen ein Zollstock und Ihr Taschenrechner zur Verfügung, außerdem die Formel $M = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l \cdot \varrho$.

Sie messen die Länge aus ($l = 1{,}85$ m) und schätzen den Fehler zu ± 1 cm (die Endflächen sind nicht genau senkrecht zur Achse).

Dann versuchen Sie den Durchmesser zu ermitteln und erhalten $d = 0{,}46$ m. Wegen der Unebenheiten und des schiefen Ablesewinkels schätzen Sie wieder einen Meßfehler von ± 1 cm.

Schließlich brauchen Sie noch die Dichte ϱ des Holzes. Sie wissen, daß Holz im Wasser schwimmt und daher $\varrho \leqq 1\ \mathrm{g/cm^3}$ sein muß. Sie schätzen

$$\varrho = (0{,}9 \pm 0{,}1)\ \mathrm{kg/dm^3}.$$

Für π verwenden Sie den Wert 3,14 und machen dabei einen vernachlässigbar kleinen Fehler ($\approx 0{,}5\,‰$).
Nun tippen Sie Ihre Werte ein.

$$M = \frac{3{,}14}{4} \cdot 18{,}5 \cdot 4{,}6^2 \cdot 0{,}9\ \mathrm{kg}$$

Bei der Berechnung physikalischer Größen mit dem Taschenrechner verwenden Sie immer gleiche Einheiten für gleiche Größen.

Ihr Taschenrechner zeigt einen Wert von

276,56649 an.

Das täuscht eine Genauigkeit von hundertstel Gramm vor. Wenn Sie nicht das Gefühl haben wollen, mit Kanonen nach Spatzen geschossen zu haben, dann möchten Sie natürlich nun wissen, bis zu welcher Ziffer etwa das Ergebnis noch gültig bzw. sinnvoll ist.
Die Mathematiker beantworten Ihnen diese Frage mit der folgenden Regel (1):

Werden fehlerbehaftete Größen miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert, dann addieren sich in jedem Falle ihre relativen Fehler zu einem relativen Fehler des Ergebnisses.

Für unser Beispiel bedeutet das

$$l = 18{,}5\ \mathrm{dm} \pm 0{,}1\ \mathrm{dm}\ (\triangleq 0{,}5\,\%)$$

$$\varrho = 0{,}9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}} \pm 0{,}1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}}\ (\triangleq 11{,}1\,\%)$$

$$d = 4{,}6\ \mathrm{dm} \pm 0{,}1\ \mathrm{dm}\ (\triangleq 2{,}2\,\%)$$

Wegen $d^2 = d \cdot d$ ist der relative Fehler von d^2 nach obenstehender Regel gleich 2mal dem relativen Fehler von d.
Es ergibt sich dann nach der obigen Regel für den relativen Fehler der Massebestimmung:

$$\frac{\Delta M}{M} = 0{,}5\,\% + 11{,}1\,\% + 2 \cdot 2{,}2\,\% = 16\,\%$$

Das bedeutet aber, daß der absolute Fehler

$$\Delta M = 0{,}16 \cdot M \approx 0{,}16 \cdot 277 \text{ kg} \approx 44 \text{ kg}$$

beträgt.
Alle Nachkommastellen unseres Ergebnisses sind also sinnlos, d.h.

$$M = (277 \pm 44) \text{ kg}$$

Wenn Sie diesen Baumstamm mit Ihrem Auto nach Hause bringen wollen, müssen Sie also mit einer maximalen Last von 320 kg rechnen.
In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Fälle für die Fehlerfortpflanzung zusammengestellt.
Dabei kann der Exponent n beliebige Werte annehmen. Wenn er also einen echten Bruch darstellt (Wurzelziehen!), wird der Fehler kleiner.

Rechenoperation	$f(x_1,x_2)$	absoluter Fehler Δf	relativer Fehler $\frac{\Delta f}{f}$
Addition	$x_1 + x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\lvert x_1 + x_2 \rvert}$
Subtraktion	$x_1 - x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\lvert x_1 - x_2 \rvert}$
Multiplikation	$x_1 \cdot x_2$	$\Delta x_1 \cdot \lvert x_2 \rvert + \Delta x_2 \cdot \lvert x_1 \rvert$	$\frac{\Delta x_1}{\lvert x_1 \rvert} + \frac{\Delta x_2}{\lvert x_2 \rvert}$
Division	$x_1 : x_2$	$\frac{\Delta x_1 \cdot \lvert x_2 \rvert + \Delta x_2 \cdot \lvert x_1 \rvert}{x_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{\lvert x_1 \rvert} + \frac{\Delta x_2}{\lvert x_2 \rvert}$
Potenzieren	x^n	$\Delta x \cdot \lvert n \rvert \cdot \lvert x^{n-1} \rvert$	$\lvert n \rvert \cdot \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$

Bei der Betrachtung dieser Tabelle läßt sich noch eine weitere Regel (2) erkennen:

> Werden fehlerbehaftete Größen addiert oder voneinander subtrahiert, dann addieren sich in jedem Falle ihre absoluten Fehler zu einem absoluten Fehler des Ergebnisses.
>
> Bei einer gemischten Rechnung müssen die beiden Regeln kombiniert werden.

Zum Beispiel wollen Sie die Oberfläche A_0 einer zylindrischen Dose berechnen. Sie setzt sich aus den beiden Deckelflächen (A_1) und der Mantelfläche (A_2) zusammen, d.h.

$$A_0 = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} + \pi \cdot D \cdot H = A_1 + A_2$$

Als Durchmesser D haben Sie gemessen: $D = 5$ cm $\pm$ 2 mm ($\triangleq 4\,\%$). Die Höhe ergab sich zu $H = 10$ cm $\pm$ 1 mm ($\triangleq 1\,\%$).

Dann ist nach Regel (1) der relative Fehler des ersten Summanden

$$\frac{\Delta A_1}{A_1} = 2 \cdot \frac{\Delta D}{D} = 8\,\%$$

Für den zweiten ergibt sich

$$\frac{\Delta A_2}{A_2} = \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H} = 4\,\% + 1\,\% = 5\,\%$$

Daraus leiten sich die folgenden absoluten Fehler ab:

$$\Delta A_1 = A_1 \cdot 8\,\% =$$

$$= \frac{\pi D^2}{2} \cdot 0{,}08 = \frac{\pi \cdot 25}{2} \cdot 0{,}08\,\text{cm}^2 \approx 3\,\text{cm}^2$$

$$\Delta A_2 = A_2 \cdot 5\,\% = \pi \cdot D \cdot H \cdot 0{,}05$$

$$= \pi \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0{,}05\,\text{cm}^2 \approx 8\,\text{cm}^2$$

Nach Regel (2) ist der absolute Fehler der gesamten Oberfläche

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 + \Delta A_2 = 11\ \text{cm}^2,$$

woraus sich wiederum der gesamte relative Fehler zu

$$\frac{\Delta A_0}{A_0} = \frac{\Delta A_1 + \Delta A_2}{A_1 + A_2} = \frac{11}{39 + 157} = 5{,}6\ \%$$

ableitet.

Zufallszahlen

Sie kennen sicher Wartezeiten an Tankstellen, Postschaltern oder Kassen im Warenhaus. Nehmen wir an, Sie wollen tanken oder Briefmarken kaufen oder benötigen ein Paket Waschpulver. Bevor Sie den Kauf tätigen, überlegen Sie sich, wieviel Leute vor Ihnen ähnliche Absichten haben; denn Sie möchten nicht warten, sondern gleich bedient werden. Befriedigt bemerken Sie, es ist kaum Betrieb. Daher lassen Sie sich viel Zeit. Sie laufen einmal um Ihr Auto herum und freuen sich, daß Sie eins haben. Sie stehen in der Post einen Augenblick am Zeitungsstand und kaufen eine Illustrierte. Sie kaufen nicht nur Waschpulver, sondern auch noch Senf, Brot und Wurst.
In den wenigen Minuten hat sich aber an der Tankstelle, vor dem Briefmarkenschalter oder vor der Kasse eine lange Schlange gebildet. Ärgerlich stellen Sie sich an.
Solche Warteschlangenprobleme treffen wir auch in der Lagerhaltung, im Verkehr und sogar auch beim Mensch-ärgere-Dich-nicht-Spiel an.
Die meisten Warteschlangen lassen sich in mathematischen Modellen darstellen. Eine große Rolle spielt dabei der Zufall.

Daher sind diese Modellierungen auch unter dem Namen „Monte-Carlo-Methode“ bekannt geworden.
Im Prinzip funktionieren alle Modelle so, daß dabei Faktoren, die ihren Ablauf bestimmen, mit „Zufallszahlen“ multipliziert werden. Das Problem ist aber, Zufallszahlen zu erzeugen, also Zahlen, bei denen die Sicherheit besteht, daß es für ihr Entstehen keinerlei Gründe gibt. Zum Beispiel könnte man versuchen, sich Zahlen auszudenken. Doch haben alle Menschen Vorzugszahlen, wie 5, 3, 7. Falls man sich nun zusammennimmt, um diese Ziffern zu vermeiden, erreicht man das Gegenteil: man schafft dadurch neue Vorzugszahlen. Statt 5 wählt man 4, statt 3 nimmt man 2. Daher überlassen wir das Finden von Zufallszahlen am besten unserem Taschenrechner.
Als Ausgangswert bietet sich die Zahl π an. In ihr kommen alle Ziffern zufällig verteilt vor. (Eine Kontrolle bei der Errechnung der Kommastellen von π beruht darauf, daß alle Ziffern etwa gleich oft vorkommen müssen.)
Zu π addieren wir eine Zahl, die kleiner als 1 sein soll. Möglichst soll sie soviel Stellen hinter dem Komma haben, wie der Rechner es zuläßt. Natürlich lassen sich hierbei Vorzugszahlen (oder Antivorzugszahlen) nicht vermeiden. Daher wird der ganze Ausdruck ($\pi + 0, \ldots$) mit 5 potenziert.

$\boxed{\pi}$

$\boxed{+}$

$\boxed{0{,}785693}$ (als Beispiel)

$\boxed{=}$

3,927285654 (unser Rechner zeigt 10 Stellen an)

$\boxed{=}$ x^2 (diese Art der fortlaufenden Multiplikation

$\boxed{=}$ x^3 gilt nicht für alle Rechner, aber für viele)

$\boxed{=}$ x^4

$\boxed{=}$ $x^5 = 934{,}2485956$

Uns interessieren nur die Stellen hinter dem Komma. Daher geben wir ein

$\boxed{-}$

$\boxed{934}$

$\boxed{=}$

0,2485956

Das wäre in unserem Beispiel die erste Zufallszahl. Zu den üblichen Untersuchungen mit der Monte-Carlo-Methode benötigen wir aber weitere. Daher wird der Rechengang festgelegt

$$(\pi + 0{,}2485956)^5.$$

Das Resultat ist 447,836074. Hiervon ist wieder die Zahl vor dem Komma zu subtrahieren usw.

> Falls Ihr Rechner die Taste $\boxed{y^x}$ hat, verwenden Sie natürlich diese. Die meisten haben aber diese Taste nicht. Dann denken Sie daran, daß Sie viel Arbeit sparen, wenn Sie nach dem $\boxed{\times}$ sofort $\boxed{=}$ drücken, und zwar so oft, wie die Zahl mit sich selbst multipliziert werden soll.

Nicht alle Taschenrechner haben 10 Stellen. Die meisten arbeiten mit 8. Dadurch können unter Umständen die Zufallszahlen zu wenig Stellen haben. Bedenken wir: die kleinste Zahl, die wir addieren können, ist 0, die größte ist 0,999 . . .

$$\pi^5 = 306{,}01968$$

$$(\pi + 0{,}9999999)^5 = 1218{,}5317$$

 Es ist daher günstiger, von $(\pi + 0, \ldots)$ die Zahl 2 zu subtrahieren, damit nur ein Betrag zwischen

$$\pi + 0{,}00\ldots - 2 = 1{,}1415926(5)$$

und

$$\pi + 0{,}9999999 - 2 = 2{,}1415925(5)$$

übrigbleibt. Bei

$$(2{,}14\ \ldots)^5 = 45{,}048905$$

bleiben aber immer mindestens 6 Stellen hinter dem Komma. Und diese benötigen wir in vielen Fällen.
Für Monte-Carlo-Methoden werden häufig auch sogenannte normalverteilte Zufallszahlen verwendet. Sie können positiv oder negativ sein und haben die gleiche Häufigkeitsverteilung wie die *Gauß*sche Glockenkurve.
Zu ihrer Erzeugung haben die Mathematiker eine Anzahl von Verfahren ausgedacht.
Eines davon ist das folgende:
Man nehme zwei gleichverteilte Zufallszahlen x_1 und x_2 (< 1) und berechne

$$y_1 = \sqrt{-2 \lg x_1} \cdot \cos (2\pi \cdot x_2)$$

und

$$y_2 = \sqrt{-2 \lg x_1} \cdot \sin (2\pi \cdot x_2)$$

Dann erfüllen y_1 und y_2 alle Bedingungen, die man an normalverteilte Zufallszahlen stellen kann.
Als Beispiel nehmen wir unsere beiden schon erzeugten Zufallszahlen $x_1 = 0{,}2485956$ und $x_2 = 0{,}836074$. Daraus ergeben sich die beiden normalverteilten Zufallszahlen

$$y_1 = \sqrt{(-2) \cdot \lg 0{,}2485956} \cdot 0{,}514838 = 0{,}566091$$

und

$$y_2 = \sqrt{(-2) \cdot \lg 0{,}2485956} \cdot (-0{,}857287) = \\ -0{,}942631$$

Beachten Sie, daß der Wert x_2 als Radiant verarbeitet wird.

Ein anderes Verfahren zur Erzeugung von normalverteilten Zufallszahlen geht von 12 gleichverteilten Zufallszahlen x_1 bis x_{12} aus. Daraus wird eine normalverteilte Zufallszahl berechnet zu

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} - 6$$

Sie können daran schon sehen, daß normalverteilte Zufallszahlen aufwendiger herzustellen sind als gleichverteilte, noch dazu die letzteren erst einmal produziert werden müssen. Außerdem benötigt man immer sehr große Mengen an Zufallszahlen, wenn man mit der Monte-Carlo-Methode Prozesse simulieren oder irgendwelche technischen Objekte optimieren will.
Das Rechnen mit Zufallszahlen ist daher vorwiegend den „Großen" unter unseren Taschenrechnern vorbehalten.

Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Als Ergebnis von Rechnungen erhält man mitunter zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$a\,x + b\,y = e$$
$$c\,x + d\,y = f$$

Meistens versucht man in einem solchen Fall die Gleichungen so zu verändern, daß sich eine der Unbekannten durch geeignete Rechenoperationen „weghebt".
Mit unserem Rechner arbeiten wir einfacher nach der *Cramer*schen Regel

$$x = \frac{e\,d - b\,f}{a\,d - b\,c}$$

$$y = \frac{a\,f - e\,c}{a\,d - b\,c}$$

Die beiden Gleichungen ergeben sich aus einer Determinantenrechnung. Bei $a\,d - b\,c = 0$ erhält man keine oder keine eindeutige Lösung.
Beispiel:

$$10\,x - 6\,y = 24$$
$$4\,x + 2\,y = 15$$

Ohne unseren Rechner würden wir so vorgehen:

$$\begin{array}{rll} 4\,x + 2\,y &= 15 & \mid \cdot 3 \\ 12\,x + 6\,y &= 45 & \\ +\ 10\,x - 6\,y &= 24 & \\ \hline 22\,x &= 69 & \\ x &= 69:22 = 3{,}14 & \end{array}$$

Wir setzen dann x in eine der Gleichungen ein und erhalten $y = 1{,}22$.
Mit dem Taschenrechner und der *Cramer*schen Regel rechnen wir

$$x = \frac{e \cdot d - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c} = \frac{24 \cdot 2 - (-6) \cdot 15}{10 \cdot 2 - (-6) \cdot 4} = 3{,}14$$

Vorzeichen der Konstanten beachten!

$$y = \frac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c} = \frac{10 \cdot 15 - 24 \cdot 4}{10 \cdot 2 - (-6) \cdot 4} = 1{,}23$$

Da $x = 3{,}14$ nur mit zwei Nachkommastellen ausgerechnet wurde, erhält man y-Werte, die in der zweiten Stelle voneinander abweichen (1,23 bzw. 1,22).

Zufall und Häufigkeit

Wenn wir mit einem gleichmäßig gebauten Spielwürfel würfeln, so werden wir, wenn wir nur genügend viele Würfe machen, jede der sechs Seiten gleich oft werfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir eine 1 (oder 2 oder 6) würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$, d.h. das Ereignis (die gewürfelte 1), geteilt durch die Möglichkeiten (6 Seiten).

In den einschlägigen Mathematikbüchern steht: Je öfter wir würfeln, desto „genauer" erhalten wir für eine der Würfelflächen die Häufigkeit $\frac{1}{6}$.

Wer hat schon Lust, 100mal oder 1000mal zu würfeln. Denken wir uns lieber Rechenprogramme aus, mit denen wir die Behauptung nachprüfen können.

Am einfachsten gehen wir von unseren zehn Ziffern 0 bis 9 aus. Im Abschnitt „Zufallszahlen" zeigen wir die Erzeugung von Zufallszahlen. Wir brauchen nur abzuzählen, wieviel Ziffern vorkommen und wie oft eine bestimmte Ziffer (z.B. die 1) auftritt.

Falls unser Taschenrechner die Möglichkeit hat, Zahlen fortlaufend in einem Speicher zu addieren, können wir die Sache sehr vereinfachen.

Die besseren Rechner gestatten es, über eine $\boxed{\Sigma+}$-Taste oder über $\boxed{\text{StO}+}$ oder $\boxed{\text{M}+}$ fortlaufend zu addieren.

Der Gedankengang wird am besten an einem Beispiel verständlich. Wir rufen nacheinander lg 0,1; lg 1,1; $\cdots$; lg 9,1 ab und zählen dabei aus, wie oft eine bestimmte Ziffer (z.B. 1) erscheint. Die Anzahl von Einsen bei jedem Logarithmus addieren wir in einem Speicher.

Wo eine Addition in einem Speicher nicht unmittelbar möglich ist, wird der Speicherinhalt abgerufen, die Anzahl der Einsen wird addiert und das Ergebnis wieder gespeichert.

0,1	
$\boxed{\lg}$	
– 1,000000	wir arbeiten im Beispiel mit
1,1	sechsstelligen Logarithmen
$\boxed{\lg}$	
0,041339	die 1 kommt vor und wird
1	gespeichert
$\boxed{\mathrm{M}}$	gespeichert!
2,1	
$\boxed{\lg}$	
0,322219	die 1 kommt einmal vor
1	
$\boxed{+}$	
$\boxed{\mathrm{M}}$	
$\boxed{=}$	
2	
$\boxed{\mathrm{M}}$	die zwei Einsen sind gespeichert
usw.	

Wenn man bei lg 9,1 angelangt ist, hat man zehnmal die Nachkommastellenzahl der Logarithmen, in unserem Beispiel 60. Die Summe im Speicher gibt an, wie oft die 1 (oder eine andere Ziffer) vorkam. Nun kann man die Häufigkeit ausrechnen. Wir fanden hier schon den Idealwert

$$\frac{6}{60} = 0{,}1$$

Beim Eintasten bemerkt man aber bereits, daß das ein Zufall ist, denn bei lg 9,1 oder lg 6,1 findet man nicht die Ziffer 1. Stellt man hier schon die Rechnung ein, erhält man Häufigkeitswerte, die von 10 % abweichen.

Wer will, kann also weiterrechnen. Vielleicht mit 0,5 oder mit ln oder mit $(\lg 0{,}5)^2$.

Noch vor relativ kurzer Zeit mußten mehr oder weniger umfangreiche Tafelwerke in der Schule „gewälzt" werden, um bestimmte Werte für Winkelfunktionen, Logarithmen, Wurzeln usw. zu ermitteln. Man mußte „in die Tafel hinein" und „aus der Tafel heraus" gehen, und wenn der gesuchte Wert nicht genau dastand, dann mußte interpoliert werden. Dazu gab es auch entsprechende Formeln, in denen die Begriffe „unsere Differenz" und „Tafeldifferenz" vorkamen. Wenn man den Mechanismus völlig durchschaute, hatte man durchaus ein Erfolgserlebnis.

Mit der raschen Verbreitung der Taschenrechner treten solche mathematischen Tafeln naturgemäß etwas in den Hintergrund. Was aber geblieben ist, sind Interpolationsverfahren. Dabei geht es um folgendes:

Eine an $n + 1$ Stellen (x_0 bis x_n) zahlenmäßig bekannte Funktion (y_0 bis y_n) soll durch ein Polynom, d.h. eine Potenzreihe n-ter Ordnung dargestellt werden, die an diesen $n + 1$ sogenannten Stützstellen genau die vorgegebenen Werte annimmt und dazwischen möglichst gute Näherungswerte liefert.

In der Schule haben wir linear interpoliert, d.h. zwei benachbarte Funktionswerte durch eine Gerade verbunden und davon für dazwischenliegende x-Werte die gesuchten Funktionswerte ermittelt.

Für die Praxis reicht es meist aus (falls die zahlen- oder formelmäßig vorgegebene Funktion sich nicht gar zu „verrückt" verhält), mit Hilfe von 4 Stützstellen eine kubische (3. Ordnung) Interpolation durchzuführen.

Besonders übersichtlich wird der Rechengang, wenn wir für die Abstände der gegebenen x-Werte die gleiche Schrittweite h annehmen. Das läßt sich in vielen Fällen durchaus erreichen.

Eine der bewährtesten (nichtlinearen) Interpolationsformeln stammt von *Isaac Newton* (1643 bis 1727). Sie hat bis

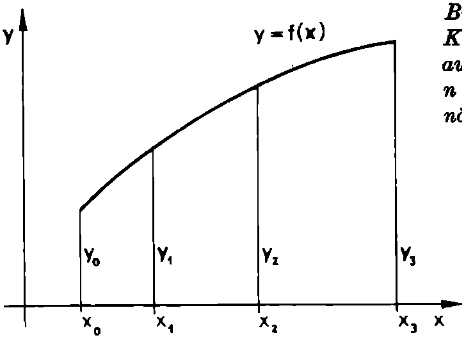

Bild 21. Wenn eine Kurve in n Abschnitte aufgeteilt wird, sind n + 1 Stützstellen nötig

zum Glied 3. Ordnung die Gestalt

$$y(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + c_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

mit $x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_0 + 2h$

und folgenden Konstanten:

$$c_0 = y_0 \qquad c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

$$c_1 = \frac{\Delta y_0}{h} \qquad c_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}$$

Δ^n (lies: Delta n) ist eine international übliche Schreibweise für Differenzen n-ter Ordnung. Sie werden nach dem folgenden Schema ermittelt:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Hier errechnet sich also jeder Wert einer Spalte als Differenz der beiden Werte der vorhergehenden Spalte, auf deren Lücke er steht.
Das Vorgehen wird Ihnen sicher an einem Zahlenbeispiel klar. Gegeben seien die x-Werte

$$x_0 = 15;\ x_1 = 30;\ x_2 = 45;\ x_3 = 60$$

sowie

$$y_0 = 0{,}258819;\ y_1 = 0{,}5;\ y_2 = 0{,}707107;$$
$$y_3 = 0{,}866025$$

Die Schrittweite h ist dann gleich 15.
Die Differenzen $\Delta\, k$ ergeben sich aus dem folgenden Schema:

x	y	$\Delta\, y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
15	0,258819			
		0,241181		
30	0,500000		− 0,034074	
		0,207107		− 0,014115
45	0,707107		− 0,048189	
		0,158918		
60	0,866025			

Daraus berechnen sich die Koeffizienten zu

$$c_0 = 0{,}258819$$
$$c_1 = \frac{0{,}241181}{15} = 0{,}0160787$$
$$c_2 = \frac{-0{,}0341}{2 \cdot 15^2} = -0{,}0000757$$
$$c_3 = \frac{-0{,}0141}{6 \cdot 15^3} = -0{,}0000006$$

Das ergibt schließlich das gesuchte Polynom

$$\begin{aligned} y = 0{,}258819 &+ 0{,}0160787 \cdot (x - 15) \\ &- 0{,}0000757 \cdot (x - 15) \cdot (x - 30) \\ &- 0{,}0000006 \cdot (x - 15) \cdot (x - 30) \cdot (x - 45) \end{aligned}$$

Aufmerksame und mathematisch geschulte Leser haben vielleicht schon bemerkt, daß wir für unser Beispiel ein Stück der Sinuskurve zwischen 15° und 60° durch ein Polynom 3. Ordnung ersetzt haben. Nun kann man natürlich noch die Klammern ausmultiplizieren und alle Glieder mit der gleichen Potenz zusammenfassen sowie nach Potenzen von x ordnen. Das ist sehr aufwendig, und wenn man mit Hilfe der Gleichung Zwischenwerte berechnen will, dann ist die obenstehende Form besser geeignet.
Da bei der folgenden Interpolation sehr kleine Zahlen mit sehr großen multipliziert werden, müssen Sie relativ viele Nachkommastellen berücksichtigen. Wir wollen das einmal für $x = 20$ tun.
Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= 0{,}258819 + 0{,}0160787 \cdot 5 \\ &\quad - 0{,}0000757 \cdot 5 \cdot (-10) \\ &\quad - 0{,}0000006 \cdot 5\,(-10) \cdot (-25) \\ &= 0{,}258819 + 0{,}0803935 + 0{,}003785 - 0{,}00075 \\ &= 0{,}3422475 \end{aligned}$$

Ein genauerer Wert ist $\sin 20° = 0{,}342020143$.
Die Abweichung Δf ist also etwa $2 \cdot 10^{-4}$. Dann ist der relative Fehler $\frac{\Delta f}{f} \approx 0{,}0006 = 0{,}6$ Promille.
Wenn wir, wie es in der Schule üblich war, linear interpoliert

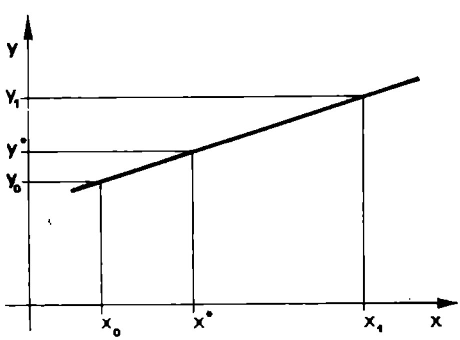

Bild 22. Zwischen den Kurvenpunkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) wird linear interpoliert

hätten, gilt

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y^* - y_0}{x^* - x_0},$$

woraus

$$y^* = (x^* - x_0)\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) + y_0$$

folgt.
Für $x^* = 20$ ergibt sich

$$y = (20 - 15) \cdot \frac{0{,}5 - 0{,}258819}{30 - 15} + 0{,}258819$$
$$= 0{,}3392126$$

Dann ist die Abweichung Δf vom wahren Wert $3 \cdot 10^{-3}$, und der relative Fehler beträgt $\frac{3 \cdot 10^{-3}}{0{,}342} \triangleq 1\,\%$.
Das ist für den „Hausgebrauch" schon eine ganz gute Näherung.
Nicht in jedem Fall sollte man versuchen, Funktionswerte mit der erhaltenen Interpolationsformel zu berechnen, die außerhalb des Bereiches der angenommenen Stützwerte liegen. Die Abweichungen können dort beträchtlich sein.

Astronomische Navigation mit dem Taschenrechner

Der folgende Abschnitt ist besonders für Seefahrer auf großen und vor allem auf kleinen Schiffen gedacht. In ihm wird eine neue Methode zur Ortsbestimmung erläutert, die erst durch die Benutzung eines Rechners möglich wurde.
Für die nicht-nautisch-interessierten Rechnerbesitzer lohnt es sich trotzdem, den Abschnitt zu lesen (und mitzurechnen),

weil er zeigt, wie der Minicomputer ganz neue Möglichkeiten erschließt.
Mittags steht die Sonne (scheinbar) am Himmel einige Minuten still, das heißt, sie steigt nicht und sinkt nicht.
Es ist daher dem Seemann nicht möglich, auf die Sekunde genau zu bestimmen, wann die Sonne wirklich ihren höchsten Stand erreichte und daher 12^h Ortszeit ist.
Nun gibt es Verfahren, die wegen der Symmetrie der Sonnenbewegung einige Zeit vor dem höchsten Stand der Sonne ihre Höhe messen. Anschließend wird gewartet, bis die Sonne nach dem höchsten Stand wieder die gleiche Höhe wie bei der ersten Höhenmessung erreicht.
Da beide Zeiten festgehalten werden, ist wegen der Symmetrie die Mittagszeit genau in der Mitte von ihnen.
Die Zeit wird daraus in geographischer Länge umgerechnet.
Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß wir während der Messungen, die 30 bis 60 Minuten auseinanderliegen, unseren Standort ändern. Dadurch schleicht sich ein Fehler ein. Dieser Fehler kann entscheidend verkleinert werden, wenn wir die Mittagshöhe bestimmen (wegen der Breite), dann etwa 10 bis 15 Minuten später nochmals eine Höhe nehmen, gleichzeitig die Zeit ablesen und daraus den Ortsstundenwinkel (OSW) errechnen. Mit seiner Hilfe findet man dann die gesuchte Länge. Die notwendige Rechnung läßt sich nach der Gleichung

$$\cos \mathrm{OSW} = \frac{\sin h - \sin d \cdot \sin \varphi}{\cos d \cdot \cos \varphi}$$

durchführen. Natürlich kann man die Gleichung mit Hilfe der einschlägigen Tafeln lösen. Erfahrungsgemäß scheuen die meisten Segler aber den Rechenaufwand.
Mit einem Taschenrechner, der die Winkelfunktion im Programm hat, ist die Lösung der Aufgabe eine Sache von Sekunden.
Beispiel: Am 12. Juni 1976 befindet sich unser Schiff ungefähr auf $\varphi = 55°\,30'$ N und $\lambda = 20°$ E. Der genaue Standpunkt soll bestimmt werden.

1. Als die Sonne gegen 11 h 40 min MEZ ihren höchsten

Punkt erreicht, mißt der Schipper ihre Höhe. Nach dem Anbringen der Berichtigung (— 13′) findet er $h_b = 57° 41'$.

2. Daraus errechnet er die Breite

$$\varphi = 90° + d - h_b = 55° 29' \text{ N}$$

Die Abweichung $d = 23° 10'$ N (für 11 h 40 min MEZ = 10 h 40 min GMT) entnimmt er dem nautischen Jahrbuch. Hier muß d wegen der späteren Rechnung genau für die richtige Zeit genommen werden.

3. Ungefähr 10 Minuten später, genau um 12 h 00 min 01 s MEZ mißt er nochmals die Sonnenhöhe und findet nach der Berichtigung $h_b = 57° 28'$.

4. Mit $h_b = 57° 28'$, $d = 23° 10'$ N und $\varphi = 55° 29'$ N errechnet er mit seinem Taschenrechner den Ortsstundenwinkel

$$\text{OSW} = \cos^{-1} \frac{\sin h - \sin d \cdot \sin \varphi}{\cos d \cdot \cos \varphi} = 5° 03' 24''$$

Hier lohnt es sich, die hohe Genauigkeit des Taschenrechners auszunutzen.

5. Daraus ergibt sich eine Zeitdifferenz zum Meridiandurchgang

$$\begin{array}{rl} 5° & \triangleq 20 \text{ Zeitminuten} \\ 3' & \triangleq 12 \text{ Sekunden} \\ 27'' & \triangleq \ \ 2 \text{ Sekunden} \\ \hline & 20 \text{ min } 14 \text{ s} \end{array}$$

Da die Messung um 12 h 00 min 01 s MEZ geschah, war der Meridiandurchgang um

$$\begin{array}{l} \ \ 12 \text{ h } 00 \text{ min } 01 \text{ s} \\ - 00 \text{ h } 20 \text{ min } 14 \text{ s} \\ \hline \ \ 11 \text{ h } 39 \text{ min } 47 \text{ s MEZ} = 10 \text{ h } 39 \text{ min } 47 \text{ s GMT} \end{array}$$

 (GMT wahre Greenwicher Zeit)

6. Aus dem nautischen Jahrbuch entnehmen wir für 12 h 00 min 00 s GMT einen GSW (Greenwicher Stundenwinkel) von 03′, das heißt, Mittag war 12 Zeitsekunden früher, um 11 h 59 min 48 s GMT.

7. Wir berechnen jetzt den Zeitunterschied zu unserem Standort

$$\begin{array}{r} 11\text{ h }59\text{ min }48\text{ s GMT} \\ -\ 10\text{ h }39\text{ min }47\text{ s GMT} \\ \hline 01\text{ h }20\text{ min }01\text{ s} \end{array}$$

8. Und daraus unsere Länge

1 Stunde	≙ 15°
20 Minuten	≙ 5°
1 Sekunde	≙ 00′ 15″
geographische Länge	= 20° 00′ 15″ E

Vorteile des Verfahrens

Es sind nur zwei Messungen notwendig, und in zwanzig Minuten hat man einen Standort.
Natürlich kann man auch mehrere Messungen durchführen. Die geringe Mühe beim Eintasten der Werte in einen Taschenrechner spielt kaum eine Rolle. Es ist auch möglich, Messungen vor dem Meridiandurchgang auszuführen.
Da die Zeitdifferenz zum Meridiandurchgang gering ist, wird der Fehler kleiner.

Nachteile des Verfahrens

Der Fehler ist „einseitig“, da man nur nach (oder nur vor) der Kulminationszeit die zusätzliche Messung durchführt. Daher ist es notwendig, sich beim Eintragen des Standortes in die Karte über seine Größe und Lage Gedanken zu machen.

Umrechnungsfaktoren

In der Praxis treten oft Umrechnungsprobleme auf. Sie möchten z.B. wissen, wieviel Kilowatt Ihr Automotor leistet, der im Prospekt mit 30 PS ausgewiesen ist. Die Umrechnung ist mit unserem Taschencomputer kein Problem, vorausgesetzt, Sie kennen den Umrechnungsfaktor zwischen PS und kW.
Noch stärker wird das Umrechnungsbedürfnis bei der Einführung des Internationalen Einheitensystems (SI). Es arbeitet mit sieben Basiseinheiten.

Größe	Name der Einheit	Einheiten-zeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	(das) Kelvin	K (nicht °K!)
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	(die) Candela	cd

Die wichtigsten Umrechnungsfaktoren sind:

Kraft	$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}$	
	$1\,\mathrm{kp} = 9{,}81\,\mathrm{N}$	
Arbeit	$1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{Ws}$	$= 1\,\mathrm{J}$
	$3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{Ws}$	$= 1\,\mathrm{kWh}$
	$278 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kWh}$	$= 1\,\mathrm{Ws}$
Leistung	$1\,\mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}$	$= 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$
	$1\,\mathrm{W}$	$= 10^{-3}\,\mathrm{kW}$
	$1\,\mathrm{kW}$	$= 102\,\mathrm{kpm/s}$
	$1\,\mathrm{kpm/s}$	$= 9{,}81\,\mathrm{W}$
Druck	$1\,\mathrm{N/m^2} = 1\,\mathrm{Pa} = 10^{-5}\,\mathrm{bar}$	

Statt „kalorienbewußt“ werden wir in Zukunft „joule-

bewußt“ sein. Dabei werden wir das „beruhigende“ Gefühl haben (das aber nicht lange anhalten dürfte), statt 2000 kcal am Tag 8380 kJ essen zu dürfen.
Auch veraltete Maßeinheiten, wie pounds/square inch (englisch: Pfund/Quadratzoll) oder die schon erwähnten PS müssen umgerechnet werden.

1 PS	= 735,5 W
1 engl. Pfund	= 453,59 g
1 Unze	= 28,35 g
1 Zoll	= 2,54 cm
1 Quadratzoll	= 6,45 cm^2
n °C in K	= $n + 273{,}15$
n Grad Fahrenheit in K	= $(n + 459{,}67) : 1{,}8$
n Grad Fahrenheit in °C	= $(n - 32) \cdot 5/9$

Die Steuerung von Werkzeugmaschinen

Als neue Entwicklung bahnt sich an, Werkzeugmaschinen durch die Bausteine der Taschenrechner (Mikroprozessoren) zu steuern. Bis jetzt werden Werkzeugmaschinen meistens so gesteuert, daß auf einen Datenträger (Lochband, Tonband) die Befehle notiert und beim entsprechenden Arbeitsgang eingegeben werden.
Die modernen Mikrobausteine haben aber ein „Gedächtnis“, das die Werkzeugmaschinen besser ausnutzt.
In der einfachsten Form finden wir bei unserem Rechner das „Gedächtnis“ im Speicher. Eine eingegebene Zahl bleibt bis zum Abruf dort stehen.
Rechner mit integrierten CMOS-(Komplementär-Metall-Oxid-Halbleiter-) Bausteinen speichern unsere Befehle weiter, auch wenn sie abgeschaltet sind. Ein Akku versorgt die Mikroprozessoren nach dem Abschalten mit ganz geringen Strömen, so daß die Befehle gerade weiterhin ge-

speichert bleiben. Sogar kurzfristige völlige Abschaltungen kann die Eingabe nicht löschen.
Es leuchtet ein, daß Rechner, die nach diesem Prinzip aufgebaut sind, nicht nur Zahlen speichern, sondern auch allgemeine Befehle, wie „:“, „+“ oder „prüfe, ob $x > 0$“. Solche Computer sind daher frei programmierbar.
Und sie steuern Maschinen!
Statt eine Acht oder Drei in der Anzeige hervorzurufen, gehen die entsprechenden Stromimpulse zur Maschine und bewirken acht oder drei Schritte in die eine oder andere Richtung.
Ein Beispiel soll das erläutern. Eine Maschine soll Kreise beliebiger Größe ausschneiden. Ihr „Taschencomputer“ wird programmiert, die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

abzuarbeiten.
Wie groß der Radius r jeweils sein soll, gibt der Maschinenarbeiter erst unmittelbar vor dem Arbeitsgang ein.
Für einen programmierbaren Rechner mit umgekehrter polnischer Notation sieht das Programm so aus

1. STO 0
2. STO 1
3. RCL 0
4. x^2
5. RCL 1 $= x$; evtl. PAUSE zur Anzeige
6. x^2
7. $-$
8. $\sqrt{x} = y$; evtl. PAUSE zur Anzeige
9. $\times$
10. 1
11. STO-1
12. GTO 03

Der Arbeiter gibt nur noch den Wert für r in das x-Register und drückt den Startknopf.
Doch auch mit einfachen Rechnern kann die Steuerungsaufgabe simuliert werden. Dazu gibt man die Kreisgleichung für den Fall $x = r$ ein, wobei $y = 0$ wird. In einen Speicher

gibt man den Schritt ein, um den x jedesmal vergrößert oder verkleinert wird, z.B. 0,1.

Taste	**Anzeige**
$\boxed{5}$	5
$\boxed{x^2}$	25
$\boxed{-}$	25
$\boxed{5}$	5
$\boxed{x^2}$	25
$\boxed{=}$	0

Jetzt beginnt die Rechnung mit einem um 0,1 verkleinerten x.

Taste	**Anzeige**	
$\boxed{25}$	25	$r^2 = 25$ bleibt ja konstant
$\boxed{-}$	25	
$\boxed{(}$	0	
$\boxed{5}$	5	
$\boxed{-}$	5	
$\boxed{0{,}1}$	0,1	
$\boxed{=}$	4,9	
$\boxed{x^2}$	24,01	
$\boxed{)}$	24,01	
$\boxed{=}$	0,99	
$\boxed{\sqrt{x}}$	0,99 usw.	

Der Vergleich der simulierten Steuerung mit der des programmierten Rechners zeigt (abgesehen von der Methode der Zeichensetzung) eigentlich nur den Unterschied, daß der Schritt $\pm$ 0,1 im Programm automatisch geschieht und die Zahlen nicht dauernd neu getippt werden müssen.

Wichtig an dieser neuen Art der Maschinensteuerung ist vor allem, daß die Programmeingabe aus dem Büro in die Werkstatt verschoben wird. Die Kosten für eine „Taschencomputersteuerung“ sind sehr klein, verglichen mit der klassischen NC-Steuerung.

Kettenbrüche

Wenn wir zwei Zahlen durcheinander dividieren, so wie wir das in der Schule gelernt haben, ergibt sich eine Dezimalzahl. Im allgemeinen ist eine solche rationale Zahl unendlich periodisch, d.h., bestimmte Zahlenfolgen, die Perioden, kommen zyklisch immer wieder vor. Sie können verschieden lang sein und verschieden spät auftreten.
So ergibt sich der Bruch

$$\frac{23}{18} = 1{,}2\bar{7}\cdots$$

Es ist üblich, die Periode zu überstreichen.
Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit, eine rationale („vernünftige“) Zahl darzustellen, und zwar durch eine endliche Anzahl von ganzen Zahlen. Das ist die Entwicklung in einen sogenannten Kettenbruch.
Die theoretischen Grundlagen dazu legte der berühmte Mathematiker *Leonhard Euler* (1707 bis 1783).
Ein solcher Kettenbruch n-ter Ordnung hat die Normalform

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \vdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

In einer symbolischen Schreibweise ist die Darstellung

$[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ üblich.

Wenn wir die obenstehende rationale Zahl $\frac{23}{18}$ in einen Kettenbruch entwickeln, so gehen wir folgendermaßen vor

$$\frac{23}{18} = 1 + \frac{5}{18}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{1}{18/5} = \frac{1}{3 + 3/5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5/3} = \frac{1}{1 + 2/3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3/2} = \frac{1}{1 + 1/2}$$

Damit ergibt sich die Kettenbruchdarstellung

$$\frac{23}{18} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$$

oder, in abgekürzter Schreibweise,

$$\frac{23}{18} = [1; 3, 1, 1, 2]$$

Wenn Sie mit Hilfe des Taschenrechners nachprüfen wollen, ob Ihre Kettenbruchentwicklung richtig war, brauchen Sie eine Reziproktaste.

Wenn wir den Zähler oder den Nenner des vorgegebenen Bruches nur geringfügig abwandeln, so ergeben sich ganz andere Zahlen. So ist z.B. die Kettenbruchentwicklung für

$$\frac{24}{19} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = [1;3,1,4]$$

Als unendlich-periodischer Dezimalbruch ist der Wert

$$\frac{24}{19} = 1{,}\overline{263157894736842105}\cdots$$

Diese Periode kann man allerdings auch mit einem Taschenrechner, der eine sehr hohe Zahl von Ziffern anzeigt, nicht erkennen.

> An der letzten Zahl können Sie feststellen, ob Ihr Rechner (6-, 8- oder zehnstellige Anzeige) beim Dividieren die letzte Ziffer rundet, indem Sie 24 : 19 eingeben und das angezeigte Ergebnis mit obigem vergleichen.

Wir hatten gesagt, daß eine rationale Zahl einen endlichen Kettenbruch ergibt. Wie sieht das nun bei den irrationalen („unvernünftigen") Zahlen aus?

Die Mathematiker haben festgestellt, daß eine irrationale Zahl einen unendlichen Kettenbruch ergibt.

Trotzdem kommt es zu periodischen Zahlenfolgen bzw. zu anderen Gesetzmäßigkeiten. Das sollen die folgenden Beispiele belegen. Zunächst betrachten wir die irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Prinzipiell sind Wurzelausdrücke gesetzmäßig in Kettenbrüche entwickelbar. Eine Darstellung dieses Verfahrens ist aber etwas aufwendig und soll Ihnen und uns erspart bleiben. Jedenfalls ergibt sich

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$$

Daraus sollten Sie aber keineswegs den Schluß ziehen, daß bei $\sqrt{3}$ nun überall dort eine „3“ auftritt (also unendlich oft), wo oben eine „2“ steht.

Wenn Sie aus obenstehendem Kettenbruch den Wert für $\sqrt{2}$ ausrechnen wollen, fangen Sie am besten von hinten an, und zwar mit dem Eingabewert 1/2. Dann drücken Sie abwechselnd die Tasten „+“, „2“ und „$\frac{1}{x}$“. Wie weit hinten Sie anfangen, ist eine Frage der Genauigkeit. Jeder Dreischritt-Zyklus liefert etwa eine Nachkommastelle genau. Zum Schluß addieren Sie die Eins.

Einen weniger ästhetisch aussehenden, aber auch periodischen Kettenbruch liefert $\sqrt{31}$, nämlich

$$\sqrt{31} = [5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}, \ldots]$$

Die in vielen mathematischen Zusammenhängen vorkommende *Euler*sche Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen) hat folgende sehr gesetzmäßige Kettenbruchgestalt, wenn sie auch nicht in der Normalform vorliegt (und daher die symbolische Schreibweise entfällt).

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \cdots}}}}$$

Nun könnten Sie fast vermuten, daß die noch berühmtere Zahl π auch einen besonders interessanten Kettenbruch ergibt.

Der englische Kanzler und Großsiegelbewahrer *Lord Brouncker* (1620 bis 1684), ein passionierter Amateur-Mathematiker, hat die Gestalt dieses Kettenbruches herausgefunden

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cdots}}}}}}.$$

Es tauchen außer der Zwei nur noch die Quadratzahlen der ungeraden Zahlen auf.
Wenn Ihnen dieser Kettenbruch zu unhandlich für eine Berechnung erscheint, wie wäre es dann mit dem unendlichen Produkt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdots$$

wo in den Nennern wieder die Quadrate der ungeraden Zahlen ab drei auftauchen und die Zähler jeweils um eins kleiner sind?
Sie sehen, der schöpferischen Phantasie sind in der Mathematik kaum Grenzen gesetzt.

Literaturverzeichnis

Asche, W.: Schwung für den Minirechner. – Bild der Wissenschaft Bd. 13 (1976), Nr. 5, S. 136 bis 142

Filtschakow, P. F.: Numerische und graphische Methoden der angewandten Mathematik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH 1975

Kleine Enzyklopädie Mathematik. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1967

Kordemski, B. A.: Köpfchen muß man haben. Köln: Aulis Verlag 1975

Kreul, Hans: Was kann mein elektronischer Taschenrechner? Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1981

DDR 5,50 M

VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Taschenrechner sind die schnellen „Mitarbeiter“ in Taschenformat! Wer möchte ihren Wert nicht anerkennen?
Aber nicht nur als rationell arbeitende Hilfsmittel zur Durchführung technisch-wissenschaftlicher Berechnungen sind sie geeignet — auf fast unbewußte „spielerische“ Weise fördern sie die Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Problemen. Und das ist das Hauptanliegen der Autoren: dieses Verhalten bei möglichst vielen Menschen zu unterstützen. Dazu werden in zwangloser Folge eine Fülle von mathematischen Problemen und die dazugehörigen Lösungen aus Wissenschaft, Technik und dem Alltag vorgestellt. Es soll der „Appetit“ geweckt werden, die Beispiele nachzurechnen und ähnliche Probleme zu lösen. Um solche Denkanstöße zu erzielen, wird möglichst mit Verblüffungseffekten gearbeitet. Und für die Beantwortung von Fragen, die speziell die Bedienung des Taschenrechners betreffen, werden Tricks und Kniffe verraten.