Dr. GERHARD NIESE

100 EIER DES KOLUMBUS

Illustrationen von Heinz-Karl Bogdanski

DER KINDERBUCHVERLAG BERLIN

Lizenz-Nr. 304-270/81/58-(10-VIII B)
Satz und Druck: Karl-Marx-Werk, Pößneck, V 15/30 · 1. Auflage
ES 9 F

VORWORT

Als Christoph Kolumbus, der Entdecker Amerikas, von seiner kühnen Seefahrt zurückkehrte, gab man ihm zu Ehren ein festliches Mahl. An der Tafel saßen viele, die Kolumbus den Ruhm mißgönnten. Sie äußerten, daß die Entdeckerfahrt des Kolumbus wohl eine große Tat sei, die aber jeder andere ebenso hätte vollbringen können, wenn er nur früher daran gedacht hätte. Kolumbus lächelte und schlug seinen Neidern vor, doch sogleich einmal die Lösung eines zwar kleinen, aber anscheinend unlösbaren Problems zu versuchen.

Er zeigte ein Ei vor, legte es auf den Tisch und forderte die Tafelrunde auf, zu versuchen, es auf die Spitze zu stellen. Niemand probierte es. Die Runde schwieg. Kolumbus nahm das Ei und setzte es fest mit der Spitze auf die Tischplatte. Das Ei stand aufrecht. (Es war hart gekocht. Beim Aufsetzen wurde die Schale ein wenig eingedrückt.) Kolumbus hatte die Lacher auf seiner Seite!

Seit diesem Gastmahl im Jahre 1493 bezeichnet man die verblüffend einfache Lösung einer zunächst schwierig erscheinenden Aufgabe sprichwörtlich als „Ei des Kolumbus".

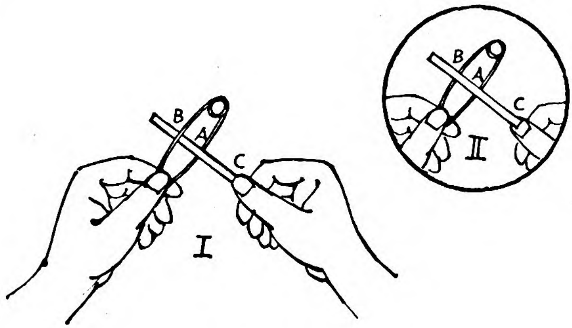
Solche Eier des Kolumbus findet ihr in diesem Buch. Auf einfache Weise werden Naturgesetze ausgenutzt, um verblüffende Ergebnisse zu erzielen. Viele dieser Versuche eignen sich zu kleinen Vorführungen im Freundeskreis.

Auf der nächsten Seite beginnt die erste Vorführung!

ZAUBERKUNSTSTÜCKE, KARTENTRICKS, DENKAUFGABEN

Feste Körper durchdringlich?

Ein Streichholz ohne Kuppe wird genau in der Mitte mit einer nicht zu großen Sicherheitsnadel durchbohrt und dann etwa bis zur Mitte der Nadel geschoben. Das Hölzchen wird leicht drehbar, indem ich es einige Male auf der Nadel hin- und herschwenke. Dann wird die Sicherheitsnadel geschlossen.



Ein Streichholz wird durch den einen Stahlbügel einer Sicherheitsnadel hindurchbewegt, ohne daß Metall und Holz beschädigt werden

Ich fasse das Verschlußstück der Nadel mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand (I). In A ist das Holz von der Nadel durchbohrt. Bei B liegt die eine Hälfte des Hölzchens hinter dem einen Bügel der

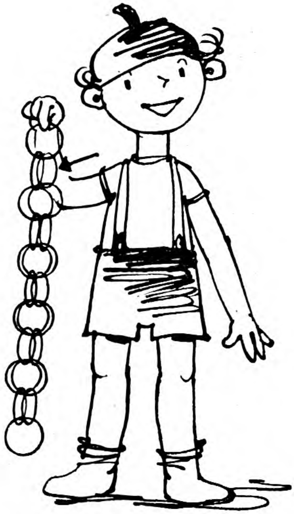
Sicherheitsnadel. Jetzt drücke ich kräftig mit dem Daumen der rechten Hand auf das Ende des Holzes bei C und lasse dann den Daumen rasch vom Holz abgleiten. Verwundert sehen wir, daß die andere Hälfte des Holzes bei B den metallischen Bügel durchdrungen hat (II). Das Holz liegt dort nicht mehr hinter, sondern vor dem Stahlbügel. Drücke ich jetzt mit dem Zeigefinger bei C von unten nach oben gegen das Holz und lasse den Finger dann wieder rasch abgleiten, so durchdringt das Holz anscheinend den Stahlbügel von oben nach unten.
An Stelle eines Streichholzes eignet sich auch ein stärkerer Holzstab oder ein kleiner (nicht angespitzter) Bleistift.

ERKLÄRUNG:

Das Holz wurde beim Abgleiten des Daumens beziehungsweise Zeigefingers durch die Federkraft des Stahlbügels im Halbkreis derart herumgeschleudert, daß die Holzhälfte, die soeben noch unter dem rechten Daumen lag, jetzt auf, beziehungsweise vor dem Bügel bei B liegt. Infolge der großen Elastizität des Stahls verläuft die Bewegung so blitzschnell, daß auch nicht eine Spur davon zu sehen ist.

Die Zauberkette

Hier zeige ich euch eine Kette. Ihr oberes Endglied ist ein einzelner Ring, ihr unteres auch. Die anderen Kettenglieder bestehen jeweils aus zwei Ringen, die durch einen der beiden darunterhängenden miteinander verbunden sind.
Jetzt fasse ich mit der linken Hand einen der beiden unter dem oberen Endglied hängenden Ringe (siehe Pfeil) und halte mit ihm die Kette. Mit der rechten Hand werfe ich den obersten Ring rasch nach unten. Ihr seht, wie er sich in der Kette von Glied zu Glied abwärts bewegt, bis er schließlich am unteren Ende angekommen ist.
Dann werfe ich den nunmehr obersten Ring nach unten und so weiter.



Das ist die Zauberkette

Der abgeworfene Ring fällt nach unten durch die ganze Kette

Am oberen Ende wird die Kette mehr und mehr verkürzt und dafür unten durch die herabfallenden Ringe entsprechend verlängert. Diese Erscheinung ist verblüffend.

HERSTELLUNG DER KETTE:

Aus 50 Schlüsselringen könnt ihr eine solche Zauberkette von etwa 80 cm Länge herstellen. Ihr könnt aber auch weniger Ringe nehmen, dann ist die Kette kürzer.
Zunächst werden in einen Schlüsselring zwei andere eingehängt (siehe a). Bei dem weiteren „Flechten" der Kette paßt genau auf! Wenn ihr nur *einen* Ring nicht vorschriftsmäßig einhängt, klappt das Zauberkunststück nicht. Am besten hängen wir das Anfangsstück (a) mit einem kurzen Bindfaden auf, zum Beispiel an der Türklinke. Wir haben drei Ringe vor uns wie in a. Jetzt drehen wir den am Faden hängenden oberen Ring um 90° nach rechts (von oben gesehen). Dann sehen wir die 3 Ringe vor uns wie in b. Einer der beiden eingehängten Ringe liegt hinten (2), der andere vorn (3). In den Ring 2 hängen wir den Ring 4 ein (siehe c). Der Ring 5 wird – rechts vom Ring 4 – sowohl in den Ring 2 als auch in 3 eingehängt.

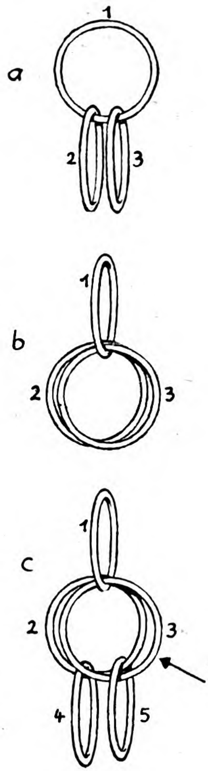
Jetzt drehen wir unser bisheriges Kettenstück (c) wieder um 90° nach rechts, so daß wir dann die Ringe 4 und 5, die in c auf uns zu zeigten, wie die Ringe 2 und 3 in b sehen. Dann wird – wie zuvor – in den hinteren Ring 4 ein neuer Ring eingehängt und rechts von ihm ein weiterer, diesmal sowohl in den hinteren Ring 4 als auch in den vorderen (5) eingehängt. Jedesmal, wenn zwei Ringe eingehängt sind, wird um 90° gedreht, erneut eingehängt und so fort. Zum Abschluß der Kette wird der 50. Ring in den 48. und 49. eingehängt. Die Zauberkette ist fertig.

VORBEREITUNG:

Nicht jeder kann sofort mit der Zauberkette umgehen. Wir müssen noch den Trick kennenlernen, unter dessen Beachtung das Kunststück immer klappt. Ich halte die Kette am obersten Ring mit Daumen und Zeigefinger der rechten Hand (wie im Bild), und achte auf folgendes: Derjenige Ring des 2. Gliedpaares, in den nur *ein* Ring des 3. Paares eingehängt ist, muß – vom Vorführenden aus gesehen – der *linke* Ring des 2. Kettengliedes sein. Das läßt sich auch anders ermitteln: Ich hebe einen Ring des zweiten Kettengliedes etwas an (1 cm). Sind in diesen Ring *zwei* Ringe des 3. Kettengliedes eingehängt, so wird die ganze Kette gehoben. Beim Anheben des anderen Ringes wird aus allen Kettengliedern nur *ein* Ring gehoben. Das ist der richtige Ring! Und er soll – vom Vorführenden aus gesehen – immer der linke Ring des zweiten Kettengliedes sein. Wenn das nicht der Fall ist, drehen wir den obersten Ring – und damit die ganze Kette – um 180 Grad. Jetzt ist alles in Ordnung und fertig zur Vorführung.

VORFÜHRUNG:

Kette am obersten Ring mit Daumen und Zeigefinger der rechten Hand halten. Fasse den *linken* Ring des



Wie man sich die Zauberkette herstellt

zweiten Kettengliedpaares *vorn* (an der dem Zuschauer zugewandten Seite) mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand. Wirf den obersten Ring, den du mit der rechten Hand hältst, kräftig nach unten. Er purzelt – scheinbar – in der Kette hinunter bis an das untere Ende.
Wende die Kette, die du jetzt mit der linken Hand hältst, eine Kleinigkeit, so daß die Zuschauer den obersten Ring wieder in voller Breite sehen. Fasse den *rechten* Ring des zweiten Kettengliedes *hinten* (an der dem Vorführenden zugewandten Seite) mit Daumen und Zeigefinger der rechten Hand und wirf den jetzigen obersten Ring mit der linken Hand kräftig nach unten; und so weiter. Stets an die Regel denken: *links vorn, rechts hinten,* immer abwechselnd.
Sicherlich meint einer der Zuschauer, das kann er auch, oder er möchte es einmal probieren. Wirf ihm die Kette zu! Er wird es nicht zustande bringen, weil er die Regel nicht kennt: links vorn, rechts hinten.

ERKLÄRUNG:

Das Kunststück beruht auf einer optischen Täuschung. Die nach unten geworfenen Ringe fallen keineswegs – wie es aussieht – durch alle Kettenglieder nach unten.
Durch probeweises Anheben des Ringes 2 oder Senken des Ringes 1 wird sichtbar, daß an jedem dieser beiden Ringe je die Hälfte aller Kettenringe hängt. Der Ring 1 wird beim Abwerfen zu einem Glied des neuen zweiten Kettengliedpaares. Damit fallen auch alle am bewegten Ring 1 hängenden Ringe der Doppelkette um ein Kettenglied abwärts. Durch den besonderen Kettenaufbau rücken die Ringe nicht gleichzeitig nach unten, sondern zeitlich nacheinander. Dadurch wird unserem Auge das Abwärtsgleiten *eines* Ringes (des obersten) vorgetäuscht. Da die Kettenglieder immer um 90° versetzt sind, ist ein spiralenähnliches Fortschreiten der Fallbewegung zu beobachten. Das kann man deutlich verfolgen, wenn der oberste Ring einmal möglichst langsam gesenkt wird.
Während zu Beginn der Vorführung der Ring 2 (aus dem zweiten Kettengliedpaar) zum obersten Ring wird und der Ring 1 in das neue

zweite Kettengliedpaar rückt, wird beim zweiten Handgriff der Ring 1 wieder zum obersten Ring, und der Ring 2 fällt wieder in das zweite Kettenglied. Dieser Vorgang wiederholt sich dauernd.

Durch eine Postkarte kriechen

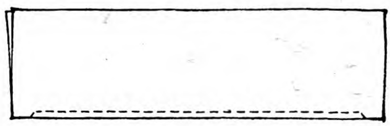
Wenn wir jemandem eine Postkarte und eine Schere zur Verfügung stellen und ihn auffordern, ein Loch in die Karte zu schneiden, durch das er hindurchkriechen kann, so wird er kaum eine Möglichkeit dazu sehen.

Zeigen wir ihm, wie das zu machen ist.

Wir falten die Karte in der halben Höhe und schneiden längs der gestrichelten Linie einen schmalen Schlitz heraus (a). Am linken und rechten Ende bleibt ein knapper Zentimeter der Faltlinie stehen. Dann führen wir mit der Schere Schnitte, wie sie in b angedeutet sind, erst von unten, dann von oben, wieder von unten und so weiter. Sie werden immer nur bis etwa 4 mm an die Außenkante herangeführt. Nie bis zum Ende durchschneiden! Streifenbreite etwa 4 mm. In dieser Weise schneiden wir etwa 36mal in die Karte hinein.

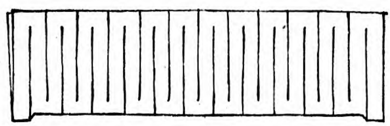
Dann breiten wir die Postkarte wieder auf volle Größe aus, ziehen sie vorsichtig auseinander und erhalten einen Zickzackring, durch den wir ohne weiteres hindurchsteigen können.

a



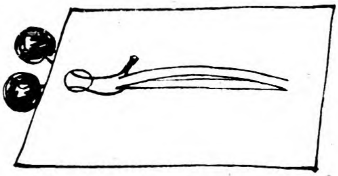
So wird's gemacht

b



Zwei Kirschen in der Postkarte

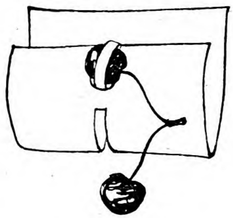
Wie holt man die Kirschen heraus? Die Karte darf dabei nicht beschädigt werden. Ebenso müssen beide Stengel zusammen und die Kirschen an ihnen verbleiben.
Das Loch in der Karte ist kleiner als jede der beiden Kirschen. Der ausgeschnittene Streifen ist schmaler als der kreisförmige Ausschnitt.
Die Karte wird zusammengebogen und der Streifen samt den beiden Stengeln durch das Loch gezogen. So wird das Kirschenpaar aus- und auch eingefädelt.



a

Wie holt man die Kirschen heraus?

b

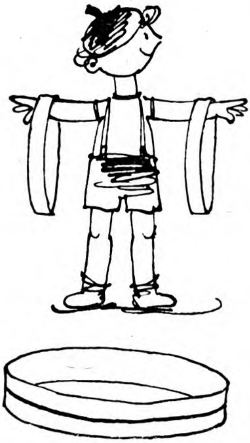


Aha! So!

Rätselhafte Ringe

Wir schneiden uns von einer Zeitung einen Streifen ab, etwa 60 cm lang, 5 cm breit, und kleben ihn zu einem Ring zusammen. Dieser Ring hat einen oberen und einen unteren Rand, eine Außen- und eine Innenseite. Wenn sich eine Ameise auf der Außenseite dieses Ringes befindet, so kann sie nur durch Überschreiten eines Randes auf die Innenseite gelangen.
In halber Höhe der Außenseite ziehen wir mit einem Bleistift eine Linie rings um den Ring herum. Wenn wir den Ring längs der schwarzen Linie aufschneiden, so erhalten wir zwei Ringe von halber Höhe.

Das ist alles ohne weiteres klar und verständlich. Aber jetzt kommt das Merkwürdige.
Wir schneiden einen zweiten Streifen Zeitungspapier von gleicher Größe zu. Bevor wir ihn zusammenkleben, drehen wir aber das eine Papierende herum, so daß also die untere Seite des einen Endes auf die obere Seite des anderen Endes zu liegen kommt. Dann erst kleben wir beide Enden aufeinander.
In halber Höhe malen wir wie vorhin wieder eine schwarze Linie auf. Überrascht werden wir feststellen, daß es keine unbemalte Seite des Ringes mehr gibt. Die schwarze Linie ist in sich geschlossen. Wenn eine Ameise längs dieser schwarzen Linie läuft, so läuft sie den ganzen Streifen ab, ohne über den Rand klettern zu müssen. Dieser Ring hat also keine Außen- und keine Innenseite, er hat nur *eine* Seite.
Dann läuft unsere Ameise auf dem Rand entlang. Wir verfolgen ihren Weg mit der Bleistiftspitze und finden: Dieser Ring hat keinen oberen und unteren Rand, sondern er hat nur *eine* in sich geschlossene Randlinie.
Dieser merkwürdige Ring unterscheidet sich also wesentlich von dem ersten Ring. Er wird in der Mathematik nach seinem Entdecker als das Möbiussche Band bezeichnet. Dieser Ring hat eine weitere seltsame Eigenschaft. Wir schneiden den Ring längs der schwarzen Linie auf. Wider Erwarten erhalten wir dabei nicht etwa zwei Ringe, sondern nur *einen* doppelt verdrillten Ring von doppelter Größe und halber Höhe.
Nun schneiden wir uns noch einen dritten Streifen Zeitungspapier, gleich groß wie vorher. Vor dem Zusammenkleben wenden wir das eine Ende *zweimal* herum.
In der Mitte des Streifens malen wir wieder eine schwarze Linie auf.
Ob auch dieser Ring, ebenso wie der *ein*mal gewundene, nur *eine* Seite hat? Zu unserer Überraschung stellen wir fest, daß dieser Ring, genau wie der erste, wieder zwei Seiten hat, eine äußere und eine innere. Wieder lassen wir in Gedanken eine Ameise auf dem Rand dieses Ringes entlanglaufen und verfolgen ihren Weg. Dabei finden wir, daß der Ring zwei Ränder hat, einen oberen und einen unteren. Wenn wir



Durch Zerschneiden in halber Höhe entstehen *zwei Ringe* von halber Höhe

Beim Zerschneiden des verdrillten Ringes erhalten wir *einen* Ring von halber Höhe

Beim Zerschneiden des doppelt verdrillten Ringes erhalten wir *zwei* ineinander hängende Ringe

diesen Ring in halber Höhe aufschneiden, so erhalten wir zwei Ringe, die ineinanderhängen wie zwei Glieder einer Kette.
Wer hätte vermutet, daß wir mit einfachen Papierringen so seltsame Scherenschnitte vorführen können?

Du addierst Zahlen – ich weiß, was herauskommt

Schreibe untereinander:
1. Irgendeine Geschichtszahl, die du ganz beliebig wählen kannst.
2. Dein Geburtsjahr.
3. Wieviel Personen im Zimmer sind.
4. Wie alt du bist oder in diesem Jahr noch wirst.
5. Schreibe noch auf, wieviel Jahre das Geschichtsereignis zurückliegt, das du zuerst notiert hast.

Jetzt zähle diese fünf Zahlen zusammen. Das Ergebnis, das du beim Zusammenzählen dieser Zahlen erhältst, läßt sich stets vorherbestimmen!

SPIELREGEL:

Ich lasse die oben angegebenen Zahlen aufschreiben und zusammenzählen. Davon kenne ich selbst nur die Zahl der Personen im Zimmer. Und trotzdem kann ich stets das richtige Ergebnis nach folgender Regel angeben:

Ergebnis = Personenzahl + doppelte (heutige) Jahreszahl

Im Jahr 1958 rechnet ihr: Personenzahl $+ 2 \cdot 1958 = 3916 +$ Personenzahl.

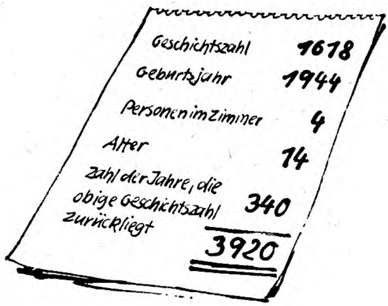
Wenn ihr das Kunststück im Jahr 1959 vorführt, müßt ihr rechnen: Personenzahl $+ 2 \cdot 1959$. Und entsprechend in späteren Jahren.

Das wirkt außerordentlich verblüffend, weil ich tatsächlich vier der aufgeschriebenen Zahlen nicht kenne. Am besten führt ihr den Trick nur einmal vor, damit die Anwesenden nicht gleich dahinterkommen, daß bei gleicher Personenzahl das Ergebnis immer gleich ist. Aber meist werdet ihr gebeten, die rätselhafte Addition noch einmal vorzuführen. Dann ändert ihr am besten das Verfahren ein wenig ab und laßt außer den obigen 5 Zahlen noch eine von euch angesagte beliebige Zahl hinzuzählen, die ihr aber in eure Berechnung mit aufnehmen müßt.

ERKLÄRUNG:

Die Anwesenden wurden in zweierlei Hinsicht irregeführt. Zwar kennt ihr nicht das Geburtsjahr und auch nicht das Alter der betreffenden Person. Die Summe dieser beiden unbekannten Zahlen ergibt aber immer 1958, das heißt, wenn ihr den Trick im Jahre 1958 vorführt. Beispielsweise ist einer 1940 geboren und jetzt 18 Jahre alt. Geburtsjahr + Alter ergibt: $1940 + 18 = 1958$. Das ist zwar eine ganz einfache Sache, wird aber von den meisten bei der Vorführung des Kunststückes nicht sofort erkannt.

Ihr kennt auch nicht die notierte Geschichtszahl. Als ihr aber zuletzt hinzuschreiben ließt, wieviel Jahre die Geschichtszahl zurückliegt, sorgtet ihr dafür, daß diese beiden Zahlen zusammen wieder 1958 ergeben. Somit ist die Gesamtsumme aller aufgeschriebenen Zahlen: Personenzahl (die ihr selbst kennt) + 2 · 1958.



Denke dir eine Zahl

Schreibe eine beliebige ganze Zahl auf. Wähle aber zunächst eine niedrige Zahl, damit die Rechnung, die jetzt kommt, nicht zu lange dauert.
Zähle zu der gewählten Zahl 5 hinzu.
Das Ergebnis multipliziere mit 18.
Ziehe davon das Dreifache der zuerst gewählten Zahl ab.
Teile das letzte Ergebnis durch 15. – Die Division geht auf, es bleibt kein Rest.
Von der Zahl, die du bei der Division erhieltest, ziehe die zuerst gewählte ganze Zahl ab.
Obwohl die gewählte Zahl unbekannt ist, kann ich sagen, was bei der Rechnung herausgekommen ist, nämlich 6!
Probiere die gleiche Rechnung mit irgendeiner anderen Zahl. Immer kommt 6 heraus!

ERKLÄRUNG:

Die gewählte Zahl sei:	x
Dann wurde 5 addiert:	$x+5$
Danach mit 18 multipliziert:	$(x+5)18$
Davon wurde das Dreifache der gewählten Zahl subtrahiert:	$(x+5)18-3x$
Schließlich das Ergebnis durch 15 geteilt:	$\frac{(x+5)18-3x}{15}$
Und endlich die gewählte Zahl abgezogen:	$\frac{(x+5)18-3x}{15}-x=?$

Was kommt da heraus?

Wir multiplizieren die Klammer aus:	$\frac{18x+90-3x}{15}-x=?$
Der Zähler wird vereinfacht:	$\frac{15x+90}{15}-x=?$
Im Zähler wird 15 ausgeklammert:	$\frac{15(x+6)}{15}-x=?$
Mit 15 gekürzt:	$\frac{\cancel{15}(x+6)}{\cancel{15}}-x=?$
Es bleibt:	$x+6-x=?$
+ x und — x heben sich auf,	$\cancel{x}+6-\cancel{x}=?$
es bleibt als Endergebnis	$\underline{\underline{6}}$

Die gewählte Zahl x hebt sich aus der Rechnung heraus und hat somit keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Du rechnest und rechnest und merkst dabei gar nicht, daß du die von dir gewählte Zahl – die mir unbekannt war – selbst wieder aus der Rechnung hinausbringst.

Ich errate, wie alt du bist

Das werden wir gleich heraus haben. Multipliziere die Zahl deiner vollen Lebensjahre mit 2. Zähle 5 hinzu! Multipliziere das Ergebnis mit 5! Hast du das Ergebnis aufgeschrieben? Streiche die letzte Ziffer des Ergebnisses weg. Verringere die jetzt dastehende Zahl um 2. Dann steht schwarz auf weiß vor dir, wie alt du bist.
Beispielsweise rechnet ein Dreizehnjähriger:

Alter in Jahren mal 2:	$13 \cdot 2 = 26$
5 hinzuzählen:	$26 + 5 = 31$
mit 5 multiplizieren:	$31 \cdot 5 = 155$
Du läßt dir die erhaltene Zahl nennen:	155
Du streichst die letze Ziffer weg:	$15\cancel{5}$
und verringerst die dastehende Zahl um 2:	$\begin{array}{r} 15 \\ -\ 2 \\ \hline 13 \end{array}$

Jetzt kannst du deinem Partner zu seinem Erstaunen sagen, daß er 13 Jahre alt ist. Opa nannte als Ergebnis seiner Rechnung die Zahl 835. Er ist also 81 Jahre alt.

ERKLÄRUNG:

Das uns zunächst unbekannte Alter sei:	x
Mit 2 multipliziert:	$x \cdot 2$
5 hinzugezählt. Das Ergebnis mit 5 multipliziert:	$x \cdot 2 + 5$
Wir multiplizieren die Klammer aus:	$(x \cdot 2 + 5) \cdot 5$
	$10x + 25$

Anders geschrieben: x Zehner + 2 Zehner + 5 Einer das Ergebnis als *eine* Zahl in Rechenkästchen geschrieben:

Zehner	Einer
$x+2$	5

Wenn wir aus der uns genannten Ergebniszahl das Alter x finden wollen, müssen wir die letzte Ziffer (5) wegstreichen und die vorletzte Zahl um 2 verringern. – Das ist der mathematische Beweis für unser Zahlenkunststück.

Auch das Geburtsdatum wird gefunden

Du forderst deinen Spielpartner auf, die Tageszahl seines Geburtstages zu verdoppeln. Dann soll er 5 hinzuzählen. Das Ergebnis ist mit 50 zu multiplizieren. Und schließlich soll er noch die Monatszahl hinzuzählen. Du läßt dir das Ergebnis nennen und ziehst davon heimlich die Zahl 250 ab. Wenn du dabei zum Beispiel die Zahl 1110 erhältst, so erkennst du daraus als Geburtstag den 11. 10., also den 11. Oktober. Die letzten beiden Ziffern der erhaltenen Zahl werden also abpunktiert.

BEISPIEL:

Vielleicht ist dein Spielpartner am 27. März geboren. Er rechnet also wie folgt:

Tageszahl mit 2 multiplizieren:	$27 \cdot 2 = 54$
5 hinzuzählen:	$54 + 5 = 59$
Mit 50 multiplizieren:	$59 \cdot 50 = 2950$
Monatszahl hinzuzählen:	$2950 + 3 = 2953$

Dieses Ergebnis wird dir genannt.

Du subtrahierst heimlich 250:

$$\begin{array}{r} 2953 \\ -\ 250 \\ \hline 2703 \end{array}$$

Die letzten beiden Ziffern trennst du durch einen Punkt ab.

Die ersten beiden Ziffern geben die Tageszahl 27 an.

Die letzten beiden Ziffern geben die Monatszahl 3 an.

Das Geburtsdatum lautet: 27.3.

ERKLÄRUNG:

Tageszahl und Monatszahl sind immer durch je zwei Ziffern gekennzeichnet, die Tageszahl durch die Ziffern a und b, die Monatszahl durch c und d.

$$\underbrace{\boxed{a}\boxed{b}}_{\text{Tageszahl}}\ \underbrace{\boxed{c}\boxed{d}}_{\text{Monatszahl}}$$

Bei Tageszahlen unter 10 ist $a = 0$. Bei Monatszahlen unter 10 ist $c = 0$. In der Tageszahl $\boxed{a}\boxed{b}$ steht die Ziffer a an Stelle der Zehner, die Ziffer b an der Stelle der Einer. Der Zahlenwert der Tageszahl beträgt somit: $10a + b$.

In der Monatszahl $\boxed{c \mid d}$ steht die Ziffer c an Stelle der Zehner, die Ziffer d an Stelle der Einer. Der Zahlenwert der Monatszahl beträgt also: $10c + d$.

Unser Partner multipliziert zuerst die Tageszahl mit 2.

Er rechnet also: $(10a+b)\cdot 2$

Dann zählt er 5 hinzu: $(10a+b)\cdot 2+5$

Er multipliziert das Ganze mit 50: $[(10a+b)\cdot 2+5]\cdot 50$

Er zählt die Monatszahl hinzu: $[(10a+b)\cdot 2+5]\cdot 50+10c+d$

Wir multiplizieren die runde Klammer aus: $[20a+2b+5]\cdot 50+10c+d$

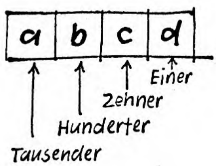
dann die eckige Klammer: $1000a+100b+250+10c+d$

Dieses Resultat wurde von unserem Partner errechnet.

Wir haben heimlich 250 abgezogen: $1000a+100b+10c+d$

Wir erhielten: a Tausender + b Hunderter + c Zehner + d Einer

Als Zahl geschrieben:



In der vierziffrigen Zahl, die unser Partner errechnete, stehen also in den letzten beiden Stellen die Ziffern der Monatszahl, in den ersten beiden Stellen die Ziffern der Tageszahl.

1089

Schreibe eine beliebige dreistellige Zahl auf! Ich stelle dabei nur eine Bedingung, die letzte Ziffer muß mindestens um 2 kleiner sein als die erste Ziffer. Darunter setzt du die umgekehrte Ziffernfolge dieser Zahl: die dritte Ziffer dieser Zahl an erste Stelle und so weiter. Mach einen Strich darunter und ziehe die untere Zahl von der oberen ab. Du erhältst ein Ergebnis, das ich nicht kenne. Ich weiß nur, daß du wieder eine dreistellige Zahl erhalten hast.
Dann schreibe noch die umgekehrte Ziffernfolge dieses Ergebnisses darunter. Jetzt zähle die letzten beiden dreistelligen Zahlen zusammen. Ich weiß, welches Ergebnis du erhalten hast: 1089!

BEISPIEL:

Angenommen, man wählt die Zahl:	972
Kehrt die Reihenfolge der Ziffern um:	− 279
abziehen:	693
Ziffernfolge umkehren:	+ 396
Zusammenzählen:	1089

Man erhält in jedem Falle 1089. Sonderbar, nicht wahr? Warum ist das so?

ERKLÄRUNG:

Die dreistellige Zahl sei $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$

anders geschrieben: x Hunderter + y Zehner + x Einer

Die umgekehrte Ziffernfolge: $\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$

anders geschrieben: z *Hunderter* + y *Zehner* + x *Einer*

Wir wollen von der oberen Zeile die untere abziehen. Das geht nicht ohne weiteres, weil in der rechten Spalte die Zahl x, die wir von z abziehen sollen, größer ist als z.
Um das Abziehen zu ermöglichen, „borgen" wir uns in der oberen Zeile von x einen Hunderter. Diesen Hunderter nehmen wir in Form von 9 Zehnern und 10 Einern nach rechts. Dann sieht die obere Zeile wie folgt aus:

	$(x-1)$	Hunderter	$+$	$(9+y)$	Zehner	$+$	$(10+z)$	Einer
die abzuziehende Zeile war:	z	"	$+$	y	"	$+$	x	"
Jetzt können wir abziehen und erhalten:	$(x-1-z)$	Hunderter	$+$	9	Zehner	$+$	$(10+z-x)$	Einer
die Ziffernfolge wieder umkehren:	$(10+z-x)$	"	$+$	9	"	$+$	$(x-1-z)$	"
addieren:	9	Hunderter	$+$	18	Zehner	$+$	9	Einer

Die 3 beliebigen Zahlen sind bei der Rechnung hinausgefallen. In jedem Falle erhalten wir

9 Hunderter:	900
18 Zehner:	+ 180
9 Einer:	+ 9
	1089

Eine sonderbare Geschichte: Dieses Ergebnis konnte niemand voraus-ahnen, und deshalb ist jeder zunächst verblüfft, wenn man ihm dieses Zahlenkunststück vorführt. Wer die Sonderfälle und die Gesetzmäßigkeiten im Reich der Zahlen ergründen will, der muß schon mit x, y und z der Mathematik etwas vertraut sein.
Manchmal kommt es vor, daß der Spielpartner, dem du den Trick vorführst, schadenfroh lächelnd sagt: „Nein, das stimmt nicht! Ich habe nicht 1089 heraus!"

Dann sagst du ihm am besten gleich: „Nun, dann hast du eben 198 erhalten!" Das stimmt dann wieder.
Er hat nämlich gegen die Spielregel verstoßen und die letzte Ziffer nicht um mindestens 2 kleiner gemacht als die erste.

Er wählte zum Beispiel: und rechnete weiter:

$$
\begin{array}{r}
857 \\
-\,758 \\
\hline
99 \\
+\,99 \\
\hline
\underline{\underline{198}}
\end{array}
$$

Wir wollten hier nur mit dreistelligen Zahlen rechnen. Wenn in der Rechnung eine Null auftaucht, muß sie somit auch als Ziffer geschrieben werden. Also:

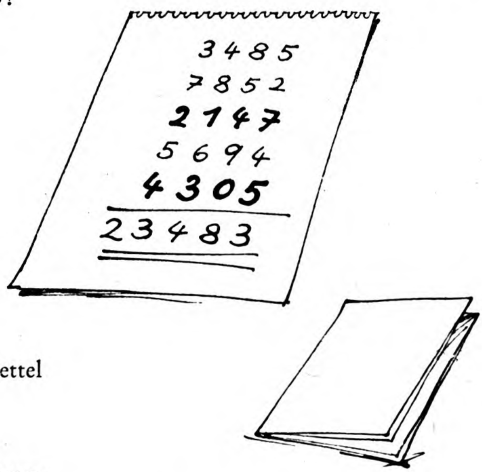
$$
\begin{array}{r}
857 \\
-\,758 \\
\hline
099 \\
+\,990 \\
\hline
\underline{\underline{1089}}
\end{array}
$$

Nun stimmt es wieder!
Aber dieser Zwischenfall kommt nur selten vor. Die meisten wählen schon Zahlen, deren letzte Ziffer um mehr als 1 kleiner ist als die erste Ziffer. Und dann gibt es keine Hindernisse; stets können wir das Ergebnis der Rechnung voraussagen: 1089.

Vierstellige Zahlen

Schreibe auf einen Zettel eine beliebige vierstellige Zahl und nenne sie mir. Angenommen, du hast 3485 gewählt.
Ich nehme jetzt einen anderen kleinen Zettel, schreibe eine Zahl, ohne

sie dir zu zeigen, auf und falte ihn zusammen. Du wirst ihn später nehmen und nachsehen, was ich aufgeschrieben habe.
Jetzt schreibe unter deine erste Zahl noch eine beliebige zweite vierstellige. Zum Beispiel: 7852. Nun schreibe *ich* eine vierstellige Zahl darunter. Ich nehme: 2147. Als nächste Zahl wählst du zum Beispiel 5694. Auch ich setze noch eine vierstellige Zahl darunter: 4305.
Addiere die fünf aufgeschriebenen Zahlen! Zeige mir aber das Ergebnis noch nicht. – Mache meinen zusammengefalteten Zettel auf. Du bist überrascht: Auf dem Zettel steht das Ergebnis, das du eben erst ausgerechnet hast: 23 483!



So steht es auf dem Zettel

ERKLÄRUNG:

Du hattest als erste Zahl 3485 aufgeschrieben. Ich schrieb auf den anderen Zettel, den ich dann zusammenfaltete, zuerst die Ziffer 2, dahinter die Ziffern deiner Zahl, die ich um 2 kleiner machte, also: 23 483. Und das war auch dein Ergebnis. Du hast deine 3 Zahlen ganz beliebig aufgeschrieben, ich jedoch habe meine beiden Zahlen nicht beliebig gewählt. Ich habe diejenigen Ziffern aufgeschrieben, die jeweils mit deinen Ziffern zusammen die Ziffer 9 ergeben. Zum Beispiel schrieb ich unter deine 7 die 2, unter deine 8 die 1, unter deine 5 die 4, unter deine 2 die 7.

Die erste Zahl auf dem Zettel war 3485. Die zweite und dritte ergeben zusammen 9999, die vierte und fünfte zusammen ebenfalls 9999. Zu der Zahl 3485 wurde zweimal 9999 hinzugefügt. Zweimal 9999 ergibt 19 998. Das sind: 20 000 weniger 2. Wenn ich auf dem Faltzettel vor die vierstellige Zahl die Ziffer 2 setzte, wurde aus 3485 die Zahl 23 485, also 20 000 mehr! Ich durfte aber nur 19 998 hinzufügen. Deshalb habe ich die erste Zahl um 2 kleiner gemacht.

Wettlauf bis 100

Wir vereinbaren folgendes Spiel: Einer von uns nennt eine beliebige einstellige Zahl, der andere nennt eine höhere Zahl, die sich aber von der vorgenannten um nicht mehr als 10 unterscheiden darf. So wechseln wir ab. Die genannten Zahlen werden größer und größer. Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregel die Zahl 100 erreicht.

BEISPIEL:

Du beginnst mit 7

12 sage ich

22
23
29
34
42
45
46
56
65
67
75
78
88
89
91
100

Du und ich, wir machen dieses Zahlenkunststück zusammen

Merkst du was? Es ist zu spät!

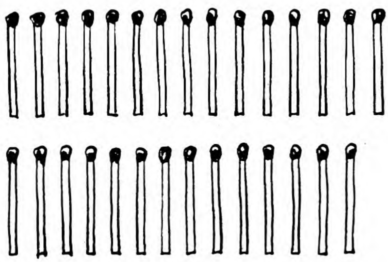
Ich habe gewonnen und will es dir voraussagen: Ich gewinne immer! Dabei ist nämlich ein Trick. Du hast deine Zahlen zu Beginn unseres Wettlaufes beliebig gewählt. Ich aber habe meine Zahlen so gewählt, daß du nicht gewinnen konntest.

ERKLÄRUNG:

Wer die 89 nennen kann, gewinnt. Gemäß der Spielregel besteht beim nächsten Zug nicht die Möglichkeit, bis zur 100 zu kommen, doch der folgende kann die 100 sicher bringen.
Die 89 ist demjenigen sicher, der für sich schon die 78 eingebracht hat. Und die 78 kann er bestimmt nennen, wenn er selbst die Zahl 67 ins Spiel gebracht hat und so weiter.
Will man gewinnen, muß man dafür sorgen, daß man selbst die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 ins Spiel bringt und diese Zahlenfolge beibehält. Sie ist leicht zu merken, da sie sich jeweils um 11 unterscheiden. Die *Einer*ziffer dieser Zahlen ist immer um 1 größer als die *Zehner*ziffer.

Streichholzkunststück

Lege – ohne daß ich es sehe – beliebig viel Streichhölzer auf den Tisch in einer Reihe nebeneinander, nimm aber mehr als zehn!



Darunter legst du eine zweite Reihe, aber ein Streichholz weniger als in der oberen Reihe.

Fertig? Jetzt lege von der oberen Reihe 8 Streichhölzer beiseite. Dann nimm von der unteren Reihe ebensoviel Streichhölzer weg, wie jetzt noch in der oberen Reihe liegen. Schließlich nimm alle Streichhölzer weg, die jetzt noch in der oberen Reihe liegen.
Obwohl ich nicht weiß, wieviel Streichhölzer in der oberen und in der unteren Reihe lagen, kann ich sagen, wieviel Streichhölzer jetzt noch auf dem Tisch liegen. Es sind 7! Stimmt's?
Wie geht das zu?

ERKLÄRUNG:

In der oberen Reihe lagen	x Streichhölzer	In der unteren Reihe lagen $(x-1)$.
Nach dem Weglegen von 8 Streichhölzern verblieben	$(x-8)$ Streichhölzer	Es wurden $x-8$ Streichhölzer abgezogen, und es verblieben: $(x-1)-(x-8)$
Schließlich wurden $(x-8)$ Streichhölzer weggenommen. Es verblieben	0 Streichhölzer	$x-1-x+8$ $-1+8$ 7

Die Regel fordert ein solches Weglegen der Streichhölzer, daß die unbekannte Zahl aus der Rechnung verschwindet.

Zwei Würfel

Gib deinem Partner einen Würfelbecher mit zwei Würfeln. Er soll einen Wurf machen, und zwar derart, daß du das Ergebnis nicht siehst.
Laß die geworfene Augenzahl des ersten Würfels verdoppeln und dann

5 hinzuzählen, das Ergebnis mit 5 multiplizieren und dann die Augen des zweiten Würfels hinzuzählen.
Fordere ihn auf, die erhaltene Zahl zu nennen. Er sagt zum Beispiel 51.
Von seinem Ergebnis (51) ziehst du stillschweigend 25 ab und erhältst 26.
Die erste Ziffer deines Rechenergebnisses gibt die Augen des einen, die zweite die des anderen Würfels an. Also kannst du deinem Freund verkünden: „Du hast geworfen: 2 und 6."

ERKLÄRUNG:

Die Augenzahlen wollen wir x und y nennen. Das sind die beiden Zahlen, die wir oben gefunden haben.

Die erste Augenzahl wurde verdoppelt	$2x$,
und 5 hinzugezählt	$2x + 5$,
dann mit 5 multipliziert:	$10x + 25$,
schließlich die zweite Augenzahl (y) addiert:	$10x + 25 + y$.

Dieses Ergebnis wurde mitgeteilt. Die Zahl 25 wird abgezogen

und wir erhalten:	$10x + y$
Anders geschrieben:	$10 \cdot x + y \cdot 1$
oder	x Zehner + y Einer.

Die Zahl, die genannt wurde, war eine zweiziffrige Zahl, an deren erster Stelle die Zehner stehen, an der zweiten die Einer. Die gesuchte Zahl x steht an erster Stelle und y an zweiter.

Drei Würfel

Stelle drei Spielwürfel aufeinander. Welche Zahl zeigt die obere Fläche des höchsten Würfels? Du nennst mir, sagen wir, 5.
Jetzt sieh dir – ohne daß ich es sehe – folgende Würfelflächen der Säule an und schreibe dir die jeweilig abgelesenen Punktzahlen auf:

untere Fläche des obersten Würfels
obere Fläche des mittleren Würfels
untere Fläche des mittleren Würfels
obere Fläche des untersten Würfels
untere Fläche des untersten Würfels

Zähle diese mir unbekannten fünf Punktzahlen zusammen.
Ich sage dir, was du gefunden hast: 16!

ERKLÄRUNG:

Die Summe von zwei gegenüberliegenden Flächen eines Würfels ergibt immer 7. Das ist bei jedem Würfel so.
Die oberen und unteren Würfelzahlen der drei übereinandergestellten Würfel ergeben also 21. (Das weiß nicht jedermann.) Die 5 als oberste Würfelzahl war mir bekannt, von 21 zog ich 5 ab und erhielt so die von mir genannte Zahl 16.

Karten tasten

Hinter dem Rücken halte ich einen Kartenstoß, der von einem Zuschauer gemischt wurde. Ich behaupte, durch Abtasten – ohne hinzusehen – ermitteln zu können, welche Karte ich jeweils in der Hand halte und dann zeigen werde.
Ich nenne Herzsieben und zeige sie dann als vorderste Karte des gesamten Spiels. Jetzt nehme ich den Stoß wieder hinter den Rücken. „Grünober" (Pikdame)! Tatsächlich, das vorderste Blatt ist jetzt Grünober. Ich zeige weitere Karten, ohne einen Blick auf sie zu werfen. Scheinbar finde ich die Karten durch Tasten heraus.

ERKLÄRUNG:

Nehme ich das gemischte Kartenspiel in die Hand, schaue ich unbemerkt auf die unterste Karte. Das ist Herzsieben. Ich weiß also, wo Herzsieben liegt, und verkünde sogleich, daß ich jetzt Herzsieben zeigen werde. Bevor ich jedoch den Stoß mit Herzsieben als vordere (unterste) Karte vorzeige, kehre ich – immer noch hinter dem Rücken – das oberste Blatt um. Wenn ich dann die Herzsieben zeige, sehe ich – ohne daß die Zuschauer es merken – die Bildseite der obersten Karte, den Grünober. Halte ich das Spiel wieder hinter dem Rücken, lege ich die oberste Karte (Grünober) als unterste bereit zum Vorzeigen; gleichzeitig kehre ich die jetzige oberste Karte des Stoßes um, und das Spiel geht so weiter.

Vier bestimmte Karten ziehen

Ich lasse das Kartenspiel mischen und verteile dann die Karten mit dem Rücken nach oben auf dem Tisch.
„Zeigt bitte auf die Herzzehn (Rotzehn)! Tippt auf irgendeine Karte! Aber die Karte nicht aufdecken! Ich zeige sie euch später!"
Die angezeigte Karte nehme ich so auf, daß das Kartenbild nicht zu sehen ist, und lege sie verdeckt beiseite.
„Nun tippt bitte auf Karokönig (Schellenkönig)." Auch diese Karte nehme ich auf und lege sie zur ersten.
„Jetzt zeigt mir Kreuzbube (Eichelunter)!" Wieder lege ich die Karte beiseite.
Und nun ziehe ich selbst eine Karte, und zwar – Pikacht. Dann nehme ich die vier gezogenen Karten in die Hand und fächere sie – Bildseite zu mir – auf. „Hier, die Herzzehn, der Karokönig, der Kreuzbube und Pikacht." Ich übergebe die vier Karten. Alle haben wie gewünscht gezogen. Die Mitspieler staunen.

ERKLÄRUNG:

Als ich die gemischten Karten in die Hand nahm, blickte ich unbemerkt auf die unterste Karte. Es war die Herzzehn. Beim verdeckten Ausbreiten legte ich sie an eine bestimmte Stelle und merkte sie mir. Dann forderte ich auf, die Herzzehn zu zeigen. Die Karte aber, die zuerst

gezeigt wurde, war in Wirklichkeit der Karokönig, wie allein *ich* beim Aufnehmen dieser Karte feststellte. Nun forderte ich einen anderen Mitspieler auf, den Karokönig zu ziehen. Dieser tippte aber auf Kreuzbube. Den nächsten bat ich, Kreuzbube zu zeigen. Er zog aber Pikacht, und schließlich zog ich selbst angeblich die Pikacht, und zwar dort, wo ich zuvor die Herzzehn hingelegt hatte.
Jetzt habe ich in der Hand: Herzzehn, Karokönig, Kreuzbube und Pikacht, und kann jedem die Karte überreichen, die er angeblich richtig gemäß Aufforderung gezogen hatte.

Bleibt übrig?

Dieses Kunststück wird mit deutschen Skatkarten durchgeführt. Ich lasse sie mischen, abheben, nochmals mischen und stecke sie dann in die Tasche. Es entspinnt sich folgende Unterhaltung:

Ich: In diesem Kartenspiel gibt es *reine Farben,* Rot und Grün, und *gemischte Farben,* Eichel und Schellen. Bitte wähle eine von beiden Gruppen: reine Farben oder gemischte. Ganz wie du willst!

Mitspieler: Gemischte Farben.

Ich: Welche Farbengruppe bleibt übrig?

Mitspieler: Die reinen Farben.

Ich: Gewiß! Such dir bitte eine von beiden Farben aus.

Mitspieler: Grün.

Ich: Gut. Bleiben wir bei Grün. Da gibt es einerseits Bilderkarten (Daus, König, Ober, Unter), andererseits Zahlenkarten (10, 9, 8, 7). Nenne eine von beiden Gruppen!

Mitspieler: Bilderkarten.

Ich: Bleiben übrig?

Mitspieler: Zahlenkarten.

Ich: Bei den Zahlenkarten gibt es wieder eine obere Gruppe, Zehn und Neun, und eine untere Gruppe, Acht und Sieben. Welche von beiden Gruppen, die obere oder die untere möchtest du?

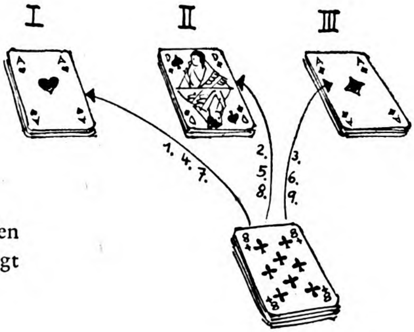
Mitspieler: Die untere.
Ich: Zu der unteren Zahlengruppe gehören die Acht und die Sieben. Wähle eine von beiden.
Mitspieler: Sieben.
Ich: Sieben. Grünsieben willst du haben. Als wievielte Karte soll ich sie aus der Tasche ziehen?
Mitspieler: Als dritte Karte.
Ich: Bitte schön. Karte Nummer Eins, Nummer Zwei und Nummer Drei ist – wie du siehst – die gewählte Grünsieben.

ERKLÄRUNG:

Bevor ich den Kartenstoß in die Tasche steckte, blickte ich unbemerkt auf die unterste Karte. Es war die Grünsieben. Meine Fragen stellte und lenkte ich derart, daß wir schließlich bei der Grünsieben anlangten, deren Lage in der Tasche mir ja bekannt war. Immer dann, wenn mich eine Antwort nicht direkt zum Ziel führte, stellte ich die Frage „Bleibt übrig?“ und kam wieder auf die richtige Spur und schließlich zur Grünsieben.

Merke dir eine Karte!

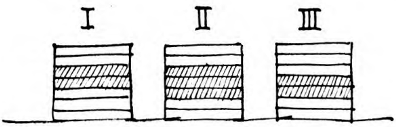
Hier habe ich 21 Karten. Mische sie! Unverändert nehme ich den Stoß in die Hand; die Kartenbilder zeigen dabei nach oben.
Ich blättere die Karten offen auf:
die erste Karte nach links, die nächste in die Mitte, die dritte nach rechts; dann wieder links, Mitte, rechts und so weiter. Dabei merkst du dir eine Karte, aber ohne zu sagen, welche. Aber sage mir, ob sie im ersten, zweiten oder dritten Stoß liegt. Habe ich die Karten wieder zusammengelegt, decke ich ein zweites Mal auf. Du nennst mir wieder den Stoß, in dem deine Karte liegt. Das wiederhole ich noch einmal. Mit dem Rücken nach oben liegen die Karten vor mir. Rasch zeige ich das von dir gewählte Blatt.



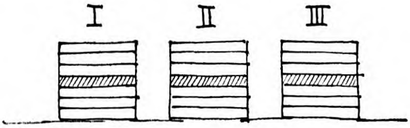
Die Karten werden in drei Stößen
offen aufgelegt

ERKLÄRUNG:

Beim Zusammenlegen wird der bezeichnete Stoß immer an zweiter Stelle aufgenommen. Nach dreimaligem Auf- und Zusammenlegen ist die gewählte Karte stets die elfte.
Warum? Ich weiß nur, in welchem Stoß sie liegt, daß es also eine von diesen sieben Karten ist. Da der genannte Stoß in die Mitte genommen wurde, kommen die 7 Karten beim nächsten Auflegen wie folgt zu liegen:



Die 7 Karten des ersten Auswahlstoßes
kommen beim zweiten Aufblättern in
die schraffierten Lagen



Beim dritten Aufblättern liegen die in Frage
kommenden drei Karten
genau in der Mitte der drei Stöße

Nach dem zweiten Aufblättern liegt zum Beispiel die gewählte Karte im Stoß II.
Da auch beim dritten Male der angegebene Stoß in die Mitte genommen wird, muß die gewählte Karte stets die elfte sein!

Eine gezogene Karte finden

Einer von euch mischt die Karten. Ich nehme sie in die Hand und ziehe sie zu einem Fächer auseinander, wobei die Rückseiten nach oben zeigen. Einen Mitspieler fordere ich auf, eine Karte zu ziehen und sie auch den anderen, aber nicht mir zu zeigen.
Inzwischen nehme ich die Karten zusammen und lege sie (Bildseite nach unten) auf den Tisch. Ich bitte den Partner, seine Karte oben auf den Stoß zu legen. Nachdem ich mehrere Mitspieler aufgefordert habe, je einmal abzuheben, nehme ich die Karten in die Hand und finde rasch die gesuchte.

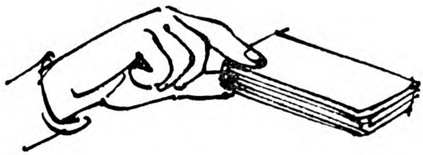
ERKLÄRUNG:

Den Augenblick, in dem ihr nach der gezogenen Karte schaut, benutze ich, um unauffällig auf die unterste Karte des Spiels zu sehen. Beim Abheben kommt die unterste auf die oben aufgelegte und zu ermittelnde Karte zu liegen. Durch mehrmaliges Abheben werden das obere und untere Ende des Kartenspiels verändert, aber die Folge der einzelnen Karten bleibt bestehen. Die gezogene Karte liegt unmittelbar vor der, die ich mir als unterste Karte merkte.
Wer selbst kein Kartenspieler ist, weiß meist nicht, daß auch bei mehrmaligem nacheinander erfolgendem „Abheben“ jede Karte im Stoß die gleichen Nachbarkarten hat wie vor dem Abheben.
„Abheben“ heißt, von den Karten, die mit der Rückseite nach oben liegen, 1. einen beliebigen oberen Teil wegnehmen und auf ihn 2. den unteren Rest auflegen.

Karten aus der Hand schlagen

Wenn ich – zunächst nur für mich allein – eine gesuchte Karte gefunden habe, kann ich Kartenkunststücken eine neue verblüffende Wendung geben.

So hält der Spielpartner die Karten



Ich tue so, als habe ich die Karte nicht gefunden. „Nun, da müssen wir es anders versuchen“, sage ich und lege den Kartenstoß wie im obenstehenden Bild zusammen:

Ich fordere einen Mitspieler auf, so auf einem Stuhl Platz zu nehmen, daß die anderen alles Weitere gut beobachten können. Der Partner muß den Kartenstoß an einer Ecke so halten, daß der Daumen unterhalb, der Zeigefinger oberhalb der Karten liegt. Das Kartenbild zeigt nach unten. Er wird aufgefordert, den Stoß fest zu halten.

Ich trete an ihn heran, erfasse vorsichtig die oberste Karte, ziehe sie rasch heraus, hebe sie hoch, zeige sie allen und erkläre: „Das ist die gesuchte Karte *nicht!*“

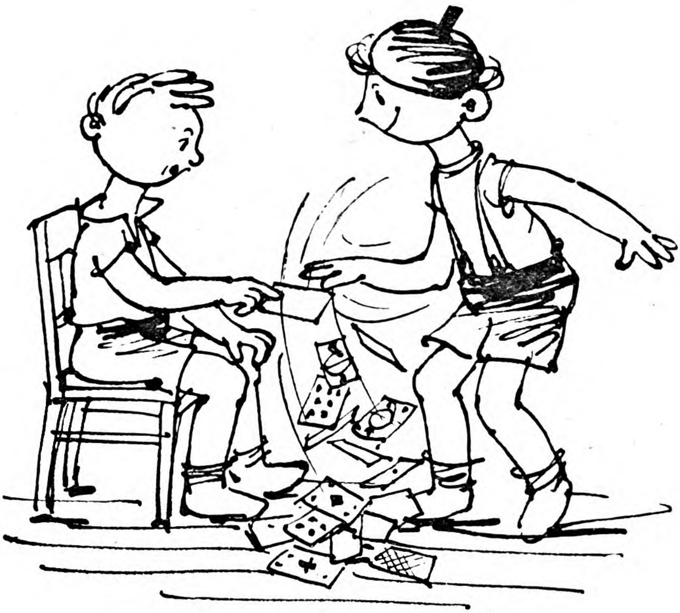
In gleicher Weise ziehe ich die unterste Karte rasch ab, zeige sie hoch und weise wieder darauf hin, daß auch diese *nicht* die gezogene Karte ist. Und jetzt:

„Eins – zwei – drei!“

Bei „drei“ schlage ich mit der flachen Hand kräftig von oben auf die Karten. Sie fliegen davon und liegen am Boden. Nur *eine* Karte hat der erschreckte Spielpartner noch in der Hand – die zuvor gezogene.

ERKLÄRUNG:

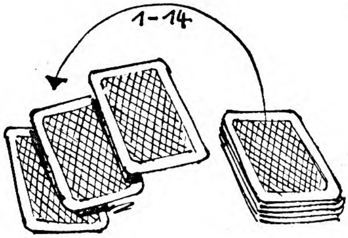
Nur die unterste Karte des Stoßes verbleibt in der Hand des Spielpartners. Warum? Die Fläche des Daumens ist größer als die des Zeigefingers. Infolge der Reibung haftet die unterste Karte am stärksten. In dem Augenblick, in dem alle anderen Karten fortfliegen, schnappt der drückende Zeigefinger ohne weiteres nach unten und hält die unterste Karte mit fest.



Vier Asse

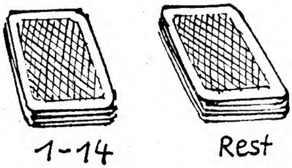
Die Skatkarte hat 32 Blätter. Den höchsten Wert im Spiel haben die vier Asse.

Jeder Spielpartner nennt nach eigenem Ermessen eine beliebige Zahl zwischen 10 und 20, der erste zum Beispiel die 14. Ich zähle vom ganzen Spiel 14 Karten ab und lege sie wieder mit dem Rücken nach a



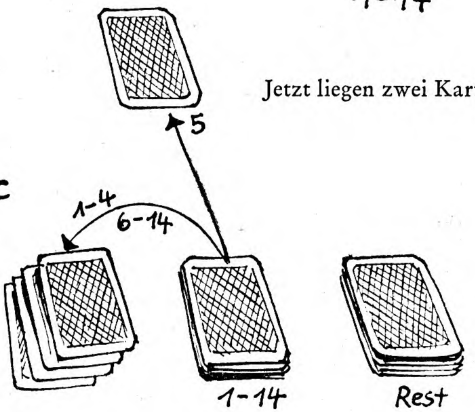
Abzählen von 14 Karten

b



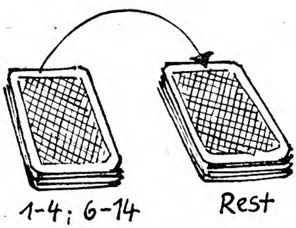
Jetzt liegen zwei Kartenstöße vor uns

c



Abblättern der Karten 1 bis 4; Ausgabe der Karte 5
Abblättern der weiteren Karten 6 bis 14
Im linken Stoß liegen die Karten 1 bis 4 und 6 bis 14. Er wird auf den rechten Reststoß gelegt

d



oben aufeinander. Daneben lege ich den Rest. Ich nehme den ersten Stoß (Karte 1 bis 14) in die Hand und lasse die Quersumme der gewählten Zahl nennen. Die Quersumme ist 5. Jetzt blättere ich von oben die einzelnen Karten ab. 1 – 2 – 3 – 4, die Karte Nr. 5 erhält der Partner mit der Bitte, sie zunächst verdeckt vor sich auf dem Tisch liegenzulassen. Ich blättere weiter ab: 6 – 7 – 8 und so fort bis 14 und lege den Stoß auf den vorhin beiseite gelegten Rest.
Der nächste Mitspieler wählt zum Beispiel die Zahl 17. Ich verfahre genau wie zuvor, also: Von oben 17 Karten abzählen und übereinanderlegen. Reststoß beiseite legen. Quersumme von 17 nennen lassen (8)! Von den 17 Karten die Karten 1 bis 7 abblättern und aufeinanderlegen. Die 8. Karte verdeckt vor den zweiten Partner legen, die Karten 9 bis 17 weiter zählen und auf die Karten 1 bis 7 legen. Diesen Teil auf den Rest legen.
Jetzt nennt noch ein dritter Partner eine Zahl, und ich verfahre entsprechend. Und schließlich wird auch dem vierten in gleicher Weise eine bestimmte verdeckte Karte zugespielt.
Jetzt liegt vor den vier Mitspielern je eine verdeckte Karte. Schlagartig lasse ich alle vier ihre gezogene Karte aufdecken. Sie sind verblüfft! Vier Asse liegen auf dem Tisch. Gewählt mit beliebigen Zahlen!

ERKLÄRUNG:

Die Zahlen 11 bis 19 haben eine gemeinsame mathematische Eigentümlichkeit. Jede dieser Zahlen ergibt bei Verminderung um ihre Quersumme stets die Zahl 9.

Zahl	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Quersumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Differenz	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Dieses mathematische Gesetz liegt diesem Kartenkunststück zugrunde. Das Kartenspiel muß jedoch vorbereitet sein.

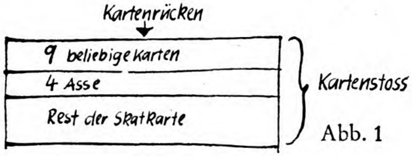


Abb. 1

Mit beliebig gewählten Zahlen wurden 4 Asse gezogen

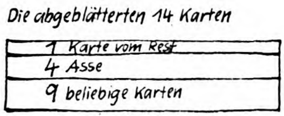


Abb. 2

Die 14 abgezählten Karten

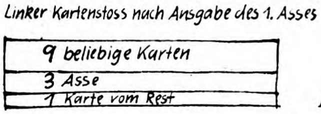


Abb. 3

Lage der Karten nach dem Ausscheiden des ersten Asses

Obenauf liegen 9 beliebige Karten, darunter die 4 Asse; unter ihnen die restlichen Kartenblätter (Abbildung 1).
Nennt ein Spieler zum Beispiel die Zahl „14“, nehme ich vom Rücken des Kartenstoßes 14 Blätter einzeln ab und lege sie verdeckt übereinander. Dabei liegen unten: die 9 beliebigen Karten (die zuvor oben lagen), darüber die 4 Asse, und obenauf liegt eine Karte vom Rest der Skatkarten (Abbildung 2).
Dann wird die Quersumme 5 genannt. Von der obersten Karte aus gezählt, erhält der erste Partner die 5. Karte. Wie aus dem Bild ersichtlich, ist diese Karte das unterste der 4 Asse. Da nach dem Ausscheiden der 5. Karte weitergeblättert wird, liegen die nunmehr 13 Karten wie in Abbildung 3 übereinander.
Nachdem dieser Teil wieder auf dem Rest liegt, ist der Gesamtstoß wie zuvor geordnet. Obenauf liegen 9 beliebige Karten, darunter jetzt nur 3 Asse und dann der Rest der Skatkarte. Wenn dann die 17 genannt wird, wiederhole ich das Spiel noch einmal. Die Regeln sind derart, daß immer die zehnte Karte des ursprünglichen Stoßes überreicht wird. Das ist *immer* ein Aß.

Wer käme wohl bei diesem Kartenkunststück gleich auf den Gedanken, daß es auf einer mathematischen Eigentümlichkeit der Zahlen 11 bis 19 (Zahl minus Quersumme = 9) beruht?

Eisenbahn – Trugschluß

Schnurgerade ist die Strecke. Der Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km in der Stunde. In welcher Zeit legt er die gesamte Strecke von 200 km zurück? – Ganz klar, in 2 Stunden.
Nun soll der Zug die erste Hälfte der Strecke nur mit 90 km in der Stunde fahren, dafür aber auf der zweiten Streckenhälfte mit einer Geschwindigkeit von 110 km in der Stunde. In welcher Zeit wird dann die Strecke von 200 km zurückgelegt?
„Auch in zwei Stunden!" Die meisten, denen man diese Aufgabe vorlegt, werden so antworten. Und doch ist diese Antwort falsch.
Wieso? Auf der ersten Streckenhälfte legt der Zug 90 km in der Stunde zurück; 10 km also in $\frac{1}{9}$ Stunde. Zu den ersten 100 km braucht er also $1\frac{1}{9}$ Stunde. Auf der zweiten Streckenhälfte legt er 110 km in 1 Stunde zurück, demnach 10 km in $\frac{1}{11}$ Stunde, und die zweite Streckenhälfte von 100 km in $\frac{10}{11}$ Stunde.
Für die Gesamtstrecke von 200 km braucht also der Zug

$$1\frac{1}{9} \text{ Std.} + \frac{10}{11}\text{Std.} = 1\frac{11}{99} + \frac{90}{99}\text{Std.} = 1\frac{101}{99} \text{ Std.} = 2\frac{2}{99} \text{ Std.}$$

= 2 Stunden, 1. Minute und rund 13 Sekunden.

Was haben wir falsch gemacht und was übersehen, als wir zunächst zu einem falschen Ergebnis kamen?
Wir haben 100 als vermeintliche mittlere Geschwindigkeit ausgesprochen. Das ist nicht richtig. Wenn ein Zug in gleichen Zeitspannen

(zum Beispiel 1 Std.) erst mit der Geschwindigkeit 90 km/Std. und dann mit 110 km/Std. fährt, dann sind wir berechtigt, von einer mittleren Geschwindigkeit 100 zu sprechen. Hier aber ist der Zug mit der Geschwindigkeit 90 *länger als eine Stunde,* und mit der Geschwindigkeit 110 *nicht eine ganze Stunde lang* gefahren.
Die Geschwindigkeit 90 und 110/Std. waren entlang einer gleichen Wegstrecke von 100 km vorhanden, erstreckten sich aber *nicht* auf die gleiche Zeitspanne. 100 war da *nicht* – wie angenommen – die mittlere Geschwindigkeit.
Wenn wir die mittlere Geschwindigkeit x berechnen wollen, müssen wir beachten, daß der Zug die Gesamtstrecke von 200 km in $2\frac{2}{99}$ Std. zurücklegt. Somit ergibt sich die Gleichung:

$$200 = x \cdot 2\frac{2}{99}$$
$$200 = x \cdot \frac{200}{99}$$
$$99 = x$$

Die mittlere Geschwindigkeit betrug 99 km/Std.

Seltsames Zerschneiden eines Rechtecks

Man hat ein Rechteck gezeichnet. Es ist 13 Einheiten breit und 5 Einheiten hoch. Sein Flächeninhalt beträgt also 65 Quadrateinheiten.
Durch die drei eingezeichneten dicken Linien zerfällt das Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke und zwei Vierecke (Trapeze). Wenn wir diese Figuren ausschneiden (nehmt dazu eine Pause der Zeichnung auf Seite 44), so können wir sie zu einem Quadrat zusammenlegen.
Sehr merkwürdig ist dabei, daß aus 65 Quadrateinheiten des Rechtecks ein Quadrat von 64 Einheiten entstanden ist. Wir haben zwar zerschnitten, aber doch nichts abgeschnitten?

Nach dem Strahlensatz ist aus der ersten Figur die folgende Verhältnisgleichung abzulesen:

$$x : 8 = 5 : 13$$

Wir rechnen x aus:

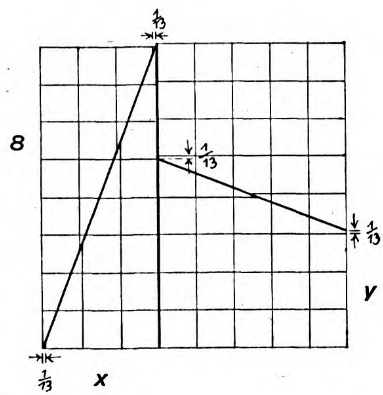
$$13x = 40$$

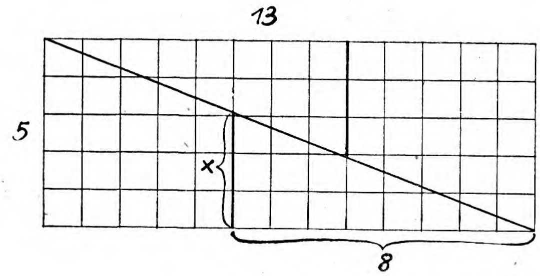
$$\underline{\underline{x = 3\tfrac{1}{13}}}$$

Das x in der Zeichnung auf dieser Seite (im Quadrat) beträgt also keineswegs 3, sondern $3\frac{1}{13}$ Einheiten. Der Unterschied ist so gering, daß er uns nicht auffällt.

Die Y-Strecke in dieser Zeichnung beträgt nicht etwa, wie wir zunächst fälschlich vermuten, 3 Einheiten, sondern ebenfalls $3\frac{1}{13}$ Einheiten.

Das Rechteck, das beim Zusammenlegen der beiden rechtwinkligen Dreiecke entstanden ist, hat die Höhe 8 Einheiten, die Breite $3\frac{1}{13}$ Einheiten. Sein Inhalt beträgt somit $8 \cdot 3\frac{1}{13}$ Quadrateinheiten. Das sind $\frac{320}{13}$ Maßeinheiten.





Das Rechteck, das aus zwei Trapezen zusammengesetzt ist, hat die Höhe $(5+3\frac{1}{13})$ und die Breite 5 Maßeinheiten. Sein Inhalt beträgt also $5\,(5+3\frac{1}{13})$ Quadrateinheiten. Das sind $\frac{525}{13}$ Quadrateinheiten.
Addieren wir die beiden Rechtecke, von denen also das rechte um $\frac{1}{13}$ Maßeinheiten höher ist als das linke, so erhalten wir

Gesamtinhalt $=\frac{320}{13}$ Quadrateinheiten $+\frac{525}{13}$ Quadrateinheiten.

Gesamtinhalt $=\frac{845}{13}$ Quadrateinheiten $=$ 65 Quadrateinheiten.

Beim Zusammensetzen der ausgeschnittenen Flächen erhielten wir also eine Figur, die uns zwar als Quadrat erscheint, aber keines ist.

Kork und Flasche

Eine Flasche Fruchtsirup kostet mit Kork 1,10 DM. Die volle Flasche ohne Kork kostet 1 DM mehr als der Kork. Wieviel kostet der Kork? Moment! Der Kork 10 Pfennige, die Flasche mit Inhalt 1 DM, macht zusammen 1,10 DM. Stimmt's?
Nein, die Flasche ohne Kork kostet ja 1 DM mehr als der Kork! Da stimmt doch etwas nicht. Wir wollen rechnen.

Der Kork kostet x DM, die Flasche mit Inhalt (ohne Kork) y DM.

Die Flasche mit Inhalt und Kork kostet 1,10 DM: $x + y = 1{,}10$

Sie kostet mit Inhalt 1 DM mehr als der Kork: $y = x + 1$

Ziehen wir die untere Gleichung von der oberen ab, so erhalten wir:

$$x = 1{,}10 - x - 1$$
$$2x = 0{,}10$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}05}}$$

Der Kork kostet 0,05 DM, die Flasche mit Inhalt 1,05. Probe: Flasche mit Inhalt und Kork kosten zusammen 1,10 DM.

Unbekannte im Kaninchenstall

In einer alten chinesischen Sammlung arithmetischer Aufgaben, die um 200 vor unserer Zeitrechnung verfaßt wurde, lesen wir folgendes: Kaninchen und Fasanen sind in einen Stall gesperrt. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wieviel Tiere von jeder Sorte sind es? – 35 Tiere sind im Stall. Nehmen wir an, es seien x Kaninchen, dann ist die Zahl der Fasanen $(35 - x)$. Wir stellen eine Gleichung auf. x Kaninchen haben $4 \cdot x$ Beine. $(35 - x)$ Fasanen haben $(35 - x) \cdot 2$ Beine. Zusammen sind das 94 Beine. Somit gilt die Gleichung:

$$4x + 2(35 - x) = 94$$
$$4x + 70 - 2x = 94$$
$$2x = 94 - 70 = 24$$
$$\underline{\underline{x = 12}}$$

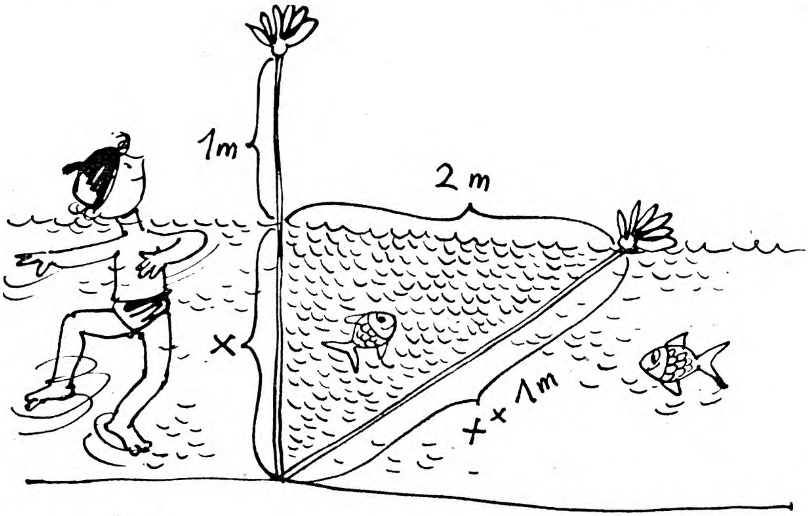
12 Kaninchen sind im Stall und 23 Fasanen. Probe: 48 Kaninchenbeine und 46 Fasanenbeine = 94 Beine.

Quadratische Gleichung um eine Lotosblume

In der „Arithmetik“ des Diophant von Alexandria (im 3. Jahrhundert) finden wir eine Aufgabe, die – wenig verändert – wie folgt lautet:
Eine Lotosblume ragt 1 m aus dem Wasser heraus. Vom Wind geneigt, taucht sie in 2m Entfernung ins Wasser. Wie tief ist das Wasser?
Wenn wir die Wassertiefe mit x bezeichnen, so beträgt die Länge der Lotosblume vom Grund bis zur Spitze $x + 1$ m. Die Figur zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten x Meter beziehungsweise 2 Meter lang sind. Die Hypotenuse hat eine Länge von $x + 1$ m.
Wir wenden den Satz des Pythagoras an: Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der Kathetenquadrate.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2^2$$
$$x^2+2x+1 = x^2+4$$
$$2x = 3$$
$$\underline{\underline{x = 1{,}5}}$$

Die Wassertiefe beträgt 1,5 m.



Ein mathematischer Trugschluß

Hier ist eine Gleichung mit einer „Unbekannten“ x.

$$6x+25=10x+15$$

Wir wollen die Gleichung etwas verändern. Die 15 bringen wir von der rechten Seite der Gleichung auf die linke Seite und die 25 von links nach rechts. Dann erhalten wir:

$$6x-15=10x-25$$

Das ist doch wohl richtig? Wir haben in der Mathematik gelernt, daß ein Summand von der einen Seite einer Gleichung auf die andere Seite gebracht werden kann, wenn man die Vorzeichen umkehrt.
Nun soll auf der linken Seite der Gleichung die 3 ausgeklammert werden, auf der rechten die 5. Ergebnis:

$$3(2x-5)=5(2x-5)$$

Wir teilen beide Seiten der Gleichung durch $(2x-5)$ und erhalten:

$$\frac{3(2x-5)}{(2x-5)}=\frac{5(2x-5)}{(2x-5)}$$

Dürfen wir das? Ja, denn wir kennen die Regel: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf *beiden* Seiten durch die gleiche Größe teilt. Und das haben wir gemacht.

Jetzt können wir kürzen $$\frac{3\cancel{(2x-5)}}{\cancel{(2x-5)}}=\frac{5\cancel{(2x-5)}}{\cancel{(2x-5)}}$$

Und es bleibt: $$\underline{\underline{3=5}}$$

Wie? $3 = 5$? Das ist Unsinn! 3 ist nicht so groß wie 5! Was haben wir falsch gemacht? Wir sehen uns die Rechnung noch einmal an! – Wir haben lediglich erlaubte Rechenschritte vorgenommen, die beim Auflösen von Gleichungen verwendet werden. Wo steckt der Fehler in unserer Rechnung?
Die anfangs gegebene Gleichung $6x - 15 = 10x - 25$ gilt nur für *ein* ganz bestimmtes x. Wir wollen dieses x ausrechnen:

$$6x + 25 = 10x + 15$$
$$6x - 10x = 15 - 25$$
$$-4x = -10$$
$$4x = 10$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}$$

Macht die Probe! Es stimmt.
In der Rechnung, die uns vorhin zu dem Ergebnis $3 = 5$ führte, haben wir an einer Stelle die gesamte Gleichung durch $(2x - 5)$ geteilt. Da x gleich $2^1/_2$ ist, beträgt der Wert dieser Klammer: $(2 \cdot 2^1/_2 - 5) = (5 - 5) = 0$. Wir haben, ohne daß wir uns dessen bewußt waren, durch Null geteilt. Das ist falsch, *das* darf man nicht. Eine Gleichung bleibt zwar immer richtig, wenn man beide Seiten durch die gleiche Zahl teilt, aber es gibt *eine* Ausnahme: Durch Null darf man eine Gleichung nicht teilen. Warum nicht? Wir wollen an einem Beispiel zeigen, daß das Teilen mit Null zu falschen Ergebnissen führt.
Folgende Gleichung ist doch richtig:

$$0 \cdot 2 = 0 \cdot 17$$

Niemand kann die Richtigkeit dieser Gleichung bezweifeln, denn $0 \cdot 2$ gibt Null und $0 \cdot 17$ ebenfalls. Beide Seiten der Gleichung sind also gleich groß.

Teilen wir beide Seiten dieser Gleichung durch Null, so erhalten wir

$$\frac{0 \cdot 2}{0} = \frac{0 \cdot 17}{0}$$

Wir kürzen: $$\frac{\cancel{0} \cdot 2}{\cancel{0}} = \frac{\cancel{0} \cdot 17}{\cancel{0}}$$

und erhalten: $$\underline{\underline{2 = 17}}$$

Zu diesem falschen Ergebnis konnten wir nur gelangen, weil wir durch Null geteilt haben.

In unserem Beispiel, das zum Ergebnis $3 = 5$ führte, lag der Rechenfehler so geschickt versteckt, daß man damit viele aufs Glatteis führen kann. Bevor wir mit $(2x - 5)$ teilten, hätten wir zuerst untersuchen müssen, ob etwa $(2x - 5)$ den Wert Null hat. Und da sich herausstellte, daß $(2x - 5)$ gleich Null ist, so war zu vermuten, daß wir zu einem falschen Ergebnis gelangen.

Ein Hundertmarkschein wird gewechselt

Vor Jahren ereignete sich eine seltsame Geschichte. Ob es sich dabei um einen absichtlichen Betrug handelte oder ob sich der Betreffende seines Handelns nicht bewußt war, konnte nicht festgestellt werden. Jedenfalls entstanden hierbei erhebliche Meinungsverschiedenheiten darüber, welcher Schaden dem Geprellten erwachsen war. Wir wollen sehen, ob wir diesen Fall klarstellen können.

In ein Radiogeschäft trat ein junger Mann. Er wollte sich einen Radioapparat kaufen. Nach langem Hin und Her entschloß er sich für einen Kleinempfänger, der 76 Mark kostete. Der Käufer legte einen Hundertmarkschein auf den Tisch. Der Verkäufer hatte nicht genug Wechselgeld in der Kasse. Rasch ging er in die benachbarte Bäckerei und

wechselte den Hundertmarkschein. Dann gab er dem Kunden 24 Mark heraus. Der Kunde verließ mit dem Empfänger unter dem Arm das Geschäft.
Nach einer halben Stunde kam der Bäcker von nebenan mit dem Hundertmarkschein in der Hand ins Radiogeschäft gestürzt. „Um alles in der Welt, der Hundertmarkschein ist gefälscht! Zahlen Sie mir sofort mein Geld zurück!" Der Verkäufer überzeugte sich. Die Sache stimmte. Der Schein war nicht echt. Er gab dem Nachbar 100 Mark in gutem Geld zurück.
Der junge Mann ward nicht mehr gesehen. Welchen Verlust hatte der Radiohändler erlitten?
Halt! Erst alles noch einmal genau durchlesen! Und dann scharf nachdenken! Der Apparat ist weg, das sind 76 Mark. 24 Mark wurden dem Käufer zurückgegeben. 100 Mark wurden dem Nachbar zurückgegeben. Das wären also 200 Mark Verlust? Nein! 76 Mark waren ja noch von dem gewechselten Geld in der Kasse! Also nur 124 Mark Verlust?
Den Entscheid wollen wir dem Leser überlassen. Erfahrungsgemäß tippen von 100 Personen, denen man diese Aufgabe vorlegt, 90 auf die falsche Lösung. Nur einen kleinen Hinweis: Der Verlust kann nie größer sein als der Gewinn!

Ein geborgtes Kamel

Drei junge Araber erbten beim Tod ihres Vaters 23 Kamele. Nach dem Willen des Vaters sollte der erste Sohn die Hälfte der Herde erhalten, der zweite ein Drittel und der dritte ein Achtel.
Die Drei waren zunächst ratlos, wie sie die Teilung vornehmen sollten. Schließlich borgten sie sich ein Kamel von der Herde ihres Onkels. Jetzt hatten sie 24 Kamele. Der erste Sohn erhielt davon die Hälfte, 12 Kamele, der zweite ein Drittel, 8 Kamele, der dritte ein Achtel der Herde, 3 Kamele. Verteilt wurden also 23 Kamele. Das 24. Tier, das geborgte, wurde dem Onkel zurückgegeben.

Wie ist es zu erklären, daß die zunächst so schwierig erscheinende Aufgabe so einfach und unter Rückgabe des geborgten Kamels gelöst werden konnte?
Wurden die Bestimmungen des Testamentes wirklich eingehalten?
Der erste Sohn erhielt 12 Kamele.
Nach dem Willen des Vaters hätte er $11\frac{1}{2}$ Kamele erhalten müssen.
Der zweite Sohn erhielt 8 Kamele,
er hätte $7\frac{2}{3}$ Kamele erhalten müssen.
Der dritte Sohn erhielt 3 Kamele,
er hätte $2\frac{7}{8}$ Kamele erhalten müssen.
Dem letzten Willen des Vaters wurde also mit der vorgenommenen Teilung nicht entsprochen.
Um die geforderte Aufteilung vorzunehmen, hätte man Kamele schlachten müssen. Dann hätte der eine Sohn wirklich $11\frac{1}{2}$ Kamele, der zweite $7\frac{2}{3}$ und der dritte $2\frac{7}{8}$ erhalten können.
Zählen wir einmal zusammen: $11\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3} + 2\frac{7}{8} = ?$

$$11\frac{12}{24} + 7\frac{16}{24} + 2\frac{21}{24} = 20\frac{49}{24} = 22\frac{1}{24}$$

Da wären also noch $\frac{23}{24}$ von einem Kamel übriggeblieben? Jawohl!
Aber wie ist das zu erklären?
Sehen wir uns nochmals das Testament an! Der Vater hatte die Verteilung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$ der Herde festgelegt.
Addieren wir: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{3}{24} = \frac{23}{24}$
Der Vater hatte nur über die Verteilung von $\frac{23}{24}$ der Herde verfügt.

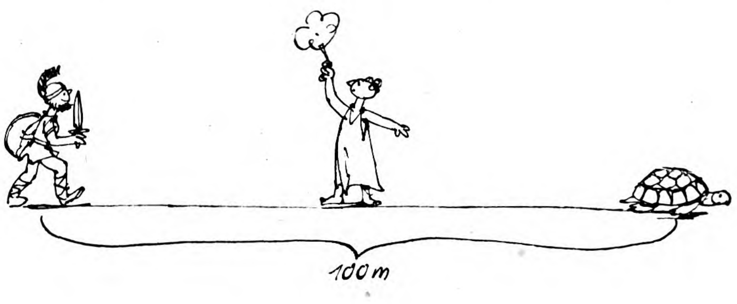
Somit mußte $\frac{1}{24}$ der Herde übrigbleiben. Da die Herde aus 23 Kamelen bestand, mußte $\frac{1}{24}$ davon, also $\frac{23}{24}$ von einem Kamel übrigbleiben. Das wird der Vater kaum gewollt haben! Er hat übersehen, daß die drei Bruchteile, die er zur Verteilung festgelegt hat, zusammen 1 ergeben müssen.

Achill und die Schildkröte

Die folgende seltsame Geschichte geht auf den griechischen Philosophen Zeno von Elea (um 450 vor unserer Zeitrechnung) zurück.
Achill, der schnellste und tapferste der griechischen Helden von Troja vereinbarte einen Wettlauf mit einer Schildkröte. Die Schildkröte erhielt 100 m Vorsprung. Achill lief 10mal so schnell wie die Schildkröte.

Als Achill den Vorsprung von		hatte die Schildkröte		
100 m	aufgeholt hatte,	noch	10 m	Vorsprung
10 m	aufgeholt hatte	noch	1 m	Vorsprung
1 m	aufgeholt hatte	noch	1 dm	Vorsprung
10 cm	aufgeholt hatte	noch	1 cm	Vorsprung
1 cm	aufgeholt hatte	noch	1 mm	Vorsprung
1 mm	aufgeholt hatte	noch	0,1 mm	Vorsprung

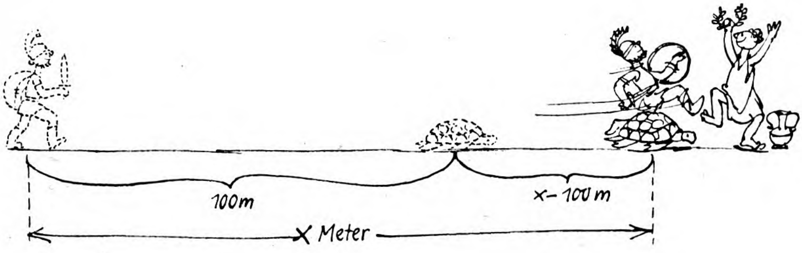
und so weiter.
Je näher Achill der Schildkröte auch kam, sie hatte immer einen, wenn



auch schließlich noch so kleinen Vorsprung. Achill konnte die Schildkröte also nicht einholen? Da soll etwas nicht stimmen?
Ihr meint: Natürlich bleibt zunächst immer ein Vorsprung der Schildkröte, aber Achill kommt ihr immer näher, und schließlich wird er sie beim nächsten Schritt überholen. Auch richtig, aber wenn ihr die obige Schlußfolgerung nochmals überlegt, so bleibt immer wieder ein noch nicht eingeholter Vorsprung! Oder ist dieser Gedankengang falsch?
Diese Sache ist ein sogenannter Trugschluß, bei dem die Gedanken mit Absicht zu einer falschen Schlußfolgerung hingelenkt werden. Natürlich ist die Folgerung falsch, daß Achill die Schildkröte nie einholt. Aber bei diesem Trugschluß von Zeno ist es nicht leicht, den Gedankenfehler aufzuzeigen. Wo steckt er?
Es ist richtig, daß die Schildkröte zuerst einen Vorsprung von 100 m hatte, dann von 10 m, dann 1 m, dann $\frac{1}{10}$ cm und so weiter und so weiter. Wir müßten noch unendlich viele solche Vorsprungstrecken hinschreiben, die allerdings immer kleiner und kleiner werden. Ihre Summe ist jedoch eine begrenzte Strecke, die Achill beim Laufen schon nach ziemlich kurzer Zeit erreicht hat. Er holt auf:

$$100\,\text{m} + 10\,\text{m} + 1\,\text{m} + \frac{1}{10}\,\text{m} + \frac{1}{100}\,\text{m} + \frac{1}{1000}\,\text{m} + \ldots\ldots$$

Die Summe aller dieser unendlich vielen Vorsprungstrecken ergibt:
$111{,}1111\ldots\,\text{m}$
Die Zahl der Meter ist ein rein periodischer Dezimalbruch mit einer Folge von unendlich vielen Einsen nach dem Komma. Dieser Dezimalbruch kann als gemischte Zahl geschrieben werden: $111\frac{1}{9}$ m.



Achill hat die Schildkröte eingeholt, wenn er $111\frac{1}{9}$ m zurückgelegt hat.

Die Zahl der Meter, die Achill bis zum Einholen der Schildkröte zu laufen hat, können wir auch wie folgt berechnen:
Nach x Metern hat Achill die Schildkröte eingeholt. In der gleichen Zeit hat die Schildkröte einen Weg von $(x - 100)$ Metern zurückgelegt. Die zurückgelegten Wege verhalten sich zueinander wie die aufgebrachten Geschwindigkeiten, also wie 10 zu 1.

$$x : (x - 100) = 10 : 1$$

Daraus folgt (Produkt der Außenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder):

$$x = 10(x - 100)$$
$$x = 10x - 1000$$
$$1000 = 9x$$
$$9x = 1000$$
$$x = \frac{1000}{9}$$
$$x = 111\frac{1}{9}$$

MATHEMATISCHE KNOBELEIEN

Die seltsame Sache mit der 9

Wir wollen eine beliebige mehrstellige Zahl aufschreiben.

Nehmen wir die Zahl:	1957
Nun setzen wir die umgekehrte Ziffernfolge darunter:	*7591*
Wir ziehen die kleinere von der größeren Zahl ab und erhalten:	5634

Jetzt wird behauptet, die so erhaltene Zahl sei in *jedem Falle* durch 9 teilbar.
Probieren wir:

$$\begin{array}{l} \underline{56}34 : 9 = \underline{\underline{626}} \\ \ \underline{23} \\ \ \ \ 54 \end{array}$$

Stimmt! Es bleibt kein Rest. Die Zahl ist durch 9 teilbar. Und das soll immer so sein?
Vielleicht war das nur Zufall? Wir probieren es mit irgendeiner anderen Zahl! Es stimmt immer. Das Ergebnis ist stets durch 9 teilbar. Warum eigentlich?

ERKLÄRUNG:

Die Ziffern einer beliebigen dreistelligen Zahl seien a, b, c. Die Zahl sieht also wie folgt aus: a b c. An erster Stelle stehen die Hunderter, an zweiter die Zehner, an dritter die Einer.
Die Zahl mit den Ziffern a, b, c hat also den Zahlenwert:
$100a + 10b + 1c$.
Schreiben wir die erste Zahl dann mit umgekehrter Ziffernfolge, so

erhalten wir die Zahl c b a. Sie hat den Zahlenwert $100c + 10b + 1a$.
Wir schreiben beide Zahlenwerte zum Subtrahieren untereinander:

$$
\begin{array}{rrrrr}
100a & + & 10b & + & 1c \\
1a & + & 10b & + & 100c \\
\hline
\end{array}
$$

Durch Abziehen erhalten wir: $99a - 99c$

anders geschrieben: $99(a-c)$

(a – c) ist stets eine ganze Zahl. Die beim Subtrahieren erhaltene Zahl 99 (a – c) ist also stets ein ganzzahliges Vielfaches von 99 und als solches stets durch 9 teilbar. q. e. d.
Wir haben uns überzeugt und den Beweis geführt, daß die erhaltene Zahl stets durch 9 teilbar ist.
Was heißt eigentlich das „q. e. d."? Das ist die Abkürzung der lateinischen Worte „*q*uod *e*rat *d*emonstrandum". Das heißt auf deutsch: „Was zu beweisen war". Das „q. e. d." wird von den Mathematikern – nach einer alten Überlieferung – gern an das Ende eines geführten Beweises geschrieben.

NOCH ETWAS

Mit der 9 gibt es noch eine ähnliche, zunächst seltsame Erscheinung. Wenn man von einer mehrstelligen Zahl die Quersumme (die Summe aller Ziffern der Zahl) abzieht, so ist das Ergebnis ebenfalls stets durch 9 teilbar.

BEISPIEL:

	2387
Quersumme:	$\underline{\;\;20}$
Differenz:	$2367 : 9 = \underline{\underline{263}}$
durch 9 teilbar?	$\underline{18}$
	$\;\;56$
	$\;\;\underline{54}$
	$\;\;\;\;27$

Wir wollen uns überzeugen, daß die erhaltene Zahl stets durch 9 teilbar sein muß. Wählen wir eine vierstellige Zahl:

a	b	c	d

Ihr Zahlenwert beträgt:	$1000a + 100b + 10c + 1d$
Quersumme:	$a + b + c + d$
Differenz:	$999a + 99b + 9c$
anders geschrieben:	$9(111a + 11b + 1c)$

Da a, b und c ganze Zahlen sind, ist auch der Inhalt der Klammer stets eine ganze Zahl. 9 (111 a + 11 b + 1 c) ist somit ein ganzzahliges Vielfaches von 9, und deshalb ist die Differenz stets durch 9 teilbar. q. e. d.

Größte Zahl mit drei Ziffern

Es soll die größte Zahl angegeben werden, die mit drei Ziffern niedergeschrieben werden kann. Ohne Zögern werden viele sagen: 999.
Das ist die größte dreiziffrige Zahl einer einfachen Zahlenfolge im Dezimalsystem. Aber die 999 ist keineswegs die größte Zahl, die man mit drei Ziffern aufschreiben kann. Das ist:

$$9^{9^{9}}$$

gelesen: 9 hoch 9 hoch 9

anders geschrieben: $9^{(9^9)}$

Die Zahl 9^9 bedeutet ja: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

Wenn man das ausrechnet, erhält man: 387 420 489

$9^{(9^9)}$ wäre somit $9^{387\,420\,489} = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots\ldots$

387 420 489 Neunen sind
– durch Malzeichen verbunden – nebeneinander zu schreiben. Nehmen wir an, diese lange Neunenfolge werde derart niedergeschrieben, daß jede 9 von der vorangehenden 9 um $1/2$ cm entfernt ist. Wir würden allein zum Aufschreiben dieser Neunenfolge einen Papierstreifen von mehr als 1937 km Länge brauchen! Und da könnt ihr euch denken, daß beim Multiplizieren all dieser Neunen eine fast unvorstellbare Zahl herauskommt. Das Ergebnis ist eine Zahl von (rund) 369 000 000 Ziffern. Um diese Zahl nur aufzuschreiben, braucht man rund 18 Jahre, wenn man täglich 8 Stunden lang in jeder Sekunde 2 Ziffern niederschreibt.

9^{9^9} ist daher die größte Zahl, die mit drei Ziffern geschrieben werden kann. Allerdings muß noch darauf hingewiesen werden, daß die Schreibweise 9^{9^9} nicht eindeutig ist. Man kann 9^{9^9} auffassen als:

entweder $9^{(9^9)}$ das ergibt: $9^{387\,420\,489}$

oder $(9^9)^9$ das ergibt: 9^{81}

Die größte Zahl, von der wir sprachen, ist also: $9^{(9^9)}$

Haben Sie schon gehört?

Ein Gerücht läuft um. „Haben Sie schon gehört...?“
Einer erzählt es dem anderen. Bald weiß es die ganze Stadt.
Von einem einzelnen geht die Nachricht aus. Im Verlauf einer Viertelstunde erzählt er sie zwei anderen Personen. Jede dieser beiden gibt die Neuigkeit in der nächsten Viertelstunde wieder an zwei Personen weiter. Und so geht es fort.
Nach einer halben Stunde sind also 7 Personen unterrichtet, nach einer Dreiviertelstunde 15, und so weiter, und so weiter.
Wir finden das Wachstumsgesetz des erfaßten Personenkreises mit folgenden Überlegungen:
Nach 1 Viertelstunde sind

$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$ Personen erfaßt,

nach 2 Viertelstunden

$7 = 8 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 2^3 - 1$ Personen,

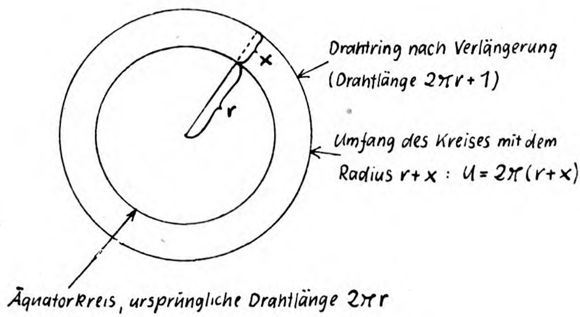
nach 3 Viertelstunden

$15 = 16 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 2^4 - 1$ Personen,

nach 21 Viertelstunden ($5\frac{1}{4}$ Stunden) $2^{22} - 1$ Personen.
Rechnet nach: 2^{22} ergibt 4 194 304.
Nach 21 Viertelstunden können also mehr als 4 Millionen Personen unterrichtet sein. Um jedermann in Berlin (etwa 3,3 Millionen Einwohner) zu orientieren, wären also weniger als $5\frac{1}{4}$ Stunden erforderlich.
Und nach knapp $7\frac{3}{4}$ Stunden wüßte es – unter genannten Voraussetzungen – die ganze Welt (die Erde hat rund 2,8 Milliarden Einwohner). Lawinenartig läuft ein Vorgang ab, der nach Potenzen – hier von 2 – fortschreitet.

Ein Draht um den Äquator

Die Erde ist annähernd eine Kugel und dreht sich in 23 Stunden, 56 Minuten, 4 Sekunden einmal um ihre Achse in der Richtung von West nach Ost. Der Erdäquator ist ein großer Kugelkreis, der in allen seinen Punkten gleich weit vom Nordpol und Südpol entfernt ist. Alle Punkte auf dem Äquator haben die geographische Breite Null.
Die Länge des Erdäquators beträgt rund 40 000 km. Wir denken uns um den Äquator einen straff sitzenden Draht gespannt, der also auch 40 000 km lang ist. In Gedanken machen wir den Draht um einen einzigen Meter länger. Der Draht ist jetzt sicher etwas zu weit, aber doch



wohl nur wenig? Was macht schon ein Meter Verlängerung bei 40 000 km Länge aus? Oder bleibt doch ein merklicher Zwischenraum zwischen Äquator und Drahtkreis? Ob da wohl eine Maus hindurchkriechen kann?

Hier hilft uns die Mathematik. Wir nennen den Erdradius r (er beträgt rund 6 350 000 m). Die Länge U des Erdäquators beträgt entsprechend der bekannten Formel über den Kreisumfang: $U = 2\pi r$. Die Drahtlänge ist zunächst ebenfalls $U = 2\pi r$. Um einen Meter verlängert, mißt der Draht: $2\pi r + 1$. Wir nehmen an, daß der Draht an jeder Stelle den gleichen Abstand x vom Erdäquator hat.

Einerseits wissen wir, daß der verlängerte Draht die Länge $2\pi r + 1$ hat. Andererseits erkennen wir aus der Figur, daß der erweiterte Drahtkreis eine Umfangslinie von $2\pi (r + x)$ hat. Es gilt also die Gleichung

$$2\pi(r+x) = 2\pi r+1$$
$$2\pi r + 2\pi x = 2\pi r+1$$

$2\pi r$ links und $2\pi r$ rechts heben sich weg

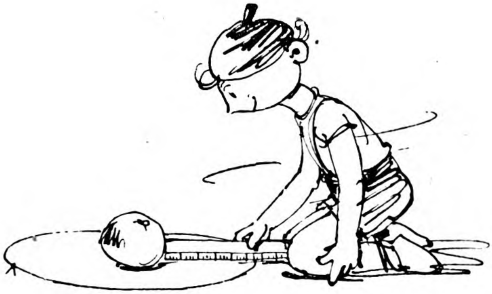
$$2\pi x = 1$$
$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2\pi}}}$$

x, der Abstand des erweiterten Drahtringes vom Äquator, beträgt also:

$$\frac{1}{2\pi}\,m = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\,m = \frac{1}{6{,}28}\,m \approx 0{,}16\,m = 16\,cm$$

Da kann nicht nur eine Maus, sondern bequem auch eine Katze hindurchkriechen.

Seht euch nochmals die Rechnung an. Da ist folgendes bemerkenswert: Die Größen $2\pi r$ links und $2\pi r$ rechts haben sich weggehoben. Das r (die Länge des Erdradius) ist aus der Rechnung herausgefallen. Wir erhalten also in *jedem* Falle, bei jedem Kreis einen Abstand von 16 cm.



Nehmt einen Eimer oder einen Apfel und probiert es aus! Erst den Faden straff spannen, dann um 1 m verlängern. Den verlängerten Faden kreisförmig um den Eimer oder den Apfel herumlegen. Ihr werdet sehen: Immer beträgt der Abstand ungefähr 16 cm.

Vom Zifferblatt

Genau „12 Uhr" ist es. Da steht der große Zeiger der Uhr über dem kleinen, und beide zeigen auf die Ziffer 12. Wann stehen die Zeiger das nächste Mal übereinander? So genau man das ablesen kann: 1 Uhr $5^1/_2$ Min. Das nächste Mal: 2 Uhr 11 Min, dann: 3 Uhr $16^1/_2$ Min, und so weiter.

Die Genauigkeit beim Ablesen ist nicht groß. Man kann es aber auf Bruchteile von Sekunden genau berechnen, wann die Zeiger übereinanderstehen.

Auf dem Zifferblatt-Kreis sind 60 Striche eingetragen. Der große Zeiger wandert in einer Stunde über 60 Striche, der kleine nur über 5. Nach 12 Uhr sollen die Zeiger um x Uhr das erste Mal übereinanderstehen.

Um x Uhr hat der große Zeiger $x \cdot 60$ Striche zurückgelegt.
Um x Uhr hat der kleine Zeiger $x \cdot 5$ Striche zurückgelegt.

Wenn um x Uhr die beiden Zeiger übereinanderstehen, hat der große Zeiger den kleinen Zeiger einmal überrundet. Der große Zeiger hat also 60 Striche mehr zurückgelegt als der kleine. Somit gilt die Gleichung:

$$x \cdot 60 = x \cdot 5 + 60$$
$$60x = 5x + 60$$
$$60x - 5x = 60$$
$$55x = 60$$
$$x = \frac{60}{55} = 1\frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{11}\ \text{Std} = \frac{60}{11}\ \text{Min} = 5\frac{5}{11}\ \text{Min}$$

$$\frac{5}{11}\ \text{Min} = \frac{5 \cdot 60\ \text{Sek}}{11} = \frac{300}{11}\ \text{Sek} = 27\frac{3}{11}\ \text{Sek}$$

Die Zeiger stehen nach 12 Uhr das erste Mal übereinander um

1 Uhr 5 Min. $27\frac{3}{11}$ Sek.

Wer sich noch ausrechnen will, wann die Zeiger das zweite Mal übereinanderstehen, der muß beachten, daß der große Zeiger dann (seit 12 Uhr) den kleinen zweimal überrundet hat. Man findet:

2 Uhr 10 Min. $54\frac{6}{11}$ Sek.

Die Turmuhr schlägt

Gong – gong – gong – gong – gong – gong. Die 6. Stunde hat die Uhr angezeigt. Dieses 6-Uhr-Schlagen dauerte genau 6 Sekunden. Wieviel Sekunden dauert es, wenn die Uhr 12 schlägt? 12 Sekunden? Das war voreilig gefolgert und ist falsch.

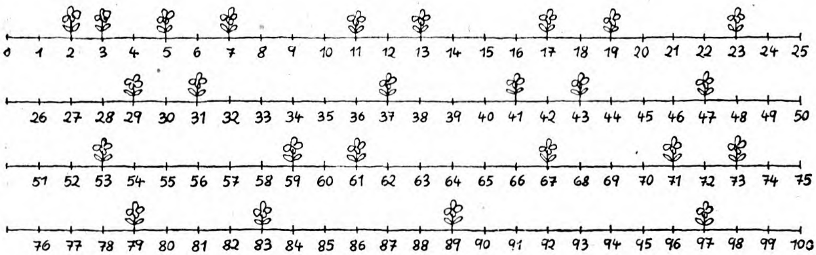
Zwischen dem ersten und sechsten Anschlagen der Uhr liegen 5 gleich große Zeitspannen von je $\frac{6}{5}$ Sekunden ($1\frac{1}{5}$ Sekunden). Zwischen 12 Schlägen der Uhr liegen 11 Zeitspannen von je $1\frac{1}{5}$ Sekunden.

$$11 \cdot 1\frac{1}{5} = 11 \cdot \frac{6}{5} = \frac{66}{5} = 13\frac{1}{5}$$

Das Zwölfuhrschlagen dauert genau $13\frac{1}{5}$ Sekunden und nicht 12 Sekunden, wie zunächst jeder denkt.
Stellt einmal folgende Frage: Am Rand einer Landstraße stehen in regelmäßigen Abständen Telegrafenstangen. Vom ersten bis zum fünften Mast sind es genau 250 m. Wie weit ist es vom ersten bis zum zehnten Mast? Prompt lautet die Antwort meist: 500 m!
Das ist falsch!
Vom ersten bis zum fünften Mast liegen *vier* Zwischenräume von je 62,5 m. Zwischen dem ersten und zehnten Mast liegen *neun* Zwischenräume von 62,5 m. 62,5 m · 9 = 562,5 m. Die Entfernung vom ersten bis zum zehnten Mast beträgt also 562,5 m. So kann man hereinfallen!

Das Geheimnis der Primzahlen

In der Reihe der natürlichen (ganzen) Zahlen werden als Primzahlen diejenigen bezeichnet, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Primzahlen sind zum Beispiel 2, 3, 5, 7 und so weiter; 79, 83, 89, 97 und so weiter. Die 1 gilt *nicht* als Primzahl.
Auf der Abbildung (S. 65) sieht man, daß die Primzahlen anscheinend regellos in der Reihe der natürlichen Zahlen verteilt sind. Nur an einer einzigen Stelle folgen zwei Primzahlen unmittelbar aufeinander (2 und 3). Bei den anderen Primzahlen sind die Lücken zu den Nachbarprimzahlen bald größer, bald kleiner. Irgendeine Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Primzahlen ist nicht zu erkennen.



Etwas fällt auf! Auf der Zahlenstrecke von 1 bis 25 erkennen wir außer dem einzigen Primzahlenpaar, dessen Partner unmittelbar nebeneinanderstehen (2 und 3), noch drei weitere Paare, deren Partner sich allerdings um den Zahlenwert 2 unterscheiden (5 und 7; 11 und 13; 17 und 19). Wieviel derartige Paare gibt es zwischen 25 und 50, 50 und 75, 75 und 100? (zwei, beziehungsweise zwei, beziehungsweise keins). Von 1 bis 100 sind es sieben Paare!

Ferner stellen wir fest, daß es zwischen 1 und 25 neun Primzahlen gibt, zwischen 75 und 100 dagegen nur vier. Tatsächlich hat sich gezeigt, daß mit wachsenden Zahlenwerten die Primzahlen immer seltener werden. Vielleicht hören dann die Primzahlen bei sehr hohen Zahlen überhaupt auf? Das könnte man vermuten, aber die Mathematiker haben bewiesen, daß die Primzahlen *nicht* aufhören. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Seit Jahrtausenden suchen die Mathematiker das Gesetz, nach dem die Primzahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen verteilt sind. Zum Beispiel, um zu berechnen, wieviel Primzahlen es zwischen 2 und 700 gibt und wie man sie in einem solchen Bereich rasch ausfindig machen kann. Trotz größter Anstrengungen ist das bis heute noch nicht gelungen.

Wie findet man die Primzahlen im Bereich großer Zahlen, zum Beispiel zwischen 100 000 und 107 000? Da bleibt nichts anderes übrig als zu

probieren, zu rechnen und zu rechnen. In mühevoller Arbeit wurden Primzahltafeln aufgestellt, die ganze Bände umfassen.
Zum Auffinden der Primzahlen kann das sogenannte „Sieb des Eratosthenes" verwendet werden. Diese Methode stammt von dem griechischen Gelehrten Eratosthenes, der um 250 vor unserer Zeitrechnung lebte. Der Name dieses Rechenverfahrens ist sinnvoll gewählt. Die zu untersuchenden Zahlen werden gewissermaßen auf ein Sieb geschüttet. Die Nicht-Primzahlen fallen durch, so daß schließlich lediglich die Primzahlen übrigbleiben. Wir wollen einmal das „Sieb des Eratosthenes" verwenden, um alle Primzahlen zwischen 2 und 40 zu finden. Schreibe erst alle Zahlen dieses Zahlenbereiches auf.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21
~~22~~ 23 ~~24~~ $\boxed{25}$ ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~ $\boxed{35}$ ~~36~~ 37 ~~38~~ 39 ~~40~~

Streiche alle Vielfachen von 2 weg! (durch $\times$ gekennzeichnet). Streiche jetzt alle Vielfachen von 3 weg! (durch O gekennzeichnet). Dann alle Vielfachen von 5 streichen! (durch □ gekennzeichnet).
Schon sind wir fertig! Im „Sieb" liegen lediglich noch die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.
Wenn man also für einen bestimmten Zahlenbereich, der mit 2 beginnt, die in ihm enthaltenen Primzahlen finden will, so muß man von den niedergeschriebenen Zahlen alle diejenigen streichen, die ganzzahlige Vielfache von irgendeiner voranstehenden Primzahl sind. Dann bleiben nur die gesuchten Primzahlen übrig.
Die größte bisher ermittelte Primzahl ist die Zahl:

$$2^{2281}-1.$$

Um diese Zahl zu erhalten, muß man also die Zahl 2 2281mal mit 2 multiplizieren und dann das Ergebnis um 1 vermindern. Wir können diese Zahl hier nicht angeben, denn sie hat 687 Ziffern!
Hat es einen praktischen Zweck, in mühevoller Arbeit nach immer größeren Primzahlen zu suchen und sich immer wieder zu bemühen, das Bildungsgesetz der Primzahlen schließlich doch noch zu finden?

Ja, es hat einen Sinn! Als im 6. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung Pythagoras das Gesetz vom zahlenmäßigen Zusammenhang des Hypotenusenquadrats mit den Kathetenquadraten entdeckte, ahnte er selbst kaum, welch vielfältigen praktischen Zwecken der von ihm entdeckte Satz einmal dienen würde! In den verschiedenen Sparten der Technik, der Vermessungskunde und der Physik wird heute von Tausenden der Lehrsatz des Pythagoras tagtäglich zu den verschiedensten Berechnungen benutzt. Die Mathematiker gehören heute zu den Pionieren der Technik, denn die Mathematik schafft für den Techniker wichtige Voraussetzungen seiner Arbeit. Oft war es so, daß aus Forscherdrang, ohne an irgendeine praktische Verwertung zu denken, neue mathematische Gesetze oder Rechenmethoden gefunden wurden. Sie lagen dann oft ohne jede praktische Anwendung in der Schublade, bis eines Tages die vorwärts schreitende Technik für ein neues Problem plötzlich eine neue, längst entdeckte Rechenmethode brauchte. Die Mathematik eilt oft der Technik voraus und liefert ihr das rechnerische Handwerkszeug.

Das Fermatsche Problem

Eine Quadratzahl entsteht, wenn man eine ganze Zahl mit sich selbst multipliziert. Die Quadratzahl von 2 ist 4, denn $2 \cdot 2$ ergibt 4; die Quadratzahl von 3 ist 9, die von 4 ist 16 und so weiter. Man schreibt dafür auch: $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$ und so weiter.
Wenn man zwei Quadratzahlen addiert, so ist die erhaltene Summe in manchen Fällen wiederum eine Quadratzahl. Beispiele hierfür:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad (9 + 16 = 25)$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 \quad (25 + 144 = 169)$$
$$6^2 + 8^2 = 10^2 \quad (36 + 64 = 100)$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2 \quad (49 + 576 = 625)$$

Es gibt viele (unendlich viele) solcher ganzen Zahlen x, y, z, die der Gleichung genügen: $x^2 + y^2 = z^2$. Sie werden auch pythagoräische Zahlen genannt, weil Dreiecke mit entsprechenden Seitenlängen rechtwinklig sind. Für sie gilt der Lehrsatz des Pythagoras.
Kubikzahlen entstehen, wenn man eine ganze Zahl in die dritte Potenz setzt.
Beispielsweise ist die Kubikzahl von 2 gleich 8. Denn:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Entsprechend:

$$3^3 = 27$$
$$4^3 = 64$$
$$5^3 = 125$$
$$6^3 = 216$$

Ob man wohl auch drei Kubikzahlen finden kann, für die gilt:

(erste Zahl)^3 + (zweite Zahl)^3 = (dritte Zahl)^3 $\qquad x^3 + y^3 = z^3$?
oder gar noch Zahlen, für die gilt:
(erste Zahl)^4 + (zweite Zahl)^4 = (dritte Zahl)^4 $\qquad x^4 + y^4 = z^4$
(erste Zahl)^{17} + (zweite Zahl)^{17} = (dritte Zahl)^{17} $\qquad x^{17} + y^{17} = z^{17}$?
und so weiter.

Die Frage nach solchen Zahlen ist das Fermatsche Problem. Fermat war ein großer französischer Mathematiker, der im 17. Jahrhundert lebte. Trotz allem Bemühen und Probieren hat man entsprechende Zahlen nicht finden können. Vermutlich gibt es sie nicht. Nach dem Tode von Fermat fand man in den hinterlassenen Notizen die Bemerkung, daß er einen „wahrhaft wunderbaren Beweis" gefunden habe, daß diese Zahlen nicht vorhanden sein können. Viele Mathematiker bemühten sich bisher vergeblich, einen Beweis dafür aufzustellen.
Nach 1908 rückte das Fermatsche Problem in den Blickpunkt der interessierten Öffentlichkeit. Die Göttinger Gesellschaft der Wissen-

schaft schrieb einen Preis in Höhe von 100 000 Mark aus für denjenigen, der den umfassenden Beweis liefert, daß es keine drei ganzen Zahlen x, y, z geben kann, für die die Gleichung gilt: (erste Zahl)^n + (zweite Zahl)^n = (dritte Zahl)^n (falls n größer als 2 ist).
Viele Mathematiker, Techniker und Laien haben sich bemüht, diesen Beweis zu finden und damit den ausgesetzten Preis zu erlangen. Bis heute jedoch konnte der allgemeine Beweis – abgesehen von Teillösungen – noch nicht geliefert werden. Der ausgesetzte Preis verfällt nach dem Willen des Stifters Wolf Kehl an dessen 100. Todestag, am 23. September 2007.

Unendlich – und doch endlich

Eine mathematische Reihe ist eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Zahlen. Die einzelnen Zahlen werden als Glieder der Reihe bezeichnet.

BEISPIELE FÜR ENDLICHE ZAHLENREIHEN:

1) $s = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Das Gesetz dieser Reihenbildung ist ohne weiteres zu erkennen. Jedes Glied der Reihe ist um 2 größer als das vorangehende Glied. s ist die Summe der Reihe.

$$s = 25$$

2) $s = 5 + 25 + 125 + 625$

oder $s = 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4$

Bei dieser Reihe ist das Bildungsgesetz: Jedes Glied der Reihe ist 5mal so groß wie das vorangehende.

$$s = 780$$

3) $$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Hier sind die einzelnen Glieder der Reihe Brüche. Der Zähler aller Brüche ist 1. Die Nenner der einzelnen Glieder sind die Zahlen der natürlichen Reihenfolge der ganzen Zahlen. Die Vorzeichen wechseln.

$$s = \frac{47}{60}$$

4) $$s = 2 + 5 + 17 - 3 + \frac{2}{3}$$

Das ist *keine* Reihe, weil diese Aufeinanderfolge von Zahlen kein einheitliches Bildungsgesetz hat. Hier sind Zahlen willkürlich aneinandergereiht.

$$s = 21\frac{2}{3}$$

Alle bisher genannten Reihen (Ziffer 1 bis 3) heißen „endliche Reihen"; ihre Gliederzahl ist begrenzt.
Es gibt auch unendliche Zahlenreihen.

BEISPIELE FÜR UNENDLICHE ZAHLENREIHEN:

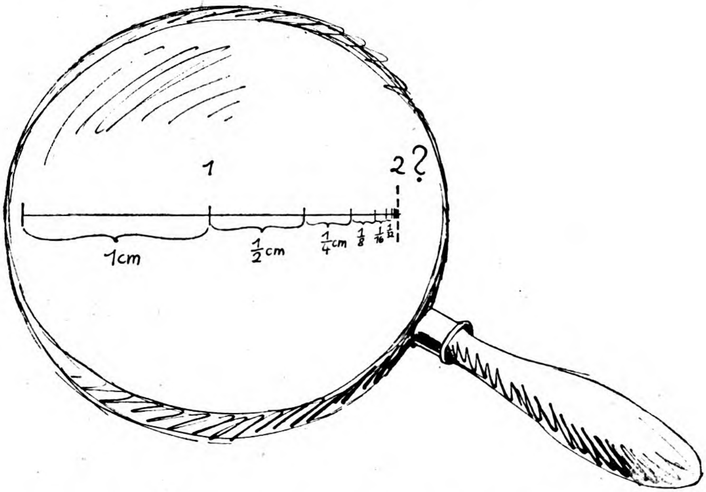
1) $$s = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots$$

Die 3 Punkte am Ende der Reihe sollen andeuten, daß die Reihe ohne Ende weiter geht. s ist hier die Summe aller geraden Zahlen. s hat keinen endlichen Wert. s ist unendlich groß.

2) $$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Die Glieder dieser unendlichen Reihe sind Brüche, deren Wert von Glied zu Glied in regelmäßiger Weise immer kleiner wird. Der Nenner eines Gliedes ist immer doppelt so groß wie der

Nenner des vorangehenden Gliedes. Wenn wir die Summe s der Reihe bestimmen wollen, müssen wir unendlich viele Brüche addieren, die allerdings immer kleiner werden. Ob da die Summe s unendlich groß wird? Seht euch folgende Zeichnung an.



Mit der Lupe betrachten wir eine Strecke von 1 cm. Sie ist verlängert um $\frac{1}{2}$ cm, dann um $\frac{1}{4}$ cm, dann um $\frac{1}{8}$ cm, um $\frac{1}{16}$ cm und so weiter. Jetzt können wir die weiteren Bruchteile kaum noch einzeichnen, so klein sind sie, so drängen sie sich zusammen. Das sieht beinahe so aus, als ob bei weiterem Verlängern um die immer kleineren Bruchteile nur eine Gesamtstrecke von 2 cm entsteht! Fragen wir einen Mathematiker! Er sagt:

Jawohl, die Summe s der unendlichen Reihe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

ergibt genau 2, nicht mehr, nicht weniger.

Mit einem einfachen mathematischen Trick kann man das beweisen!

Die Reihe heißt: $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Wir multiplizieren die ganze Gleichung mit 2: $2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Wir ziehen von der unteren Gleichung die obere ab und erhalten: $s = 2 + 1 - 1 = 2$ (Die Brüche verschwinden beim Abziehen.)

$$\underline{\underline{s = 2}}$$

Somit ist bewiesen, daß die Summe dieser unendlichen Reihe gleich 2 ist.
Die Summe einer unendlichen Reihe kann eine endliche Zahl sein, im vorliegenden Fall sogar eine ganze Zahl (2). Es ist aber keineswegs so, daß die Summe einer aus (immer kleiner werdenden) Brüchen bestehenden unendlichen Reihe immer eine endliche Zahl ergibt. Der Summenwert mancher solcher unendlichen Reihe ist unendlich groß. Hier ist eine solche Reihe:

I)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Die Brüche werden zwar auch hier immer kleiner, aber man schließt wie folgt:

Wir verkleinern einige Glieder dieser Reihe. Statt $\frac{1}{3}$ schreiben wir $\frac{1}{4}$; an Stelle von $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ schreiben wir je $\frac{1}{8}$; statt $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}$ schreiben wir nur je $\frac{1}{16}$. Die veränderte Reihe sieht dann so aus:

II)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Entsprechend könnten wir dann auch die weiteren Glieder der Reihe verändern. Beim Summieren der Reihe II müßten wir dann zu 1 unendlich oft je $\frac{1}{2}$ hinzuzählen. Dabei erhalten wir eine über alle Grenzen wachsende Zahl. Die Summe der Reihe II ist also unendlich. Und erst recht ist dann der Summenwert der Reihe I gleich unendlich, da die meisten ihrer Glieder noch größer sind als die entsprechenden Glieder der Reihe II.

Wir weisen darauf hin, daß in der Praxis oft 3,14 oder auch $\frac{22}{7}$ als angenäherter Wert von π verwendet werden. Ein genauerer Wert ist schon: 3,1415926 ... Neuerdings hat man die Zahl π auf 2040 Stellen hinter dem Komma berechnet.
π ist ein nichtperiodischer Dezimalbruch mit unendlich viel Stellen nach dem Komma. Bei jeder Verwendung des Zahlenwertes von π in Rechnungen muß überlegt werden, ob der Wert 3,14 für den betreffenden Zweck ausreicht, oder ob ein genauerer Zahlenwert für π eingesetzt werden muß.
Der deutsche Mathematiker Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) hat gefunden, daß der Zahlenwert von π gleich dem Summenwert der folgenden unendlichen Reihe ist, die als Leibnizsche Reihe bezeichnet wird.

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \mp \ldots$$

Es sind auch noch andere unendliche Reihen aufgestellt worden, deren Summe dem Zahlenwert von π entspricht.
Will man mit einer solchen unendlichen Reihe den Zahlenwert von π ausrechnen, so muß man um so mehr Glieder der Reihe in die Rechnung einbeziehen, je genauer der gesuchte π-Wert sein soll.
Auch die Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen und die Logarithmen werden als Summe bestimmter unendlicher Zahlenreihen ermittelt.

Weizenkörner auf dem Schachbrett

Die Sage erzählt, daß der indische König Sheran den Erfinder Sessa aufforderte, irgendeinen Wunsch zu nennen, den er erfüllen wolle, um ihn für die Erfindung des Schachspiels zu belohnen.
Der schlaue Sessa machte einen Vorschlag: „Ein Weizenkorn auf das erste Feld des Schachbrettes, 2 Weizenkörner auf das zweite, 4 auf das dritte und so weiter bis zum letzten Feld."
Dieser Wunsch sei zu bescheiden, meinte der König, bis ihm Sessa vorrechnete, daß sein Wunsch wohl kaum erfüllt werden könne.

Auf das 1. Feld	kommt	1	Weizenkorn
Auf das 2. Feld	kommen	2	Weizenkörner
Auf das 3. Feld	kommen	$2 \cdot 2 = 2^2$	Weizenkörner
Auf das 4. Feld	kommen	2^3	Weizenkörner
und so weiter			
Auf das 64. Feld	kommen	2^{63}	Weizenkörner

Jetzt müßten wir ausrechnen, wieviel Weizenkörner auf jedes einzelne der 64 Felder des Schachbrettes kommen! Dann müßten wir die 64 erhaltenen Ergebnisse addieren. Das wäre eine schöne Rechnung, wenn ... ja, wenn es da nicht einen mathematischen Trick gäbe, um die Rechnung wesentlich zu vereinfachen. Die Gesamtsumme aller Weizenkörner auf den 64 Feldern wollen wir s nennen. Dann wäre also:

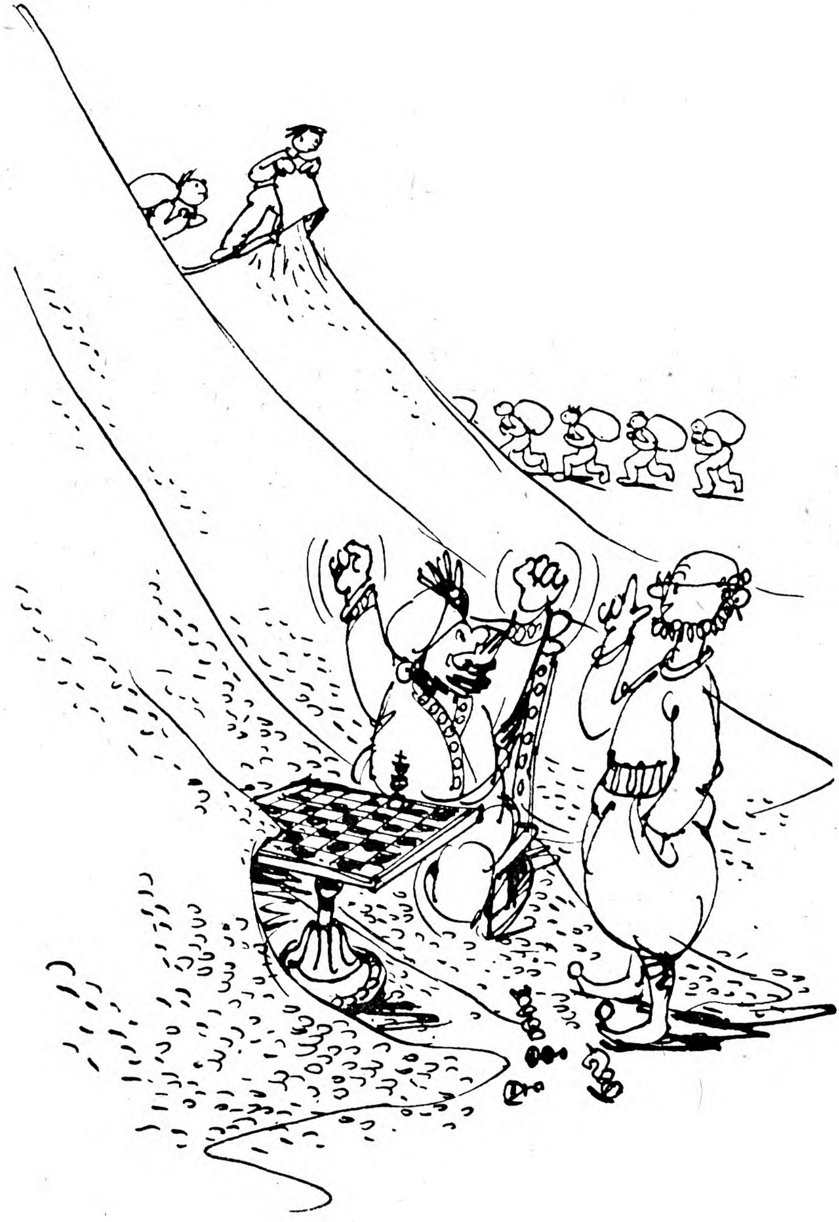
$$s = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\dots\dots + 2^{63}$$

Jetzt kommt der Kniff! Wir multiplizieren die gesamte Gleichung mit 2, sowohl links als auch rechts vom Gleichheitszeichen, und schreiben dann wie folgt untereinander:

$$\begin{array}{rl} 2s = & 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\dots\dots\dots + 2^{63} + 2^{64} \\ s = & 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\dots\dots + 2^{63} \\ \hline s = & 2^{64} - 1 \end{array}$$

(alle anderen Glieder fallen weg!)

Jetzt ziehen wir die untere Gleichung von der oberen ab und erhalten: Die Gesamtsumme s aller Weizenkörner auf dem Schachbrett beträgt genau $2^{64}-1$. Und nun müssen wir 2^{64} berechnen (das heißt: 64mal die



Ziffer 2 hinschreiben; immer ein Malzeichen zwischen zwei Zweien, dann alles multiplizieren!) und dann 1 davon abziehen. – Hier ist das Ergebnis:
Die Gesamtsumme der Weizenkörner beträgt auf das Korn genau

18 446 744 073 709 551 615 Weizenkörner

das sind: 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen 551 Tausend 615.
Wir können uns die ungeheure Menge nicht vorstellen. Sie entspricht einem Mehrtausendfachen der heutigen jährlichen Weltproduktion von Weizen.

Wieviel Skatspiele gibt es?

Die Verteilung der 32 Karten eines Skatspiels auf die drei Spieler und den Skat ist bei jedem Spiel anders. Der Mathematiker kann ausrechnen, wieviel verschiedene Verteilungsmöglichkeiten es mit 32 Karten gibt. Es sind beim Skat 2 753 264 408 204 640.
(2 Billiarden 753 Billionen 264 Milliarden 408 Millionen 204 Tausend und 640).
Das ist eine ungeheure Zahl! Ob drei eifrige Skatspieler damit rechnen können, im Laufe ihres Lebens alle diese Möglichkeiten einmal durchgespielt zu haben? Das ist ausgeschlossen. Nehmen wir an, daß die gesamte Menschheit (2,8 Milliarden) täglich 8 Stunden Skat spielt und dabei jedes Einzelspiel in 5 Minuten abläuft, so braucht sie zum Durchspielen aller Möglichkeiten fast 90 Jahre.
Es wird also kaum vorkommen, daß sich im Leben eines Skatspielers eine Partie wiederholt. Es gibt so viele Variationen, daß er immer wieder andere Karten in die Hand bekommt. Vielleicht beruht die Beliebtheit des Skatspiels auf dem fast unerschöpflichen Abwechslungsreichtum.

Wir wollen noch die Formel angeben, nach der der Mathematiker die obige Riesenzahl der Möglichkeiten errechnet:

$$\frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!}$$

Die Zeichen „!" sind zwar wie Ausrufezeichen geschrieben, haben aber in der Mathematik eine andere Bedeutung. 2! bedeutet $1 \cdot 2$; $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$; 32! bedeutet das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis 32. Gelesen, beziehungsweise gesprochen wird das mathematische Zeichen „!" als „Fakultät". 10! (sprich: 10 Fakultät) entspricht der Zahl 3 628 800.

Die Zahl π

Die erste Bekanntschaft mit der Zahl π (sprich: pie) können wir an irgendeinem kreisrunden Körper, zum Beispiel an einem Kochtopf, machen. Am Rand legen wir ein Bandmaß herum und messen möglichst genau den Umfang. Der Umfang soll mit U bezeichnet werden.
Er beträgt zum Beispiel $U = 80{,}6$ cm. Dann messen wir mit dem Lineal den äußeren Durchmesser des Topfes, wieder am Rand. Der Durchmesser d ist doppelt so groß wie der Halbmesser oder Radius r; also: $d = 2r$. Am Topf messen wir $d = 26$ cm. U geteilt durch d ergibt $80{,}6 : 26 = 3{,}1$. Der Umfang des Topfes ist also 3,1mal größer als der Durchmesser.

Bestimmung von π

am Kochtopf mit dem Metermaß

Das gleiche nacheinander mit dem Papierkorb, mit einem Eimer, mit einer Konservenbüchse, mit der Kaffeetasse und dem Füllfederhalter, vielleicht auch noch mit einem Rad oder einer Kegelkugel wiederholen, den jeweils gemessenen Umfang durch den zugehörigen Durchmesser teilen. Wir erhalten in allen diesen Fällen immer eine und dieselbe Zahl von rund 3,1. Wird das Ergebnis ein wenig größer oder kleiner, haben wir Pech. Meßfehler lassen sich natürlich bei solchen groben Messungen nicht ausschalten. Aber im großen und ganzen und im Mittel stimmt es schon. Umfang geteilt durch Durchmesser gibt bei allen Kreisen ein und dieselbe Zahl, etwa 3,1. Diese Zahl wird π genannt.

In Formelsprache: $$\boxed{\frac{U}{d} = \pi}$$

Da $d = 2r$, können wir auch sagen: $$\boxed{\frac{U}{2r} = \pi}$$

π ist eine Zahl, die für alle Kreise charakteristisch ist. Bei allen Völkern wird diese Zahl mit dem Buchstaben π bezeichnet. π ist der p-Laut des griechischen Alphabetes. Schon Archimedes, ein großer Mathematiker und Physiker des Altertums, hat um 300 vor unserer Zeitrechnung für die Zahl π den Wert 3,14 gefunden.

Noch heute, nach mehr als zwei Jahrtausenden, rechnen die Techniker und Handwerker der ganzen Welt täglich mit diesem von Archimedes gefundenen Zahlenwert. Er genügt für die meisten Zwecke. Er ist allerdings bei weitem noch nicht genau.

Um das Jahr 1600 wurde von dem holländischen Mathematiker Ludolf van Ceulen die Zahl π auf 35 Stellen hinter dem Komma berechnet. Ihm zu Ehren wird deshalb π auch als die Ludolfsche Zahl bezeichnet. Wenigstens einige der Zahlen hinter dem Komma wollen wir noch angeben.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots\ldots$$

Aber auch mit 35 Stellen hört dieses Zahlenungetüm noch nicht auf. Ein englischer Mathematiker hat π auf 707 Stellen berechnet und fand noch kein Ende. π ist ein unendlicher Dezimalbruch. Selbst in Kilometerweite hinter dem Komma wird nirgends eine regelmäßige Zahlenwiederholung, eine Periode, sichtbar. Deshalb kann π nicht in einen gemeinen Bruch (mit Bruchstrich) umgewandelt werden und wird aus diesem Grund als „irrationale“ Zahl bezeichnet.
Leibniz, ein Mathematiker und Philosoph des 17. Jahrhunderts, fand ein Mittel zur genauen Berechnung von π.
π ist gleich der Summe einer bestimmten unendlichen Reihe,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \pm \ldots\ldots$$

Je mehr Glieder man nach diesem System hinzufügt oder abzieht, desto genauer wird das Ergebnis. Man muß allerdings schon weit hinausgreifen, um π auf einige Stellen hinter dem Komma genau zu erhalten. Bei den Mathematikern ist diese Reihe deshalb ungebräuchlich geworden. „Sie konvergiert uns zu langsam“, sagen sie; das heißt, sie nähert sich zu langsam dem tatsächlichen Wert. Rascher rechnet man mit der Reihe:

$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) \pm \ldots\ldots$$

Mit einer elektronischen Rechenmaschine wurde π in jüngster Zeit bis auf 2400 Stellen hinter dem Komma bestimmt.
Nach diesem Blick in die „höhere“ Mathematik wollen wir wieder zur handfesten Praxis zurückkehren.

Da $\frac{U}{d} = \pi$, folgt: $\boxed{U = d \cdot \pi}$ oder $\boxed{U = 2\pi r}$

Das ist eine Formel, die jeder Techniker und Facharbeiter kennt. Er verwendet sie, um den Umfang von Kreisen aus dem Durchmesser zu berechnen. Der Durchmesser ist einfach mit der Zahl π zu multiplizieren.
Auch der Flächeninhalt F des Kreises kann berechnet werden, wenn man den Radius kennt.
Mathematische Überlegungen liefern die Formel:

$$\boxed{F = \pi r^2}$$

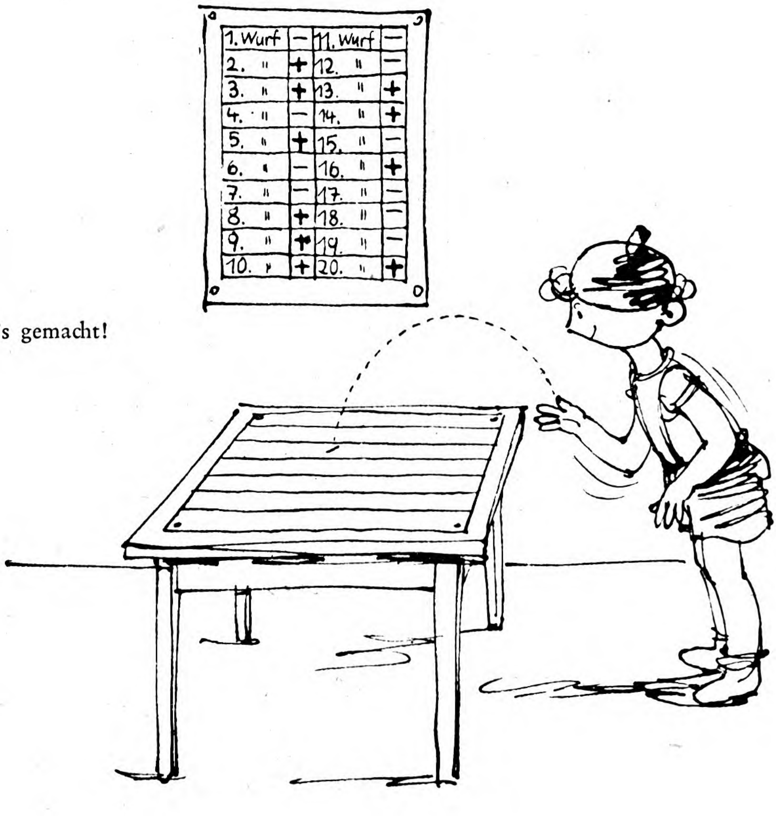
Beträgt der Radius zum Beispiel 10 cm, so wäre der Flächeninhalt also:
$F = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10\ \text{cm}^2 = 314\ \text{cm}^2$.
Und der Umfang: $U = 20 \cdot 3{,}14 = 62{,}80$ cm.
Bei allen Berechnungen von Kreisen taucht die Zahl π auf. Da Zylinder, Kegel und Kugel kreisrunde Körper sind, so tritt in den Berechnungsformeln dieser Körper ebenfalls die Zahl π in Erscheinung.
Auch in den Gesetzen der Physik begegnen wir häufig der Zahl π, sobald ein physikalisches Gesetz eine kreisförmige Bewegung betrifft oder aus ihr abgeleitet werden kann.
Die Zahl π ist somit eine überaus wichtige Zahl, die nicht nur zur Berechnung vieler runder Körper benötigt wird, sondern auch aufs engste mit vielem technischem Geschehen verknüpft ist.

π-Bestimmung durch Nadelwerfen

Das ist eine ganz seltsame und überraschende Geschichte. Die Zahl π läßt sich, ohne einen Kreis zu verwenden, bestimmen.
Man benutzt dazu eine Stecknadel (oder besser eine Nähnadel, deren Spitze mit der Kneifzange abgezwickt ist, damit die Nadel überall gleich stark ist). Auf der Tischplatte ist ein großes Blatt Papier befestigt, auf dem parallele Linien eingezeichnet sind. Die Abstände der

Linien sind doppelt so groß wie die Länge der Nadel. Ist die Nadel zum Beispiel 2,6 cm lang, zeichnet man die Parallelen in Abständen von 5,2 cm.

Die Nadel wird auf das Papier geworfen, ohne irgendwie zu zielen. Damit sie nicht vom Papier zurückfedert und möglichst wenig rollt, legt man unter das Papier einige weiche Löschblätter oder ein weiches Tuch. Das Wurfergebnis wird als Treffer gewertet, wenn die Nadel einen Strich schneidet oder auch nur mit der Spitze oder der Kuppe berührt. Fällt die Nadel zwischen zwei Parallelen, ohne sie zu schneiden, gilt das nicht als Treffer. Da sie nur halb so lang ist wie der Abstand der parallelen Geraden, kann es also niemals vorkommen, daß sie zwei Schnittpunkte mit den Parallelen hat.



So wird's gemacht!

Jeder Wurf wird aufgeschrieben mit der Angabe, ob Treffer erzielt wurden oder nicht.

Bei 100 Würfen ergaben sich zum Beispiel 39 Treffer,
bei 200 Würfen 76 Treffer,
bei 300 Würfen 105 Treffer.

Zahl der Würfe geteilt durch Zahl der Treffer ergibt: 2,56
2,63
2,86.

Die Idee zu diesen Nadelwürfen stammt von dem französischen Naturforscher Buffon, der vor etwa 200 Jahren lebte. Er führte den Beweis, daß man bei vielen Würfen die Zahl π erhält, wenn die Zahl der Würfe durch die Zahl der Treffer geteilt wird. Das Ergebnis wird um so genauer, je größer die Zahl der Würfe ist. Bei 5000 Würfen erhielt ein Schweizer Astronom den Zahlenwert 3,159, bei 10 000 Würfen ein deutscher Mathematiker den Wert 3,150. Diese Ergebnisse entsprechen zwar noch nicht ganz genau der Zahl π (3,141 ...), aber das letztere Ergebnis weicht nur um rund $\frac{1}{3}$ % vom richtigen Wert ab. Anscheinend muß man mit der Wurfzahl weit über 10 000 hinausgehen, um noch bessere π-Werte zu erhalten.

Das ist die verblüffendste Methode zur Bestimmung der Zahl π. Es erscheint unerklärlich, daß man hier als Ergebnis der Rechnung „Wurfzahl geteilt durch Trefferzahl" die Zahl π erhält, obwohl doch kein Kreis vorliegt.

Man kann die Nadel flach werfen, man kann sie – statt zu werfen – aus irgendeiner Höhe auf das Papier herabfallen lassen. Man erhält π! Merkwürdig!

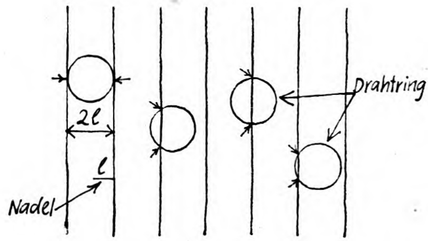
Buffon überlegte folgendes:

Bei einem Treffer wird der Schnitt der Nadel mit einer Parallelen manchmal im ersten Millimeter der Nadellänge liegen, manchmal im zweiten, manchmal im dritten und so weiter. Bei vielen, vielen Würfen werden im ersten Millimeter ebensoviel Schnitte liegen wie im zweiten, dritten und so weiter. Infolgedessen wird man beim Nadelwerfen auf das Liniennetz um so mehr Treffer haben, je länger die Nadel, um so weniger, je kürzer sie ist. Nimmt man eine doppelt so lange Nadel, so erhält man also doppelt soviel Treffer. Verkürzt man die Nadel auf die Hälfte, so entstehen nur halb soviel Treffer.

Bei festliegendem Liniennetz ist ausschließlich die Länge der Nadel entscheidend für die Zahl der Treffer und nicht etwa deren Form. Ob die Nadel zum Beispiel nach dem zehnten Millimeter ihrer Länge geknickt ist, spielt keine Rolle für die Zahl der Treffer. Die Nadel kann auch mehrmals geknickt sein oder gebogen, ja, sogar kreisförmig sein. Mit allen Formen von gleicher Länge erhält man gleich viel Treffer.

Man denke sich, daß auf das Parallelennetz ein kreisförmiger Drahtring geworfen wird, dessen Durchmesser genauso groß ist wie der Abstand der Linien (doppelte Nadellänge).

Der Ring fällt *immer* so, daß er 2 Schnittpunkte, beziehungsweise 2 Berührungspunkte mit den Linien hat. Man erhält also bei jedem Wurf 2 Treffer. Bei n Würfen mit dem Drahtring auf das Liniennetz sind es also 2 n Treffer.



Bei jedem Wurf mit einem Drahtring, dessen Durchmesser gleich dem Abstand der parallelen Linien ist, gibt es immer 2 Schnittpunkte (2 Treffer)

Die Nadel hat die Länge l. Der Abstand der Parallelen beträgt $2\,l$. Der Drahtring hat den Radius l. Der Draht hat also die Länge $2\pi l$. Da für die Zahl der Treffer lediglich die Länge des geworfenen Drahtes (beziehungsweise der Nadel) entscheidend ist, kann man schließen:

Bei n Würfen mit der Länge $2\pi l$ (Ring) erhält man 2 n Treffer.

Bei n Würfen mit der Länge l Nadel erhält man also $\frac{2\,n}{2\,\pi}$ Treffer $= \frac{n}{\pi}$ Treffer.

Teilt man die Zahl der Nadelwürfe (n) durch die Zahl der dabei erzielten Treffer $\frac{n}{\pi}$, so erhält man:

$$\frac{\text{Wurfzahl}}{\text{Trefferzahl}} = \frac{n}{\frac{n}{\pi}} = n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi$$

Das war die Überlegung von Buffon, mit der er bewies, daß man bei vielen Würfen mit der Nadel die Zahl π erhält, wenn man die Wurfzahl durch die Trefferzahl teilt.

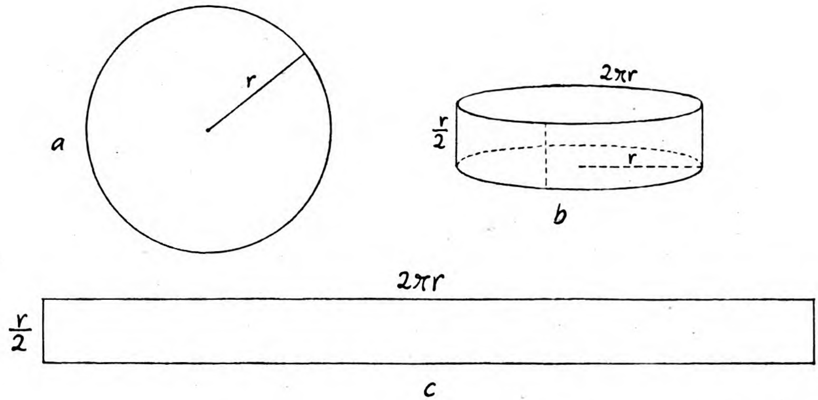
Die Grundannahme von Buffon, daß bei vielen Würfen im ersten Millimeter der Nadel ebensoviel Treffer liegen werden wie im zweiten, dritten und so weiter, ist eine typische Wahrscheinlichkeitsbetrachtung. In entsprechender Weise vermutet jedermann ohne weiteres, daß er bei sehr vielen Würfen mit einem Würfel die 1 genauso oft werfen wird wie die 2, 3, 4, 5 oder 6. Auch diese Vermutung wird durch die Erfahrung bestätigt und stimmt um so genauer, je größer die Zahl der Würfe ist. Alle Aussagen der Wahrscheinlichkeitsberechnung sind um so richtiger, je mehr Fälle in Betracht gezogen werden.

Die Quadratur des Kreises

Wenn jemand zum Ausdruck bringen will, daß eine bestimmte Aufgabe oder irgendein Problem nicht lösbar ist, so pflegt er gelegentlich zu sagen: „Das ist die Quadratur des Kreises!“

Woher kommt diese sprichwörtliche Redensart? Schon vor 4000 Jahren stellten sich ägyptische Mathematiker die Aufgabe, mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen Kreis in ein Quadrat oder auch in ein Rechteck zu verwandeln. Das heißt, man versuchte zu einem gegebenen Kreis ein

Quadrat (oder Rechteck) zu zeichnen, das den gleichen Flächeninhalt hat.
Um die Lösung dieses mathematischen Problems haben sich die Mathematiker von vier Jahrtausenden der Menschheitsgeschichte vergeblich bemüht. Zwar wurde dabei eine ganze Reihe von angenäherten Lösungen gefunden, aber ein exaktes Verfahren konnte nicht ermittelt werden. Im Jahre 1882 lieferte schließlich der deutsche Mathematiker Lindemann den Beweis, daß diese Aufgabe tatsächlich unlösbar ist. Er konnte nachweisen, daß schon eine Strecke von π cm niemals völlig genau gezeichnet werden kann. Das aber wäre die Voraussetzung für eine Quadratur des Kreises.



Hier ist der gegebene Kreis mit dem Radius r. Über diesem Kreis errichten wir einen Zylinder. Dieses Rechteck ist flächengleich dem gegebenen Kreis

Einmal glaubte man, die Lösung wie folgt gefunden zu haben: Über dem Kreis errichtet man einen Kreiszylinder (zum Beispiel aus Papier), dessen Höhe halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist. Schneidet man den Mantel des Zylinders (längs der gestrichelten Linie) auf, dann entsteht ein Rechteck. Die lange Seite ist gleich der Umfangslinie des gegebenen Kreises ($2\pi r$) und die kurze Seite gleich dem halben Kreisradius $\left(\frac{r}{2}\right)$.

Der Flächeninhalt dieses Rechtecks ist:

$$2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Hier haben wir ein Rechteck, das den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis hat! Ist aber damit die Quadratur des Kreises gelöst? Wo liegt der Fehler?

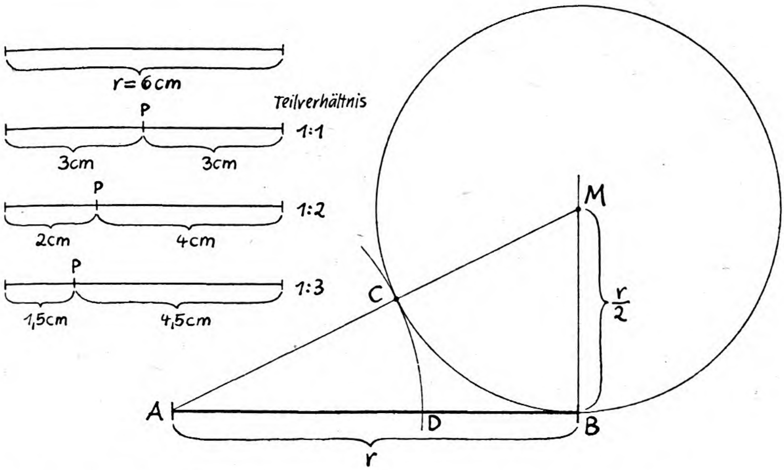
Eins wurde dabei übersehen. Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Aufgabe, einen Kreis lediglich *mit Hilfe von Zirkel und Lineal* in ein Quadrat (oder Rechteck) zu verwandeln. Die Aufgabe soll in der ebenen Zeichenfläche durchgeführt werden. Dagegen wurde verstoßen. Die Durchführung wurde aus der Ebene (mit 2 Dimensionen: Länge und Breite) in den Raum (mit 3 Dimensionen: Länge, Breite und Höhe) verlegt. Dort erhält man tatsächlich eine gekrümmte Fläche vom Flächeninhalt πr^2, und diese Fläche kann dann als Rechteck in die Ebene abgerollt werden. Die geschilderte Lösung widerspricht aber der gestellten Forderung und stellt lediglich eine angenäherte Lösung der Quadratur des Kreises dar.

Vom Goldenen Schnitt

Man kann eine Strecke durch einen Zwischenpunkt P in verschiedenen Zahlenverhältnissen teilen, beispielsweise 1 : 1 oder 1 : 2 oder 1 : 3 und so weiter.

Eine Strecke r heißt „stetig" geteilt, wenn sich der kleinere Teilabschnitt zum größeren genauso verhält wie der größere Abschnitt zur ganzen (geteilten) Strecke.

Die Strecke $AB = r$ ist stetig zu teilen. Man errichtet in B auf AB die Senkrechte von der Länge $\frac{r}{2}$. Dann ist $BM = \frac{r}{2}$. Um M beschreibt



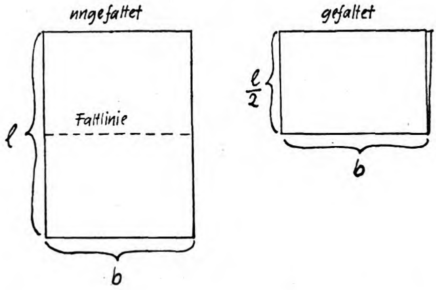
Teilung einer Strecke r = 6 cm im Zahlenverhältnis 1 : 1; 1 : 2; 1 : 3
Stetige Teilung einer Strecke

man mit dem Halbmesser MB $= \frac{r}{2}$ den Kreis und verbindet dann A mit M. Die Strecke AM schneidet den Kreis in C. Die Strecke AC wird durch einen Kreisbogen um A mit AC heruntergeklappt auf die Strecke AB. Damit erhält man den Punkt D, der die Strecke AB stetig teilt.
Der Name „stetige" Teilung ist auf Grund des folgenden Sachverhaltes gewählt worden: Trägt man auf dem größeren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke den kleineren ab, so wird dadurch der größere Abschnitt wieder stetig geteilt. Trägt man auf dessen größerem Abschnitt wieder den kleineren ab, so entsteht abermals eine stetige Teilung. Das kann man fortdauernd (= stetig) weitermachen. Immer wieder wird durch Abtragen des kleineren Abschnitts der größere im gleichen Verhältnis geteilt. Daher also der Name „stetige" Teilung.
Soll in einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben werden, so wird die Zehneckseite gefunden, indem man den Radius des Kreises stetig teilt. Der größere der bei der Teilung entstehenden Abschnitte ist die Zehneckseite, die dann genau zehnmal in den Kreis als Sehne gelegt werden kann.

Die stetige Teilung einer Strecke wird auch als Goldener Schnitt bezeichnet. Früher glaubte man nämlich, daß ein Rechteck, zum Beispiel ein Bild oder ein Buchformat, immer dann besonders gefällig wirkt, wenn sich die Seiten zueinander verhalten wie die Abschnitte einer stetig geteilten Strecke. Ferner glaubte man, daß dieses Teilungsverhältnis auch am menschlichen Körper zu finden sei. Bei vielen Schöpfungen der Bildhauerei und Malerei ist der Mensch teils unbewußt, teils bewußt so dargestellt, daß die gesamte Körperlänge durch die Hüfte stetig geteilt wird.
Die stetige Teilung, so sagte man, soll auch überall in der Natur zu finden sein. Beispielsweise schien es an Getreidehalmen so, als ob drei aufeinanderfolgende Knoten des Halmes das typische Bild einer stetigen Teilung zeigten. Man glaubte, mit dem Schnittverhältnis der stetigen Teilung ein wichtiges Gesetz der Natur und zugleich des künstlerischen Empfindens gefunden zu haben und sprach deshalb vom Goldenen Schnitt.
Wenn auch dieses Teilungsverhältnis gelegentlich angenähert in der Natur und in der Kunst zu finden ist, so konnte jedoch ein allgemein gültiges Gesetz dieser Art *nicht* bestätigt werden.
Man richtet sich zum Beispiel bei Buch- und Papierformaten heutzutage keineswegs nach dem Teilungsverhältnis des Goldenen Schnittes. Die als zweckmäßig und recht gefällig wirkenden DIN-Papierformate weichen in ihrem Seitenverhältnis erheblich vom Goldenen Schnitt ab.

DIN A 4

Wenn wir im Schreibwarengeschäft einen Briefblock kaufen wollen, so fragt uns die Verkäuferin, welches Format wir wünschen. „DIN A 4, DIN A 5?“ – Meist wählen wir dann den üblichen Einheitsbriefbogen von der Größe 21 cm mal 29,7 cm. „DIN A 4“ wird dieses Format genannt.



Was heißt das eigentlich, „DIN A 4“? Und wie ist man gerade auf die genannten Zahlen für Länge und Breite gekommen?
„DIN“ ist die vereinbarte Kurzbezeichnung der Normblätter, in denen einheitliche Ausmaße für die verschiedenen Industrieprodukte festgelegt sind. Früher sprach man von der *D*eutschen *I*ndustrie-*N*orm“, daher kommt die Buchstabenzusammensetzung „DIN“. So werden zum Beispiel als besonders zweckmäßig erkannte Größen von Maschinenteilen festgelegt, um die Ersatzteilbeschaffung zu erleichtern. Nicht nur Größenverhältnisse, sondern auch Begriffe, Bezeichnungen, Maßeinheiten und Formelzeichen werden genormt.

In Deutschland wird die Normung vom *D*eutschen *N*ormen-*A*usschuß (DNA) vorgenommen. Er veröffentlicht seine Normen in den sogenannten „DIN-Blättern“. Diese einzelnen Blätter sind numeriert. „DIN 476“ enthält die festgelegten Normen für Papierformate. Bei ihrer Normung entschloß man sich, das rechteckige Format derart zu wählen, daß bei einer Faltung des Blattes auf die Hälfte der Längsseite wieder ein Rechteck von gleicher Gestalt entsteht. Das Seitenverhältnis des neuen Rechtecks sollte genauso groß sein wie das Seitenverhältnis im ursprünglichen Rechteck.

Das Verhältnis von großer Seite zu kleiner Seite im Rechteck ist $l : b$.

Das entsprechende Seitenverhältnis nach der Halbfaltung ist $b : \frac{l}{2}$. Da die beiden Verhältnisse gleich groß sein sollen, so gilt:

$$l : b = b : \frac{l}{2}$$

In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder, also folgt:

$$\frac{l^2}{2} = b^2$$

$$l^2 = 2\,b^2$$

Auf beiden Seiten der Gleichung ziehen wir die Wurzel:

$$l = b\sqrt{2}$$

Bei allen Papier-DIN-Formaten ist die lange Rechteckseite $\sqrt{2}$mal so groß wie die kurze Rechteckseite. Dabei ist $\sqrt{2}$ abgerundet gleich 1,41. Als größtes DIN-Papierformat wurde ein Blatt vom Flächeninhalt 1 Quadratmeter gewählt. Dieses Blatt wird als Type A 0 bezeichnet. Die Seiten b und l dieses genormten Blattes lassen sich nun berechnen.

$$b \cdot l = 1 \text{ Quadratmeter} = 10\,000 \text{ Quadratzentimeter}$$

$$b \cdot b\sqrt{2} = 10\,000$$

$$b^2 \cdot \sqrt{2} = 10\,000$$

$$b^2 = \frac{10\,000}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{100}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

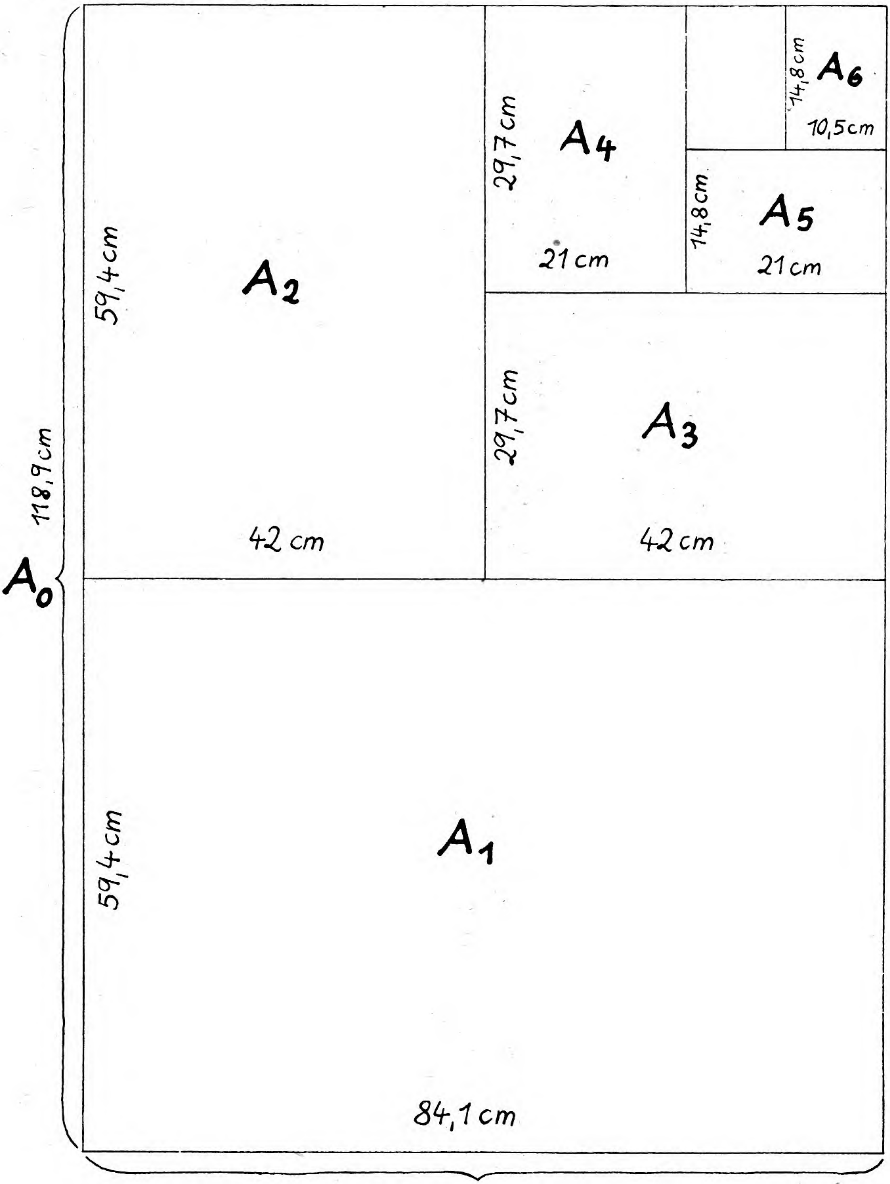
$$b = 84{,}1 \text{ cm}$$

$$l = b\sqrt{2} = 118{,}9 \text{ cm}$$

Durch Halbfaltung des Formates A 0 entsteht das Format A 1. Durch weitere Halbfaltungen entstehen die Formate A 2, A 3, A 4, A 5, A 6 und so weiter. Die Seitenlängen der Formate sind im Bild auf Seite 92 eingeschrieben.
DIN A 4 ist das Format des Einheitsbriefbogens. Kurze geschäftliche Mitteilungen und kleine Rechnungen werden meist auf ein halbes DIN-A-4-Blatt, also auf das Format DIN A 5, geschrieben. DIN A 6 ist das Postkarten- und Taschenformat. Das Format DIN A 2 wird auch als „Bogen" bezeichnet. DIN A 4 ist somit ein Viertelbogen.
Neben der A-Reihe der DIN-Formate für Papier sind zusätzlich auch B- und C-Reihen festgelegt worden. Sie gelten zum Beispiel für Briefumschläge, Hefter, Mappen und so weiter, die ja stets etwas größer sein müssen als das hineingelegte A-Format.

Regelmäßige Vielecke

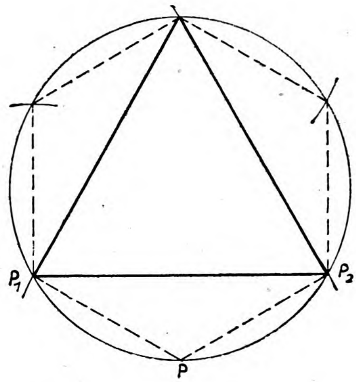
Ein regelmäßiges Vieleck hat gleich lange Seiten, die an den Ecken gleich große Winkel einschließen. Jedes regelmäßige Vieleck hat einen Mittelpunkt, der von allen Eckpunkten gleich weit entfernt ist. Somit liegen alle Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks auf einem Kreis, von dem man bei der Konstruktion von regelmäßigen Vielecken ausgeht.
Wir wollen jetzt einige regelmäßige Vielecke zeichnen, lediglich unter Benutzung von Lineal und Zirkel.
Wir erhalten ein regelmäßiges Sechseck, wenn in einen Kreis, von einem beliebigen Punkt ausgehend, der Radius des Kreises 6mal hintereinander als Sehne eingetragen wird. Wir schlagen erst um P je einen



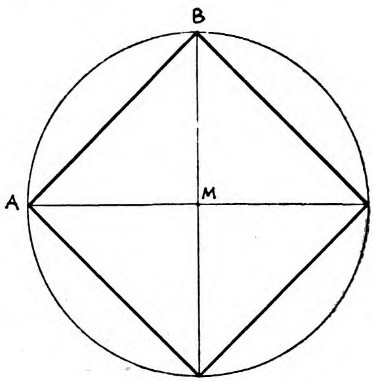
Die DIN-Papierformate A0 bis A6 (Genauigkeit der angegebenen Maße auf mm, nicht auf Bruchteile von mm)

Kreisbogen mit dem Kreisradius nach links und rechts. Der Schnitt mit der Kreislinie liefert die Punkte P_1 und P_2, um die wir wieder je einen Kreisbogen mit dem Radius schlagen, und so weiter. Verbinden wir die Nachbarpunkte miteinander, so entsteht das Sechseck (gestrichelt).
Durch Verbinden des 1., 3. und 5. Eckpunktes erhalten wir ein regelmäßiges Dreieck.

Regelmäßiges Dreieck und Sechseck

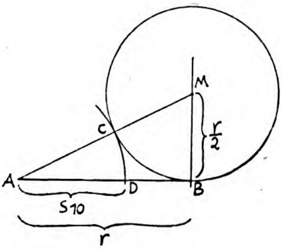


Zeichnen wir in den Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein, so erhalten wir die Eckpunkte des regelmäßigen Vierecks (Quadrat).

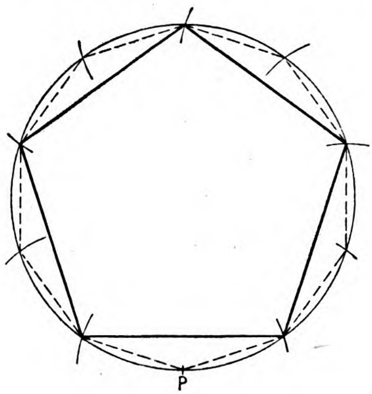


Quadrat

Schon schwieriger ist die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks. Man erhält zunächst die Seitenlänge des regelmäßigen Zehnecks, wenn man den Kreisradius nach dem Goldenen Schnitt teilt. Hierzu zeichnet man gesondert den Radius r mit den Endpunkten A und B. In B wird die Senkrechte auf A B errichtet und auf ihr die Hälfte des Kreisradius bis M abgetragen. Um M schlagen wir mit M B den Kreis und verbinden A mit M. Der Schnittpunkt von A M mit dem Kreis ist C. Schlagen wir mit A C um A einen Kreisbogen, schneidet er A B in D. A D ist die Zehneckseite s_{10}.

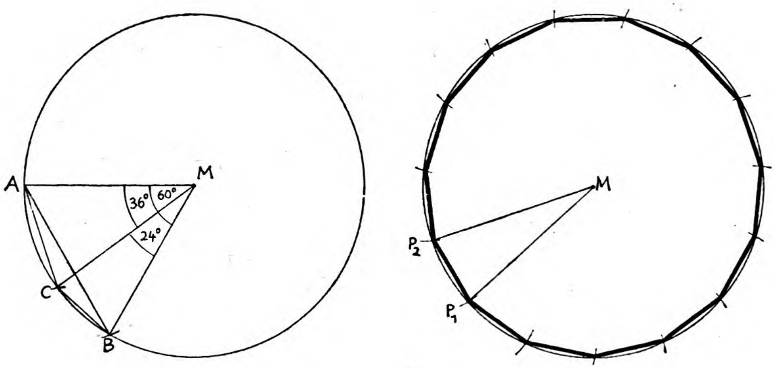


Wir legen sie 10mal hintereinander als Sehne in den Kreis und erhalten das regelmäßige Zehneck. Verbinden wir eine Ecke dieses Zehnecks mit der übernächsten Ecke, diese wieder mit der übernächsten und so weiter, so entsteht das regelmäßige Fünfeck.



Regelmäßiges Fünfeck und Zehneck

Auch ein regelmäßiges Fünfzehneck kann gezeichnet werden.
Wir errechnen zunächst einmal den entsprechenden Mittelpunktswinkel zu einer Fünfzehneckseite. *Ein* solcher Winkel hat die Größe von 24 Grad (360°:15). Die gesuchte Fünfzehneckseite P_1 P_2 gehört als Kreissehne zum Mittelpunktswinkel von 24°.
Jetzt suchen wir die Sehne zum Mittelpunktswinkel 24°. Im linken Teil des Bildes haben wir in den Kreis zunächst den Radius als Sehne A B eingezeichnet. A B ist die Seite des regelmäßigen Sechsecks. Der Mittelpunktswinkel zur Sechseckseite A B, der Winkel A M B, beträgt 60°. Dann haben wir die Zehneckseite als Sehne A C eingetragen. Der Winkel A M C der Zehneckseite beträgt 36°. Der Winkel C M B ist somit gleich 24°. Und die Sehne zum Mittelpunktswinkel von 24° ist die gesuchte Fünfzehneckseite. Wir verbinden C mit B. C B ist die Seite des Fünfzehnecks.



Regelmäßiges Fünfzehneck

Das waren also die Konstruktionen von regelmäßigen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, Zehnecken, Fünfzehnecken. Damit haben wir auch die Möglichkeit, noch viele andere regelmäßige Vielecke zu zeichnen. Um ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen, halbieren wir jeden der

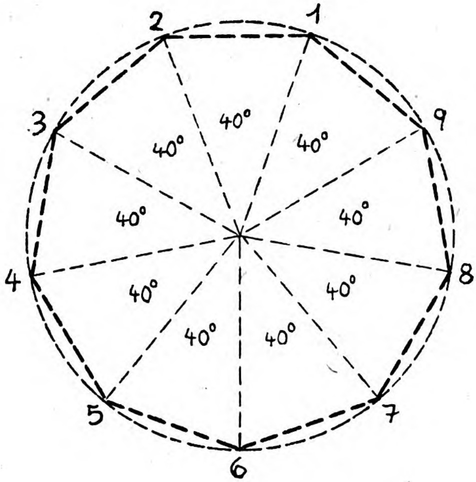
4 Mittelpunktswinkel der Quadratseite von je 90° unter Benutzung des Zirkels. Dabei schneiden die Halbierungslinien auf dem Kreis noch 4 weitere Punkte aus, die zusammen mit den 4 Eckpunkten des Quadrates ein regelmäßiges Achteck ergeben. Halbieren wir die Mittelpunktswinkel des Achtecks, so erhalten wir ein Sechzehneck.
Entsprechend können wir aus dem Zehneck ein Zwanzigeck erhalten, aus dem Fünfzehneck ein Dreißigeck und so weiter.
Wir wissen jetzt, wie wir zeichnen:

ein regelmäßiges	3-,	6-,	12-,	24-,	48-	Eck
ein regelmäßiges	4-,	8-,	16-,	32-,	64-	Eck
ein regelmäßiges	5-,	10-,	20-,	40-,	80-	Eck
ein regelmäßiges	15-,	30-,	60-,	120-,	240-	Eck

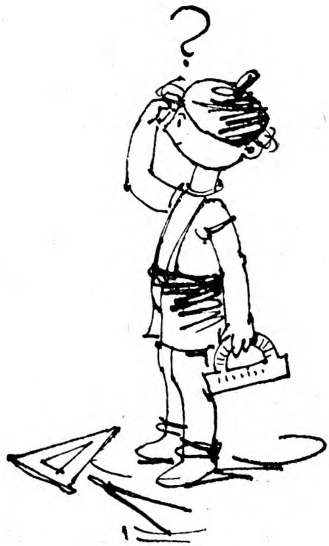
Der Mathematiker Friedrich Gauß (1777 bis 1855) zeigte, daß man auch ein regelmäßiges 17-Eck zeichnen kann (sowie alle diejenigen Vielecke, deren Seitenzahlen eine Primzahl von der Form $n = 2^m + 1$ ist, wobei m irgendeine Potenz von 2 ist). Weitere regelmäßige Vielecke können mit Zirkel und Lineal *nicht* gezeichnet werden, nur Näherungskonstruktionen sind möglich.
Nachstehend ist aufgeschrieben, welche regelmäßigen Vielecke bis zu 20 Ecken gezeichnet werden können. Die Eckenzahlen der nicht konstruierbaren Vielecke sind durchgestrichen.

3 4 5 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ 12 ~~13~~ ~~14~~ 15 16 17 ~~18~~ ~~19~~ 20

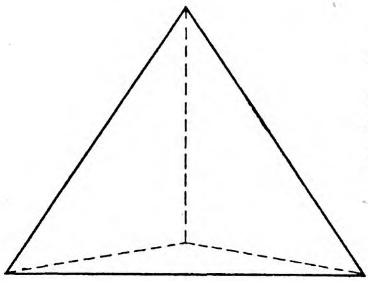
Ein regelmäßiges Neuneck kann nicht gezeichnet werden? – Ganz einfach! Der Mittelpunktswinkel zur Neuneckseite beträgt 40° (360:9). Da kann man doch einfach in den Kreis 9 Mittelpunktswinkel von je 40° eintragen, und deren Schenkel schneiden dann auf dem Kreis die Eckpunkte eines regelmäßigen Neunecks aus!
Richtig, das geht! Nur muß man dabei den Winkelmesser benutzen! Das ist aber nur eine Näherungskonstruktion, wenn sie auch für die meisten praktischen Fälle ausreicht.



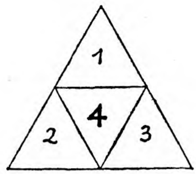
Gedanklich genau konstruiert ist ein regelmäßiges Vieleck immer nur dann, wenn bei der Konstruktion lediglich Zirkel und Lineal benutzt wurden. Und mit Zirkel und Lineal *allein* kann ein Neuneck *nicht* gezeichnet werden.

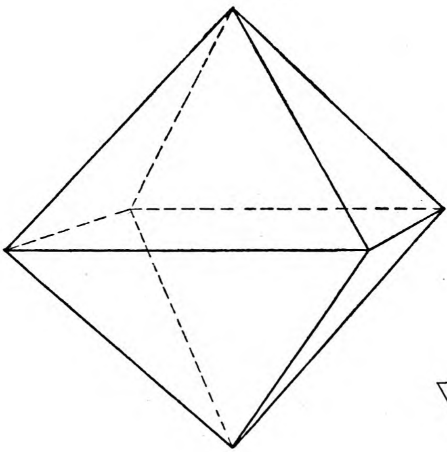


Regelmäßige Vielflächner (regelmäßige Polyeder) sind Körper, die von deckungsgleichen (kongruenten), regelmäßigen Vielecken begrenzt sind.

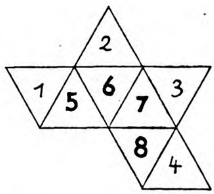


TETRAEDER
4 Ecken
4 Flächen
6 Kanten

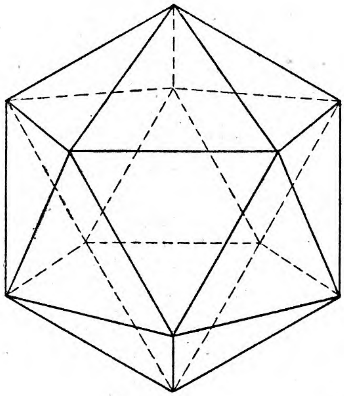




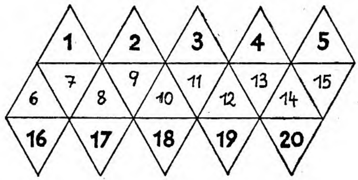
OKTAEDER
6 Ecken
8 Flächen
12 Kanten



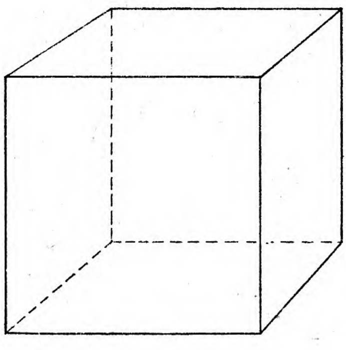
Es gibt nur fünf solche Körper: Vierflächner (Tetraeder), Achtflächner (Oktaeder), Zwanzigflächner (Ikosaeder), Sechsflächner (Würfel, Hexaeder) und Zwölfflächner (Dodekaeder).



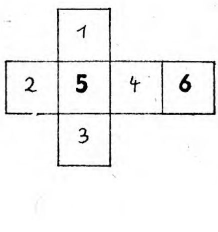
IKOSAEDER
12 Ecken
20 Flächen
30 Kanten

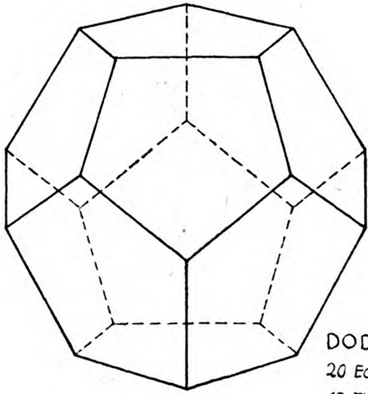


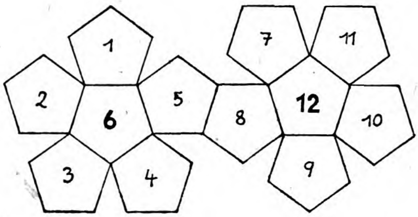
Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder sind von gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Der Würfel hat Quadrate als Grenzflächen; das Dodekaeder ist von regelmäßigen Fünfecken begrenzt.



WÜRFEL
8 Ecken
6 Flächen
12 Kanten





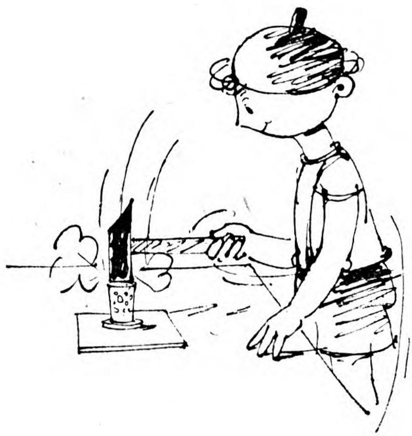


Mathematisch kann bewiesen werden, daß es keine weiteren regelmäßigen Vielflächner gibt. Es wäre also zwecklos, zum Beispiel den Versuch zu unternehmen, einen regelmäßigen Körper zu bauen, der von kongruenten Sechsecken begrenzt ist. Die Winkel im regelmäßigen Sechseck betragen je 120 Grad. Will man jetzt 3 Ecken von 3 verschiedenen Sechsecken (zum Beispiel aus Pappe) zu einer räumlichen Ecke zusammenbauen, so erhält man einen Gesamtwinkel von 360 Grad. Das aber ergibt eine glatte Fläche und keine räumliche Ecke, in der die Summe der Winkel zwischen je zwei Kanten stets kleiner als 360 Grad sein muß. In entsprechender Weise kann auf die Unmöglichkeit geschlossen werden, regelmäßige Vielflächner aus regelmäßigen Siebenecken, Achtecken und so weiter herzustellen.

An jedem der abgebildeten regelmäßigen Vielflächner kann durch Abzählen leicht gefunden werden, daß in jedem Fall die Zahl der Ecken und die Zahl der Flächen zusammen stets um 2 größer ist als die Zahl der Kanten. Dieses Gesetz wird als Eulerscher (der Mathematiker Euler lebte von 1707 bis 1783) Satz bezeichnet und gilt nicht nur für die regelmäßigen, sondern auch für die unregelmäßigen Polyeder (falls alle Ecken nach außen weisen).
Wir können die regelmäßigen Vielflächner aus Pappe anfertigen. Bei den Abbildungen der Vielflächner sind die „Netze“ gezeichnet, die wir auf Pappe zeichnen und dann ausschneiden.

Eine Münze mit der Nähnadel durchstechen

Der Stahl der Nähnadel ist härter als alles Münzmetall. Somit müßte es möglich sein, eine Münze mit einer Nähnadel zu durchstechen. Versucht man das mit einem Hammerschlag, so verbiegt sich die Nadel oder bricht. Es ist aber verblüffend einfach zu erreichen, daß sich die Nadel beim Schlag mit dem Hammer nicht verbiegen kann.
Wir benutzen einen Flaschenkork, der fast ebenso lang wie die Nähnadel ist. In der Mitte des oberen Korkkreises stechen wir die Nadel hinein, und zwar so weit, daß die Spitze unten gerade sichtbar wird. Nicht weiter! Wir kneifen das oben herausragende Stück der Nadel dicht am Kork mit der Zange ab.
Die Münze legen wir auf ein Brett aus weichem Holz und stellen den Kork (Nadelspitze nach unten) darauf. Ein kräftiger Schlag mit dem Hammer auf den Kork! Schon ist die Nadel durch die Münze hindurchgedrungen.

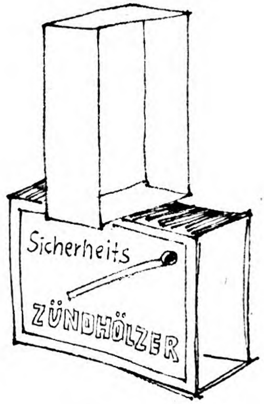


Ein Pfennig wird mit einer Nähnadel durchstochen

Ist es nicht merkwürdig, daß durch den Kork das Ausbiegen der Nadel verhindert wird? Kork ist doch ziemlich weich und leicht verformbar?
Hier ist ein bestimmtes physikalisches Gesetz im Spiel. Wenn wir nicht mit dem Hammer zuschlagen, sondern ihn nur auf den Kork aufsetzen und dann langsam stärker und stärker drücken, so wird die Nadel trotz ihrer Einbettung im Kork verbogen, und das Kunststück mißlingt.
Die Schnelligkeit des Schlages ist für das Gelingen wesentlich. In jedem Fall stemmt sich dem Eindringen der Nadelspitze in das Münzmetall eine Widerstandskraft entgegen, durch die bei langsamem Drücken die Nadel verbogen wird. Auch beim Hammerschlag ist diese Widerstandskraft vorhanden. Sie kann sich jedoch nicht verformend auswirken, weil hierzu eine gewisse Zeit erforderlich ist, die bei der Schnelligkeit des geführten Schlages nicht vorhanden ist.
Alle Körper folgen nicht augenblicklich der Einwirkung einer Kraft, sie sind „träge“ und verharren zunächst – für Bruchteile von Sekunden – in ihrem bisherigen Zustand. Zur Auswirkung einer Kraft ist immer eine gewisse, wenn auch sehr kleine Zeitspanne notwendig. Deshalb muß zum Beispiel ein Eisenbahnzug immer langsam anfahren, sonst kann es vorkommen, daß die Kupplungen reißen und die Wagen, dem Trägheitsgesetz folgend, an Ort und Stelle verbleiben.
Die Nadel kann infolge ihrer Einbettung in Kork den verbiegenden Kräften nicht sofort folgen. Bevor sich diese auswirken können, hat die Nadel bereits die Münze durchdrungen.

Seltsamer Faustschlag

Wir stellen die Hülse einer Streichholzschachtel mit einer ihrer Reibflächen auf den Tisch. Das leere Schiebekästchen wird mit seiner Schmalseite quer oben daraufgestellt. Auf dieses federleichte zerbrechliche Gebilde soll kräftig mit der Faust geschlagen werden. Allerdings ist eine Bedingung dabei gestellt: Der Schlag soll, kurz bevor die Faust



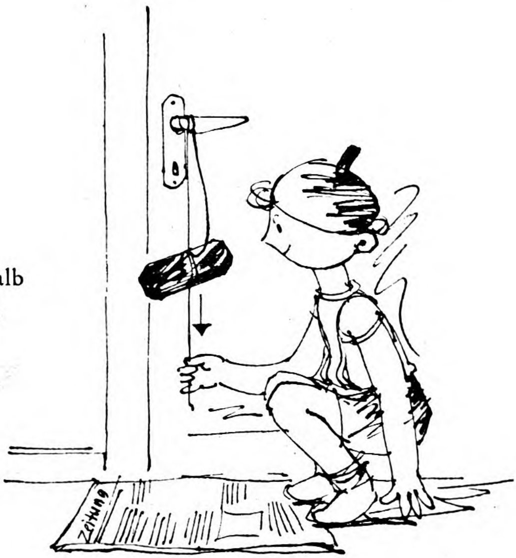
Was geschieht, wenn wir mit der Faust hier draufschlagen?

auch die Tischplatte trifft, abgestoppt werden. Wir wollen ja nicht die Tischplatte, sondern nur unseren Schachtelbau treffen, der immerhin reichlich 8 cm hoch ist.
Nun schlagt zu! Knack! Weg sind beide Schachtelhälften! In großem Bogen sind sie fortgesprungen. Und wenn ihr sie betrachtet, werdet ihr erstaunt feststellen, daß beide unversehrt sind. Versucht's noch mal! Das Ergebnis ist das gleiche.
Die dünnen Spanholzflächen, aus denen die Schachtelteile bestehen, sind außerordentlich elastisch. Bevor sich die Wucht unseres Schlages zerstörend auswirken kann, werden die beiden Teile der Schachtel durch sich entspannende elastische Kräfte beiseite geschleudert.

Wo reißt der Faden?

An der Türklinke ist mit Zwirnsfaden ein Brikett aufgehängt. Unten am Faden wollen wir ziehen. Wo wird er reißen? Oberhalb vom Brikett? Unterhalb? Manchmal oben, manchmal unten?
Bei diesen Versuchen müssen wir vermeiden, daß uns das Brikett auf die Hand fallen kann. Deshalb wird das Brikett zusätzlich noch mit einem stärkeren Bindfaden angebunden, der schlaff herabhängt, wäh-

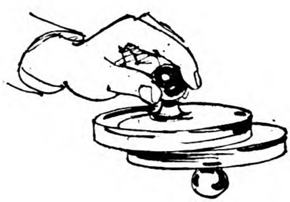
rend der belastete Zwirnsfaden gestrafft ist. Auf das untere Fadenstück wirkt nur die Zugkraft, die wir mit der Hand ausüben, auf das obere außerdem das Gewicht des Briketts. Somit wäre wohl zu vermuten, daß der Faden immer oben reißt?
Nun zieht einmal ruckartig am Faden! Wo reißt er? Versuch wiederholen! Ganz langsam ziehen! Wo reißt der Faden? Es kommt also darauf an, ob man langsam, (gleichmäßig zunehmend) oder ruckartig zieht.
Bei langsamem Ziehen wirkt auf das untere Fadenstück nur die mit der Hand ausgeübte Kraft, auf das obere zusätzlich das Gewicht des Briketts. Infolgedessen reißt der Faden in diesem Fall oben.
Bei ruckartigem Zug dagegen reißt er unten. Warum? Nach dem Trägheitsgesetz, dem alle Körper unterliegen, hat das Brikett das Bestreben, in Ruhe zu verharren. Es setzt dem plötzlichen Bewegungsantrieb einen Widerstand entgegen, der um so größer ist, je ruckartiger das Ziehen erfolgt. Bevor die Zugkraft auch das obere Fadenstück gespannt hat, ist das untere bereits gerissen.



Wo reißt der Faden? Oberhalb oder unterhalb vom Brikett?

Klebkraft ohne Leim

Wenn man zwei glatt geschliffene Glasdeckel aufeinanderpreßt, so haften sie aneinander. Diese zwischen zwei Körpern auftretende Anziehungskraft finden wir vor allem bei feinst polierten Endflächen; sie wird Adhäsion genannt.
In der Technik werden sogenannte Endmaße verwendet. Mit ihnen lassen sich beliebige Meß-Strecken größter Längengenauigkeit zusammensetzen. Diese Meß-Stücke haften durch Adhäsion ihrer polierten Endflächen fest aneinander.
Zerschneiden wir einen Apfel und pressen dann die beiden Hälften wieder zusammen, so haften sie aneinander. Auch das Haften der Kreideschrift an der Wandtafel und der Bleistiftspur auf Schreibpapier wird durch Adhäsion bewirkt.
Adhäsionskräfte zwischen zwei Körpern treten auch in Erscheinung, wenn der eine von beiden flüssig oder gasförmig ist. Wenn wir einen Finger in Wasser tauchen und wieder herausnehmen, ist er naß. Regentropfen hängen an der Fensterscheibe. Beide Erscheinungen beruhen auf Adhäsion.
Legen wir zwei ausgediente Fotoplatten (Glas) mit den von der fotografischen Schicht freien Flächen aufeinander, so haften sie nur wenig aneinander. Tauchen wir sie jedoch zuvor in Wasser, so klebt die untere fest an der oberen.
Hier ist einerseits die Adhäsion einer dünnen Wasserschicht an der oberen und unteren Glasplatte, andererseits die Zusammenhangskraft zwischen den einzelnen Wasserteilchen wirksam. Diese wird auch Kohäsion genannt. Die einzelnen Teilchen des Regentropfens werden durch Kohäsionskraft zusammengehalten. Fällt er aufs Straßenpflaster,



Zwei glatt geschliffene Glasdeckel
... kleben aneinander

Zwei in Wasser getauchte Glasplatten haften fest aneinander

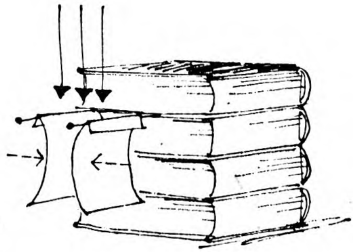
so überwiegt die Adhäsion zwischen Wasser und Stein. Die Kohäsion des Wassers reicht nicht aus zum Zusammenhalten des Tropfens.
Besonders groß ist die Kohäsion von Quecksilber. Wenn ein Tropfen Quecksilber auf den Experimentiertisch fällt, so zerspringt er in viele Kügelchen, die schnell über den Tisch rollen. (Vorsicht bei Quecksilber! Sehr giftig!) Die Kohäsion des Quecksilbers ist viel größer als die Adhäsion zwischen Quecksilber und Tischplatte.
Adhäsions- und Kohäsionskräfte wirken nur, wenn sich die einzelnen Teilchen innig berühren. Liegen sie weiter als 0,00005 mm auseinander, so sind diese Kräfte unwirksam. Sie sind elektrischer und magnetischer Natur.

Fön, Tischtennisball und Postkarten

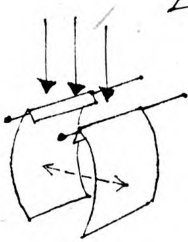
Der Fön ist eine elektrisch betriebene Luftdusche, die auf „warm" oder „kalt" gestellt werden kann und zum Trocknen der Haare nach dem Baden oder Kopfwaschen dient. Wohlgemerkt Fön geschrieben, während als *Föhn* ein heftiger warmer, trockener, talwärts wehender Wind bezeichnet wird, der vor allem in den Alpen auftritt.
Wir stellen den Fön auf „kalt". Ein kräftiger Luftstrom von Zimmertemperatur entweicht. Wir richten den Fön senkrecht nach oben und legen einen Tischtennisball auf die Öffnung des Rohrs. Der Ball schwebt in etwa 2 cm Höhe frei im Luftstrom, solange der Fön eingeschaltet ist.
Eigentlich müßte man erwarten, daß der kleine federleichte Ball von dem kräftigen Luftstrom des Föns erfaßt und weggeschleudert wird. Aber er bleibt, schwebt, dreht sich, hüpft und schaukelt lustig hin und her. Anscheinend wirkt hier eine Kraft, die den Ball im Luftstrom festhält und ihn immer wieder hereinzieht, wenn er entweichen will.

Im Luftstrom des Föns schwebt ein kleiner Tischtennisball

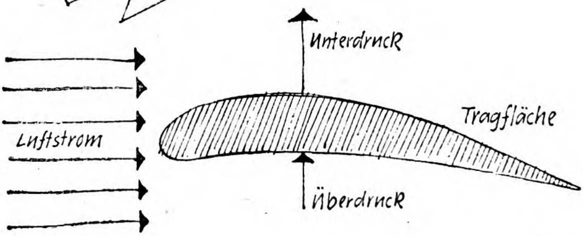
Die beiden an zwei Stricknadeln aufgehängten, nach innen gewölbten Postkarten werden durch den Luftstrom des Föns nicht etwa auseinandergedrückt, sondern aneinandergesaugt



Die nach außen gewölbten Karten werden vom Luftstrom auseinandergedrückt



Kräfte, die das Flugzeug heben und tragen

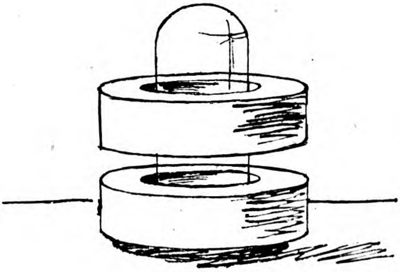


Wenn wir den gleichen Versuch mit einem Luftballon durchführen, der mit Luft aufgeblasen ist, so schwebt der Ballon etwa einen halben Meter über dem Fön. Richten wir den Luftstrom nicht senkrecht, sondern schräg nach oben, so kommt der Luftballon mit und schwebt auch hier wieder im Luftstrom. Mit dem Fön können wir den Luftballon frei schwebend im Zimmer herumführen. Er klebt gewissermaßen im oder am Luftstrom.
Wir legen einige dicke Bücher aufeinander und stecken zwischen die beiden obersten zwei Stricknadeln derart hinein, daß sie waagerecht und parallel zueinander im Abstand von etwa 5 cm hervorstehen. Auf jede Stricknadel hängen wir eine (oben schmal gefaltete) Postkarte, die wir – wie im Bild ersichtlich – gewölbt haben.
Richten wir den Luftstrom des Föns von oben auf den Raum zwischen den beiden Postkarten, so geschieht wieder etwas Unerwartetes. Während man annehmen sollte, daß die beiden gewölbten Karten vom Luft-

strom auseinandergedrückt werden, tritt das Gegenteil ein. Die beiden Karten schwenken aufeinander zu, bis sie sich fast berühren. (Dieser Versuch kann auch ohne Fön, einfach durch Blasen mit dem Mund, durchgeführt werden).
Damit haben wir bewiesen, daß ein Luftstrom eine Saugwirkung ausübt. Er saugt die Karten oder auch den Tischtennisball in sich hinein.
Jetzt hängen wir unsere beiden Postkarten an den Stricknadeln derart um, daß die Karten nicht nach innen, sondern nach außen gewölbt sind. Richten wir jetzt den Luftstrom wieder von oben auf den Zwischenraum der beiden Karten, so werden sie auseinandergedrückt. Die vom Luftstrom ausgeübten Kräfte sind also in ihrer Richtung abhängig von der Wölbung der Fläche, an der der Luftstrom vorbeistreicht. Mit nur *einer* Postkarte zeigt der Versuch das gleiche Ergebnis.
Mit diesen Versuchen haben wir das Geheimnis des Fliegens von Luftfahrzeugen, die schwerer sind als Luft, ergründet. Ein mit Wasserstoff gefüllter Luftballon steigt nach oben, weil Wasserstoff leichter ist als Luft. Ein Flugzeug hingegen wird von den an den Tragflächen entlangströmenden Luftmassen gehoben und getragen. An der oberen Wölbung entstehen nach oben wirkende Saugkräfte, an der unteren – ebenfalls nach oben wirkende – Druckkräfte.

Ein Eisenring von 500 Gramm schwebt frei in der Luft

Um einen Glaszylinder liegen zwei metallische Ringe. Der obere schwebt völlig frei über dem unteren. Die Glaswandung dient lediglich dazu, den oberen Ring senkrecht über dem unteren zu halten.
Diese verblüffende Erscheinung, bei der offensichtlich die Schwerkraft überwunden ist, wird durch magnetische Kräfte erzielt. Beide Ringe sind stark magnetisiert, und zwar liegt der magnetische Südpol des unteren Ringes dem Südpol des oberen Ringes gegenüber. Die gleichnamigen Pole stoßen sich wechselseitig mit einer so großen Kraft ab, daß der obere Ring frei schwebt.

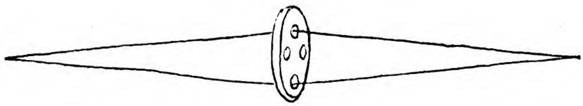


Zwei magnetisierte Manipermringe, von denen der obere frei in der Luft schwebt
Das Glasrohr gewährleistet lediglich eine stete Senkrechtübereinanderlage der beiden sich abstoßenden Magnetpole (VEB Keramische Werke Hermsdorf/Thür.)

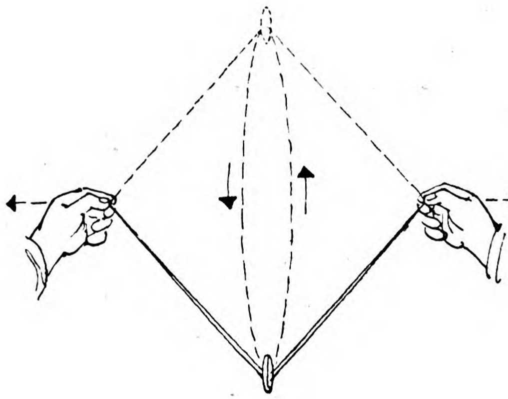
Dauermagnete bestehen meist aus Eisenlegierungen (zum Beispiel mit Chrom, Aluminium, Nickel) oder Kobalt-Nickel-Aluminium-Legierungen. Stark magnetisierte Ringe, von denen der eine – durch magnetische Abstoßungskräfte verursacht – frei in der Luft schweben kann, werden im VEB Keramische Werke Hermsdorf/Thüringen hergestellt. Das verwandte Material „Maniperm" ist eine sogenannte oxyd-keramische Masse, die aus Eisenoxyd und Bariumoxyd besteht.

Ein Knopf auf Hochtouren

Durch zwei gegenüberliegende Löcher eines Knopfes wird je ein Zwirnsfaden von etwa 60 cm Länge gezogen. Die beiden Fäden werden an ihren Enden miteinander verknotet. Der Knopf soll etwa in der Mitte der beiden Fäden hängen.
Das eine Ende des Doppelfadens wird mit Daumen und Zeigefinger der linken Hand gefaßt, das andere entsprechend mit der rechten Hand. Bei losem Faden wird der Knopf auf vertikaler Kreisbahn schnell herumgeschleudert. Zieht man die Hände jetzt auseinander und strafft dadurch den Faden, so kommt der Knopf auf eine sehr hohe Drehzahl. 50 Umdrehungen in der Sekunde sind ohne weiteres zu erreichen. Durch die rasche Drehung des Fadens wird ein Doppelkegel sichtbar, der beim stärkeren Anspannen des Fadens immer spitzer wird. Die Bahn des Knopfes erscheint als Kreisring.



Durch zwei gegenüberliegende Löcher eines Knopfes ist je ein Zwirnsfaden von etwa 60 cm Länge gezogen



Schwinge den in der Mitte des losen Fadens hängenden Knopf auf vertikaler Kreisbahn herum und ziehe dann den Doppelfaden straff

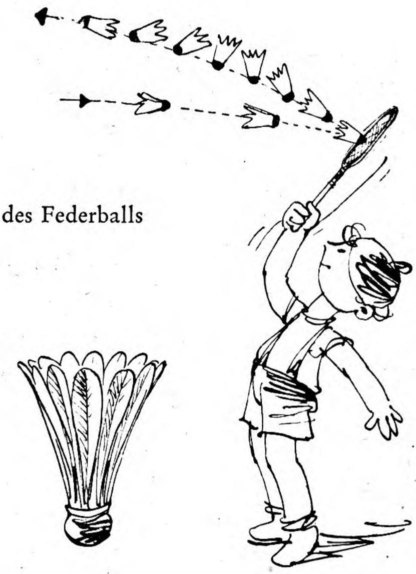
Die Fäden verdrillen sich bei dieser Bewegung und wickeln sich alsdann wieder auf, wobei sich der Knopf in umgekehrter Richtung dreht. Das wiederholt sich mehrmals.

Wie ist es zu erklären, daß der Knopf eine so hohe Umdrehungszahl erreicht? Beim Schleudern des Knopfes haben wir ihm eine bestimmte Geschwindigkeit vermittelt, die auch bei der Verkleinerung der Kreisbahn erhalten bleibt. Da der Radius der Kreisbahn kleiner wird, muß die Zahl der Umläufe je Sekunde entsprechend größer werden.

Schneller, schneller und immer schneller rast der Schlittschuhläufer in großen Kreisen über das glitzernde Eis. Plötzlich fängt er gewandt den

Schwung der raschen Kreisbewegung auf und wirbelt, an Ort und Stelle verbleibend, um die Längsachse seines Körpers. Er dreht, wie es in der Fachsprache heißt, eine Pirouette. Schon bei ausgestreckten Armen ist die Drehgeschwindigkeit sehr groß. Wenn er dann plötzlich noch die Arme verschränkt, so geschieht die kreiselartige Bewegung so rasch, daß Einzelheiten dieses lebendigen Kreisels kaum noch zu erkennen sind.

Wer zu Haus einen Drehschemel hat, der sich leicht drehen läßt, kann diesen Versuch ebenfalls machen. Setzt euch darauf, zieht die Beine an und laßt euch in Drehung versetzen! Wenn ihr dann abwechselnd die Arme ausstreckt und verschränkt, könnt ihr den Wechsel der Drehgeschwindigkeit deutlich beobachten. Besonders groß wird der Unterschied, wenn ihr dabei zwei Hanteln oder größere Gewichtsstücke in die Hände nehmt.



Flugbahn und Kehrtwendung des Federballs

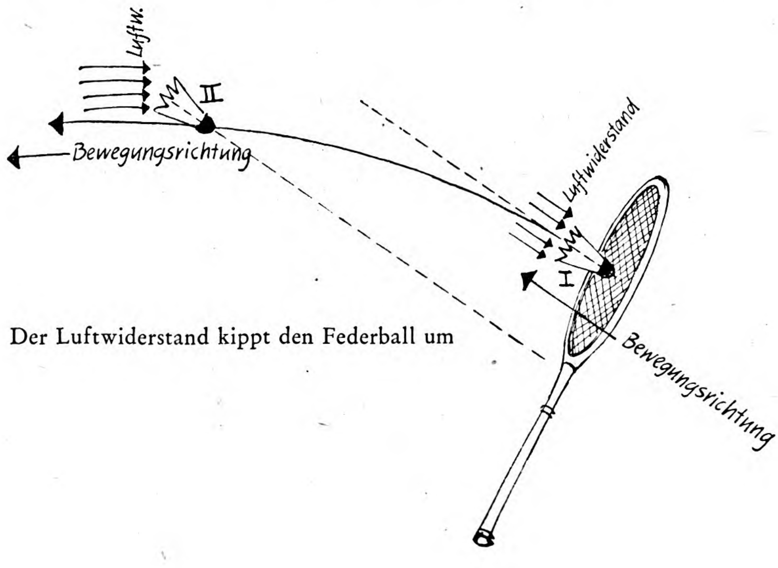
Der Federball macht Kunststücke

Mit dem etwa walnußgroßen halbkugelförmigen Körper voran trifft der Federball auf den Schläger.
Nach dem Zurückschlagen fliegt zunächst das Gefieder des Federballs voran. Erst nach dem Flugweg von etwa einem halben Meter dreht sich der Ball plötzlich, so daß die Federn jetzt wieder das rückwärtige Ende bilden. Die Wendung erfolgt blitzschnell.
Würde sich der Federball nicht nach jedem Schlag umwenden, könnten wir nicht Federball spielen, wenigstens nicht lange, denn die Federn wären bald zerschlagen.
Woran liegt es, daß sich der Federball dreht? Diese Frage wäre rasch beantwortet, wenn wir einmal im luftleeren Raum Federball spielen könnten. Da wendet sich der Federball nämlich nicht. Die Luft ist die Ursache für das Wende-Kunststück des Federballs, und zwar der Luftwiderstand.

Auf der Zeichnung sehen wir ein Stück der Flugbahn nach dem Zurückschlagen. I ist die Stellung des Federballs, in der er senkrecht auf der Bespannung des Schlägers landet und sofort zurückgeschleudert wird. Nach dem Schlag liegen zunächst die Federn in der Bewegungsrichtung voran. Der Luftwiderstand wirkt der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Kurz nach dem Abschlagen liegen die Luftwiderstandskräfte parallel zur Achse des (etwa kegelförmigen) Federball-Gesamtkörpers und bremsen die Bewegung des Balls. Zunächst besteht keinerlei Ursache für eine Wendung.

Nach kurzer Zeit hat er auf seiner gekrümmten Flugbahn die Stellung II erreicht, immer noch mit den Federn voran. Dem Trägheitsgesetz entsprechend hat die Achse des Federballs in Stellung II die gleiche Raumrichtung wie in I. Infolge der Krümmung der Flugbahn liegt aber die Bewegung jetzt nicht mehr in Richtung der Achse, sondern schräg zu ihr. Somit wirken die Luftwiderstandskräfte jetzt ebenfalls schräg zur Achse; sie erfassen die Feder und drehen den Ball um.

Läßt man den Federball mit den Federn voran senkrecht nach unten fallen, so kippt er ebenfalls um und trifft stets mit dem Gummistück auf den Boden. Sobald die Achse beim Abwärtsfallen nur eine Kleinigkeit schräg zur Fallrichtung zu liegen kommt – und solche kleinen Schwankungen sind stets vorhanden – packt der Luftwiderstand zu und wendet den befiederten Ball wie eine Wetterfahne in die Windrichtung.



Der Luftwiderstand kippt den Federball um

Wer kann mit einer Hand beide
Würfel in den Becher werfen?

Zwei Würfel, ein Becher

Wir fassen den Würfelbecher und zwei Würfel wie im Bild ersichtlich. Zunächst soll der obere Würfel in den Becher geworfen werden und dann der untere, ohne die linke Hand zu benutzen.
Es macht keine Schwierigkeiten, den oberen Würfel hochzuwerfen und dann mit dem Becher aufzufangen. Wirft man danach den zweiten Würfel hoch, so kann man ihn ebenfalls auffangen. Dabei gibt es aber immer einen Zwischenfall. In dem Moment, in dem wir den zweiten Würfel hochwerfen und unser Augenmerk auf ihn richten, fliegt der erste Würfel aus dem Becher, und schon ist das Spiel verloren. Wir haben beim Hochwerfen des zweiten Würfels den ersten hinausgeworfen.
Wie kommen wir zum Ziel? Wir dürfen den zweiten Würfel nicht hochwerfen, sondern lassen ihn fallen und machen mit dem Becher sofort eine rasche und kurze Abwärtsbewegung zum Auffangen. Wie gesagt, *sofort,* sonst verpaßt man den Anschluß, und der erste Würfel fliegt wieder heraus. Er bleibt nämlich auch bei der Abwärtsbewegung nicht ruhig im Becher liegen, sondern macht, bedingt durch die Trägheit seiner Masse, die rasche Abwärtsbewegung nicht mit. Infolgedessen „steigt" der Würfel im bewegten Becher, obwohl er dann sofort dem freien Fall unterliegt. Die Abwärtsbewegung des Bechers muß so kurz sein, daß der Würfel in ihm nicht über den Rand hinaus „steigt". Nach etwas Übung beherrschen wir das Kunststück.

Ein Blechkanister, von der Luft zertrümmert

Wir spülen einen Kanister mehrmals kräftig mit Wasser aus, damit alle etwa noch darin befindlichen Reste beseitigt werden, schütten ein bis zwei Glas Wasser hinein und setzen ihn ohne Verschlußkappe auf den Gasherd. Wohlgemerkt *unverschlossen*!

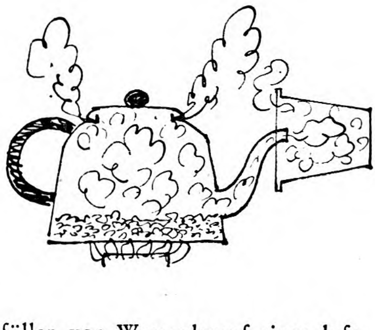
Nach kurzer Zeit beginnt das Wasser im Kanister zu kochen. Wir lassen es etwa eine Minute lang sieden, dann drehen wir den Gashahn zu und nehmen den Kanister rasch vom Herd. Sofort wird mit einem Topflappen (der Kanister ist heiß!) die Verschlußkappe aufgesetzt und fest verschraubt! Nun stellen wir den verschlossenen Behälter in einen leeren Eimer oder eine leere Wanne und übergießen ihn mit einem Eimer kaltem Wasser.

Augenblicklich kracht er in allen Fugen und wird von unsichtbaren Kräften im Bruchteil einer Sekunde mit ungeheurer Wucht zusammengeschlagen.

Wie war das möglich? Als das Wasser in dem Kanister kochte, bildete sich Wasserdampf, der die Luft aus ihm verdrängte. Somit befand sich nach dem Verschließen des Kanisters in ihm nur Wasser und Wasserdampf.
Beim Übergießen mit kaltem Wasser wurde ein großer Teil des Wasserdampfes wieder zu Wasser verdichtet. Infolgedessen entstand im Kanister ein luftleerer Raum, während der Luftdruck mit unverminderter Stärke von außen auf die Blechwände drückte. Bei einer Oberfläche des Kanisters von beispielsweise 2000 cm² wirkt hier der Luftdruck schlagartig mit einer Kraft, die genauso groß ist wie die Gewichtskraft von 2000 Kilogrammstücken, also von 40 Zentnern.

Die Magdeburger Halbkugeln

Der Magdeburger Bürgermeister Otto von Guericke zeigte im Jahre 1654 auf dem Reichstag zu Regensburg seinen berühmten Versuch mit den „Magdeburger Halbkugeln". Diese beiden luftdicht aneinandergelegten Halbkugeln aus Kupfer wurden mit der von Guericke erfundenen Luftpumpe luftleer gemacht. Acht Pferde mußten an jeder Seite angespannt werden, um die Halbkugeln auseinanderzureißen.

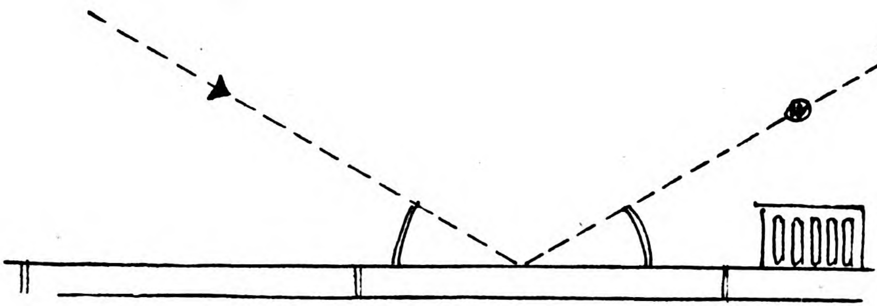
Zwei leere Gläser, in denen wir durch Einfüllen von Wasserdampf einen luftverdünnten Raum erzeugten, haften fest aneinander

Mit diesem eindrucksvollen Versuch wurde bewiesen, daß die Luft ungeheuren Druck ausüben kann.
Wir können diese Wirkung des Luftdrucks in verkleinertem Maßstab mit zwei Gläsern vorführen, die möglichst glatte Randflächen haben. Auf eines der beiden Gläser wird ein „Dichtungsring" aufgelegt, den wir aus starkem Löschpapier geschnitten und mit Wasser angefeuchtet haben. Auch ein passender Gummiring eignet sich. Beide Gläser werden rasch nacheinander vor der Tülle eines Teekessels, in dem Wasser kocht, mit Dampf durchspült und mit ihren Rändern aufeinandergepreßt. Nach einigen Minuten haftet das obere Glas so fest an dem unteren, daß wir sie aneinander hochheben können. Bei gut schließendem Dichtungsring macht es zunächst Schwierigkeiten, die beiden Gläser wieder auseinanderzubringen.
Von dem einströmenden Wasserdampf wurde der größere Teil der Luft aus den Gläsern verdrängt. Beim Abkühlen kondensiert der Wasserdampf, es entsteht in den Gläsern ein luftverdünnter Raum, und die Gläser werden durch den äußeren Luftdruck fest aneinandergepreßt.
Vorsicht beim Experimentieren mit Wasserdampf! Ihr könnt euch bei unvorsichtiger Handhabung stark verbrühen!
Beim Einwecken, zum Beispiel von Obst und Gemüse, werden durch das Kochen jene Kleinstlebewesen abgetötet, die Gärung, Fäulnis und Schimmel verursachen. Da solche Kleinstlebewesen stets in der atmosphärischen Luft vorhanden sind, muß dafür gesorgt werden, daß die Speisen nach dem Kochen nicht mehr mit Luft in Berührung kommen. Auf einfache Weise wird das beim Einwecken erreicht. Der beim Kochen entstehende Wasserdampf treibt die Luft aus dem Glas, so daß sich über den Speisen nur Wasserdampf befindet. Beim Abkühlen des mit Gummiring und Deckel versehenen Weckglases kondensiert der Wasserdampf zum größten Teil, und es entsteht im Glas ein luftleerer Raum, in dem sich nur etwas Wasserdampf befindet. Genau wie bei unserem Versuch! Deckel und Glas des Weckglases sind dann gewissermaßen zwei Magdeburger Halbkugeln. Deshalb ist es selbst bei großer

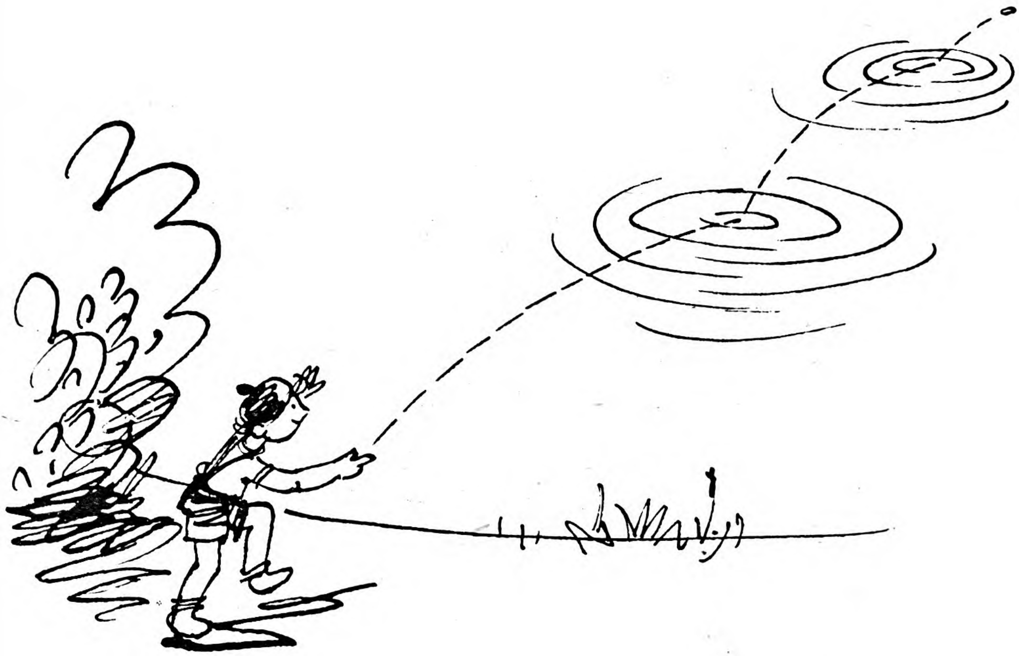
Kraftanstrengung ausgeschlossen, den Deckel abzuheben. Wenn das ausnahmsweise doch einmal möglich ist, da weiß die Hausfrau, daß die Dichtung versagt hat, daß Luft eingedrungen und die Speise somit nicht vor dem Verderb geschützt ist.

Abpraller

Ein Kieselstein lockt zum Fußballstoß! Schon fliegt der Stein schnurgerade gegen die Bordkante des Fußsteigs und prallt dort ab. Geometrisch regelmäßig verläuft diese Bewegung. Selbst bei diesem Spiel sind Naturgesetze wirksam. Es ist deutlich zu beobachten, daß der Winkel, unter dem der Stein an der Bordkante zurückgeworfen wird, genauso groß ist wie der Winkel, unter dem er aufschlug. Das ist das Gesetz des Stoßes beim Aufprall auf eine ruhende Wand. Wenn ein Lichtstrahl auf einen Planspiegel trifft, ist es genauso: Der Winkel, unter dem der Strahl zurückgespiegelt wird, ist ebenso groß wie der Neigungswinkel des einfallenden Lichtstrahles gegenüber der Spiegelfläche (Reflexionsgesetz).



Stößt man einen Stein gegen die Bordkante des Fußsteigs, so prallt er ab und bewegt sich nach dem „Reflexionsgesetz" weiter



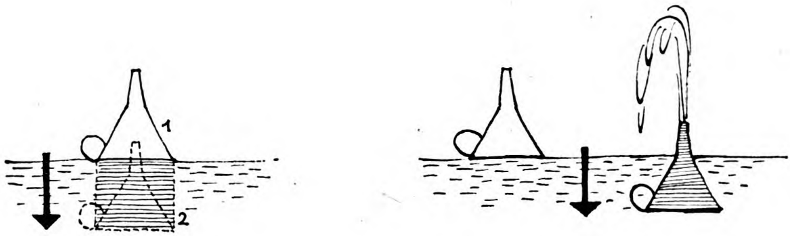
Wirft man einen Stein schräg gegen die Wasseroberfläche eines Teiches, so wird er beim Auftreffen nicht zurückgeworfen, sondern dringt ins Wasser ein. Man kann es aber unter bestimmten Umständen erreichen, daß ein Stein auch an der Wasseroberfläche zurückgeworfen wird.
Flache Steine – Steinplättchen gewissermaßen – sind dazu geeignet, die man vor allem am Seestrand häufig findet. Trifft ein solcher Stein mit seiner schmalen Randfläche auf das Wasser, so dringt er ebenso wie jeder andere einigermaßen runde Stein sofort ins Wasser ein. Man muß es beim „Abpraller-Spielen" so einrichten, daß der flache Stein mit seiner gesamten großen Fläche, mit der er auf dem Erdboden lag, auf das Wasser auftrifft. Das ist möglich, wenn man den Stein ganz flach und in waagerechter Flächenlage wirft. Die Hauptsache dabei ist, ihm gleichzeitig eine möglichst kräftige Drehung um seine vertikale Achse zu verleihen. Hierzu faßt man den waagrecht gehaltenen flachen Stein mit Daumen und Zeigefinger der rechten Hand an einer Randstelle, die möglichst weit vom Schwerpunkt des Steines entfernt ist, und

wirft ihn kräftig in waagrechter Richtung vom Ufer aus ab. Durch die vermittelte Drehbewegung wirkt der Stein wie ein Kreisel und behält auf der Wurfbahn die Richtung seiner Drehachse und damit auch seine waagrechte Lage bei. Er trifft also mit seiner großen Unterfläche auf den Wasserspiegel. Das Wasser setzt dem plötzlichen Eindringen einer großen Fläche einen stark federnden Widerstand entgegen. Infolgedessen wird der Stein von der Wasseroberfläche zurückgeworfen. Manchmal wird der Stein sogar zwei- oder dreimal am Wasserspiegel reflektiert. Übung macht auch dabei den Meister.

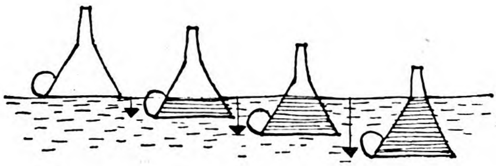
Merkwürdige Springbrunnen

Wird ein Trichter rasch so weit ins Wasser gedrückt, daß nur noch das Ausflußrohr heraussteht, so spritzt aus diesem stoßartig ein Wasserstrahl heraus, bis in etwa einen Meter Höhe. Am besten klappt der Versuch, wenn das Ausflußrohr kurz und nicht zu eng ist. Im Schwimmbad kann man an Stelle eines Trichters auch die nur halb geschlossene Faust benutzen, um einen solchen unerwarteten Wasserstrahl zu erzeugen.

Drückt man einen Trichter rasch unter Wasser, so spritzt das Wasser aus dem Ausflußrohr etwa 1 m hoch



Bei raschem Eindrücken des Trichters dringt infolge des Trägheitsgesetzes ein großer Teil der dunkel schraffierten Wassermenge in den Trichter ein und spritzt hoch



Beim langsamen Tauchen des Trichters steht das Wasser im Trichter immer genauso hoch wie außen

Wie ist das zu erklären? – Taucht man den Trichter langsam ein, so steht in jedem Augenblick das Wasser im Trichter genauso hoch wie außen.

Wird der Trichter schnell heruntergedrückt, so macht sich das Beharrungsvermögen des Wassers bemerkbar. Die in der Zeichnung dunkel schraffierte zylindrische Wassersäule verharrt durch ihre Trägheit im wesentlichen an Ort und Stelle.

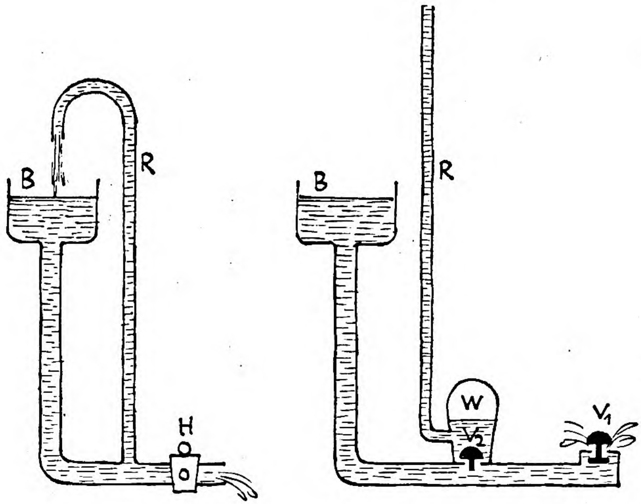
Infolgedessen dringt ein erheblicher Teil dieser Wassersäule bei der raschen Abwärtsbewegung in den Trichter ein.

Das ist mehr, als er fassen kann. Das überschüssige Wasser wird durch das Abflußrohr nach oben gespritzt.

Während sich die Trägheit der Körper im allgemeinen jeder Bewegungsänderung entgegenstemmt, verursacht sie hier das Hochspritzen eines Wasserstrahls.

Infolge der Trägheit kann auch abwärts fließendes Wasser teilweise nach oben befördert werden.

Aus dem Behälter B fließt Wasser nach unten ab. Wird der Hahn H plötzlich geschlossen, so steigt über das Rohr R ein Teil des Wassers weit höher als der Wasserspiegel in B, da das abwärts fließende Wasser bei offenem Hahn H Bewegungsenergie in sich hat. Beim plötzlichen Schließen des Hahnes H stemmt sich die Trägheit des bewegten Wassers einem Abstoppen dieser Bewegung entgegen. Die im bewegten Wasser enthaltene Energie treibt einen kleineren Teil des Wassers über das Rohr R weit höher, als der Wasserspiegel in B liegt.



Durch den Rammstoß, der beim plötzlichen Schließen des Hahnes H entsteht, wird ein Teil des Wassers über das Rohr R in eine größere Höhe als die Abflußhöhe gehoben

Die rechte Abbildung zeigt eine automatische Einrichtung, mit der durch abwärts fließendes Wasser ein Teil des Wassers in noch größere Höhen (bis zu 100 m) gehoben werden kann. Aus dem Behälter B fließt Wasser über das offene Ventil V_1 ab. Sobald dieses Wasser eine

bestimmte Geschwindigkeit erlangt hat, hebt es die (untere) Verschlußscheibe des Ventils V_1 an und verschließt es damit. Durch den Rammstoß des abgebremsten Wassers öffnet sich das Ventil V_2, und es dringt Wasser in den Windkessel W. Die darin befindliche Luft wird zusammengedrückt und Wasser im Rohr R nach oben getrieben. Hat sich der Rammstoß ausgewirkt, schließt sich das Ventil V_2 selbsttätig, und V_1 öffnet sich. Wieder fließt Wasser abwärts, es folgt ein neuer Stoß und so weiter.
Diese Einrichtung wurde vor etwa 150 Jahren von dem Franzosen Joseph Michel Montgolfier erfunden, der auch den ersten Luftballon, der mit Heißluft gefüllt war (Montgolfière), und den ersten brauchbaren Fallschirm konstruierte. Er bezeichnete die geschilderte Einrichtung als „hydraulischen Widder". Das Wort „hydraulisch" heißt soviel wie „durch Flüssigkeit bewegt". Da die Apparatur auf Rammstößen von bewegtem Wasser beruht, wurde für sie die Bezeichnung „Widder" gewählt. Die Bezeichnung „Stoßheber" wird weniger gebraucht.

Kaffee und Alkohol

Auf eine umgekehrte Untertasse wird etwas Kaffee geschüttet; nur so wenig, daß der Boden gerade mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht bedeckt ist. Gibt man jetzt einige Tropfen Weinbrand in die Mitte, so ist ein regelrechter Kampf zwischen den beiden Flüssigkeiten zu beobachten.
Beim Einträufeln des Weinbrands weicht der Kaffee zunächst zurück. Außen ist die braune Kaffeeflüssigkeit, innen der wasserklare Weinbrand. An der Grenze wirbeln die beiden Flüssigkeiten durcheinander. In lebhafter Sprudelbewegung zieht sich die Kaffeeschicht weiter zurück, reißt aber den Weinbrand mit sich, so daß im Innern eine fast trockene Stelle entsteht und das Porzellan sichtbar wird. Schließlich ermattet die Bewegung. Die offene Stelle im Flüssigkeitsspiegel schließt sich, und es herrscht Ruhe im Kaffee-Weinbrand-Gemisch.

Zu Beginn stemmt sich die Oberflächenspannung des Wassers (Kaffee) dem Eindringen des Alkohols (Weinbrand) entgegen, unterliegt ihm aber, da dieser die Wucht des freien Falles auf seiner Seite hat. Das Wasser wird nach außen verdrängt, während andererseits auch der Alkohol durch seine Oberflächenspannung als einheitlicher Flüssigkeitskörper zusammengehalten wird. An der Grenzfläche haften Alkohol und Wasser aneinander. Die Kräfte ihrer Oberflächenspannung ziehen in entgegengesetzter Richtung. Sieger bleibt das Wasser, dessen Oberflächenspannung größer ist als die des Alkohols und ihn mit nach außen zieht. Infolgedessen wird die Mitte trockengelegt, bis sich schließlich der Kaffee mit dem unterlegenen Alkohol durch die wirbelnde Bewegung gemischt hat und sich der Flüssigkeitsspiegel des Gemisches wieder schließt.

Der Wein weint

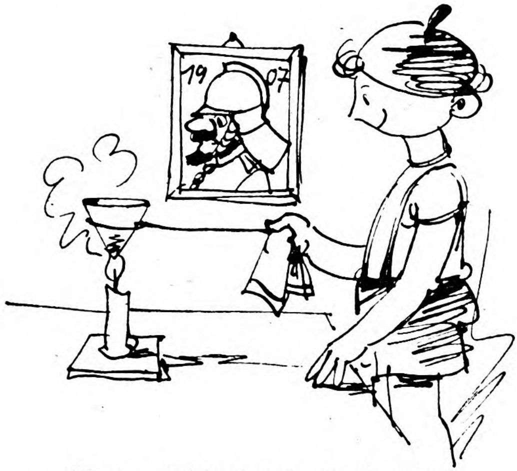
Nur bei schweren Weinen (zum Beispiel Portwein) und Spirituosen ist diese Erscheinung zu beobachten. Der Wein kriecht an der Glaswandung etwa einen Zentimeter hoch über den Flüssigkeitsspiegel, sammelt sich dort in „Tränen“, die schließlich wieder ins Glas zurückrinnen.

Hier sind die Tränen an der Glaswandung deutlich zu sehen

Schon vor weit mehr als zwei Jahrtausenden galten die Weintränen als Zeichen für einen schweren guten Wein.
Ähnlich wie Wasser in einem Haarröhrchen steigt der Wein oder Cognac an der Glaswand in dünner Schicht empor. (In jedem Glas Wasser ist zu erkennen, daß das Wasser an der Wand immer etwas höher steht als der sonstige Flüssigkeitsspiegel.) In dieser dünnen Weinschicht verdunstet ein Teil des Alkohols rasch. Durch die Verringerung des Alkoholgehalts wird die Oberflächenspannung dieser Schicht größer. (Wasser hat eine größere Oberflächenspannung als Alkohol). Infolgedessen zieht sich die Schicht nach oben zusammen. So entstehen die Tropfen, die dann – ihrer Schwere folgend – wieder ins Glas hinabrinnen. Unaufhörlich wiederholt sich dieser Vorgang.

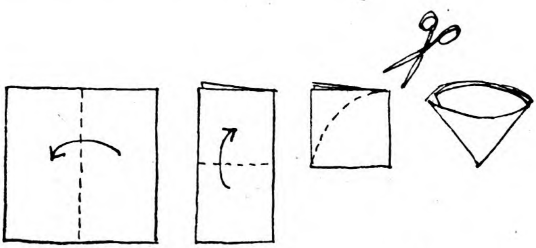
Wasser kocht in einer Papiertüte

Eine kleine Tüte (Papiertrichter ohne Ausflußöffnung) wird rasch hergestellt, wenn man aus Schreibpapier ein Quadrat von etwa 14 cm Seitenlänge erst von rechts nach links, dann von unten nach oben faltet, durch einen Kreisbogen abrundet und schließlich aufwölbt.
Wir stellen die mit Wasser gefüllte Tüte in einen Drahtring mit Griff, der zugleich die behelfsmäßige Tüte zusammenhält. Bringen wir diesen Kochtopf über die Flamme einer Kerze, so dauert es nicht lange, bis das Wasser kocht. Das Papier wird zwar berußt und ein wenig angesengt, kann aber nicht anbrennen, weil es vom Wasser gekühlt wird. Auch wenn das Wasser siedet – (bei 100 Grad Celsius) – kommt das Papier noch nicht auf Entzündungstemperatur, zumal es bald durchfeuchtet ist.
Papier entzündet sich, wenn es auf eine Temperatur von etwa 300° gebracht wird. Diese Temperatur wird hier also infolge der Kühlung des Papiers durch das Wasser nicht erreicht, obwohl die Flamme der Kerze eine Temperatur von etwa 700° C hat.
Bei diesem Versuch wird das Papier stets von der Kerzenflamme



Wasser wird in einer Papiertüte gekocht

berußt. In ihr befinden sich nämlich winzige glühende Rußteilchen, die beim Auftreffen auf das gekühlte Papier verlöschen und sich dort absetzen.
Teilweise wird das Papier auch versengt. Daran erkennen wir, daß manche Teile des Papiers Temperaturen bis etwa 200° C erreichen. Bei diesen Temperaturen beginnt die Verkohlung des Papieres durch Wärme. Dabei gehen komplizierte chemische Umwandlungen vor sich.



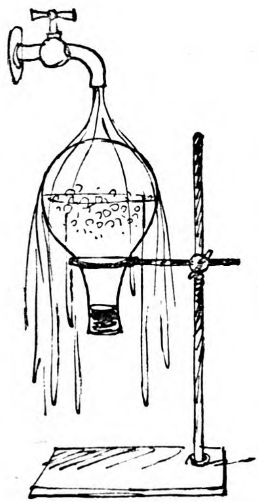
Der „Kochtopf“ aus Papier

Unter der Wasserleitung kochen

Hier behauptet einer, er könne ohne Hitze kochen. Er stellt mit einem Stativ einen Glaskolben, der unten mit einem Kork verschlossen und etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist, unter den Wasserhahn. Nichts Besonderes ist zu bemerken. Sobald er aber den Wasserhahn aufdreht, fängt das Wasser im Glas tatsächlich an, heftig zu sieden. Wohlbemerkt, durch die Einwirkung eines kalten Wasserstrahls! Wird der Wasserhahn abgestellt, hört das Sieden auf. Wieder aufgedreht, siedet das Wasser weiter.

Nicht auszudenken, wenn man zum Kochen keine Wärme mehr brauchte, sondern den Kochtopf einfach unter die Wasserleitung stellt, aufdreht und ... Solche praktischen Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich aber aus dem vorgeführten Experiment nicht, denn dieser Versuch gelingt nur nach einer ganz bestimmten Vorbereitung.

Der Siedepunkt des Wassers liegt – ungefähr – bei 100° C; allerdings nur im allgemeinen. Der Siedepunkt ist nämlich vom Luftdruck abhängig. Je höher ein Ort über dem Meeresspiegel liegt, desto geringer ist der Luftdruck, und desto niedriger liegt der Siedepunkt.



Sobald die Wasserleitung läuft, fängt das Wasser im Glaskolben an zu sieden

Auf der Zugspitze (2963 m)	siedet das Wasser bei 90° C.
Auf dem Montblanc (4810 m)	siedet das Wasser bei 84° C.
Auf dem Mount Everest (8882 m)	siedet das Wasser bei 70° C.

Steht Wasser jedoch unter höherem Druck, wie zum Beispiel im Dampfkessel, so liegt sein Siedepunkt oberhalb von 100° C.

Druck in Atmosphären (at)	Siedepunkt des Wassers
1 at	100° C
2 at	121° C
5 at	152° C
15 at	194° C
168 at	350° C

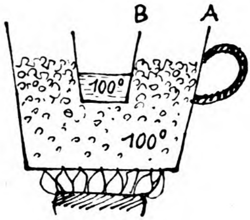
Der genannte Versuch ist folgendermaßen vorzubereiten: Der Kochkolben (aus dünnem hitzebeständigem Glas) wird etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt und – geschützt durch ein Drahtnetz mit Asbesteinlage – auf einer Heizplatte oder dem Gasherd erhitzt. Wenn das Wasser kräftig siedet, nehmen wir den Kolben vom Feuer (Topflappen benutzen!), verschließen ihn mit einem bereitgelegten gut passenden Stopfen und kehren ihn um. Sofort hört das Sieden auf. Damit ist der Kolben für das Experiment unter der Wasserleitung vorbereitet.

Beim vorangehenden Sieden wurde die Luft im Kolben durch den entstehenden Wasserdampf verdrängt. Nach dem Verschließen und Umkehren des Kolbens befindet sich somit über der Flüssigkeit im wesentlichen nur (unsichtbarer) heißer Wasserdampf, der nach dem Aufdrehen der Wasserleitung abgekühlt und zum Teil zu Wasser verdichtet wird. Dadurch entsteht über der Flüssigkeit ein Unterdruck, ein luftverdünnter Raum. Infolge des verminderten Druckes siedet das Wasser im Kolben jetzt schon bei 60° C, 40° C oder bei noch tieferer Temperatur.

Wasser von 100° C siedet nicht

Auf dem Gasherd steht ein Topf, in dem Wasser von 100° siedet. Hängen wir einen kleinen Aluminiumtopf mit Wasser hinein, so kommt auch dieses Wasser rasch auf 100° C, und wir vermuten, daß es bald sieden wird. Aber wir warten vergebens. Das Wasser im kleinen Topf siedet niemals, obwohl es ebenfalls eine Temperatur von 100° C hat. Wenn Wasser sieden soll, muß es zunächst bis zum Siedepunkt erhitzt werden. Aber das genügt noch nicht. Hat das Wasser Siedetemperatur erreicht, muß ihm weitere Wärme (Wärmeenergie) zugeführt werden. Durch sie wird das Wasser nicht auf höhere Temperatur gebracht, sondern verdampft. Um 1 kg Wasser von 100° C zu verdampfen, sind 540 Kilokalorien Wärme erforderlich. Dem Wasser im großen Topf A wird, nachdem es auf 100° C erhitzt ist, weiterhin Wärme zugeführt. Deshalb siedet es. Auf den kleinen Topf B wirkt jedoch nur das ihn umgebende Außenwasser mit einer Temperatur von 100° C. Deshalb kann das Wasser im Topf B nicht sieden.

Das Wasser im Topf A siedet bei 100° C; das Wasser im Topf B steht ebenfalls auf 100° C, aber es siedet nicht



Wird Kaffee unmittelbar über der Gasflamme oder auf der Heizplatte, im Ofen oder mit dem Tauchsieder aufgewärmt und kommt er dabei zum Sieden, so verliert er an Geschmack. Das läßt sich vermeiden, wenn man die Kaffeekanne zum Aufwärmen in einen Topf mit siedendem Wasser hängt. In diesem „Wasserbad“ wird der Kaffee wohl auf 100° C erhitzt, siedet aber nicht und verliert infolgedessen nicht an Aroma.

Beim Verdampfen von Wasser wird also Wärme verbraucht. Umgekehrt wird Wärme frei, wenn sich Wasserdampf von 100° C zu Wasser von 100° C verdichtet. Auf diesem Prinzip beruht die Dampfheizung. Die Wärme, die dem Zimmer von den Heizkörpern der Dampfheizung zugeführt wird, ist im wesentlichen die Wärme, die zum Verdampfen des Wassers verbraucht wurde und nun beim Kondensieren des Wasserdampfes wieder frei wird.

Ein leuchtender Wasserstrahl

Im verdunkelten Zimmer wird uns ein leuchtender Wasserstrahl vorgeführt, der wie weißglühendes flüssiges Metall aussieht. Wo er in der Schüssel S auftrifft, erscheint ein Lichtfleck. Lassen wir den Strahl auf die Hand spritzen, so leuchtet die getroffene Handstelle hell auf. Strahl und Licht sind kalt.

Der leuchtende plätschernde Wasserstrahl im dunklen Zimmer bietet einen schönen Anblick und vermittelt einen geheimnisvollen Eindruck.

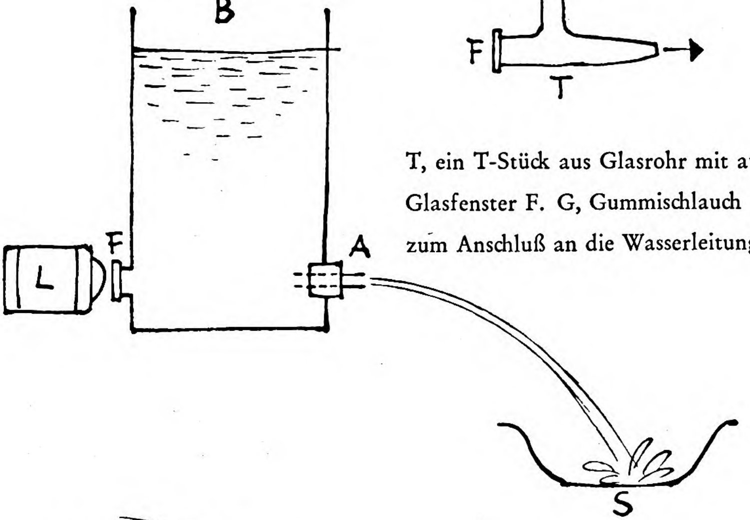
Das Blechgefäß B ist mit Wasser gefüllt. Bei A ist mit einem eingekitteten Kork ein Ausflußröhrchen aus Glas eingesetzt. Bei F befindet sich in der Gefäßwandung ein Fenster in Form einer kleinen aufgekitteten Glasscheibe. Das Licht einer Taschenlampe L ist mit einem schwarzen Tuch abgedeckt, damit sie nicht den Vorführraum erhellt.

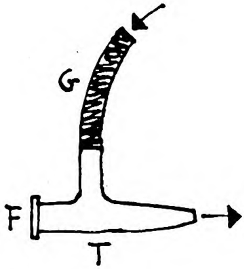
Wer einiges Geschick zum Basteln hat, kann sich das zum Vorführen erforderliche Blechgefäß zum Beispiel aus einer großen Konservenbüchse selbst herstellen.

Bevor man den Strahl ausfließen läßt, werden dem Wasser einige Tropfen Milch zugesetzt. Dadurch wird die Leuchtkraft des Strahls erhöht. Wird vor das Fenster F eine farbige Glasscheibe oder ein farbiges Gelatineplättchen gestellt, so leuchtet der Strahl in der entsprechenden Farbe auf.

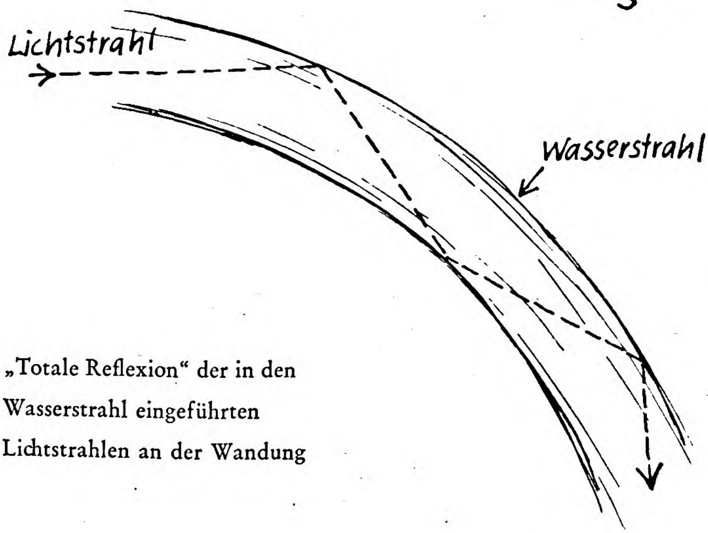
Will man den leuchtenden Springbrunnen längere Zeit in Betrieb halten, so muß für etwa gleichbleibenden Wasserstand im Gefäß gesorgt

Aus dem wassergefüllten Blechgefäß B
ergießt sich bei A ein leuchtender
Wasserstrahl





T, ein T-Stück aus Glasrohr mit aufgekittetem
Glasfenster F. G, Gummischlauch
zum Anschluß an die Wasserleitung

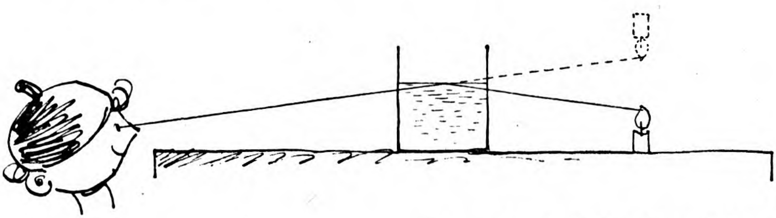


„Totale Reflexion" der in den
Wasserstrahl eingeführten
Lichtstrahlen an der Wandung

werden. An Stelle des Gefäßes kann auch ein T-Stück aus Glas verwandt werden. An einem Ende des T-Balkens ist ein Glasfenster F aufgekittet (siehe Abb. Seite 133 oben). Mit einem Gummischlauch wird das T-Stück an die Wasserleitung angeschlossen. Zu- und Abfluß des Wassers sind in der Zeichnung durch Pfeile dargestellt.
Die Erscheinung beruht darauf, daß hier Lichtstrahlen so schräg gegen die Wandung des Wasserstrahls treffen, daß sie nicht aus dem Wasser in die Luft hinaustreten können, sondern ständig innerhalb des Strahls reflektiert werden. Das Licht kann den Strahl nicht verlassen.
Nur die Schwebeteilchen (zum Beispiel Milchteilchen) und die Wandungsteilchen leuchten auf, während der größte Teil des Lichts im Strahl verbleibt. Wo der Wasserstrahl auftrifft, wird das Licht frei. Deshalb leuchtet diese Stelle auf.

Fata Morgana

Eine Fata Morgana beruht auf einer Luftspiegelung. Luft in unmittelbarer Nähe des sonnenbestrahlten Wüstensandes ist heißer und deshalb weniger dicht als die darüberliegende kühlere Luftschicht. Wenn ein von der Palmenkrone ausgehender Lichtstrahl sehr schräg auf die Grenze zwischen der heißen und der kühleren Luftschicht trifft, wird er hier wie an einem Spiegel zurückgeworfen. Der Beobachter sieht dann ein umgekehrtes Spiegelbild der Palme unmittelbar unter ihr und schließt daraus fälschlicherweise auf eine dort befindliche spiegelnde Wasserfläche.

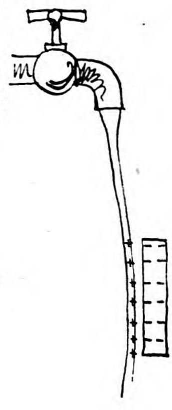


Wasseroberfläche im Einweckglas als Spiegel

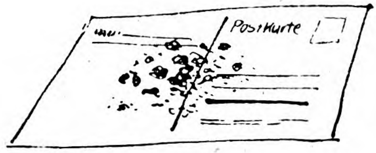
Die Luftspiegelung der Fata Morgana kann mit einer bestimmten Versuchsanordnung im Laboratorium gezeigt werden. Eine der Fata Morgana entsprechende Spiegelung eines Lichtstrahls an der Grenze von Wasser (dem dichteren Mittel) und Luft (dem dünneren Mittel) läßt sich leicht beobachten:
In einiger Entfernung von einem mit Wasser gefüllten Weckglas wird ein brennender Kerzenstumpf aufgestellt. Blicken wir schräg von unten gegen die Wasseroberfläche, so sehen wir über der Kerze ihr umgekehrtes Spiegelbild.

Wasserstrahl als Elektroskop

Elektroskope dienen zum Nachweis elektrischer Ladungen. Dabei wird das Vorhandensein einer Ladung an einer Bewegung (zum Beispiel eines Aluminiumblättchens) erkannt, die durch elektrische Kräfte verursacht wird.
Als ganz einfaches und recht empfindliches Elektroskop erweist sich ein dünner Wasserstrahl, den wir erhalten, wenn wir den Hahn der Wasserleitung nur ganz wenig aufdrehen. Halten wir eine an Wollstoff geriebene Siegellackstange in die Nähe des Strahls, so wird er aus seiner bisherigen Bahn abgelenkt.
Die Stange wird durch Reiben negativ elektrisch. Im Wasserstrahl sind – wie in jedem anderen nicht geladenen Körper – gleichviel positive und negative Elektrizitätsteilchen vorhanden, die zusammen die Ladung null ergeben. Die positiven Teilchen werden von der negativen Ladung der Siegellackstange angezogen. Diese Kräfte lenken den Wasserstrahl in der Richtung zur Siegellackstange ab.
Statt einer Siegellackstange kann auch der Füllfederhalter genommen werden. Das Experiment gelingt dann allerdings nur, wenn der Füller aus Hartgummi oder ganz bestimmten anderen Kunststoffen besteht.



Ein dünner Wasserstrahl wird von der geriebenen Siegellackstange angezogen



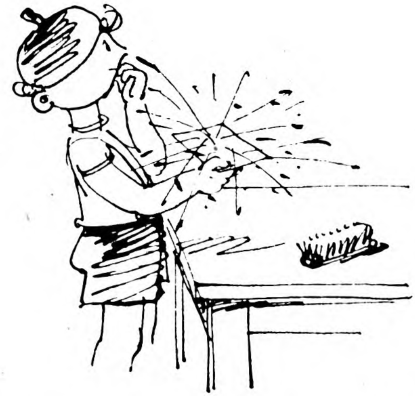
Eine elektrische Postkarte

Vor uns liegt auf der hölzernen Tischplatte eine Postkarte. Nichts Besonderes ist an ihr zu bemerken, nur ein wenig Zigarettenasche liegt darauf. Hebt man die Karte vorsichtig vom Tisch ab, werden die Ascheteilchen blitzschnell in alle Richtungen davongeschleudert.
Die Postkarte, die immer etwas Feuchtigkeit enthält, wird vor dem Experiment einige Minuten lang in der heißen Ofenröhre getrocknet. Dann legen wir sie auf die hölzerne Tischplatte und streichen mit einer Kleiderbürste einige Male kräftig über die Karte. Anschließend streuen wir etwas Zigarettenasche darauf.
Beim Bürsten wurde die getrocknete Postkarte negativ elektrisch aufgeladen. Durch die negativen Elektrizitätsteilchen der Postkarte werden in der oberen Holzschicht positive Ladungsteilchen „influenziert". Das heißt, durch den Einfluß beziehungsweise durch die Wirkung der elektrisch geladenen Postkarte werden positivgeladene Teilchen aus den oberen Holzschichten angezogen. Wir wissen ja heute, daß jeder Stoff, jedes Atom aus elektrisch geladenen Teilchen besteht. Wir bemerken diese elektrischen Ladungen nur im allgemeinen nicht, weil in einem elektrisch nicht aufgeladenen Stoff stets gleich viel positive und negative Teilchen vorhanden sind. Legen wir jedoch die elektrisch negativ geladene Postkarte auf den Tisch, so zieht sie die positiven Teilchen der oberen Holzschichten an. Diese positiven Ladungen werden durch Anziehungskräfte in die alleroberste Holzschicht gedrängt, während die negativen Ladungen abgestoßen werden und in untere Holzschichten flüchten.
Die negativen Ladungen in der Postkarte und die positiven Ladungen in der obersten Holzschicht ziehen sich an, fesseln sich gewissermaßen

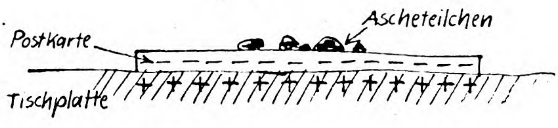
gegenseitig. Infolgedessen werden die aufgelegten Ascheteilchen zunächst nicht elektrisch aufgeladen. Beim Abheben der Postkarte jedoch wandert negative Elektrizität, die jetzt nicht mehr an die positiven Ladungen in der Tischplatte gefesselt ist, auch in die Ascheteilchen. Sie stieben dann sofort auseinander, weil sich gleichartig elektrisch geladene Körper abstoßen.

Bevor wir dieses Kunststück wiederholen, trocknen wir die Karte erneut. Bereits durch Spuren von Feuchtigkeit entsteht eine Leitfähigkeit, die eine elektrische Aufladung unterbindet.

Ein zweites Experiment mit der elektrisch geladenen Postkarte: Auf die Rückenlehne eines Stuhles legen wir einen Spazierstock und bringen ihn ins Gleichgewicht. Halten wir die elektrisch geladene Postkarte in die Nähe des Stockes, so wird er von ihr durch elektrische Anziehungskräfte in Drehbewegung versetzt. Dieses Ergebnis ist um so erstaunlicher, als der Stock immerhin etwa 300 Gramm wiegt.



Negative Ladungen in der Postkarte, positive Ladungen in der oberen Holzschicht. Ascheteilchen nicht geladen



Stromart einer elektrischen Lampe an ihrem Licht erkennen

In der Stadt sieht man abends viel Lichtreklame. Besonders eindrucksvoll erscheinen die in bunten Farben leuchtenden Neonröhren. Bewegen wir im Schein einer solchen Leuchtröhre einen Finger rasch hin und her, so wird eine seltsame Erscheinung sichtbar. Wir sehen den Finger mehrmals nebeneinander. Man hat den Eindruck, als ob hier verschiedene Momentaufnahmen des bewegten Fingers in kinematographischer Folge nebeneinander zu sehen sind. Je rascher der Finger bewegt wird, um so weiter liegen die einzelnen Bilder auseinander. Auch bei Leuchtstoffröhren, die jetzt in steigendem Maße zur Beleuchtung von Arbeitsräumen, Schaufenstern und Wohnungen verwendet werden, kann man oft das gleiche beobachten.

Alle diese Röhren, in denen Gase glimmend aufleuchten, werden mit Wechselstrom betrieben. Während bei Gleichstrom die Elektrizität immer in gleichbleibender Richtung und Stärke fließt, entströmt der Wechselstrom stoßweise und wechselnd bald der einen, bald der anderen Buchse der Steckdose. Jede Buchse ist wechselnd 50mal Pluspol und Minuspol. Dabei ändert sich nicht nur die Fließrichtung des Stromes, sondern auch seine Stärke, die bei jedem Stromstoß zunächst anschwillt und dann wieder abfällt. Beim Polwechsel ist die Stromstärke gleich null. In diesem Augenblick, also 100mal in der Sekunde, leuchtet die Reklameröhre oder die Leuchtstofflampe nicht. Der ausgestreckte Finger der bewegten Hand wird also nur alle $\frac{1}{100}$ Sekunden hell beleuchtet. In diesen Augenblicken sehen wir ihn; und wir sehen ihn in mehreren Stellungen gleichzeitig, weil die Lichtwahrnehmungen unserer Netzhaut nach dem Verlöschen einer Lichtquelle jeweils noch etwa $\frac{1}{20}$ Sekunde lang anhalten, nachklingen.

Auch im Licht einer mit Wechselstrom betriebenen Bogenlampe ist diese Erscheinung zu beobachten.

Im Schein einer mit Wechselstrom gespeisten Leuchtröhre sehen wir nebeneinander viele Bilder eines Fingers der bewegten Hand

Zu entsprechenden Versuchen im Schein einer Glühlampe bewegt man am besten eine glitzernde Stricknadel hin und her. In vielen Fällen läßt sich dann auf diese Weise ebenfalls feststellen, ob die Lampe mit Wechselstrom oder Gleichstrom gespeist wird. Bei Gleichstrom tritt die genannte Erscheinung nicht auf. Allerdings klappt dieser Versuch bei Glühlampen nur dann, wenn der Glühdraht sehr dünn ist. Ist er stärker, so erkaltet er in den Strompausen oft nicht sofort, sondern er überglüht sie.

1 Kilogramm auf dem Mond

Raketenflug zum Mond! Vielleicht ist es bald soweit. Schon umkreisen mondähnlich Trabanten die Erde. Das ist der vorgesehene erste Schritt zum Weltraumflug.

Ist man erst einmal auf dem Mond gelandet, wird man etwas Interessantes erleben. Jede Person, jedes Gewichtsstück, jeder Stein ist dort viel leichter als auf der Erde. Wer auf der Erde 30 kg wiegt, wiegt auf dem Mond nur rund 5 kg. Auf dem Mars wiegt der gleiche Mensch 12 kg, auf dem Jupiter hingegen 75 kg und auf der Sonne sogar 825 kg, also fast 17 Zentner.

Obwohl noch kein Mensch auf anderen Weltenkörpern war, weiß man, daß diese von den Wissenschaftlern errechneten Zahlen richtig sind. Eine unverändert bleibende Stoffmenge hat also an verschiedenen Stellen im Weltraum verschiedenes Gewicht. Ob das Gewicht eines Körpers auch bei einer Wanderung auf der Erdoberfläche veränderlich ist? Das kann man ausprobieren.

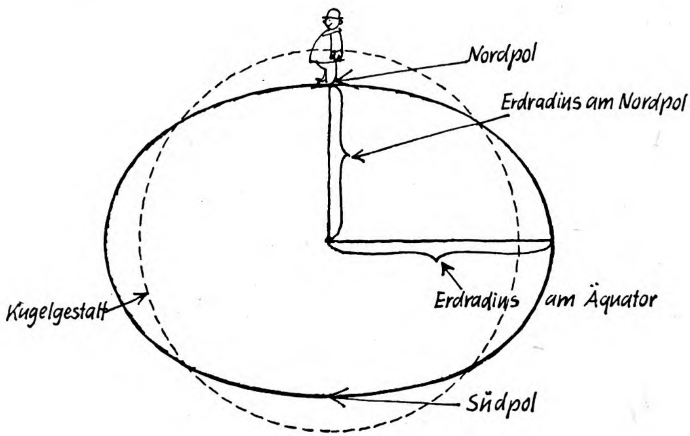
Lassen wir am Äquator einen wohlbeleibten Mann auf die Personenwaage klettern. 100 kg zeigt die Waage an, zwei volle Zentner. Am Nordpol dagegen wiegt der Dicke 100,6 kg.

Die gleichbleibende Stoffmenge eines Körpers – eines Ziegelsteins, eines Kilogrammstückes, eines Menschen – wird Masse genannt und in Kilogramm (kg) gemessen. Unter dem Gewicht eines Körpers hingegen versteht man die Kraft, mit der er auf seine Unterlage drückt beziehungsweise an seiner Aufhängung zieht. Diese Kraft wird in Kilopond (kp) ausgedrückt. Ein Kilopond ist das Gewicht eines Kilogrammstückes in 45° geographischer Breite und in Meeresspiegelhöhe. Mit der Personen-Federwaage wird das Gewicht und nicht die Masse bestimmt.

Das Gewicht eines Körpers wird – hier auf unserer Erdkugel – durch die Anziehungskraft der Erde verursacht. Die Erdmasse übt auf jeden Körper eine Kraft aus, die ihn in Richtung zum Erdmittelpunkt zieht. Steht der gleiche Körper auf der Mondoberfläche, so wird er von der Masse des Mondes angezogen. Diese Anziehungskraft ist kleiner als die der Erde, weil seine Masse geringer ist als die der Erde. Die Anziehungskraft, die die Sonne auf den gleichen Körper ausübt, ist viel größer als die Erdanziehungskraft (Schwerkraft), weil die Masse der Sonne 331 994mal so groß ist wie die Masse der Erde.

Das ist der Grund dafür, daß das Gewicht ein und desselben Körpers auf den verschiedenen Himmelskörpern verschieden groß ist.

Und warum ist das Gewicht des dicken Herrn am Nordpol größer als am Äquator? Sehen wir uns einmal die Gestalt der Erde an.
Wir sagen oft: Die Erde ist eine Kugel. Das stimmt auch so ungefähr, aber eben nicht genau. Die Erde hat die Gestalt einer an den Polen abgeflachten Kugel. Die bei rascher Drehung stets auftretenden und nach außen ziehenden Fliehkräfte verursachten diese Abflachung, als sie noch glühend flüssig war.



Aus der Zeichnung, in der wir die Abflachung etwas übertrieben haben, ist zu erkennen, daß der Nordpol weniger weit vom Erdmittelpunkt entfernt ist als ein Punkt des Äquators. Je näher ein Körper dem Anziehungszentrum ist, um so größer ist die Anziehungskraft, mit der er erfaßt wird. Infolgedessen ist die Anziehungskraft der Erde und somit auch das Gewicht eines Körpers am Nordpol größer als am Äquator.
Wandert man mit einem Kilogrammstück zum Äquator, zum Nordpol, auf einen hohen Berg, auf den Mars und so weiter, so ändert sich jeweils das Gewicht des Kilogrammstückes.

1 kg Masse hat in 45° geographischer Breite, in Meeresspiegelhöhe,

	ein Gewicht von	1 kp
am Nordpol	ein Gewicht von	1,003 kp
am Äquator	ein Gewicht von	0,997 kp
auf der Mondoberfläche	ein Gewicht von	0,168 kp
auf dem Mars	ein Gewicht von	0,400 kp
auf dem Jupiter	ein Gewicht von	2,560 kp
auf der Sonne	ein Gewicht von	27,500 kp

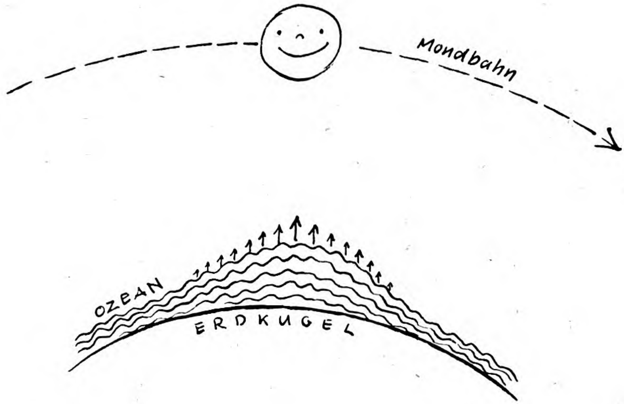
Da vielen der Unterschied zwischen Masse und Gewicht nicht bekannt ist, werden im alltäglichen Sprachgebrauch diese beiden Begriffe nicht scharf getrennt. Man spricht oft von Gewichtsstücken, obwohl man Massenstücke meint. Die in Kilogramm gemessene Masse, zum Beispiel eines Brotes, wird meist fälschlich als dessen Gewicht bezeichnet. All das ist im Alltagsleben auch unbedenklich, da die Gewichtsänderungen einer Masse auf der Erdoberfläche höchstens etwa $^1/_2$ % ausmachen.

Die Physiker und Techniker hingegen müssen scharf unterscheiden zwischen Masse und Gewicht, zwischen Kilogramm und Kilopond. Die Masse in Kilogramm wird mit der Balkenwaage bestimmt, das Gewicht in kp mit der Federwaage.

Apfel und Erde

Ein Apfel fällt zur Erde. Warum? Weil ihn die Schwerkraft, die Anziehungskraft der Erde, senkrecht nach unten zieht. Was ist das eigentlich für eine Kraft? Die Anekdote erzählt, daß der englische Physiker und Mathematiker Isaak Newton um das Jahr 1666 – einmal unter einem Apfelbaum liegend – durch einen herabfallenden Apfel angeregt worden sei, Untersuchungen über die Schwerkraft anzustellen.

Newton entdeckte das nach ihm benannte Massenanziehungsgesetz (Gravitationsgesetz): Zwei Massen ziehen sich stets *wechselseitig* an. Die Anziehungskraft ist um so größer, je größer die Massen sind und



Wenn der Mond über dem Meer steht, hebt er den Wasserspiegel und erzeugt dadurch Flut

je kleiner die Entfernung der Massen voneinander ist. Er fand auch die mathematische Formel für dieses grundlegende Naturgesetz.
Damit steht zunächst einmal fest, daß nicht nur der Apfel von der Erde, sondern auch die Erdkugel vom Apfel angezogen wird. Zwei Massen wirken immer wechselseitig mit gleich großer Anziehungskraft aufeinander ein.
Die Anziehungskraft der Erde bringt den Apfel zum Fallen. Die gleich große Anziehungskraft, die der Apfel auf die Erde ausübt, vermag jedoch nicht die Erde sichtbar in Bewegung zu versetzen.
Bei der wechselseitigen Anziehung von Erde und Mond ist das schon anders. Der Mond wird von der Erde angezogen. Diese Anziehungskraft hält ihn auf seiner Bahn um die Erde. Wenn man diese riesige Anziehungskraft „ausschalten" könnte, würde der Mond rasch in geradliniger Bewegung den Bannkreis der Erde verlassen.
Mit dem Newtonschen Massenanziehungsgesetz kann man die Kraft ausrechnen, mit der der Mond von der Erde festgehalten wird. Sie beträgt rund 20 Trillionen kp. Von der gewaltigen Größe dieser Kraft kann man sich kaum eine anschauliche Vorstellung machen.

Mit der gleich großen Kraft wird auch die Erde vom Mond angezogen. Diese Anziehungskraft tritt sichtbar in Erscheinung, wenn der Mond über dem Meer steht. Die Wassermassen werden von der Mondkraft hochgehoben, stellenweise bis zu 20 m! Es herrscht dann Flut, die mit dem Mond wandert.

Man will versuchen, diese Mondkraft zum Betrieb von Gezeitenkraftwerken auszunützen, bei denen zur Zeit der Flut Wassermassen vom Mond gehoben werden, die dann beim Absinken zum Antrieb von Turbinen ausgenutzt werden. Ungeheure Energien kann man auf diese Weise gewinnen. In Frankreich werden schon die ersten Kraftwerke dieser Art gebaut. Die Anziehungskraft des Mondes vermag 20 Millionen km^3 Wasser zu heben!

Die Mondkraft hebt nicht nur die Wassermasse der Erde, sie wölbt auch die Erdkruste hoch. Um 20 bis 40 cm werden ganze Städte und Landschaften zeitweise durch die Anziehungskraft des vorüberziehen-Mondes gehoben. Wir merken nichts davon, weil 40 cm gegenüber den Ausmaßen der Erde eine Winzigkeit sind.

Nicht nur Apfel und Erde, Mond und Erde, auch Sonne und Erde ziehen sich gegenseitig an. Die Erde wird in ihrem elliptischen Lauf um die Sonne von deren Anziehungskraft festgehalten. Umgekehrt ist es denkbar, daß die Erde flutähnliche Erscheinungen auf der Sonne hervorruft.

Und auch im Alltag gilt das Newtonsche Gravitationsgesetz. Beispielsweise ziehen sich zwei Ziegelsteine oder zwei Zentnersäcke Kohle gegenseitig an, auch wenn sie meterweit voneinander entfernt sind. Wenn du jetzt am Tisch sitzt und liest, so übt deine Körpermasse auf den Tisch eine Anziehungskraft aus, und umgekehrt wirkt die Tischmasse mit einer Anziehungskraft auf dich ein. Nur sind diese Kräfte so klein, daß sie noch keine Bewegungen hervorrufen können, aber sie sind vorhanden. Bewegung auslösende Kräfte entstehen erst, wenn mindestens eine der beiden sich anziehenden Massen sehr groß ist. Eine solche Bewegung sehen wir zum Beispiel, wenn ein Apfel vom Baum fällt.

Durch Experimente hat man gefunden, daß 1 g Masse ein anderes g Masse in der Entfernung von 1 cm mit einer Kraft von

$$K = 0{,}000\,000\,000\,000\,067 \text{ kp}$$

anzieht. Diese Zahl wird in der Wissenschaft als Gravitationskonstante bezeichnet. Obwohl sie winzig klein ist, kommen doch mächtige Anziehungskräfte zustande, wenn eine der beiden Massen oder beide sehr groß sind.

Zwei Menschen von je 50 kg, die sich in der Entfernung von 10 cm gegenüberstehen, ziehen sich mit einer Kraft von etwa 0,000 000 2 kp an.

Die Anziehungskraft zwischen zwei riesigen Ozeandampfern von 60 000 m^3 Wasserverdrängung, die in einer Entfernung von 1 m nebeneinanderliegen, beträgt 300 kp.

Aber auch diese Kraft ist zu klein, um eine Bewegung der beiden Ozeanriesen zu verursachen.

CHEMISCHE VERSUCHE

Geheimnisvolle Feuerspur

Wir zeigen ein Blatt Zeitungspapier herum, gewöhnliches Zeitungspapier, wie sich jeder überzeugen kann. Nichts Besonderes ist daran zu entdecken. Dieses Blatt lassen wir mit beiden Händen halten.
Wir brennen ein Streichholz an, stoßen die verkohlte Kuppe ab und blasen die Flamme vorsichtig aus, so daß das Holz an der Spitze gerade noch glimmt. Diese glimmende Streichholzspitze halten wir an eine – angeblich beliebige – Stelle des Zeitungspapiers. Das Papier glimmt leuchtend auf. Sofort nehmen wir das Streichholz weg. Der Funke auf dem Papier glimmt weiter und beginnt zur allgemeinen Überraschung zu wandern. Langsam kriecht er glimmend dahin, sucht sich seinen Weg, sengt längs des Weges das Zeitungsblatt durch und schneidet schließlich eine Figur aus dem Zeitungspapier heraus. Der glimmende Funke erlischt am Ende der scheinbar unbeabsichtigten Bahn.
Das Spiel wirkt auf die Zuschauer verblüffend. Rätselhaft! Keine Angst, es kann nichts dabei passieren, wenn man nur das glimmende Streichholz und nicht etwa das brennende benutzt. Wir können auch jede andere beliebige Figur oder einen Namen in Feuerschrift erscheinen lassen. Das Kunststück muß nur entsprechend vorbereitet sein.
In der Drogerie oder in der Apotheke kaufen wir uns etwas Salpeter, ein weißes Pulver. In ein Wasserglas oder in eine Tasse schütten wir eine Messerspitze davon und gießen ein wenig Wasser darüber. Das Pulver löst sich auf; es entsteht eine klare Lösung. Wir tauchen einen

Auf dem Zeitungspapier kriecht
langsam ein glimmender Funke dahin
und schneidet mit seiner Brandspur
eine Figur aus dem Zeitungsblatt heraus

dünnen Haarpinsel in die Salpeterlösung und zeichnen damit auf das Zeitungspapier diejenige geschlossene Figur, die nachher in Feuerschrift entstehen oder ausgeschnitten werden soll. Nach wenigen Minuten ist das Zeitungspapier wieder trocken. Von der Vorbereitung ist nichts mehr zu sehen. Wir müssen uns merken, wo unser Linienzug beginnt, denn an dieser Stelle müssen wir bei der Vorführung das glimmende Streichholz ansetzen. Am besten markieren wir diese Stelle mit dem Bleistift.

Salpeter enthält chemisch gebunden viel Sauerstoff. Die winzige Salpetermenge, die aus der eingetrockneten Lösung auf dem Papier verbleibt, reicht aus, um mit ihrem Sauerstoffgehalt das Papier glimmfähig zu machen. Sauerstoff unterstützt das Verbrennen, das hier nur langsam glimmend vor sich geht. Der hell leuchtende Funke wandert längs der Salpeterspur.

Solche Salpeterlösungen werden auch verwendet, um die Glimmfähigkeit von Tabak und Zigarettenpapier zu erhöhen.

Bei dem Gebrauch von Chemikalien muß man stets mit Vorsicht zu Werke gehen! Meist sind die Stoffe schädlich für den Menschen, oft sind sie feuergefährlich oder können andere Schäden hervorrufen. Bei den Experimenten haltet euch immer an die vorgeschriebenen Mengen!

Eisen brennt

Wenn jemand mit dem eisernen Feuerhaken das Feuer im Ofen schürt oder mit der Kohlenschaufel Briketts zulegt, so wird er kaum auf den Gedanken kommen, daß dabei das Eisen anbrennen könnte. Das ist auch nicht zu befürchten. In dem mit einem Gebläse betriebenen Schmiedefeuer jedoch kann das zum Glühen hineingelegte Eisen durchaus verbrennen.

Bearbeiten wir Eisen mit der Feile, so erhalten wir feine Späne, die sogenannte Eisenfeile. Schütten wir von diesem silbergrauen Pulver etwas auf ein Stück Papier und pusten es in die Flamme des Gasherdes hinein, so entsteht das schönste Feuerwerk mit glühenden Sternchen. Die Eisenteile glühen in der Flamme auf, entzünden sich und fliegen brennend weiter. Es entstehen winzige schwarze Körner Eisenasche, Eisenoxyd.

Eisenteilchen verbrennen also leicht. Warum? Weil sie in der Flamme sofort auf hohe Temperatur kommen und im Vergleich zu ihrer geringen Masse eine große Oberfläche haben, auf die beim Verbrennen der Luftsauerstoff einwirkt.

Die Steigerung der Brennbarkeit durch eine große Oberfläche des Brennstoffes nutzen wir mehr oder weniger unbewußt beim Feueranmachen. Zuerst brennen wir Papier an, das eine besonders große Oberfläche hat. Dann wird Holz, und zwar gespaltenes Holz, und erst zuletzt Kohle aufgelegt.

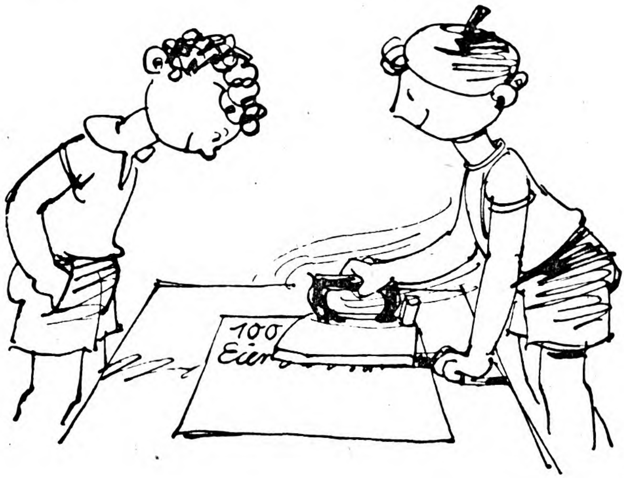
Auf dem Weihnachtsmarkt sind „Wunderkerzen" erhältlich, die beim Anbrennen auf helle Glut kommen und einen Regen verglühender Eisen- und Aluminiumteilchen um sich sprühen. In der Wunderkerze sind außerdem ein sauerstoffabgebendes Pulver und ein Bindemittel enthalten.

Zitronensaft als Tinte

Wir zeigen unserem Publikum ein Blatt weißes Schreibpapier. Nichts Besonderes ist daran festzustellen. Dann nehmen wir ein heißes Bügeleisen und fahren damit ein paarmal über das Papier. Die Zuschauer sind nicht wenig erstaunt, daß da wie von unsichtbarer Hand geschrieben – langsam deutlich werdend – eine Schrift in dunkelbrauner Farbe erscheint:

Und sieh! Und sieh! An weißer Wand,
da kam's hervor wie Menschenhand
und schrieb, und schrieb an weißer Wand
Buchstaben von Feuer, und schrieb und schwand...

(Aus „Belsazar" von Heinrich Heine)



Ein Blatt weißes Schreibpapier...
... wird mit dem heißen Bügeleisen bestrichen. Es erscheint – – eine Geisterschrift?

Natürlich war das Papier vorbereitet. Wir tropften etwas Zitronensaft in ein Gläschen, tauchten eine neue Stahlfeder ein und schrieben mit Zitronensaft als Tinte die Zeilen auf das Papier. Nach dem Trocknen der Schrift ist nichts mehr davon zu sehen, denn unsere „Tinte“ ist ja farblos.

Wenn wir Salzwasser als Tinte verwenden, so ist auch nach dem Plätten des Papiers nichts zu bemerken. Halten wir aber das Blatt vorsichtig derart über eine brennende Kerze, daß es gerade anfängt, leicht zu sengen, so wird die dunkelbraune Schrift auf dem angesengten Papier deutlich sichtbar.

In beiden Fällen erscheint die Schrift infolge leichter temperaturbedingter Verkohlung des Papiers. Diese Wärmezersetzung des Papiers wird durch das vorangegangene physikalisch-chemische Einwirken von Zitronensaft oder Salzwasser erleichtert und verstärkt.

Schwarzen Kaffee farblos machen

In der Apotheke und in der Drogerie kann man unter dem Namen „aktive Kohle“ eine körnige oder feinpulvrige schwarze Masse kaufen, die aus reinem Kohlenstoff besteht. Schüttet man etwas davon in einen Filter und gießt schwarzen Kaffee darüber, so tropft er aus dem Filtriertrichter als wasserklare Flüssigkeit heraus. Er wird durch aktive Kohle entfärbt und verliert dabei auch seinen Geschmack.

Mit aktiver Kohle kann man auch Rotkrautwasser, Rotwein, Tinte und viele andere Flüssigkeiten entfärben.

Aktivkohle wird nach einem besonderen Verfahren durch Verkohlung von Holz hergestellt und ist besonders feinporig. Ein einziges Gramm davon kann eine Oberfläche von fast 1000 m^2 haben; das ist $\frac{1}{6}$ der Fläche eines Fußballfeldes. Mit dieser außerordentlich großen Oberfläche kann die aktive Kohle Farbstoffe aufsaugen. Aber nicht nur Farbstoffe, sondern auch viele Gase und Dämpfe werden von aktiver

Im Filter liegt ein pechschwarzes Pulver, durch das der zugegossene schwarze Kaffee entfärbt wird. Er sieht dann aus wie klares Wasser

Kohle aufgenommen. Manche Atemschutzgeräte (Gasmasken) enthalten in ihren Filtern aktive Kohle, die die Luft von schädlichen Gasen und Dämpfen reinigen.
In der Technik wird Aktivkohle zum Beispiel zum Entfärben der braunen Rohzuckerlösung und zum Entchloren von Trinkwasser benutzt. Der Arzt verordnet aktive Kohle bei bestimmten Magen- und Darmerkrankungen und als Gegenmittel bei Vergiftungen, wobei die Kohle die Giftstoffe aufsaugt.

Zucker brennt

Hält man ein Stück Würfelzucker in die Kerzenflamme, so berußt es zunächst; dann schmilzt der Zucker an der Oberfläche zu einzelnen gelbbraunen Tropfen, die teilweise mit bläulichem Flämmchen brennen. Wird der Zucker aus der Flamme genommen, so brennt er nicht weiter, er verbrennt eben nur in der Hitze einer anderen Flamme.

Wälzen wir den Zucker jedoch zuvor in Tabakasche, so brennt er viel kräftiger. Er brennt auch dann weiter, wenn wir ihn aus der Kerzenflamme herausnehmen. Dabei entsteht eine sich aufblähende schwarze Masse, die einen eigenartigen brenzligen Geruch verbreitet.
Die Verbrennung des Zuckers wird durch die Anwesenheit der Asche wesentlich gefördert. Die Aschesubstanz wirkt hier – wie der Chemiker sagt – als Katalysator. Durch Katalysatoren werden viele chemische Vorgänge beschleunigt, ohne daß der Katalysator selbst dabei verbraucht wird.
Die entstandene schwarze Masse besteht vor allem aus Kohlenstoff. Er scheidet sich aus dem Zucker ab, während gleichzeitig ein Teil davon verbrennt. Man vermutet es zunächst nicht, daß der schneeweiße Zucker pechschwarzen Kohlenstoff enthält. Zucker besteht aus Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff; dabei stehen Wasserstoff und Sauerstoff im gleichen Mengenverhältnis wie im Wasser (H_2O). Man kann deshalb vermuten, daß es den Chemikern in Zukunft einmal gelingen wird, aus Kohlenstoff und Wasser Zucker zu gewinnen. Es gibt viele Stoffe, die derart zusammengesetzt sind, so zum Beispiel die Stärke. Sie werden Kohlehydrate genannt und sind für unsere Ernährung sehr wichtig.

Mit bläulicher Flamme brennt ein Stück Würfelzucker, wenn man es vorher in Tabakasche wälzt

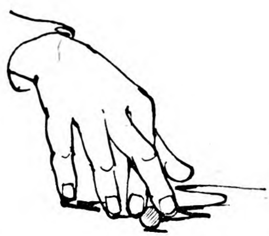
BIOLOGISCHE EXPERIMENTE

Eine Hand erbleicht

Ich drehe mich um, so daß ich die Spielpartner nicht sehen kann, und erkläre, daß ich langsam von 1 bis 15 zählen werde. Der Partner soll bei „1“ einen Arm heben und bei „15“ wieder herunternehmen.
Achtung! 1! Einen Arm hoch! Hand flach halten dabei! 2, 3, 4... 15. Jetzt beide Hände schnell flach vor die Augen halten! Dabei die Finger spreizen und hindurchsehen.
Ich drehe mich um, trete heran, blicke in die Augen des Partners, der den Arm gehoben hat, und sage ihm sofort, welcher Arm es war.
Das Experiment gelingt immer. Der Vorführende kann ohne weiteres erkennen, welcher Arm gehoben wurde. Die Hand dieses Arms sieht nämlich blasser aus als die andere.
Unermüdlich klopft unser Herz und pumpt das Blut durch die Adern. Infolgedessen herrscht in den Adern ein bestimmter Blutdruck, der aber im Kopf geringer ist als beispielsweise im großen Zeh. Bei der Wasserleitung ist es genauso. Im vierten Stockwerk ist der Wasserdruck geringer als im Erdgeschoß.
In der gehobenen Hand ist der Blutdruck lediglich durch den vom Herzen ausgeübten Druck und die anatomischen Verhältnisse der Blutbahn bedingt. In der nicht gehobenen Hand wird der Blutdruck zusätzlich durch das Eigengewicht der über ihr stehenden Blutsäule in der Blutbahn verstärkt. Infolge des höheren Blutdrucks werden die Adern in der nicht erhobenen Hand stärker geweitet und durchblutet. Die Hand ist gerötet. Die gehobene Hand sieht blasser aus, weil sie weniger durchblutet wird.

Die Erbse des Aristoteles

Aristoteles lebte im 4. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung und war einer der bedeutendsten griechischen Gelehrten des Altertums. Er beschäftigte sich mit einer seltsamen Erscheinung. Betastet man eine Erbse mit einer besonderen Fingerstellung, kommt es einem vor, als seien zwei Erbsen vorhanden. Man muß dabei den Zeigefinger unter den Mittelfinger legen und mit den Spitzen der beiden gekreuzten Finger die Erbse berühren.
Sage deinem Freund zunächst nicht, worum es sich handelt, verbinde ihm die Augen, nimm seine rechte Hand und lege deren Zeigefinger unter den Mittelfinger. Lege eine Erbse auf den Tisch und führe die Hand des Freundes heran, damit er sie mit gekreuzten Fingerspitzen betastet. Frage ihn, wieviel Kugeln er mit den Fingern erfaßt hat. Ohne zu zögern antwortet er: zwei.
Wie kommt diese Täuschung des Tastsinnes zustande?
Wenn wir einen Körper mit zwei Fingern, zum Beispiel Daumen und Zeigefinger, betasten, so geschieht dies im allgemeinen mit den einander zugekehrten Flächen der beiden Finger. Das Betasten mit zwei einander zugekehrten Flächen vermittelt uns den richtigen Eindruck, hier also vom Vorhandensein einer Erbse. Bei gekreuzten Fingerspitzen jedoch berühren wir die Erbse mit zwei Fingerflächen, die sich sonst nicht gegenüberstehen. Infolgedessen glauben wir zwei verschiedene Erbsen zu fühlen.



Bei dieser Fingerstellung glaubt man zwei Erbsen zu berühren

Grüne Blätter weiß gemacht

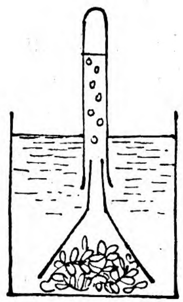
In ein Reagenzglas oder in eine kleine Flasche legen wir einige grüne Blätter oder Grashalme und füllen Brennspiritus auf. Das Glas wird mit einem Korken verschlossen und bleibt über Nacht stehen.
Ziehen wir am nächsten Morgen die Blätter und Gräser aus der Flasche, so stellen wir fest, daß sie entfärbt sind und weiß aussehen. Dafür hat der Spiritus eine grüne Farbe angenommen.
Die grünen Blätter, Gräser und Halme enthalten also einen Farbstoff, der sich in Spiritus löst. Er wird Chlorophyll (Blattgrün) genannt.
Wir gießen auf den grüngefärbten Spiritus ein wenig Benzin, verschließen das Glas mit dem Daumen und schütteln die Flüssigkeit durch. Nach dem Schütteln steigt das Benzin wieder nach oben, denn es ist leichter als Spiritus. Die Benzinschicht liegt deutlich getrennt über dem Spiritus. Jetzt ist das Benzin kräftig grün gefärbt, während der Spiritus eine gelbliche Farbe angenommen hat. Daraus ist zu erkennen, daß Chlorophyll aus verschiedenen Farbstoffen besteht, die sich auch durch ihre unterschiedliche Löslichkeit in Benzin und Spiritus unterscheiden.
Vorsicht mit Benzin und Spiritus! Stark feuergefährlich!
Für die Lebensvorgänge der Pflanze ist das Chlorophyll sehr wichtig. Die Pflanze nimmt mit den Wurzeln Wasser aus dem Boden auf, mit den Blättern Kohlendioxyd (Kohlensäuregas) aus der Luft. Aus Wasser und Kohlendioxyd bildet sie Zucker und Stärke. Dieser Vorgang, den die Chemie heute noch nicht nachahmen kann, findet nur in Anwesenheit von Chlorophyll und Licht statt.
Chlorophyll bildet sich in der Pflanze nur unter Einwirkung von Licht. Wo das Licht fehlt, gibt es kein Blattgrün. Deshalb sehen die Keime, die im Frühjahr aus den eingekellerten Kartoffeln wachsen, weiß aus. Aus dem gleichen Grund sind auch die inneren Blätter der Salatstauden nicht grün, sondern fast weiß.
Nichtgrüne Pflanzen, wie zum Beispiel Pilze, sind nicht in der Lage, Zucker und Stärke selbst zu erzeugen. Pilze sind Faulstoffbewohner,

die ihre Aufbaustoffe aus faulendem Holz und dem Laub des Waldbodens entnehmen.
Mensch und Tier müssen den notwendigen Zucker und die Stärke fix und fertig mit der Nahrung aufnehmen.

Eine Pflanze erzeugt Sauerstoff

Zum Versuch brauchen wir eine Handvoll Wasserpest. Das ist eine Wasserpflanze, die man in vielen Teichen und Flüssen findet und die bei jedem Aquarienhändler zu haben ist.
Die Pflanzen werden in ein Einweckglas gelegt und mit frischem Wasser übergossen. Dann wird ein Trichter aufgelegt, dessen Ausflußrohr noch einige Zentimeter unter dem Wasserspiegel liegen muß. Wir füllen ein Reagenzglas oder ein Arzneifläschchen bis zum Rand mit Wasser und verschließen es mit dem Daumen. Die Öffnung des Glases wird unter Wasser gehalten, der Daumen von der Öffnung genommen und das Glas über das Trichterrohr gestülpt.
Setzen wir unser Glas den Sonnenstrahlen aus, so lösen sich von der Pflanze Gasbläschen. Sie steigen an der Trichterwandung hoch und sammeln sich im Reagenzglas, so daß in ihm das Wasser mehr und mehr nach unten gedrängt wird. Nach wenigen Stunden haben sich einige Kubikzentimeter Gas angesammelt.
Wir verschließen unter Wasser mit dem Daumen die Öffnung des Glases und nehmen es heraus. Jetzt geben wir die Öffnung frei und halten sofort einen dünnen glimmenden Holzspan in das aufgefangene Gas. Im gleichen Augenblick flammt der Span hell auf und brennt mit hell leuchtender Flamme. Daran erkennt der Chemiker den Sauerstoff, denn das im Reagenzglas aufgefangene Gas ist also Sauerstoff.
Im Wasser ist meist etwas Kohlendioxyd (Kohlensäuregas) gelöst, das ihm den frischen Geschmack gibt. Bei Sonnenbestrahlung nimmt die Wasserpest das Gas auf und setzt es gemeinsam mit Wasser zu Zucker

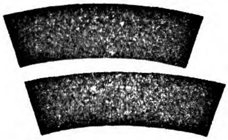
und Stärke um. Durch diese chemische Reaktion wird Sauerstoff frei, den die Wasserpest ausscheidet.
Alle grünen Pflanzen nehmen im Sonnenlicht Kohlendioxyd aus der Luft oder aus dem Wasser auf und geben Sauerstoff ab. Grünanlagen, Wälder und Wiesen erzeugen also im Sonnenschein sehr viel Sauerstoff, den Mensch und Tier zum Leben brauchen. Diese nehmen beim Atmen Sauerstoff auf und atmen Kohlendioxyd aus.



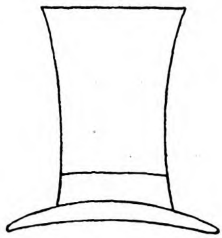
OPTISCHE TÄUSCHUNGEN

Beim Betrachten bestimmter Zeichnungen oder Bilder macht unser Auge gelegentlich Feststellungen, die sich beim Nachprüfen als falsch erweisen. Da erscheint eine Strecke deutlich kleiner als eine andere, obwohl beide Strecken gleich groß sind. Oder es liegen zwei Strecken scheinbar schief zueinander, obwohl sie tatsächlich genau parallel zueinander verlaufen. Wir sehen in bestimmten Bildern graue Punkte oder einen niederrieselnden Punktregen oder Farben, die in Wirklichkeit nicht aufgezeichnet sind, und vieles andere mehr.
Solche Wahrnehmungsstörungen unseres Auges werden als optische Täuschungen bezeichnet. Sie zu erklären ist verwickelt und schwierig; einige konnten von der Forschung auch bis heute noch nicht restlos ergründet werden. Oft ist die Gesamtheit der im Bild gezeigten Dinge maßgeblich mitbestimmend für den Eindruck, den irgendeine Einzelheit dieses Bildes beim Betrachter erweckt.
Wenn wir eine Reihe von optischen Täuschungen zeigen, so wollen wir sie und ihre Merkwürdigkeiten lediglich kennenlernen und uns daran erfreuen. Erklären können wir sie nicht in allen Fällen.

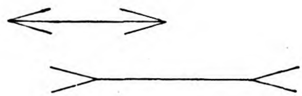
Größentäuschungen



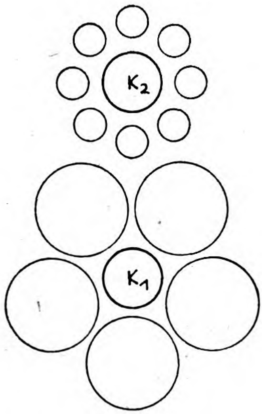
Welche der beiden Figuren ist die größere? Die untere? – Durch Nachmessen und vor allem durch Ausschneiden und Aufeinanderlegen der nachgezeichneten Figuren kann man sich leicht überzeugen, daß beide gleich groß sind



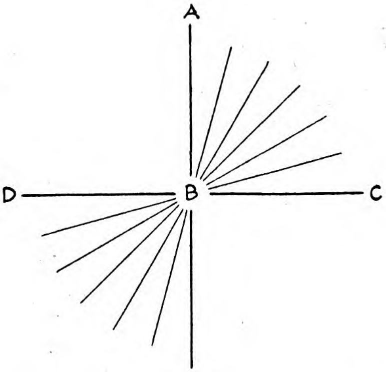
Dieser etwas altmodische Zylinderhut scheint viel höher als breit zu sein. Der Durchmesser der Hutkrempe ist jedoch genauso groß wie die Höhe des Hutes



Hier sind zwei Strecken gleich groß gezeichnet. Infolge der unterschiedlichen Fiederung der Streckenenden erscheint die obere Strecke kleiner als die untere

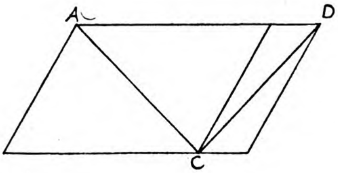


Betrachte die beiden Kreise K_1 und K_2. Welcher von beiden ist der größere? Der von 8 kleineren umgebene erscheint größer als der von 5 größeren umgebene. In Wirklichkeit sind die beiden Kreise K_1 und K_2 gleich groß. Die Umgebung hat hier offensichtlich Einfluß auf unsere Schätzung.

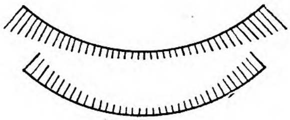


Sind die beiden Winkel A B C und A B D gleich groß? – Der von Linien durchsetzte Winkel A B C scheint etwas größer als 90° zu sein und A B D entsprechend kleiner. A B steht jedoch senkrecht auf D C

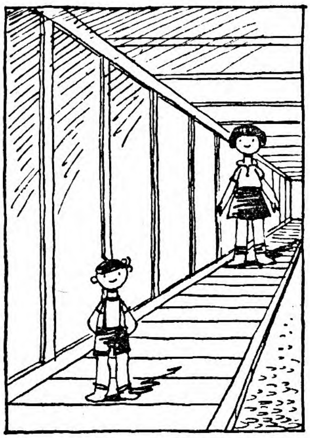
Welcher Buchstabe ist der größere? Doch wohl der linke? – Beide Buchstaben sind gleich groß. Anscheinend kommt uns der linke Buchstabe nur deshalb größer vor, weil er von einem Kreis umgeben ist



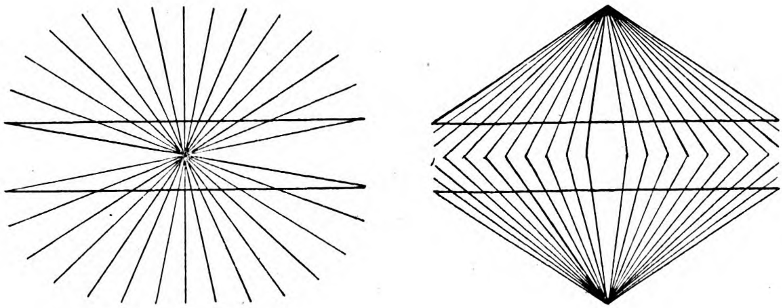
Die Diagonale A C des linken Parallelogramms erscheint größer als die Diagonale CD des rechten Parallelogramms. Beide sind jedoch gleich groß. Dieser Schätzungsfehler beruht wahrscheinlich darauf, daß wir im Unterbewußtsein aus der größeren Breite des linken Parallelogramms auf eine größere Diagonale A C schließen



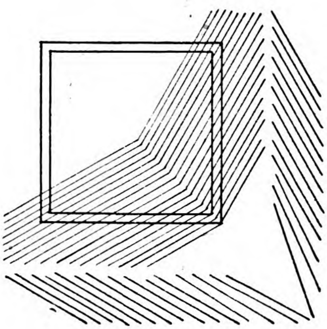
Welcher Kreisbogen ist größer? Offensichtlich der obere! – In Wirklichkeit sind beide Kreisbogen gleich groß. Der Eindruck einer scheinbar unterschiedlichen Größe wird durch die verschiedenartige Fiederung verursacht



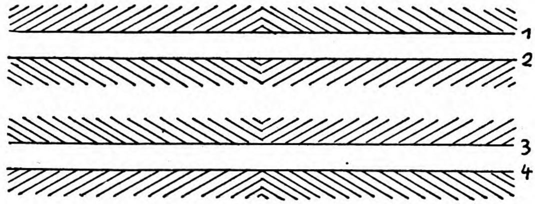
Hier besteht wohl kein Zweifel. Das Mädel ist viel größer als der Junge! Beide sind jedoch gleich groß und breit gezeichnet. Lediglich weil das Mädel in dem mit perspektivischer Verkürzung gezeichneten Tunnelgang fast bis zur Decke reicht, schließen wir, daß es etwa doppelt so groß wie der Junge ist



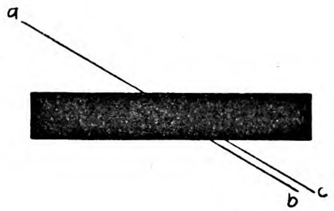
Sind die beiden waagrechten Linien parallel? Sie scheinen doch an ihren Enden etwas gekrümmt zu sein? Im linken Bild einwärts, im rechten auswärts? – Blickt von links oder rechts in die schräg abwärts gehaltene Zeichnung! Zielt dabei – das eine Auge zukneifend – an den Linien entlang! Ihr stellt fest, daß die Linien parallel zueinander verlaufen



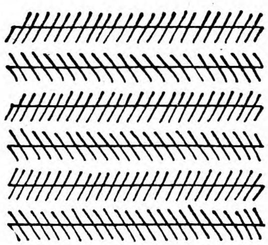
Hier ist wohl ein Quadrat etwas schief geraten? Bei der rechten unteren Ecke stimmt doch etwas nicht? – Das Quadrat ist genau gezeichnet. Der falsche Eindruck entsteht durch die beigefügten Linien



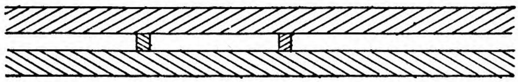
Hier hat man den Eindruck, daß die Linien 1, 2, 3, 4 jeweils in der Mitte etwas geknickt sind. Sie verlaufen aber parallel. Wenn man mit dem Auge an den Linien entlangzielt, kann man es leicht feststellen



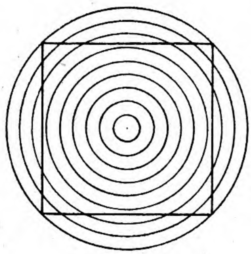
Die Nadel a sticht durch das schwarze Rechteck hindurch. Was ist die Verlängerung von a? b oder c? Hast du dich für b entschieden? – Nimm das Lineal und prüfe nach!



Kaum zu glauben! Die gefiederten Strecken liegen parallel zueinander

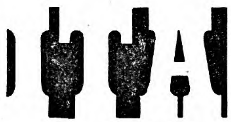


Die beiden Balken scheinen rechts näher aneinanderzuliegen als links, obwohl die entsprechenden Linien parallel verlaufen

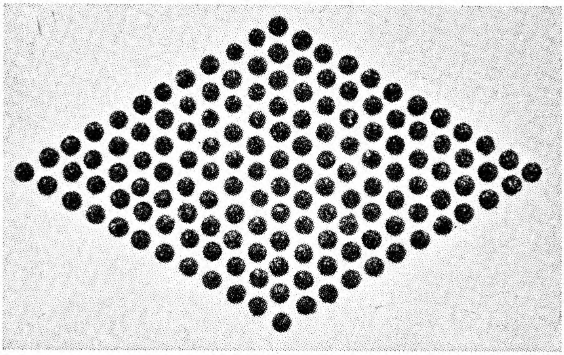


Die Seiten dieses Quadrates scheinen in der Mitte etwas einwärts gebogen zu sein. Sie sind aber geradlinig

Wechselnder Bildeindruck

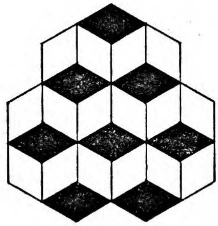


Was sind das für seltsame schwarze Figuren? Kaum zu ergründen. Wenn ihr auf die weißen Lücken schaut, so lest ihr plötzlich das Wort „ITA“ in weißen Lettern auf schwarzem Untergrund. Blickt ihr wieder auf eine der schwarzen Figuren, so verschwindet „ITA“. Je nachdem, ob wir auf Weiß oder Schwarz sehen, vermittelt das Bild verschiedene Eindrücke (Aus: H. Schober, Das Sehen, Fachbuchverlag Leipzig)

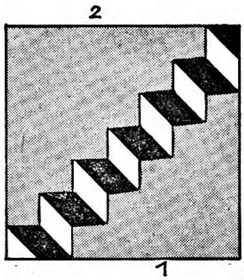


Betrachten wir dieses Bild in der Nähe, so erkennen wir, daß hier viele gleich große schwarze Kreise gezeichnet sind.
Aus einer Entfernung von 1 m hingegen sehen wir weißumrandete Sechsecke, die wie Honigwaben aneinandergefügt sind

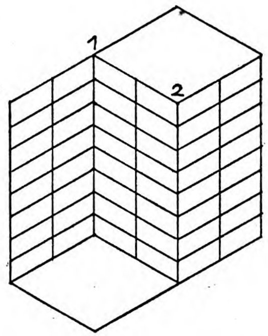
Auf schwarzem Untergrund ist hier in Weiß ein Pokal gezeichnet. Richtet man seine Aufmerksamkeit auf das Schwarz, so erblickt man zwei gleichartige Schattenrisse eines Kopfes. Der Bildeindruck springt, beziehungsweise wechselt immer, je nachdem man vom Weißen auf das Schwarze oder umgekehrt hinschaut



Wieviel Würfel sind hier zu sehen, sechs oder sieben? Je nachdem, ob man die Mehrzahl der schwarzen als Deckfläche oder Grundfläche vom Würfel auffaßt, erblickt man sechs beziehungsweise sieben Würfel



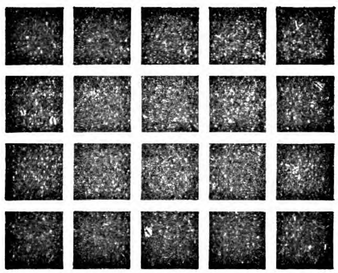
Was stellt diese Zeichnung dar? Je länger wir das Bild betrachten, um so unsicherer werden wir. Plötzlich sehen wir etwas anderes als eben zuvor. Einmal sehen wir eine Treppe, deren Stufen von links unten nach rechts oben ansteigen. Dabei sind die schwarzen Flächen die Deckflächen der Stufen; die graue Fläche 1 steht dabei im Raum weiter vorn als die ebenfalls graue Fläche 2.
Unvermittelt haben wir dann den Eindruck, als stehe Fläche 2 weiter vorn als Fläche 1. Das ist immer der Fall, wenn wir nach der linken oberen Ecke der Zeichnung blicken. Wir sehen dann gewissermaßen eine Treppe von unten. Unser Bildeindruck wechselt, wenn wir nach der rechten unteren Ecke und dann nach der linken oberen Ecke des Bildes schauen.
Schließlich taucht noch ein dritter Bildeindruck auf. Dabei bilden die Flächen 1 und 2 den gemeinsamen Untergrund, auf dem ein in Zick-Zack-Linie rechtwinklig gefalztes Band liegt



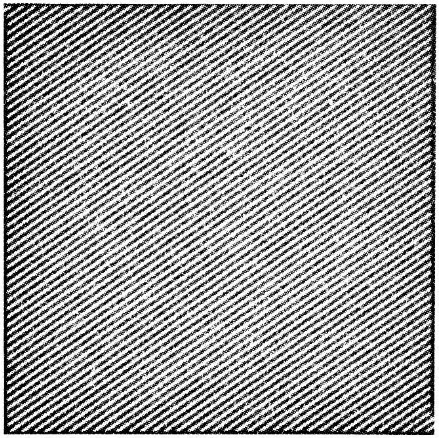
Welche Kante in der Zeichnung liegt räumlich am weitesten vorn? Die Kante 1 oder 2?

Das läßt sich nicht eindeutig entscheiden. Blickt man auf Kante 2, so scheint diese am weitesten vorn zu stehen. Richtet man den Blick jedoch auf Kante 1, so „klappt" der Bildeindruck um, und jetzt scheint sich die Kante 1 im Vordergrund zu befinden

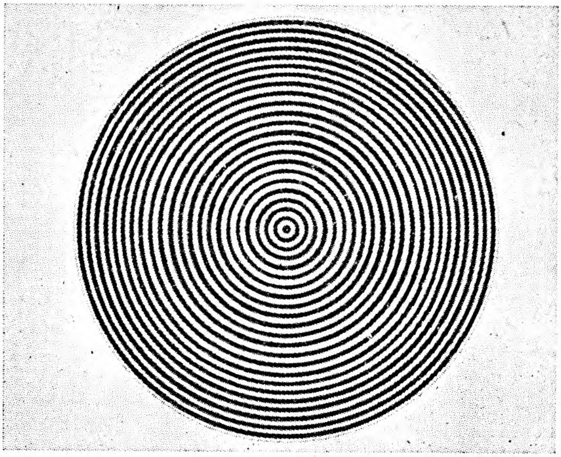
Auftauchen und Verschwinden



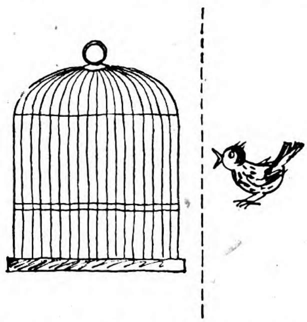
An den Kreuzstellen der weißen Linien dieser Zeichnung sehen wir graue Punkte. Wollen wir einen von ihnen genauer betrachten, so verschwindet er im gleichen Augenblick, in dem wir unseren Blick auf ihn richten. Wir sehen immer nur diejenigen grauen Punkte, die etwas abseits unserer Blickrichtung liegen. Diese deutlich sichtbaren grauen Punkte sind im Bild keineswegs eingezeichnet, sie werden uns durch einen Abbildungsfehler unseres Auges lediglich vorgetäuscht



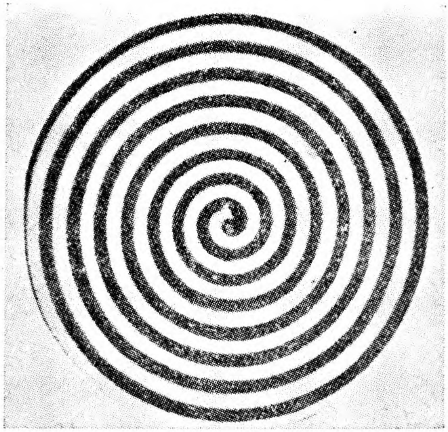
Blicke auf diese Zeichnung. Schon nach etwa fünf Sekunden fängt es in ihr an zu schneien. Eine Menge von kleinen weißen Punkten rieselt langsam von links oben nach rechts unten und erinnert an Schneegestöber. Wenn die Zeichnung um 90° gedreht wird, schneit es von rechts oben nach links unten. Diese optische Täuschung beruht ebenfalls auf einem Abbildungsfehler unseres Auges. Man soll dieses „Schneegestöber“ nicht allzu lange betrachten, denn das Auge wird dabei angestrengt



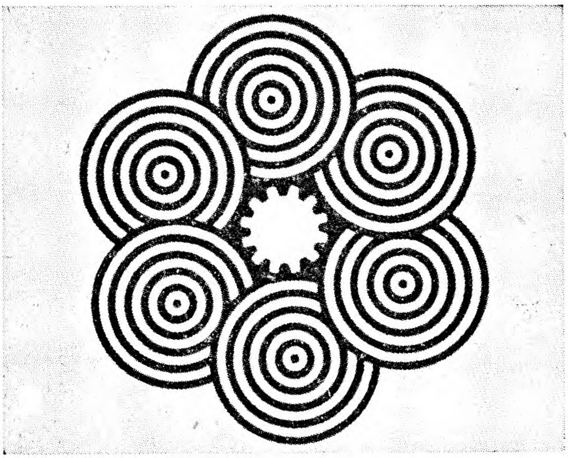
Wenn du beim Betrachten dieses Bildes mit dem Buch langsam kleine Kreise beschreibst, so dreht sich auch im Bild etwas. Scheinbar rotiert ein ganzer Bezirk von Kreisdurchmessern. Die beobachtete Drehung im Bild erfolgt in der gleichen Richtung, in der auch das Buch gedreht wird



Stelle längs der gestrichelten Linie eine Postkarte oder ein entsprechendes Blatt Papier senkrecht auf die Zeichnung. Berühre diese Scheidewand mit der Nasenspitze. Dann siehst du mit dem linken Auge nur den Käfig, mit dem rechten nur den Vogel. Machst du beide Augen gleichzeitig auf, so scheinen die beiden Bilder zu *einem* zu verschmelzen. Dabei schwebt der Vogel langsam in den Käfig hinein

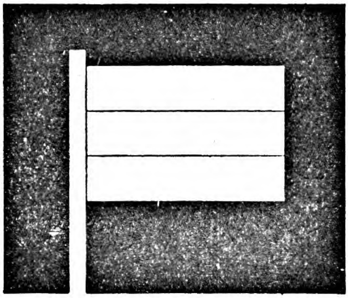


Diese optische Täuschung sieht man oft an Maschinen zur Herstellung von Speiseeis. Zeichnet eine solche Spirale auf Karton und versetzt sie auf einer Stecknadel in Drehung. Eine seltsame Erscheinung wird sichtbar: Beim Linksherumdrehen wickelt sich die Spirale scheinbar nach innen zusammen. Beim Rechtsherumdrehen wickelt sie sich nach außen auf



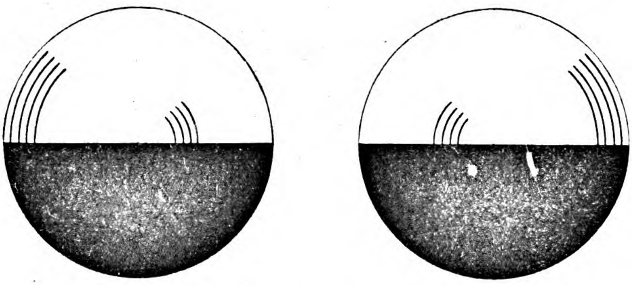
Auch beim Ansehen dieses Bildes wollen wir mit dem Buch kleine Kreise beschreiben. In allen sechs Kreisgruppen beobachten wir die gleiche Bewegung wie in der oberen Zeichnung auf Seite 170. Außerdem dreht sich das Zahnrad in der Mitte, und zwar stets entgegengesetzt zur Drehrichtung des Buches. Je schneller wir das Buch bewegen, desto deutlicher wird die scheinbare Bewegung im Bild

Vorgetäuschte Farben



Zeichne die Abbildung nach und male das mittlere Feld der Fahne grün, das untere violett an. Das obere Feld bleibt weiß. Blicke dann 10 Sekunden lang starr auf die Diagonalmitte der Fahne und dann sofort auf eine weiße Fläche. Nach etwa zwei Sekunden erscheint eine Fahne mit den Farben Schwarz-Rot-Gold. Erst nach rund 10 Sekunden verschwindet sie wieder.

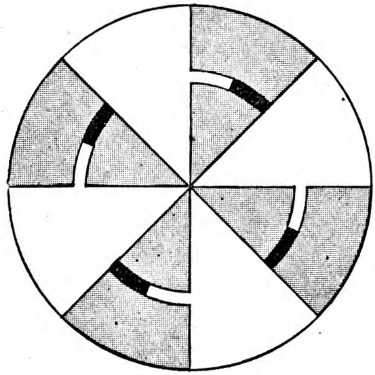
Die Erscheinung beruht auf einer Farbenermüdung der Sehnerven, die sich bei längerem Betrachten eines farbigen Bildes einstellt. Wechselt dann der Blick auf eine weiße Fläche, werden jeweils die sogenannten Komplementärfarben sichtbar. Die angestrengten Netzhautstellen empfinden zunächst nur diejenigen in Weiß enthaltenen Farben, für die sie nicht ermüdet sind

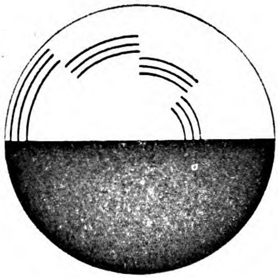


Wir zeichnen diese beiden Abbildungen auf weißen Karton und schneiden sie aus. Durch den Kreismittelpunkt wird eine Stecknadel gestochen, die mit der linken Hand gehalten wird. Durch Anschlagen mit einem Finger der rechten Hand läßt man die Scheibe auf der Nadelachse rotieren. Bei *langsamer* Drehung im Schein einer elek-

trischen Lampe (Schreibtischlampe) treten verblüffende Farben auf. Beim Rechtsdrehen des linken Modells sehen wir außen blaue, innen rote Kreise.
Ändern wir die Drehrichtung, so schlagen auch die Farben um. Beim Linksdrehen erscheinen dann außen rote und innen blaue Kreise.
Das rechte Modell zeigt beim Rechtsdrehen außen rote, innen blaue Kreise

Wir zeichnen diese Figur viermal auf weißen Karton, schneiden sie aus und malen die grauen Flächen 1. blau, 2. gelb, 3. grün, 4. rot an. Durch den Kreismittelpunkt wird eine Stecknadel gestochen. Versetzen wir die Scheibe in Drehung, so erscheint auf der 1. Scheibe außer blau ein gelber Kreisring, auf der 2. außer gelb ein violetter, auf der 3. außer grün ein roter und auf der 4. außer rot ein grüner Ring





Mit dieser Scheibe erhält man außer Rot und Blau auch Grün und Gelb. Die Farben ändern sich ebenfalls beim Wechsel der Drehrichtung.
Nach dem Entdecker dieser Erscheinung werden die drei Schwarz-Weiß-Scheiben als Benham-Scheiben bezeichnet.
Für dieses Auftreten von Farben an reinen Schwarz-Weiß-Zeichnungen gibt es noch keine voll befriedigende wissenschaftliche Erklärung

INHALTSVERZEICHNIS

MATHEMATISCHE KNOBELEIEN

PHYSIKALISCHE VERSUCHE