

---

**N.N. Worobjow**

**Die Fibonaccischen Zahlen**

Übersetzung: Hartwig Quabeck  
1971 Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin  
MSB: Nr. 19  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2023

<https://mathematikalpha.de>

---

## Vorwort

In der elementaren Mathematik gibt es viele, manchmal schwierige und interessante Aufgaben, die nicht mit irgendeinem Namen verknüpft sind, sondern eher den Charakter einer Art "mathematischer Folklore" haben.

Solche Probleme finden sich in der umfangreichen populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur und in der mathematischen Unterhaltungsliteratur verstreut, indes ist oft sehr schwer festzustellen, in welcher Sammlung gerade das eine oder andere Problem erstmalig auftaucht.

Diese Aufgaben haben nicht selten einige Varianten; zuweilen lassen sich auch mehrere solcher Aufgaben zu einer einzigen, komplizierteren, vereinigen; umgekehrt zerfällt manchmal eine Aufgabe in mehrere einfachere.

Mit einem Wort - es ist oft schwierig, anzugeben, wo die eine Aufgabe endet und die andere anfängt. Richtiger wäre es vielleicht zu sagen, dass es sich bei jedem dieser Probleme um kleine mathematische Theorien handelt, die ihre eigene Geschichte, Problematik und Methode haben - welche natürlich mit der Geschichte, der Problematik und den Methoden der "großen Mathematik" eng zusammenhängen.

So verhält es sich auch mit der Theorie der Fibonaccischen Zahlen. Die Fibonaccischen Zahlen entstanden aus der nun schon fast 700 Jahre alten berühmten "Kaninchenaufgabe" und bilden auch heute noch eines der interessantesten Kapitel der Elementarmathematik.

Probleme, die mit den Fibonaccischen Zahlen zusammenhängen, findet man in vielen allgemeinverständlichen mathematischen Werken; sie werden in mathematischen Zirkeln der Schulen behandelt und den Teilnehmern mathematischer Olympiaden vorgelegt.

Das vorliegende Büchlein enthält eine Reihe von Problemen, die während des Studienjahres 1949/50 in einem mathematischen Zirkel für Schüler an der mit dem Leninorden ausgezeichneten Leningrader Staatlichen Shdanow-Universität bearbeitet worden sind. Den Wünschen der Teilnehmer des Zirkels entsprechend, wurde vor allem die zahlen-theoretische Seite dieser Frage behandelt, die auch in unserer Broschüre eingehender entwickelt wird.

Das Büchlein ist für Schüler der Oberklassen gedacht. Der Limesbegriff wird nur in den Punkten 7 und 8 von § 3 benutzt.

Leser, die mit diesem Begriff nicht vertraut sind, können sie ohne Nachteil für das Verständnis des Folgenden bei der Lektüre übergehen. Dasselbe gilt auch für die Binomialkoeffizienten (Punkt 8 von § 1) und die Trigonometrie (Punkte 2 und 3 von § 4). Die in dieser Broschüre behandelten Elemente der Teilbarkeitstheorie und der Theorie der Kettenbrüche setzen beim Leser keine über den Rahmen des Schulunterrichts hinausgehenden Vorkenntnisse voraus.

Lesern, die sich für die Struktur rekursiver Folgen interessieren, kann das kleine, aber inhaltsreiche Büchlein von A.I. Markuschewitsch "Rekursive Folgen" (erscheint in dieser Reihe) empfohlen werden. Leser, die mehr über Zahlentheorie wissen wollen, mögen entsprechende Kurse besuchen.

---

## **Vorwort zur zweiten russischen Ausgabe**

Die Entwicklung der Mathematik in den eineinhalb Jahrzehnten, die seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Büchleins verstrichen sind, zeigte neue Zusammenhänge zwischen der Theorie der Fibonaccischen Zahlen und anderen mathematischen Theorien.

Am interessantesten sind davon die "Fibonaccischen Pläne" der Suchtheorie, deren Beschreibung ein neuer Paragraph dieses Bändchens gewidmet ist. Zu bemerken ist dabei, dass die Lektüre dieses Paragraphen schwieriger ist als die des übrigen Textes. Jedoch erfordert auch er zu seinem Verständnis nur das Wissen, das in der Schule vermittelt wird.

Von den anderen Änderungen, die in dieser zweiten Auflage vorgenommen wurden, ist nur die Ergänzung des zweiten Beweises in § 3, Nr. 9, erwähnenswert.

N. N. Worobjow

## **Vorwort zur dritten russischen Ausgabe**

Im Laufe der letzten Jahre erhöhte sich das Niveau der mathematischen Vorbildung der sich für Mathematik interessierenden Schüler in erstaunlicher Weise. Daher hielt ich es für möglich, in die dritte Auflage des Bändchens einige kompliziertere Untersuchungen über die Teilbarkeit der Fibonaccischen Zahlen aufzunehmen.

Dies bedingte eine radikale Umarbeitung von § 2 und wesentliche Änderungen in § 1. Zur bequemeren Lektüre wurde der neu aufgenommene Stoff meistens durch Kleindruck gekennzeichnet, so dass der Leser, dem dieser Stoff zu schwierig erscheint, diese Stellen zunächst überschlagen kann. Übrigens wird wie früher für alle Überlegungen nicht mehr als das in der Schule vermittelte Wissen benötigt.

Ferner erfuhr der vierte Paragraph einige Ergänzungen. Außerdem wurden hier und da einige Änderungen stilistischer Art vorgenommen.

N. N. Worobjow

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Einfachste Eigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen</b>	<b>8</b>
<b>2 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen</b>	<b>29</b>
<b>3 Fibonacci'sche Zahlen und Kettenbrüche</b>	<b>58</b>
<b>4 Die Fibonacci'schen Zahlen und die Geometrie</b>	<b>70</b>
<b>5 Die Fibonacci'schen Zahlen und die Suchtheorie</b>	<b>77</b>

## Einleitung

1. Die Geschichte des Altertum ist reich an hervorragenden Mathematikern. Viele Ergebnisse der antiken Mathematik lassen uns heute noch den Scharfsinn ihrer Autoren bewundern, und Namen wie Euklid, Archimedes, Heron sind jedem Gebildeten bekannt.

Anders steht es mit der Mathematik im Mittelalter. Außer Vieta, der jedoch erst im 16. Jahrhundert lebte, und einigen später lebenden Mathematikern wird im Mathematikunterricht an den Schulen kaum ein Name eines Mathematikers aus dieser Zeit genannt.

Das ist natürlich kein Zufall. Die mathematische Wissenschaft entwickelte sich in dieser Epoche außerordentlich langsam, und es gab damals nur sehr wenige bedeutende Mathematiker.

Von um so größerem Interesse für uns ist daher das Werk "Liber abaci" des berühmten italienischen Mathematikers Leonardo von Pisa, der bekannter ist unter seinem Beinamen Fibonacci (Fibonacci: Abkürzung von filius Bonacci, d.h. Sohn des Bonacci). Dieses Buch, das im Jahre 1202 geschrieben wurde, ist uns in einer Abschrift aus dem Jahre 1228 erhalten geblieben. Das "Liber abaci" ist ein umfangreiches Werk, das fast das gesamte arithmetische und algebraische Wissen jener Zeit enthält.

Es spielte in der Entwicklung der Mathematik in Westeuropa im Laufe der folgenden Jahrhunderte eine bemerkenswerte Rolle. Insbesondere wurden durch dieses Buch die arabischen Ziffern in Europa bekannt.

Paare:	
1	
erster Monat:	Mit dem Inhalt des "Liber Abbaci" werden wir durch zahlreiche Aufgaben in dem vorliegenden Heftchen bekannt gemacht.
2	
zweiter Monat:	Wir wollen jetzt eine solche Aufgabe aus dem "Liber Abbaci" betrachten, die sich auf den Seiten 123 und 124 der Handschrift von 1228 findet.
3	
dritter Monat:	
5	
vierter Monat:	"Wieviel Kaninchenpaare werden in einem Jahr von einem Paar erzeugt?"
8	
fünfter Monat:	
13	
sechster Monat:	"Jemand sperrt ein Kaninchenpaar in ein allseitig ummauer- tes Gehege, um zu erfahren, wieviel Nachkommen dieses eine Paar im Laufe eines Jahres haben werde. Es wird dabei vor- ausgesetzt, jedes Kaninchenpaar bringe monatlich ein neues Paar zur Welt, und die Kaninchen würden vom zweiten Mo- nat nach ihrer Geburt an gebären.
21	
siebenter Monat:	
34	
achter Monat:	
55	
neunter Monat:	
89	
zehnter Monat:	Da das erste Paar noch im ersten Monat Nachkommen hat, sind in diesem Monat zwei Paare vorhanden. Von ihnen ge- biert ein Paar, nämlich das erste, auch im folgenden Monat, so dass also im zweiten Monat drei Paare vorhanden sind.
144	
elfter Monat:	
233	
zwölfter Monat:	
377	

Von diesen haben zwei Paare im folgenden Monat Nachkommen, so dass im dritten Monat schon zwei Kaninchenpaare geboren werden und die Gesamtzahl der Kaninchenpaare in diesem Monat auf fünf anwächst.

Drei dieser fünf Paare vermehren sich noch im gleichen Monat, und die Anzahl der Paare erreicht im vierten Monat acht.

Fünf davon erzeugen weitere fünf Paare, die zusammen mit den schon vorhandenen acht Paaren 13 Paare im fünften Monat ergeben.

Fünf dieser Paare haben im gleichen Monat keine Nachkommen, die übrigen acht Paare gebären.

Also sind im sechsten Monat 21 Paare vorhanden. Zusammen mit den 13 Paaren, die im siebenten Monat geboren werden, ergeben sich 34 Paare. Dazu kommen im achten Monat 21 Paare. Die Anzahl der Paare ist nun 89; sie wächst im zehnten Monat auf 144 an. Davon gehören im elften Monat 55 Paare nicht, so dass sich also in diesem Monat bei einem Zuwachs von 89 Paaren die Zahl der Paare auf 233 erhöht.

Schließlich vermehren sich hiervon im zwölften und letzten Monat 144 Paare, so dass also nach Ablauf eines Jahres 377 Paare vorhanden sind.

Mit Hilfe der Abbildung kann man sich noch einmal klarmachen, wie wir zu diesem Resultat kommen. Wir addieren nämlich die erste Zahl zur zweiten, d.h. 1 zu 2, die zweite zur dritten, die dritte zur vierten, die vierte zur fünften und so fort, bis wir die zehnte zur elften Zahl addieren und so die Gesamtzahl der erwähnten Kaninchenpaare, also 377, erhalten.

Wir können uns diesen Prozess schrittweise bis zu einer unendlichen Anzahl von Monaten fortgesetzt denken."

## 2. Verlassen wir nun die Kaninchen und betrachten eine Zahlenfolge

$$u_1, u_2, u_3, \dots \quad (1)$$

bei der jedes Glied gleich der Summe der zwei vorangehenden ist; d.h., für jedes  $n > 2$  gelte

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (2)$$

Solche Folgen, bei denen jedes Glied eine gewisse Funktion vorangehender Glieder ist, kommen in der Mathematik häufig vor; man nennt sie rekursive Folgen.

Den Prozess der Ermittlung der einzelnen Glieder dieser Folgen nennt man Rekursionsverfahren und eine Gleichung der Form (2) Rekursionsformel. Die Grundlagen der allgemeinen Theorie der rekursiven Folgen findet der Leser in dem schon erwähnten Büchlein von Markuschewitsch (siehe Vorwort).

Wir bemerken zunächst, dass die Glieder einer Folge (1) mit Hilfe der Formel (2) allein nicht eindeutig bestimmt werden können. Man kann beliebig viele verschiedene Zahlenfolgen auf- stellen, die alle der Bedingung (2) genügen, z.B.:

$$\begin{aligned} &2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots, \\ &1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots, \\ &-1, -5, -6, -11, -17, \dots \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die Bedingung (2) ist also zur eindeutigen Aufstellung der Folge (1) offensichtlich zwar notwendig, aber nicht hinreichend; wir müssen daher noch einige ergänzende Bedingungen angeben.

Man kann z.B. einige der ersten Glieder der Folge (1) vorgehen. Wie viele solcher Glieder müssen aber mindestens gegeben sein, damit man alle folgenden Glieder unter alleiniger Benutzung von (2) berechnen kann?

Wir finden, dass mit Hilfe von (2) nicht alle Glieder der Folge (1) zu ermitteln sind, schon allein deshalb, weil es nicht zu jedem Glied zwei vorangehende Glieder gibt. So steht vor dem ersten Glied der Folge überhaupt kein Glied der Folge, vor dem zweiten nur ein einziges, nämlich  $u_1$ .

Zur Berechnung von (1) mit Hilfe von (2) müssen wir also auf jeden Fall mindestens die ersten beiden Glieder der Folge kennen.

Das ist aber offensichtlich auch hinreichend, um jedes beliebige Glied der Folge (1) berechnen zu können. In der Tat lässt sich  $u_3$  als Summe der für  $u_1$  und  $u_2$  vorgegebenen Werte darstellen;  $u_4$  findet man durch Addition von  $u_2$  zu dem soeben bestimmten  $u_3$ ,  $u_5$  durch Addition der schon ermittelten Werte  $u_3$  und  $u_4$  usw., und so der Reihe nach beliebig viele Glieder.

Indem man auf diese Weise immer von zwei benachbarten Gliedern zum nächstfolgenden übergeht, kann man bis zu jedem Glied mit beliebig vorgegebenem Index gelangen und es ausrechnen.

**3.** Wir wenden uns jetzt dem wichtigen Spezialfall einer Folge (1) zu, bei welchem  $u_1 = 1$  und  $u_2 = 1$  sind. Die Bedingung (2) ermöglicht, wie soeben gezeigt wurde, die sukzessive Berechnung aller Glieder dieser Folge. Wie man leicht nachprüft, sind die ersten dreizehn Glieder die Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,$$

die uns schon bei der Lösung der Kaninchenaufgabe begegneten.

Zu Ehren des Verfassers dieser Aufgabe heißt nun die Folge (1) mit  $u_1 = u_2 = 1$  die *Fibonacci'sche Folge*, und ihre Glieder heißen *Fibonacci'sche Zahlen*.

Die Fibonacci'schen Zahlen besitzen nun eine ganze Reihe interessanter und wichtiger Eigenschaften, deren Untersuchung dieses Büchlein gewidmet ist.

# 1 Einfachste Eigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen

1. Wir berechnen zunächst die Summe der ersten  $n$  Fibonacci'schen Zahlen, indem wir beweisen, dass

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \quad (1.1)$$

ist. In der Tat gelten die Beziehungen

$$u_1 = u_3 - u_2$$

$$u_2 = u_4 - u_3$$

$$u_3 = u_5 - u_4$$

...

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

Durch gliedweise Addition aller dieser Gleichungen folgt

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

und wir brauchen nur noch daran zu erinnern, dass  $u_2 = 1$  ist.

2. Die Summe der Fibonacci'schen Zahlen mit ungeraden Indizes

$$u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n} \quad (1.2)$$

Zum Beweis dieser Gleichung schreiben wir

$$u_1 = u_2$$

$$u_3 = u_4 - u_2$$

$$u_5 = u_6 - u_4$$

...

$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

auf und erhalten durch gliedweise Addition dieser Gleichungen die Behauptung.

3. Die Summe der Fibonacci'schen Zahlen mit geraden Indizes ist

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \quad (1.3)$$

Auf Grund von Abschnitt 1 gilt

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

Subtrahieren wir davon die Gleichung (1.2) gliedweise, so erhalten wir

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$



was zu beweisen war.

Subtrahieren wir ferner gliedweise (1.3) von (1.2), so folgt

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \quad (1.4)$$

Wir addieren jetzt auf beiden Seiten dieser Gleichung  $u_{2n+1}$ :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \quad (1.5)$$

Als Ausdruck für die alternierende Summe der Fibonacci'schen Zahlen erhalten wir aus (1.4) und (1.5) den folgenden:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{m+1}u_m = (-1)^{m+1}u_{m-1} + 1 \quad (1.6)$$

Der Ausdruck (1.6) stimmt nämlich für ungerade  $m$ ,  $m = 2n + 1$ , mit (1.5), für gerade  $m$ ,  $m = 2n$ , mit (1.4) überein.

**4.** Die Formeln (1.1) und (1.2) wurden durch gliedweise Addition einer Anzahl trivialer Identitäten gewonnen. Als weiteres Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens möge die Ableitung der Formel für die Summe der Quadrate der ersten  $n$  Fibonacci'schen Zahlen dienen:

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \quad (1.7)$$

Wir bemerken, dass

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

ist. Addieren wir nun die Identitäten

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1 u_2 \\ u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\ &\dots \\ u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n \end{aligned}$$

so erhalten wir (1.7).

**5.** Viele Beziehungen zwischen den Fibonacci'schen Zahlen lassen sich bequem durch vollständige Induktion beweisen.

Das Wesen der Methode der vollständigen Induktion<sup>1</sup> (die oft auch als Methode der mathematischen Induktion bezeichnet wird) besteht in folgendem: Zum Beweis dafür, dass eine gewisse Aussage für jede natürliche Zahl zutrifft, genügt es zu zeigen:

a) dass sie für die Zahl 1 gilt;

b) dass unter der Annahme, die Aussage gelte für eine beliebig vorgegebene natürliche

---

<sup>1</sup>Vgl. auch das in derselben Reihe erscheinende Heft: I.S. Sominski, "Die Methode der vollständigen Induktion".

Zahl  $n$ , stets auch ihre Gültigkeit für die Zahl  $n + 1$  folgt.

Der Induktionsbeweis einer Behauptung, die für jede natürliche Zahl gelten soll, zerfällt also in zwei Teile. Im ersten (meist verhältnismäßig einfachen) Teil weist man die Gültigkeit der Behauptung für die Zahl 1 nach.

Die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage für die Zahl 1 wird manchmal die Basis der Induktion genannt.

Im zweiten Teil des Beweises, der in der Regel bedeutend schwieriger ist, nimmt man an, die Behauptung gelte für eine ganz beliebige (aber fest gewählte) Zahl  $n$ , und folgert aus dieser Annahme, der sogenannten Induktionsannahme, dass die Behauptung auch für die Zahl  $n + 1$  richtig ist. Den zweiten Teil des Beweises bezeichnet man auch als Induktionsschluss (Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ ).

Eine eingehendere Darstellung der Methode der vollständigen Induktion und zahlreiche Beispiele für ihre Anwendung findet man in der schon erwähnten Broschüre von I. S. Sominski. So wird insbesondere die nachstehend angewandte Variante der Methode der vollständigen Induktion mit dem Schluss "von  $n$  und  $n + 1$  auf  $n + 2$ " in der Broschüre von Sominski durch die Aufgaben 18 und 19 illustriert.

Manchmal wird auch eine Induktion "von allen Zahlen, die kleiner als  $n$  sind, auf  $n$ " verwendet. Dabei ist es nicht notwendig, die Basis der Induktion besonders zu beweisen, da, formal gesprochen, der Beweis für  $n - 10$  genau der Übergang von "allen" positiven ganzen Zahlen  $< 1$  (die es gar nicht gibt) auf 1 ist.

Mit diesem Verfahren lässt sich beweisen, dass sich jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt.

Wir setzen voraus, dass sich alle Zahlen, die kleiner als ein gewisses  $n$  sind, in ein Produkt von Primfaktoren zerlegen lassen. Ist  $n$  eine Primzahl, so ist sie selbst eine Zerlegung von sich. Ist  $n$  keine Primzahl, so kann sie nach Voraussetzung als Produkt von mindestens zwei Faktoren geschrieben werden, etwa  $n = n_1 n_2$  mit  $n_1 \neq 1$  und  $n_2 \neq 1$ . Dann ist  $n_1 < n$  und  $n_2 < n$ . Nach Induktionsvoraussetzung lassen sich sowohl  $n_1$ , als auch  $n_2$  in Primfaktoren zerlegen. Somit ist auch  $n$  in Primfaktoren zerlegbar. Eine kompliziertere Variante des Induktionsbegriffs liegt dem Beweis des Satzes in § 2, Nr. 36, zugrunde.

**6.** Eine der einfachsten Anwendungen der Idee der vollständigen Induktion auf die Fibonacci'schen Zahlen ist die Definition der Fibonacci'schen Zahlen selbst. Die Definition dieser Zahlen erfolgt, wie wir in der Einleitung erklärten, durch Vorgabe der ersten beiden Fibonacci'schen Zahlen  $u_1 = 1$  und  $u_2 = 1$  und durch induktiven Übergang von  $u_n$  und  $u_{n+1}$  auf  $u_{n+2}$ , der durch die Rekursionsformel

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

beschrieben wird.

Insbesondere folgt hieraus sofort, dass eine Folge, bei der die ersten beiden Glieder gleich 1 sind und sich jedes der folgenden Glieder durch Addition der beiden vorhergehenden ergibt, eine Fibonacci'sche Folge sein muss.

Als Beispiel dazu wollen wir die sogenannte "Springer-Aufgabe" untersuchen. Ein Springer soll sich in einer Richtung längs eines in Felder aufgeteilten Streifens bewegen, indem er sich bei jedem Sprung entweder in ein benachbartes Feld begibt oder über das Feld herüberspringt.

Auf wieviel Arten gelangt er zu dem  $(n - 1)$ -ten Feld oder insbesondere vom ersten zum  $n$ -ten Feld? (Wir wollen jene Sprünge als gleich ansehen, bei denen der Springer in dieselben Felder kommt.)

Die gesuchte Zahl bezeichnen wir mit  $x_n$ . Offenbar ist  $x_1 = 1$  (denn der Übergang vom ersten Feld zum ersten Feld lässt sich nur auf eine Art verwirklichen, nämlich durch Verzicht auf den Sprung) und  $x_2 = 1$  (der Übergang von ersten zum zweiten Feld ist ebenfalls nur auf eine Art möglich, und zwar ist es der eine Sprung auf das benachbarte Feld).

Wir nehmen nun an, der Springer beabsichtige, das  $(n + 2)$ -te Feld zu erreichen. Die Gesamtanzahl der Sprünge ist hierbei nach Definition gleich  $x_{n+2}$ .

Diese Sprünge lassen sich nun in zwei Klassen einteilen: in die mit dem Sprung in das zweite Feld beginnende und die mit dem Sprung in das dritte Feld beginnende Klasse. Aus dem zweiten Feld kann der Springer auf  $x_{n+1}$  Arten zum  $(n + 2)$ -ten Feld gelangen, aus dem dritten Feld auf  $x_n$  Arten.

Also genügt die Folge der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  der Rekursionsformel

$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

und stimmt daher mit der Folge der Fibonacci'schen Zahlen überein; es ist also  $x_n = u_n$ .

**7.** Wir beweisen nun durch Induktion die folgende wichtige Formel:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1} \quad (1.8)$$

Der Beweis dieser Formel wird durch Induktion nach  $m$  geführt. Für  $m = 1$  hat unsere Formel die Gestalt

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_nu_2 = u_{n-1} + u_n$$

was trivialerweise richtig ist. Für  $m = 2$  ist die Gleichung (1.8) wegen

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_nu_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n$$

ebenfalls richtig. Damit ist der erste Teil des Beweises erbracht. Den Induktionsschluss führen wir nun in folgender Form:

Unter der Annahme, die Formel (1.8) sei für  $m = k$  und für  $m = k + 1$  richtig, beweisen wir, dass sie auch für  $m = k + 2$  gilt. Es sei also

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1} \quad \text{und} \quad u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_nu_{k+2}$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen gliedweise, so erhalten wir

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_nu_{k+3}$$

was zu zeigen war.

Die Formel (1.8) lässt sich leicht mit Hilfe der Springer- Aufgabe interpretieren (und sogar beweisen).

Die Gesamtzahl der Sprünge vom ersten ins  $(n + m)$ -te Feld ist nämlich gleich  $u_{n+m}$ . Unter diesen Sprüngen sind sowohl solche, bei welchen der Springer über das  $n$ -te Feld hinüberspringt, als auch solche, bei denen er auf das  $n$ -te Feld springt.

Bei den Sprüngen der ersten Klasse ist der Springer verpflichtet, das  $(n - 1)$ -te Feld zu erreichen (er kann dies auf  $u_{n-1}$  Arten tun), dann springt er auf das  $(n + 1)$ -te Feld und schließlich auf die übrigen  $(n + m) - (n + 1) = m - 1$  Felder (das ist auf  $u_m$  Arten zu verwirklichen).

Folglich zählt die erste Klasse  $u_{n-1}u_m$  Möglichkeiten.

Analog erreicht der Springer bei den Sprüngen der zweiten Klasse das  $n$ -te Feld (das ist auf  $u_n$  Arten möglich), wonach er zum  $(n + m)$ -ten Feld übergeht (auf eine der  $u_{m+1}$  Arten). Also gibt es in der zweiten Klasse  $u_nu_{m+1}$  Möglichkeiten, womit Formel (1.8) bewiesen ist.

**8.** Setzen wir in der Formel (1.8)  $m = n$ , so ergibt sich

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_nu_{n+1} \quad \text{oder} \quad u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \quad (1.9)$$

Aus (1.9) erkennt man, dass  $u_{2n}$  durch  $u_n$  teilbar ist. Im folgenden Paragraphen beweisen wir eine viel allgemeinere Aussage. Wegen

$$u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

kann man die Gleichung (1.9) auch in folgender Gestalt schreiben

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) \quad \text{oder} \quad u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

das heißt aber, dass die Differenz der Quadrate zweier Fibonaccischer Zahlen, deren Indizes sich um 2 unterscheiden, wieder eine Fibonaccische Zahl ist. Analog beweist man

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

(indem man  $m = 2n$  setzt).

**9.** Im folgenden wird uns die Formel

$$u_{n+1}^2 = u_nu_{n+2} + (-1)^n \quad (1.10)$$

sehr nützlich sein. Wir beweisen sie durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  nimmt die Gleichung (1.10) die Form

$$u_2^2 = u_1u_3 - 1$$

an, und das ist offenbar richtig. Wir nehmen nun die Formel (1.10) für ein gewisses  $n$  als bewiesen an. Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl  $u_nu_{n+1}$  und erhalten

$$u_n^2 + u_nu_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + u_nu_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

oder

$$u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}$$

oder

$$u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

und schließlich

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2}$$

Damit ist der Induktionsschluss geführt und die Formel (1.10) für jedes natürliche  $n$  bewiesen.

**10.** Ganz analog wie die soeben bewiesenen Eigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen bestätigt man auch die folgenden:

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \dots + u_{2n-1} u_{2n} &= u_{2n}^2 \\ u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \dots + u_{2n} u_{2n+1} &= u_{2n+1}^2 - 1 \\ n u_1 + (n-1) u_2 + (n-2) u_3 + \dots + 2 u_{n-1} + u_n &= u_{n+4} - (n+3) \\ u_1 + 2 u_2 + 3 u_3 + \dots + n u_n &= n u_{n+2} - u_{n+3} + 2 \end{aligned}$$

Die Beweise möge der Leser selbst führen.

**11.** Nicht weniger bemerkenswert als die Fibonacci'schen Zahlen sind die sogenannten "Binomialkoeffizienten".

Die Koeffizienten von  $x$  in der Entwicklung von  $(1+x)^n$ , also

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \quad (1.11)$$

heißen Binomialkoeffizienten. Offenbar sind die Zahlen  $\binom{n}{k}$  für alle positiven  $n$  und alle nichtnegativen ganzen  $k < n$  eindeutig bestimmt.

Die Benutzung von Binomialkoeffizienten ist bei vielen mathematischen Überlegungen überaus nützlich. Wir werden uns auch beim Studium der Fibonacci'schen Zahlen ihrer bedienen. Außerdem besteht zwischen den Binomialkoeffizienten und den Fibonacci'schen Zahlen ein gewisser Zusammenhang, und wir werden einige Gesetzmäßigkeiten angeben, die diesen beiden Klassen von Zahlen eigen sind.

Zur Vorbereitung geben wir einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten an.

Wir setzen in (1.11)  $n = 1$  und finden sofort

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

Außerdem gilt folgendes Lemma.

Lemma: Es ist

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Beweis. Es gilt

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

oder, wenn wir die Definition der Binomialkoeffizienten benutzen,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} &= \\ &= \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] (1+x) \\ &= \binom{n}{0} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right]x + \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right]x^2 + \dots + \left[ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right]x^n + \binom{n}{n}x^{n+1} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} &= \binom{n}{0} \\ \binom{n+1}{1} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \quad \dots \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \dots \\ \binom{n+1}{n+1} &= \binom{n}{n} \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Aus diesem Lemma ergibt sich, dass die Binomialkoeffizienten mit Hilfe eines Rekursionsprozesses berechnet werden können, der dem für die Fibonacci'schen Zahlen ähnlich, aber bedeutend komplizierter ist. Dies ermöglicht uns, Aussagen über die Binomialkoeffizienten durch Induktion verschiedener Art zu beweisen.

**12.** Wir ordnen die Binomialkoeffizienten in dem folgenden Schema, dem sog. Pascalschen Dreieck an:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ausführlicher wird über die Haupteigenschaften des Pascalschen Dreiecks und der mit ihm verknüpften Binomialkoeffizienten in der Broschüre von W. A. Uspenski, Das Pascalsche Dreieck, Moskau 1966 (in russischer Sprache), berichtet.<sup>2</sup>

Die Zeilen des Pascalschen Dreiecks werden im allgemeinen von oben nach unten nummeriert, wobei die oberste Zeile, die nur aus einer Eins besteht, als nullte Zeile gezählt wird.

<sup>2</sup>Vgl. auch die in derselben Reihe erschienene Broschüre von E. B. Dynkin und W. A. Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II, Kap. IV.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die äußeren Glieder in jeder Zeile des Pascalschen Dreiecks gleich 1 sind und jedes der übrigen Glieder durch Addition des unmittelbar über ihm und des links von diesem stehenden Gliedes gebildet wird.

**13.** Die Formel (1.11) erlaubt uns, sofort zwei wichtige Beziehungen herzuleiten, die die Binomialkoeffizienten einer Zeile des Pascalschen Dreiecks miteinander verknüpfen. Setzen wir in (1.11)  $x = 1$ , so ergibt sich

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

setzen wir  $x = -1$ , so folgt

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

**14.** Wir zeigen durch vollständige Induktion nach  $n$  die Richtigkeit der Beziehung

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (1.12)$$

Diese Formel wird häufig zur Definition der Binomialkoeffizienten benutzt. Sie charakterisiert den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  als Anzahl der Kombinationen von  $n$  Elementen zur  $k$ -ten Klasse. Wir gehen jedoch hier einen anderen, mehr formalen Weg, der im gegebenen Fall vorzuziehen ist.

Wenn wir verabreden, dass das Produkt aus null Faktoren gleich 1 sein soll, so erhalten wir für  $k = 0$  aus (1.12) die uns schon bekannte Beziehung  $\binom{n}{0} = 1$ . Beachten wir dies, so können wir uns auf den Fall  $k \geq 1$  beschränken.

Für  $n = 1$  ist

$$\binom{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Nun gelte (1.12) für ein gewisses  $n$  und jedes  $k = 0, 1, \dots, n$ . Wir betrachten die Zahl  $\binom{n+1}{k}$ . Wegen  $k \geq 1$  können wir

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

oder, benutzen wir die Induktionsvoraussetzung (1.12),

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} \left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} \cdot \frac{k+n-k+1}{k} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)k} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

schreiben, und dies ist genau die Formel (1.12) für die Binomialkoeffizienten der folgenden, nämlich  $(n + 1)$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks.

**15.** Wir ziehen nun im Pascalschen Dreieck Linien, die die Zeilen unter einem Winkel von  $45^\circ$  schneiden, und nennen sie aufsteigende Diagonalen des Pascalschen Dreiecks. Auf solchen Diagonalen liegen z. B. die Zahlen 1, 4, 3 oder 1, 5, 6, 1. Wir zeigen nun, dass die Summe der Zahlen, die auf einer aufsteigenden Diagonalen liegen, eine Fibonacci'sche Zahl ist.

Die erste, oberste aufsteigende Diagonale des Pascalschen Dreiecks besteht ebenso wie die zweite nur aus der Eins. Zum Beweis unserer Aussage genügt es also zu zeigen, dass die Summe aller Zahlen, welche der  $n$ -ten und der  $(n - 1)$ -ten Diagonale der Pascalschen Dreiecks angehören, gleich der Summe der Zahlen ist, die auf der  $(n + 2)$ -ten Diagonale liegen.

Die  $n$ -te Diagonale enthält die Zahlen

$$\binom{n-1}{0}, \quad \binom{n-2}{1}, \quad \binom{n-3}{2}, \dots$$

die  $(n + 1)$ -te die Zahlen

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n-1}{1}, \quad \binom{n-2}{2}, \dots$$

Die Summe aller dieser Zahlen schreiben wir in der Form

$$\binom{n}{0} + \left[ \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right] + \left[ \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \right] + \dots$$

oder, berücksichtigen wir das Lemma aus Nr. 11,

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots$$

Dies ist die Summe der Zahlen, die auf der  $(n + 2)$ -ten Diagonale des Pascalschen Dreiecks liegen.

Aus dem eben Bewiesenen folgt auf Grund der Formel (1.1) sofort: Die Summe aller Binomialkoeffizienten, die nicht unterhalb der  $n$ -ten aufsteigenden Diagonale des Pascalschen Dreiecks (also einschließlich der  $n$ -ten Diagonale selbst) liegen, ist gleich  $u_{n+2} - 1$ .

Unter Benutzung der Formeln (1.2) bis (1.4) und ihnen ähnlicher lassen sich leicht weitere Identitäten zwischen den Fibonacci'schen Zahlen und den Binomialkoeffizienten herleiten.

**16.** Bisher haben wir die Fibonacci'schen Zahlen rekursiv, d.h. induktiv nach ihren Indizes, bestimmt. Es zeigt sich aber, dass jede Fibonacci'sche Zahl auch unmittelbar als Funktion ihres Index bestimmt werden kann.



Wir untersuchen dazu Zahlenfolgen  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , die der Bedingung

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (1.13)$$

genügen. Alle diese Folgen nennen wir Lösungen der Gleichung (1.13).

Im folgenden sollen die Buchstaben  $V$ ,  $V'$  und  $V''$  beziehungsweise die Folgen

$$\begin{array}{l} v_1, v_2, v_3, \dots \\ v'_1, v'_2, v'_3, \dots \quad \text{bzw.} \\ v''_1, v''_2, v''_3, \dots \end{array}$$

bezeichnen. Wir beweisen zunächst zwei einfache Hilfssätze.

Lemma 1. Ist  $V$  eine Lösung der Gleichung (1.13) und  $c$  eine beliebige Zahl, so ist auch die Folge  $cV$  (d.h. die Folge  $cv_1, cv_2, cv_3, \dots$ ) eine Lösung der Gleichung (1.13).

Beweis. Multiplizieren wir die Identität

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$$

mit  $c$ , so ergibt sich

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$$

was zu beweisen war.

Lemma 2. Sind die Folgen  $V'$  und  $V''$  Lösungen der Gleichung (1.13), so ist auch ihre Summe  $V' + V''$  (d.h. die Folge  $v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \dots$ ) eine Lösung der Gleichung (1.13).

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes besagen:

$$v'_n = v'_{n-1} + v'_{n-2} \quad \text{und} \quad v''_n = v''_{n-1} + v''_{n-2}$$

Wir addieren diese beiden Gleichungen seitenweise und erhalten

$$v'_n + v''_n = (v'_{n-1} + v''_{n-1}) + (v'_{n-2} + v''_{n-2})$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Es seien nun  $V'$  und  $V''$  zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (1.13) (d.h. zwei Lösungen dieser Gleichung, die so beschaffen sind, dass zu jedem beliebig vorgegebenen  $c$  immer ein Index  $n$  gefunden werden kann, für den  $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$  ist). Wir zeigen nun, dass jede Folge  $V$ , die eine Lösung der Gleichung (1.13) ist, in der Form

$$c_1 V'_1 + c_2 V''_2 \quad (1.14)$$

dargestellt werden kann, wobei  $c_1$  und  $c_2$  gewisse Konstanten sind. Daher sagt man auch, (1.14) sei die allgemeine Lösung der Gleichung (1.13).

Vorher beweisen wir noch folgendes: Sind  $V'$  und  $V''$  zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (1.13), so gilt

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \quad (1.15)$$

(d.h. die Eigenschaft der Folgen  $V'$  und  $V''$ , nichtproportional zu sein, lässt sich schon an den ersten beiden Gliedern dieser Folgen nachweisen).

Der Beweis von (1.15) wird indirekt geführt. Dazu nehmen wir an, für zwei nichtproportionale Lösungen  $V'$  und  $V''$  der Gleichung (1.13) würde

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2} \quad (1.16)$$

gelten. Durch Umformung dieser Proportion erhielten wir

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

oder, da ja  $V'$  und  $V''$  Lösungen der Gleichung (1.13) sind,

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

Analog könnte man (induktiv !) schließen, dass

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \dots = \frac{v'_n}{v''_n} = \dots$$

gelten würde. Aus unserer Annahme (1.16) folgte also, dass die Folgen  $V'$  und  $V''$  proportional wären, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit ist die Richtigkeit von (1.15) nachgewiesen.

Wir betrachten nun eine beliebige Folge  $V$ , die Lösung der Gleichung (1.13) ist. Dann ist diese Folge, wie in Punkt 2 der Einleitung gezeigt wurde, durch Angabe ihrer ersten beiden Glieder  $v_1$  und  $v_2$  eindeutig bestimmt.

Wir suchen nun ein  $c_1$  und ein  $c_2$ , die den Gleichungen

$$c_1 v'_1 + c_2 v''_1 = v_1 \quad , \quad c_1 v'_2 + c_2 v''_2 = v_2 \quad (1.17)$$

genügen. Nach Lemma 1 und 2 liefert dann die Summe  $c_1 V' + c_2 V''$  gerade die Folge  $V$ .

Wegen der Beziehung (1.15) lässt sich das Gleichungssystem (1.17) nach  $c_1$  und  $c_2$  auflösen, wie auch die Zahlen  $v_1$  und  $v_2$  beschaffen sein mögen:

$$c_1 = \frac{v_1 v''_2 - v_2 v''_1}{v'_1 v''_2 - v'_1 v''_2} \quad , \quad c_2 = \frac{v'_1 v_2 - v'_2 v_1}{v'_1 v''_2 - v'_1 v''_2}$$

Aus der Relation (1.15) folgt, dass der Nenner von Null verschieden ist. Setzen wir die für  $c_1$  und  $c_2$  errechneten Werte in (1.14) ein, so erhalten wir die gesuchte Darstellung unserer Folge  $V$ .

Es genügt also, zwei nichtproportionale Lösungen der Gleichung (1.13) zu kennen, um alle ihre Lösungen angeben zu können.

Wir werden nun diese Lösungen mit Hilfe geometrischer Folgen bestimmen. Nach Lemma 1 können wir uns bei unseren Betrachtungen auf solche Folgen beschränken, deren erstes Glied gleich Eins ist. Wir betrachten also die Folge

$$1, q, q^2, \dots$$

Damit diese Reihe Lösung der Gleichung (1.13) ist, muss für jedes  $n$  die Bedingung

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

erfüllt sein, d.h., wie sich durch Division durch  $q^{n-2}$  ergibt, die Bedingung

$$1 + q = q^2 \quad (1.18)$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, d.h. die Zahlen  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  und  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  sind gerade die gesuchten Quotienten der Folge. Wir bezeichnen sie mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  und bemerken, dass für sie als Wurzeln der Gleichung (1.18) die Beziehungen  $1 + \alpha = \alpha^2$ ,  $1 + \beta = \beta^2$  und  $\alpha\beta = -1$  gelten

Wir haben so zwei geometrische Folgen erhalten, die Lösungen der Gleichung (1.13) sind. Daher sind alle Folgen der Gestalt

$$c_1 + c_2, \quad c_1\alpha + c_2\beta, \quad c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \quad \dots \quad (1.19)$$

Lösungen der Gleichung (1.13). Da die beiden Folgen verschiedene Quotienten besitzen ( $\alpha \neq \beta$ ) und daher nichtproportional sind, liefert die Formel (1.19) für verschiedene  $c_1$  und  $c_2$  alle Lösungen der Gleichung (1.13).

Insbesondere muss uns die Formel (1.19) für gewisse  $c_1$  und  $c_2$  gerade die Fibonacci'sche Reihe liefern. Wie oben gezeigt wurde, ist dazu notwendig,  $c_1$  und  $c_2$  aus den Gleichungen

$$c_1 + c_2 = u_1 \quad \text{und} \quad c_1\alpha + c_2\beta = u_2$$

d.h. aus dem Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{und} \quad c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

zu bestimmen. Lösen wir dieses System auf, so erhalten wir

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad ; \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} u_n &= c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

d.h.

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (1.20)$$

Die Formel (1.20) heißt nach dem Namen des Mathematikers, der sie erstmalig bewies, die "Binetsche Formel".

Entsprechende Formeln lassen sich offensichtlich auch für die anderen Lösungen von (1.13) finden. Der Leser möge für die im Abschnitt 2 der Einleitung angegebenen Folgen die Formeln selbst herleiten.

**17.** Wir sahen, dass  $\alpha^2 = \alpha + 1$  ist. Deshalb kann jede ganze positive Potenz der Zahl  $\alpha$  in der Form  $a\alpha + b$  mit ganzen Koeffizienten  $a$  und  $b$  dargestellt werden, nämlich

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1$$

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = 3\alpha + 2$$

usw. Wir zeigen (durch Induktion), dass

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}$$

ist. Für  $n = 2, 3$  ist es klar. Wir nehmen nun an, es sei

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1} \quad ; \quad \alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k$$

Addieren wir diese Gleichungen seitenweise, so finden wir

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\alpha + (u_{k-1} + u_k)$$

oder

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1}$$

was zu beweisen war.

**18.** Mit Hilfe der Binetschen Formel kann man nun bequem viele Reihen summieren, die mit Fibonacci'schen Zahlen zusammenhängen.

Suchen wir beispielsweise einen Ausdruck für

$$u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} &= \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \dots + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - \dots - \beta^{3n}) \end{aligned}$$

oder, wenn man die hierin auftretenden geometrischen Reihen summiert,

$$u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1} \right)$$

Nun gilt aber

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha$$

und analog  $\beta^3 - 1 = 2\beta$ . Daher gilt

$$u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta} \right)$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2 - \beta^{3n+2} + \beta^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2} (u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2} \end{aligned}$$

**19.** Als weiteres Beispiel für die Anwendung der Binetschen Formel berechnen wir die Summe der Kuben der ersten  $n$  Fibonacci'schen Zahlen.

Wir bemerken zunächst:

$$\begin{aligned} u_k^3 &= \left( \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \right)^3 = \frac{1}{5} \frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{5} (u_{3k} - (-1)^k 3u_k) = \frac{1}{5} (u_{3k} + (-1)^{k+1} 3u_k) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 = \frac{1}{5} [(u_3 + u_6 + \dots + u_{3n}) + 3(u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n)]$$

oder unter Benutzung der Ergebnisse aus 18. und der Formel (1.6)

$$u_1^3 + u_2^3 + \dots + u_n^3 = \frac{1}{5} \left( \frac{u_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1} 3u_{n-1} + 3 \right) = \frac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1} 6u_{n-1} + 5}{10}$$

**20.** Wir erörtern nun die Frage wie schnell die Fibonacci'schen Zahlen mit wachsenden Indizes größer werden. Auch auf diese Frage gibt uns die Binetsche Formel eine völlig erschöpfende Antwort. Man beweist nämlich leicht folgenden Satz.

**Satz:** Die Fibonacci'sche Zahl  $u_n$  ist die der Zahl  $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ , d. h. dem  $n$ -ten Glied  $a_n$  der geometrischen Folge, deren erstes Glied  $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$  und deren Quotient  $\alpha$  ist, nächstgelegene ganze Zahl.

**Beweis:** Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass der absolute Betrag der Differenz von  $u_n$  und  $a_n$  stets kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist. Es gilt aber

$$|u_n - a_n| = \left| \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{-\beta^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

Wegen  $\beta = -0,68\dots$  ist  $|\beta| < 1$ . Folglich ist für beliebiges  $n$  immer  $|\beta|^n < 1$  und daher erst recht  $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$  (da ja  $\sqrt{5} > 2$ ). Damit ist der Satz bewiesen.

Der Leser, der mit dem Begriff des Grenzwertes vertraut ist, bestätigt leicht die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - a_n| = 0$$

deren Beweis nur wenig von dem soeben geführten abweicht.

Benutzen wir den oben bewiesenen Satz, so können wir die Fibonacci'schen Zahlen auch mit Hilfe einer Logarithmentafel berechnen.

Gesucht sei beispielsweise  $u_{14}$  (die Zahl  $u_{14}$  ist, wie man sich leicht überlegt, die Lösung der Fibonacci'schen Kaninchenaufgabe):

$$\sqrt{5} = 2,2361 \quad ; \quad \log \sqrt{5} = 0,34949 \quad ; \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180 \quad ; \quad \log \alpha = 0,2089$$

$$\log \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \cdot 0,20898 - 0,34949 = 2,5762 \quad ; \quad \frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376,9$$

Die zu 376,9 nächstgelegene ganze Zahl ist 377; das ist aber gerade unsere Zahl  $u_{14}$ .

Bei der Berechnung von Fibonacci'schen Zahlen mit sehr großem Index brauchen wir nicht sämtliche Stellen zu berücksichtigen, die uns die Logarithmentafel angibt. Man kann sich vielmehr mit den ersten Stellen begnügen, so dass man einen Näherungswert erhält.

Zur Übung mag der Leser beweisen, dass  $u_n$  für  $n \geq 17$  höchstens  $\frac{n}{4}$  und mindestens  $\frac{n}{5}$  Ziffern im Dezimalsystem besitzt. Aus wieviel Ziffern besteht die Zahl  $u_{1000}$ ?

**21.** Das Ergebnis aus Nr. 20 lässt sich noch verbessern. Zunächst beweisen wir den folgenden Satz, der uns im weiteren nützlich sein wird.

Satz. Es gilt

$$\frac{\alpha^{n-1/n}}{\sqrt{5}} \leq u_n \leq \frac{\alpha^{n+1/n}}{\sqrt{5}}$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis der linken Seite der Ungleichung; die rechte Seite lässt sich analog nachweisen.

Da auf Grund der Binetschen Formel

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

gilt und ferner  $\alpha\beta = -1$  ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\alpha^{1-1/n} \leq \alpha^n - 1/\alpha^n \quad \text{oder} \quad \alpha^{2n-1/n} \leq \alpha^{2n} - 1$$

oder, nach Erheben in die  $n$ -te Potenz,

$$\alpha^{2n^2-1} \leq (\alpha^{2n} - 1)^n \tag{1.21}$$

ist. Diese Ungleichung werden wir durch vollständige Induktion nach  $n$  beweisen.

Für  $n = 1$  geht (1.21) über in

$$\alpha \leq \alpha^2 - 1$$

das gilt tatsächlich (sogar mit dem Gleichheitszeichen). Für  $n = 2$  liefert (1.21) die Ungleichung

$$\alpha^7 \leq (\alpha^4 - 1)^2 \quad (1.22)$$

Sie lässt sich durch Ausrechnen überprüfen; jedoch kann man sie auch beweisen, indem man die in Nr. 17 hergeleitete Beziehung benutzt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= 3\alpha + 2 \\ (\alpha^4 - 1)^2 &= (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10 \end{aligned}$$

so dass (1.22) in der offenbar gültigen Gestalt

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \leq 15\alpha + 10$$

geschrieben werden kann. Schließlich folgt aus (1.21) für  $n = 3$

$$\alpha^{17} \leq (\alpha^6 + 1)^3$$

was sich analog nachprüfen lässt.

Wir nehmen nun an, es sei  $n > 2$  und es gelte (1.21), und beweisen, dass

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \leq (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}$$

ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass bei Vergrößern von  $n$  um 1 die rechte Seite von (1.21) schneller wächst als die linke. Die linke Seite wächst dabei um das  $\alpha^{4n+2}$ -fache. Die rechte Seite schätzen wir folgendermaßen ab. Es ist

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{2n} - 1)^n} = (\alpha^{2(n+1)} - 1) \left( \frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1} \right)^n$$

Der letzte Bruch ist größer als  $\alpha^2$ ; dabei ist

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1} - \alpha^2 &= \frac{\alpha^{2n+2} - 1 - \alpha^{2n+2} + \alpha^2}{\alpha^{2n} - 1} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^{2n} - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha^{2n-2} + \alpha^{2n-4} + \dots + \alpha^2 + 1} > \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left( \frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1} \right)^n > \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \right)^n = \alpha^{2n} + n \frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}} + \dots$$

die Punkte ersetzen positive Summanden. Da  $n > 2$  vorausgesetzt war, ist dieser Ausdruck größer als  $\alpha^{2n+1}$ . Das bedeutet

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{2n} - 1)^n} &> (\alpha^{2(n+1)} - 1)(\alpha^{2n} + 1) = \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n+2} - \alpha^{2n} - 1 \\ &= \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) - 1 = \alpha^{4n+2} + \alpha^{2n+1} - 1 > \alpha^{4n+2} \end{aligned}$$

Also wächst die rechte Seite von (1.21) schneller als die linke. Damit ist der Satz bewiesen.

**22.** Wir untersuchen noch eine Klasse von Folgen, die sich auf die Fibonacci'schen Zahlen stützen. Es sei  $x$  eine beliebige Zahl, und wir wollen die Summe

$$s_n(x) = u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n$$

berechnen. Dazu benutzen wir die Binetsche Formel:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}}x^2 + \dots + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}x^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^n x^n) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta x + \beta^2 x^2 + \dots + \beta^n x^n) \end{aligned} \quad (1.23)$$

In jeder der runden Klammern steht die Summe einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\alpha x$  bzw.  $\beta x$ . Die bekannte Formel für die Summe einer geometrischen Reihe gilt dann, wenn der Quotient der Reihe von 1 verschieden ist. Wenn er gleich 1 ist, sind alle Glieder der Reihe einander gleich, so dass sich ihre Summe einfach berechnen lässt.

Wir betrachten zunächst den Fall  $\alpha x \neq 1$ ,  $\beta x \neq 1$ , d.h., es sei  $x \neq \frac{1}{\alpha} = -\beta$  und  $x \neq \frac{1}{\beta} = -\alpha$ . In diesen Fällen finden wir, wenn wir in (1.23) die geometrischen Reihen summieren,

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x}{\alpha x - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x}{\beta x - 1}$$

oder, umgeformt,

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x)(\beta x - 1) - (\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x)(\alpha x - 1)}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)}$$

bzw.

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2} - \alpha^{n+1}x^{n+1} + \alpha x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} - \frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2} - \beta^{n+1}x^{n+1} + \beta x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} \right]$$

Wir erinnern uns nun an die Beziehungen  $\alpha\beta = -1$ ,  $\alpha + \beta = 1$  und  $\alpha - \beta = \sqrt{5}$  und erhalten

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x\sqrt{5} - (\alpha^n - \beta^n)x^{n+2} - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

und schließlich

$$s_n(x) = \frac{x - u_nx^{n+2} - u_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2} \quad (1.24)$$

Insbesondere ergibt sich, wenn wir hier  $x = 1$  setzen,

$$s_n(1) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1 - u_n - u_{n+1}}{-1} = u_{n+2} - 1$$

was dem Ergebnis aus Nr. 1 entspricht.



Für  $x = -1$  folgt

$$s_n(-1) = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n = \frac{-1 - u_n(-1)^{n+2} - u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1} = (-1)^{n+1} u_{n-1} - 1$$

[vgl. Formel (1.6)].

Wir betrachten nun die übrigen "Spezialfälle".

Es sei  $x = \frac{1}{\alpha} = -\beta$ . Dann ist in (1.23) jedes Glied der ersten Reihe gleich 1 und die Summe folglich gleich  $n$ . Bei der zweiten Reihe ergibt sich der Quotient zu  $-\beta^2$ . Also ist

$$\begin{aligned} s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(n + (\beta^2 - \beta^4 + \dots + (-1)^{n-1} \beta^{2n})) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n + \frac{\beta^2 - (-1)^n \beta^{n+2}}{1 + \beta^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n + \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} - (-1)^n \beta^{2n} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}\right) \end{aligned}$$

Nun gelten die Beziehungen

$$1 + \beta^2 = 2 + \beta = 2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

und

$$\frac{\beta^2}{1 + \beta^2} = \frac{1 + \beta}{2 + \beta} = \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}$$

so dass wir schließlich

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{n}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{10} - (-1)^n \beta^{2n} \frac{\sqrt{5} - 1}{10} \quad (1.25)$$

erhalten.

Nun betrachten wir noch den Fall  $x = \frac{1}{\beta} = -\alpha$ . Dann ist in (1.23) der Quotient der zweiten Reihe gleich 1, der der ersten Reihe gleich  $-\alpha^2$ , und es folgt

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-(\alpha^2 - \alpha^4 + \dots + (-1)^{n-1} \alpha^{2n}) - n)$$

Analog zum vorhergehenden Fall erhalten wir

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(-1)^n \alpha^{2n+2} - \alpha^2}{1 + \alpha^2} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^n \alpha^{2n} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} - n\right)$$

und im Ergebnis

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{5} + 1}{10} \alpha^{2n} - \frac{\sqrt{5} + 1}{10} - \frac{n}{\sqrt{5}} \quad (1.26)$$

**23.** Wir untersuchen nun, wie sich die Summe  $s_n(x)$  bei festem  $x$  und unbeschränkt wachsendem  $n$  verhält.

In (1.23) gehen wir zum Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  über:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5}} [(\alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^n x^n) - (\beta x + \beta^2 x^2 + \dots + \beta^n x^n)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^n x^n) - \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta x + \beta^2 x^2 + \dots + \beta^n x^n)\end{aligned}$$

Hier stehen unter den beiden letzten Grenzwertzeichen Summen geometrischer Reihen. Daher sind die Grenzwerte selbst die Summen der entsprechenden unendlichen geometrischen Reihen. Nun ist bekanntlich eine unendliche geometrische Reihe genau dann konvergent, wenn ihr Quotient dem absoluten Betrag nach kleiner als 1 ist.

Bei den beiden uns interessierenden Reihen sind die Quotienten gleich  $\alpha x$  bzw.  $\beta x$ . Hier ist  $|\alpha| > |\beta|$ . Aus  $|\alpha x| < 1$  folgt deshalb  $|\beta x| < 1$ . Wenn also die Ungleichung  $|\alpha x| < 1$  erfüllt ist, existieren diese beiden Grenzwerte.

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \tag{1.27}$$

existiert also für  $|x| < \frac{1}{\alpha}$ , und wir wollen ihn mit  $s(x)$  bezeichnen. Zu seiner Berechnung können wir die Formel (1.24) benutzen.

Zunächst bemerken wir, dass auf Grund des in Nr. 20 Gesagten

$$u_n \leq \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1$$

gilt. Deshalb ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n x^{n+2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1 \right) x^{n+2} = \frac{x^2}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2}$$

Wegen  $|\alpha x| < 1$  muss  $|x| < 1$  sein, so dass beide Grenzwerte gleich 0 sind. Aus demselben Grund ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} x^{n+1} = 0$$

Folglich erhalten wir, wenn wir in (1.24) für  $n \rightarrow \infty$  zur Grenze übergehen,

$$\begin{aligned}s(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^2} \\ &= \frac{1}{1 - x - x^2} \left( x - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n x^{n+2} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} x^{n+1} \right) = \frac{x}{1 - x - x^2}\end{aligned}$$

Dieses Resultat lässt sich auch als Reihenentwicklung schreiben:

$$u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{1.28}$$

Lassen wir  $x$  verschiedene Werte annehmen, so erhalten wir verschiedene konkrete Formeln, z.B. für  $x = \frac{1}{2}$  die Formel

$$\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} + \dots = 2$$

**24.** Zu (1.28) können wir auch durch andere Überlegungen gelangen. Wir schreiben

$$u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots = s(x) \quad (1.29)$$

(dabei erinnern wir uns daran, dass der Ausdruck  $s(x)$  nur für  $x < \frac{1}{\alpha}$  sinnvoll ist) und multiplizieren (1.29) gliedweise mit  $x$  und mit  $x^2$ . Das ergibt

$$u_1x^2 + u_2x^3 + \dots + u_nx^{n+1} + \dots = xs(x) \quad (1.30)$$

bzw.

$$u_1x^3 + u_2x^4 + \dots + u_nx^{n+2} + \dots = x^2s(x) \quad (1.31)$$

Dann subtrahieren wir (1.30) und (1.31) von (1.29) und fassen die Glieder mit gleichen Potenzen von  $x$  zusammen:

$$\begin{aligned} u_1x + (u_2 - u_1)x^2 + (u_3 - u_2 - u_1)x^3 + (u_4 - u_3 - u_2)x^4 + \dots \\ + (u_n - u_{n-1} - u_{n-2})x^n + \dots = (1 - x - x^2)s(x) \end{aligned}$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung in runden Klammern stehenden Ausdrücke sind offenbar gleich 0, so dass

$$x = (1 - x - x^2)s(x)$$

und damit (1.28) folgt.

**25.** Bis jetzt haben wir stets vorausgesetzt, dass der Index  $n$  der Fibonacci'schen Zahl  $u_n$  eine positive ganze Zahl ist. Jedoch lässt sich die grundlegende Rekursionsformel, die die Fibonacci'schen Zahlen definiert, auch in der Gestalt

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1} \quad (1.32)$$

schreiben. Sie kann dazu dienen, Fibonacci'sche Zahlen mit kleinerem Index durch solche mit größerem Index auszudrücken.

Setzen wir in (1.32) nacheinander  $n = 2, 1, 0, -1, \dots$  ein, so finden wir

$$u_0 = 0, \quad u_{-1} = 1, \quad u_{-2} = -1, \quad u_{-3} = 2, \dots$$

und allgemein

$$u_{-n} = (-1)^{n+1}u_n \quad (1.33)$$

wie wir uns leicht überzeugen können (der Beweis sei dem Leser überlassen).

Dieser einfache Ausdruck (1.33) für eine Fibonacci'sche Zahl mit beliebigem ganzem Index erlaubt, alle Untersuchungen dieser Fibonacci'schen Zahlen auf die Fibonacci'schen Zahlen mit natürlichen Indizes zurückzuführen.

Zum Beispiel genügt es, wenn wir die Summe der  $n$  Fibonacci'schen Zahlen

$$u_{-1}, u_{-2}, \dots, u_{-n}$$

berechnen wollen, die Summanden mit Hilfe von (1.33) umzuschreiben; die Summe ist dann gleich

$$u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n$$

Dann erhalten wir, wenn wir (1.6) benutzen,

$$u_{-1} + u_{-2} + \dots + u_{-n} = (-1)^{n+1} u_{n-1} - 1 = -u_{-n+1} + 1$$

Der sich auf die grundlegende Rekursionsformel für Fibonacci'sche Zahlen stützende Induktionsbeweis mit dem Schluss "von  $n$  und  $n+1$  auf  $n+2$ " kann jetzt im Zusammenhang mit der Beziehung (1.32) nach dem Schema "von  $n$  und  $n-1$  auf  $n-2$ " geführt werden. Insbesondere lässt sich auf diese Art mühelos die wichtige Formel (1.8),

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$$

für beliebige ganze  $n$  und  $m$  beweisen.

**26.** Die für die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  grundlegenden Gleichungen

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n + \alpha^{n+1}, \quad \beta^{n+2} = \beta^n + \beta^{n+1}$$

gelten nicht nur für positive ganze, sondern auch für alle ganzen  $n$  (für gebrochene  $n$  bleiben sie ebenfalls gültig, jedoch werden wir darauf nicht eingehen). Daraus folgt leicht, dass die Binetsche Formel

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

für jedes ganze  $n$  gilt.

Abschließend sei bemerkt, dass sich auch das Ergebnis aus Nr. 17 (durch Induktion "in entgegengesetzter Richtung") auf negative Werte des Index übertragen lässt:

$$\alpha^{-n} = u_{-n} \alpha + u_{-n-1} \tag{1.34}$$

Diese Gleichung lässt sich umformen in

$$(-1)^n \beta^n = (-1)^n u_n \frac{1}{\beta} + (-1)^n u_{n+1}$$

d.h.,

$$\beta^{n+1} = u_{n+1} \beta + u_n$$

Außerdem kann (1.34) auf die Gestalt

$$\alpha^{-n} = (-1)^{n-1} u_n \alpha + (-1)^n u_{n+1}$$

gebracht werden, d.h.

$$(-1)^n \alpha^{-n} = u_{n+1} - u_n \alpha$$

oder, umgeformt,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = (-1)^n \alpha^{-n} \frac{1}{u_n} \tag{1.35}$$

## 2 Zahlentheoretische Eigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen

1. Wir betrachten nun einige Teilbarkeitseigenschaften der Fibonacci'schen Zahlen.

Satz. Ist  $n$  durch  $m$  teilbar, so ist auch  $u_n$  durch  $u_m$  teilbar.

Beweis. Es sei  $n$  durch  $m$  teilbar, d.h.  $n = mk$ . Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $k$ .

Für  $k = 1$  ist  $n = m$ . In diesem Fall ist  $u_n$  trivialerweise durch  $u_m$  teilbar. Wir nehmen nun an,  $u_{mk}$  sei durch  $u_m$  teilbar, und betrachten  $u_{m(k+1)}$ . Nun ist  $u_{m(k+1)} = u_{mk+m}$ ; und wegen Gleichung (1.8) gilt

$$u_{m(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung ist durch  $u_m$  teilbar, der zweite enthält  $u_{mk}$  als Faktor, ist also nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls durch  $u_m$  teilbar, womit der Satz bewiesen ist.

2. Es sei nun eine beliebige ganze Zahl  $m$  gegeben. Gibt es wenigstens eine Fibonacci'sche Zahl  $u_n$ , die durch  $m$  teilbar ist, so lassen sich beliebig viele durch  $m$  teilbare Fibonacci'sche Zahlen finden, etwa die Zahlen  $u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, \dots$

Es ist daher interessant, die Frage zu klären, ob man zu einer beliebig vorgegebenen Zahl  $m$  immer wenigstens eine durch sie teilbare Fibonacci'sche Zahl finden kann. Es zeigt sich, dass das der Fall ist.

Es sei  $\bar{k}$  der bei der Division von  $k$  durch  $m$  auftretende Rest. Wir bilden nun die Folge aus den Paaren solcher Reste:

$$\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle, \langle \bar{u}_2, \bar{u}_3 \rangle, \langle \bar{u}_3, \bar{u}_4 \rangle, \dots, \langle \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1} \rangle, \dots \quad (2.1)$$

Nennen wir zwei derartige Paare  $\langle a_1, b_1 \rangle$  und  $\langle a_2, b_2 \rangle$  gleich, wenn  $a_1 = b_1$  und  $a_2 = b_2$  ist, dann ist die Anzahl aller verschiedenen Restpaare, die bei Division durch  $m$  auftreten, gleich  $m^2$ .

Unter den ersten  $m^2 + 1$  Gliedern der Folge (2.1) gibt es also mit Sicherheit solche, die einander gleich sind.

Es sei  $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1} \rangle$  das erste Paar, das in der Folge (2.1) zum zweiten Mal auftritt. Wir beweisen, dass dieses Paar das Paar  $\langle 1, 1 \rangle$  ist. Wir schließen indirekt, nehmen also an, das erste mehrfach auftretende Paar sei das Paar  $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1} \rangle$  mit  $k > 1$ .

Dann gäbe es in (2.1) ein Paar  $\langle \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1} \rangle$ ,  $l > k$ , das gleich dem Paar  $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1} \rangle$  wäre. Da  $u_{l-1} = u_{l+1} - u_l$  und  $u_{k-1} = u_{k+1} - u_k$  sowie  $\bar{u}_{l+1} = \bar{u}_{k+1}$  und  $\bar{u}_l = \bar{u}_k$  wäre, so wären auch die bei der Division von  $u_{l-1}$  und  $u_{k-1}$  durch  $m$  auftretenden Reste einander gleich, d.h. es wäre  $\bar{u}_{l-1} = \bar{u}_{k-1}$ .

Daraus folgte aber, dass auch  $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k \rangle = \langle \bar{u}_{l-1}, \bar{u}_l \rangle$  wäre; das Paar  $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k \rangle$  steht jedoch in der Folge (2.1) vor dem Paar  $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1} \rangle$ , und daher wäre  $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1} \rangle$  nicht das erste mehrfach auftretende Paar, im Gegensatz zu unserer Annahme.

Wir sehen also, dass die Annahme  $k > 1$  zu einem Widerspruch führt, und dies besagt, dass  $k = 1$  ist.

Das Paar  $(1, 1)$  ist also in der Tat das erste in der Folge (2.1) mehrfach auftretende Glied. Es möge etwa an der  $t$ -ten Stelle stehen (in Übereinstimmung mit dem Obigen können wir  $1 < t < m^2 + 1$  annehmen), d. h., es möge

$$\langle \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1} \rangle = \langle 1, 1 \rangle$$

gelten. Das bedeutet, dass sowohl  $u_t$  als auch  $u_{t+1}$  bei Division durch  $m$  den Rest 1 lassen. Folglich ist ihre Differenz durch  $m$  teilbar. Wegen

$$u_{t-1} - u_t = u_{t-2}$$

dann also die  $(t - 1)$ -te Fibonacciische Zahl durch  $m$  teilbar.

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

**Satz.** Zu jeder vorgegebenen ganzen Zahl  $m$  lässt sich unter den ersten  $m^2 - 1$  Fibonacciischen Zahlen immer wenigstens eine finden, die durch  $m$  teilbar ist.

Wir bemerken, dass der bewiesene Satz nichts darüber aussagt, welche Fibonacciische Zahl durch  $m$  teilbar ist. Er besagt lediglich, dass die erste durch  $m$  teilbare Fibonacciische Zahl nicht übermäßig groß ist. Später werden wir uns dieser Frage nochmals zuwenden.

Da  $(1,1)$  das erste in (2.1) mehrfach auftretende Glied ist, lässt sich die Folge der Reste, wenn wir mit  $\bar{u}_t$  beginnen, gleichsam von Anfang an wiederholen. Diese Folge ist also periodisch. Zum Beispiel bilden im Fall  $m = 4$  die Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 1, 0 \tag{2.2}$$

in der Folge der Reste eine Periode. Die Periodenlänge ist gleich 6.

Somit hat  $u_n$  bei Division durch 4 den Rest 1 im Fall  $n = 6k + 1$ ,  $6k + 2$  oder  $6k + 5$ , den Rest 2 im Fall  $n = 6k + 3$  und den Rest 3 im Fall  $n = 6k + 4$ .

**3.** Großes Interesse verdient die Frage nach der arithmetischen Natur der Fibonacciischen Zahlen, d.h. die Frage nach ihren Teilern.

Wir zeigen, dass  $u_n$  für zusammengesetztes und von 4 verschiedenes  $n$  eine zusammengesetzte Zahl ist. (Dabei nennen wir eine Zahl "zusammengesetzt", wenn sie nicht Primzahl ist; d. Ü.)

In der Tat kann man ein derartiges  $n$  immer in der Form  $n = n_1 n_2$  schreiben, wobei  $1 < n_1 < n$ ,  $1 < n_2 < n$  ist und  $n_1 > 2$  oder  $n_2 > 2$  gilt.

Es sei etwa  $n_1 > 2$ . Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satz  $u_n$  durch  $u_{n_1}$  teilbar, und es gilt ferner  $1 < u_{n-1} < u_n$ . Damit ist gezeigt, dass  $u_n$  eine zusammengesetzte Zahl ist.

**4.** Bevor wir in unseren Betrachtungen über die Fibonacciischen Zahlen fortfahren, wollen wir uns einiger einfacher Tatsachen aus der Zahlentheorie erinnern.

Wir zeigen zunächst, wie man den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen  $a$  und  $b$

bestimmt.

Wir dividieren  $a$  durch  $b$  mit Rest. Der sich ergebende Quotient sei  $q_0$ , der bei der Division auftretende Rest  $r_1$ . Dann gilt offensichtlich  $a = bq_0 + r_1$  und  $0 \leq r_1 < b$ . Für  $a < b$  ist  $q_0 = 0$ .

Nun teilen wir weiter  $b$  durch  $r_1$  und bezeichnen den Quotienten mit  $q_1$ , den Rest mit  $r_2$ . Dann ist  $b = r_1q_1 + r_2$  und  $0 \leq r_2 < r_1$ . Da  $r_1 < b$  ist, ist  $q_1 \neq 0$ .

Weiter finden wir bei Division von  $r_1$  durch  $r_2$  ein  $q_2 \neq 0$  und ein  $r_3$  mit der Eigenschaft  $r_1 = r_2q_2 + r_3$  und  $0 \leq r_3 < r_2$ . In dieser Weise setzen wir den Prozess fort.

Früher oder später muss die Entwicklung einmal abbrechen, und wir haben eine Reihe ganzer positiver und untereinander verschiedener Zahlen  $r_1, r_2, r_3, \dots$  erhalten, die sämtlich kleiner als  $b$  sind. Die Anzahl der  $r_i$  kann also  $b$  nicht übersteigen, und der Divisionsprozess muss spätestens nach dem  $b$ -ten Schritte abbrechen. Abbrechen kann er aber nur dann, wenn einmal eine Division aufgeht, d.h. wenn der Rest gleich Null wird und eine weitere Division daher nicht möglich ist.

Den soeben durchgeführten Prozess bezeichnet man allgemein als Euklidischen Algorithmus. Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Zahlen  $a$  und  $b$  erhalten wir als Ergebnis das folgende System von Identitäten:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir betrachten das letzte von Null verschiedene Glied in der Folge  $a, b, r_1, r_2, \dots, r_n$ . Im allgemeinen ist dieses Glied der Rest  $r_n$ , aber im besonderen kann es auch die Zahl  $b$  sein (wegen der Einheitlichkeit kann man  $b = r_0$  setzen). Offenbar ist  $r_{n-1}$  durch  $r_n$  teilbar.

Wir wenden uns nun in (2.3) der vorletzten Gleichung zu; die beiden Summanden rechts und daher auch  $r_{n-2}$  sind durch  $r_n$  teilbar.

Ganz analog weist man schrittweise (induktiv !) nach, dass  $r_{n-3}, r_{n-4}, \dots$  und schließlich auch  $a$  und  $b$  durch  $r_n$  teilbar sind. Also ist  $r_n$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

Wir beweisen jetzt, dass  $r_n$  auch der größte gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass jeder gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ein Teiler des Restes  $r_n$  ist.

Es sei  $d$  irgendein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ . Aus der ersten Gleichung von (2.3) ersieht man, dass  $d$  auch Teiler von  $r_1$  sein muss. Dann ist  $d$  auf Grund der zweiten Gleichung von (2.3) auch Teiler von  $r_2$ .

Analog (durch Induktion !) beweisen wir, dass  $r_3, \dots, r_{n-1}$  und folglich auch  $r : n$  durch  $d$  teilbar sind.

Wir haben also gezeigt, dass die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die

natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  immer auf den größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen führt. Diesen größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$  werden wir im folgenden mit  $(a, b)$  bezeichnen.

Als Beispiel wollen wir  $(u_{20}, u_{15}) = (6765, 610)$  bestimmen:

$$6765 = 610 \cdot 11 + 55,$$

$$610 = 55 \cdot 11 + 5,$$

$$55 = 5 \cdot 11$$

Es ist also  $(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5$ . Die Tatsache, dass der größte gemeinsame Teiler zweier Fibonacci'scher Zahlen wieder zu den Fibonacci'schen Zahlen gehört, ist nicht zufällig. Wir werden im folgenden zeigen, dass dies ganz allgemein der Fall ist.

**5.** In der Geometrie finden wir ein dem Euklidischen Algorithmus ähnliches Verfahren bei der Bestimmung der gemeinsamen "Maßeinheit" zweier kommensurabler Strecken.

Betrachten wir also zwei Strecken; die eine habe die Länge  $a$ , die andere die Länge  $b$ . Wir tragen die zweite Strecke so oft wie möglich auf der ersten ab (ist  $b > a$ , so ist dies offenbar überhaupt nicht möglich) und bezeichnen die Länge des eventuell auftretenden Bestes mit  $r_1$ . Offenbar ist  $r_1 < b$ .

Dann tragen wir die Strecke  $r_1$  so oft wie möglich auf der Strecke  $b$  ab und bezeichnen den neu auftretenden Rest mit  $r_2$ . Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir schließlich eine Folge von Reststrecken, deren Länge offensichtlich immer kleiner wird. Soweit besteht also vollständige Übereinstimmung mit dem Euklidischen Algorithmus.

Im folgenden jedoch unterscheidet sich das soeben beschriebene geometrische Verfahren grundsätzlich vom Euklidischen Algorithmus für natürliche Zahlen: Die Folge der Reste, die sich beim Vergleich der Strecken ergeben, braucht nicht abzuberechnen, da der Prozess keine bestimmte Länge zu haben braucht. Das ist immer dann der Fall, wenn die vorgegebenen Strecken inkommensurabel sind. Aus den Überlegungen von Nr. 4 ergibt sich also u.a., dass zwei Strecken, deren Länge sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, immer kommensurabel sind.

Wir leiten jetzt einige einfache Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen ab.

**6.**  $(a, bc)$  ist teilbar durch  $(a, b)$ .

Beweis:  $b$  und daher auch  $bc$  ist durch  $(a, b)$  teilbar;  $(a, b)$  teilt aber auch  $a$ . Folglich ist nach dem in Punkt 1 Bewiesenen auch  $(a, bc)$  durch  $(a, b)$  teilbar.

**7.**  $(ac, bc) = (a, b)c$ .

Beweis: Die Gleichungen (20) beschreiben das Verfahren der Bestimmung von  $(a, b)$ . Multiplizieren wir nun jede dieser Gleichungen mit  $c$ , so erhalten wir, wie man leicht bestätigt, ein Gleichungssystem, das dem Euklidischen Algorithmus für die Zahlen  $ac$  und  $bc$  entspricht. Der letzte nichtverschwindende Rest ist dann gleich  $r_n \cdot c$ , d.h. gleich  $(a, b) \cdot c$ .



**8.** Aus  $(a, c) = 1$  folgt  $(a, bc) = (a, b)$ . Es ist nämlich nach den Ergebnissen von Punkt 3  $(ab, bc)$  durch  $(a, bc)$  teilbar. Aus Punkt 4 ergibt sich

$$(ab, bc) = (a, c)b = 1 \cdot b = b$$

Folglich ist  $b$  durch  $(a, bc)$  teilbar. Andererseits ist  $(a, bc)$  ein Teiler von  $a$ . Dann geht  $(a, bc)$  nach Nr. 4 auch in  $(a, b)$  auf. Da aber nach Punkt Nr. 6  $(a, b)$  auch ein Teiler von  $(a, bc)$  ist, folgt  $(a, b) = (a, bc)$ .

Nun sei  $bc$  durch  $a$  teilbar. Das bedeutet  $(a, bc) = a$ . Ist dabei  $(a, c) = 1$ , so ist nach dem eben Gesagten  $(a, b) = a$ , d.h.,  $a$  ist Teiler von  $b$ .

Ist  $p$  eine Primzahl, so lässt sich entweder jede Zahl  $a$  durch  $p$  teilen, oder  $a$  und  $p$  sind teilerfremd. Wenn also ein Produkt zweier Zahlen durch eine Primzahl  $p$  teilbar ist, teilt dieses  $p$  nach dem Vorhergehenden wenigstens einen der beiden Faktoren.

Offenbar lässt sich diese Behauptung durch Induktion auf Produkte beliebig vieler Zahlen übertragen.

**9.** Wir fragen nun nach der Teilbarkeit der Binomialkoeffizienten.

**Satz.** Ist  $p$  eine Primzahl und  $k$  eine Zahl mit  $k \neq 0$  und  $k \neq p$ , so ist  $\binom{p}{k}$  durch  $p$  teilbar.

**Beweis.** Wir kennen aus § 1, Nr. 14, die Beziehung

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Da dieser Bruch in Wirklichkeit eine ganze Zahl ist, muss sein Zähler durch den Nenner teilbar sein. Nun ist jeder Faktor des Nenners kleiner als  $p$  und daher durch  $p$  nicht teilbar, so dass sich nach dem Vorhergehenden der ganze Nenner nicht durch die Primzahl  $p$  teilen lässt. Also ist der Nenner zu  $p$  teilerfremd.

Den Zähler fassen wir als Produkt der Zahl  $p$  mit der Zahl  $(p-1)\dots(p-k+1)$  auf. Dieses Produkt lässt sich durch den Nenner teilen. Da die Zahl  $p$  und der Nenner teilerfremd sind, muss der Nenner Teiler des zweiten Faktors, nämlich Teiler von  $(p-1)\dots(p-k+1)$  sein. Setzen wir

$$(p-1)\dots(p-k+1) = t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$$

so ist  $\binom{p}{k} = tp$ , was zu beweisen war.

**10.** Ist  $c$  durch  $b$  teilbar, so ist  $(a, b) = (a + c, b)$ .

**Beweis:** Die Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen  $a$  und  $b$  führt zu dem Gleichungssystem (2.3). Wir wenden nun den Algorithmus auf die Zahlen  $a + c$  und  $b$  an.

Da  $c$  durch  $b$  teilbar ist, wir also  $c$  in der Form  $c = c_1 b$  schreiben können, liefert uns der erste Schritt des Algorithmus die Gleichung

$$a + c = (q_0 + c_1)b + r_1$$

Alle weiteren Schritte des Algorithmus führen uns nacheinander auf die zweite, dritte, ... usw. Gleichung des Systems (2.3). Als letzter nichtverschwindender Rest erscheint wie früher  $r_n$ , woraus sich die Behauptung  $(a, b) = (a + c, b)$  ergibt.

Es sei dem Leser zur nützlichen Übung empfohlen, diesen Satz unter ausschließlicher Verwendung der Ergebnisse der Nr. 6 bis 8, d.h. ohne wiederholte Anwendung des Euklidischen Algorithmus und ohne Benutzung des Systems (2.3), zu beweisen.

**11. Satz.** Zwei benachbarte Fibonacci'sche Zahlen sind teilerfremd.

**Beweis.** Wir nehmen entgegen der Behauptung des Satzes an,  $u_n$  und  $u_{n+1}$  besäßen irgendeinen gemeinsamen Teiler  $d > 1$ . Dann wäre ihre Differenz  $u_{n+1} - u_n$ , also  $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$ , durch  $d$  teilbar.

Analog zeigt man (durch Induktion!), dass auch  $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots$  usw. und schließlich  $u_1$  durch  $d$  teilbar wären. Nun ist aber bekanntlich  $u_1 = 1$  und daher sicher nicht durch  $d > 1$  teilbar. Damit ist unsere Annahme zum Widerspruch geführt und der Satz bewiesen.

**12. Satz:** Es gilt die Gleichung  $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$ .

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $m > n$  annehmen. Wir wenden nun auf die Zahlen  $m$  und  $n$  den Euklidischen Algorithmus an:

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 & \text{mit} & \quad 0 \leq r_1 < n, \\ n &= r_1q_1 + r_2 & \text{mit} & \quad 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 & \text{mit} & \quad 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\dots \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t & \text{mit} & \quad 0 \leq r_t < r_{t-1}, \\ r_{t-1} &= r_tq_t \end{aligned}$$

Wir wissen aber bereits, dass  $r_t$  der größte gemeinsame Teiler von  $m$  und  $n$  ist. Wir können also wegen  $m = nq_0 + r_1$  schreiben:

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0+r_1}, u_n) \quad \text{oder} \quad (u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_r + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n)$$

und auf Grund der Ergebnisse der Nr. 1 und 10

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n)$$

wegen Nr. 11 und 8 erhalten wir hieraus:

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$$

Analog beweist man

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1}) \quad ; \quad (u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2}) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad (u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

Diese Gleichungen liefern zusammen:

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

und da  $r_t$ , ein Teiler von  $r_{t-1}$  ist, so dass auch  $u_{r_{t-1}}$  durch  $u_{r_t}$  teilbar ist, folgt

$$(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$$

Erinnern wir uns schließlich, dass  $r_t = (m, n)$  ist, so kommen wir zu dem verlangten Ergebnis.

Insbesondere folgt aus dem soeben bewiesenen Satz die Umkehrung des Satzes von Nr. 1:

Ist  $u_n$  teilbar durch  $u_m$ , so ist auch  $n$  teilbar durch  $m$ .

In der Tat folgt aus der Teilbarkeit von  $u_n$  durch  $u_m$  nach Nr. 8

$$(u_n, u_m) = u_m \quad (2.4)$$

Wie wir eben bewiesen haben, ist aber

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)} \quad (2.5)$$

Aus den Gleichungen (2.4) und (2.5) zusammen erhalten wir unmittelbar

$$u_m = u_{(n,m)}$$

d.h.  $m = (n, m)$ ; das bedeutet aber, dass  $n$  durch  $m$  teilbar ist.

**13.** Der Satz aus Nr. 1 und die Folgerung aus dem Satz in Nr. 12 ergeben zusammen:  $u_n$  ist dann und nur dann durch  $u_m$  teilbar, wenn  $n$  durch  $m$  teilbar ist.

Man kann also über die Teilbarkeit von Fibonacci'schen Zahlen Aussagen machen, indem man die Teilbarkeit ihrer Indizes untersucht.

Wir gehen nun als Beispiel einige Teilbarkeitskriterien für Fibonacci'sche Zahlen an. Darunter verstehen wir hier Kriterien, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob eine vorgegebene Fibonacci'sche Zahl durch irgendeine gegebene Zahl teilbar ist oder nicht.

Eine Fibonacci'sche Zahl ist dann und nur dann gerade (durch 2 teilbar), wenn ihr Index durch 3 teilbar ist.

Eine Fibonacci'sche Zahl ist dann und nur dann durch 3 teilbar, wenn ihr Index durch 4 teilbar ist.

Eine Fibonacci'sche Zahl ist dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn ihr Index durch 6 teilbar ist.

Eine Fibonacci'sche Zahl ist dann und nur dann durch 5 teilbar, wenn ihr Index durch 5 teilbar ist.

Eine Fibonacci'sche Zahl ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn ihr Index durch 8 teilbar ist.

Diese und ähnliche Teilbarkeitskriterien kann der Leser mit Hilfe des zu Anfang dieses Punktes formulierten Satzes leicht selbst beweisen, indem er beziehungsweise die dritten, vierten, sechsten, fünften, achten usw. Fibonacci'schen Zahlen betrachtet.

Der Leser möge auch beweisen, dass keine Fibonacci'sche Zahl existiert, die bei Division durch 8 den Rest 4 lässt, sowie die Tatsache, dass es keine ungerade Fibonacci'sche Zahl

gibt, die durch 17 teilbar ist.

**14.** Im Laufe dieses Paragraphen stießen wir oft auf Aussagen der Art "die Zahlen  $a$  und  $b$  lassen bei Division durch  $m$  denselben Rest" oder, was im wesentlichen dasselbe ist, "die Differenz  $a - b$  ist durch  $m$  teilbar".

Wir müssen lernen, mit diesen Begriffen sicher umzugehen und beide Aussagetypen gleichzeitig zu verwenden. Wir werden deshalb, wie es in der Zahlentheorie üblich ist, diese Aussagen durch Formeln ausdrücken. Dazu müssen wir uns einen "Kalkül" schaffen.

Definition. Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  heißen kongruent modulo  $m$ , wenn  $a$  und  $b$  bei Division durch  $m$  den gleichen Rest ergeben oder wenn  $a - b$  durch  $m$  teilbar ist. Anderenfalls heißen sie inkongruent modulo  $m$ . Die Kongruenz von  $a$  und  $b$  modulo  $m$  drückt man durch die Schreibweise

$$a \equiv b \pmod{m}$$

aus. Die natürliche Zahl  $m$  heißt der Modul der Kongruenz.

Offenbar ist, wenn  $m$  einen Teiler von  $a$  bezeichnet,

$$a \equiv 0 \pmod{m}$$

und umgekehrt.

**15.** Kongruenzen modulo derselben Zahl lassen sich - ähnlich wie Gleichungen - seitenweise addieren.

Lemma. Ist

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m},$$

$$a_2 \equiv b_2 \pmod{m},$$

...

$$a_n \equiv b_n \pmod{m}$$

so gilt  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{m}$ .

Beweis. Die Voraussetzung besagt, dass  $m$  ein Teiler jeder der Differenzen

$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad \dots, \quad a_n - b_n$$

und daher auch Teiler ihrer Summe

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_n - b_n) \quad \text{d.h.} \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

ist, was zu beweisen war.

**16.** In Nr. 9 zeigten wir, dass für eine Primzahl  $p$  und eine Zahl  $k$  ( $0 < k < p$ )

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.6}$$

gilt. Diese Kongruenz lässt sich auch in der Form

$$\binom{p}{k+1} \equiv p \pmod{p} \quad (2.7)$$

mit  $0 < k < p-1$  schreiben.

Für  $0 < k < p-1$  gelten also beide Kongruenzen (2.6) und (2.7). Ihre Addition ergibt

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} \equiv \binom{p}{k} \pmod{p}, \quad \binom{p+1}{k+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

d.h., in der  $(p+1)$ -ten Zeile ( $p$  Primzahl) des Pascalschen Dreiecks sind alle Glieder außer vier (nämlich den beiden äußersten rechten und linken) Gliedern durch  $p$  teilbar. Es lässt sich auch leicht nachweisen, dass

$$\binom{p+1}{0} \equiv \binom{p+1}{1} \equiv \binom{p+1}{p} \equiv \binom{p+1}{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist.

**17.** Der Kongruenz (2.6) kann man auch die Gestalt

$$\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{oder} \quad \binom{p-1}{k-1} \equiv -\binom{p-1}{k} \pmod{p}$$

geben. Dies gilt für jedes  $k = 1, 2, \dots, p-1$ . Das bedeutet:

$$\binom{p-1}{0} \equiv -\binom{p-1}{1} \equiv \binom{p-1}{2} \equiv -\binom{p-1}{3} \equiv \dots \equiv \binom{p-1}{p-1} \pmod{p}$$

Wegen  $\binom{p-1}{0} = 1$  besagt die letzte Kongruenz, dass in der  $(p-1)$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks die erste, dritte, ... Zahl kongruent 1 und die zweite, vierte, ... Zahl kongruent -1 modulo  $p$  ist.

**18.** Kongruenzen modulo derselben Zahl können nicht nur addiert, sondern auch multipliziert werden.

Lemma. Ist

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2 &\equiv b_2 \pmod{m} \\ &\dots \\ a_n &\equiv b_n \pmod{m} \end{aligned} \quad (2.8)$$

so gilt

$$a_1 a_2 \dots a_n \equiv b_1 b_2 \dots b_n \pmod{m} \quad (2.9)$$

Beweis (durch vollständige Induktion nach  $n$ ). Für  $n = 1$  ist die Aussage trivial. Wir setzen voraus, dass sie für ein gewisses  $n > 1$  richtig ist [d.h., dass (2.9) aus (2.8) folgt], und fügen zu (2.8) die Kongruenz

$$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{m} \quad (2.10)$$

hinzu. Die Kongruenzen (2.9) und (2.10) besagen, dass die Differenzen  $a_1 a_2 \dots a_n - b_1 b_2 \dots b_n$  und  $a_{n+1} - b_{n+1}$  durch  $m$  teilbar sind. Folglich ist

$$a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n + mT \quad , \quad a_{n+1} = b_{n+1} + mt$$

( $T, t$  ganze Zahlen). Multiplizieren wir diese Gleichungen seitenweise, so ergibt sich

$$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} + m(b_1 b_2 \dots b_n t + b_{n+1} T + mTt)$$

In der runden Klammer steht eine ganze Zahl. Somit ist

$$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \equiv b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \pmod{m}$$

was zu beweisen war.

Aus dem bewiesenen Lemma lässt sich schließen, dass beide Seiten der Kongruenz in eine beliebige nichtnegative Potenz erhoben werden können.

Als trivialer Spezialfall ergibt sich die folgende Tatsache: Das Produkt von Zahlen der Form  $4t + 1$  hat ebenfalls die Form  $4t + 1$ .

Sind nämlich  $n$  Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gegeben, so ist nach Voraussetzung

$$a_1 \equiv 1 \pmod{4}, \quad a_2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad \dots, \quad a_n \equiv 1 \pmod{4}$$

woraus, wenn wir diese Kongruenzen seitenweise multiplizieren,

$$a_1 a_2 \dots a_n \equiv 1 \pmod{4}$$

folgt.

**19.** Die Regel für das Kürzen von Kongruenzen lautet so ähnlich wie bei Gleichungen; eine Gleichung kann man durch jede von Null verschiedene Zahl, eine Kongruenz durch jede zum Modul teilerfremde Zahl dividieren.

Lemma. Ist

$$ac \equiv bc \pmod{m} \tag{2.11}$$

mit  $(c, m) = 1$ , so gilt

$$a \equiv b \pmod{m} \tag{2.12}$$

Beweis. Die Differenz  $ac - bc = (a - b)c$  ist durch  $m$  teilbar [aufgrund von (2.11)], und da  $(c, m) = 1$  ist, muss  $m$  Teiler von  $a - b$  sein, also (2.12) gelten.

**20.** Bei vielen Untersuchungen erweist sich die folgende Behauptung, der sogenannte "Kleine Fermatsche Satz", als nützlich.

Satz. Ist  $p$  eine Primzahl und  $a$  eine nicht durch  $p$  teilbare Zahl, so gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Beweis. Wir betrachten die Zahlen

$$a, 2a, \dots, (p-1)a \tag{2.13}$$

Je zwei von ihnen sind inkongruent modulo  $p$ . Wäre nämlich

$$ka \equiv la \pmod{p}$$

so folgte wegen  $(a, p) = 1$  aufgrund von Nr. 19

$$k \equiv l \pmod{p}$$

d.h.,  $p$  wäre Teiler von  $k - l$ , was jedoch für  $0 < k, l < p$  und  $k \neq l$  unmöglich ist.

Außerdem ist keine der betrachteten Zahlen (2.13) durch  $p$  teilbar, d. h., alle Zahlen (2.13) haben bei Division durch  $p$  die von Null und voneinander verschiedenen Reste  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ .

Nun gibt es  $p - 1$  Zahlen (2.13) und  $p - 1$  von Null und voneinander verschiedene Reste nach Division der Zahlen (2.13) durch  $p$ ; folglich kommt nach Division der Zahlen (2.13) durch  $p$  mit Rest jeder der Reste  $1, 2, \dots, p - 1$  unter den Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  vor. Also ist

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{p} \\ 2a &\equiv r_2 \pmod{p} \\ &\dots \\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

Seitenweise Multiplikation dieser Kongruenzen ergibt

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \dots r_{p-1} \pmod{p} \quad (2.14)$$

Wie wir eben erwähnten, stimmen die Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  mit den nur in anderer Reihenfolge angeordneten Zahlen  $1, 2, \dots, p - 1$  überein. Folglich lässt sich (2.14) auf die Form

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p} \quad (2.15)$$

bringen. Da das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$  zu  $p$  teilerfremd ist, können wir die Kongruenz (2.15) kürzen und erhalten

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

**21.** In Nr. 2 haben wir gesehen, dass unter den Teilern der Fibonacciischen Zahlen alle Zahlen auftreten. Jetzt wollen wir uns davon überzeugen, dass man die Fibonacciischen Zahlen, deren Teiler eine bestimmte Form haben, in Klassen zusammenfassen kann. Beispielsweise gilt der folgende Satz.<sup>3</sup>

**Satz.** Sämtliche ungeraden Teiler einer Fibonacciischen Zahl mit ungeradem Index haben die Form  $4t + 1$ .

---

<sup>3</sup>Der Autor dankt einem Leningrader Leser, der sich für die Fibonacciischen Zahlen interessiert und auf diesen Satz hingewiesen hat.

Beweis. Die Formel (1.10) vgl. § 1, Nr. 9 - liefert für ungerades  $n$

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + 1$$

daraus folgt

$$u_{n-1}u_{n-2} - u_n^2 = u_{n-1}(u_{n-1} + u_n) - u_n^2 = u_{n-1}^2 + u_{n-1}u_n - u_n^2 = -1 \quad (2.16)$$

Nun sei  $p$  ( $p \neq 2$ ) ein Primteiler von  $u_n$ . Aus (2.16) folgt, dass  $u_{n-1}^2 + 1$  durch  $u_n$  und somit auch durch  $p$  teilbar ist. Folglich gilt

$$u_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

Wir erheben beide Seiten dieser Kongruenz in die  $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ -te Potenz:

$$(u_{n-1}^2)^{(p-1)/2} = u_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}$$

Ferner ist  $(u_{n-1}, u_n) = 1$ , so dass  $u_{n-1}$  nicht durch  $p$  dividiert werden kann. Das stimmt genau mit den Voraussetzungen des Kleinen Fermatschen Satzes überein und bedeutet (vgl. Nr. 20)

$$u_{n-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Also ist

$$(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{d.h.} \quad (-1)^{(p-1)/2} = 1$$

Also muss  $\frac{p-1}{2}$  eine gerade Zahl und somit  $p$  von der Form  $4t + 1$  sein.

Damit haben alle ungeraden Primteiler von  $u_n$  und folglich (vgl. den Schluss von Nr. 18) auch alle ihre Produkte, d. h. überhaupt alle (vgl. § 1, Nr. 5) ungeraden Teiler von  $u_n$  die Form  $4t + 1$ .

**22.** Aufgrund der Definition der Kongruenz sind alle Zahlen, die nach Division durch  $m$  denselben Rest lassen, zueinander kongruent modulo  $m$ . Dagegen sind Zahlen, die nach Division durch  $m$  verschiedene Reste haben, inkongruent.

Der Rest nach Division durch  $m$  kann eine der Zahlen  $1, 2, \dots, m-1$  sein, so dass es höchstens  $m$  modulo  $m$  inkongruente Zahlen gibt. Nun sei  $m$  eine ungerade Zahl, und wir betrachten die  $m$  Zahlen

$$-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2} \quad (2.17)$$

Je zwei von ihnen sind inkongruent modulo  $m$  (sonst müsste ihre Differenz durch  $m$  teilbar sein, aber deren Absolutbetrag ist kleiner als  $m$  und von Null verschieden). Folglich ist jede Zahl zu einer der Zahlen (2.17) kongruent modulo  $m$ . Die Zahlen (2.17) bilden das sogenannte absolut-kleinste Restsystem modulo  $m$ . Offenbar ist der Absolutbetrag jedes der absolut-kleinsten Reste kleiner als der halbe Modul.

Für gerades  $m$  lässt sich ebenfalls ein absolut-kleinste Restsystem angeben. Es sieht etwas anders aus als (2.17), und zwar

$$-\frac{m-2}{2}, -\frac{m-4}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$$



Wir gehen jedoch darauf nicht weiter ein, da wir es nicht benötigen.

**23.** Es sei  $m$  eine ungerade und nicht durch 5 teilbare Zahl. Wir bilden dann das absolut-kleinste Restsystem modulo  $m$  der Zahlen  $5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, \dots, \frac{m-1}{2} \cdot 5$ . Beispielsweise lautet dieses Restsystem für  $m = 21$

$$5, 10, -6, -1, 4, 9, -7, -2, 3, 8$$

Wir wollen nun klären, wie die positiven und die negativen absolut-kleinsten Reste bei verschiedenen  $m$  aufeinanderfolgen. Es wird sich zeigen, dass dies von der letzten Ziffer der Zahl  $m$  (im Dezimalsystem) abhängt.

**Lemma.** Im Fall  $m = 10t + 1$  wechseln die Vorzeichen im absolutkleinsten Restsystem folgendermaßen:  $t$  positive,  $t$  negative,  $t$  positive,  $t$  negative,  $t$  positive Reste.

Ist  $m = 10t + 3$ , so ergeben sich  $t$  positive,  $t$  negative,  $t$  positive,  $t + 1$  negative,  $t$  positive Reste.

Für  $m = 10t + 7$  weist das Restsystem  $t$  positive,  $t + 1$  negative,  $t + 1$  positive,  $t$  negative,  $t + 1$  positive Reste auf.

Im Fall  $m = 10t + 9$  ergeben sich  $t$  positive,  $t + 1$  negative,  $t + 1$  positive,  $t + 1$  negative,  $t + 1$  positive Reste.

**Beweis.** Jede dieser vier Behauptungen lässt sich einzeln durch Ausrechnen bestätigen. Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Behauptung und überlassen die anderen Beweise dem Leser.

Es sei also  $m = 10t + 1$ . Offenbar ist  $5k \leq \frac{m-1}{2}$  für  $k \leq t$ , so dass alle diese Zahlen  $5k$  schon absolut-kleinste Reste modulo  $m$  sind. Ihre Anzahl ist gleich  $t$ , und der letzte Rest ist  $5t$ .

Wegen  $5(t+1) > \frac{m-1}{2}$  ist der darauffolgende absolut-kleinste Rest negativ (er ist gleich  $+5t + 4$ ).

Addieren wir zu diesem Rest  $t - 1$  Mal die Fünf, so erhalten wir die ganze Serie der  $t$  negativen Zahlen, die mit  $-1$  endet. Dann folgt die positive Zahl 4, wonach sich noch  $t - 1$  positive Zahlen (d.h. bis einschließlich  $4 + (t - 1) \cdot 5 = 5t - 1$ ) anschließen. Danach erscheinen wieder negative Zahlen (von  $-5t + 3$  bis  $-2$ ; insgesamt  $t$  Zahlen).

Schließlich erhalten wir die  $t$  positiven Schlussglieder  $3, \dots, 5t - 2$  des Restsystems. Damit ist die erste Behauptung des Lemmas bewiesen.

An diesem Lemma interessiert uns ganz besonders die Tatsache, dass die Anzahl der negativen Glieder im absolut-kleinsten Restsystem modulo  $m$  für  $m = 10t \pm 1$  gerade und für  $m = 10t \pm 3$  ungerade ist.

**24. Lemma.** Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $5t \pm 1$ , so ist  $5^{(p-1)/2} - 1$  durch  $p$  teilbar. Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $5t \pm 2$ , so ist  $5^{(p-1)/2} + 1$  durch  $p$  teilbar.

**Beweis.** Es ist

$$5 \equiv \varepsilon_1 r_1 \pmod{p}$$

$$2 \cdot 5 \equiv \varepsilon_2 r_2 \pmod{p}$$

...

$$\frac{p-1}{2} \cdot 5 \equiv \varepsilon_{(p-1)/2} r_{(p-1)/2} \pmod{p}$$

wobei  $\varepsilon_k r_k$  die absolut-kleinsten Reste von  $k \cdot 5$  modulo  $p$  sind ( $r_k > 0$ ;  $\varepsilon_k = \pm 1$  gibt das Vorzeichen des Restes an).

Wir multiplizieren alle diese Kongruenzen seitenweise und erhalten

$$1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2} \cdot 5^{(p-1)/2} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{(p-1)/2} r_1 r_2 \dots r_{(p-1)/2} \pmod{p} \quad (2.18)$$

Bei den folgenden Überlegungen stützen wir uns auf den Beweis des Kleinen Fermatschen Satzes.

Keine der positiven Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{(p-1)/2}$  ist größer als  $\frac{p-1}{2}$ .

Gäbe es unter diesen Zahlen gleiche, wäre etwa  $r_k = r_l$  ( $1 \leq k, l \leq \frac{p-1}{2}$ ), so wäre  $5k \equiv \pm 5l \pmod{p}$ , also wegen  $(5, p) = 1$  auch  $k \equiv \pm l \pmod{p}$ . Das ist aber wegen

$$-p < k - l < k + l < p \quad \text{und} \quad k - l \neq 0$$

unmöglich. Also müssen alle Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_{(p-1)/2}$  voneinander verschieden sein, d. h., sie stimmen mit den nur in anderer Reihenfolge angeordneten Zahlen  $1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$  überein. Da alle diese Zahlen zu  $p$  teilerfremd sind, können wir (2.18) durch ihr Produkt  $1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2}$  dividieren, und wir finden

$$5^{(p-1)/2} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{(p-1)/2} \pmod{p}$$

Nun ziehen wir das Lemma aus Nr. 23 heran. Danach ist die Anzahl der im Produkt  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{(p-1)/2}$  enthaltenen negativen Faktoren gerade für  $p = 10t \pm 1$  (da  $p$  ungerade ist, ist dies gleichbedeutend damit, dass  $p$  die Form  $5t \pm 1$  hat) und ungerade für  $p = 10t \pm 3$  (d.h.,  $p$  hat die Gestalt  $5t \pm 2$ ). Damit ist der Beweis beendet.

**25.** Nun können wir den grundlegenden Satz über die Teilbarkeit der Fibonacci'schen Zahlen durch eine Primzahl beweisen.

**Satz.** Hat eine Primzahl  $p$  die Form  $5t \pm 1$ , so ist sie Teiler von  $u_{p-1}$ . Ist  $p = 5t \pm 2$ , so ist  $p$  Teiler von  $u_{p+1}$ .

**Beweis.** Zunächst sei  $p = 5t \pm 1$ . Nach der Binetschen Formel (1.20) ist

$$\begin{aligned} u_{p-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^{p-1}} \left[ 1 + \binom{p-1}{1} \sqrt{5} + \binom{p-1}{2} (\sqrt{5})^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{p-1}{p-1} (\sqrt{5})^{p-1} - 1 + \binom{p-1}{1} \sqrt{5} - \binom{p-1}{2} (\sqrt{5})^2 + \dots - \binom{p-1}{p-1} (\sqrt{5})^{p-1} \right] \end{aligned}$$

oder, nach Vereinfachung,

$$u_{p-1} = \frac{1}{2^{p-2}} \left[ \binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{3} \cdot 5 + \binom{p-1}{5} \cdot 5^2 + \dots + \binom{p-1}{p-2} \cdot 5^{(p-3)/2} \right]$$

Aufgrund des in Nr. 17 Gesagten sind alle hier auftretenden Binomialkoeffizienten kongruent 1 modulo  $p$ . Also folgt

$$2^{p-1}u_{p-1} \equiv 2[1 + 5 + \dots + 5^{(p-3)/2}] \pmod{p}$$

und hieraus

$$u_{p-1} \equiv \frac{5^{(p-1)/2} - 1}{2} \pmod{p}$$

wenn wir die geometrische Reihe summieren und berücksichtigen, dass  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  gilt. Nach Nr. 24 ist der Zähler des rechts stehenden Bruches und wegen  $(p, 2) = 1$  auch der gesamte Bruch durch  $p$  teilbar.

Also ist  $p$  auch Teiler von  $u_{p-1}$ , so dass der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Wir wenden uns nun dem Fall  $p = 5t \pm 2$  zu. Dann erhalten wir, wieder mit Hilfe der Binetschen Formel (1.20),

$$u_{p+1} = \frac{1}{2^p} \left[ \binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{3} \cdot 5 + \binom{p+1}{5} \cdot 5^2 + \dots + \binom{p+1}{p} \cdot 5^{(p-1)/2} \right] \pmod{p}$$

Nach Nr. 16 lassen sich alle Summanden in der Klammer, außer den beiden äußeren, durch  $p$  teilen, und  $\binom{p+1}{1} = \binom{p+1}{p}$  gibt nach Division durch  $p$  den Rest 1. Daher ist

$$u_{p+1} = \frac{1}{2}[1 + 5^{(p-1)/2}] \pmod{p}$$

Wenden wir hierauf das Lemma aus Nr. 24 an, so erkennen wir, dass  $p$  Teiler von  $u_{p+1}$  ist.

**26.** Nun sei die Fibonacciische Zahl  $u_n$ , aber keine der Fibonacciischen Zahlen  $< u_n$  durch eine gewisse Primzahl  $p$  teilbar. In diesem Fall nennen wir  $p$  einen zu  $u_n$  gehörigen Teiler. Zum Beispiel ist 11 ein zu  $u_{10}$  gehöriger Teiler, 17 ein zu  $u_9$  gehöriger Teiler usw.

Es lässt sich zeigen, dass jede Fibonacciische Zahl außer  $u_1, u_2, u_6$  und  $u_{12}$  wenigstens einen zugehörigen Teiler besitzt.

Der Beweis dieser Aussage erfordert überaus komplizierte Überlegungen und nimmt den Rest dieses Paragraphen in Anspruch. Dabei werden wir nach und nach weitere Teilbarkeitseigenschaften der Fibonacciischen Zahlen herleiten.

**27.** Wir beginnen mit einigen allgemeinen zahlentheoretischen Untersuchungen.

Da wir aus Nr. 8 wissen, wann ein Produkt durch eine Primzahl teilbar ist, können wir den sogenannten Satz über die Primfaktorzerlegung beweisen.

**Satz.** Jede natürliche Zahl  $a$  lässt sich (bis auf die Anordnung der Faktoren) auf genau eine Art in nicht notwendig verschiedene Primfaktoren zerlegen.

**Beweis.** Zunächst bemerken wir, dass so eine Zerlegung stets möglich ist. Das wurde schon in § 1, Nr. 5, unmittelbar induktiv nachgewiesen. Zum Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung betrachten wir zwei Zerlegungen der Zahl  $a$  in Primfaktoren:

$$p_1 p_2 \dots p_k = a = q_1 q_2 \dots q_l$$

Wir nehmen  $k \leq l$  an. Die rechte Seite muss durch  $p_1$  teilbar sein; also ist  $p_1$  nach dem in Nr. 8 Gesagten Teiler von mindestens einem der rechts auftretenden Faktoren. Es sei etwa  $p_1$  ein Teiler von  $q_1$ . Dies ist aber nur für  $p_1 = q_1$  möglich, da  $q_1$  eine Primzahl ist. Wir können also kürzen und erhalten

$$p_2 \dots p_k = a = q_2 \dots q_l$$

Wiederholen wir diese Überlegungen  $k$ -mal (Induktion!), d.h., beseitigen wir alle Faktoren auf der linken Seite, so gelangen wir zu der Gleichung

$$1 = q_{k+1} \dots q_l$$

Das ist aber nur für  $q_{k+1} = \dots = q_l = 1$  möglich, d.h., es existieren keine Primfaktoren  $q_{k+1}, \dots, q_l$ . Damit ist der Satz bewiesen.

**28.** Fassen wir bei der Primfaktorzerlegung von  $a$  alle gleichen Faktoren zu Potenzen zusammen, so erhalten wir

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (2.19)$$

Diese Darstellung einer natürlichen Zahl  $a$  heißt die kanonische Zerlegung von  $a$ . Manchmal ist es bei gewissen Überlegungen von Nutzen, noch beliebige weitere Primfaktoren mit dem Exponenten 0 hinzuzufügen.

**29.** Für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl  $a$  mit der kanonischen Zerlegung (2.19) durch die natürliche Zahl

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \quad (2.20)$$

ist offenbar notwendig und hinreichend, dass die Ungleichungen

$$\beta_1 \leq \alpha_1, \quad \beta_2 \leq \alpha_2, \quad \dots, \quad \beta_k \leq \alpha_k$$

erfüllt sind. (Insbesondere muss im Fall  $\alpha_i = 0$  auch  $\beta_i = 0$  sein.)

Nun wollen wir noch einmal den größten gemeinsamen Teiler zweier oder mehrerer Zahlen bestimmen.

Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  beliebig gewählte natürliche Zahlen und  $p_1, p_2, \dots, p_k$  Primzahlen, die wenigstens eine der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  teilen. Die kanonischen Zerlegungen der  $a_1, a_2, \dots, a_n$  lauten

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \dots p_k^{\alpha_{1k}} \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \dots p_k^{\alpha_{2k}} \\ &\dots \\ a_n &= p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \dots p_k^{\alpha_{nk}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

(sämtliche Exponenten  $\alpha_{ij}$  sind nichtnegativ). Offenbar kann jeder gemeinsame Teiler  $d$  der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  in seiner kanonischen Zerlegung nur Primfaktoren  $p_1, p_2, \dots, p_k$  enthalten:

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$$

Dabei darf jeder Exponent  $\delta_i$  nicht größer sein als jeder der ihm entsprechenden Exponenten  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}$  bei  $p_i$  in den kanonischen Zerlegungen von  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$\delta_i \leq \alpha_{1i}, \quad \delta_i \leq \alpha_{2i}, \quad \dots, \quad \delta_i \leq \alpha_{ni} \quad (2.22)$$

Ist dieser gemeinsame Teiler  $d$  zugleich der größte gemeinsame Teiler, so müssen die Exponenten  $\delta_i$  unter allen Zahlen, die den Ungleichungen (2.22) genügen, die größten sein. Das bedeutet, dass jedes  $\delta_i$  einfach die kleinste der entsprechend gewählten Zahlen  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}$  sein muss. Dafür schreiben wir

$$\delta_i = \min\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}\}$$

Den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bezeichnen wir, ähnlich wie im Fall zweier Zahlen, mit  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**30.** In gewissem Sinne dual zum Begriff des größten gemeinsamen Teilers ist der Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen.

Offenbar muss jede Zahl, die durch die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mit den kanonischen Zerlegungen (2.21) teilbar ist, in ihrer kanonischen Zerlegung alle Primfaktoren aufweisen, die in wenigstens einer der Zerlegungen (2.21) auftreten, d.h. die Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Außerdem können in die kanonische Zerlegung des gemeinsamen Vielfachen noch irgendwelche "unwesentlichen" Faktoren eingehen. Somit muss die kanonische Zerlegung jedes gemeinsamen Vielfachen  $m$  der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Gestalt

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_k^{\mu_k} Q$$

haben; dabei bezeichnet  $Q$  das Produkt aller "unwesentlichen" Primfaktoren. Offenbar muss für jedes  $i = 1, \dots, k$

$$\mu_i \geq \alpha_{1i}, \quad \mu_i \geq \alpha_{2i}, \quad \dots, \quad \mu_i \geq \alpha_{ni} \quad (2.23)$$

gelten.

Ist  $m$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so muss der Faktor  $Q$  offenbar gleich 1 sein, und alle Exponenten  $\mu_i$  müssen die kleinsten derjenigen Zahlen sein, die den Ungleichungen (2.23) genügen. Das bedeutet, dass jedes  $\mu_i$  die größte der Zahlen  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}$  ist:

$$\mu_i = \max\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}\}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bezeichnen wir mit  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

**31.** Wir beweisen nun einen Hilfssatz.

**Lemma.** Für beliebige Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  gilt

$$\begin{aligned} \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ &\quad - \min\{\alpha_1, \alpha_2\} - \min\{\alpha_1, \alpha_3\} - \dots - \min\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} \\ &\quad + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} + \dots \\ &\quad \pm \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

(In der zweiten Zeile stehen alle Minima zweier Zahlen, in der dritten Zeile alle Minima dreier Zahlen, usw.)

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  in nichtwachsender Reihenfolge angeordnet sind:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$$

Dann ist

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \alpha_1$$

Wir berechnen nun den Wert der rechten Seite von (2.24). Dazu überlegen wir uns, wie oft jede der Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  in ihr vorkommt. Dabei werden wir, wenn zwei Zahlen  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  gleich sind, diejenige als die kleinere auffassen, die den größeren Index hat (offenbar hat diese Verabredung keinen Einfluss auf die Größe der zu betrachtenden Ausdrücke).

Wir erinnern daran, dass  $\alpha_1$  die größte der zu untersuchenden Zahlen ist. Daher tritt  $\alpha_1$  nur in der ersten Zeile der rechten Seite von (2.24) auf, und zwar nur ein einziges Mal. Auf der rechten Seite von (2.24) ist also der Koeffizient von  $\alpha_1$  gleich 1.

Wir untersuchen nun, wie oft auf der rechten Seite von (2.24) ein gewisses  $\alpha_i$  ( $i > 1$ ) vorkommt. In der ersten Zeile steht es einmal.

In der zweiten und den darauffolgenden Zeilen bis zur  $i$ -ten Zeile einschließlich tritt es nur in den Minima auf, in denen zusammen mit  $\alpha_i$  nur Zahlen mit kleineren Indizes als stehen. In jeder  $j$ -ten Zeile ( $j \leq i$ ) kommt  $\alpha_i$  folglich so oft vor, wie es Kombinationen aus  $i - 1$  Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$  zur  $(j - 1)$ -ten Klasse gibt, also  $\binom{i-1}{j-1}$  Mal; vgl. § 1, Nr. 14. Die Zahl  $\alpha_i$  tritt somit insgesamt

$$1 - \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} - \dots \pm \binom{i-1}{j-1}$$

Mal auf. Aufgrund von § 1, Nr. 13, ist dieser Ausdruck gleich 0. Folglich ist die rechte Seite von (2.24) gleich  $\alpha_1$ , d. h. gleich der linken Seite. Damit ist das Lemma bewiesen.

**32.** Wir benutzen nun das Bewiesene zur bequemeren Schreibweise des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen.

Satz. Es ist

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{a_1 a_2 \dots a_n (a_1, a_2, a_3) (a_1 a_2 a_4) \dots}{(a_1, a_2) (a_1, a_3) \dots (a_{n-1}, a_n) (a_1, a_2, a_3, a_4) \dots} \quad (2.25)$$

(Hier steht im Zähler das Produkt der Ausgangszahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und der größten gemeinsamen Teiler aller möglichen Tripel, 5-tupel usw.; der Nenner ist das Produkt aller größten gemeinsamen Teiler der Paare, Quadrupel usw. der Ausgangszahlen.)

Beweis. Es sei  $p$  ein beliebiger Primfaktor in den kanonischen Zerlegungen gewisser Zahlen aus  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Mit  $\alpha_1$  bezeichnen wir den Exponenten, mit welchem  $p$  in der

kanonischen Zerlegung von  $a_i$  auftritt. Dann erscheint  $p$  auf der linken Seite von (2.25) aufgrund von Nr. 30 mit dem Exponenten

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad (2.26)$$

auf der rechten Seite von (2.25) aufgrund von Nr. 29 mit dem Exponenten

$$\begin{aligned} \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ &\quad - \min\{\alpha_1, \alpha_2\} - \min\{\alpha_1, \alpha_3\} - \dots - \min\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} \\ &\quad + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} + \dots \\ &\quad \pm \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit Hilfe von Nr. 31 erkennen wir, dass die Ausdrücke (2.26) und (2.27) einander gleich sind. Somit gibt es in den kanonischen Zerlegungen der rechten: und der linken Seite von (2.25) dieselben Primfaktoren und dieselben Exponenten.

**33.** Wir kehren nun zum Studium der Teilbarkeitseigenschaften für Fibonacciische Zahlen zurück.

Lemma. Der Ausdruck

$$u_{mn-1} - u_{n-1}^m \quad (2.28)$$

ist durch  $u_n^2$  teilbar.

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch vollständige Induktion nach  $m$ . Für  $m = 1$  ist (2.28) gleich 0 und somit durch  $u_n^2$  teilbar. Wir setzen nun voraus, dass (2.28) für ein beliebiges  $m > 1$  durch  $u_n^2$  teilbar ist, und betrachten den Ausdruck

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} = (u_{mn-1}u_{n-1} + u_{mn}u_n) - u_{n-1}^{m+1}$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung

$$u_{mn-1} \equiv u_{n-1}^m \pmod{u_n^2}$$

und folglich

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{n-1}^m u_{n-1} + u_{mn}u_n - u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^2} \quad (2.29)$$

Aus Nr. 1 folgt, dass  $u_n$  ein Teiler von  $u_{mn}$  ist; also gilt

$$u_{mn}u_n \equiv 0 \pmod{u_n^2}$$

und (2.29) geht über in

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} \equiv 0 \pmod{u_n^2}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

**34.** Lemma. Der Ausdruck

$$u_{mn} - u_{n+1}^m + u_{n-1}^m \quad (2.30)$$

ist durch  $u_n^3$  teilbar.

Beweis (durch Induktion nach  $m$ ). Für  $m = 1$  ist der Ausdruck (2.30) gleich 0 und somit durch  $u_n^3$  teilbar. Wir setzen nun voraus, dass (2.30) für ein beliebiges  $m > 1$  durch  $u_n^3$  teilbar ist, und betrachten den Ausdruck

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} = u_{mn-1}u_n + u_{mn}u_{n+1} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$u_{mn} \equiv u_{n+1}^m - u_{n-1}^m \pmod{u_n^3}$$

Folglich ist

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{mn-1}u_n + u_{n+1}(u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^3}$$

oder

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{mn-1}u_n + u_{n-1}^m(u_{n+1} - u_{n-1}) \pmod{u_n^3}$$

oder

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_n(u_{mn-1} - u_{n-1}^m) \pmod{u_n^3}$$

Nach Nr. 33 ist die auf der rechten Seite in runden Klammern stehende Differenz durch  $u_n^2$  teilbar, so dass sich die ganze rechte Seite durch  $u_n^3$  teilen lässt, also kongruent 0 modulo  $u_n^3$  ist, was zu beweisen war.

**35.** Es sei  $p$  eine Primzahl. Wie wir schon in Nr. 1 bewiesen haben, ist  $u_n$  ein Teiler von  $u_{np}$ . Daher können beim Übergang von  $u_n$  zu  $u_{np}$  erstens neue Primteiler auftreten und zweitens sich die Exponenten bei den alten Primteilern von  $u_n$  vergrößern.

Wir beweisen nun einen Satz, aus dem folgt, dass sich nur bei  $p$  und sonst bei keinem anderen Primteiler von  $u_n$  der Exponent vergrößern kann. Im Fall  $p \neq 2$  erhöht sich der Exponent bei  $p$  nur um 1, im Fall  $p = 2$  um nicht mehr als 2.

**Satz.** Ist  $q$  ein von  $p$  verschiedener Primteiler von  $u_n$ , so ist  $u_{np}/u_n$  nicht durch  $q$  teilbar. Ist  $p$  ein ungerader Primteiler von  $u_n$  (also  $p \neq 2$ ), so ist  $u_{np}/u_n$  durch  $p$ , aber nicht durch  $p^2$  teilbar.

Ist  $u_n$  durch 4 teilbar, so ist  $u_{2n}/u_n$  durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.

Ist  $u_n$  durch 2, aber nicht durch 4 teilbar, so ist  $u_{2n}/u_n$  durch 4, aber nicht durch 8 teilbar.

**Beweis.** In dem Lemma aus Nr. 34 ersetzen wir  $m$  durch  $p$ . Dann ist der Ausdruck  $u_{np} - u_{n+1}^p + u_{n-1}^p$  durch  $u_n^3$  teilbar. Nun ist  $u_n$  ein Teiler von  $u_{np}p$  (vgl. Nr. 1), und es gilt

$$\begin{aligned} u_{np} - u_{n+1}^p + u_{n-1}^p &= (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \dots + u_{n-1}^{p-1}) \\ &= u_n(u_{n+1}^{p-1} + u_{n-1}^{p-2}u_{n-1} + \dots + u_{n-1}^{p-1}) \end{aligned}$$

Folglich ist die Differenz

$$\frac{u_{np}}{u_n} - (u_{n+1}^{p-1} + u_{n-1}^{p-2}u_{n-1} + \dots + u_{n-1}^{p-1}) \quad (2.31)$$



durch  $u_n^2$  teilbar.

Erstens folgt hieraus, dass sich die Differenz (2.31) durch  $u_n$  teilen lässt. Das bedeutet

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \dots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{u_n} \quad (2.32)$$

Nun ist offenbar

$$u_{n+1} \equiv u_{n-1} \pmod{u_n}$$

und damit ergibt sich aus (2.32)

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-1} + \dots + u_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}$$

Da auf der rechten Seite  $p$  gleiche Summanden stehen, muss also

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv pu_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}$$

gelten. Somit muss jeder gemeinsame Teiler der Zahlen  $u_{np}/u_n$  und  $u_n$  auch  $p$  teilen und umgekehrt. Das bedeutet

$$\left( \frac{u_{np}}{u_n}, u_n \right) = (p, u_n)$$

Ist jetzt  $q$  ein von  $p$  verschiedener Primteiler von  $u_n$ , so ist  $(p, u_n)$  nicht durch  $q$  teilbar. Folglich ist auch  $\left( \frac{u_{np}}{u_n}, u_n \right)$  nicht durch  $q$  teilbar.

Da die Zahl  $q$  ein Teiler von  $u_n$  ist, kann sie nicht Teiler von  $u_{np}/u_n$  sein. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zweitens folgt aus der Teilbarkeit der Differenz (2.31) durch  $u_n^2$  die Gültigkeit der Kongruenz

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \dots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{p^2}$$

Wir setzen

$$u_{n+1} \equiv r_1p + r' \pmod{p^2}, \quad u_{n-1} \equiv r_2p + r'' \pmod{p^2}$$

mit  $0 \leq r_1, r_2, r', r'' < p$ . Da die Differenz  $u_{n+1} - u_{n-1}$  gleich  $u_n$ , also durch  $p$  teilbar ist, müssen die Reste  $r'$  und  $r''$  einander gleich sein; deshalb setzen wir  $r' = r'' = r$ . Dabei ist  $r \neq 0$ , da  $p$  weder  $u_{n-1}$  noch  $u_{n+1}$  teilt.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{u_{np}}{u_n} &\equiv (r_1p + r)^{p-1} + (r_1p + r)^{p-2}(r_2p + r) + \dots + (r_1p + r)^{p-k}(r_2p + r)^{k-1} + \dots \\ &\quad + (r_2p + r)^{p-1} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Kongruenz lösen wir die Klammern auf und lassen die durch  $p^2$  teilbaren Summanden fort. Das Glied

$$(r_1p + r)^{p-k}(r_2p + r)^{k-1}$$

ergibt dabei den Ausdruck

$$\binom{p-k}{1} r_1 p r^{p-k-1} r^{k-1} + r^{p-k} \binom{k-1}{1} r_2 p r^{k-2} + r^{p-k} r^{k-1}$$

oder

$$(p-k) p r_1 r^{p-2} + (k-1) p r_2 r^{p-2} + r^{p-1}$$

Summieren wir ihn über alle  $k = 1, \dots, p$ , so finden wir

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv \frac{p(p-1)}{2} p r_1 r^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} p r_2 r^{p-2} + p r^{p-1} \pmod{p^2} \quad (2.33)$$

Für  $p \neq 2$  ist  $\frac{p-1}{2}$  eine ganze Zahl. Daher lassen sich die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite von (2.33) durch  $p^2$  dividieren, und wir erhalten

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p r^{p-1} \pmod{p^2}$$

Schließlich können wir  $r^{p-1} - 1$  nach dem Kleinen Fermatschen Satz (vgl. Nr. 20) durch  $p$  und infolgedessen  $p r^{p-1} - p$  durch  $p^2$  teilen. Damit folgt

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p \pmod{p^2}$$

d. h.,  $u_{np}/u_n$  gibt bei Division durch  $p^2$  den Rest  $p$ , ist also durch  $p$ , aber nicht durch  $p^2$  teilbar, womit der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

Nun sei  $p = 2$ . Die Kongruenz (2.33) nimmt dann die Gestalt

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2(r_1 + r_2 + r) \pmod{4} \quad (2.34)$$

an. Ist 4 ein Teiler von  $u_n$ , so erkennen wir an der Folge der Reste (2.2), dass in diesem Fall sowohl  $u_{n-1}$  als auch  $u_{n+1}$  bei Division durch 4 den Rest 1 lassen. Also ist in diesem Fall  $r_1 = r_2 = 0$ , aber  $r = 1$ , und (2.34) geht über in

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2 \pmod{4}$$

damit ist der dritte Teil des Satzes bewiesen.

Nun sei 4 nicht Teiler von  $u_n$ . Die Folge (2.2) zeigt, dass dann  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$  und  $r = 1$  ist. Deshalb geht (2.34) über in

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 0 \pmod{4}$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass  $u_{2n}/u_n$  sich nicht durch 8 teilen lässt. Wäre es doch der Fall, so ließe sich nämlich  $u_{2n}$  durch 16 dividieren. Aber dann müsste nach dem in Nr. 13 angegebenen Satz  $2n$  durch 12, d. h.  $n$  durch 6 teilbar sein.

Hieraus folgt seinerseits, dass  $u_6$ , also 8, ein Teiler von  $u_n$  ist, und das ist ein Widerspruch zur Annahme (dass nämlich  $u_n$  noch nicht einmal durch 4 teilbar ist). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

**36.** Jetzt können wir uns unmittelbar mit dem Beweis für die Existenz zugehöriger Teiler beschäftigen.

**Satz.** Jede Fibonacciische Zahl mit Ausnahme von  $u_1, u_2, u_6$  und  $u_{12}$  besitzt wenigstens einen zugehörigen Teiler.

**Beweis.** Wir betrachten die Fibonacciische Zahl  $u_n$ . Die kanonische Zerlegung des Index  $n$  sei

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Wir nehmen nun die Fibonacciischen Zahlen

$$u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, \dots, u_{\frac{n}{p_k}} \quad (2.35)$$

und bilden ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches  $M$ . Auf Grund von Nr. 32 ist

$$M = \frac{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \dots u_{\frac{n}{p_k}} \left( u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, u_{\frac{n}{p_3}} \right) \dots}{\left( u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}} \right) \dots \left( u_{\frac{n}{p_{k-1}}}, u_{\frac{n}{p_k}} \right) \left( u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, u_{\frac{n}{p_3}}, u_{\frac{n}{p_4}} \right) \dots}$$

Da nun für beliebige  $r$  und verschiedene  $i_1, i_2, \dots, i_r$

$$\left( u_{\frac{n}{p_{i_1}}}, u_{\frac{n}{p_{i_2}}}, \dots, u_{\frac{n}{p_{i_r}}} \right) = u_{\left( \frac{n}{p_{i_1}}, \frac{n}{p_{i_2}}, \dots, \frac{n}{p_{i_r}} \right)} = u_{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}}}$$

gilt, folgt

$$M = \frac{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \dots u_{\frac{n}{p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} \dots}{u_{\frac{n}{p_1 p_2}} u_{\frac{n}{p_1 p_3}} \dots u_{\frac{n}{p_{k-1} p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} \dots}$$

Die Zahl  $u_n$  ist durch alle Zahlen  $u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, \dots, u_{\frac{n}{p_k}}$  teilbar, daher auch durch deren kleinstes gemeinsames Vielfaches  $M$ ; also muss

$$u_m = Mt$$

sein. Jeder Primteiler von  $M$  teilt eine der Zahlen (2.35) und ist daher kein zu  $u_n$  gehöriger Teiler. Folglich muss sich  $t$  durch alle zu  $u_n$  gehörigen Teiler dividieren lassen. Nach dem Satz aus Nr. 35 können von allen Primteilern von  $u_n$ , die nicht gleichzeitig zu  $u_n$  gehörige Teiler sind, in  $t$  etwa nur die Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  auftreten, wobei jede dieser Zahlen in  $t$  mit einem Exponenten  $\leq 1$  auftritt, mit Ausnahme der Zwei, die den Exponenten 2 haben kann.

Wenn wir die Ungleichung

$$t > \underset{\times}{2} p_1 p_2 \dots p_k$$

bewiesen haben, werden wir die Existenz von zugehörigen Teilern der Fibonacciischen Zahl  $u_n$  untersuchen (das Kreuz unter der Zwei bedeutet hier und im folgenden, dass

diese Zwei nur dann zu berücksichtigen ist, wenn unter den Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  schon eine Zwei auftritt).

Wie zeigen also die Gültigkeit der Ungleichung

$$t = \frac{u_n u_{\frac{n}{p_1 p_2}} u_{\frac{n}{p_1 p_3}} \dots u_{\frac{n}{p_{k-1} p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} \dots}{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \dots u_{\frac{n}{p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} \dots} > \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

Aus § 1, Nr. 21, wissen wir, dass

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n+\frac{1}{n}}$$

gilt. Werden alle Fibonacci'schen Zahlen im Zähler des Bruches durch  $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n-\frac{1}{n}}$  und im Nenner des Bruches durch  $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^{n+\frac{1}{n}}$  ersetzt, so verkleinert sich der Wert des Bruches. Beweisen wir also die obige Ungleichung mit dem kleineren Wert des Bruches, so beweisen wir sogar noch etwas mehr als notwendig.

Wir ersetzen also die Fibonacci'schen Zahlen, kürzen mit  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^k}$  und erhalten

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_1 p_2} - \frac{p_1 p_2}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_{k-1} p_k} - \frac{p_{k-1} p_k}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{n}} \dots}{\alpha^{\frac{n}{p_1} + \frac{p_1}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_2} + \frac{p_2}{n}} \dots \alpha^{\frac{n}{p_k} + \frac{p_k}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3} + \frac{p_1 p_2 p_3}{n}} \dots} > \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

oder

$$\frac{\alpha^{n \left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \dots - \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_1 p_2} + \dots + \frac{1}{p_{k-1} p_k} - \frac{1}{p_1 p_2 p_3} - \dots\right)}}{\alpha^{\frac{1}{n} (1 + p_1 + p_2 + \dots + p_k + p_1 p_2 + \dots + p_{k-1} p_k + p_1 p_2 p_3 + \dots)}} > \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

oder

$$\alpha^{n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) - \frac{1}{n} (1 + p_1)(1 + p_2) \dots (1 + p_k)} > \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

oder, indem wir logarithmieren,

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) - \frac{1}{n} (1 + p_1)(1 + p_2) \dots (1 + p_k) > \log_{\alpha} \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

Erinnern wir uns an die kanonische Darstellung von  $n$ , so können wir dieser Ungleichung die Gestalt

$$p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) p_2^{\alpha_2-1} (p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1} (p_k - 1) - \frac{p_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{p_2 + 1}{p_2^{\alpha_2}} \dots \frac{p_k + 1}{p_k^{\alpha_k}} > \log_{\alpha} \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k$$

geben. Es ist üblich, den Ausdruck  $p_1^{\alpha_1-1} (p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k-1} (p_k - 1)$  mit  $\varphi(n)$  zu bezeichnen und Eulersche Funktion zu nennen. Sie besitzt viele wichtige und interessante Eigenschaften. Mit Hilfe der Eulerschen Funktion schreiben wir die Ungleichung in der folgenden Form:

$$\varphi(n) > \frac{p_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{p_2 + 1}{p_2^{\alpha_2}} \dots \frac{p_k + 1}{p_k^{\alpha_k}} + \log_{\alpha} \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k \quad (2.36)$$

Wir müssen nun nachprüfen, für welche ganzen positiven  $n$  die Ungleichung (2.36) erfüllt ist. Wir werden diese Werte "gut" nennen zum Unterschied von den "schlechten", für welche (2.36) nicht gilt.

Offenbar haben die Fibonacci'schen Zahlen  $u_n$ , wenn  $n$  "gut" ist, zugehörige Teiler. Diese Umkehrung braucht aber nicht zu gelten: Die Gültigkeit der Ungleichung (2.36) ist nur eine hinreichende, aber durchaus keine notwendige Bedingung für die Existenz zu  $u_n$  gehöriger Teiler.

Daher müssen wir zusätzlich überprüfen, welche Fibonacci'schen Zahlen mit "schlechten" Indizes (es gibt 10 solcher Zahlen) zugehörige Teiler besitzen. Dabei werden wir feststellen, dass sechs dieser zehn Zahlen zugehörige Teiler haben, aber vier (nämlich die im Satz genannten) nicht.

Man sieht "mit einem Blick", dass sich die linke Seite von (2.36) mit wachsendem  $n$  schneller vergrößert als die rechte. Daher ist anzunehmen, dass die Ungleichung (2.36) nur für kleine  $n$  nicht erfüllt ist. Nun ändern sich beide Seiten von (2.36) bei wachsendem  $n$  überaus unregelmäßig, so dass irgendein unmittelbarer Induktionsbeweis kaum möglich ist.

Folglich muss nach einem bestimmten Programm vorgegangen werden. Wir nehmen ein Schema, das die natürlichen Zahlen schrittweise erfasst und bei dem man von einer guten Zahl nur zu einer guten gelangen kann. Sind von einem bestimmten Schritt an alle Zahlen gut, so sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls gut. Folglich müssen alle schlechten Zahlen schon vor diesem Schritt erfasst worden sein.

Der Leser wird bemerken, dass diese Methode ebenfalls eine der Varianten des Induktionsbeweises ist.

Vorbereitend beweisen wir die folgenden drei Behauptungen:

1. Es seien  $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$  die nach ihrer Größe geordneten Primzahlen (d.h.  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$  usw.). Dann ist, wenn die Zahl  $n = p_1 p_2 \dots p_k$  gut und  $p_{k+1} > 3$  ist, die Zahl  $p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1}$  ebenfalls gut.

In diesem Fall ist

$$n = p_1 p_2 \dots p_k \quad , \quad \varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$$

und nach Voraussetzung muss

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) > \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) + \log_{\alpha} \frac{2}{\times} p_1 p_2 \dots p_k \quad (2.37)$$

gelten. Um die entsprechende Ungleichung für das Produkt  $p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k$  aufzuschreiben, brauchen wir nur den ersten Summanden auf der rechten Seite von (2.37) mit  $1 + \frac{1}{p_{k+1}} < 2$  zu multiplizieren und zum zweiten Summanden das Glied  $\log_{\alpha} p_{k+1}$  hinzuzufügen.

Nun ist die Zahl  $p_1 p_2 \dots p_k - 1$  zu jeder der Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  teilerfremd. Folglich ist jeder Primteiler  $q$  dieser Zahl größer als jede der Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  und demnach nicht kleiner als  $p_{k+1}$ . Das bedeutet

$$p_{k+1} < p_1 p_2 \dots p_k$$

und erst recht

$$p_{k+1} < 2p_1p_2\ldots p_k$$

daher ist

$$\log_{\alpha} p_{k+1} < \log_{\alpha} 2p_1p_2\ldots p_k$$

Das Hinzufügen von  $\log_{\alpha} p_{k+1}$  zum zweiten Summanden vergrößert diesen also um weniger als das Doppelte. Insgesamt kann sich die rechte Seite also höchstens aufs Doppelte vergrößern, während die linke Seite mit  $p_{k+1} - 1 > 2$  multipliziert wird. Somit folgt aus (2.37)

$$(p_1 - 1)\ldots(p_k - 1)(p_{k+1} + 1) > \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) \left(1 + \frac{1}{p_{k+1}}\right) + \log_{\alpha} 2p_1\ldots p_k p_{k+1}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

2. Ist  $n = p_1p_2\ldots p_k$ , wobei  $p_1, p_2, \ldots, p_k$  beliebige voneinander verschiedene Primzahlen sind und  $n$  eine gute Zahl ist, und ist  $q$  eine beliebige, von  $p_1, p_2, \ldots, p_k$  verschiedene Primzahl mit  $q > p_1$ , so ist  $qp_2\ldots p_k$  ebenfalls eine gute Zahl.

In diesem Fall hat die Ungleichung (2.36) wieder die Form (2.37). Ersetzen wir hier  $p_1$  durch  $q$ , so ist es das gleiche, als würden wir die linke Seite von (2.37) mit  $\frac{q-1}{p_1-1}$  multiplizieren, auf der rechten Seite den ersten Summanden mit  $\frac{1+\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p_1}}$  multiplizieren und zum zweiten Summanden das Glied  $\log_{\alpha} \frac{q}{p_1}$  hinzufügen.

Wegen  $q > p_1$  wird der erste Summand bei der Multiplikation verkleinert. Ferner ist  $\frac{q}{p_1} > 1$ , also  $\frac{q-1}{p_1-1} > \frac{q}{p_1}$  und somit

$$\frac{q-1}{p_1-1} > \log_{\alpha} \frac{q}{p_1}$$

Die rechte Seite von (2.37) ist größer als 1 (schon dadurch, dass alle Primzahlen, beginnend mit 2, größer als  $\alpha^2$  sind). Die linke Seite ist, da sie größer als die rechte ist, ebenfalls größer als 1. Wenn wir also die linke Seite (die größer als 1 ist) mit einer Zahl  $> 1$  multiplizieren, zur rechten Seite aber eine kleinere Zahl hinzufügen, so bleibt die Ungleichung (2.37) auf jeden Fall gültig.

3. Ist  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$  eine gute Zahl, so ist  $p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$  ebenfalls gut.

Zum Beweis genügt die Bemerkung, dass sich, wenn in der Ungleichung

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) > \frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}} \ldots \frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}} + \log_{\alpha} 2p_1p_2\ldots p_k$$

die Exponenten  $\alpha_1$  durch die größere Zahl  $\alpha_1 + 1$  ersetzt werden, die linke Seite vergrößert, während sich die rechte verkleinert. Folglich kann bei einer solchen Umformung eine gute Zahl nur wieder in eine gute übergehen.

Somit kristallisieren sich in unserem Schema drei Operationen heraus, mit deren Hilfe man von einer natürlichen Zahl zu einer anderen übergehen kann; wichtig ist dabei,

dass man, geht man von einer guten Zahl aus, nur wieder zu einer guten Zahl gelangt.

Mit Hilfe der ersten Operation wird die Folge 1, 2, 6, 30, 210, ... konstruiert; die zweite Operation ersetzt in der Zahl, deren kanonische Zerlegung nur erste Potenzen enthält, jeden Primteiler durch einen größeren (dieser Austausch geschieht so, dass jeweils die nächste, in der kanonischen Zerlegung noch nicht aufgetretene Primzahl eingesetzt wird); die dritte Operation vergrößert einen Exponenten in der kanonischen Zerlegung um 1.

Als Ergebnis dieser Operation erhalten wir, wenn wir mit 1 beginnen, alle natürlichen Zahlen. Einige Zahlen treten mehr als einmal auf, aber das spielt für uns keine Rolle. Wichtig ist, dass jede Zahl wenigstens einmal vorkommt.

Wir beginnen nun, nach diesem Schema die natürlichen Zahlen durchzugehen, und benutzen zuerst die erste Operation.

Die Zahl 1 ist schlecht, da für sie die Ungleichung (2.36) die Form

$$1 > 1 + \log_{\alpha} 2 = 1 + \log_{\alpha} 1 = 1$$

annimmt, was offensichtlich falsch ist (dem Produkt natürlicher Zahlen, das null Faktoren enthält, geben wir den Wert 1).

Die erste Operation, angewendet auf 1, ergibt 2. Für diese Zahl ist die Ungleichung

$$1 > \frac{3}{2} + \log_{\alpha} 2 = \frac{3}{2} + \log_{\alpha} 4$$

falsch; die Zahl 2 ist demzufolge ebenfalls schlecht.

Schlecht sind auch die folgenden Zahlen 6 und 30, denn mit ihnen folgen die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\varphi(6) &= 2 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \log_{\alpha} 12 = 2 + \log_{\alpha} 12 \\ \varphi(30) &= 8 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} + \log_{\alpha} 60 \approx 2,4 + 8,5\end{aligned}$$

Dagegen erweist sich die Zahl  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$  schon als gut, denn es ist tatsächlich

$$\varphi(210) > 48 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} + \log_{\alpha} 420 \approx 2,7 + 12,5$$

Daher sind alle weiteren Zahlen, die man mit Hilfe der ersten Operationen erhält, gut.

Wir wenden nun die zweite und die dritte Operation auf die schlechte Zahl 2 an. Das ergibt 3 bzw. 4, ebenfalls schlechte Zahlen:

$$\begin{aligned}\varphi(3) &= 2 < \frac{4}{3} + \log_{\alpha} 3 \approx 1,3 + 2,3 \\ \varphi(4) &= 2 < \frac{3}{2} + \log_{\alpha} 4 \approx 1,5 + 2,9\end{aligned}$$

Die Anwendung der Operationen auf die Zahl 3 ergibt 5 bzw. 9, wobei die Zahl 5, wie sich leicht nachprüfen lässt, schlecht, die Zahl 9 aber gut ist.

Weitere Transformationen der 9 interessieren uns also nicht. Von der Zahl 5 gelangt man durch die zweite Operation zu 7, durch die dritte zu 25; beide Zahlen sind gut. Daher sind auch alle folgenden Zahlen gut und brauchen nicht untersucht zu werden.

Die dritte Operation, angewandt auf 4, ergibt die gute Zahl 8.

Also liefern die zweite und die dritte Operation aus der Zahl 2 die schlechten Zahlen 3, 4 und 5; alle übrigen Zahlen sind gut.

Nun betrachten wir die Zahl 6. Die zweite Operation ergibt die schlechte Zahl 10, auf die die guten Zahlen 20 und 15 und die schlechte Zahl 14 folgen. Aus 14 kommen nur gute Zahlen, und zwar 21 und 22 (zweite Operation) sowie 28 und 98 (dritte Operation).

Die dritte Operation, auf 6 angewandt, liefert die schlechte Zahl 12 und die gute Zahl 18. Aus 12 folgen mit Hilfe der dritten Operation die guten Zahlen 24 und 36; die zweite Operation ist auf 12 nicht anwendbar, da 12 durch das Quadrat der Primzahl 2 teilbar ist.

Schließlich sind alle aus 30 folgenden Zahlen (nämlich 210, 42 und 60) gute Zahlen.

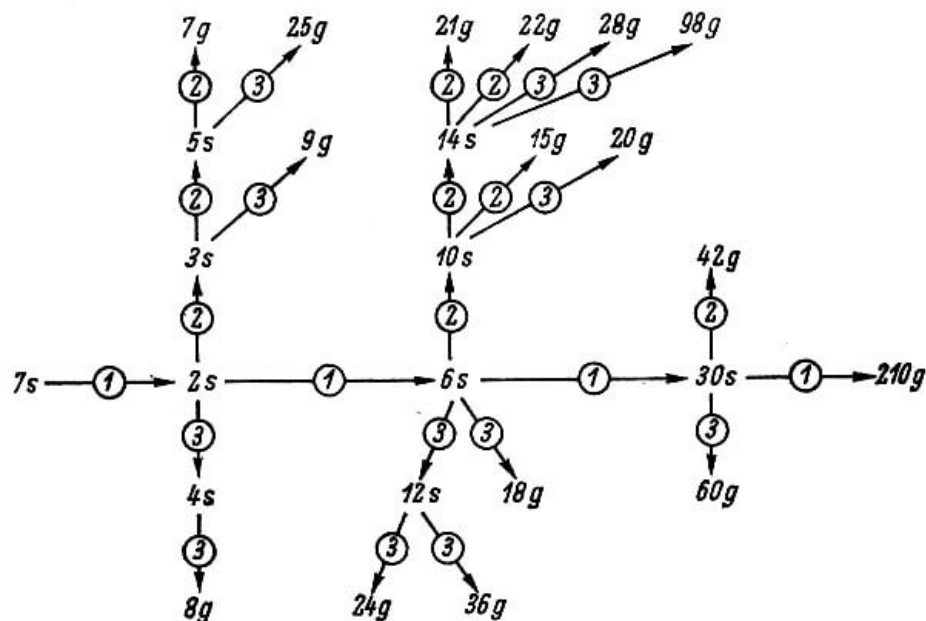


Abb. 1

Diese Ergebnisse haben wir in Abb. 1 übersichtlich angeordnet. Wir haben also die schlechten Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 14, 30$$

erhalten, denen die Fibonacciischen Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 55, 144, 377, u_{30}$$

entsprechen. Zu  $u_3, u_4, u_5, u_{10}$  bzw.  $u_{14}$  gehörige Teiler sind offenbar die Zahlen 2, 3, 5, 11 bzw. 29. Man könnte sich, wenn man die Fibonacciischen Zahlen bis  $u_{30}$  und



ihre Primfaktorzerlegungen aufschreibt, unmittelbar von der Existenz auch eines zu  $u_{30}$  gehörigen Teilers überzeugen.

Jedoch ist dies nicht nötig. Der Satz aus Nr. 24 besagt nämlich, dass  $u_{30}$  durch 31 teilbar ist (denn 31 ist eine Primzahl der Form  $5t + 1$ ). Andererseits sind weder  $u_6 = 8$  noch  $u_{10} = 55$  noch  $u_{15} = 610$  durch 31 teilbar; folglich ist 31 ein zu  $u_{30}$  gehöriger Teiler.

Somit bleiben nur noch die Zahlen  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_6 = 8$  und  $u_{12} = 144$  übrig, die offenbar keine zugehörigen Teiler besitzen.

Damit ist der formulierte Satz bewiesen.

**37.** Als "Gegengewicht" zu den vier Fibonacciischen Zahlen ohne zugehörige Teiler gibt es Fibonacciische Zahlen, die mehrere zugehörige Teiler besitzen.

Zum Beispiel sind die Zahlen 37 und 113 zu  $u_{19}$  gehörige Teiler, die Zahlen 53 und 109 zu  $u_{27}$  gehörige Teiler. Wie viele Fibonacciische Zahlen mit zwei und mehr zugehörigen Teilern es gibt, ist völlig unklar.

Es entsteht nun natürlich die Frage, wie groß der Index  $n$  einer Fibonacciischen Zahl ist, deren zugehöriger Teiler gleich einer vorgegebenen Primzahl  $p$  ist.

Aus Nr. 25 folgt  $n \leq p - 1$  im Fall  $p = 5t \pm 1$  und  $n \leq p + 1$  im Fall  $p = 5t \pm 2$ . Jedoch ist bis jetzt noch keine Formel bekannt, aus der man bei gegebenem  $p$  den Index  $n$  der entsprechenden Fibonacciischen Zahl ablesen kann.

In Nr. 3 wurde bewiesen, dass alle Fibonacciischen Zahlen mit zusammengesetzten Indizes, außer  $u_4$ , selbst zusammengesetzt sind. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das Beispiel  $u_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$  zeigt.

In diesem Zusammenhang interessiert die Frage, ob es endlich oder abzählbar viele Primzahlen in der Fibonacciischen Folge gibt, mit anderen Worten, ob es unter den Primzahlen in der Fibonacciischen Folge eine größte gibt oder nicht. Dieses Problem ist heute aber noch weit von seiner Lösung entfernt.

### 3 Fibonaccische Zahlen und Kettenbrüche

1. Wir betrachten den Ausdruck

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}}} \quad (3.1)$$

Die Zahlen  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  sollen hier ganz und positiv sein,  $q_0$  hingegen eine nicht-negative ganze Zahl. Zum Unterschied von den Zahlen  $q_1, q_2, \dots, q_n$  darf also  $q_0$  auch gleich Null sein. Diese Besonderheit der Zahl  $q_0$  wollen wir immer beachten und sie deshalb nicht jedesmal von neuem hervorheben.

Den Ausdruck (3.1) bezeichnet man als Kettenbruch und die Zahlen  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$  als Teilnenner dieses Bruches,  $q_0$  auch als Anfangsglied.

Kettenbrüche werden in den verschiedensten Gebieten der Mathematik angewandt. Dem Leser, der sich eingehender mit ihnen beschäftigen will, sei das Buch von A. J. Chinchin "Kettenbrüche") empfohlen.<sup>4</sup>

Der Prozess der Verwandlung einer Zahl  $m$  in einen Kettenbruch heißt Entwicklung dieser Zahl in einen Kettenbruch.

Wir wollen nun sehen, wie man bei einer solchen Entwicklung eines gewöhnlichen Bruches  $\frac{a}{b}$  die Teilnenner findet. Zu diesem Zweck wenden wir den Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen  $a$  und  $b$  an:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die erste dieser Gleichungen liefert uns

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

Aus der zweiten Gleichung des Systems (3.2) folgt aber

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

<sup>4</sup>In der deutschen Literatur: C. Knochendöppel, Von den Kettenbrüchen und den diophantischen Gleichungen, Volk und Wissen, Berlin-Leipzig 1948, O. Perron, Irrationalzahlen, W. de Gruyter Air & Co., 1939. und O. Perron. Kettenbrüche, B. G. Teubner, Leipzig 1929

so dass

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

gilt. Aus der dritten Gleichung von (3.2) erhalten wir

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

und daher

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

Führen wir diesen Prozess bis zu Ende durch (Induktion), so erhalten wir, wie leicht zu sehen ist, die Gleichung

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}}}$$

Aus dem Euklidischen Algorithmus selbst folgt  $q_n > 1$ . (Wäre nämlich  $q_n = 1$ , so wäre  $r_n = r_{n-1}$  und dann wäre  $r_{n-2}$  durch  $r_{n-1}$  teilbar, d.h., der ganze Algorithmus würde schon einen Schritt eher abbrechen.)

An Stelle von  $q_n$  können wir also auch den Ausdruck  $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$  betrachten, d.h. wir können  $(q_n - 1)$  als vorletzten und 1 als letzten Teilnenner ansehen. Diese Festsetzung wird sich im folgenden als sehr nützlich erweisen.

**2.** Jeder rationale Bruch  $\frac{a}{b}$  lässt sich in einen Kettenbruch entwickeln. Wir zeigen, dass diese Entwicklung eindeutig ist, d.h., dass bei zwei gleichen Kettenbrüchen die entsprechenden Teilnenner gleich sein müssen.

Zum Beweis wählen wir zwei Kettenbrüche  $\omega$  und  $\omega'$ . Ihre Teilnenner seien  $q_0, q_1, q_2, \dots$  bzw.  $q'_0, q'_1, q'_2, \dots$ . Wir zeigen, dass aus der Voraussetzung  $\omega = \omega'$  die Beziehungen  $q_0 = q'_0, q_1 = q'_1, q_2 = q'_2 \dots$  folgen.

Da  $q_0$  der ganze Teil der Zahl  $\omega$  und  $q'_0$ , der ganze Teil der Zahl  $\omega'$  ist, gilt  $q_0 = q'_0$ . Ferner lassen sich die Kettenbrüche  $\omega$  und  $\omega'$  in der Gestalt

$$q_0 + \frac{1}{\omega_1} \quad \text{bzw.} \quad q'_0 + \frac{1}{\omega'_1}$$

darstellen, wobei  $\omega_1$  und  $\omega'_1$  ebenfalls Kettenbrüche sind. Aus  $\omega = \omega'$  und  $q_0 = q'_0$  folgt, dass auch  $\omega_1 = \omega'_1$  sein muss. Also sind auch die ganzen Teile  $q_1$  und  $q'_1$  der Zahlen  $\omega_1$  bzw.  $\omega'_1$  einander gleich.

Setzen wir diese Überlegungen fort (Induktion!), so können wir uns davon überzeugen, dass  $q_2 = q'_2$ ,  $q_3 = q'_3$  ... gelten muss.

**3.** Es sei

$$\omega = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n}}}} \quad (3.3)$$

irgendein Kettenbruch. Wir betrachten nun die folgenden Zahlen:

$$q_0, \quad q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \quad \dots$$

Diese Zahlen, in Form gewöhnlicher unkürzbarer (reduzierter) Brüche geschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{q_0}{1} \\ \frac{P_1}{Q_1} &= q_0 + \frac{1}{q_1} \\ \frac{P_2}{Q_2} &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} \\ &\dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= \omega \end{aligned}$$

nennt man die Näherungsbrüche des Kettenbruches  $\omega$ .

Wir bemerken, dass der Übergang von  $\frac{P_k}{Q_k}$  zu  $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$  erfolgt, indem man den letzten Teilnenner  $q_k$  der im Näherungsbruch vorkommt, durch  $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$  ersetzt.

**3.** Eine wichtige Rolle in der Theorie der Kettenbrüche spielt der nachstehende Hilfssatz.

Lemma. Für jeden Kettenbruch (3.3) gelten die folgenden Beziehungen:

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \quad (3.4)$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \quad (3.5)$$

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \quad (3.6)$$

Wir beweisen alle diese Relationen gleichzeitig durch Induktion nach  $k$ .

Zunächst beweisen wir sie für  $k = 1$ :

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$$

Da die Zahlen  $q_0q_1 + 1$  und  $q_1$  teilerfremd sind, ist der Bruch  $\frac{q_0q_1+1}{q_1}$  unkürzbar. Der Bruch  $\frac{P_1}{Q_1}$  ist definitionsgemäß unkürzbar. Gleiche unkürzbare Brüche haben aber gleiche Zähler und gleiche Nenner.

Also ist  $P_1 = q_0q_1 + 1$  und  $Q_1 = q_1$ .

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0(q_1q_2 + 1) + q_2}{q_1q_2 + 1} \quad (3.7)$$

Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen  $q_0(q_1q_2 + 1) + q_2$  und  $q_1q_2 + 1$  ist nach § 2, Nr. 10, gleich  $(q_2, q_1q_2 + 1)$ , und auf Grund desselben Satzes gleich  $(q_2, 1)$ , also gleich 1. Der auf der rechten Seite der Gleichung (3.7) stehende Bruch ist also unkürzbar, und daher gilt

$$P_2 = q_0(q_1q_2 + 1) + q_2 = (q_0q_1 + 1)q_2 + q_0 = P_1q_2 + P_0$$

und

$$Q_2 = q_1q_2 + 1 = Q_1q_2 + Q_0$$

Die Gleichung

$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = (-1)^1$$

lässt sich ohne Schwierigkeit nachweisen.

Damit ist der erste Teil des Induktionsbeweises erbracht.

Wir nehmen nun an, die Gleichungen (3.4), (3.5) und (3.6) seien richtig, und betrachten den Näherungsbruch

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_kq_{k+1} + P_{k-1}}{Q_kq_{k+1} + Q_{k-1}}$$

Der Übergang von  $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$  zu  $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$  erfolgt, wie früher bemerkt wurde, indem man  $q_{k+1}$  in dem Ausdruck für  $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$  durch  $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$  ersetzt.

Da  $q_{k+1}$  in den Formeln für  $P_k$ ,  $Q_k$ ,  $P_{k-1}$ ,  $Q_{k-1}$  nicht vorkommt, erhalten wir so

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_k \left( q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}} \right) + P_{k-1}}{Q_k \left( q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}} \right) + Q_{k-1}}$$

oder unter Beachtung unserer Induktionsvoraussetzungen (3.4) und (3.5)

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k} \quad (3.8)$$

Wir beweisen nun, dass der auf der rechten Seite von (3.8) stehende Bruch unkürzbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.

Wir nehmen an, die Zahlen  $P_{k+1}q_{k+2} + P_k$  und  $Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$  hätten irgendeinen gemeinsamen Teiler  $d > 1$ . Dann wäre auch der Ausdruck

$$(P_{k+1}q_{k+2} + P_k)Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k)P_{k+1}$$

durch  $d$  teilbar. Nach unserer Induktionsannahme (3.6) ist dieser Ausdruck aber gleich  $(-1)^{k+1}$ , kann also nicht durch  $d$  teilbar sein.

Folglich ist die rechte Seite von (3.8) unkürzbar, und (3.8) ist eine Identität zweier unkürzbarer Brüche. Also folgt

$$P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2} + P_k \quad \text{und} \quad Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$$

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (-1)^{k+1} \quad (3.9)$$

gilt. Nach dem eben Bewiesenen ist aber

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} + P_kQ_{k+1} - P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_k$$

und (3.9) folgt unmittelbar aus der Induktionsannahme (3.6). Damit ist der Induktionsschluss geführt und der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung:

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}} \quad (3.10)$$

Der Beweis liegt auf der Hand.

Da die Teilnenner von Kettenbrüchen ganze positive Zahlen sind, folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatz

$$P_0 < P_1 < P_2 < \dots, \quad Q_0 < Q_1 < Q_2 < \dots \quad (3.11)$$

Diese einfache, aber wichtige Bemerkung werden wir im weiteren noch präzisieren.

**5.** Wir verwenden nun den Hilfssatz aus Nr. 4 zur Beschreibung aller Kettenbrüche, deren Teilnenner gleich 1 sind. Für solche Brüche gilt der folgende interessante Satz.

**Satz:** Hat ein Kettenbruch  $n$  Teilnenner, die sämtlich gleich 1 sind, so ist dieser Bruch gleich  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

**Beweis:** Wir wollen einen Kettenbruch mit  $n$  Teilennern, deren jeder gleich 1 ist, mit  $\alpha_n$  bezeichnen. Offensichtlich sind

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von  $\alpha_n$ . Es sei

$$\alpha_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

Wegen

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

ist  $P_1 = 1$  und  $P_2 = 2$ . Ferner ist  $P_{n+1} = P_nq_{n+1} + P_n - 1 = P_n + P_{n-1}$ .

Daher gilt (man vergleiche § 1, Nr. 6)  $P_n = u_{n+1}$ . Analog ergibt sich  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = 1$  und  $Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n+1}$  und daraus  $Q_n = u_n$ . Folglich ist

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (3.12)$$

Der Leser vergleiche dieses Ergebnis mit den Formeln (1.10) und (3.6).

**6.** Gegeben seien zwei Kettenbrüche  $\omega$  und  $\omega'$ :

$$\omega = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}} \quad ; \quad \omega' = q'_0 + \frac{1}{q'_1 + \frac{1}{q'_2 + \dots}}$$

mit

$$q'_0 \geq q_0 \quad , \quad q'_1 \geq q_1 \quad , \quad q'_2 \geq q_2 \quad , \dots \quad (3.13)$$

Die Näherungsbrüche von  $\omega$  bezeichnen wir mit

$$\frac{P_0}{Q_0} \quad , \quad \frac{P_1}{Q_1} \quad , \quad \frac{P_2}{Q_2} \quad , \dots$$

die Näherungsbrüche von  $\omega'$  mit

$$\frac{P'_0}{Q'_0} \quad , \quad \frac{P'_1}{Q'_1} \quad , \quad \frac{P'_2}{Q'_2} \quad , \dots$$

Aus den Ergebnissen des Satzes von Nr. 4 ersieht man leicht, dass wegen (3.13)

$$P'_0 \geq P_0, \quad P'_1 \geq P_1, \quad P'_2 \geq P_2 \quad , \dots \quad \text{und} \quad Q'_0 \geq Q_0, \quad Q'_1 \geq Q_1, \quad Q'_2 \geq Q_2 \quad , \dots$$

gilt.

Der kleinste Wert, den ein Teilnenner annehmen kann, ist offensichtlich 1. Sind also alle Teilnenner irgendeines Kettenbruches gleich 1, so wachsen die Zähler und Nenner seiner Näherungsbrüche langsamer als die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche jedes anderen Kettenbruches.

Wir schätzen nun ab, um wieviel langsamer dieses Anwachsen geschieht. Abgesehen von den Kettenbrüchen, deren sämtliche Teilnenner gleich 1 sind, wachsen offensichtlich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche derjenigen Kettenbrüche am langsamsten an, bei denen einer der Teilnenner den Wert 2 hat, während alle anderen gleich 1 sind. Solche Kettenbrüche hängen nun, wie der folgende Satz lehrt, ebenfalls mit den Fibonaccischen Zahlen zusammen.

**Lemma:** Der Kettenbruch  $\omega$  habe die Teilnenner  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$  und es gelte

$$q_0 = q_1 = q_2 = \dots = q_{i-1} = q_{i+1} = \dots = q_n = 1 \quad , \quad q_i = 2 \quad (i \neq 0)$$

Dann ist

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1} u_{n-i+1}}$$

Der Beweis dieses Satzes wird durch Induktion nach  $i$  geführt.

Ist  $i = 1$ , so gilt für jedes  $n$ :

$$\omega = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1}}}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1 \text{ Teilnenner}}$

oder wegen anfangs Bewiesenen,

$$\omega = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{1}{\frac{2u_n + u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+2}}$$

und schließlich, wenn wir noch, wie vorausgesetzt,  $u_0 = 0$  setzen,

$$\omega = \frac{u_2 u_{n+2} + u_1 u_n}{u_1 u_{n+2} + u_0 u_n}$$

Der erste Teil des Induktionsbeweises ist damit erbracht. Wir nehmen nun an, es gelte für jedes  $n$ :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{n-i}}}}}}_{i \text{ Teilnenner}} = \frac{u_{i+1} u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1} u_{n-i+1}} \quad (3.14)$$

Wir betrachten den Kettenbruch  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}}$ .

$\underbrace{\hspace{10em}}_{i+1 \text{ Teilnenner}}$

Dieser Kettenbruch kann offensichtlich auch so aufgefasst werden

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}} \quad (3.15)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{i \text{ Teilnenner}}$

Der Kettenbruch, der in (3.15) in der Klammer steht, ist nach Formel (3.14) gleich

$$\frac{u_{i+1} u_{n-i+2} + u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}$$



Der gesamte Bruch (3.15) ist also gleich

$$1 + \frac{1}{\frac{u_{i+1}u_{n-i+2} + u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}} = \frac{(u_i + u_{i+1})u_{n-i+2} + (u_{i-1} + u_i)u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}$$

$$= \frac{u_{i+2}u_{n-i+2} + u_{i+1}u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2} + u_{i-1} u_{n-i}}$$

Damit ist der Induktionsschluss geführt und der ganze Satz bewiesen.

Folgerung: Es seien nicht alle Teilnenner eines Kettenbruches  $\omega$  gleich 1; ferner sei  $q_0 \neq 0$  und die Anzahl der von 1 verschiedenen Teilnenner sei mindestens  $n$ . Schreibt man  $\omega$  in der Form eines gewöhnlichen Bruches  $\frac{P}{Q}$ , so erhält man

$$P \geq u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1} > u_{i+1}u_{n-i+2} + u_i u_{n-i+2} = u_{n+2}$$

und analog  $Q > u_{n+1}$ .

Eine wesentliche Rolle spielt dabei natürlich der Hilfssatz aus Nr. 4, auf Grund dessen wir beim Prozess des "Abbaus" eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch nur unkürzbare Brüche erhalten. Daher lassen sich Zähler und Nenner des erhaltenen Bruches nicht durch Kürzen verkleinern.

**6.** Aus den Betrachtungen von Nr. 6 können wir den nachstehenden Satz folgern, der auf die besondere Stellung der Fibonaccischen Zahlen in Bezug auf den Euklidischen Algorithmus hinweist.

**Satz:** Die Anzahl der Schritte bei der Anwendung des Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen  $a$  und  $b$  ist für beliebiges  $a$  gleich  $n - 1$ , wenn  $b = u_n$ , und für jedes  $a$  kleiner als  $n - 1$ , wenn  $b < u_n$  ist.

**Beweis:** Der erste Teil des Satzes lässt sich recht leicht beweisen. Es genügt für  $a$  die auf  $b$  folgende Fibonaccische Zahl, also  $u_{n+1}$  einzusetzen. Dann gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_n$$

Der Kettenbruch  $\alpha_n$  hat  $n$  Teilnenner, d.h., der Euklidische Algorithmus für die Zahlen  $a$  und  $b$  bricht nach  $n - 1$  Schritten ab.

Wir, beweisen nun den zweiten Teil des Satzes indirekt, d.h., wir nehmen an, die Anzahl der Schritte des Algorithmus wäre nicht kleiner als  $n - 1$ .

Wir entwickeln den Quotienten  $\frac{a}{b}$  in einen Kettenbruch  $\omega$ . Offensichtlich hätte  $\omega$  nicht weniger als  $n$  Teilnenner (nämlich einen mehr, als der Euklidische Algorithmus Schritte hat). Da  $b$  keine Fibonaccische Zahl ist, sind nicht alle Teilnenner von  $\omega$  gleich 1, und nach der Folgerung aus dem Satz in Punkt 5 wäre  $b > u_n$ . Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung unseres Satzes

Der eben bewiesene Satz besagt, dass der auf benachbarte Fibonaccische Zahlen angewandte Euklidische Algorithmus in gewissem Sinne "am längsten" ist.

**8. Einen Ausdruck der Form**

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_n + \frac{1}{\ddots}}}}} \quad (3.16)$$

bezeichnet man als unendlichen Kettenbruch. Die Definitionen und Ergebnisse der vorhergehenden Punkte lassen sich in natürlicher Weise auch auf solche unendliche Kettenbrüche ausdehnen. Sei

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}, \dots \quad (3.17)$$

die - offensichtlich unendliche - Folge der Näherungsbrüche des Bruches (3.16). Wir wollen zeigen, dass diese Folge einen Grenzwert besitzt.

Dazu betrachten wir die Teilfolgen

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \dots \quad (3.18)$$

und

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots, \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \dots \quad (3.19)$$

Wegen (3.10) und (3.11) gilt

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} > 0$$

Die Folge (3.18) ist also wachsend. Analog folgt aus

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{-1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} + \frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0$$

dass (3.19) eine abnehmende Folge ist.

Die Glieder der Folge (3.18) sind sämtlich größer als die Glieder der Folge (3.19). Betrachten wir nämlich die Zahlen

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad \text{und} \quad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

und geben wir eine ungerade Zahl  $k$  vor, die sowohl größer als  $2n$  als auch größer als  $2m+1$  ist, so ergibt sich aus (3.10), dass

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \quad (3.20)$$

gilt; aus der Tatsache, dass (3.18) eine wachsende und (3.19) eine fallende Folge ist, folgt

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad \text{und} \quad \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \quad (3.21, 3.22)$$

Vergleichen wir (3.20), (3.21) und (3.22), so erhalten wir gerade

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

Wegen (3.10) und (3.11) gilt

$$\left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{n^2}$$

für wachsendes  $n$  strebt demnach der Absolutbetrag der Differenz des  $(n+1)$ -ten und  $n$ -ten Näherungsbruches gegen Null.

Aus all dem Gesagten kann man schließen, dass die Folgen (3.18) und (3.19) ein und denselben Grenzwert besitzen, der offensichtlich auch Grenzwert von (3.17) ist. Diesen Grenzwert bezeichnet man als den Wert des unendlichen Kettenbruches (3.16).

In Nr. 2 haben wir die Eindeutigkeit der Entwicklung einer rationalen Zahl in einen Kettenbruch bewiesen. Da bei den dort angestellten Überlegungen nicht die Endlichkeit der betrachteten Kettenbrüche verwendet wurde, haben wir gleichzeitig nachgewiesen, dass jede reelle (und nicht nur rationale) Zahl als Wert nur eines einzigen Kettenbruches erscheinen kann.

Da sich eine rationale Zahl immer in einen endlichen Kettenbruch entwickeln lässt, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, dass die Entwicklung einer rationalen Zahl in einen unendlichen Kettenbruch nicht möglich ist. Daher ist der Wert eines unendlichen Kettenbruches stets eine irrationale Zahl.

Die Theorie der Entwicklung irrationaler Zahlen in Kettenbrüche ist ein inhaltlich tiefgehendes Gebiet der Zahlentheorie, das interessante Resultate birgt. Wir können hier nicht näher auf diese Theorie eingehen, sondern wollen uns nur mit einem Beispiel begnügen, das mit den Fibonaccischen Zahlen zusammenhängt.

**9.** Gesucht ist der Wert des unendlichen Kettenbruches

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (3.23)$$

Wir haben oben bewiesen, dass dieser Wert gleich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  ist, und wollen diesen Grenzwert nun berechnen.

Wie schon in § 1, Nr. 20, festgestellt wurde, ist  $u_n$  gleich der zu  $\frac{\alpha_n}{\sqrt{5}}$  nächstgelegenen ganzen Zahl. Also gilt

$$u_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{5}} + \theta_n$$

wobei  $|\theta_n| < \frac{1}{2}$  für jedes  $n$  gilt. Daher gilt nach Nr. 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} \right)}$$

Nun ist aber  $\theta_{n+1}\sqrt{5}$  beschränkt (der Absolutbetrag ist kleiner als 2), während  $\alpha^n$  für  $n \rightarrow \infty$  unbegrenzt wächst (wegen  $\alpha > 1$ ). Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

Aus den gleichen Gründen ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \alpha$$

Der Wert des Kettenbruches (3.23) kann auch ohne Binetsche Formel und ohne Grenzübergänge berechnet werden. (Für uns ist es in bekanntem Sinne "hinreichend", dass wir in Nr. 2 eine induktive Überlegung durchführten, die nicht nur endliche Kettenbrüche benutzt, sondern auch ihre Grenzwerte, nämlich unendliche Kettenbrüche.)

Dazu schreiben wir den Kettenbruch (3.23) in der Form

$$1 + \frac{1}{x}$$

Offenbar ist hier  $x$  selbst wieder ein Kettenbruch (3.23), so dass

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

gilt, woraus

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{also} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (3.24)$$

folgt. Da der Wert von (3.23) eine nichtnegative Zahl ist, muss er gleich der positiven Wurzel der Gleichung (3.24) sein, also gleich  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , und das ist genau der Wert von  $\alpha$ .

Der bewiesene Satz besagt, dass die Quotienten benachbarter Fibonaccischer Zahlen bei wachsenden Indizes gegen  $\alpha$  streben. Das kann zur angenäherten Berechnung der Zahl  $\alpha$  benutzt werden (vgl. die Berechnung von  $u_n$  in § 1, Nr. 20 und ebenfalls Formel 1.35).

Der dabei auftretende Fehler ist gering, selbst wenn man kleine Fibonaccische Zahlen verwendet. Zum Beispiel ist

$$\frac{u_{10}}{u_9} = \frac{55}{34} = 1,6176$$

auf 4 Stellen genau, während der genaue Wert von  $\alpha$  gleich 1,6180 ist. Wie man sieht, ist also der Fehler kleiner als 0,1%.

Übrigens ist der Fehler bei der angenäherten Berechnung irrationaler Zahlen mit Hilfe der Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklungen gerade bei der Zahl  $\alpha$  am größten.

Jede andere Zahl wird durch ihre Näherungsbrüche in gewissem Sinne "genauer" approximiert als  $\alpha$ . Wir können aber auf diesen Sachverhalt nicht näher eingehen, obwohl er äußerst interessant ist.

## 4 Die Fibonacci'schen Zahlen und die Geometrie

1. Wir wollen eine gegebene Strecke  $AB$  der Länge 1 (Abb. 2) so in zwei Abschnitte teilen, dass der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Abschnitt und der ganzen Strecke ist.



Die gesuchte Länge des größeren Streckenabschnittes bezeichnen wir mit  $x$ . Offensichtlich wird dann die Länge des kleineren Abschnittes gleich  $1 - x$ , und aus der in der Aufgabe angegebenen Bedingung erhalten wir die Proportion

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad (4.1)$$

und daraus

$$x^2 = 1 - x \quad (4.2)$$

Die Gleichung (4.2) hat die positive Wurzel  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , so dass die Proportion (4.1) die Gestalt

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

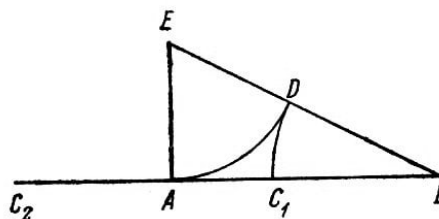
annimmt. Eine solche Teilung (durch den Punkt  $C_1$ ) bezeichnet man als "stetige Teilung" oder als "Goldenen Schnitt".

Verwendet man die negative Wurzel der Gleichung (4.2), so ergibt sich der Punkt  $C_2$ , der, wie aus Abb. 2 ersichtlich ist, nicht auf der Strecke  $AB$  liegt. (In der Geometrie spricht man hier von äußerer Teilung.) Man zeigt leicht, dass wir es auch hierbei mit dem Goldenen Schnitt zu tun haben:

$$\frac{C_2B}{AB} = \frac{AB}{C_2A} = \alpha$$

2. Der Punkt, der eine Strecke im Goldenen Schnitt teilt, lässt sich mühelos konstruieren.

Es sei  $|AB| = 1$ . In  $A$  errichten wir die Senkrechte und wählen darauf im Abstand  $\frac{1}{2}$  von  $A$  einen Punkt, den wir mit  $E$  bezeichnen; es ist also  $|AE| = \frac{1}{2}$  (Abb. 3).



Dann ist

$$|EB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

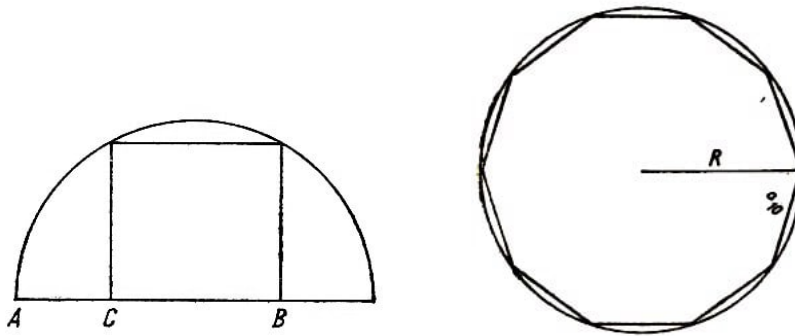
Ziehen wir um  $E$  als Mittelpunkt einen Kreis durch  $A$ , so schneidet dieser die Strecke  $\overline{EB}$  in einem Punkt  $D$ . Damit ist

$$|BD| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Schließlich ziehen wir durch  $D$  den Kreis mit dem Zentrum in  $B$  und finden dadurch auf  $\overline{AB}$  den gesuchten Punkt  $C_1$ . Den Punkt  $C_2$  für die äußere Teilung kann man aus der Bedingung  $|AC_2| = |BC_1|$  bestimmen.

**2.** Dem Goldenen Schnitt begegnet man in der Geometrie ziemlich häufig.

Bei dem einem Halbkreis einbeschriebenen Quadrat (vgl. Abb. 4) beispielsweise teilt der Punkt  $C$  die Strecke  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt.



Einem Kreis vom Radius  $R$  sei ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben (Abb. 5). Die Seite  $a_{10}$  hat bekanntlich die Länge

$$2R \sin \frac{360^\circ}{2 \cdot 10}$$

d.h.  $2R \sin 18^\circ$ . Berechnen wir einmal ein  $18^\circ$ . Auf Grund bekannter trigonometrischer Formeln erhalten wir:

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \quad , \quad \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$$

so dass

$$\sin 72^\circ = 4 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ) \quad (4.3)$$

gilt. Wegen  $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$  folgt aus (4.3)

$$1 = 4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ)$$

daher ist  $\sin 18^\circ$  eine der Wurzeln der Gleichung

$$1 = 4x(1 - 2x^2) \quad \text{bzw.} \quad 8x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

Zerlegen wir deren linke Seite in Faktoren, so erhalten wir

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

und daraus

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Da  $\sin 18^\circ$  positiv und von  $\frac{1}{2}$  verschieden ist, muss  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  sein.

Bei dieser Gelegenheit geben wir eine Beziehung an, die wir in Nr. 4 benötigen:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \frac{1}{4\alpha^2} = 1 - \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} = \frac{2 + 2\alpha - 1}{2\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha + 1}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{2\alpha^2} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Daher ist

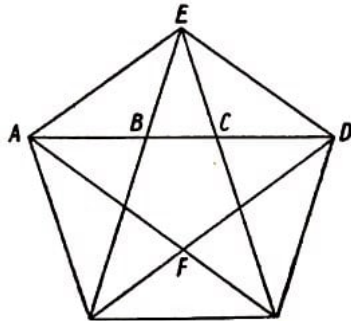
$$a_{10} = 2R \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{R}{\alpha}$$

Mit anderen Worten,  $a_{10}$  ist gleich dem größeren Teil des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Radius.

Zur praktischen Berechnung von  $a_{10}$  kann man  $\alpha$  durch das Verhältnis benachbarter Fibonacci'scher Zahlen ausdrücken (§ 1, Nr. 20, oder § 3, Nr. 9) und angenähert  $a_{10}$  gleich  $\frac{8}{13}R$  oder sogar schon gleich  $\frac{5}{8}R$  setzen.

4. Wir wollen nun ein regelmäßiges Fünfeck betrachten. Seine Diagonalen beschreiben ein regelmäßiges sternförmiges Fünfeck (Abb. 6).

Der Winkel  $AFD$  ist gleich  $108^\circ$ , der Winkel  $ADF$  gleich  $36^\circ$ . Nach dem Sinussatz folgt:



$$\frac{|AD|}{|AF|} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ = 2 \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \alpha$$

Da offensichtlich  $|AF| = |AC|$  ist, gilt

$$\frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \alpha$$

d.h., der Punkt  $C$  teilt die Strecke  $\overline{AD}$  nach dem Goldenen Schnitt.

Nach Definition des Goldenen Schnittes ist dann auch

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \alpha$$

Berücksichtigen wir  $|AB| = |CD|$ , so erhalten wir:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \alpha$$

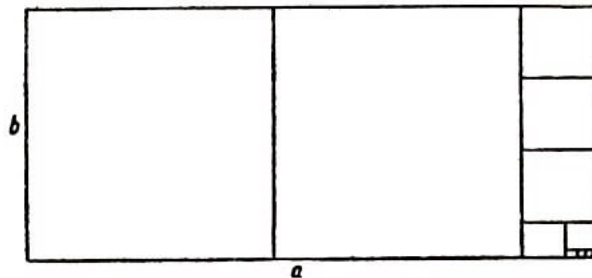
Aus diesem Grunde ist unter den Strecken  $|BC|$ ,  $|AB|$ ,  $|AC|$ ,  $|AD|$  jede Strecke  $\alpha$ -mal so groß wie die vorhergehende. Der Leser möge beweisen, dass auch

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \alpha$$



gilt.

5. In ein Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$  zeichnen wir möglichst große Quadrate ein (Abb. 7).



Die Betrachtungen in § 2, Nr. 5, zeigen, dass dieser Prozess, falls  $a$  und  $b$  ganz sind, dem Euklidischen Algorithmus für  $a$  und  $b$  entspricht. Die Anzahl der Quadrate von gleicher Größe ist daher gleich den entsprechenden Teilennern der Kettenbruchentwicklung von  $\frac{a}{b}$  (§ 3, Nr. 1).

Zerlegen wir ein Rechteck, dessen Seiten sich wie benachbarte Fibonacci'sche Zahlen verhalten, auf die beschriebene Weise in Quadrate (Abb. 8), so sind nach § 3, Nr. 3 alle Quadrate - außer den beiden kleinsten - von verschiedener Größe.

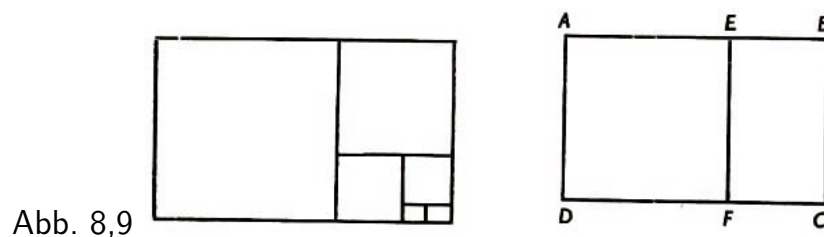
Da die Seiten all dieser Quadrate gleich  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sind, ist ihr gesamter Flächeninhalt offenbar gleich

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

Das stimmt aber mit dem Flächeninhalt  $u_n u_{n+1}$  des von uns zerlegten Rechtecks überein. Damit ist für jedes  $n$

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

und wir haben einen neuen, diesmal geometrischen Beweis der Behauptung aus § 1, Nr. 4, erhalten.



Das Verhältnis der beiden Rechteckseiten sei  $\alpha$ . (Solche Rechtecke wollen wir der Kürze halber "harmonische Rechtecke" nennen.) Wir beweisen nun:

Zeichnet man in ein harmonisches Rechteck ein möglichst großes Quadrat ein (Abb. 9), so erhält man als Rest wieder ein harmonisches Rechteck.

Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \alpha$$

ferner ist  $|AD| = |AE| = |EF|$ , da  $AEFD$  ein Quadrat ist. Also ist

$$\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{|AB| - |EB|}{|EB|} = \alpha^2 - 1$$

Wegen  $\alpha^2 - 1 = \alpha$  folgt schließlich

$$\frac{|EF|}{|EB|} = \alpha$$

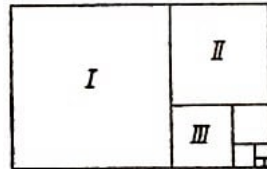
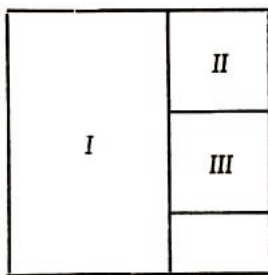


Abb.10 veranschaulicht, wie ein harmonisches Rechteck "fast ganz" durch die Quadrate I, II, III, . . . ausgeschöpft werden kann. Dabei ist die Figur, die nach Einzeichnung eines weiteren Quadrates verbleibt, jedesmal ein harmonisches Rechteck.



Der Leser vergleiche diese Überlegungen mit denen in § 3, Nr. 5 und 9.

Wir bemerken noch folgendes: Zeichnet man in ein Quadrat ein harmonisches Rechteck I und die Quadrate II und III ein (s. Abb.11), so erweist sich das verbleibende Rechteck ebenfalls als ein harmonisches Rechteck. Die Durchführung des Beweises sei dem Leser überlassen.

**7.** Auch in der Natur spielen bei der Anordnung gleichartiger Gegenstände die Fibonacci'schen Zahlen eine Rolle.

In verschiedenen spiralförmigen Anordnungen lassen sich zwei Scharen von Spiralen unterscheiden. Bei der einen winden sich die Spiralen im Uhrzeigersinn, bei der anderen in entgegengesetzter Richtung. Die Anzahl der Spiralen beider Scharen erweisen sich oft als benachbarte Fibonacci'sche Zahlen.

Betrachten wir einen jungen Kiefernzweig, so lässt sich leicht feststellen, dass seine Nadeln in zwei Spiralen angeordnet sind, die von rechts unten nach links oben gehen. Gleichzeitig bilden sie drei Spiralen, die von links unten nach rechts oben verlaufen.

Bei vielen Zapfen sind die Schuppen in drei Spiralen angeordnet, die sich um die Achse des Zapfens winden. Außerdem sind die Spiralen in fünf Spiralen angeordnet, die sich in der entgegengesetzten Richtung um die Achse winden.

Bei großen Zapfen lassen sich 5 und 8 und sogar 8 und 13 Spiralen beobachten. Auch kann man solche Spiralen bei der Ananas finden; gewöhnlich sind es dort 8 und 13.

Bei vielen Korbblütlern (z. B. der Margerite oder der Kamille) bemerkt man eine spiralförmige Anordnung der einzelnen Blüten in Blütenstände. Die Anzahl der Spiralen ist hier 13 in der einen und 21 in der anderen Richtung oder sogar 21 bzw. 34.

Besonders viele Spiralen treten bei der Anordnung der Samen großer Sonnenblumen auf. Ihre Anzahl kann 55 in der einen und 89 in der anderen Richtung sein.

**8.** Harmonische Rechtecke sehen "wohlproportioniert" aus und wirken gefällig. Gegenstände dieser Gestalt erweisen sich auch als bequem im Gebrauch. Daher gibt man vielen unserer "rechteckigen" Gebrauchsgegenstände - wie Büchern, Streichholzschachteln, Koffern usw. - diese Form.

Verschiedene idealistische Philosophen des Altertums und des Mittelalters leiteten aus der augenfälligen Schönheit der harmonischen Rechtecke und anderer Figuren, in denen der Goldene Schnitt Verwendung findet, ästhetische und sogar philosophische Prinzipien ab.

Mit Hilfe des Goldenen Schnittes und einiger anderer Zahlenverhältnisse versuchten sie, die Erscheinungen in der Natur und im gesellschaftlichen Leben zu erklären.

Unter Benutzung der Zahl  $\alpha$  selbst und ihrer Näherungsbrüche erfanden sie mystische "Operationen" verschiedener Art.

Solche "Theorien" haben mit Wissenschaft natürlich nicht das geringste zu tun.

**9.** Wir beschließen unsere Betrachtungen mit einem kleinen geometrischen Scherz. Wir "beweisen" nämlich anschaulich, dass  $64 = 65$  ist.

Dazu nehmen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 und zerlegen es so in vier Teile, wie Abb. 12 zeigt.

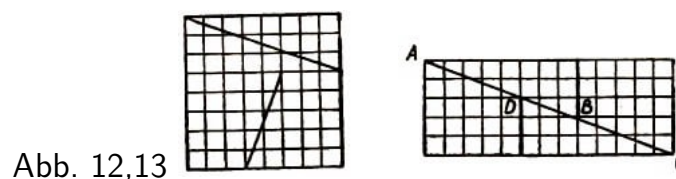


Abb. 12,13

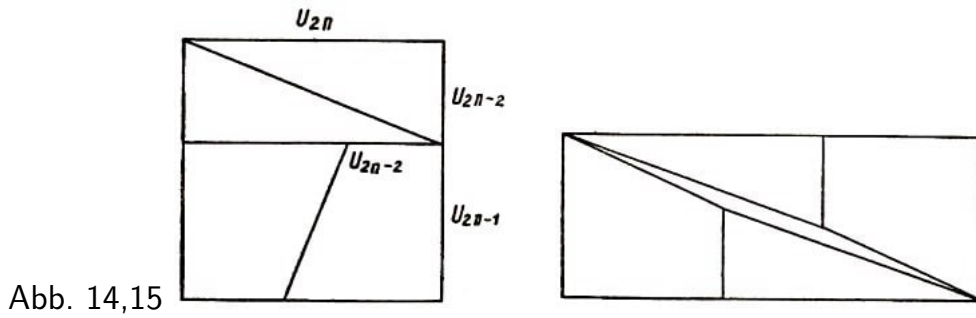
Diese vier Teile setzen wir zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 13 und 5 zusammen (Abb. 11).

Das Rechteck hat also den Flächeninhalt 65.

Für diese auf den ersten Blick rätselhafte Erscheinung findet man leicht eine Erklärung. Die Punkte  $A, B, C, D$  in Abb. 13 liegen nämlich in Wirklichkeit gar nicht auf einer Geraden, sondern bilden vielmehr die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen Flächeninhalt gerade gleich der einen "überzähligen" Einheit ist.

Dieser verblüffende, aber falsche "Beweis" einer wissenschaftlich falschen Aussage (solche "Beweise" nennt man Sophismen) kann noch anschaulicher und überzeugender durchgeführt werden, wenn man an Stelle des Quadrates mit der Seitenlänge 8 ein Quadrat nimmt, dessen Seitenlänge gleich irgendeiner Fibonacci'schen Zahl mit hinreichend großem geradem Index,  $u_{2n}$ , ist.

Wir zerlegen dieses Quadrat wieder (Abb. 14) und formen aus seinen Teilen ein Rechteck (Abb.15).



Die nicht ausgefüllte Fläche in Form eines Parallelogramms, das sich längs der Diagonale unseres Rechtecks hinzieht, hat nach den Ausführungen von § 1, Nr. 9, einen Inhalt, der gleich 1 ist. Die größte Breite, d.h. die Höhe dieses Parallelogramms, ist, wie man leicht bestätigt, gleich

$$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n-2}^2}}$$

Nehmen wir also ein Quadrat mit der Seitenlänge 21 cm und "verwandeln" es in ein Rechteck mit den Seiten 34 cm und 13 cm, so ist die Höhe des auftretenden Parallelogramms

$$\frac{1}{\sqrt{21^2 + 8^2}} \text{ cm}$$

d.h. ungefähr 0,4 mm, also für das Auge kaum wahrnehmbar.

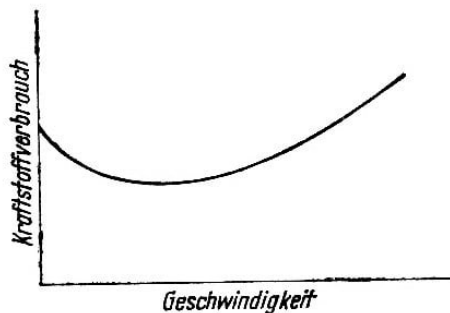
## 5 Die Fibonaccischen Zahlen und die Suchtheorie

1.<sup>5</sup> Bekanntlich hat ein Kraftfahrzeug bei verschiedenen hohen Geschwindigkeiten unterschiedlichen Benzinverbrauch. Dabei ist es von Interesse, welche Geschwindigkeit in Bezug auf den Benzinverbrauch "optimal" ist, d.h., bei welcher Geschwindigkeit am wenigsten Kraftstoff verbraucht wird.

Wir können annehmen, dass die Kurve, die den Benzinverbrauch pro Kilometer in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs angibt, die in Abb. 16 gezeigte Form hat; zunächst sinkt der Verbrauch auf ein gewisses Minimum ab, um dann mit weiterer Erhöhung der Geschwindigkeit ständig (in der Mathematik sagt man "monoton") zu steigen.

Obwohl diese Kurve, die zunächst abfällt und dann ansteigt, für alle Kraftfahrzeuge praktisch gleich verläuft, kann ihre genaue Form sogar für Kraftfahrzeuge gleichen Typs etwas variieren, da diese Kurve von den spezifischen Eigenarten des Motors, vom Grad der Abnutzung seiner Teile usw. abhängt.

Insbesondere kann sich auch das Minimum in Abb. 16 in ziemlich breiten Grenzen bewegen.



Wir nehmen jetzt einmal an, wir verreisen mit dem Auto in eine Gegend, in der es keine Tankstellen gibt. Damit es uns möglich ist, die größte Entfernung zurückzulegen, ohne zu tanken, müssen wir hinreichend genau die Geschwindigkeit bestimmen, die einem minimalen Kraftstoffverbrauch entspricht.

Diese Geschwindigkeit wird oft die ökonomischste Geschwindigkeit genannt.

Die ökonomischste Geschwindigkeit eines Kraftfahrzeuges lässt sich selbstverständlich durch einen Versuch bestimmen, indem man mit verschiedenen Geschwindigkeiten bestimmte Wegstrecken zurücklegt, deren Charakter und Beschaffenheit für die beabsichtigte Reiseroute typisch sind, und jedes Mal den Benzinverbrauch misst.

Da diese Beschäftigung nicht gerade befriedigend ist, denkt man natürlich über Folgendes nach:

Wie viele Versuche genügen, um die ökonomischste Geschwindigkeit mit vorgegebener Genauigkeit zu bestimmen?

Bei welchen Geschwindigkeiten ist der Benzinverbrauch zu bestimmen?

---

<sup>5</sup>Die Suchtheorie wurde im 2. Weltkrieg für militärische Zwecke entwickelt und wird auch heute überwiegend im Militärwesen benutzt. Es ist jedoch an der Zeit, sie für friedliche Zwecke, z. B. zum Auffinden von Fischschwärmen im Meer, zu erschließen. (Anm. d. Red.)

Diesen Fragen analog sind die beiden folgenden: Wie organisiert man eine bestimmte Anzahl von Versuchen, um mit vorgegebener Genauigkeit die ökonomischste Geschwindigkeit zu finden? Welches ist die größte Genauigkeit?

Dabei wollen wir unter der Bestimmung der ökonomischsten Geschwindigkeit mit vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon$  jene Geschwindigkeit verstehen, bei der der wahre Wert der ökonomischsten Geschwindigkeit zwischen  $v - \varepsilon$  und  $v + \varepsilon$  liegt (d.h. bei der der Fehler nicht größer als  $\varepsilon$  ist).

Wir können als bekannt voraussetzen, dass die ökonomischste Geschwindigkeit unseres Autos zwischen Grenzen  $v'$  und  $v''$  liegt. Für  $v'$  bzw.  $v''$  ist die Geschwindigkeit zu nehmen, die nicht größer bzw. nicht kleiner als die ökonomischste Geschwindigkeit ist. (Zum Beispiel kann  $v'$  die niedrigste Geschwindigkeit sein, bei der der Motor gerade noch arbeitet, und  $v''$  die Höchstgeschwindigkeit des betreffenden Autos.)

2. Ausgehend von dem eben beschriebenen konkreten Beispiel wollen wir das folgende mathematische Problem betrachten.

Von einer Funktion  $f(x)$  sei uns nur bekannt, dass sie von einem gegebenen  $x'$  bis zu einem gewissen unbekannten Wert  $\bar{x}$  abnimmt und zwischen diesem  $\bar{x}$  und einem gegebenen  $x''$  wieder wächst (Abb. 17). Insbesondere wollen wir zulassen, dass der unbekannte Wert  $\bar{x}$  in Wirklichkeit mit einem der Endpunkte des betrachteten Intervalls, nämlich mit  $x'$  oder  $x''$  übereinstimmt.

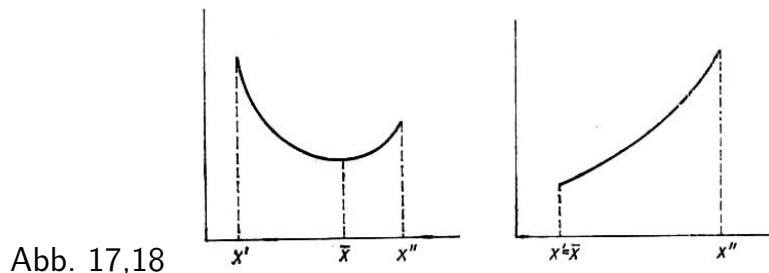


Abb. 17,18

Offenbar ist dann die Funktion ständig wachsend (Abb. 18) bzw. ständig fallend (Abb. 19). Selbstverständlich ist vorher unbekannt, ob einer dieser Fälle eintritt. Im Punkt  $x = \bar{x}$  nimmt die Funktion  $f(x)$  ihren kleinsten Wert oder ihr Minimum  $f(\bar{x})$  an. Vom Punkt  $\bar{x}$  sagt man dann, dass in ihm die Funktion ihr Minimum erreicht. Er wird oft auch der minimierende Punkt der Funktion genannt.

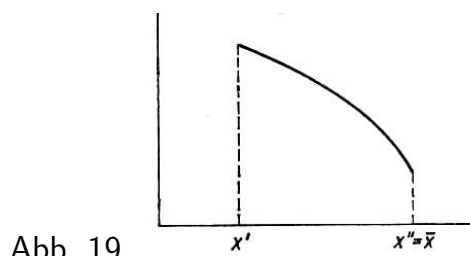


Abb. 19

Wir werden im folgenden nur solche Funktionen betrachten, bei denen nach dem Wachsen kein Abfallen folgt. Solche Funktionen nennen wir kurz Funktionen mit einem Minimum.

In diesem Paragraphen wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, den minimierenden Punkt einer Funktion  $f$  mit einem Minimum genau zu bestimmen. Dass  $f$  eine Funktion

mit nur einem Minimum ist, setzen wir im folgenden stets voraus, ohne es ausdrücklich zu erwähnen. Klar ist, dass - nach entsprechenden Änderungen - das über die Minima dieser Funktionen Gesagte auch für Maxima gilt.

**3.** An dem betrachteten Problem sowie an analogen Problemen sind drei Faktoren wesentlich: das zu erreichende Ziel; die Möglichkeiten, dieses Ziel zu erreichen; die Bedingungen, die dabei zu beachten sind.

In unserem Fall ist das Ziel die Erhöhung der Genauigkeit bei der Bestimmung des minimierenden Punktes, d.h. die Verkleinerung des Fehlers bei der Berechnung dieses Punktes.

Die Möglichkeiten, dieses Ziel zu erreichen, sind die verschiedenen Arten der Bestimmung einer gewissen Anzahl von Werten der Funktion  $f$  (Berechnung, Messung oder einfach Raten) in beliebigen Punkten und in dem Größenvergleich dieser Werte.

Die Bedingungen, die dabei zu beachten sind, bestehen hier in der Größe des Definitionsbereichs der Funktion  $f$ , d.h. in der Länge  $L$  der Strecke zwischen  $x'$  und  $x''$ .

Entsprechend dem Gesagten hat jede konkrete Suchaufgabe drei Aspekte.

1. Inwieweit ist das gesteckte Ziel unter den gegebenen Möglichkeiten und Bedingungen zu realisieren?

Dies bedeutet bei dem behandelten Problem folgendes. Es sind  $n$  aufeinanderfolgende Werte der Funktion  $f$  zu bestimmen, wobei die Punkte, in denen  $f$  bestimmt wird, beliebig gewählt werden können. In welchen Punkten muss man die Werte der Funktion bestimmen, damit der Punkt  $\bar{x}$  mit der größten Genauigkeit erreicht wird, und wie groß ist diese Genauigkeit?

2. Über welche Möglichkeiten muss man verfügen, um das gesteckte Ziel unter den gegebenen Bedingungen realisieren zu können?

In unserem Problem kann diese Frage folgendermaßen konkretisiert werden. Wir wollen den die Funktion  $f$  minimierenden Punkt  $\bar{x}$  mit gegebener Genauigkeit  $\varepsilon$  bestimmen, d.h., wir wollen ein solches  $x$  finden, dass  $\bar{x}$  zwischen  $x - \varepsilon$  und  $x + \varepsilon$  liegt. Wie viele Berechnungen der Werte von  $f$  sind dazu notwendig, und wie sind diese Berechnungen zu organisieren?

3. Unter welchen Bedingungen genügen die vorhandenen Möglichkeiten, um das gesteckte Ziel zu realisieren?

In unserem Fall geht es darum, das größte Intervall  $L$  (d.h. den größten Wert der Differenz  $x'' - x'$ ) aufzusuchen, für das eine Methode existiert, mit deren Hilfe man den die Funktion  $f$  minimierenden Punkt bei  $n$  Beobachtungen mit vorgegebener Genauigkeit  $\varepsilon$  bestimmen kann.

**4.** Streng genommen haben wir es jetzt nicht mit einem Problem, sondern mit zwei Problemen zu tun.

Beim ersten Problem müssen der minimierende Punkt  $\bar{x}$  und der Wert  $f(\bar{x})$  bestimmt werden. Beim zweiten Problem ist nur der Punkt  $\bar{x}$  selbst interessant, und der Wert  $f(\bar{x})$  ist unwesentlich.

In der ersten Aufgabe (wir wollen sie die Aufgabe A nennen) sind unsere Ziele weiter gesteckt als in der zweiten (Aufgabe B).

Daher ist natürlich zu erwarten, dass bei den vorhandenen Möglichkeiten und Bedingungen die Ziele der Aufgabe A in geringerem Maße realisierbar sind als die der Aufgabe B (bei gegebenem  $n$  und  $L$  ergibt sich in Aufgabe B ein kleineres  $\varepsilon$  als in Aufgabe A); dass zur Realisierung der Ziele beider Aufgaben mit gleicher Genauigkeit und unter gleichen Bedingungen die Aufgabe A mehr Möglichkeiten erfordert (bei gleichem Fehler  $\varepsilon$  und gleicher Intervalllänge  $L$  ist in Aufgabe A im allgemeinen ein größeres  $n$  notwendig); dass die gleiche Realisierung der Ziele bei gleichen Möglichkeiten in Aufgabe A leichtere Bedingungen verlangt (gleiche  $\varepsilon$  und  $n$  sind in Aufgabe A nur mit kleineren Werten von  $L$  als in Aufgabe B zu erzielen).

5. Um die formulierten Probleme mathematisch zu verdeutlichen, muss der folgende wichtige Umstand erklärt werden.

Wir setzen voraus, dass uns die Möglichkeiten interessieren, wie der minimierende Punkt  $\bar{x}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  im Intervall der Länge  $L$  bestimmt werden kann (offenbar können wir als Anfangspunkt dieses Intervalls den Punkt 0 und als Endpunkt den Punkt  $L$  nehmen).

Wir nehmen an, dass wir die Aufgabe A lösen, d. h., dass uns sowohl  $\bar{x}$  als auch  $f(\bar{x})$  interessiert. Der Punkt  $\bar{x}$  sei auf folgende Art bestimmt worden. Wir nehmen ein beliebiges  $x$  zwischen 0 und  $L$  und bestimmen den Wert von  $f$  in den Punkten  $x - \varepsilon$ ,  $x$  und  $x + \varepsilon$ , d.h., wir berechnen die Größen

$$f(x - \varepsilon), \quad f(x), \quad f(x + \varepsilon)$$

(Abb. 20). Trotz der Willkür bei der Wahl von  $x$  nehmen wir an, dass  $x - \varepsilon$  nichtnegativ ist, so dass der Wert von  $f(x - \varepsilon)$  tatsächlich berechnet werden kann; analog setzen wir  $x + \varepsilon \leq L$ . Insgesamt kann man

$$f(x - \varepsilon) > f(x) < f(x + \varepsilon)$$

schreiben: das bedeutet, dass die im Punkt  $x - \varepsilon$  fallende Funktion  $f$  beim Übergang zu  $x + \varepsilon$  zu wachsen beginnt.

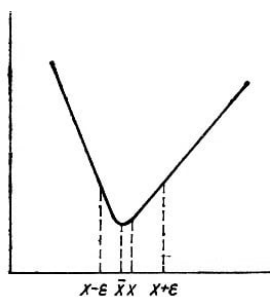


Abb. 20

Aber der Übergang vom Fallen zum Wachsen ist unbedingt mit dem Durchgang durch einen kleinsten Wert verknüpft. Im vorliegenden Fall wird dieser kleinste Wert von  $f$  in einem gewissen Punkt  $\bar{x}$  erreicht, der zwischen  $x - \varepsilon$  und  $x + \varepsilon$  liegt.

Daher ist der Abstand zwischen  $x$  und  $\bar{x}$  nicht größer als  $\varepsilon$  und  $x$  ist genau der Näherungswert von  $\bar{x}$ , den wir suchen. In diesem Fall wird das gesuchte  $\bar{x}$  durch drei Beobachtungen bestimmt. So - wohlgermerkt - kann es sein.



Eine Garantie, das es tatsächlich so ist, haben wir jedoch nicht. Ist die Länge  $L$  des Intervalls groß und  $\varepsilon$  klein, so ist das Eintreten dieser Erscheinung kaum zu erwarten. Dagegen ist es sehr wahrscheinlich, dass die Funktion  $f$  bei drei Beobachtungen verhältnismäßig große Werte annimmt und ihr Minimum irgendwo anders erreicht. Infolgedessen können drei Beobachtungen ausreichen oder auch nicht.

Wir benötigen also einen Plan, der unbedingt zur Bestimmung von  $\bar{x}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  führt, unabhängig davon, wo dieser Punkt  $\bar{x}$  wirklich liegt. Solche Pläne existieren.

Wir wollen z. B. systematisch die Werte

$$f(0), \quad f(\varepsilon), \quad f(2\varepsilon); \quad \dots \quad (5.1)$$

der Funktion  $f$  berechnen, und zwar bis zu einem solchen  $f(r\varepsilon)$ , dass  $(r+1)\varepsilon$  größer als  $L$  ist (Abb. 21).

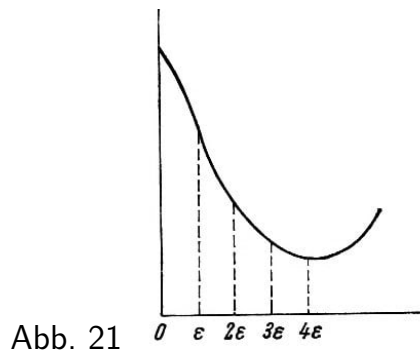


Abb. 21

Offenbar ist derjenige Wert  $k\varepsilon$ , für den die Funktion in der Folge (5.1) ihr Minimum erreicht, der gesuchte.

Das Wesen der zu lösenden Aufgaben besteht darin, dass wir nicht einfach einen Plan aufstellen, der uns in allen und insbesondere in den ungünstigen Fällen den Wert  $\bar{x}$  mit vorgegebener Genauigkeit angibt, sondern den ökonomischsten dieser Pläne, d.h. den Plan, der unter den allerschlechtesten Bedingungen der beste ist.

Die schlechtesten Bedingungen sind solche, bei denen die Anzahl der zu berechnenden Werte von  $f$  maximal ist.

Analog ist der ökonomischste Plan derjenige, der das gesteckte Ziel mit einer minimalen Anzahl von Berechnungen der Werte von  $f$  erreicht. Daher heißt der unter schlechtesten Bedingungen beste Plan ein Minimum-Maximum-Plan. Wir werden einen solchen Plan optimal nennen.

Die Gesamtheit der Schritte, die in einem optimalen Plan vorgeschrieben sind (sowohl in dieser als auch in jeder anderen analogen Aufgabe), kann man charakterisieren als kleinste zweckmäßige Auswahl des sich vor uns "verbergenden" Minimums der Funktion, das "gerade nicht dort anzutreffen ist, wo wir es suchen".

Das eben Gesagte hat weder mit Mystik noch mit Aberglauben zu tun, sondern ist nur eine Charakterisierung des besten Vorgehens unter schlechtesten Bedingungen.

**6.** Es ist wichtig zu bemerken, dass es nicht für jede Suchaufgabe optimale Pläne gibt. So existiert z. B. für die Aufgabe B kein optimaler Plan.

Um das zu zeigen, setzen wir  $L = 2$  und  $n = 2$ . Welche Genauigkeit  $\varepsilon$  können wir dabei garantieren?

Die Endpunkte des betrachteten Intervalls seien 0 und 2. Wir nehmen ein beliebig kleines positives  $\alpha$  und berechnen die Werte der Funktion  $f$  in den Punkten  $1 - \alpha$  und  $1 + \alpha$ . Ist dabei

$$f(1 - \alpha) \leq f(1 + \alpha)$$

so muss der gesuchte minimierende Punkt  $\bar{x}$  zwischen 0 und  $1 + \alpha$  liegen; ist

$$f(1 - \alpha) \geq f(1 + \alpha)$$

so liegt  $\bar{x}$  zwischen  $1 - \alpha$  und 2. Wir setzen im ersten Fall

$$\bar{x} = \frac{1 + \alpha}{2}$$

im zweiten Fall

$$\bar{x} = \frac{(1 - \alpha) + 2}{2} = \frac{3 - \alpha}{2}$$

Im ungünstigsten Fall unterscheidet sich das zu bestimmende  $\bar{x}$  von dem wahren minimierenden Punkt der Funktion  $f$  um  $\frac{1+\alpha}{2}$ .

Strebt  $\alpha$  gegen 0, so verkleinert sich der Fehler. Jedoch kann  $\alpha$  nicht gleich 0 sein (da dann die Punkte  $1 - \alpha$  und  $1 + \alpha$  zusammenfallen und der Vergleich des Wertes von  $f(1 - \alpha)$  mit dem notwendigerweise ihm gleichen - weil in demselben Punkt berechneten - Wert von  $f(1 + \alpha)$  uns keine Information liefert).

Daher ist der Fehler stets größer als  $\frac{1}{2}$ , obwohl er beliebig nahe bei  $\frac{1}{2}$  liegen kann.

Jeder positive Wert  $\alpha$  bestimmt hier einen gewissen Plan. Je näher  $\alpha$  bei 0 liegt, desto besser ist dieser Plan. Da zu jedem  $\alpha > 0$  eine noch kleinere positive Zahl zu finden ist, gibt es zu jedem Plan einen noch besseren. Folglich existiert bei der Aufgabe B kein optimaler Plan.

Jedoch gibt es bei der Aufgabe B "fast optimale" Pläne, die sich auf Resultate beziehen, welche sich nur unbedeutend verbessern lassen. Genauer gesagt, zu jeder Zahl  $\gamma > 0$  existiert ein solcher Plan  $P_\gamma$ , dass kein anderer Plan den durch  $P_\gamma$  gegebenen Fehler um mehr als  $\gamma$  verkleinern kann.<sup>6</sup>

**7.** Der durch die Folge (5.1) beschriebene Plan für ein  $\varepsilon$ , das hinreichend klein im Vergleich zur Länge  $L$  des betrachteten Intervalls ist, ist nicht optimal. Halten wir uns an diesen Plan, so müssen wir im ungünstigsten Fall alle  $r$  Rechnungen ausführen. Wir versuchen jedoch, anders vorzugehen. Wir werden nur die folgenden Glieder von (5.1) berechnen:

$$f(0), \quad f(2\varepsilon), \quad f(4\varepsilon), \quad \dots$$

wir finden in der so erhaltenen Folge das kleinste der Glieder (das sei etwa  $f(2k\varepsilon)$ ) und berechnen die beiden Werte  $f((2k - 1)\varepsilon)$  und  $f((2k + 1)\varepsilon)$ . Derjenige der drei Werte

---

<sup>6</sup>Im Gegensatz zur Aufgabe B gibt es für die Aufgabe A stets einen optimalen Plan, wie in Nr. 10 gezeigt wird. (Anm. d. Red.)

$(2k-1)\varepsilon$ ,  $2k\varepsilon$  und  $(2k+1)\varepsilon$  der Veränderlichen, für den der Wert der Funktion  $f$  der kleinste der Werte

$$f((2k-1)\varepsilon), \quad f(k\varepsilon), \quad f((2k+1)\varepsilon)$$

ist, muss offenbar  $\bar{x}$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  sein.

Dieser neue Plan führt unter schlechtesten Bedingungen nach etwa  $\frac{r}{2} + 2$  Berechnungen zum Ziel. Für große  $r$  ist diese Zahl wesentlich kleiner als die beim ersten Plan erforderliche Anzahl von Berechnungen.

Der erste Plan ist also nicht optimal. Aber auch den zweiten Plan kann man bei diesen Ausgangsbedingungen im allgemeinen nicht als optimal ansehen.

Jedoch unterscheidet sich der zweite Plan vom ersten durch einen überaus wesentlichen Gesichtspunkt: Die Punkte, in denen Funktionswerte auf jeden Fall berechnet werden, lassen sich im voraus nur teilweise planen, während sich die übrigen Punkte durch Vergleich der schon berechneten Funktionswerte ergeben.

Intuitiv ist völlig klar, dass die Wahl der besten Schritte stets mit der Ausnutzung der Information verknüpft sein muss, die man über die Resultate der schon vorher durchgeführten Schritte erhält.

Der zweite Plan ist in dieser Beziehung vollkommener als der erste. Aber auch er lässt im allgemeinen weitere Vervollkommnungen zu, wodurch wir letzten Endes zu einem optimalen Plan gelangen.

Natürlich ist bei der Lagebestimmung des Minimums einer Funktion jeder neu erhaltene Funktionswert mit einem der bei den vorhergehenden Beobachtungen erhaltenen Werten zu vergleichen.

Die Wahl des Punktes, in dem die darauffolgende Messung vorgenommen wird, oder die Entscheidung, ob die Messungen abgebrochen werden, hängt daher erstens von jenen Punkten ab, in denen wir schon Funktionswerte berechnet haben, und zweitens von den berechneten Funktionswerten selbst.

Offenbar ist dieser Prozess der sukzessiven Berechnung der Werte von  $f$  vollständig bestimmt durch ein Gesetz, das für jedes  $k \geq 0$  bei beliebiger Wahl der Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  und der Werte von  $f$  in diesen Punkten entscheidet, ob der Punkt  $x_{k+1}$  als  $\bar{x}$  genommen und die Beobachtungen der Funktion  $f$  abgebrochen werden sollen oder nicht. Dieses Gesetz heißt oft Entscheidungsfunktion.

Jeder Plan bestimmt eine gewisse Entscheidungsfunktion. Umgekehrt bestimmt jede Entscheidungsfunktion einen gewissen Plan. Insbesondere ist die Entscheidungsfunktion eine genaue formelmäßige Beschreibung des Planes. Zum Beispiel ordnet diejenige Funktion, die den ersten der eben betrachteten Pläne bestimmt, jeder Zahl  $k$  ( $0 \leq k < r$ ) den Punkt  $(k+1)\varepsilon$  zu, während die Zahl  $r$  den Prozess beendet.

Der Begriff der Entscheidungsfunktion gehört zu den wichtigsten Begriffen der modernen Mathematik. Bedauerlicherweise ist die genaue Definition dieses Begriffs ziemlich umfangreich und kann deshalb hier nicht eingeführt werden.

**8.** Das Ziel eines Planes  $P$  bestehe darin, den Punkt  $\bar{x}$ , der die Funktion  $f$  minimiert, in einem Intervall der Länge  $L$  mit Hilfe von  $n$  Beobachtungen so genau wie möglich

zu bestimmen. Einen solchen Plan werden wir im folgenden  $n$ -schrittig nennen. Unter den Bedingungen eines gewissen  $n$ -schrittigen Planes  $P$  möge es gelingen, den Punkt  $\bar{x}$  im Intervall der Länge  $L$  mit der Genauigkeit  $\varepsilon$  zu bestimmen.

Diese Genauigkeit hängt vom Plan  $P$  selbst, aber auch von  $n$  und  $L$  ab. Daher können wir sie als Funktion von  $P$ ,  $n$  und  $L$  auffassen und für die Aufgabe A mit  $\tau_P^A(n, L)$ , für die Aufgabe B mit  $\tau_P^B(n, L)$  bezeichnen.

Unter  $\tau_P(n, L)$  werden wir dann einen beliebigen (aber innerhalb einer Untersuchung stets den gleichen) der Ausdrücke  $\tau_P^A(n, L)$  und  $\tau_P^B(n, L)$  verstehen.

Der  $n$ -schrittige Plan  $P_0$  zur Bestimmung des Minimums von  $f$  im Intervall der Länge  $L$  ist in Aufgabe A optimal, wenn  $\tau_{P_0}^A(n, L)$  nicht größer ist als  $\tau_P^A(n, L)$  für einen beliebigen anderen Plan  $P$ , d.h.

$$\tau_{P_0}^A(n, L) \leq \tau_P^A(n, L)$$

Das lässt sich auch in der Gestalt

$$\tau_{P_0}^A(n, L) = \min_P \tau_P^A(n, L) \quad (5.2)$$

schreiben.

Die Zahl  $\tau_{P_0}^A(n, L)$  ist nicht für den Plan charakteristisch, sondern für die Aufgabe selbst (nämlich für die Aufgabe, in  $n$  Schritten den minimierenden Punkt der Funktion  $f$  im Intervall der Länge  $L$  zu finden). Daher hängt die Zahl nicht von irgendeinem Plan ab, sondern nur von  $n$  und  $L$  und kann daher einfach mit  $\tau^A(n, L)$  bezeichnet werden.

Unter den Bedingungen der Aufgabe B ist die Sache etwas komplizierter. Hier gibt es, wie wir schon sahen, keinen optimalen Plan, der unter schlechtesten Bedingungen den kleinsten Fehler garantiert.

Jedoch existiert ein solcher Fehler, an den man dicht genug heran gehen kann, sobald man einen geeigneten Plan wählt. Dieser Fehler, den wir den Grenzfehler nennen wollen, hängt ebenfalls nur von den Bedingungen der Aufgabe ab. Daher bezeichnen wir ihn mit  $\tau^B(n, L)$ . Jeder andere Plan  $P$  führt zu einem größeren Fehler,

$$\tau^B(n, L) < \tau_P^B(n, L)$$

und somit können wir hier keine zu (5.2) analoge Gleichung angeben.

Wir greifen etwas vor und sagen, dass alle manchmal recht komplizierten Überlegungen dieses Paragraphen darin gipfeln, explizite Ausdrücke für  $\tau^A(n, L)$  und  $\tau^B(n, L)$  zu finden, nämlich

$$\tau^A(n, L) = \frac{L}{u_{n+2}} \quad , \quad \tau^B(n, L) = \frac{L}{2u_{n+1}} \quad (5.3, 5.4)$$

Damit gestattet der Verzicht auf das Auffinden des Minimums einer Funktion die Erhöhung der Genauigkeit bei der Bestimmung des minimierenden Punktes um den Faktor  $\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}$ . Für hinreichend große  $n$  liegt dieser Quotient auf Grund von § 1, Nr. 20, nahe bei  $\frac{2}{\alpha} = 1,236$ ; das entspricht einer Vergrößerung der Genauigkeit um etwa 23%.

**9.** Es ist klar, dass bei allen weiteren Untersuchungen nicht jede der Zahlen  $L$  und  $\varepsilon$  für sich, sondern das Verhältnis von  $L$  und  $\varepsilon$  wichtig ist. Dieses Verhältnis ist der relative Fehler von  $\bar{x}$ .

Ist es uns gegeben, so können wir, indem wir auf geeignete Weise die Einheit auf der  $x$ -Achse (d.h. die Einheit zur Messung der Intervalllänge) festlegen, eine der Zahlen  $L$  und  $\varepsilon$  völlig willkürlich wählen.

Diese Überlegung führt zu einer überaus lehrreichen Schlussfolgerung.

Eine Änderung des Maßstabs längs der  $x$ -Achse zieht sowohl eine Änderung der Zahl  $L$  nach sich, die die Intervalllänge angibt, als auch des Fehlers bei der Bestimmung des gesuchten Punktes nach einem beliebigen Plan  $P$ . Mit anderen Worten, für jedes positive  $\lambda$  gilt

$$\tau_P(n, \lambda L) = \lambda \tau_P(n, L) \quad (5.5)$$

Genauso bleibt ein Plan optimal, wenn wir bei seiner Beschreibung die Lagen der Punkte im Intervall nicht im absoluten, sondern relativen Längenmaß angeben. Nach einer solchen Änderung bei der Beschreibung eines Planes bleiben optimale Pläne optimal und nichtoptimale Pläne nichtoptimal.

Daraus folgt unmittelbar, dass eine gleichmäßige Dehnung (oder Zusammenziehung) des Intervalls, in dem sich die Funktion  $f$  ändert, nur eine "Ähnlichkeitstransformation" des optimalen Planes bewirkt, ohne dass seine Optimalität gestört wird.

Das bedeutet, dass die in (5.5) auftretenden Fehler  $\tau_P(n, \lambda L)$  und  $\tau_P(n, L)$  nicht nur bei Realisierung irgendeines Planes gemacht werden, sondern auch bei Anwendung von Plänen, die durch Ähnlichkeitstransformationen aus einem Plan hervorgegangen sind.

**10.** Nach all diesen ziemlich verwickelten vorbereitenden Überlegungen wollen wir einen optimalen Plan für die Aufgabe A suchen und die Formeln (5.3) und (5.4) beweisen.

**Lemma.** Für alle  $n \geq 1$  und alle  $L$  existiert ein  $n$ -schrittiger Plan zum Aufsuchen des Punktes  $\bar{x}$ , in dem die Funktion  $f$  (mit einem Minimum) im Intervall der Länge  $L$  nach  $n$  Schritten ihr Minimum erreicht, wobei der Plan folgende Eigenschaften besitzt:

1. Bei jedem Schritt wird ein gewisses Intervall  $[x', x'']$  betrachtet.
2. Beim ersten Schritt wird der Wert der Funktion  $f$  in einem der Punkte  $\frac{u_n}{u_{n+2}}L$  oder  $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$  berechnet.
3. Zu Beginn jedes der folgenden Schritte mit der Nummer  $k$  (d.h. für  $1 < k \leq n$ ) ist der Wert von  $f$  in einem der beiden Punkte

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') \quad \text{und} \quad x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') \quad (5.6)$$

bekannt.

4. Beim  $k$ -ten Schritt ( $1 < k \leq n$ ) wird der Wert in anderen der beiden Punkte (5.6) berechnet.
5. Beim  $k$ -ten Schritt ( $1 < k \leq n$ ) sind die Zahlen  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$  zu vergleichen; im

Fall  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ist beim  $(k+1)$ -ten Schritt das Intervall  $[x', x_2]$ , im Fall  $f(x_1) \geq f(x_2)$  das Intervall  $[x_1, x'']$  zu betrachten.

Beweis (durch vollständige Induktion nach  $n$ ).

Für  $n = 1$  haben wir es offenbar mit dem Intervall zwischen 0 und  $L$  zu tun; der Wert der Funktion wird im Punkt  $\frac{u_1}{u_3}L = \frac{L}{2}$  berechnet.

Weitere Schritte gibt es in diesem Fall nicht.

Wir setzen nun voraus, dass die Existenz eines gewissen  $n$ -schrittigen Planes ( $n > 1$ ) mit den im Hilfssatz geforderten Eigenschaften von uns für ein beliebiges Intervall schon bewiesen wurde.

Wir beschäftigen uns nun mit der Aufstellung des uns interessierenden  $(n+1)$ -schrittigen Planes unter Beachtung der Voraussetzung des Hilfssatzes. Wir werden bei jedem Schritt ein gewisses Intervall  $[x', x'']$  untersuchen.

Der erste Schritt sei die Wahl des Punktes  $x_1 = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$ , der zweite Schritt die Wahl des Punktes  $x_2 = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$  und der Vergleich der Funktionswerte  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ .

Im Fall  $f(x_1) \leq f(x_2)$  betrachten wir das Intervall zwischen 0 und  $x_2$  (hier spielt 0 bzw.  $x_2$  die Rolle von  $x'$  bzw.  $x''$ ), im Fall  $f(x_1) > f(x_2)$  das Intervall zwischen  $x_1$  und  $L$  (hier spielt  $x_1$  bzw.  $L$  die Rolle von  $x'$  bzw.  $x''$ ).

Die Länge des betrachteten Intervalls ist in beiden Fällen gleich  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ .

Nach Ausführung dieser beiden Schritte befinden wir uns in Bezug auf das zu betrachtende Intervall unter genau denselben Bedingungen wie bei der Realisierung des  $n$ -schrittigen Prozesses nach Ausführung des ersten Schrittes.

Im Intervall der Länge  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}$  ist nämlich der Wert der Funktion  $f$  in demjenigen Punkt bekannt, der von einem der Endpunkte des Intervalls den Abstand  $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$  hat. Daher können wir zu diesem  $n$ -schrittigen Prozess "übergehen" und ihn bis zu Ende durchführen.

Auf Grund der Induktionsannahme können wir voraussetzen, dass für die letzten  $n$  Schritte die Voraussetzungen 3, 4 und 5 erfüllt sind. Folglich bleiben nur die Bedingungen zu Beginn des zweiten Schrittes und die Ausführung dieses Schrittes zu untersuchen.

Nun hat offenbar der Punkt  $\frac{u_n}{u_{n+3}}L$  die Form des ersten Ausdrucks (5.6) für  $k = 2$ , wenn statt  $n$  überall  $n+1$  gesetzt wird; die Rolle des zweiten Ausdrucks in der entsprechenden Situation spielt der von uns zu wählende Punkt  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ .

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**11.** Wir werden den  $n$ -schrittigen Plan, dessen Existenz in Nr. 10 bewiesen wurde, den  $n$ -schrittigen Fibonacci'schen Plan oder kurz den Plan  $\Phi_n$  nennen.

Satz. 1. Der Plan  $\Phi_n$  ist der einzige optimale  $n$ -schrittige Plan.

2. Es ist  $\tau_{\Phi_n}^A(n, L) = \frac{L}{u_{n+2}}$ .

Beweis (durch vollständige Induktion nach  $n$ ).

Wir betrachten zunächst den einschriftigen Plan, der darin besteht, für  $\bar{x}$  einen gewissen Punkt  $\tilde{x}$  aus dem Intervall  $[x', x'']$  zu wählen. Offenbar kann hier der Fehler unter ungünstigsten Bedingungen die größere der Zahlen  $x'' - \tilde{x}$  und  $\tilde{x} - x'$  erreichen.

Sind diese Zahlen voneinander verschieden, so ist dieser maximale Fehler größer als  $\frac{L}{2}$ ; sind sie gleich, so ist der maximale Fehler gleich  $\frac{L}{2}$ . Somit ist  $\Phi_1$  ein optimaler einschrittiger Plan, und es gilt

$$\tau_{\Phi_1}^A(n, L) = \frac{L}{2} = \frac{L}{u_3}$$

Für  $n = 2$  haben wir es mit dem Plan  $\Phi_2$  zu tun, der aus der Berechnung und dem Vergleich der Funktionswerte  $f\left(\frac{1}{3}L\right)$  und  $f\left(\frac{2}{3}L\right)$  besteht sowie aus der Wahl des Punktes

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}L & \quad \text{im Fall} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) \leq f\left(\frac{2}{3}L\right) \\ \frac{2}{3}L & \quad \text{im Fall} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) > f\left(\frac{2}{3}L\right) \end{aligned}$$

als  $\bar{x}$ . Der maximale Fehler bei der Bestimmung des wahren Wertes  $\bar{x}$  ist hier, wie man leicht sieht, gleich  $\frac{L}{3} = \frac{L}{u_4}$ :

$$\tau_{\Phi_2}^A(n, L) = \frac{L}{u_4}$$

Jede andere Wahl des Punktes führt auf größere Fehler.

Wir setzen nun voraus, dass der Fibonacci'sche Plan  $\Phi_n$  die im Satz geforderten Eigenschaften besitze, und betrachten den  $(n+1)$ -schrittigen Plan.

Wir führen im Plan  $\Phi_{n+1}$  die ersten beiden Beobachtungen der Funktion  $f$  durch und vergleichen zwei der gefundenen Werte. Das wenden wir auf das Intervall der Länge  $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$  aus dem Plan an, in dem der Wert von  $f$  in einem Punkt bekannt ist; dadurch ergibt sich im ungünstigsten Fall der Fehler

$$\tau_{\Phi_n}^A\left(n, \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L\right) = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \tau_{\Phi_n}^A(n, L) = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \frac{L}{u_{n+2}} = \frac{L}{u_{n+3}}$$

Folglich ist

$$\tau_{\Phi_{n+1}}^A(n+1, L) = \frac{L}{u_{n+3}}$$

Wir müssen noch zeigen, dass der Plan  $\Phi_{n+1}$  optimal ist. Dazu berechnen wir die Werte von  $f$  in zwei willkürlich gewählten Punkten  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  (wir wollen  $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$  annehmen). Der Vergleich der Werte  $f(\tilde{x}_1)$  und  $f(\tilde{x}_2)$  führt auf die Suche nach dem Punkt  $\bar{x}$  entweder im Intervall  $[0, \tilde{x}_2]$  oder  $[\tilde{x}_1, L]$ . Ist

$$\tilde{x}_1 < \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$$

so gelingt es uns im Fall  $f(\tilde{x}_1) > f(\tilde{x}_2)$ , nach einem gewissen  $n$ -schrittigen Plan den minimierenden Punkt von  $f$  im Intervall der Länge  $L - \tilde{x}_1$  zu finden, also einer größeren Länge als

$$L - \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L = \frac{u_{n+3} - u_{n+1}}{u_{n+3}}L = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$$

Sogar wenn die Lage des Punktes  $\tilde{x}_2$  in diesem Intervall am günstigsten ist, erweist sich der Fehler bei der Bestimmung auf Grund der Induktionsannahme größer als  $\frac{L}{u_{n+3}}$ .

Analoge Überlegungen zeigen, dass der Plan, der durch Wahl eines gewissen Punktes

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$$

beginnt, unter entsprechenden ungünstigen Bedingungen ebenfalls zu einem größeren Fehler bei der Bestimmung von  $\bar{x}$  führt als der Plan  $\Phi_{n+1}$ .

Es sei nun

$$\tilde{x}_1 > \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$$

Befindet sich  $\bar{x}$  in Wirklichkeit zwischen 0 und  $\tilde{x}_1$ , so bleiben uns zur Lagebestimmung dieses Punktes  $n - 1$  Beobachtungen, und die Länge des Intervalls, das diesen Punkt enthält, ist größer als  $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$ . Das bedeutet, dass sogar der (unter diesen Bedingungen nach Voraussetzung optimale) Plan  $\Phi_{n-1}$ , einen Fehler verursacht, der größer ist als

$$\tau_{\Phi_{n-1}}^A \left( n - 1, \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L \right) = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \tau_{\Phi_{n-1}}^A(n - 1, L) = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \frac{L}{u_{n+1}} = \frac{L}{u_{n+3}}$$

Analog behandelt man den Fall

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$$

Folglich ist der Plan  $\Phi_{n+1}$  optimal und der Satz bewiesen.

Der einzige die Funktion  $f$  minimierende Punkt kann also mit Hilfe von  $n$  Beobachtungen im Intervall der Länge  $L$  mit einer Genauigkeit  $\leq \frac{L}{u_{n+2}}$  bestimmt werden.

Daher genügen  $n$  Beobachtungen, um den die Funktion  $f$  minimierenden Punkt mit einer Genauigkeit  $\leq \varepsilon$  in einem Intervall zu bestimmen, das nicht länger als  $\varepsilon u_{n+2}$  ist. Um sicher zu sein, dass der die Funktion  $f$  minimierende Punkt im Intervall der Länge  $L$  mit einer Genauigkeit  $\leq \varepsilon$  bestimmt wird, ist es notwendig, eine solche Anzahl  $n$  von Beobachtungen durchzuführen, dass

$$u_{n+1} \leq \frac{L}{\varepsilon} \leq u_{n+2}$$

Damit haben wir alle Fragen aus Nr. 3 beantwortet.

12. Die Lösung der Aufgabe B lässt sich mühelos aus der oben angegebenen Lösung der Aufgabe A herleiten.

Gegeben sei ein Intervall der Länge  $L$ . Auf ihm führen wir die ersten  $n - 2$  Schritte des Fibonacci'schen Planes  $\Phi_{n-1}$  aus. Dadurch gelangen wir zu einem Intervall der Länge  $\frac{3L}{u_{n+1}}$  mit den Endpunkten  $x'$  und  $x''$  und mit einem bekannten Wert von  $f$  in einem der Punkte

$$x_1 = x' + \frac{L}{u_{n+1}} \quad \text{oder} \quad x_2 = x' + \frac{2L}{u_{n+1}}$$



Wir beschränken uns auf den ersten dieser beiden Fälle (der zweite lässt sich analog behandeln).

Es sei uns also  $f(x_1)$  bekannt. Wir wählen dann eine beliebige Zahl  $\gamma$ , deren Absolutbetrag kleiner als  $\frac{L}{u_{n+1}}$  sei, berechnen  $f(x_2 - \gamma)$  [das ist der  $(n-1)$ -te berechnete Wert der Funktion  $f$ ] und vergleichen  $f(x_1)$  und  $f(x_2 - \gamma)$ .

Ist  $f(x_1) \leq f(x_2 - \gamma)$  (Abb. 22), so muss  $\bar{x}$  offenbar zwischen  $x'$  und  $x_2 - \gamma$  liegen. Wir berechnen

$$f\left(\frac{x' + (x_2 - \gamma)}{2}\right) = f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$

(das ist der letzte,  $n$ -te berechnete Wert von  $f$ ).

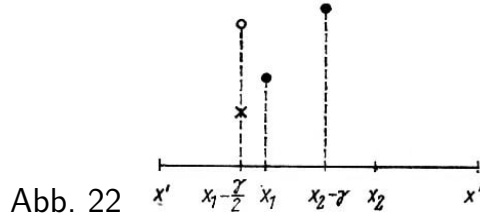


Abb. 22

Ist dabei

$$f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \leq f(x_1)$$

(Fall  $\times$  in Abb. 22), so liegt  $\bar{x}$  zwischen  $x'$  und  $x_1$ . Wir setzen  $\bar{x} = \frac{x' + x_1}{2}$ . Der Fehler bei der Bestimmung von  $\bar{x}$  ist nicht größer als die Hälfte des Abstandes von  $x'$  und  $x_1$ , d.h.  $\frac{L}{2u_{n+1}}$ . Ist aber

$$f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) > f(x_1)$$

(Fall  $\circ$  in Abb. 22), so liegt  $\bar{x}$  zwischen  $x_1 - \frac{\gamma}{2}$  und  $x_2 - \gamma$ . Wir setzen

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \left[ \left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) + (x_2 - \gamma) \right]$$

und erhalten einen Fehler, der nicht größer ist als

$$\frac{1}{2} \left[ (x_2 - \gamma) - \left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left( x_2 - x_1 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{\gamma}{4} = \frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}$$

Nun sei  $f(x_1) > f(x_2 - \gamma)$  (Abb. 23). Dann liegt  $\bar{x}$  zwischen  $x_1$  und  $x''$ .

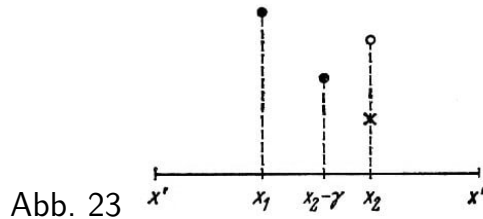


Abb. 23

Wir berechnen jetzt  $f(x_2)$ , den letzten berechneten Wert von  $f$ . Ist

$$f(x_2 - \gamma) \leq f(x_2)$$

(Fall  $\circ$  in Abb. 23), so liegt  $\bar{x}$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$ ; wir wählen  $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  und lassen einen Fehler zu, der höchstens gleich  $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{L}{2u_{n+1}}$  ist. Ist schließlich

$$f(x_2 - \gamma) > f(x_2)$$

(Fall  $\times$  in Abb. 23), so liegt  $\bar{x}$  zwischen  $x_2 - \gamma$  und  $x''$ . Wir setzen  $\bar{x} = \frac{1}{2}(x'' + (x_2 - \gamma))$  und bringen es zu einem Fehler, der nicht größer ist als

$$\frac{1}{2}(x'' - (x_2 - \gamma)) = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{u_{n+1}} + \gamma \right) = \frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$$

In dem für uns ungünstigsten Fall kann somit der Fehler für  $\gamma > 0$  den Wert  $\frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$  und für  $\gamma < 0$  den Wert  $\frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{2}$  erreichen.

Da sich jedoch die Zahl  $\gamma$  beliebig wählen lässt, kann der Fehler beliebig nahe bei  $\frac{L}{2u_{n+1}}$  liegen.

Wir müssen uns nun noch davon überzeugen, dass der Fehler nicht verkleinert werden kann.

Die Abweichung von dem beschriebenen Plan in einem der ersten  $n - 2$  Schritte kann, wie aus dem Satz von Nr. 11 ersichtlich ist, nur zu einer Vergrößerung des Intervalls führen, in dem der minimierende Punkt durch die darauffolgenden Messungen bestimmt werden soll, und somit zur Vergrößerung des maximalen Fehlers.

Es bleibt nachzuprüfen, ob die in den letzten beiden Schritten auszuführenden Operationen optimal sind.

Zunächst kann die Abweichung von den beschriebenen Operationen darin bestehen, dass nicht der Mittelpunkt des Intervalls, in dem der Punkt tatsächlich liegt, als  $\bar{x}$  gewählt wird, sondern ein anderer Punkt.

Dies führt dazu, dass der mögliche Fehler gleich dem größeren Teil des Intervalls wird, also wächst. Folglich muss genau der Mittelpunkt des Intervalls gewählt werden.

Ferner kann zur letzten Bestimmung von  $f$  ein Punkt gewählt werden, der nicht in der Nähe des Punktes  $x_1$  (bzw.  $x_2$ ) liegt. Dann vergrößert sich der mögliche Fehler sogar proportional dem Abstand zwischen diesen beiden Punkten.

Schließlich führt die Wahl des Punktes, in dem  $f$  zum letzten Mal bestimmt wird, in einiger Entfernung von  $x_2$  (bzw. von  $x_1$ ) zu denselben Schlussfolgerungen.

Also kann eine Abweichung vom beschriebenen Plan den möglichen Fehler nicht kleiner als  $\frac{L}{2u_{n+1}}$  machen. Damit ist die Aufgabe B gelöst.

Wir überlassen es dem Leser, die Antworten auf die übrigen in Nr. 3 gestellten Fragen im Fall der Aufgabe B selbst zu finden.

**13.** In den vorhergehenden Abschnitten wurde die Beschreibung des Planes begleitet von Verschärfungen der Aufgabenstellung, von Formulierungen, die mit dem Begriff "optimal" verknüpft sind, und von Begründungen, weshalb der zu konstruierende Plan optimal ist.

Alle diese Abweichungen von der direkten Beschreibung sind unveräußerliche Elemente jeder mathematischen Überlegung, deren Ziel es ist, nicht nur den Prozess anzugeben,

sondern auch zu beweisen, dass dieser Prozess gerade der uns interessierende ist.

Im Zusammenhang damit ist in vielen Fällen eine genaue Beschreibung der Operationen wesentlich, während die ganze Beweisführung für diese Operationen völlig unwichtig ist. Dies ist dann der Fall, wenn zum Beispiel nach Lösung der Aufgabe tatsächlich die Realisierung dieser Lösung beabsichtigt ist.

In diesen Fällen ist es zur Realisierung der Lösung in der Praxis notwendig, nicht so sehr die Richtigkeit der Lösung mathematisch zu begründen, als vielmehr genaue Vorschriften für ihre Verwirklichung anzugeben.

Der Plan für die genaueste Bestimmung des Punktes  $\bar{x}$ , der im Intervall  $[x', x'']$  die Funktion  $f$  unter den Bedingungen der Aufgabe A und unter den eben beschriebenen "praktischen" Zielen minimiert, erinnert an den Plan zur Bestimmung einer Pflanze nach botanischen Gesichtspunkten (auch die Bestimmung einer Pflanze ist eine Suchaufgabe!).

Dieser Plan hat die folgende Form (wenn am Ende eines Punktes kein Hinweis darauf steht, zu welchem Punkt übergegangen werden soll, gehe man zum nächstfolgenden Punkt über):

1°. Vergleiche 1 und  $n$ :

- a) ist  $n = 1$ , gehe nach 2°;
- b) ist  $n > 1$ , gehe nach 4°.

2°. Berechne  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,

3°. Berechne  $f(\bar{x})$ ; danach ist der Prozess beendet.

4°. Berechne  $x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x')$  und  $x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x')$

5°. Berechne  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ .

6°. Vergleiche 2 und  $n$ :

- a) ist  $n = 2$ , gehe nach 7°;
- b) ist  $n > 2$ , gehe nach 10°.

7°. Vergleiche  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ :

- a) ist  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , gehe nach 8°;
- b) ist  $f(x_1) > f(x_2)$ , gehe nach 9°.

8°. Setze  $\bar{x} = x_1$  und beende den Prozess.

9°, Setze  $\bar{x} = x_2$  und beende den Prozess.

10°. Vergleiche  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ :

- a) ist  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , gehe nach 11°;
- b) ist  $f(x_1) > f(x_2)$ , gehe nach 14°.

11°. Ersetze  $x_2$  durch  $x''$ ,  $x_1$  durch  $x_2$ ,  $n - 1$  durch  $n$ .

12°. Berechne  $x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x')$ .

13°. Berechne  $f(x_1)$  und gehe nach 6°.

14°. Ersetze  $x_1$  durch  $x'$ ,  $x_2$  durch  $x_1$ ,  $n - 1$  durch  $n$ .

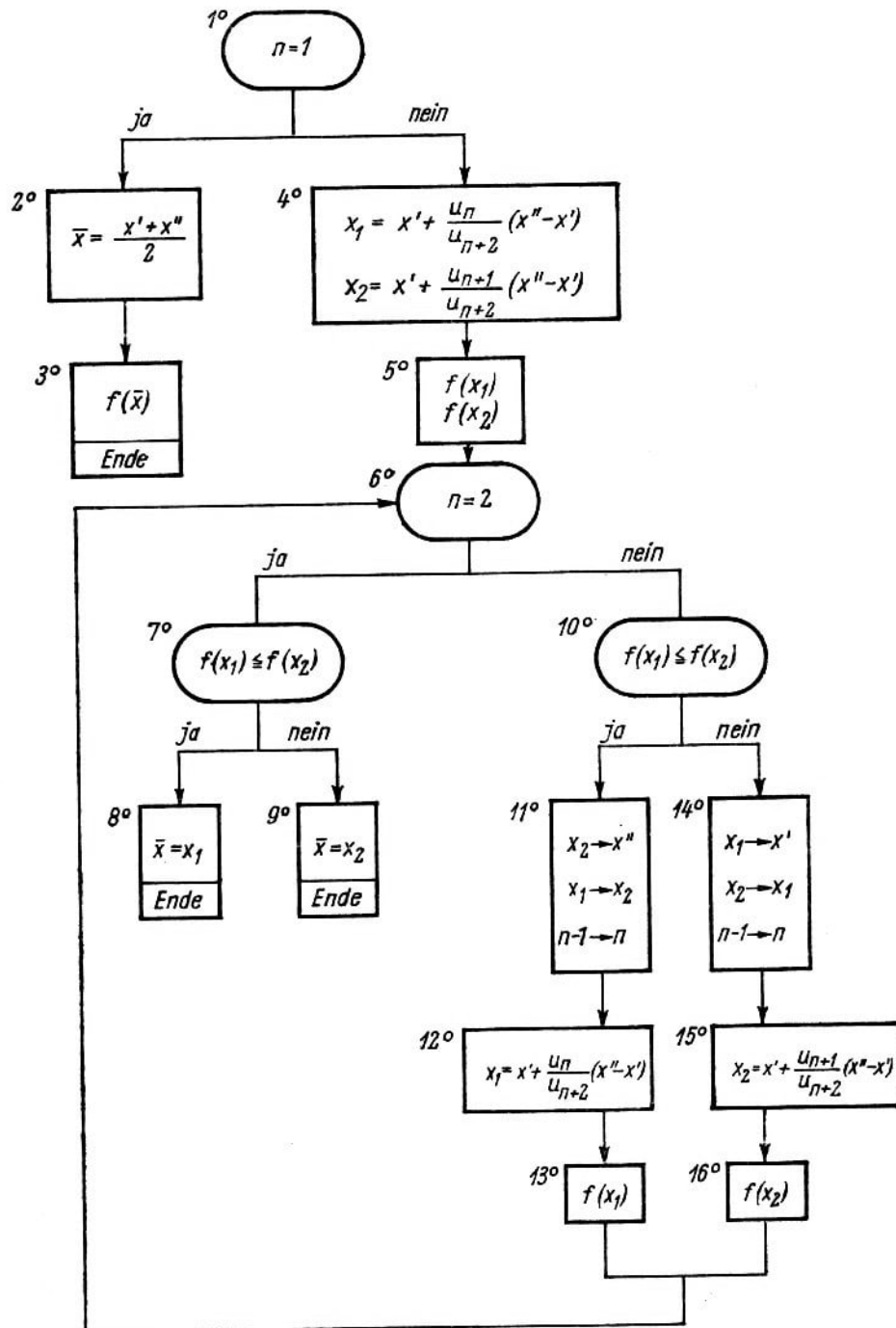


Abb. 24

15°. Berechne  $x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x')$ .

16°. Berechne  $f(x_2)$  und gehe nach 6°.

**14.** Obwohl die formelmäßige Fassung des optimalen Planes zur Bestimmung des Minimums der Funktion  $f$  absolut genau ist und nicht willkürlich abgeändert werden kann und bei Anwendung auf eine beliebige konkrete Funktion, ein Intervall  $[x', x'']$  und eine Zahl  $n$  eine völlig exakte Folge von Operationen vorschreibt, ist sie ziemlich verwirrend und unübersichtlich.

Daher bringen wir den eben beschriebenen Plan in ein graphisches Schema (Abb. 24).

Schemata dieser Art werden Flussdiagramme genannt. Die Aufstellung des Flussdiagramms für einen Rechenprozess ist gewöhnlich die erste Etappe bei der Aufstellung eines Programms zur Durchführung von Rechnungen auf elektronischen Ziffernrechenautomaten.

15. Wir bringen zum Abschluss ein Beispiel für die Anwendung des in Nr. 13 und 14 beschriebenen Planes, und zwar wollen wir mit Hilfe von fünf Berechnungen im Intervall  $[1, 2]$  den Punkt  $\bar{x}$  finden, der die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

minimiert.

Zur Vorbereitung ist folgende Bemerkung wichtig. Um den Punkt zu finden, der eine analytisch gegebene Funktion minimiert bzw. maximiert (d.h. eine Funktion, die durch eine Formel gegeben ist, welche es erlaubt, den Wert der Funktion zu berechnen), sind oft die Methoden der Suchtheorie nicht geeignet, sondern man greift dann besser zu den zweckmäßigeren Verfahren der Differentialrechnung.

Daher hat das folgende Beispiel nur illustrativen Charakter.

Mit Hilfe der Differentialrechnung erhält man in diesem Fall mühelos  $\bar{x} = \sqrt[3]{4} = 1,5874011\dots$ ; mit Hilfe der Suchtheorie gelingt uns jedoch nur eine wesentlich gröbere Näherung.

Ist uns aber über die Funktion nichts bekannt (außer dass sie nicht mehr abnimmt, nachdem sie einmal angefangen hat zuzunehmen) oder sind die Ausdrücke, durch die die Funktion gegeben ist, zu kompliziert, so versagen die Methoden der Differentialrechnung, während sich die Suchtheorie als nützliches Instrument erweist.

1°. Der Vergleich von  $n = 5$  und 1 ergibt  $n \neq 1$ , also gehen wir nach 4°.

4°. Wir berechnen

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{5}{13}(2 - 1) = 1,38461$$

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{8}{13}(2 - 1) = 1,61538$$

5°. Wir berechnen

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} = f(1,38461) = 0,72222 + 1,17670 = 1,89892$$

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1,61538) = 0,61905 + 1,27098 = 1,89003$$

6°. Der Vergleich von  $n = 5$  und 2 ergibt  $n = 2$ , also gehen wir nach 10°.

10°. Der Vergleich von  $f(x_1) = 1,89892$  und  $f(x_2) = 1,89002$  ergibt  $f(x_1) > f(x_2)$ , also gehen wir nach 14°.

14°. Wir setzen  $x_1 \rightarrow x' = 1,38461$ ,  $x_2 \rightarrow x_1 = 1,61538$ ,  $n = 4$ .

15°. Wir berechnen

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1,38461 + \frac{5}{8}(2 - 1,38461) = 1,76927$$

16°. Wir berechnen

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1,76927) = 0,56522 + 1,33012 = 1,89534$$

und gehen nach 6°.

6°. Wir vergleichen  $n = 4$  und 2; wegen  $n \neq 2$  gehen wir nach 10°.

10°. Wir vergleichen  $f(x_1) = 1,89002$  und  $f(x_2) = 1,89534$ ; wegen  $f(x_1) \leq f(x_2)$  gehen wir nach 11°.

11°. Wir setzen  $x_2 \rightarrow x'' = 1,76923$ ,  $x_1 \rightarrow x_2 = 1,61638$ ,  $n = 3$ .

12°. Wir berechnen

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1,38461 + \frac{2}{5}(1,76923 - 1,38461) = 1,58346$$

13°. Wir berechnen

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} = f(1,58346) = 0,65000 + 1,24035 = 1,89035$$

und gehen nach 6°.

6° Wir vergleichen  $n = 3$  und 2; wegen  $n \neq 2$  gehen wir nach 10°.

10°. Wir vergleichen  $f(x_1) = 1,89035$  und  $f(x_2) = 1,89003$ ; wegen  $f(x_1) > f(x_2)$  gehen wir nach 14°.

14°. Wir setzen  $x_1 \rightarrow x' = 1,53846$ ,  $x_2 \rightarrow x_1 = 1,61538$ ,  $n = 2$ .

15°. Wir berechnen

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1,53846 + \frac{2}{3}(1,76923 - 1,53846) = 1,69231$$

16°. Wir berechnen

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1,69231) = 0,59091 + 1,30089 = 1,89170$$

und gehen nach 6°.

6°. Der Vergleich von  $n$  und 2 ergibt  $n = 2$ , also gehen wir nach 7°.

7°. Wir vergleichen  $f(x_1) = 1,89003$  und  $f(x_2) = 1,89170$ ; wegen  $f(x_1) \leq f(x_2)$  gehen wir nach 8°.

8°. Wir setzen  $\bar{x} = 1,61538$ .

Auf Grund des Satzes aus Nr. 11 unterscheidet sich der für  $\bar{x}$  gefundene Wert von dem wahren Wert des minimierenden Punktes um nicht mehr als  $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_7} = \frac{1}{13} = 0,077$ . In Wirklichkeit ist dieser Fehler noch kleiner, nämlich 0,028. Wir bemerken noch, dass sich das Minimum der Funktion  $f$ , also 1,89003, von dem wahren Wert, nämlich

$$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 1,88988$$

nur um 0,00015 unterscheidet. Damit lassen sich also die Werte von  $x$  mit einer geringeren Genauigkeit berechnen als die Werte von  $f$ .

Für sich allein enthält diese Berechnung nichts Erstaunliches. Die  $x$ -Werte können wir mit der gleichen Grenzgenauigkeit finden, mit der unter unseren Bedingungen der minimierende Punkt  $\bar{x}$  berechnet wird (bekanntlich ist diese Genauigkeit gleich  $\frac{1}{u_{n+2}}$ ). Die Werte der Funktion  $f$  müssen mit einer solchen Genauigkeit berechnet werden, dass beim Vergleich von Wertepaaren dieser Funktion die Unterscheidung des kleineren und des größeren Wertes in jedem dieser Paare möglich ist.

Wenn sich in Wirklichkeit zwei Werte  $f(a)$  und  $f(b)$  stark voneinander unterscheiden und dieser Unterschied schon bei grober Berechnung von  $f(a)$  und  $f(b)$  bemerkbar ist, können wir also diese Werte mit kleiner Genauigkeit berechnen. Wenn dagegen die Werte  $f(a)$  und  $f(b)$  nahe beieinanderliegen, ist die Untersuchung, welcher der beiden Werte der größere ist, mit großer Genauigkeit durchzuführen.

Da wir von vornherein (bis zur Beendigung der Rechnung) nicht wissen, um wieviel sich die miteinander zu vergleichenden Funktionswerte unterscheiden, können wir Schiffbruch erleiden und sie mit ungenügender Genauigkeit berechnen, wodurch es uns nicht möglich ist zu entscheiden, welcher der beiden Werte der größere ist. In diesem Fall muss man die Rechnung mit größerer Genauigkeit wiederholen, wobei verschärfte Bedingungen eingehalten werden müssen.

Das eben Gesagte zeigt, wie notwendig es ist, die Genauigkeit eines Rechenprozesses zu verbessern. Jedoch sind diese Probleme sehr kompliziert und mit der Thematik dieses Büchleins nicht unmittelbar verknüpft.