
I.R. Schafarewitsch

**Über die Auflösung von Gleichungen
höheren Grades**

Übersetzung von Gero Zschuppe
1956 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 23
Abschrift und LaTeX-Satz: 2020

<https://mathematikalpha.de>

Inhaltsverzeichnis

Einführung	3
1 Schranken für die Wurzeln	4
2 Gemeinsame Nullstellen von Polynomen und mehrfache Nullstellen	6
3 Charakteristik eines Polynompaares	8
4 Die Anzahl der zwischen a und b liegenden Nullstellen eines Polynoms	15
5 Anhang: Das Hornersche Schema	21

Einführung

Im Algebra-Unterricht der Oberschule wird die Formel für die Lösung quadratischer Gleichungen hergeleitet, und aus dem Physik-Unterricht ist bekannt, wie außerordentlich wichtig diese Formel zur Lösung vieler physikalischer Probleme ist (z.B. bei Aufgaben, die mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammenhängen).

Keine geringere Rolle als die quadratischen Gleichungen spielen in der Mathematik und ihren Anwendungen Gleichungen dritten und höheren Grades.

Die Menschen haben fast ebenso früh begonnen, sich mit Gleichungen höheren Grades zu beschäftigen wie mit quadratischen Gleichungen. Es sind babylonische Keilschrifttafeln bekannt, auf denen einige kubische Gleichungen gelöst sind.

Obwohl man sich mit diesen Fragen schon lange beschäftigt hat, wurden die grundlegenden Tatsachen über Gleichungen höheren Grades erst im 19. Jahrhundert gefunden.

Dieses Bändchen soll einen Überblick über einige wichtige Eigenschaften von Gleichungen höheren Grades geben.

Die Methode, mit der wir diese Eigenschaften untersuchen werden, unterscheidet sich stark von der Methode, mit deren Hilfe man im Schulunterricht die Eigenschaften der quadratischen Gleichungen herleitet. Dort werden fast alle Eigenschaften der quadratischen Gleichung aus ihrer Lösungsformel gefolgert.

Wir werden hier aber keine Lösungsformel für Gleichungen höheren Grades herleiten, sondern ihre Eigenschaften aus allgemeinen algebraischen und geometrischen Überlegungen gewinnen.

Für die meisten Gleichungen höheren Grades gibt es nämlich gar keine Lösungsformel, wie wir sie für die quadratischen Gleichungen kennen. In denjenigen Fällen aber, in denen eine solche Formel existiert, ist sie so kompliziert, dass es fast unmöglich ist, daraus irgendwelche Eigenschaften der Gleichung abzuleiten.

Ganz unabhängig davon aber hat unser Weg noch einen Vorteil:

Er lässt uns die wahre Ursache der Tatsachen erkennen, die wir beweisen.

Alle Überlegungen, die wir hier anstellen, gelten für Gleichungen beliebigen Grades. Oft werden wir sie in allgemeiner Form durchführen. In einigen Fällen jedoch, in denen der Gedankengang im allgemeinen Fall prinzipiell derselbe ist, aber die Rechnung verlängern würde, führen wir die Überlegung nur für Gleichungen dritten Grades durch und geben das Resultat für den allgemeinen Fall einfach an.

Es sei aber dem Leser empfohlen, diese allgemeinen Überlegungen selbständig durchzuführen.

Dagegen haben wir Beweise für Tatsachen etwa der folgenden Art ganz weggelassen: Besitzt die Kurve eines Polynoms Punkte auf verschiedenen Seiten der x -Achse, so schneidet sie die x -Achse.

Wahrscheinlich werden viele Leser das Bedürfnis nach einem Beweis solcher Tatsachen gar nicht empfinden. Wer aber diese Beweise durchzuführen wünscht, kann das unter Benutzung der einfachsten Eigenschaften stetiger Funktionen leicht tun.

Er findet sie in den ersten Kapiteln jedes Lehrbuches der Analysis (etwa W.I. Smirnow,

Lehrgang der höheren Mathematik, Teil 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953, 2. Aufl. 1956).

In diesem Bändchen werden wir uns nur mit den Eigenschaften der reellen Wurzeln der Gleichungen beschäftigen, so dass vom Leser keine Kenntnis der Eigenschaften der komplexen Zahlen verlangt wird. Es sei hier nur bemerkt, dass auch die Eigenschaften der komplexen Wurzeln mit Hilfe ebensolcher - nur etwas komplizierterer Methoden - hergeleitet werden können.

1 Schranken für die Wurzeln

Die erste Aufgabe, die wir uns stellen, besteht darin, für jede Gleichung Schranken anzugeben, zwischen denen ihre Wurzeln liegen.

Wir wollen annehmen, es sei uns eine kubische Gleichung der Form

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

vorgelegt.

Wir zeigen nun, wie man eine positive Zahl N finden kann, welche die Eigenschaft hat, dass die linke Seite der Gleichung von Null verschieden ist, wenn der absolute Betrag von x größer als N ist.

Dann liegen die (eventuell vorhandenen) Wurzeln sicher zwischen $-N$ und $+N$. Zu diesem Zweck wollen wir N so wählen, dass der absolute Betrag des ersten Gliedes den absoluten Betrag der drei übrigen Glieder zusammen übertrifft, wenn der absolute Betrag von x größer als N ist. Dann können das erste Glied und die Summe der übrigen Glieder sich nicht aufheben, und der ganze Ausdruck ist von Null verschieden.

Dieses Ziel erreichen wir sicherlich, wenn ein Drittel des absoluten Betrages des ersten Gliedes größer ist als der absolute Betrag jedes einzelnen der drei übrigen Glieder¹, d.h. wenn

$$\frac{1}{3}|a| \cdot |x|^3 > |b| \cdot |x|^2, \quad \frac{1}{3}|a| \cdot |x|^3 > |c| \cdot |x|, \quad \frac{1}{3}|a| \cdot |x|^3 > |d|$$

Durch Auflösung dieser Ungleichungen erhalten wir

$$|x|^3 > 3 \frac{|b|}{|a|}, \quad |x| > \sqrt{3 \frac{|c|}{|a|}}, \quad |x| > \sqrt[3]{3 \frac{|d|}{|a|}}$$

Auf diese Weise gelangen wir zu einer Zahl mit der gewünschten Eigenschaft, wenn wir für N die größte dieser drei Zahlen nehmen.

In der Tat sind für solche x , deren absoluter Betrag größer als dieses N ist, alle drei Ungleichungen erfüllt. Daher kann die linke Seite der Gleichung (1) nicht Null werden.

Bei einer Gleichung n -ten Grades,

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0 \quad (2)$$

¹Es ist nämlich $|a + b| \leq |a| + |b|$, und diese Ungleichung gilt auch für mehrere Summanden. Ferner ist $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

hat man entsprechend für N die größte der Zahlen

$$n \frac{|b|}{|a|}, \quad \sqrt[n]{n \frac{|c|}{|a|}}, \quad \sqrt[3]{n \frac{|d|}{|a|}}, \quad \dots, \quad \sqrt[n-1]{n \frac{|k|}{|a|}}, \quad \sqrt[n]{n \frac{|l|}{|a|}}$$

zu nehmen.

Wir bemerken, dass wir etwas mehr bewiesen haben, als wir behauptet hatten. Da der Betrag des ersten Gliedes auf der linken Seite der Gleichung (1) größer ist als der Betrag der Summe der übrigen Glieder, wird das Vorzeichen des ganzen Ausdrucks durch das Vorzeichen des ersten Gliedes bestimmt.

Daher wissen wir nicht nur, dass die linke Seite der Gleichung (1) eine von Null verschiedene Zahl ist, wenn der Betrag von x die Zahl N übertrifft, sondern wir können auch das Vorzeichen dieser Zahl angeben:

Es stimmt mit dem Vorzeichen des ersten Gliedes überein.

Schon aus diesen einfachen Überlegungen können wir wichtige Folgerungen über die Wurzeln von Gleichungen herleiten. Dazu wollen wir die graphische Darstellung der Funktion

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0 \quad (3)$$

benutzen.

Es sei in der Ebene ein Koordinatensystem gewählt und die Kurve der Funktion (3) gezeichnet (Abb. 1). Nach der allgemeinen Regel für graphische Darstellungen ist die Ordinate u eines Kurvenpunktes M gleich der Zahl, die man erhält, wenn man in den Ausdruck (3) an Stelle von x die Abszisse v einsetzt. Insbesondere wird die Ordinate gleich Null, Wenn die Abszisse eine Wurzel der Gleichung (2) ist.

[Wir weisen hier daraufhin, dass man zwischen der Gleichung (2) und dem auf ihrer linken Seite stehenden Polynom zu unterscheiden hat, das ein (3) zur Abkürzung mit y_3 bezeichnet wurde. Demgemäß unterscheiden wir zwischen einer "Wurzel" der Gleichung und der "Nullstelle" des entsprechenden Polynoms. Das Wort Nullstelle bringt zum Ausdruck, dass für einen solchen Wert von x die Kurve des Polynoms die x -Achse schneidet, die Ordinate also Null ist. Im Russischen wird das Wort "Wurzel" in beiden Bedeutungen verwendet. Anm. d. Red. d. deutschen Ausg.]

Unsere Gleichung habe den Grad Drei. Wir dividieren beide Seiten durch den (von Null verschiedenen) Koeffizienten a des ersten Gliedes und schreiben sie in der Gestalt

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (4)$$

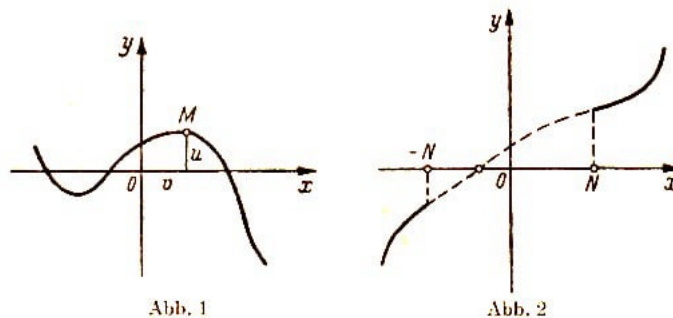
Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der oben gefundenen Zahl N untersuchen. Alle Wurzeln der Gleichung (4) liegen zwischen $-N$ und N . Das bedeutet, dass die Kurve der Funktion

$$y = x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (5)$$

die x -Achse nur in Punkten schneiden kann, deren Abszissen zwischen $-N$ und N liegen. Muss aber die Kurve die x -Achse überhaupt schneiden?

Wir erinnern uns, dass das Vorzeichen der Funktion (5) mit dem Vorzeichen ihres ersten Gliedes übereinstimmt, wenn der absolute Betrag von x größer ist als N . Das Vorzeichen des ersten Gliedes ist uns aber bekannt: Es stimmt mit dem Vorzeichen von x überein. Ist daher $x > N$, so ist das Polynom positiv, und das bedeutet, dass die Kurve in diesem Teil oberhalb der x -Achse verläuft. Ist aber x kleiner als $-N$, so ist das Polynom negativ, d.h., die Kurve liegt in diesem Teil unterhalb der x -Achse.

Was wir bisher über die Kurve wissen, ist in Abb. 2 skizziert. Daraus ist ersichtlich, dass die Kurve die x -Achse mindestens einmal schneiden muss.



Eine Gleichung dritten Grades hat also mindestens eine Wurzel. Entsprechendes gilt auch für Gleichungen höheren Grades: Jede Gleichung ungeraden Grades hat mindestens eine Wurzel.

Offenbar gilt dieser Satz für Gleichungen geraden Grades nicht; schon quadratische Gleichungen brauchen ja keine Wurzeln zu haben.²

2 Gemeinsame Nullstellen von Polynomen und mehrfache Nullstellen

Das grundlegende algebraische Verfahren, das wir im folgenden benutzen werden, ist die Division eines Polynome durch ein anderes Polynom (mit Rest).

Liegen zwei Polynome f und g vor, so können wir dasjenige von ihnen, welches den höheren Grad hat, durch das andere dividieren und erhalten im allgemeinen einen unvollständigen Quotienten q und einen Rest h , der niedrigeren Grad hat als der Divisor. Diese Beziehung zwischen den Polynomen kann man in der Form

$$f = g \cdot q + h \quad (6)$$

schreiben. Die Division mit Rest ist ein allgemeines Verfahren, das die Untersuchung eines Paares von Polynomen f und g zurückführt auf die Untersuchung des Paares der Polynome g und h niedrigeren Grades. Gerade dadurch lassen sich oft Eigenschaften eines Polynompaars leichter untersuchen als Eigenschaften eines einzigen Polynoms.

Als Beispiel wollen wir uns ansehen, wie die gemeinsamen Nullstellen zweier Polynome

²Wir erinnern daran, dass wir unter "Wurzel" stets "reelle Wurzel" verstehen, so dass beispielsweise die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ von unserem Standpunkt aus keine Wurzel hat.

f und g gefunden werden können. Ist α eine Nullstelle sowohl des Polynoms f als auch des Polynoms g , so finden wir, wenn wir in der Beziehung (6) $x = \alpha$ setzen, dass auch h gleich Null werden, d.h. die Zahl α als Nullstelle haben muss. Aus derselben Beziehung ersehen wir ferner:

Ist α gemeinsame Nullstelle von g und h , so auch Nullstelle von f , d.h. gemeinsame Nullstelle von f und g . Zusammen zeigen diese beiden Aussagen, dass die gemeinsamen Nullstellen der Polynome f und g einerseits und der Polynome g und h andererseits zusammenfallen. Der Fortschritt hierbei besteht darin, dass g und h niedrigeren Grad haben als f und g . Mit g und h können wir dieselben Überlegungen wiederholen, indem wir g durch h dividieren.

Auf diese Weise erhalten wir Paare von Polynomen stets niedrigeren Grades, wobei die gemeinsamen Nullstellen bei allen diesen Polynompaaren ein und dieselben sind. Wir werden nötigenfalls erst dann aufhören, wenn wir bei einem Paar von Polynomen u und v angelangt sind, von denen eines, etwa v , Null ist.

In diesem Falle sind aber alle Nullstellen von u gemeinsame Nullstellen von u und v , da v identisch Null ist; also alle Zahlen zu Nullstellen hat.

Damit haben wir dann die Bestimmung der gemeinsamen Nullstellen der Polynome f und g auf die Bestimmung der Nullstellen des Polynoms u zurückgeführt, das in der Regel viel niedrigeren Grad hat.

Als Beispiel wollen wir die gemeinsamen Nullstellen der Polynome $x^4 + x^2 + 3x + 1$ und $x^3 + x + 2$ aufsuchen.

Wir dividieren das erste Polynom durch das zweite:

$$\begin{array}{r} (x^4 + x^2 + 3x + 1) : (x^3 + x + 2) = x + \frac{x+1}{x^3+x+2} \\ \underline{-x^4 - x^2 - 2x} \\ x + 1 \end{array}$$

Der Rest ist $x + 1$. Daher sind die gemeinsamen Nullstellen der gegebenen Polynome dieselben wie die der Polynome $x^2 + x + 2$ und $x + 1$.

Wir dividieren wieder das erste durch das zweite:

$$\begin{array}{r} (x^3 + x + 2) : (x + 1) = x^2 - x + 2 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ -x^2 + x \\ \underline{x^2 + x} \\ 2x + 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Der Rest ist Null. Folglich sind die gemeinsamen Nullstellen dieselben wie die der Polynome $x + 1$ und 0, d.h., es gibt nur eine gemeinsame Nullstelle, nämlich $x = -1$.

Wir können das bisher Gelernte auf eine andere Aufgabe anwenden, nämlich zu untersuchen, ob ein vorgegebenes Polynom mehrfache Nullstellen hat, und diese mehrfachen Nullstellen zu bestimmen.

Wir setzen wieder voraus, es handle sich um das kubische Polynom (5). Hat dieses Polynom die Nullstelle α , so ist es ohne Rest durch $x - \alpha$ teilbar. Das folgt aus dem Satz von Bézout; wir beweisen es aber direkt durch einfache Division:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 \quad +px^2 \quad +qx \quad +r) : (x - \alpha) = x^2 + (p + \alpha)x + \alpha^2 + p\alpha + q \\
 \underline{-x^3 \quad +\alpha x^2} \\
 (p + \alpha)x^2 \quad +qx \\
 \underline{-(p + \alpha)x^2 \quad +\alpha(p + \alpha)x} \\
 (\alpha^2 + p\alpha + r)x \quad +r \\
 \underline{(-\alpha^2 - p\alpha - r)x \quad +\alpha(\alpha^2 + p\alpha + q)} \\
 \alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r
 \end{array}$$

Der Rest $\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r$ ist gleich Null, da nach Voraussetzung α Wurzel der Gleichung (4) ist. Gleichzeitig ergab sich der Quotient zu

$$x^2 + (p + \alpha)x + (\alpha^2 + p\alpha + q) \quad (7)$$

Wäre α mehrfache Wurzel, d.h., hätte die Gleichung (4) eine weitere Wurzel, die gleich es wäre, so müsste α Nullstelle des Polynoms (7) sein. Setzen wir α für x ein, so erhalten wir $3\alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$.

Somit haben wir gezeigt, dass die mehrfachen Nullstellen des Polynoms (5) gerade die gemeinsamen Nullstellen dieses Polynoms und des Polynoms $3x^2 + 2px + q$ sind. Letzteres heißt die Ableitung des Polynoms (5).

(Das Bildungsgesetz dieser Ableitung ist klar ersichtlich: Der Exponent wird Faktor im Koeffizienten, der neue Exponent ist um 1 kleiner als der des ursprünglichen Gliedes; siehe einige Zeilen später.).

Damit ist das Problem, mehrfache Nullstellen des Polynoms zu finden, auf die Aufgabe zurückgeführt, die gemeinsamen Nullstellen des Polynoms und seiner Ableitung zu finden.

Diese Aufgabe können wir aber schon lösen!

Für Polynome n -ten Grades (3) gilt ein völlig analoger Satz. Die Rolle des Polynoms $3x^2 + 2px + q$ spielt hier das Polynom

$$nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \dots + k$$

das ebenfalls Ableitung des Polynoms (3) heißt.

3 Charakteristik eines Polynompaares

Wir gehen jetzt zu unserer Hauptaufgabe über. Sie lautet:

Gegeben seien ein Polynom f und zwei Zahlen a und b mit $a < b$; man untersuche, wieviel Nullstellen das Polynom f hat, die zwischen a und b liegen, d.h. kleiner als b , aber größer als a sind.

Wir werden im folgenden sehen, dass aus der Lösung dieser Aufgabe die Antworten auf die meisten Fragen folgen werden, die man in bezug auf die Nullstellen von Polynomen stellen kann: nach ihrer Anzahl, ihrer Lage und sogar nach einem Verfahren zu ihrer Berechnung.

Bei der Lösung dieses Problems gehen wir genau so vor wie im vorigen Paragraphen. Zunächst untersuchen wir Eigenschaften von Polynompaaren. Dabei benutzen wir zwei Methoden, die wir schon kennen: eine algebraische (die Division von Polynomen) und eine geometrische (die graphische Darstellung).

Es seien zwei Polynome in bestimmter Reihenfolge gegeben; das erste bezeichnen wir mit f_1 , das zweite mit f_2 . Wir setzen voraus, dass f_1 und f_2 keine gemeinsamen Nullstellen haben. Diese Voraussetzung dürfen wir machen, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, da wir gemeinsame Nullstellen nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen finden können.

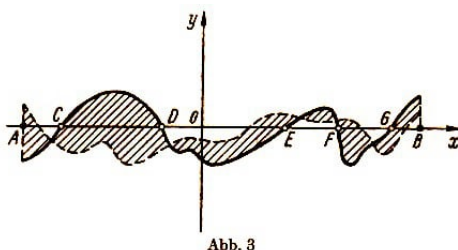


Abb. 3

Wir zeichnen die Kurven von f_1 (ausgezogen) und von f_2 (gestrichelt) (Abb 3). Diese Kurven teilen die ganze Ebene in drei Teile: einen ersten, der unterhalb der beiden Kurven liegt, einen zweiten oberhalb und einen dritten, der zwischen den beiden Kurven liegt und in Abb. 3 schraffiert ist.

Dieser wird uns im folgenden interessieren.

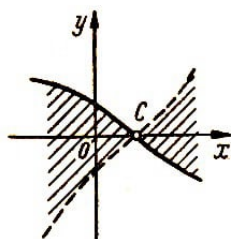


Abb. 4

Wir markieren auf der x -Achse die Punkte mit den Abszissen a und b und bezeichnen sie durch A bzw. B . Bewegen wir uns auf der x -Achse vom Punkte A zum Punkte B , so schneiden wir die Kurven der Polynome f_1 und f_2 in den Punkten ihrer Nullstellen.

Bei einigen von diesen Schnittpunkten treten wir aus dem schraffierten Gebiet heraus, bei den anderen in das schraffierte Gebiet hinein. Die ersteren nennen wir Austrittspunkte, die letzteren Eintrittspunkte.

Wir bemerken, dass ein Punkt nicht gleichzeitig Austritts- und Eintrittspunkt (wie dies für den Punkt C in Abb. 4 der Fall ist) sein kann, weil er dann gemeinsame Nullstelle von f_1 und f_2 wäre, was nach Voraussetzung nicht vorkommen kann.

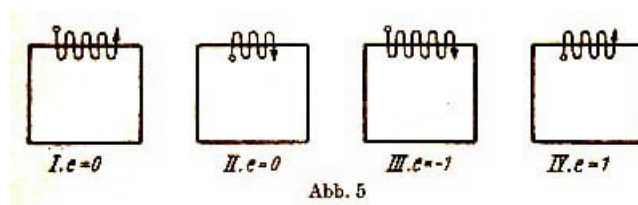
Jetzt führen wir einen neuen Begriff ein. Unter der Charakteristik der Polynome f_1 und f_2 (auch Charakteristik des Polynompaares f_1, f_2) verstehen wir die Differenz zwischen der Anzahl der Austrittspunkte und der Anzahl der Eintrittspunkte, die der Kurve von f_1 angehören und zwischen A und B liegen.

Zum Beispiel sind in Abb. 3 die Punkte D und E Austrittspunkte, die der Kurve

von f_1 angehören, während C , F und G Eintrittspunkte auf dieser Kurve sind. Die Charakteristik ist also $2 - 3 = -1$.

Die Charakteristik ist natürlich eine ganze Zahl, die nicht nur von den Polynomen f_1 und f_2 , sondern auch von den Punkten A und B abhängt. Man denkt sich diese jedoch fest gegeben und bezeichnet daher die Charakteristik, um die Abhängigkeit von f_1 und f_2 zum Ausdruck zu bringen, mit (f_1, f_2) .

Ganz offensichtlich hängt die Charakteristik (f_1, f_2) davon ab, welches Polynom wir als das erste ansehen, da wir ja bei ihrer Berechnung nur auf die Austritts- und Eintrittspunkte auf der Kurve dieses ersten Polynoms achten. Daher ist es interessant zu untersuchen, wie sich die Charakteristik ändert, wenn wir als erstes Polynom nicht f_1 sondern f_2 nehmen, oder, mit anderen Worten, wie die Zahlen (f_1, f_2) und (f_2, f_1) miteinander zusammenhängen.



Zweckmäßigerweise macht man sich diesen Sachverhalt an dem Modell in Abb. 5 klar. Man denke sich ein Zimmer, in das jemand hineingehen und aus dem er herausgehen kann.

Wir bezeichnen die Zahl, die angibt, wie oft er in einer gegebenen Zeitspanne aus dem Zimmer herausgegangen ist, mit P und die Zahl der Eintritte mit Q . Da jedem Eintritt außer dem letzten ein Austritt folgt und jedem Austritt ein Eintritt, kann sich offenbar die Anzahl der Eintritte von der Anzahl der Austritte höchstens um 1 nach der einen oder anderen Seite unterscheiden.

Wir können dies folgendermaßen aufschreiben:

$$P = Q + e, \quad \text{wobei } e = 0, 1 \text{ oder } -1 \quad (8)$$

Genauer wird die Größe e durch folgende Tabelle definiert:

$e = 1$, wenn der Mann zuerst innen und zuletzt außen war,

$e = -1$, wenn er zuerst außen und zuletzt innen war,

$e = 0$, wenn er zuerst und zuletzt auf derselben Seite der Zimmerwände war.

Nun denken wir uns die Aufgabe dadurch kompliziert, dass das Zimmer zwei Türen hat, die wir mit I und II bezeichnen; ferner sollen die Ein- und Austritte durch jede Tür einzeln gezählt werden. Die Anzahl der Austritte bzw. Eintritte durch I bezeichnen wir mit P_1 bzw. Q_1 , die durch II entsprechend mit P_2 und Q_2 .

Offenbar genügt die Gesamtzahl der Ein- und Austritte durch beide Türen zusammen der Beziehung (8), d.h., es ist

$$P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2 + e$$

Hieraus ergibt sich

$$P_1 - Q_1 = -(P_2 - Q_2) + e$$

Dies zeigt, dass die Differenzen zwischen der Anzahl der Austritte und der Anzahl der Eintritte durch die Türen I und II in einfacher Weise miteinander zusammenhängen!

Wie dieses Ergebnis auf unsere Polynome zu übertragen ist, ist klar. Dem Zimmer entspricht das schraffierte Gebiet, der Tür I die Kurve des Polynoms f_1 , der Tür II die Kurve des Polynoms f_2 . Den Aus- und Eintritten entsprechen die Aus- und Eintrittspunkte, der Zahl $P_1 - Q_1$ entspricht die Charakteristik (f_1, f_2) , der Zahl $P_2 - Q_2$ die Charakteristik (f_2, f_1) . Somit gilt die Beziehung

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1) + e$$

Wir haben also nur noch zu untersuchen, welche Bedeutung die Größe e in unserem Falle hat.

Ob wir innerhalb des schraffierten Gebietes (des Zimmers) oder außerhalb begonnen haben, hängt davon ab, ob f_1 und f_2 für $x = a$ Werte verschiedenen Vorzeichens oder gleichen Vorzeichens sind.

Genauso am Ende: Ob wir innerhalb oder außerhalb des schraffierten Gebietes aufgehört haben, hängt davon ab, ob die Werte von f_1 und f_2 für $x = b$ verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.

Wir wollen sagen, dass in einem Zahlenpaar ein Vorzeichenwechsel auftritt, wenn die Zahlen verschiedenes Vorzeichen haben, und dass kein Vorzeichenwechsel auftritt, wenn die Zahlen dasselbe Vorzeichen haben.

Ferner wollen wir die Werte von f_1 bzw. f_2 für $x = a$ mit a_1 bzw. a_2 bezeichnen; entsprechende Bedeutung sollen b_1 und b_2 haben. Wie man leicht feststellt, stimmt e mit der Differenz zwischen der Anzahl der Vorzeichenwechsel im Paar a_1, a_2 und der Anzahl der Vorzeichenwechsel im Paar b_1, b_2 überein. Bezeichnet man die erste Zahl mit m_1 und die zweite mit n_1 , so ist also $e = m_1 - n_1$.

Bisher hatten wir noch kein Verfahren zur Bestimmung der Charakteristik zweier Polynome, weil wir, um die Definition der Charakteristik zu benutzen, die Nullstellen der Polynome kennen müssten. Jetzt aber können wir ein solches Verfahren entwickeln.

Wir benutzen dazu wieder die Division. Dividieren wir f_1 durch f_2 so bekommen wir

$$f_1 = f_2 q + f_3 \quad (\text{6dabei ist } f_3 \text{ der Rest}) \quad (9)$$

Wie hängen nun die Charakteristiken (f_1, f_2) und (f_2, f_3) zusammen?

Diese Fragestellung wird uns durch das Ergebnis des vorigen Paragraphen nahegelegt, in dem wir gesehen haben, dass die gemeinsamen Nullstellen der beiden Polynome f_1 und f_2 dieselben sind wie die gemeinsamen Nullstellen der Polynome f_2 und f_3 . Zunächst gilt

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1) + e \quad (10)$$

Wir müssen also noch (f_2, f_1) und (f_2, f_3) vergleichen. Es wird sich herausstellen, dass diese beiden Zahlen gleich sind.

Wir bemerken nämlich folgendes:

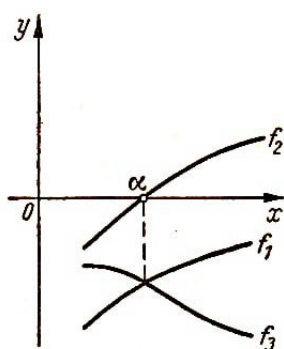


Abb. 6

Ist α Nullstelle von f_2 , so stimmen die Werte von f_1 und f_3 für $x = \alpha$ überein (Abb. 6).

Ersetzt man in (9) x durch α , so verschwindet nämlich der erste Summand auf der rechten Seite. Hieraus folgt, dass in der Nähe des Punktes mit der Abszisse $x = \alpha$ die Kurven von f_1 und f_3 auf derselben Seite der Kurve von f_2 liegen (Abb. 6). Daraus kann man schließen, dass die Charakteristiken (f_2, f_1) und (f_2, f_3) übereinstimmen.

Denn bei der Berechnung der beiden Charakteristiken müssen wir uns die Nullstellen von f_2 ansehen, die zwischen A und B liegen, und feststellen, welche davon Eintritts- und welche Austrittspunkte sind.

Aus dem soeben über die Lage der Kurven von f_1 , f_2 und f_3 Hergeleiteten folgt aber: Ist die Nullstelle α ein Punkt des Eintritts in das von den Kurven der Polynome f_2 und f_1 gebildete schraffierte Gebiet, so ist α auch Eintrittspunkt in das von f_2 und f_3 gebildete Gebiet. Dasselbe gilt auch für Austrittspunkte.

Damit ist die Übereinstimmung von (f_2, f_1) und (f_2, f_3) bewiesen. Zusammen mit (10) liefert uns dies die Beziehung

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_3) + e \quad (11)$$

Da f_2 und f_3 niedrigeren Grad als f_1 und f_2 haben, gibt uns dies ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Charakteristik eines Polynompaares.

Prinzipiell ist damit unsere Aufgabe, die Charakteristik eines Polynompaares zu berechnen, gelöst. Man kann dem Ergebnis aber noch eine geschlossener Form geben. Dazu wollen wir uns zunächst von dem Minuszeichen in Formel (11) befreien.

Am einfachsten nehmen wir für f_3 nicht den Rest der Division von f_1 durch f_2 sondern diesen Rest mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der Rest ist dann $-f_3$, und (9) geht über in

$$f_1 = f_2 q + f_3$$

und (11) bekommt die einfachere Gestalt

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_3) + e \quad (12)$$

Um dies zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dass die Charakteristik eines Polynompaares das Vorzeichen wechselt, wenn das zweite Polynom das Vorzeichen wechselt. Das ergibt sich aber sofort aus der Zeichnung, da dann die Kurve des zweiten Polynome durch ihre in bezug auf die x -Achse symmetrische Kurve ersetzt wird, so dass alle Nullstellen des ersten Polynome, die Austrittspunkte waren, nun zu Eintrittspunkten werden, und umgekehrt. Es ist klar, dass dabei die Charakteristik ihr Vorzeichen wechselt.

Nachdem wir f_1 durch f_2 dividiert und den mit dem entgegengesetzten Vorzeichen

versehenen Rest mit f_3 bezeichnet haben, führen wir dasselbe mit f_2 und f_3 durch und setzen die Division fort, bis wir einen Rest Null erhalten. Die so erhaltene Folge von Polynomen (ohne die Null) f_1, f_2, \dots, f_k heißt Sturmsche Kette des Polynompaars f_1, f_2 .

Das letzte Polynom f_k der Sturmschen Kette kann keine Nullstelle haben, da die Polynome f_1, f_2, \dots, f_k sich nur durch die Vorzeichen von denen unterscheiden, welche wir im vorigen Paragraphen zur Bestimmung von f_1 und f_2 konstruiert haben.

Wenn aber f_k eine Nullstelle hätte, so müsste diese eine gemeinsame Nullstelle von f_1 und f_2 sein, während solche nach Voraussetzung nicht existieren. Wenn wir (12) für jedes Polynompaar der Sturmschen Kette aufschreiben, erhalten wir das System

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= (f_2, f_3) + e_1, \\(f_2, f_3) &= (f_3, f_4) + e_2, \\&\dots \\(f_{k-2}, f_{k-1}) &= (f_{k-1}, f_k) + e_{k-2}, \\(f_{k-1}, f_k) &= (f_k, 0) + e_{k-1},\end{aligned}$$

Hier haben die Zahlen e_1, e_2, \dots, e_{k-1} dieselbe Bedeutung wie früher, d.h., jede von ihnen (z.B. e_i) ist die Differenz zwischen der Anzahl der Vorzeichenwechsel in dem Paar der Zahlen, welche von den Polynomen f_i und f_{i+1} für $x = a$, und in dem Paar der Zahlen, die für $x = b$ angenommen werden.

Nun gilt aber folgendes: Da f_k keine Nullstellen hat, ist seine Charakteristik mit jedem Polynom gleich Null. Insbesondere ist also $(f_k, 0) = 0$, und wir können statt der letzten Formel einfach $(f_{k-1}, f_k) = e_{k-1}$ schreiben. Aus der vorletzten Formel ergibt sich dann (f_{k-2}, f_{k-1}) zu $e_{k-2} + e_{k-1}$.

Auf diese Weise erhalten wir schließlich

$$(f_1, f_2) = e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1} \quad (13)$$

Diese Formel kann man noch weiter vereinfachen. Dazu bezeichnen wir mit a_1, a_2, \dots, a_k bzw. b_1, b_2, \dots, b_k die Werte von f_1, f_2, \dots, f_k für $x = a$ bzw. $x = b$. Ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel im Paar a_i, a_{i+1} gleich m_i und im Paar b_i, b_{i+1} gleich n_i so ist

$$e_i = m_i - n_i$$

Daher kann man Formel (13) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= (m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) + \dots + (m_{k-1} - n_{k-1}) \quad \text{oder} \\(f_1, f_2) &= (m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}) - (n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1})\end{aligned}$$

Die Zahl $m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}$ gibt an, wie oft in der Folge der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k Zahlen entgegengesetzten Vorzeichens nebeneinander stehen. Die Zahl $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1}$ gibt dasselbe an für die Folge b_1, b_2, \dots, b_k .

Diese Zahlen heißen Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge a_1, a_2, \dots, a_k bzw. b_1, b_2, \dots, b_k .

Jetzt können wir unser Resultat endgültig in folgender Weise formulieren:

Die Charakteristik eines Polynompaares ist gleich der Differenz zwischen den Anzahlen der Vorzeichenwechsel in den Werten der Polynome der Sturmschen Kette für $x = a$ und $x = b$.

Wir bringen zum Schluss dieses langen Paragraphen ein Beispiel.

Es sei $a = 0$ und $b = 5$, und man bestimme die Charakteristik des Paares der Polynome $f_1 = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ und $f_2 = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$.

Wir stellen die Sturmsche Kette auf. Wenn wir f_1 durch f_2 dividieren, erhalten wir

$$\begin{array}{r} (x^3 - 8x^2 + 19x - 12) : (x^3 - 9x^2 + 27x - 26) = 1 + \frac{x^2 - 8x + 14}{x^3 - 9x^2 + 27x - 26} \\ \underline{-x^3 + 9x^2 - 27x + 26} \\ x^2 - 8x + 14 \end{array}$$

Der Rest ist $x^2 - 8x + 14$, daher ist $f_3 = -x^2 + 8x - 14$. Nun dividieren wir f_2 durch f_3

$$\begin{array}{r} (x^3 - 9x^2 + 27x - 26) : (-x^2 + 8x - 14) = -x + 1 + \frac{5x - 12}{-x^2 + 8x - 14} \\ \underline{-x^3 + 8x^2 - 14x} \\ -x^2 + 13x - 26 \\ \underline{x^2 - 8x + 14} \\ 5x - 12 \end{array}$$

Der Rest ist $5x - 12$, also $f_4 = -5x + 12$. Nun kommt $f_3 : f_4$.

$$\begin{array}{r} (-x^2 + 8x - 14) : (-5x + 12) = \frac{1}{5}x - \frac{28}{25} + \frac{-\frac{14}{25}}{-5x + 12} \\ \underline{x^2 - \frac{12}{5}x} \\ \frac{28}{5}x - 14 \\ \underline{-\frac{28}{5}x + \frac{336}{25}} \\ -\frac{14}{25} \end{array}$$

Der Rest ist $-\frac{14}{25}$, somit $f_5 = \frac{14}{25}$.

Der folgende Rest wäre natürlich schon gleich Null. Die Sturmsche Kette besteht also aus den Polynomen $x^3 - 9x^2 + 27x - 26$, $-x^2 + 8x - 14$, $-5x + 12$, $\frac{14}{25}$.

Die Werte der Polynome der Sturmschen Kette an den Stellen $x = a$ und $x = b$ schreiben wir in Form einer Tabelle auf:

	$x = 0$	$x = 5$
f_1	-12	8
f_2	-26	9
f_3	-14	1
f_4	12	-13
f_5	$\frac{14}{25}$	$\frac{14}{25}$

In der zweiten Spalte stehen also die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k , in der dritten die Zahlen b_1, b_2, \dots, b_k . Bei den a_i gibt es einen Vorzeichenwechsel, weil -14 und 12 nebeneinander stehen, und bei den b_i gibt es zwei, da 1, -13 und -13, $\frac{14}{25}$ nebeneinanderstehen. Somit ist die Charakteristik gleich $1 - 2 = -1$.

4 Die Anzahl der zwischen a und b liegenden Nullstellen eines Polynoms

Wir werden nun zeigen, wie man von der Charakteristik eines Polynompaars zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynome übergeben kann.

Die Charakteristik des Paares der Polynome f_1 und f_2 ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl derjenigen Nullstellen des Polynoms f_1 zwischen a und b , die Austrittspunkte sind, und der Anzahl der Nullstellen, die Eintrittspunkte sind.

Wenn wir nun ein Polynom f_2 finden könnten, das die Eigenschaft hat, dass alle Nullstellen von f_1 zu Austrittspunkten würden, also keine Nullstelle Eintrittspunkt wäre, so würde die Charakteristik des Polynompaars f_1, f_2 genau mit der Anzahl der zwischen a und b liegenden Nullstellen von f_1 übereinstimmen.

Wir versuchen, ein solches Polynom zu konstruieren. Dazu müssen wir voraussetzen, dass das Polynom f_1 keine mehrfachen Nullstellen hat.

Es sei nun α eine Nullstelle von f_1 . Wie muss die Kurve von f_2 liegen, damit der Punkt, welcher α entspricht, Austrittspunkt wird?

Hier sind zwei Fälle möglich, je nachdem, ob die Kurve von f_1 bei $x = \alpha$ von unten nach oben ansteigt oder von oben nach unten fällt. Wie Abb. 7 und. 8 zeigen, muss im ersten Fall die Kurve von f_2 bei $x = \alpha$ oberhalb und im zweiten Fall unterhalb der x -Achse liegen.

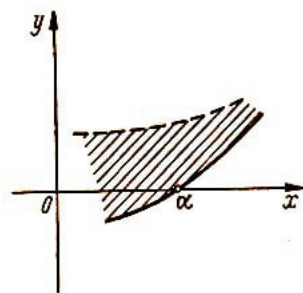


Abb. 7

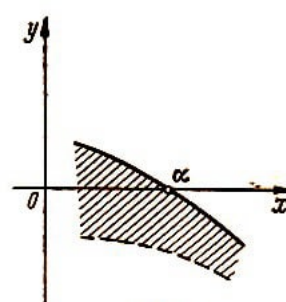


Abb. 8

Mit anderen Worten, im ersten Fall muss der Wert von f_2 für $x = \alpha$ positiv und im zweiten Fall negativ sein.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie man feststellen kann, welcher dieser beiden Fälle vorliegt. Im ersten Fall ist für $x < \alpha$ das Polynom f_1 negativ und für $x > \alpha$ positiv. Im zweiten Fall ist es umgekehrt.

Wir nehmen nun wieder an, es handle sich um das Polynom

$$f_1 = x^3 + px^2 + qx + r$$

und α sei eine seiner Nullstellen.

Schon in § 2 hatten wir gezeigt, dass dann f_1 durch $x - \alpha$ teilbar und der Quotient gleich $x^2 + (p + \alpha)x + (\alpha^2 + p + \alpha + q)$ ist:

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha) \cdot [x^2 + (p + \alpha)x + (\alpha^2 + p + \alpha + q)]$$

Wir benutzen diese Zerlegung, um festzustellen, welche Vorzeichen die Werte haben, die f_1 annimmt, wenn x etwas kleiner bzw. etwas größer als α ist. Für den ersten Faktor ist alles klar.

Für $x < \alpha$ ist er negativ, für $x > \alpha$ positiv. Wir wenden uns also dem zweiten Faktor zu. Für $x = \alpha$ ist er sicher von Null verschieden, denn in § 2 haben wir gesehen, dass sonst f_1 mehrfache Nullstellen hätte, was wir in der Voraussetzung ausdrücklich ausgeschlossen hatten.

Der Wert des zweiten Faktors für $m = \alpha$ ist gleich dem Wert der Ableitung von f_1 an dieser Stelle. Ist dies eine positive Zahl, so ist auch für solche x , die sich nicht zu stark von α unterscheiden (nämlich um weniger als bis zur nächsten Nullstelle dieses quadratischen Trinoms), der zweite Faktor positiv, also das Vorzeichen des Produktes gleich dem Vorzeichen des ersten Faktors.

Dann liegt also der erste Fall vor. Ist aber der Wert der Ableitung an der Stelle $x = \alpha$ negativ, so kehren sich alle Vorzeichen um, und wir haben den zweiten Fall vor uns.

Damit ist gezeigt, dass hier die uns schon bekannte Ableitung ausschlaggebend ist, und zwar liegt der erste Fall vor, wenn der Wert der Ableitung an der Stelle $x = \alpha$ positiv, und der zweite, wenn dieser Wert negativ ist. Dasselbe gilt auch für Polynome höheren Grades.

Daraus ersehen wir aber, dass die Ableitung des Polynoms f_1 gerade ein solches Polynom f_2 mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Nimmt man also als f_2 die Ableitung von f_1 , so ist die Charakteristik (f_1, f_2) gleich der Anzahl der Nullstellen von f_1 , die zwischen a und b liegen.

Da wir im vorigen Paragraphen ein Verfahren zur Berechnung der Charakteristik abgeleitet haben, ist uns hier ein Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der zwischen a und b liegenden Nullstellen eines Polynoms in die Hand gegeben.

Wir geben nachstehend noch einmal die hiermit gewonnene Regel zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Polynoms an:

Um die Anzahl der zwischen a und b gelegenen Nullstellen eines Polynoms zu finden, muss man die Sturmsche Kette für das Polynom und seine Ableitung aufstellen und die Werte der Polynome dieser Kette für $x = a$ und $x = b$ berechnen.

Die Differenz zwischen der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der ersten Zahlenfolge und dieser Anzahl in der zweiten Zahlenfolge ist dann die gesuchte Anzahl der Nullstellen.

Das ist der berühmte Satz, den der französische Mathematiker Sturm im Jahre 1829 bewiesen hat.

Die Überlegungen, mit deren Hilfe wir unsere Aufgabe, die Anzahl der zwischen a und b gelegenen Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, gelöst haben, stimmen in Vielem

mit den Überlegungen überein, mit deren Hilfe wir in § 2 eine andere Aufgabe gelöst hatten, nämlich die Bestimmung der mehrfachen Nullstellen eines Polynoms.

In beiden Fällen hat sich gezeigt, dass man am einfachsten zuerst einige Eigenschaften eines Polynompaars untersucht; im ersten Fall handelte es sich um die Bestimmung der gemeinsamen Nullstellen, im zweiten um die Bestimmung der Charakteristik.

Der Grund dafür, dass man Paare von Polynomen leichter behandeln kann, war in beiden Fällen derselbe:

Bei zwei Polynomen kann man dividieren, wodurch die Lösung des Problems in bezug auf zwei Polynome zurückgeführt wird auf die Lösung des entsprechenden Problems für zwei Polynome niedrigeren Grades.

Ferner haben wir in beiden Fällen zu dem gegebenen Polynom f_1 ein Hilfspolynom f_2 eingeführt (in beiden Fällen konnten wir dafür die Ableitung nehmen), so dass das von uns schon gelöste Problem für Polynompaare bei Anwendung auf das Paar f_1, f_2 genau die Lösung unseres Problems in bezug auf das Polynom f_1 lieferte.

Nun zeigen wir, wie man mit Hilfe des Sturmschen Satzes eine Reihe von Problemen über Nullstellen von Polynomen beliebigen Grades löst.

Zuerst behandeln wir die Aufgabe, die Anzahl aller - und nicht nur der zwischen a und b gelegenen - Nullstellen für eines gegebenen Polynoms f zu bestimmen. Die Lösung ergibt sich durch Kombination des Sturmschen Satzes mit den Resultaten von § 1. Dort haben wir gezeigt, wie man eine Zahl N finden kann mit der Eigenschaft, dass alle Nullstellen des Polynoms zwischen $-N$ und N liegen.

Daraus folgt, dass wir die Anzahl aller Nullstellen eines Polynoms bekommen, wenn wir den Sturmschen Satz für $a = -N$ und $b = N$ anwenden. Damit ist diese Aufgabe also gelöst.

Diese Lösung kann man jedoch noch in einer eleganteren Form darstellen. Die Sturmsche Kette für das Polynom f_1 und seine Ableitung f_2 möge aus den Polynomen f_1, f_2, \dots, f_k bestehen.

Für jedes Polynom f_i dieser Folge existiert nach § 1 eine Zahl N_i , derart, dass alle Nullstellen von f_i zwischen $-N_i$ und N_i liegen.

Nun wählen wir N größer als alle diese N_i . Wenden wir jetzt den Sturmschen Satz mit $a = -N$ und $b = N$ an, so erhalten wir natürlich die Anzahl aller Nullstellen unseres Polynome.

Es zeigt sich aber, dass wir jetzt zur Berechnung der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der Werte der Polynome der Sturmschen Kette für $x = a$ und $x = b$ diese Werte selbst gar nicht zu berechnen brauchen.

Uns interessieren nämlich nur die Vorzeichen, und wir haben in § 1 gezeigt, dass das Vorzeichen des Wertes, den ein beliebiges Polynom für $x < -N$ oder für $x > N$ annimmt, mit dem Vorzeichen seines ersten Gliedes übereinstimmt.

Nun haben wir N aber so gewählt, dass N größer als alle N_i , und entsprechend $-N$ kleiner als alle $-N_i$ ist. Daher werden die Vorzeichen der Werte der Polynome der Sturmschen Kette für $x = -N$ und $x = N$ durch die Vorzeichen ihrer ersten Glieder bestimmt.

Wir weisen auf folgende interessante Tatsache hin: Obwohl wir die Existenz der Zahl N in unseren Überlegungen benutzten, brauchen wir sie nicht in jedem Fall zu berechnen, weil das erste Glied jedes Polynoms der Sturmschen Kette die Gestalt ax^k hat und sein Vorzeichen für $x = -N$ oder $x = N$ von der Größe von N völlig unabhängig ist.

Beispiel. Man bestimme die Anzahl aller Nullstellen des Polynoms $f_1 = x^3 + 3x - 1$. Die Ableitung ist $f_2 = 3x^2 + 3$. Wir stellen die Sturmsche Kette auf:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x - 1) : (3x^2 + 3) = \frac{1}{3}x + \frac{2x-1}{3x^2+3} \\ \underline{-x^3 \quad -x} \\ 2x-1 \end{array}$$

Der Rest ist $2x - 1$, also $f_3 = -2x + 1$. Ferner ist

$$\begin{array}{r} (3x^2 + 3) : (-2x + 1) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{4}}{-2x+1} \\ \underline{-3x^2 + \frac{3}{2}x} \\ \frac{3}{2}x + 3 \\ \underline{-\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}} \\ \frac{15}{4} \end{array}$$

Der Rest ist $3\frac{3}{4}$, also $f_4 = -3\frac{3}{4}$. Der folgende Rest wäre Null. Die Sturmsche Kette besteht daher aus den Polynomen $x^3 + 3x - 1$, $3x^2 + 3$, $-2x + 1$, $-3\frac{3}{4}$.

Wenn wir jetzt N wie angegeben (natürlich positiv) wählen, so stimmen die Vorzeichen der Werte dieser Polynome für $x = -N$ und $x = N$ mit den Vorzeichen ihrer ersten Glieder überein. Wir schreiben diese Vorzeichen in der Tabelle

	$x = -N$	$x = N$
f_1	-	+
f_2	+	+
f_3	+	-
f_4	-	-

Für $x = -N$ gibt es zwei Vorzeichenwechsel, für $x = N$ einen. Das Polynom $x^3 + 3x - 1$ hat demnach $2 - 1 = 1$ Nullstellen.

Jetzt können wir zu der Aufgabe übergehen, die Nullstellen eines Polynoms zu berechnen. Dabei stellen wir uns das Ziel, alle Nullstellen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Auch im Falle der quadratischen Gleichung haben wir eigentlich nichts Besseres, obwohl es scheinen könnte, dass die Formel kein nur angenähertes, sondern das genaue Resultat liefere.

Wenn wir aber sagen, die Nullstellen des Polynoms $x^2 - a$ seien $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, so bringen wir in Wirklichkeit damit nur zum Ausdruck, dass wir auf Grund der Regel zur Berechnung der Quadratwurzel die Nullstellen mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen können.

Zur angenäherten Berechnung der Nullstellen von Polynomen müssen wir zuerst (im

Gegensatz zu dem, was bei der Bestimmung der Anzahl der Nullstellen galt) nach der Regel von § 1 eine Zahl N wirklich berechnen, für welche alle Nullstellen unseres Polynoms zwischen $-N$ und N liegen.

Dann unterteilen wir das Intervall $(-N, N)$ (wir können es z.B. halbieren) und bestimmen nach dem Sturmschen Satz die Anzahl der Nullstellen in jedem Teilintervall (in jeder Hälfte), d.h. zwischen $-N$ und 0 und zwischen 0 und N .

Mit jedem dieser Teilintervalle verfahren wir genau so, wenn sich herausgestellt hat, dass in ihm tatsächlich Nullstellen enthalten sind. Das machen wir so lange, bis wir unser Intervall $(-N, N)$ in Teilintervalle hinreichend kleiner Länge zerlegt haben.

Dabei ist uns bekannt, in welchen dieser kleinen Teilintervalle Nullstellen liegen und in welchen nicht. Das bedeutet aber gerade, dass wir die Nullstellen mit beliebiger Genauigkeit berechnen können. Wissen wir beispielsweise, dass eine Nullstelle zwischen den Zahlen α und β liegt, deren Differenz kleiner als 0,001 ist, so sind α und β Näherungswerte für die Nullstelle, und zwar ist α um höchstens 0,001 zu klein und β um diesen Fehler (höchstens) zu groß.

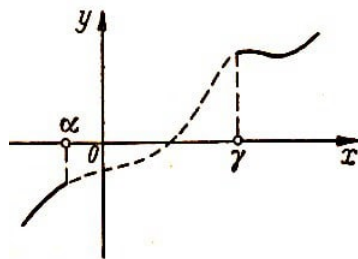


Abb. 9

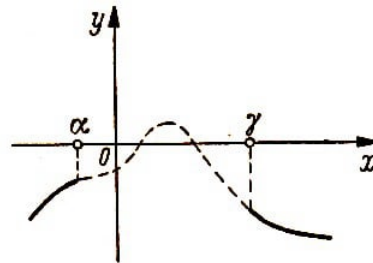


Abb. 10

Zur Vereinfachung der Rechnung teilt man meist nicht in zwei, sondern in 10 Teile. Wenn wir bis zu so kleinen Intervallen gekommen sind, dass in jedem von ihnen entweder genau eine oder keine Nullstelle des Polynoms liegt, so brauchen wir bei den folgenden Berechnungen den Sturmschen Satz nicht zu benutzen und die Werte der Polynome der Sturmschen Kette nicht zu berechnen.

Es möge etwa der Fall vorliegen, dass wir wissen, zwischen α und β liegt genau eine Nullstelle. Dann teilen wir das Intervall (α, β) durch eine Zahl γ in zwei Teile und stellen fest, ob die Nullstelle zwischen α und γ oder zwischen γ und β liegt.

Dazu genügt es, die Werte des Polynoms für $x = \alpha$ und für $x = \gamma$ zu berechnen. Haben sie verschiedene Vorzeichen, so liegt, wie aus Abb. 9 ersichtlich ist, die Kurve des Polynoms bei $x = \alpha$ und bei $x = \gamma$ auf verschiedenen Seiten der x -Achse und muss diese daher irgendwo zwischen α und γ schneiden. Das heißt aber, dass die Nullstelle zwischen α und γ liegt.

Haben dagegen die Werte des Polynoms bei $x = \alpha$ und $x = \gamma$ dasselbe Vorzeichen, so kann die Nullstelle nicht zwischen α und γ liegen. Denn sonst würde die Kurve des Polynoms irgendwo zwischen α und γ auf die andere Seite der x -Achse und dann an einer anderen Stelle wieder zurück verlaufen müssen, da sie bei $x = \alpha$ und $x = \gamma$ auf derselben Seite der Achse (Abb. 10) verläuft.

Demnach müsste das Polynom aber zwischen α und γ mindestens zwei Nullstellen haben, gegen unsere ausdrückliche Voraussetzung.

Demnach kann in diesem Fall die Nullstelle nicht zwischen α und γ , sondern muss zwischen γ und β liegen.

Beispiel. Wir berechnen mit einer Genauigkeit von 0,1 die Nullstelle des Polynome $x^3 + 3x - 1$.

Wir haben schon festgestellt, dass dieses Polynom nur eine einzige Nullstelle hat, können also die eben besprochene Vereinfachung der allgemeinen Methode anwenden. Zunächst bestimmen wir N . Nach § 1 müssen wir die größte der Zahlen

$$0, \quad \sqrt{3 \cdot 3}, \quad \sqrt[3]{3}$$

nehmen. Diese ist natürlich $\sqrt{3 \cdot 3} = 3$, also ist $N = 3$. Die gesuchte Nullstelle liegt also zwischen -3 und 3.

Nun bestimmen wir ihr Vorzeichen. Dazu berechnen wir die Werte des Polynoms für $x = 0$ und $x = 3$; es ergibt sich -1 und 35. Da diese Zahlen verschiedenes Vorzeichen haben, liegt die Nullstelle zwischen 0 und 3, ist also positiv.

Nun berechnen wir die Werte des Polynoms für $x = 1$ und $x = 2$. Wir finden 3 und 13. Somit ergeben die Werte 1, 2 und 3 dasselbe Vorzeichen, aber 0 und 1 verschiedene; die Nullstelle muss also zwischen 0 und 1 liegen, ist also ein Dezimalbruch 0,...

Um die erste Stelle hinter dem Komma zu finden, muss man wissen, in welchem der zehn Teilintervalle (von 0 bis 0,1, von 0,1 bis 0,2, usw.) die Nullstelle liegt. Dazu setzen wir zunächst $x = 0,5$. Dafür ergibt sich der Wert des Polynome zu 0,625.

Da -1 und 0,625 verschiedene Vorzeichen haben, liegt die Nullstelle zwischen 0 und 0,5. Nun setzen wir $x = 0,3$ und erhalten den Wert $0,027 + 0,9 - 1 = 0,027 - 0,1$, also eine negative Zahl.

Daher liegt die Nullstelle zwischen 0,3 und 0,5, da für diese Zahlen die Werte des Polynoms verschiedene Vorzeichen haben. Jetzt setzen wir $z = 0,4$. Wir finden als Polynomwert $0,064 + 1,2 - 1 = 0,064 + 0,2$. Da diese Zahl positiv ist, liegt die Nullstelle zwischen 0,3 und 0,4. Damit haben wir die Nullstelle mit der geforderten Genauigkeit bestimmt, und unsere Aufgabe ist gelöst:

Die Nullstelle des Polynoms $x^3 + 3x - 1$ liegt (mit einem Fehler von höchstens 0,1) bei 0,3.³

³Ein genauerer Wert ist 0,322185

5 Anhang: Das Hornersche Schema

von Prof. Dr. Herbert Karl, Potsdam

Im vorliegenden Bändchen waren mehrfach die Werte von Polynomen für bestimmte x -Werte zu berechnen. Grundsätzlich kann dies stets so geschehen, dass man einfach in das gegebene Polynom

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l$$

an Stelle von x den festen Wert x_0 einsetzt und die entstehende Summe $f(x_0)$ ausrechnet.

Wenn aber der Grad des Polynoms etwas höher liegt und die Koeffizienten Bruchzahlen sind, so wird dieser Weg recht mühsam, besonders wenn man nacheinander mehrere Werte zu berücksichtigen hat.

Es ist daher von Interesse, ein Verfahren zu kennen, das einen möglichst geringen Rechenaufwand erfordert. Ein solches Verfahren ist das Hornersche Schema. Es soll zunächst an zwei Beispielen auseinandergesetzt und dann in allgemeiner Form angegeben werden.

$$f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 12,5x^2 - 7x + 23 \quad (\text{a})$$

soll für $x = 4$ berechnet werden. Läge uns $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - 4)q(x) + r$ (wobei $q(x)$ ein passendes Polynom, r eine feste Zahl) vor, so wäre der Wert $f(4)$ ohne weitere Rechnung sofort abzulesen, da der erste rechte Summand für $x = 4$ verschwindet, so dass $f(4) = r$ wird.

Nun ist es aber immer möglich, diese für die Wettbestimmung günstige Form zu erreichen, denn man hat dazu auf $f(x)$ und $x - 4$ lediglich die Division mit Rest anzuwenden. Das ergibt hier

$$\begin{array}{r} (2x^4 - 11x^3 + 12,5x^2 - 7x + 23) : (x - 4) = 2x^3 - 3x^2 + 0,5x - 5 = q(x) \\ \underline{-2x^4 + 8x^3} \\ -3x^3 + 12,5x^2 \\ \underline{+3x^3 - 12x^2} \\ 0,5x^2 - 7x \\ \underline{-0,5x^2 + 2x} \\ -5x + 23 \\ \underline{+5x - 20} \\ 3 = r \end{array}$$

Also ist der gesuchte Wert $f(4) = r = 3$.

Diese Division kann offenbar nur dann eine bequeme Berechnung von $f(4)$ ergeben, wenn sie sich formal wesentlich vereinfachen lässt. Das geschieht wie folgt:

Alle ersten Summanden der zweigliedrigen Ausdrücke können außer acht gelassen werden, weil sie aus dem Ergebnis herausfallen. Von den zweiten Summanden sind nur

die Zahlenfaktoren wichtig, während sich die mit ihnen verbundenen x -Potenzen durch Einhaltung der Koeffizientenreihenfolge mittelbar berücksichtigen lassen.

Ebenso wird $f(x)$ nur durch Angabe seiner Koeffizienten charakterisiert, so dass nachstehendes Schema den eigentlichen Kern der Rechnung wiedergibt:

$$\begin{array}{r} 2 \quad -11 \quad 12,5 \quad -7 \quad 23 \\ [4] \quad \quad 2 \cdot 4 \quad -3 \cdot 4 \quad 0,5 \cdot 4 \quad -5 \cdot 4 \\ \hline 2 \quad -3 \quad 0,5 \quad -5 \quad 3 = f(4) \end{array}$$

Man schreibt also die Koeffizienten von $f(x)$ in die erste Zeile und übernimmt zuerst den Koeffizienten des höchsten Gliedes (2) in die dritte Zeile. Sodann addiert man zum Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes (-11) das Produkt aus dem des höchsten (2) mit x_0 (hier 4). Das Additionsergebnis (-3) wird seinerseits mit x_0 multipliziert und zum Koeffizienten des dritthöchsten Gliedes (12,5) addiert.

So wird die Rechnung mit abwechselnder Multiplikation und Addition fortgesetzt, bis als letztes Additionsergebnis in der dritten Zeile der gesuchte Wert von $f(x_0)$, hier also $f(4) = 3$ gefunden ist.

Abgesehen von dem einfachen Rechengang hat das Verfahren noch den besonderen Vorzug, dass nur Produkte mit einem festen Faktor zu bilden sind, woraus sich bei etwaiger Verwendung von Rechenschieber oder Rechenmaschine (z.B. wenn x_0 mehrere Dezimalstellen enthält) wieder Vorteile ergeben.

$$f(x) = 3x^5 - 70x^3 + 23x^2 + 48 \quad (b)$$

ist für $x = -5$ zu berechnen.

Wenn ein Polynom gegeben ist, in dem eine oder mehrere x -Potenzen fehlen, so muss darauf geachtet werden, dass beim Aufschreiben der ersten Zeile des Schemas diese x -Potenzen durch den Faktor 0 vertreten werden. Der Gang der Rechnung selbst bleibt unverändert. Also lautet das Schema hier so:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \quad -70 \quad 23 \quad 0 \quad 48 \\ [-5] \quad \quad -15 \quad 75 \quad -25 \quad 10 \quad -50 \\ \hline 3 \quad -15 \quad 5 \quad -2 \quad 10 \quad -2 = f(-5) \end{array}$$

Die Produkte der zweiten Zeile sind hier, wie man es in der Praxis bevorzugen wird, gleich in ausgerechneter Form angegeben.

(c) Nach diesen Vorbereitungen ist das Hornersche Schema im allgemeinen Falle ohne weiteres verständlich. Um den Wert von

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l$$

für $x = x_0$ zu bestimmen, schreibt man:

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad \dots \quad k \quad l \\ [x_0] \quad \quad ax_0 \quad b'x_0 \quad \quad h'x_0 \quad k'x_0 \\ \hline a \quad b' \quad c' \quad \quad k' \quad l' = f(x_0). \end{array}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$b' = b + ax_0, \quad c' = c + b'x_0, \quad \dots, \quad k' = k + h'x_0, \quad l' = l + k'x_0.$$