
E.B. Dynkin / W.A. Uspenski

**Mathematische Unterhaltung III
Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Übersetzung und Bearbeitung: Peter Friedel, Brigitte Mai

1966 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 26

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Diesem Buch¹ liegen Arbeiten einer Sektion eines mathematischen Schulzirkels an der Moskauer Staatlichen M. W. Lomonossow-Universität aus den Studienjahren 1945/46 und 1946/47 zugrunde. Der eine der Autoren war Leiter dieser Sektion, der andere gehörte zu den Teilnehmern. Diese Sektion nannte sich Sektion allgemeinen Typs. Man beschäftigte sich darin mit Fragen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik. Dabei war es grundsätzlich nicht das Ziel, den Teilnehmern neue Erkenntnisse zu vermitteln; es ging vielmehr darum, ihre Aktivität zu wecken und ihnen zu einem schöpferischen Verhältnis zur Mathematik zu verhelfen. Mehrere Disziplinen wurden dabei mit großem Erfolg behandelt.

In dem vorliegenden Buch sind Themen aus drei dieser Disziplinen - in gründlicher Überarbeitung und erweiterter Form - enthalten: Aufgaben über das Mehrfarbenproblem, Aufgaben aus der Zahlentheorie und Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit den sogenannten Irrfahrten zusammenhängen.

Jedem dieser Themen waren mehrere aufeinanderfolgende Zusammenkünfte gewidmet. Im allgemeinen begannen diese mit einem Problem, das zu seiner Formulierung keiner neuen Begriffe bedurfte, mit dessen Lösung die Teilnehmer jedoch in den neuen Fragenkreis eingeführt wurden. Auch im weiteren Verlauf hingen die Vorträge des Leiters eng mit Aufgaben zusammen, die sich im Laufe der Unterhaltungen ergaben; manchmal wurden sie gleich an Ort und Stelle gelöst, meistens aber als Hausaufgabe bis zur nächsten Sitzung gestellt.

Ein bedeutender Teil des gesamten Stoffes war in Gruppen zusammenhängender Aufgaben angeordnet. Bei jeder Sitzung der Sektion war eine gewisse Zeit der Besprechung der Lösungen gewidmet, die dann anschließend dem Leiter als Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen und Folgerungen dienten. In seinem Vortrag ging der Leiter auch auf schwierigere Fragen ein, die sich weniger in einzelne Aufgaben zergliedern ließen.

In dem vorliegenden Buch wurde die Form der durch Aufgaben unterbrochenen Darlegung beibehalten, wobei die Lösung der Aufgaben für das Folgende wesentlich ist.

Für die Lektüre der ersten beiden Abschnitte genügen die Kenntnisse der 7. Klasse der Oberschule, der dritte Abschnitt erfordert nicht viel mehr Kenntnisse. Das Buch ist in seiner Konzeption für Schüler der Oberklassen gedacht, kann jedoch auch für Arbeitsgemeinschaften von Studenten der ersten Semester benutzt werden.

Wir benutzen hier die Gelegenheit, A.N. Kolmogoroff unseren Dank auszusprechen; seine Ratschläge haben bedeutend zur Verbesserung dieses Buches beigetragen. Wir sagen auch E.E. Balasch Dank, dessen Aufgaben den Paragraphen 2 und 3 in Kap. IV des zweiten Abschnittes zugrunde liegen. Schließlich danken wir M.A. Neumark und I.M. Jaglom, die das Manuskript durchgesehen und eine Reihe von Hinweisen gegeben haben.

Abschließend möchten wir auch noch die sorgfältige Arbeit unseres Redakteurs A.S. Rywkin würdigen.

März 1952 E. Dynkin , W. Uspenski

¹In der deutschen Ausgabe erscheinen die Abschnitte I, II, III des Originals als einzelne Bändchen (Anm. d. Red).

Hinweise zur Benutzung dieses Buches

Alle drei Abschnitte² sind voneinander unabhängig; daher kann der Leser sie in beliebiger Reihenfolge lesen; es ist dabei jedoch zu beachten, dass der erste Abschnitt der leichteste und der dritte der schwierigste ist.

Der Anhang zum ersten Abschnitt enthält die Lösung einer Aufgabe, die sich ihrem Charakter nach der Thematik dieses Abschnittes anschließt; dieser Anhang kann übrigens unabhängig vom ersten Abschnitt gelesen werden, da für sein Verständnis nichts weiter notwendig ist als die Definition der regulären Färbung.

Jeder Abschnitt ist einem bestimmten Thema gewidmet; die einzelnen Teile eines Abschnittes stehen untereinander in engem Zusammenhang. Daher muss jeder Abschnitt lückenlos von Anfang bis Ende durchgelesen werden.

Eine Ausnahme bilden nur die Kap. II und. IV des zweiten Abschnittes, die mit einem Sternchen versehen sind. Sie weichen etwas von der Grundlinie des Abschnittes ab und können bei der ersten Lektüre ohne Nachteil, für das Verständnis des Folgenden ausgelassen werden (das Kap. II ist im wesentlichen eine Ergänzung zu Kap. I und Kap. IV eine Ergänzung zu Kap. III).

Das Buch ist zur Aktivierung der Arbeit des Lesers gedacht.

Jeder Abschnitt enthält daher als organischen Bestandteil eine Reihe von Aufgaben. Die meisten Aufgaben sind in Gruppen zusammengefasst; jede derartige Gruppe ist in sich abgeschlossen.

Oft führen diese einzelnen Aufgaben, von denen eine auf der anderen aufbaut, den Leser zu einem abschließenden Resultat, das in der letzten Aufgabe einer jeden Gruppe enthalten ist (so beispielsweise die Aufgaben 21-27, 38-41 des ersten Abschnittes, die Aufgaben 28-32, 71-75 des zweiten Abschnittes u.a.m.).

Manchmal verdichten sich die Lösungen einer derartigen Gruppe nicht zu einem bestimmten Resultat, sondern führen eine neue Methode ein (beispielsweise die Aufgaben 11-14 des ersten Abschnittes). Schließlich sind einige Aufgaben bloße Übungen, mit deren Hilfe der Leser sich mit den neuen Begriffen vertraut machen kann (wie etwa die Aufgaben 1-8 des zweiten Abschnittes oder die Aufgaben 1-3 des dritten Abschnittes u.a.m.).

Es empfiehlt sich, die Formulierung aller Aufgaben einer vorliegenden Gruppe zu betrachten, bevor man die einzelnen Aufgaben löst. Wir empfehlen dem Leser, sich erst dann die am Ende des Buches angeführten Lösungen anzusehen, wenn er alle Aufgaben einer Gruppe gelöst hat; die von uns angegebenen Lösungen werden alle auf einem bestimmten Weg gewonnen, während der Leser durch selbständiges Überlegen eigene Beweismethoden finden kann.

Die Praxis der mathematischen Schulzirkel hat nämlich gezeigt, dass dabei manchmal einfachere und elegantere Lösungen gefunden werden, als sie vom Autor für die jeweilige Aufgabe gedacht waren.

²In der deutschen Ausgabe erscheinen die Abschnitte I, II, III des Originals als einzelne Bändchen (Anm. d. Red).

Die einzelnen Gruppen von Aufgaben unterscheiden sich nach ihrem Schwierigkeitsgrad in bedeutendem Maße voneinander. Nach den Erfahrungen der Arbeitsgemeinschaft an der Universität kann man jedoch im Mittel eine Woche als Arbeitszeit für eine bis zwei Gruppen von Aufgaben ansehen.

Wahrscheinlich wird dem Leser die selbständige Lösung sämtlicher Aufgaben einer Gruppe nicht in allen Fällen gelingen. Sollte er nach Lösung einer Aufgabe bei der zweiten auf Schwierigkeiten stoßen, die er nicht überwinden kann, so sei ihm empfohlen, die erste, bereits gelöste Aufgabe noch einmal zu überlesen.

Manchmal genügt dies bereits, um die Lösung zu finden, auch wenn es vorher beim besten Willen nicht gelingen wollte. Erweisen sich aber die Schwierigkeiten als unüberwindlich, so sehe man zunächst die Lösung dieser schwierigen Aufgabe nach und fahre erst dann mit der Lösung der folgenden Aufgaben fort.

Trotz der fundamentalen Rolle, welche die Aufgaben in diesem Buch spielen, ist es keineswegs eine Aufgabensammlung. Ebenso wichtig wie die Aufgaben ist der in dem Buch gebotene theoretische Stoff.

Das Verhältnis zwischen den Aufgaben und diesem Stoff ist in den einzelnen Kapiteln verschieden. Manchmal liegt das Wesentliche in den Voraussetzungen der Aufgaben, und die Rolle des Textes ist darauf beschränkt, neue Begriffe einzuführen und Folgerungen zu ziehen (wie beispielsweise im § 1 des ersten Abschnittes, im Kap. V des zweiten Abschnittes usw.). In anderen Fällen (wie im Kap. II des zweiten Abschnittes und dem gesamten dritten Abschnitt) liegt das Wesentliche im theoretischen Stoff, und die Aufgaben haben untergeordnete Bedeutung.

In allen Fällen stehen Text und Aufgaben in engem Zusammenhang und müssen in der Reihenfolge gelesen werden, in der sie im Buch angeführt sind.

Einen wesentlichen Teil dieses Buches bilden die Lösungen der Aufgaben, denen sich oft Folgerungen und Anmerkungen grundsätzlichen Charakters anschließen. Daher sollte man die Lösungen auch dann studieren, wenn man selbständig mit den Aufgaben fertig wurde.

Schließlich raten wir dem Leser, die Zeit für die Lösung von Aufgaben nicht zu scheuen. Jede Gruppe von Aufgaben, ja jede Aufgabe, die selbständig gelöst wurde, bereichert den Vorrat an Kenntnissen, die dem Leser zur Verfügung stehen. Ein selbständig erarbeiteter Gedanke ersetzt zehn Gedanken, die man mit fremden Worten erlernt hat.

Sogar dann, wenn der Versuch der Lösung einer Aufgabe nicht gelingt, ist die aufgewendete Zeit nicht umsonst: Nach gründlicher Durcharbeitung der Aufgabe wird man ihre Lösung mit ganz anderen Augen lesen; man wird die Ursachen seines Misserfolges suchen und verstehen, aus den Hilfsbetrachtungen jene grundsätzlichen Ideen herauszufinden, die zum Erfolg führen.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	6
1 Grundlegende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit	10
1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit. Unabhängige Ereignisse	12
1.2 Die Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit	17
2 Aufgaben über die Irrfahrt auf der unendlichen Geraden	20
2.1 Das Dreieck der Wahrscheinlichkeiten	20
2.2 Das Bildungsgesetz des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten	20
2.3 Zentrale Elemente des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten	23
2.4 Abschätzung beliebiger Elemente des Dreiecks	26
3 Das Gesetz der großen Zahlen	28
3.1 Das Gesetz der Quadratwurzel aus n	31
4 Irrfahrten mit endlich vielen Zuständen	36
4.1 Das allgemeine Problem	38
4.2 Begegnungsaufgabe	44
5 Irrfahrten mit unendlich vielen Zuständen	47
5.1 Aufgaben über die Irrfahrt auf der Geraden	47
5.2 Begegnungsaufgabe	49
5.3 Die unendlich große Stadt mit schachbrettartigem Grundriss	52
6 Ergänzung	56
7 Lösungen	57

Einleitung

Es gibt ein bekanntes Brettspiel "Zirkus". Zwei Spieler würfeln der Reihe nach, und jeder von ihnen setzt dementsprechend seine Figur auf einem quadratischen Brett, das in 100 nummerierte Quadrate (Felder) eingeteilt ist, vorwärts.

Die Figur wandert so viele Felder weiter, wie der Würfel Augen zeigt. Zu Anfang des Spieles stehen die Figuren auf dem ersten Feld. Gewinner ist derjenige, der als erster das Feld mit der Nummer 100 erreicht.

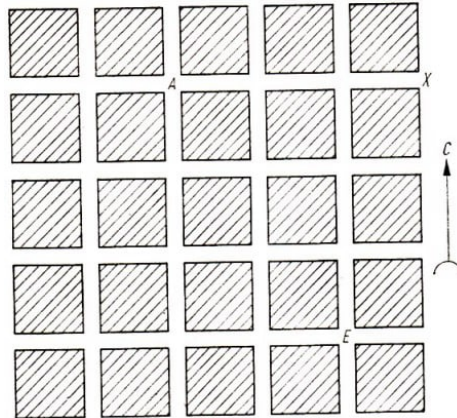


Abb. 1

Eine weitere Spielregel besteht in folgendem: Gelangt eine Figur auf ein Feld mit einer roten Nummer, so wechselt sie auf ein anderes Feld über (entweder vorwärts oder rückwärts), dessen Nummer blau ist; auf welches, zeigen die auf dem Brett gezeichneten zirkusischen Attraktionen.

Offensichtlich ist bei diesem Spiel die Bewegung der Figuren nicht vom Willen der Spieler, sondern vom Zufall abhängig (wobei vorausgesetzt wird, dass der Würfel "ehrlich" geworfen wird). Diese Bewegung der Figuren liefert eins der einfachsten Beispiele für Irrfahrten.

Zwei Freunde wohnen in einer Stadt, deren Grundriss in Abb. 0.1 abgebildet ist. Sie kommen aus ihrem Haus, das an der Straßenkreuzung A steht, und wollen spazieren gehen. Es entsteht jedoch zwischen ihnen ein Streit über die Richtung ihres Spazierganges, den sie durch ein Übereinkommen schlichten.

Sie wollen zwei Münzen werfen und von der Straßenkreuzung A in der Richtung losgehen, die dem Wurf entspricht, wobei jedem der vier möglichen Würfe (Wappen-Wappen, Wappen-Zahl, Zahl-Wappen, Zahl-Zahl) eine Richtung zugeordnet ist.

So beginnen sie dann ihren Spaziergang an der Straßenkreuzung A und kommen zur folgenden Straßenkreuzung, wo sie wieder die beiden Münzen werfen und, dem Ergebnis entsprechend, ihren weiteren Weg wählen. Kommen sie zum Stadtrand (zum Beispiel zum Punkt X), so werden sie sich umwenden und zurückkehren. Hier haben wir wieder ein Beispiel für eine Irrfahrt.

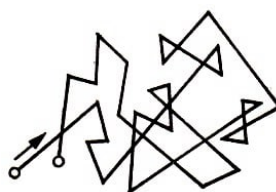


Abb. 2

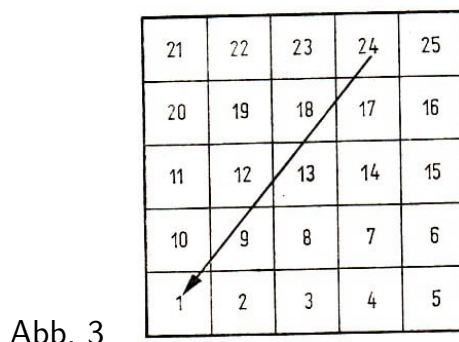
Ähnliche Fälle wie die eben angeführten Beispiele für Irrfahrten kommen (nur meist wesentlich komplizierter) auch in der Natur vor. Folgender Versuch (Brownsche Molekularbewegung) soll uns als Beispiel dienen:

Wird ein leichtes Pulver in Wasser geschüttelt und sodann ein Tropfen dieses Wassers mit den darin enthaltenen Teilchen unter ein Mikroskop gebracht, so kann man beobachten, dass die Teilchen zu leben scheinen - sie befinden sich in ununterbrochener zickzackförmiger Bewegung (Abb. 2).

Die Irrfahrt hat hier wesentlich komplizierteren Charakter als bei dem vorigen Beispiel; denn erstens können die Teilchen die Richtung ihrer Bewegung in jedem Moment ändern, während dies bei dem Beispiel der Wege nur an den Straßenkreuzungen möglich war; zweitens musste bei der Wahl der Richtungen im vorigen Beispiel nur zwischen vier Richtungen entschieden werden, wohingegen die Teilchen sich in jeder beliebigen Richtung bewegen können.

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache Beispiele von Irrfahrten betrachten.

Wir kehren zu dem oben beschriebenen Brettspiel zurück und fragen nach der Spieldauer. Zur Beantwortung betrachten wir ein weniger kompliziertes Spielbrett (Abb. 3) mit nur 25 Feldern; die Figur, die das Feld 24 betritt, muss sofort auf das Anfangsfeld zurückkehren; andere Vorschriften zum Wechseln zwischen den Feldern sollen nicht bestehen. Wie lange dauert das Spiel auf diesem Brett?



Es kann passieren, dass ein Spieler bereits nach dem vierten Wurf das Feld mit der Nummer 25 erreicht; das tritt dann ein, wenn sein Würfel viermal hintereinander sechs Augen zeigt.

Andererseits kann, wenn die Figur jedes Spielers wiederholt auf das Feld mit der Nummer 24 kommt, das Spiel auch nach 1000 Würfeln noch nicht beendet sein. Es kann sogar passieren, dass das Spiel überhaupt nicht endet; das geschieht beispielsweise dann, wenn für beide Spieler die gewürfelten Augen in nachstehender Folge fallen:

6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, ...

In diesem Fall kann für die Spieldauer keine Grenze angegeben werden.

Man muss eine neue Partie anfangen. Man überzeugt sich, dass das Spiel praktisch stets ein Ende hat und nicht sehr lange dauert. Welcher Sachverhalt liegt dem zugrunde?

Wie bereits oben festgestellt wurde, ist dies unmöglich, das Ende des Spieles mit absoluter Gewissheit anzugeben. Die Lage ändert sich jedoch grundlegend, wenn keine absolut sicheren Angaben verlangt werden. Um das zu erklären, betrachten wir noch einige Beispiele:

Beispiel 1. Es sei eine Urne mit 1000 Kugeln aufgestellt. Eine der Kugeln sei schwarz, die anderen weiß. Aus dieser Urne wird eine Kugel herausgenommen ohne hinzusehen. Kann es geschehen, dass dabei die schwarze Kugel gegriffen wird? Es ist durchaus möglich, aber wenig wahrscheinlich.

Beispiel 2. Ein Mensch, der die russische Sprache nicht beherrscht, schreibt auf einer Maschine mit russischen Buchstaben.

Ist es möglich, dass er dabei Puschkins Erzählung "Die Hauptmannstochter" schreibt? Offenbar ist das nicht absolut unmöglich. Jedoch dürfte es schwerlich jemand als reale Möglichkeit ansehen. (Es können ja auch zwei Prüfungsaufsätze von Schülern rein zufällig wörtlich übereinstimmen. In der Regel sieht man jedoch diese Tatsache mit vollem Recht als Beweis dafür an, dass einer der Aufsätze abgeschrieben ist.)

Beispiel 3. Nach der kinetischen Gastheorie besteht die Luft aus einer Menge von Molekülen, die sich in ungeordneter Bewegung befinden.

Es besteht fast keine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Molekülen; daher beeinflusst die Lage eines Moleküls im Raum die Lage der anderen Moleküle nicht.

Wir denken uns das Volumen des Zimmers, in dem wir uns befinden, in eine obere und eine untere Hälfte geteilt. Es ist nicht ausgeschlossen (dies folgt aus der kinetischen Gastheorie), dass alle im Zimmer befindlichen Moleküle der Luft in die obere Hälfte gelangen und dadurch alle im Zimmer Anwesenden ersticken.

Diese Schlussfolgerung erscheint uns absurd. Bedeutet das aber etwa, dass die kinetische Gastheorie falsch ist?

Hoffentlich zieht der Leser nach den besprochenen Beispielen diesen Schluss nicht. Die Erscheinung, die wir uns eben vorgestellt haben, ist zwar nicht absolut unmöglich; man kann sie jedoch als praktisch unmöglich ansehen. Der Grund dafür ist wesentlich klarer als im vorigen Beispiel. Im Zimmer befinden sich ja unvergleichlich viel mehr Moleküle als die Erzählung "Die Hauptmannstochter" einzelne Buchstaben hat.

Somit können wir mit vollem Recht ein unwahrscheinliches Ereignis als praktisch unmöglich ansehen. Außerdem gibt es verschiedene Grade der Unwahrscheinlichkeit. Die Unwahrscheinlichkeit des zweiten Beispiels ist bedeutend größer als die des ersten, und die Unwahrscheinlichkeit des dritten Beispiels ist viel größer als die des zweiten.

Kehren wir wieder zu unserer Aufgabe zurück, die wir nun neu formulieren: Welche Grenze kann für die Spieldauer angegeben werden, wenn die Abweichung (der geschätzten von der tatsächlichen Dauer) in demselben Maße praktisch unmöglich sein soll wie bei den Ereignissen unserer Beispiele?

Wie man diese und andere derartige Aufgaben löst, wird dem Leser beim Durcharbeiten dieses III. Teils klar werden. Wir bringen hier nur die Antwort.

Wenn gesagt wird, dass das Spiel nach höchstens 200 Würfeln endet, so ist der Fehler annähernd gleich der Unwahrscheinlichkeit des ersten Beispiels. Wird die Zahl der Würfe auf höchstens 30 Millionen geschätzt, so ist ein Irrtum genau so unmöglich wie das Ereignis im zweiten Beispiel; nimmt man die Zahl der Würfe höchstens gleich 10^{25} an, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers dieselbe wie die des Ereignisses im dritten Beispiel.

1 Grundlegende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

Als erstes lernen wir, eine Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Wir stellen uns zwei Urnen vor; in jeder mögen 100 Kugeln liegen. In der ersten Urne sei eine Kugel weiß, die restlichen 99 schwarz. In der zweiten Urne seien 10 weiße und 90 schwarze Kugeln. Aus welcher Urne wird man mit der größeren Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel herausgreifen?³

Der Leser wird ohne zu zaudern antworten: aus der zweiten. Wenn wir fragen, wievielmals diese Wahrscheinlichkeit größer ist, so wird der Leser sicherlich antworten, dass sie zehn Mal größer sei.

Wir stellen uns nun noch eine dritte Urne vor, in der alle 100 Kugeln weiß sind. Ähnlich wie früher schließen wir, dass aus der dritten Urne eine weiße Kugel mit einer hundertmal größeren Wahrscheinlichkeit gezogen wird als aus der ersten. Die Kugel, die aus der dritten Urne herausgenommen wird, wird sicher eine weiße Kugel sein.

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses mit 1 bezeichnen, so folgt aus dem Gesagten, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der eine weiße Kugel aus der ersten Urne gezogen wird, gleich $\frac{1}{100}$, und die Wahrscheinlichkeit, mit der eine weiße Kugel aus der zweiten Urne gezogen wird, gleich $\frac{10}{100}$ ist.

Wir betrachten den allgemeinen Fall, in dem die Urne n Kugeln enthält, von denen m weiß sind. Aus den gleichen Überlegungen wie oben können wir folgern, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der eine weiße Kugel aus der Urne gezogen wird, gleich $\frac{m}{n}$ ist. Das Urnenschema ist deshalb so zweckmäßig, weil sich viele Aufgaben darauf zurückführen lassen.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Wurf einer Münze das Wappen oben liegt?

Wir betrachten dazu eine Urne mit einer weißen und einer schwarzen Kugel. Die weiße Kugel entspreche dem Wappen, die schwarze der Zahl. Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeit, mit der nach dem Wurf das Wappen oben liegt, gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der man die weiße Kugel aus unserer Urne zieht, also gleich $\frac{1}{2}$.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit einem Würfel eine Fünf würfelt?

Als Analogon betrachten wir in einer Urne 6 Kugeln, von denen eine weiß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die weiße Kugel gezogen wird? Antwort: $\frac{1}{6}$.

Beispiel 3. Aus einer Schachtel mit Dominosteinen wird ein Stein gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einer Hälfte dieses Steines sechs Augen sind?

Wir betrachten dazu eine Urne mit 28 Kugeln, von denen 7 (die den 7 Dominosteinen entsprechen, die auf einer ihrer Hälften sechs Augen haben) weiß sind. Die Wahrschein-

³Dabei wird vorausgesetzt, dass die Kugeln in den Urnen vollkommen einheitlich und gut gemischt sind und dass beim Herausholen nicht hingesehen wird; man hat dann in der Tat für des Herausgreifen irgendeiner Kugel die gleiche Möglichkeit.

lichkeit dafür, dass ein Dominostein der gewünschten Art gezogen wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der eine weiße Kugel aus der Urne genommen wird, nämlich gleich $\frac{7}{28}$.

Beispiel 4. In einer Urne liegen 5 rote, 7 blaue und 13 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rote oder eine blaue Kugel herausgenommen wird?

Wir färben die roten und blauen Kugeln weiß oder betrachten eine andere Urne, in der sich $5 + 7 = 12$ weiße und 13 schwarze Kugeln befinden. Die Wahrscheinlichkeit, mit der aus der ersten Urne eine rote oder blaue Kugel gezogen wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, mit der aus der zweiten Urne eine weiße Kugel genommen wird, d.h. gleich $\frac{12}{25}$.

Es möge allgemein ein Versuch n gleichmögliche Ergebnisse haben, von denen m ein günstiges Ereignis A , die restlichen jedoch ein ungünstiges Ereignis liefern. Jeder solche Versuch ist äquivalent dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne, die n Kugeln enthält, von denen m weiß und die restlichen schwarz sind.

Das Eintreten des Ereignisses A hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, mit der weiße Kugeln aus der Urne gezogen werden, nämlich $\frac{m}{n}$.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gleich dem Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl aller möglichen Fälle. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit $P(A)$ bezeichnet.

Wir formulieren nun folgende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit:

Eigenschaft 1. Folgt aus dem Ereignis A das Ereignis B , d.h., zieht das Eintreten des Ereignisses A das Eintreten des Ereignisses B nach sich (oder: Tritt immer dann, wenn das Ereignis A eintritt, das Ereignis B erst recht ein), so ist

$$P(A) \leq P(B)$$

Eigenschaft 2. Sind die Ereignisse A und B unvereinbar (unverträglich) (d.h., ist es unmöglich, dass sowohl A als auch B eintritt, also $A \cap B = \emptyset$), so ist

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

wobei unter $A \cup B$ das Ereignis verstanden wird, das darin besteht, dass eines der Ereignisse A oder B eintritt.

Eigenschaft 3. Sind die Ereignisse A und B entgegengesetzt zueinander, d.h., ist das Eintreten von A gleichbedeutend mit dem Nichteintreten von B , so ist

$$P(A) + P(B) = 1 \quad (2)$$

Eigenschaft 4. Ist das Ereignis A gewiss (sicher), d.h., tritt es bestimmt ein, so bezeichnen wir es mit S . Es ist

$$P(S) = 1$$

Eigenschaft 5. Ist das Ereignis A unmöglich, d.h., kann es keinesfalls eintreten, so bezeichnen wir es mit \emptyset . Es ist

$$P(\emptyset) = 0$$

Es ist nicht schwer, diese Eigenschaften aus der Betrachtung des Urnenschemas zu erhalten; der Leser möge sie selbst ableiten.⁴ Wir wollen nur einige Definitionen erläutern: Ein Beispiel für unvereinbare Ereignisse ist das Ziehen einer blauen und das Ziehen einer roten Kugel (wenn nur eine Kugel aus der Urne gezogen wird); ein Beispiel für entgegengesetzte Ereignisse gibt das Werfen einer Münze, wobei nach dem Wurf entweder das Wappen oder die Zahl oben liegt.

Ein sicheres Ereignis ist das Herausnehmen einer weißen Kugel aus einer Urne, die nur weiße Kugeln enthält; ein unmögliches Ereignis wäre dann, aus dieser Urne eine schwarze Kugel zu ziehen.

Obgleich sich viele Aufgaben auf das Urnenschema zurückführen lassen, gibt es viele (und darunter die interessantesten), die sich nicht auf dieses Schema zurückführen lassen. Jedoch bleiben die Eigenschaften 1-5 der Wahrscheinlichkeit auch für diese Klasse von Aufgaben erhalten.

1.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit. Unabhängige Ereignisse

Wir wollen nun die sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeit kennenlernen; zunächst betrachten wir einige Beispiele.

In der Pause versammeln sich Schüler der ersten und der zweiten Klasse auf dem Hof zum Spielen. Am Spiel nehmen 11 Schüler der ersten Klasse teil, und zwar 8 Jungen und 3 Mädchen, sowie 6 Schüler der zweiten Klasse, von denen 2 Jungen und 4 Mädchen sind. Durch das Los wird bestimmt, wer beginnt?⁵

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Los dabei auf einen Schüler der ersten Klasse fällt?

Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss die Zahl der Schüler aus der ersten Klasse durch die Zahl aller Spieler dividiert werden. Das Resultat ist gleich $\frac{11}{17}$.

Wir nehmen nun an, uns sei bekannt, dass das Spiel von einem Jungen eröffnet wird, und fragen, welchen Einfluss dies auf die uns interessierende Wahrscheinlichkeit hat. Wir untersuchen also, wie groß jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Spiel von einem Angehörigen der ersten Klasse eröffnet wird.

Alle 10 Jungen, die am Spiel teilnehmen, können mit der gleichen Wahrscheinlichkeit beginnen. Von diesen 10 Jungen sind 8 Schüler der ersten Klasse. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Angehöriger der ersten Klasse beginnt, in diesem Fall

⁴Wir bemerken, dass wir die Eigenschaft 2 faktisch schon in Beispiel 4 bewiesen haben. Hier heißt A : "Es wird eine rote Kugel gezogen", B : "Es wird eine blaue Kugel gezogen" und $A \cup B$: "Es wird eine rote oder eine blaue Kugel gezogen".

⁵Die Auslosung muss gewährleisten, dass für alle Teilnehmer des Spiels die Wahrscheinlichkeit, mit dem Spiel zu beginnen, die gleiche ist. Unter den möglichen Formen des Auslosens ist; diejenige die beste, bei der diese Gleichwahrscheinlichkeit mit größter Genauigkeit verwirklicht wird.

gleich $\frac{8}{10}$. Wir sehen, dass sich die Größe der Wahrscheinlichkeit geändert hat.

Wir erhielten die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Angehöriger der ersten Klasse beginnt, unter der Bedingung, dass das Spiel von einem Jungen eröffnet wird.

1. Man berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Angehöriger der ersten Klasse beginnt, unter der Bedingung, dass das Spiel von einem Mädchen eröffnet wird.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist, wird mit $P(B|A)$ bezeichnet. In unserem Beispiel bedeutet B den "Spielbeginn durch einen Angehörigen der ersten Klasse" und A , dass "ein Junge" beginnt.

Wie wir berechneten, ist $P(B) = \frac{11}{17}$ und $P(B|A) = \frac{8}{10}$. Folglich ist in unserem Fall $P(B|A) \neq P(B)$. Das Eintreten des Ereignisses A hat also wesentlichen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B .

Zu den oben aufgezählten fünf Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit fügen wir noch eine weitere hinzu.

Eigenschaft 6. Es gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (3)$$

wobei unter $A \cap B$ das Ereignis verstanden wird, das darin besteht, dass sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt.

Diese Eigenschaft werden wir aus dem schon betrachteten Beispiel der spielenden Kinder ableiten, in dem der Beginnende durch das Los bestimmt wird.

Das Ereignis A bedeute wieder: "Ein Junge beginnt" und B : "Es beginnt ein Angehöriger der ersten Klasse". In diesem Fall bedeutet $A \cap B$: "Ein Junge aus der ersten Klasse beginnt".

Von den 17 möglichen Ergebnissen kann 8 mal das Ereignis $A \cap B$ eintreten (8 Jungen sind Schüler der ersten Klasse); das Ereignis A kann 10 mal eintreten. Daher ist $P(A \cap B) = \frac{8}{17}$ und $P(A) = \frac{10}{17}$. Wie schon berechnet, ist $P(B|A) = \frac{8}{10}$. Wir haben also

$$\frac{8}{17} = \frac{10}{17} \cdot \frac{8}{10} \quad \text{d.h.} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig, so ist das Eintreten oder Ausbleiben des Ereignisses A ohne Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B ; daher ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ des Ereignisses B unter der Bedingung A gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit $P(B)$:

$$P(B|A) = P(B)$$

In diesem Fall erhält die Formel (3) die Gestalt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

und wir erhalten die

Eigenschaft 6a. Sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig, so ist

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (4)$$

Beispiel. Zeigt sich bei zweimaligem Werfen einer Münze beide Male das Wappen, so sind das unabhängige Ereignisse. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Werfen eine Münze beide Male das Wappen zeigt, gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass zwei Münzen nach einem Wurf die Wappen zeigen, d.h. $P(\text{"nach dem ersten Wurf liegt das Wappen oben"} \text{ und } \text{"nach dem zweiten Wurf liegt das Wappen oben"}) = P(\text{"nach dem ersten Wurf liegt das Wappen oben"}) \cdot P(\text{"nach dem zweiten Wurf liegt das Wappen oben"}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Die Gleichungen (1) und (4) - die Formeln für Addition und die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten - können leicht für den Fall verallgemeinert werden, dass die Anzahl der Ereignisse größer als 2 ist.

Gegeben seien n paarweise unabhängige Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n . Dann ist

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (5)$$

Wir beweisen diese Formel für $n = 3$. Das Ereignis A_3 , das sowohl mit A_1 als auch mit A_2 unvereinbar ist, ist offensichtlich auch unvereinbar mit $A_1 \cup A_2$. Nach Eigenschaft 2 folgt daraus

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \quad (5')$$

Da auch A_1 mit A_2 unvereinbar ist, gilt

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad (5'')$$

Aus (5') und (5'') folgt Formel (5) für den Fall $n = 3$; analog wird (5) für beliebiges n bewiesen.

Sind A_1 und A_2 voneinander unabhängig, desgleichen $A_1 \cap A_2$ und A_3 so gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Sind allgemein A_1 und A_2 unabhängig voneinander, desgleichen $A_1 \cap A_2$ und A_3 , $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ und A_4 , ..., $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}$ und A_n , so ist

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (6)$$

Zum Beispiel bestehe das Ereignis A_k darin, dass bei k -maligem Werfen einer Münze stets das Wappen oben liegt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Würfen das Wappen oben liegt, nach Formel (6)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n\text{-mal}} = \frac{1}{2^n}$$

Genauso drückt diese Zahl die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass nach n Würfen jedes mal die Zahl oben liegt, und allgemein, dass bei den Würfen eine vorgegebene

n -gliedrige Folge von Wappen und Zahl fällt.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei sechsmaligem Würfeln keine Sechs fällt?

3. Wir verstehen unter p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mit einem Schuss das Ziel getroffen wird. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von n Schüssen einer das Ziel trifft.

Wir erwähnten am Anfang dieses Abschnitts, dass wenig wahrscheinliche Ereignisse mit gutem Grund als praktisch unmöglich angesehen werden können, und dass es verschiedene Grade der Unwahrscheinlichkeit gibt. Wir wollen dies genauer fassen.

Benutzt man zum Studium einer Erscheinung die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so muss man jedesmal eine beliebig kleine Zahl ε wählen, die zulässige Wahrscheinlichkeit einer Abweichung (eines Irrtums).

Haben wir mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Verlauf der Erscheinung vorausgesagt, so müssen wir die Möglichkeit der Fehlerhaftigkeit unserer Voraussage zulassen und nur fordern, dass die Wahrscheinlichkeit dieses Irrtums nicht größer als ε ist.

Wir gehen dabei davon aus, dass alle Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit kleiner als ε ist, als praktisch unmöglich anzusehen sind, und alle Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \varepsilon$ ist, als praktisch sicher (gewiss) angenommen werden können.

Die Zahl ε nennt man auch den zulässigen Grad (oder die Größe) der Ungewissheit und die Zahl $1 - \varepsilon$ den geforderten Grad (oder die Größe) der Sicherheit (Gewissheit).

Selbstverständlich muss der Wert ε für jede einzelne Aufgabe in Abhängigkeit von den praktischen Forderungen an die Richtigkeit der Folgerungen gewählt werden. Häufig benutzte Werte sind 0,01; 0,005; 0,001; 0,0001.

Wir erklären das Gesagte an dem Beispiel der Anzahl der Schüsse, die zum einmaligen Treffen eines Zieles notwendig sind (siehe Aufgabe 3).

Die Wahrscheinlichkeit eines Treffers sei für jeden Schuss gleich 0,2. Wieviel Schüsse müssen abgegeben werden, um das Ziel einmal zu treffen?

Es ist klar, dass die Anzahl der Schüsse nicht mit absoluter Gewissheit angegeben werden kann. Es kann nämlich passieren, dass das Ziel bereits beim ersten Schuss getroffen wird; gleichzeitig ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass nach 100 oder 200 Schüssen noch keiner das Ziel getroffen hat.

Folglich werden wir nicht nach der absoluten Sicherheit suchen, sondern einen zulässigen Grad ε der Ungewissheit einführen. Es erscheint praktisch durchaus annehmbar, den Wert ε beispielsweise gleich 0,001 zu setzen.

Die Aussage, das Ziel sei nach n Schüssen getroffen, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - 0,2)^n = (0,8)^n$ falsch.

Wir wählen nun n so, dass

$$(0,8)^n < 0,001$$

ist. Der kleinste Wert n , der diese Ungleichung befriedigt, ist 31 (er ist leicht mit Hilfe einer Logarithmentafel zu berechnen).

Folglich ist die Aussage, das Ziel sei nach 31 Schüssen einmal getroffen, nur mit einer Wahrscheinlichkeit, welche die zulässige Grenze 0,001 nicht übertrifft, falsch. Demnach können wir unter unseren Anforderungen an den Grad der Gewissheit sagen, das Ziel sei nach 31 Schüssen mit praktischer Sicherheit getroffen.

Die so gefundene Zahl n der Schüsse ändert sich mit dem geforderten Grad der Gewissheit. In der nachstehenden Tabelle sind die Werte von n für verschiedene Grade der Gewissheit zusammengestellt:

ε	n
0,01	21
0,005	24
0,001	31
0,0001	42

Aufgabe. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei unbegrenzt langem Würfeln keine Sechs fällt.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B_n , dass nach n Würfeln keine Sechs gefallen ist. Bei der Lösung der Aufgabe 2 fanden wir $P(B_6) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Analog erhalten wir für beliebiges n (nach Formel (6))

$$P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Wir bezeichnen das uns interessierende Ereignis, dass bei unbegrenzt langem Würfeln keine Sechs auftritt, mit B . Wenn das Ereignis B eintritt, so treten erst recht alle Ereignisse $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ ein. Daher ist auf Grund der ersten Eigenschaft der Wahrscheinlichkeit

$$P(B) \leq P(B_1) = \frac{5}{6}, \quad P(B) \leq P(B_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^2, \quad \dots, \quad P(B) \leq P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n, \quad \dots$$

Die Zahlen $\frac{5}{6}, \left(\frac{5}{6}\right)^2, \dots, \left(\frac{5}{6}\right)^n, \dots$ sind die Glieder einer unendlichen fallenden geometrischen Progression und werden mit wachsendem n kleiner als jede beliebig vorgegebene positive Zahl.

Daher wird auch $P(B)$ kleiner als jede beliebige positive Zahl, d.h. $P(B) = 0$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei unbegrenzt langem Würfeln keine Sechs fällt, gleich Null.

Die Ereignisse, mit denen wir bisher gerechnet haben, waren entweder unmöglich oder, wenn sie möglich waren, hatten sie eine Wahrscheinlichkeit größer als Null.

Hier stoßen wir zum ersten Mal auf ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gleich Null ist und das trotzdem als logisch möglich erscheint. Dieses Resultat könnten wir nicht erhalten, wenn die Wahrscheinlichkeit unseres Ereignisses nach der Regel berechnet würde, die am Anfang dieses Kapitels aufgestellt wurde, nämlich als Verhältnis der

Zahl der günstigen Versuchsergebnisse zur Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse.

Das Resultat, das wir als Lösung der Aufgabe erhalten haben, kann folgendermaßen gedeutet werden. Wie hoch wir auch den Grad der Gewissheit wünschen, es kann eine Anzahl von Würfeln angegeben werden, unter denen die Sechs mit dieser Gewissheit mindestens einmal fällt⁶. Darin besteht gerade der reale Sinn der Aussage, dass bei unbegrenzt langem Würfeln die Sechs mit der Wahrscheinlichkeit 1 fällt.

1.2 Die Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit

Ein System von Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n heißt vollständig, wenn eines der Ereignisse unbedingt eintritt (mit anderen Worten, wenn das Ereignis $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ gewiss ist). Bilden die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n ein vollständiges System und sind sie paarweise unabhängig, so gilt

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (7)$$

(dies folgt aus Formel (5) und der Eigenschaft 4).

Eigenschaft 7 (Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit).

Gegeben sei ein vollständiges System von paarweise unvereinbaren Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n . Dann kann die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses B nach der Formel

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \quad (8)$$

berechnet werden.

Zum Beweis sei bemerkt: Da eines der Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n eintritt, ist das Eintreten des Ereignisses B dem Eintreten eines der Ereignisse $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$ äquivalent. Daher ist

$$P(B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B))$$

Da die Ereignisse $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ paarweise unvereinbar sind (weil A_1, A_2, \dots, A_n paarweise unvereinbar sind), ist nach Formel (5)

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Unter Benutzung von Eigenschaft 6 erhalten wir

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Nach dieser Formel berechnen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Spiel, das wir beschrieben haben, ein Angehöriger der ersten Klasse beginnt. Hier bedeutet B ,

⁶In der Tat, wenn wir sagen, unter n Würfeln falle eine Sechs, so können wir uns mit einer Wahrscheinlichkeit $(\frac{5}{6})^n$ irren. Für hinreichend großes n kann die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums beliebig klein gemacht werden.

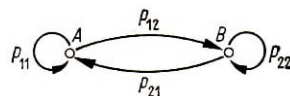
dass ein Angehöriger der ersten Klasse, A_1 , dass ein Junge anfängt, und A_2 , dass ein Mädchen beginnt. Wir erhalten

$$P(A_1) = \frac{10}{17}, \quad P(A_2) = \frac{7}{17}, \quad P(B|A_1) = \frac{8}{10}, \quad P(B|A_2) = \frac{3}{7}$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{10}{17} \cdot \frac{8}{10} + \frac{7}{17} \cdot \frac{3}{7} = \frac{11}{17}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem schon berechneten überein.

4. Zwei Spieler werfen abwechselnd eine Münze, und zwar soll derjenige gewinnen, bei dem zuerst das Wappen oben liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Beginnende gewinnt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der andere Spieler gewinnt?



5. Ein Teilchen, das sich in Punkt A (Abb. 4) befindet, kann nach einer Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit p_{11} in A geblieben oder mit der Wahrscheinlichkeit p_{12} zu Punkt B hinübergewandert sein.

Befindet es sich in B , so kann es nach einer Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit p_{22} in B geblieben oder mit der Wahrscheinlichkeit p_{21} zu Punkt A gewandert sein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen nach n Schritten im Punkte A ist, wenn es sich im Anfangsmoment

- in Punkt A ,
- in Punkt B befand?

Auf das Schema in Abb. 4 können viele verschiedene Erscheinungen zurückgeführt werden.

Dem Beispiel des bedeutenden russischen Mathematikers A.A. Markoff folgend betrachten wir die ersten 20000 Buchstaben des Poems "Eugen Onegin" ⁷. Unsere Figur befinde sich im Punkt A , wenn der Buchstabe ein Vokal, und im Punkte B , wenn der Buchstabe ein Konsonant ist.

Die Aufeinanderfolge von Vokal und Konsonant wird durch Bewegungen der Figur im Schema der Abb. 4 dargestellt.

Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der auf einen Vokal folgende Buchstabe ein Konsonant ist, größer, als dass dieser Buchstabe wieder ein Vokal ist. Tatsächlich zeigen die Auszählungen Markoffs, dass die Wahrscheinlichkeit p_{12} für das Auftreten eines Konsonanten unter der Bedingung, dass der vorhergehende Buchstabe ein Vokal war, annähernd gleich 0,872 ist, so dass die Wahrscheinlichkeit p_{11} für das Auftreten eines Vokals unter der gleichen Bedingung etwa 0,128 ist. Genauso wurde gezeigt, dass $p_{21} \approx 0,663$ und $p_{22} \approx 0,337$ ist.

Analoge Zählungen, die an den ersten 100000 Buchstaben von Aksakows Erzählung

⁷ohne russische Sonderzeichen

"Die Kindheit von Bagrows Enkel" vorgenommen wurden, ergaben ein etwas anderes Resultat:

$$p_{11} \approx 0,147; \quad p_{21} \approx 0,695; \quad p_{12} \approx 0,853; \quad p_{22} \approx 0,305$$

Dem gleichen Schema lassen sich (mit gewissen Einschränkungen) auch einige meteorologische Erscheinungen, beispielsweise die Aufeinanderfolge von klaren und bewölkten Tagen, unterordnen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einen bewölkten Tag wieder ein bewölkter folgt, ist größer als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der folgende Tag klar ist; die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen klaren Tag ein klarer folgt, ist größer, als die, dass es ein bewölkter ist.

Die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem klaren Tag zu einem bewölkten, von einem bewölkten zu einem klaren usw. (diesem Übergang entspricht eine Verschiebung der Figur in Aufgabe 5) erweist sich für bestimmte Gegenden und Jahreszeiten als annähernd konstant und kann aus Beobachtungen errechnet werden.

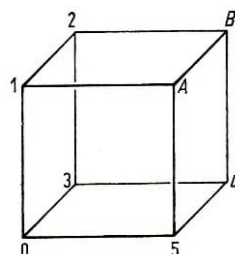
6. In einem Zimmer stehen zwei äußerlich gleiche Urnen. In der linken seien a , in der rechten b Kugeln enthalten. In das Zimmer kommen der Reihe nach einige Leute, die entweder eine Kugel aus der rechten Urne in die linke oder eine Kugel aus der linken Urne in die rechte legen.

Es wird vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Kugel aus der rechten Urne in die linke gelegt wird, genauso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kugel aus der linken Urne in die rechte gelegt wird, nämlich gleich $\frac{1}{2}$.

Der Versuch dauert so lange, bis eine der beiden Urnen leer ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die linke Urne leer wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die rechte Urne leer wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Versuch nicht endet?

7. Auf den Kanten eines Drahtwürfels (Abb. 5) kriecht eine Raupe.

Beim Passieren einer Ecke kriecht sie mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auf jeder der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen, weiter. Die Punkte A und B sind mit Leim bestrichen. Die Raupe kriecht von dem Punkt 0 aus.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie am Punkte A festklebt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie am Punkte B festklebt?

2 Aufgaben über die Irrfahrt auf der unendlichen Geraden

2.1 Das Dreieck der Wahrscheinlichkeiten

Wir kennzeichnen auf der Geraden die Punkte $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ und führen folgenden Versuch aus:

Auf den Punkt 0 stellen wir eine Figur und werfen eine Münze. Liegt das Wappen oben, so setzen wir die Figur um einen Teilstrich nach links, liegt die Zahl oben, so setzen wir die Figur um einen Teilstrich nach rechts.

Nun werfen wir die Münze zum zweiten Male, zum dritten Male usw. und setzen jedesmal die Figur entsprechend dem Resultat des Wurfes.

Man kann annehmen, dass die beiden Möglichkeiten eines Wurfes die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und aus diesem Grund ist bei jedem Wurf die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur nach links bewegt wird, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass die Figur nach rechts bewegt wird, nämlich gleich $1/2$.

2.2 Das Bildungsgesetz des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten

Offensichtlich befindet sich die Figur nach dem ersten Wurf auf dem Punkt -1 oder 1 , nach dem zweiten Wurf auf einem der Punkte $-2, 0$ oder 2 , nach dem dritten auf $-3, -1, 1, 3$ usw.

Ein anschauliches Bild der möglichen Standorte der Figur in jedem Spielmoment gibt das in Abb. 6 dargestellte Schema.

Die Punkte, die in diesem Schema abgebildet sind, bilden ein Dreieck (dieses Dreieck kann nach unten unbegrenzt fortgesetzt werden). Die Spitze des Dreieckes steht, entsprechend der Tatsache, dass 0 die Anfangsstellung unserer Figur war, unter der Zahl 0.

Die erste Zeile des Dreieckes besteht aus zwei Punkten. Die über diesen Punkten stehenden Zahlen -1 und 1 zeigen, wo die Figur nach dem ersten Wurf stehen kann. Die folgende Zeile zeigt, wo die Figur nach dem zweiten Wurf stehen kann, usw.

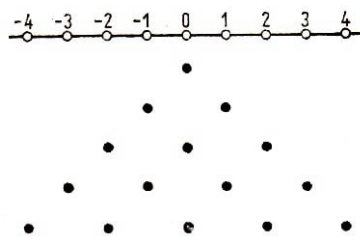


Abb. 6

Das in Abb. 6 dargestellte Schema zeigt alle möglichen Stellungen der Figur, jedoch sind von diesen einige mehr, andere weniger wahrscheinlich. Wir versuchen, diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Am Anfang befindet sich die Figur mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Punkte 0. Nachdem die Münze das erste Mal geworfen wurde, befindet sich die Figur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in jedem der Punkte -1 und 1 . Nach dem zweiten Wurf kann man folgende Resultate erhalten:

Wappen-Wappen, Wappen-Zahl, Zahl-Wappen, Zahl-Zahl.

Diese vier Ergebnisse sind alle gleichwahrscheinlich, und folglich hat jedes die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Gemäß dem ersten Ergebnis befindet sich die Figur im Punkt -2 , nach dem zweiten und dritten in 0 und nach dem vierten im Punkt $+2$. Daher befindet sich nach den ersten beiden Würfeln die Figur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ im Punkt -2 , mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{4}$ im Punkt 0 und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ im Punkt $+2$.

Analog kann die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Stellung der Figur nach dem dritten, vierten, ... Wurf berechnet werden. Setzt man in jeden Punkt des Schemas die entsprechende Wahrscheinlichkeit ein, so erhält man das in Abb. 7 dargestellte Zahlendreieck.

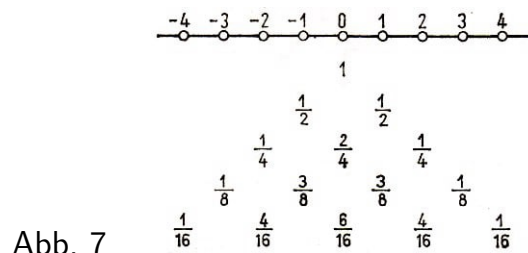


Abb. 7

Dieses Zahlendreieck (wir werden es als Dreieck der Wahrscheinlichkeiten bezeichnen) besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft: Jede seiner Zahlen ist gleich der halben Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen.

Diese Eigenschaft lässt sich für alle Zahlen, die in Abb. 7 dargestellt sind, leicht nachprüfen. Es ist jedoch klar, dass diese Probe noch nicht beweist, dass diese Eigenschaften bei beliebiger Fortsetzung unseres Dreieckes erhalten bleiben.

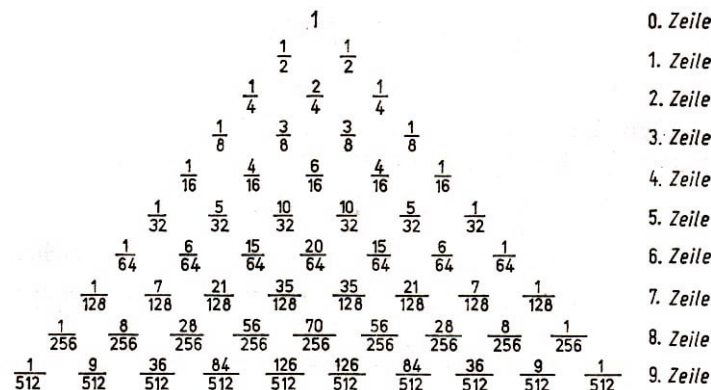


Abb. 8

8. Man beweise mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit (Eigenschaft 7), dass

$$Z_n^k = \frac{1}{2} (Z_{n-1}^{k-1} + Z_{n-1}^{k+1})$$

ist, wobei Z_n^k die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, dass sich im Zeitpunkt n die Figur im Punkt k befindet.

Mit Hilfe der "Regel der Halbsumme" lässt sich leicht das Dreieck der Wahrscheinlichkeiten fortsetzen. In Abb. 8 sind die ersten neun Zeilen des Dreieckes der Wahrscheinlichkeiten aufgeschrieben (wobei die nullte Zeile, die Spitze des Dreiecks, nicht

mitgezählt ist).

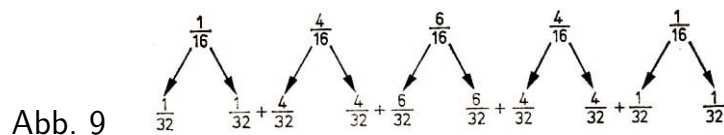
Die Berechnung des weiteren Verlaufes (so wie dies bereits mit den ersten vier Zeilen geschah) ist leicht.

9. Man beweise, dass die Summe der Elemente einer Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten gleich Eins ist.

Wir bemerken, dass die "Regel der Halbsumme" der folgenden "Halbierungsregel" äquivalent ist. Wir betrachten eine beliebige Zeile des Dreiecks, halbieren jede Zahl dieser Zeile und setzen eine Hälfte rechts, die andere links unter die entsprechende Zahl (siehe Abb. 9, in der dies an der vierten Zeile ausgeführt ist). Addieren wir nun die Zahlen, die auf demselben Punkt stehen, so erhalten wir die nächste Zeile des Dreiecks.

Wir stellen uns nun vor, dass sich zur Anfangszeit im Punkte 0 die Einheitsmasse befindet, die sich im Verlaufe einer Sekunde halbiert, so dass die eine Hälfte nach links unten, die andere nach rechts unten fällt. Im Verlauf der zweiten Sekunde teilen sich wiederum diese Hälften in je zwei gleiche Teile, von denen einer nach rechts unten, der andere nach links unten fällt, usw.

Es ist klar, dass die Summe der Massen, die sich nach n Sekunden im Punkte k befinden, gleich der Zahl unseres Zahlendreiecks ist, die auf dem k -ten Platz der n -ten Zeile steht. Dieser Zusammenhang zwischen dem Problem der zufälligen Bewegung einer Figur und der Aufgabe der Verteilung einer zerfallenden Masse ist bei der Lösung einer Reihe von Aufgaben⁸ sehr nützlich.



Wird die erste Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten mit 2, die zweite mit 2^2 , die dritte mit 2^3 , ..., die n -te mit 2^n multipliziert, so erhält man ein Dreieck, das nur aus ganzen Zahlen besteht. Der Leser kann leicht nachprüfen, dass in diesem neuen Dreieck jede Zahl gleich der Summe der beiden über ihr stehenden Zahlen ist. Dieses Dreieck heißt Pascalsches Dreieck. Wir verweisen auf Teil B, Kap. 3.2.

Wir dividieren im Dreieck der Wahrscheinlichkeiten jedes Element durch seinen linken Nachbarn. Dabei existieren für die Elemente auf dem linken Rand des Dreiecks keine links benachbarten. Wir wollen diese Elemente ausschließen und erhalten so das in Abb. 10 dargestellte Dreieck.

Das Gesetz, nach dem sich dieses Dreieck aufbaut, ist leicht zu erkennen.

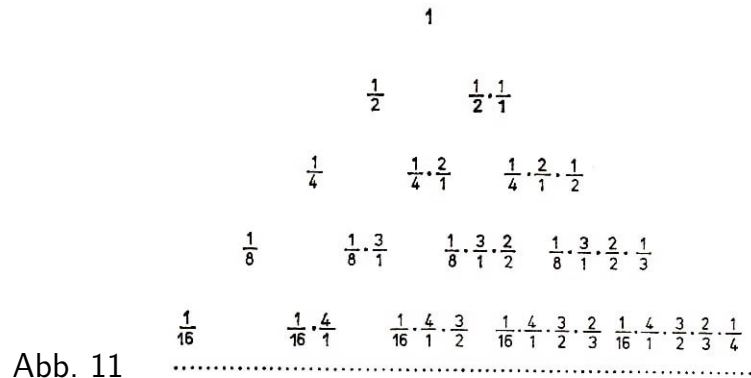
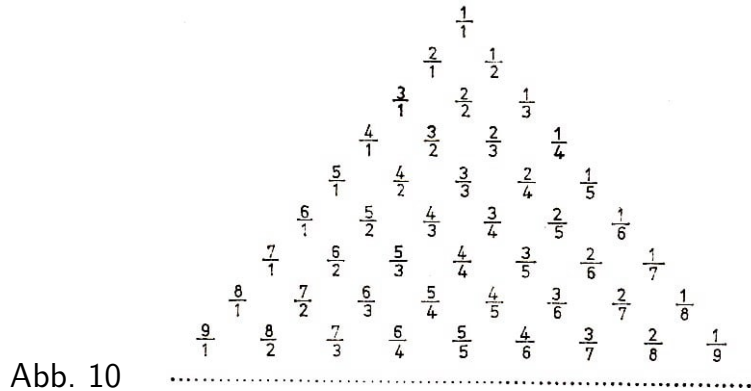
In der n -ten Zeile durchlaufen die Nenner der Brüche alle Zahlen von 1 bis n und die Zähler die Zahlen von n bis 1. Wir überlassen es dem Leser, dieses Gesetz mit Hilfe von Formel (1) nachzuprüfen.

⁸Ein analoges Schema wurde in einer der Aufgaben zur VIII. Moskauer Mathematischen Olympiade betrachtet. Diese Aufgabe handelte von 2^n Menschen, die von der Spitze des Dreiecks in Abb. 6 losgehen, wobei eine Hälfte von ihnen nach links unten, die andere Hälfte nach rechts unten gehen. In jedem Punkt gehen sie wieder nach der "Halbierungsregel" weiter. Gefragt war, wieviel Leute in jedem Punkt der n -ten Zeile ankommen.

Aus dem Quotientendreieck lässt sich leicht das Dreieck der Wahrscheinlichkeiten zurückgewinnen. Wir beginnen die n -te Zeile mit der Zahl $\frac{1}{2^n}$ und bauen sodann alle Elemente dieser Zeile nacheinander auf, indem wir das schon erhaltene Element mit dem entsprechenden Element aus der n -ten Zeile des Quotientendreiecks multiplizieren. Das Dreieck der Wahrscheinlichkeiten erhalten wir dann in der in Abb. 11 wiedergegebenen Form. Hieraus ist ersichtlich, dass das k -te Element der n -ten Zeile gleich

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} \quad (2)$$

ist.



2.3 Zentrale Elemente des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten

Wir interessieren uns besonders für die zentralen Elemente des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten, d.h. für die Elemente, die auf der Symmetrieachse des Dreiecks stehen. Diese Elemente befinden sich nur auf Zeilen, mit geraden Nummern.

Das zentrale Element Z_{2k}^0 , das auf der $2k$ -ten Zeile steht, bedeutet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass sich die Figur nach $2k$ Schritten wieder auf dem Ausgangsfeld befindet. Wir bezeichnen sie mit w_{2k} , so dass

$$w_0 = 1, w_2 = \frac{2}{4}, w_4 = \frac{6}{16}, w_6 = \frac{20}{64}, w_8 = \frac{70}{256}, \dots$$

oder nach Abb. 11

$$w_0 = 1, w_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1}, w_4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2}, \dots$$

gilt. Benutzen wir den allgemeinen Ausdruck (2) und die Tatsache, dass die $2k$ -te Zeile aus $2k + 1$ Zahlen besteht, von denen k rechts und k links des mittleren Gliedes stehen, so kommen wir zu der Formel

$$w_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{2k}{1} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k} \quad (3)$$

Hiernach lässt sich der Wert von w_{2k} leicht berechnen, solange k nicht zu groß wird. Nimmt k sehr große Werte an, so ist die Berechnung dieser Brüche sehr schwierig. (Man versuche beispielsweise w_{10000} zu berechnen!)

Man kann große Werte von w_{2k} mit Hilfe der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{4k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

abschätzen. Zum Beweis dieser Ungleichung wandeln wir zuerst die Formel (3) um:

$$\begin{aligned} w_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{2k}{1} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{2k}{1} \cdot \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{k-1}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{k} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k}{k} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \end{aligned}$$

Wir schreiben nun die Produkte

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1}, \quad (7)$$

untereinander auf und können leicht feststellen, dass von je drei Zahlen einer Spalte die zweite mindestens gleich der ersten und die dritte mindestens gleich der zweiten ist. Daher hat (5) den kleinsten und (6) den größten Wert. Das mittlere Produkt ist jedoch gleich

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 w_{2k}^2$$

das obere nach Kürzen gleich $\frac{1}{4k}$ und das untere gleich $\frac{1}{2k+1}$. Danach ist

$$\frac{1}{4k} \leq w_{2k}^2 < \frac{1}{2k+1}$$

Erst recht gilt dann

$$\frac{1}{4k} \leq w_{2k}^2 < \frac{1}{2k}$$

oder, wenn wir die Quadratwurzel ziehen,

$$\frac{1}{\sqrt{4k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

was zu beweisen war.

Mit der gleichen Methode können noch genauere Abschätzungen für w_{2k} gefunden werden.

10. Man beweise, dass für alle $k \geq 2$ die Ungleichung

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2k}} \leq w_{2k} < \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}} \quad (8)$$

für alle Werte $k \geq 3$

$$\sqrt{5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2k}} \leq w_{2k} < \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}} \quad (9)$$

und allgemein

$$\sqrt{(2a-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2}\right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{1}{2k}} \leq w_{2k} < \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}} \quad (10)$$

für alle Werte k mit $k \geq a$ gilt.

Hinweis. Man ändere in jedem der Produkte (5) und (7) die Anfangsglieder derart, dass sie mit den Anfangsgliedern des Produktes (6) übereinstimmen.

Die Aufgabe 10 liefert eine Folge immer schärfer werdender Abschätzungen für w_{2k} als Maß der Genauigkeit kann das Verhältnis der unteren Schranke zur oberen dienen, das in der Abschätzung (4) gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$, in der Abschätzung (8) gleich $\sqrt{\frac{3}{4}}$, in der Abschätzung (9) gleich $\sqrt{\frac{5}{6}}$ und in der Abschätzung (10) gleich $\sqrt{1 - \frac{1}{2s}}$ ist, sich demnach also mehr und mehr der Eins nähert. Werden die Produkte in den Ungleichungen (8) und (9) ausgerechnet, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{3,56k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2,66k}} \quad (\text{für } k \geq 2) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3,42k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2,84k}} \quad (\text{für } k \geq 3) \quad (12)$$

Setzt man weiterhin in die allgemeine Ungleichung (10) die Werte $a = 4, 5, 60, 150$ ein,

so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{3,35k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2,92k}} \quad (\text{für } k \geq 4) \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3,31k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2,98k}} \quad (\text{für } k \geq 5) \quad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3,18k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3,10k}} \quad (\text{für } k \geq 60) \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3,15k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3,14k}} \quad (\text{für } k \geq 150) \quad (16)$$

Die Zahlenfaktoren von k nehmen im linken Teil der Ungleichungen ständig ab, im rechten Teil jedoch zu. Man kann streng beweisen (wir werden hier von diesem Beweis absehen), dass sich diese beiden Folgen ein und demselben Grenzwert nähern und dass dieser Grenzwert die bekannte Zahl π ist (das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser).

Daher kann w_{2k} für große Werte von $2K$ nach der folgenden Näherungsformel berechnet werden:

$$w_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad (17)$$

Man kann beweisen (der Leser möge dies selbst nachprüfen), dass diese Formel bereits von $k = 25$ an zwei richtige Dezimalen liefert; für weiter wachsendes k wird die Genauigkeit immer größer.

11. Man berechne w_{10000} bis zur zweiten Dezimale.

Im Dreieck der Wahrscheinlichkeiten wachsen die Zahlen vom Rande zur Mitte zu. Daher ist es unter Benutzung der Ungleichung (4) nicht schwer, die obere Grenze der Zahlen in der n -ten Zeile zu finden.

12. Man beweise, dass alle Elemente der n -ten Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten nicht größer als $1/\sqrt{n}$ sind.

2.4 Abschätzung beliebiger Elemente des Dreiecks

Nachdem wir so erfolgreich die Näherungsformel für die zentralen Glieder des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten gefunden haben, wird man naturgemäß versuchen, eine genauso bequeme Formel für die übrigen zu finden.

Wir betrachten die $2k$ -te Zeile. Das mittlere Glied dieser Zeile bezeichnen wir mit v_0 (oben hatten wir es mit w_{2k} bezeichnet) und nummerieren von diesem Glied an alle rechts stehenden Glieder dieser Zeile mit

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}, v_k$$

Nun lauten die Elemente der rechten Seite der $2k$ -ten Zeile des Quotientendreiecks

$$\frac{k}{k+1}, \frac{k-1}{k+2}, \dots, \frac{2}{2k-1}, \frac{1}{2k}$$

Nach Definition des Quotientendreiecks gilt

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{k}{k+1}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{k-1}{k+2}, \dots, \frac{v_{k-1}}{v_{k-2}} = \frac{2}{2k-1}, \frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{1}{2k}$$

Wählen wir eine Zahl s zwischen 0 und k und schätzen das Verhältnis $\frac{v_s}{v_0}$ ab, so erhalten wir

$$\frac{v_s}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} \cdot \frac{v_2}{v_1} \cdot \dots \cdot \frac{v_{s-1}}{v_{s-2}} \cdot \frac{v_s}{v_{s-1}} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k+2} \cdot \dots \cdot \frac{k-s+2}{k+s-1} \cdot \frac{k-s+1}{k+s}$$

Kehren wir die Reihenfolge der Faktoren im Nenner um, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{v_s}{v_0} &= \frac{k}{k+s} \cdot \frac{k-1}{k+s-1} \cdot \dots \cdot \frac{k-s+2}{k+2} \cdot \frac{k-s+1}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{s}{k+s}\right) \left(1 - \frac{s}{k+s-1}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{k+2}\right) \left(1 - \frac{s}{k+1}\right) \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, dass von diesen Klammern die erste den größten und die letzte den kleinsten Wert hat. Daher wird unser Produkt größer, wenn wir alle Klammern durch die erste ersetzen, und kleiner, wenn wir alle durch die letzte Klammer ersetzen, d.h.

$$\left(1 + \frac{s}{k+1}\right)^s \leq \frac{v_s}{v_0} \leq \left(1 + \frac{s}{k+s}\right)^s \quad (18)$$

oder

$$\left(\frac{k+1-s}{k+1}\right)^s \leq \frac{v_s}{v_0} \leq \left(\frac{k}{k+s}\right)^s \quad (19)$$

13. Innerhalb welcher Schranken liegt die Wahrscheinlichkeit Z_{120}^{20} ?

Analoge Werte kann man für die Elemente der Zeilen mit ungeraden Nummern erhalten; wir wollen uns jedoch damit nicht beschäftigen.

3 Das Gesetz der großen Zahlen

Wir nehmen an, dass unser Versuch - das Werfen der Münzen und das Bewegen der Figur - hinreichend lange dauert, sagen wir über 1000 Schritte. Wie weit entfernt sich dabei die Figur von der Anfangsstellung?

Auf alle Fälle nicht weiter als um 1000 Schritte nach rechts oder links. Dies können wir mit absoluter Sicherheit voraussagen. Wenn wir versuchen vorausszusagen, dass die Figur sich weniger als 1000 Teilstriche fortbewegt, d.h. nicht weiter als 998 Teilstriche, so ist eine Abweichung davon nicht unmöglich, denn die Münze kann bei 1000 Würfeln stets die gleiche Seite zeigen (Wappen oder Zahl), und die Figur wird sich dann im Punkt -1000 oder +1000 befinden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür (sie ist gleich $2 \cdot \frac{1}{2^{1000}}$) ist jedoch so gering, dass man diesen Fall zweifellos als praktisch unmöglich ansehen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur den neunhundertneunzigsten Teilstrich überschreitet, ist ebenfalls gering.

Wir müssen dafür annehmen, dass die Figur zu einem der Punkte

$$-1000, -998, -996, -994, -992, +992, +994, +996, +998, +1000$$

gelangt. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit hierfür müssen wir die tausendste Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten betrachten und die Summe der fünf äußeren linken und der fünf äußeren rechten Glieder bilden.

Wegen der Symmetrie des Dreiecks ist diese Summe gleich der doppelten Summe der fünf linken Glieder:

$$2 \left(\frac{1}{2^{1000}} + \frac{1}{2^{1000}} \cdot \frac{1000}{1} + \frac{1}{2^{1000}} \cdot \frac{1000}{1} \cdot \frac{999}{2} + \frac{1}{2^{1000}} \cdot \frac{1000}{1} \cdot \frac{999}{2} \cdot \frac{998}{3} + \frac{1}{2^{1000}} \cdot \frac{1000}{1} \cdot \frac{999}{2} \cdot \frac{998}{3} \cdot \frac{997}{4} \right) \approx 0, \underbrace{00\dots00}_{290 \text{ Nullen}} 0\dots$$

Somit kann man auch hier den Fehler als praktisch unmöglich ansehen.

Das nimmt in diesem Resultat nicht wunder, denn es war vorausgesetzt, dass nach eintausend Schritten die Figur den neunhundertneunzigsten Teilstrich nicht überschreitet; wir können aus den eintausendeins möglichen Stellungen zehn wenig wahrscheinliche aussondern.

Viel gewagter wäre die Behauptung, dass die Figur unterhalb des hundertsten Teilstriches bleibt (d.h., dass sie den achtundneunzigsten Teilstrich nicht überschreitet).

Hier würden wir einen großen Teil der möglichen Stellungen vernachlässigen, nämlich 902 von 1001. Wieviel würde das ausmachen? Wie klein wäre oder, anders gesehen, wie nahe an Eins läge die Wahrscheinlichkeit des Fehlers bei dieser Behauptung?

Diese Frage kann ohne Berechnung unmöglich beantwortet werden. Um sie durchzuführen, müssen wir die Summe der 451 linken äußeren und der 451 rechten äußeren Glieder in der tausendsten Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten suchen.

Obwohl für diese Überlegung nichts erforderlich ist als die Kenntnis der vier Grundrechenarten, dürfte doch schwerlich einer unserer Leser sie zu Ende führen können. Es müsste dafür zu viel Zeit und Kraft aufgewendet werden.⁹

Wir werden daher versuchen, die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, und auf eine genaue Berechnung verzichten. Unsere Überlegungen werden ganz allgemeinen Charakter tragen. Zur Vereinfachung der Rechnung werden wir jedoch stets voraussetzen, dass die Anzahl n der Schritte, die die Figur macht, gerade ist.

Wir betrachten die $2k$ -te Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten und nummerieren ihre Glieder vom mittleren Glied zum rechten Rand hin mit

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$$

Zur Abschätzung der Summe

$$S = v_r + v_{r+1} + \dots + v_k$$

benutzen wir die Ungleichung (19) aus Kapitel 2.

Nach dieser Ungleichung gilt

$$\frac{v_r}{v_0} \leq \left(\frac{k}{k+r} \right)^r, \quad \frac{v_{r+1}}{v_0} \leq \left(\frac{k}{k+r+1} \right)^{r+1}, \quad \frac{v_{r+2}}{v_0} \leq \left(\frac{k}{k+r+2} \right)^{r+2} \dots$$

$$\frac{v_k}{v_0} \leq \left(\frac{k}{k+k} \right)^r$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir $\frac{k}{k+r}$ mit g .

Man sieht sofort, dass jeder Bruch, der in den Klammern der rechten Seiten unserer Ungleichungen steht, kleiner als g ist. Daher gilt

$$\frac{v_r}{v_0} \leq g^r, \quad \frac{v_{r+1}}{v_0} \leq g^{r+1}, \quad \frac{v_{r+2}}{v_0} \leq g^{r+2}, \quad \frac{v_k}{v_0} \leq g^k$$

Addieren wir diese Ungleichungen, so erhalten wir

$$\frac{S}{v_0} \leq g^r + g^{r+1} + g^{r+2} + \dots + g^k$$

Hierbei bildet die rechte Seite eine geometrische Reihe, deren Summe durch

$$\frac{S}{v_0} \leq \frac{g^r - g^{k+1}}{1 - g}$$

ausgedrückt wird. Wegen $g = \frac{k}{k+1} < 1$ ist $1 - g > 0$, und die Ungleichung gilt erst recht, wenn wir auf der rechten Seite die negative $\frac{-g^{k+1}}{1-g}$ weglassen. Daher ist

$$\frac{S}{v_0} \leq \frac{g^r}{1 - g}$$

⁹Natürlich können wir diese Summe auch folgendermaßen berechnen: Wir subtrahieren von Eins die Summe der 99 Mittelglieder. In dieser Summe ist die Zahl der Summanden wesentlich geringer (99 statt 902), jedoch lassen sich diese Summanden selbst sehr schwer berechnen.

Wird diese Ungleichung mit v_0 multipliziert und für g der ursprüngliche Wert wieder eingesetzt, so erhalten wir schließlich

$$S < v_0 \frac{k+r}{r} \left(\frac{k}{k+r} \right)^r$$

Nun sind wir in der Lage, die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass sich die Figur nach $n = 2k$ Schritten vom Ausgangspunkt nicht um weniger als $m = 2r$ Teilstriche entfernt hat, abzuschätzen.

Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich der doppelten Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Figur nach $n = 2k$ Schritten vom Ausgangspunkt nach rechts um nicht weniger als $m = 2r$ Teilstriche entfernt hat.

Die letztere Wahrscheinlichkeit ist gerade gleich der Summe S , die wir bereits abgeschätzt haben. In Formel (1) ersetzen wir v_0 durch das früher benutzte zweckmäßigere Zeichen w_{2k} , da es die Abhängigkeit des mittleren Gliedes von der Nummer der Zeile erkennen lässt. Wir multiplizieren die Ungleichung (1) mit 2, ersetzen in ihr k durch $\frac{n}{2}$ und r durch $\frac{m}{2}$ und erhalten dann

$$P \leq 2w_n \cdot \frac{n+m}{m} \left(\frac{n}{n+m} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (2)$$

Das mittlere Glied $w_n = w_{2k}$ kann nach einer der Formeln (4) und (11) bis (16) aus Kapitel 2 abgeschätzt werden. Nach diesen Formeln ist

$$w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{Bk}} \quad (3)$$

wobei B eine Zahl ist, die um so näher an n gewählt werden kann, je größer k ist. (In (4) ist $B = 2$, in (11) ist $B = 2,66$ usw.)

In der Ungleichung (3) ersetzen wir k durch $\frac{n}{2}$. Durch Vergleich dieser Ungleichung mit (2) erhalten wir

$$P \leq 2\sqrt{\frac{2}{Bn}} \cdot \frac{n+m}{m} \left(\frac{n}{n+m} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (4)$$

und können mit Hilfe der gefundenen Formel das Zahlenbeispiel ausrechnen, von dem am Anfang des Kapitels die Rede war. Die Figur mache 1000 Schritte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie sich dabei nicht mehr als 100 Teilstriche von der Ausgangsstellung entfernt?

Wir setzen in Formel (4) $n = 1000$ und $m = 100$:

$$P \leq 2\sqrt{\frac{2}{1000B}} \cdot 11 \cdot \left(\frac{10}{50} \right)^{50}$$

Wegen $k = \frac{n}{2} > 150$ können wir $B = 3,14$ gemäß Formel (16) setzen. Wir erhalten dann das Resultat

$$P < 0,0048$$

Das Ereignis, dass sich die Figur nach 1000 Schritten um nicht weniger als 100 Teilstriche fortbewegt hat, ist also tatsächlich weniger wahrscheinlich.

Wenn eine nicht zu hohe Sicherheit gefordert wird und als Grad der Unsicherheit etwa 0,005 zugelassen ist, so kann man sagen, dass es praktisch unmöglich ist, dass sich die Figur nach 1000 Schritten um mehr als 98 Teilstriche fortbewegt hat, d.h., es ist praktisch sicher, dass die Figur sich weniger als 100 Teilstriche fortbewegt hat.

3.1 Das Gesetz der Quadratwurzel aus n

Für das weitere Studium der Bewegungen der Figur ist es zweckmäßig, die Abschätzung (4) durch eine andere zu ersetzen, die zwar schwächer, dafür jedoch einfacher und bequemer zu berechnen ist. Wir benötigen eine Hilfe-Ungleichung, die wir den Leser beweisen lassen.

14. Man beweise, dass für beliebiges positives p und ganzzahliges positives r

$$(1 + p)^r \geq 1 + rp \quad (5)$$

gilt.

Es seien m und n positive gerade Zahlen. Wir setzen in der Ungleichung (5) $r = \frac{m}{2}$ und $p = \frac{m}{n}$ und erhalten

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \geq 1 + \frac{m^2}{2n} > \frac{m^2}{2n} \quad (6)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}} < \frac{2n}{m^2}$$

Aus den Ungleichungen (2) und (6) ergibt sich

$$P < 2w_m(n+m)\frac{2n}{m^3} \quad (7)$$

Gemäß Ungleichung (4) war $w_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Außerdem war $m \leq n$. Daher folgt aus der Ungleichung (7) die Abschätzung

$$P < \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{m^3} = \left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3$$

Wenn also behauptet wird, dass sich die Figur nach n Schritten um weniger als m Teilstriche von der Ausgangsstellung entfernt, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als $\left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3$.

Wir wählen eine beliebige positive Zahl t und schätzen die Wahrscheinlichkeit des Nichtzutreffens folgender Behauptung ab:

(A) Nach n Schritten hat sich die Figur vom Anfangspunkt um weniger als $t\sqrt{n}$ Teilstriche entfernt.

Wir bezeichnen mit m die kleinste gerade Zahl, die der Bedingung $m \geq t\sqrt{n}$ genügt. Da die Entfernung der Figur von der Ausgangsstellung nach einer geraden Anzahl von Schritten eine gerade Zahl ist, ist die Behauptung (A) der folgenden Behauptung äquivalent:

(B) Nach n Schritten hat sich die Figur vom Ausgangspunkt um weniger als m Teilstriche entfernt.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums bei der Behauptung (A) gleich der eines Irrtums bei der Behauptung (B). Ihr Wert ist kleiner als

$$\left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3 \leq \left(\frac{2\sqrt{n}}{t\sqrt{n}}\right)^3 = \left(\frac{2}{t}\right)^3$$

Damit haben wir folgendes wichtige Gesetz bewiesen:

"Das Gesetz der Quadratwurzel aus n ".

Mit der Wahrscheinlichkeit eines Irrtums, die kleiner ist als $\left(\frac{2}{t}\right)^3$, kann man behaupten, dass nach n Schritten die Entfernung der Figur vom Ausgangspunkt kleiner als $t\sqrt{n}$ ist (d.h., die Figur befindet sich zwischen $-t\sqrt{n}$ und $+t\sqrt{n}$).

Wir wählen einen gewissen Grad der Unsicherheit, beispielsweise 0,005, und bestimmen t so, dass

$$\left(\frac{2}{t}\right)^3 = 0,005$$

ist. Als Lösung dieser Bestimmungsgleichung für t finden wir¹⁰

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{0,005}} \approx 12$$

Aus dem "Gesetz der Quadratwurzel aus n " folgt, dass für jeden Wert n die Behauptung, die Figur habe sich nach n Schritten von der Ausgangsstellung um weniger als $12\sqrt{n}$ entfernt, praktisch sicher ist.

Wir stellen folgende Tabelle auf :

n	$n' = 12\sqrt{n}$	$\frac{n'}{n} = \frac{12}{\sqrt{n}}$
2500	600	0,24
10000	1200	0,12
250000	6000	0,024
1000000	12000	0,012

Die zweite Spalte der Tabelle gibt die praktisch sichere Grenze für die Entfernung, die verschiedenen Werten von n entspricht. Das Verhältnis $\frac{n'}{n} = \frac{12}{\sqrt{n}}$ geht mit wachsendem n gegen Null.

¹⁰Dabei ist t nach oben gerundet.

Wir setzen voraus, dass sich die Figur nach n Schritten um m Teilstriche vom Ausgangspunkt entfernt hat. Das Verhältnis $\frac{m}{n}$ nennen wir die reduzierte Geschwindigkeit der Figur: Bewegt sich vom Punkt 0 aus in irgendeiner Richtung ein Teilchen mit dieser Geschwindigkeit, so beträgt nach n Zeiteinheiten seine Entfernung ebenfalls m Teilstriche.

(Beispielsweise: Wenn sich die Figur nach 100 Schritten im Punkt -20 befindet, so beträgt ihre reduzierte Geschwindigkeit $\frac{1}{5}$)

Die reduzierte Geschwindigkeit variiert zwischen 1 (wenn sich die Figur ständig in einer Richtung bewegt) und 0 (wenn sie in die Ausgangslage zurückkehrt, d.h., wenn sie nach rechts genauso viele Schritte wie nach links macht). Aus dem "Gesetz der Quadratwurzel aus n " folgert man leicht:

Bei genügend langer Fortdauer der Bewegung der Figur ist es praktisch sicher, dass die reduzierte Geschwindigkeit gegen Null geht.

In der Tat ist es praktisch sicher, dass die Entfernung der Figur kleiner als $12\sqrt{n}$ ist, und folglich ist ihre reduzierte Geschwindigkeit kleiner als $\frac{12\sqrt{n}}{n} = \frac{12}{\sqrt{n}}$. Diese Schranke geht mit wachsendem n gegen Null.

Bis jetzt nahmen wir 0,005 als zulässige Wahrscheinlichkeit eines Irrtums an. Unsere Überlegungen können wir jedoch ohne wesentliche Änderungen für einen beliebigen Wert ε dieser Abweichung wiederholen. Im Resultat kommen wir zu folgendem Schluss:

Mit der Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als ε kann man sagen:

- a) die Entfernung der Figur nach n Schritten ist kleiner als $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\sqrt{n}$;
- b) ihre reduzierte Geschwindigkeit bei n Schritten ist kleiner als $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}} : \sqrt{n}$

15. Die zulässige Wahrscheinlichkeit eines Irrtums sei gleich 0,05. Man gebe die praktisch sichere Grenze der Entfernung und der reduzierten Geschwindigkeit der Figur nach 1000 Schritten an.

16. Es sei α eine beliebige positive Zahl. Man beweise, dass mit der Wahrscheinlichkeit eines Irrtums, die kleiner als $\left(\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}\right)^3$ ist, behauptet werden kann, dass die reduzierte Geschwindigkeit der Figur bei n Schritten kleiner als α ist.

17. Man bestimme die Anzahl der Schritte, die hinreichend ist, damit mit der Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als 0,001 die reduzierte Geschwindigkeit der Figur kleiner als 0,01 ist.

Wir erinnern nun daran, dass die Figur in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Werfens einer Münze bewegt wurde. Wenn bei n -maligem Werfen der Münze l -mal die Zahl und $(n-l)$ -mal das Wappen fiel, so hat die Figur l Schritte nach rechts und $n-l$ Schritte nach links gemacht und ist schließlich auf den Punkt

$$l - (n - l) = 2l - n$$

gelangt. Die reduzierte Geschwindigkeit der Figur wird nach n Schritten durch den Absolutbetrag von

$$\frac{2l - n}{n} = 2\frac{l}{n} - 1$$

gegeben. Der Bruch $\frac{l}{n}$ charakterisiert die relative Häufigkeit oder die Frequenz, mit der die Zahl fällt.

Gegeben sei eine zulässige Wahrscheinlichkeit des Irrtums. Wir wissen, dass für große Werte von n mit praktischer Sicherheit behauptet werden kann, dass die reduzierte Geschwindigkeit gegen Null geht. Aus Gleichung (8) ist ersichtlich, dass für eine kleine Geschwindigkeit $2\frac{l}{n}$ annähernd gleich 1 ist und die relative Häufigkeit $\frac{l}{n}$ folglich $\frac{1}{2}$ nähert. Mit anderen Worten:

Wird die Münze sehr oft geworfen, so ist es praktisch sicher, dass die Frequenz, mit der die Zahl fällt, annähernd gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Gröber ausgedrückt, es ist praktisch sicher, dass die Zahl genau so oft wie das Wappen fällt. Eine genauere Formulierung wäre:

Wir wählen eine beliebige zulässige Wahrscheinlichkeit ε eines Irrtums und geben eine beliebig kleine Zahl α vor. Wenn die Anzahl der Würfe die Zahl

$$N = \frac{1}{\alpha^2 \sqrt[3]{\varepsilon^2}}$$

überschreitet, so kann mit einer Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als ε behauptet werden, dass sich die Frequenz, mit der die Zahl fällt, von $\frac{1}{2}$ um weniger als α unterscheidet.

Der Beweis für diese genauere Formulierung ist leicht aus Punkt b) zu gewinnen. Für $n > \frac{1}{\alpha^2 \sqrt[3]{\varepsilon^2}}$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \alpha \sqrt[3]{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}{\sqrt{n}} < 2\alpha$$

Folglich ist mit der Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als ε die reduzierte Geschwindigkeit der Figur ihrem Absolutbetrage nach kleiner als 2α . In unserem Fall ist die reduzierte Geschwindigkeit gleich dem Absolutbetrag von $\frac{2l-n}{n} = 2\frac{l}{n} - 1$. Daher kann mit einer Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als ε behauptet werden, dass $2\frac{l}{n}$ sich von 1 um weniger als 2α unterscheidet, oder, mit anderen Worten, $\frac{l}{n}$ unterscheidet sich von $\frac{1}{2}$ um weniger als α .

18. Wie oft muss eine Münze geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als 0,01 behauptet werden kann, dass die Frequenz, mit der die Zahl fällt, zwischen 0,4 und 0,6 liegt?

Es werde jetzt nicht eine Münze, sondern ein Würfel geworfen. Wie oft fällt die Sechs? Werden für diesen neuen Fall die gleichen Rechnungen und Überlegungen durchgeführt wie bei dem Beispiel der Münzen, so erhält man folgendes Resultat: Für eine große Anzahl von Würfeln liegt die Frequenz, mit der die Sechs fällt, mit praktischer Sicherheit

nahe bei $\frac{1}{6}$.

Wir betrachten noch einen Versuch.

Eine Urne enthält a Kugeln, von denen b weiß und die restlichen schwarz sind. Aus dieser Urne wird n -mal eine Kugel gezogen, die jedesmal wieder in die Urne zurückgelegt wird. Wie oft werden dabei weiße Kugeln gezogen? Man kann beweisen, dass es bei hinreichend vielen Versuchen praktisch sicher ist, dass die Frequenz, mit der weiße Kugeln gezogen werden, nahe $\frac{b}{a}$ liegt.

Wir formulieren nun das allgemeine Resultat, das als Spezialfälle alle oben angeführten Formulierungen enthält.

Es werde ein Versuch durchgeführt, bei dem ein Ereignis A eintreten oder nicht eintreten kann (das Erscheinen der Zahl bei einer Münze, das Fallen der Sechs beim Würfeln, das Herausnehmen einer weißen Kugel aus der Urne usw.), und es sei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A gleich p . (In unseren Beispielen war p gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ bzw. $\frac{b}{a}$).

Dieser Versuch werde oft wiederholt, wobei das Resultat jedes Versuches von den Ergebnissen der vorhergehenden nicht beeinflusst wird. Für eine große Anzahl von Versuchen ist dann die Häufigkeit des Ereignisses A mit praktischer Sicherheit ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit p dieses Ereignisses.

Diese allgemeine Formulierung lässt sich genauso präzisieren wie die Formulierung im Fall der Münze.

Dieses Resultat bildet den Inhalt des bekannten Satzes von Bernoulli¹¹, der die einfachste Form eines der Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt, nämlich des Gesetzes der großen Zahlen.

Wir können hier nicht auf Verallgemeinerungen des Satzes von Bernoulli eingehen. Wir bemerken nur, dass die wichtigste von P.L. Tschebyscheff herrührt.

Der Leser wird wahrscheinlich die große Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen begreifen. Durch die Aussage, dass sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei einer größeren Serie von Versuchen mit praktischer Sicherheit der Häufigkeit des Auftretens von A nähert, ermöglicht das Gesetz der großen Zahlen, diese Wahrscheinlichkeit experimentell zu bestimmen.

In vielen Fällen ist dieser experimentelle Weg zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der einzig mögliche. Ferner erlaubt die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit, aus der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses praktische Schlussfolgerungen über die Häufigkeit des Auftretens dieses Ereignisses in einer größeren Serie von Versuchen zu ziehen. Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit ist die Grundlage vieler Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Physik, Technik usw.

¹¹Jakob Bernoulli (1654-1705), berühmter Schweizer Mathematiker.

4 Irrfahrten mit endlich vielen Zuständen

In den vorhergehenden Kapiteln betrachteten wir das einfachste Beispiel für eine zufällige Bewegung, die Irrfahrt auf der Geraden. Die dort gestellten Aufgaben hatten folgenden Charakter:

Wir fragten uns, wo sich in einem bestimmten Moment die Figur befinden kann, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie sich in einem gegebenen Punkt befindet und wie weit sie sich vom Ausgangspunkt entfernt hat.

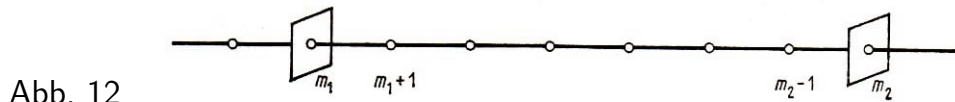
In diesem Kapitel betrachten wir wesentlich kompliziertere Irrfahrt-Schemata, die z.B. den zufälligen Spaziergang durch die Stadt oder das bereits in der Einleitung besprochene Kinderspiel umfassen. Die Aufgaben, die sich auf diese Schemata beziehen, sind von ganz anderem Charakter als die in den Kapiteln 2 bis 3 untersuchten.

Ist etwa ein beliebiger Punkt gewählt, so fragen wir uns, ob zu ihm jemals ein Teilchen gelangt, und wenn ja, in welcher Zeit.

Die erste Frage lässt sich mit Hilfe eines allgemeinen Satzes beantworten. Was die zweite betrifft, nämlich die Frage nach der Anzahl der Schritte, die notwendig sind, damit mit gegebener Wahrscheinlichkeit ein vorgegebener Punkt erreicht wird, so gelingt eine genaue Antwort nur in einfachsten Fällen (siehe Aufgabe 20).

Für den allgemeinen Fall können wir nur eine Abschätzung für die notwendige Anzahl der Schritte erhalten.

Wir nehmen eine geringfügige Änderung im Schema der Irrfahrt auf der Geraden vor. Wir stellen auf dem Weg des sich bewegenden Teilchens in den Punkten m_1 und m_2 reflektierende Schirme auf (siehe Abb. 12).



Diese Schirme bewirken, dass das Teilchen, das nach m_1 gelangt ist, beim folgenden Schritt nach $m_1 + 1$ kommt, und das nach m_2 gelangte beim nächsten Schritt nach $m_2 - 1$. Die Bewegung des Teilchens wird sich also zwischen den Punkten m_1 und m_2 abspielen.

Wir könnten die Bewegung des Teilchens auch dadurch beschränken, dass wir in den Punkten m_1 und m_2 nicht reflektierende, sondern absorbierende Schirme aufstellen. In diesem Fall würde das Teilchen, wenn es den Punkt m_1 oder Punkt m_2 erreicht hat, ständig dort bleiben. (Diesem Schema sind wir bereits bei der Lösung der Aufgabe 6 begegnet.)

Schließlich können wir in einem der beiden Punkte einen reflektierenden und im anderen einen absorbierenden Schirm aufstellen.

19. Man zeige: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen nach n Schritten den Punkt m erreicht, ist nicht davon abhängig, ob und was für ein Schirm in m steht.

Wir stellen im Punkt 0 einen reflektierenden Schirm auf. Ein Teilchen macht vom Punkt 1 aus n Schritte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt es dabei einmal den Punkt 3?

Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit dürfen wir gemäß Aufgabe 19 im Punkte 3 einen absorbierenden Schirm aufstellen (Abb. 13). Dann ist aber das Ereignis, dass nach n Schritten das Teilchen einmal den Punkt 3 berührte, gleich dem Ereignis, dass sich das Teilchen nach n Schritten im Punkte 3 befindet (denn wenn es diesen Punkt einmal erreicht, bleibt es dort).

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit d_n dafür berechnen, dass das Teilchen sich nach n Schritten im Punkte 3 befindet. Unter a_n, b_n, c_n verstehen wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, dass sich das Teilchen nach n Schritten im Punkte 0, im Punkte 1 bzw. im Punkte 2 befindet.

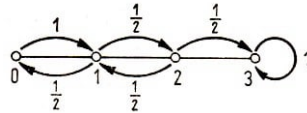


Abb. 13

Das Teilchen muss, damit es sich nach n Schritten im Punkte 0 befindet (die Wahrscheinlichkeit dafür ist a_n), nach $n - 1$ Schritten im Punkte 1 sein (die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich b_{n-1}) und dann von 1 nach 0 gehen (dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$). Gemäß Eigenschaft 6 ist

$$a_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (1)$$

Analog erhält man mit Hilfe der Eigenschaften 6 und 7 die Beziehungen

$$b_n = a_{n+1} \cdot 1 + c_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$c_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$d_n = d_{n-1} \cdot 1 + c_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad (4)$$

20. Man folgere aus den Beziehungen (1) bis (4) die Gleichung

$$d_{2k} = d_{2k+1} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad (5)$$

Die Gleichung (5) kann folgendermaßen gedeutet werden: Die Aussage, nach $2k$ Schritten habe das Teilchen mindestens einmal den Punkt 3 berührt, ist mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ falsch. Wieviel Schritte müssen gemacht werden, damit diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,01 ist?

Als Lösung der Gleichung $\left(\frac{3}{4}\right)^{k_0} = 0,01$ erhalten wir $k_0 = 16,006$. Daraus schließen wir, dass für

$$k > 16,006 \quad (6)$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k < 0,01$$

erfüllt ist. Folglich kommt das Teilchen für jedes $k \geq 17$, d.h. für jede Anzahl von Schritten, die größer oder gleich $2 \cdot 17 = 34$ ist, mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0,99 auf den Punkt 3.

4.1 Das allgemeine Problem

Wir kehren zur Betrachtung des zufälligen Spazierganges durch eine Stadt zurück, den wir in der Einleitung dieses Abschnittes beschrieben haben (Abb. 1).

Wir fragen, ob und wenn die Freunde die Straßenkreuzung E erreichen. Wir beweisen:

Ist die Zeit ihres Spazierganges nicht beschränkt, so erreichen sie die Straßenkreuzung E genau wie alle anderen Kreuzungen mit der Wahrscheinlichkeit 1. Außerdem werden wir die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit der E nach einer gegebenen Anzahl von Schritten erreicht wird.

Wir führen die Überlegung gleich in allgemeiner Form durch, wobei wir nicht voraussetzen, dass die Stadt unbedingt das in Abb. 1 dargestellte Aussehen hat. Durch die Stadt gehe ein Wanderer.

Erreicht er eine Straßenkreuzung, von der k Straßen ausgehen, so möge er für seinen weiteren Weg mit der Wahrscheinlichkeit p_1 die erste Straße, mit der Wahrscheinlichkeit p_2 die zweite, ..., schließlich mit der Wahrscheinlichkeit p_k die k -te Straße wählen (in dieser Aufzählung ist auch der Fall enthalten, dass er mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die Straße wählt, durch die er gerade erst gekommen ist).

Wir setzen voraus, dass die p_1, p_2, \dots, p_k von Null verschieden sind und für eine gegebene Straßenkreuzung die Wahrscheinlichkeiten konstant bleiben, d.h., dass der Wanderer von einer bestimmten Kreuzung aus stets mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten seinen weiteren Weg wählt, unabhängig von der Richtung, aus der er die Kreuzung erreicht, und unabhängig davon, wie oft er sie schon passiert hat. (In dem schon gegebenen Beispiel ist für jede Straßenkreuzung $k = 4$ und $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$.)

Erreicht der Wanderer den Stadtrand, so kehrt er um und geht zurück. Wir wollen annehmen, dass er in dieser Weise unbegrenzt lange weiterläuft. Es wird behauptet, dass der Wanderer, wie er auch gehen mag, jede Straßenkreuzung mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreichen wird.

Es sei E_0 eine beliebige Straßenkreuzung; wir werden zeigen, dass der Wanderer sie mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreichen wird. Die übrigen Straßenkreuzungen der Stadt seien mit E_1, E_2, \dots, E_v bezeichnet.

Teil 1 des Beweises. Gegeben seien zwei Zahlen N und $\alpha > 0$, die folgende Eigenschaften besitzen. Nach N Schritten¹² hat der Wanderer unabhängig von seinem Wege mit einer Wahrscheinlichkeit größer oder gleich α die Kreuzung E_0 mindestens einmal erreicht. (Im zweiten Teil des Beweises wird gezeigt, wie man die Zahlen N und α findet.)

¹²Der Kürze halber sagen wir, der Wanderer habe einen "Schritt" gemacht, wenn er von einer Straßenkreuzung zu einer benachbarten gegangen ist.

Die Gesamtheit der Schritte zerlegen wir in Teilfolgen zu je N Schritten. Die erste Teilfolge umfasse den ersten bis einschließlich N -ten Schritt, die zweite den $(N + 1)$ -ten bis einschließlich $2N$ -ten Schritt; usw.

Wir bezeichnen mit D_k das Ereignis, dass nach den ersten k Teilfolgen der Wanderer mindestens einmal E_0 , erreicht hat, und mit \overline{D}_k das entgegengesetzte Ereignis (nach k Teilfolgen hat der Wanderer den Punkt E_0 kein einziges Mal erreicht).

Ziel des ersten Teils des Beweises ist der Beweis der Ungleichung

$$P(\overline{D}_k) \leq P(\overline{D}_{k-1})(1 - \alpha)$$

Dazu betrachten wir das Ereignis $F_{k-1}^{(s)}$: "Nach den ersten $k - 1$ Teilfolgen hat der Wanderer E_0 nicht erreicht und befindet sich nach $(k - 1)N$ Schritten in E_s ."

Die Ereignisse D_{k-1} , $F_{k-1}^{(1)}$, $F_{k-1}^{(2)}$, ..., $F_{k-1}^{(v)}$ sind paarweise unvereinbar und bilden ein vollständiges System: gemäß Eigenschaft 7 ist

$$P(D_k) = P(D_{k-1})P(D_k|D_{k-1}) + P(F_{k-1}^{(1)})P(D_k|F_{k-1}^{(1)}) + \dots + P(F_{k-1}^{(v)})P(D_k|F_{k-1}^{(v)}) \quad (8)$$

Offenbar gilt

$$P(D_k|D_{k-1}) = 1 \quad (9)$$

Ferner ist $P(D_k|F_{k-1}^{(1)})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wanderer den Punkt E_0 in der k -ten Teilfolge erreicht unter der Bedingung, dass er sich am Anfang dieser Teilfolge in E_1 befand.

Mit anderen Worten: $P(D_k|F_{k-1}^{(1)})$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei N Schritten einmal E_0 erreicht wird, wenn der Weg bei E_1 beginnt. Entsprechend der Wahl von α ist diese Wahrscheinlichkeit größer oder gleich α , d.h.

$$P(D_k|F_{k-1}^{(1)}) \geq \alpha \quad (10)$$

Genauso gilt

$$P(D_k|F_{k-1}^{(n)}) \geq \alpha, \dots, P(D_k|F_{k-1}^{(v)}) \geq \alpha \quad (11)$$

Daher folgt aus den Formeln (8) bis (11)

$$\begin{aligned} P(D_k) &\geq P(D_{k-1}) + P(F_{k-1}^{(1)})\alpha + P(F_{k-1}^{(2)})\alpha + \dots + P(F_{k-1}^{(v)})\alpha \\ &= P(D_{k-1}) + (P(F_{k-1}^{(1)}) + P(F_{k-1}^{(2)}) + \dots + P(F_{k-1}^{(v)}))\alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der paarweise unvereinbaren Ereignisse D_{k-1} , $F_{k-1}^{(1)}$, $F_{k-1}^{(2)}$, ..., $F_{k-1}^{(v)}$, die ein vollständiges System bilden, ist aber gleich 1 (Formel (7) aus Kapitel 1). Daher ist die Summe in der eckigen Klammer gleich

$$1 - P(D_{k-1})$$

und die Formel (12) erhält die Form

$$P(D_k) \geq P(D_{k-1}) + [1 - P(D_{k-1})]\alpha \quad (13)$$

Nach Eigenschaft 3 ist

$$P(\overline{D}_k) = 1 - P(D_k) \quad , \quad P(\overline{D}_{k-1}) = 1 - P(D_{k-1})$$

Hieraus und aus (13) erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\overline{D}_k) &= 1 - P(D_k) \leq 1 - P(D_{k-1}) - [1 - P(D_{k-1})]\alpha = P(\overline{D}_{k-1}) - P(\overline{D}_{k-1})\alpha \\ &= P(\overline{D}_{k-1})(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Teil 2 des Beweises. Wir suchen jetzt die Zahlen N und α , die die erwähnten Eigenschaften besitzen.

Wir wählen eine beliebige Straßenkreuzung E_i . Von hier aus kann der Wanderer auf verschiedenen Wegen zur Kreuzung E_0 gelangen.

Wir wählen einen dieser Wege $E_i E_j E_k \dots E_r E_s E_0$. Die Anzahl der Schritte auf diesem Weg bezeichnen wir mit N_i . Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit α_i dafür, dass der Wanderer von E_i aus den Weg $E_i E_j E_k \dots E_r E_s E_0$ nimmt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wanderer von der Straßenkreuzung E_i aus den Weg $E_i E_j$ entlanggeht, bezeichnen wir mit p_{ij} . Die Wahrscheinlichkeit p_{ij} ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Wanderer nach dem n -ten Schritt in E_j befindet unter der Bedingung, er befinde sich nach dem $(n-1)$ -ten Schritt in E_i .

Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der von E_i aus gehende Wanderer den Weg $E_i E_j E_k$ (Abb. 14) benutzt, gleich $p_{ij} p_{jk}$.

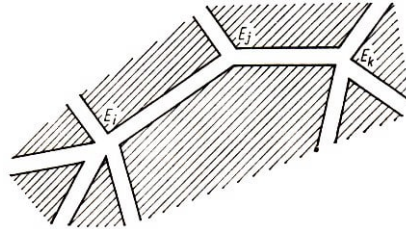


Abb. 14

Denn diese Wahrscheinlichkeit ist gemäß Eigenschaft 6 gleich dem Produkt aus der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wanderer sich nach einem Schritt in E_j befindet, und der Wahrscheinlichkeit (unter dieser Bedingung) dafür, dass er sich nach einem weiteren Schritt in E_k befindet.

Der erste Faktor ist gleich p_{ij} , der zweite gleich p_{jk} ; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_{ij} p_{jk}$.

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der von E_i startende Wanderer den Weg $E_i E_j E_k \dots E_r E_s E_0$ wählt, gleich $p_{ij} p_{jk} \dots p_{rs} p_{s0} = \alpha_i$.

Wir führen diese Berechnung für jede Straßenkreuzung E_1, E_2, \dots, E_v durch. Dabei erhalten wir die Zahlen N_1, N_2, \dots, N_v ; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$. Es sei N die größte der Zahlen N_1, N_2, \dots, N_v und α die kleinste der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$. Wir zeigen, dass N und α die geforderten Eigenschaften besitzen.

Zunächst sind alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ positiv, folglich ist auch $\alpha > 0$.

Der Wanderer habe sich N Schritte von der Straßenkreuzung E_i entfernt. Dabei hat er

mit einer Wahrscheinlichkeit größer oder gleich α den Punkt E_0 einmal erreicht; aus dem Ereignis "der Wanderer hat während der ersten N_i Schritte den Weg $E_i E_j E_k \dots E_r E_s E_0$ durchlaufen" folgt nämlich das Ereignis "der Wanderer hat bei N Schritten einmal E_0 erreicht" (denn wenn das erste Ereignis eingetreten ist, erreichte der Wanderer E_0 , nachdem er N_i Schritte getan hat).

Nach Eigenschaft 1 der Wahrscheinlichkeit ist daher die Wahrscheinlichkeit des zweiten dieser Ereignisse größer oder gleich der Wahrscheinlichkeit des ersten, sie ist $\alpha_i \geq \alpha$.

Teil 3 des Beweises. Wir schätzen sukzessive die Wahrscheinlichkeiten $P(\overline{D}_1), P(\overline{D}_2), \dots, P(\overline{D}_k), \dots$ ab.

Zunächst ist $P(D_1) \geq \alpha$, und daher gilt gemäß Eigenschaft 3

$$P(\overline{D}_1) = 1 - P(D_1) \leq 1 - \alpha$$

Weiterhin finden wir mit Hilfe der Formel

$$P(\overline{D}_k) \leq P(\overline{D}_{k-1})(1 - \alpha)$$

die wir im ersten Teil des Beweises erhalten haben,

$$\left. \begin{array}{l} P(\overline{D}_2) \leq P(\overline{D}_1)(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)^2 \\ P(\overline{D}_3) \leq P(\overline{D}_2)(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)^3 \\ \dots \\ P(\overline{D}_k) \leq P(\overline{D}_{k-1})(1 - \alpha) \leq (1 - \alpha)^k \end{array} \right\} \quad (14)$$

Betrachten wir das Ereignis \overline{D} (der Wanderer wird niemals E_0 erreichen). Aus \overline{D} folgt jedes der Ereignisse $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \dots, \overline{D}_k, \dots$. Daher ist $P(\overline{D})$ gemäß Eigenschaft 1 nicht größer als die Wahrscheinlichkeiten $P(\overline{D}_1), P(\overline{D}_2), \dots, P(\overline{D}_k), \dots$ und folglich auch nicht größer als jede der Zahlen

$$1 - \alpha, (1 - \alpha)^2, \dots, (1 - \alpha)^k, \dots \quad (15)$$

Wegen $\alpha > 0$ und $1 - \alpha < 1$ bilden die Zahlen der Folge (15) eine unendliche fallende geometrische Progression, die für wachsendes k unter jede beliebig vorgegebene positive Zahl gedrückt werden kann. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass E_0 niemals erreicht wird, kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl, folglich ist sie gleich Null. Gemäß Eigenschaft 3 ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendwann E_0 erreicht wird, gleich 1. Damit wurde folgender Satz bewiesen:

Der Wanderer erreicht jede Straßenkreuzung mit der Wahrscheinlichkeit 1, unabhängig von der Kreuzung, von der er ausgeht.

Bemerkung 1. Wir betrachten zwei beliebige Straßenkreuzungen, bezeichnen sie mit E_0 und E_1 und setzen voraus, dass der Wanderer seinen Weg an der Straßenkreuzung E_1 beginnt; wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A_0 : der Wanderer erreicht irgendwann E_0 ,

A_{01} : der Wanderer erreicht E_0 und danach die Kreuzung E_1 ,

A_{010} : der Wanderer erreicht E_0 , kommt danach zu E_1 und anschließend wieder zu E_0 , usw.

Nach dem bewiesenen Satz ist $P(A_0) = 1$. Nach der Eigenschaft 6 ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_{01} gleich dem Produkt aus $P(A_0)$ und der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der von E_0 aus gehende Wanderer danach E_1 erreicht.

Nach unserem Satz sind beide Faktoren gleich 1, folglich ist $P(A_{01}) = 1$. Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_{010})$ nach der gleichen Eigenschaft 6 gleich dem Produkt aus $P(A_{01})$ und der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der von E_1 aus gehende Wanderer anschließend E_0 erreicht. Hieraus ist ersichtlich, dass $P(A_{010}) = 1$ ist.

Analog beweist man $P(A_{0101}) = P(A_{01010}) = \dots = 1$.

Wir geben eine beliebige natürliche Zahl k vor. Aus dem Bewiesenen folgt, dass

- a) der Wanderer mit der Wahrscheinlichkeit 1 mindestens k -mal zum Ausgangspunkt zurückkehrt;
- b) der Wanderer mit der Wahrscheinlichkeit 1 mindestens k -mal eine beliebig vorgegebene Straßenkreuzung E_0 erreicht.

Bemerkung 2. Die Formel $P(\overline{D}_k) \leq (1 - \alpha)^k$ (vergleiche mit (14)) gibt eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit des Nichtzutreffens der Aussage, dass nach kN Schritten der Wanderer mindestens einmal E_0 erreicht hat. Wir wählen eine beliebige Wahrscheinlichkeit ε . Dann können wir eine Zahl k finden derart, dass

$$(1 - \alpha)^k < \varepsilon$$

ist. Dann ist aber erst recht

$$P(\overline{D}_k) < \varepsilon$$

und die Aussage, nach kN Schritten habe der Wanderer mindestens einmal E_0 erreicht, mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als ε falsch.

Man kann somit bei beliebig hohen Anforderungen an den Grad der Sicherheit eine Zahl von Schritten angeben, bei der der Wanderer mit praktischer Sicherheit E_0 erreicht.

Die Formeln (14) sind allgemein, d.h., sie gestatten eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{D}_k)$ für jede tatsächlich vorgegebene Stadt. Sie liefern jedoch nur eine grobe Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeiten.

Wir werden diese Abschätzung zur Betrachtung eines früheren Beispiels (Abb. 13) anwenden. In diesem Beispiel kann man $N = 3$ und $\alpha = \frac{1}{4}$ annehmen. Daher genügt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wanderer nach $k \cdot 3$ Schritten niemals den Punkt 3 erreicht hat, der Ungleichung

$$P(\overline{D}_k) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Wir fordern

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k < 0,001$$

Der kleinste Wert von k , der dieser Ungleichung genügt, ist gleich 17. Folglich ist die minimale geeignete Anzahl Teilfolgen gleich 17, und wir erreichen den Punkt 3 nach $17 \cdot 3 = 51$ Schritten mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99.

Wie aber früher gezeigt wurde, genügen dafür bereits 34 Schritte (weniger nicht). Schon in diesem einfachen Fall liefert also unsere Abschätzung viel gröbere Resultate als die genaue Berechnung. In komplizierteren Beispielen wird das Resultat noch größer.

Unser Wanderer braucht nicht zu Fuß zu gehen - er kann eines der städtischen Verkehrsmittel benutzen, Straßenbahn, Autobus, O-Bus oder Metro. An einer Haltestelle steige er mit bestimmter Wahrscheinlichkeit z.B. in einen Autobus. Weiterhin soll er mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit an jeder der folgenden Haltestellen aussteigen und mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit weitergehen.

In diesem Fall unterscheidet sich die Irrfahrt des Wanderers durch die Stadt ihrem Wesen nach durch nichts von dem in der Einleitung erwähnten Brettspiel "Zirkus". Stattdessen kann man das Spiel "Reise durch eine Stadt" nennen.

Die Felder des Spielbrettes werden als Straßenkreuzungen dargestellt, und für die zirkensischen Attraktionen werden städtische Verkehrsmittel eingesetzt. Der plötzlichen Bewegung zum anderen Rand des Spielbrettes entspricht etwa die Fahrt zur nächsten Metrostation.

Es ist erwünscht, irgend etwas als Los zu benutzen, das mehr Möglichkeiten bietet als ein Würfel. Man kann beispielsweise eine Urne benutzen und die Bewegungsrichtung durch Zettel bestimmen, die man aus der Urne zieht und auf denen die Bezeichnung einer Straßenkreuzung steht. Es ist jedoch klar, dass eine einzige Urne ungenügend ist, weil der Punkt, den wir erreichen, irgendwie von dem Ausgangspunkt abhängig sein soll. Am besten benutzt man so viel verschiedene Urnen, wie Felder auf dem Spielbrett sind.

Wir betrachten nun noch ein beliebiges Schema aus den Punkten E_1, E_2, \dots, E_n , von denen einige mit Pfeilen versehen sind, die in die möglichen Richtungen der Schritte weisen. Ein derartiges System von n Punkten oder Zuständen, für welche die Möglichkeiten von Übergängen zwischen ihnen sowie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese Übergänge geschehen, bekannt sind, heißt Markoffsche Kette.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit einem Schritt von E_i nach E_j gelangt, wird gewöhnlich mit p_{ij} bezeichnet¹³ (insbesondere kennzeichnet p_{ii} die Wahrscheinlichkeit, nach einem Schritt in E_i geblieben zu sein). Der Übergang von E_i nach E_j ist möglich, wenn $p_{ij} > 0$ (in diesem Fall ziehen wir auch einen Pfeil von E_i nach E_j). Eine Markoffsche Kette heißt zusammenhängend, wenn man durch eine Kette möglicher Übergänge aus jedem beliebigen Zustand E_i in jeden beliebigen anderen Zustand

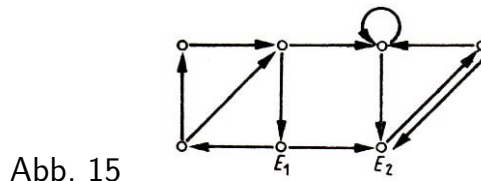
¹³Wir bemerken, dass für jedes i

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ii} + \dots + p_{in} = 1$$

gilt, da p_{i1}, \dots, p_{in} die Wahrscheinlichkeiten von paarweise unvereinbaren Ereignissen sind (Übergang von E_i in E_1 , von E_i in E_2 und schließlich von E_i in E_n), die ein vollständiges System bilden.

E_j kommen kann.

In der Sprache der Pfeile bedeutet es, dass man von jedem beliebigen Zustand E_i zu jedem anderen Zustand E_j in Richtung der Pfeile gelangen kann.



Ein Beispiel einer nicht zusammenhängenden Kette gibt Abb. 15 (es ist unmöglich, in Pfeilrichtung von E_2 nach E_1 zu kommen). Beispiele für zusammenhängende Ketten sind die Abb. 16 bis 20. Eine Markoffsche Kette aus zwei Zuständen haben wir bereits in Aufgabe 5 betrachtet (Abb. 4).

Es gilt folgender allgemeiner Satz:

Bei der Irrfahrt eines Teilchens durch ein beliebiges System von Zuständen, das eine zusammenhängende Markoffsche Kette bildet, erreicht dieses Teilchen jeden beliebigen Zustand mit der Wahrscheinlichkeit 1 (unabhängig von seinem Ausgangspunkt).

Dieser Satz wurde im Grunde bewiesen als Satz über die Irrfahrt des Wanderers durch eine Stadt. Der Leser kann sich mühelos überzeugen, dass unser Beweis Schritt für Schritt ohne jegliche Änderung auch für beliebige zusammenhängende Markoffsche Ketten gilt.

Die Markoffschen Ketten sind nach dem bedeutenden russischen Mathematiker Andrej Andrejewitsch Markoff (1856-1922) benannt, der sie gefunden und untersucht hat. Die Markoffschen Ketten haben sowohl für die Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst große Bedeutung als auch für ihre Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik.

Bei der Lösung der Aufgabe 5 wurde bemerkt, dass für eine Kette aus zwei Zuständen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach n Schritten ein gegebener Zustand erreicht ist, mit wachsendem n immer weniger vom Ausgangspunkt abhängt. Diese Tatsache gilt für alle zusammenhängenden Markoffschen Ketten (mit unbedeutenden Einschränkungen).

4.2 Begegnungsaufgabe

Wir kommen noch einmal auf den Stadtplan in Abb. 1 zurück. Genau wie früher mögen die Freunde ihren Spaziergang wieder bei der Straßenkreuzung A beginnen, jedoch nicht mehr gemeinsam, sondern getrennt durch die Stadt gehen, d.h., jeder von ihnen möge unabhängig vom anderen zwei Münzen werfen und nach dem Ergebnis seines Wurfes seinen weiteren Weg wählen.

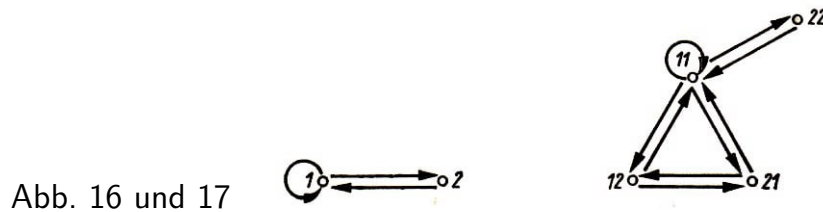
Gefragt wird, ob sich die Freunde wieder begegnen, nachdem sie von A losgegangen sind.

Wir werden zeigen, dass diese Begegnung mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann erfolgen wird; wird irgendeine Straßenkreuzung E bestimmt, so kann sogar behauptet

werden, dass sich die Freunde irgendwann mit der Wahrscheinlichkeit 1 in E treffen werden.

Das Problem lautet in allgemeiner Formulierung:

Längs einer zusammenhängenden Kette K bewegen sich zwei Teilchen, die ihre Bewegung gleichzeitig in einem beliebigen Zustand beginnen.



Mit einem Schritt geht jedes Teilchen unabhängig vom anderen aus einem Zustand in einen anderen über. Wir werden zeigen, dass sie sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 in einem beliebig vorgegebenen Zustand wieder treffen.

Zunächst erklären wir eine wichtige Beziehung zwischen Markoffschen Ketten.

Die Kette K bestehe aus n Zuständen E_1, E_2, \dots, E_n . Wir betrachten n^2 Punkte und bezeichnen sie mit $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}$. Die Lage des Teilchenpaares in der Kette K wollen wir durch eine Figur kennzeichnen, die sich in einem der Punkte E_{11}, \dots, E_{nn} befindet.

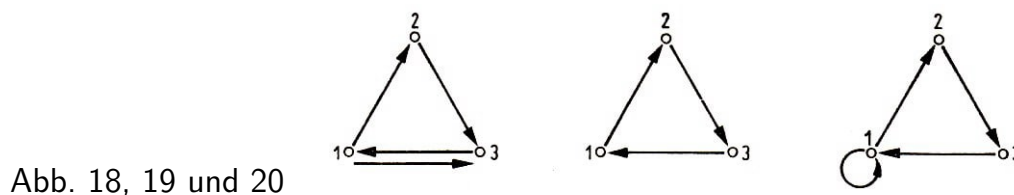
Wenn sich das erste Teilchen im Zustand E_i und das zweite im Zustand E_k befindet, so setzen wir die Figur auf den Punkt E_{ik} . Der Übergang des ersten Teilchens von E_i nach E_j geschieht mit der Wahrscheinlichkeit p_{ij} und der Übergang des anderen Teilchens von E_k nach E_l mit der Wahrscheinlichkeit p_{kl} .

Der gleichzeitige Übergang des ersten Teilchens von E_i nach E_j und des zweiten von E_k nach E_l geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $p_{ij}p_{kl}$ (laut Formel (4)), folglich geht die Figur von E_{ik} nach E_{jl} mit der Wahrscheinlichkeit $p_{ij}p_{kl}$ über.

Wir haben also eine neue Markoffsche Kette erhalten, die wir mit K^2 bezeichnen. Für die in Abb. 16 dargestellte Kette K ist die Kette K^2 aus Abb. 17 ersichtlich.

Nach der allgemeinen Regel können wir von E_{ik} nach E_{jl} einen Pfeil ziehen, wenn die Wahrscheinlichkeit des Überganges von E_{ik} in E_{jl} positiv ist. Hieraus folgt, dass ein Pfeil von E_{ik} nach E_{jl} , dann und nur dann existiert, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten p_{ik} und p_{jl} positiv sind, d.h., wenn ein Pfeil von E_i nach E_j und ein Pfeil von E_k nach E_l führen. Das System der Pfeile in der Kette K^2 baut sich also aus dem System der Kette K auf, wobei der Wert von p_{ij} belanglos ist.

21. a) Das System der Pfeile einer Kette K ist in Abb. 18 dargestellt. Man konstruiere das System für die Kette K^2 .



- b) ebenso für das in Abb. 19 dargestellte System.
- c) ebenso für das in Abb. 20 dargestellte System.

Wir betrachten die Gesamtheit L derjenigen Zustände aus K^2 , zu denen man von E_{11} aus gelangen kann, wenn man sich entlang der Pfeile bewegt.

22. Man beweise, dass

- a) die Zustände $E_{22}, E_{33}, \dots, E_{nn}$ in L enthalten sind;
- b) L eine zusammenhängende Kette ist.

Der Beweis des Satzes über die Begegnung ergibt sich nun in wenigen Worten. Es sei K eine beliebige zusammenhängende Kette, und es mögen die beiden Teilchen gleichzeitig ihre Bewegung im Zustand E_{11} beginnen.

Wir konstruieren die Kette K^2 . Diese ist im allgemeinen nicht zusammenhängend (wie z.B. in Aufgabe 21 b) gezeigt wurde). Wir bilden aus K^2 die Kette L . Diese Kette ist, wie in Aufgabe 22b) gezeigt wurde, zusammenhängend, und wir können den formulierten allgemeinen Satz anwenden.

Daher wird die Figur, nachdem sie den Zustand E_{11} verlassen hat, mit der Wahrscheinlichkeit 1 einen beliebigen Zustand aus L erreichen, worunter sich $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ befinden. Das heißt aber, dass sich unsere Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit 1 in jedem beliebig vorgegebenen Zustand treffen.

Genauso wird bewiesen, dass 3 oder 4 oder allgemein n Teilchen, die gleichzeitig in einem Zustand einer zusammenhängenden Kette eine Bewegung beginnen, sich irgendwann wieder treffen und außerdem mit der Wahrscheinlichkeit 1 gleichzeitig jeden beliebig vorgegebenen Zustand erreichen.

5 Irrfahrten mit unendlich vielen Zuständen

Den Markoffschen Ketten, die wir im vorhergehenden Kapitel betrachtet haben, entsprachen endlich viele Zustände. Wir gehen nun zu Ketten mit unendlich vielen Zuständen über (einer derartigen Kette sind wir bereits beim Schema der Irrfahrt auf einer Geraden begegnet).

Genau wie im vorigen Kapitel interessiert uns die Frage, ob die Teilchen einen gegebenen Punkt erreichen, und wenn sie ihn erreichen, wie schnell.

Die Irrfahrt des Teilchens auf einer unendlichen Kette unterscheidet sich qualitativ von der Bewegung auf einer endlichen Kette. Beispielsweise kann man hier im allgemeinen nicht behaupten, dass das Teilchen jeden Zustand mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht (obwohl dies in einzelnen Fällen möglich ist).

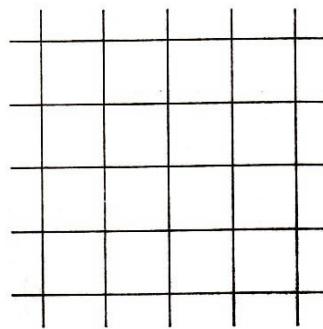


Abb. 21

Wir beschränken uns auf einfachste Ketten mit unendlich vielen Zuständen. Zunächst untersuchen wir das uns bereits bekannte Schema der Irrfahrt auf einer Geraden (diese Kette wollen wir auch "unendlichen Weg" nennen).

Sodann werden wir ein anderes einfaches Beispiel einer Kette mit unendlich vielen Zuständen betrachten - eine unendlich große Stadt mit schachbrettartigem Grundriss (Abb. 21). Erreicht ein Wanderer irgendeine Straßenkreuzung, so möge er mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ in jeder der vier Richtungen weitergehen.

5.1 Aufgaben über die Irrfahrt auf der Geraden

23. Auf einer Geraden seien die Punkte $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, markiert (Abb. 22). Ein Teilchen, das sich in Punkt n befindet, möge sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zum Punkt $n + 1$ und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zum Punkt $n - 1$ bewegen. Am Anfang befinde sich das Teilchen im Punkt 0.

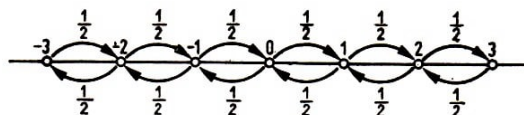


Abb. 22

Man suche

- die Wahrscheinlichkeit x dafür, dass das Teilchen irgendwann den Punkt 1 erreicht;
- die Wahrscheinlichkeit y dafür, dass das Teilchen irgendwann den Punkt -1 erreicht;
- die Wahrscheinlichkeit z dafür, dass das Teilchen irgendwann zu dem Punkt 0 zurückkehrt (d.h., dass es sich zu einem anderen Zeitpunkt als dem des Beginns der

Irrfahrt im Nullpunkt befindetet).

24. Man beweise, dass das Teilchen aus Aufgabe 23 jeden Punkt mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht.

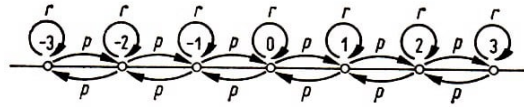


Abb. 23

25. In dem Schema in Abb. 23 erreiche das Teilchen in der Zeiteinheit vom Punkte n aus mit der Wahrscheinlichkeit p den Punkt $n + 1$, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p den Punkt $n - 1$ und bleibe mit der Wahrscheinlichkeit r stehen (in Aufgabe 23 sind $p = \frac{1}{2}$ und $r = 0$). Man beweise, dass das Teilchen für $p > 0$ jeden Punkt mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht, unabhängig vom Ausgangspunkt.

Für die Ketten in den Aufgaben 24 bis 27 wurde bzw. wird festgestellt, dass das Teilchen, woher es auch kommen mag, jeden Zustand mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht. Diese Eigenschaft besitzt jedoch die in Abb. 24 dargestellte Kette nicht; hier geht das Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p von n nach $n + 1$ und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$

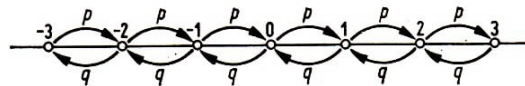


Abb. 24

von n nach $n - 1$ über, wobei $p > q$ ist. Man kann beweisen (wir werden hier davon absehen), dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das vom Punkt 0 ausgehende Teilchen den Punkt -1 irgendwann erreicht, kleiner als 1 ist.

26. Unter Benutzung der Tatsache, dass in Abb. 24 die Wahrscheinlichkeit dafür, irgendwann von 0 auf den Punkt -1 zu gelangen, kleiner als 1 ist, suche man die Wahrscheinlichkeiten x, y, z (Bezeichnungen wie in Aufgabe 23).

In Aufgabe 23 ergab sich, dass ein sich auf einer Geraden bewegendes Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit 1 in seinen Ausgangspunkt zurückkehren wird. Wieviel Schritte muss es machen, bis diese Rückkehr praktisch sicher wird?

Die Berechnung zeigt, dass für eine Wahrscheinlichkeit größer als 0,99 einige tausend Schritte zur Rückkehr notwendig sind; soll diese Wahrscheinlichkeit größer als 0,999 sein, so sind einige hunderttausend Schritte nötig.

Man kann beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr kleiner als $1 - \varepsilon$ ist, wenn das Teilchen weniger als $\frac{0,2}{\varepsilon^2}$ Schritte gemacht hat. Legt es mehr als $\frac{0,87}{\varepsilon^2}$ Schritte zurück, so ist diese Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \varepsilon$.

Es wurde weiterhin gezeigt, dass das Teilchen jeden Punkt mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht. Wir fragen wieder, wieviel Schritte notwendig sind, damit das Teilchen einen gegebenen Punkt mit praktischer Sicherheit erreicht.

Es ist klar, dass die Anzahl der Schritte um so größer ist, je weiter der uns interessierende Punkt vom Ausgangspunkt entfernt ist. Um mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 den Punkt 10 zu erreichen, sind mehr als 100000 Schritte nötig; um mit der gleichen Wahrscheinlichkeit den Punkt 100 zu erreichen, bereits über zehn Millionen Schritte.

Wir setzen

$$N_1 = \frac{2 \left(\frac{3}{4}k - 1\right)^2}{\varepsilon^2}, \quad N_2 = \frac{10k^2}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 2$$

Man kann beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen einmal den Punkt $2k$ erreicht, kleiner als $1 - \varepsilon$ ist, wenn es weniger als N_1 Schritte macht.¹⁴

Legt es mehr als N_2 Schritte zurück, so ist die Wahrscheinlichkeit für das gleiche Ereignis größer als $1 - \varepsilon$.

5.2 Begegnungsaufgabe

Wir wenden uns nun dem Problem zu, die Wahrscheinlichkeit der Begegnung zweier Wanderer, die auf einem unendlichen Weg K , laufen, festzustellen (Abb. 22).

Im vorigen Kapitel haben wir das analoge Problem für eine beliebige Markoffsche Kette mit endlich vielen Zuständen gelöst, indem wir es auf das Problem eines einzigen sich auf einer neuen komplizierteren Markoffschen Kette mit endlich vielen Zuständen bewegendem Teilchens zurückgeführt haben.

Diese Zurückführung genügt zur Lösung des Begegnungsproblems, da wir einen allgemeinen Satz über Irrfahrten von Teilchen hatten, der für alle beliebig komplizierten zusammenhängenden Markoffschen Ketten mit endlich vielen Zuständen galt.

Im Fall unendlich vieler Zustände kann die Begegnungsaufgabe nicht auf diese Art gelöst werden, weil uns ein entsprechender Satz fehlt, der für alle Ketten mit unendlich vielen Zuständen gültig ist. Wir sind daher gezwungen, das Begegnungsproblem durch eine direkte Methode zu lösen.

Im Fall unendlich vieler Zustände können wir die Bewegung zweier Teilchen nicht auf die Bewegung eines Teilchens auf einer komplizierteren Kette zurückführen, sondern müssen im Gegenteil die Aufgaben über die Bewegung eines Teilchens auf einer komplizierten Kette in Aufgaben über die Irrfahrt zweier (oder mehrerer) Teilchen auf einer einfachen Kette überführen.

Auf diese Weise werden wir bei den folgenden Untersuchungen über die unendlich große Stadt mit schachbrettartigem Grundriss vorgehen. Die Bewegung eines Teilchens (Figur) in dieser Stadt werden wir auf die Bewegung zweier Teilchen (Wanderer) auf einem unendlichen Weg K zurückführen.

Wir brauchen dazu folgende Hilfsbetrachtungen:

27. Man beweise, dass die Summe

$$S_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

mit k wächst und jeden beliebigen Wert überschreiben kann.

Die Wanderer mögen ihren Weg gleichzeitig im Punkte 0 begonnen haben. Wir werden beweisen, dass sie sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder in diesem Punkt treffen.

¹⁴Diese Behauptung gilt für $k \geq 2$, $\varepsilon \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{k}$.

Teil 1 des Beweises. Wir betrachten die Ereignisse

A_s (beide Wanderer erreichen den Punkt 0 nach s Schritten),

B_s (beide Wanderer erreichen den Punkt 0 nach s Schritten, wobei sie sich vorher¹⁵ in diesem Punkt nicht trafen) und

C_s (bis einschließlich zum s -ten Schritt haben sich die Wanderer niemals wieder¹⁶ im Punkte 0 getroffen).

Die Ereignisse $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{s-1}, B_s, C_s$ sind paarweise unvereinbar und bilden ein vollständiges System. Daher gilt (Eigenschaft 7)

$$P(A_s) = P(B_1)P(A_s|B_1) + P(B_2)P(A_s|B_2) + \dots + P(B_s)P(A_s|B_s) + P(C_s)P(A_s|C_s) \quad (1)$$

Offenbar gilt

$$P(A_s|C_s) = 0 \quad , \quad P(A_s|B_s) = 1$$

Weiterhin ist $P(A_s|B_i)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich beide Wanderer nach dem s -ten Schritt unter der Bedingung in 0 befinden, dass sie sich bereits nach dem i -ten Schritt dort trafen, d.h., $P(A_s|B_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden von 0 ausgehenden Wanderer nach $s - i$ Schritten wieder dahin zurückgekehrt sind. Folglich ist $P(A_s|B_i) = P(A_{s-i})$. Setzen wir nun

$$P(A_s) = a_s \quad \text{und} \quad P(B_s) = b_s$$

so erhält Gleichung (1) die Form

$$a_s = b_1 a_{s-1} + b_2 a_{s-2} + b_3 a_{s-3} + \dots + b_{s-1} a_1 + b_s$$

Wir schreiben diese Gleichung für $s = 1, 2, 3, \dots, n$ auf und addieren (wir schreiben der Übersichtlichkeit halber auch diejenigen a_k, b_k auf, die gleich Null sind):

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2 + a_1 b_1 \\ a_3 = b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ \dots \\ a_n = b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 \\ R_n = Q_n + a_1 Q_{n-1} + a_2 Q_{n-2} + \dots + a_{n-1} Q_1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Dabei wurde

$$R_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad , \quad Q_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

gesetzt.

Offenbar ist Q_n die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D_n : "im Verlauf der ersten n Schritte begegneten sich die Wanderer mindestens einmal in Punkt 0"; denn es ist

$$D_n = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n$$

¹⁵Außer im Anfangsmoment natürlich.

¹⁶Außer im Anfangsmoment natürlich.

$$P(D_n) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \dots + P(B_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit Q dafür, dass sich die Wanderer irgendwann in 0 treffen (diese Wahrscheinlichkeit suchen wir gerade), ist gemäß Eigenschaft 1 größer oder gleich Q_n , d.h.

$$Q \geq Q_n \quad (3)$$

für jedes n .

Aus (2) und (3) folgt

$$R_n \leq Q + a_1 Q + a_2 Q + \dots + a_{n-1} Q = (1 + R_{n-1})Q \quad , \quad Q \geq \frac{R_n}{1 + R_{n-1}} \quad (4)$$

Die Ungleichung (4) gilt für jedes n .

Teil 2 des Beweises. Wir werden zeigen, dass R_n mit wachsendem n jede beliebige Zahl überschreiten kann; es ist $R_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, wobei a_n die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich die beiden Wanderer nach n Schritten in 0 treffen.

Da sich beide Wanderer unabhängig voneinander bewegen, kann a_n nach der Multiplikationsformel für Wahrscheinlichkeiten gefunden werden:

$$a_n = w_n^2$$

wobei w_n die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich ein Wanderer nach n Schritten im Punkte 0 befindet. Die Wahrscheinlichkeit w_n ist offenbar gleich Null. Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, gilt

$$w_{2k} \geq \frac{1}{\sqrt{4k}} \quad , \quad \text{daher ist} \quad a_{2k+1} = 0, a_{2k} \geq \frac{1}{4k}$$

Hieraus folgt

$$R_{2k+1} = R_{2k} \geq \frac{1}{4} S_k$$

mit $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$; da aber S_k unbeschränkt wächst, geht auch R_n gegen Unendlich.

Teil 3 des Beweises.

Wir beweisen nun, dass $Q = 1$ ist. Auf alle Fälle ist Q wie jede Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich 1. Wir nehmen an, es sei $Q = 1 - d$ mit ($d > 0$, und führen dies zum Widerspruch. Gemäß Ungleichung (4) gilt

$$\begin{aligned} 1 - d &\geq \frac{R_n}{1 + R_{n+1}} = \frac{R_{n-1} + a_n}{R_{n-1} + 1} \\ R_{n-1} + 1 - d(R_{n-1} + 1) &\geq R_{n-1} + a_n \\ 1 - a_n &\geq d(R_{n-1} + 1) \\ R_{n-1} &< \frac{1}{d} \end{aligned}$$

Das ist aber falsch, da R_{n-1} mit wachsendem n unbeschränkt wächst.

5.3 Die unendlich große Stadt mit schachbrettartigem Grundriss

Wie bereits gesagt, werden wir die Bewegung durch eine unendlich große Stadt mit schachbrettartigem Grundriss auf die Irrfahrt zweier Wanderer auf einem unendlichen Weg K zurückführen.

Stellen wir uns vor, dass sich auf dem Weg K zwei Wanderer bewegen.

Nach dem im vorigen Kapitel angegebenen Verfahren wird die Kette K^2 konstruiert, die die Zustände $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ usw. enthält. Die Kette K^2 ist in Abb. 25 dargestellt.

Die Wanderer mögen sich in den Punkten m und n der Kette K befinden. Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ geht der erste Wanderer von m nach $m + 1$, und der zweite Wanderer geht mit derselben Wahrscheinlichkeit von n nach $n + 1$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Wanderer von dem Punktepaar (m, n) nach dem Punktepaar $(m + 1, n + 1)$ übergeben, gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

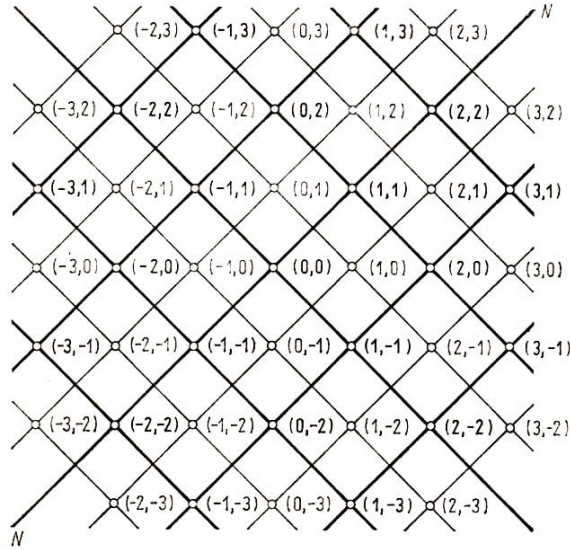


Abb. 25

Das heißt, die Figur, die sich auf K^2 bewegt und die Stellung beider Wanderer in K widerspiegelt, geht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ von (m, n) nach $(m + 1, n + 1)$ über. Mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ geht die Figur von (m, n) nach jedem der zu (m, n) benachbarten Zustände

$$(m + 1, n - 1), (m - 1, n + 1), (m - 1, n - 1)$$

über.

Wir bemerken, dass sich bei jedem Schritt der Abstand zwischen den Wanderern entweder um zwei Einheiten oder gar nicht ändert. Wenn sich am Anfang die Wanderer in den Punkten k und l befanden, so werden sie daher im folgenden nur solche Punkte m und n gleichzeitig erreichen, deren Differenz $m - n$ gerade oder ungerade ist, je nachdem, ob $k - l$ gerade oder ungerade war.

Hieraus folgt, dass die Kette K^2 unzusammenhängend ist; sie zerfällt in zwei zusammenhängende Ketten: in L , welche die Paare (m, n) mit gerader Differenz enthält (d.h.

die Punkte, die in Abb. 25 durch die dicken Linien verbunden sind), und M , welche die Paare mit ungerader Differenz enthält (d.h. die Punkte, die in Abb. 25 durch dünne Linien verbunden sind).

Wir setzen voraus, die Figur gehe vom Zustand $(0, 0)$ der Kette L aus (das entspricht der Tatsache, dass beide Wanderer gleichzeitig vom Zustand 0 der Kette K ausgehen). Bei der weiteren Bewegung kann die Figur die Grenzen von L nicht mehr überschreiten. Die Kette L ist in Abb. 26 gesondert gezeigt (sie ist dort gegenüber Abb. 25 um 45° gedreht).

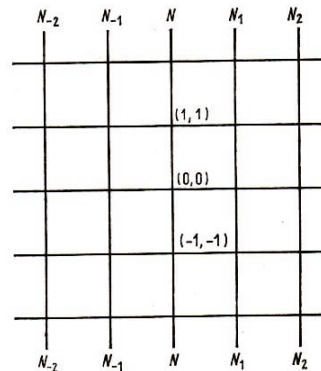


Abb. 26

Abb. 26 stimmt jedoch mit Abb. 21 überein. Wir finden somit, dass das Problem der Irrfahrt zweier Wanderer auf dem Weg K dem Problem der Irrfahrt eines Wanderers (einer Figur) durch die unendlich große schachbrettartige Stadt äquivalent ist.

Wir haben bewiesen, dass zwei Wanderer, die gleichzeitig vom Punkt 0 des Weges K ausgehen, sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder in diesem Punkte treffen.

Auf die Verhältnisse der Stadt L übertragen heißt das, dass die Figur, die in $(0, 0)$ ihre Bewegung begonnen hat, mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder dorthin zurückkehren wird. In der Tat beweist die Übertragung des Resultates des vorhergehenden Abschnitts auf diese neuen Verhältnisse, dass die Figur mit der Wahrscheinlichkeit 1 zur Ausgangskreuzung zurückkehrt.

Die Rückkehr der Figur in die Ausgangslage dauert bei der unendlich großen Stadt mit schachbrettartigem Grundriss viel länger als auf dem unendlichen Weg, d.h., es müssen wesentlich mehr Schritte zurückgelegt werden, damit diese Rückkehr praktisch sicher ist.

Um beispielsweise eine Wahrscheinlichkeit der Rückkehr von mehr als 0,99 zu erhalten, muss die Figur eine astronomische Anzahl von Schritten tun: mehr als 10^{88} (im Fall des Weges K genügen dafür 10000 Schritte).

Macht die Figur weniger als $10^{0,9\varepsilon-1,7}$ Schritte, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur dabei einmal in den Ausgangspunkt zurückkehrt, kleiner als $1 - \varepsilon$. Diese Wahrscheinlichkeit wird größer als $1 - \varepsilon$, wenn die Figur mehr als $10^{2/\varepsilon-1,6}$ Schritte geht.

Wir beweisen nun, dass die sich in der unendlich großen schachbrettartigen Stadt bewegend Figur nicht nur mit der Wahrscheinlichkeit 1 zur Ausgangskreuzung zurückkehrt,

sondern auch jede beliebig vorgegebene Straßenkreuzung mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht.

Es seien E_0 und E_1 zwei benachbarte Straßenkreuzungen. Unter x verstehen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die vom Punkt E_0 ausgehende Figur irgendwann den Punkt E_1 erreicht. Wegen des gleichmäßigen Aufbaus unserer Stadt hat diese Wahrscheinlichkeit für jedes Paar benachbarter Straßenkreuzungen den gleichen Wert.

Die Figur gehe von Punkt E_0 aus. Nach dem ersten Schritt kann sie eine der vier zu E_0 benachbarten Straßenkreuzungen O_1, O_2, O_3, O_4 erreicht haben. Wir betrachten die Ereignisse

A_i (nach einem Schritt erreicht die Figur den Punkt O_i) und
 B (die Figur kehrt irgendwann nach E_0 zurück).

Laut Eigenschaft 7 ist

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) \quad (5)$$

Aus dem Grundriss der Stadt ersieht man, dass

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

ist. Das Eintreten von B unter der Bedingung A_i besagt, dass die Figur irgendwann von Punkt O_i aus (wohin sie nach dem ersten Schritt kam) Punkt E_0 erreicht. Daher ist

$$P(B|A_1) = P(B|A_2) = P(B|A_3) = P(B|A_4) = x$$

Schließlich gilt, wie oben bewiesen, $P(B) = 1$. Werden alle diese Werte in die Formel (5) eingesetzt, so erhalten wir

$$1 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x$$

also $x = 1$.

Es sei nun E eine beliebige Straßenkreuzung. Wir betrachten einen der Wege, die von E_0 nach E führen, und nummerieren der Reihe nach alle Straßenkreuzungen, die an diesem Wege liegen: $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n = E$.

Unter D verstehen wir das Ereignis, dass die von E_0 ausgehende Figur irgendwann E_1 sodann irgendwann E_2 usw. und schließlich $E_n = E$ erreicht.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur von E_i irgendwann nach E_{i+1} gelangt, ist, wie berechnet wurde, gleich 1. Multiplizieren wir diese Wahrscheinlichkeiten für $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ gemäß der Multiplikationsformel für Wahrscheinlichkeiten, so erhalten wir $P(D)$. Offensichtlich folgt aus dem Eintreten des Ereignisses D das Eintreten des Ereignisses C , dass die Figur irgendwann E erreicht.

Nach Eigenschaft 1 ist

$$P(C) \geq P(D) = 1 \quad \text{und folglich} \quad P(C) = 1.$$

Die Betrachtung der Irrfahrt durch eine Stadt der vorgegebenen Art ermöglicht es, die den unendlichen Weg betreffende Formulierung noch zu verschärfen.

Es war gezeigt worden, dass sich die auf dem unendlichen Weg bewegenden Wanderer mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Ausgangspunkt wieder treffen. Wir können nun behaupten, dass sich die Wanderer mit der Wahrscheinlichkeit 1 in jedem beliebig vorgegebenen Punkt n begegnen.

Dies ist nämlich der Aussage äquivalent, dass die sich in der schachbrettartigen Stadt bewegende Figur mit der Wahrscheinlichkeit 1 die Straßenkreuzung (n, n) erreicht.

Dieses Resultat lässt sich jedoch nicht wie im Fall endlicher Markoffscher Ketten auf beliebig viele Wanderer verallgemeinern. Für vier und mehr Wanderer, die sich auf dem Weg K bewegen, ist die Wahrscheinlichkeit, mit der alle sich wieder treffen, kleiner als 1.

Für drei Wanderer ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich alle irgendwann wieder treffen, gleich 1, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich in einem vorgegebenen Punkt treffen, kleiner als 1.

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen der Aufgaben über Begegnung und Irrfahrt in einer schachbrettartigen Stadt können wir in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Es seien A und B zwei beliebige Punkte auf dem Weg K . Zwei Wanderer, die gleichzeitig vom Punkt A fortgegangen sind, treffen sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 im Punkt B .

2. Es seien A und B zwei beliebige Straßenkreuzungen in der Stadt L . Ein Wanderer erreicht von der Straßenkreuzung A aus mit der Wahrscheinlichkeit 1 die Straßenkreuzung B .

Die Beweise dieser Sätze hängen eng miteinander zusammen. Der Beweis des zweiten Satzes geht aus einem Spezialfall des ersten hervor, wenn nämlich die Punkte A und B zusammenfallen. Die allgemeine Formulierung des Satzes 1 geht ihrerseits aus Satz 2 hervor.

Der Spezialfall des Satzes 1, der das erste Glied in der Kette unserer Betrachtungen darstellt, erforderte für seinen Beweis Erweiterungen. Diese Erweiterungen kann man vermeiden, wenn man sich mit einer schwächeren Aussage als der des Satzes 1 begnügt.

1a. Zwei Wanderer, die gleichzeitig von einem beliebigen Punkt n des Weges K ausgehen, treffen sich mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendwo wieder.

Übertragen wir diese Aussage auf die Verhältnisse unserer Stadt, so erhalten wir sie in folgender Form:

2a. Ein Wanderer, der von der Straßenkreuzung (n, n) der Stadt L ausgeht, erreicht mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder einen Punkt der Geraden NN (Abb. 26).

Den Beweis des letzten Satzes kann man mit Hilfe von Aufgabe 25 durchführen. Wir stellen daher noch folgende Aufgabe:

28. Man verifiziere die Aussage 2a mit Hilfe von Aufgabe 25.

6 Ergänzung

In diesem Buch haben wir Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. Es war unser Ziel, den Leser mit den Begriffen und Methoden dieser eigenartigen Wissenschaft an Beispielen bekanntzumachen, die anschaulich genug sind und gleichzeitig zu ihrer Betrachtung kompliziertere Verfahren erfordern als die einfache Berechnung der Anzahl günstiger Ereignisse.

Dies vor allem aus dem Grund, weil die weitaus meisten Probleme, mit denen sich die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt, mit diesen einfachen Berechnungen nicht gelöst werden können.

Jedoch konnten wir keine komplizierteren und interessanteren Aufgaben betrachten, weil sie zur Lösung Mittel verlangen, die den Rahmen der Elementarmathematik überschreiten. Wir möchten aber nicht, dass beim Leser der Eindruck entsteht, die Wahrscheinlichkeitsrechnung sei eine Wissenschaft der Kinderspiele und Spaziergänge durch eine Stadt.

In Wirklichkeit ist das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr groß. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in der Technik (Funk- und Fernmeldewesen, Qualitätskontrolle der Produktion usw.) benutzt, in der Ballistik (Untersuchung der Streuung von Geschossen), zur Auswertung experimenteller Ergebnisse (Fehlerrechnung). Viele und bedeutende Anwendungen besitzt die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch in der Physik. Über einige von ihnen (Brownsche Bewegung) haben wir gesprochen.

Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden in Arbeiten der großen Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauß (1777- 1855) und Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821-1894) gelegt.

Seit den grundlegenden Arbeiten von Tschebyscheff nimmt die russische Wissenschaft eine führende Stellung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Tschebyscheffs Schüler Andrej Andrejewitsch Markoff (1856 bis 1922) und Alexander Michailowitsch Ljapunoff (1857-1918) setzten seine Arbeiten fort. Gegenwärtig hat die sowjetische Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung so hervorragende Gelehrte wie Sergej Natanowitsch Bernstein (1880- 1968), Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff (geb. 1903), Alexander Jakowletsch Chintschin (1894-1959) und andere hervorgebracht.

An deutschen Mathematikern, die sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigten, nennen wir noch Felix Bernstein und Richard von Mises.

Folgende Literatur können wir noch empfehlen:

B.W. Gnedenko und A.J. Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1977 (10. Aufl.).

W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, New York-London 1951 (2. Aufl.).

M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin 1977 (9. Aufl.).

A. Renyi, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie, Berlin 1977 (5. Aufl.).

- H. Athen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Hannover 1975 (4. Aufl.).
 E. Lehmann, Endliche homogene Markoffsche Ketten, München 1973.
 A. Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bde. 1 u. 2, Stuttgart 1976/78.

7 Lösungen

1. Es gibt 7 mögliche Ergebnisse, von denen 3 die Bedingung erfüllen. Daher ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{3}{7}$.
2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf keine Sechs gewürfelt wird, ist gleich $\frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei sechs Würfeln keine Sechs erscheint, ist nach Formel (6) gleich

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} \approx 0,33$$

3. Wir bezeichnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit x . Dann ist die Wahrscheinlichkeit der Fehlschüsse bei n Schüssen gleich $1 - x$, bei einem Schuss ist sie gleich $1 - p$ (Eigenschaft 3). Wie in Aufgabe 2 gilt wegen (6)

$$1 - x = (1 - p)^n \quad \text{also} \quad x = 1 - (1 - p)^n$$

4. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A , dass der Beginnende siegt, mit x , die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B , dass der zweite Spieler der Sieger ist, mit y und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C , dass das Spiel niemals endet, mit z .

Die Ereignisse A , B und C sind paarweise unvereinbar und bilden ein vollständiges System, daher ist

$$x + y + z = P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der als zweiter spielende gewinnt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf einer Münze das Wappen oben liegt (diese Wahrscheinlichkeit ist gleich $\frac{1}{2}$), multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler unter dieser Bedingung gewinnt (Eigenschaft 6). Dann tritt jedoch der zweite Spieler an die Stelle des Beginnenden, folglich ist diese bedingte Wahrscheinlichkeit gleich x . Somit gilt

$$y = \frac{1}{2}x \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der als erster spielende gewinnt, wird nach der Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit gefunden. Wir betrachten dazu die Ereignisse:

- D : "beim ersten Wurf fällt die Zahl",
 F : "beim ersten Wurf fällt das Wappen".

Die Ereignisse D und F sind unvereinbar und bilden ein vollständiges System; gemäß Eigenschaft 7 gilt dann

$$x = P(A) = P(D) \cdot P(A|D) + P(F) \cdot P(A|F)$$

Offensichtlich gilt $P(D) = P(F) = \frac{1}{2}$ und $P(A|D) = 1$. Zur Berechnung von $P(A|F)$ bemerken wir, dass der erste Spieler die Stellung des zweiten einnimmt, wenn beim ersten Wurf das Wappen gefallen ist und der zweite Spieler an die Stelle des ersten tritt; die Wahrscheinlichkeit seines Sieges ist dann y . Daher gilt

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \quad (3)$$

Lösen wir die Gleichungen (2) und (3), so finden wir $x = \frac{2}{3}$ und $y = \frac{1}{3}$. Aus Gleichung (1) erhalten wir $z = 0$.

Die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für ein unbeschränkt fortgesetztes Spiel ohne Resultat gleich Null ist, kann man durch unmittelbare Rechnung erhalten (genauso, wie es für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass beim Würfeln die Sechs nicht fällt, getan wurde).

5. a) Wir bezeichnen mit $p_{11}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das von A ausgehende Teilchen nach n Schritten wieder in A befindet, und mit $p_{12}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das von A ausgehende Teilchen nach n Schritten in B befindet. Wenn ein Teilchen vom Punkt A ausgeht, so bildet das Ereignis, das darin besteht, dass sich das Teilchen nach $n-1$ Schritten in A befindet, mit dem Ereignis, dass sich dieses Teilchen nach $n-1$ Schritten in B befindet, ein vollständiges System unvereinbarer Ereignisse; auf Grund von Eigenschaft 7 gilt daher

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)}p_{11} + p_{12}^{(n-1)}p_{21}$$

Andererseits gilt $p_{11}^{(n-1)} + p_{12}^{(n-1)} = 1$ (Eigenschaft 3); hieraus folgt

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= p_{11}^{(n-1)}p_{11} + (1 - p_{11}^{(n-1)})p_{21} = p_{11}^{(n-1)}p_{11} + p_{21} - p_{11}^{(n-1)}p_{21} \\ &= p_{21} + (p_{11} - p_{21})p_{11}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Setzen wir $p_{11} - p_{21} = q$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= p_{21}qp_{11}^{(n-1)} = p_{21} + q(p_{21} + qp_{11}^{(n-2)}) = p_{21} + qp_{21} + q^2p_{11}^{(n-2)} \\ &= p_{21} + qp_{21} + q^2(p_{21} + qp_{11}^{(n-3)}) = p_{21} + qp_{21} + q^2p_{21} + q^3p_{11}^{(n-3)} \\ &= p_{21} + qp_{21} + q^2p_{21} + \dots + q^{n-2}p_{21} + q^{n-1}p_{11}^{[n-(n-1)]} \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$p_{11}^{[n-(n-1)]} = p_{11}^{(1)} = p_{11}$$

woraus

$$p_{11}^{(n)} = p_{21}(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) + q^{n-1}p_{11}$$

oder, wenn man nach der Formel für die geometrische Reihe summiert,

$$p_{11}^{(n)} = p_{21} \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1}p_{11} \frac{p_{21}}{1 - q} + q^{n-1} \left(p_{11} - \frac{p_{21}}{1 - q} \right)$$

folgt. Unter Berücksichtigung von $p_{11} + p_{12} = 1$ (Eigenschaft 3) erhalten wir

$$1 - q = 1 - p_{11} + p_{21} = p_{12} + p_{21}$$

$$\begin{aligned} p_{11}^{(n)} &= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + q^{n-1} \left(p_{11} - \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \right) = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + q^{n-1} \frac{p_{12}p_{11} + p_{21}p_{11} - p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \\ &= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + q^{n-1} \frac{p_{12}p_{11} + p_{21}(1 - p_{11})}{p_{12} + p_{21}} \\ &= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + (p_{11} - p_{21})^{n-1} \frac{p_{12}p_{11} - p_{21}p_{12}}{p_{12} + p_{21}} \\ &= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} + \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} (p_{11} - p_{21})^n \end{aligned}$$

b) Um die Wahrscheinlichkeit $p_{21}^{(n)}$ für das Ergebnis, dass vom Punkt B aus nach n Schritten A erreicht wird, zu finden, berechnen wir zuerst $p_{12}^{(n)}$. Diese Wahrscheinlichkeit findet man nach der Formel

$$p_{12}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} = 1 - \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} (p_{11} - p_{21})^n = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} (p_{11} - p_{21})^n$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_{21}^{(n)}$ ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit $p_{12}^{(n)}$, wenn wir die Punkte A und B vertauschen und entsprechend die Indizes 1 durch 2 und 2 durch 1 ersetzen. Daher gilt

$$p_{21}^{(n)} = \frac{p_{21}}{p_{21} + p_{12}} - \frac{p_{21}}{p_{21} + p_{12}} (p_{22} - p_{12})^n$$

Anmerkung. Die Wahrscheinlichkeiten $p_{11}^{(n)}$ und $p_{21}^{(n)}$ unterscheiden sich um die Größe

$$p_{11}^{(n)} - p_{21}^{(n)} = \frac{p_{12}}{p_{12} - p_{21}} (p_{11} - p_{21})^n + \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} (p_{22} - p_{12})^n \quad (1)$$

Um die ausgearteten Fälle

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1, p_{12} = 0, p_{21} = 0, p_{22} = 1, \\ p_{11} &= 0, p_{12} = 1, p_{21} = 1, p_{22} = 0 \end{aligned}$$

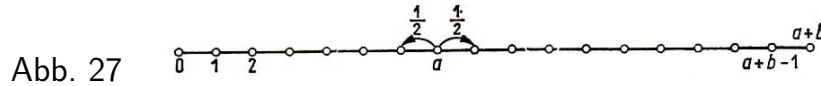
auszuschließen, fordern wir stets

$$-1 < p_{11} - p_{21} < 1, \quad -1 < p_{22} - p_{12} < 1$$

Mit wachsendem n strebt daher jeder Summand der rechten Seite von (1) (dem Betrage nach) gegen Null wie die Glieder einer fallenden geometrischen Progression. Folglich nähert sich auch die Differenz $p_{11}^{(n)} - p_{21}^{(n)}$ immer mehr der Null. Mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen nach n Schritten im Punkte A befindet, wird mit wachsendem n unabhängig davon, von welchem Punkt man ausgegangen ist.

6. Wir wollen die Anzahl der Kugeln in der linken Urne mit Hilfe einer Figur abbilden,

die sich auf der Zahlengeraden bewegt. Am Anfang befindet sich die Figur im Punkte a (Abb. 27). In jeder Zeiteinheit bewegt sie sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder nach rechts (wenn eine Kugel aus der rechten Urne in die linke gelegt wird, so dass die Anzahl der Kugeln in der linken Urne um 1 wächst) oder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nach links (wenn eine Kugel aus der linken Urne in die rechte gelegt wird, so dass die Anzahl der Kugeln in der linken Urne um 1 abnimmt).



Das geschieht so lange, bis die Figur zum ersten Male einen der Punkte 0 oder $a + b$ erreicht. Erreicht die Figur den Punkt 0, so bedeutet das, dass die linke Urne leer geworden ist, und erreicht sie den Punkt $a + b$, so ist die rechte Urne leer.

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur den Punkt 0 erreicht unter der Bedingung, dass sie vom Punkte k aus gegangen ist, mit p_k (gesucht ist p_a).

Offensichtlich gilt $p_0 = 1$ und $p_{a+b} = 0$.

Die Figur befinde sich im Punkte k . Wir betrachten die beiden Ereignisse

A , dass die Figur sich nach einem Schritt in $k + 1$ befindet, und

B , dass die Figur nach einem Schritt in $k - 1$ steht.

Nach Voraussetzung ist $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Bei Eintreten des Ereignisses A ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur in den Punkt 0 gelangt, gleich p_{k+1} , bei Eintreten des Ereignisses B ist diese Wahrscheinlichkeit gleich p_{k-1} . Nach der Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit gilt

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$$

woraus man durch Umformung

$$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1} \quad , \quad p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

erhält. Wir bezeichnen die konstante Differenz $p_{k+1} - p_k$ mit d und schreiben

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-1} &= d, \\ p_{k-1} - p_{k-2} &= d, \\ &\dots \\ p_2 - p_1 &= d, \\ p_1 - p_0 &= d \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$p_k - p_0 = kd \quad , \quad p_k - 1 = kd \quad , \quad p_k = 1 + kd$$

oder, wenn man $k = a + b$ setzt,

$$0 = p_{a+b} = 1 + (a + b)d \quad , \quad d = -\frac{1}{a + b}$$

$$p_k = 1 - \frac{k}{a+b} = \frac{a+b-k}{a+b}$$

Die uns interessierende Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$p_a = \frac{b}{a+b}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die rechte Urne leer wird, ist dann offensichtlich

$$p_b = \frac{a}{a+b}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Versuch endet, d.h., dass eine der Urnen leer wird, ist gemäß Eigenschaft 2

$$p_a + p_b = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Versuch niemals endet, ist gleich $1 - 1 = 0$ (Eigenschaft 3).

Anmerkung. Diese Aufgabe ist in der Geschichte der Mathematik als "Problem des Ruins des Spielers" bekannt. Die klassische Formulierung dieser Aufgabe ist folgende: Es spielen zwei Spieler. Die Wahrscheinlichkeit eines Sieges ist während jeder Partie für jeden von ihnen gleich $\frac{1}{2}$. Der erste Spieler besitzt a Mark, der zweite b Mark. Das Spiel wird solange fortgesetzt, solange ein Spieler noch Geld besitzt. Welche Wahrscheinlichkeit des Ruins besteht für jeden der Spieler?

In Aufgabe 6 sind die Spieler durch Urnen und Geld durch Kugeln ersetzt.

7. An jede Ecke des Würfels schreiben wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Raupe von dieser Ecke zum Punkt A kriecht (Abb. 28).

An den Ecken 1 und 5 steht die gleiche Wahrscheinlichkeit x , da diese Eckpunkte die gleiche Lage bezüglich der Punkte A und B haben. Genauso steht an den Ecken 2 und 4 die gleiche Wahrscheinlichkeit y . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Raupe von den Punkten 0 bzw. 3 nach A kriecht, bezeichnen wir mit z bzw. mit u .

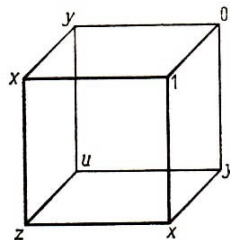


Abb. 28

Wir nehmen nun an, dass sich die Raupe im Eckpunkt 1 befindet (Abb. 5), und betrachten das vollständige System der paarweise unvereinbaren Ereignisse

C_1 (die Raupe kriecht den Weg 1 A), d.h. $P(C_1) = \frac{1}{3}$,
 C_2 (die Raupe kriecht den Weg 1 2), d.h. $P(C_2) = \frac{1}{3}$,
 und C_3 (die Raupe kriecht den Weg 1 0), d.h. $P(C_3) = \frac{1}{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Raupe den Punkt A erreicht, ist unter der Bedingung C_1 gleich 1, bei C_2 gleich y und bei C_3 gleich z . Daher gilt (gemäß Eigenschaft 7)

$$x = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \quad (1)$$

Analog findet man die drei Beziehungen

$$y = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}u \quad (2)$$

$$z = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}u \quad (3)$$

$$u = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}u \quad (4)$$

Als Lösung der Gleichungen (1), (2), (3) und (4) finden wir

$$x = \frac{9}{14}, \quad y = \frac{5}{14}, \quad z = \frac{4}{7}, \quad u = \frac{3}{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Punkt B erreicht wird, findet man durch folgende Überlegung. Offenbar ist die Wahrscheinlichkeit z' dafür, dass B von der Ecke 0 aus erreicht wird, gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass A vom Eckpunkt 3 aus erreicht wird. Somit ist $z' = u = \frac{3}{7}$.

Mit denselben Überlegungen finden wir

$$x' = y = \frac{5}{14}, \quad y' = x = \frac{9}{14}, \quad u' = z = \frac{4}{7}$$

Anmerkung. Wir bemerken, dass

$$x + x' = y + y' = z + z' = u + u' = 1$$

ist. Gemäß Eigenschaft 2 ist $z+z'$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man vom Eckpunkt 0 aus irgendwohin gelangt, und $1 - (z + z')$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man vom gleichen Eckpunkt nirgendwohin gelangt (Eigenschaft 3).

Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Raupe von Punkt 0 aus nirgendwohin gelangt, gleich Null. Man sieht leicht ein, dass dies genauso gültig ist, wenn irgendeine andere Ecke als Ausgangspunkt gewählt wird.

Einem ähnlichen Resultat begegneten wir bereits bei der Lösung der Aufgabe 6, wo gezeigt wurde, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Figur weder nach 0 noch nach $a + b$ gelangt, gleich Null ist.

Gleich Null ist auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel aus Aufgabe 4 niemals endet. Schließlich überzeugt man sich leicht davon, dass beim Schema der Aufgabe 5 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen etwa den Punkt B niemals erreicht, ebenfalls gleich Null ist (wenn nur $p_{12} > 0$ gilt).

Alle diese Tatsachen sind Spezialfälle eines allgemeinen Satzes über Irrfahrten, der in Kapitel 4 bewiesen wird.

8. Wir betrachten die Ereignisse

A (nach n Schritten befindet sich das Teilchen im Punkt k),

B_1 (nach $n - 1$ Schritten befindet sich das Teilchen im Punkt $k - 1$),

B_2 (nach $n - 1$ Schritten befindet sich das Teilchen im Punkt $k + 1$) und

B_3 (nach $n - 1$ Schritten befindet sich das Teilchen weder in $k - 1$ noch in $k + 1$).

Gemäß Eigenschaft 7 gilt

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

und wir erhalten

$$P(A) = Z_n^k, \quad P(B_1) = Z_{n-1}^{k-1}, \quad P(B_2) = Z_{n-1}^{k+1},$$

$$P(A|B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B_3) = 0$$

Hieraus folgt

$$Z_n^k = \frac{Z_{n-1}^{k-1} + Z_{n-1}^{k+1}}{2}$$

9. Die Elemente, die in einer Zeile des Dreiecks der Wahrscheinlichkeiten stehen, sind nämlich die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die paarweise unvereinbar sind und ein vollständiges System bilden.

10. Für diesen Beweis schreiben wir die drei Produkte untereinander (vgl. mit (5), (6) und (7)):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdots \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k}, \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k}, \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-3}{2a-2} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+2}{2a+3} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass das zweite Produkt nicht kleiner als das erste und das dritte größer als das zweite ist. Das zweite Produkt ist jedoch gleich w_{2k}^2 und das erste und dritte erhalten nach einiger Vereinfachung die Form

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdots \frac{2k-1}{2k} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a-1}{2k} \\ & \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{2a+1}{2a+2} \cdot \frac{2a+2}{2a+3} \cdots \frac{2k}{2k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2k+1} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(2a-1) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{1}{2k} \leq w_{2k}^2 < (2a-1) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2k}$$

und, wenn man die Wurzel zieht, die geforderte Ungleichung.

11. Für $k \geq 150$ (Ungleichung (16) auf Seite 217) gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3,15k}} \leq w_{2k}$$

woraus

$$\frac{1}{1,7749\sqrt{k}} < w_{2k} < \frac{1}{1,7719\sqrt{k}} \quad , \quad \frac{0,5633}{\sqrt{k}} < w_{2k} < \frac{0,5644}{\sqrt{k}}$$

folgt. In unserem Fall ist $k = \frac{10000}{2} = 5000$ und daher

$$70,710 < \sqrt{k} < 70,711 \quad ; \quad 0,01414 < \frac{1}{\sqrt{k}} < 0,01415$$

Schließlich erhalten wir

$$0,5633 \cdot 0,01414 < w_{2k} < 0,5644 \cdot 0,01415 \quad , \quad 0,007966 < w_{2k} < 0,007987$$

Der Wert w_{2k} ist also unter Berücksichtigung beider Schranken gleich $w_{2k} = 0,0079\dots$

12. Es sei $n = 2k$. Alle Glieder der n -ten Zeile sind kleiner als das mittlere Glied, das der Ungleichung

$$w_n = w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

genügt.

Es sei nun $n = 2k - 1$. In Zeilen mit ungerader Nummer gibt es kein mittleres Glied, und die größten Glieder in diesen Zeilen sind die einander gleichen Glieder Z_n^{-1} und Z_n^1 . Nun gilt aber

$$Z_n^1 = \frac{Z_n^{-1} + z_n^1}{2} = Z_{n+1}^0$$

Wie eben gezeigt wurde, ist $Z_{n+1}^0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Daher gilt

$$Z_n^1 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

die übrigen Glieder der n -ten Zeile sind also erst recht kleiner als $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

13. Da das s -te Glied (von der Mitte aus) der $2k$ -ten Zeile Z_{2k}^{2s} ist, kann man die Ungleichung (19) folgendermaßen umschreiben:

$$\left(\frac{k+1-s}{k+1} \right)^2 \leq \frac{Z_{2k}^{2s}}{w_{2k}} \leq \left(\frac{k}{k+s} \right)^2 \quad \text{oder} \quad w_{2k} \left(\frac{k+1-s}{k+1} \right)^2 \leq Z_{2k}^{2s} \leq w_{2k} \left(\frac{k}{k+s} \right)^2$$

Für $k \geq 60$ (siehe Ungleichung (15)) gilt

$$\frac{1}{\sqrt{3,18k}} \leq w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3,10k}}$$

Daher gilt für $k \geq 60$

$$\frac{1}{\sqrt{3,18k}} \left(\frac{k+1-s}{k+1} \right)^s \leq Z_{2k}^{2s} \leq \frac{1}{\sqrt{3,10k}} \left(\frac{k}{k+s} \right)^s$$

Zur Abschätzung von Z_{120}^{20} muss man $s = 10$ und $k = 60$ setzen. Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{3,18 \cdot 60}} \left(\frac{51}{61} \right)^{10} \leq Z_{120}^{20} \leq \frac{1}{\sqrt{3,1 \cdot 60}} \left(\frac{60}{70} \right)^{10}$$

und hieraus folgt

$$0,012 < Z_{120}^{20} < 0,016$$

14. Es ist

$$(1+p)^r = \underbrace{(1+p)(1+p)\dots(1+p)}_{r\text{-mal}}$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern tritt die Zahl 1 auf. Weiterhin erhält man, wenn man aus der ersten Klammer p und aus allen übrigen Klammern die 1 nimmt, nach Multiplikation p ; nimmt man das p aus der zweiten Klammer und multipliziert es mit der 1 aus allen anderen Klammern, so erhält man ebenfalls p , usw., folglich tritt p in der Entwicklung r -mal auf.

Außerdem gibt es noch andere positive Glieder, daher ist

$$(1+p)^r \geq 1+rp$$

15. Die praktisch sichere Grenze des Irrtums bei n Schritten kann man zu $\frac{2}{\sqrt[3]{0,05}} \cdot \sqrt{n} = 5,429 \cdot \sqrt{n}$ annehmen. Insbesondere hat man für $n = 1000$ als praktisch zuverlässige Grenze der Abweichung 171,7. Die größte gerade Zahl, die 171,7 nicht überschreitet, ist 170; man kann daher mit praktischer Sicherheit behaupten, dass die Figur nach 1000 Schritten nicht mehr als 170 Teilstriche von der Ausgangslage entfernt ist.

Um die praktisch zuverlässige Grenze der dabei angenommenen reduzierten Geschwindigkeit zu erhalten, muss man die Grenze der Abweichung durch die Anzahl der Schritte dividieren. Wir finden, dass die Figur mit praktischer Sicherheit bei 1000 Schritten eine reduzierte Geschwindigkeit von höchstens 0,17 annimmt.

16. Wir setzen

$$\varepsilon = \left(\frac{2}{\alpha\sqrt{n}} \right)^3$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum, die unter ε liegt, kann man sagen, dass die reduzierte Geschwindigkeit der Figur nach n Schritten kleiner als $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}\sqrt{n}}$ ist. Nun ist aber

$$\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}\sqrt{n}} = \frac{2}{\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}\sqrt{n}} = \alpha$$

17. Man kann behaupten, dass die reduzierte Geschwindigkeit der Figur bei n Schritten kleiner als $\frac{2}{\sqrt[3]{0,001}\sqrt{n}}$ ist. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums kleiner als 0,001. Wir wählen nun n derart, dass

$$\frac{2}{\sqrt[3]{0,001}\sqrt{n}} \leq 0,01$$

ist; hieraus folgt $n \geq 4 \cdot 10^6$.

Somit kann man behaupten, dass die reduzierte Geschwindigkeit bei $4 \cdot 10^6$ Schritten kleiner ist als

$$\frac{2}{\sqrt[3]{0,001}\sqrt{4 \cdot 10^6}} = 0,01$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums ist dabei kleiner als 0,001.

18. Es soll mit einer Wahrscheinlichkeit eines Irrtums unter 0,01 behauptet werden können, die Häufigkeit des Fallens des Wappens unterscheide sich von 0,5 um weniger als 0,1. Dazu können wir eine beliebige Zahl von Würfeln nehmen, die größer als

$$N = \frac{1}{(0,1)^2 \sqrt[3]{0,01^2}} = 2154,4$$

ist, müssen also mindestens 2155 Würfe ausführen.

19. Wenn sich das Teilchen nach n Schritten in m befindet, so kann es dahin zuerst entweder nach einem Schritt, nach zwei oder schließlich nach n Schritten gelangen. Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit, die mit Hilfe von Formel (5) durch die Summe $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ausgedrückt wird, wobei b_k die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass m zum ersten Male nach k Schritten erreicht wird. Es genügt daher zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit b_k nicht vom Schirm abhängt.

Wir beweisen nun, dass b_k nicht davon abhängt, was für ein Schirm in Punkt m steht. Wir betrachten alle aus k Schritten bestehenden Wege, die im Ausgangspunkt beginnen, im Punkt m enden und sonst den Punkt m nicht berühren.

Diese Wege werden mit A_1, A_2, \dots, A_s bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen für seine ersten k Schritte den Weg A_i benutzt, bezeichnen wir mit a_i . Das Ereignis, dass das Teilchen nach k Schritten zum ersten Male den Punkt m erreicht, ist gleichbedeutend damit, dass es entweder den Weg A_1 , den Weg A_2 , ... oder schließlich den Weg A_s benutzte. Es gilt also

$$b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_s$$

Keiner der Wege A_1, A_2, \dots, A_s berührt jedoch m ; daher hängen die Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2, \dots, a_s (und mit ihnen auch b_k nicht davon ab, ob im Punkt m ein Schirm steht und wie er beschaffen ist.

Anmerkung. Diese Überlegungen besitzen allgemeinen Charakter und können auf jedes Schema von Zufallsgrößen angewendet werden. Folglich ist auch die in der Aufgabe formulierte Behauptung für beliebige Schemata gültig.

20. Aus den Beziehungen (1), (2) und (3) auf Seite 231 findet man

$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-2} + \frac{1}{4}b_{n-2} = \frac{3}{4}b_{n-2} \quad , \quad b_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k b_0 \quad , \quad b_{2k+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^k b_1$$

Nun ist aber $b_0 = 1$ (zu Beginn befindet sich das Teilchen in 1) und $b_1 = 0$ (nach einem Schritt befindet sich das Teilchen nicht mehr in 1). Daher gilt

$$b_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad , \quad b_{2k+1} = 0$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$d_n = d_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-2}$$

Weiterhin erhalten wir unter Berücksichtigung von Gleichung (1)

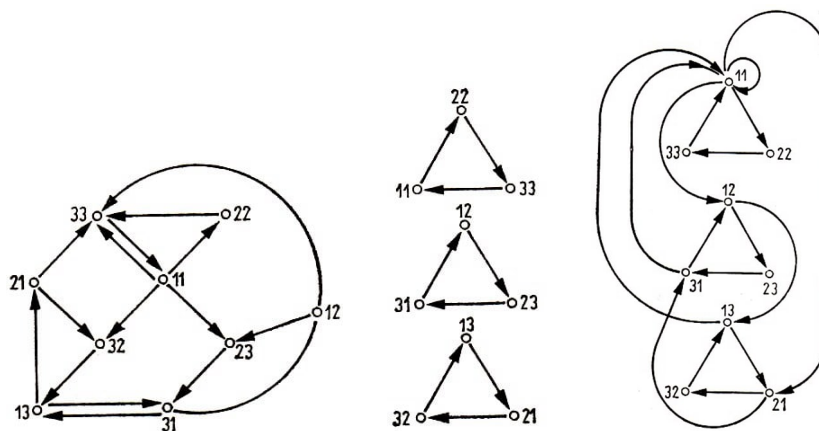
$$\begin{aligned} d_{2k+1} &= d_{2k} + \frac{1}{4}b_{2k-1} = d_{2k} \\ d_{2k} &= d_{2k-1} + \frac{1}{4}b_{2k-2} = d_{2k-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= d_{2k-4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = d_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Da $d_0 = 0$ ist, ergibt sich schließlich (unter Benutzung der Summenformel für die geometrische Reihe)

$$d_{2k} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right] = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k}{1 - \frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

21. a.) Siehe Abb. 29.; b) Siehe Abb. 30; c) Siehe Abb. 31

Abb. 29-31



22. a) Genau wie das erste Teilchen kann auch das zweite von E_1 in 2 Schritten nach E_k gelangen.¹⁷ Beziehen wir diesen Weg der beiden Teilchen auf die Bewegung der

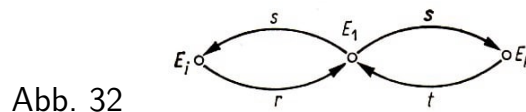
¹⁷"kann gelangen" bedeutet "kann in Pfeilrichtung gelangen".

Figur in K^2 , so finden wir, dass die Figur von E_{11} nach z Schritten auf E_{kk} steht.

b) Es genügt, zu zeigen, dass man aus einem beliebigen Zustand E_{ik} der Kette L nach E_{11} gelangen kann (dann kann man von ihm aus längs des Weges $E_{ik} - E_{11} - E_{jl}$ auch in jeden beliebigen Zustand E_{jl} gelangen).

Somit haben wir zu zeigen, dass man aus dem Zustand E_{ik} , der zu L gehört, nach E_{11} gelangen kann.

Man erreiche von E_{11} aus nach s Schritten den Punkt E_{ik} . Dann gelangt das erste Teilchen nach s Schritten von E_1 nach E_i und das zweite von E_1 nach E_k (Abb. 32). Von E_i nach E_1 gelange man nun mit r Schritten und von E_k nach E_1 mit t Schritten (die Kette K ist zusammenhängend!).



Dann kann (Abb. 32) das erste Teilchen von E_i mit $r + s + t$ Schritten (auf dem Weg $E_i - E_1 - E_k - E_1$) nach E_1 gelangen und das zweite Teilchen von E_k mit $t + s + r$ Schritten nach E_1 (auf dem Weg $E_k - E_1 - E_i - E_1$), d.h., das erste Teilchen benötigt von E_i nach E_1 die gleiche Anzahl Schritte wie das zweite Teilchen von E_k nach E_1 nämlich $z = s + r + t$.

Wird dieser Weg der beiden Teilchen auf die Bewegung der Figur auf K^2 übertragen, so kann die Figur mit z Schritten von E_{ik} nach E_{11} gelangen.

23. Da alle Punkte vollkommen gleichberechtigt sind, ist x überhaupt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen von $n - 1$ aus irgendwann n erreicht. Genauso ist y die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen von $n + 1$ aus n erreicht.

Wir nehmen an, dass das Teilchen vom Punkt 0 ausgeht und betrachten die Ereignisse

A (das Teilchen kehrt irgendwann nach dem Punkt 0 zurück),

B_1 (das Teilchen gelangt beim ersten Schritt nach Punkt 1),

B_2 (das Teilchen gelangt beim ersten Schritt nach dem Punkt -1).

Nach der Formel für die vollständige Wahrscheinlichkeit (Eigenschaft 7) gilt

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

Ist die Bedingung B_1 erfüllt, so befindet sich das Teilchen nach einem Schritt im Punkt 1. Damit bei dieser Bedingung das Ereignis A eintritt, ist notwendig, dass das Teilchen von 1 aus irgendwann 0 erreicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich y . Somit ist $P(A|B_1) = y$. Analog gilt $P(A|B_2) = x$.

Ferner ist $P(A) = z$ und $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. Werden diese Werte in Formel (1) eingesetzt, so erhalten wir

$$z = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x \quad (2)$$

Ferner ist offenbar $x = y$, also $z = x$.

Zur Berechnung von x betrachten wir das Ereignis C (das Teilchen er reicht von 0 aus irgendwann 1). Nach Eigenschaft 7 gilt dann

$$x = P(C) = P(B_1)P(C|B_1) + P(B_2)P(C|B_2) \quad (3)$$

Es war $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ und $P(C|B_1) = 1$. Weiterhin ist $P(C|B_2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen von -1 aus irgendwann nach 1 gelangt. Wir berechnen diese Wahrscheinlichkeit.

Das Teilchen befindet sich also in -1. Es muss nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D (das Teilchen erreicht irgendwann den Punkt 1) gefunden werden. Wir führen dazu das Ereignis F ein (das Teilchen erreicht irgendwann 0). Offensichtlich gilt $F \cap D = D$ (denn das Eintreten von D ist gleichbedeutend mit dem gemeinsamen Eintreten der Ereignisse F und D). Daher gilt gemäß Eigenschaft 6

$$P(D) = P(F \cap D) = P(F)P(D|F)$$

Nun ist jedoch $P(F) = x$, $P(D|F) = x$. Folglich ist

$$P(D) = x^2 \quad (4)$$

Schließlich finden wir aus den Formeln (3) und (4)

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2, \quad x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (x - 1)^2 = 0 \quad (5)$$

wonach $x = 1$ und somit $z = y = 1$ ist.

24. Es muss gezeigt werden, dass das Teilchen den Punkt n mit der Wahrscheinlichkeit 1 erreicht (der Bestimmtheit halber sei $n > 0$).

Für $n = 1$ wurde dies in der vorhergehenden Aufgabe bewiesen. Die Behauptung sei für den Punkt n bewiesen; wir beweisen, dass sie dann auch für $n + 1$ gilt.

Dazu betrachten wir das Ereignis A_{n+1} (das Teilchen erreicht irgendwann $n + 1$). Offensichtlich ist $A_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$; gemäß Eigenschaft 6 gilt dann

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)$$

Nun ist aber $P(A_{n+1}|A_n) = x = 1$. Außerdem gilt nach Voraussetzung $P(A_n) = 1$. Daher ist $P(A_{n+1}) = 1$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, einen vorgegebenen Punkt 2-mal, 3-mal, allgemein n -mal zu erreichen, wird genauso gefunden wie in Bemerkung 1; sie ist gleich 1.

25. Zunächst bemerken wir, dass $p + p + r = 1$ ist. Es mögen x, y, z die Wahrscheinlichkeiten derselben Ereignisse wie in Aufgabe 23 bezeichnen. Wir überlassen es dem Leser, selbst die Gleichungen

$$z = r + px + py, \quad x = p + rx + px^2 \quad (1,2)$$

zu finden. (Man leitet sie genauso ab, wie (2) und (5) bei der Lösung von Aufgabe 23. Es ist lediglich außer den Ereignissen B_1 und B_2 noch zusätzlich das Ereignis B_3

(das Teilchen befindet sich nach der ersten Zeiteinheit im Punkte 0) zu betrachten.)
Offenbar ist $x = y$. Hieraus folgt

$$z = r + 2px$$

Wir formen (2) um:

$$x = p + (1 - 2p)x + px^2, \quad 0 = p - 2px + px^2$$

Da $p \neq 0$ ist, gilt

$$1 - 2x + x^2 = 0$$

woraus man $x = 1$ und $z = r + 2p = 1$ erhält.

Genauso wie in Aufgabe 24 überzeugt man sich davon, dass das Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit 1 jeden beliebigen Punkt erreicht.

26. Mit den gleichen Überlegungen, wie bei der Lösung der Aufgaben 23 und 25 angewendet wurden, erhalten wir (dabei ist im allgemeinen $x \neq y$)

$$z = py + qx, \quad x = p + qx^2, \quad y = q + py^2 \quad (1,2,3)$$

Als Lösung der Gleichung (2) ergibt sich

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2q} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2q} = \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2q} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2q}$$

die Gleichung (2) besitzt also die Wurzeln

$$x_1 = \frac{1 + 1 - 2p}{2q} = \frac{2 - 2p}{2q} = \frac{1 - p}{q} = \frac{q}{q} = 1$$

$$x_2 = \frac{1 - 1 + 2p}{2q} = \frac{2p}{2q} = \frac{p}{q}$$

Da $\frac{p}{q} > 1$ und x (wie jede Wahrscheinlichkeit) kleiner oder gleich 1 ist, gilt $x \neq x_2$ und folglich $x = x_1 = 1$.

Als Lösung der Gleichung (3) erhalten wir

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{q}{p}$$

Laut Voraussetzung ist $y \neq 1$, folglich also $y = \frac{q}{p}$. Hieraus folgt

$$z = py + qx = 2q$$

27. Wir beweisen, dass für $k \geq 2^m$ die Ungleichung $S_k > \frac{m}{2}$ erfüllt ist. Es gilt nämlich

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m} = 1 + T_1 + T_2 + \dots + T_m$$

mit

$$T_p = \underbrace{\frac{1}{2^{p-1} + 1} + \frac{1}{2^{p-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1} \text{ Summanden}}$$

Offenbar ist

$$T_p \geq \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1} \text{ Summanden}} = \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2}$$

Daher ist

$$S_k \geq S_{2^m} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{m\text{-mal}} = 1 + \frac{m}{2}$$

28. Wir betrachten die Geraden N_1N_1 , $N_{-1}N_{-1}$, N_2N_2 , $N_{-2}N_{-2}$, die parallel zur Geraden NN verlaufen (Abb. 26).

Ein Wanderer befinde sich in einem Punkt der Geraden N_kN_k . Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ geht der Wanderer mit dem nächsten Schritt nach unten und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ mit dem nächsten Schritt nach oben, d. h., er bleibt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf der Geraden N_kN_k .

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ geht der Wanderer bei diesem Schritt nach rechts und erreicht die Gerade $N_{k+1}N_{k+1}$ und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ geht er einen Schritt nach links und erreicht die Gerade $N_{k-1}N_{k-1}$.

Indem wir jede der Geraden N_kN_k als einen Zustand ansehen, erhalten wir den Tatbestand, den wir bereits in Aufgabe 25 behandelt haben.

Den Punkten entsprechen hier die Geraden N_kN_k , $p = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{2}$. Nach dem dort Bewiesenen erreicht der Wanderer jede beliebige Gerade mit der Wahrscheinlichkeit 1, also auch die Gerade NN .