
**I.M. Gelfand, E.G. Glagolewa,
A.A. Kirillov**

Die Koordinatenmethode

1968 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
MSB: Nr. 41
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Dieses Büchlein ist der Koordinatenmethode gewidmet. Es setzt keinerlei über den Schulstoff der 10. Klasse hinausgehende spezielle Kenntnisse voraus. Jedoch ist das Heft nicht für ein schnelles Überlesen, sondern für ein systematisches Studium geschrieben. Deshalb wird es möglicherweise nicht ganz leicht sein, es zu lesen.

Um den Weg durch das Büchlein etwas zu erleichtern, setzen wir an den Rändern "Buchstaben".¹

Mit dem Buchstaben "P" sind Stellen gekennzeichnet, die für das Verständnis des Folgenden notwendige Kenntnisse enthalten: Definitionen, Formeln usw. **P**

Bei einem solchen Zeichen muss man verweilen, diese Stelle mehrfach lesen und sich unbedingt einprägen.

Besondere Aufmerksamkeit erfordern Stellen, die mit dem Zeichen "A " gekennzeichnet sind. Es steht häufig dort, wo auf den ersten Blick alles leicht und einfach zu sein scheint. Wenn man sich dort aber nicht alles gründlich überlegt, kann das im weiteren zu ernsthaften Fehlern führen. **A**

Das Zeichen steht auch dort, wo schwieriger Stoff behandelt wird.

Sehr große Bedeutung messen wir dem Lösen von Aufgaben bei. Aufgaben und Fragen sind zu Abschnitten "Übungsaufgaben" zusammengefasst, manchmal findet man sie aber auch im Text. Sie sollten unbedingt gelöst werden!

Wir wünschen ein erfolgreiches Studium!

Die Autoren

¹Im Original wurden die Verkehrsschilder "Parkplatz" und "Allgemeine Gefahrenstelle!" als Symbole verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrie im ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum	6
1.1	Die Koordinaten eines Punktes auf einer Geraden	6
1.1.1	Die Zahlenachse	6
1.1.2	Der Absolutbetrag einer Zahl	8
1.1.3	Der Abstand zwischen zwei Punkten	9
1.2	Die Koordinaten eines Punktes in der Ebene	11
1.2.1	Die Koordinatenebene	11
1.2.2	Beziehungen, die die Koordinaten miteinander verknüpfen . . .	13
1.2.3	Der Abstand zwischen zwei Punkten	14
1.2.4	Wie kann man Figuren angeben?	17
1.2.5	Wir beginnen Aufgaben zu lösen	20
1.2.6	Andere Koordinatensysteme	23
1.3	Die Koordinaten eines Punktes im Raum	26
1.3.1	Koordinatenachsen und -ebenen	26
1.3.2	Wie kann man im Raum Figuren angeben?	30
2	Geometrie im vierdimensionalen Raum	34
2.1	Einleitung	34
2.1.1	Einige allgemeine Überlegungen	34
2.1.2	Die Geometrie hilft rechnen	35
2.1.3	Man braucht den vierdimensionalen Raum	37
2.1.4	Die Besonderheiten des vierdimensionalen Raumes	38
2.1.5	Etwas Physik	39
2.2	Der vierdimensionale Raum	40
2.2.1	Geometrische Arbeitsmethoden	40
2.2.2	Koordinatenachsen und -ebenen	41
2.2.3	Einige Aufgaben	44
2.3	Der vierdimensionale Würfel	46
2.3.1	Definition der Kugel und des Würfels	46
2.3.2	Die Struktur des vierdimensionalen Würfels	48
2.3.3	Aufgaben über den Würfel	53
3	Literatur	55

Einleitung

In Mitteilungen über den Start eines neuen künstlichen Erdtrabanten liest man oft die Worte: "Der künstliche Erdtrabant bewegt sich auf einer Umlaufbahn, die der berechneten nahe kommt". -

Wie kann man die Umlaufbahn eines künstlichen Erdtrabanten, also eine gewisse Kurve, berechnen, d.h. in Zahlen ausdrücken? Denn dazu muss man ja geometrische Begriffe in die Zahlensprache übersetzen und in erster Linie die Lage eines Punktes im Raum (oder in der Ebene oder auf der Erdoberfläche usw.) mit Hilfe von Zahlen bestimmen können.

Die Methode, die Lage eines Punktes mit Hilfe von Zahlen zu bestimmen, nennt man Koordinatenmethode.

Die Zahlen, mit deren Hilfe die Lage eines Punktes bestimmt wird, heißen die Koordinaten des Punktes.

So bestimmen die wohlbekannten geographischen Koordinaten die Lage eines Punktes auf einer Fläche (der Erdoberfläche): Jeder Punkt der Erdoberfläche hat zwei Koordinaten, eine Breite und eine Länge.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raum sind nicht nur zwei, sondern drei Zahlen erforderlich. Will man z.B. die Lage eines künstlichen Erdtrabanten bestimmen, kann man seine Höhe über der Erdoberfläche und die Breite und Länge des Punktes der Erde, über dem er sich befindet, angeben.

Kennt man jedoch die Umlaufbahn des Erdtrabanten, d.h. die Kurve, auf der er sich bewegt, so kann seine Lage auf dieser Kurve durch eine einzige Zahl bestimmt werden: Man kann beispielsweise die Länge des Weges angeben, den der Erdtrabant von einem gewissen Punkt der Umlaufbahn an zurückgelegt hat.²

Genauso wendet man die Koordinatenmethode an, wenn man die Lage eines Punktes auf einer Eisenbahnstrecke festlegen will:

Man gibt die Nummer des Kilometersteines an. Diese Nummer ist dann auch die Koordinate des Punktes auf der Eisenbahnstrecke. Beispielsweise ist in der Angabe "Haltestelle 42. Kilometer" die Zahl 42, die Koordinate dieser Station.

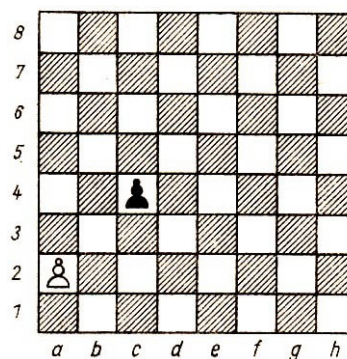


Bild 1

²Man sagt auch, dass eine Kurve eine Dimension, eine Fläche zwei Dimensionen und der Raum drei Dimensionen hat. Dabei versteht man unter der Anzahl der Dimensionen die Anzahl der Koordinaten, die jeweils die Lage eines Punktes bestimmen.

Koordinaten besonderer Art werden beim Schachspiel verwandt. Dort fixiert man die Stellung der Figuren auf dem Brett mit Hilfe von Buchstaben und Zahlen. Die senkrechten Feldreihen werden mit Buchstaben des lateinischen Alphabets und die horizontalen Feldreihen mit Ziffern bezeichnet.

Jedem Feld des Brettes entspricht ein Buchstabe, der die senkrechte Feldreihe angibt, in der das Feld liegt, und eine Ziffer, die die entsprechende horizontale Feldreihe angibt.

Auf Bild 1 steht der weiße Bauer im Feld a2, der schwarze Bauer im Feld c4. Somit kann man a2 als Koordinaten des weißen, c4 als Koordinaten des schwarzen Bauern ansehen.

Die Verwendung von Koordinaten beim Schach macht es möglich, brieflich Schach zu spielen. Man braucht kein Schachbrett mit der Stellung der Figuren zu zeichnen, wenn man einen Zug mitteilen will. Es genügt z.B. zu sagen: "Der Großmeister zog e2 - e4", und alle wissen gleich, wie die Partie begonnen wurde.

Die in der Mathematik verwendeten Koordinaten gestatten es, die Lage eines beliebigen Punktes des Raumes, einer Ebene oder einer Linie mit Hilfe von Zahlen zu bestimmen. Das macht es möglich, Figuren verschiedener Art zu "chiffrieren", mit Hilfe von Zahlen aufzuschreiben. Ein Beispiel für diese Art Chiffrierung findet man in der Übung 1 zu Abschnitt 1.2.1.

Besondere Bedeutung kommt der Koordinatenmethode deshalb zu, weil sie es ermöglicht, die modernen Rechenmaschinen auch beim Lösen geometrischer Aufgaben, bei der Untersuchung beliebiger geometrischer Objekte und Beziehungen, einzusetzen.

Wir machen uns nun mit den in der Mathematik verwendeten Koordinaten vertraut, indem wir zunächst den einfachsten Fall betrachten: Wie bestimmt man die Lage eines Punktes auf einer Geraden ?

1 Geometrie im ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum

1.1 Die Koordinaten eines Punktes auf einer Geraden

1.1.1 Die Zahlenachse

Will man die Lage eines Punktes auf einer Geraden festlegen, geht man folgendermaßen vor. Man wählt auf der Geraden einen Ursprung (einen gewissen Punkt 0), eine Einheitsstrecke (eine Strecke e) und einen positiven Richtungssinn, der in Bild 2 durch einen Pfeil gekennzeichnet wurde.

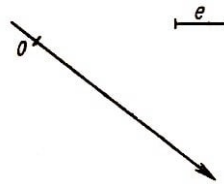


Bild 2

Eine Gerade, auf der ein Ursprung, eine Einheitsstrecke und ein positiver Richtungssinn angegeben ist, nennt man eine Zahlengerade oder Zahlenachse. **P**

Zur Charakterisierung der Lage eines Punktes auf einer Zahlengeraden genügt es, eine Zahl zu nennen, z.B. $+5$. Das bedeutet dann, dass der Punkt im positiven Richtungssinn 5 Einheitsstrecken vom Ursprung entfernt liegt.

Die Zahl, die die Lage eines Punktes auf einer Zahlenachse charakterisiert, nennt man die Koordinate des Punktes bezüglich dieser Achse. **P**

Die Koordinate eines Punktes auf einer Zahlenachse ist gleich dem in der gewählten Maßeinheit ausgedrückten Abstand des Punktes vom Ursprung, der mit dem Zeichen plus versehen wird, wenn der Punkt vom Ursprung aus im positiven Richtungssinn erreicht werden kann, und mit dem Zeichen minus im umgekehrten Falle. Den Ursprung nennt man häufig Koordinatenursprung.

Der Ursprung (der Punkt 0) hat die Koordinate null.

Man verwendet die Bezeichnungen $M(-7)$, $A(x)$ usw. Die erste bezeichnet einen Punkt M mit der Koordinate minus sieben, die zweite einen Punkt A mit der Koordinate x . Oft sagt man kurz: "der Punkt minus sieben", "der Punkt x " u. ä.

Indem wir Koordinaten einführten, stellten wir zwischen den Zahlen und den Punkten einer Geraden eine Zuordnung her. Diese Zuordnung hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Jedem Punkt der Geraden entspricht eine bestimmte Zahl und jeder Zahl entspricht ein bestimmter Punkt der Geraden; zwei verschiedenen Punkten entsprechen zwei verschiedene Zahlen. Eine solche Zuordnung heißt in der Mathematik umkehrbar eindeutig oder eineindeutig. **A**

Auf den ersten Blick scheint es ganz einfach zu sein, zwischen den Punkten einer Geraden und den Zahlen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zu treffen. Als jedoch die Mathematiker darüber nachdachten, stellte sich heraus, dass man eine umfangreiche

und komplizierte Theorie entwickeln muss, wenn man den genauen Sinn dieser Worte erklären will.

So entstehen sofort zwei "einfache" Fragen, auf die schwer eine Antwort zu geben ist: Was ist eine Zahl, und was soll man unter einem Punkt verstehen?

Diese Fragen gehören zu den Gebieten "Grundlagen der Geometrie" und "Axiomatik der Zahlen".

Ungeachtet dessen, dass das Bestimmen der Lage eines Punktes auf einer Geraden ein äußerst einfaches Problem ist, muss man es gründlich durchdenken, damit man sich daran gewöhnt, dass Beziehungen zwischen Zahlen durch geometrische Beziehungen ausgedrückt werden können und umgekehrt.

Wer den Abschnitt 1.1.1. richtig verstanden hat, dem fällt es auch nicht schwer, die folgenden Übungsaufgaben zu lösen. Wer jedoch die Aufgaben nicht lösen kann, der hat irgend etwas überlesen oder nicht verstanden. Er sollte dann zurückblättern und diesen Abschnitt noch einmal lesen.

Übungsaufgaben

1. a) Auf einer Zahlenachse sind die Punkte: $A(-2)$, $B(\frac{13}{3})$, $K(0)$ einzuzeichnen.

b) Man zeichne auf einer Zahlenachse den Punkt $M(2)$ ein!

Welche zwei Punkte A und B dieser Zahlenachse liegen vom Punkt M drei Einheitsstrecken weit entfernt? Welche Koordinaten haben die Punkte A und B ?

2. a) Es ist bekannt, dass der Punkt $A(a)$ weiter rechts als der Punkt $B(b)$ liegt.³ Welche Zahl ist größer, a oder b ?

b) Ohne die Punkte auf einer Zahlenachse einzuzeichnen, ist zu entscheiden, welcher der zwei Punkte weiter rechts als der andere liegt: $A(-3)$ oder $B(-4)$, $A(3)$ oder $B(4)$, $A(-3)$ oder $B(4)$, $A(3)$ oder $B(-4)$?

3. Welcher der beiden Punkte liegt weiter rechts als der andere: $A(a)$ oder $B(-a)$? **A**
(Antwort : Das lässt sich nicht sagen. Ist a eine positive Zahl, so liegt A weiter rechts als B ; ist a jedoch eine negative Zahl, so liegt B weiter rechts als A .)

4. Welcher der zwei Punkte liegt weiter rechts als der andere: a.) $M(x)$ oder $N(2x)$;

b) $A(c)$ oder $B(c+2)$; c) $A(x)$ oder $B(x-a)$?

(Antwort: Ist a größer als null, so liegt A weiter rechts; ist a kleiner als null, so liegt B weiter rechts. Ist $a = 0$, dann fallen A und B zusammen.);

d) $A(x)$ oder $B(x^2)$.

5. Man zeichne auf einer Zahlenachse die Punkte $A(-5)$ und $B(7)$ ein und bestimme die Koordinate des Mittelpunktes der Strecke AB .

6. Auf einer Zahlenachse sollen mit einem Stift die Punkte markiert werden, deren Koordinaten: a) ganze Zahlen; b) positive Zahlen sind.

7. Man markiere auf einer Zahlenachse alle Punkte x , für die a) $x < 2$, b) $x \geq 5$, c)

³Hier und im weiteren wird wie üblich angenommen, dass der den positiven Richtungssinn der Zahlenachse angehende Pfeil nach rechts zeigen soll.

$2 < x < 5$, d) $-3\frac{1}{4} \leq x \leq 0$ ist.

1.1.2 Der Absolutbetrag einer Zahl

Absolutbetrag der Zahl x (Betrag der Zahl x , Modul der Zahl x) nennt man den Abstand des Punktes $A(x)$ vom Koordinatenursprung.

P

Man kennzeichnet den Absolutbetrag der Zahl x durch senkrechte Striche (Betragszeichen): $|x|$ ist der Absolutbetrag von x .

Beispielsweise ist $|-3| = 3$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

Hieraus folgt:

wenn $x > 0$ ist, dann ist $|x| = x$,

wenn $x < 0$ ist, dann ist $|x| = -x$,

wenn $x = 0$ ist, dann ist $|x| = 0$,

A

Da die Punkte $A(a)$ und $B(-a)$ vom Koordinatenursprung gleichweit entfernt sind, haben die Zahlen a und $-a$ den gleichen Absolutbetrag: $|a| = |-a|$.

Übungsaufgaben

1. Welche Werte kann der Ausdruck $\frac{|x|}{x}$ annehmen?

2. Wie kann man folgende Ausdrücke ohne das Betragszeichen schreiben:

a) $|a^2|$; b) $|a - b|$, wenn $a > b$; c) $|a - b|$, wenn $a < b$; d) $|-a|$, wenn a eine negative Zahl ist?

3. Es soll gelten: $|x - 3| = x - 3$. Welche Werte kann x annehmen?

4. Wo liegen auf einer Zahlenachse die Punkte x , für die gilt: a) $|x| = 2$; b) $|x| > 3$?

Lösung. Wenn x eine positive Zahl ist, so ist $|x| = x$, und aus $|x| > 3$ folgt $x > 3$; wenn x eine negative Zahl ist, dann ist $|x| = -x$, und aus der Ungleichung $-x > 3$ folgt $x < -3$.

(Antwort. Der Ungleichung b) genügen alle Punkte, die links vom Punkt -3, und alle Punkte, die rechts vom Punkt 3 liegen. Diese Antwort kann man schneller finden, wenn man beachtet, dass $|x|$ der Abstand eines Punktes x vom Koordinatenursprung ist. Dann ist klar, dass die gesuchten Punkte vom Koordinatenursprung einen größeren Abstand als 3 Einheitsstrecken haben. Die Antwort ergibt sich aus einer Zeichnung.)

c) $|x| \leq 5$; d) $3 < |x| < 5$?

d) Wo liegen die Punkte, für die $|x - 2| = 2 - x$ ist?

5. Man löse die Gleichungen:

a) $|x - 2| = 3$ b) $|x + 1| + |x + 2| = 1$.

(Antwort. Die Gleichung b) hat unendlich viele Lösungen: Die Menge aller Lösungen füllt die Strecke $-2 \leq x \leq -1$ aus, d.h. jede Zahl, die größer oder gleich -2 und kleiner oder gleich -1 ist, genügt dieser Gleichung.)

A

1.1.3 Der Abstand zwischen zwei Punkten

Wir beginnen mit einer Aufgabe. Man bestimme den Abstand zwischen den Punkten
a) $A(-7)$ und $B(-2)$, b) $A(-3\frac{1}{2})$ und $B(-9)$.

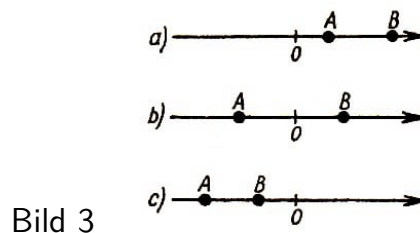
Diese Aufgaben lassen sich leicht lösen, denn wenn man die Koordinaten der Punkte kennt, kann man herausfinden, welcher der Punkte weiter rechts bzw. weiter links als der andere liegt, wie sie bezüglich des Koordinatenursprungs liegen usw. Danach kann man sich ganz leicht überlegen, wie der gesuchte Abstand zu berechnen ist.

Jetzt wollen wir die allgemeine Formel für den Abstand zweier Punkte einer Zahlenachse herleiten, d.h. folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $A(x_1)$ und $B(x_2)$; man bestimme den Abstand $\rho(A, B)$ zwischen diesen Punkten.⁴

Lösung. Da nun für die Koordinaten der Punkte keine konkreten Werte bekannt sind, muss man alle möglichen Fälle der gegenseitigen Lage von drei Punkten A , B und 0 , wobei 0 der Koordinatenursprung ist, untersuchen.

Solche Fälle gibt es sechs. Wir betrachten zunächst die drei Fälle, in denen B weiter rechts als A liegt (Bild 3a, b, c).



Im ersten Fall (Bild 3a) ist der Abstand $\rho(A, B)$ gleich der Differenz der Abstände der Punkte B und A vom Koordinatenursprung. Weil hier x_1 und x_2 positiv sind, ist

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1$$

Im zweiten Fall (Bild 3b) ist der Abstand gleich der Summe der Abstände der Punkte B und A vom Koordinatenursprung, d.h. wiederum

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1$$

da ja hier x_2 positiv, x_1 jedoch negativ ist.

Man zeige, dass im dritten Fall (Bild 3c) die Formel für den Abstand die gleiche Gestalt hat.

Die restlichen drei Fälle (Bild 4) unterscheiden sich von den betrachteten dadurch, dass die Punkte A und B miteinander vertauscht wurden.

⁴Den Abstand bezeichnet man gewöhnlich mit dem griechischen Buchstaben ρ ("rho"). Mit $\rho(A, B)$ wird der Abstand zwischen den Punkten A und B bezeichnet.

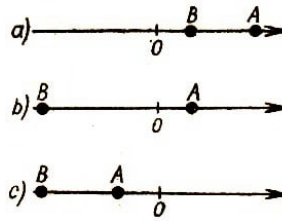


Bild 4

In jedem dieser Fälle kann man nachprüfen, dass der Abstand zwischen den Punkten A und B gleich $\rho(A, B) = x_1 - x_2$ ist.

Der Abstand $\rho(A, B)$ ist also immer dann, wenn $x_2 > x_1$ ist, gleich $x_2 - x_1$, und wenn $x_1 > x_2$ ist, gleich $x_1 - x_2$.

Beachtet man die Definition des Absolutbetrages einer Zahl, kann man für den Abstand eine Formel niederschreiben, die auf alle Fälle anwendbar ist:

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$$

Wenn man will, kann man diese Formel auch in der Gestalt

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|$$

schreiben. Ist man pedantisch, muss man noch den Fall $x_1 = x_2$ untersuchen, d.h., wenn die Punkte A und B zusammenfallen. Dann ist natürlich auch

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$$

Somit ist die gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

Übungsaufgaben

1. Auf einer Zahlenachse sind die Punkte x zu markieren, für die a) $\rho(x, 7) < 3$, b) $|x - 2| > 1$, c) $|x + 3| = 3$ ist.

2. Auf einer Zahlenachse seien zwei Punkte $A(x_1)$ und $B(x_2)$ gegeben. Man bestimme die Koordinate des Mittelpunktes der Strecke AB .

(Anmerkung. Hier muss untersucht werden, welche gegenseitige Lage die Punkte A und B auf einer Zahlenachse einnehmen können, oder es muss eine solche Lösung angegeben werden, die in jedem Falle richtig ist.)

3. Man bestimme die Koordinaten der Punkte auf einer Zahlengeraden, deren Abstand vom Punkt $B(-3)$ dreimal so groß ist wie vom Punkt $A(-9)$.

4. Man löse jetzt die Gleichungen a) und b) der Übung 5 des Abschnitts 1.1.2. unter Verwendung des Begriffs Abstand zwischen zwei Punkten.

5. Folgende Gleichungen sind zu lösen:

a) $|x + 3| + |x - 1| = 5$;

b) $|x + 3| + |x - 1| = 4$;

c) $|x + 3| + |x - 1| = 3$;

d) $|x + 3| - |x - 1| = 5$;

e) $|x + 3| - |x - 1| = 4$;

f) $|x + 3| - |x - 1| = 3$;

1.2 Die Koordinaten eines Punktes in der Ebene

1.2.1 Die Koordinatenebene

Um die Koordinaten eines Punktes in einer Ebene definieren zu können, wählen wir in dieser Ebene zunächst zwei aufeinander senkrecht stehende Zahlenachsen aus. Eine dieser Achsen nennt man Abszissenachse oder x -Achse, die andere Ordinatenachse oder y -Achse. P

Die Orientierung der Achsen wählt man gewöhnlich so, dass der positive Teil der x -Achse bei einer Drehung um den Achsenschnittpunkt um 90° im Gegenuhrzeigersinn in den positiven Teil der y -Achse übergeht (Bild 5).

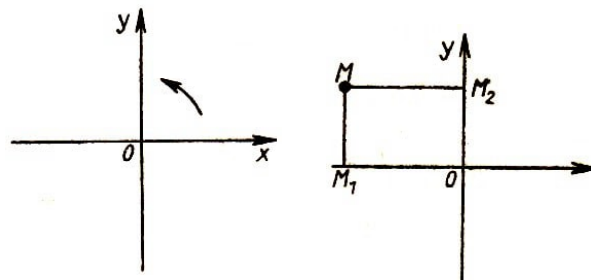


Bild 5 und 6

Den Schnittpunkt der Achsen nennt man Koordinatenursprung und bezeichnet ihn mit dem Buchstaben O . Er ist der Ursprung für jede der beiden Koordinatenachsen. Als Einheitsstrecken auf diesen Achsen wählt man in der Regel gleiche Strecken.

Wir betrachten in der Ebene einen beliebigen Punkt M und fällen von ihm aus die Lote auf die Koordinatenachsen (Bild 6). Die Schnittpunkte M_1 und M_2 dieser Lote mit den Achsen heißen die Projektionen des Punktes M auf die Koordinatenachsen.

Der Punkt M_1 liegt auf der x -Achse; ihm entspricht deshalb eine bestimmte Zahl x , seine Koordinate auf dieser Achse. Genauso entspricht dem Punkt M_2 eine bestimmte Zahl y , seine Koordinate auf der y -Achse.

Auf dieser Weise werden jedem Punkt M der Ebene zwei Zahlen x und y zugeordnet, die man die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten des Punktes M nennt. Die Zahl x heißt die Abszisse des Punktes M , die Zahl y seine Ordinate. P

Umgekehrt kann man je zwei Zahlen x und y einen Punkt der Ebene zuordnen, dessen Abszisse x und dessen Ordinate y ist.

Jetzt ist eine umkehrbar eindeutige Zuordnung⁵ zwischen den Punkten der Ebene und den Paaren von Zahlen x und y getroffen worden, wobei x und y in einer bestimmten Reihenfolge stehen (erst x , dann y). A

Somit versteht man unter den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten eines Punktes einer Ebene die Koordinaten der Projektionen dieses Punktes auf die Koordinatenachsen in dieser Ebene. P

⁵Eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer Ebene und den Zahlenpaaren ist eine solche Zuordnung, bei der jedem Punkt genau ein Zahlenpaar und jedem Zahlenpaar genau ein Punkt entspricht. (Verschiedene Punkte entsprechen also verschiedenen Zahlenpaaren und umgekehrt.)

Die Koordinaten eines Punktes M schreibt man gewöhnlich folgendermaßen nieder: $M(x, y)$. An erster Stelle steht die Abszisse, an zweiter die Ordinate. Manchmal sagt man statt "der Punkt mit den Koordinaten $(3, -8)$ " nur kurz "der Punkt $(3, -8)$ ".

Die Koordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier Viertel oder Quadranten. Als ersten Quadranten sieht man das Viertel zwischen dem positiven Teil der x -Achse und dem positiven Teil der y -Achse an. Weiter werden die Quadranten der Reihe nach im Gegenuhrzeigersinn nummeriert (Bild 7).

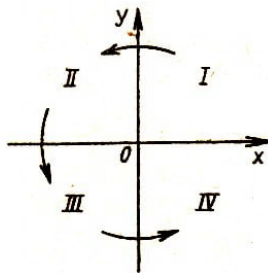


Bild 7

Übungsaufgaben

Zunächst einige ganz einfache Aufgaben:

1. Man entschlüssele die folgenden Angaben (durch Eintragen der Punkte in eine Zeichnung)!

$(-7, 3), (1, -2), (-6, 2), (6, 0), (2, 3), (-1, 0), (-1, -3), (4, -2), (-7, 2), (2, 1),$
 $(-1, 3), (-4, 0), (3, 3), (-1, 1), (3, -3), (-2, 2), (-7, 1), (4, -1), (-1, -1), (6, -2),$
 $(7, 3), (6, 3), (-1, -2), (2, -3), (-7, 0), (3, 0), (-1, 2), (6, -3), (9, 2), (6, 2), (8, -1),$
 $(-5, 1), (-7, -1), (7, -3), (7, 0), (-3, 1), (8, -3), (6, 1), (1, 2), (6, -1), (-7, -2),$
 $(8, 1), (9, -2), (8, 3), (-7, -3)$

2. Man stelle fest, ohne eine Zeichnung zu verwenden, in welchem Quadranten der Punkt $A(1, -3)$ liegt.

3. In welchen Quadranten kann ein Punkt liegen, wenn seine Abszisse positiv ist?

4. Welche Vorzeichen haben die Koordinaten von Punkten, die im zweiten, dritten bzw. vierten Quadranten liegen?

5. Wir betrachten den Punkt der x -Achse mit der Koordinate -5. Welche Koordinaten hat dieser Punkt in der Ebene?

(Antwort: Seine Abszisse ist gleich -5, seine Ordinate gleich null.)

Und hier folgen ein wenig schwierigere Aufgaben.

6. Man trage die Punkte $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ und $D(0, 0)$ in eine Zeichnung ein! Sie bilden die Eckpunkte eines Quadrats.

Welche Länge haben die Seiten dieses Quadrats? Welchen Flächeninhalt hat es⁶?

⁶Als Maßeinheit für den Flächeninhalt nehmen wir den Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seiten der Einheitsstrecke der Achsen kongruent sind.

Man bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten des Quadrats. Kann man beweisen, dass $ABCD$ ein Quadrat ist? Man suche noch vier Punkte (und gebe deren Koordinaten an), die die Eckpunkte eines Quadrats sind.

7. Man zeichne ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$. Der Punkt A liege im Koordinatenursprung, die Abszissenachse sei von A nach B gerichtet und die Strecke AB sei Einheitsstrecke. Man bestimme nun die Koordinaten aller Eckpunkte des gegebenen Sechsecks. Wieviele Lösungen hat diese Aufgabe?

8. In einer Ebene seien die Punkte $A(0,0)$, $B(x_1, y_1)$ und $D(x_2, y_2)$ gegeben. Welche Koordinaten muss der Punkt C haben, wenn das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm sein soll?

1.2.2 Beziehungen, die die Koordinaten miteinander verknüpfen

Sind die beiden Koordinaten eines Punktes bekannt, dann ist seine Lage in der Ebene vollständig bestimmt.

Was kann man aber über die Lage eines Punktes aussagen, wenn nur eine seiner Koordinaten bekannt ist?

Wo liegen z.B. alle die Punkte, deren Abszisse gleich drei ist?

Wo liegen alle die Punkte, für die eine Koordinate (es ist aber unbekannt, welche) gleich drei ist?

Durch die Angabe einer der zwei Koordinaten wird im allgemeinen eine Kurve bestimmt. Diese Tatsache taucht als Problem im Roman "Die Kinder des Kapitän Grant" von Jules Verne auf. Die Helden des Buches kannten nur eine der Koordinaten des Ortes (die Breite), an dem das Schiff untergegangen war; da sie alle in Frage kommenden Stellen untersuchen wollten, waren sie deshalb gezwungen, längs eines ganzen Breitenkreises einmal um die Erde zu gehen, nämlich längs der Linie, deren Punkte alle die Breite $37^\circ 11'$ haben.

Beziehungen zwischen Koordinaten definieren in den meisten Fällen nicht einen Punkt, sondern eine gewisse Menge von Punkten. Wenn man z.B. alle Punkte markiert, deren Abszisse gleich der Ordinate ist, d.h. deren Koordinaten der Gleichung

$$x = y$$

genügen, so erhält man eine Gerade - die im 1. und 3. Quadranten verlaufende Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Koordinatenachsen (Bild 8).

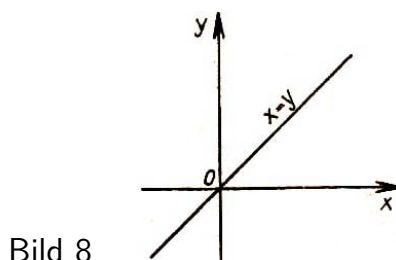


Bild 8

Manchmal sagt man für "Punktmenge" auch "geometrischer Ort von Punkten". So ist **P**

z.B. der geometrische Ort der Punkte, deren Koordinaten der Beziehung $x = y$ genügen, die im 1. und 3. Quadranten verlaufende Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Koordinatenachsen, wie wir soeben festgestellt haben.

Man muss aber nicht denken, dass jede Beziehung zwischen den Koordinaten unbedingt eine Kurve in der Ebene bestimmt. So kann man sich leicht davon überzeugen, dass beispielsweise die Beziehung $x^2 + y^2 = 0$ einen einzigen Punkt, den Koordinatenursprung, definiert.

Die Beziehung $x^2 + y^2 = -1$ wird von den Koordinaten keines einzigen Punktes der Ebene erfüllt (sie bestimmt die sog. "leere" Menge).

Die Beziehung

$$x^2 - y^2 = 0$$

definiert in der Ebene ein Paar aufeinander senkrecht stehender Geraden (Bild 9). Die Beziehung

$$x^2 - y^2 > 0$$

bestimmt ein ganzes Gebiet (Bild 10).

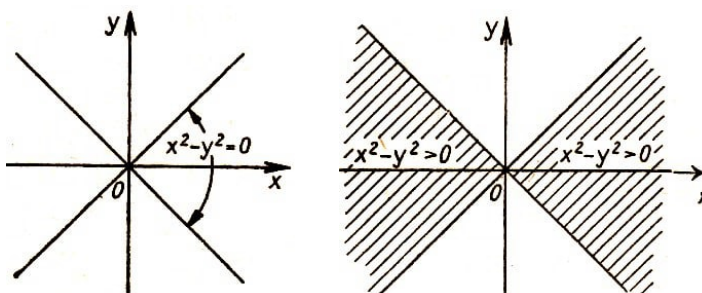


Bild 9 und 10

Übungsaufgaben

1. Welche Punktmengen werden durch die folgenden Beziehungen definiert?

- a) $|x| = |y|$; b) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$; c) $|x| + x = |y| + y$; d) $[x] = [y]^7$; e) $x - [x] = y - [y]$; f) $x - [x] > y - [y]$.

(Die Antwort zur Übung 1 f gibt Bild 36).

1.2.3 Der Abstand zwischen zwei Punkten

Wir können jetzt über Punkte in der Zahlensprache sprechen. So ist es z.B. schon nicht mehr notwendig, zu erklären:

Der Punkt, der sich drei Einheitsstrecken weiter rechts als die y -Achse und fünf Einheitsstrecken tiefer als die x -Achse befindet. Es genügt einfach zu sagen: Der Punkt $(3; -5)$.

Wir sprachen bereits davon, dass das bestimmte Vorteile in sich birgt. So kann man eine aus Punkten bestehende Zeichnung telegraphisch übermitteln oder einer Rechenmaschine eingeben, die Zeichnungen überhaupt nicht lesen kann, Zahlen aber sehr wohl versteht.

⁷Mit dem Symbol $[x]$ wird das größte Ganze der Zahl x bezeichnet, d.h. die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft. Beispielsweise ist $[3,5] = 3$, $[5] = 5$, $[-2,5] = -3$.

Im vorhergehenden Abschnitt gaben wir mit Hilfe von Beziehungen zwischen Zahlen einige Punktmengen in der Ebene an. Jetzt versuchen wir nach und nach andere geometrische Begriffe und Sachverhalte in die Zahlensprache zu übertragen.

Wir beginnen mit einer einfachen und alltäglichen Aufgabe, der Bestimmung des Abstandes zwischen zwei Punkten der Ebene.

Die Punkte seien durch ihre Koordinaten gegeben. Unsere Aufgabe besteht darin, eine Regel zu finden, nach der der Abstand zwischen den Punkten berechnet werden kann, wenn ihre Koordinaten bekannt sind. Natürlich können wir uns bei der Herleitung dieser Regel auf eine Zeichnung stützen; die Regel selbst darf jedoch keinerlei Hinweise auf die Zeichnung enthalten, sondern sie darf nur angeben, welchen Operationen in welcher Reihenfolge die gegebenen Zahlen, die Koordinaten der Punkte, zu unterwerfen sind, damit wir die gesuchte Zahl, den Abstand zwischen den Punkten, erhalten.

Möglicherweise kommt einigen Lesern dieses Herangehen an das Lösen der Aufgabe seltsam und gekünstelt vor. Was ist einfacher als das, sagen sie, die Punkte sind gegeben, meinetwegen sogar durch Koordinaten. Man zeichne diese Punkte auf, nehme ein Lineal und messe den Abstand zwischen ihnen.

Diese Methode ist manchmal nicht einmal so schlecht. Aber man stelle sich vor, dass man mit einer Rechenmaschine arbeiten muss.

Die Rechenmaschine hat kein Lineal und kann nicht zeichnen, dafür kann sie aber so schnell rechnen⁸, dass das für sie überhaupt kein Problem darstellt. Unsere Aufgabe besteht darin, eine Regel für die Berechnung des Abstandes zwischen zwei Punkten zu finden, die aus Befehlen besteht, die eine Maschine ausführen kann.

Die gestellte Aufgabe löst man am besten zunächst für den speziellen Fall, dass einer der gegebenen Punkte mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Fangen wir mit einigen Zahlenbeispielen an:

Es ist der Abstand der Punkte $(12, 5)$, $(-3, 15)$ und $(-4, -7)$ vom Koordinatenursprung zu bestimmen.

Hinweis. Man benutze den Satz des Pythagoras.

Nun schreiben wir die allgemeine Formel für die Berechnung des Abstandes eines Punktes vom Koordinatenursprung nieder:

Der Abstand des Punktes $M(x, y)$ vom Koordinatenursprung beträgt

$$\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Offensichtlich genügt die in dieser Formel zum Ausdruck kommende Regel den oben gestellten Anforderungen. Insbesondere kann man sie bei Berechnungen auf Maschinen verwenden, die Zahlen multiplizieren und addieren und die Quadratwurzel aus ihnen ziehen können.

Nun lösen wir die allgemeine Aufgabe.

⁸Eine moderne Rechenmaschine führt in einer Sekunde Hunderttausende von Additionen bzw. Zehntausende von Multiplikationen aus.

Aufgabe. Gegeben seien zwei Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ der Ebene. Zu bestimmen ist der Abstand $\rho(A, B)$ zwischen ihnen.

Lösung. Wir bezeichnen mit A_1, B_1, A_2, B_2 (Bild 11) die Projektionen der Punkte A und B auf die Koordinatenachsen.

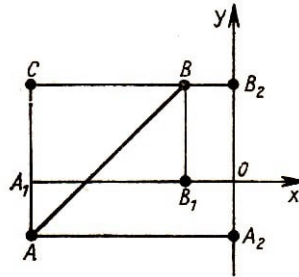


Bild 11

Den Schnittpunkt der Geraden AA_1 und BB_2 bezeichnen wir mit C . Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC erhalten wir nach dem pythagoreischen Lehrsatz⁹

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C) \quad (1)$$

Die Länge der Strecke AC ist aber gleich der Länge der Strecke A_2B_2 . Die Punkte A_2 und B_2 liegen auf der y -Achse und haben die Koordinaten y_1 bzw. y_2 . Nach der in Abschnitt 1.1.3. hergeleiteten Formel ist der Abstand zwischen ihnen gleich

$$|y_1 - y_2|$$

Auf analoge Weise erhalten wir, dass die Strecke BC die Länge $|x_1 - x_2|$ hat. Die gefundenen Werte für $\rho(A, C)$ und $\rho(B, C)$ setzen wir in die Formel (1) ein und erhalten

$$\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Somit wird der Abstand $\rho(A, B)$ zwischen den Punkten $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ nach der Formel

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

berechnet.

Es sei bemerkt, dass alle unsere Überlegungen nicht nur für die in Bild 11 dargestellte Lage der Punkte Gültigkeit besitzen, sondern auch für jede beliebige andere.

Man fertige sich eine andere Zeichnung an (z.B. mit dem Punkt A im ersten Quadranten und dem Punkt B im zweiten) und überzeuge sich davon, dass man alle Überlegungen wörtlich wiederholen kann, sogar ohne dabei die Bezeichnungen für die Punkte ändern zu müssen.

Wir bemerken noch, dass man die Formel für den Abstand zwischen Punkten einer

⁹Mit $\rho^2(A, B)$ bezeichnen wir das Quadrat des Abstands $\rho(A, B)$.

Geraden aus dem Abschnitt 1.1.3. analog schreiben kann:¹⁰

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Übungsaufgaben

1. In einer Ebene sind drei Punkte $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ und $C(1, -2)$ gegeben. Es ist zu beweisen, dass diese Punkte auf einer Geraden liegen. (Hinweis. Man zeige, dass eine Seite des "Dreiecks" ABC gleich der Summe seiner beiden anderen Seiten ist.)

2. Mit Hilfe der Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten ist der folgende Satz zu beweisen. Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

(Hinweis. Als Koordinatenursprung wähle man einen Eckpunkt des Parallelogramms und benutze die Ergebnisse der Aufgabe 3 des Abschnitts 1.2.1. Man sieht dann, dass der Beweis des Satzes auf den Nachweis einer einfachen algebraischen Identität hinausläuft. Welcher?)

3. Man beweise mit Hilfe der Koordinatenmethode folgenden

Satz: Wenn $ABCD$ ein Rechteck ist, dann gilt für jeden beliebigen Punkt M die Gleichheit $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$. Wie legt man die Koordinatenachsen am günstigsten?

1.2.4 Wie kann man Figuren angeben?

Im Abschnitt 1.2.2. haben wir einige Beispiele für Beziehungen zwischen den Koordinaten angegeben, die gewisse Figuren in der Ebene bestimmen. Üben wir uns noch ein bisschen darin, geometrische Figuren mit Hilfe von Beziehungen zwischen Zahlen zu beschreiben.

Jede Figur betrachten wir als die Menge der Punkte, aus denen sie besteht; eine Figur darstellen heißt ein Verfahren angeben, nach dem man bei jedem Punkt entscheiden

¹⁰Wir benutzen dabei, dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist (man hat die arithmetische Bedeutung des Wortes Wurzel im Auge und nicht die algebraische Bedeutung der Wurzel als Lösung einer algebraischen Gleichung). Unexakte Verwendung dieser Regel (manchmal nimmt man fälschlicherweise an, dass $\sqrt{x^2} = x$ sei) kann zu fehlerhaften Schlussfolgerungen führen. Als Beispiel führen wir eine Schlusskette an, die eine solche Ungenauigkeit enthält:

$$\begin{aligned} 1 - 3 + \frac{9}{4} &= 4 - 6 + \frac{9}{4} \\ \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \\ 1 - \frac{3}{2} &= 2 - \frac{3}{2} \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

kann, ob er der betrachteten Figur angehört oder nicht.

Um z.B. für den Kreis ein solches Verfahren zu finden, benutzen wir die Definition des Kreises als die Menge der Punkte, für die der Abstand von einem gewissen Punkt C (dem Mittelpunkt des Kreises) gleich einer Zahl R (seinem Radius) ist.

Das heißt, dafür, dass der Punkt $M(x, y)$ (Bild 12) auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $C(a, b)$ und dem Radius R liegt, ist notwendig und hinreichend, dass $\rho(M, C)$ gleich R ist.

Wir erinnern uns, dass der Abstand zwischen Punkten nach der Formel

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

berechnet wird.

Folglich wird die Bedingung dafür, dass der Punkt $M(x, y)$ auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $C(a, b)$ und dem Radius R liegt, durch die Beziehung $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$ zum Ausdruck gebracht, die man auch in der Gestalt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (2)$$

schreiben kann.

P

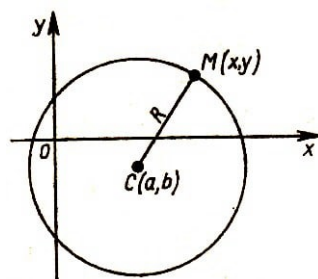


Bild 12

Will man also nachprüfen, ob irgendein Punkt auf dem Kreis liegt, muss man überprüfen, ob für diesen Punkt die Beziehung (2) erfüllt ist oder nicht. Zu diesem Zweck muss man in (2) an Stelle von x und y die Koordinaten des betrachteten Punktes einsetzen. Ergibt sich eine Identität, so liegt der Punkt auf dem Kreis; im entgegengesetzten Falle liegt der Punkt nicht auf dem Kreis.

Wenn wir also die Gleichung (2) kennen, können wir von jedem beliebigen Punkt der Ebene sagen, ob er auf dem Kreis liegt oder nicht. Die Gleichung (2) heißt deshalb die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $C(a, b)$ und dem Radius R .

Übungsaufgaben

1. Man schreibe die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $C(-2, 3)$ und dem Radius 5 nieder. Geht dieser Kreis durch den Punkt $(2, -1)$?
2. Man zeige, dass die Gleichung

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

in der Ebene einen Kreis bestimmt, und berechne seinen Mittelpunkt und seinen Radius.

Hinweis. Man schreibe die Gleichung in der Gestalt

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1 \quad \text{oder} \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

3. Welche Punktmenge wird durch die Beziehung

$$x^2 + y^2 \leq 4x + 4y$$

bestimmt?

(Lösung. Wir schreiben diese Ungleichung in der Form

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 8 \quad \text{oder} \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$$

Diese Beziehung bringt zum Ausdruck, dass der Abstand eines Punktes der gesuchten Menge vom Punkt $(2, 2)$ kleiner oder gleich $\sqrt{8}$ ist.

Offensichtlich füllen die Punkte, die dieser Beziehung genügen, eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{8}$ mit dem Mittelpunkt $(2, 2)$ aus. Da in der Beziehung das Gleichheitszeichen zugelassen ist, gehört der Rand der Kreisscheibe ebenfalls zu der gesuchten Menge.)

Wir haben uns davon überzeugt, dass der Kreis in der Ebene mit Hilfe einer gewissen Gleichung gegeben werden kann. Auf solche Weise kann man auch andere Kurven angeben, nur werden natürlich die Gleichungen dafür anders aussehen.

Wir sagten schon, dass die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ ein Geradenpaar bestimmt. Nun wollen wir sie etwas ausführlicher betrachten.

Wenn $x^2 - y^2 = 0$ ist, gilt $x^2 = y^2$ und folglich auch $|x| = |y|$. Ist umgekehrt $|x| = |y|$, dann gilt $x^2 - y^2 = 0$; deshalb sind diese Beziehungen äquivalent.

Der Absolutbetrag der Abszisse eines Punktes ist jedoch der Abstand dieses Punktes von der y -Achse und der Absolutbetrag der Ordinate sein Abstand von der x -Achse.

Demzufolge sind Punkte, für die $|x| = |y|$ ist, gleichweit von den Koordinatenachsen entfernt, d. h. sie liegen auf den zwei Winkelhalbierenden der von diesen Achsen gebildeten Winkel.

Offensichtlich genügen auch umgekehrt die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf jeder dieser beiden Winkelhalbierenden der Beziehung $x^2 = y^2$. Deshalb nennen wir die Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ die Gleichung der Gesamtheit der Punkte dieser zwei Winkelhalbierenden.

Es gibt natürlich auch andere Beispiele dafür, dass Kurven durch Gleichungen gegeben werden. Beispielsweise genügen alle Punkte einer Parabel, deren Scheitel im Koordinatenursprung liegt (und nur die Punkte dieser Parabel), der Gleichung $y = x^2$. Die Gleichung $31 = 9:2$ heißt die Gleichung dieser Parabel.

P

Ganz allgemein nennt man Gleichung einer Kurve eine Gleichung, die jedesmal zur Identität wird, wenn man an Stelle von x und y die Koordinaten eines Punktes dieser Kurve einsetzt, und die nicht erfüllt ist, wenn man die Koordinaten eines Punktes einsetzt, der nicht auf dieser Kurve liegt.

Auch wenn wir nicht wissen, was für eine Kurve durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

gegeben wird, können wir z.B. schnell feststellen, dass diese Kurve durch den Koordinatenursprung geht, weil die Zahlen $(0,0)$ der Gleichung genügen, und dass der Punkt $(1,1)$ nicht auf dieser Kurve liegt, da $(1^2 + 1^2 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ ist.

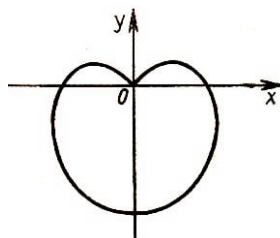


Bild 13

Die durch diese Gleichung gegebene Kurve zeigt Bild 13. Sie heißt Kardioide, denn sie hat die Form eines Herzens.

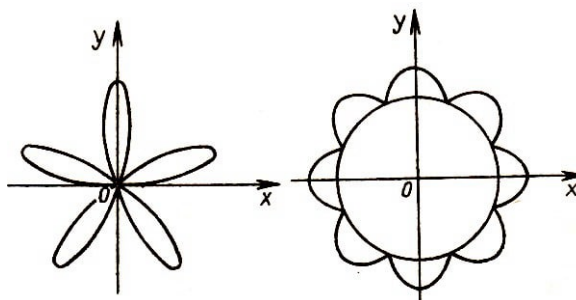


Bild 14a und b

Wenn also eine Rechenmaschine für jemanden Sympathien hegen könnte, dann würde sie ihm wahrscheinlich in der Gestalt einer Gleichung das Bild eines Herzens überreichen oder vielleicht einen mathematischen "Blumenstrauß", nämlich die Gleichungen der auf Bild 14 dargestellten Kurven ; wie man sieht, sehen diese Kurven wirklich wie Blumen aus. Die Gleichungen für diese mathematischen Blumen schreiben wir später nieder, wenn wir andere Koordinaten, die sogenannten Polarkoordinaten, kennenlernen.

1.2.5 Wir beginnen Aufgaben zu lösen

Indem wir geometrische Begriffe in die Koordinatensprache übertragen, erhalten wir die Möglichkeit, anstelle von geometrischen Aufgaben algebraische zu betrachten. Es erweist sich, dass nach diesem Übertragen die Mehrzahl der sich auf Geraden und Kreise beziehenden Aufgaben zu Gleichungen ersten und zweiten Grades führen; für die Lösung solcher Gleichungen gibt es aber einfache allgemeine Formeln.

(Es muss bemerkt werden, dass im 17. Jahrhundert, als die Koordinatenmethode gefunden wurde, die Kunst, algebraische Gleichungen zu lösen, hoch entwickelt war. In dieser Zeit lernten die Mathematiker z.B. beliebige Gleichungen dritten und vierten Grades zu lösen.

Deshalb sagte der französische Gelehrte R. Descartes, als die er Koordinatenmethode fand: "Ich habe alle Aufgaben gelöst", und dachte dabei an die geometrischen Aufgaben seiner Zeit.)

An einem einfachen Beispiel werden wir erläutern, wie man geometrische Aufgaben auf algebraische zurückführt.

Aufgabe. Gegeben ist ein Dreieck ABC ; zu bestimmen ist der Mittelpunkt des Umkreises für dieses Dreieck.

Lösung. Wir nehmen den Punkt A als Koordinatenursprung und richten die Abszissenachse von A nach B . Dann hat der Punkt B die Koordinaten $(c, 0)$, wobei c die Länge der Strecke AB ist. Der Punkt C möge die Koordinaten (q, h) und der Mittelpunkt des gesuchten Kreises die Koordinaten (a, b) haben.

Wir bezeichnen den Radius dieses Kreises mit R und schreiben in Koordinatenschreibweise, dass die Punkte $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ und $C(q, h)$ auf dem gesuchten Kreis liegen:

$$a^2 + b^2 = R^2 \quad , \quad (c - a)^2 + b^2 = R^2 \quad , \quad (q - a)^2 + (h - b)^2 = R^2$$

Jede dieser Bedingungen bringt zum Ausdruck, dass der Abstand der Punkte $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ und $C(q, h)$ vom Mittelpunkt des Kreises gleich dem Radius ist.

Diese Bedingungen erhält man auch leicht, wenn man die Gleichung des gesuchten Kreises (eines Kreises mit dem Mittelpunkt (a, b) und dem Radius R) hinschreibt, d.h.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

und, dann in diese Gleichung für x und y die Koordinaten der auf diesem Kreis gelegenen Punkt A , B und C einsetzt.

Dieses System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich leicht lösen und wir erhalten

$$a = \frac{c}{2} \quad , \quad b = \frac{q^2 + h^2 - cq}{2h} \quad , \quad R = \frac{\sqrt{(q^2 + h^2)[(a - c)^2 + h^2]}}{2h}$$

Da wir die Koordinaten des Mittelpunktes gefunden haben, ist die Aufgabe gelöst.¹¹ Damit haben wir gleichzeitig eine Formel für die Berechnung des Umkreisradius des Dreiecks gefunden. Diese Formel kann vereinfacht werden, denn es ist

$$\sqrt{q^2 + h^2} = \rho(A, C) \quad , \quad \sqrt{(q - c)^2 + h^2} = \rho(B, C)$$

und h ist die vom Eckpunkt C aus gefällte Höhe des Dreiecks ABC . Bezeichnet man die Längen der Seiten BC und AC des Dreiecks entsprechend mit a und b , dann erhält die Formel für den Radius die schöne und zweckmäßige Gestalt

$$R = \frac{ab}{2h}$$

Man kann noch vermerken, dass $hc = 2S$ ist, wobei S der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist, und unsere Formel

$$R = \frac{abc}{4S}$$

¹¹Man beachte, dass wir uns bei der Lösung dieser Aufgabe auf keine Zeichnung gestützt haben.

schreiben.

Jetzt folgt eine interessante Aufgabe, deren geometrische Lösung ziemlich schwierig ist; wenn man sie aber in die Koordinatensprache überträgt, lässt sie sich ganz einfach lösen.

Aufgabe. In der Ebene seien die Punkte A und B gegeben; zu bestimmen ist die Menge der Punkte M , die von A doppelt so weit entfernt sind wie von B .

Lösung. Wir wählen das Koordinatensystem in der Ebene so, dass der Koordinatenursprung mit dem Punkt A zusammenfällt und die positive Halbachse der Abszisse von A nach B gerichtet ist. Als Einheitsstrecke wählen wir die Strecke AB .

Dann hat der Punkt A die Koordinaten $(0, 0)$ und der Punkt B die Koordinaten $(1, 0)$. Die Koordinaten des Punktes M bezeichnen wir mit (x, y) .

Die Bedingung $\rho(A, M) = 2\rho(B, M)$ lautet in Koordinatenschreibweise

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Wir erhalten damit die Gleichung der gesuchten Punktmenge.

Um erfassen zu können, welche Menge durch diese Gleichung beschrieben wird, formen wir sie so um, dass sie eine bekannte Gestalt erhält. Durch beiderseitiges Quadrieren, Beseitigen der Klammern und Zusammenfassen der entsprechenden Glieder erhalten wir die Gleichung

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0$$

Diese Beziehung kann man noch in der Form

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9} \quad \text{oder} \quad \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

schreiben.

Wir wissen bereits, dass das die Gleichung eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt im Punkte $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ liegt und dessen Radius gleich $\frac{2}{3}$, unsere Punktmenge ist also ein Kreis.

Für unsere Lösung war es belanglos, dass $\rho(A, M)$ gerade doppelt so groß wie $\rho(B, M)$ war; deshalb wurde in Wirklichkeit eine allgemeinere Aufgabe gelöst, und zwar wurde bewiesen, dass die Menge der Punkte M , für die das Verhältnis der Abstände zu gegebenen Punkten A und B konstant ist,

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = k$$

einen Kreis darstellt (k ist eine vorgegebene, von 1 verschiedene positive Zahl).¹²

Um sich vom Vorteil der Koordinatenmethode zu überzeugen versuche man einmal, die gleiche Aufgabe geometrisch zu lösen.

¹²Wir haben $k = 1$ ausgeschlossen; denn es ist bekannt, dass die Punktmenge (4) in diesem Falle eine Gerade ist (der Punkt M ist von A und B gleichweit entfernt). Man suche dafür einen analytischen Beweis.

(Hinweis. Durch den Punkt M sind die Winkelhalbierenden des äußeren und des inneren Winkels des Dreiecks AMB zu ziehen. K und L seien die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit der Geraden AB . Man beweise, dass die Lage dieser Punkte nicht von der Wahl des Punktes M in der gesuchten Punktmenge abhängt und dass der Winkel KML 90° beträgt.)

Es sei darauf hingewiesen, dass bereits die alten Griechen solche Aufgaben zu lösen vermochten. Eine geometrische Lösung dieser Aufgabe ist in der Arbeit "Über die Kreise" des antiken griechischen Mathematikers Apollonios (2. Jh. v.u.Z.) enthalten.

Aufgabe. Man bestimme die Menge der Punkte M , für die die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B gleich einer vorgegebenen Zahl c ist. Für welche c besitzt die Aufgabe eine Lösung?

1.2.6 Andere Koordinatensysteme

Neben dem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem verwendet man in der Ebene auch andere Koordinatensysteme. In Bild 15 ist ein schiefwinkliges kartesisches Koordinatensystem abgebildet.

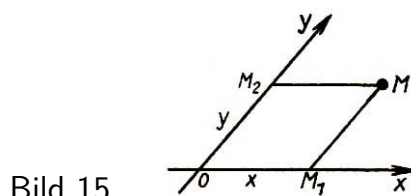


Bild 15

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, wie man die Koordinaten eines Punktes in einem solchen System bestimmt. Manchmal erweist es sich auch als notwendig, auf den Koordinatenachsen verschiedene Einheitsstrecken zu wählen.

Es gibt Koordinatensysteme, die anders aufgebaut sind als die kartesischen. Ein Beispiel dafür sind die Polarkoordinaten, die wir bereits einmal erwähnten.

Die Polarkoordinaten eines Punktes in der Ebene werden folgendermaßen definiert:

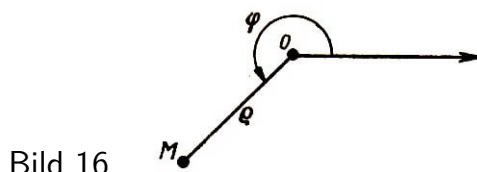


Bild 16

Man wählt in der Ebene eine Zahlenachse (Bild 16). Den Koordinatenursprung dieser Achse (den Punkt O) nennt man den Pol und die Achse selbst die Polarachse. Die Lage eines Punktes M wird hinreichend durch die Angabe zweier Zahlen bestimmt, nämlich durch Q , den Polarradius (den Abstand dieses Punktes vom Pol), und φ , den Polarwinkel¹³ (den Winkel, um den man die Polarachse im Gegenuhrzeigersinn drehen muss, bis ihre positive Halbachse mit dem Strahl OM zusammenfällt).

¹³ φ ist ein griechischer Buchstabe und wird "fi" gelesen.

In unserer Zeichnung beträgt der Radiusvektor $\rho = 1,9$ und der Polarwinkel φ ist gleich 225° oder $\frac{5}{4}\pi$.¹⁴

Somit wird im Polarkoordinatensystem die Lage eines Punktes durch zwei Zahlen angegeben, die die Richtung anzeigen, in der sich der Punkt befindet, und den Abstand bis zu diesem Punkt. Diese Methode der Ortsangabe ist sehr einfach und wird häufig benutzt. Will man beispielsweise einem im Walde verirrt Menschen den Weg weisen, dann sagt man:

"An der dünnen Kiefer (Pol) biegen Sie nach Osten (Richtung) ab, laufen ungefähr zwei Kilometer (Abstand) und dort ist dann das Waldhüterhäuschen (Punkt)".

Wer in Arbeitsgemeinschaften für Touristik mitarbeitet weiß, dass das Wandern nach Kompass auf dem gleichen Prinzip beruht wie die Polarkoordinaten.

Auch mit Hilfe der Polarkoordinaten kann man in der Ebene verschiedene Punktmengen geben. Sehr einfach ist z.B. die Gleichung für einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Pol zusammenfällt. Wenn der Kreisradius gleich R ist, dann ist der Polarradius jedes Punktes des Kreises (und nur der Punkte des betrachteten Kreises) ebenfalls gleich R , d.h. die Gleichung dieses Kreises lautet

$$\rho = R$$

wobei R eine gewisse Konstante ist.

Welche Punktmenge ergibt sich, wenn man die Gleichung $\varphi = \alpha$ betrachtet, wobei α eine konstante Zahl (z.B. $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$) ist?

Die Antwort ist einfach: Die Punkte, für die φ konstant und gleich α ist, ergeben einen vom Pol ausgehenden Strahl, der mit der Polarachse den Winkel α bildet.

Ist z.B. $\alpha = \frac{1}{2}$, beträgt der Winkel zwischen diesem Strahl und der Polarachse ungefähr 28° ¹⁵ und bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ist der Strahl senkrecht nach unten gerichtet, d.h. der Winkel zwischen der positiven Richtung der Achse und dem Strahl beträgt 270° .

Wir wollen noch zwei Beispiele untersuchen. Die Gleichung

$$\rho = \varphi$$

stellt eine Spirale dar (Bild 17a). Wirklich, bei $\varphi = 0$ ist $\rho = 0$ (Pol), und bei wachsendem φ wächst die Größe ρ ebenfalls, so dass sich die Spirale (im Gegenuhrzeigersinn) um den Pol herumwindet, wobei sich ihre Punkte immer weiter von ihm entfernen.

¹⁴Im Polarkoordinatensystem werden wir zur Messung von Winkeln φ neben dem Gradmaß auch das sog. Bogenmaß verwenden. Dem letzteren wird als Maßeinheit ein Radiant zugrunde gelegt. Ein Radiant entspricht der Größe des Zentriwinkels im Kreis mit dem Radius eins, dessen Kreisbogen die Länge eins hat. Der Vollwinkel 360° , der dem ganzen Kreis (vom Radius eins) entspricht, hat das Bogenmaß 2π , ein Winkel von 180° das Maß π , der rechte Winkel das Maß $\frac{\pi}{2}$, ein Winkel von 45° das Maß $\frac{\pi}{4}$ usw. Ein Radiant ist gleich $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$. Es erweist sich, dass bei vielen Problemen das Bogenmaß weit geeigneter als das Gradmaß ist.

¹⁵Wir erinnern daran, dass die Zahl, die für die Koordinate „*varphi*“ steht, als Bogenmaß des Winkels aufgefasst werden muss. Ein Winkel von $\frac{1}{2}$ Radianten ist ungefähr gleich 28° , ein Winkel von $\frac{3\pi}{2}$ Radianten ist genau gleich 270° .

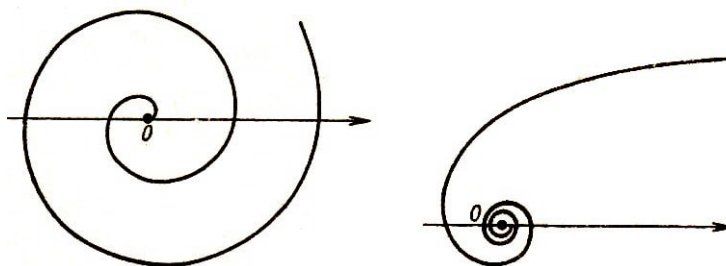


Bild 17a und b

Eine andere Spirale wird durch die Gleichung

$$\rho = \frac{1}{\varphi}$$

gegeben (Bild 17b). Hier ist für kleine φ die Größe ρ groß; wenn φ wächst, fällt die Größe ρ und ist klein für große φ . Deshalb wickelt sich die Spirale bei unbeschränkt wachsendem φ gewissermaßen auf den Punkt O auf.

Um Gleichungen von Kurven im Polarkoordinatensystem angeben zu können, benötigt man trigonometrische Beziehungen. Man versuche zu ermitteln, welche Punktmengen durch die folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$\rho = \sin \varphi \quad , \quad \rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + 1 = 0$$

In manchen Fällen ist das Polarkoordinatensystem zweckmäßiger als das kartesische. So sieht z.B. die Gleichung der Kardioiden in Polarkoordinaten aus (s. Abschnitt 1.2.4.):

$$\rho = 1 - \sin \varphi$$

Mit geringen trigonometrischen Kenntnissen kann man sich nach dieser Gleichung die Kurve um vieles leichter vorstellen als nach ihrer Gleichung in kartesischen Koordinaten.

Und jene schönen, auf Bild 14 dargestellten Blumen werden durch die einfachen Gleichungen

$$\rho = \sin 5\varphi \quad , \quad (\rho - 2)(\rho - 2 - 2|\cos 3\varphi|) = 0$$

bestimmt.

Wir haben nichts über eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Polarkoordinaten gesagt.

Das liegt daran, dass es eine solche umkehrbar eindeutige Zuordnung einfach nicht gibt. In der Tat, wenn man zum Winkel φ ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von 2π (d.h. ein ganzzahliges Vielfaches von 360°) hinzufügt, dann ändert sich die Richtung des Strahles offensichtlich nicht.

Mit anderen Worten, die Punkte mit den Polarkoordinaten (ρ, φ) und $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, wobei $\rho > 0$ und k eine beliebige ganze Zahl ist, fallen zusammen. Wir wollen noch ein Beispiel für eine nicht eindeutige Zuordnung bringen.

In der Einleitung sprachen wir davon, dass man auf Kurven Koordinaten definieren kann, und betrachteten im Abschnitt 1.1. Koordinaten auf der allereinfachsten Kurve,

der Geraden. Jetzt werden wir zeigen, wie man für eine weitere Kurve, den Kreis, Koordinaten definieren kann.

Dafür wählen wir, wie im Abschnitt 1.1., auf dem Kreis irgendeinen Punkt als Koordinatenursprung aus (den Punkt O auf Bild 18). Als positiven Durchlaufsinne sehen wir auf dem Kreis wie üblich die Drehung um seinen Mittelpunkt im Gegenuhrzeigersinn an.

Die Maßeinheit auf dem Kreis lässt sich auch auf natürliche Weise wählen: Wir nehmen als Einheit den Radius des Kreises.

Dann ist die Koordinate eines Punktes M auf dem Kreis gleich der Länge des Bogens OM , und zwar mit positivem Vorzeichen versehen, wenn die Drehung von O nach M in positiver Richtung ausgeführt wurde, und mit negativem Vorzeichen im entgegengesetzten Falle.

Gleich auf den ersten Blick fällt ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen Koordinaten und den Koordinaten der Punkte einer Geraden auf: Hier ist die Zuordnung zwischen den Zahlen (Koordinaten) und Punkten nicht umkehrbar eindeutig.

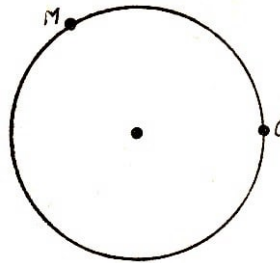


Bild 18

Offensichtlich entspricht zwar jeder Zahl ein ganz bestimmter Punkt des Kreises, aber nicht jedem Punkt nur eine einzige Zahl.

Es sei eine Zahl a gegeben; damit der ihr entsprechende Punkt auf dem Kreis (d.h. der Punkt mit der Koordinate a) gefunden wird, muss man auf dem Kreis einen Bogen von a Radien Länge abtragen und zwar in positiver Richtung, wenn die Zahl a positiv ist, und in negativer, wenn a negativ ist.

Dabei fällt beispielsweise der Punkt mit der Koordinate 2π mit dem Koordinatenursprung zusammen. In unserem Beispiel erhielten wir also den Punkt O , wenn die Koordinate gleich null und wenn die Koordinate gleich 2π war.

Somit ist die Zuordnung in dieser Richtung nicht eindeutig, d.h. ein und demselben Punkt entsprechen mehrere, verschiedene Zahlen. Man sieht leicht, dass jedem Punkt des Kreises eine unendliche Menge von Zahlen entspricht.¹⁶

1.3 Die Koordinaten eines Punktes im Raum

1.3.1 Koordinatenachsen und -ebenen

Zur Lagebestimmung eines Punktes im Raum genügen bereits nicht mehr zwei Zahlenachsen (wie im Falle der Ebene), sondern man muss drei nehmen: die x -Achse oder

¹⁶Die hier eingeführten Koordinaten für die Punkte eines Kreises stimmen mit den Winkeln φ des Polarkoordinatensystems überein, wenn diese im Bogenmaß gemessen werden. Deshalb wird auch hierdurch nochmals die Mehrdeutigkeit der Polarkoordinaten veranschaulicht.

Abszissenachse, die y -Achse oder Ordinatenachse und die z -Achse.

Diese Achsen legt man durch ein und denselben Punkt - den Koordinatenursprung O - so, dass je zwei von ihnen aufeinander senkrecht stehen.

Man wählt die Richtung der Achsen gewöhnlich so, dass, von der positiven Halbachse der z -Achse aus gesehen, die positive Halbachse der x -Achse durch eine Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn in die positive Halbachse der y -Achse übergeführt wird (Bild 19).

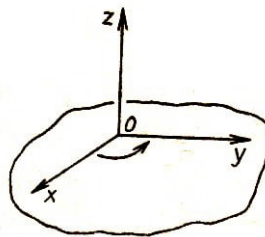


Bild 19

Im Raum ist es angebracht, außer den Koordinatenachsen noch Koordinatenebenen zu betrachten, d.h. Ebenen, die durch zwei beliebige Koordinatenachsen gehen. Solche Ebenen gibt es drei (Bild 20):

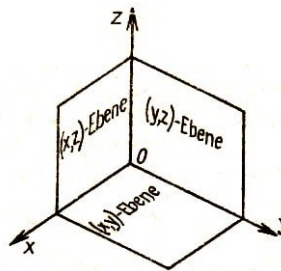


Bild 20

die (x, y) -Ebene (die durch die x - und die y -Achse geht) ist die Menge aller Punkte $(x, y, 0)$, wobei x und y beliebige reelle Zahlen sind;

die (x, z) -Ebene (die durch die x - und die z -Achse geht) ist die Menge aller Punkte $(x, 0, z)$, wobei x und z beliebige reelle Zahlen sind;

die (y, z) -Ebene (die durch die y - und die z -Achse geht) ist die Menge aller Punkte $(0, y, z)$, wobei y und z beliebige reelle Zahlen sind.

Nun kann man für jeden Punkt M des Raumes drei Zahlen x , y und z finden, die für ihn Koordinaten sind.

Um die erste Zahl x aufzufinden, legen wir durch den Punkt M eine Ebene parallel zur (y, z) -Ebene (die gewählte Ebene steht gleichzeitig auf der x -Achse senkrecht). Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der x -Achse (der Punkt M_1 in Bild 21 a) hat auf dieser Achse die Koordinate x_0 .

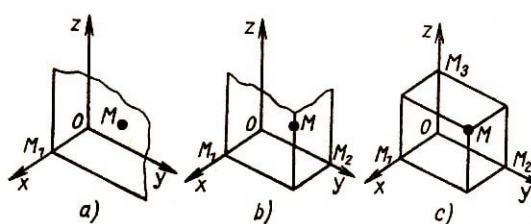


Bild 21

Diese Zahl x_0 - die Koordinate des Punktes M_1 auf der x -Achse - nennt man die Abszisse des Punktes M .

Um die zweite Koordinate zu bestimmen, legt man durch den Punkt M eine Ebene parallel zur (x, z) -Ebene (senkrecht zur y -Achse) und erhält auf der y -Achse den Punkt M_2 (Bild 21b).

Die Zahl y_0 - die Koordinate des Punktes M_2 auf der y -Achse - nennt man die Ordinate des Punktes M .

Legt man nun analog durch den Punkt M parallel zur (x, y) - Ebene (senkrecht zur z -Achse) eine Ebene, so findet man eine Zahl z_0 , die Koordinate des Punktes M_3 (Bild 21 c) auf der z -Achse.

Auf diese Weise haben wir jedem Punkt des Raumes ein bestimmtes Zahlentripel (x, y, z) - seine Koordinaten - zugeordnet.

Umgekehrt kann man jedem Tripel (x, y, z) von in bestimmter Reihenfolge gegebenen Zahlen (zuerst x , dann y , danach z) einen bestimmten Punkt M des Raumes zuordnen. Dazu muss man die oben beschriebene Konstruktion benutzen, indem man sie in der umgekehrten Reihenfolge ausführt: auf den Achsen Punkte M_1 , M_2 , M_3 markieren, deren Koordinaten auf diesen Achsen entsprechend gleich x , y und z sind, und dann durch diese Punkte parallel zu den Koordinatenebenen Ebenen legen.

Der Schnittpunkt dieser drei Ebenen ist dann der gesuchte Punkt M . Es ist offensichtlich, dass die Zahlen (x, y, z) seine Koordinaten sind.

Somit haben wir zwischen den Punkten des Raumes und den geordneten Zahlentripeln (den Koordinaten dieser Punkte) eine umkehrbar eindeutige Zuordnung getroffen.

Die Koordinaten im Raum beherrschen zu lernen ist etwas schwieriger, als dies bei den Koordinaten in der Ebene der Fall war, denn zum Studium der Koordinaten im Raum muss man etwas über die Geometrie des Raumes, die Stereometrie, wissen (siehe Lehrbuch Mathematik der Klasse 10).

In der Stereometrie wird gezeigt, dass die Punkte M_1 , M_2 und M_3 , die als Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit den durch den Punkt M parallel zu den Koordinatenebenen gelegten Ebenen konstruiert wurden, die Projektionen des Punktes M auf die Koordinatenachsen sind, d.h. die Fußpunkte der von M aus auf die Koordinatenachsen gefällten Lote.

Somit kann man die Koordinaten im Raum analog zu den Koordinaten eines Punktes in der Ebene wie folgt definieren:

Koordinaten des Punktes M im Raum heißen die Achsenkoordinaten der Projektionen dieses Punktes auf die Koordinatenachsen.

Man kann zeigen, dass viele für die Ebene hergeleiteten Formeln für den Raum nur leicht verändert zu werden brauchen.

So wird beispielsweise der Abstand zwischen zwei Punkten $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ nach der Formel

P

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

berechnet.

Diese Formel wird so ähnlich hergeleitet wie die analoge Formel für die Ebene. Man versuche einmal, diese Herleitung selbständig zu finden.

Insbesondere beträgt der Abstand eines Punktes $A(x, y, z)$ vom Koordinatenursprung

P

$$\rho(0, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Übungsaufgaben

1. Wir betrachten acht Punkte: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$.

Welcher der Punkte ist am weitesten vom Punkt $(1, 1, 1)$ entfernt? Man bestimme den Abstand dieses Punktes von $(1, 1, 1)$. Welche Punkte liegen dem Punkt $(1, 1, 1)$ am nächsten? Welchen Abstand haben diese Punkte von $(1, 1, 1)$?

2. Man zeichne einen Würfel und lege die Koordinatenachsen längs dreier von einem Eckpunkt ausgehender Kanten.

Eine Kante des Würfels sei Einheitsstrecke. Die Eckpunkte des Würfels werden mit den Buchstaben $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ bezeichnet (Bild 22).

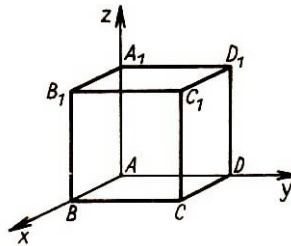


Bild 22

Man bestimme

- die Koordinaten aller Eckpunkte des Würfels;
- die Koordinaten des Mittelpunktes der Kante CC_1 ;
- die Koordinaten des Schnittpunkts der Diagonalen der Seitenfläche AA_1B_1B .

3. Wie groß ist der Abstand vom Eckpunkt $(0, 0, 0)$ des Würfels aus Aufgabe 2 bis zum Schnittpunkt der Diagonalen der Seitenfläche BB_1C_1C ?

4. Welche der Punkte

$$A(1, 0, 5), B(3, 0, 1), C\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right), D\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), E\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

liegen innerhalb des in der Aufgabe 1 angegebenen Würfels und welche außerhalb?

5. Man schreibe Beziehungen auf, denen die Koordinaten der Punkte genügen, die innerhalb des Würfels aus Aufgabe 1 bzw. auf seinem Rand liegen.

Antwort. Die Koordinaten x, y, z von innerhalb bzw. auf dem Rand des betrachteten Würfels gelegenen Punkte können Zahlenwerte von null bis eins einschließlich annehmen, d.h., sie genügen den Beziehungen

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

1.3.2 Wie kann man im Raum Figuren angeben?

Genau wie in der Ebene ermöglichen es die Koordinaten im Raum, mit Hilfe von Zahlen und Zahlenbeziehungen nicht nur Punkte zu beschreiben, sondern auch Kurven, Flächen und andere Punktmengen.

Untersuchen wir beispielsweise einmal, welche Punktmenge sich ergibt, wenn man nur zwei Koordinaten fest angibt und die dritte beliebig lässt.

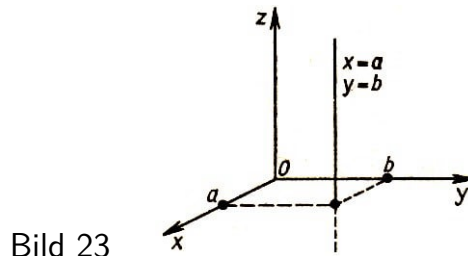


Bild 23

Die Bedingungen $x = a$, $y = b$, wobei a und b gegebene Zahlen (z.B. $a = 5$, $b = 4$) sind, bestimmen im Raum eine Gerade, die parallel zur z -Achse verläuft (Bild 23). Alle Punkte einer solchen Geraden haben ein und dieselbe Abszisse und ein und dieselbe Ordinate. Die Koordinate z kann beliebige Werte annehmen.

Genauso bestimmen die Bedingungen $y = b$, $z = c$ eine parallel zur x -Achse verlaufende Gerade und die Bedingungen $z = c$, $x = a$ eine parallel zur y -Achse verlaufende Gerade.

Welche Punktmengen erhält man wohl, wenn man nur eine Koordinate, z.B. $z = 1$, angibt.

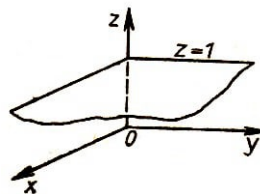


Bild 24

Die Antwort kann man aus Bild 24 ablesen: Das ist eine Ebene, die der (x, y) -Ebene (d.h. der durch die x - und die y -Achse gehenden Ebene) parallel ist und von dieser in Richtung der positiven z -Halbachse den Abstand 1 hat.

Wir untersuchen noch einige Beispiele, die deutlich machen, wie man im Raum verschiedene Mengen mit Hilfe von Gleichungen und anderen Beziehungen zwischen den Koordinaten definieren kann.

1. Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (5)$$

Da der Abstand eines Punktes (x, y, z) vom Koordinatenursprung durch den Ausdruck $x^2 + y^2 + z^2$ bestimmt wird, bedeutet die Beziehung (5), in die geometrische Sprache übertragen, offenbar, dass der Punkt mit den dieser Beziehung genügenden Koordinaten (x, y, z) vom Koordinatenursprung den Abstand R hat.

Das heißt, die Menge aller Punkte, für die die Beziehung (5) erfüllt ist, ist eine Kugel mit dem Radius R , deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

2. Wo liegen die Punkte, deren Koordinaten der Beziehung

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

genügen?

Antwort. Diese Aussage gibt an, dass der Abstand des Punktes (x, y, z) vom Koordinatenursprung kleiner als eins ist. Die gesuchte Menge ist also die Menge der Punkte, die im Innern einer Kugel mit dem Radius eins liegen, deren Mittelpunkt gleich dem Koordinatenursprung ist.

3. Welche Punktmenge wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{6}$$

bestimmt?

Wir betrachten zunächst nur die Punkte der (x, y) -Ebene, die dieser Beziehung genügen, d.h. Punkte, für die $z = 0$ ist. Dann bestimmt diese Gleichung, wie wir früher gesehen haben, einen Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius eins.

Für jeden dieser Punkte ist die z -Koordinate gleich null und die Koordinaten x und y genügen der Gleichung (6). Beispielsweise genügt der Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ dieser Gleichung (Bild 25). Wir können jedoch ausgehend von diesem einen Punkt sofort viele andere Punkte angeben, die dieser Gleichung genügen.

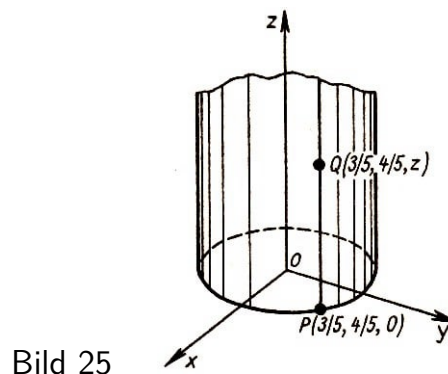


Bild 25

Denn da in die Gleichung (6) z nicht eingeht, genügt auch der Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 10)$ und der Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -5)$ der Gleichung und überhaupt jeder Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, z)$, wobei z völlig beliebig ist. Alle diese Punkte liegen auf der durch den Punkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ parallel zur z -Achse verlaufenden Geraden.

Auf ebensolche Weise können wir aus jedem Punkt $(x, y, 0)$ unseres Kreises der (x, y) -Ebene viele Punkte erhalten, die der Gleichung (6) genügen. Zu diesem Zweck legen wir durch jeden Punkt des Kreises eine Gerade parallel zur z -Achse.

Alle Punkte dieser Geraden haben die gleichen x und y wie der Punkt des Kreises, aber z kann alle Werte annehmen, d.h., das sind Punkte der Gestalt (x, y, z) .

Da jedoch z in die Gleichung (6) nicht eingeht und die Zahlen $(x, y, 0)$ der Gleichung genügen, genügen die Zahlen (x, y, z) der Gleichung (6) ebenfalls. Offensichtlich kann man auf diese Weise jeden der Gleichung (6) genügenden Punkt finden.

Somit findet man die durch die Gleichung (6) bestimmte Punktmenge folgendermaßen: Man nimmt in der (x, y) -Ebene einen Kreis mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius $R = 1$ und legt durch jeden Punkt dieses Kreises parallel zur z -Achse eine Gerade. Es ergibt sich eine sog. Zylinderfläche (Bild 25).

4. Wir sahen, dass eine Gleichung im Raum im allgemeinen eine Fläche bestimmt. Das ist jedoch nicht immer so.

Beispielsweise genügen der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ nur die Punkte einer Kurve, der z -Achse, da aus der Gleichung folgt, dass x und y gleich null sind, und alle Punkte, für die diese Koordinaten gleich null sind, auf der z -Achse liegen.

Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ definiert einen Punkt (den Koordinatenursprung), und der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ entspricht die leere Menge.

5. Was ergibt sich, wenn man die Punkte betrachtet, deren Koordinaten nicht einer Gleichung, sondern einem Gleichungssystem genügen?

Betrachten wir ein solches System:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Die der ersten Gleichung genügenden Punkte bilden die Oberfläche einer Kugel vom Radius 2, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist.

Die Punkte, die der zweiten Gleichung genügen, bilden eine Ebene parallel zur (x, y) -Ebene die von dieser nach der positiven z -Halbachse zu den Abstand 1 hat.

Punkte, die sowohl der ersten als auch der zweiten Gleichung genügen, müssen sowohl auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ als auch auf der Ebene $z = 1$ liegen, d.h., sie liegen auf ihrer Schnittkurve. Somit wird durch dieses System der Kreis bestimmt, der die Schnittkurve der Kugel und der Ebene ist (Bild 26).

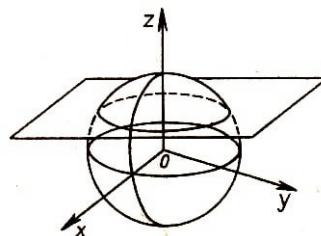


Bild 26

Wir sehen also, dass jede der Gleichungen des Systems eine Fläche bestimmt, aber beide Gleichungen zusammen bestimmen eine Kurve.

Frage. Welche der nachstehend angegebenen Punkte liegen auf der ersten Fläche, welche auf der zweiten und welche auf deren Schnittkurve:

$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D(1, \sqrt{3}, 0)$, $E(0, \sqrt{3}, 1)$, $F(-1, -\sqrt{2}, 1)$

6. Wie gibt man im Raum einen Kreis an, der in der (x, z) Ebene liegt, den Radius 1 hat und dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist?

Die Gleichung

$$x^2 + z^2 = 1$$

bestimmt im Raum eine Zylinderfläche. Damit wir nun die Punkte des gewünschten Kreises erhalten, müssen wir zu dieser Gleichung die Bedingung $y = 0$ hinzufügen; dadurch betrachten wir von allen Punkten des Zylinders nur die auf der (x, z) -Ebene gelegenen (Bild 27).

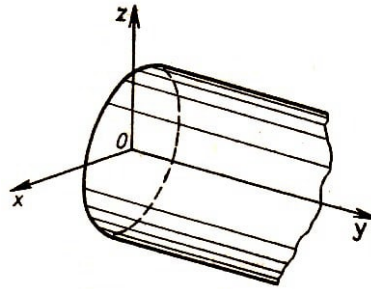


Bild 27

Wir erhalten das System

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Übungsaufgaben

1. Welche Punktmengen werden im Raum durch die Beziehungen

a) $z^2 = 1$, b) $y^2 + z^2 = 1$, c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ angegeben?

2. Gegeben sind drei Gleichungssysteme

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right\} \quad b) \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad c) \left. \begin{array}{l} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\}$$

Welche bestimmen die gleiche Kurve und welche verschiedene Kurven?

3. Durch welche Gleichungen bestimmt man im Raum die Winkelhalbierende des Winkels, den die x - und die y -Achse miteinander bilden?

Welche Punktmenge wird im Raum nur durch die Gleichung $x = y$ bestimmt?

2 Geometrie im vierdimensionalen Raum

2.1 Einleitung

Jetzt wissen wir schon etwas über die Koordinatenmethode und können uns über interessante Dinge unterhalten, die enger mit der modernen Mathematik in Zusammenhang stehen.

2.1.1 Einige allgemeine Überlegungen

Die Algebra und die Geometrie, die jetzt von der Mehrheit der Schüler als vollkommen verschiedene Wissenschaften aufgefasst werden, stehen sich in Wirklichkeit sehr nahe. Mit Hilfe der Koordinatenmethode könnte man den ganzen Schulstoff in Geometrie ohne eine einzige Zeichnung darlegen, lediglich unter Verwendung von Zahlen und algebraischen Operationen.

Der Planimetrielehrgang würde mit den Worten: "Punkt nennen wir ein Zahlenpaar (x, y) ..." beginnen.

Ferner könnte man den Kreis als Menge aller der Punkte definieren, die einer Gleichung der Gestalt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

genügen. Gerade würde man eine Menge von Punkten nennen, die der Gleichung $ax + by + c = 0$ genügen, usw.

Alle geometrischen Sätze würden sich dabei in gewisse algebraische Beziehungen verwandeln.

Die Entdeckung, dass zwischen der Algebra einerseits und der Geometrie andererseits ein enger Zusammenhang besteht, bedeutete eine Revolution in der Mathematik. Sie machte die Mathematik wieder zu einer einheitlichen Wissenschaft, in der es zwischen ihren einzelnen Teilen keine unüberwindliche Trennung gibt.

Als Entdecker der Koordinatenmethode gilt der französische Philosoph und Mathematiker René Descartes (1596 bis 1650). Im letzten Teil einer 1637 erschienenen großen philosophischen Abhandlung wird eine Beschreibung der Koordinatenmethode und ihrer Anwendung beim Lösen von geometrischen Aufgaben gegeben.

Die Weiterentwicklung der Ideen von Descartes führte zur Entstehung eines besonderen Gebietes der Mathematik, das man jetzt analytische Geometrie nennt.

Der Name selbst bringt bereits den Hauptgedanken dieser Theorie zum Ausdruck. Die analytische Geometrie ist der Teil der Mathematik, der geometrische Aufgaben mit analytischen (d.h. vorwiegend algebraischen) Mitteln löst.

Obwohl die analytische Geometrie jetzt schon voll entwickelt und als Fachgebiet wohl als abgeschlossen anzusehen ist, brachten die ihr zugrunde liegenden Ideen neue Gebiete der Mathematik hervor.

Es entstand und entwickelt sich die algebraische Geometrie, die die Eigenschaften von durch algebraische Gleichungen gegebenen Kurven und Flächen untersucht.

Diesen Teil der Mathematik kann man keineswegs als abgeschlossen ansehen. Gerade in den letzten Jahren wurden hier neue grundlegende Resultate erzielt, die auch auf andere Teilgebiete der Mathematik einen großen Einfluss haben.

2.1.2 Die Geometrie hilft rechnen

Beim Lösen von geometrischen Aufgaben tritt eine Seite der Koordinatenmethode in den Vordergrund - die analytische Deutung von geometrischen Begriffen, das Übertragen von geometrischen Gebilden und Beziehungen in die Zahlensprache.

Die andere Seite der Koordinatenmethode, die geometrische Interpretation von Zahlen und Beziehungen zwischen Zahlen, gewann jedoch eine nicht weniger wichtige Bedeutung.

Der berühmte Mathematiker Hermann Minkowski (1864-1909) benutzte geometrische Methoden zum Lösen von Gleichungen in ganzen Zahlen, und die Mathematiker seiner Zeit waren erstaunt darüber, wie einfach und durchsichtig einige, früher sehr schwierig erscheinende Probleme der Zahlentheorie dadurch wurden.

Wir analysieren hier ein ganz einfaches Beispiel, das zeigt, wie die Geometrie hilft, algebraische Aufgaben zu lösen.

Aufgabe. Wir betrachten die Ungleichung

$$x^2 + y^2 \leq n$$

wobei n irgendeine ganze Zahl sein soll. Wieviel ganzzahlige Lösungen hat diese Ungleichung?

Für kleine n kann man diese Frage leicht beantworten. Beispielsweise gibt es für $n = 0$ nur eine Lösung: $x = 0, y = 0$.

Bei $n = 1$ kommen zu dieser Lösung noch vier hinzu: $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = -1$; $x = -1, y = 0$, d.h., bei $n = 1$ gibt es im ganzen fünf Lösungen.

Bei $n = 2$ gibt es außer den bereits aufgezählten noch vier Lösungen: $x = 1, y = 1$; $x = -1, y = 1$; $x = 1, y = -1$; $x = -1, y = -1$. Insgesamt gibt es bei $n = 2$ also 9 Lösungen. Indem wir auf diese Weise fortfahren, können wir folgende Tabelle zusammenstellen:

Zahl	Anzahl der Lösungen	Verhältnis $\frac{N}{n}$	Zahl	Anzahl der Lösungen	Verhältnis $\frac{N}{n}$
0	1	-	5	21	4,2
1	5	5	10	37	3,7
2	9	4,5	20	69	3,45
3	9	3	50	161	3,22
4	13	3,25	100	317	3,17

Wir sehen, dass die Anzahl N der Lösungen bei wachsendem n wächst, aber es ist ziemlich schwer, die genaue Gesetzmäßigkeit für das Anwachsen von N zu finden. Wenn man sich die rechte Spalte der Tabelle ansieht, kann man vermuten, dass der Quotient $\frac{N}{n}$ bei wachsendem n gegen eine Zahl strebt.

Durch geometrische Interpretation zeigen wir gleich, dass das wirklich der Fall ist und

dass der Quotient $\frac{N}{n}$ gegen die Zahl $\pi = 3,14159265\dots$ strebt.

Wir sehen das Zahlenpaar (x, y) als Punkt einer Ebene an (mit der Abszisse x und der Ordinate y).

Die Ungleichung $x^2 + y^2 \leq n$ besagt, dass der Punkt (x, y) , für den sie gültig ist, im Innern eines Kreises K_n liegt, dessen Mittelpunkt der Koordinatenursprung und dessen Radius gleich \sqrt{n} ist (Bild 28).

Also hat unsere Ungleichung so viele ganzzahlige Lösungen, wie Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im Innern des Kreises K_n liegen.

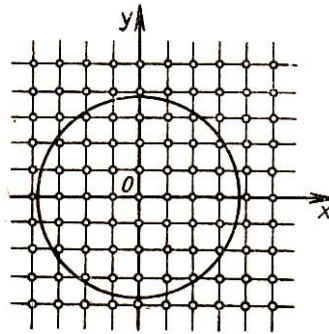


Bild 28

Geometrisch ist klar, dass die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten "auf der Ebene gleichmäßig verteilt" sind und dass auf jede Flächeneinheit ein Punkt kommt. Deshalb ist klar, dass die Anzahl der Lösungen ungefähr gleich der Fläche des Kreises sein muss. Auf diese Weise erhalten wir eine Näherungslösung

$$N \approx \pi n$$

Wir führen für diese Formel einen kurzen Beweis an.

Wir zerlegen die Ebene durch Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, in Einheitsquadrate; die ganzzahligen Punkte seien die Eckpunkte dieser kleinen Quadrate.

Im Innern des Kreises K_n mögen N ganzzahlige Punkte liegen. Wir ordnen jedem dieser Punkte das Einheitsquadrat zu, in dem er der rechte obere Eckpunkt ist. Die von diesen Quadraten gebildete Figur bezeichnen wir mit A_n (Bild 29, die Figur ist schraffiert).

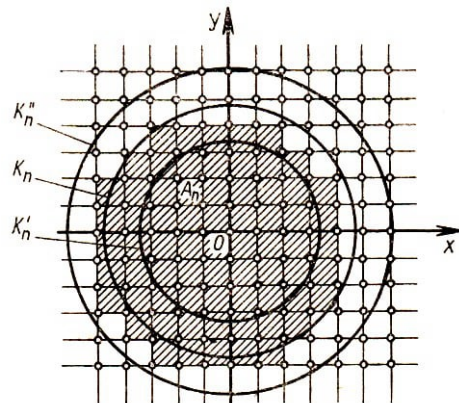


Bild 29

Der Flächeninhalt von A_n beträgt offensichtlich N (d.h., er ist gleich der Anzahl der Quadrate, aus denen sich die Figur zusammensetzt).

Wir vergleichen den Flächeninhalt dieser Figur mit dem Flächeninhalt des Kreises K_n . Zusammen mit dem Kreis K_n betrachten wir noch zwei Kreise mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt: den Kreis K'_n vom Radius $\sqrt{n}\sqrt{2}$ und den Kreis K''_n vom Radius $\sqrt{n} + \sqrt{2}$.

Die Figur A_n liegt ganz im Innern des Kreises K''_n und enthält die Kreisscheibe von K'_n . (Das lässt sich leicht beweisen, wenn man den Satz verwendet, dass im Dreieck jede Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen Seiten.)

Deshalb ist der Flächeninhalt von A_n größer als der Flächeninhalt der Kreisscheibe von K'_n und kleiner als der Flächeninhalt der Kreisscheibe von K''_n , d.h. es gilt

$$\pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 < N < \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2$$

Hieraus erhalten wir unsere näherungsweise Formel $N \approx \pi n$, sowie eine Fehlerabschätzung für sie:

$$|N - \pi n| < 2\pi(\sqrt{2n} + 1)$$

Jetzt stellen wir für drei Unbekannte die analoge Aufgabe:

Wieviel ganzzahlige Lösungen hat die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq n$$

Man erhält die Lösung schnell, wenn man wieder die geometrische Interpretation zu Hilfe nimmt. Die Anzahl der Lösungen der Aufgabe ist ungefähr gleich dem Volumen einer Kugel vom Radius \sqrt{n} , d.h. $\frac{4}{3}\pi n\sqrt{n}$.

Ein solches Ergebnis auf rein algebraischem Wege zu finden wäre sehr schwer.

2.1.3 Man braucht den vierdimensionalen Raum

Wie soll man aber vorgehen, wenn die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq n$$

in die vier Unbekannte eingehen, bestimmt werden soll?

Diese Aufgabe für zwei und drei Unbekannte lösten wir mit Hilfe der geometrischen Interpretation. Eine Lösung der Ungleichung mit zwei Unbekannten, d.h. ein Zahlenpaar, betrachteten wir als Punkt einer Ebene; eine Lösung der Ungleichung mit drei Unbekannten, d.h. ein Zahlentripel, betrachteten wir als Punkt des Raumes. Kann man nicht auf diese Weise weiter vorgehen?

Dann müsste man ein Zahlenquadrupel (x, y, z, u) als Punkt eines Raumes ansehen, der vier Dimensionen hat (eines vierdimensionalen Raumes). Dann kann man die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq n$$

als Bedingung dafür ansehen, dass der Punkt (x, y, z, u) im Innern einer vierdimensionalen Kugel vom Radius \sqrt{n} liegt, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist.

Weiter müsste man den vierdimensionalen Raum in vierdimensionale Würfelchen zerlegen. Schließlich müsste man das Volumen einer vierdimensionalen Kugel berechnen¹⁷. Mit anderen Worten, wir müssten beginnen, die Geometrie des vierdimensionalen Raumes zu entwickeln.

In dem vorliegenden Heft kann dies nicht in vollem Umfange geschehen. Wir können hier nur ein wenig die Tür zum vierdimensionalen Raum öffnen und uns mit der einfachsten Figur dieses Raumes, dem vierdimensionalen Würfel, beschäftigen.

Nun tauchen natürlich die Fragen auf: inwieweit kann man ernsthaft über diesen erdachten vierdimensionalen Raum sprechen, wie weit kann man die Geometrie dieses Raumes analog zur üblichen Geometrie entwickeln, worin besteht die Ähnlichkeit und worin der Unterschied zwischen der drei- und der vierdimensionalen Geometrie. Bei der Untersuchung dieser Probleme erhielten die Mathematiker folgende Antwort.

Ja, man kann eine solche Geometrie entwickeln, und sie ist der gewöhnlichen in vielem ähnlich. Mehr noch, sie enthält die gewöhnliche Geometrie als Bestandteil, so wie die Planimetrie in die Stereometrie (die Geometrie des Raumes) eingeht. Aber natürlich weist die Geometrie des vierdimensionalen Raumes gegenüber der gewöhnlichen Geometrie auch sehr wesentliche Unterschiede auf. Über diese Besonderheiten der vierdimensionalen Welt hat der utopische Schriftsteller Herbert Wells in einer seiner Erzählungen sehr interessant berichtet.

Wir werden aber jetzt zeigen, dass diese Besonderheiten eigentlich denen sehr ähnlich sind, um die sich die Geometrie des dreidimensionalen Raumes von der Geometrie der zweidimensionalen Ebene unterscheidet.

2.1.4 Die Besonderheiten des vierdimensionalen Raumes

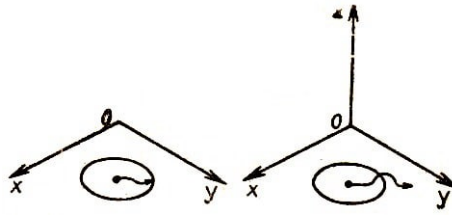
Wir zeichnen in einer Ebene einen Kreis und versetzen uns in die Lage eines erdachten Wesens der zweidimensionalen Welt; das entspricht der Lage eines Punktes, der sich in der Ebene bewegen kann, dem jedoch nicht gestattet ist, in den Raum hinauszugehen. (Ein solches zweidimensionales Wesen weiß sogar nicht einmal, dass der Raum existiert, und kann ihn sich auch nicht vorstellen.)

Dann ist für uns der Rand der Kreisscheibe, der Kreis, ein unüberwindliches Hindernis, denn wir können die Kreisscheibe nicht verlassen, da der Kreis uns den Weg verlegt (Bild 30 a).

Nun stellen wir uns vor, dass diese Ebene mit dem gezeichneten Kreis in den dreidimensionalen Raum eingebettet ist, und dass wir von der Existenz der dritten Dimension erfahren haben. Jetzt können wir natürlich ohne Schwierigkeiten aus der Kreisscheibe heraus, indem wir z.B. einfach die Kreislinie überschreiten - (Bild 30b).

¹⁷Wir leiten die Formel zur Berechnung des Volumens einer vierdimensionalen Kugel hier nicht her, geben sie hier jedoch an. Das Volumen einer vierdimensionalen Kugel beträgt $\frac{\pi^2 R^4}{2}$. Zum Vergleich geben wir noch an, dass das Volumen einer fünfdimensionalen Kugel $\frac{8\pi^2 R^5}{15}$, einer sechsdimensionalen $\frac{\pi^3 R^6}{6}$, und der siebendimensionalen $\frac{16\pi^3 R^7}{105}$ beträgt.

Bild 30a und b



- a) Darf sich der Punkt nur in der Ebene bewegen, kann er die Kreisscheibe nicht verlassen.
- b) Darf sich der Punkt frei im Raum bewegen, dann bereitet ihm das Verlassen der Kreisscheibe keine Schwierigkeiten.

Stellen wir uns nun vor, wir seien ein Wesen der dreidimensionalen Welt (dabei betrachten wir uns nach wie vor als Punkt; das ist aber, nebenbei gesagt, vollkommen unwesentlich) und befinden uns im Innern einer Kugel, deren Rand (die Kugelfläche) für uns undurchdringbar ist.

Dann müssen wir in den Grenzen dieser Kugel verbleiben. Wenn jedoch die Kugel in einen vierdimensionalen Raum eingebettet ist und wir wissen von der Existenz der vierten Dimension, dann können wir das Innere der Kugel ohne jede Anstrengung verlassen.

Das ist gar nicht weiter geheimnisvoll – der Rand, eines dreidimensionalen Kugelkörpers (eine Kugel) zerlegt den vierdimensionalen Raum eben nicht in zwei Teile, obwohl er den dreidimensionalen Raum in zwei Teile zerlegt. Das ist vollkommen analog dazu, dass der Rand einer Kreisscheibe (ein Kreis) den dreidimensionalen Raum nicht in zwei Teile zerlegt, wohl aber eine Ebene (diejenige, in der er liegt).

Noch ein Beispiel. Es leuchtet ein, dass man zwei zueinander symmetrische Figuren in einer Ebene nicht miteinander zur Deckung bringen kann, wenn man sie nur so bewegen darf, dass sie stets in der Ebene verbleiben.

Dagegen kann ein sitzender Schmetterling die Flügel aneinanderlegen, indem er sie aus der Horizontalebene in die Vertikalebene überführt.

Genauso kann man auch im dreidimensionalen Raum symmetrische räumliche Figuren nicht miteinander zur Deckung bringen. So kann man z.B. einen linken Handschuh, wie man ihn auch verlagert, niemals in einen rechten verwandeln, obwohl sie die gleiche geometrische Figur darstellen.

Aber im vierdimensionalen Raum kann man dreidimensionale symmetrische Figuren zur Deckung bringen, so wie man ebene symmetrische Figuren ineinander überführt, indem man sie im dreidimensionalen Raum bewegt.

Deswegen ist es nicht weiter verwunderlich, dass der Held der oben erwähnten Erzählung von Wells nach seiner Reise in den vierdimensionalen Raum symmetrisch zu sich selbst war; das Herz hatte er beispielsweise rechts. Das kam daher, dass er sich, als er in den vierdimensionalen Raum hinausging, gewendet hatte.

2.1.5 Etwas Physik

Die vierdimensionale Geometrie erwies sich als äußerst nützliches und einfach unersetzliches Hilfsmittel für die moderne Physik. Ohne die mehrdimensionale Geometrie

könnte man nur sehr schwer ein solch wichtiges Gebiet der modernen Physik wie die Relativitätstheorie von Albert Einstein darlegen und verwenden.

Ein Verdienst von Hermann Minkowski besteht darin, dass er, nachdem er die Geometrie sehr geschickt in der Zahlentheorie verwandte, ebenfalls durch anschauliche geometrische Überlegungen Klarheit in andere schwierige mathematische Probleme zu bringen vermochte, und zwar in die Probleme der Relativitätstheorie.

Der Relativitätstheorie liegt der Gedanke von dem unlösbaren Zusammenhang von Raum und Zeit zugrunde. Deshalb ist es natürlich, den Zeitpunkt, zu dem ein gewisses Ereignis stattfindet, als vierte Koordinate dieses Ereignisses einzuführen, während die ersten drei Koordinaten den Punkt im Raum festlegen, in dem das Ereignis stattfindet.

Den vierdimensionalen Raum, der sich auf diese Weise ergibt, nennt man Minkowskischen Raum. Fast jede Einführung in die Relativitätstheorie beginnt mit einer Beschreibung dieses Raumes.

Die Bedeutung der Entdeckung Minkowskis besteht darin, dass die Hauptformeln der Relativitätstheorie - die Lorenztransformationen - außerordentlich einfache Gestalt annehmen, wenn sie in der Koordinatensprache für diesen speziellen vierdimensionalen Raum niedergeschrieben werden.¹⁸

Somit war es für die neuere Physik ein großes Glück, dass die Mathematiker gerade zu der Zeit, als die Relativitätstheorie entdeckt wurde, die übersichtliche und schöne mehrdimensionale Geometrie bereithielten, mit deren Hilfe in vielen Fällen das Lösen der genannten physikalischen Aufgaben wesentlich vereinfacht oder erst ermöglicht werden kann.

2.2 Der vierdimensionale Raum

2.2.1 Geometrische Arbeitsmethoden

Nun wollen wir zum Schluss unser Versprechen einlösen und etwas über die Geometrie des vierdimensionalen Raumes erzählen.

Beim Aufbau der Geometrie der Geraden, der Ebene und des dreidimensionalen Raumes haben wir zwei Möglichkeiten: Entweder wir legen den Stoff mit Hilfe anschaulicher Vorstellungen dar (dieses Vorgehen ist für den Mathematikunterricht der Schule charakteristisch; deshalb kann man sich ein Geometrielehrbuch schwer ohne Zeichnungen vorstellen), oder - und diese Möglichkeit gibt uns die Koordinatenmethode - wir behandeln ihn rein analytisch, indem wir z.B. Punkt einer Ebene ein Zahlenpaar (die Koordinaten dieses Punktes) nennen und Punkt des Raumes ein Zahlentripel.

Bei der Einführung des vierdimensionalen Raumes entfällt für uns die erste Möglichkeit. Wir können nicht unmittelbar anschauliche geometrische Vorstellungen verwenden, denn der uns umgebende Raum hat im ganzen nur drei Dimensionen.

¹⁸Albert Einstein hat selbst einmal zum Ausdruck gebracht, dass er ohne die mathematische Leistung seines Lehrers Hermann Minkowski die allgemeine Relativitätstheorie kaum hätte aufbauen können.

Der zweite Weg ist uns jedoch nicht verschlossen. In der Tat, wir definieren einen Punkt einer Geraden als Zahl, einen Punkt einer Ebene als Zahlenpaar, einen Punkt des dreidimensionalen Raumes als Zahlentripel.

Deshalb ist es ganz natürlich, die Geometrie des vierdimensionalen Raumes darauf aufzubauen, dass man einen Punkt dieses erdachten Raumes als Zahlenquadrupel definiert. Unter den geometrischen Figuren in diesem Raum muss man dann (wie übrigens auch in der gewöhnlichen Geometrie) gewisse Punktmengen verstehen. Gehen wir nun zu den genauen Definitionen über.

2.2.2 Koordinatenachsen und -ebenen

Definition. Punkt des vierdimensionalen Raumes nennt man ein geordnetes¹⁹ Quadrupel von Zahlen (x, y, z, u) .

P

Was soll man im vierdimensionalen Raum als Koordinatenachsen ansehen und wieviele gibt es?

Um diese Frage beantworten zu können, kehren wir zeitweise zur Ebene und dem dreidimensionalen Raum zurück.

In der Ebene (d.h. einem Raum von zwei Dimensionen) sind die Koordinatenachsen Mengen von Punkten, für die eine Koordinate beliebige Zahlenwerte annehmen kann, die andere aber gleich null ist. So ist die Abszissenachse die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0)$, wobei x eine beliebige reelle Zahl ist.

Beispielsweise liegen auf der Abszissenachse die Punkte $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(2\frac{1}{3}, 0)$, aber der Punkt $(\frac{1}{5}, 2)$ gehört der Abszissenachse nicht an.

Die Ordinatenachse der Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y)$, wobei y eine beliebige reelle Zahl ist.

Im dreidimensionalen Raum gibt es drei Achsen:

die x -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, 0)$, wobei x eine beliebige reelle Zahl ist;

die y -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, 0)$, wobei y eine beliebige reelle Zahl ist;

die z -Achse, d.h., die Menge der Punkte der Gestalt $(0, 0, z)$, wobei z eine beliebige reelle Zahl ist.

Im vierdimensionalen Raum, der aus allen Punkten der Gestalt (x, y, z, u) besteht, wobei x, y, z, u beliebige reelle Zahlen sind, nimmt man natürlicherweise an, dass Koordinatenachsen solche Punktmengen sind, für deren Punkte eine der Koordinaten beliebige Zahlenwerte annehmen kann und die anderen null sind.

Dann ist klar, dass es im vierdimensionalen Raum vier Koordinatenachsen gibt:

die x -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, 0, 0)$, wobei x eine beliebige

¹⁹Wir sagen "geordnet", weil sich bei verschiedener Anordnung ein und derselben Zahlen im Quadrupel verschiedene Punkte ergeben. Beispielsweise ist der Punkt $(1, -2, 3, 8)$ vom Punkt $(3, 1, 8, -2)$ verschieden.

reelle Zahl ist;

die y -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, 0, 0)$, wobei y eine beliebige reelle Zahl ist;

die z -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, 0, z, 0)$, wobei z eine beliebige reelle Zahl ist;

die u -Achse, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, 0, 0, u)$, wobei u eine beliebige reelle Zahl ist.

Im dreidimensionalen Raum gibt es außer den Koordinatenachsen noch die Koordinatenebenen. Das sind Ebenen, die durch irgend zwei Koordinatenachsen gehen. Beispielsweise ist die (y, z) -Ebene jene Ebene, die durch die y - und die z -Achse geht. Insgesamt gibt es im dreidimensionalen Raum drei Koordinatenebenen:

die (x, y) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, y, 0)$, wobei x und y beliebige reelle Zahlen sind;

die (y, z) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, z)$, wobei y und z beliebige reelle Zahlen sind;

die (x, z) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, z)$, wobei x und z beliebige reelle Zahlen sind.

Entsprechend nennt man auch im vierdimensionalen Raum Koordinatenebenen Mengen von Punkten, für die irgend zwei ihrer vier Koordinaten beliebige Zahlenwerte annehmen und die übrigen zwei gleich null sind.

Beispielsweise werden wir die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, z, 0)$ (x, z) -Koordinatenebene des vierdimensionalen Raumes nennen. Wieviel solche Ebenen gibt es nun aber?

Das kann man sich leicht überlegen. Wir schreiben sie jetzt einfach alle auf:

die (x, y) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(x, y, 0, 0)$,

die (x, z) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, z, 0)$,

die (x, u) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, 0, u)$,

die (y, z) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, z, 0)$,

die (y, u) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, 0, u)$,

die (z, u) -Ebene ist die Menge der Punkte der Gestalt $(0, 0, z, u)$.

Für jede dieser Ebenen können die variablen Koordinaten beliebige Zahlenwerte, darunter auch den Wert null, annehmen.

So gehört z.B. der Punkt $(5, 0, 0, 0)$ sicher der (z, y) -Ebene und der (x, u) -Ebene an (und welcher noch?). Dann kann man leicht sehen, dass beispielsweise die (y, z) -Ebene durch die y -Achse "hindurchgeht" in dem Sinne, dass jeder Punkt dieser Achse dieser Ebene angehört.

In der Tat, jeder beliebige Punkt auf der y -Achse, d.h. jeder Punkt der Gestalt $(0, y, 0, 0)$, gehört der Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, z, 0)$, d.h. der (y, z) -Ebene, an.

Frage. Was für eine Menge bilden die Punkte, die gleichzeitig der (y, z) - und der (x, z) -Ebene angehören?

Antwort. Diese Menge besteht aus allen Punkten der Gestalt $(0, 0, z, 0)$, d.h., das ist die z -Achse.

Somit gibt es im vierdimensionalen Raum Punktmengen, die den Koordinatenebenen des dreidimensionalen Raumes analog sind. Es sind im ganzen sechs.

Jede davon besteht aus Punkten, bei denen (wie auch bei den Punkten der Koordinatenebenen des dreidimensionalen Raumes) irgend zwei Koordinaten beliebige Zahlenwerte annehmen können und die übrigen zwei gleich null sind.

Jede dieser Koordinatenebenen "geht durch" zwei Koordinatenachsen; z.B. geht die (y, z) -Ebene durch die y - und die z -Achse. Andererseits gehen durch jede Achse drei Koordinatenebenen.

So gehen durch die x -Achse die (x, y) -, (x, z) - und die (x, u) -Ebene. Wir sagen, dass die x -Achse der Durchschnitt dieser Ebenen ist. Alle sechs Koordinatenebenen haben einen gemeinsamen Punkt. Dieser Punkt ist $(0, 0, 0, 0)$, der Koordinatenursprung.

Frage. Welche Punktmenge ist der Durchschnitt der (x, y) - und der (y, z) -Ebene bzw. der (x, y) - und der (z, u) -Ebene?

Wir sehen, dass man ein dem dreidimensionalen Raum völlig analoges Bild erhält.

Wir versuchen jetzt sogar, eine schematische Zeichnung zu machen, die uns die Lage der Koordinatenachsen und -ebenen des vierdimensionalen Raumes etwas veranschaulichen soll.

In Bild 31 sind die Koordinatenebenen durch Parallelogramme dargestellt und die Achsen durch Geraden; es ist alles genau so wie in Bild 20 für den dreidimensionalen Raum.

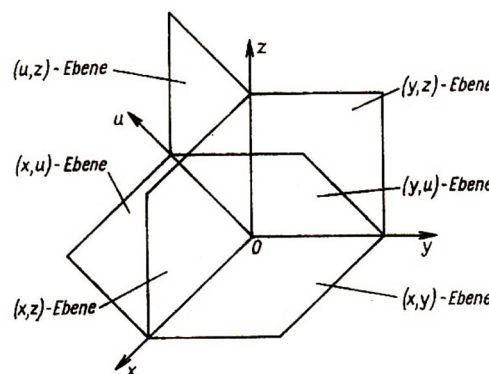


Bild 31

Jedoch gibt es im vierdimensionalen Raum noch andere Punktmengen, die man Koordinatenebenen nennen kann. Das war eigentlich auch zu erwarten. Auf der Geraden gibt es nur den Koordinatenursprung; in der Ebene gibt es den Koordinatenursprung und Achsen; im dreidimensionalen Raum gibt es neben dem Koordinatenursprung und den Achsen noch Koordinatenebenen.

Es ist nur natürlich, dass im vierdimensionalen Raum neue Mengen auftauchen, die wir dreidimensionale Koordinatenebenen nennen werden.

Das sind Mengen, die aus allen Punkten bestehen, bei denen irgend drei der vier Koordinaten beliebige Zahlenwerte annehmen und deren vierte Koordinate gleich null ist. Eine Menge dieser Art ist z.B. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, z, u)$, wobei x, z, u alle Werte annehmen können.

Diese Menge nennen wir dreidimensionale (x, z, u) -Koordinatenebene. Es ist leicht einzusehen, dass es im vierdimensionalen Raum vier dreidimensionale Koordinatenebenen gibt:

die (x, y, z) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, y, z, 0)$,
die (x, y, u) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, y, 0, u)$,
die (x, z, u) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(x, 0, z, u)$.
die (y, z, u) -Ebene, d.h. die Menge der Punkte der Gestalt $(0, y, z, u)$.

Man kann auch sagen, dass jede der dreidimensionalen Koordinatenebenen "durch" den Koordinatenursprung "geht" und dass jede dieser Ebenen "durch" drei Koordinatenachsen "geht" (das Wort "geht durch" wird hier in dem Sinne verwandt, dass der Koordinatenursprung und jeder Punkt der Achsen der Ebene angehört). Beispielsweise geht die dreidimensionale (x, y, u) -Ebene durch die x -, y - und die u -Achse.

Analog kann man sagen, dass jede der zweidimensionalen Ebenen der Durchschnitt zweier dreidimensionaler Ebenen ist. Beispielsweise ist die (x, y) -Ebene der Durchschnitt der dreidimensionalen (x, y, z) - und der (x, y, u) -Ebene, d.h. sie besteht aus all den Punkten, die gleichzeitig der einen und der anderen Menge angehören.

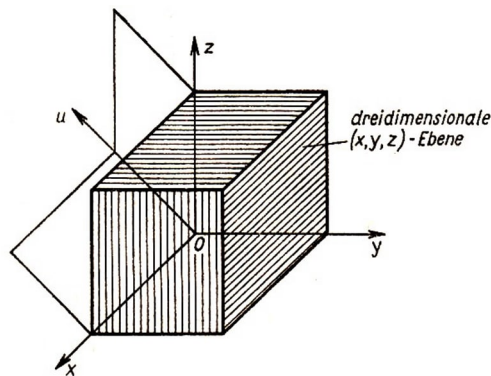


Bild 32

Wir sehen uns Bild 32 an. Es unterscheidet sich von Bild 31 dadurch, dass wir hier die dreidimensionale (x, y, z) -Koordinatenebene eingezeichnet haben. Sie wird durch ein Parallelepiped dargestellt.

Man sieht, dass diese Ebene die x -, y - und die z -Achse und die (x, y) -, (x, z) - und die (y, z) -Ebene enthält.

2.2.3 Einige Aufgaben

Versuchen wir nun, uns Klarheit darüber zu verschaffen, in welchem Sinne man im vierdimensionalen Raum vom Abstand zwischen zwei Punkten sprechen kann.

In den Abschnitten 1.1.3., 1.2.3. und 1.2.6. zeigten wir, dass die Koordinatenmethode es möglich macht, den Abstand zwischen zwei Punkten zu definieren, ohne dass man sich auf geometrische Vorstellungen stützt.

In der Tat, der Abstand wird für die Punkte $A(x_1)$ und $B(x_2)$ einer Geraden nach der Formel

$$\rho(AB) = |x_1 - x_2| \quad \text{oder} \quad \rho(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

für die Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ einer Ebene nach der Formel

$$\rho(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

und für die Punkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ des dreidimensionalen Raumes nach der Formel

$$\rho(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

berechnet.

Es liegt nahe, den Abstand auch im vierdimensionalen Raum auf analoge Weise einzuführen, und zwar durch folgende Definition. P

Definition. Abstand zwischen den Punkten $A(x_1, y_1, z_1, u_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2, u_2)$ des vierdimensionalen Raumes nennt man die nach der Formel

$$\rho(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}$$

berechnete Zahl $\rho(A, B)$.

Insbesondere beträgt der Abstand eines Punktes $A(x, y, z, u)$ vom Koordinatenursprung

$$\rho(OA) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}$$

Unter Verwendung dieser Definition kann man bereits Aufgaben aus der Geometrie des vierdimensionalen Raumes lösen, die jenen sehr ähnlich sind, die in den Schulbüchern stehen.

Übungsaufgaben

1. Man beweise, dass das Dreieck mit den Eckpunkten $A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$ und $C(-1, 7, -3, 0)$ gleichschenkelig ist.
2. Gegeben sind vier Punkte des vierdimensionalen Raumes $A(1, 1, 1, 1)$, $B(-1, -1, 1, 1)$, $C(-1, 1, 1, -1)$ und $D(1, -1, 1, -1)$. Man beweise, dass diese vier Punkte gleichweit voneinander entfernt sind.

3. A , B und C seien Punkte des vierdimensionalen Raumes. Wir können auf folgende Weise den Winkel ABC definieren. P

Da wir im vierdimensionalen Raum den Abstand berechnen können, finden wir $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ und $\rho(A, C)$, d.h. die "Längen der Seiten" des Dreiecks ABC .

Nun konstruieren wir in einer gewöhnlichen zweidimensionalen Ebene ein Dreieck $A'B'C'$ so, dass seine Seiten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ entsprechend gleich $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ und $\rho(A, C)$ sind. Winkel ABC im vierdimensionalen Raum werden wir dann den Winkel $A'B'C'$ dieses Dreiecks nennen.

Man beweise, dass das Dreieck mit den Eckpunkten $A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$ und $C(1, 3, -2, 0)$ rechtwinklig ist.

4. Wir betrachten die Punkte A , B und C aus der Übungsaufgabe 1. Man berechne die Winkel A , B und C des Dreiecks ABC .

2.3 Der vierdimensionale Würfel

2.3.1 Definition der Kugel und des Würfels

Wir gehen nun dazu über, geometrische Figuren im vierdimensionalen Raum zu betrachten. Unter einer geometrischen Figur wollen wir (wie auch in der gewöhnlichen Geometrie) eine gewisse Punktmenge verstehen.

Nehmen wir z.B. die Definition der Kugel: Eine Kugel ist die Menge der Punkte, die von einem gewissen Punkt den gleichen Abstand haben. Diese Definition kann man bereits dazu verwenden, ganz analog die Kugel im vierdimensionalen Raum zu definieren, denn was ein Punkt ist, wissen wir, und was der Abstand ist, ebenfalls.

Und wir benutzen diese Definition auch, indem wir sie in die Zahlensprache übersetzen (wie im dreidimensionalen Raum definieren wir der Einfachheit halber eine Kugel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt).

Definition. Die Menge der Punkte (x, y, z, u) , die der Beziehung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$$

genügen, heißt vierdimensionale Kugel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Radius R .

P

Nun wenden wir uns dem vierdimensionalen Würfel zu.

Dem Namen nach ist das eine Figur, die dem bekannten dreidimensionalen Würfel (Bild 33a) analog ist. In der Ebene gibt es auch eine dem Würfel analoge Figur, nämlich das Quadrat.

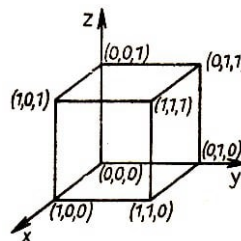


Bild 33a

Die Analogie zwischen ihnen kann man besonders leicht erkennen, wenn man den Würfel und. das Quadrat analytisch definiert.

In der Tat (wie schon aus der Übung 4 des Abschnitts 1.3.1. bekannt ist), man kann folgende Definition geben:

Eine Menge von Punkten (x, y, z) , die den Beziehungen

$$0 \leq x \leq 1, \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, \quad , \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (8)$$

genügen, nennt man Würfel.

Für diese "arithmetische" Definition des Würfels ist bereits keinerlei Zeichnung mehr erforderlich. Aber sie entspricht der geometrischen Definition des Würfels vollkommen.²⁰

²⁰Natürlich gibt es im Raum auch noch andere Würfel. Beispielsweise ist die Menge der durch die

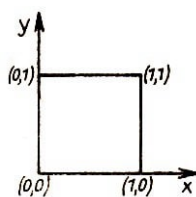


Bild 33b

Das Quadrat kann man ebenfalls arithmetisch definieren.

Die Menge der Punkte (x, y) , die den Beziehungen (Bild 33b)

$$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1$$

genügen, nennt man Quadrat.

Vergleicht man diese beiden Definitionen, so erkennt man sofort, dass das Quadrat wirklich das zweidimensionale Analogon des Würfels ist. Wir werden daher das Quadrat manchmal "zweidimensionalen Würfel" nennen.

Man kann auch im eindimensionalen Raum, auf der Geraden, das Analogon dieser Figur betrachten. Wir erhalten eine Menge von Punkten x auf der Geraden, die der Beziehung

$$0 \leq x \leq 1$$

genügen. Offensichtlich ist ein solcher "eindimensionaler Würfel" eine Strecke (Bild 33c).

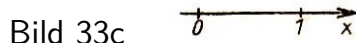


Bild 33c

Wir hoffen, dass jetzt die folgende Definition ganz selbstverständlich erscheint:

Definition. Die Menge der Punkte (x, y, z, u) , die den Beziehungen Eine Menge von Punkten (x, y, z) , die den Beziehungen

$$0 \leq x \leq 1, \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, \quad , \quad 0 \leq z \leq 1, \quad , \quad 0 \leq u \leq 1$$

genügen, nennt man vierdimensionalen Würfel.

Bisher haben wir noch keine Abbildung für einen vierdimensionalen Würfel gebracht - wir werden das jedoch noch nachholen.

(Man kann einen vierdimensionalen Würfel zeichnen; denn wir können ja auch einen dreidimensionalen Würfel auf ein ebenes Stück Papier zeichnen.)

Dazu müssen wir zunächst klären, wie dieser Würfel "gebaut" ist, welche Elemente in ihm unterschieden werden können.

Beziehungen $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ bestimmten Punkte ebenfalls ein Würfel. Dieser Würfel liegt sehr günstig bezüglich der Koordinatenachsen: Der Koordinatenursprung ist sein Mittelpunkt, die Koordinatenachsen und ebenen sind entsprechend seine Symmetrieachsen und ebenen. Wir haben uns jedoch entschlossen, den durch die Beziehungen (8) definierten Würfel unseren Betrachtungen zugrunde zu legen. Diesen Würfel nennen wir manchmal Einheitswürfel, um ihn von den anderen Würfeln unterscheiden zu können.

2.3.2 Die Struktur des vierdimensionalen Würfels

Wir betrachten der Reihe nach "Würfel" verschiedener Dimensionen, d.h. die Strecke, das Quadrat und den gewöhnlichen Würfel.

Die durch die Beziehung $0 \leq x \leq 1$ definierte Strecke ist eine sehr einfache Figur. Über sie kann man wohl nur sagen, dass ihr Rand aus zwei Punkten besteht: aus 0 und 1. Die übrigen Punkte der Strecke werden wir innere Punkte nennen.

Der Rand der Quadrate besteht aus vier Punkten (den Eckpunkten) und vier Strecken. Somit besteht der Rand des Quadrates aus Elementen zweierlei Art: aus Punkten und Strecken. Der Rand des dreidimensionalen Würfels enthält Elemente dreierlei Art: die Eckpunkte - es sind 8 -, die Kanten (Strecken) - es sind 12 - und die Seitenflächen (Quadrate) - es sind 6.

Schreiben wir diese Ergebnisse in Tabellenform.

Figur	Bestandteile des Randes		
	Punkte (Eckpunkte)	Strecken (Seiten, Kanten)	Quadrate (Seitenflächen)
Strecke	2	-	-
Quadrat	4	4	-
Würfel	8	12	6

Diese Tabelle kann man kürzer schreiben, wenn man anstelle der Benennung der Figur die Anzahl n ihrer Dimension schreibt: für die Strecke $n = 1$, für das Quadrat $n = 2$, für den Würfel $n = 3$.

Statt der Benennung des Randelements kann man gleichfalls die Dimension dieses Elements schreiben: für die Seitenfläche $n = 2$, für die Kante $n = 1$. Dabei sieht man den Punkt (Eckpunkt) am besten als Element der Dimension null an ($n = 0$). Dann nimmt die vorstehende Tabelle folgende Gestalt an:

Dimension des Würfels	Dimension des Randes		
	0	1	2
1	2	-	-
2	4	4	-
3	8	12	6
4			

Unser Ziel ist es, die vierte Zeile dieser Tabelle auszufüllen. Deshalb sehen wir uns noch einmal, jetzt aber analytisch²¹, den Rand der Strecke, des Quadrates und des Würfels an und versuchen herauszufinden, wie der Rand des vierdimensionalen Würfels zusammengesetzt ist.

Der Rand der Strecke $0 \leq x \leq 1$ besteht aus zwei Punkten: $x = 0$ und $x = 1$.

Der Rand des Quadrates $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ enthält die vier Eckpunkte: $x = 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$, d.h. die Punkte (0,0), (0,1), (1,0) und (1,1).

²¹d.h. rein arithmetisch

Der Würfel $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ hat acht Eckpunkte. Jeder dieser Eckpunkte ist ein Punkt (x, y, z) , in dem x , y und z entweder durch null oder durch eins ersetzt ist.

Es ergeben sich die folgenden acht Punkte: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Eckpunkte des vierdimensionalen Würfels

$$0 \leq x \leq 1, \quad , \quad 0 \leq y \leq 1, \quad , \quad 0 \leq z \leq 1, \quad , \quad 0 \leq u \leq 1$$

nennt man die Punkte (x, y, z, u) , in denen x, y, z und u entweder durch null oder durch eins ersetzt sind.

Solche Eckpunkte gibt es 16, denn man kann aus 0 und 1 genau 16 verschiedene solcher Quadrupel bilden. In der Tat, wir nehmen die Tripel, die aus den Koordinaten der Eckpunkte des dreidimensionalen Würfels gebildet werden können (das sind 8) und schreiben zu jedem dieser Tripel erst 0 und dann 1 dazu.

Auf diese Weise ergeben sich aus jedem der Tripel zwei Quadrupel und insgesamt erhalten wir $8 \cdot 2 = 16$ Quadrupel. Damit haben wir die Eckpunkte des vierdimensionalen Würfels gezählt.

Überlegen wir nun, was man Kante des vierdimensionalen Würfels nennen müsste. Wieder verwenden wir die Analogie.

Beim Quadrat werden die Kanten (Seiten) durch folgende Beziehungen bestimmt (s. Bild 33b):

$$\begin{array}{llll} 0 \leq x \leq 1 & , & y = 0; & \text{(Kante AB)} \\ x = 1 & , & 0 \leq y \leq 1; & \text{(Kante BC)} \\ 0 \leq x \leq 1 & , & y = 1; & \text{(Kante CD)} \\ x = 0 & , & 0 \leq y \leq 1; & \text{(Kante DA)} \end{array}$$

Wie wir sehen, ist für die Kante eines Quadrats charakteristisch, dass für alle Punkte einer gegebenen Kante irgendeine der Koordinaten einen festen Zahlenwert, 0 oder 1, hat, während die zweite Koordinate alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt.

Weiter betrachten wir die Kanten eines (dreidimensionalen) Würfels. Es gilt (s. Bild 33a):

$$\begin{array}{llll} x = 0 & y = 0 & 0 \leq z \leq 1 & \text{Kante } AA_1 \\ 0 \leq x \leq 1 & y = 0 & z = 1 & \text{Kante } A_1B_1 \\ x = 1 & 0 \leq y \leq 1 & z = 1 & \text{Kante } B_1C_1 \end{array}$$

usw.

Der Analogie wegen geben wir folgende

Definition. Kanten des vierdimensionalen Würfels nennen wir die Mengen der Punkte, für die alle Koordinaten, außer einer, konstant (gleich 0 oder 1) sind und deren vierte Koordinate alle Werte von 0 bis 1 annimmt.

Beispiele für Kanten sind

- 1) $x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1 \quad 0 \leq u \leq 1$
- 2) $0 \leq x \leq 1 \quad y = 1 \quad z = 0 \quad u = 1$
- 3) $x = 1 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad z = 0 \quad u = 0$ usw.

Wir versuchen zu zählen, wieviele Kanten der vierdimensionale Würfel hat, d.h. wieviele solcher Zeilen man hinschreiben kann. Um nicht durcheinander zu kommen, zählen wir sie in einer bestimmten Reihenfolge.

Zunächst unterscheiden wir vier Gruppen von Kanten: für die erste Gruppe sei x die veränderliche Koordinate ($0 \leq x \leq 1$), und y, z und u mögen die festen Werte 0 und 1 in allen möglichen Kombinationen annehmen.

Wir wissen aber bereits, dass 8 verschiedene Tripel aus null und eins existieren (wieviele Eckpunkte hat der dreidimensionale Würfel?).

Deshalb gibt es acht Kanten der ersten Gruppe (für die die x -Koordinate variabel ist).

Es ist leicht einzusehen, dass auch die zweite Gruppe, für die nicht x , sondern y variabel ist, aus acht Kanten besteht. Somit ist klar, dass der vierdimensionale Würfel $4 \cdot 8 = 32$ Kanten hat.

Nun ist es leicht, die Beziehungen hinzuschreiben, die jede dieser Kanten bestimmen, ohne dass man befürchten muss, eine auszulassen:

Erste Gruppe:

$$0 \leq x \leq 1$$

Zweite Gruppe:

$$0 \leq y \leq 1$$

Dritte Gruppe:

$$0 \leq z \leq 1$$

Vierte Gruppe:

$$0 \leq u \leq 1$$

y	z	u
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

x	z	u
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

x	y	u
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Der dreidimensionale Würfel hat außer Eckpunkten und Kanten noch Seitenflächen. Auf jeder dieser Seitenflächen ändern sich zwei Koordinaten (indem sie alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen), und eine Koordinate ist konstant (gleich 0 oder 1). Beispielsweise wird die Seitenfläche ABB_1A_1 (Bild 33a) durch die Beziehungen

$$0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1$$

bestimmt. Analog dazu geben wir folgende

Definition. Zweidimensionale Seitenfläche²² des vierdimensionalen Würfels heißt die Menge der Punkte, für die zwei beliebige Koordinaten alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen können, während die anderen beiden Koordinaten konstant (gleich 0 oder 1) sind.

²²Warum es notwendig ist, zweidimensionale Seitenfläche zu sagen, wird etwas später erklärt.

Ein Beispiel für eine Seitenfläche ist

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 1, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Übungsaufgabe

Man bestimme die Anzahl der zweidimensionalen Seitenflächen des vierdimensionalen Würfels.

(Hinweis. Wir empfehlen, zunächst ohne eine Zeichnung zu Hilfe zu nehmen und nur unter Verwendung analytischer (arithmetischer) Definitionen alle sechs Zeilen von Beziehungen niederzuschreiben, die die sechs Seitenflächen des gewöhnlichen dreidimensionalen Würfels bestimmen. Antwort. Der vierdimensionale Würfel hat 24 zweidimensionale Seitenflächen.)

Nun können wir die vierte Zeile unserer Tabelle ausfüllen:

Dimension des Würfels	Dimension des Randes			
	0	1	2	3
1	2	-	-	-
2	4	4	-	-
3	8	12	6	-
4	16	32	24	

Man sieht, dass die Tabelle noch nicht vollständig ist: Das rechte untere Element fehlt in ihr.

Denn es ist anzunehmen, dass man für den vierdimensionalen Würfel noch eine Spalte hinzufügen muss. Wirklich, die Strecke hatte nur eine Art Element als Band, die Eckpunkte, beim Quadrat kamen die Kanten, beim Würfel die Quadrate, d.h. die zweidimensionalen Seitenflächen, hinzu.

Es ist zu erwarten, dass beim vierdimensionalen Würfel außer den bereits bekannten Randelementen noch eine neue Art von Elementen auftritt, deren Dimension gleich drei ist.

Versuchen wir, eine Definition zu geben.

Definition. Dreidimensionale Seitenfläche eines vierdimensionalen Würfels heißt die Menge der Punkte, bei denen drei Koordinaten alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen und eine konstant (entweder gleich 0 oder gleich 1) ist.

P

Die Anzahl der dreidimensionalen Seitenflächen lässt sich leicht feststellen. Es gibt acht, weil jede ihrer vier Koordinaten zwei mögliche Werte annehmen kann, nämlich 0 und 1, und folglich erhalten wir $2 \cdot 4 = 8$.

Nun aber sehen wir uns Bild 34 an. Es zeigt einen vierdimensionalen Würfel. Auf der Zeichnung sieht man alle 16 Eckpunkte, 32 Kanten, 24 zweidimensionalen Seitenflächen und 8 dreidimensionalen Seitenflächen (sie sind als Parallelfäche dargestellt).

In der Zeichnung kann man gut erkennen, welche Seitenfläche welche Kante enthält usw.

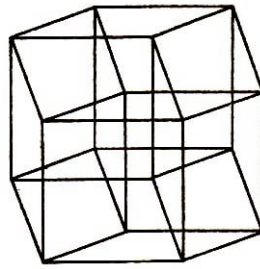


Bild 34

Wie ist diese Zeichnung konstruiert worden?

Überlegen wir uns einmal, wie man einen gewöhnlichen Würfel auf ein ebenes Blatt Papier zeichnet. Man konstruiert die sogenannte Parallelprojektion des dreidimensionalen Würfels auf eine zweidimensionale Ebene.²³

Damit sich unsere Zeichnung ergab, haben wir zunächst ein räumliches Modell, nämlich eine Projektion des vierdimensionalen Würfels auf einen dreidimensionalen Raum, angefertigt und dann dieses Modell gezeichnet. Wer geschickte Hände hat, kann ein derartiges Modell konstruieren.

Dazu kann man z.B. gewöhnliche Streichhölzer benutzen, die man mit Plastilinkugeln zusammenheftet. (Wieviele Streichhölzer braucht man? Und wieviele Plastilinkugeln? Wieviele Streichhölzer müssen in eine Plastilinkugel gesteckt werden?)

Man kann auch noch auf eine andere Art und Weise eine Vorstellung von einem vierdimensionalen Würfel bekommen. Stellen Sie sich vor, wir hätten Sie darum gebeten, uns ein Modell eines gewöhnlichen dreidimensionalen Würfels zu schicken.

Natürlich können Sie dazu die "dreidimensionale" Post benutzen.

Aber dreidimensionale Figuren nimmt die Post als Pakete entgegen, und das ist kompliziert. Deshalb verfährt man besser folgendermaßen.

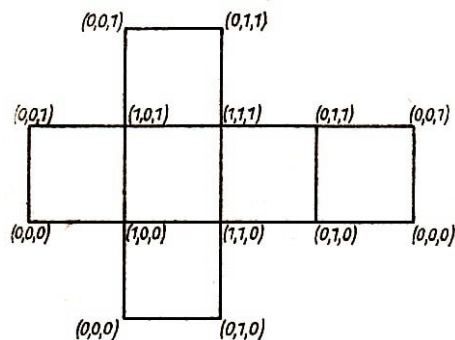


Bild 35

²³In der darstellenden Geometrie wird die Parallelprojektion ausführlicher behandelt. Um sich die Parallelprojektion eines gewöhnlichen Würfels auf eine Ebene vorstellen zu können, stelle man sich aus Draht einen Würfel her (das Skelett eines Würfels) und beobachte, welchen Schatten er an einem sonnigen Tag auf ein Blatt Papier oder an eine Wand wirft. Wenn man diesen Würfel in geeigneter Weise hinstellt, sieht der Schatten wie die Zeichnung aus, die man gewöhnlich in Büchern findet. Und das ist dann eine Parallelprojektion eines Würfels auf eine Ebene. Man erhält sie, wenn man durch jeden Punkt des Würfels eine Gerade legt, die zu einer vorgegebenen Richtung parallel ist (die Sonnenstrahlen können als parallel angesehen werden), die jedoch nicht unbedingt auf der Ebene senkrecht zu stehen braucht. Dann ergibt sich im Schnitt mit der Ebene, auf die wir projizieren, die Parallelprojektion der Figur.

Man klebt einen Würfel aus Papier, weicht ihn wieder auf und schickt den Schnitt oder, wie die Mathematiker sagen, die Abwicklung oder das Netz des Würfels. Eine solche Abwicklung eines Würfels zeigt Bild 35.

Da in der Zeichnung die Eckpunkte mit ihren Koordinaten versehen werden sind, kann man sich leicht überlegen, wie man diese Abwicklung zusammenkleben muss, damit man den Würfel selber erhält.

Übungsaufgaben

1. Man schreibe die Beziehungen auf, die jede der dreidimensionalen Seitenflächen des vierdimensionalen Würfels bestimmen.
2. Man kann auch für den vierdimensionalen Würfel eine Abwicklung anfertigen. Das wird eine dreidimensionale Figur sein. Sie besteht offensichtlich aus acht kleinen Würfeln. Wer es fertig bringt, diese Abwicklung herzustellen oder sich vorzustellen, der zeichne sie und gebe auf der Zeichnung bei jedem Eckpunkt dessen Koordinate an.

2.3.3 Aufgaben über den Würfel

Wir haben uns nun eine gewisse Vorstellung von der Struktur des vierdimensionalen Würfels erarbeitet. Nun wollen wir versuchen, uns seine Ausdehnungen vorzustellen. Wie beim Quadrat und beim gewöhnlichen Würfel hat jede der Kanten des vierdimensionalen Würfels die Länge eins (unter der Länge einer Kante verstehen wir den Abstand zwischen den auf dieser Kante gelegenen Eckpunkten). Nicht umsonst nannten wir unsere "Würfel" Einheitswürfel.

1. Man berechne den Abstand zwischen den anderen, nicht auf einer Kante gelegenen Eckpunkten des Würfels.

(Zu diesem Zweck wählt man am besten den Eckpunkt $(0, 0, 0, 0)$ aus und berechnet den Abstand dieses Eckpunktes von allen anderen. Die Formel zur Berechnung des Abstandes zwischen Punkten ist bekannt, die Koordinaten der Eckpunkte ebenfalls, man braucht nur noch einfache Berechnungen auszuführen.)

2. Nachdem die erste Aufgabe gelöst ist, kann man alle Eckpunkte in vier Gruppen einteilen.

Die Eckpunkte der ersten Gruppe haben vom Punkt $(0, 0, 0, 0)$ den Abstand 1, die Eckpunkte der zweiten Gruppe den Abstand $\sqrt{2}$, die Eckpunkte der dritten Gruppe den Abstand $\sqrt{3}$ und die der vierten Gruppe den Abstand $\sqrt{4} = 2$.

Wieviele Eckpunkte des vierdimensionalen Würfels gehören den einzelnen Gruppen an?

3. Der Eckpunkt $(1, 1, 1, 1)$ hat vom Punkt $(0, 0, 0, 0)$ den größten Abstand, nämlich 2. Diesen Eckpunkt nennen wir den dem Eckpunkt $(0, 0, 0, 0)$ gegenüberliegenden und die Strecke, welche diese zwei Eckpunkte miteinander verbindet, die Hauptdiagonale des vierdimensionalen Würfels.

Was soll man bei den Würfeln anderer Dimensionen Hauptdiagonale nennen und wie lang sind ihre Hauptdiagonalen?

4. Nun stellen wir uns vor, dass ein dreidimensionaler Würfel aus Draht angefertigt

wurde und im Eckpunkt $(0, 0, 0)$ eine Ameise sitzt.

Dann muss die Ameise von einem Eckpunkt zum anderen über die Kanten krabbeln. Über wieviele Kanten muss sie laufen, bis sie vom Eckpunkt $(0, 0, 0)$ aus den Eckpunkt $(1, 1, 1)$ erreicht? Über drei Kanten.

Deshalb nennen wir den Eckpunkt $(1, 1, 1)$ einen Eckpunkt dritter Ordnung.

Vom Eckpunkt $(0, 0, 0)$ zum Eckpunkt $(0, 1, 1)$, kommt man über nur zwei Kanten. Einen solchen Eckpunkt nennen wir Eckpunkt zweiter Ordnung.

Der Würfel hat noch Eckpunkte erster Ordnung; das sind diejenigen, die die Ameise erreichen kann, wenn sie über nur eine Kante hinwegläuft.

Eckpunkte dieser Art gibt es drei: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$.

Eckpunkte zweiter Ordnung hat der Würfel ebenfalls drei. Man schreibe ihre Koordinaten auf

(Aufgabe 4a).

Vom Punkt $(0, 0, 0)$ aus kommt man zu jedem Eckpunkt zweiter Ordnung auf zwei, jeweils aus zwei Kanten bestehenden Wegen. Beispielsweise kommt man zum Eckpunkt $(0, 1, 1)$ über den Eckpunkt $(0, 0, 1)$, aber auch über den Eckpunkt $(0, 1, 0)$. Auf wievielen dreigliedrigen Wegen kann man von einem Eckpunkt in den gegenüberliegenden gelangen (Aufgabe 4b)?

5. Wir betrachten einen vierdimensionalen Würfel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, d.h. eine Punktmenge, die den Bedingungen

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1, \quad -1 \leq u \leq 1$$

genügt. Man bestimme den Abstand des Eckpunktes $(1, 1, 1, 1)$ von allen übrigen Eckpunkten des Würfels.

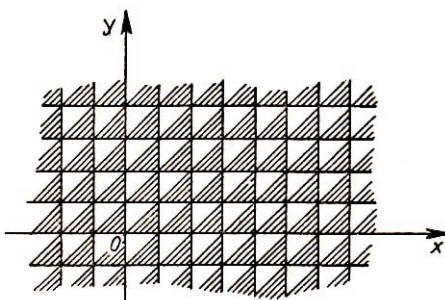
Welche Eckpunkte sind Eckpunkte erster Ordnung bezüglich des Eckpunktes $(1, 1, 1, 1)$ (d.h., zu welchen Eckpunkten gelangt man vom Eckpunkt $(1, 1, 1, 1)$ aus über eine Kante)?

Welche Eckpunkte sind Eckpunkte zweiter, dritter bzw. vierter Ordnung?

6. Und noch die letzte Frage, die als Kontrollfrage zum vierdimensionalen Würfel dienen kann.

Wieviele viergliedrige Wege gibt es, die vom Eckpunkt $(0, 0, 0, 0)$ des vierdimensionalen Würfels zum gegenüberliegenden Eckpunkt $(1, 1, 1, 1)$ führen, wenn man nur über die Kanten dieses Würfels geht?

Man schreibe für je den Weg ausführlich die Marschroute auf, indem man der Reihe nach angibt, über welche Eckpunkte man laufen muss.



Antwort zur Übungsaufgabe 1f auf:

Bild 36

3 Literatur

Brehmer, S., und H. Belkner, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra. Berlin 1966

Crantz/Hauptmann, Analytische Geometrie der Ebene, 14. Aufl. Leipzig 1963

Crantz/Miller, Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1956

Hilbert, D., und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie. Berlin 1932

Kommerell, K., Analytische Geometrie der Ebene, 2. Aufl. Leipzig 1949

Landau, L. D., und J. B. Rumer, Was ist Relativitätstheorie? 5. Aufl. Leipzig 1967

Minkowski, H., Gesammelte Schriften, Bd. 2, S. 102ff. Leipzig 1910

Rademacher, H., und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, 2. Aufl. Berlin 1931

Wells, H. G., Men like Gods. London 1923

Weitzenböck, R. W., Der vierdimensionale Raum. Basel 1956