
A.I. Markuschewitsch

Flächeninhalte und Logarithmen

Übersetzung: Reinhard Völker
1955 Deutscher Verlag der Wissenschaften
MSB: Nr. 43
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Den Vortrag "Flächeninhalte und Logarithmen" habe ich im Herbst 1951 an der Moskauer Universität vor einem großen Auditorium von Schülern der 9. und 10. Klasse - zukünftigen Teilnehmern einer mathematischen Olympiade - gehalten.

Sein Ziel bestand darin, die geometrische Theorie der Logarithmen darzulegen, in der die Logarithmen als Flächeninhalte eingeführt und alle ihre Eigenschaften aus Eigenschaften des Flächeninhaltes abgeleitet werden. Gleichzeitig wurden darin die einfachsten Begriffe und Tatsachen der Integralrechnung gebracht.

In die vorliegende Broschüre wurden einige wenige Ergänzungen aufgenommen. Zu Beginn der Lektüre braucht der Leser nichts von Logarithmen zu wissen. Nur die Grundbegriffe der einfachsten Funktionen und ihrer graphischen Darstellung, die geometrische Reihe sowie der Grenzwertbegriff werden vorausgesetzt. Über diese Kenntnisse verfügt schon ein Schüler der 9. Klasse im zweiten Quartal des Schuljahres.

Wenn ein Leser seine Kenntnisse über Logarithmen über diese Broschüre hinaus erweitern will, dann möge er zu dem Buch I. B. Abelson, Die Entstehung der Logarithmen oder dem Buch A. I. Markuschewitsch, Reihen greifen, dessen letztes Kapitel einen anderen Aufbau der Theorie der Logarithmen enthält als diese Broschüre.

Der Autor

1.

Gegeben sei eine beliebige Funktion. Das bedeutet, dass eine Vorschrift gegeben ist, durch die man zu jedem Wert von x den ihm zugeordneten Wert y (Funktionswert) findet.

Funktionen werden meistens durch Formeln gegeben. So definiert die Formel $y = x^2$ zum Beispiel y als Funktion von x . Hier ergibt sich für jede Zahl x (z.B. $x = 3$) der entsprechende Wert y , indem man die Zahl x ins Quadrat erhebt ($y = 9$).

Die Formel $y = \frac{1}{x}$ definiert eine andere Funktion. Hier ist für jedes von Null verschiedene x der entsprechende Wert y der reziproke Wert; ist $x = 2$, so ist $y = \frac{1}{2}$, ist $x = -\frac{1}{2}$, so ist $y = -2$.

Spricht man von Funktionen, ohne anzugeben, welche Funktion man gerade betrachtet, so schreibt man: $y = f(x)$ (gelesen: f von x). Das bedeutet, dass y eine Funktion von x ist (etwa $y = x^2$ oder $y = \frac{1}{x}$ oder auch irgendeine andere Funktion).

Diese Bezeichnungsweise erinnert an die Methode der Bezeichnung von Zahlen durch Buchstaben. Wie man von den Zahlen $2, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ sprechen kann, kann man auch von der Zahl a sprechen, wobei man unter a die Zahl $2, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ oder auch irgendeine andere Zahl versteht.

So wie man für die Bezeichnung von Zahlen verschiedene Buchstaben benutzt, kann man auch für die Bezeichnung von Funktionen neben der Schreibweise $y = f(x)$ noch andere, z.B. $y = g(x)$, $y = h(x)$ usw. verwenden.

Wenn also in ein und demselben Problem von zwei Funktionen die Rede ist, so muss man, falls man die eine durch $y = f(x)$ bezeichnet, die andere durch $y = g(x)$ oder auch anders bezeichnen.

Eine Funktion $y = f(x)$ kann man graphisch darstellen. Dazu nimmt man zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden Ox und Oy - die Koordinatenachsen (Abb. 1) - und trägt nach Wahl einer Maßeinheit auf der x -Achse die Werte x und senkrecht dazu (in der x, y -Ebene) die entsprechenden Werte $y = f(x)$ ab.

Dabei beachtet man folgende Vorzeichenregel: positive Zahlen werden durch einen Abschnitt dargestellt, der rechts von der y -Achse bzw. oberhalb der x -Achse liegt, negative jedoch durch einen links bzw. unterhalb gelegenen.

Wir erinnern an folgendes: die Strecke zwischen dem Punkt 0 und dem Punkt x wird Abszisse genannt; die von x senkrecht zu dieser Geraden abgetragene Strecke heißt Ordinate.

Könnte man die angegebene Konstruktion für alle möglichen x -Werte ausführen, so würden die Endpunkte der Ordinaten in der Ebene eine Kurve ergeben, die graphische Darstellung (das Bild) der Funktion $y = f(x)$ (im Fall $y = x^2$ ist die Kurve eine Parabel, die in Abb. 2 dargestellt ist).

Greifen wir auf einer Kurve (Abb. 1) zwei beliebige Punkte A und B heraus und fällen von ihnen die Lote AC und BD auf die x -Achse, so erhalten wir die Figur $ACDB$. Eine solche Figur heißt krummliniges Trapez.¹

¹Dieser Ausdruck wird trotz seiner Anschaulichkeit und Zweckmäßigkeit in der deutschen Literatur

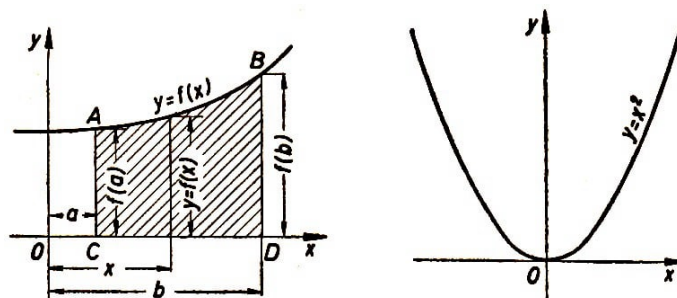


Abb. 1 und 2

Ist insbesondere der Bogen AB ein Abschnitt einer Geraden, die zur x -Achse nicht parallel verläuft, so erhält man ein gewöhnliches Trapez mit zwei rechten Winkeln. Ist diese Strecke AB Abschnitt einer Geraden, die zur x -Achse parallel verläuft, so erhält man ein Rechteck.

Somit sind des Trapez mit zwei rechten Winkeln und das Rechteck Spezialfälle des krummlinigen Trapezes.

Die in Abb. 1 angegebene Kurve liegt oberhalb der x -Achse. Diese Lage ist nur dann möglich, wenn die Funktionswerte positive Zahlen sind.

Wären die Funktionswerte negativ, so würde die Kurve unterhalb der x -Achse liegen (Abb. 3). Wir verabreden, in diesem Fall den Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes mit einem Minuszeichen zu versehen und ihn als negativ anzusehen.

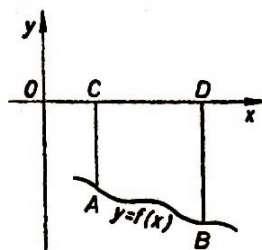


Abb. 3

Schließlich ist es möglich, dass die Funktion in verschiedenen Bereichen der Veränderlichen x verschiedene Vorzeichen hat. Dann liegt die Kurve teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x -Achse.

Ein solcher Fall ist in Abb. 4 dargestellt. Hier muss man den Flächeninhalt $A'C'D'B'$ als negativ, aber den Flächeninhalt $A''C''D''B''$ als positiv ansehen. Wenn wir in diesem Fall die Punkte A und B auf der Kurve so wählen, wie in der Abbildung gezeichnet, und von ihnen aus die Lote AC und BD auf die x -Achse fällen, so erhalten wir zwischen diesen Loten die Figur, die in Abb. 4 schraffiert ist.

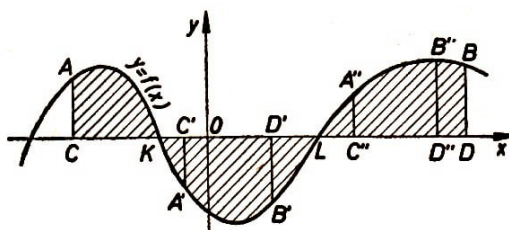


Abb. 4

Diese Figur heißt nach wie vor krummliniges Trapez. Es ist begrenzt von dem Bogen $AKA'B'LA''B''B$, den beiden Ordinaten AC und BD und der Strecke CD der Abszissenachse.

Seinen Flächeninhalt betrachten wir als die Summe der Flächeninhalte der Figuren ACK , $KA'B'L$ und $LDBB''A''$, wobei die Inhalte des ersten und dritten Gliedes dieser Summe positiv, der Flächeninhalt des zweiten negativ sind.

Der Leser folgert leicht, dass unter diesen Bedingungen der Flächeninhalt von krummlinigen Trapezen $ACDB$ sowohl positiv als auch negativ sein kann und in gewissen Fällen sogar gleich Null ist. Zum Beispiel ist das Bild der Funktion

$$y = ax \quad (a > 0)$$

eine Gerade. Hier wird der Flächeninhalt der Figur $ACDB$ (Abb. 5) positiv für

$$OD > OC$$

negativ für $OD < OC$ und schließlich Null, falls $OD = OC$ ist.²

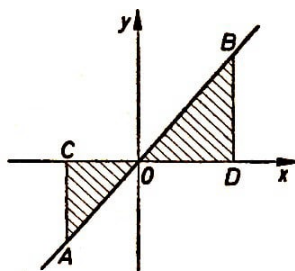


Abb. 5

2.

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, den Flächeninhalt S eines krummlinigen Trapezes zu bestimmen. Solche Berechnungen erweisen sich in den verschiedensten Fragen der Mathematik, Physik und Mechanik so oft als notwendig, dass eine besondere Wissenschaft - die Integralrechnung - entstand, in welcher die Methoden zur Lösung dieser Aufgabe untersucht werden.

Wir beginnen damit, dass wir den allgemeinen Plan zur Lösung der Aufgabe skizzieren; dabei haben wir zwei Schritte zu tun. Im ersten suchen wir einen angenäherten Wert des Flächeninhalts, wobei wir anstreben, den Fehler bei der Annäherung beliebig klein zu machen. Im zweiten Schritt werden wir von Näherungswerten des Flächeninhaltes zu genauen Werten übergehen.

Zu Beginn des ersten Teiles ersetzen wir das krummlinige Trapez $ACDB$ durch eine Treppenfigur, wie sie Abb. 6 zeigt (schraffiert).

Der Flächeninhalt der Treppenfigur ist leicht zu berechnen: er ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke. Diese Summe sehen wir als Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt an.

²Es handelt sich hier um die Längen der Strecken ohne Berücksichtigung ihrer Richtung (ihres Vorzeichens) (Anm. d. Herausgebers).

Wenn wir S durch den Flächeninhalt der Treppenfigur ersetzen, machen wir einen gewissen Fehler α . Der Fehler setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten der krummlinigen Dreiecke, die in unserer Abbildung schwarz gezeichnet sind. Um die Größe des Fehlers abzuschätzen, wählen wir das breiteste Rechteck aus und vergrößern es so, dass seine Höhe gleich dem größten Funktionswert wird (BD im Fall der Abb. 6).

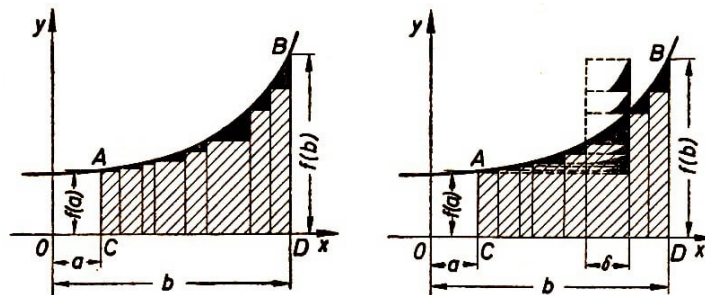


Abb. 6 und 7

Ferner verschieben wir alle krummlinigen Dreiecke parallel der Achse in dieses Rechteck. Sie bilden darin eine gezahnte Figur etwa in Form des Bandes einer Säge (Abb. 7). Da diese Figur sich ganz in dem Rechteck unterbringen lässt, muss der Fehler α , der gleich der Summe der Sägezähne³ ist, kleiner als der Flächeninhalt des Rechtecks sein.

Ist die Basis des Rechtecks δ (griechischer Buchstabe "Delta"), so erhalten wir $|\alpha| < \delta \cdot BD$. Hieraus folgt, dass man den Fehler beliebig klein machen kann, wenn man die Rechtecke in Abb. 6 so schmal nimmt, dass die Basis des breitesten unter ihnen eine hinreichend kleine Zahl ist.

Ist z.B. $BD = 20$ und wollen wir, dass der Flächeninhalt der Treppenfigur sich von S um weniger als 0,001 unterscheidet, so genügt es, $\delta \cdot BD = 20\delta$ kleiner als 0,001 zunehmen, d.h. $\delta < 0,00005$; dann ist

$$|\alpha| < \delta \cdot BD < 0,001$$

Würden wir jedoch δ nicht verkleinern, so ergäbe sich jedes mal ein gewisser, wenn auch sehr kleiner Fehler α , weil der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes nicht dem Flächeninhalt der Treppenfigur gleich ist.

Der zweite und letzte Teil der Lösung der Aufgabe besteht in einem Grenzübergang. Man nimmt an, dass nicht eine und nicht zwei, sondern eine unendliche Menge von Treppenfiguren wie in Abb. 6 betrachtet wird.

Man nimmt die Zahl der Rechtecke immer größer und größer, vergrößert sie unbegrenzt, während sich die Basis δ des breitesten Rechtecks immer mehr verkleinert und sich unbegrenzt der Null nähert.

³In Abb. 6 und 7 hat die Kurve der Funktion die Form eines Aufstiegs auf einen Berg (oder Abstiegs von einem Berg). Hätte die Kurve eine komplizierten Form mit wechselnden Aufstiegen und Abstiegen (siehe z.B. Abb. 4), dann könnten sich die krummlinigen Dreiecke nach ihrer Übertragung in ein einziges Rechteck überdecken, und die Summe ihrer Flächeninhalte könnte größer sein als die Summe des Flächeninhalts der Rechtecke.

Um unsere Überlegungen auch auf diesen komplizierteren Fall anwenden zu können, muss man die ganze Figur so in Teile teilen, dass am Rande eines Teils die Kurve entweder die Form eines Aufstiegs oder die eines Abstiegs hat, und die Überlegung für jeden Teil einzeln durchführen.

Dann wird der Fehler α beim Ersetzen des Flächeninhalts des krummlinigen Trapezes durch den Flächeninhalt der Treppenfiguren immer kleiner werden und sich ebenfalls unbegrenzt der Null nähern. Der gesuchte Flächeninhalt S ergibt sich als Grenzwert der Flächeninhalte der Treppenfiguren.

3.

Verfolgen wir den im vorliegenden Abschnitt gezeigten Weg zur Berechnung des Flächeninhalts eines krummlinigen Trapezes in dem wichtigsten Spezialfall, dass die Funktion $y = f(x)$ eine Potenz mit ganzem, nicht negativem Exponenten ist: $y = x^k$. Für die Exponenten $k = 0, 1, 2$ erhalten wir die Funktionen $y = x^0 = 1$, $y = x^1 = x$, $y = x^2$.

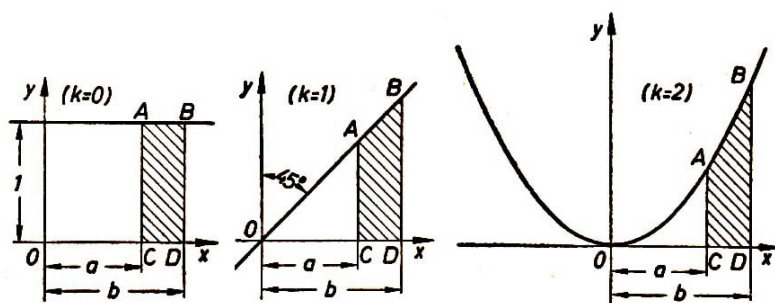


Abb. 8, 9 und 10

Ihre Bilder sind leicht zu konstruieren:

die zur x -Achse parallele Gerade, die oberhalb der x -Achse durch den Punkt $x = 0$, $y = 1$ geht (Abb. 8), die Winkelhalbierende des 1. Quadranten (Abb. 9) und die Parabel (Abb. 10).

Nimmt man einen höheren Exponenten, so erhält man die Funktionen $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, die in den Abbildungen 11, 12, 13 graphisch dargestellt sind.

Ist k eine ungerade Zahl, so ist die Kurve symmetrisch in Bezug auf den Punkt O (Abb. 9, 11, 13). Ist k gerade, so ist sie symmetrisch in Bezug auf die y -Achse (Abb. 8, 10, 12).

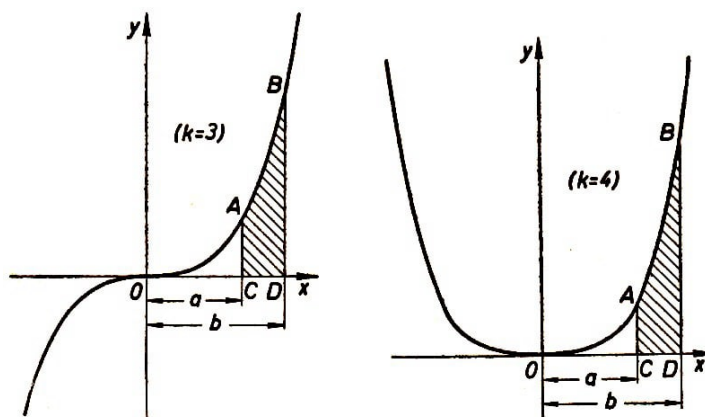


Abb. 11 und 12

Ist $k \geq 1$, so geht die Kurve durch den Punkt O . Je größer k ist, desto enger schmiegt sie sich in der Nähe des Punktes O an die x -Achse an und desto steiler steigt sie nach oben (oder fällt nach unten), je weiter sie sich vom Punkt O entfernt.

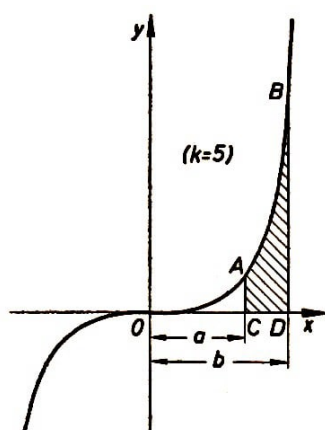


Abb. 13

In jeder der Abb. 8 bis 13 sind krummlinige Trapeze schraffiert. Ihre Flächeninhalte sind für $k = 0$ und $k = 1$ leicht zu finden. Ist nämlich $k = 0$, so ist der Flächeninhalt von $ACDB$ gleich

$$CD \cdot AC = (b - a) \cdot 1 = b - a$$

ist jedoch $k = 1$, so ist der Flächeninhalt von $ACDB$ gleich

$$CD \cdot \frac{AC + BD}{2} = (b - a) \frac{a + b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Wir wollen nun beweisen, dass für $k = 2$ der Flächeninhalt von $ACDB$ gleich $\frac{b^3 - a^3}{3}$, für $k = 3$ gleich $\frac{b^4 - a^4}{4}$ ist usw.

Im allgemeinen Fall, wenn k eine beliebig gewählte nichtnegative ganze Zahl ist, beweisen wir, dass der Flächeninhalt des entsprechenden krummlinigen Trapezes gleich

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}$$

ist. Offenbar umfasst dieses allgemeine Resultat alle obigen Ergebnisse als Spezialfälle.

Um die weitere Berechnung leichter verfolgen zu können, geben wir dem Exponenten k einen bestimmten Zahlenwert, z.B. $k = 5$. Außerdem setzen wir $0 < a < b$ voraus.

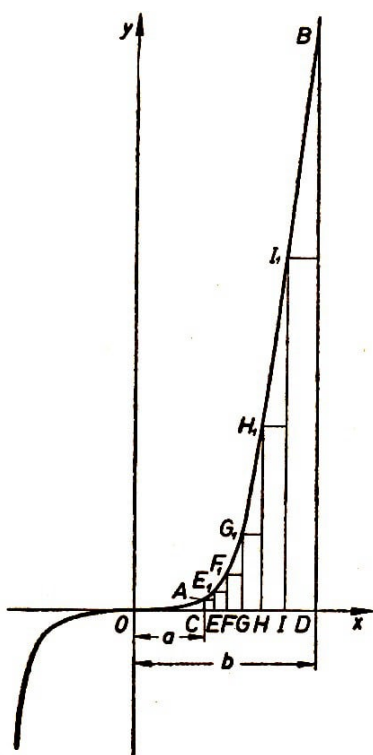


Abb. 14

Wir betrachten also die Kurve der Funktion $y = x^5$ und beweisen, indem wir den im Abschnitt 2 skizzierten Plan realisieren, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes $ACDB$ (Abb. 14) gleich $\frac{b^6 - a^6}{6}$ ist.

4.

Wir müssen die Summe der Flächeninhalte einer sehr großen Zahl von Rechtecken, Teilen der Treppenfigur (Abb. 14), berechnen.

Zur Vereinfachung der Arbeit wählen wir die Rechtecke so, dass ihre Flächeninhalte eine geometrische Folge bilden. Dazu nehmen wir die Punkte E, F, G, H, \dots, I auf der x -Achse so, dass die Längen $OC = a, OE, OF, OG, \dots, OI, OD = b$ eine geometrische Folge bilden.

Die Anzahl der Glieder dieser Folge bezeichnen wir mit $n + 1$ und ihren Quotienten mit q (weil $b > a$ ist, ist $q > 1$). Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} OC &= a, & OE &= aq, & OF &= aq^2, \\ OG &= aq^3, & \dots, & OI &= aq^{n-1}, & OD &= aq^n = b \end{aligned}$$

In Abb. 14 sind sechs Rechtecke dargestellt, und demzufolge ist $n + 1 = 7$, wir

werden aber im folgenden voraussetzen, dass n eine beliebig große Zahl ist, z.B. $n = 1000, 10000, 100000$ usw.

Die Grundlinien der Rechtecke bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten q :

$$\begin{aligned} CE = OE - OC = a(q - 1) & \quad , & EF = OF - OE = aq(q - 1) \\ FG = OG - OF = aq^2(q - 1) \quad \dots & \quad , & ID = ID - OI = aq^{n-1}(q - 1) \end{aligned}$$

(die Anzahl der Glieder dieser und der nächsten Folge ist n und nicht $n + 1$).

Die Höhen der Rechtecke sind die Ordinaten $CA, EE_1, FF_1, GG_1, \dots, II_1$; jede von ihnen ist gleich der fünften Potenz ihrer entsprechenden Abszisse (wir hatten ja $y = x^5$ angenommen). Folglich ist

$$\begin{aligned} CA = OC^5 = a^5, & \quad EE_1 = OE^5 = a^5 q^5, & FF_1 = OF^5 = a^5 q^{10} \\ GG_1 = a^5 q^{15}, & \quad \dots, & II_1 = OI^5 = a^5 q^{5(n-1)} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass auch die Höhen der Rechtecke eine geometrische Folge bilden, und zwar mit dem Quotienten $q^5 (= q^k)$.

Da die Grundlinien der Rechtecke eine geometrische Folge mit dem Quotienten q und die Höhen eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q^5 (= q^k)$ bilden, bilden die Flächeninhalte der Rechtecke eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q \cdot q^5 = q^6 (= q^{k+1})$.

$$\begin{aligned} CE \cdot CA &= a(q - 1)a^5 = a^6(q - 1) \\ EF \cdot EE_1 &= aq(q - 1)a^5 q^5 = a^6 q^6(q - 1) \\ FG \cdot FF_1 &= aq^2(q - 1)a^5 q^{10} = a^6 q^{12}(q - 1) \\ &\dots \\ ID \cdot II_1 &= aq^{n-1}(q - 1)a^5 q^{5(n-1)} = a^6 q^{6(n-1)}(q - 1) \end{aligned}$$

Daher ist die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke, die mit dem Inhalt der Treppenfür identisch ist, die Summe der geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied $a^6(q - 1)$, dem Endglied $a^6 q^{6(n-1)} \cdot (q - 1)$ und dem Quotienten q^6 :

$$\frac{a^6 q^{6(n-1)}(q - 1)a^6 - a^6(q - 1)}{q^6 - 1} = [(aq^n)^6 - a^6] \frac{q - 1}{q^6 - 1} = \frac{b^6 - a^6}{q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}$$

(Wir benutzten dabei, dass $b = aq^n$ und $\frac{q^6 - 1}{q - 1} = q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ ist.)

5.

Wir lassen nun die Anzahl n der Rechtecke unbeschränkt wachsen. Weil die Grundlinien der Rechtecke eine steigende geometrische Folge bilden ($q > 1$), ist die erste Grundlinie im Vergleich zu allen anderen die kleinste. Die Summe der Längen aller n Grundlinien ist aber $b - a$; daher kommt auf den Teil CE weniger als $\frac{b-a}{n}$, d.h. $aq - a < \frac{b-a}{n}$, woraus $q - 1 < \frac{b-a}{n \cdot a}$ folgt.

Die rechte Seite dieser Ungleichung strebt gegen Null, wenn n unbeschränkt wächst;

weil die linke Seite positiv ist, so muss auch sie gegen Null streben, d.h., q strebt gegen Eins.

Daraus geht ferner hervor, dass auch q^2 , q^3 , q^4 und q^5 gegen 1 gehen und die Summe $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ gegen $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ strebt. Folglich strebt der ganze Flächeninhalt der Treppenfigur, der gleich

$$\frac{b^6 - a^6}{q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}$$

ist, gegen den Grenzwert

$$\frac{b^6 - a^6}{6}$$

Dieser Grenzwert muss gerade der gesuchte Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes sein:

$$S = \frac{b^6 - a^6}{6}$$

Dieses Resultat erhielten wir für $k = 5$. Hätten wir die Berechnungen in allgemeiner Form für beliebiges natürliches k durchgeführt, so hätten wir

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}$$

erhalten.

Somit haben wir bewiesen, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes, das nach oben durch einen Bogen der Kurve der Funktion $y = x^k$ begrenzt ist und zwischen zwei Ordinaten mit den Abszissen a und b liegt, gleich $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}$ ist.

6.

Wir erhielten die Resultate des vorigen Abschnitts unter der Voraussetzung, dass $0 < a < b$ ist, d.h. das krummlinige Trapez rechts von der y -Achse liegt. Ist $a < b < 0$, so wird der Beweis auf dem gleichen Wege geführt.

Da wir jedoch nach wie vor den Quotienten q der Folge positiv und größer als Eins annahmen, müssen wir jetzt b als erstes Glied der Folge und a als letztes rechnen (weil $|a| > |b|$ ist). Wiederholen wir die Berechnung, so kommen wir zum gleichen Resultat:

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k + 1}$$

Ist k eine ungerade Zahl, so ist $k + 1$ gerade, und infolgedessen sind b^{k+1} und a^{k+1} positive Zahlen, wobei die erste kleiner als die zweite ist. Dadurch ergibt sich in diesem Fall für S eine negative Zahl.

Das muss auch so sein, weil für ungerade k das entsprechende krummlinige Trapez unterhalb der x -Achse liegt (siehe die linken Seiten der Abb. 11, 13).

Wir wenden uns wieder dem Fall $0 < a < b$ zu. Bleibt b unverändert und lässt man a gegen Null gehen, so dehnt sich das krummlinige Trapez nach links aus, und für a gleich Null verwandelt es sich in das krummlinige Dreieck ODB (Abb. 15) (wir nehmen $k \geq 1$ an).

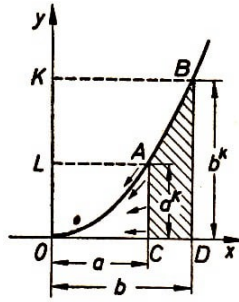


Abb. 15

Offenbar strebt, falls a gegen Null geht, der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes gegen den Flächeninhalt des krummlinigen Dreiecks. Die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Flächeninhalt wird nämlich geringer als die Fläche OAC , welche selbst gegen Null strebt. Andererseits strebt der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes für gegen Null strebendes a (wie aus der bewiesenen Formel zu ersehen ist) gegen $\frac{b^{k+1}}{k+1}$.

Daher ist der Flächeninhalt des krummlinigen Dreiecks ODB gleich $\frac{b^{k+1}}{k+1}$, d.h. gleich dem $(k+1)$ -ten Teil des Flächeninhalts des Rechtecks $ODBK$ oder, was dasselbe ist, gleich dem $(k+1)$ -ten Teil des Produktes der "Katheten des rechtwinkligen Dreiecks" ODB (wir setzen Anführungsstriche, weil es sich hier nicht um ein gewöhnliches, sondern um ein krummliniges Dreieck handelt).

Für $k = 1$ erhalten wir die Funktion $y = x$, die Kurve geht in eine Gerade über (siehe Abb. 9), das Dreieck wird ein gewöhnliches rechtwinkliges Dreieck und sein Flächeninhalt gleich der Hälfte des Produkts der Katheten.

Analoge Resultate erhält man, wenn man vom Fall $a < b < 0$ (krummliniges Trapez links von der y -Achse) ausgeht. Dann lässt man a konstant und b gegen Null gehen. Der Ausdruck $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$ strebt gegen den Grenzwert $-\frac{a^{k+1}}{k+1}$. Das ist gerade der Flächeninhalt des entsprechenden krummlinigen Dreiecks.

Das krummlinige Dreieck kann als Spezialfall des krummlinigen Trapezes betrachtet werden. Aus dem hier Abgeleiteten folgt, dass die Formel

$$S_n = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

auch für das krummlinige Dreieck richtig bleibt. Man braucht nur darin $a = 0$ (falls das Dreieck rechts von der y -Achse liegt) oder $b = 0$ (wenn das Dreieck links von der y -Achse liegt) zu setzen.

7.

Wenden wir uns nun der allgemeinen Aufgabe der Bestimmung der Flächeninhalte krummliniger Trapeze zu. Es sei $ACDB$ das krummlinige Trapez, welches durch den Bogen AB der Kurve der Funktion $y = f(x)$, den von den Bogenpunkten A und B auf die x -Achse gefälltten zwei Loten AC und BD und dem Abschnitt CD der x -Achse zwischen den Loten begrenzt ist (Abb. 16).

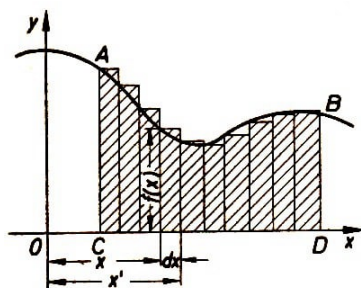


Abb. 16

Ist $OC = a$ und $OD = b$, $a < b$, so wird sein Flächeninhalt durch

$$\int_a^b f(x)dx \quad (*)$$

bezeichnet.

Jede Einzelheit dieser Bezeichnung hat einen bestimmten Sinn.

Hier wird auf die Funktion $f(x)$ hingewiesen, deren Kurve eine Seite des krummlinigen Trapezes begrenzt, sowie auf die Zahlen a und b , die die Grenzen links und rechts festlegen.

Die Bezeichnung $(*)$ erinnert auch an die Methode, mit der wir den Flächeninhalt von $ACDB$ gefunden haben. Diese Methode, die in den Abschnitten 2 und 3 wiedergegeben ist, besteht in der Berechnung der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke, aus welchen sich die Treppenfigur zusammensetzt, und in einem Grenzübergang.

Das Zeichen \int stellt den stilisierten Buchstaben S , den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes "summa", dar. Der Buchstabe S wird nicht in gewöhnlicher Weise geschrieben.

Das soll daran erinnern, dass die Berechnung des Flächeninhaltes des krummlinigen Trapezes sich nicht auf die Bildung der Summen beschränkt, sondern noch einen Grenzübergang erfordert. Rechts vom Zeichen \int , welches Integralzeichen genannt wird (vom lateinischen "integer" = ganz, vollständig), steht das Produkt $f(x)dx$.

Es stellt den Flächeninhalt des Rechteckes mit der Höhe $f(x)$ und der Grundlinie dx dar. Der Buchstabe d , der vor dem x steht, ist der Anfangsbuchstabe des lateinischen Wortes "differentia" = Differenz, Unterschied; dx bezeichnet die Differenz zwischen zwei x -Werten (siehe Abb. 16): $dx = x' - x$.

Die Zahl a heißt untere Grenze und b die obere Grenze des Integrals.

Die Bezeichnung $(*)$ gibt also für den Flächeninhalt eines krummlinigen Trapezes erstens alle Angaben über Form und Ausmaße [durch die Zahlen a und b und die Funktion $f(x)$], und zweitens erinnert sie an das Verfahren zur Bestimmung des Inhalts des Trapezes, welches in der Berechnung des Inhalts von Rechtecken mit der Höhe $f(x)$ und der Grundlinie dx , nachfolgender Summenbildung und anschließendem Grenzübergang besteht (wobei das Integralzeichen an die Operation der Summenbildung und den Grenzübergang erinnert).

Die Formel $(*)$ liest man:

"Integral von a bis b f von x dx ".

Wir wiederholen, dass dieses Zeichen den Inhalt des krummlinigen Trapezes $ACDB$ bezeichnet. Unter Benutzung der neuen Bezeichnung kann man das Resultat des Abschnittes 5 in folgender Form wiedergeben:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

(k ist eine ganze nichtnegative Zahl). Die letzte Gleichung lesen wir so: "Das Integral von a bis b über $x^k dx$ ist gleich der durch $k+1$ dividierten Differenz zwischen b^{k+1} und a^{k+1} " (kurz: Integral a bis b $x^k dx$ gleich b^{k+1} minus a^{k+1} durch $k+1$).

8.

Wir geben nun einige der einfachsten Eigenschaften des Integrals an. Offenbar ergibt die Addition des Flächeninhalts von $ACDB$ zum Flächeninhalt von $BDD'B'$ den Flächeninhalt von $ACD'B'$ (Abb. 17).

Ersterer ist jedoch gleich $\int_a^b f(x)dx$, der zweite gleich $\int_b^c f(x)dx$ und der dritte gleich $\int_a^c f(x)dx$. Also gilt

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Hierbei war $a < b < c$; ist aber $a < c < b$ (Abb. 18), so ergibt sich, dass die Addition des Flächeninhalts von $ACD'B'$ zum Inhalt von $B'D'DB$ den Flächeninhalt von $ACDB$ liefert:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Als wir den Integralbegriff $\int_a^b f(x)dx$ in Abschnitt 7 einführten, nahmen wir $a < b$, d.h. die untere Grenze kleiner als die obere an.

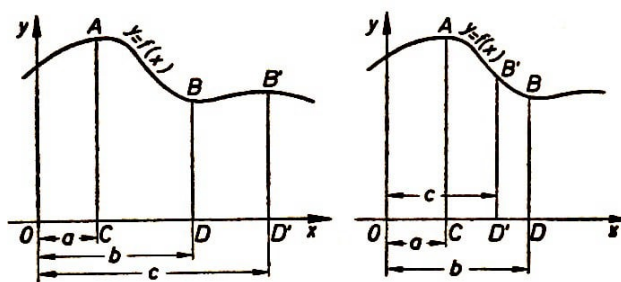


Abb. 17 und 18

Dann wird nämlich der Flächeninhalt von $BDD'B'$, wobei $OD = b$ und $OD' = c$ ist, für $b < c$ (Abb. 17) in der Form $\int_b^c f(x)dx$, für $b > c$ (Abb. 18) aber in der Form

$\int_c^b f(x)dx$ geschrieben (jedes mal ist die untere Grenze kleiner als die obere).

Im ersten Fall war die Differenz der Integrale

$$\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

gleich $\int_b^c f(x)dx$, während sie im zweiten Falle gleich $-\int_c^b f(x)dx$ war (wir haben die obigen Gleichungen zwischen den Integralen benutzt). Um beide Fälle in einer einzigen Formel zusammenfassen zu können, vereinbaren wir, im Falle $b > c$

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$$

zu schreiben.

Mit anderen Worten, wir werden jetzt auch solche Integrale zulassen, bei denen die untere Grenze größer ist als die obere, indem wir darunter den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Inhalt des entsprechenden krummlinigen Trapezes verstehen. Dann lassen sich die beiden verschiedenen Formeln

$$\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx \quad (b < c)$$

oder

$$\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx \quad (b > c)$$

in der für alle Fälle geltenden Formel

$$\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx \quad (b \neq c)$$

zusammenfassen.

Für $b = c$ wird die linke Seite der Formel Null. Daher wird man naturgemäß das Integral $\int_a^b f(x)dx$ gleich Null setzen.

Somit kann man, unabhängig davon, ob $b < c$, $b > c$ oder $b = c$ ist, in jedem Fall die Formel

$$\int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$$

benutzen. Diese Formel kann auch in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Wir schlagen dem Leser vor, mit Hilfe dieses Resultates nachzuprüfen, dass die Formel

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

für beliebige a und b richtig ist (und nicht nur für $0 \leq a < b$ oder $a < b \leq 0$).

9.

Wir lassen jetzt zu, dass $f(x)$ die Form einer Summe bzw. Differenz zweier Funktionen hat: $f(x) = g(x) + h(x)$ bzw. $f(x) = g(x) - h(x)$ (z.B. $f(x) = x^3 - x^5$).

Dann kann man das Integral über $f(x)$ durch die Summe bzw. Differenz der Integrale der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ ersetzen:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

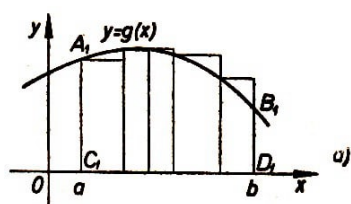
oder

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

Zum Beispiel ist

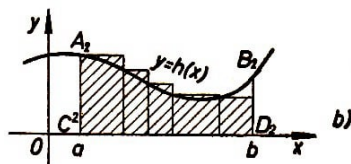
$$\int_a^b (x^3 - x^5)dx = \int_a^b x^3dx - \int_a^b x^5dx$$

Wir beweisen nun diese Eigenschaft der Integrale, wobei wir uns mit dem Fall der Summe begnügen. Es sei also $f(x) = g(x) + h(x)$.

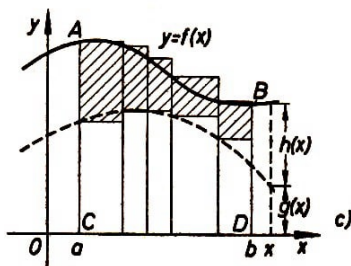


Die Kurven der drei Funktionen $g(x)$, $h(x)$ und $f(x)$ sind in Abb. 19 dargestellt. Wir müssen zeigen, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$



ist, d.h., dass der Inhalt von $ACDB$ gleich ist der Summe der Inhalte von $A_1C_1D_1B_1$ und $A_2C_2D_2B_2$.



Wir zerlegen den Abschnitt der x -Achse zwischen den Punkten $x = a$ und $x = b$ in Teile und konstruieren die entsprechenden Treppenfiguren für alle krummlinigen Trapeze (wie in Abb. 19 dargestellt). Es ist klar, dass der Flächeninhalt jedes Rechtecke in Abb. 19c gleich der Summe der beiden Rechtecke ist, die in Abb. 19a und 19b gerade darüber liegen.

Daher ist der Flächeninhalt der unteren Treppenfigur gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden oberen Treppenfiguren.

Abb. 19

Dieser Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten der Treppenfiguren bleibt bei beliebigen Zerlegungen des Abschnitts der x -Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ erhalten.

Denken wir uns diese Strecke in eine unbeschränkt wachsende Anzahl von Teilen zerlegt, deren Länge gegen Null strebt, so strebt der untere Flächeninhalt gegen den Grenzwert

$\int_a^b f(x)dx$, und die beiden darüber liegenden streben gegen die Grenzwerte

$$\int_a^b g(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b h(x)dx$$

Da der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte ist, gilt also

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) + h(x)]dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

was zu beweisen war.

Genau so kann man die Beziehung

$$\int_a^b [g(x) - h(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

beweisen.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Eigenschaft der Integrale auch dann gilt, wenn $f(x)$ aus mehreren Summanden besteht. Ist etwa $f(x) = g(x) - h(x) + k(x)$, so ist

$$\int_a^b [g(x) - h(x) + k(x)]dx = \int_a^b [g(x) - h(x)]dx + \int_a^b k(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx + \int_a^b k(x)dx$$

10.

Wir müssen noch klären, welche Beziehung zwischen den Integralen $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^b C f(x)dx$ besteht, wobei C eine Konstante ist (d.h. eine feste Zahl), z.B. die Beziehung zwischen den Integralen $\int_a^b x^3 dx$ und $\int_a^b 2x^3 dx$. Wir zeigen, dass

$$\int_a^b C f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$$

ist, also z.B.

$$\int_a^b 2x^3 dx = 2 \int_a^b x^3 dx = 2 \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^4 - a^4}{2}$$

Zur Vereinfachung unserer Überlegungen geben wir C irgendeinen bestimmten Zahlenwert, sagen wir $C = \frac{1}{2}$. Jetzt handelt es sich also darum, die Integrale $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^b \frac{1}{2}f(x)dx$ zu vergleichen.

In Abb. 20 sind die krummlinigen Trapeze skizziert, deren Flächeninhalte diese Integrale darstellen. Wir zerlegen den Abschnitt der x -Achse zwischen den Punkten $x = a$ und $x = b$ in irgendwelche Teile und zeichnen die entsprechenden Treppenfiguren.

Es ist leicht zu sehen, dass der Flächeninhalt jedes Rechtecks in Abb. 20b gleich der Hälfte der Fläche des Abb. 20 entsprechenden Rechtecks in Abb. 20a ist.

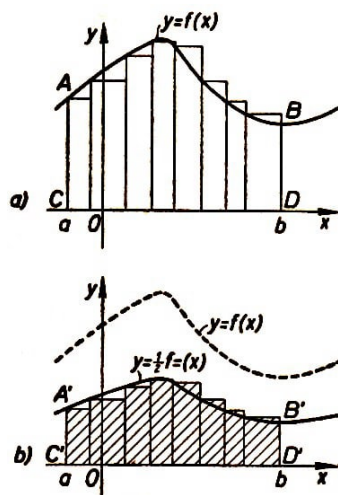


Abb. 20

Daher wird der Flächeninhalt der unteren Treppenfigur halb so groß wie der Flächeninhalt der oberen Treppenfigur. Vollziehen wir den Grenzübergang (wie im Abschnitt 9), so können wir schließen, dass auch der ganze Inhalt des unteren krummlinigen Trapezes halb so groß wie der Inhalt des oberen krummlinigen Trapezes ist:

$$\int_a^b \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx$$

In dieser Überlegung war die Zahl C positiv; ist C negativ, z.B. $C = -\frac{1}{2}$, so ersetze man Abb. 20 durch Abb. 21.

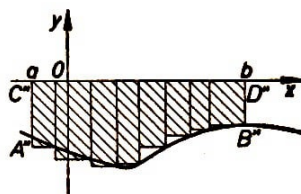


Abb. 21

Vergleichen wir hierbei die Fläche $ACDB$ mit der Fläche $A''C''D''B''$, so finden wir, dass hier nicht nur eine Änderung des absoluten Betrages des Flächeninhalts (Verkleinerung auf die Hälfte), sondern auch ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Folglich ist

$$\int_a^b \left(-\frac{1}{2}\right) f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Natürlich haben wir nur der größeren Deutlichkeit halber $C = \pm \frac{1}{2}$ genommen. Allgemein gilt für beliebiges C die Gleichung

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

Als Anwendungsbeispiel für die in diesem und den vorangegangenen Abschnitten abgeleiteten Eigenschaften des Integrals berechnen wir das Integral $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx &= \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 2x dx + \int_0^1 1 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^0 dx \\ &= 3 \frac{1^3 - 0^3}{3} - 2 \frac{1^2 - 0^2}{2} + \frac{1^1 - 0^1}{1} = 1 \end{aligned}$$

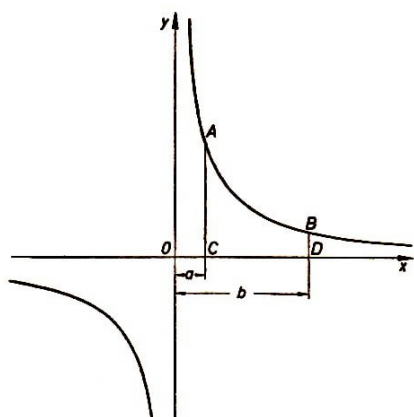


Abb. 22

11. Wir betrachten die Funktion

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Ihre Kurve wird gleichseitige Hyperbel genannt. Sie ist in Abb. 22 gezeichnet. Wollten wir die Formel für den Inhalt des krummlinigen Trapezes

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

die für $k \geq 0$ abgeleitet wurde, auf den vorliegenden Fall anwenden, so erhielten wir, da hier $k+1 = 0$, $b^{k+1} = a^{k+1} = 1$ ist, auf der rechten Seite den sinnlosen Ausdruck $\frac{0}{0}$. Also gilt unsere Formel nicht für $k = -1$.

Das Versagen dieser Formel für die Berechnung des Integrals $\int_a^b x^{-1} dx$ hindert uns jedoch nicht, einige Eigenschaften dieses Integrals zu studieren.

Wir beweisen nun folgendes: Vergrößert oder verkleinert man a und b im selben Verhältnis, d.h., multipliziert man mit ein und demselben $q > 0$, so erhält man ein neues krummliniges Trapez mit genau demselben Flächeninhalt.

Selbstverständlich beweisen wir diese Eigenschaft unter der Voraussetzung, dass die Kurve, deren Bogen auf einer Seite unser krummliniges Trapez begrenzt, eine gleichseitige Hyperbel ist und nicht irgendein anderer Kurvenbogen. Mit anderen Worten:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1} dx = \int_a^b x^{-1} dx$$

für beliebige Werte von q ($q > 0$).

Um den Beweis leichter verständlich zu machen, nehmen wir für q einen bestimmten Zahlenwert an, z.B. $q = 3$. In der Abb. 23 sind die beiden entsprechenden krummlinigen Trapeze $ACDB$ und $A'C'D'B''$ dargestellt.

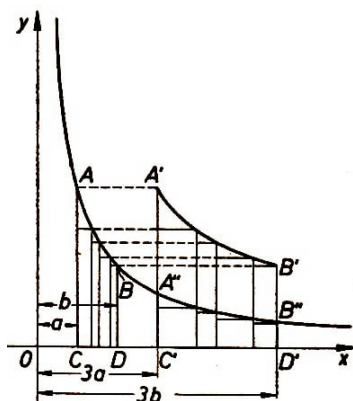


Abb. 23

Das erste von ihnen ist enger, aber höher, das zweite breiter, aber niedriger. Man hat zu beweisen, dass die Vergrößerung der Breite beim zweiten eine solche Verkleinerung

der Höhe bewirkt, dass der Flächeninhalt konstant bleibt.

Zu diesem Zweck zerlegen wir das erste Trapez in schmalere und ersetzen diese durch Rechtecke (Abb. 23). Wenn wir die Abszisse jedes Punktes der Treppenfigur $ACDB$ auf das Dreifache vergrößern, aber die Ordinaten unverändert lassen, so erhalten wir die Figur $A'C'D'B'$, deren Flächeninhalt dreimal so groß ist, weil jedes Rechteck dreimal so breit wurde. Die Endpunkte der Ordinaten liegen natürlich jetzt nicht auf unserer Hyperbel.

Diese Hyperbel ist nämlich die Kurve der Funktion $y = \frac{1}{x}$, und wenn Punkte auf ihr liegen sollen, müssen die Ordinaten im selben Verhältnis verkleinert werden, wie die Abszissen vergrößert wurden.

Wenn man alle Ordinaten der Figur $A'C'D'B'$ auf ein Drittel verkleinert, erhält man die Figur $A''C'D'B''$.

Das ist das krummlinige Trapez, welches oben durch den Bogen der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird und dessen Seiten die Ordinaten sind, die durch $x = 3a$ und $x = 3b$ gehen.

Die Rechtecke, die wir dabei erhalten, haben eine Grundlinie, die dreimal so groß ist wie die der Ausgangsrechtecke, aber eine Höhe, die nur ein Drittel der ursprünglichen misst. Daher sind ihre Flächeninhalte genau so groß wie die der ursprünglichen Rechtecke. Folglich sind die Flächeninhalte der beiden Treppenfiguren gleich, also auch deren Grenzwerte, d.h., für die Inhalte der krummlinigen Trapeze gilt

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1} dx = \int_a^b x^{-1} dx$$

Wir haben diese Eigenschaft für $a < b$ bewiesen. Sie ist aber auch für $a = b$ und $a > b$ richtig. Für $a = b$ ist nämlich auch $aq = bq$, und beide Integrale werden Null, so dass die Gleichung besteht. Ist aber $a > b$, so ist auch $aq > bq$; in diesem Fall gilt die Gleichung

$$\int_{bq}^{aq} x^{-1} dx = \int_b^a x^{-1} dx$$

(Hier ist $b < a$, daher sind die Rollen von a und b vertauscht.)

Im Abschnitt 8 hatten wir aber vereinbart, dass $\int_a^b f(x) dx$ für $a > b$ die Größe $-\int_b^a f(x) dx$.

Daher ist

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1} dx = -\int_{bq}^{aq} x^{-1} dx \quad , \quad \int_a^b x^{-1} dx = -\int_b^a x^{-1} dx$$

und weil die rechten Seiten dieser Gleichungen übereinstimmen, sind auch die linken gleich:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1} dx = -\int_a^b x^{-1} dx$$

Also bleibt die bewiesene Beziehung richtig, unabhängig davon, ob $a < b$, $a = b$ oder $a > b$ ist.

12.

Wir setzen $a = 1$ und betrachten $\int_1^b x^{-1} dx$. Ist $b > 1$, so stellt dieses Integral den Inhalt des krummlinigen Trapezes $ACDB$ dar (Abb. 24). Ist $b = 1$, so wird es Null. Schließlich ist für $0 < b < 1$ die untere Grenze kleiner als die obere, und wir erhalten

$$\int_1^b x^{-1} dx = - \int_b^1 x^{-1} dx$$

Das bedeutet, dass sich in diesem Fall das Integral nur durch das Vorzeichen von dem Inhalt des krummlinigen Trapezes $B'D'C'A$ unterscheidet (Abb. 25). In jedem Fall nimmt das Integral $\int_1^b x^{-1} dx$ für jede positive Zahl b einen wohlbestimmten Wert an. Er ist positiv für $b > 1$, gleich Null für $b = 1$ und negativ, wenn $b < 1$ ist.

Offenbar ist das Integral $\int_1^b x^{-1} dx$ eine Funktion von b .

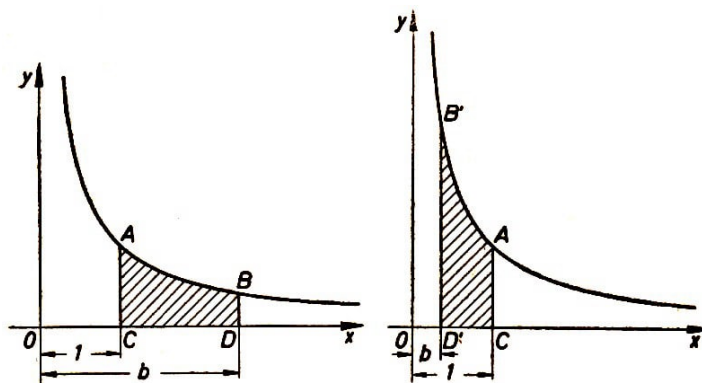


Abb. 24 und 25

Diese Funktion spielt in der Mathematik eine große Rolle. Sie heißt natürlicher Logarithmus der Zahl b und wird mit $\ln b$ bezeichnet. Hier sind l und n die Anfangsbuchstaben der Worte logarithmus und naturalis;

$$\int_1^b x^{-1} dx = \ln x$$

Wir erwähnen einige Eigenschaften des natürlichen Logarithmus. Zunächst ist $\ln b > 0$, wenn $b > 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln b < 0$, wenn $b < 1$ ist.

Wir führen eine weitere grundlegende Eigenschaft des Logarithmus an, die darin besteht, dass der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren ist, z.B. $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$. In allgemeiner Form

$$\ln(bc) = \ln b + \ln c \quad \text{d.h.} \quad \int_1^{bc} x^{-1} dx = \int_1^b x^{-1} dx + \int_1^c x^{-1} dx$$

Nach dem oben Bewiesenen ist nämlich

$$\int_1^c x^{-1} dx = \int_q^{qc} x^{-1} dx$$

für jedes $q > 0$. Setzen wir $q = b$, so erhalten wir

$$\int_1^c x^{-1} dx = \int_b^{bc} x^{-1} dx$$

Daher ist

$$\int_1^b x^{-1} dx + \int_1^c x^{-1} dx = \int_1^b x^{-1} dx + \int_b^{bc} x^{-1} dx$$

wobei die Summe nach der im Abschnitt 8 bewiesenen Eigenschaft durch das Integral $\int_1^{bc} x^{-1} dx$ ersetzt werden kann. Demnach ist

$$\int_1^b x^{-1} dx + \int_1^c x^{-1} dx = \int_1^{bc} x^{-1} dx$$

was zu beweisen war.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich einige Folgerungen ziehen. Sei $b > 0$. Dann ist nach dem Bewiesenen

$$\ln 1 = \ln \left(b \frac{1}{b} \right) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$$

und wegen $\ln 1 = 0$ ist $\ln b + \ln \frac{1}{b} = 0$ oder

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

Zum Beispiel ist $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Weiterhin gilt, falls $b > 0$ und $c > 0$, dass

$$\ln \frac{c}{b} = \ln \left(c \frac{1}{b} \right) = \ln c + \ln \frac{1}{b} = \ln c - \ln b$$

mit anderen Worten, der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor.

Die Haupteigenschaft des Logarithmus wurde für das Produkt zweier Faktoren definiert; sie bleibt jedoch auch für das Produkt einer beliebigen Anzahl von Faktoren richtig. So erhalten wir z.B. für drei Faktoren

$$\ln(bcd) = \ln[(bc)d] = \ln(bc) + \ln d = (\ln b + \ln c) + \ln d = \ln b + \ln c + \ln d$$

Offenbar ist, wieviel Faktoren auch vorhanden sein mögen, der Logarithmus ihres Produktes immer gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Diese Eigenschaft wenden wir auf den Logarithmus einer Potenz mit ganzem positivem Exponenten k an. Wir finden

$$\ln b^k = \ln \underbrace{bb \dots b}_{k\text{-mal}} = \underbrace{\ln b + \ln b + \dots + \ln b}_{k\text{-mal}} = k \ln b$$

Beispielsweise ist $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \cdot \ln 2$.

Es sei $c = \sqrt[k]{b}$; dann ist $c^k = b$, folglich

$$\ln b = \ln c^k = k \ln c = k \ln \sqrt[k]{b}$$

daher ist

$$\ln \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \ln b$$

Zum Beispiel ist $\ln \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \ln 2$.

Ist $c = b^{\frac{p}{q}}$, wobei p und q ganze positive Zahlen sind, so erhalten wir auf Grund der bewiesenen Eigenschaften

$$\ln b^{\frac{p}{q}} = \ln \sqrt[q]{b^p} = \frac{1}{q} \ln b^p = \frac{p}{q} \ln b$$

Folglich ist

$$\ln b^k = k \ln b$$

nicht nur dann richtig, wenn k eine positive ganze Zahl ist, sondern auch dann, wenn k ein Bruch der Form $\frac{p}{q}$ ist.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Eigenschaft auch für negative (ganze oder gebrochene) k richtig bleibt. Ist $k < 0$, so ist $-k > 0$, und es gilt

$$\ln b^k = \ln \frac{1}{b^{-k}} = -\ln b^{-k} = -(-k \ln b) = k \ln b$$

Schließlich bleibt diese Gleichung auch für $k = 0$ gültig.

$$\ln b^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln b$$

Somit kann man für jedes rationale (positive oder negative, ganze oder gebrochene) k sowie für $k = 0$ aussagen, dass

$$\ln b^k = k \ln b$$

ist.

Man kann beweisen, dass diese Beziehung auch für irrationales k richtig bleibt, z.B. ist $\ln b^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln b$.

Wir verwenden diese Behauptung ohne Beweis und benutzen die Eigenschaft: Der natürliche Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten der Potenz und dem natürlichen Logarithmus der Basis der Potenz für alle möglichen Werte des Exponenten k , sowohl für rationale als auch für irrationale.

13.

Wir wollen uns nun der Berechnung von Logarithmen zuwenden. Es sei $\ln 2$ zu berechnen.

Gesucht ist also der Inhalt des krummlinigen Trapezes $ACDB$, das in Abb. 26a dargestellt ist. Wir zerlegen die Strecke CD in 10 gleiche Teile und zeichnen die entsprechenden Ordinaten: $K_1L_1, K_2L_2, \dots, K_9L_9$.

Um eine möglichst genaue Annäherung an $\ln 2$ zu finden, ersetzen wir die 10 sich ergebenden schmalen krummlinigen Trapeze nicht durch Rechtecke, wie wir es bisher getan hatten, sondern durch gewöhnliche, d.h. geradlinige Trapeze.

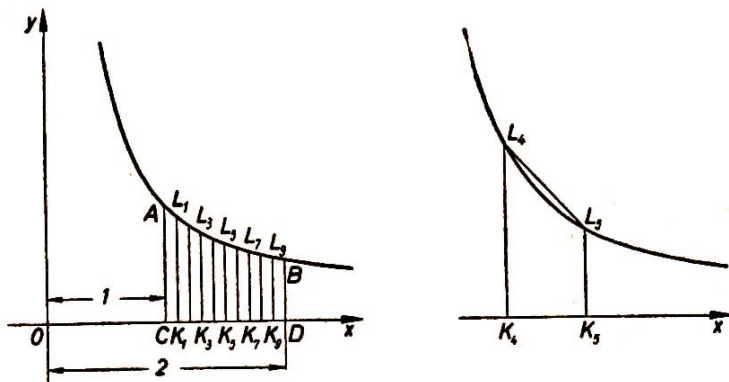


Abb. 26a und b

Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt A mit L_1 , den Punkt L_1 mit L_2, \dots, L_9 mit B durch geradlinige Strecken. In Abb. 26a wären die gewöhnlichen Trapeze schwer von krummlinigen zu unterscheiden; um ihren Unterschied sichtbar zu machen, geben wir die vergrößerte Abb. 26b.

Der Flächeninhalt jedes Trapezes ist gleich dem Produkt des arithmetischen Mittels seiner Grundlinien mit der Höhe. In unserem Falle sind alle Höhen gleich groß:

$$CK_1 = K_1K_2 = \dots = K_9D = 0,1$$

Daher erhalten wir für die Flächeninhalte der Trapeze

$$\frac{AC + K_1L_1}{2} \cdot 0,1; \quad \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{2} \cdot 0,1; \quad \dots; \quad \frac{K_9L_9 + BD}{2} \cdot 0,1$$

die Summe dieser Flächeninhalte ist gleich

$$0,1 \frac{(AC + K_1L_1) + (K_1L_1 + K_2L_2) + \dots + (K_9L_9 + BD)}{2}$$

oder

$$0,1(0,5AC + K_1L_1 + K_2L_2 + \dots + K_9L_9 + 0,5BD)$$

Es bleibt zu bemerken, dass alle Grundlinien der Trapeze Ordinaten der Kurve der Funktion $y = \frac{1}{x}$ sind, die den Abszissen

$$1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2$$

entsprechen. Daher ist

$$\begin{aligned}
 AC &= \frac{1}{1} = 1,000, & K_1L_1 &= \frac{1}{1,1} = 0,909, & K_2L_2 &= \frac{1}{1,2} = 0,833, \\
 K_3L_3 &= \frac{1}{1,3} = 0,769, & K_4L_4 &= \frac{1}{1,4} = 0,714, & K_5L_5 &= \frac{1}{1,5} = 0,667, \\
 K_6L_6 &= \frac{1}{1,6} = 0,625, & K_7L_7 &= \frac{1}{1,7} = 0,588, & K_8L_8 &= \frac{1}{1,8} = 0,556, \\
 K_9L_9 &= \frac{1}{1,9} = 0,526, & BD &= \frac{1}{2} = 0,500
 \end{aligned}$$

Folglich ist die Summe der Flächeninhalte der Trapeze gleich

$$0,1(0,500+0,909+0,833+0,769+0,714+0,667+0,625+0,588+0,556+0,526+0,250) = 0,6937$$

Aus Abb. 26b ist ersichtlich, dass die Summe der Inhalte dieser Trapeze eine Größe ergibt, die etwas größer ist als der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes. Das bedeutet, dass wir einen etwas zu großen Näherungswert für $\ln 2$ gefunden haben, d.h., dass $\ln 2$ etwas kleiner als 0,6937 ist.

Wir werden später eine andere Art der Berechnung von Logarithmen kennenlernen, die es uns gestattet, insbesondere $\ln 2$ mit einem größeren Genauigkeitsgrad zu berechnen.

14.

Zählen wir die Abszissen nicht vom Punkt 0 an, sondern vom Punkt C (Abb. 27), und bezeichnen wir noch die neuen Abszissen mit dem Buchstaben t , so besteht zwischen den alten und neuen Abszissen ein und desselben Punktes die Beziehung

$$x = 1 + t$$

Diese Beziehung ist für alle Punkte richtig, wenn wir $t > 0$ für $x > 1$ annehmen und $t \leq 0$, wenn $x \leq 1$ ist.

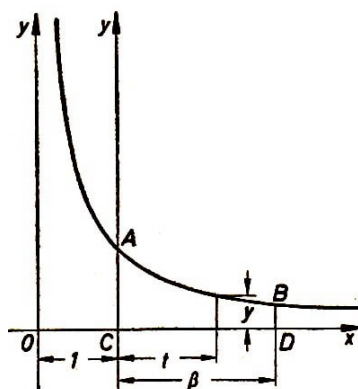


Abb. 27

Ersetzt man x durch $1 + t$, so erhält die Funktion $y = \frac{1}{x}$ die Form $y = \frac{1}{1+t}$; die Kurve bleibt aber dieselbe. Alles Neue, was durch die Einführung von t hereinkommt, ist ein neuer Koordinatenursprung (C statt 0) und folglich eine neue y -Achse (parallel der früheren). Die Kurve bleibt unverändert.

Auch der Flächeninhalt von $ACDB$ bleibt natürlich unverändert. Als wir die Abszisse mit x bezeichneten, wurde dieser Flächeninhalt durch das Integral

$$\int_1^{1+\beta} x^{-1} dx = \ln(1 + \beta)$$

dargestellt (hier ist $\beta = CD$). Jetzt aber, da wir t als Abszisse nehmen, wird der Flächeninhalt durch das Integral

$$\int_0^{\beta} (1+t)^{-1} dt$$

dargestellt. Setzen wir beide Integrale gleich, so erhalten wir

$$\ln(1 + \beta) = \int_0^{\beta} (1+t)^{-1} dt$$

Wir ziehen nun folgende Identität heran:

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots - t^{2n-1} = \frac{1 - t^{2n}}{1 + t}$$

Sie ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass die linke Seite eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied 1, dem Quotienten $-t$ und dem Endglied $-t^{2n-1}$ ist. Aus dieser Identität folgt

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots - t^{2n-1} + \frac{t^{2n}}{1+t}$$

Daher ist

$$\ln(1 + \beta) = \int_0^{\beta} \left[1 - t + t^2 - t^3 + \dots - t^{2n-1} + \frac{t^{2n}}{1+t} \right] dt$$

Jetzt steht unter dem Integral an Stelle von $(1+t)^{-1}$ ein komplizierterer und umfangreicher Ausdruck - die Summe vieler Summanden. Wir wissen bereits, dass das Integral einer Summe oder Differenz von Funktionen gleich der Summe oder Differenz der Integrale dieser Funktionen ist. Daher gilt

$$\ln(1 + \beta) = \int_0^{\beta} 1 dt - \int_0^{\beta} t dt + \int_0^{\beta} t^2 dt - \int_0^{\beta} t^3 dt + \dots - \int_0^{\beta} t^{2n-1} dt - \int_0^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t} dt$$

Jedes der Integrale auf der rechten Seite der Gleichung außer dem letzten können wir ausrechnen, und zwar ist

$$\int_0^{\beta} 1 dt = \beta, \quad \int_0^{\beta} t dt = \frac{\beta^2}{2}, \quad \int_0^{\beta} t^2 dt = \frac{\beta^3}{3}, \quad \int_0^{\beta} t^3 dt = \frac{\beta^4}{4}, \quad \dots, \quad \int_0^{\beta} t^{2n-1} dt = \frac{\beta^{2n}}{2n}$$

Daraus folgt

$$\ln(1 + \beta) = \left(\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \dots - \frac{\beta^{2n}}{2n} \right) + \int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt$$

Der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite der Gleichung ist ein Polynom $2n$ -ten Grades, das nach wachsenden Potenzen von β geordnet ist.

Ist der Wert von β bekannt und außerdem die positive ganze Zahl n gewählt (sie kann beliebig genommen werden), so ist der Wert dieses Polynoms leicht auszurechnen.

Schwierigkeiten bereitet nur die Berechnung des Integrals $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt$.

Wir zeigen jetzt, dass es für $-1 < \beta < 1$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn n genügend groß genommen wird. Wenn das so ist, so kann man bei der Berechnung von $\ln(1 + \beta)$ das letzte Integral ganz vernachlässigen, wobei man nur einen ganz unbedeutenden Fehler macht. Angenähert gilt also

$$\ln(1 + \beta) \approx \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \dots - \frac{\beta^{2n}}{2n}$$

15.

Um den Fehler der Näherungsgleichung abzuschätzen, muss man das vernachlässigte Integral

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt$$

betrachten. Wir setzen zunächst $0 < \beta \leq 1$ voraus. Dann bleibt t innerhalb der Integrationsgrenzen positiv, und folglich ist

$$0 < \frac{t^{2n}}{1+t} < t^{2n}$$

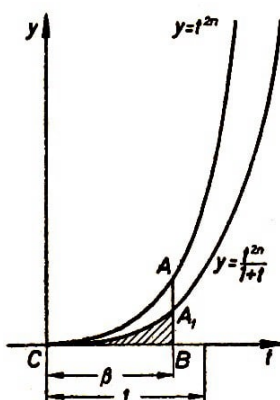


Abb. 28

Dies bedeutet, dass die Kurve der Funktion $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ unterhalb der Kurve der Funktion $y = t^{2n}$ verläuft (Abb. 28); daher ist der Flächeninhalt CBA_1 kleiner als der Flächeninhalt von CBA , d.h.

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt < \int_0^\beta t^{2n} dt = \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}$$

Also ist der Fehler in unserer Näherungsgleichung kleiner als $\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}$, wegen $0 < \beta \leq 1$ kann dieser Fehler beliebig klein gemacht werden, wenn n hinreichend groß wird.

Nehmen wir z.B. $\beta = 1$, dann liefert die oben angegebene Formel

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{2n+1}$ ist. Wenn wir auf diese Weise $\ln 2$ mit einer Genauigkeit von 0,001 berechnen wollen, so müssen wir fordern, dass $\frac{1}{2n+1} < 0,001$ wird, d.h. $2n+1 > 1000$; eine Bedingung, die durch die Festsetzung $2n = 1000$ erfüllt werden kann.

Das bedeutet aber, dass auf der linken Seite der Gleichung 1000 Glieder auftreten, deren Summe man berechnen müsste. Das wäre natürlich eine ungeheuer große Arbeit. Wir werden in Kürze sehen, wie wir sie durch Verwendung einer anderen Formel für $\ln 2$ vermeiden können.

16.

Kehren wir wieder zum Integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt$ zurück, setzen jetzt aber $-1 < \beta < 0$ voraus. Wir wissen, dass

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt = - \int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$$

Das Integral $\int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$ ist gleich dem Flächeninhalt der in Abb. 29 schraffierten Figur $ABCK$. Diese Figur liegt oberhalb Ct , weil für $t > -1$ die Größe $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ positiv ist. Daher ist der Flächeninhalt von $ABCK$ eine positive Zahl, d.h., das Integral

$$\int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$$

ist eine positive Zahl. Es unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen vom Integral $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt$ und ist infolgedessen gleich dem absoluten Betrag des letzteren:

$$\int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt = \left| \int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t} dt \right|$$

Wir vermerken ferner, dass für $t > \beta$ und $\beta > -1$ die Ungleichung

$$1+t > 1+\beta > 0$$

erfüllt ist und damit

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+\beta} \quad \text{sowie} \quad \frac{t^{2n}}{1+t} < \frac{t^{2n}}{1+\beta}$$

Das bedeutet, dass im Bereich $\beta < t < 0$ die Kurve der Funktion $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ unterhalb der Kurve der Funktion $y = \frac{t^{2n}}{1+\beta}$ liegt (Abb. 29). Daher wird der Flächeninhalt $ABCK$ kleiner als der Flächeninhalt $ABCL$,

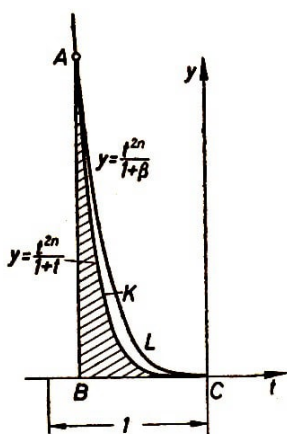


Abb. 29

$$\int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt < \int_\beta^0 \frac{t^{2n}}{1+\beta} dt$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist leicht auszurechnen:

$$\int_{\beta}^0 \frac{t^{2n}}{1+\beta} dt = \frac{1}{1+\beta} \int_{\beta}^0 t^{2n} dt = -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$$

(das ist eine positive Zahl, da $\beta^{2n+1} < 0$, $1+\beta > 0$ und $2n+1 > 0$ ist). Folglich ist

$$\left| \int_0^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t} dt \right| = \int_{\beta}^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt = -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$$

Wenn wir also in dem Ausdruck für $\ln(1+\beta)$ den Summanden $\int_{\beta}^0 \frac{t^{2n}}{1+t} dt$ vernachlässigen, machen wir einen Fehler, der seinem absoluten Betrage nach kleiner als

$$-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)} \quad (-1 \leq \beta < 0)$$

ist. Er strebt mit unbeschränkt wachsendem n gegen Null.

Also ist unsere Näherungsformel

$$\ln(1+\beta) \approx \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \dots - \frac{\beta^{2n}}{2n}$$

für $-1 < \beta < 0$ bis auf einen Fehler von höchstens $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$ richtig.

Setzen wir z.B. $\beta = -\frac{1}{2}$, so wird der Fehler unserer Näherungsformel kleiner als

$$\frac{1}{2^{2n+1}} : \left[\frac{1}{2}(2n+1) \right] = \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$$

Nehmen wir $n = 4$, so ist dieser Bruch gleich $\frac{1}{9 \cdot 2^8} = \frac{1}{2304} < 0,0005$. Daher können wir mit diesem Genauigkeitsgrad

$$\ln \frac{1}{2} \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} - \frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^5 \cdot 5} - \frac{1}{2^6 \cdot 6} - \frac{1}{2^7 \cdot 7} - \frac{1}{2^8 \cdot 8}$$

schreiben. Führen wir die Berechnung durch,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0,5000, & \frac{1}{2^2 \cdot 2} &= 0,1250, & \frac{1}{2^3 \cdot 3} &= 0,0417, & \frac{1}{2^4 \cdot 4} &= 0,0156, \\ \frac{1}{2^5 \cdot 5} &= 0,0062, & \frac{1}{2^6 \cdot 6} &= 0,0026, & \frac{1}{2^7 \cdot 7} &= 0,0011, & \frac{1}{2^8 \cdot 8} &= 0,0005 \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\ln \frac{1}{2} \approx -0,6927 \approx -0,693$$

mit einer Genauigkeit von 0,001. (Wir berücksichtigen dabei, dass die Formel selbst einen Fehler bis 0,0005 enthalten kann, da bei der Verwandlung jedes einzelnen der

acht Summanden in einen Dezimalbruch Fehler bis zu 0,00005 entstehen können.)

Da $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ ist, folgt hieraus

$$\ln 2 \approx 0,693$$

Setzt man in der Näherungsformel für $\ln(1 + \beta)$ die Zahl $\beta = -\frac{2}{3}$, so kann man auf diese Weise $\ln \frac{1}{3}$ ausrechnen und schließlich auch $\ln 3 = -\ln \frac{1}{3}$.

Nehmen wir allgemein $\beta = -\frac{k}{k+1}$, so erhalten wir

$$\ln\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \ln \frac{1}{k+1}$$

und damit auch $\ln(k+1) = -\ln \frac{1}{k+1}$.

Jedoch ist diese Methode zur Berechnung von Logarithmen immer noch sehr umständlich. Wollen wir z.B. $\ln 11$ berechnen, so müssen wir $k+1 = 11$, d.h. $k = 10$ nehmen und $\beta = -\frac{10}{11}$ setzen; dann wird der Fehler der Näherungsformel kleiner als

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1} : (2n+1) \left(1 - \frac{10}{11}\right) = \frac{11}{2n+1} \left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}$$

Es ist

$$\begin{array}{llll} \frac{10}{11} \approx 0,91; & \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0,83; & \left(\frac{10}{11}\right)^4 \approx 0,69; & \left(\frac{10}{11}\right)^8 \approx 0,48; \\ \left(\frac{10}{11}\right)^{16} \approx 0,29; & \left(\frac{10}{11}\right)^{32} \approx 0,08; & \left(\frac{10}{11}\right)^{64} \approx 0,006; & \left(\frac{10}{11}\right)^{65} \approx 0,005 \end{array}$$

Also können wir nur, wenn wir $2n+1 = 65$ nehmen, garantieren, dass der Fehler der Näherungsformel für die Berechnung von $\ln \frac{1}{11}$ kleiner als $\frac{11}{65} \cdot 0,005 \approx 0,001$ wird.

Es ist klar, dass die Rechenarbeit zur Bestimmung von $\ln \frac{1}{11}$ hier sehr groß wird, da wir eine Summe von 64 Summanden ausrechnen müssen:

$$-\frac{10}{11} - \frac{1}{2} \left(\frac{10}{11}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{10}{11}\right)^3 - \dots - \frac{1}{64} \left(\frac{10}{11}\right)^{64}$$

17.

Die Schlüsse, zu welchen wir in Bezug auf die Näherungsformel für $\ln(1 + \beta)$ kamen, veranlassen uns, eine andere Formel zu suchen, die weniger Rechnen erfordert.

Eine solche Formel existiert tatsächlich. Um sie zu finden, nehmen wir eine beliebige positive Zahl k und setzen $\beta = \frac{1}{2k+1}$. Dann finden wir

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) &\approx \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)^2} + \frac{1}{3(2k+1)^3} - \frac{1}{4(2k+1)^4} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} - \frac{1}{(2n)(2k+1)^{2n}} \end{aligned}$$

Der Fehler dieser Näherungsgleichung ist kleiner als $\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$. Nehmen wir nun ein negatives β gleich $-\frac{1}{2k+1}$, so erhalten wir eine andere Näherungsgleichung, nämlich

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) \approx -\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)^2} - \frac{1}{3(2k+1)^3} - \frac{1}{4(2k+1)^4} + \dots$$

$$- \frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} - \frac{1}{(2n)(2k+1)^{2n}}$$

welche uns $\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$ gibt mit einem Fehler, der kleiner als

$$\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} : \left[(2n+1) \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = \frac{2k+1}{2k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}$$

ist. Wir subtrahieren nun die zweite Näherungsgleichung von der ersten und finden

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) \approx \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{3(2k+1)^3} + \frac{2}{5(2k+1)^5}$$

$$+ \dots + \frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}$$

Der Fehler dieser Näherungsgleichung ist höchstens gleich dem Absolutwert der Summe der Fehler, welche in den Formeln für $\ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)$ und $\ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$ auftreten. Daher ist er kleiner als

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} + \frac{2k+1}{2k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{4k+1}{2k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}$$

$$< \frac{4k+2}{2k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{1}{k(2n+1)(2k+1)^{2n}}$$

Wir bilden die Differenz der Logarithmen, welche, wie wir wissen, gleich dem Logarithmus des Quotienten ist, und erhalten

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = \ln \frac{1 + \frac{1}{2k+1}}{1 - \frac{1}{2k+1}} = \ln \frac{2k+2}{2k}$$

$$= \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$$

Also ist

$$\ln(k+1) - \ln k \approx \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{3(2k+1)^3} + \frac{2}{5(2k+1)^5} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$$

(*)

mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^{2n}}$ ist. Das ist die gewünschte Formel.

Sie gestattet, $\ln(k+1)$ zu berechnen, wenn $\ln k$ bekannt ist. Wir benutzen $\ln 1 = 0$ und setzen in der Formel $k = 1$; dann finden wir $\ln 2$ mit einem Fehler kleiner als

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^{2n}}$$

Nehmen wir $n = 5$, dann können wir behaupten, dass der Fehler kleiner als $\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{11 \cdot 59049} < 0,000002$ wird. Also ist

$$\ln 2 = \ln 2 - \ln 1 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9}$$

mit einem Fehler kleiner als 0,000002.

Jeden dieser fünf Brüche verwandeln wir in einen Dezimalbruch mit sechs Stellen hinter dem Komma. (d.h. mit einer Genauigkeit von 0,0000005) und addieren sie; wir erhalten so den Wert von $\ln 2$ mit einer Genauigkeit von $0,000002 + 0,0000005 \cdot 5 < 0,000005$:

$$\ln 2 \approx 0,693146 \approx 0,69315$$

Setzen wir jetzt in Formel (*) $k = 2$ und $n = 3$, so erhalten wir

$$\ln 3 - \ln 2 \approx \frac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} \approx 0,40546$$

mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^6} < 0,000005$ ist. Daher ist

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 0,40546 \approx 1,09861$$

Weiter ergibt sich $\ln 4 = 2 \ln 2 \approx 1,38630$. Setzen wir in Formel (*) $k = 4$ und $n = 3$, so finden wir

$$\ln 5 - \ln 4 \approx \frac{2}{9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} \approx 0,223144 \approx 0,22314$$

mit einem Fehler kleiner als

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^6} = 0,0000001$$

Daher ist

$$\ln 5 \approx \ln 4 + 0,22314 \approx 1,60944$$

Jetzt können wir auch $\ln 10$ bestimmen:

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 \approx 2,30259$$

Schließlich erhalten wir durch Einsetzen von $k = 10$ und $n = 2$ in Formel (*):

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{2}{21} + \frac{2}{3 \cdot 21^3} \approx 0,09531$$

(der Fehler der Näherungsformel ist hier kleiner als 0,0000001). Daher ist

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 0,09531 \approx 2,39790$$

Diese Beispiele genügen, um zu zeigen, wie man eine Tabelle der natürlichen Logarithmen zusammenstellen kann. Auf diesem Wege erhält man die nachstehende Tabelle der natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 100 mit einer Genauigkeit von 0,0005.

Tabelle der natürlichen Logarithmen von 1 bis 100

n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,000	21	3,045	41	3,714	61	4,111	81	4,394
2	0,693	22	3,091	42	3,738	62	4,127	82	4,407
3	1,099	23	3,135	43	3,761	63	4,143	83	4,419
4	1,386	24	3,178	44	3,784	64	4,159	84	4,431
5	1,609	25	3,219	45	3,807	65	4,174	85	4,443
6	1,792	26	3,258	46	3,829	66	4,190	86	4,454
7	1,946	27	3,296	47	3,850	67	4,205	87	4,466
8	2,079	28	3,332	48	3,871	68	4,220	88	4,477
9	2,197	29	3,367	49	3,892	69	4,234	89	4,489
10	2,303	30	3,401	50	3,912	70	4,248	90	4,500
11	2,398	31	3,434	51	3,932	71	4,263	91	4,511
12	2,485	32	3,466	52	3,951	72	4,277	92	4,522
13	2,565	33	3,497	53	3,970	73	4,290	93	4,533
14	2,639	34	3,526	54	3,989	74	4,304	94	4,543
15	2,708	35	3,555	55	4,007	75	4,317	95	4,554
16	2,773	36	3,584	56	4,025	76	4,331	96	4,564
17	2,833	37	3,611	57	4,043	77	4,344	97	4,575
18	2,890	38	3,638	58	4,060	78	4,357	98	4,585
19	2,944	39	3,664	59	4,078	79	4,369	99	4,595
20	2,996	40	3,689	60	4,094	80	4,382	100	4,605

18.

Wir haben gesehen, dass man den Logarithmus eines Produktes durch Addition, den Logarithmus eines Quotienten durch Subtraktion, den einer Potenz durch Multiplikation (mit dem Exponenten der Potenz) und den Logarithmus einer Wurzel durch Division (durch den Wurzelexponenten) findet.

Hat man daher eine Tafel, in der neben den Zahlen ihre Logarithmen stehen (Logarithmentafel), so kann man mit ihrer Hilfe die Multiplikation durch die Addition, die Division durch Subtraktion, das Potenzieren durch Multiplizieren und das Radizieren durch Dividieren, d.h. jedes mal durch eine einfachere Operation ersetzen. Genauer es darüber kann der Leser in den üblichen Schulbüchern finden. Wir beschränken uns hier auf ein einfaches Beispiel.

Wir wollen $c = \sqrt[5]{2}$ berechnen. Dazu benutzen wir den oben gegebenen Wert $\ln 2 \approx 0,693$, teilen ihn durch 5 und erhalten

$$\ln \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0,139$$

Es muss nur noch die Zahl $\sqrt[5]{3}$ zu dem ihr entsprechenden Logarithmus gefunden werden. Unsere Tafel reicht dazu nicht aus. In ihr sind die Logarithmen 0,000 (der der Zahl 1 entspricht) und 0,693 (der der Zahl 2 entspricht) enthalten. Der erste ist viel zu klein, der zweite viel zu groß.

Daher können wir nur sagen, dass $1 < \sqrt[5]{2} < 2$ ist. Nun ist aber

$$\ln(10\sqrt[5]{2}) = \ln 10 + \ln \sqrt[5]{2} = 2,303 + 0,139 = 2,442$$

Der unmittelbar kleinere Logarithmus in unserer Tafel ist 2,398 ($= \ln 11$), der unmittelbar größere ist 2,485 ($= \ln 12$), folglich ist $11 < 10\sqrt[5]{2} < 12$.

Da 2,442 annähernd in der Mitte zwischen $\ln 11$ und $\ln 12$ liegt (das arithmetische Mittel beider Zahlen ist 2,441), können wir $10\sqrt[5]{2} \approx 11,5$ setzen, d.h. $\sqrt[5]{2} \approx 1,15$.

Zur Probe berechnen Wir

$$\ln(100\sqrt[5]{2}) = \ln 100 + \ln \sqrt[5]{2} = 4,605 + 0,139 = 4,744$$

und

$$\ln 115 = \ln 5 + \ln 23 = 1,609 + 3,135 = 4,744$$

19.

Um die Kurve der Funktion $y = \ln x$ zu zeichnen, muss man die Koordinatenachsen und einen beliebigen Einheitsmaßstab wählen und dann für jedes positive x den Wert $\ln x$ auf der in dem entsprechenden Punkt errichteten Senkrechten zur x -Achse abtragen. Die Endpunkte der Senkrechten, die uns die verschiedenen x liefern, liegen auf der Kurve, welche die graphische Darstellung des natürlichen Logarithmus ist. Diese Kurve ist in Abb. 30a dargestellt. Zum Vergleich ist darunter in Abb. 30b $\ln x$ durch eine Fläche dargestellt.

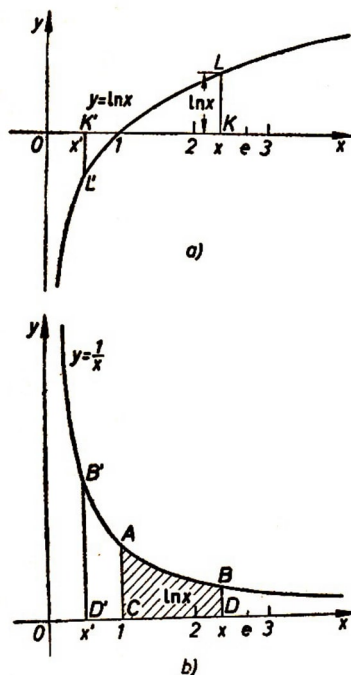


Abb. 30

In beiden Zeichnungen wurde ein und derselbe Maßstab verwendet. Nehmen wir den gleichen x -Wert, so können wir behaupten, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes $ACDB$ in der Abb. 30b genauso viel quadratische Einheiten enthält wie der Abschnitt KL der Abb. 30a. Längeneinheiten (Abb. 30a und 30b).

Wir sehen, dass für $0 < x' < 1$ die Beziehung

$$\ln x' = \int_1^{x'} \frac{dx}{x} = - \int_{x'}^1 \frac{dx}{x}$$

d.h., $\ln x'$ ist eine negative Zahl, deren absoluter Betrag gleich dem Inhalt des Trapezes $B'D'CA$ ist; also wird $\ln x'$ für diesen Fall in Abb. 30a durch den Abschnitt $K'L'$ dargestellt, der unterhalb der x -Achse liegt.

Alle Eigenschaften der Kurve der Funktion $y = \ln x$ gehen aus der Definition und den Eigenschaften des natürlichen Logarithmus hervor. Zum Beispiel ist $\ln x$ negativ für $x < 1$, verschwindet für $x = 1$ und ist positiv für $x > 1$.

Daher liegt die Kurve des Logarithmus unterhalb der x -Achse für $x < 1$, schneidet die x -Achse im Punkt $x = 1$ und verläuft oberhalb der x -Achse für jedes $x > 1$.

Ferner wächst $y = \ln x$ mit wachsendem x .

Diese Eigenschaft liegt für $x > 1$ auf der Hand (siehe Abb. 30b), sie gilt jedoch auch für $x = x' < 1$. Wächst x' , bleibt dabei jedoch kleiner als Eins, so verkleinert sich der absolute Betrag des Flächeninhalts $B'D'CA$ (Abb. 30b); das bedeutet aber, dass $\ln x$, das sich von diesem Flächeninhalt nur durch das Vorzeichen unterscheidet, größer wird.

In der graphischen Darstellung kommt das Anwachsen des Logarithmus dadurch zum Ausdruck, dass die Kurve die Form eines Berghanges hat, welcher von links nach rechts ansteigt.

Dieser Hang ist anfangs steil, wird dann jedoch immer flacher.

Zur größeren Anschaulichkeit werden wir hier die Kurve des Logarithmus den logarithmischen Hang nennen.

Wenn wir einen horizontalen Pfad längs der x -Achse anlegen und darauf vom Punkt O aus nach rechts gehen, werden wir anfangs, nach unten schauend, einen unendlichen Abgrund sehen, in dessen Tiefe sich der logarithmische Hang verliert.

Es genügt jedoch, einen Schritt von der Größe der Längeneinheit zu machen, um den Abgrund hinter sich zu lassen.

Bewegen wir uns auf unserem Pfad weiter fort, so bemerken wir, dass der Hang mit jedem Schritt höher wird. So ist nach zwei Schritten ($x = 2$) seine Höhe $\ln 2 = 0,693$, nach drei Schritten $\ln 3 = 1,099$ usw.

Wir wollen einmal berechnen, um wieviel der Hang ansteigt, wenn wir nach m Schritten noch einen weiteren machen.

Da die Höhe nach m Schritten (jeder eine Einheit) gleich $\ln m$ ist und nach $m + 1$ Schritten gleich $\ln(m+1)$, ist der Anstieg des Hanges, der dem einen Schritt entspricht,

$$\ln(m+1) - \ln m = \ln \frac{m+1}{m} = \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

Je mehr Schritte wir gemacht haben, um so kleiner wird $\frac{1}{m}$, um so mehr nähert sich $1 + \frac{1}{m}$ der Eins und um so näher kommt $\ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ der Null. Das bedeutet, dass der Anstieg des Hanges merklich kleiner und kleiner wird, je weiter wir nach rechts fortschreiten, d.h., der logarithmische Hang wird tatsächlich immer flacher und flacher.

Die stets geringer werdende Steilheit des Hanges hindert ihn jedoch nicht daran, unbegrenzt höher zu werden, so dass der Hang sogar beliebig hoch wird, wenn wir nur weit genug längs unseres horizontalen Pfades nach rechts gehen.

Diese Höhe des Hanges wird nämlich nach 2^m Schritten gleich

$$\ln 2^m = m \ln 2 = 0,693m$$

und diese Zahl wird für hinreichend großes m beliebig groß.

Wird zusammen mit dem horizontalen Pfad ein anderer geradliniger Pfad mit irgendeiner, wenn auch noch so geringen Neigung nach oben gelegt (Abb. 31a), so werden

wir auf diesem Pfad früher oder später den logarithmischen Hang nicht nur erreichen, sondern bei weiterem Anstieg sogar unter uns lassen (Abb. 31 b).

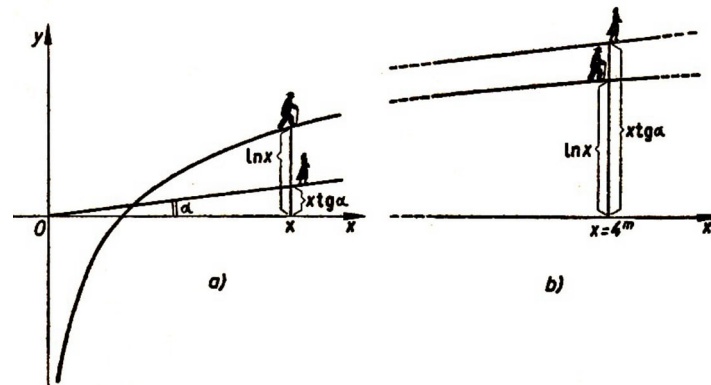


Abb. 31

Um diese Aussage nachprüfen zu können, beweisen wir folgenden Hilfssatz: Für jedes natürliche m gilt die Ungleichung

$$\frac{4^m}{m^2} \geq 4$$

In der Tat wächst der Bruch $\frac{4^m}{m^2}$, falls m um 1 wächst, d.h.

$$\frac{4^m}{m^2} < \frac{4^{m+1}}{(m+1)^2}$$

dies folgt aus der Ungleichung

$$\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2} : \frac{4^m}{m^2} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} = \left(\frac{2m}{m+1} \right)^2 = \left(\frac{m+m}{m+1} \right)^2 \geq 1$$

die für $m \geq 1$ richtig ist. Daher hat unter den Brüchen

$$\frac{4^1}{1^2}, \frac{4^2}{2^2}, \dots, \frac{4^m}{m^2}, \dots$$

der erste den kleinsten Wert, d.h., stets ist

$$\frac{4^1}{1^2} < \frac{4^m}{m^2}$$

was wir beweisen wollten.

Wir bemerken nun, dass in jedem Punkt unseres schrägen geradlinigen Pfades die Beziehung $y = x \tan \alpha$ gilt, wobei α der Neigungswinkel des Pfades ist (α ist ein spitzer Winkel, und folglich ist $\tan \alpha > 0$).

Ist $x = 4^m$, so wird für diesen Wert von x die Höhe des Pfades $4^m \tan \alpha$, die Höhe des logarithmischen Hanges wird jedoch $\ln 4^m = m \cdot \ln 4$. Das Verhältnis der Höhen zueinander ist

$$\frac{4^m \tan \alpha}{m \ln 4} = \frac{4^m \tan \alpha}{m^2 \ln 4} m$$

Nach dem oben Bewiesenen ist aber $\frac{4^m}{m^2} \geq 4$. Daher ist das Verhältnis der Höhe des Pfades zur Höhe des logarithmischen Hanges mindestens $\frac{4 \tan \alpha}{\ln 4} \cdot m$, und diese Größe wird für genügend große m beliebig groß.

Folglich führt der schräge geradlinige Pfad für $x = 4^m$ und großes m bedeutend höher als der logarithmische Hang (siehe Abb. 31b).

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der logarithmische Hang eine abgerundete, überall nach oben gewölbte (konvexe) Form ohne jede Vertiefung hat. Diese Eigenschaft kann man geometrisch so ausdrücken: Jeder Bogen der logarithmischen Kurve liegt oberhalb der Sehne dieses Bogens (Abb. 32).

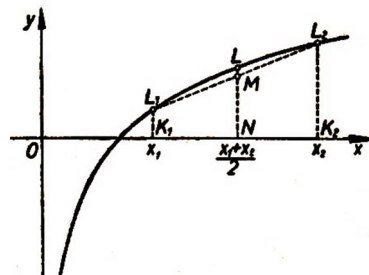


Abb. 32

Bezeichnen wir die Abszissen der Endpunkte eines willkürlich gewählten Bogens $L_1 L_2$ mit x_1 und x_2 , so finden wir, dass für den Mittelwert $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ der Punkt L des Bogens tatsächlich höher liegen muss als der entsprechende (mittlere) Punkt M der Sehne. In der Tat ist

$$NL = \ln \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{dagegen} \quad NM = \frac{K_1 L_1 + K_2 L_2}{2}$$

(als Mittellinie des Trapezes), d.h.

$$NM = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}$$

Wir müssen beweisen, dass

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}$$

Nun ist aber

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \frac{1}{2} \ln(x_1 x_2) = \ln \sqrt{x_1 x_2}$$

Daher müssen wir

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}$$

beweisen. Wir bemerken, dass

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 > 0$$

(wenn x_1 und x_2 voneinander verschiedene positive Zahlen sind). Daher ist

$$x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2} \quad \text{ferner} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

und schließlich

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}$$

was zu beweisen war.

Folglich liegt für jeden beliebigen Bogen der logarithmischen Kurve der Punkt des Bogens, welchem das arithmetische Mittel der Abszissen der Endpunkte entspricht, höher als die Sehnenmitte. Hieraus folgt aber, dass es auf der Kurve des Logarithmus keine Vertiefungen gibt.

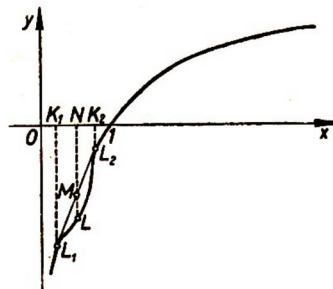


Abb. 33

Gäbe es nämlich eine solche Vertiefung (Abb. 33), so könnten wir einen Bogen finden, für den die gezeigte Eigenschaft nicht gelten würde (die Mitte M der Sehne läge nicht tiefer, sondern höher als der entsprechende Punkt des Bogens).

Unter Benutzung der Eigenschaften des Logarithmus könnten wir nun noch weitere interessante Eigenschaften der logarithmischen Kurve folgern; wir wollen es aber damit genug sein lassen.

20.

Der natürliche Logarithmus tritt bei der Lösung vieler Probleme der Mathematik und Physik auf, die auf den ersten Blick gar keine Beziehungen zu den Flächeninhalten der krummlinigen Trapeze haben, welche von Hyperbelbögen begrenzt werden.

Mit einem Problem dieser Art befasste sich der berühmte russische Mathematiker Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff: Eine möglichst einfache Formel für die ungefähre Bestimmung der Anzahl aller Primzahlen zu finden, die eine (beliebig) vorgegebene Zahl n nicht übertreffen.

Ist n nicht groß, so ist das Problem, diese Anzahl zu bestimmen - wir bezeichnen sie mit $\pi(n)$, (wobei π hier keinerlei Beziehung zu der bekannten Zahl 3,14159... hat) -, außerordentlich einfach zu lösen.

Ist z.B. $n = 10$, so sind die Primzahlen, die nicht größer als 10 sind, die Zahlen: 2, 3, 5, 7; ihre Anzahl ist 4, daher ist $\pi(10) = 4$.

Ist $n = 100$, so erhalten wir unter Benutzung des bekannten "Siebes des Eratosthenes" die 25 Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; daher ist $\pi(100) = 25$.

Ist n jedoch groß, so wird die Aufgabe sehr schwierig. Wie berechnet man $\pi(n)$, und sei es nur ungefähr, wenn n gleich einer Million, Billion usw. ist?

Tschebyscheff fand, dass es für die angenäherte Berechnung von $\pi(n)$ genügt, durch

den natürlichen Logarithmus von n zu dividieren:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

Der relative Fehler dieser Gleichung [der Fehler im Verhältnis zu $\pi(n)$] kann groß sein, aber er strebt gegen Null, wenn n gegen Unendlich strebt.

Die Näherungsformel Tschebyscheffs ist besonders geeignet für den Fall, dass n eine Potenz von 10 mit einem positiven ganzen Exponenten ist: $n = 10^k$. Dann erhalten wir $\ln n = \ln 10^k = k \ln 10 \approx 2,303k$ und damit

$$\pi(n) \approx \frac{10^k}{2,303k}$$

Wegen $\frac{1}{2,303} \approx 0,434$ erhalten wir die zur Berechnung noch geeignetere Formel

$$\pi(10^k) \approx 0,434 \frac{10^k}{k}$$

So finden wir für $k = 1$ und $k = 2$:

$$\begin{aligned}\pi(10) &\approx 0,434 \cdot 10 = 4,34 && (\text{genau: } 4), \\ \pi(100) &\approx 0,434 \cdot \frac{100}{2} = 21,7 && (\text{genau: } 25)\end{aligned}$$

Ferner würde sich folgendes ergeben:

$$\begin{aligned}\pi(1000) &\approx 0,434 \cdot \frac{1000}{3} = 145 && (\text{genau: } 168), \\ \pi(10000) &\approx 0,434 \cdot \frac{10000}{4} = 1090 && (\text{genau: } 1229) \\ \pi(10^6) &\approx 0,434 \cdot \frac{10^6}{2} = 72300 && (\text{genau: } 78948)\end{aligned}$$

Der relative Fehler des letzten Resultates ist

$$\frac{78498 - 72300}{78498} \approx 0,08$$

d.h. 8%. Er ist noch sehr groß. Es lässt sich streng beweisen, dass der relative Fehler der Tschebyscheffschen beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur 10^k hinreichend groß wählt.

Es tritt ein Moment ein, von dem ab der relative Fehler kleiner als 1% wird, weiter dann kleiner als 0,1%, kleiner als 0,001% usw. Darin besteht die große theoretische Bedeutung der Tschebyscheffschen Formel.

P.L. Tschebyscheff gab noch eine andere Formel für die angenäherte Berechnung von $\pi(n)$, die etwas komplizierter ist, dafür aber eine bei weitem bessere Näherung gibt. Diese Formel⁴ lautet

$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dt}{\ln t}$$

⁴Schon Gauß hatte 1796 dieselbe Formel vermutet und später (mit fremder Hilfe) bis $n = 8000000$ geprüft; vgl. Gauß, Werke, Bd. II (Anm. d. Herausgebers).

Wir führen keine Berechnungen durch, sondern geben hier nur einige Resultate an:

$$\begin{aligned}\int_2^{1000} \frac{dt}{\ln t} &\approx 177 & (\pi(1000) = 168) \\ \int_2^{10000} \frac{dt}{\ln t} &\approx 1245 & (\pi(1000) = 1229) \\ \int_2^{1000000} \frac{dt}{\ln t} &\approx 78627 & (\pi(1000) = 78498)\end{aligned}$$

Der relative Fehler der Näherungsgleichung

$$\pi(1000000) \approx \int_2^{1000000} \frac{dt}{\ln t} \quad \text{ist} \quad \frac{|78498 - 78627|}{78498} \approx 0,0016$$

d.h. 0,16%.

21.

Wir haben gesehen, dass⁵ $\ln 2 = 0,69315 < 1$, dagegen $\ln 3 = 1,09861 > 1$ ist. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt von $ACDB$ (Abb. 34) kleiner als 1, aber der Flächeninhalt von ACD_1B_1 größer als 1 ist. Es ist zu erwarten, dass zwischen den Punkten D und D_1 ein

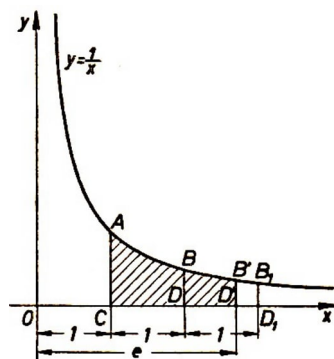


Abb. 34

Punkt D' liegt derart, dass der Flächeninhalt $ACD'B'$ gleich 1 wird. Ein solcher Punkt D' existiert tatsächlich. Bezeichnet man OD' mit e , so kann man behaupten, dass $2 < e < 3$ ist.

Benutzen wir die angegebene Logarithmentafel, so stellen wir fest, dass $2,7 < e < 2,8$ ist. In der Tat ist $\ln 2,7 = \ln 27 - \ln 10 \approx 0,993$, dagegen $\ln 2,8 = \ln 28 - \ln 10 \approx 1,029$.

Es existieren verschiedene Verfahren, die es gestatten, e mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Wir gehen darauf nicht ein, sondern geben nur ein Ergebnis an:

$$e = 2,71828$$

⁵Das Zeichen "=" bedeutet eine "Übereinstimmung" mit der hier verwendeten Genauigkeit, keine Gleichheit im strengen Sinne (Anm. d. Herausgebers).

(alle aufgeschriebenen Stellen sind genau). Laut Definition gilt

$$\ln e = 1$$

Die Zahl e heißt Basis der natürlichen Logarithmen oder Neper- (auch Napier-)sche Zahl zu Ehren des schottischen Mathematikers Neper (Napier), der (im Jahre 1614) die erste Logarithmentafel veröffentlichte.

Unter Zuhilfenahme der Eigenschaften des natürlichen Logarithmus kann man folgenden bemerkenswerten Satz beweisen:

Der natürliche Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl b ist gleich dem Exponenten derjenigen Potenz, in welche die Zahl e erhoben werden muss, damit man b erhält. Mit anderen Worten:

Ist $\ln b = \alpha$, so ist $b = e^\alpha$.

Zum Beispiel folgt aus $\ln 2 = 0,69315$, dass $2 = e^{0,69315}$ ist, und aus $\ln 10 = 2,30259$ folgt $10 = e^{2,30259}$ usw.

Zum Beweis genügt die Anwendung der Eigenschaften des Logarithmus einer Potenz. Sei $b = e^x$, dann ist $\ln b = \ln e^x = x \ln e$. Nun ist aber $\ln e = 1$, daher ist

$$\ln b = x$$

d.h., der natürliche Logarithmus von b stimmt mit dem Exponenten x der Potenz überein.

Man kann also den natürlichen Logarithmus definieren, ohne die geometrische Darstellung zu benutzen. Es wäre möglich gewesen, von Anfang an zu sagen, dass der natürliche Logarithmus einer Zahl b der Exponent derjenigen Potenz ist, in welche die Zahl $e = 2,71828$ erhoben werden muss, damit man b erhält.

Bei dieser Definition ist aber zunächst nicht klar, warum uns der Exponent einer Potenz gerade dieser Zahl e interessiert und nicht der irgendeiner anderen. Wird aber der natürliche Logarithmus als Flächeninhalt eingeführt, so wird die Definition anschaulich und in keiner Weise befremdlich.

Wir wollen noch hinzufügen, dass neben den natürlichen Logarithmen auch solche zu einer anderen Basis eingeführt werden können.

So ist z.B. der dekadische Logarithmus einer Zahl b der Exponent derjenigen Potenz, in welche 10 erhoben werden muss, damit man b erhält. Den dekadischen Logarithmus bezeichnet man mit $\lg b$.

Setzt man $\lg b = \beta$, so muss nach Definition $b = 10^\beta$ sein. Offenbar ist $\lg 10 = 1$.

Die dekadischen Logarithmen werden eingehend behandelt in der 9. Klasse der Oberschule, wobei alle ihre Eigenschaften auf Grund der bekannten Eigenschaften der Potenzen gefolgert werden und nicht auf geometrischem Wege.

Zwischen den dekadischen und den natürlichen Logarithmen existiert ein einfacher Zusammenhang.

Sei $\ln b = \alpha$ und $\lg b = \beta$.

Das bedeutet, dass $b = e^\alpha$ und $b = 10^\beta$, d.h. $e^\alpha = 10^\beta$ ist.

Folglich ist $\ln e^\alpha = \ln 10^\beta$ oder $\alpha \ln e = \beta \ln 10$, d.h. $\alpha = \beta \cdot 2,30259$. Daher ist $\ln b = 2,30259 \lg b$, also

$$\lg b = \frac{1}{2,30259} \ln b = 0,43429 \ln b$$

Aus einer Tafel der natürlichen Logarithmen erhält man durch Multiplikation jedes Logarithmus mit 0,43429 eine Tafel der dekadischen Logarithmen. So z.B.

$$\lg 2 = 0,43429 \ln 2 = 0,43429 \cdot 0,69315 = 0,30103$$

Für $\lg 10$ müssen wir Eins erhalten:

$$\lg 10 = 0,43429 \ln 10 = 0,43429 \cdot 2,30259 = 1$$

Der Umstand, dass die Zahl 10, die Basis des dekadischen Zahlensystems, die Basis der dekadischen Logarithmen ist, erleichtert das Rechnen mit Logarithmen bedeutend. So folgt aus $\lg 2 = 0,30103$ und $\lg 10 = 1$ sofort

$$\lg 20 = \lg 2 + \lg 10 = \lg 2 + 1 = 1,30103$$

$$\lg 200 = \lg 2 + \lg 100 = \lg 2 + 2 = 2,30103$$

usw.

Dagegen müssten wir, ausgehend von $\ln 2 = 0,69315$ und $\ln 10 = 2,302585$, die Zahlen $\ln 20$ und $\ln 200$ folgendermaßen ausrechnen:

$$\ln 20 = \ln 2 + \ln 10 = 0,69315 + 2,30259 = 2,99574$$

$$\ln 200 = \ln 2 + \ln 100 = \ln 2 + 2 \ln 10 = 0,69315 + 4,60517 = 5,29832$$

Daher bevorzugt man die Tafeln der dekadischen Logarithmen als Hilfsmittel zum Rechnen.

Das vermindert aber die Bedeutung der natürlichen Logarithmen, welche in den verschiedensten Problemen der Mathematik und Naturwissenschaften auftreten, nicht im geringsten.

Zwei mathematische Probleme, die auf natürliche Logarithmen führen - das Problem des Flächeninhaltes der Figur unter einer gleichseitigen Hyperbel und das Tschbeyscheffsche Problem der Verteilung der Primzahlen - wurden in diesem Büchlein behandelt.