

---

**Hans Jäckel**

**Mathematik heute**

1972 Urania-Verlag Leipzig, Jena, Berlin

MSB: Nr. 66

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

# 1 Vorwort

Noch vor wenigen Jahrzehnten verbanden sich bei den meisten Menschen Vorstellungen über die Mathematik in erster Linie mit mystischen Formelzeichen, deren Deutung nur wenigen Eingeweihten möglich schien, mit dem Fluidum stiller Studierstuben und einer dem pulsierenden Leben abgewandten Wissenschaft.

Die Mathematiker galten als weltfremd und gewissermaßen in höheren Sphären schwebend, im Extremfall sogar als Verfechter einer gänzlich brotlosen Kunst. Obwohl man auch heute noch vereinzelt solche oder ähnliche Auffassungen antrifft, hat sich in dieser Hinsicht ein grundsätzlicher Wandel vollzogen.

Entscheidende Entdeckungen in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften und eine damit Hand in Hand gehende stürmische technische Entwicklung haben in unserem Jahrhundert eine wahre Revolution in Wissenschaft und Technik ausgelöst. Dieser gewaltige Prozess ist auch dadurch charakterisiert, dass im Wechselspiel von Theorie und Praxis die Mathematik eine neue Qualität erreicht und in alle möglichen Sphären unseres Lebens immer tiefer eindringt.

Heute kommt jeder irgendwie mit Mathematik in Berührung. Der in der Industrie Tätige hat sie schätzen gelernt als unentbehrlichen Helfer bei der Entwicklung neuer, hochwertiger Güter, der Berechnung von Konstruktionen, der statistischen Qualitätskontrolle, der günstigsten Nutzung vorhandener Ressourcen, der Lagerhaltung, der Analyse von Steuer- und Regelprozessen, der Nachrichtenübermittlung, ja bei der gesamten automatisierten Produktionsvorbereitung. In der Landwirtschaft werden mittels mathematischer Methoden Futterpläne, Anbaupläne sowie die oft umfangreichen Transportprobleme optimiert.

Im Handel kann eine termin- und sortimentgerechte Warenbereitstellung ohne die Mathematik ebensowenig beherrscht werden wie das gesamte Rechnungswesen und vieles andere. Auf diese Weise erkennen wir Menschen sehr anschaulich, dass auch die mathematische Wissenschaft mehr und mehr zur unmittelbaren Produktivkraft wird.

Ebenso offenkundig ist ihre große Bedeutung für die Weiterentwicklung von Technik, Ökonomie, Physik, Chemie, Biologie, Pädagogik, Linguistik und anderer Wissensgebiete.

Heute weiß jeder, dass die Gewinnung und Nutzung von Kernenergie, die Durchführung von Weltraumflügen, die Entwicklung kybernetischer Systeme und programmgesteuerter Elektronenrechner sowie viele weitere wahrhaft revolutionierende wissenschaftlich-technische Leistungen ohne den Einsatz der Mathematik unmöglich wären. So vollzieht sich im internationalen Rahmen ein beachtlicher Mathematisierungsprozess.

Es zeigte sich, dass es gelingt, durch gezielte Maßnahmen die Mathematik für viele Bereiche des gesellschaftlichen Lebens immer besser nutzbar zu machen.

Diese Entwicklung ist aber noch keinesfalls abgeschlossen. Im Gegenteil, es werden weitere große Anstrengungen notwendig sein, um einerseits genügend Ergebnisse der Mathematik zur optimalen Lösung der durch den wissenschaftlich-technischen Fortschritt aufgeworfenen Probleme zur Verfügung zu haben und andererseits ihre umfassende An-

wendung in der Praxis zu sichern. Besonders letzterem Anliegen soll das vorliegende Buch in bescheidenem Umfang dienen.

Gewiss mangelt es nicht an höchst interessanter Literatur über die gegenwärtige und künftige Rolle der Mathematik bei der gesellschaftlichen Entwicklung überhaupt.

Allerdings setzt diese, schon wegen der vielen Fachtermini, meist weitreichende Kenntnisse voraus, wenn man nicht bloß registrieren will, sondern ein echtes Eindringen in das Wesen der Problematik zum Ziel hat.

Dagegen soll mit dieser Schrift, aufbauend etwa auf dem allgemeinen Wissensstand der Absolventen einer zehnten Klasse unserer Oberschulen, versucht werden, nicht nur über charakteristische Merkmale des derzeitigen mathematischen Schaffens schlechthin zu berichten, sondern gleichzeitig in die Anfangsgründe solcher Gedankengänge folgerichtig einzuführen. Außerdem soll vorhandenes Wissen ergänzt werden, um so die Freude an der Mathematik und das Verständnis für aktuelle mathematische Ideen bzw. Ergebnisse zu wecken, dadurch ihre praktische Anwendung zu fördern und ein tiefergehendes Studium anzuregen.

Selbstverständlich kann dies nur an einfachen Beispielen erfolgen. Das schadet dem Grundanliegen jedoch nicht, denn zum Glück ist eine Einführung in die meisten mathematischen Probleme und Methoden nicht so aufwendig und kompliziert, wie es zunächst scheinen mag.

Viele charakteristische Tendenzen der gegenwärtigen mathematischen Forschung lassen sich durchaus an relativ bekanntem Gedankengut demonstrieren. Um z.B. die außerordentlich wichtigen Probleme des Modellierens, des Erfassens stochastischer Prozesse, des engen Wechselverhältnisses zwischen Theorie und Praxis, des komplexen Zusammenwirkens verschiedenster mathematischer Teilgebiete, der Axiomatik sowie anderer aktueller Gegenstände sichtbar zu machen, bedarf es nicht unbedingt eben erst gefundener, höchst abstrakter Spezialergebnisse.

Gerade dieser Umstand ermöglicht es, einen relativ breiten Leserkreis mit derartigen Wesenszügen der modernen Mathematik vertraut zu machen. Vielleicht teilt der strenge Fachkollege diese Meinung nicht; denn viele weiterführende Überlegungen werden dabei vernachlässigt und gewisse Zugeständnisse gemacht, so dass die Gefahr des Verflachens entsteht.

Sollte man hier jedoch nicht ebenso nachsichtig sein wie gegenüber einem Alpinisten, der einen schwierigen Gipfel erstmals unter Ausnutzung manch bekannten Pfades bezwingt und nach seiner Rückkehr nicht sofort über jeden schönen Ausblick sowie sämtliche möglichen Gefahrenstellen Auskunft geben kann, obwohl er trotzdem reich belohnt wurde?

So betrachtet liegt der Gewinn für jeden energischen Leser, der sich ernsthaft um die Vervollkommenung seines mathematischen Wissens und seiner Fähigkeiten bemüht, auf der Hand.

Der Umfang des Buches zwingt zu einer sorgfältigen Stoffauswahl. Sie wurde so getroffen, dass zum einen die gegenwärtigen Grundtendenzen des mathematischen Schaffens

und zum anderen die Aspekte der Anwendungen möglichst klar hervortreten. Natürlich gibt es heute so gut wie kein Teilgebiet der Mathematik mehr, das nicht irgendwelche Applikationen gestattet, wobei jedoch unterschiedliche Gewichte nicht zu verkennen sind.

Solche Disziplinen wie die Analysis, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik sowie die Optimierungstheorie gehören gegenwärtig zu den anwendungsfreudigsten Gebieten, und das wird höchstwahrscheinlich auch noch in nächster Zukunft so bleiben. Aus diesem Grunde erfolgt im vorliegenden Buch eine Konzentration auf diese Bereiche.

Bei den Darlegungen soll jede Gelegenheit genutzt werden, dem Leser die Bedeutung des Zusammenwirkens verschiedenster mathematischer Teildisziplinen vor Augen zu führen, wie sich das z.B. zwischen Analysis, Algebra und Geometrie in der Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie präsentiert.

Allein der vorgegebene Umfang des Buches zwingt dazu, auf nähere Ausführungen über viele wichtige aktuelle Teilgebiete der Mathematik zu verzichten, häufig selbst dort, wo das auf Grund der Stoffauswahl sehr naheliegend ist. Das ist zwar für jeden einschlägigen Spezialisten schmerzlich, jedoch wird dadurch die bescheidene Zielstellung des Buches wohl nicht verfehlt. Möge es also, trotz mancher notwendiger Einschränkungen, besonders unserer Jugend helfen, den Blick für die mathematischen Probleme der Praxis zu weiten, das mathematische Denkvermögen zu schulen und weitergehende Studien anzuregen.

Karl-Marx-Stadt, Oktober 1971

Der Verfasser

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Einige Wesenszüge der Mathematik von heute</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Mathematisches Modell und Wirklichkeit</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Von der Praxis zur abstrakten Theorie ...</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>... und wieder zurück zur Praxis</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Trotz der Vielfalt eine Einheit</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>Von Zufall und Wahrscheinlichkeit</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Die Kunst des Steuermanns</b>	<b>64</b>
<b>9</b>	<b>Gibt es eine optimale Lösung</b>	<b>71</b>
<b>10</b>	<b>Zur künftigen Entwicklung der Mathematik</b>	<b>81</b>
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>84</b>

## 2 Einige Wesenszüge der Mathematik von heute



Eines der hervorstechendsten Merkmale des gegenwärtigen mathematischen Schaffens sind zweifellos die äußerst engen Wechselbeziehungen mit der gesamten gesellschaftlichen Praxis.

Gewiss lassen sich solche in der mehrtausendjährigen Geschichte der Mathematik zu jedem Zeitpunkt nachweisen, schon deshalb, weil sich das mathematische Gedanken-gut Hand in Hand mit der Lösung sehr konkreter Aufgaben zur Befriedigung der bestehenden Bedürfnisse entwickelte, wie der Zeitrechnung (Astronomie), der Baukunst (Geometrie), des Handels und des Handwerks (Arithmetik und Algebra) usw.

Jedoch hat dieses Wechselspiel von der Praxis zur abstrakten mathematischen Theorie und von dieser zurück zur Praxis durch die Entdeckungen und Erfindungen der letzten Jahrzehnte einen grundsätzlichen Wandel erfahren. So sagt z.B. der bekannte sowjetische Physiker K. D. Sinelnikow, dass die Mathematik in der modernen Physik nicht mehr nur Hilfsmittel ist, sondern dass ohne sie ein hinreichend vollständiges Verstehen der Eigenschaften von Objekten der Mikrowelt unmöglich ist.

Ähnliche Bemerkungen sind über viele andere Gegenstände bekannt, wie beispielsweise die moderne Biologie oder die Erforschung des Kosmos.

Dass andererseits die mathematische Modellierung derart vielfältiger und komplizierter Erscheinungen der objektiven Realität, das Bedürfnis zur ständigen Verbesserung der Modelle und schließlich deren Auswertung zu einem raschen Aufschwung in der gesamten Mathematik führen, ist eine notwendige Folge dieser Entwicklung.

So gab es in den letzten Jahrzehnten nicht nur wertvolle Ergebnisse in den klassischen mathematischen Disziplinen, sondern es entstanden auch solche wichtige neue Teilgebiete wie die numerische Mathematik auf der Grundlage der Funktionalanalysis, die Informationstheorie, die Warteschlangentheorie, die Theorie der Optimierung u.a.m.

Die bisherigen Bemerkungen lassen erkennen, dass die Entwicklung der Mathematik offenbar eng mit der Entwicklung der Produktivkräfte verknüpft ist und dass ihre Wurzeln letzten Endes in der objektiven Realität zu suchen sind. Das soll aber keinesfalls den Anschein erwecken, als sei dieser Prozess eine relativ einfache Angelegenheit. Genau das Gegenteil ist richtig!

Es gelingt nämlich oft gar nicht, auf einfache Weise die materiellen Wurzeln der mathematischen Objekte freizulegen, weil sie häufig in einer äußerst abstrakten Form vorliegen.

Hinzu kommt als weiterer wichtiger Wesenszug besonders der modernen Mathematik, dass sie, einmal von der Praxis inspiriert, eine sehr ausgeprägte Eigenentwicklung in vielen Teilbereichen durchläuft.

So entstehen Theorien oft über lange Teilabschnitte ohne weiteren Bezug auf die objektive Realität, und erst viel später werden sie bei der Beschreibung- und Klärung bestimmter Erscheinungen der Praxis wieder deduktiv wirksam.

Ein aktuelles Beispiel hierfür ist die in unserem Jahrhundert entstandene Funktionalanalysis. Aus der klassischen Analysis heraus entwickelte sie sich zunächst im wesentlichen als völlig abstrakte Theorie in engem Zusammenwirken mit modernem algebraischem und geometrischem Gedankengut. Ihr großer Wert für die Lösung praktischer Probleme wurde jedoch erst in den letzten 20 Jahren voll erkannt.

Heute bildet sie z.B. die Grundlage für die gesamte numerische Mathematik, so dass kein ernst zu nehmender Praktiker mehr an ihr vorübergehen kann.

Gerade der starke Drang zur Verallgemeinerung, zu höchster Abstraktion, hat in den letzten Jahrzehnten nicht nur für die Weiterentwicklung der Mathematik selbst, sondern auch in Hinsicht auf ihren praktischen Einsatz erhebliche Erfolge gebracht. Dadurch erlangte der Integrationsprozess innerhalb der Mathematik eine neue Qualität.

Viele früher isoliert entstandene Teilgebiete können heute unter einem einheitlichen Gesichtspunkt betrachtet werden, was gleichzeitig die Verständigung und Zusammenarbeit verschiedenster mathematischer Spezialisten wesentlich erleichtert.

Das wiederum bringt für die Anwendungen großen Nutzen.

Beispielsweise liefern die Fixpunktsätze für Operatorengleichungen in abstrakten Räumen Lösungsverfahren für bestimmte algebraische Gleichungssysteme ebenso wie für Differential- und für Integralgleichungen.

Noch um die Jahrhundertwende ordnete der berühmte deutsche Mathematiker David Hilbert (1862-1943) die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Physik zu.

Inzwischen haben sich mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu ganz entscheidenden Teilgebieten der Mathematik entwickelt. Durch diese Theorien ist es - vornehmlich in den letzten Jahren - möglich geworden, neben den im wesentlichen determinierten Erscheinungen auch solche, bei denen zufällige Größen auftreten, einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.

Letztere werden oft auch als Massenerscheinungen bezeichnet. Die bereits erwähnte Informationstheorie, die Warteschlangentheorie u.a. sind wertvolle Früchte dieser Entwicklung.

Hierbei vollzieht sich eine gegenseitige Befruchtung und Ergänzung von Analysis, Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung und anderen Gebieten in theoretischer und praktischer Hinsicht. Dies weist auf den ausgeprägten Integrationsprozess hin.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung verdrängt aber nicht etwa die analytischen Methoden, wie teilweise angenommen wird, sondern bietet vielmehr die Möglichkeit, bestimmte Modellverstellungen zu verbessern bzw. eine Vielfalt von Erscheinungen überhaupt erst einer mathematischen Behandlung zu unterziehen.

Weiterhin ist wesentlich, dass die Technik seit geraumer Zeit einen direkten Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik ausübt. Standen nämlich früher dem Mathematiker nur äußerst bescheidene Rechenhilfsmittel zur Verfügung, so können heute mit Hilfe von elektronischen Rechenanlagen Probleme in Angriff genommen werden, deren Lösung ehemals schier undenkbar war.

Das gilt nicht allein für viele nur numerisch auswertbare Aufgaben, sondern vor allen Dingen für die Modellierung kompliziertester Erscheinungen mittels solcher Rechenanlagen.

Selbstverständlich hat die Mathematik einen erheblichen Anteil an der Entwicklung derartiger Maschinen, jedoch muss das Primat an ihrer Schöpfung in erster Linie der Technik, speziell der Elektronik, zuerkannt werden.

Erst sie ermöglichte es, die teilweise relativ alten Grundideen der Mathematiker umfassend zu realisieren. Die Elektronenrechner nützen aber nicht nur dem Mathematiker, sie spielen auch eine hervorragende Rolle in der Automatisierungstechnik, bei der numerischen Steuerung von Werkzeugmaschinen, bei der Erforschung des Weltraumes, bei der Datenerfassung und -verarbeitung von Massenerscheinungen u. a. m.

Darüber hinaus geben sie ständig neue Impulse für die Weiterentwicklung der numerischen Mathematik, der Automatentheorie, der Algorithmentheorie und anderer mathematischer Disziplinen.

Die Notwendigkeit, den "Stellenwert" der Mathematik für andere Wissensgebiete und die gesamte Volkswirtschaft in Gegenwart und Zukunft zu bestimmen, macht historische Betrachtungen erforderlich, ohne die z.B. ernst zu nehmende prognostische Aussagen unmöglich sind.

Auch wird durch ein solches Vorgehen das Abschätzen und Einordnen neuer wissenschaftlicher Ergebnisse erleichtert, ganz abgesehen von den zahlreichen Anregungen, die das Studium klassischer Ergebnisse immer wieder gibt.

Diese Bemerkung scheint um so wichtiger, weil häufig gerade in der Mathematik die Tendenz zu verspüren ist, Ergebnisse schnell als "klassisch" abzutun, noch bevor sie umfassend ausgeschöpft und für die Gesellschaft voll nutzbar gemacht worden sind. Schließlich zeigen geschichtliche Betrachtungen auch, dass die jeweiligen Produktionsverhältnisse und die damit verbundenen Staatsformen die Entwicklung der Mathematik grundsätzlich beeinflussen.

So resultierte beispielsweise der niedrige Stand der Mathematik in den frühfeudalistischen Staaten Europas aus einer nur spärlich entwickelten Technik, äußerst schwachen Handelsbeziehungen zu anderen Ländern und kaum nennenswerten Verbindungen mit



den klassischen Zentren der Naturwissenschaften.

Ebenso ist es, um ein sehr aktuelles Beispiel zu nennen, kein Zufall, dass die ersten Arbeiten über Probleme der linearen Optimierung von dem bedeutenden sowjetischen Mathematiker L. W. Kantorowitsch im Jahre 1938 verfasst wurden. Betrieben doch die Sowjetunion, das erste sozialistische Land unserer Erde, zu diesem Zeitpunkt längst eine wissenschaftlich fundierte Planwirtschaft, die natürlich den Einsatz mathematischer Methoden geradezu verlangt.

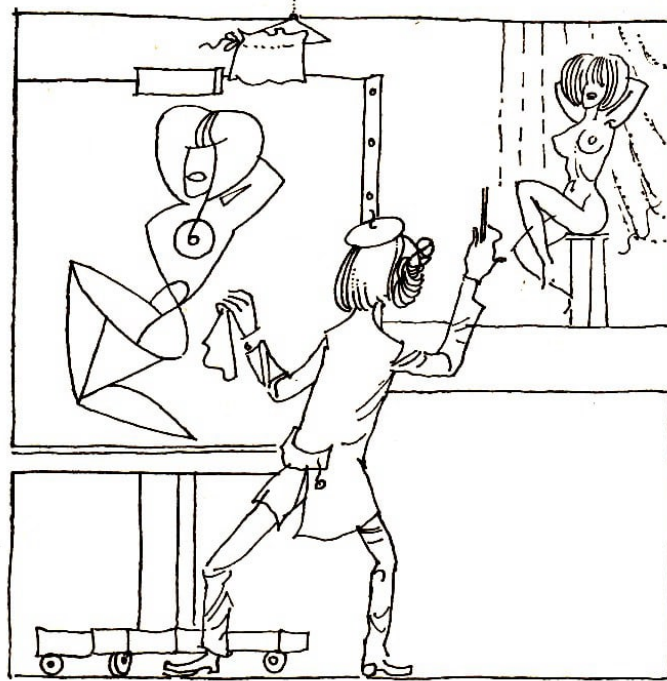
Schon die wenigen hier wiedergegebenen Gedanken legen den Schluss nahe, dass die gesamte Mathematik eine unabdingbare Einheit bildet.

Jeder Versuch, sie aufzuspalten, etwa in reine und angewandte, in theoretische und weniger theoretische Mathematik, entspricht nicht ihrem wissenschaftlichen Charakter und läuft demzufolge einer gediegenen und zielstrebigem Forschung zuwider.

Ein reiner Nützlichkeitsstandpunkt ist für die Entwicklung der Mathematik ebenso schädlich, und damit für das Wohl der Gesellschaft, wie der einer "Theorie an sich", der den materiellen Ursprung und die wissenschaftlich so fruchtbringenden dialektischen Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Praxis ignoriert oder gar leugnet. Dieser Umstand verdient große Beachtung!

Er verlangt vor allem eine von hoher Verantwortung getragene prognostische Arbeit der Mathematiker, die sich nicht vom Überschwang der Gefühle leiten lässt, sondern auf dem Boden der Realität bleibt. Nur so kann ein konzentrierter, zielgerichteter und vorausschauender Einsatz der naturgemäß begrenzten mathematischen Kapazitäten mit höchstem gesellschaftlichem Nutzen erreicht werden. Auf einige der prognostischen Aspekte wird am Schluss der Ausführungen eingegangen.

### 3 Mathematisches Modell und Wirklichkeit



Die Mathematik verfügt heute über eine sehr abstrakte Modelltheorie. Diese entwickelte sich aus dem gegenwärtig so dringenden Bedürfnis, immer mehr und kompliziertere Erscheinungen der objektiven Realität mathematisch zu erfassen.

Dabei können, wie bereits gesagt, die praktischen Fragestellungen der Problematik, auf die es ankommt, auch ohne die moderne Theorie und mit verhältnismäßig geringem mathematischem Aufwand erläutert werden.

Die folgenden beispielartigen Betrachtungen stützen sich auf einfache Tatsachen aus der reellen Analysis. Das geschieht aus mehreren Gründen.

Erstens kann auf diese Weise an einigen relativ gut bekannten Objekten, wie dem Begriff der Funktion, angeknüpft werden, um das Einlesen und damit das Verständnis für den Inhalt des gesamten Buches zu erleichtern.

Zweitens sollen in einem späteren Abschnitt einige Ergebnisse der klassischen Analysis verallgemeinert werden, weil das einen kleinen Einblick in die gegenwärtig hochaktuelle Funktionalanalysis ermöglicht und, wenigstens auf einem Teilgebiet, die große Kraft und die praktische Bedeutung mathematischer Abstraktionen zeigt.

Drittens hat die Erforschung funktionaler Beziehungen einen unschätzbaren Wert für viele Bereiche des gesellschaftlichen Lebens. Besonders hervorgehoben seien in diesem Zusammenhang die Leistungen der Analysis bei der Produktion hochwertiger materieller Güter, weil diese gegenwärtig über den - natürlich sehr wichtigen - Optimierungsproblemen (Maschinenauslastung, Transport, Lagerhaltung usw.) manchmal vergessen werden.

Selbstverständlich bilden beide eine Einheit, und die ausgefeiltste Maschinenauslastung, Transportoptimierung, Lagerhaltung usw. nützen nur wenig, wenn das Endpro-

dukt ungenügende Originalität, Qualität und Marktfähigkeit besitzt. Um das aber zu erreichen, dürfte funktionalen Aspekten und besonders den durch die Funktionalanalysis gewonnenen neuen Erkenntnissen in der nächsten Zukunft noch erhebliche Bedeutung zukommen.

Solche Probleme treten z.B. bei der Untersuchung von Schwingungen und anderen Bewegungsvorgängen an Maschinen, Flugkörpern, Fahrzeugen und Antriebsaggregaten auf. Weiter liegen sie vor bei der Erforschung von Elastizitäts- und Plastizitätseigenschaften der verschiedensten Werkstoffe, von Temperaturvorgängen und Wärmespannungen, bei Fragen der Elektrotechnik-Elektronik, der Optik, des Gerätebaus und bei vielen anderen für die Produktion materieller Güter entscheidenden Erscheinungen. Deshalb ist dieses Teilgebiet der Mathematik für alle hochentwickelten Industrieländer, also auch für die DDR, von großer Bedeutung.

Viertens schließlich haben die Ergebnisse der Analysis und der Funktionalanalysis stark auf die jüngste Entwicklung der theoretischen Grundlagen anderer Disziplinen wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Numerik, der Operationsforschung eingewirkt. Wenn auch, wie bereits erwähnt, zwischen den einzelnen Teilgebieten enge Wechselbeziehungen bestehen, so ist doch eine gewisse Pionierrolle der Analysis nicht zu verkennen.

Um die bisher getroffenen allgemeinen Feststellungen zu veranschaulichen und zu erhärten, soll nunmehr etwas tiefer in die mathematische Gedankenwelt eingedrungen werden. Freilich kann dies nur skizzenhaft und unvollständig geschehen, denn es ist in diesem Rahmen kaum möglich, mathematische Theorien exakt zu entwickeln oder gar das gesamte mathematische Gebäude begrifflich aufzubauen. Das ist aber auch gar nicht beabsichtigt.

Für das Ziel dieses Buches genügt es, neben den bereits genannten allgemeinen eine Reihe weiterer, spezieller Wesenszüge der Mathematik herauszuarbeiten und notwendige Resultate - gegebenenfalls unter Verzicht auf Beweise - zu nennen.

Dabei lässt sich die Benutzung von Symbolen, deren sich die Mathematiker zwecks einer gedrängten und übersichtlichen Darstellung in großer Zahl bedienen, nicht völlig vermeiden. Ebenso sind exakte Definitionen von Begriffen z.T. des täglichen Lebens notwendig, wie Menge, Element, Operator, Wahrscheinlichkeit, Information usw., um mögliche Unklarheiten in mathematischer Hinsicht grundsätzlich auszuschalten. Beides geschieht aber auch in der Absicht, den großen Nutzen und die Notwendigkeit eines solchen Vorgehens in Mathematik und Praxis zu zeigen.

Eine Anzahl von Beispielen soll das Verständnis erleichtern. Sie sind sehr einfach, aber so gewählt, dass sie das Wesentliche deutlich machen. Selbstverständlich werden alle Begriffe und Symbole an der Stelle, an der sie das erste Mal auftreten, erklärt.

Bei mannigfaltigen Erscheinungen der geschilderten Art wird durch eine bestimmte Gesetzmäßigkeit jedem Element einer Menge von Zahlen eindeutig wiederum eine Zahl zugeordnet. Dabei sollen hier unter Zahlen die aus dem täglichen Leben geläufigen reellen Zahlen und unter Mengen ganz allgemein Gesamtheiten von genau definierten Dingen (Elementen) verstanden werden.

Ein solcher gesetzmäßiger Zusammenhang besteht z.B. zwischen dem Alter eines Baumes und seiner Höhe, der jeweiligen Arbeitskräftezahl eines Betriebes und dem täglichen Produktionsausstoß sowie zwischen der Zeit und dem zurückgelegten Weg eines mit konstanter Kraft angetriebenen, anfahrenen Zuges.

Offenbar hat die Analyse solcher Probleme große volkswirtschaftliche Bedeutung. So kann im ersten Fall der günstigste Termin für das Schlagen eines Baumbestandes ermittelt werden, im zweiten ergeben sich Folgerungen für einen richtigen Arbeitskräfteeinsatz und im dritten wichtige technische Aussagen.

Um derartige Aufgabenstellungen einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, wird von der Vielfalt der in der Praxis möglichen konkreten Erscheinungen abstrahiert. Das Wesentliche bei allen diesen Problemen ist die eindeutige Zuordnung von reellen Zahlen zu eben solchen.

Wenn nun jedem Element  $t$  einer Menge  $X$  reeller Zahlen eindeutig eine reelle Zahl  $s$  zugeordnet ist, wobei alle diese Zahlen  $s$  eine Menge  $Y$  bilden sollen, dann heißt  $s$  eine Funktion von  $t$ ,  $X$  ihr Definitionsbereich und  $Y$  ihr Wertebereich.

Geschrieben wird dafür symbolisch:  $s = s(t)$  mit  $t \in X$  und  $s(t) \in Y$ , gelesen:  $s$  gleich  $s$  von  $t$  mit  $t$  Element von  $X$  und  $s(t)$  Element von  $Y$ . Die Größe  $t$  heißt unabhängige, die Größe  $s(t)$  abhängige Veränderliche (Variable). Hiermit ist der Begriff der Funktion definiert. Natürlich spielt die spezielle Wahl der Buchstaben dabei keine Rolle.

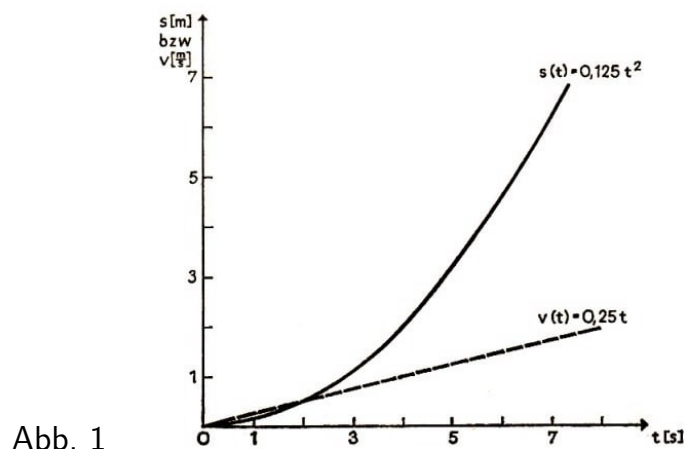


Abb. 1

Durch die eindeutige Zuordnung der Punkte einer Geraden (Zahlengerade) zu den reellen Zahlen und umgekehrt - man spricht auch von einer eineindeutigen Zuordnung - wird in vielen Fällen eine geometrische Darstellung von Funktionen möglich.

Zwei aufeinander senkrecht stehende Zahlengeraden (Achsen eines kartesischen Koordinatensystems) dienen zur Markierung der den Werten der unabhängigen Variablen zugeordneten Funktionswerte. Abb. 1 zeigt die Darstellungen von zwei Funktionen  $s = s(t)$  und  $v = v(t)$ .

Der Begriff der Funktion fand im 17. Jahrhundert starke Beachtung. Dadurch wurde eine neue Epoche in der mathematischen Forschung eingeleitet, die bis zum heutigen Tage reiche und bedeutende allgemeingültige Ergebnisse gebracht hat.

Mittels dieser Resultate kann deduktiv eine Vielfalt von Einzelproblemen des gesellschaftlichen Lebens erfasst und analysiert werden, wenn ihnen nur solche funktionalen Abhängigkeiten zugrunde liegen. Gerade darin aber spiegelt sich der Nutzen mathematischer Abstraktionen wider, wie er in der praktischen Arbeit ständig sichtbar wird.

Für die weiteren Betrachtungen genügt es, wenn der Definitionsbereich, also die Menge  $X$ , auf Gesamtheiten von reellen Zahlen zwischen zwei festen Grenzen  $t_1$  und  $t_2$  spezialisiert wird. Die unabhängige Variable  $t$  heißt dann stetig veränderlich im Intervall  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Wird z.B. die Höhe  $h(t)$  eines Baumes während des Zeitintervalls  $t_1 = 20$  Jahre und  $t_2 = 80$  Jahre betrachtet, so ist jedem Zeitpunkt  $t$  mit  $20 \leq t \leq 80$  eindeutig eine Höhe  $h(t)$  zugeordnet, d.h., das erste der oben genannten Beispiele ist von diesem Typ.

Entsprechendes gilt für das dritte, während im zweiten Fall, da die unabhängige Veränderliche Beschäftigtenzahlen repräsentiert, die Menge  $X$  lediglich aus natürlichen Zahlen  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) besteht.

Obwohl bei vielen praktischen Problemen die Zeit, die Temperatur, die Ortskoordinaten (Länge, Breite, Höhe) oder weitere Größen auftreten, die als stetige Variable aufgefasst werden können, deutet das zweite Beispiel an, wie nützlich und notwendig die allgemeine Fassung des Funktionsbegriffes ist, die sich nicht auf stetige Variablen beschränkt.

Vom praktischen Standpunkt aus gesehen, erhebt sich vor allen Dingen die Frage, wie solche funktionalen Zusammenhänge gefunden werden können. Eine Möglichkeit bietet das genaue Beobachten und Messen der abhängigen für bestimmte Werte der unabhängigen Variablen. In Tabelle 1 sind z.B. die Höhen  $h(t)$  eines Nadelbaumes für verschiedene Zeitpunkte  $t$  registriert. Durch Eintragen der Messwerte in ein Koordinatensystem ergibt sich eine erste Übersicht (Abb.2). Aus dieser versucht man dann einen mathematischen Ausdruck für die betreffende Funktion zu gewinnen.

Tabelle 1

t [Jahre]	20	25	30	40	50	60	65	70	75	80
h(t) [m]	8	10	15	21	28	30	33	34	36	38

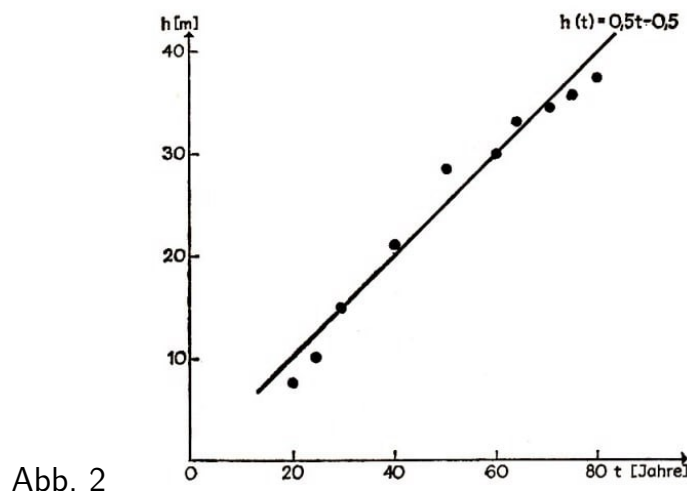


Abb. 2

Eine solche Aufgabe kann mittels der Ausgleichsrechnung gelöst werden. Von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) stammt die Methode, die Funktion so zu wählen, dass die Summe der Quadrate der Differenzen aus den Messwerten und den entsprechenden Funktionswerten ein Minimum ergibt.

In dem angeführten Beispiel liegt es nahe, eine lineare Funktion  $y = a + bt$  zu wählen. Damit müssen die Konstanten  $a$  und  $b$  so bestimmt werden, dass

$$[h_1 - (a + bt_1)]^2 + [h_2 - (a + bt_2)]^2 + \dots + [h_{10} - (a + bt_{10})]^2 = \text{Min}$$

wird. In Abb.2 genügt die eingezeichnete Gerade dieser Forderung, selbstverständlich wäre auch ein anderer Ausgleich möglich gewesen.

Dieses und ähnliche Verfahren bedingen jedoch, dass die Grundtendenz des funktionalen Zusammenhangs, im Beispiel die Linearität, bereits bekannt sein muss. Allerdings ist dies keine rein mathematische Angelegenheit mehr, sondern sie erfordert ein enges Zusammenwirken von Wissenschaftlern und Praktikern der verschiedenen jeweiligen Gebiete. Eine umfangreiche, verantwortungsvolle und gewissenhafte Arbeit ist notwendig, ehe etwa, um bei dem ersten Beispiel zu bleiben, eine mathematisch formulierte Gesetzmäßigkeit für bestimmte Umweltbedingungen gefunden ist, deren Analyse genügend genaue Auskunft über die Wachstumsverhältnisse von Nadelbäumen auch vor dem 20. und nach dem 80. Lebensjahr gibt.

Der Aufwand steigt natürlich bei komplizierteren Problemen in jeder Hinsicht ganz erheblich. Die Aufgabe des Modellierens, des Aufstellens sinnvoller, leistungsfähiger mathematischer Modelle wird für viele wichtige Erscheinungen der objektiven Realität zu einer immer zwingenderen Notwendigkeit.

Ergeben sich doch daraus eine Fülle von Erkenntnissen, die für die weitere Entwicklung der menschlichen Gesellschaft von ausschlaggebender Bedeutung sind.

Der aufmerksame Leser wird beim Studium dieses Beispiels eine Reihe von Lücken spüren. Er kann etwa fragen:

Ist das Wachstumsgesetz eines Baumes wirklich so vollständig determiniert, wie es die gefundene Funktion ausweist? Natürlich nicht.

Jeder weiß, wie viele Zufälle dabei eine Rolle spielen. Unterschiedliche Bodenverhältnisse, Witterungsbedingungen, Schädlingsbefall usw. lassen den Wachstumsvorgang als einen von mehr oder weniger vielen Zufälligkeiten abhängigen Prozess erscheinen. Auch fehlt für die Art des durchgeführten Ausgleichs mittels einer Geraden offenbar eine fundierte theoretische Erklärung.

Erscheinungen der objektiven Realität, bei denen "zufällige Größen" auftreten, lassen sich mathematisch mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfassen und behandeln, wie später noch erläutert wird. Hier sei lediglich bemerkt, dass der Begriff der zufälligen Größe eine Abstraktion ist, die in der Praxis meist nur in mehr oder weniger guter Näherung zutrifft, wie auch das Beispiel zeigt. Für viele Zwecke ist deshalb die geschilderte Art der Modellierung gerechtfertigt und völlig genügend.

Mit der mathematischen Formulierung einer Erscheinung ist jedoch im allgemeinen das Ergebnis selbst noch nicht gegeben, denn die Modelle bestehen häufig aus Beziehungen

zwischen gesuchten und bekannten Größen, aus denen die Lösung erst noch ermittelt werden muss.

Hier liegt neben der Modellierung das Hauptbetätigungsfeld des Mathematikers. Erfordert die Modellierung schon umfangreiches mathematisches Gedankengut, so stehen bei der weiteren Behandlung Existenz- und Eindeutigkeitsfragen der Lösung sowie praktische Lösungsverfahren im Mittelpunkt. Dieser Sachverhalt soll am Beispiel des mit konstanter Kraft anfahrenden Zuges näher erläutert werden.<sup>1</sup>

Nach einem Gesetz der Newtonschen Mechanik gilt für den Bewegungsvorgang: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, d.h.  $F_z = m \cdot a$ , wobei  $F_z$  die allein wirksame konstante Zugkraft,  $m$  die Masse des Zuges und  $a$  seine Beschleunigung bedeuten.

Es ist hier nicht angebracht, den langen und mühevollen Weg zu schildern, der zur Klärung althergebrachter Vorstellungen über Bewegungsvorgänge, besonders der Philosophenschule des Aristoteles, notwendig war.

Gestützt auf exakte naturwissenschaftliche Untersuchungen, mündete er in die grundlegenden Arbeiten des englischen Physikers und Mathematikers Isaac Newton (1643 bis 1727) über die Mechanik.

Es soll aber eindringlich darauf verwiesen werden, dass das Auffinden des oben angeführten Gesetzes bereits eine gewaltige wissenschaftliche Vorarbeit erforderte, die weit über das hinausgeht, was etwa das erste Beispiel in dieser Hinsicht verlangt.

In diesem Zusammenhang sei die in unserem Jahrhundert von Albert Einstein (1879-1955) begründete allgemeine relativistische Gravitationstheorie (Schwerkrafttheorie) erwähnt, um die enormen wissenschaftlichen Leistungen der Gegenwart vergleichsweise vor Augen zu führen.

Mit dieser Theorie werden die physikalischen Aspekte der Erkenntnis, dass Raum und Zeit die Existenzformen der Materie sind, aus der Analyse der physikalischen Gesetze hergeleitet und mathematisch formuliert. Zunächst waren das im wesentlichen theoretische Überlegungen, sie wurden jedoch im Rahmen der Weltraumforschung der letzten Jahre durch viele praktisch-experimentelle Untersuchungen ergänzt und bestätigt.

Zusammenhänge, die vorher als zufällig galten und theoretisch nicht erfassbar waren, konnten mittels der allgemeinen Relativitätstheorie als fundamentale Gesetze von Raum, Zeit und Materie erkannt werden.

Dass solche komplizierten Forschungen einen viel höheren Aufwand an mathematischem Gedankengut verlangen als unser einfaches Beispiel, versteht sich von selbst. Auf derart komplizierte Modellierungsprobleme kann hier natürlich nicht eingegangen werden.

Übrigens bestätigt die allgemeine Theorie, dass das Newtonsche Modell eine sehr gute Näherung darstellt, wenn die auftretenden Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind und wenn wegen der geringen Gravitationseinwirkungen der Raum annähernd euklidisch (Euklid um 350 v.u.Z.), d.h. der Raum unserer Anschauung ist. Dies trifft für irdische makroskopische Erscheinungen offenbar zu [1].<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Der Einfachheit halber erfolgt dabei ein gänzlicher Verzicht auf die Angabe von physikalischen Dimensionen bzw. Maßeinheiten im Text und in einigen Abbildungen.

<sup>2</sup>Die Zahlen in den eckigen Klammern weisen auf weiterführende Literatur hin, die zum vertiefenden

Um in dem angegebenen Beispiel die Zugkraft  $F_z$  in Beziehung zum Weg  $s(t)$  bringen zu können, ist die exakte Definition der physikalischen Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung erforderlich. Diese Aufgabe wirft sofort ein grundsätzliches mathematisches Problem auf.

Der einfachste Fall liegt offenbar vor, wenn ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Unter der Geschwindigkeit  $v = \text{const.}$  wird dann der Quotient aus zurückgelegtem Weg  $s$  und der dazu notwendigen Zeit  $t$ , also  $v = \frac{s}{t}$ , bzw.  $s(t) = v \cdot t$  verstanden, wobei der Bewegungsvorgang zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt (Abb. 3).

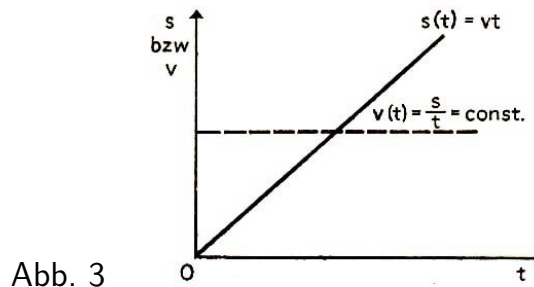


Abb. 3

Die Geschwindigkeit ist in diesem Fall konstant und die Beschleunigung gleich Null, d.h., auf den sich bewegenden Körper wirkt keine Kraft.

Werden dagegen in gleichen Zeiten unterschiedliche Wege zurückgelegt, so ist außer dem Weg  $s$  auch die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit, und der Quotient  $\frac{s}{t}$  gibt nur die Durchschnittsgeschwindigkeit während der Zeit  $t$  an. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit wird durch eine auf den Körper wirkende Kraft hervorgerufen.

Was aber soll man in einem solchen Fall exakt unter der Geschwindigkeit  $v(t_0)$  zu einem festen Zeitpunkt  $t = t_0$  verstehen ?

Offensichtlich ist diese sogenannte Momentangeschwindigkeit um so genauer zu bestimmen, je kleiner das betrachtete Zeitintervall  $\Delta t = t - t_0$  gewählt wird (Abb.4). Der Ausdruck

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

der die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall  $\Delta t$  (sprich Delta  $t$ ) verkörpert, heißt Differenzenquotient der Funktion  $s = s(t)$ .

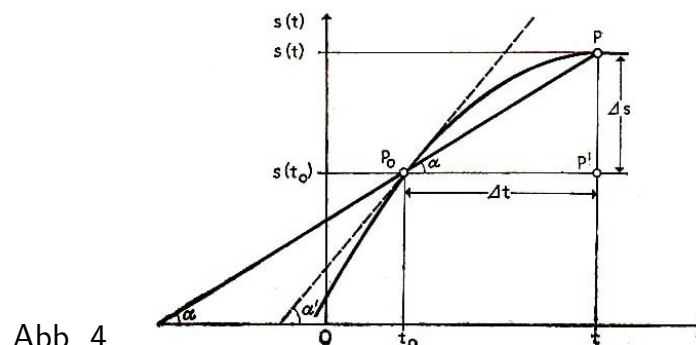


Abb. 4

Studium empfohlen wird.



Geometrisch bedeutet er das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete in dem rechtwinkligen Dreieck  $P_0P'P$ . Nach der Ähnlichkeitslehre ist dieses Verhältnis für alle ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke konstant.

Man bezeichnet es deshalb als den Anstieg der durch die Kurvenpunkte  $P_0$  und  $P$  gehenden Sekante bzw. mit  $\tan \alpha$  (Tangens  $\alpha$ ), also  $\tan \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

Bei ständiger Verkleinerung von  $\Delta t$  in der Weise, dass sich der Wert  $t$  dem Wert  $t_0$  immer mehr nähert, wandert der Punkt  $P$  in den Punkt  $P_0$ , und die Sekante geht in die Kurventangente im Punkte  $P_0$  über.

Es liegt daher nahe, diesen Grenzwert, falls er für jede beliebige Annäherung von  $t$  an  $t_0$  existiert und immer denselben Wert ergibt, als Momentangeschwindigkeit  $v(t_0)$  zu definieren. Man schreibt dafür

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|_{t=t_0} = \dot{s}(t_0)$$

und liest: limes Delta  $t$  gegen Null von Delta  $s$  durch Delta  $t$  an der Stelle  $t = t_0$  ist gleich  $s$  Punkt von  $t_0$ .

Die Größe  $\dot{s}(t_0)$ , die dem Anstieg  $\tan \alpha'$  der Tangente im Punkt  $P_0$  an die Kurve entspricht, heißt der erste Differentialquotient oder auch die erste Ableitung der Funktion  $s = s(t)$  an der Stelle  $t_0$ .

Existiert diese Ableitung für jeden Wert  $t$  eines Intervalle  $[t_1, t_2]$ , so wird die Funktion dort differenzierbar genannt. Das bedeutet geometrisch, dass in jedem zugehörigen Kurvenpunkt die Tangente eindeutig festliegt.

Ist auch die Funktion  $\dot{s}(t) = v(t)$  im gleichen Intervall differenzierbar, so kann die Beschleunigung (Änderung der Geschwindigkeit) als erste Ableitung  $\dot{v}(t)$  der Geschwindigkeit nach der Zeit  $t$  oder als zweite Ableitung  $\ddot{s}(t)$  (gelesen:  $s$  zwei Punkt von  $t$ ) des Weges nach der Zeit definiert werden.

Unter Verwendung dieser Begriffe ergibt sich für derartige Bewegungsvorgänge ganz allgemein  $F = m(v)$  bzw.  $F = m(\ddot{s})$ . Eine solche Gleichung heißt Differentialgleichung, weil darin die gesuchte Funktion  $v = v(t)$  bzw.  $s = s(t)$  differenziert auftritt.

Im betrachteten Beispiel ist  $m\ddot{t} = F_z$ . Dazu muss noch angegeben werden, welcher Weg  $s(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , also zu Beginn der Betrachtung des Vorganges, bereits zurückgelegt war und welche Anfangsgeschwindigkeit  $v(0)$  der Zug hatte.

Wird beispielsweise  $s(0) = 0$  und  $v(0) = 0$  gewählt (anfahrender Zug), so liegt in der Differentialgleichung  $m(t) = F_z$  mit den genannten Anfangsbedingungen das Modell der Erscheinung des anfahrens Zuges vor.

Die bisherigen Betrachtungen verdeutlichen die grundsätzliche und umfangreiche Problematik, mit der die anfangs zunächst so harmlos anmutende Aufgabe, funktionale Zusammenhänge mathematisch zu erfassen und zu analysieren, verknüpft ist.

Wer dies bei den angegebenen einfachen Beispielen wirklich einmal durchführt, wird ermessen können, was es heißt, mit wissenschaftlicher Gründlichkeit die vielen komplizierten Erscheinungen in Natur, Technik und Gesellschaft, die einer mathematischen Behandlung zugänglich sind, sinnvoll zu modellieren und weiterzubearbeiten.

Man spürt dabei aber auch, welchen großen Nutzen eine solche Mathematisierung für die Gesellschaft bringt.

Wie schon hervorgehoben, ist bei der mathematischen Modellierung der vielfältigen und komplizierten Probleme der Praxis eine enge Zusammenarbeit zwischen Spezialisten der verschiedensten einschlägigen Gebiete, wie Facharbeitern, Technikern, Ingenieuren, Gesellschafts- und Naturwissenschaftlern, unerlässlich.

Ein die Realität gut widerspiegelndes Modell hat eine breite, gediegene Erforschung der zu erfassenden Erscheinungen und der entsprechenden Gesamtzusammenhänge sowie umfangreiche praktische Erfahrungen und Fertigkeiten zur Voraussetzung. Das stellt hohe, nur im Kollektiv optimal zu erfüllende Anforderungen an alle Beteiligten.

Weiterhin macht die als Beispiel gewählte Bewegungsaufgabe deutlich, dass bei der mathematischen Modellierung von Erscheinungen und der damit verbundenen Notwendigkeit, Begriffe (wie hier Geschwindigkeit und Beschleunigung) exakt zu definieren, Ideen hervorgebracht werden, die nicht selten zur Entwicklung ganzer mathematischer Teilgebiete anregen.

So entstand aus der Newtonschen Fragestellung die Differentialrechnung, die alle mit dem Begriff des Differentialquotienten zusammenhängenden Probleme enthält. Ein anderes Beispiel dafür ist die erwähnte Ausgleichsrechnung.

Gegenwärtig tritt diese Entwicklung auf Grund der vielen Anforderungen, die der wissenschaftlich-technische Fortschritt an die Mathematik stellt, immer mehr hervor. So sind viele neue Spezialdisziplinen, wie die Informationstheorie und die Optimierungstheorie, erst auf diese Weise in jüngster Zeit entstanden.

Schließlich regt auch die Analyse der gewonnenen Modelle zur Entwicklung bzw. Weiterentwicklung mathematischer Disziplinen an. So erforderte z.B. das Auftreten von Differentialgleichungen eine allgemeine Theorie. Dazu war die Einführung der unbestimmten Integration nötig, die der Differentiation entgegengesetzte Operation.

Hierbei werden, ausgehend von einer im Intervall  $[t_1, t_2]$  gegebenen Ableitung  $f(t)$ , alle Funktionen  $F(t)$  bestimmt, die differenziert  $f(t)$  ergeben. Symbolisch wird dafür  $\int f(t)dt$  geschrieben und gelesen: Integral  $f$  von  $t$   $dt$ .

Eine Funktion  $F(t)$  mit der Eigenschaft  $\dot{F}(t) = f(t)$  heißt Stammfunktion zu  $f(t)$ . Ganz allgemein gilt  $\int f(t)dt = F(t) + C$ , da gezeigt werden kann, dass sich zwei beliebige Stammfunktionen zur gleichen Funktion  $f(t)$  nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden.

In der obigen Gleichung bedeutet somit  $F(t)$  irgendeine spezielle Stammfunktion zu  $f(t)$  und  $C$  eine beliebige Konstante.

Mit Hilfe der Differentialrechnung, der Integralrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen kann nunmehr das im angegebenen Beispiel gesuchte Weg-Zeit-Gesetz ermittelt werden, denn es existiert in diesem Fall eine eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe.

Zunächst folgt aus der Gleichung  $\ddot{s} = \dot{v} = \frac{F_z}{m}$  die Beziehung

$$v = \int \dot{v} dt = \frac{F_z}{m} t + C$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = 0$  sein sollte, wird  $v(t) = \frac{F_z}{m} t$ . Nochmalige Integration liefert unter Beachtung des Anfangswertes  $s(0) = 0$  die gesuchte Lösung

$$s(t) = \frac{F_z}{2m} t^2$$

Diese ist zusammen mit  $v(t)$  in Abb. I für einen festen Wert von  $\frac{F_z}{m}$  dargestellt.

Bei der Auswertung solcher Ergebnisse erhebt sich noch eine grundsätzliche mathematische Frage von größtem praktischem Interesse, die, grob gesprochen, so formuliert werden kann:

"Mit welcher Güte spiegelt bei bekannter Güte des Modells die gefundene Lösung die Realität wider?"

Eine aufmerksame Betrachtung der Beispiele ergibt, dass die mathematische Formulierung offenbar ideale Bedingungen in verschiedener Hinsicht verlangt. So muss z.B. für die eben gelöste Aufgabe die strenge Gültigkeit der Newtonschen Mechanik gefordert werden und damit ein ganz bestimmter Bewegungsvorgang ablaufen. Ferner sind die genaue Kenntnis der Beschleunigung  $a$  und die exakte Einhaltung der Anfangsbedingungen notwendig.

Alle diese Voraussetzungen sind natürlich nur bis zu einem gewissen Grade erfüllbar, d.h., das Modell entspricht nur näherungsweise der tatsächlichen Erscheinung.

Deshalb kann von der Lösung auch nicht mehr erwartet werden, als ihr auf Grund dieser Gegebenheiten zukommt. Soll aber die mathematische Behandlung praktischer Probleme überhaupt sinnvoll sein, so muss mit der Güte des Modells die Güte der Lösung steigen.

Mathematisch ausgedrückt darf eine kleine Änderung der Eingangsdaten (Anfangswerte, Koeffizienten in der Differentialgleichung usw.) auch nur eine kleine Änderung der Lösung zur Folge haben. Die Lösung muss also stetig von den Eingangsdaten abhängen.

Die Gültigkeit dieser Forderung ist keinesfalls selbstverständlich, sie macht vielmehr umfangreiche und tiefgehende mathematische Untersuchungen erforderlich. Zum Glück wurden dabei bisher noch keine praktischen Probleme gefunden, bei deren sinnvoller Modellierung entsprechende Unstetigkeiten aufgetreten wären.

Andernfalls erschiene die Anwendung der Mathematik zumindest sehr fraglich, weil doch bei der Modellierung fast immer idealisierte Annahmen gemacht werden müssen.

Anders liegen die Dinge bei einigen mathematischen Aufgabenstellungen. Hier kann es auch durchaus unstetige Abhängigkeiten geben.

Ein letzter Blick auf das Bewegungsproblem soll zur Erläuterung des eben Gesagten

dienen. Es ist leicht einzusehen, dass ein solcher Bewegungsvorgang, wie er in Abb. I veranschaulicht ist, durch einen Zug nicht realisiert werden kann.

Das Modell lässt die wichtige Tatsache des Auftretens von Reibungskräften unberücksichtigt, spiegelt also die objektive Realität nur ungenügend wider, was folglich auch für die Lösung gilt.

Dagegen führt jeder in einem leeren Raum in Erdnähe frei fallende Körper eine solche Bewegung aus, wobei  $a = g$  die Erdbeschleunigung ist. Diese Gesetze des freien Falls entdeckte bereits Galileo Galilei (1564-1642).

Im Modell blieben die Reibungskräfte unbeachtet. Das Anfahren eines Zuges wird aber erst durch ihre Existenz ermöglicht, und sie sind auch für den gesamten Bewegungsvorgang mit ausschlaggebend. Sie dürfen unter bestimmten Bedingungen in guter Näherung als geschwindigkeitsproportional und der Zugkraft entgegengerichtet angenommen werden.

Daraus folgt unter sonst gleichen Bedingungen wie oben die Anfangswertaufgabe

$$m\ddot{s} + k\dot{s} = F_z \quad ; \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 0$$

mit der Lösung

$$s(t) = \frac{F_z m}{k^2} \left( e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}t - 1 \right)$$

und der Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{F_z}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

Beide Funktionen sind in Abb. 5 dargestellt, wobei  $e \approx 2,718$  die Eulersche Konstante ist und für  $\frac{k}{m}$  und  $\frac{F_z}{m}$  feste Werte gewählt wurden.

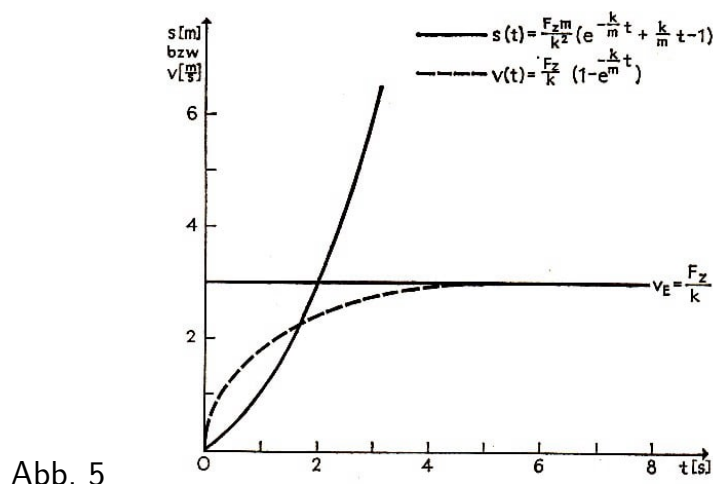


Abb. 5

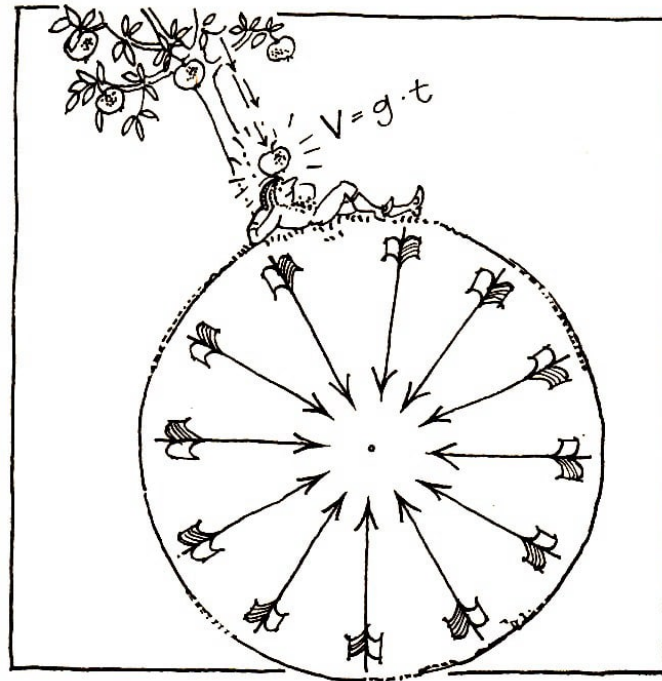
Danach strebt die Geschwindigkeit asymptotisch einer konstanten Endgeschwindigkeit  $v_E$  zu, und bald nach dem Anfahren werden in gleichen Zeiten annähernd gleiche Wege zurückgelegt. Dieses qualitative Ergebnis wird von der Praxis bestätigt.

Nach einer genügend genauen Ermittlung des Proportionalitätsfaktors  $k$ , der Masse  $m$  und der Zugkraft  $F_z$  ergeben sich auch quantitativ brauchbare Aussagen. Die Lösung zeigt, dass sie durch eine geringfügige Abänderung der Konstanten  $k$ ,  $m$  und  $F_z$  auch

nur wenig beeinflusst wird.

Das bedeutet die stetige Abhängigkeit des Ergebnisses von den Eingangsgrößen, und damit wird der bereits geschilderte wichtige Fakt am konkreten Beispiel erhärtet.

## 4 Von der Praxis zur abstrakten Theorie ...



Die im Zusammenhang mit der Beschreibung von Bewegungsvorgängen dargelegten mathematischen Ideen drängen zu weiterer Abstraktion. Nach den bisherigen Überlegungen ist zu erwarten, dass eine möglichst allgemeine und geschlossene Theorie die Voraussetzungen für die deduktive Behandlung vieler verschiedener Einzelercheinungen schafft.

Diese Theorie ist die klassische Analysis. Die darauf aufbauende Funktionalanalysis geht schließlich noch einen ganz erheblichen Schritt weiter.

Die Analysis ist theoretisch sehr gründlich durchforscht, nicht zuletzt wegen ihrer vielfältigen Anwendungen. Sie beschäftigt sich mit dem Studium des Begriffes der Funktion einer reellen Veränderlichen und den Eigenschaften solcher Funktionen wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität.

Im weiteren Sinne zählen zu ihr auch solche Gebiete wie die Theorie der Differentialgleichungen, der Integralgleichungen (die gesuchte Funktion tritt unter dem Integralzeichen auf), der Integrodifferentialgleichungen (die gesuchte Funktion tritt differenziert und unter dem Integralzeichen auf).

Das Kernstück bildet aber die Differential- und Integralrechnung, als deren Schöpfer neben Newton der deutsche Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) gilt. Beide Wissenschaftler entdeckten die Infinitesimalrechnung fast gleichzeitig.

Im Gegensatz zu Newton ging Leibniz aus von dem geometrischen Problem der Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkt  $P$  an eine gegebene Kurve und den damit im Zusammenhang stehenden Fragen, z.B. der nach den relativen Extremwerten einer Funktion. Auf diesen Aspekt wurde im vorigen Kapitel bereits eingegangen.

Von fundamentaler Bedeutung für die Infinitesimalrechnung und in verallgemeinerter Form auch für die moderne Funktionalanalysis ist der Begriff des Grenzwertes einer unendlichen Zahlenfolge. Unter einer solchen Folge versteht man eine Anordnung reeller Zahlen  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots = \{t_n\}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ , so dass deren jeweiliger Platz eindeutig bestimmt ist.

Das Element  $t_n$  heißt allgemeines Glied der Folge.

Als Beispiel sei die Folge

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

genannt. Eine Folge  $\{t_n\}$  heißt konvergent mit dem Grenzwert  $t_0$ , wenn die Differenz zwischen diesem Wert  $t_0$  und allen ihren Gliedern mit hinreichend großem Index  $n$  dem Betrage nach (d.h. der Abstand !) beliebig klein gemacht werden kann.

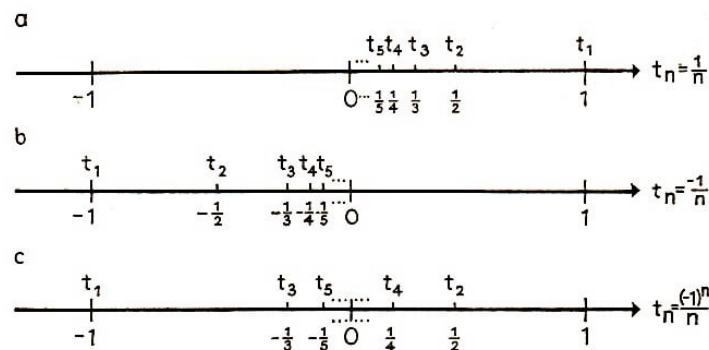


Abb. 6

Diese Definition verlangt offenbar, dass sich die Glieder der Folge mit wachsendem  $n$  unumschränkt an den Grenzwert  $t_0$  annähern, weshalb auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$  geschrieben und "limes von  $t_n$  für  $n$  gegen unendlich gleich  $t_0$ " gelesen wird.

Für das gegebene Beispiel (Abb. 6a) ergibt sich sofort  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Dass auch andere Formen der Annäherung an den Grenzwert, den im allgemeinen kein Glied der Folge annimmt, möglich sind, zeigen die Folgen  $\{-\frac{1}{n}\}$  und  $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$  (Abb. 6b, c), deren Grenzwerte ebenfalls gleich Null sind.

Unendliche Folgen, die keinen Grenzwert besitzen (z.B.  $\{(-1)^n\} = -1, +1, -1, +1, \dots$  und  $\{n\} = 1, 2, 3, \dots$ ), heißen divergent.

Das Interessante dabei ist die mathematische Abstraktion, die nicht nur solche Begriffe wie "unendlich klein" und "unendlich groß" (infinitäre Eigenschaften einer Folge) exakt erfasst, sondern die gleichzeitig den Schlüssel darstellt zu einer allgemeinen Theorie, also dem gewünschten deduktiven System.

In dieser Verallgemeinerung erscheint der Differentialquotient als spezieller Grenzwert, d.h., es wird weit mehr erfasst, als der ursprüngliche Ausgangspunkt verlangte. Dieser Sachverhalt ist, wie eingangs bereits erwähnt, besonders für die moderne Mathematik kennzeichnend. Deshalb soll er hier noch etwas verfolgt und die Theorie gleichzeitig weiter ausgebaut werden.

Um zunächst eine exakte Definition der Stetigkeit einer im Intervall  $[t_1, t_2]$  erklären

Funktion  $y = f(t)$  zu geben, betrachtet man die Gesamtheit aller möglichen Folgen  $\{t_n\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$  und  $t_0, t : n \in [t_1, t_2]$ .

Diesen Folgen sind durch  $y = f(t)$  in eindeutiger Weise Zahlenfolgen  $\{f(t_n)\}$  zugeordnet. Konvergieren alle diese Zahlenfolgen  $\{f(t_n)\}$  gegen ein und denselben Grenzwert  $f(t_0)$ , so heißt die Funktion für  $t = t_0$  stetig, andernfalls unstetig.

Gilt dieser Sachverhalt für jeden beliebigen Wert  $t_0 \in [t_1, t_2]$ , so heißt die Funktion im ganzen Intervall stetig.

Die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle  $t_0$  bedeutet also in Übereinstimmung mit dem früher Gesagten, dass sich die Funktionswerte  $f(t)$  um so weniger von  $f(t_0)$  unterscheiden, je näher  $t$  an  $t_0$  heranrückt.

In dieser Tatsache liegt auch die praktische Bedeutung der Stetigkeit begründet. Beispielsweise soll ein Kupplungsvorgang zwischen Motor und Getriebe (Auto) stetig erfolgen, der Kühlvorgang eines aus der Schmelze erstarrten Körpers soll bezüglich der Zeit stetig sein, um Wärmespannungen entgegenzuwirken, usw.

Die in Abb. 1 und 3 dargestellten Funktionen sind stetig, während Abb. 7 eine für  $t = -2$  und eine für  $t = 3$  unstetige Funktion zeigt.

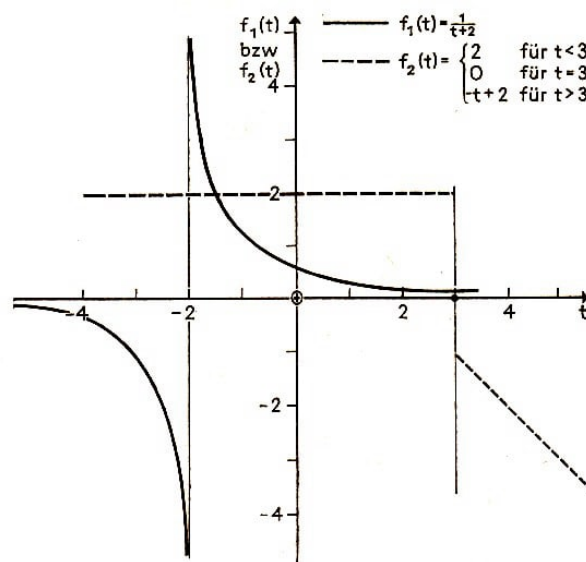


Abb. 7

Ganz analog der Stetigkeit kann auch der Differentialquotient definiert werden. Hier sind den Folgen  $\{t_n\}$  lediglich an Stelle der Zahlenfolgen  $\{f(t_n)\}$  die Folgen der Differenzenquotienten

$$\left\{ \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \right\}$$

zuzuordnen. Streben diese für  $n \rightarrow \infty$  alle demselben Grenzwert  $f'(t_0)$  zu, so heißt  $f(t)$  in  $t = t_0$  differenzierbar und

$$f'(t_0) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0}$$

der Differentialquotient oder die Ableitung an der Stelle  $t = t_0$ . Die hier gebrauchte Symbolik geht auf Leibniz zurück. Gelesen wird dafür:  $f$  Strich von  $t_0$  gleich  $df$  nach  $dt$  an der Stelle  $t = t_0$ .



Existiert die Ableitung für jedes beliebige  $t_0 \in [t_1, t_2]$ , so heißt  $f(t)$  im ganzen Intervall differenzierbar. Die Funktionen in Abb. 1 und 3 sind nicht nur stetig, sondern sogar differenzierbar.

Ist die Ableitung  $f'(t)$  einer Funktion  $f(t)$  wiederum differenzierbar, so kann die zweite Ableitung  $f''(t)$  und, nach entsprechender Voraussetzung, ganz allgemein die  $n$ -te Ableitung

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}$$

(sprich:  $f$   $n$ -mal gestrichen von  $t$  gleich  $d - n - f$  nach  $dt$  hoch  $n$ ) auf gleiche Weise gebildet werden. Offensichtlich behalten alle früher getroffenen diesbezüglichen Feststellungen auch jetzt ihre volle Gültigkeit, jedoch ist die enge Bindung an eine physikalische bzw. geometrische Vorstellung entfallen, und damit wird der Kalkül universell einsetzbar.

Auch die Betrachtung von Summen der Art

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(sprich: Summe  $a_n$  von  $n$  gleich eins bis unendlich) mit unendlich vielen Summanden führt auf den Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge. Will man nämlich eine sinnvolle Definition der Summe einer solchen "unendlichen Reihe" geben, liegt es nahe, von der Folge  $\{s_n\}$  der Partialsummen auszugehen mit

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \dots \end{aligned}$$

Strebt diese für  $n \rightarrow \infty$  einem Grenzwert  $S$  zu, so heißt die Reihe konvergent mit der Summe  $S$ , andernfalls wird sie divergent genannt.

Neben den Reihen mit konstanten Gliedern können auch Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ , deren Glieder im Intervall  $[t_1, t_2]$  definierte Funktionen  $f_n(t)$  sind, untersucht werden. Sinngemäß ist hierfür die Konvergenz an einer Stelle  $t = t_0$  bzw. in einem Intervall erklärt.

Große praktische Bedeutung haben vor allen Dingen die Funktionenreihen. Sie treten z.B. auf bei der Analyse von mechanischen und elektromagnetischen Schwingungsproblemen, bei Elastizitäts- und Plastizitätsuntersuchungen und bei der Behandlung von Wärmeleitvorgängen.

Oft bietet die Verwendung unendlicher Reihen bei Näherungsverfahren sowie zur näherungsweise Darstellung komplizierter Funktionen durch einfachere große praktische Vorteile. Zum Beispiel kann die in den Bewegungsgesetzen des anfahrenen Zuges

auftretende Funktion  $f(x) = e^x$  mit  $x = -\frac{k}{m}t$  in die Potenzreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  und  $0! = 1$ ) entwickelt werden, die für alle endlichen Werte von  $x$  konvergiert.

Für  $x = 1$  kann daraus die Größe  $e$  beliebig genau berechnet werden. Ferner gestattet diese Reihe, die Funktion  $e^x$  durch eine ganzrationale Funktion  $k$ -ter Ordnung

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

anzunähern und den dabei auftretenden Fehler abzuschätzen.

Ein weiteres Problem, das auf Grenzwertbetrachtung führt, ist die Berechnung des Inhaltes krummlinig umrandeter Flächenstücke. Ist ein solches Flächenstück von der Kurve  $y = f(t) \geq 0$ , den beiden Stützgeraden  $t = a$  und  $t = b$  sowie der  $t$ -Achse begrenzt (Abb.8), so kann sein Flächeninhalt näherungsweise durch eine Summe der Form

$$F_a^b \approx \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(\tau_k)$$

berechnet werden.

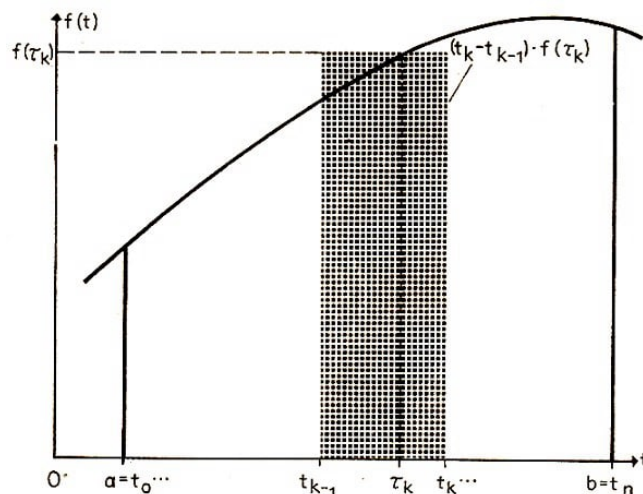


Abb. 8

Geometrisch stellt dieser Ausdruck die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke dar, die durch Aufteilung des Intervalls  $[a, b]$  in  $n$  Teile entstehen, indem man  $n$  Zwischenwerte  $t_k$  mit  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$  wählt und danach in jedem dieser Teilintervalle eine Stützstelle  $\tau_k$  mit  $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ .

Wird nun die an sich beliebige Einteilung des Intervalls  $[a, b]$  in Teilintervalle immer mehr verfeinert, so dass mit wachsendem  $n$  die Länge des längsten Teilintervalls gegen Null geht, und ist der auf diese Weise gebildete Grenzwert sowohl von der getroffenen Einteilung als auch von der Wahl der Stützstellen  $\tau_k$  unabhängig, so existiert der

Flächeninhalt, und der Grenzwert heißt das bestimmte Integral von  $f(t)$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$ . Man schreibt dafür:

$$F_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(\tau_k) = \int_a^b f(t) dt$$

wobei der Grenzwert im dargelegten Sinne zu verstehen ist. Das Integralzeichen stellt in Anlehnung an das Summenzeichen ein stilisiertes  $S$  dar.

Die Werte  $a$  und  $b$  heißen untere bzw. obere Grenze des bestimmten Integrals. Natürlich kann man auch hier die Anschauung völlig ausschalten und das bestimmte Integral ausschließlich mit Hilfe des Begriffs der Zahlenfolge definieren.

Es ist zu erwarten, dass die soeben gegebene Riemannsche Definition des Integralbegriffs (Bernhard Riemann 1826-1866) mit dem schon vorher angeführten unbestimmten Integral zusammenhängt. In der Tat ergibt sich, wenn man das Riemannsche Integral als Funktion einer seiner Grenzen (hier der oberen) auffasst,

$$\int_a^t f(\tau) d\tau = \int f(t) dt = F(t) + C$$

mit  $C = -F(a)$  und  $\tau$  als der Integrationsvariablen.

Für  $t = b$  folgt daraus

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = F(b) - F(a)$$

und dieses Ergebnis ermöglicht demnach die Berechnung der bestimmten Integrale mit Hilfe der entsprechenden unbestimmten.

Bereits die Riemannsche Definition des Integralbegriffs lässt erkennen, dass die Integralrechnung eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten bietet.

Neben Flächeninhalten können mit ihrer Hilfe Volumina, Bogenlängen, Schwerpunkte, Momente usw. ermittelt werden.

Das Gedankengut der klassischen Analysis, wie es sich heute präsentiert, ist das Ergebnis eines mehrere Jahrhunderte andauernden Prozesses. Während dieser Zeit entstanden, besonders in der letzten Entwicklungsphase (19. und Anfang 20. Jahrhundert), eine Vielzahl neuartiger Ideen.

Hierher gehören der Schritt vom drei- zum  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, erste Ansätze zur Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes (z.B. die Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlicher und die Theorie der komplexen Funktionen), die Begründung der Mengenlehre durch Georg Cantor (1845-1918), die Lebesguesche Maß- und Integrationstheorie (Henri- Léon Lebesgue 1875-1941) und noch eine Reihe weiterer wichtiger Ergebnisse wie die Einführung der modernen axiomatisch-konstruktiven Methoden, ausgehend von den Hilbertschen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie und der algebraischen Theorie der Körper von Ernst Steinitz (1871-1928).

Diese Ergebnisse führten in den letzten Jahrzehnten u.a. zur Entstehung einer neuen

Disziplin, der Funktionalanalysis, die sich in der Folgezeit rasch entwickelte. Sie galt zunächst als äußerst abstrakt, wurde aber in den letzten Jahren derart praxiswirksam, dass sie heute in aller Munde ist.

Worum geht es dabei ? Viele Ergebnisse der klassischen Theorie legen die Vermutung nahe, dass sie noch wesentlich verallgemeinert werden können, d.h. eine noch weitaus höhere Stufe der Abstraktion zulassen.

Zur Erläuterung dieses Sachverhalts soll vor allem wieder der Funktionsbegriff betrachtet werden. Aus der anfangs gegebenen Definition erkennt man unmittelbar, dass es weder erforderlich ist noch gerechtfertigt scheint, sich bei der Zuordnung zwischen den Elementen der betrachteten Mengen auf reelle Zahlen zu beschränken, denn nicht selten treten in der Praxis funktionale Zusammenhänge im gleichen Sinne auch zwischen Elementen anderer Art auf. Durch die Integration

$$\int_a^t x(\tau) d\tau = y(t)$$

wird z.B. jeder für  $a \leq t \leq b$  stetigen Funktion  $x(t)$  eine andere Funktion  $y(t)$ , die sogar differenzierbar ist, zugeordnet.

Auch das folgende Problem ist von allgemeiner Art. Das bestimmte Integral  $\int_{-a}^a f(t) dt$  ordnet einer im Intervall  $[-a, a]$  stetigen Funktion  $f(t) \geq 0$  eine reelle Zahl zu, die als Flächeninhalt gedeutet werden kann.

Bei fest vorgegebener Bogenlänge  $s$  der Funktionskurve von  $f(t)$  sowie der weiteren Forderung, als Integranden nur solche Funktionen zuzulassen, die für  $t = -a$  und  $t = a$  Nullstellen haben, kann z.B. nach derjenigen Funktion gefragt werden, für die das bestimmte Integral den größten Wert ergibt, d.h., deren Kurve den größten Flächeninhalt begrenzt.

Dieses Extremalproblem ist eine typische Fragestellung der Variationsrechnung. Aus Abb.9 ist die Lösung (Halbkreis) für  $s = a\pi$  ersichtlich. Zum Vergleich sind noch zwei weitere Funktionen  $f(t)$  dargestellt, die ebenfalls den gegebenen Voraussetzungen genügen.

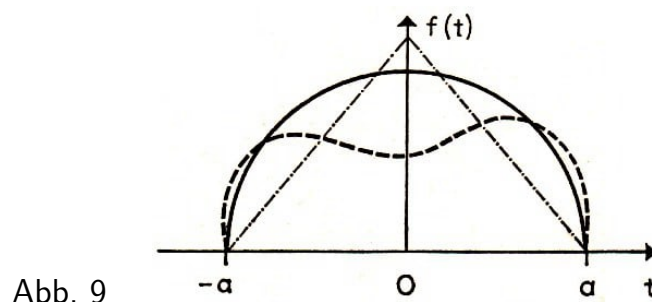


Abb. 9

Sehr häufig treten funktionale Zusammenhänge auf, bei denen nicht eine, sondern  $n$  unabhängige Variablen vorliegen. In einem solchen Fall ist dann jedem  $n$ -Tupel reeller Zahlen eine bestimmte reelle Zahl zugeordnet.

Diese  $n$ -Tupel deutet man geometrisch als Punkte eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes. Beispielsweise ist die Temperatur  $T$  eines festen Körpers, der in einem Medium gekühlt wird, im allgemeinen von den drei Ortskoordinaten  $x, y, z$  und der Zeit  $t$  abhängig,  $T = T(x, y, z, t)$  (Abb.10).

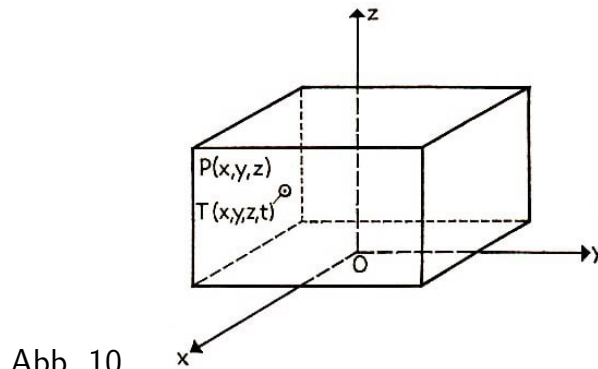


Abb. 10

Weiter kann eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung als Funktion der  $n$  Ableitungen  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , der gesuchten Funktion  $y(x)$  und der unabhängigen Veränderlichen  $x$ , also

$$\Phi = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

aufgefasst werden. Die Bezeichnung "gewöhnliche" Differentialgleichung rührt übrigens daher, dass die gesuchte Funktion nur von einer unabhängigen Variablen an abhängt. Die klassische Analysis beschränkt sich aber nicht darauf, sondern sie bewältigt bereits den Fall mehrerer unabhängiger Variablen, indem sie darauf insbesondere die Ergebnisse der Differential- und Integralrechnung überträgt.

Das gleiche gilt für die Erweiterung des Systems der reellen zum System der komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen haben die Form  $z = x + iy$  mit  $x, y$  reell und  $i^2 = -1$ . Ihre Einführung wird notwendig, wenn das Radizieren unumschränkt; also auch im Falle negativer reeller Zahlen, ausführbar sein soll.

Unter Zugrundelegung der Menge der komplexen Zahlen kann man beweisen, dass die algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

genau  $n$  Wurzeln (Lösungen) hat.

Auf der Grundlage der hier angegebenen Verallgemeinerungen und Erweiterungen entstanden u.a. die Begriffe der partiellen Ableitung und des mehrfachen Integrals, das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen sowie die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Die Ergebnisse dieser Teilgebiete der Mathematik haben eine breite Anwendung, besonders im naturwissenschaftlich-technischen Bereich, erlangt.

Um nun das eigentliche Anliegen, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern, weiter zu verfolgen, sollen nunmehr  $X$  und  $Y$  zwei Mengen mit beliebigen Elementen (Funktionen,  $n$ -Tupel reeller Zahlen, komplexe Zahlen usw.) sein. Daraus bildet man die

Menge  $M$  aller möglichen geordneten Paare  $(m, \mu)$  mit  $m \in X$  und  $\mu \in Y$ , die mit  $M = X \times Y$  bezeichnet wird.

Jede beliebige Teilmenge von  $M$  heißt Abbildung aus der Menge  $X$  in die Menge  $Y$ , das Element  $\mu$  heißt das Bild des Elements  $m$  und  $m$  selbst das Urbild.

Sind die geordneten Paare der betrachteten Teilmenge in der ersten Stelle eindeutig, d.h., tritt jedes Urbild nur einmal auf, so nennt man die Abbildung einen Operator.

Offenbar erfasst diese mengentheoretische Definition die eindeutige Zuordnung der Elemente  $\mu$  zu den Elementen  $m$  im Sinne des Funktionsbegriffes.

Die Menge  $D$  aller Elemente  $m$ , für die der Operator erklärt ist, heißt sein Definitionsbereich, und es gilt  $D \subseteq X$ . (Das Symbol  $\subset$  ist ein Inklusionszeichen und wird gelesen: enthalten in.)

Entsprechend wird die Menge  $W \subseteq Y$  aller Bilder  $\mu$  sein Wertebereich genannt.

Insbesondere spricht man von einem "Operator von  $X$  auf  $Y$ ", wenn er für alle  $m \in X$  erklärt ist und alle  $\mu \in Y$  Bilder sind, d.h., wenn  $D = X$  und  $W = Y$  ist.

Operatoren mit reellem bzw. komplexem Wertebereich heißen Funktionale.

So ist z.B. der früher betrachtete Ausdruck  $\int_a^t x(\tau) d\tau = y(t)$  ein Operator, während

$\int_{-a}^a f(t) dt = c(f)$  ein Funktional für die Menge der im Intervall  $[-a, a]$  stetigen Funktionen  $f(t) \geq 0$  ist.

Mit der Definition des Operators ist nicht nur eine höhere Abstraktionsstufe erreicht, sondern es können nunmehr auch viele theoretische und praktische Probleme - wie etwa die bereits erwähnten Variationsprobleme, Integralgleichungen u.a.m. - einer besseren und vor allem einheitlichen mathematischen Behandlung zugänglich gemacht werden, wenn außerdem der Begriff des Raumes in entsprechender Weise verallgemeinert wird. Somit stützt sich die Funktionalanalysis u.a. auf die wichtigen Begriffe des Operators und des abstrakten Raumes.

Unter einem abstrakten Raum versteht man eine Menge  $X$  von beliebigen Elementen (Zahlen,  $n$ -Tupel von Zahlen, Funktionen, Folgen usw.), für die verschiedene Gesetzmäßigkeiten (algebraische Operationen, Ordnungs- und Abstandsrelationen usw.) gelten. Diese sind im allgemeinen dem dreidimensionalen euklidischen Raum entlehnt.

So heißt z.B. eine Menge  $X = \{x, y, z, \dots\}$  ein metrischer Raum, wenn für ihre Elemente (in Abstraktion "Punkte" genannt) folgende drei Grundeigenschaften (Axiome) des gewöhnlichen Abstandes zwischen zwei Punkten erfüllt sind:

1. Der Abstand  $\rho(x, y)$  zwischen zwei beliebigen Punkten  $x$  und  $y$  ist stets größer oder gleich Null, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn  $x = y$  ist;  $\rho(x, y) \geq 0$  mit  $\rho(x, y) = 0$  nur für  $x = y$ .

2. Der Abstand  $\rho(x, y)$  ist symmetrisch bezüglich der beiden Punkte  $x$  und  $y$ ;  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ .

3. Es gilt die Dreiecksungleichung: In einem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen stets größer oder höchstens gleich der Länge der dritten Seite; also

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$$

Verständlicherweise versagt die Anschauung für abstrakte Räume vollständig: Das mögen einige Beispiele verdeutlichen.

Zunächst soll der dreidimensionale euklidische Raum, der Raum unserer Anschauung, betrachtet werden. Hier ergibt sich der Abstand zweier Punkte  $x_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  und  $x_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  - auch euklidischer Abstand genannt - aus dem Satz des Pythagoras zu

$$\rho_1(x_1, x_2) = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$$

(Abb.11). Das ist aber nicht die einzige Möglichkeit, einen Abstand  $\rho(x_1, x_2)$ , der die genannten drei metrischen Axiome erfüllt, zu definieren. In derselben Menge  $X$  der Tripel reeller Zahlen  $(\xi, \eta, \zeta)$  kann man z.B. als Abstand auch

$$\tilde{\rho}(x_1, x_2) = \max(|\xi_2 - \xi_1|, |\eta_2 - \eta_1|, |\zeta_2 - \zeta_1|)$$

d.h. jeweils den größten der positiv genommenen Werte der drei Koordinatendifferenzen wählen.

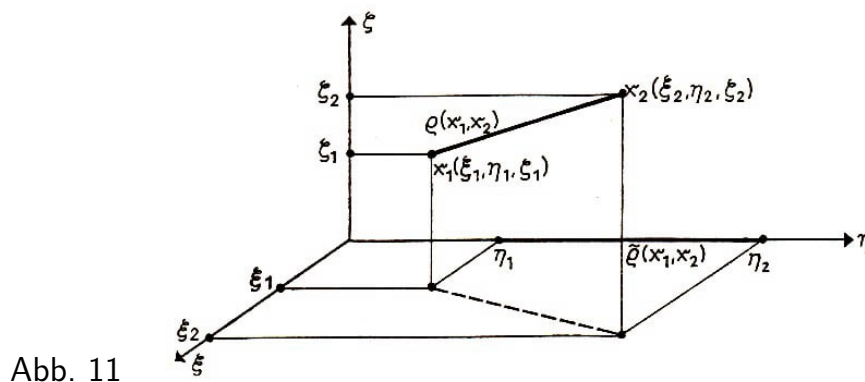


Abb. 11

So gelten in dem speziellen Beispiel in Abb. 11 für die Punkte  $x_1$  und  $x_2$  die Beziehungen  $|\eta_2 - \eta_1| > |\xi_2 - \xi_1|$  bzw.  $|\eta_2 - \eta_1| > |\zeta_2 - \zeta_1|$  und somit  $\tilde{\rho}(x, y) = |\eta_2 - \eta_1|$ .

Wie zu sehen, können sogar in ein und derselben Menge  $X$  verschiedene Metriken eingeführt werden, und das hat für praktische Probleme - einer gewissen Anpassungsfähigkeit wegen - besondere Bedeutung. Allerdings ist der Raum, in dem die Metrik  $\tilde{\rho}$  definiert wurde, nicht mehr euklidisch. Dies gilt auch für das folgende Beispiel.

Es kann bewiesen werden, dass die Menge  $X = \{x(t), y(t), z(t), \dots\}$  aller im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen zu einem metrischen Raum wird, wenn man als Abstand

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

definiert (Abb.12). Die Funktionen  $x, y, z$ , werden dann als Punkte des abstrakten Raumes aufgefasst. Dieser wird mit  $C[a, b]$  bezeichnet.

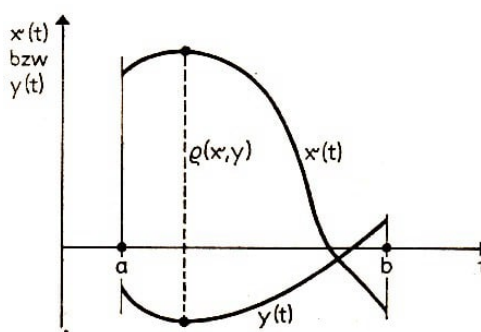


Abb. 12

Von größter Wichtigkeit ist die Einführung des Grenzwertbegriffes in abstrakten Räumen. Das geschieht - je nach der Beschaffenheit des betreffenden Raumes - auf unterschiedliche Weise. Im Falle metrischer Räume kann man sich analog zu dem eindimensionalen euklidischen Raum  $E_1$  (d.h. den reellen Zahlen) auf die Abstandsdefinition stützen.

Danach wird eine Folge  $\{x_n\}$  eines metrischen Raumes  $X$  konvergent genannt, wenn ein Element (Punkt)  $x^* \in X$  existiert mit der Eigenschaft  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x^*) = 0$ , d.h., dass auch hier mit wachsendem  $n$  eine beliebig genaue Annäherung der Glieder  $x_n$  der Folge an den Grenzwert  $x^*$  erfolgt, allerdings nunmehr im Sinne der abstrakten Abstandsdefinition.

Mit Hilfe des Abstandes  $\rho(x, y)$  kann man eine ganze Reihe weiterer Begriffe des euklidischen Raumes - wie etwa Dreieck, Kugel, abgeschlossene Menge, offene Menge, Randpunkt - auf metrische Räume übertragen.

Neben den metrischen hat sich die Einführung unterschiedlichster abstrakter Räume sehr bewährt. Sie werden auf ähnliche Weise definiert, jedoch genügen ihre Elemente anderen als den metrischen bzw. noch weiteren Axiomen.

Ausgehend von der klassischen Analysis, deren Anliegen die Erforschung des klassischen Funktionsbegriffes im Raum  $E_1$  der reellen Zahlen ist, ergibt sich analog als Hauptgegenstand der Funktionalanalysis das Studium von Operatoren in abstrakten Räumen (insbesondere metrischen und spezielleren metrischen Räumen).

Dabei wirken analytische, algebraische sowie geometrische Methoden und Verfahren eng zusammen. Die Tatsache, dass den Untersuchungen sehr allgemeine mathematische Objekte und Strukturen zugrunde liegen, führt einerseits zu äußerst fruchtbringenden analytischen Begriffsbildungen wie Operator und Funktional, hat aber andererseits ebensolche Ergebnisse auf den Gebieten der Algebra, der Geometrie usw. zur Folge.

Diese enge Verflechtung der verschiedenen mathematischen Disziplinen schafft oft die Möglichkeit, viele in den Teilgebieten bisher isoliert betrachtete Probleme nun unter einheitlichen Gesichtspunkten zu behandeln.

Dadurch sind in den vergangenen Jahren erhebliche Fortschritte in theoretischer und praktischer Hinsicht erzielt worden.

Somit wird ein weiterer grundsätzlicher Aspekt mathematischen Schaffens sichtbar: Durch den Abstraktionsprozess wird nicht etwa das Verstehen und Erkennen der objektiven Realität erschwert oder gar verwischt, sondern im Gegenteil erheblich gefördert,



zumal sich ja solche Verallgemeinerungen voll und ganz auf das Wesentliche der Erscheinungen konzentrieren.

Einige abschließende Erläuterungen sollen zur Illustration dienen. Nach dem bereits Gesagten haben viele mathematische Modelle die Form von Operatorengleichungen. Besonders häufig tritt der Typ  $Ax = x$  auf, wobei der Operator  $A$  für einen vollständigen metrischen Raum  $X$  mit den Elementen  $x, y, z$ , erklärt ist und die Bildelemente  $Ax$  ebenfalls zu  $X$  gehören.

Vollständig heißt so ein Raum genau dann, wenn jede konvergente Folge von Elementen  $x_n \in X$  gegen ein Element desselben Raumes konvergiert. Der Raum  $E_1$  ist z.B. vollständig, da jede konvergente reelle Zahlenfolge stets eine reelle Zahl als Grenzwert besitzt.

Der hier erwähnte Problemkreis umfasst u.a. Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

mit den festen Anfangswerten  $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$  und der gesuchten Funktion  $y(t)$ .

Sie ergeben sich beispielsweise bei der Modellierung einfacher Bewegungsvorgänge. Ferner zählen dazu Integralgleichungen der mathematischen Physik der Form

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

mit  $K(s, t)$  und  $f(s)$  als bekannte Funktionen,  $\lambda$  als Parameter und  $\varphi(s)$  als gesuchte Funktion sowie die aus der Algebra bekannten inhomogenen linearen Gleichungssysteme mit der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n &= b_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + a_{nn}\xi_n &= b_n \end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

wobei die  $a_{ik}$  und die  $b_i$  vorgegebene Konstanten, die  $\xi_k$  die  $n$  Unbekannten bedeuten.

Diese und noch viele andere Probleme lassen sich durch Umformung auf Operatorengleichungen der Art  $Ax = x$  bringen, wobei im ersten der hier erwähnten Beispiele auf das Element  $x = y(t)$ , im zweiten auf  $x = \varphi(s)$  und im dritten auf  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  eine Operation  $A$  angewendet wird, die durch die umgeformten Gleichungen jeweils genau bekannt ist.

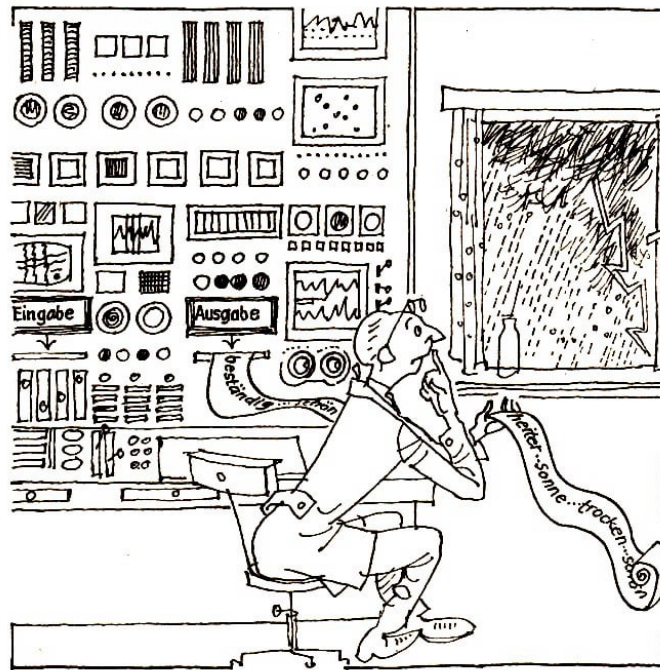
Damit kann die einheitliche Formulierung der verschiedenen Aufgaben als ein Problem, als Operatorgleichung der Form  $Ax = x$  erfolgen.

Der Fixpunktsatz von Stefan Banach (1892-1945) gibt nun die Bedingungen für den Operator  $A$  an, unter denen er genau einen Fixpunkt, d.h. eine eindeutige Lösung  $x_0$  hat. Der Beweis des Satzes liefert gleichzeitig ein praktisches Verfahren zur iterativen (schrittweisen) Bestimmung der Lösung und entsprechende Fehlerabschätzungen.

Somit können jetzt also bestimmte Untersuchungen auf den Gebieten der Differentialgleichungen, der Integralgleichungen, der linearen Algebra u.a. einheitlich erfolgen und die verschiedensten praktischen Aufgaben mittels ein und desselben Verfahrens gelöst werden.

Zum weiterführenden Studium der Analysis und Funktionalanalysis wird die Literatur [2, 3] empfohlen.

## 5 ... und wieder zurück zur Praxis



Bisher wurden in praktischer Hinsicht fast ausschließlich Fragen der mathematischen Modellierung erläutert.

Die Modellierung von Erscheinungen der Wirklichkeit ist aber nur der erste Schritt. Im zweiten sind die formulierten Aufgaben zu lösen; wobei die numerische Mathematik einen unentbehrlichen Helfer darstellt.

Wie bereits angedeutet, hat auch dieses Teilgebiet auf der Grundlage der Funktionalanalysis eine völlig neue Qualität erreicht. Durch die Untersuchung solcher umfassenden Probleme wie der eben dargelegten gelang es, sehr allgemeine numerische Verfahren, entsprechende Stabilitätskriterien und eine exakte Theorie der Fehlerabschätzung zu entwickeln.

In dieser Hinsicht ist die numerische Mathematik ein sehr junges Gebiet mit unmittelbarer, außerordentlich großer Praxiswirksamkeit.

Da der wissenschaftlich-technische Fortschritt immer exaktere Aussagen über viele Erscheinungen der objektiven Realität fordert, müssen die mathematischen Modelle ständig leistungsfähiger werden. Daher komplizieren sie sich fortwährend.

Die Behandlung solcher schwierigen Probleme kann aber im allgemeinen nur noch numerisch erfolgen. Mit der näherungsweisen Lösung erhebt sich sofort die Frage nach der Erfassung der dabei auftretenden Fehler.

Auf diese Weise ist im engen Zusammenwirken von theoretischen, funktionalanalytischen Forschungen einerseits und einer Fülle praktischer Fragestellungen andererseits in wenigen Jahren eine leistungsstarke numerische Mathematik entstanden.

Hier ist die tiefgreifende Wirkung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts auf die Entwicklung auch der Mathematik sehr augenscheinlich.

Der Sachverhalt der numerischen Auswertung von Modellen soll anhand der im vorangehenden Kapitel betrachteten Operatorengleichung  $Ax = x$  erläutert werden. Offenbar ist es nicht möglich, diese Gleichung z.B. durch Umformungen direkt zu lösen. Deshalb versucht man, die Lösung schrittweise immer besser anzunähern.

Dabei wird von einem beliebigen Element  $x_0 \in X$  ausgegangen. Mit ihm bildet man  $Ax_0 = x_1 \in X$ . Analog folgt  $Ax_1 = x_2 \in X$  und ganz allgemein  $Ax_{n-1} = x_n \in X$ . Durch dieses Iterationsverfahren wird eine Folge  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  von Näherungen erzeugt. Diese Folge konvergiert, wie gezeigt werden kann, gegen die Lösung  $x^*$ , falls der Operator  $A$  kontrahierend ist, d.h., wenn für alle  $i$  und  $j$  gilt:

$$\rho(Ax_i, Ax_j) \leq \alpha \rho(x_i, x_j) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha < 1$$

Auf diese Weise ist jedes praktische Problem (Modell), das alle angegebenen Bedingungen erfüllt, rein formal gelöst.

Nun kann aber im allgemeinen der Grenzwert  $x^*$  selbst nicht bestimmt werden, so dass nur die Näherungslösungen  $x_n$  zur Verfügung stehen. Um über deren Qualität zu entscheiden, muss die Frage beantwortet werden, wie weit die  $n$ -te Näherung noch von der exakten Lösung entfernt, d.h. wie groß der Fehler zwischen  $n$ -ter Näherung und Lösung ist. Im vorliegenden Fall kann dieser Fehler leicht angegeben werden.

Es gilt in der entsprechenden Metrik des Raumes  $X$ :

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, Ax_0)$$

Dabei ist  $\alpha$  die in der Kontraktionsbedingung auftretende Konstante und  $x_0 \in X$  das beliebig gewählte Ausgangselement. Offensichtlich hängt der Fehler im wesentlichen von diesen beiden Größen ab.

Selbstverständlich ist diese Fehlerabschätzung nicht die einzig mögliche. Wünschenswert ist natürlich in jedem Falle, recht genaue Schranken, möglichst nach oben und unten, zu bekommen, d.h., die Lösung einzugabeln. Abschätzungen dieser Art sind neben der Entwicklung von Iterations- oder anderen Näherungsverfahren sowie entsprechenden Konvergenzuntersuchungen das Hauptanliegen der Numerik.

Das Problem der numerischen Stabilität hat ebenfalls große Bedeutung. Worum geht es dabei?

Anhand des bereits erwähnten inhomogenen linearen Gleichungssystems soll das erläutert werden. Die in den Gleichungen auftretenden Konstanten sind im allgemeinen nicht ganzzahlig, häufig sind sie sogar irrational wie  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$  usw.

Bei der praktischen Berechnung der Näherungen  $x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  müssen dann Rundungen vorgenommen werden. Somit ist die  $k$ -te Näherung nicht exakt, sondern wiederum nur näherungsweise bestimmbar.

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich diese Rundungsfehler mit wachsendem  $k$  aufschaukeln oder ob das Verfahren dennoch zum Ziele führt. Im ersten Fall spricht man von numerischer Instabilität, im zweiten von numerischer Stabilität.

Die bisherigen Erfahrungen haben gezeigt, dass es Verfahren gibt, die zwar theoretisch

konvergieren, sich aber numerisch instabil verhalten, so dass sie für die Praxis völlig unbrauchbar sind. Deshalb sind Stabilitätsuntersuchungen von fundamentaler Bedeutung, zumal diese Fragen beim Einsatz von maschinellen Rechenanlagen noch viel akuter werden, denn ein Digitalrechner kann z.B. nur näherungsweise integrieren, ja er kann überhaupt nur endlich viele Stellen (Ziffern) berücksichtigen.

Offensichtlich bestehen nicht bloß zwischen Funktionalanalysis und Numerik, sondern auch zwischen Numerik und moderner Rechentechnik enge Wechselbeziehungen. Sind doch die numerischen Verfahren fast immer mit einem sehr großen Aufwand an Routinerechnungen verbunden, die nur maschinell bewältigt werden können. Nicht zuletzt dadurch sind gegenwärtig sehr weittragende Bearbeitungsmöglichkeiten von mathematischen Modellen erschlossen worden, weil solche Vorhaben ehemals wegen ihres großen Rechenaufwandes graue Theorie bleiben mussten.

Die gegenseitige Beeinflussung von Numerik und Rechentechnik ist selbstverständlich von der Entwicklung der maschinellen Rechner abhängig. In den vergangenen Jahrhunderten hat es nicht an Bemühungen und Ideen gefehlt, Rechenmaschinen zu konstruieren.

Das beweisen z.B. die Arbeiten von Wilhelm Schickard (1592-1635), Blaise Pascal (1623-1662), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Charles Babbage (1792-1871), Hermann Hollerith (1860-1929) u.a., von noch viel älteren Rechenhilfsmitteln wie dem Abakus ("Rechenbrett") ganz abgesehen.

Die Rechenmaschine erlangt jedoch, sowohl was ihre technische Vollkommenheit betrifft als auch hinsichtlich des ausgeprägten Bedürfnisses ihrer Nutzung, erst in der Gegenwart wirkliche Bedeutung. Entsprechend ihrer Arbeitsweise teilt man die Rechengерäte in zwei große Gruppen ein, in die Analog- und die Digitalrechner. Hier sollen lediglich einige Bemerkungen über die letzteren folgen.

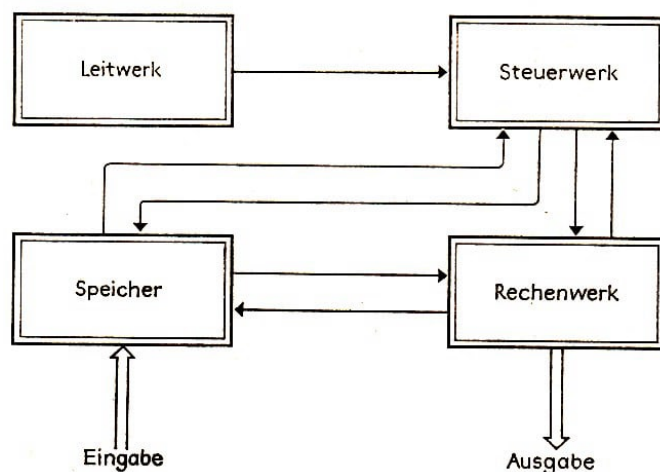


Abb. 13

Die Entwicklung der Ziffernrechner, auch digitale Rechenautomaten genannt, ist mit dem Entstehen einer leistungsstarken Elektronik in den letzten zwei Jahrzehnten eng verbunden.

Ein programmgesteuerter Ziffernrechner führt im Gegensatz zu einem Analogiegerät Rechnungen direkt mit Zahlen aus. Das geschieht nach einem Programm, wobei Programm und Zahlen mittels elektrischer sowie magnetischer Impulse verschlüsselt sind.

Die Hauptteile einer solchen Maschine sind - ähnlich wie bei einem Tischrechner - der Speicher, das Steuer-, das Leit- und das Rechenwerk (Abb. 13).

In den Speicher werden im allgemeinen sowohl die zu verarbeitenden Zahlen als auch die Befehle des betreffenden Programms eingegeben. Das Steuerwerk tastet das Programm ab und steuert bestimmte Teile der Maschine mittels Impulsen. Das Leitwerk ist für die Erzeugung der Impulse und die Einhaltung der richtigen Reihenfolge der Operationen (Befehlsentnahme, Steuerung der Maschinenteile entsprechend dem Befehl, nächste Befehlssuche usw.) zuständig.

Im Rechenwerk werden schließlich die eigentlichen Rechenoperationen ausgeführt.

Zur Technik eines solchen Rechners, die in diesem Rahmen verständlicherweise sehr vereinfacht dargestellt werden muss, gehören noch Geräte und Vorrichtungen für die Ein- und Ausgabe der Befehle, Daten bzw. Resultate, wie Lochkarten- und Lochstreifenleser, Druckwerke, Stanzer und elektrische Schreibmaschinen.

Bereits diese wenigen Bemerkungen zeigen, welche Möglichkeiten (Abarbeiten eines eingegebenen Programms einer Routinerechnung) sich dem Mathematiker durch den Einsatz eines Rechners eröffnen, sie lassen aber auch erkennen, welche Grenzen gesetzt sind (Speicherkapazität, Rechengeschwindigkeit, Ein- und Ausgabe usw.).

Das beschriebene Iterationsverfahren eignet sich z.B. sehr gut zur maschinellen Bearbeitung, denn jeder Näherungsschritt wird nach demselben Schema durch eine Folge von Rechenoperationen realisiert. Die Güte der Näherung kann man mittels der Fehlerabschätzung ebenfalls maschinell überprüfen und den Automaten nach Erreichen einer bestimmten Schranke stoppen.

Der Arbeitsablauf der Maschine bei einer solchen Aufgabe muss sich algorithmisch beschreiben lassen, d.h., auf Grund eines angebbaren Systems von Umformregeln, Algorithmus genannt, muss die Umarbeitung der Eingabegrößen (Aufgabe) in Ausgabegrößen (Lösung) erfolgen können.

Ist eine algorithmische Beschreibung nicht möglich, so verbietet sich die Bearbeitung des betreffenden Problems durch einen Rechner von selbst. Deshalb kommt der Algorithmentheorie eine vorrangige Bedeutung zu.

Will man eine Aufgabe mittels eines Rechners lösen, macht sich eine Programmierung erforderlich. Sie beinhaltet die Auswahl des Rechenverfahrens, die Aufteilung des Speichers, die Zerlegung des Verfahrens in einzelne Schritte und die Beschreibung dieser Schritte durch Befehle oder Teilprogramme.

Das Programm kann als eine Übersetzung des Verfahrens in eine für die Maschine verständliche Sprache (Maschinensprache) gedeutet werden. Die der Maschine zu erteilenden Befehle sind in diesem Sinne als die einzelnen Wörter der Maschinensprache aufzufassen.

Die Tatsache, dass die Programmierung für verschiedene Rechner sehr aufwendig ist, hat je nach Zielsetzung zur Schaffung verschiedener formaler Sprachen geführt. Solche "algorithmische Sprachen" sind z.B. ALGOL und COBOL.

ALGOL eignet sich besonders zur Formulierung wissenschaftlich-technischer Probleme,

während COBOL vorwiegend für kommerzielle Aufgabenstellungen entwickelt wurde.

Besitzt nun ein Rechenautomat einen entsprechenden Compiler (Übersetzer), so wird mit dessen Hilfe das in einer algorithmischen Sprache eingegebene Programm automatisch übersetzt (automatische Programmierung). Die automatische Programmierung ermöglicht eine einheitliche Programmierung unterschiedlicher Automaten (einheitliche Programmbibliothek) und ist sehr ökonomisch.

Der Anteil der Mathematik an der maschinellen Rechentechnik und deren Entwicklung besteht vor allen Dingen in der Schaffung der theoretischen Konstruktionsgrundlagen und in der praktischen Handhabung der Rechenanlagen.

Dabei spielen u.a. solche Teilgebiete wie die mathematische Logik, die Automatentheorie, die Schaltalgebra, sowie die Programmierung und die algorithmischen Sprachen eine entscheidende Rolle.

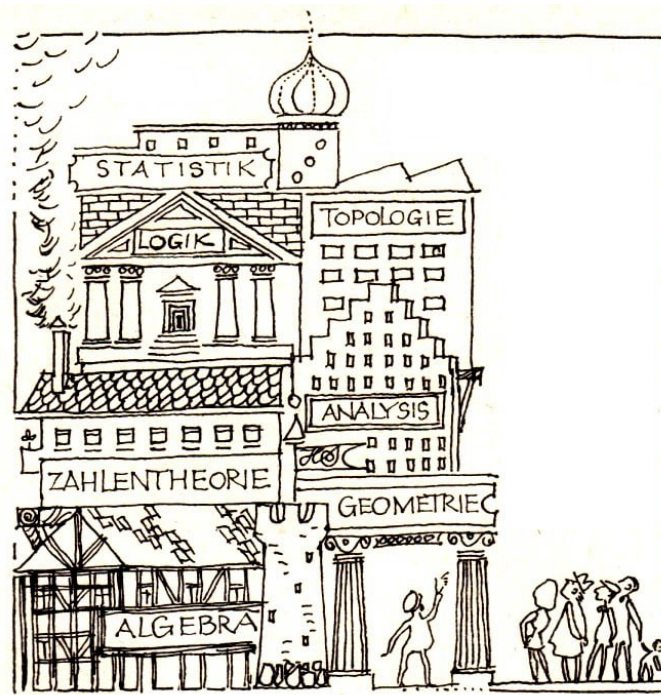
Abschließend sei noch hervorgehoben, dass die elektronischen Rechenanlagen nicht nur zur Bewältigung der hier betrachteten numerisch-mathematischen Problemstellungen dienen, sondern darüber hinaus zur Steuerung der verschiedensten Maschinen (z.B. numerisch gesteuerte Werkzeugmaschinen), bei der Sprachforschung, als Übersetzungsmaschinen, in der Pädagogik, der Dokumentation und sogar in der medizinischen Diagnostik erfolgreich eingesetzt werden.

Viele komplizierte Erscheinungen der Praxis lassen sich auf Digitalrechnern direkt modellieren und auf diese Weise steuern. Das deutet auf den Zusammenhang zwischen Rechentechnik und Kybernetik hin. In der Tat entwickelt sich der elektronische Rechner immer mehr zur kybernetischen Maschine.

Zwar steht die Menschheit gegenwärtig erst am Anfang dieser Entwicklung, jedoch sind bereits reiche Früchte sichtbar, besonders im Hinblick auf die Automatisierung, einem recht entscheidenden technischen Bereich.

Auch aus diesem Grunde werden sich die Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Rechentechnik insgesamt immer umfassender und enger gestalten.

## 6 Trotz der Vielfalt eine Einheit



Nachdem einige grundsätzliche Gedankengänge, gestützt auf die Analysis, Funktionalanalysis, Numerik und Rechentechnik, in Verbindung mit den für die Praxis so wichtigen Problemen des Modellierens und der Auswertung von Modellen skizziert werden sind, ist es dringend geboten, kritisch Rückschau zu halten.

Das ist notwendig, um erstens keine einseitige Betrachtungsweise zu provozieren, zweitens aber, um vor allen Dingen die ganze Komplexität der mathematischen Wissenschaft, d.h. das Zusammenwirken verschiedenster Teilgebiete und Theorien, die Einheit der Mathematik also, sichtbar zu machen.

Da sich die bisherigen Erörterungen nur auf einige wenige Teilgebiete konzentrieren, wurden viele Voraussetzungen und Ergebnisse aus anderen Bereichen der Mathematik stillschweigend benutzt. Eben diese Bereiche sind aber für den strengen Aufbau des gesamten Gebäudes der Mathematik und insbesondere für gesicherte Aussagen in der Praxis nicht nur unabdingbar notwendig, sondern sie beeinflussen gegenwärtig die Entwicklung der betrachteten Disziplinen maßgeblich und stehen zu ihnen in enger Wechselbeziehung.

In diesem Sachverhalt spiegelt sich die ganze Größe der mathematischen Gedankenwelt wider. Sollen die vielfältigsten Erscheinungen der objektiven Realität mathematisch erfasst werden, ist der Einsatz der gesamten Mathematik erforderlich. Die Grundgedanken einiger der wichtigsten dieser Gebiete sollen im folgenden skizziert werden.

Den meisten mathematischen Untersuchungen liegt der Begriff der Zahl in einer mehr oder weniger abstrakten Form zugrunde. Die eingangs getroffene Feststellung, dass mit den geläufigen Zahlen und ihren vielleicht sogar nur intuitiv erfassten Eigenschaften schon Jahrtausende lang erfolgreich gearbeitet wurde, genügt daher keinesfalls.



Es muss vielmehr der gesamte Aufbau der Menge der reellen Zahlen und anderer solcher Systeme mit allen darin geltenden Gesetzen genau erforscht werden, um ein sicheres Fundament nicht nur für die Analysis bzw. die Numerik, sondern für sämtliche mathematischen Teilgebiete zu besitzen, in denen mit Zahlen operiert wird.

Reelle Zahlen  $t$  können entweder ganz, d.h.  $t = n$ , rational, d.h. von der Form  $t = \frac{n}{m}$ , oder irrational, d.h. nicht von der Form  $\frac{n}{m}$  (wie z.B.  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  und  $e$ ) sein. Dabei sind die ganzen Zahlen  $n$ ,  $m$ , gewissermaßen als Bausteine des Systems aufzufassen.

Mit diesen Elementen und den dafür geltenden Gesetzmäßigkeiten sowie entsprechenden Verallgemeinerungen beschäftigt sich die Zahlentheorie [4], heute eine sehr umfangreiche und weitverzweigte Disziplin, die häufig nur noch indirekt die ganzen Zahlen zum konkreten Gegenstand hat.

An solchen Teilbereichen wie dem der algebraischen und der analytischen Zahlentheorie, wo komplizierte Methoden der Algebra bzw. Analysis Anwendung finden, zeigen sich die engen Wechselbeziehungen zwischen fundamentalen Gebieten besonders deutlich.

Die Auflösbarkeit von Gleichungen der Form

$$a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n = 0$$

bzw. entsprechender Gleichungssysteme stand lange Zeit im Mittelpunkt der Untersuchungen der Algebra [5].

Bei den Gleichungssystemen haben die bereits erwähnten linearen der Form

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

in denen im Gegensatz zu den nichtlinearen die Unbekannten  $\xi_k$  nur in der ersten Potenz auftreten, einen Vorrang (lineare Algebra).

Einerseits durch die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) im Bereich der reellen Zahlen, andererseits durch die Theorie der algebraischen Gleichungen angeregt, traten in diesem Jahrhundert die algebraischen Strukturen immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses.

Zu den wichtigsten Vertretern dieser Strukturen gehören die Gruppe, der Ring und der Körper. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass für ihre Elemente ganz bestimmte Verknüpfungen definiert sind. Sind ihre Elemente Zahlen, so heißen diese Verknüpfungen Rechenoperationen.

Ist für eine Menge  $A = \{a, b, c, \dots\}$  eine mit "plus" (+) bezeichnete Verknüpfung gegeben, so heißt  $A$  eine Gruppe, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ , (assoziatives Gesetz)
2. Es existiert ein Element  $\Theta$  (Nullelement) mit der Eigenschaft  $a + \Theta = a$  für beliebiges

$a \in A$ ;

3. Zu jedem Element  $a \in A$  existiert ein entgegengesetztes Element  $(-a) \in A$  mit  $a + (-a) = \Theta$ .

Gilt noch das kommutative Gesetz  $a + b = b + a$ , so handelt es sich um eine kommutative oder Abelsche Gruppe (Niels Henrik Abel 1802-1829).

Nach dieser Definition bildet z.B. die Menge der ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition als Gruppenoperation eine Abelsche Gruppe. Als Gruppenoperation kann auch die Multiplikation gewählt werden. An die Stelle des Nullelementes  $\Theta$  tritt dann das Einselement  $e$  und an die Stelle des entgegengesetzten  $(-a)$  das inverse Element  $\frac{1}{a}$  mit  $a \cdot \frac{1}{a} = e$ .

Deshalb bildet die Menge der rationalen Zahlen mit  $e = 1$  und der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfung ebenfalls eine Gruppe.

Eine additive Abelsche Gruppe  $X$  heißt ein Ring, wenn für beliebige Elemente  $a, b \in X$  außer der Addition eine Multiplikation erklärt ist mit folgenden Gesetzen:

1.  $a(bc) = (ab)c$  (assoziatives Gesetz),
2.  $(a + b)c = ac + bc$ ,  $c(a + b) = ca + cb$  (distributive Gesetze).

Gilt für die Multiplikation auch noch das kommutative Gesetz, so sind die beiden distributiven Gesetze äquivalent, und der Ring heißt kommutativ.

Die Menge der ganzen Zahlen z.B. bildet mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation nicht nur eine additive Gruppe, sondern sogar einen kommutativen Ring.

Ist neben den drei Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion und Multiplikation auch noch die Division (Umkehrung der Multiplikation) - außer der Division durch das Nullelement - in der Menge  $X$  unumschränkt ausführbar, so heißt  $X$  ein Körper.

Beispielsweise bilden die Mengen der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen mit den üblichen Rechenoperationen Körper.

Solche Strukturen und andere (wie die Verbände und Algebren) haben sowohl große Bedeutung für die Weiterentwicklung der Mathematik selbst als auch für ihre Anwendungen erlangt.

So kann u.a. die Klassifikation der verschiedenen Geometrien auf gruppentheoretischer Grundlage erfolgen, wie es Felix Klein (1849-1925) in seinem berühmten "Erlanger Programm" erstmals vorschlug. In der relativistischen Physik spielt die Gruppe der Lorentztransformationen eine entscheidende Rolle.

Auch Aussagen über die Lösungen algebraischer Gleichungen erfolgen auf der Grundlage der abstrakten Körpertheorie. Es gilt nämlich der Satz:

Sind die Koeffizienten  $a_k$  der Gleichung  $n$ -ten Grades

$$\sum_{k=0}^n a_k \zeta^k = 0$$

Elemente eines beliebigen Körpers  $X$ , so gibt es einen Erweiterungskörper  $\tilde{X}$  (Stamm-

körper), in dem diese Gleichung eine Lösung hat.

(Zum Körper der reellen Zahlen gehört z.B. als Stammkörper der komplexen Zahlen.) Damit geht die Theorie der algebraischen Gleichungen in der allgemeinen Körpertheorie auf.

Darüber hinaus findet die Körpertheorie in der Zahlentheorie, der Funktionentheorie, der Geometrie und vielen anderen Bereichen Anwendung, und das gleiche gilt selbstverständlich auch für die übrigen der genannten Strukturen.

So konnte u.a. erst mit Hilfe der Theorie der Verbände ein für neueste Forschungen genügend allgemeiner Integralbegriff entwickelt werden, der mit dem anfangs betrachteten Riemannschen Integral lediglich

Auf derartige Begriffe und Probleme kann aus bekannten Gründen nicht weiter eingegangen werden. Vielmehr sollen die Wechselwirkungen zwischen der Algebra und anderen Disziplinen anhand des Begriffes des abstrakten Raumes weiter verdeutlicht werden.

Die Methode, wie derartige abstrakte Räume eingeführt wurden, hat allgemeine Bedeutung erlangt. Aufbauend auf möglichst wenigen, sehr einfachen und nicht zu beweisenden Grundgesetzen, den Axiomen, denen die Elemente einer Menge genügen, erfolgen alle Untersuchungen und Beweise.

Diese sogenannte axiomatische Methode wird auch bei der Untersuchung der algebraischen Strukturen angewandt. Mit den bereits erwähnten Hilbertschen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie und der 1910 von Steinitz veröffentlichten "Algebraischen Theorie der Körper" trat die moderne Axiomatik ihren Siegeszug an.

Damit rückten die Untersuchungen von mathematischen Strukturen in den Mittelpunkt des Interesses. Bei solchen Strukturuntersuchungen bildet eine Menge von Elementen, deren Natur nicht entscheidend ist, den Ausgangspunkt. Zwischen den Elementen werden Verknüpfungen bzw. Relationen definiert, die bestimmten Grundgesetzen, den Axiomen der Struktur, genügen müssen.

Der französische Bourbaki-Kreis (Nicolas Bourbaki ist ein Pseudonym!) hat sich seit Mitte der dreißiger Jahre die Aufgabe gestellt, die gesamte Mathematik nach Strukturprinzipien neu zu ordnen.

Der die fundamentalen Strukturen der Analysis behandelnde erste Teil besteht aus 20 Bänden mit dem Inhalt: Mengenlehre, Algebra, allgemeine Topologie, Funktionen einer reellen Veränderlichen, topologische Vektorräume und Integration.

Trotzdem dieses Werk, das den Titel "Eléments de mathématique" trägt, längst noch nicht abgeschlossen ist und vielleicht auch gar nicht abgeschlossen werden kann, ist sein Einfluss auf die gegenwärtige Entwicklung der Mathematik nicht zu verkennen.

Die Definition der metrischen Räume erfolgte dadurch, dass für beliebige Elemente  $x, y$  der Menge  $X$  eine Abstandsrelation  $\rho(x, y)$ , die den metrischen Axiomen genügt, erklärt wird.

Obwohl für die sehr allgemeine Struktur eines metrischen Raumes bereits ein so wichtiges Ergebnis wie der Banachsche Fixpunktsatz mit nur wenigen Bedingungen gilt,

sind für viele weitergehende Untersuchungen der Funktionalanalysis speziellere Räume notwendig. Häufig werden solche Räume durch algebraische Strukturforderungen bestimmt wie bei dem zentralen Begriff des linearen Raumes (Vektorraumes).

Ein Vektorraum  $X$  liegt vor, wenn dessen Elemente eine additive Abelsche Gruppe bilden und wenn in  $X$  außerdem eine Multiplikation der Elemente von  $X$  mit den Elementen  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  eines Ringes  $R$  mit einem Einselement  $e$  erklärt ist, für die das Kommutativgesetz gilt und die folgenden Axiomen genügt:

1. Mit  $x \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\lambda x \in X$ ,
2.  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
3.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,
5.  $ex = x$ .

Bei den praktischen Anwendungen der Vektorräume spielt der Ring der reellen bzw. komplexen Zahlen eine vorrangige Rolle. Der Name Vektorraum wurde deshalb gewählt, weil die Multiplikation eines Vektors (z.B. Kraftvektor) mit einer reellen Zahl diesen fünf Grundgesetzen genügt.

Wird darüber hinaus in Verallgemeinerung des Begriffes "Betrag einer Zahl" jedem Element  $x$  eines linearen Raumes  $X$  eine reelle Zahl, ihre Norm, zugeordnet, die mit  $\|x\|$  bezeichnet wird und den Axiomen

1.  $\|x\| \geq 0$  mit  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

genügt, so heißt  $X$  ein normierter Raum.

Normierte Räume sind in Verbindung mit einem entsprechenden Konvergenzbegriff für die Anwendungen besonders wichtig. Dies ist schon daran zu erkennen, dass nicht nur der euklidische Raum  $E_n$  im üblichen Sinne, sondern z.B. auch der Raum  $C[a, b]$  der im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen  $\{x(t), y(t), \dots\}$  mit der Menge der reellen Zahlen als Multiplikatorenring und der Norm  $\|x(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$  normierte Räume sind.

Übrigens kann man beweisen, dass jeder normierte Raum durch die Festlegung

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

zu einem metrischen Raum wird, während die Umkehrung dieses Sachverhalts nicht allgemein gilt.

Wie aus den Darlegungen ersichtlich, müssen bei der Untersuchung abstrakter Räume analytische, algebraische und geometrische Methoden zusammenwirken.

Auch auf verschiedenen Teilgebieten der Geometrie, wie z.B. auf dem der Topologie, haben sich Strukturuntersuchungen durchgesetzt und zu beachtlichen Resultaten geführt.

Die Topologie beschäftigt sich mit denjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde (Punktmengen), die bei ganz bestimmten Abbildungen, den topologischen Abbildun-

gen, erhalten bleiben. (Zum Beispiel Randpunkte bleiben Randpunkte, und innere Punkte bleiben innere Punkte.)

Die allgemeinsten mathematischen Strukturen, die man mittels topologischer Abbildungen untersucht, heißen topologische Räume. Sie können, ebenso wie die metrischen Räume, axiomatisch eingeführt werden. Dabei geht man von bestimmten Eigenschaften offener bzw. abgeschlossener Punktmengen im euklidischen Raum  $E_1$  aus.

Eine Menge  $G$  von reellen Zahlen heißt offen, wenn jeder Zahl  $x \in G$  ein Intervall  $(a, b)$  zugeordnet werden kann mit  $x \in (a, b) \subset G$ .

Nach dieser Definition ist die einfachste offene Punktmenge ein Intervall. Offene Mengen bestehen also nur aus inneren Punkten, und für sie gilt:

1. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
2. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

Hierbei versteht man ganz allgemein unter der Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  (geschrieben:  $A \cup B$ ) die Menge aus allen Elementen, die entweder zu  $A$  oder zu  $B$  (oder zu  $A$  und  $B$ ) gehören, und unter dem Durchschnitt von  $A$  und  $B$  (geschrieben:  $A \cap B$ ) die Menge aus allen Elementen, die sowohl zu  $A$  als auch zu  $B$  gehören.

Dass Satz zwei für beliebig viele offene Mengen falsch ist, zeigt das Beispiel

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

denn die Menge  $\{0\}$ , die nur aus einem Element besteht, der Zahl Null, ist abgeschlossen.

Eine Menge  $F$  heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert wo jeder konvergenten Folge  $\{x_n\}$  mit  $x_n \in F$  ebenfalls zur Menge  $F$  gehört. Laut dieser Definition ist ein Segment  $[a, b]$  die einfachste abgeschlossene Menge reeller Zahlen. Für abgeschlossene Mengen gilt:

1. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.
2. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

Das Beispiel

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}, 1 \right] = [0, 1]$$

fällt nicht unter Satz zwei, die Menge  $(0, 1]$  ist weder abgeschlossen noch offen. (Man sagt auch, sie sei halboffen.)

Bei der Definition des topologischen Raumes kann man von den offenen oder von den abgeschlossenen Mengen ausgehen. So heißt eine Menge  $X$  ein topologischer Raum, wenn in ihr ein Mengensystem  $\Gamma$  mit folgenden Eigenschaften ausgezeichnet ist:

1.  $X, \emptyset \in \Gamma$ . ( $\emptyset$  ist das Zeichen für die leere Menge.)

2. Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus  $\Gamma$  gehört wieder zu  $\Gamma$ .
3. Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus  $\Gamma$  gehört ebenfalls zu  $\Gamma$ .

Das Mengensystem  $\Gamma$  repräsentiert die offenen Mengen des topologischen Raumes  $X$ . Wie leicht zu erkennen, verkörpern die genannten Axiome die vorher erörterten Eigenschaften der offenen Mengen  $G$  des euklidischen Raumes  $E_1$ .

Eine äquivalente Definition des topologischen Raumes ergibt sich unter Verwendung der Eigenschaften von abgeschlossenen Mengen  $F$ .

In topologischen Räumen kann der Begriff der Umgebung eines Punktes  $x$  eingeführt werden, indem man jede offene Menge  $U$  mit  $x \in U$  als eine solche Umgebung definiert. Da für die Elemente des betrachteten topologischen Raumes keine Abstandsrelation erklärt ist, wird der Begriff der Konvergenz über den Begriff der Umgebung eingeführt:

Eine Folge  $\{x_n\}$  heißt konvergent mit dem Grenzwert  $x_0$ , wenn sich zu jeder Umgebung  $U$  von  $x_0$  ein Index  $n_0$  angeben lässt, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n > n_0$  gilt.

Offenbar ist diese Definition der früher im Raum  $E_1$  gegebenen äquivalent! In allgemeinen topologischen Räumen ist jedoch der Grenzwert einer Folge nicht unbedingt eindeutig bestimmt. Dieses Problem wird durch die sogenannten Trennungsaxiome geklärt.

Eine weitere sehr wichtige Frage ist, ob und unter welchen Bedingungen ein topologischer Raum metrisierbar ist. Bei der Untersuchung dieses Problems zeigt sich u.a., dass die metrischen Räume gleichzeitig topologische sind, aber umgekehrt bei weitem nicht jeder topologische Raum auch metrisierbar ist.

Neben den algebraischen, topologischen und Ordnungsstrukturen sind noch die sogenannten Mischstrukturen sehr wichtig. Dazu gehören topologische Gruppen, normierte Ringe, normierte Algebren u.a. [6].

Nach den Darlegungen erscheint die Mathematik heute oft auf den ersten Blick als ein System von Definitionen und Sätzen, die auf bestimmten Axiomen beruhen. Hierbei muss man allerdings beachten, dass ein Axiomensystem nicht von vornherein gegeben ist, sondern meist am Ende einer langen und komplizierten Entwicklung von Theorie und Praxis steht und dass nicht strukturiert werden kann, was nur unscharf oder gar nicht vorhanden ist.

Vieles Wichtige muss im Rahmen dieses Kapitels unberücksichtigt bleiben. Das bezieht sich sowohl auf neue Methoden, wie die homologische Algebra, als auch auf so bewährte Teilgebiete, wie die Differentialgeometrie.

Letztere entstand auf der Grundlage von Geometrie und Differentialrechnung. Ihre Ergebnisse sind für die Behandlung vieler technischer Probleme, aber u.a. auch für die Relativitätstheorie, von größter Wichtigkeit.

Mit Hilfe der Differentialgeometrie werden Begriffe wie Krümmung und Windung von Kurven, Krümmung von Flächen, Fragen der Verbiegung von Flächen und andere Erscheinungen mathematisch erfasst.

Weiter muss auf die Behandlung einer für die moderne Mathematik und ihre Anwen-

derung so zentralen Disziplin wie die mathematische Logik verzichtet werden. Natürlich zeigen auch die Entwicklung und die praktische Bedeutung solcher Gebiete wie die der mathematischen Logik, der Differentialgeometrie, der analytischen Geometrie, der algebraischen Geometrie u.a. die innige gegenseitige Durchdringung scheinbar voneinander entfernt liegender Theorien.

Einige abschließende Bemerkungen sollen lediglich noch der Mengenlehre [7] gelten, weil bisher schon oft auf sie Bezug genommen wurde.

So erfolgte z.B. die Definition des Operators und des topologischen Raumes auf mengentheoretischer Grundlage. Als Begründer der Mengenlehre gilt Georg Cantor (1845-1918).

Seine Forschungsergebnisse wurden von der Fachwelt anfangs sehr unterschiedlich bewertet. Erst in unserem Jahrhundert ist die große Bedeutung der mengentheoretischen Betrachtungsweise für die gesamte Mathematik voll erkannt worden.

Heute hat die Mengenlehre für fast alle Teilgebiete derart fundamentale Bedeutung, dass einige Mathematiker sogar zu der Auffassung neigen, die gesamte Mathematik sei weiter nichts als Mengenlehre.

Wenngleich ein solch extremer Standpunkt fraglich scheint, so hat doch die Mengenlehre wie kaum eine andere Disziplin Ideen und Methoden hervorgebracht, die viele Teilgebiete der Mathematik innig miteinander verbinden.

Übrigens hat die Mengenlehre auch eine Reihe philosophisch interessanter Fragen aufgeworfen, die sich vor allem auf Grund bestimmter logischer Antinomien ergeben. Dazu ein einfaches Beispiel.

Von den endlichen Mengen ist bekannt, dass ein echter Teil einer solchen Menge nie gleich der ganzen Menge sein kann. Werden dagegen etwa die unendliche Menge der natürlichen Zahlen,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ , und die der Quadrate dieser Zahlen, also  $N^* = \{1^2, 2^2, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots\}$ , betrachtet so ist einerseits  $N^*$  eine echte Untermenge von  $\mathbb{N}$ , also  $N^* \subset \mathbb{N}$ .

Andererseits kann aber jedem Element  $n \in \mathbb{N}$  eindeutig ein Element  $n^2 \in N^*$  zugeordnet werden und umgekehrt (eindeutige Abbildung), d.h., beide Mengen haben die gleiche Anzahl von Elementen. Sie sind, wie man sagt, gleichmächtig.

Dieses formal logisch nicht zu erwartende Ergebnis weist darauf hin, dass die Entwicklung der Mathematik sehr komplizierte erkenntnistheoretische Probleme aufwirft.

Wenn in diesem Abschnitt einige Grundgedanken derart entscheidender Gebiete wie der Zahlentheorie, der Algebra, der Topologie und der Mengenlehre im Zusammenhang mit der Analysis entwickelt wurden, so soll das keinesfalls heißen, dass diese Gebiete nur in Hinsicht auf die Analysis von Bedeutung wären, etwa gar im Sinne von Hilfsdisziplinen. Das ist nicht der Fall.

Es ist unbedingt erforderlich, diese Bereiche nicht nur um ihrer selbst willen, sondern vor allen Dingen im Hinblick auf die gesamte mathematische Wissenschaft und ihre Anwendungen möglichst umfassend zu entwickeln.

Der Wert dieser Gebiete besteht sowohl in der Fundierung vieler anderer, z.T. anwen-

dungsfreudigerer Bereiche als auch in der Bereitstellung neuer mathematischer Methoden und Verfahren, die für die Meisterung vieler aktueller Probleme oft wichtiger sind als die Lösung einzelner enger Aufgabenstellungen.

Obwohl im Verlauf der Entwicklung der fundamentalen Disziplinen ihre unmittelbare Praxisbezogenheit nicht immer sofort zutage tritt, steigen doch die konkreten Anwendungsmöglichkeiten der gesamten Mathematik ständig.

Man muss sich deshalb sehr vor einer oberflächlichen Einschätzung hüten, die einseitig den Wert einer mathematischen Disziplin danach beurteilt, wieviel spezielle praktische Aufgaben mit ihrer Hilfe direkt zu lösen sind.

Außerdem arbeitet die Mathematik insgesamt nicht nur für die Gegenwart, sondern in hohem Maße auch für die Zukunft. Das fordert vor allem das enorme, ständig noch steigende Tempo der gesellschaftlichen Entwicklung.

Diese Darlegungen zeugen von dem gewaltigen Integrationsprozess, der sich in den klassischen mathematischen Bereichen anbahnte und der gegenwärtig in der gesamten modernen Mathematik stürmisch voranschreitet. Er ist einerseits durch die Einheitlichkeit der Methoden (z.B. der axiomatischen und der mengentheoretischen), andererseits durch die innige Verflechtung der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik gekennzeichnet.

Dass mit diesem Prozess die Durchschaubarkeit des gesamten mathematischen Gedankengutes erheblich gewachsen ist, liegt wohl auf der Hand. Es wäre müßig, die Vorrangstellung irgendeiner mathematischen Disziplin überhaupt in Erwägung zu ziehen, denn genauso, wie die Analysis ohne ihr Zusammenwirken mit der Zahlentheorie, der Algebra, der Geometrie und anderen Gebieten heute nicht das wäre, was sie ist, gilt das auch für diese Gebiete.

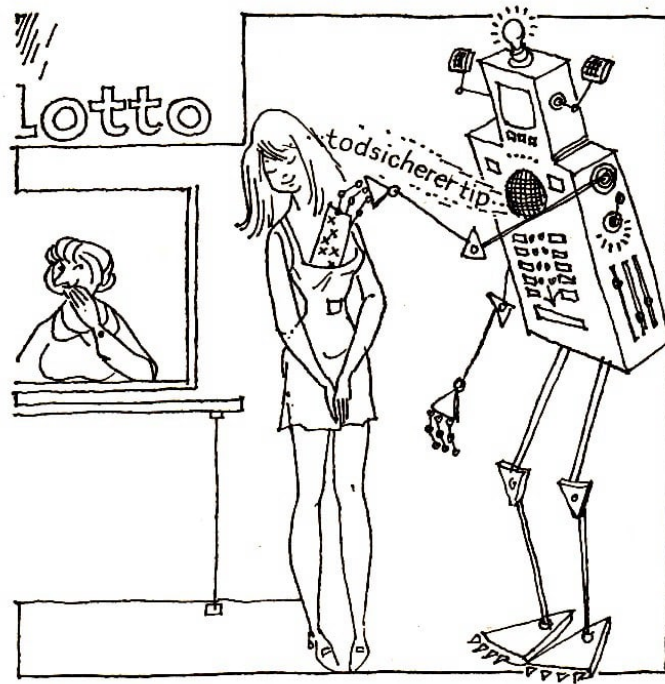
Mit dem Integrationsprozess erfolgt gleichzeitig eine immer höhere Spezialisierung. Das ist aber kein Widerspruch, sondern es liegt in der Dialektik der Sache begründet. Ein Spezialist darf jedoch nie die großen Entwicklungslinien und Zusammenhänge aus den Augen verlieren.

Diese Forderung ist nicht unbillig, weil die Verständigung der Mathematiker untereinander durch die bereits entwickelten und noch entstehenden allgemeinen Methoden und Verfahren immer besser möglich wird.

Natürlich muss der Weg von der hohen Abstraktion wieder zur Praxis zurückführen. Die Mathematik möglichst umfassend zum Wohle der Gesellschaft einzusetzen, sollte das Anliegen aller sein.



## 7 Von Zufall und Wahrscheinlichkeit



Neben funktionalen Beziehungen treten in der Praxis sehr oft sogenannte Massenerscheinungen auf, bei deren Erforschung man sich in erster Linie für die Gesetzmäßigkeiten interessiert, die scheinbar zufälligen Ereignissen innewohnen.

Zufällige Ereignisse sind solche, die im Einzelfall eintreten können, aber nicht eintreten müssen. Beispielsweise ist die laufende Produktion eines bestimmten Maschinenteils unter gleichen Bedingungen eine Massenerscheinung und das Auftreten eines fehlerhaften Stückes ein zufälliges Ereignis.

Entsprechendes gilt für das Auftreten eines Regentages im Laufe eines Jahres, die Erkrankung eines Bürgers der Hauptstadt während einer Epidemie oder für die Störung einer Fernsprechverbindung.

Die mathematische Behandlung solcher indeterminierten bzw. nicht genügend determinierten Prozesse erfordert geeignete Methoden und Verfahren, d.h. eine ganz spezielle mathematische Disziplin, die Wahrscheinlichkeitstheorie: Sie bildet die Grundlage für die Untersuchung von Massenerscheinungen bzw. zufälligen Ereignissen und deren mathematische Modellierung.

Nach dem gegenwärtigen Erkenntnisstand muss man bei der Modellierung zwei Arten von Problemen unterscheiden.

Erstere sind ausschließlich mittels des Begriffes der Wahrscheinlichkeit beschreibbar. So können beispielsweise in der modernen Physik Angaben über bestimmte Größen lediglich unter Benutzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes gemacht werden.

Bei dem anderen Problemtyp hat es entweder wissenschaftlich keinen Sinn, das individuelle Verhalten einer Erscheinung zu beschreiben, oder es scheint nicht möglich, den individuellen Kausalzusammenhang vollständig zu erforschen, da das Erfassen aller Be-

dingungen zu schwierig ist. In diese Gruppe gehören neben den vier oben angegebenen sehr viele Probleme der täglichen Praxis. Sie sollen daher im weiteren betrachtet werden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung reicht in ihren Anfängen weit zurück. Sie entstand ursprünglich aus dem Bedürfnis, Glücksspiele mathematisch zu analysieren.

Erst in unserem Jahrhundert wurde ihre große Bedeutung für die Behandlung vieler Erscheinungen der sich stürmisch entwickelnden Natur- und Gesellschaftswissenschaften sowie der Technik klar erkannt, und dadurch nahm sie einen gewaltigen Aufschwung.

Unter einem Versuch versteht man die Realisierung einer wohlbestimmten Menge von Bedingungen (wesentliche Bedingungen), die im Prinzip beliebig oft reproduzierbar sind, und unter einem Ereignis (zufälliges Ereignis) jede Erscheinung im Ergebnis eines Versuches.

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit geht von den Voraussetzungen aus, dass bei einem Versuch das Eintreten jedes Ereignisses gleichmöglich (gleichwahrscheinlich) ist und dass die Ereignisse untereinander unvereinbar sind (Anzahl der möglichen Fälle).

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  für das Eintreten des Ereignisses  $A$  ist nach diesen Voraussetzungen durch  $P(A) = \frac{m}{n}$  definiert, wobei  $m$  die Anzahl der für  $A$  günstigen und  $n$  die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle bedeuten.

Zur Demonstration dieses Sachverhalts dient oft das Würfeln mit einem idealen Würfel. So ist z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei einem Wurf eine ungerade Zahl ergibt,  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Für die Behandlung zahlreicher Probleme erwies sich aber die klassische Definition bald als zu eng, und man ersetzte sie durch eine andere, durch die weniger formal mathematische als vielmehr beschreibende statistische Definition.

Diese geht davon aus, dass bei einem genügend oft wiederholten Versuch - wie man beobachten kann - die Häufigkeit des Auftretens ein und desselben Ereignisses  $A$ , dividiert durch die Anzahl der Versuche, in vielen Fällen einer festen Konstanten nahe kommt.

Zur Veranschaulichung des statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes möge folgendes Beispiel dienen.

Werden  $n$ -mal jeweils 50 Teile einer laufenden Produktion geprüft und stellt sich dabei heraus, dass in  $k_0$  Fällen die Serie fehlerfrei war, in  $k_1$  Fällen ein fehlerhaftes, in  $k_2$  Fällen zwei fehlerhafte, ..., in  $k_8$  Fällen 8 fehlerhafte Teile mit  $\sum_{i=0}^8 k_i = n$  gefunden

wurden, dann sind die wo Größen  $h_i = \frac{k_i}{n}$  die relativen Häufigkeiten.

Ist die Anzahl  $n$  der Prüfreiheiten zu je 50 Stück hinreichend groß, so kann man die relative Häufigkeit  $h_i$  als Wert für die Wahrscheinlichkeit  $P(A_i)$  des zufälligen Ereignisses  $A_i$  betrachten.

Tabelle 2

Fehlerhafte Stücke (pro 50 Stück) $A_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$	0,08	0,10	0,12	0,15	0,24	0,1	0,11	0,04	0,01

Offenbar gilt, genau wie im klassischen Fall, für die Wahrscheinlichkeit  $P(A_i)$  die Beziehung  $0 \leq P(A_i) \leq 1$ . Ist  $P(A_i) = 0$  bzw.  $P(A_i) = 1$ , so liegt das unmögliche bzw. das sichere Ereignis vor.

In Tabelle 2 sind in der ersten Zeile die Werte für die sogenannte zufällige Variable  $X$  und in der zweiten die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit  $\sum_{i=0}^8 P(A_i) = 1$  eingetragen. Im vorliegenden Fall kann die Zufallsgröße  $X$  nur diskrete Werte  $A_i$  annehmen. Ihr wird ein sogenanntes Verteilungsgesetz  $P(X)$  und eine diskrete Verteilungsfunktion  $F(X)$  zugeordnet (Abb. 14 und 15).

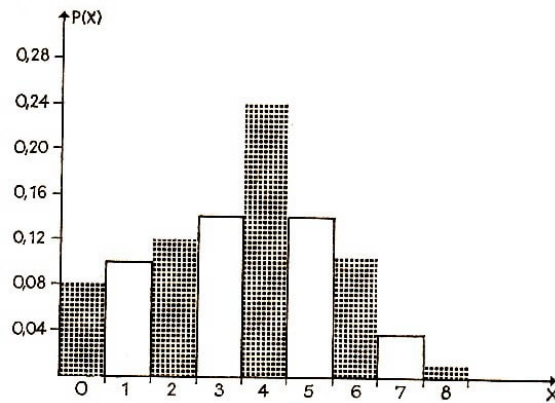


Abb. 14

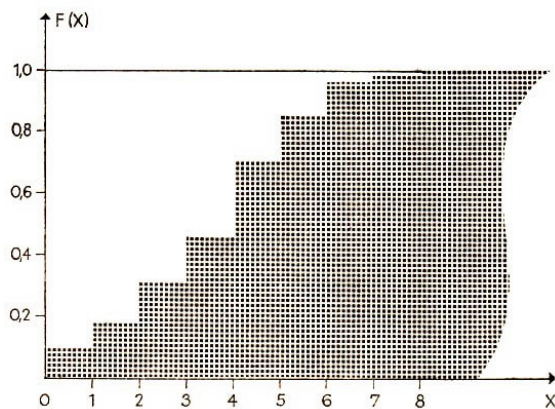


Abb. 15

Letztere gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass eine Serie nicht mehr als  $i$  fehlerhafte Stücke enthält.

Außer den diskreten treten oft stetige Zufallsgrößen  $X$  auf. Eine solche kann in einem Intervall jeden Wert  $X = x$  annehmen, wie das etwa bei dem Gewicht von Kindern eines bestimmten Alters zutrifft oder bei der Abweichung des Maßes eines Werkstückes von einem vorgegebenen.

An die Stelle des Verteilungsgesetzes tritt dann die Wahrscheinlichkeitsdichte oder Dichtefunktion  $f(x)$ , während die Verteilungsfunktion  $F(x)$  der stetigen Zufallsgröße  $X$  durch die Beziehung  $F(x) = P(X < x)$  bestimmt ist.

Unter Verwendung des Integralbegriffes ergibt sich in Anlehnung an den Sachverhalt bei diskreten Zufallsgrößen:

$$f(x) \geq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

und

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{mit} \quad F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$$

In Abb. 16 ist die sehr häufig auftretende Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

die sogenannte Gaußsche Verteilung, auch Normalverteilung genannt, dargestellt.

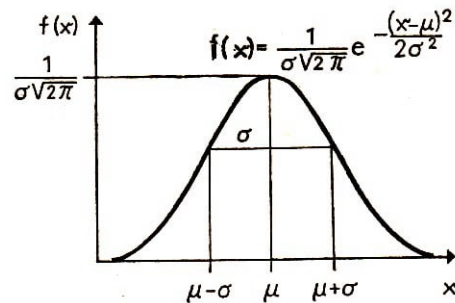


Abb. 16

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zufällige Ereignis  $X = x$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$  liegt, ergibt sich als

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = F(x_2) - F(x_1)$$

Die Kurve der entsprechenden Verteilungsfunktion zeigt Abb. 17.

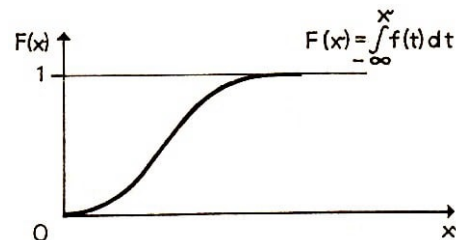


Abb. 17

Obwohl das Verteilungsgesetz bzw. die Dichtefunktion lückenlos Auskunft über die Zufallsgröße und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gibt, erweist es sich für die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als zweckmäßig, noch verschiedene Parameter einzuführen. Die zwei wichtigsten sind der Erwartungswert (Mittelwert)

$$\mu = \sum_{i=1}^n A_i P(A_i) \quad \text{bzw.} \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

und die Varianz (Streuung)

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (A_i - \mu)^2 P(A_i) \quad \text{bzw.} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Der Erwartungswert ist auf Grund dieser Definition als arithmetisches Mittel zu deuten, während die Varianz ein Maß für die Abweichung vom Mittelwert darstellt.

Den Sinn dieser zwei Größen erkennt man aus Abb. 14 bzw. Abb. 16.

Die hier in groben Zügen gegebene statistische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes reicht jedoch heute für eine dem Entwicklungsstand der Wissenschaft entsprechende mathematische Fundierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch nicht mehr aus. Die verschiedenen Möglichkeiten, die sich bei der theoretischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bieten, erfordern Hilfsmittel der modernen Algebra, der Mengenlehre und der Analysis.

Besonders die sowjetische Schule mit Andrei Andrejewitsch Markow (1856-1922), Alexander Jakowlewitsch Chintchin (1894-1959) und Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow an der Spitze hat sich um den Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie sehr verdient gemacht.

Die von Kolmogorow begründete axiomatische Methode ist gegenwärtig richtungsweisend, da sie vor allem auch in praktischer Hinsicht den ständig steigenden Anforderungen von Natur- und Gesellschaftswissenschaften sowie der Technik gerecht wird.

Der Grundgedanke dieser Methode besteht darin, dass man die Menge  $X$  aller mit einem Versuch verbundenen Ereignisse als normierte Boolesche Algebra auffasst (George Boole 1815-1864).

Eine Menge  $X$  heißt Boolesche Algebra, wenn für beliebige Elemente  $A, B \in X$  eine Verknüpfung  $A + B$  erklärt ist mit den Eigenschaften

$$A + B \in X, \quad A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

sowie (eine Operation  $\bar{A}$ ) durch die Relation

$$\overline{\overline{A + B} + \overline{A + B}} = A$$

Aus diesen Axiomen folgen alle weiteren Grundeigenschaften der Menge, falls noch das Produkt  $AB$  als  $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ , die Beziehung  $A \subset B$  durch  $A + B = B$ , die beiden Elemente  $I$  und  $\emptyset$  durch  $A + \overline{A} = I$  sowie  $A\overline{A} = \emptyset$  für beliebiges  $A$  definiert werden.

Die Normierung der Menge erfolgt, indem man jedem  $A \in X$  eine reelle Zahl  $P(A)$  zuordnet mit den Eigenschaften

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad P(\emptyset) = 0; \quad P(I) = 1$$

$P(A) \leq P(B)$  für  $A \subset B$  und  $P(A + B) = P(A) + P(B)$  für  $AB = \emptyset$ .

Werden diese Axiome und Definitionen auf den eingangs gegebenen Begriff des Versuchs angewendet, so heißt  $A \in X$ , dass  $A$  ein zufälliges Ereignis ist;  $\emptyset$  ist das unmögliche (das kleinste Element),  $I$  das sichere Ereignis (das größte Element).

Die Summe  $A + B$  (bzw.  $A \cup B$ ) bedeutet, wenigstens eines der Ereignisse  $A$  oder  $B$  tritt ein; das Produkt  $AB$  (bzw.  $A \cap B$ ) bedeutet, beide Ereignisse  $A$  und  $B$  treten ein.

Das Element  $\bar{A}$  (Komplement von  $A$ ) ist das zu  $A$  komplementäre Ereignis.  $\bar{A}$  drückt das Nichteintreffen des Ereignisses  $A$  aus, während die Differenz  $A \setminus B = A\bar{B}$  (bzw.  $A \cap \bar{B}$ ) besagt, dass das Ereignis  $A$  eintritt und das Ereignis  $B$  nicht.

Schließlich folgt aus der Beziehung  $AB = \emptyset$  (bzw.  $A \cap B = \emptyset$ ), dass  $A$  und  $B$  unvereinbare Ereignisse sind. Als Norm wird den Elementen  $A \in X$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  zugeordnet.

Zur Erläuterung soll die Entnahme von Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln betrachtet werden. Alle möglichen Mengen, die aus diesen  $n$  Kugeln gebildet werden können, stellen die Menge  $X$  der Ereignisse dar.

Die Summe bzw. das Produkt aus zwei Ereignissen  $A_i^{(\alpha)}, A_j^{(\beta)}$  (Mengen von Kugeln) entsprechen der Vereinigungsmenge bzw. dem Durchschnitt. Als Norm wird jeder elementareren Menge  $A_i^{(1)}$  (also jeder Kugel) die Zahl  $\frac{1}{n}$  zugeordnet.

Alle diese Festlegungen muss man natürlich so treffen, dass in der Formulierung des zu behandelnden Problems die normierte Boolesche Algebra irgendwie enthalten ist.

Die Aufgabe besteht dann ganz allgemein darin, die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu ermitteln, die aus den Elementarereignissen  $A, B, \dots$  (ihre Wahrscheinlichkeiten müssen bekannt sein) mit Hilfe der Operationen dieser normierten Booleschen Algebra gewonnen werden.

Um eine solche Theorie sinnvoll anwenden zu können, müssen also die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse mit ihren in einer möglichst umfangreichen Versuchsreihe ermittelten relativen Häufigkeiten weitgehend übereinstimmen.

Bei dem vorliegenden Beispiel ist die Boolesche Algebra als Gesamtheit von Mengen gegeben, deren Elemente (Kugeln) einer umfassenden Menge (Menge aller Kugeln der Urne) angehören (Mengenalgebra).

Wie sich zeigt, ist diese Interpretation bei allen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufgaben möglich, weshalb statt der Operationszeichen  $(+)$  und  $(\cdot)$  oft die Zeichen  $(\cup)$  und  $(\cap)$  für Vereinigung bzw. Durchschnitt von Mengen verwendet werden.

Deswegen ist es auch nicht notwendig, die betreffende Boolesche Algebra selbst zu betrachten, sondern es genügt, eine gewisse vollständige Menge von Elementarereignissen als Grundelemente festzulegen, so dass die Untermengen dieser Menge gerade mit den zufälligen Ereignissen (ihre Anzahl braucht nicht endlich zu sein) übereinstimmen.

Für die strenge mathematische Modellierung zufälliger Erscheinungen muss jetzt nur noch bestimmten Teilmengen  $A$  der Menge aller Elementarereignisse eine Norm  $P(A)$  zugeordnet werden, wobei genau die Axiome zu fordern sind, die sicherstellen, dass auf diese Weise eine normierte Boolesche Algebra entsteht. Das sind die Grundgedanken der Kolmogorowschen Axiomatik, die natürlich im Rahmen dieses Buches unmöglich in allen Einzelheiten exakt dargelegt werden können.

Bemerkt sei lediglich noch, dass diese Theorie bei der Untersuchung kompliziertester Probleme der Praxis bisher ihre Bewährungsprobe glänzend bestanden hat.

Bevor nun die hier dargelegten Grundgedanken an Hand einer Reihe praktischer Probleme

me verdeutlicht und dabei weitere allgemeine Ergebnisse erläutert werden, sollen noch einige Bemerkungen zur mathematischen Statistik folgen, weil sie mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung eng zusammenhängt.

Der Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit weist darauf bereits hin.

Die Anfänge der mathematischen Statistik liegen ebenfalls relativ weit zurück. Ursprünglich beschäftigte sich diese Disziplin mit der Untersuchung solcher für einen Staat bedeutungsvollen Massenerscheinungen wie Bevölkerungsdichte, Geburtenzuwachs und Besitzverhältnisse.

Erst in den vergangenen Jahrzehnten rückte man von diesen speziellen Untersuchungsobjekten ab. So entstanden in Verbindung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung allgemeine Theorien zur Analyse beliebigen statistischen Materials.

Den Ausgangspunkt bildet hierbei eine Grundgesamtheit von unter gleichen Bedingungen angestellten Versuchen oder Beobachtungen, etwa an der Gesamtbevölkerung eines Landes. Nun

Wäre es sehr aufwendig, in vielen Fällen sogar unmöglich, durch die Analyse der ganzen Grundgesamtheit ihre verschiedenen Merkmale (z.B. die Anzahl der an einer bestimmten Krankheit leidenden Menschen), die als Zufallsgrößen gedeutet werden können, zu untersuchen. Deshalb beziehen sich die Betrachtungen immer nur auf endliche Teilmengen (Stichproben) der Grundgesamtheit, und man schließt dann von der Verteilung und den Parametern der Zufallsgröße  $X$  einer Stichprobe auf die Verteilung und die Parameter von  $X$  bezüglich der ganzen Grundgesamtheit.

So ermöglicht beispielsweise das Ergebnis der Untersuchungen an einer Gruppe von Bürgern, Aussagen über den Anteil der von einer bestimmten Krankheit befallenen Menschen im ganzen Lande zu machen, d.h., es werden Schätzungen für den Mittelwert und die Streuung angegeben.

Neben der Schätzung entsprechender Parameter spielen die sogenannten Prüftests eine wichtige Rolle.

Wird z.B. festgestellt, dass in einem bestimmten Bereich der chemischen Industrie die mittlere Krankheitsquote höher liegt als im ganzen Lande, so ist zu untersuchen, ob diese Abweichung rein zufälliger oder wesentlicher Natur ist.

Geht man dabei von einer zufälligen Abweichung aus, d.h., gehört die Stichprobe zu derselben Grundgesamtheit, so ist die sogenannte Nullhypothese zu prüfen, andernfalls die Alternativhypothese (wesentliche Abweichung). Dabei muss beachtet werden, dass der Entscheid zugunsten der einen oder der anderen Hypothese nicht in jedem Falle richtig zu sein braucht, denn er stützt sich ja lediglich auf eine Stichprobe von bestimmtem Umfang.

Somit besteht die Möglichkeit eines Irrtums, weshalb die Angabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit erforderlich ist, die meist zu 5%, 1% oder 0,1% festgelegt wird.

Die gebräuchlichsten Verteilungen zur Prüfung der Nullhypothesen sind neben der Normalverteilung die t-Verteilung, die F-Verteilung und die  $\chi^2$ -Verteilung. In Abb. 18 ist eine t-Verteilung mit dem Bereich für eine 5%ige Irrtumswahrscheinlichkeit dargestellt.

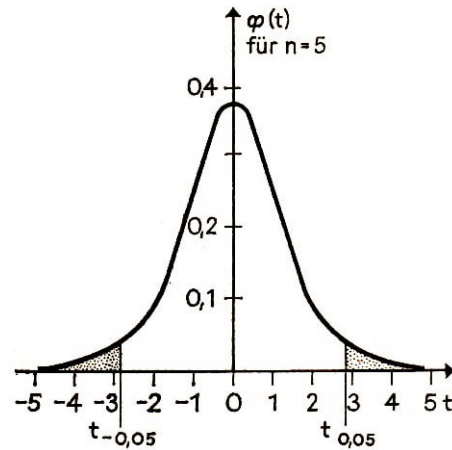


Abb. 18

Verständlicherweise interessiert man sich in der Praxis nicht nur für die einzelnen Zufallsgrößen schlechthin, sondern auch für den Zusammenhang zwischen ihnen.

Mit der Art dieses Zusammenhangs beschäftigt sich die Regressionsanalyse, während durch die Korrelationsanalyse dessen Grad ermittelt wird.

Diese Methoden werden eingesetzt, wenn es z.B. um die Klärung der Frage geht, ob überhaupt ein Zusammenhang zwischen der Brinellhärte von Blockstahl und dessen Kohlenstoffgehalt besteht und, wenn ja, welchen Grades dieser Zusammenhang ist.

Bei den ersten der nun folgenden, konkreten Aufgaben lässt sich die Wahrscheinlichkeit direkt berechnen. Durch die Modellierung der betreffenden Erscheinungen wird deutlich, wie sich gesuchte Wahrscheinlichkeiten aus bekannten zusammensetzen. (Darin besteht übrigens das Grundproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Gleichzeitig sollen hierbei eine Reihe wichtiger Begriffe bzw. Formeln dargelegt werden.

Zunächst werde aus einer Sendung von Maschinenteilen, unter denen sich  $n$  einwandfreie und  $m$  minderwertige befinden, zur Kontrolle eine Probe von  $s$  Stück willkürlich ausgewählt.

Bei der Überprüfung zeigt sich, dass die ersten  $k$  der  $s$  Teile einwandfrei sind. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies auch für das  $(k + 1)$  gilt?

Da zur weiteren Auswahl noch  $n - k$  einwandfreie und  $(n - k) + m$  Teile überhaupt vorliegen, ist

$$p = \frac{n - k}{n + m - k}$$

Dieselbe Sendung bestehe jetzt aus 100 Teilen. Sie ist durch eine Stichprobe zu testen, und zwar wird die Annahme verweigert, wenn unter fünf ausgewählten Teilen mindestens ein unbrauchbares ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung, falls die Sendung 5% Ausschuss enthält?

Hier wird zweckmäßig zunächst die Wahrscheinlichkeit  $q$  für die Brauchbarkeit der Serie (Komplementärereignis) bestimmt. Das gegebene Ereignis ist ein Produkt aus 5 Ereignissen  $A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ , wobei die  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) bedeuten, dass das  $k$ -te getestete Teil brauchbar ist.

Es gilt  $P(A_1) = \frac{95}{100}$ , da von den 100 Teilen 95 brauchbar sind. Ist das Ereignis  $A_1$



eingetreten, bleiben zum Test noch 99 Teile, unter denen 94 brauchbar sind. Das ergibt  $P(A_2|A_1) = \frac{94}{99}$ .

$P(A_2|A_1)$  bedeutet die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses  $A_2$  unter der Voraussetzung, dass  $A_1$  eingetreten ist. Eine solche Wahrscheinlichkeit heißt bedingte Wahrscheinlichkeit.

Für die Wahrscheinlichkeit eines Produktes  $AB$  zweier Ereignisse folgt daraus die wichtige Beziehung

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Diese kann auf ein Produkt mit mehr als zwei Faktoren erweitert werden.

Nunmehr ergibt sich für das Beispiel

$$\begin{aligned} q &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdot P(A_4|A_1A_2A_3) \cdot P(A_5|A_1A_2A_3A_4) \\ &= \frac{95}{100} \frac{94}{99} \frac{93}{98} \frac{92}{97} \frac{91}{96} = 0,77 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $p$  ist somit

$$p = 1 - q = 0,23$$

Schließlich werde an Stelle der obigen Forderungen verlangt, dass die Sendung dann anzunehmen ist, wenn unter 50 zufällig herausgegriffenen Teilen höchstens ein unbrauchbares ist.

Um unter diesen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Sendung zu bestimmen, ist der bereits erwähnte Additionssatz erforderlich

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad \text{für} \quad P(AB) = \emptyset$$

Übrigens gilt dieser, falls  $A$  und  $B$  nicht unvereinbar sind, in der Form

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Zur Lösung der Aufgabe wird mit  $A$  das Ereignis, dass bei der Prüfung kein schlechtes Teil, mit  $B$  das, dass lediglich ein unbrauchbares Teil auftritt, bezeichnet. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann  $P(A + B)$ .

Da die Ereignisse unvereinbar sind, gilt weiter  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

Für die Auswahl von 50 aus den insgesamt 100 Teilen gibt es  $\binom{100}{50}$  Möglichkeiten und aus den 95 einwandfreien Teilen  $\binom{95}{50}$ . Also folgt für  $P(A) = \frac{\binom{95}{50}}{\binom{100}{50}}$  und in entsprechender Weise für  $P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{49}}{\binom{100}{50}}$ .

Damit wird  $P(A + B) \approx 0,181$ .

Hierbei sind die Ausdrücke

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

die sogenannten Binomialkoeffizienten (gelesen  $n$  über  $k$ ).

Diese einführenden einfachen Betrachtungen sollen mit einem Beispiel abgeschlossen werden, zu dem die wichtige Formel von Bayes benötigt wird. Sie dient der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen entsprechend dem Versuch, d.h., es werden aus dem Auftreten des Ereignisses  $A$  darauf Rückschlüsse gezogen, welches der Ereignisse  $B_i$  tatsächlich eintrat. Die Formel lautet

$$P(B_i|A) = P(B_i)P(A|B_i) : \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)$$

Von einer telegraphischen Nachricht, wie üblich aus Punkten und Strichen bestehend, werden im Mittel  $\frac{2}{5}$  der Punkte und  $\frac{1}{3}$  der Striche gestört (statistische Eigenschaften!). Außerdem werden Punkte und Striche im Verhältnis 5 : 3 gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein übertragenes Signal verstanden werden kann, wenn ein Punkt bzw. ein Strich empfangen wird?

Die Ereignisse (Verstehen eines Signals und Empfang eines Punktes bzw. Striches) seien  $A$  und  $B$ . Man kann zwei Hypothesen aufstellen:  $B_1$  bedeutet, dass ein Punkt, und  $B_2$ , dass ein Strich eingegeben wurde.

Nach Voraussetzung gilt dann  $P(B_1) : P(B_2) = 5 : 3$  und außerdem  $P(B_1) + P(B_2) = 1$ .

Es folgt  $P(B_1) = \frac{5}{8}$ ;  $P(B_2) = \frac{3}{8}$ .

Weiter ist  $P(B|B_1) = \frac{2}{5}$ ;  $P(A|B_2) = \frac{1}{3}$  bekannt und daher auch  $P(A|B_1) = \frac{3}{5}$ ;  $P(B|B_2) = \frac{2}{3}$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  bzw.  $P(B)$  ergibt sich aus dem grundlegenden Satz über die totale Wahrscheinlichkeit. Er lautet:

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  für das Eintreffen des Ereignisses  $A$ , das nur zusammen mit dem vollständigen System unvereinbarer Ereignisse (Hypothesen)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  eintreffen kann, ist bestimmt durch die Beziehung

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^n P(B_j) = 1$$

Danach werden

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Das Ergebnis lautet dann:

$$P(B_1|A) = P(B_1)P(A|B_1) : P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(B_2|A) = P(B_2)P(A|B_2) : P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Die bisherigen Aufgaben zeigen nicht nur die spezifische Eigenart wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, sondern sie lassen auch die praktische Tragfähigkeit der am Anfang des Kapitels dargelegten allgemeinen Ideen erkennen.

Die nun folgenden Betrachtungen sollen die enge Verknüpfung statistischer Fragestellungen mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit verdeutlichen. Eine solche Problematik großer praktischer Bedeutung ist die Prüfung von Hypothesen. Meist stellt sich das Problem etwa so dar:

Mittels einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit sind Messungen oder Beobachtungen angestellt worden, und es ist festzustellen, ob die gefundenen Werte nur zufällig von einer vorgegebenen Größe abweichen oder nicht.

Dazu ein Beispiel: Ein Betrieb gibt für den Lichtstrom bei Fluoreszenzlampen von 40 Watt nach 100 Brennstunden einen Wert von 2300 Lumen an. Der Abnehmer prüft dies an 5 gekauften Exemplaren nach und erhält die Werte von 2290, 2290, 2278, 2283, 2268 Lumen.

Nimmt man an, dass das Merkmal normalverteilt ist, so kann man  $\mu = 2300$  als Mittelwert der entsprechenden Grundgesamtheit (alle unter gleichen Bedingungen hergestellten Lampen zu 40 Watt) deuten.

Es ist nun zu ermitteln, ob die erhaltenen 5 Messwerte nur zufällig von 2300 abweichen. Andernfalls kann  $\mu$  nicht Mittelwert der normalen Grundgesamtheit sein.

Ein zur Prüfung dieser Hypothese geeignetes Verfahren stammt von Student (Pseudonym für W. S. Gosset).

Danach genügt die Prüfgröße

$$t = \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\tilde{\sigma}} \sqrt{n}$$

bei festem Stichprobenumfang  $n$  und den zugehörigen Parametern  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\sigma}$  der sogenannten Student- oder  $t$ -Verteilung

$$\varphi(t) = \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right] : \left[ \left( \frac{n-2}{2} \right)! \sqrt{\pi n} \left( 1 + \frac{t^2}{n} \right) \frac{n+1}{2} \right]$$

Die Darstellung der  $t$ -Verteilung hat eine ähnliche, symmetrische Form wie die der Normalverteilung (Abb. 18), und für  $n \rightarrow \infty$  geht sie in die der Normalverteilung über. Deshalb ersetzt man bisweilen für große Stichprobenumfänge  $n$  die  $t$ -Verteilung näherungsweise durch die Normalverteilung.

Sehr wichtig ist vor allem, dass in der  $t$ -Verteilung die Streuung  $\sigma^2$  der Grundgesamtheit nicht auftritt, weil ja die Aufgabenstellung keinerlei Angaben darüber enthält. Übrigens sind alle wichtigen Verteilungen in Tafelwerken fixiert.

Bei einer gewählten Sicherheitsschwelle von 0,05 folgt für  $n = 5$  der Wert  $t_{\pm 0,05} = \pm 2,776$ . Weiterhin ergibt sich auf Grund der früher angegebenen Formeln für  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\sigma}$  durch einfache Rechnung  $\tilde{\mu} = 2281,8$  bzw.  $\tilde{\sigma} = 9,230$ .

Damit wird  $t = -4,409$ , und die Hypothese muss verworfen werden, weil  $-4,409 < -2,776 = t_{-0,05}$  gilt.

Gleichwertig mit diesem Ergebnis ist die Aussage, dass der durchschnittliche Lichtstrom von 2281,8 Lumen wesentlich von dem angegebenen Wert  $\mu = 2300$  Lumen abweicht, wobei der Richtigkeit dieser Aussage eine Wahrscheinlichkeit von 0,95  $\hat{=}$  95% zukommt

und die Irrtumswahrscheinlichkeit somit 5% beträgt.

Der soeben dargestellte Sachverhalt hängt eng mit der Schätzung der Parameter einer Grundgesamtheit zusammen. Soll sie mit Hilfe einer Stichprobe erfolgen, so muss man sich ein Bild über die Unsicherheit der Schätzung machen.

Das kann durch die Berechnung der sogenannten Vertrauensgrenzen auch bei kleinen Stichproben geschehen.

Der Einfachheit halber wird wieder vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit normalverteilt, d.h. durch die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  vollständig bestimmt ist.

Wie gezeigt werden kann, ist dann z.B.  $\tilde{\mu}$  in gewissem Sinne die beste Schätzung des Parameters  $\mu$ . Um die Unsicherheit des Mittelwertes  $\tilde{\mu}$  zu bemessen, geht man wieder von der Größe  $t = \frac{\tilde{\mu} - \mu}{\tilde{\sigma}} \sqrt{n}$  aus.

Auf Grund der  $t$ -Verteilung berechnet man die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, dass  $t$  einen bestimmten Wert  $t_0$  überschreitet. Mit wachsendem  $t_0$  nimmt  $P$  ab.

In der Formel für  $t$  sind  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\sigma}$  sowie  $n$  bekannt und  $\mu$  unbekannt. Setzt man nun in diesen Ausdruck  $t_0 < t_1$  ein und löst nach  $\mu$  auf, so ergibt sich die Ungleichung

$$\mu < \tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma} t_0}{\sqrt{n}}$$

der dieselbe Wahrscheinlichkeit  $P$  entspricht wie der ersten.

Auf diese Weise wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  hergeleitet. Insbesondere kann man auch die Grenzen angeben, außerhalb deren der Wert  $\mu$  mit einer Wahrscheinlichkeit von z.B. nur 5% zu erwarten ist. Diese Grenzen heißen die untere bzw. obere Vertrauensgrenze.

Dies, auf das betrachtete Beispiel angewendet, ergibt:

$$\mu_{\alpha} = \tilde{\mu} - \tilde{\sigma} t_{0,05} : \sqrt{n} = 2281,8 - 9,230 \cdot 2,776 : \sqrt{5} = 2270,3$$

$$\mu_{\beta} = \tilde{\mu} + \tilde{\sigma} t_{0,05} : \sqrt{n} = 2283,3$$

Hiernach liegt  $\mu$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95, also von 95%, zwischen den Grenzen  $\mu_{\alpha}$  und  $\mu_{\beta}$ . Unter den gleichen Bedingungen kann auf ähnliche Weise der Parameter  $\sigma$  geschätzt werden, wozu allerdings nicht die  $t$ -Verteilung, sondern die  $\chi^2$ -Verteilung benötigt wird.

Dieser kleine Einblick in das umfangreiche Gebiet der Schätzung von Parametern und der Prüfung von Hypothesen soll jedoch genügen.

Wie am Beispiel der Wachstumskurve eines Nadelbaumes schon angedeutet wurde, spielt die Schätzung von Parametern auch bei funktionalen Zusammenhängen zwischen Variablen, deren Werte aus Versuchen ermittelt wurden, eine große Rolle. Dazu kann die früher erläuterte Methode der kleinsten Quadrate benutzt werden, wenn die Kurvenform der gesuchten funktionalen Abhängigkeit bekannt ist.

Auf Grund von  $n + 1$  Beobachtungen, aus denen die Werte  $(t_k, y_k)$  gewonnen wurden, sind dann die Parameter der Funktion  $f(t)$  so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$S = \sum_{k=0}^n [y_k - f(t_k)]^2$$

ein Minimum wird. Oft ist die Approximationsfunktion ein Polynom

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$$

mit  $m \leq n$ .

(In dem früher angegebenen Beispiel war  $m = 1$ .) In diesem Fall ergeben sich die Näherungswerte  $\tilde{a}_k$  für die Koeffizienten  $a_k$  aus  $m+1$  linearen algebraischen Gleichungen (Normalgleichungen).

Sind die Werte  $t_k$  exakt bekannt und die  $y_k$  voneinander unabhängig und von gleicher Genauigkeit, so erhält man eine Abschätzung für die Streuung (Varianz)  $\sigma^2$  der Größen  $y_k$  aus der Formel

$$\sigma^2 = \frac{1}{n - m} S_{\min}$$

Dabei bedeutet  $S_{\min}$  die minimierte Summe  $S$ . Sind die Größen  $y_k$  normalverteilt, so ist die Methode der kleinsten Quadrate - wie man beweisen kann - das beste Verfahren zur Bestimmung der Approximationsfunktion  $f(t)$ .

Darüber hinaus können auch Schätzungen für die Varianzen der Koeffizienten  $\tilde{a}_k$  und der Korrelationsmomente vorgenommen werden. Damit ist die bewährte und wichtige Methode der kleinsten Quadrate durch die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sicher fundiert.

Von großer Bedeutung für die Praxis ist auch die statistische Qualitätskontrolle, d.h. die auf Stichproben beruhende Beurteilung der Güte von Produkten aus der Massenproduktion. Dabei wird ein sogenanntes Los (z.B. eine Lieferung, der Produktionsausstoß während eines Zeitabschnittes usw.) akzeptiert, wenn der das Los charakterisierende Parameter (Prüfgröße) eine gewisse Grenze  $l_0$  nicht überschreitet, während es für  $l_1 > l_0$  als unbrauchbar gilt.

Die Qualität eines Loses kann z.B. durch die Zahl der untauglichen Stücke, durch den Mittelwert eines Losparameters bzw. bei der Kontrolle der Homogenität der Produktion durch die Varianz eines Losparameters charakterisiert werden.

Mit einer zu garantierenden Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  wird ein gutes Los abgelehnt (Produzentenrisiko) bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit  $\beta$  ein unbrauchbares angenommen (Konsumentenrisiko).

Die Methoden der Qualitätskontrolle sind unterschiedlich. Es gibt die einfache und die doppelte Probenahme sowie die Sequentialanalyse. Letztere beruht auf der Berechnung der Prüfgröße  $\gamma$  eines zu kontrollierenden Parameters für veränderliche Stichprobenumfänge  $n$ .

Die Kontrolle ist so lange fortzusetzen, bis  $\gamma \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$  bzw.  $\gamma \geq \frac{1-\beta}{\alpha}$  gilt.

Im ersten Fall wird das Los angenommen, im zweiten abgelehnt. Für  $\frac{\beta}{1-\alpha} < \gamma$  und  $\gamma < \frac{1-\beta}{\alpha}$  muss der Versuch fortgesetzt werden.

Bei einem einfachen Stichprobenplan dagegen spielen nur der Umfang  $n_0$  der Probe und die Annahmekennziffer  $\nu$  eine Rolle. Soll insbesondere der Anteil der untauglichen Stücke in der Stichprobe kontrolliert werden, so gelten bei einer Losgröße  $N$  und einer

Gesamtzahl  $L$  untauglicher Stücke die Beziehungen

$$\alpha = P(M > \nu | L = l_0) = 1 - \sum_{m=0}^{\nu} \frac{\binom{l_0}{m} \binom{N-l_0}{n_0-m}}{\binom{N}{n_0}} \quad \text{und}$$

$$\beta = P(M < \nu | L = l_1) = \sum_{m=0}^{\nu} \frac{\binom{l_1}{m} \binom{N-l_1}{n_0-m}}{\binom{N}{n_0}}$$

Diesen Formeln liegt die sogenannte hyperbolische Verteilung zugrunde. In anderen Fällen bzw. bei der Prüfung der Homogenität oder bei doppelten Stichprobenplänen werden die Binomialverteilung, die Poissonverteilung oder auch die Normalverteilung angewendet.

In den letzten Jahren sind die stochastischen Prozesse in verstärktem Maße untersucht worden. Solche Prozesse werden durch eine sogenannte Zufallsfunktion  $X(t)$  charakterisiert, deren reelles Argument  $t$  in einem beliebigen Intervall variieren kann. Meist bedeutet  $t$  die Zeit.

Zufallsfunktion wird  $X(t)$  deshalb genannt, weil die Funktionswerte Zufallsgrößen sind.

Nimmt das Argument  $t$  nur diskrete Werte an, so heißt  $X(t)$  auch zufällige Folge. Sehr häufig treten solche Funktionen bei Optimierungsproblemen auf, denn die optimalen Werte der sogenannten Kontroll- oder Entscheidungsvariablen sind in Vielen praktisch wichtigen Fällen Funktionen von Parametern, die eher als stochastische, denn als deterministische Variable behandelt werden müssen.

Auch in der Technik treten häufig Zufallsfunktionen auf. Die Beschleunigung bzw. die Geschwindigkeit eines Flugzeuges z.B. ist für dessen Piloten eine unentbehrliche Kenngröße. Sie wird durch einen Beschleunigungsgeber gemessen.

Bei der Messung entsteht naturgemäß ein Fehler  $\varepsilon(t)$ , der maßgeblich durch die zufälligen Störungen  $\gamma(t)$ , die den Messfühler des Gebers erreichen, beeinflusst wird. Die Größe  $\gamma(t)$  ist ihrer Natur nach eine Zufallsfunktion.

Als mathematisches Modell dieses Problems ergibt sich eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2h\dot{\varepsilon}(t) + n^2\varepsilon(t) = gn^2\gamma(t)$$

wobei die Buchstaben  $h$ ,  $n$  und  $g$  bestimmte Konstanten verkörpern. Werden noch einige weitere Bedingungen angegeben, so kann man auf dieser Grundlage z.B. den Fehler der Geschwindigkeitsanzeige und dessen Varianz berechnen.

Bemerkenswert ist, dass bei der Modellierung des Problems analytische und wahrscheinlichkeitstheoretische Gesichtspunkte eng ineinandergreifen. Trotz ihrer Spezifik spiegelt - wie die Analysis und andere Teilgebiete - auch die mathematische Behandlung von Massenerscheinungen alle grundsätzlichen Merkmale, die die gegenwärtige Rolle der Mathematik als Ganzes kennzeichnen, sehr eindrucksvoll wider.

Erstreckt sich doch das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik von den Naturwissenschaften über die Technik bis hin zur Ökonomie (Erforschung von Gesetzmäßigkeiten bei Massenerscheinungen in der Biologie,

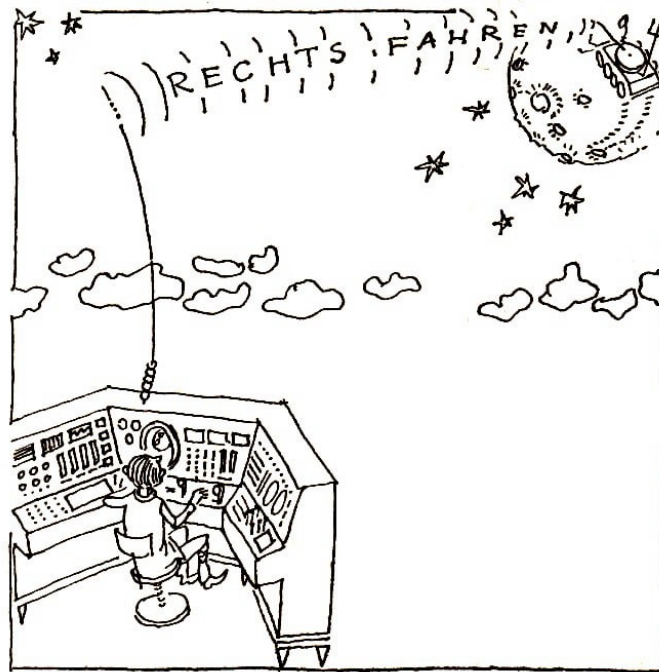
der Medizin, der Physik, der Meteorologie, Probleme der Produktionsüberwachung, statistische Untersuchung der Lebensdauer von Bauelementen, Untersuchung von Dauerfestigkeiten usw.). Dabei ist die moderne Rechentechnik von entscheidender Bedeutung.

Obwohl nur einige Grundgedanken dargelegt werden konnten (weiterführende Literatur [10, 11]), fällt es sicher nicht schwer, das fruchtbringende Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis, die unmittelbare Wirkung der Mathematik als Produktivkraft, das Entstehen neuer Theorien und ihre Verflechtung mit bereits vorhandenen, den Wert und die Notwendigkeit mathematischer Abstraktionen sowie ihren Nutzen für eine genaue Beschreibung von Erscheinungen der objektiven Realität und weitere grundlegende Gesichtspunkte ebenso am Beispiel der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik zu erkennen.

Zum Schluss nur noch der Hinweis, dass die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik in den letzten Jahren auch für solche klassischen Gebiete wie das der Differentialgleichungen verstärkt Bedeutung gewinnen.

Wenn man gleichzeitig den großen Einfluss von Funktionalanalysis, moderner Algebra, Mengenlehre und anderen Gebieten auf die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in diesem Jahrhundert beachtet, so kommt darin erneut und in ganz anderer Sicht der sich innerhalb der Mathematik vollziehende Integrationsprozess zum Ausdruck.

## 8 Die Kunst des Steuermanns



Besonders in einem Gebiet der Wissenschaft, das sich in den letzten 25 Jahren stürmisch entwickelt hat, spielen stochastische Prozesse und andere wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme eine ausschlaggebende Rolle.

Dieses Gebiet ist die Kybernetik. Mit ihrer Hilfe kann heute bereits auf viele praktische Fragen aus den unterschiedlichsten Bereichen von einem einheitlichen Standpunkt aus eine Antwort gegeben werden. Im Rahmen dieses Buches interessieren natürlich vor allem die mathematischen Methoden, deren man sich in hohem Maße in der Kybernetik bedient. Das gilt für Fragen der Regelungstheorie, wie sie im letzten Beispiel gestreift wurden, genauso wie für die Informationstheorie.

Die folgenden, den informationstheoretischen Darlegungen vorangestellten allgemeinen Bemerkungen sollen die Wechselbeziehungen zwischen Mathematik, Kybernetik und Praxis leichter erkennen lassen.

Die Kybernetik entstand in den vierziger Jahren unseres Jahrhunderts. Erste grundlegende Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von Norbert Wiener (1894-1964). Sein 1948 veröffentlichtes Buch "Kybernetik oder Regelung und Nachrichtenübertragung im Lebewesen und in der Maschine" erregte bei vielen Wissenschaftlern großes Interesse.

Gegenstand der Kybernetik ist das Studium von Prozessen in dynamischen Systemen (Abb. 19), vor allen Dingen in regelungs-, informations-, spiel- und algorithmentheoretischer Hinsicht [8]. Als dynamische Systeme können biologische genauso wie technische, ja sogar Vorgänge der Ökonomik gedeutet werden.

Aus diesem Grunde ist die Entstehung der Kybernetik eng mit der raschen Entwicklung der Produktivkräfte verbunden. Die Kybernetik gilt in methodischer Hinsicht als wertvoller Helfer für die verschiedensten traditionellen Wissenschaften. Die Technik wird von ihr immer stärker beeinflusst.



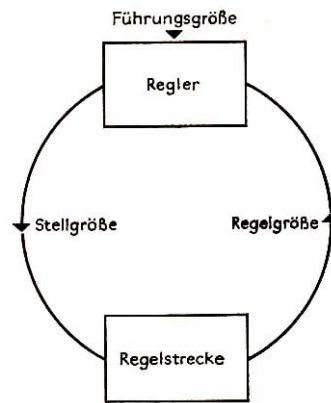


Abb. 19

Da technische Systeme und besonders ökonomische Prozesse ständig komplexer werden, ist ihre zuverlässige Steuerung und Regelung notwendig. Diese Forderung wird für die künftige Entwicklung immer zwingender. Darum muss die Kybernetik als eine ganz entscheidende Entdeckung unseres Jahrhunderts gewertet werden.

Obwohl die Kybernetik selbst keine mathematische Disziplin ist, bedient sie sich doch in hohem Maße mathematischer Methoden und Verfahren.

Wegen des Zusammenhanges der Kybernetik mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung sollen hier einige Grundprobleme der Informationstheorie behandelt werden. Die anderen, nicht minder wichtigen Gesichtspunkte können nur am Rande Berücksichtigung finden.

Die in Verbindung mit der Bestimmung der Varianz der Geschwindigkeit eines Flugzeuges auftretende Problematik gehört in die Regelungstheorie. Ebenso kann man die erwähnten ökonomischen Probleme als optimal zu steuernde bzw. zu regelnde Prozesse auffassen.

In den mathematischen Modellen solcher Aufgaben treten häufig Zufallsfunktionen auf, d.h., es liegen zudem stochastische Prozesse vor. Das ist jedoch nicht immer der Fall. Das Erfassen der Zusammenhänge zwischen Ursachen und Wirkungen in biologischen, technischen und anderen Regelsystemen durch bestimmte Größen ist Inhalt der Regelungsmathematik. Allgemein beschäftigt sie sich mit der mathematischen Beschreibung von Regelgliedern und ihren entsprechenden Schaltungen.

Für die Kybernetik ebenso fundamental ist die Algorithmentheorie.

Sie wurde bereits im Zusammenhang mit der numerischen Mathematik erwähnt, speziell in Verbindung mit der maschinellen Bearbeitung von Iterationsverfahren. Mit Hilfe von Algorithmen können im Prinzip Prozesse, die in Natur, Technik und Gesellschaft auftreten, auf Automaten nachgebildet werden. An einen solchen Algorithmus müssen eine Reihe von Forderungen gestellt werden, auf denen die gesamte allgemeine Theorie beruht.

Elementare Beispiele für Algorithmen sind der bekannte Multiplikations- und Divisionsalgorithmus sowie der Euklidische Algorithmus zum Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers (g.g.T.) zweier natürlicher Zahlen.

Der Algorithmusbegriff ist auch in der mathematischen Logik von großer Bedeutung. Ebenso gehört die Spieltheorie zum Fundament der Kybernetik. Die Untersuchungen der Spieltheorie erstrecken sich auf die Beziehungen zwischen Mensch und Natur bzw.

zwischen natürlichen Systemen, die man im Sinne eines strategischen Spieles deuten kann. Hierher gehören solche Probleme wie Planungsaufgaben, Fragen des Wettbewerbs; Kampfhandlungen zwischen Streitkräften usw. Deshalb wird die Spieltheorie oft auch als die mathematische Theorie der Konfliktsituationen bezeichnet. Als ihr Begründer gilt John von Neumann (1903-1957).

Am Beispiel der Informationstheorie sieht man deutlich, wie sich gegenwärtig im Wechselspiel zwischen Theorie und Praxis sehr schnell neue mathematische Theorien entwickeln, die ihren Ursprung einerseits in praktischen Aufgaben (hier die Nachrichtenübertragung), andererseits in neu entstandenen Wissensgebieten (wie der Kybernetik) haben.

Die Informationstheorie beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung von Problemen, die bei der Speicherung, Umformung (Codierung) und Übermittlung von Informationen auftreten [8]. Bei der Übermittlung eines Telegramms z.B. muss sein Text in spezielle Zeichen umgeformt werden, beim Fernsehen erfolgt die Übertragung von Bild und Ton mittels elektromagnetischer Wellen, entsprechend ist es beim Sprechfunk. Um derartige Erscheinungen mathematisch erfassen zu können, muss zunächst der Begriff der Information genau analysiert werden. Das geschieht auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage.

Man geht dabei ganz allgemein von einem Versuch aus, dessen Ergebnis eines von mehreren möglichen zufälligen Ereignissen ist. Offenbar haftet dem Eintreten eines solchen Ereignisses eine gewisse Unbestimmtheit an. Für viele praktische Fragen ist es erforderlich, diese Unbestimmtheit zahlenmäßig zu erfassen, um eine Vergleichsmöglichkeit zwischen verschiedenartigen Versuchen zu haben.

Besteht der Versuch z.B. darin, vorauszusagen, welches Zeichen (ob Punkt oder Strich) bei der Durchgabe einer Nachricht im Morsecode auf die erste lange Pause folgt, so ist diese Vorhersage jedenfalls stärker fundiert als etwa eine Prognose bezüglich der zu erwartenden fünf Zahlen im Zahlenlotto.

Betrachtet man zunächst Versuche mit  $k$  möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnissen, so ergibt sich der Grad der Unbestimmtheit des Versuchsausganges mittels einer Funktion der Zahl  $k$ . Für  $k = 1$  ist nämlich der Ausgang des Versuches völlig determiniert, während mit wachsendem  $k$  die Situation für eine Vorhersage immer komplizierter wird.

Diese Funktion  $f(k)$  muss nun sinnvoll festgelegt werden. Offenbar sind für sie folgende Eigenschaften zu fordern:

1. Es muss  $f(1) = 0$  gelten. Diese Beziehung drückt die Determiniertheit aus.
2. Mit  $k$  wächst auch  $f(k)$ . Das bedeutet, dass mit wachsendem  $k$  der Grad der Unbestimmtheit zunimmt.
3. Es soll  $f(k \cdot k') = f(k) + f(k')$  sein. Diese Gleichung sichert, dass sich für einen Versuch, der aus zwei Versuchen mit  $k$  bzw.  $k'$  gleichwahrscheinlichen Ausgängen (die unabhängig voneinander sind) zusammengesetzt ist, die Unbestimmtheit durch  $f(k) + f(k')$  ergibt.

Diese Bedingungen legen nahe, die Funktion  $f(k) = \log_2 k$  zu wählen.

Dabei ist es an sich gleichgültig, welches Logarithmensystem benutzt wird, jedoch erweist sich die Basis 2 für viele Anwendungen als sehr zweckmäßig.

Man kann leicht nachprüfen, dass  $f(k) = \log_2 k$  den drei angegebenen Forderungen genügt. Ja, es kann sogar bewiesen werden, dass der Logarithmus die einzige Funktion mit diesen Eigenschaften ist.

Der Vorschlag, den Grad der Unbestimmtheit eines Versuchs durch die Zahl  $\log_2 k$  zu charakterisieren, stammt von dem amerikanischen Nachrichteningenieur R. V. L. Hartley.

Für solche Fälle, in denen die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit der Versuchsausgänge nicht gilt, ist die Logarithmusfunktion aber als Maß für die Unbestimmtheit ungenügend. Eine dieser Situation besser angepasste Formel wurde von C. E. Shannon angegeben und fast gleichzeitig sowie unabhängig von ihm auch von N. Wiener erkannt.

Ausgangspunkt für diese Formel ist, dass im Falle gleicher Wahrscheinlichkeiten jeder einzelne Versuchsausgang, dem ja die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{k}$  zukommt, die Unbestimmtheit

$$\frac{1}{k} \cdot \log_2 k = -\frac{1}{k} \cdot \log_2 \frac{1}{k}$$

besitzt, denn daraus ergibt sich jedenfalls wieder

$$f(k) = k \cdot \left( -\frac{1}{k} \cdot \log_2 \frac{1}{k} \right) = \log_2 k$$

Besitzen nun die  $k$  Versuchsausgänge (zufällige Ereignisse)  $A_1, A_2, \dots, A_k$  unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten  $p_j = P(A_j)$  mit  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ , so liegt es nahe, für den Grad der Unbestimmtheit dieses Versuches die Größe

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = H(\alpha) = - \sum_{j=1}^k P(A_j) \cdot \log_2 P(A_j) = - \sum_{j=1}^k p_j \cdot \log_2 p_j$$

zu wählen. Das ist die Shannonsche Formel, die offenbar für  $P(A_j) = \frac{1}{k}$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$  in die Hartleysche übergeht.

In Anlehnung an physikalische Gegebenheiten wird  $H(\alpha)$  als Entropie des Versuches  $\alpha$  bezeichnet.

Wegen  $0 \leq p_j \leq 1$  gilt stets  $\log_2 p_j \leq 0$ , woraus sofort  $H(p_1, p_2, \dots, p_k) \geq 0$  folgt.

Nicht so einfach ist der Nachweis, dass die Entropie  $H$  nur dann gleich Null ist, wenn eine der Wahrscheinlichkeiten  $p_j$  gleich Eins und alle anderen gleich Null sind (Fall der Determiniertheit), und dass die Beziehung gilt

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = - \sum_{j=1}^k p_j \cdot \log_2 p_j \leq \log_2 k$$

Auf einen entsprechenden Beweis wird hier verzichtet.

Die Wahl der Basis 2 für das Logarithmensystem führt dazu, dass die Maßeinheit der Unbestimmtheit durch einen Versuch mit zwei gleichwahrscheinlichen Ausgängen festgelegt wird. Für einen solchen Versuch (z.B. das Werfen einer Münze mit den Versuchsausgängen Wappen bzw. Zahl) gilt nämlich

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1$$

Diese Einheit wird ein bit genannt (Abkürzung für binary digit). Zuweilen verwendet man auch die Basis 10.

In diesem Fall ergibt sich als Maßeinheit ein dit (decimal digit). Für den Zusammenhang beider Einheiten gilt  $1 \text{ dit} \approx 3,32 \text{ bit}$ , da  $\log_2 10 \approx 3,32$ .

Welchen praktischen Wert die dargelegte Begriffsbildung besitzt, möge ein einfaches Beispiel zeigen.

Aus langjährigen meteorologischen Beobachtungen sei bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit (statistische Wahrscheinlichkeit) dafür, dass es am 1. Juli auf dem Fichtelberg regnet, gleich 0,4 ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Auftreten von Niederschlag beträgt demzufolge 0,6. Am 1. Oktober ist dagegen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,65 Regen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15 Schnee zu erwarten. (Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 fällt kein Niederschlag.)

Welchem Versuch kommt eine größere Unbestimmtheit (Entropie) zu?

Es ergibt sich  $H(0,4; 0,6) \approx 0,97 \text{ bit}$  und  $H(0,65; 0,15; 0,2) \approx 1,28 \text{ bit}$ . Folglich ist das Wetter auf dem Fichtelberg am 1. Oktober unbestimmter als am 1. Juli.

Wie das Beispiel zeigt, hängt das Ergebnis natürlich sehr stark von der exakten Definition des Wetters ab.

Werden z.B. "Regen" und "Schnee" zu "Niederschlag" zusammengefasst, so ergibt sich für den zweiten Versuch eine kleinere Entropie als für den ersten, d.h., es liegt der umgekehrte Sachverhalt vor.

Überhaupt muss man davor warnen, den so definierten Begriff der Entropie bedenkenlos zur Beurteilung der Unbestimmtheit von ganz beliebigen Versuchen zu verwenden.

Der Begriff wurde ursprünglich für den speziellen Zweck geschaffen, Probleme der Nachrichtenübertragung durch Kanäle zu modellieren. Daraus resultieren seine Besonderheiten.

Deshalb blieb z.B. auch die Art der Versuchsausgänge  $A_1, A_2, \dots, A_k$  (Art der Mitteilungen) völlig unberücksichtigt.

Dagegen steht die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Mitteilungen bei einer Theorie der Nachrichtenübertragung im Vordergrund. Außerdem sind für Verbindungskanäle statistische Gesetzmäßigkeiten vorrangig, weil durch die Kanäle verschiedenartige Mitteilungen in großer Anzahl geschickt werden.

Deshalb musste ein solches Maß für die Unbestimmtheit gefunden werden, mit dem man in erster Linie die Unbestimmtheit komplizierter Versuche, die aus einer ganzen Reihe aufeinanderfolgender Versuche bestehen, erfassen kann.

Der Entropiebegriff liefert nunmehr die Möglichkeit, den Begriff der Information mathematisch zu fixieren. Das wird am folgenden einfachen Beispiel deutlich. Soll von drei Kugeln die schwerste ermittelt werden (Versuch  $\beta$ ), so kann man zunächst in einem ersten Versuch zwei der Kugeln miteinander vergleichen (Versuch  $\alpha$ ). Dadurch wird die Unbestimmtheit des Versuches  $\beta$  verringert.

Wenn das Ergebnis des Versuches  $\alpha$  die Unbestimmtheit von  $\beta$  beeinflussen soll, darf es natürlich nicht schon vorher bekannt sein. Deshalb kann man  $\alpha$  als Hilfsversuch auffassen, für den ebenfalls einige Versuchsausgänge möglich sind.

Die Tatsache, dass  $\alpha$  den Grad der Unbestimmtheit von  $\beta$  jedenfalls nicht vergrößert, bedeutet, dass unter der Bedingung der Realisierung von  $\alpha$  für die bedingte Entropie  $H_\alpha(\beta)$  des Versuches  $\beta$  die Beziehung  $H_\alpha(\beta) \leq H(\beta)$  gilt.

Hängt  $\beta$  nicht von  $\alpha$  ab, so kann durch die Realisierung von  $\alpha$  die Entropie von  $\beta$  nicht verringert werden, woraus  $H_\alpha(\beta) = H(\beta)$  folgt. Bestimmt jedoch der Ausgang von  $\alpha$  den Ausgang von  $\beta$  vollständig, so wird  $H_\alpha(\beta)$  gleich Null. Demzufolge zeigt die Differenz

$$J(\alpha, \beta) = H(\beta) - H_\alpha(\beta)$$

an, welche Informationsmenge im Versuch  $\alpha$  über den Versuch  $\beta$  enthalten ist, und auf diese Weise können Informationen gemessen werden.

Es soll noch einmal die Wettersituation auf dem Fichtelberg betrachtet werden. Über eine bestimmte Methode der Wettervorhersage sei bekannt, dass sie für den 1. Juli in  $\frac{3}{5}$  der Fälle richtige Aussagen liefert, falls Regen, und in  $\frac{4}{5}$  der Fälle richtige Aussagen, falls kein Niederschlag angekündigt wird.

Auf das Wetter am 1. Oktober angewandt, liefert diese Methode dagegen zu  $\frac{9}{10}$  richtige Ergebnisse für den Fall der Voraussage von Niederschlägen, andernfalls zu  $\frac{1}{2}$ .

Wie groß ist die Information, die diese Methode über das wirkliche Wetter an den zwei genannten Tagen liefert?

Werden die beiden Versuche zur Wetterbestimmung mit  $\beta_1$  und  $\beta_2$  bezeichnet, so sind für jeden von ihnen zwei Versuchsausgänge  $B$  (Niederschlag) oder  $\bar{B}$  (kein Niederschlag) möglich. Für die Entropien dieser Versuche ergibt sich  $H(\beta_1) \approx 0,97$  bit und  $H(\beta_2) \approx 0,72$  bit.

Wenn die Versuche  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$  die Vorhersagen (Vorversuche) für die genannten Tage,  $A$  bzw.  $\bar{A}$  ihre jeweils zwei möglichen Ausgänge bedeuten, so sind zuerst die Entropien  $H_A(\beta_1)$ ,  $H_{\bar{A}}(\beta_1)$ ,  $H_A(\beta_2)$  und  $H_{\bar{A}}(\beta_2)$  zu bestimmen und anschließend die Größen  $J(\alpha_1, \beta_1)$  bzw.  $J(\alpha_2, \beta_2)$ .

Zur Berechnung dieser Größen sind jedoch hier noch nicht alle notwendigen Voraussetzungen geschaffen worden, darum sei gleich das Ergebnis genannt.

Für die in der Vorhersage für den 1. Juli (Versuch  $\alpha_1$ ) enthaltene Information über das tatsächliche Wetter an diesem Tag (über den Versuch  $\beta_1$ ) gilt

$$J(\alpha_1, \beta_1) = H(\beta_1) - H_{\alpha_1}(\beta_1) \approx 0,29 \text{ bit}$$

und entsprechend ergibt sich für den 1. Oktober

$$J(\alpha_2, \beta_2) = H(\beta_2) - H_{\alpha_2}(\beta_2) \approx 0,20 \text{ bit}$$

Demnach ist die Wettervorhersage für den 1. Juli wertvoller als die für den 1. Oktober.

Bei genauer Betrachtung des Beispiels zeigt sich, dass - wie im Falle der Entropie - auch die Art der Bestimmung der Informationsmenge keinen universellen Charakter hat, denn dabei wird z.B. ebenfalls vom Inhalt der unterschiedlichen Ausgänge des vorhergesagten Versuches  $\beta$  völlig abstrahiert.

Trotzdem kann die Methode u.a. zur Qualitätsbewertung einer Vielzahl von Prognosen herangezogen werden, wie aus dem Problem der Wettervorhersage hervorgeht. Aber auch der Begriff der Information wurde für Aufgaben der Nachrichtentheorie entwickelt und darf nicht bedenkenlos auf beliebige Versuche angewendet werden.

Ein Vergleich mit den früheren Ausführungen über Modellierungsprobleme lässt den Unterschied zu dem hier vorliegenden Fall erkennen.

Durch die mathematische Fassung der Begriffe Entropie und Information wurden die Ausgangspositionen für die Informationstheorie geschaffen, die erst in jüngster Zeit entstand. So wie diese beiden Begriffe aus der Nachrichtentechnik geboren wurden, finden sie bei Problemen der Nachrichtenübertragung auch umfassende Anwendung.

In der Praxis geht es insbesondere um die Abschätzung von Entropie und Information bei der Übertragung realer Nachrichten. Die Theorie der Nachrichtenübertragung wird durch einen Fundamentalsatz gekennzeichnet. Nach ihm ist bei der Übertragung von Nachrichten durch einen Kanal die maximal erreichbare Geschwindigkeit  $v$  gegeben durch die Beziehung

$$b = \frac{C}{H} \quad (\text{Elemente pro Zeiteinheit})$$

Hierin bedeuten  $H$  die Entropie eines Elements der Nachricht (Buchstabe, Phonem, Note, Rasterelement usw.) und  $C$  die Durchlasskapazität des Kanals.

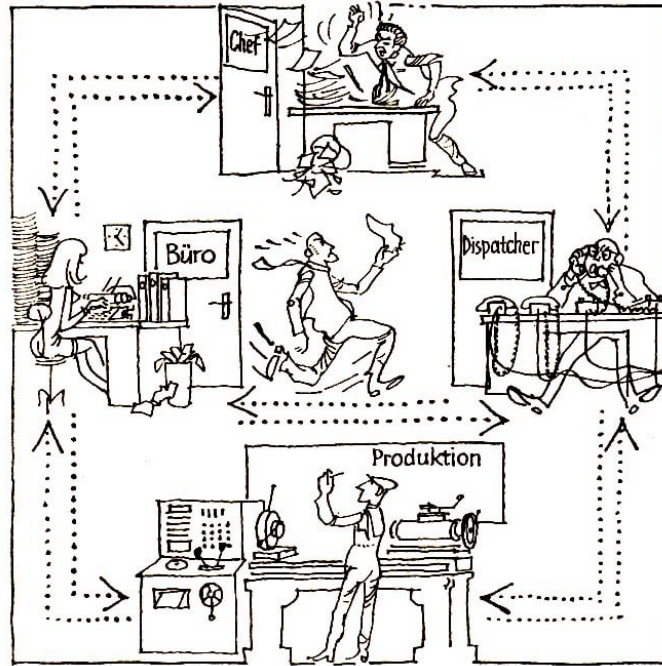
Um die Höchstgeschwindigkeit der Übertragung ermitteln zu können, muss also nicht nur die Entropie  $H$ , sondern auch die Durchlasskapazität  $C$  bestimmt werden. Eine andere wichtige Aufgabe der Informationstheorie ist die Untersuchung von Störungen bei Nachrichtenübertragungen.

Wenn man auf diese einführenden Darlegungen zurückblickt, so fallen einige grundsätzliche Unterschiede zu manchem anderen Teilgebiet der Mathematik auf.

Zunächst ist es die außerordentlich schnelle Entwicklung der Informationstheorie. Obwohl verschiedene Ergebnisse der Informationstheorie bereits aus früheren Jahren stammen, sind diese jedoch nicht annähernd so systematisch entstanden wie unter dem einheitlichen Gesichtspunkt der Kybernetik. Gerade deshalb ist auch die Rückwirkung der Theorie auf die Praxis gegenwärtig so nachhaltig.

Zum anderen darf eine unter bestimmten Aspekten entstandene abstrakte Theorie nicht kritiklos auf alle möglichen Erscheinungen der objektiven Realität angewendet werden. Die Tragweite einer solchen Theorie muss man vielmehr in der Praxis genau überprüfen. Darüber hinaus ist die Theorie ständig zu vervollkommen, damit weitere Erscheinungen der objektiven Realität einer mathematischen Behandlung zugänglich werden. Dieser Gesichtspunkt ist für derart komplizierte Probleme, wie man sie gegenwärtig untersucht, besonders wichtig.

## 9 Gibt es eine optimale Lösung



Bei der mathematischen Modellierung und Analyse ökonomischer Probleme sind seit etwa zwei Jahrzehnten große Fortschritte zu verzeichnen. Da hierbei fast ausschließlich Neuland betreten wurde, sind auf diesem Gebiet der Mathematik noch weitreichende Entdeckungen zu erwarten.

Es haben sich aber bereits feste Konturen einiger wichtiger Problemkreise abgezeichnet. Dazu gehören in erster Linie die Optimierungsaufgaben.

Probleme dieser Art beherrscht man in den Natur- und Ingenieurwissenschaften schon seit längerer Zeit. So entstanden z.B. die Methoden der Variationsrechnung, um bestimmte Extremalaufgaben in Geometrie, Physik und Technik zu lösen. Hierzu zählt ebenfalls das Ermitteln relativer Extremwerte von Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung.

Optimierungsprobleme mit ökonomischen Fragestellungen lassen sich jedoch kaum mit den herkömmlichen Verfahren behandeln. Solche Programmierungsaufgaben, wie sie auch heißen, befassen sich häufig mit der günstigsten Verteilung von Maschinen, Arbeitskräften, Rohstoffen usw., die zur Erzeugung von Waren erforderlich sind. Dabei macht man bezüglich der Waren bestimmte Annahmen, unter denen z.B. der Gewinn, die Herstellungskosten oder eine andere Größe (Zielfunktion) zu optimieren, d.h. zu maximieren oder minimieren ist.

Mathematisch geht es darum, für  $n$  Variable  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ein  $n$ -Tupel von Werten zu bestimmen, das  $m$  Ungleichungen bzw. Gleichungen

$$f_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

erfüllt und gleichzeitig die Zielfunktion  $z = z(x_1, \dots, x_n)$  optimiert.

In den einzelnen hier angegebenen Ungleichungen, auch Restriktionen genannt, gilt selbstverständlich jeweils nur eines der Zeichen ( $<$ ), ( $=$ ) oder ( $>$ ). Die Variablen an unterliegen normalerweise der Beschränkung  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Außerdem kann die Forderung vorliegen, dass die Variablen nur diskrete, z.B. ganzzahlige, Werte annehmen dürfen. In letzter Zeit hat der Fall parameterabhängiger Veränderlicher zu; sehr an Bedeutung gewonnen, dabei sind  $n$  Funktionen zu bestimmen, die den vorgegebenen Bedingungen genügen.

Die Optimierungsmethoden gestatten es, unter den realisierbaren ökonomischen Entscheidungen diejenigen mit der höchsten Effektivität zu bestimmen. Dabei sind die zulässigen Entscheidungen oder Programme durch die gegebenen Bedingungen bestimmt. Ein Programm heißt optimal, wenn die Effektivität maximal ist. Ein Optimierungsproblem ist demnach theoretisch als gelöst zu betrachten, wenn alle optimalen Programme bestimmt sind. Für die Praxis genügt es jedoch im allgemeinen, ein solches Programm zu kennen.

Die Lösungsproblematik soll an einer einfachen Transportaufgabe erläutert werden: Zehn Maschinen gleichen Typs, die sich an zehn verschiedenen Orten befinden, sind zehn Betrieben so zuzuordnen, dass sich beim Transport der Maschinen in die Betriebe ein Minimum an Transportkosten ergibt. Da die erste Maschine zu allen 10 Betrieben, die zweite zu 9, die dritte zu 8, ..., die letzte nur noch zu einem befördert werden kann und alle diese Möglichkeiten voneinander unabhängig sind, gibt es  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$  Programme.

Aus dieser außerordentlich großen Menge sind dann die optimalen Programme auszusuchen. Auch die modernsten Rechenanlagen sind nicht in der Lage, derartige Aufgaben zu übernehmen, es sei denn, die zu untersuchende, wenn auch endliche, so doch übermäßig große Anzahl von Programmen kann durch mathematische Überlegungen wesentlich eingeschränkt werden.

Je nachdem, ob die Restriktionen und die Zielfunktion linear sind oder nicht, spricht man von linearer bzw. nichtlinearer Programmierung. Da die lineare Programmierung am häufigsten auftritt, wurde ihre Theorie am umfassendsten entwickelt. Natürlich ist das in erster Linie eine Frage der Modellierung.

Viele praktische Programmierungsaufgaben sind in Wirklichkeit nichtlinear, sie können aber in guter Näherung linearisiert werden, und dadurch erhält die Entwicklung einer solchen Theorie ihren tiefen Sinn.

Weiterhin sind lineare Probleme unvergleichlich einfacher zu handhaben als nichtlineare, und obendrein können sie mittels Rechenanlagen bequem bearbeitet werden.

Die folgenden einfachen linearen Optimierungsaufgaben, deren Lösung nur gestreift werden soll, mögen zur Erläuterung des vorliegenden Sachverhalts dienen:

Zwei verschiedene Gegenstände sind mit maximalem Gewinn zu produzieren. Für den ersten Gegenstand sind drei Rohstoffe  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  in den Quantitäten 2, 2, 4 (Einheiten) erforderlich, für den zweiten dieselben Rohstoffe in den Mengen 4, 2, 0 (Einheiten). Insgesamt stehen die Rohstoffmengen 20, 12 bzw. 16 (Einheiten) zur Verfügung. Der



Gewinn beim ersten Gegenstand beträgt 2 und der beim zweiten 3 Einheiten.

Wird mit  $x_1$  bzw.  $x_2$  die Anzahl der jeweils produzierten Gegenstände bezeichnet, so hat man die drei linearen Restriktionen

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \leq 20,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \leq 12,$$

$$f_3(x_1, x_2) = 4x_1 \leq 16$$

und die zu maximierende lineare Zielfunktion

$$z = z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Da die Stückzahlen nicht negativ werden können, gilt ferner an,  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Zulässige Programme sind hier u.a.  $x_1 = 4, x_2 = 2$ ;  $x_1 = 0, x_2 = 5$ ;  $x_1 = 2, x_2 = 4$ .

Eine einfache Überlegung ergibt, dass das letzte der hier angegebenen Programme optimal ist. Somit beträgt der optimale Gewinn 16 Einheiten. Die Rohstoffe  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  werden vollständig und der Rohstoff  $\alpha_3$  zur Hälfte aufgebraucht.

Eine andere Aufgabe: In einem Betrieb sollen auf drei Maschinen  $M_1, M_2$  und  $M_3$  zwei Arten von Werkstücken  $W_1$  und  $W_2$  bearbeitet werden.

Die Bearbeitungszeit in Stunden pro Werkstück [h/St] für  $W_1$  und  $W_2$  auf jeder Maschine sowie der Zeitfonds von  $M_1, M_2$  und  $M_3$  in Stunden [h] sind bekannt. Wieviel Werkstücke jeder Sorte sind herzustellen, damit der Gesamtzeitfonds maximal ausgelastet wird?

Tabelle 3			
Maschine	Zeitfonds [h]	Arb.Aufw. $W_1$ [h/St.]	Arb.Aufw. $W_2$ [h/St.]
$M_1$	8000	10	10
$M_2$	18000	10	30
$M_3$	14000	20	10

Anhand von Tabelle 3 erhält man das mathematische Modell der Aufgabe. Werden mit  $x_1$  die Anzahl von Werkstücken der Sorte  $W_1$  und mit  $x_2$  die der Sorte  $W_2$  bezeichnet, so gilt zunächst  $x_1, x_2 \geq 0$ . Ferner muss für jede Maschine der Arbeitsaufwand kleiner oder höchstens gleich dem entsprechenden Zeitfonds sein.

Somit muss die lineare Zielfunktion

$$z(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$$

maximiert werden unter den linearen Nebenbedingungen

$$f_1(x_1, x_2) = 10x_1 + 10x_2 \leq 8000$$

$$f_2(x_1, x_2) = 10x_1 + 30x_2 \leq 18000$$

$$f_3(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2 \leq 14000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Genau wie bei der ersten Aufgabe gibt es mehrere von Wertepaaren  $[x_1, x_2]$ , die alle Nebenbedingungen erfüllen (z.B.  $[700; 0]$ ,  $[0; 600]$ ,  $[300; 500]$ ).

Wie nachgewiesen werden kann, erhält für  $x_1 = 300$  Stück,  $x_2 = 500$  Stück die Zielfunktion  $z(x_1, x_2)$  den größten Wert, nämlich  $z(x_1, x_2) = (40 \cdot 300 + 50 \cdot 500) \text{ h} = 37\,000 \text{ h}$ . In diesem Fall bleiben vom Gesamtzeitfonds lediglich 3000 h ungenutzt.

Ein weiteres Beispiel: Zur Herstellung eines Erzeugnisses sind zwei Leisten von je 1,5 m und eine von 2 m Länge erforderlich. Es stehen insgesamt 300 Leisten von je 6,5 m und 80 von je 5,5 m Länge zur Verfügung.

Wie muss man die Leisten zuschneiden, damit eine Höchstzahl an Erzeugnissen hergestellt werden kann?

Um das Problem modellieren zu können, muss man zunächst die in Tabelle 4 angegebenen Varianten ermitteln.

Wird mit  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) die Anzahl der Leisten nach Variante  $k$  bezeichnet, so gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = 80$$

weil 300 bzw. 80 Leisten zu teilen sind.

Tabelle 4		
Leiste zu 6,5 m Variante	Anzahl der 2 m-Leisten	Anzahl der 1,5 m-Leisten
1	3	0
2	2	1
3	1	3
4	0	4
Leiste zu 5,5 m Variante		
5	2	1
6	1	2
7	0	3

Außerdem muss die Menge der Leisten von 1,5 m Länge doppelt so groß sein wie die der 2-m-Leisten. Das ergibt die Gleichung

$$2(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6) = x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7$$

Die Anzahl der 2-m-Leisten kann gleichzeitig als Zielfunktion  $z$  benutzt werden, da sie mit der Anzahl der Erzeugnisse identisch ist. Außerdem müssen bei diesem Zuschnittproblem alle Variablen für die optimale Lösung ganzzahlig sein (ganzzahlige lineare Optimierung!) Das Modell des Problems ist somit:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300,$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = 80$$

$$6x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 - 3x_7 = 0$$

$$x_k \geq 0, \quad \text{ganzzahlig für alle } k$$

wobei die zu maximierende Zielfunktion heißt

$$z(x_1, x_2, \dots, x_7) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6$$

Ein anderes ganzzahliges Optimierungsproblem ist das folgende:

Eine Betriebsabteilung arbeitet in vier sechsständigen Schichten, die mit einer Mindestzahl von 3 bzw. 7 bzw. 10 bzw. 4 Arbeitskräften besetzt sind. Jede Arbeitskraft arbeitet zwei zusammenhängende Schichten und hat am folgenden Arbeitstag frei. Gesucht ist ein Schichtplan mit einer Mindestzahl von Arbeitskräften, wobei die erste Schicht um 4 Uhr beginnt.

Bei diesem ganzzahligen Optimierungsproblem möge  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) die Anzahl der Arbeitskräfte bedeuten, die mit Beginn der  $k$ -ten Schicht die Arbeit aufnehmen.

Damit gelten die Nebenbedingungen:

$$x_1 + x_4 \geq 3; \quad x_2 + x_1 \geq 7; \quad x_3 + x_2 \geq 10; \quad x_4 + x_3 \geq 4; \quad x_k \geq 0$$

alle ganzzahlig. Da jede Arbeitskraft am Tag nach der Schicht nicht einsetzbar ist, werden insgesamt  $2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$  Arbeitskräfte benötigt. Somit ergibt sich das mathematische Modell:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 &\geq 7 \\ x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_3 + x_4 &\geq 4 \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

und alle ganzzahlig, und die zu minimierende Zielfunktion lautet

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Diese Beispiele vermitteln einen kleinen Einblick in die durch die Praxis gegebene Problematik der Operationsforschung. In den meisten Fällen sind natürlich die Aufgaben viel umfangreicher und komplizierter, so dass schon beim Modellieren eine sehr schwierige kollektive Arbeit von Ökonomen, Mathematikern und anderen Spezialisten zu leisten ist.

Die allgemeinen Lösungsverfahren für Optimierungsaufgaben sind alle jüngerer Datums. Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch. In einem 1939 verlegten Buch gibt er bereits einen Algorithmus für die Lösung des linearen Problems an.

Gleichzeitig verweist er auf die große Bedeutung der Optimierung bei einer zentralgeleiteten Planwirtschaft. Bedauerlicherweise fanden diese grundlegenden Arbeiten - vor allem wegen des zweiten Weltkrieges - längere Zeit kaum Beachtung.

Im Jahre 1947 entwickelte der Amerikaner Georg Dantzig ein weiteres allgemeines Verfahren, die sogenannte Simplexmethode. Sie stellt ein Iterationsverfahren dar, das eine

exakte Lösung des linearen Problems nach endlich vielen Schritten ermöglicht.

In der Folgezeit hatte die Theorie der linearen Optimierung rasch enorme Fortschritte zu verzeichnen. Diese Entwicklung wurde nicht zuletzt durch die moderne Rechentechnik begünstigt, weil ja derartige Aufgaben maschinell bearbeitet werden können.

Dieser Umstand ist nicht hoch genug zu bewerten, wenn man den außerordentlich großen Rechenaufwand bedenkt, den selbst die besten Verfahren erfordern. Führt doch eine elektronische Anlage mittlerer Rechengeschwindigkeit in der gleichen Zeit das etwa 500000fache an Multiplikationen durch, die ein geübter Fachmann mit einer elektromechanischen Tischrechenmaschine bewältigen kann.

Die nichtlinearen Optimierungsprobleme sind viel schwieriger zu lösen. Für sie gibt es noch keine einheitliche Theorie. Zur Zeit werden lediglich eine Reihe spezieller Nichtlinearitäten der Restriktionen und der Zielfunktion untersucht.

Oftmals gelingt es bei solchen Verfahren nur, eine Näherungslösung anzugeben. In manchen Fällen kann man durch geeignete Mittel ein nichtlineares Problem so aufbereiten, dass zumindest die Anwendung eines simplexartigen Algorithmus möglich wird. Deshalb ist das Simplexverfahren nicht nur für lineare, sondern auch für nichtlineare Probleme von Bedeutung.

Andere Typen von Programmierungsaufgaben können mittels der sogenannten dynamischen Programmierung behandelt werden. Diese Methode ist aus der Untersuchung von Problemen hervorgegangen, bei denen zeitliche Abhängigkeiten beachtet werden müssen. Sie ist jedoch bisweilen auch im Falle der Zeitunabhängigkeit anwendbar, insofern ist der Name etwas irreführend.

Da bei der dynamischen Programmierung die Analyse bestimmter Funktionalgleichungen eine Rolle spielt, ist das Verfahren zugleich ein analytisches Hilfsmittel.

In der Produktionsplanung und Lagerhaltung treten schließlich noch die stochastischen sequentiellen Entscheidungsprobleme auf. Bei Problemen dieser Art hängen die Variablen  $x_k$  von Parametern ab. Statt einer Menge von Zahlenwerten hat man also eine Menge von Funktionen zu bestimmen. Dazu wird die Warteschlangentheorie benötigt, die im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung bereits erwähnt wurde. Das folgende einfache Beispiel soll zeigen, worum es bei solchen speziellen Entscheidungsproblemen geht.

Für die Steigerung der Arbeitsproduktivität ist in vielen Betrieben die Mehrmaschinenbedienung notwendig. In diesem Fall muss die maximale Anzahl der von einem Arbeiter zu bedienenden Maschinen festgelegt werden.

Mehrere zur gleichen Zeit stillstehende Maschinen können nämlich von einem Arbeiter nicht gleichzeitig, sondern nur nacheinander wieder in Gang gesetzt werden.

Es entsteht also ein großer Produktionsausfall, wenn er zu viele Maschinen bedienen muss. Betreut er andererseits zuwenig Maschinen, so ist er nicht voll beschäftigt.

Der Ausfall einer Maschine ist aber ein Ereignis, das zufälligen Charakter trägt, d.h., das einer Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt. Deshalb ist die Anzahl der zu bedienenden Maschinen in der Warteschlange eine Zufallsgröße. Durch Programmierung dieses

Problems kann man die optimale Anzahl der Maschinen bestimmen.

Auch die folgenden beiden Beispiele lassen erkennen, wie schwierig und wie wichtig stochastische Programmierungsaufgaben sind. Auf einer Expedition mit einem Kraftfahrzeug sollen  $n$  verschiedene Arten von Ersatzteilen mitgeführt werden. Die Teile sind in einem Behälter mit dem Volumen  $b$  unterzubringen. Das Volumen eines Teiles des Typs  $k$  sei  $a_k$ .

Für jedes zuwenig mitgeführte Ersatzteil dieses Typs erwachsen erhebliche Kosten, sie seien  $\lambda_k$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $\xi_k$  Stück Ersatzteile vom Typ  $k$  während der Expedition gebraucht werden, betrage  $P_k(\xi_k)$ .

Es ist für jeden Typ die Anzahl  $X_k$  der mitzuführenden Ersatzteile so zu bestimmen, dass das Lagervolumen insgesamt nicht überschritten und der Gesamtaufwand (Kosten) für Teile, die man aus Platzmangel nicht mitnehmen konnte, minimal wird.

Für diese Aufgabenstellung ergibt sich das mathematische Modell:

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k \leq b; \quad x_k \geq 0; \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

mit der Zielfunktion

$$z(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 \sum_{\xi_1=x_1+1}^{\infty} (\xi_1 - x_1) P_1(\xi_1) + \dots + \lambda_n \sum_{\xi_n=x_n+1}^{\infty} (\xi_n - x_n) P_n(\xi_n)$$

Außerdem muss noch die Ganzzahligkeit aller  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) verlangt werden, und diese Forderung darf man im allgemeinen nicht vernachlässigen.

Die Wahrscheinlichkeiten  $P_k(\xi_k)$  in der zu minimierenden Zielfunktion komplizieren die Aufgabe. Der Versuch, die optimalen  $x_k$  näherungsweise zu bestimmen, indem der dem Problem innewohnende Zufall unberücksichtigt bleibt, kann Werte  $x_k$  liefern, die nicht einmal in der Nähe der optimalen Werte liegen.

Diese Aufgabe mit ihren Ganzzahligkeitsbedingungen ist mit Hilfe der dynamischen Programmierung lösbar.

Ein anderes Beispiel ist das folgende:

Ein bestimmtes Produkt ist in  $n$  Warenlagern deponiert. Im  $k$ -ten Lager soll sich eine Menge von  $a_k$  Stück befinden. Das Produkt wird während der kommenden Periode auf jedem von  $n$  Absatzmärkten verlangt.

Da jedoch im voraus nicht genau zu bestimmen ist, wie stark die Nachfragen auf den einzelnen Märkten sein werden, muss man sie als Zufallsvariablen betrachten.

Nimmt man die Stetigkeit dieser Variablen an, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Nachfrage  $\xi_k$  auf dem  $k$ -ten Markt die Funktion  $F_k(\xi_k)$ .

Dabei sind die  $\xi_k$  unabhängige Zufallsvariablen. Das besagt, die Nachfrage auf einem der Märkte übt keinen Einfluss auf die der anderen Märkte aus. Der Preis für den Transport einer Wareneinheit vom Lager  $k$  zum Markt  $l$  sei  $C_{kl}$ , außerdem sollen die Versandkosten proportional der Anzahl der transportierten Einheiten sein.

Zum  $k$ -ten Markt werde eine Gesamtzahl von  $y_k$  Einheiten versandt. Ist  $y_k < \xi_k$ , so

liegt ein Kundenverlust von  $\lambda_k(\xi_k - y_k)$  vor. Das entspricht der Aussage, dass für jede zusätzlich verlangte Einheit ein Kundenverlust von  $\xi_k$  entsteht.

Ist  $y_k > \xi_k$ , so entstehen die Kosten  $\mu_k(y_k - \xi_k)$ , d.h., falls die transportierte Anzahl größer ist als die Nachfrage, müssen die Wareneinheiten mit Verlust verkauft werden (Eine Rücksendung zum Lager ist zu teuer!).

Wieviele Stück des Produktes muss jedes Lager auf jeden der Märkte schicken, damit die Summe der Transportkosten sowie die zu erwartenden Kosten für Mehr- und Fehlmengen minimal sind?

Das vorliegende Problem wurde von Dantzig eingehend untersucht. Es ist schon recht kompliziert.

Optimierungsaufgaben treten in einer sehr großen Vielfalt auf, nicht nur in den einzelnen Betrieben der Industrie und der Landwirtschaft als Teilprobleme (Transportprobleme, Zuschnittprobleme, Zuordnungsprobleme, Reihenfolgeprobleme, Futterpläne, Bebauungspläne usw.), sondern auch als grundsätzliche Fragestellungen (Optimierung des Produktionsumfanges, der Warenproduktion, des Gewinnes usw.) für einen ganzen Betrieb, einen Industriezweig, einzelne Territorien, ja sogar für die gesamte Volkswirtschaft [12].

In mathematischer Hinsicht geht man dabei im wesentlichen in gleicher Weise vor wie auf allen anderen Teilgebieten. Zunächst wird von Mathematikern und den zuständigen Fachleuten ein dem Problem entsprechendes Modell erarbeitet. Von dessen Güte hängt selbstverständlich die Aussagekraft in qualitativer und quantitativer Hinsicht ab.

Weiterhin ist es für die Analyse ökonomischer Modelle genau wie in, allen anderen Bereichen der Mathematik oft erforderlich, nicht nur altbewährte Methoden anzuwenden, sondern auch neue zu entwickeln.

Für Optimierungsprobleme haben außer analytischen, algebraischen, Wahrscheinlichkeitstheoretischen und geometrischen Verfahren noch Methoden aus anderen speziellen Gebieten wie der Kombinatorik, der Graphentheorie und vor allem solcher Bereiche große Bedeutung erlangt, die mit der Kybernetik in enger Beziehung stehen, wie die Regelungsmathematik, die Informationstheorie, die Spieltheorie und die Algorithmentheorie.

Letzteres beruht darauf, dass viele ökonomische Fragestellungen auf die optimale Steuerung von Systemen (Betriebsabteilungen, Betrieben, Kooperationsgemeinschaften usw.) hinauslaufen.

Ein paar Worte zur Kombinatorik und zur Graphentheorie sollen das Bild abrunden.

In die Kombinatorik gehören alle grundsätzlichen Fragestellungen über endliche Mengen, z.B. die Frage nach der Anzahl der möglichen Anordnungen von  $k$  verschiedenen Elementen. (Es gibt  $k!$  Möglichkeiten, was im Beispiel von der Verteilung der Maschinen bereits erwähnt wurde.)

Die Kombinatorik wird häufig bei Aufgaben der Transportoptimierung, der Lagerhaltung und bei Warteschlangenproblemen benötigt.

In engem Zusammenhang mit der Kombinatorik steht die Graphentheorie, auch kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe genannt. Ihr Gegenstand ist die Unter-

suchung sogenannter Graphen. Unter einem endlichen Graphen versteht man ein geometrisches Gebilde aus endlich vielen Punkten (Ecken oder Knoten) und einer Menge möglicher Verbindungsstrecken (Kanten) dieser Knotenpunkte. Beispielsweise bildet jedes Netzwerk einen derartigen Graphen.

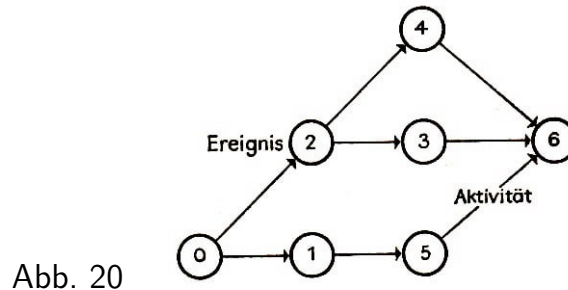


Abb. 20

Abb. 20 stellt ein solches Netzwerk für einen einfachen Ablaufplan (Aufbau einer Lagerhalle) dar, wobei die Pfeile den Aktivitäten der Teilprozesse und die Knoten den Ereignissen entsprechen. Die Graphentheorie wird zur Lösung spezieller Optimierungsprobleme eingesetzt.

Die Entwicklung der genannten Disziplinen wie mathematische Kybernetik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Graphentheorie usw. wurde durch die umfassende Anwendung der Mathematik in der Ökonomie entscheidend mitbestimmt. Auf Grund dieses analogen Sachverhaltes erübrigt es sich, die früher ausführlich dargelegten grundsätzlichen Gedanken hier zu wiederholen. Es muss aber noch auf zwei wesentliche Merkmale der mathematischen Behandlung ökonomischer Probleme hingewiesen werden.

Erstens ist die Modellierung und Analyse ökonomischer Probleme weitaus komplizierter als die naturwissenschaftlicher und technischer. Das liegt vor allem an der enormen Anzahl der bei ökonomischen Aufgaben auftretenden Parameter sowie an der in vielfältiger Weise möglichen Verknüpfung ökonomischer Teilprozesse zum Gesamtprozess in einem Betrieb, einem Industriezweig, einem Wirtschaftsgebiet oder gar im ganzen Staat. (Diesbezügliche Modelle werden deshalb als große Systeme bezeichnet.)

Dadurch entsteht eine oft kaum noch überschaubare Variationsbreite möglicher Lösungen. Das gilt nicht nur für Optimierungsaufgaben, sondern auch für andere Probleme wie die Untersuchung des Zusammenhangs von Aufwand und Produktion in einem Industriezweig mittels Verflechtungsbilanzen oder das Studium der Dynamik von Organisationsproblemen mittels Netzplantechnik.

Eine tiefgreifende mathematische Behandlung ökonomischer Prozesse ist deshalb ohne die moderne Datenverarbeitung undenkbar, umgekehrt kommt die Datenverarbeitung ohne gediegene mathematische Verfahren nicht aus.

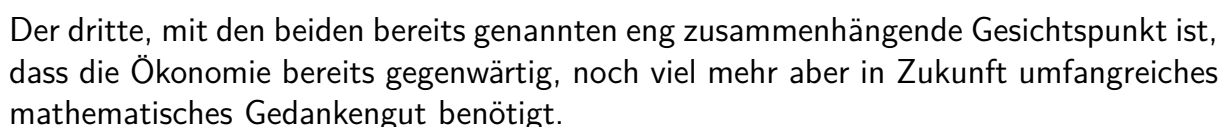
Zum zweiten hat gerade die mathematische Behandlung ökonomischer Probleme gegenwärtig eine außerordentlich große Bedeutung. Können doch durch die Anwendung der mathematischen Programmierung in unserer gesamten Volkswirtschaft weitere Fortschritte auf dem Wege zur besseren Befriedigung der Bedürfnisse aller Menschen erzielt werden.

Dabei bietet ein gut durchdachtes Planungssystem, insbesondere die Planwirtschaft, beste Voraussetzungen nicht nur für das Aufstellen optimaler Programme, sondern vor

allem für deren volle Realisierung.

Bei der Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie geht es nicht um ein Ersetzen oder gar Verdrängen der Ökonomie durch die Mathematik, sondern vielmehr um eine Vertiefung und Qualifizierung ökonomischer Tätigkeiten. Deshalb kann die Mathematisierung auch nie Selbstzweck, sondern nur Mittel zum Zweck sein.





Deshalb werden auch weiterhin Fragen der Modellierung ökonomischer Probleme, besonders die vielfältigen Probleme der mathematischen Programmierung (Optimierungsaufgaben) sowie der Zusammenhang zwischen Ökonomie und Kybernetik im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen.

Es folgt ein vierter, wichtiger Aspekt. Kommt es gegenwärtig besonders darauf an, auf umfassende Weise die Mechanisierung, aber auch schon die Kleinautomatisierung und die Automatisierung ausgewählter Bereiche voranzutreiben, so werden in Zukunft große automatische Werke, die weitestgehend als kybernetische Systeme (Kyberneten) betrachtet werden müssen, zu entwickeln und zu beherrschen sein.

Die Automatisierung wird sich auch auf die gesamte Produktionsvorbereitung, die Konstruktion und Technologie erstrecken. Aber nicht nur im Bereich der materiellen Produktion wird die Automatisierung künftig entscheidende Veränderungen herbeiführen, sondern auch in den anderen Bereichen des täglichen Lebens, was sich ebenfalls schon heute abzeichnet.

So ersetzen beispielsweise Warenautomaten Verkaufskräfte; die Kleingeldrückgabe in Verkaufshallen erfolgt automatisch genau wie der Bezug von Fahrkarten; Telefonämter sind automatisiert und vieles andere mehr.

Die zu erwartende Automatisierung unterstreicht einerseits das im Zusammenhang mit den bereits erwähnten Teilgebieten der Mathematik Gesagte und weist andererseits auf die allgemeine Bedeutung der Automatentheorie sowie verwandter Gebiete hin.

Eine Vorrangstellung werden bei der Automatisierung die elektronischen Rechenanlagen künftiger Generationen einnehmen. Sie werden gegenüber den heutigen, besonders in kybernetischer Hinsicht, wesentlich vollkommener sein. Das ist der fünfte Gesichtspunkt.

Die Mathematik wird noch großen Ideenreichtum entwickeln müssen, damit solche Computerkonstruktionen möglich werden. Sowjetische Gelehrte haben bereits eine weitere Generation solcher Anlagen angekündigt. Diese Rechner werden einen relativ kleinen Raum beanspruchen, mit großen Integralschaltungen ausgerüstet sein, daher viele logische Möglichkeiten besitzen, und sie werden Arbeitsgeschwindigkeiten von einer Milliarde Operationen pro Sekunde erreichen. Vor allem wird der unmittelbare Kontakt zwischen Mensch und Maschine erheblich verbessert sein.

Die Rechner der Zukunft darf man nicht nur in den engen Grenzen eines Hilfsmittels für die Lösung mathematischer Probleme sehen, sondern diese Maschinen sind entscheidende Aggregate im Bereich der Technik, der Volkswirtschaft, der Dokumentation, der Medizin, der Pädagogik usw.

Vielleicht wird sogar in nicht allzu ferner Zeit der unmittelbare Kontakt der Menschen zu solchen kybernetischen Maschinen über eine in den Wohnungen montierte Steckdose hergestellt werden, etwa so, wie man heute das Telefon benutzt.

Diese Darlegungen lassen keinen Zweifel an der Tragweite solcher mathematischen Bereiche, die in das Gebiet der Rechenautomaten gehören. An diesem Beispiel wird ganz besonders deutlich, wie innig wissenschaftlich-technischer Fortschritt und Mathematik

miteinander verbunden sind. Einerseits wird die Entwicklung der Mathematik durch die Praxis vorangetrieben, andererseits bewirkt die Mathematik eine weitere schnelle Entwicklung der Produktivkräfte. Auf diese Weise dient die Mathematik in immer entscheidenderem Maße der Gesellschaft.

Große Beachtung wird man auch in Zukunft der Untersuchung von Massenerscheinungen schenken. Hier eröffnet sich noch ein weites Feld von Problemen in Theorie und Praxis. Die Entwicklung der letzten Jahre hat gezeigt, dass solche neu entstandenen Gebiete wie die Informationstheorie und die Warteschlangentheorie nicht nur reges Interesse in theoretischer Hinsicht erweckt, sondern auch weitreichende Bedeutung für die Praxis erlangt haben.

Deshalb ist es durchaus berechtigt, die Wahrscheinlichkeitstheorie, die mathematische Statistik und die damit in engem Zusammenhang stehenden Gebiete als den sechsten Schwerpunkt bei der künftigen Entwicklung der Mathematik zu betrachten.

Der siebente Schwerpunkt ist zweifellos der wohl bereits am breitesten durchforschte Bereich der funktionalen Zusammenhänge mit allen seinen Teildisziplinen und verwandten Gebieten.

Denn auch in Zukunft wird man auf bewährte mathematische Verfahren und Methoden sicher genauso wenig verzichten können wie in der heutigen Technik auf das klassische Werkzeug Hammer und Zange. Allerdings wird in diesem Bereich die Wahrscheinlichkeit für neue entscheidende Entdeckungen etwa vom Umfang der Infinitesimalrechnung geringer sein als in anderen Teilgebieten.

Im wesentlichen wird eine Vervollkommnung der Theorien stattfinden, wenn man von möglichen grundsätzlichen Beeinflussungen durch andere Bereiche, wie etwa der Numerik durch die Rechentechnik, absieht. Das jedoch kann auch künftig die grundsätzliche Bedeutung der Analysis für Naturwissenschaft und Technik nicht mindern.

Die genannten Komplexe sind aus Aspekten der künftigen Entwicklung der Produktivkräfte abgeleitet. Da die Entwicklung der Mathematik eng mit der Entwicklung der Produktivkräfte verknüpft ist, ergeben sich diese Akzente notwendigerweise von selbst. Gerade von den angeführten mathematischen Bereichen darf man ja mit hoher Wahrscheinlichkeit einen wesentlichen Beitrag zur Steigerung der Arbeitsproduktivität erwarten.

Wegen der spezifischen Entwicklung der Mathematik werden sich auch starke theoretische Züge herausbilden, die häufig nicht sofort, aber in einer späteren Phase auf die Praxis zurückwirken. Daher sind auch solche Gebiete wie die abstrakte Algebra, die Zahlentheorie, die Topologie usw. nach wie vor von fundamentaler Bedeutung.

So schließt sich der Kreis der Betrachtungen über das komplizierte und vielseitige Gebäude der Mathematik, einer Wissenschaft, die, ohne zu übertreiben, zu den entscheidenden für die künftige Entwicklung der menschlichen Gesellschaft gehört.

Das sollte jeden von uns ermutigen und beflügeln, zielgerichtet in das Wesen dieser Wissenschaft einzudringen, vor allem aber sollte die Qualifizierung auf dem Gebiet der Mathematik für die Jugend gleichermaßen Bedürfnis und Verpflichtung sein.

## 11 Literaturverzeichnis

- [1] Trader, H.-J.: Die Erforschung der Gravitation, Wissenschaft und Menschheit, S. 258ff., Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1969
  - [2] Smirnow, W. J.: Lehrgang der höheren Mathematik, DVW, Berlin 1960
  - [3] Wulich, B. S.: Einführung in die Funktionalanalysis, BGT, Leipzig 1962
  - [4] Winogradow, J. M.: Elemente der Zahlentheorie, DVW, Berlin 1955
  - [5] Lugowski/Weinert: Algebra, BGT, Leipzig 1958
  - [6] Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen, BGT, Leipzig 1957
  - [7] Alexandrow, P. S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, DVW, Berlin 1967
  - [8] Klaus/Liebscher: Was ist, was soll Kybernetik? Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin 1966
  - [9] Jaglom/Jaglom : Wahrscheinlichkeit und Information, DVW, Berlin 1967
  - [10] Gnedenko/Chintschin : Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, DVW, Berlin 1968
  - [11] Sweschnikkow, A. A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Aufgaben, BGT, Leipzig 1970
  - [12] Krekó, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung, DVW, Berlin 1969
- Aus der mathematischen Schülerbücherei werden noch folgende Veröffentlichungen empfohlen:
- [13] Alexandrow, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie, DVW, Berlin 1967
  - [14] Haase, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik, BGT, Leipzig 1967
  - [15] Natanson, I. P.: Einfachste Maxima- und Minimaufgaben, DVW, Berlin 1968
  - [16] Sedlacek, J. Einführung in die Graphentheorie, BGT, Leipzig 1968
  - [17] Markuschewitch, A. I.: Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen, DVW, Berlin 1968
  - [18] Göttner, R. : Operationsforschung, Urania-Verlag, Leipzig/ Jena/Berlin 1970