
Jiří Sedláček

Keine Angst vor Mathematik

1968 Fachbuchverlag Leipzig
MSB: Nr. 67
Abschrift und LaTeX-Satz: 2020

<https://mathematikalpha.de>

Vorwort

Als ich vor Jahren in den Schuldienst eintrat, bemühte ich mich, die mir anvertrauten jungen Menschen von der Wichtigkeit der Mathematik zu überzeugen.

"Betrachtet die Mathematik nicht bloß als notwendiges Übel", sagte ich ihnen.

"Nein", antwortete mir ein Schüler, "wir halten sie für ein unnützes Übel."

Es ist bedauerlich, dass ein Teil unserer Jugendlichen die mathematischen Kenntnisse, die sie auf der Schule erwerben sollen, völlig passiv und ohne Interesse aufnimmt. Nicht nur für diese jungen Menschen ist das schade, sondern selbstverständlich auch für unsere gesamte Gesellschaft. Wenn das Ende der Schulzeit herankommt und die Absolventen sich ihren künftigen Beruf wählen sollen, kann man oft hören:

"Zur Hochschule gehen wir nicht, dort gibt es zuviel Mathematik."

Ein junger Mensch, der seine Zukunft mit einer solchen Einstellung aufzubauen gedenkt, wird wahrscheinlich nach einigen Jahren erkennen müssen, dass seine Ansicht falsch war. Die Mathematik ist keine trockene Bücherweisheit, die eigens erdacht wurde, um unaufmerksame Schüler und Studenten zu ärgern, und auch keine stumpfsinnige Rechnerei, die nur dem Erfolg bringt, der eine Formelsammlung auswendig gelernt hat. Die Mathematik ist vielmehr ein großartiges Werkzeug, das uns die Arbeit in mannigfachen Bereichen erleichtert und in der letzten Zeit auch in Berufe eingedrungen ist, in denen wir sie niemals gesucht hätten. Ein Facharbeiter, ein Verkäufer im Handel und ein Bankangestellter kommen nicht ohne numerische Berechnungen aus; ein Fortschritt der Wirtschaftswissenschaften ist nicht ohne Forschungen denkbar, deren Grundlage die mathematische Statistik bildet. Blättert man aber in medizinischen Fachzeitschriften, so sieht man, dass die Mathematik auch in diesem Bereich Eingang gefunden hat.

Im Zeitalter der Atomkraftwerke, der künstlichen Erdtrabanten und kosmischen Raketen werden die umfangreichsten numerischen Berechnungen zwar von Rechenmaschinen ausgeführt, doch das Programm für diese Berechnungen muss der Mensch festlegen. Überall werden fähige Menschen gebraucht, und das gründliche Studium der Mathematik wird zweifelsohne auch in den nächsten Jahrzehnten ein untrennbarer Bestandteil der Allgemeinbildung bleiben.

Die Frage, warum manche Menschen die Mathematik eigentlich so sehr fürchten, lässt sich nur schwer beantworten.

Es herrscht die irrige Ansicht, dass eine außergewöhnliche, nur wenigen Glücklichen angeborene Begabung erforderlich sei, um den Mathematikstoff der Schule erfolgreich bewältigen zu können. Es stimmt zwar, dass nicht jeder Mathematikdozent an einer Hochschule werden kann, doch der Unterschied zwischen der Mathematik und den übrigen Wissenschaften, deren Grundlagen wir in der Schule studieren, ist gar nicht so groß.

Über einen Schüler, der in allen anderen Fächern gute Noten erreicht, aber in Mathematik zurückbleibt, sollten sich nicht nur seine Eltern und Lehrer, sondern in erster Linie er selbst Gedanken machen. Genügt doch bisweilen schon eine kleine Veränderung in der Lernmethode, das Erfassen einiger Grundbeziehungen des dargebotenen Stoffes,

um zunächst ein Fünkchen Interesse dafür zu wecken und aus dem zurückgebliebenen schließlich einen erfolgreichen Schüler zu machen.

Die Ursache der Schwierigkeiten beim Studium der Mathematik liegt in der besonderen Ausdrucksmethode, die wir mathematische Sprache nennen könnten. Damit die Ausdrucksweise kurz und klar wird, ersannen die Mathematiker eine Reihe von Symbolen und Abkürzungen, die fast so etwas wie stenographische Zeichen darstellen. So werden z.B. Zahlen mit Buchstaben aus dem lateinischen, griechischen und mitunter auch hebräischen Alphabet bezeichnet; die Beziehungen zwischen den Zahlen werden oft nicht durch Worte ausgedrückt, sondern man verwendet vereinbarte Zeichen (z. B. schreibt man anstelle des Satzes "die Zahl a ist kleiner als die Zahl b " kurz $a < b$) u.a.

Man muss besonders betonen, dass es im Begleittext dieser mathematischen Symbolik meist auf jedes einzelne Wort ankommt. Fehldeutungen und Missverständnisse können bereits aufkommen, wenn wir nur um einziges Wort auslassen. Daher muss ein mathematischer Text um vieles langsamer als ein gewöhnlicher Text gelesen werden; wir verschlingen nicht Zeile um Zeile und Seite um Seite, sondern studieren aufmerksam Satz für Satz.

In die mathematische Ausdrucksweise dringen jedoch auch Wörter und Wendungen aus der Umgangssprache ein, mit denen wir einen Sachverhalt mitunter so deutlich wie möglich machen wollen. "Diese zwei Jungen sind fast gleich groß", sagen wir zu einem Bekannten.

Die Wendung "fast gleich groß" wird in der Mathematik mit dem Zeichen \approx , d.h. angenähert, nahezu gleich, rund, etwa (vergleiche die Darlegungen über die angenäherte Gleichheit auf Seite 47), kenntlich gemacht. Wenn dagegen in unserem Text Wortverbindungen auftauchen, die keinen Anspruch auf vollständige mathematische Genauigkeit erheben, setzen wir sie in diesem Buch in Anführungszeichen.

Die Methode der Mathematik unterscheidet sich von den Methoden der übrigen Wissenschaften, die im Lehrplan der Schulen vertreten sind. In der Physik bildet der Versuch den wichtigsten Bestandteil der Forschung. Wenn wir z.B. einige Metallstäbe erhitzen, beobachten wir, dass sich die Abmessungen der Stäbe ändern; auf Grund dieser begrenzten Anzahl von Versuchen stellen wir den allgemeinen Satz auf: Metalle dehnen sich bei Erwärmung aus.

Die Erkenntnismethode, durch die wir von besonderen Fällen zu einer allgemeinen Schlussfolgerung gelangen, heißt Induktion. Wir nennen daher die Physik eine induktive Wissenschaft.¹

Die induktive Methode lässt sich aber in der Mathematik nicht verwenden, und auch das unterscheidet diese Wissenschaft zum Leidwesen der Lernenden von den übrigen Disziplinen.

Die Mathematik geht in ihren Überlegungen im allgemeinen gerade umgekehrt vor, nämlich vom Allgemeinen zum Besonderen; ihre Methode heißt Deduktion. Doch auch in der Mathematik ist die induktive Methode sehr fruchtbar, und zwar bei der Aufstellung neuer Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen. Wenn in der Mathematik irgendeine

¹Wir dürfen "Induktion" nicht mit der sogenannten mathematischen oder vollständigen Induktion verwechseln, die eine sehr wichtige Beweismethode in der Mathematik darstellt.

Behauptung aufgestellt wird, die in einzelnen Spezialfällen richtig zu sein scheint, können wir diese Behauptung nicht als allgemein richtig anerkennen, solange ihr mathematischer Beweis nicht erbracht ist; auch eine noch so große Zahl von Fällen, die die Annahme rechtfertigen, genügt noch nicht als Beweis.

In diesem Buch wenden wir uns an Leser, die die ersten acht Schuljahre absolviert haben. Nur an einigen Stellen setzen wir die Kenntnis des Lehrstoffs voraus, den die mittlere Reife erfordert. Wir wollen jedoch darauf hinweisen, dass diese Arbeit kein Mathematiklehrbuch und auch keine Sammlung von Formeln und Lehrsätzen ist.²

Dieses Buch ging aus Vorträgen hervor, die ich für die Tschechoslowakische Gesellschaft zur Verbreitung politischer und wissenschaftlicher Kenntnisse und im Auftrag der Vereinigung tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker gehalten habe. Der Stoff wird in sieben, nur sehr lose zusammenhängenden Kapiteln dargeboten. Ich möchte den jungen Leser - in seinem eigenen Interesse - für ein ernsthafteres Studium der Mathematik gewinnen und glaube, dass der gangbarste Weg dazu über die "unterhaltsame Mathematik" führt.

Das mathematische Spiel, die mathematische Unterhaltung oder das Rätsel haben sich in den letzten Jahrzehnten neben den klassischen mathematischen Disziplinen das Recht auf selbständige Existenz erobert.

Auf dem V. Weltkongress der Mathematiker, der 1912 in Cambridge stattfand, hielt der griechische Mathematiker N. Hatzidakis einen Vortrag über das Thema "Systematischer Kurs der 'unterhaltsamen Mathematik' an der Mittelschule"; der Redner sprach sich für die Einführung der "unterhaltsamen Mathematik" in den Schulunterricht aus, wodurch, wie er sagte, ein größeres Interesse der Schüler an diesem wichtigen Gebiet geweckt und eine Überbeanspruchung der Lernenden vermieden würde. Leider verfolgte man diesen fruchtbaren Gedanken bisher nicht ernsthaft weiter.

Wir gehen also in diesem Buch vom mathematischen Spiel aus; doch sei betont, dass viele "harte Nüsse" und mathematische Unterhaltungsspiele nicht nur Mittel zur "Verkürzung der Langeweile" sind, sondern zu ernstesten Aufgabenstellungen führen und für die Anwendung der Mathematik im Verkehrswesen, in der Technik, in den Naturwissenschaften und auch im alltäglichen Leben sehr wertvoll sind.

Dieser propädeutische (einführende) Charakter der "unterhaltsamen Mathematik" ist in ähnlichen Schriften nicht genügend hervorgehoben worden. Den Übergang zwischen dem mathematischen Spiel und dem ernsteren mathematischen Problem bilden die eingekleideten Aufgaben. Auch ihnen wird in unserem Werk Aufmerksamkeit geschenkt; im letzten, siebenten Kapitel wenden wir uns ausschließlich eingekleideten Aufgaben mit polytechnischer Thematik zu.

Ich bin der Meinung, dass in unserer Publikation auch eine Beschreibung des historischen Hintergrundes nicht fehlen darf, vor dem interessante kleine Werke bedeutender Mathematiker entstanden.

²Die Begriffe, die wir in unseren Ausführungen verwenden, werden mit Ausnahme der von der Schule her gut bekannten Dinge meist direkt im Text erklärt. Sollte sich jemand über einen bestimmten Ausdruck nicht im klaren sein, können ihm die Mathematiklehrbücher unserer Schulen weiterhelfen.

Der Leser, der sich mit der Mathematik erfolgreich beschäftigen will, darf sich nicht nur mit einer passiven Aneignung des Stoffs begnügen, sondern muss ihn an entsprechenden Aufgaben selbständig durchdenken. Mitunter bereitet uns zwar beim Studium gerade die Lösung solcher Aufgaben die größten Schwierigkeiten, aber sie garantiert auch den größten Nutzen. In diesem Buch haben wir einen bestimmten Teil des zu behandelnden Stoffes zu Aufgaben verarbeitet, die den Schluss der einzelnen Kapitel bilden.

Die Lösungen dieser Aufgaben befinden sich zwar am Ende unseres Büchleins, doch bitte ich den Leser, sie lediglich zum Vergleich mit dem eigenen Ergebnis zu benutzen. Nur wenn ein Leser mit einer Aufgabe überhaupt nichts anzufangen weiß, sei ihm schon vorher ein Blick auf die Lösung gestattet.

Man darf erwarten, dass dieses Buch auch fortgeschrittenere Leser interessiert. Ich habe auch an sie gedacht; schwierigere Aufgaben werden mit einem Sternchen (*), besonders schwere Aufgaben mit zwei Sternchen (**) bezeichnet. Wer solchen Schwierigkeiten noch nicht gewachsen ist, mag diese Abschnitte zunächst auslassen und erst später zu ihnen zurückkehren.

Zum Schluss möchte ich Herrn Dozenten J. Holubář danken, der das gesamte Manuskript dieses Büchleins sehr sorgfältig durchgesehen und an vielen Stellen zur Verbesserung meiner Arbeit beigetragen hat.

Jiří Sedláček

Inhaltsverzeichnis

1	Beginnen wir mit einem Spiel	8
1.1	Aufgaben vom Schachbrett	8
1.2	Der Turm von Hanoi	12
1.3	Das Arithmomachiaspiel	13
1.4	Sport im Zahlenspiel	15
1.5	Die bunten Würfel des Majors Mac Mahon	18
1.6	Aufgaben	19
2	Wirklichkeit und Täuschung	21
2.1	Bilder sind manchmal trügerisch	21
2.2	Was sind optische Täuschungen?	22
2.3	Falsches Schätzen von Länge und Entfernung	23
2.4	Merkwürdiges von Parallelen und Senkrechten	26
2.5	Vom räumlichen Sehen	27
3	Unterhaltung mit Zahlen	29
3.1	Riesenzahlen - Zahlenriesen	29
3.2	Vom Zweiersystem	32
3.3	Stammbrüche	35
3.4	Aufgaben	38
4	Vielecke	41
4.1	Konvexe Gebilde in der Ebene	41
4.2	Regelmäßige Vielecke	42
4.3	Geometrie der Bienenwaben	44
4.4	Vom Parkettlegen	46
4.5	Parkett - vielfältig gemustert	47
4.6	Aufgaben	49
5	Geometrie ohne Lineal	52
5.1	Das Sieben-Brücken-Problem	52
5.2	Was sind Bäume?	54
5.3	Aufgaben	58
6	Mathematische Paradoxa und Rätsel	60
6.1	Knobelei im Restaurant	60
6.2	Wellblech - so oder so?	61
6.3	Zahnräder	61
6.4	Aufgaben	64
7	Keine Angst vor Textaufgaben!	67
7.1	Was ist eine eingekleidete Aufgabe?	67
7.2	Wir verpacken Streichholzschachteln	68
7.3	Wir mischen Flüssigkeiten	70

7.4	Ein Transportproblem	72
7.5	Das arithmetische Mittel	74
7.6	Aufgaben	77
8	Lösungen der Aufgaben	80

1 Beginnen wir mit einem Spiel

1.1 Aufgaben vom Schachbrett

Nicht nur auf Schachspieler übte und übt das Schachbrett noch immer eine große Anziehungskraft aus; seine 64 Felder haben auch zahlreiche Mathematiker inspiriert.

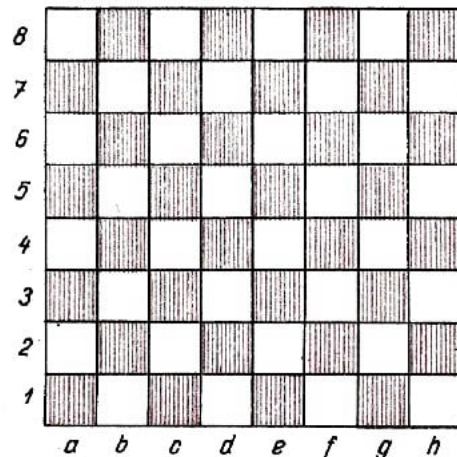


Bild 1

Bereits die Art und Weise, wie man die Schachpartien aufzeichnet (Schachnotation), macht dem Uneingeweihten den Eindruck einer mathematischen Aufzeichnung; in der Schachliteratur wird nämlich am häufigsten die sogenannte algebraische Notation gebraucht, wobei die einzelnen Felder des Schachbretts so bezeichnet werden, wie Bild 1 veranschaulicht.

Den vertikalen Reihen werden die Kleinbuchstaben a bis h, den horizontalen die Zahlen 1 bis 8 zugeordnet. Die Felder als Schnittpunkte der Horizontalen und Vertikalen bezeichnet man mit den betreffenden Buchstaben und der dazugehörigen Zahl.

Das Feld a1 befindet sich stets zur linken Hand des Spielers, der die weißen Figuren führt. Ein guter Mathematiker ist in der Regel auch ein guter Schachspieler, und viele Schachspieler haben, selbst wenn sie keine Mathematiker von Beruf sind, eine Vorliebe für mathematische Probleme.

Es ist nicht uninteressant, dass zwei der offiziellen Schachweltmeister, Emanuel Lasker und Max Euwe, wissenschaftlich tätige Mathematiker waren. Übrigens brauchen wir Beispiele nicht im Ausland zu suchen: Unser internationaler Schachmeister Miroslav Katětov ist Professor der Mathematik an der Karls-Universität in Prag.

Damit soll freilich nicht gesagt werden, dass das Schachspiel ein mathematisches Spiel in dem Sinne ist, dass man darin Lehrsätze der Schulmathematik anwendet.

Das Schachbrett hat jedoch bereits vor einigen Jahrhunderten auf indirektem Wege Eingang in manche mathematischen Lehrbücher gefunden.

Der berühmte Mathematiker Leonhard Euler beschäftigte sich gern mit Aufgaben, deren Grundlage das Schachbrett und die Schachregeln bilden; mit einigen dieser Probleme wollen wir uns hier bekannt machen.

Wenden wir uns zunächst einer Schachfigur, dem Springer, zu. Die Schachregeln er-

lauben ihr einen interessanten Zug: Wenn sich die Figur auf dem Feld A (s. Bild 2) befindet, darf sie alle mit einem Punkt bezeichneten Felder besetzen.



Der Name L. Eulers gehört zu den bedeutendsten in der Geschichte der Mathematik. Da wir diesem vielseitigen Mathematiker in unserem Büchlein noch mehrere Male begegnen werden, wollen wir hier seinen Lebenslauf wenigstens skizzieren.

L. Euler wurde 1707 in Basel geboren und starb 1783 in Petersburg. Bereits mit dreiundzwanzig Jahren war er Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften. 1735 erblindete er auf einem Auge, 1766 auch auf dem zweiten.

Er arbeitete jedoch weiter, indem er seine Werke diktierte, und blieb bis zu seinem Tode wissenschaftlich tätig. Euler gab eine Menge wissenschaftlicher Arbeiten heraus. Seine Schriften über Integralrechnung, Zahlen- und Kurventheorie, Trigonometrie und unendliche Reihen bilden eine Grundlage, auf der ein großer Teil der heutigen Mathematik aufgebaut ist.

Nicht unbedeutend ist ferner auch Eulers Verdienst um die Einführung einer eindeutigen Symbolik. So stammen z.B. die Namen für einige mathematische Begriffe (e , π , i) von Euler.

"Eines Tages kam ich in eine Gesellschaft", schreibt Leonhard Euler 1759, "in der Schach gespielt wurde. Jemand stellte die Frage, ob es möglich sei, mit dem Springer von einem gegebenen Feld aus das ganze Schachbrett so zu durchwandern, dass jedes Feld nur einmal besetzt werde."

Aus diesen Worten geht hervor, dass Euler die Springeraufgabe bis dahin unbekannt war.

Wir verraten jedoch unseren Lesern, dass Autoren verschiedener Länder bereits vor Euler mit mehr oder weniger Erfolg dieses Problem zu lösen versucht hatten. Die älteste

europäische Quelle dieses Problems geht auf die erste Hälfte des XIV. Jahrhunderts zurück.

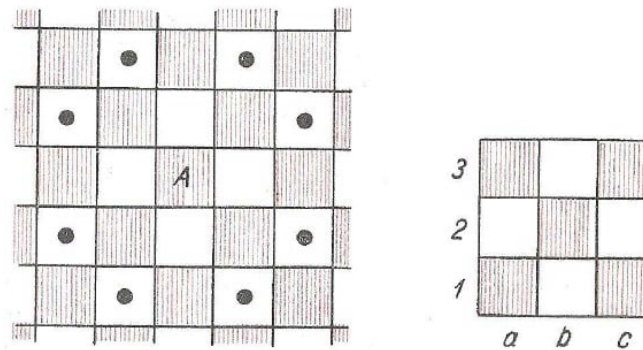


Bild 2 und Bild 3

Euler gebührt jedoch ohne Zweifel das Verdienst, eine mathematische Theorie dieser Aufgabe entwickelt zu haben.

Es ist durchaus nicht selbstverständlich, dass es überhaupt möglich ist, wenigstens in einer Weise das Schachbrett so zu durchwandern, wie es in der Aufgabe verlangt wird. Hätten wir nämlich statt des normalen Schachbretts³ ein kleineres mit nur 9 Feldern (3. Bild 8) gewählt, so wäre es unmöglich, dieses mit dem Springer in der geforderten Weise zu durchwandern. Vom Feld b2 aus kann nämlich der Springer nicht ziehen, auch kann er das Feld von keinem andern Feld des Schachbretts erreichen. Die Aufgabe ist also für dieses kleine Brett nicht lösbar.

Hingegen lässt sich auf dem normalen Schachbrett die Aufgabe leicht erfüllen. Es gibt sogar sehr viele Möglichkeiten, wie der Springer ziehen kann. Jeder Leser, der es versucht, wird wohl nach einigen Versuchen erfolgreich sein.

Dies war gewiss auch der Grund dafür, weshalb Mathematiker und Schachspieler die Aufgabe noch erweiterten und zusätzliche Bedingungen für die Springerzüge stellten.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Bild 4

So schlug bereits Euler vor, den Springer zunächst alle Felder der "unteren" Schachbretthälfte durchwandern und ihn erst dann in die "obere" Hälfte übertreten zu lassen. Dieses Vorgehen ist in Bild 4 veranschaulicht, in dem die Schachfelder in der Reihenfolge der Springerzüge numeriert sind.

³Unter einem normalen Schachbrett versteht man ein quadratisches Brett mit 64 Feldern.

Schwieriger ist jedoch die Lösung der "Rösselsprungaufgabe", wenn man die Bedingung stellt, dass die Reihenfolge der Rösselsprünge ein magisches Quadrat bilden soll. Bevor wir das im vorigen Jahrhundert entdeckte Schema anführen, müssen wir einige Worte über magische Quadrate sagen.

Dieses Spiel, das wohl orientalischen Ursprungs ist, verlangt, dass man in jedes der n^2 Felder eines Quadrats eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n^2$ so einträgt, dass die Summen in allen horizontalen und vertikalen Reihen (manchmal auch in den Diagonalen) einander gleich sind.

Man erkennt mathematisch leicht, dass diese Summen der Zahl $\frac{1}{2}n(1+n^2)$ gleich sind, die die sogenannte Konstante des magischen Quadrats bildet.

So kann man z.B. für $n = 3$ das Quadrat zusammenstellen, dessen Konstante $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 + 3^2) = 15$ ist:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Der Name "magisch" wurde diesem arithmetischen Spiel (das vom wissenschaftlichen Standpunkt aus in die sogenannte Additionszahlentheorie⁴ gehört) im Mittelalter gegeben, das solchen Quadraten Zauberkraft zusprach: Amulette mit magischen Quadraten sollten Kinder vor Krankheit, Pferde vor Unfall, Wanderer vor Schlangenbiss usw. "schützen".

Wir lächeln heute über diese naiven Vorstellungen unserer Verfahren; für uns bleiben die magischen Quadrate nur ein Spiel.

Kehren wir jedoch zu den Springerzügen zurück. Wir können das normale Schachbrett zur Grundlage eines magischen Quadrates wählen, dessen eingeschriebene Zahlen die Reihenfolge der Springerzüge auf dem Schachbrett angeben. Das wird in Bild 5 veranschaulicht, in dem man auch sieht, dass die Konstante dieses magischen Quadrates wirklich $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (1 + 8^2) = 260$ ist.

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260

Bild 5

⁴Aus dem lateinischen Wort additio: das Zusammenzählen.

Der in Bild 5 beschriebene Zug ist sogar "geschlossen" (d.h., der Springer kann von dem mit der Zahl 64 bezeichneten Feld auf das mit 1 bezeichnete zurückgelangen).

1.2 Der Turm von Hanoi

Am Anfang dieses Jahrhunderts erschien ein vierbändiges Werk "Récréations mathématiques" des Franzosen Ed. Lucas. Dieser Mathematiker "überschwemmte" bereits im vorigen Jahrhundert illustrierte Zeitschriften mit geistreichen Beiträgen, von denen manche noch heute populär sind.

Er liebte es, seinen Rätseln einen exotischen Rahmen zu verleihen und unterschrieb seine Zeitschriftenartikel mit dem Pseudonym "Mandarin Claus".

Diese Unterschrift trug 1890 auch ein Artikel in der französischen Zeitschrift "Cosmos", in dem Lucas den Lesern ein neues mathematisches Rätsel vorlegte. Die Aufgabe verbreitete sich bald über die ganze Welt und ist heute unter dem Namen "der Turm von Hanoi" bekannt.

Stellen wir uns ein Brett mit drei Holzpflocken A , B , C vor, wie es in Bild 6 schematisch dargestellt ist. Auf einen der Pflocke (in Bild 6 mit A bezeichnet) sind durchbohrte, runde Scheiben so gesteckt, dass sie eine Art Pyramide bilden.

Die Aufgabe besteht nun darin, alle Scheiben vom Pflock A auf den Pflock B zu übertragen, wobei man immer nur eine Scheibe wechseln, die kleinere auf die größere (nicht umgekehrt) legen und von allen drei Pflocken A , B , C Gebrauch machen darf.

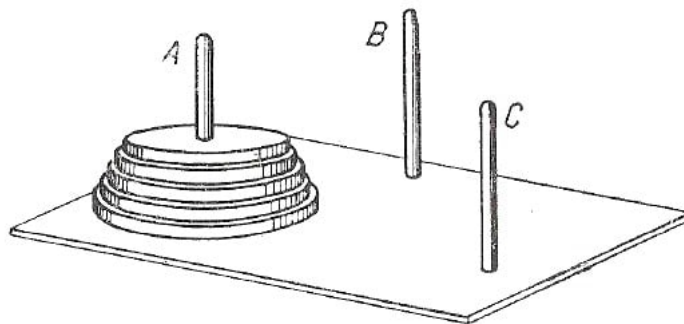


Bild 6

Wir haben bisher nicht gesagt, wie viele Scheiben auf den Pflock A gesteckt sind. In Bild 6 sind es fünf, die Aufgabe lässt sich jedoch für eine beliebige Zahl Scheiben lösen. Wenn Sie eine Lösung versuchen, werden Sie sehen, dass die Zahl der nötigen Wechsel schnell anwächst, wenn die Zahl der anfänglich auf dem Pflock A steckenden Scheiben zunimmt.

Falls man die Aufgabe z.B. für fünf Scheiben lösen soll, muss man offensichtlich die unterste (größte) Scheibe auf den Pflock B übertragen. Vor dem Wechsel der unteren Scheibe von A zu B sind die vier restlichen Scheiben auf den Pflock C zu stecken; denn die Pflocke A und B müssen zum Wechseln der größten Scheibe frei bleiben.

Wie man sieht, wird damit die Aufgabe auf den Wechsel von vier Scheiben reduziert, und es ist auch leicht ersichtlich, dass sich die beim Spiel auszuführende Anzahl der Wechsel vom anfänglichen W zu $2W + 1$ vergrößert, wenn die Zahl der Scheiben am

Pflock A (in der Grundstellung) um eins anwächst.

Stellen wir eine Tabelle zusammen, aus der die Minimalzahl der Wechsel bei gegebener Scheibenzahl ersichtlich ist:

Anzahl Scheiben	Anzahl Wechsel
1	1
2	3
3	7
4	15
5	15

Aus der Tabelle ergibt sich als Schlussfolgerung: Wenn der Turm von Hanoi n Scheiben hat, muss man beim Spiel mindestens $2^n - 1$ Wechsel ausführen. Den Beweis bringen wir hier nicht; fortgeschrittenen Lesern wollen wir nur verraten, dass dieser Beweis mit Hilfe mathematischer Induktion geführt werden kann.

1.3 Das Arithmomachiaspiel

Das Spiel, mit dem wir den Leser in diesem Kapitel bekannt machen wollen, zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus, denn man braucht dazu keinerlei Hilfsmittel.

Das bedeutet freilich nicht, dass die Arithmomachia (auch als Nim- oder Fan-Tan-Spiel bekannt) mathematisch nicht interessant wäre - im Gegenteil.

Wir wollen zunächst die einfachste und geläufigste Spielweise für den Fall anführen, dass sich nur zwei Spieler, A und B , mit der Arithmomachia unterhalten. Spieler A wählt eine beliebige Zahl von 1, 2, 3, ..., 10, Spieler B tut dasselbe und addiert seine Zahl zu der von A genannten; dann fährt Spieler A ebenso fort.

Auf diese Weise lösen beide einander ab; zu dem zuletzt erreichten Ergebnis addieren sie stets nach Belieben eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., 10. Gewonnen hat, wer als erster die im voraus festgesetzte Zahl T (z.B. $T = 100$) erreicht.

Wie soll man vorgehen, um sich den Sieg zu sichern? Wir wollen dies für den Fall $T = 100$ beschreiben.

Der Spieler, der die Zahl 89 erreicht, muss gewinnen, weil sein Gegner durch einmaliges Addieren 100 nicht erzielen kann. Ähnlich nimmt derjenige, der sich die Zahl 78 sichert, dem Mitspieler die Möglichkeit, die Zahl 89 zu erreichen; durch zweimaliges Wählen kann er sich dann selbst den Sieg sichern.

Wenn wir diese Überlegungen fortsetzen, sehen wir, dass der Spieler gewinnt, der nacheinander die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 für sich in Anspruch nimmt. Diese Zahlen (die man sich übrigens leicht merkt) kann man strategische Zahlen nennen.

Aus der angeführten Folge der strategischen Zahlen erkennt man, dass sich der Spieler, der die erste Wahl hat, den Sieg sichern kann, indem er die Zahl 1 nennt. Wenn jedoch der erste Spieler die Gesetze des Spiels nicht kennt und eine andere Zahl wählt, kann sein Gegner dadurch mit Sicherheit gewinnen, dass er die als erste gewählte Zahl auf 12 ergänzt und dann die angeführten strategischen Zahlen konsequent beibehält.

Dies ist die geläufigste Form des Arithmomachiaspiels. Der Leser kann jedoch auch andere Varianten berechnen:

Wenn z.B. jeder Spieler von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 13 wählen kann und das Erreichen von $T = 144$ den Sieg bedeutet, sind die strategischen Zahlen 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88, 102, 116, 130.

Auch bei dieser Spielvariante gewinnt derjenige, der zuerst wählt, sofern er die Bedeutung der strategischen Zahlen kennt; er beginnt sein Spiel, indem er die Zahl 4 nennt. Falls aber jeder Spieler aus den Zahlen 1, 2, 3, ..., 7 wählen kann und das Erreichen der 80 den Sieg bedeutet, kann im Gegenteil der Spieler den Sieg erzwingen, der als zweiter an der Reihe ist. Die strategischen Zahlen sind hier nämlich 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72 (d.h. das Vielfache der 8); der Spieler, der als erster wählt, kann die strategische Zahl 8 nicht erreichen und verliert daher die Möglichkeit des Sieges.

Die Arithmomachia wird komplizierter, wenn man gewisse Einschränkungen vornimmt. So kann man z.B. festsetzen, dass jeder Spieler die zugeählte Zahl im Spielverlauf höchstens dreimal wiederholen darf. Durch diese Zusatzregel wird das Spiel interessanter und spannender: eine vollständige mathematische Theorie dieser Variante ist jedoch sehr schwierig. Es ist dann auch nicht leicht zu entscheiden, ob es vorteilhafter ist, das Spiel zu eröffnen oder als zweiter zu spielen.

Eine andere Variante erlaubt, dass der Spieler A eine von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 9 und der Spieler B eine von den Zahlen 1, 2, ..., 10 (die Intervalle, in denen man Zahlen wählen kann, sind verschieden) wählt.

Sieger wird, wer als erster die Zahl $T = 100$ erreicht.

Bei dieser Variante kann der Spieler B den Sieg erzwingen, wenn er folgendermaßen verfährt: Wenn A die Zahl 2 oder eine größere Zahl wählt, ergänzt sie der Spieler B durch seine Wahl so, dass sich die Summe 12 ergibt; er hält weiter an seinen strategischen Zahlen 23, 34, 45, ..., 89 fest und muss gewinnen.

Wenn der Spieler A die Zahl 1 wählt, erzwingt der Spieler B das Erreichen der strategischen Zahl 12 dadurch, dass er ebenfalls die Zahl 1 (die Summe ist dann 2) nennt. Mag nun bei seiner zweiten Wahl der Spieler A eine beliebige Zahl von 1, 2, ..., 9 wählen, so erreicht Spieler B auf jeden Fall 12 und dadurch auch den Sieg.

Eine andere Variante wäre es, wenn die Spieler Zahlen aus Intervallen wählen könnten, die sich gar nicht überdecken (der eine z. B. die Zahlen 1, 2, ..., 5, der andere die Zahlen 7, 8, 9, ..., 12). In diesen komplizierteren Fällen könnte es vorkommen, dass das Spiel unentschieden bleibt, da die im voraus gesteckte Grenze T nicht genau erreichbar ist.

Um das zu vermeiden, kann man die Regeln in dem Sinn abändern, dass der Spieler gewinnt, der als erster die verabredete Grenze überschreitet.

Das Arithmomachiaspiel war vor Jahren sehr verbreitet.

Es wurde bereits 1624 von Bachet de Méziriac in verschiedenen Varianten beschrieben. Statt die Zahlen auswendig zuzurechnen, können die Spieler Spielmarken (Streichhölzer, kleine Münzen) von einem Häufchen wegnehmen, wobei die Person gewinnt, die die letzte Spielmarke einheimst: Selbstverständlich können die Arithmomachia in ent-

sprechend abgeänderter Form auch drei oder mehrere Personen spielen.

1.4 Sport im Zahlenspiel

In den letzten Jahren haben das Sazka- und das Sportkaspiel weite Verbreitung gefunden. Auch im Ausland ist diese Unterhaltung beliebt und unter verschiedenen Namen bekannt. Man sieht gleichsam auf den ersten Blick, dass beide Spiele mit Mathematik zusammenhängen, und es ist daher angebracht, die Spielenden über diese Zusammenhänge wenigstens in groben Zügen zu informieren.

Unter den Sazka- und Sportkaenthusiasten sind zwar viele "Spielsysteme" im Umlauf, es handelt sich jedoch meistens um Spielanweisungen, die nicht auf mathematischer Grundlage beruhen.

Wir führen zunächst einige interessante Einzelheiten an, die das Tippen in der Sazka betreffen. Aus den Spielregeln der Sazka, die wohl den meisten Lesern bekannt sind, wiederholen wir die folgenden wichtigsten Grundsätze:

Jede Woche wird auf das Ergebnis von zwölf Spielen getippt, wobei jedem Spiel eine Zeile auf dem Ticket vorbehalten ist. (Von den zwei Ersatzspielen sehen wir ab, da nur selten eins von ihnen in die zu tippenden Kämpfe einbezogen ist.)

Mit einem Einser tippt man auf den Sieg der Mannschaft, die auf der Zeile an erster Stelle steht, mit einem Zweier auf den der Mannschaft an zweiter Stelle; ein Kreuz schließlich bedeutet ein Unentschieden. Der richtig getippte Kampf, der auf dem Ticket mit einem Einser bezeichnet ist, zählt einen Punkt, der mit einem Zweier bezeichnete zählt zwei Punkte und der mit einem Kreuz drei Punkte.

Wenn der Tippende das Ergebnis aller Spielkämpfe erraten hat, hat er Anspruch auf den Gewinn im ersten Rang. Derjenige, dem ein Punkt fehlt (da er einen Einser nicht erriet), gewinnt den zweiten Rang. Wem zu einem richtigen Tip zwei Punkte fehlen, der gewinnt den dritten Rang usw.

Um festzustellen, wie viele verschiedene Tips in der Sazka möglich sind, verfährt man folgendermaßen: Auf jeder Zeile kann man sich für eines der drei Symbole 1, 2, x entscheiden; da es im ganzen 12 Zeilen gibt, ist die gesuchte Zahl gleich

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{12} = 3^{12} = 531441$$

Der Spieler, der alle diese Möglichkeiten einsetzte, würde die Gewissheit haben, den für den ersten Rang bestimmten Gewinn zu bekommen; außerdem würde er eine Reihe Gewinne des zweiten, dritten und vierten Ranges einheimsen.

Sein Gesamtgewinn hinge davon ab, wie viele Einser, Zweier und Kreuze in der betreffenden Woche der richtige Tip enthält. Wenn man die Zahl der Einser, die bei einem richtigen Tip vorkommen, mit 3; bezeichnet, kann man leicht berechnen, wie viele Gewinne des zweiten Ranges ein solcher Spieler erreichen würde.

Wenn $y = 0$ ist, würde er keinen dieser Gewinne erzielen. Ist das y positiv, so wird

die Zahl der Gewinne im zweiten Rang durch die Zahl der Tips gegeben, in denen ein Einser fehlt und statt dessen entweder ein Zweier oder ein Kreuz geschrieben steht; im ganzen also 2y Gewinne. Analog lässt sich die Zahl der Gewinne im dritten und vierten Rang berechnen.

Natürlich kann kein Spieler auf alle Tips setzen, um unbedingt einen Gewinn im ersten Rang zu erzielen. Ein Tip kostet in der Sazka 1 Krone, so dass ein solcher Versuch auf mehr als eine halbe Million Kronen käme.

Außerdem fehlt für einen solchen Versuch auch die zur Ausfüllung einer so großen Zahl Tickets notwendige Zeit.

Neben der Sazka erfreut sich auch eine unter dem Namen Sportka bekannte Lotterie großer Beliebtheit. Jede Woche werden aus 49 verschiedenen Sportarten (bezeichnet mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 49) sechs Sportarten durch das Los bestimmt.

Das Ticket, auf dem alle diese Sportarten richtig bezeichnet stehen, erzielt den Gewinn des ersten Ranges.

Der nur fünf Sportarten erratende Spieler gewinnt den zweiten, der mit vier Sportarten den dritten Rang usw.

Um die Sportka näher untersuchen zu können, erinnern wir uns an die Begriffe Fakultät und Binomialkoeffizient (Kombinationszahl). Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, bezeichnet man das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ und liest es

„ n Fakultät“. Es ist also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

Außerdem setzt man $0! = 1$.

Es ist also zum Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Wenn die Zahl n anwächst, wachsen die Werte von $n!$ sehr schnell an, und die Berechnung der Fakultät für große n ist ziemlich mühsam. In ausführlicheren mathematischen Tafeln wird manchmal eine Übersicht der Werte $n!$ für die ersten Dekaden der natürlichen Zahlen n angegeben.

Es wurden auch Näherungsformeln gefunden, die die Berechnung von $n!$ für große n erleichtern sollen.

Wenn man ganze Zahlen k, n hat, für die $0 \leq k \leq n$ gilt, dann versteht man unter dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (gelesen „ n über k “) den Bruch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

an Man überzeugt sich leicht, dass $\binom{n}{0} = 1$ gilt. Wenn k positiv ist, lässt sich der angeführte Bruch auch in der Form

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

schreiben; im Zähler und im Nenner gibt es die gleiche Anzahl Faktoren (nämlich gerade k).

Ferner ist es zweckmäßig, $\binom{n}{k} = 0$ für $0 < n < k$ zu setzen.

Als Beispiel sei $\binom{8}{3}$ berechnet. Es gilt

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Zahl der Möglichkeiten an, aus n verschiedenen Elementen k Elemente zu wählen (wobei die Reihenfolge der Elementenauswahl unberücksichtigt bleibt).⁵

Kehren wir jetzt zu den Sportkaproblemen zurück. Zunächst wird uns wohl interessieren, wie viele Male man aus 49 verschiedenen Sportarten 6 herauswählen kann; diese Zahl ist durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

gegeben.

Wenn in der ČSSR alle Bürger, Schulkinder und Säuglinge eingerechnet, die Sportka spielten und jeder von ihnen das Ticket mit anderen sechs Sportarten ausfüllte, würde noch ungefähr eine Million Tips frei bleiben. Daraus ist ersichtlich, dass sich kein einzelner den Sieg in der Sportka dadurch sichern kann, dass er auf alle erdenkbaren Tips setzt.

Ein Tip in der Sportka kostet 3 Kčs, ein Ticket 0,20 Kčs; der Spieler, der sich alle Tips sichern möchte, würde

$$3,20 \text{ Kčs} \cdot \binom{49}{6} = 3,20 \text{ Kčs} \cdot 13983816 = 44748211,20 \text{ Kčs}$$

aufwenden müssen, also ungefähr 45 Millionen Kronen.

Die Berechnung der Kombinationszahl $\binom{49}{6}$ erklärt auch, warum nur sehr selten einer der Sportkaenthusiasten den ersten Rang gewinnt. In den meisten Spielwochen wird gemeldet, dass im ersten Rang kein Gewinn zu verzeichnen ist und dass erst auf den zweiten Rang einige Gewinne fallen.

Einige Spieler versuchen, durch wohlüberlegte Verteilung ihrer Tickets wenigstens einen vierten Rang an sich zu reißen, die meisten jedoch verlassen sich auf den Zufall. Sie verfolgen die Zahlen, die in mehreren vorangegangenen Wochen gezogen wurden.

Sie behaupten nämlich, dass es vorteilhaft sei, auf jene Zahlen zu setzen, die längere Zeit nicht gezogen wurden; andere Spieler ziehen dagegen jene Sportarten vor, die in letzter Zeit öfters ausgelost wurden.

⁵Der Name Binomialkoeffizient erinnert daran, dass Zahlen in der Form $\binom{n}{k}$ eine wichtige Rolle beim sogenannten binomischen Lehrsatz spielen. Dieser Satz zeigt, wie eine zweigliedrige Zahl (Binom) $a + b$ in die n -te Potenz erhoben wird oder wie man die Potenz $(a + b)^n$ berechnet.

Vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie aus muss man jedoch feststellen, dass weder die einen noch die andern Enthusiasten recht haben. Die Ergebnisse der einzelnen Ziehungen sind voneinander gänzlich unabhängig. Unrichtig sind auch die Vorstellungen einiger Spieler darüber, wie regel- oder unregelmäßig die glückbringenden sechs Sportarten unter den 49 zu wählen sind.

Die meisten Spielenden setzen nicht gern auf die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, obwohl diese Sechsergruppe den ersten Rang mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielen kann wie jede beliebige andere.

Zur Sazka und Sportka kommen wir noch in einigen Aufgaben am Ende dieses Kapitels zurück.

1.5 Die bunten Würfel des Majors Mac Mahon

Das Spiel des Majors Mac Mahon besteht aus dreißig gleich großen Würfeln, deren Flächen in sechs Farben gehalten sind:

Jeder Würfel hat eine weiße, blaue, grüne, gelbe, rote und schwarze Fläche. Dabei unterscheiden sich je zwei dieser Würfel durch die gegenseitige Lage der farbigen Flächen voneinander.

Warum enthält das Spiel ausgerechnet dreißig Würfel? Weil die sechs Farben gerade auf dreißigfache Weise so auf die Würfelflächen verteilt werden können, dass je zwei Farbenordnungen voneinander verschieden sind. Man kann sich davon auf folgende Weise überzeugen:

Man stelle sich einen Würfel vor, der vor uns auf dem Tisch steht. Eine der sechs Flächen muss weiß sein (man nehme an, dass es die Grundfläche ist). Für die Farbe der entgegengesetzten (Deck-) Fläche gibt es also fünf Möglichkeiten (sie kann blau, grün, gelb, rot oder schwarz sein). Wenn man eine dieser fünf Farben wählt, bleiben für die Farbe der senkrechtstehenden "Wandflächen" noch vier Möglichkeiten übrig.

Wenn man diese vier Farben mit A , B , C , D bezeichnet, muss man noch entscheiden, auf wievielfache Weise man sie auf die vier Wandflächen verteilen kann.

Eine dieser Flächen muss die Farbe A haben; den Würfel kann man auf den Tisch so stellen, dass die Farbe A uns zugewandt ist. Für die Farbe der hinteren Wandfläche gibt es dann drei Möglichkeiten (Farbe B oder C oder D). Wenn man sich für eine davon entscheidet, bleiben noch die letzten zwei Farben X , Y und zwei Wandflächen des Würfels (die linke und die rechte) übrig. Die rechte Wand bekommt also die Farbe X und die linke die Farbe Y oder umgekehrt (wir haben im ganzen zwei Möglichkeiten).

Wenn man diese Überlegungen zusammenfasst, so erkennt man, dass man zuerst mit fünf Möglichkeiten gerechnet hat, von denen jede sich in drei Fälle und jeder von diesen sich in zwei mögliche Färbungen verzweigt. Die Zahl der verschiedenen Farbanordnungen ist also $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$, wie bereits oben erwähnt wurde.

Mit den dreißig Würfeln des Mac Mahon lassen sich verschiedene Spiele verabreden; auf das bekannteste wollen wir hier eingehen.

Von den dreißig Würfeln wählt man einen beliebigen, den man Muster nennt. Von den 29 übrigen soll man 8 herauswählen und sie zu einem großen Würfel zusammenstellen, der die gleiche Farbverteilung wie das Muster hat. Wenn man nichts weiter verlangt, ist die Aufgabe verhältnismäßig leicht. Mac Mahon fügte jedoch noch einige andere Forderungen für die Zusammenstellung des Würfels aus acht Einzelwürfeln hinzu.

Er verlangte, dass im "großen" Würfel nur Würfel mit gleichfarbigen Flächen aneinanderstoßen sollen. Wenn z.B. ein Einzelwürfel eine weiße Deckfläche hat und man darauf einen weiteren stellt, muss die Grundfläche dieses Würfels wiederum weiß sein.

Wie man sieht, geht es um einen Zeitvertreib, zu dessen Verständnis man keine mathematischen Vorkenntnisse aus der Schule braucht. Es wurde zwar eine Theorie dieses Spiels ausgearbeitet, aber diese kann denjenigen nicht viel nützen, die sich wirklich mit den Würfeln unterhalten wollen.

In der Theorie wird nämlich im wesentlichen bewiesen, dass die Aufgabe eine Lösung hat, die Anweisungen zur Erreichung des Ziels aber sind ziemlich kompliziert. Ein Spieler kommt jedoch ohne die Theorie aus, und nach ein wenig Übung wird er in den einzelnen Fällen die Lösung selbst finden.

1.6 Aufgaben

1.1. Wieviel Züge kann auf einem normalen leeren Schachbrett a) ein Springer, b) eine Dame⁶ ausführen?

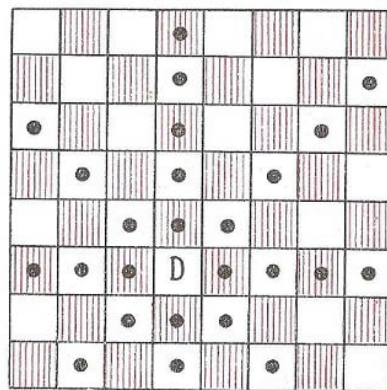


Bild 7

*1.2. Man soll die kleinste (bzw. größte) Anzahl der Könige⁷ bestimmen, mit denen das normale, leere Schachbrett so zu besetzen ist, dass jedes freie Feld von einem König zu erreichen ist und dass dabei kein König einen anderen bedroht.

1.3. Auf einem leeren Schachbrett sind fünf Damen so aufzustellen, dass sie alle nicht besetzten Felder decken.

1.4. Auf ein normales, leeres Schachbrett sind vier Damen so zu stellen, dass sie alle nicht besetzten Felder mit Ausnahme der Felder a1, a2, b1, b2 decken.

⁶Die Dame kann sich bei jedem Zuge beliebig weit vor oder zurück parallel zu den Seiten des Brettes oder parallel zu den beiden Diagonalen des Brettes bewegen (s. Bild 7).

⁷Der König kann nach allen Seiten einen Schritt ziehen oder schlagen.

1.5. Zwei Spieler spielen das folgendermaßen variierte Arithmomachiaspiel: Der Spieler A wählt aus den zehn Zahlen 1, 2, 3, ..., 10, der Spieler B aus den zehn Zahlen 6, 7, 8, ..., 15 eine beliebige Zahl. Es gewinnt derjenige, der die Zahl 100 überschreitet. Kann der Spieler A , der anfängt, den Sieg erzwingen?

1.6. Zwei Spieler - A, B - verabreden miteinander folgendes Spiel:

In zwei Häufchen liegt eine bestimmte Anzahl Spielmarken (Streichhölzer, Münzen u. ä.). Der Spieler A nimmt von einem beliebigen (aber nur einem) Häufchen eine beliebige Anzahl Spielmarken fort, dann nimmt wieder der Spieler B auch eine beliebige Anzahl Spielmarken von einem beliebigen Häufchen, dann folgt der Spieler A usw.

Es gewinnt derjenige, der als letzter Spielmarken einheimst. Kann der Spieler A , der als erster am Zug ist, den Sieg erzwingen? Wie soll er vorgehen?

1.7. Die Regeln aus der vorangehenden Aufgabe 1.6. sind so abzuändern, dass derjenige Spieler verliert, der als letzter Spielmarken wegnimmt. Kann der Spieler, der den ersten Zug macht, den Sieg erzwingen?

*1.8. In der Sazka wurden x Einser, y Zweier und z Kreuze gezogen ($x + y + z = 12$). Berechnen Sie, wie viele Tips einen Gewinn im dritten und vierten Rang erreichen können.

1.9. In der Sazka wurden 4 Einser, 6 Zweier und 2 Kreuze ausgelost. Wie viele Tips können den Gewinn im ersten, zweiten, dritten und vierten Rangerzielen? (Benutzen Sie die Ergebnisse der vorangehenden Aufgabe.)

1.10. Bei welcher Verteilung der Einser, Zweier und Kreuze entsteht in der Sazka die größte Anzahl von Tips, die einen Gewinn im zweiten Rang erzielen können?

*1.11. Bei welcher Verteilung der Einser, Zweier und Kreuze entsteht in der Sazka die größte Anzahl von Tips im dritten Rang?

*1.12. Wieviel verschiedene Gewinne des zweiten, dritten und vierten Ranges gibt es in der Sportka?

1.13. Auf wievielfache Weise kann man die Ecken eines gegebenen regelmäßigen Vierflachs $ABGB$ mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 so bezeichnen, dass keine zwei so "nummerierten" Vierfläche durch eine passende räumliche Verschiebung gleichgesetzt werden können?

1.14. Man versuche, ein magisches Quadrat von 16 Feldern zu konstruieren.

2 Wirklichkeit und Täuschung

2.1 Bilder sind manchmal trügerisch

Ein illustrierter Roman liest sich besser als ein Buch ohne Bilder. In einem Lehrbuch der Geographie kommt man ohne Skizzen und Landkarten nicht aus, ein Buch über Biologie oder Botanik kann man sich ohne Bildmaterial überhaupt nicht vorstellen.

So wird der Autor des Textes von dem Illustrator und dessen Werk begleitet; Bilder helfen dem Leser, in den Stoff einzudringen, klären Begriffe und erhöhen die Anschaulichkeit. Überhaupt gewinnen wir wohl die meisten Erfahrungen über unsere tägliche Umwelt mit dem Auge.

Auch in mathematischen Lehrbüchern findet man in der Regel eine Reihe von Abbildungen, und niemand, der sich mit Geometrie beschäftigen will, wird ohne Zeichenhilfsmittel, wie Bleistift, Lineal, Zirkel, Winkelmesser oder Kurvenlineal, auskommen können.

Man braucht jedoch nicht besonders hervorzuheben, dass mathematische Figuren eine ganz andere Gestalt und Funktion haben als Romanillustrationen oder Bilder in einem Lehrbuch der Botanik.

Welche Bedeutung hat ein Bild bei mathematischen Überlegungen? Es ist ein sehr wertvolles Hilfsmittel, das unser Vorgehen anschaulicher macht und unserem Gedächtnis nachhilft.

Wenn wir ohne Abbildungen arbeiteten, ähnelten wir Schachspielern, die eine Partie "blind" spielen - ohne Figuren und ohne das Schachbrett anzusehen.

Solche Schachspieler gibt es, und ich zweifle nicht daran, dass manche der erfahreneren Leser geometrische Schulaufgaben lösen können, ohne vorher eine Skizze gezeichnet zu haben; das setzt jedoch Übung und ein gutes Vorstellungsvermögen voraus.

Die Bedeutung eines Bildes darf andererseits nicht überschätzt werden. Gerade seine Anschaulichkeit kann uns manchmal zu ganz falschen Schlussfolgerungen verführen.

Außerdem können wir niemals ganz sicher sein, bei der Zeichnung keine Ungenauigkeit begangen zu haben, die das ganze Ergebnis negativ beeinflussen könnte. Auch der beste Zeichner kann ohne mathematische Überlegungen nicht beweisen, dass drei Geraden, die sich in seiner Zeichnung schneiden, wirklich einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Selbst wenn man aufs sorgfältigste gearbeitet hat, kann man niemals ausschließen, dass Folgerungen, die sich scheinbar aus der fertigen Zeichnung ergeben, durch zufällige Ungenauigkeiten der Zeichnung hervorgerufen sein könnten.

Übrigens kann sich der Leser selbst davon überzeugen, dass Misstrauen zu einem gezeichneten Bild manchmal sehr berechtigt ist. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen, das in der Schule einen Prüfstein genauen Zeichnens bildet, am sogenannten Feuerbachschen Neun-Punkte-Kreis.

Bild 8 zeigt ein Dreieck ABC . Drei Geraden AA_1 , BB_1 , CC_1 die in der Abbildung gestrichelt sind, stellen die Höhen dieses Dreiecks dar. Jeder Leser weiß aus der Schule, dass sich diese drei Höhen in einem Punkt schneiden (H in Bild 8).

Der Punkt A_2 ist die Mitte der Seite BC , der Punkt B_2 die Mitte der Seite CA und der Punkt C_2 die der Seite AB .

Der Punkt A_3 halbiert die Strecke AH , der Punkt B_3 die Strecke BH und der Punkt C_3 die Strecke CH .

Nun wollen wir uns jene neun Punkte, die wir mit $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ bezeichnet haben, näher ansehen. Die Zeichnung legt uns den Gedanken nahe, dass alle neun Punkte auf einem Kreis liegen - oder nur auf einer einem Kreis sehr "ähnlichen" Kurve.

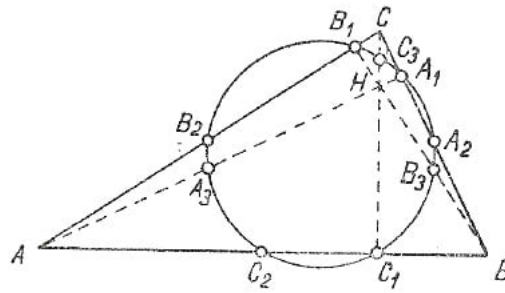


Bild 8

Wir verraten gleich, dass die aus dem Bild abgelesene Vermutung über den Kreis diesmal richtig ist. Die konstruierten Punkte liegen wirklich auf der Peripherie des Kreises, wovon man sich durch einen genauen mathematischen Beweis überzeugen könnte (der Beweis ist jedoch einigermaßen schwierig, weshalb wir ihn weglassen). Da die Konstruktion der genannten neun Punkte ziemlich kompliziert ist, schleicht sich fast immer ein Fehler in die Zeichnung ein. Man muss ein recht gewandter Zeichner sein, wenn der Feuerbachsche Neun-Punkte-Kreis wirklich durch alle verlangten Punkte gehen soll, wie es Bild 8 veranschaulicht.

2.2 Was sind optische Täuschungen?

Das Beispiel des Feuerbachschen Kreises zeigt, wie wichtig es für einen Mathematiker ist, sich mit den verschiedenen Fallstricken bekannt zu machen, die Vorstellungs- oder Anschauungskraft auslegen können. Ein Mathematiker verlässt sich niemals auf Auskünfte, die sich aus mehr oder weniger unvollkommenen Bildern ergeben und nimmt sie nur als (wenn auch manchmal sehr wertvolle) Anregungen hin, um alles von neuem und gründlich zu überlegen. Ein Bild, das zeigt, dass unser Auge und unsere Vorstellung nicht immer als verlässliche Richtschnur dienen und dass manchmal das Gegenteil von dem wahr ist, was man übereilt erwarten würde, nennt man (nicht ganz zutreffend) eine optische Täuschung.

Die Lehre von den optischen Täuschungen wurde gründlich und bis in einzelne Details ausgearbeitet. Betrachten wir jene optischen Täuschungen näher, die eine direkte Beziehung zur Mathematik und ihrer Anwendung haben. Zunächst müssen wir uns jedoch einige Begriffe eines etwas entlegeneren Gebiets klarmachen.

Aus dem Physikunterricht wissen wir noch, dass das Auge einem photographischen Apparat ähnlich ist. Das Objektiv des Apparate vertritt hier die Augenlinse, die lichtempfindliche photographische Platte die Netzhaut. Auch ein gesundes Auge weist eine

Reihe optischer Fehler auf, mit denen sich die geometrische und die medizinische Optik befassen.

Der deutsche Physiker Helmholtz äußerte über die Mängel des Menschauges sogar folgendes:

Wenn sich ein Optiker unterstehen würde, ihm ein Instrument mit solchen Mängeln, wie sie ein Auge hat, zu verkaufen, würde er sich für berechtigt halten, die Qualität seiner Arbeit scharf zu tadeln und ihm das Instrument unter Protest zurückzugeben.

Das ist freilich ein wenig übertrieben. Wir haben keinen Grund, unser Auge so abfällig zu beurteilen. Gäbe es keine optischen Täuschungen, so wären wir z.B. um alle Schätze der Malkunst gebracht und könnten weder Filmvorstellungen noch Fernsehprogramme verfolgen.

Man lese nur, was 1774 Leonhard Euler schrieb:

"Wenn wir gewöhnt wären, über Dinge nur nach der Wirklichkeit zu urteilen, könnte für uns die Malkunst überhaupt nicht existieren, und es wäre um uns so bestellt, als seien wir blind. Der Maler würde vergebens alle seine Kunst aufs Farbenmischen verwenden. Wir würden sagen: Hier, auf dieser Platte, ist ein roter Fleck, hier ein blauer, dort sind einige weiße und hier einige schwarze Linien. Alle befinden sich in derselben Ebene, man sieht ihnen keinen Entfernungsunterschied an.

Man könnte keinen einzigen Gegenstand abbilden. Alles auf dem Bild käme uns wie eine Schrift auf dem Papier vor. Bei aller Vollkommenheit wären wir arm daran, denn wir wären jedes Vergnügens verlustig, das uns die so angenehme und nützliche Malkunst bringt."

Optische Täuschungen sind manchmal schwierig zu erklären, ist doch z.B. schon das Schätzen von Entfernungen und Längen ein komplizierter Prozess, bei dem Erfahrung und Übung eine bedeutende Rolle spielen. Meistens geht es nicht um eine durch Augenfehler verursachte Täuschung, sondern um einen Trugschluss auf Grund unrichtiger Deutungen.

Wir sollten daher eigentlich besser von Trugschlüssen als von optischen Täuschungen sprechen; aber der Name "optische Täuschung" ist bereits eingebürgert.

2.3 Falsches Schätzen von Länge und Entfernung

Die Entfernung von Gegenständen beurteilt man oft nach der jeweiligen "Ermüdung" des Auges, das die betreffende Strecke durchlaufen muss. Daher erscheint uns eine senkrechte, auf eine Tafel gezeichnete Strecke länger als eine in Wirklichkeit gleich lange waagerechte. Wenn man versucht, ohne Lineal auf der Tafel ein Quadrat mit waagerechter Grundlinie zu zeichnen, und dann das Bild mit einem Lineal nachprüft, so fällt das Quadrat gewöhnlich niedriger aus, als es sein sollte.

Einige Druckbuchstaben hält man unwillkürlich für symmetrisch zu einer horizontalen Achse.

Der Zeichner der Buchstaben B, H, S oder der Ziffer 8 rechnete mit dieser optischen

Täuschung und hat daher den oberen und unteren Teil dieser Buchstaben ungleich groß entworfen. Der Leser wird diese kleine Asymmetrie kaum wahrnehmen, nur wenn der Druckfehlerteufel die Buchstaben zufällig auf den Kopf stellt, wird man von der Asymmetrie überrascht:

BHS 8 8 SHB

Mit fünfzehnjährigen Schülern machte ein Lehrer folgenden Versuch:

Er gab ihnen auf, die Länge und die Breite des Schulkatheders, das sie alle Tage vor Augen hatten, zu schätzen und das Ergebnis aufzuschreiben. Bei der Auswertung der Resultate stellte es sich heraus, dass die Schüler die Länge (horizontal gemessen) im großen ganzen richtig abschätzten, während sie die Höhe (in vertikaler Richtung) fast alle überschätzten.

Mit solchen Schätzfehlern muss auch ein Bildhauer bei der Wahl der Dimensionen von Statuen rechnen, die in verschiedener Höhe angebracht werden und trotzdem natürlich wirken sollen.

Ein anderer Irrtum beim Längenschätzen kann dadurch verursacht werden, dass man statt der Länge unwillkürlich die Flächengröße abschätzt. Wenn man mit Hilfe eines Lineals die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks in Bild 9 halbiert, ist man überrascht, da der Halbierungspunkt (scheinbar) zu hoch angebracht ist. In der unteren Bildhälfte sieht man nämlich eine größere Fläche als in der oberen.

Mit Hilfe des Lineals kann man sich überzeugen, dass in Bild 10 die Strecke AB nicht länger ist als BC . Hier beurteilt man unwillkürlich wieder die Fläche der Rhomben, deren Diagonalen durch die zu schätzenden Strecken dargestellt werden.

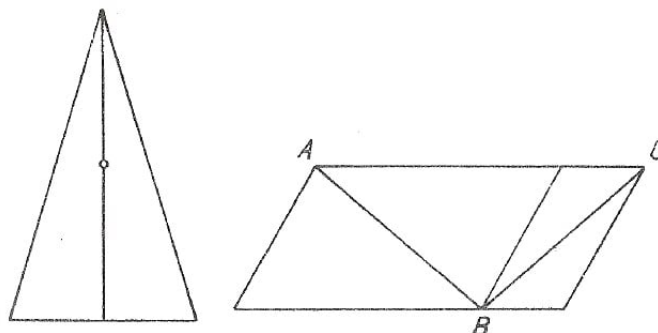


Bild 9 und 10

Eine ähnliche Erscheinung sieht man in Bild 11; auf einer (nicht gezeichneten) horizontalen Geraden sind drei Punkte gegeben, die nicht besonders bezeichnet, aber durch die Scheitelpunkte von drei Winkeln (in der Form $<$, $>$) dargestellt sind.

Von den zwei Strecken, die auf diese Weise auf der Geraden entstehen, ist die linke durch fünf Striche in gleiche Teile zerlegt. Man soll abschätzen, um wie viele solche Teile die rechte Strecke kürzer ist als die linke. Man schätze zunächst und messe anschließend mit dem Lineal nach.

In einigen Fällen fallen zwei optische Täuschungen so zusammen, dass sie einander unterstützen. Das haben wir eigentlich bereits in Bild 11 gesehen, wo die Beurteilung der Länge nach der Flächengröße (begrenzt durch die angedeuteten Winkelschenkel)

noch dadurch ergänzt wurde, dass eine geteilte Strecke in der Regel größer erscheint als eine gleiche Strecke ohne Teilpunkte. Jeder, der sich für geschmackvolle Bekleidung interessiert, weiß, dass man durch passende Muster eine Person entweder voller oder schlanker erscheinen lassen kann.

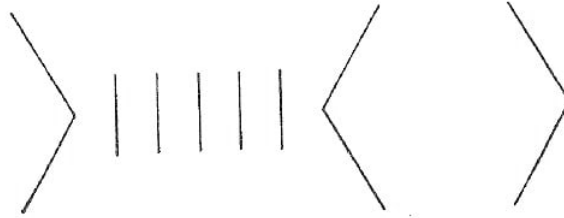


Bild 11

Eine weitere Täuschung, die zu einer unrichtigen Wertung der Größe oder Länge führt, wird dadurch hervorgerufen, dass man diese unwillkürlich mit einer anderen Größe oder Länge vergleicht.

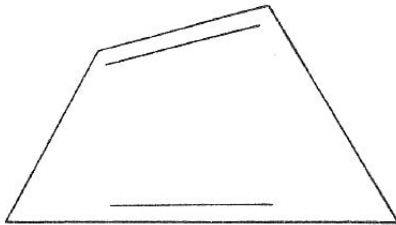


Bild 12

In Bild 12 ist ein ungleichseitiges Viereck gezeichnet; im Inneren sieht man unweit von den Seiten zwei Strecken. Man soll entscheiden, welche von den Strecken kürzer ist.

In Bild 13 beurteilt man die Länge der mittleren Strecke danach, ob sie zwischen kürzeren oder längeren Strecken liegt. Dieselbe Strecke scheint in der oberen Hälfte des Bildes länger als in der unteren.

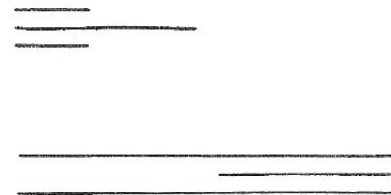


Bild 13

In Bild 14 kann man sich durch Nachmessen überzeugen, dass die beiden mittleren Kreise denselben Durchmesser haben, obwohl sie auf den ersten Blick verschieden groß erscheinen.

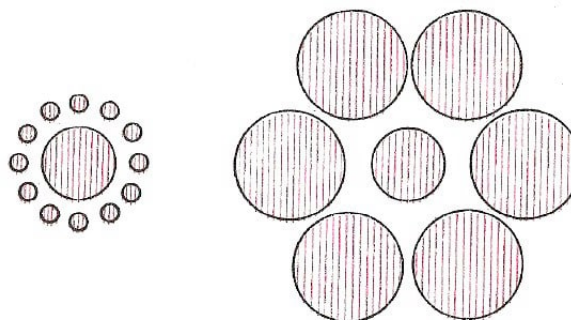


Bild 14

Diesen Längen- und Größenkontrasten begegnet man übrigens auch im Alltagsleben. Wenn man in einem engen Treppenhaus Männer trifft, die ein Klavier tragen, scheint das Instrument riesengroß. Auf einer weitläufigen Bühne kommt es uns viel kleiner vor. Einen Autobus, der täglich durch unseren Ort fährt, halten wir nicht für sehr geräumig; wir sind jedoch von seiner Größe überrascht, wenn wir ihn in der Reparaturwerkstätte sehen.



Bild 15

Bild 15 erinnert an zwei gleich hohe Papierstöße, der linke ist mehr, der rechte weniger zur Seite verschoben. Man soll entscheiden, welche Strecken länger sind - die im linken oder die im rechten Teil des Bildes. Das scheinbare Ergebnis trügt, die Strecken sind in Wirklichkeit gleich lang.

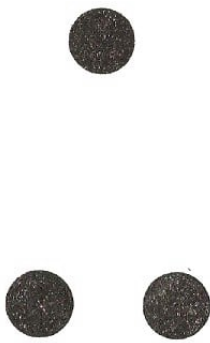


Bild 16

Eine interessante Illusion entsteht, wenn weiße und schwarze Farbe miteinander kontrastieren. In Bild 16 sieht man gleich große schwarze Kreise, die in den Scheitelpunkten eines (nicht gezeichneten) gleichschenkligen Dreiecks angebracht sind. Man soll abschätzen, wie viele solche Kreise in den freien Raum zwischen den zwei unteren Kreisen und dem oberen Kreis noch hineinpassen. Man ist nicht sicher, ob es vier oder fünf Kreise sein werden. Das gemessene Resultat ist überraschend: Es gibt gerade Platz für drei solche Kreise.

Wie ist diese Täuschung zu erklären? Es geht um die sogenannte Irradiation (Hinüberstrahlen), unter deren Einfluss dem Auge die schwarzen Gegenstände kleiner erscheinen als eine gleich große weiße Fläche.

2.4 Merkwürdiges von Parallelen und Senkrechten

Leicht verschätzt man sich bei parallelen oder bei aufeinander senkrecht stehenden Geraden und bei der Größe von Winkeln.

Die Zöllnerschen Parallelen (Bild 17) erwecken bei flüchtigem Blick den Eindruck auseinanderlaufender Linien.

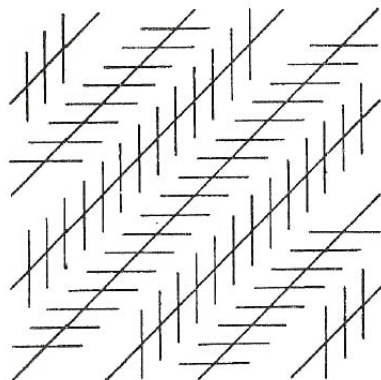
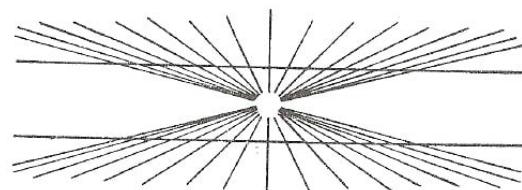


Bild 17, 18



In Bild 18 scheinen die Parallelen gekrümmt zu sein, in Bild 19 kommt uns das Quadrat unter dem Einfluss der konzentrischen Kreise ein wenig deformiert vor.

Zwei Parallelen schneiden in Bild 20 eine Gerade; ist es wirklich eine Gerade, oder ist ihr unterer "Teil" ein wenig verschoben?

Der Winkel, den die Gerade in Bild 20 mit den Parallelen einschließt, beträgt ungefähr 15° . Wenn man ein ähnliches Bild für einen Winkel von 45° oder darüber konstruiert, entsteht die Täuschung nicht.

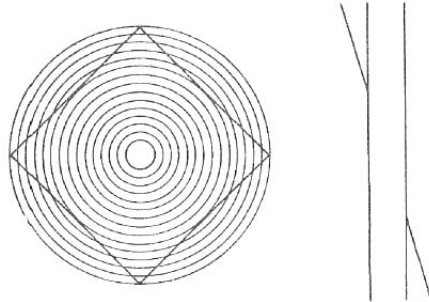


Bild 19 und 20

In den letzten vier Fällen kam die Täuschung dadurch zustande, dass unsere Aufmerksamkeit durch einige Einzelheiten der Abbildung abgelenkt wurde. Auf gemusterten Textilien mit vielen winzigen Details entdeckte man durch Zufall eine Reihe optischer Täuschungen.

Jeder dürfte bemerkt haben, dass z.B. ein Tischtuch mit kleinen, aber ausgeprägten Mustern manchmal sogar unangenehm wirkt (volkstümlich sagt man, dass einem "die Augen übergehen").

Diese Eigenschaften von Mustern und Ornamenten müssen die Gestalter und Produzenten von Textilwaren berücksichtigen, wenn sie ihre Kunden zufriedenstellen wollen.

2.5 Vom räumlichen Sehen

Vor einiger Zeit wurde ein interessanter Versuch durchgeführt. Kindern der ersten Klasse wurde auferlegt, einige Gegenstände, die sie um sich sahen, einen Tisch, einen Ball auf dem Boden, einen Ziegel, zu zeichnen.

Die Ergebnisse des Versuchs zeigten, dass sogar Kinder im Vorschulalter Vorstellungen über dreidimensionale Gegenstände ihrer Umgebung besitzen und diese unbeholfen in spitzwinkliger Projektion zu zeichnen versuchen.

Dreidimensionale Gegenstände auf einer ebenen Bildfläche wiederzugeben ist eine verhältnismäßig schwierige Aufgabe, mit der sich ein mathematisches Sonderfach, die darstellende Geometrie, befasst.

Viele Menschen haben die darstellende Geometrie nicht erlernt, sind aber trotzdem imstande, verständliche Skizzen eines räumlichen Gegenstandes zu zeichnen.

Wenden wir uns der umgekehrten Aufgabe zu: Wir müssen erst lernen, auf einem Bild einen Gegenstand im Raum und kein Liniengewirr zu sehen. Dieses "Lernen" verläuft freilich bei den meisten von uns spontan, da viele Bilder in Büchern, Zeitungen oder auf Plakaten "dreidimensionale" Gegenstände darstellen.

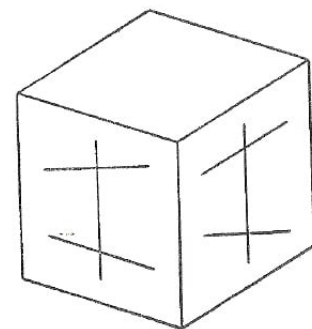


Bild 21

Wir bringen hier einige Täuschungen, die mit der Darstellung von Gegenständen im Raum im Zusammenhang stehen.

In Bild 21 sehen wir das Bild eines Würfels, auf dessen zwei Vorderwandflächen einige Strecken gezeichnet sind. Wenn man sich wirklich in die Vorstellung hineinlebt, dass die Zeichnung einen Würfel darstellt, wird man nicht imstande sein, die gegenseitige Lage der Strecken an den Würfelwänden richtig zu beurteilen.

So wird man die untere Strecke an der rechten Wand wohl für "schräg" relativ zur entsprechenden vertikalen Strecke erklären (obwohl dieses Paar einen rechten Winkel bildet). Ebenso ist die obere Strecke an der linken Vorderwand relativ zur vertikalen Strecke senkrecht (und nicht schräg). Andererseits sind wir bereit zu behaupten, dass die übriggebliebenen zwei Strecken an den Wänden (oben rechts unten links) senkrecht zu der Vertikale stehen, obwohl sie im Bild mit den vertikalen Strecken keinen rechten Winkel einschließen.

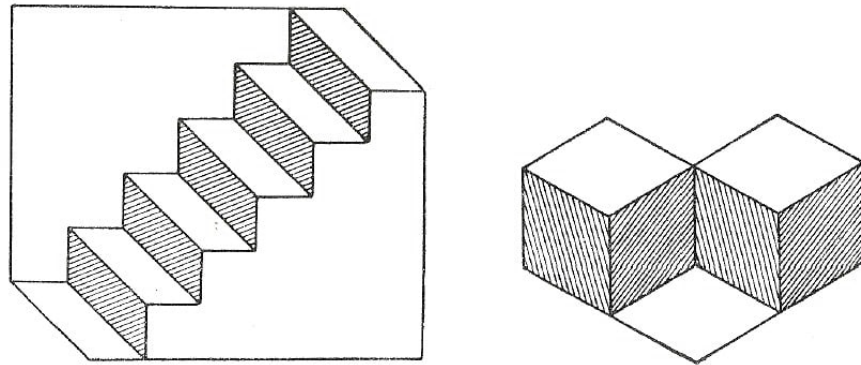


Bild 22 und 23

Bild 22 stellt eine fünfstufige Treppe dar, die wir von oben betrachten; wenn wir jedoch das Bild eine Weile ansehen, haben wir den Eindruck, von unten auf die Treppe zu blicken.

Man betrachte die zwei kleinen Würfel (Bild 23); ihre Deckfläche ist am stärksten beleuchtet, die linke Vorderwand befindet sich im Halbschatten und die rechte Vorderwand im Kernschatten. Wir werden jedoch leicht unsicher: Sind es wirklich zwei Würfel? Vielleicht ist es nur einer, dessen Grundfläche hell beleuchtet ist; im Halbschatten befindet sich dann seine rechte und im Kernschatten seine linke Vorderwand.

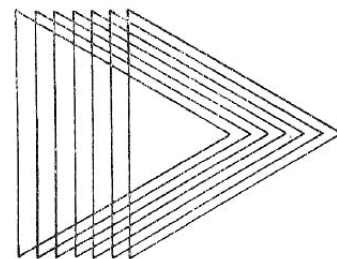


Bild 24

Bild 24 stellt sieben aufeinandergelegte Servietten dar; welches Randdreieck ist oben und welches, unten?

3 Unterhaltung mit Zahlen

3.1 Riesenzahlen - Zahlenriesen

In der uns umgebenden Natur begegnen wir oft auffallend großen Pflanzen- und Tierarten, die man mit einer gewissen Übertreibung als "Riesen" der Natur bezeichnen kann.

Vor einigen Millionen Jahren lebte in den Sümpfen Nordamerikas ein gewaltiger Diplodokus, der vom Kopf bis zum Schwanz bis zu 27 m lang war; er war überhaupt das größte Landwirbeltier. Die heutigen Wale, die 30 m lang werden, übertreffen auch ihrem Umfang und ihrer Masse nach alle Tierwesen, die je auf Erden gelebt haben.

In Kalifornien wachsen noch heute riesige Sequoien, die bis 100 m hoch sind und deren Stamm einen Umfang von mehr als 20 m hat. Viele dieser Bäume sind nahezu 5000 Jahre alt, so dass sie Zeugen älterer Zeiten sind als die geschriebenen Urkunden der Menschheit.

In diesem Kapitel wird jedoch nicht von den Riesen die Rede sein, denen wir in der lebenden Natur begegnen; wir wollen uns Zahlenriesen zuwenden, von denen es in den modernen Wissenschaften, in der Technik und vor allem auch in der Mathematik förmlich wimmelt.

"Berühmt" durch gigantische Zahlen sind die Astronomie und die Astronautik (Lehre von den Weltraumflügen), in denen mit Dimensionen, Entfernungen und Geschwindigkeiten alles andere als sparsam umgegangen wird.

So muss z.B. ein künstlicher Satellit, um seine Umlaufbahn zu erreichen, die sogenannte "erste kosmische Geschwindigkeit" (7,9 km/s) haben. Wie groß diese Geschwindigkeit ist, davon macht man sich am besten eine Vorstellung, wenn man sie in Kilometern je Stunde ausdrückt, wie gewöhnlich die Geschwindigkeiten auf der Erde angegeben werden. Man erhält:

$$7,9 \cdot 60 \cdot 60 \text{ km/h} = 7,9 \cdot 3600 \text{ km/h} = 28440 \text{ km/h}$$

Die erste astronautische Geschwindigkeit beträgt also 28440 km/h.

Und was ist über die astronomischen Entfernungen zu sagen? Unser nächster Himmelsnachbar - der Mond - ist von der Erde ungefähr 384 000 km entfernt, die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt annähernd 149 500 000 km.

Zur Messung der Entfernungen zwischen einzelnen Fixsternen ist der Kilometer eine allzu kleine Einheit. Als Einheit wählt man hier das Lichtjahr, d.h. die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Wenn man berücksichtigt, dass das Licht in der Sekunde 300 000 km durchmisst, entspricht ein Lichtjahr annähernd 9 500 000 000 000 km. Der nächste Fixstern (Proxima Centauri) ist von der Erde ungefähr 4 Lichtjahre entfernt.

Beim Umgang mit großen Zahlen (auch in manchen anderen technischen Berechnungen) ist es meistens nicht nötig, die Zahl ganz genau auszuschreiben. In der Praxis lässt sich auch mit den gegebenen Messmitteln der untersuchte Wert gar nicht so

genau feststellen, und meistens sind überdies nicht alle Ziffern der betreffenden Zahl wichtig.

In Forschungsinstituten, in Fabriken und auch in der Schule arbeitet man in diesen Fällen überwiegend mit sogenannten unvollständigen Zahlen. Man muss erfahrener Techniker sein und spezielle Messinstrumente haben, wenn man mehr als die vier ersten Ziffern einer zu untersuchenden Zahl feststellen will.

Zur Darstellung einer angenäherten Gleichheit verwendet man das Symbol \approx . Will man z.B. schreiben, dass die Entfernung D des Mondes von der Erde angenähert 384000 km beträgt, so schreibt man $D \approx 384\,000$ km.

Zahlenriesen können wir uns nur mit großer Mühe anschaulich vorstellen. Wenn man durch bloßes Abschätzen (ohne jedwede Berechnung) entscheiden soll, welchen Zeitabschnitt z.B. eine Million Sekunden darstellt, so wird man wohl einen bedeutenden Fehler begehen (die richtige Antwort ist 11 1/2 Tage). Dabei ist die Million eine Zahl, die man im Zehnersystem sehr leicht mit sieben Ziffern niederschreibt: 1 000 000.

Eine Milliarde sind tausend Millionen (als Zahl 1 000 000 000), eine Billion eine Million Millionen (als Zahl 1 000 000 000 000).

Analoge Namen für noch größere Zahlen (Trillion, Quadrillion, Quintillion usw.) werden nicht sehr oft verwendet; denn sie sind zu schwerfällig und der Arbeit mit solchen Zahlenriesen nicht besonders förderlich. Hier kommt es auch zu häufigen Missverständnissen, da für große Zahlen einige Fremdsprachen (z.B. das Russische und das Französische) andere Namen als das Deutsche haben. Am besten sieht man den Unterschied in der folgenden Tabelle:

	Zahl	Deutscher Name	Russischer Name
Tabelle I	1 000 000	Million	Million
	1 000 000 000	Milliarde	Milliarde oder Billion
	1 000 000 000 000	Billion	Trillion
	1 000 000 000 000 000	Billiarde	Quadrillion

Aus der Tabelle ist leicht ersichtlich, dass die Unaufmerksamkeit eines Übersetzers zu ernstesten Versehen führen kann, insbesondere, wenn es um einen wichtigen wirtschaftlichen oder technischen Text geht. Um der Gefahr vorzubeugen, dass der wörtliche Ausdruck missverstanden wird, führt man diese Zahlen gewöhnlich nur in Ziffern des Zehnersystems (ohne Worte) an oder kürzer und übersichtlicher mit Hilfe der Potenzen der Zahl 10, vor allem in technischen und wissenschaftlichen Abhandlungen.

So schreibt man eine Million als 10^6 , eine Milliarde als 10^9 , eine Billion als 10^{12} usw. Die Potenz 10^n stellt also bereits für verhältnismäßig kleine n eine sehr große Zahl dar; trotzdem genügen wenige Zeichen, sie niederzuschreiben.

Die übersichtliche Darstellung mit Zehnerpotenzen verwendet man auch bei abgerundeten Zahlen, deren ziffernmäßige Darstellung zu umständlich wäre. Wir wollen das am Beispiel der Loschmidtschen Zahl zeigen, die für Physik und Chemie von großer Bedeutung ist.

Die Loschmidtsche Zahl L gibt die Zahl der Moleküle im Molvolumen eines Gases an;

sie ist ein wirklicher Riese, wie man aus ihrer Darstellung

$$L \approx 602000000000000000000000$$

ersehen kann.

Über die Größe dieser Zahl kann man sich eine wenigstens annähernde Vorstellung nach dem einst von Prof. F. Nachtikal angegebenen Vergleich machen:

"Wenn jeder der zwei Milliarden Menschen⁸, die auf der Erdkugel leben, eine Sammlung von Porträts aller seiner Zeitgenossen zusammenstellte, wobei die einzelnen Bilder 6 cm lang und 4 cm breit und als Autotypien⁹ so hergestellt wären, dass benachbarte Rasterpunkte 1/8 mm voneinander entfernt blieben, dann entspräche die Punktzahl auf allen Porträts und in allen Sammlungen ungefähr der Loschmidtschen Zahl."

Der Leser möge sich selbst durch Berechnung davon überzeugen.

Für einen Zahlenriesen, wie es die Loschmidtsche Zahl ist, fehlt uns also die Vorstellungskraft, aber außerdem ist seine ziffernmäßige Darstellung im Zehnersystem sehr unübersichtlich, denn man braucht dazu 24 Ziffern.

Um diese Unübersichtlichkeit zu vermeiden, schreibt man die Loschmidtsche Zahl in der Form $L \approx 6,02 \cdot 10^{23}$; die Potenz 10^{23} entspricht nämlich der Zahl 100 000 000 000 000 000 000 000. und daraus ist leicht ersichtlich, dass unsere kurze Darstellung der Zahl L richtig ist.

Ähnlich drückt man auch andere, hier bereits erwähnte Zahlen aus: Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt etwa $1,5 \cdot 10^8$ km, ein Lichtjahr ist $9,5 \cdot 10^{12}$ km usw.

Ein Zahlenriese kommt auch in der Geschichte des Schachspiels vor. Einer Sage nach fand der indische König Shehram am Schachspiel solches Gefallen, dass er Sessa, den Erfinder dieses Spiels, aufforderte, sich eine beliebige Belohnung auszuwählen. Sessa verlangte, dass man ihm auf das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn lege und auf jedes folgende doppelt soviel wie auf das vorhergehende. Shehram schien diese Bitte lächerlich, und er befahl den Verwaltern seiner Speicher, dem Erfinder die Belohnung auszuhändigen.

Als sie jedoch ausgezahlt werden sollte, stellte es sich heraus, dass Sessa eine so große Menge Körner verlangte, dass sie nicht nur in allen Speichern des Königs nicht enthalten waren, sondern dass diese Zahl - wie wir heute wissen - die Weizenernte der ganzen Erdoberfläche überstiege, selbst wenn man auf dem gesamten Festland nichts als Weizen angebaut hätte.

Wir wollen dieses überraschende Ergebnis rechnerisch nachprüfen. Sessa verlangte soviel Körner, wie die Summe

$$x = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}$$

ausmacht. Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit 2 multipliziert, erhält man

$$2x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{64}$$

⁸Bevölkerungszahl in den 1960er Jahren

⁹Bildreproduktion durch Zerlegung in Bildpunkte

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten ab, ist das Ergebnis:

$$2x - x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{64} - (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63})$$

Nach Vereinfachung auf beiden Seiten erhält man

$$x = 2^{64} - 1$$

Ausmultiplizieren der Zweierpotenz ergibt: $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$. Damit wird die gesuchte Zahl:

$$x = 18446744073709551615 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

Um uns von der Zahl x der Weizenkörner eine gewisse Vorstellung zu machen, wollen wir sie in Hektolitern ausdrücken.

Ein Hektoliter Weizen enthält ungefähr (je nach Qualität und Sorte) 3 000 000 Körner, so dass eine einfache Berechnung zu dem Ergebnis führt, dass Sessa 6149 Milliarden Hektoliter Weizen zu bekommen hätte.

Auf der ganzen Erde werden heutzutage jährlich etwa 2 Milliarden Hektoliter Weizen geerntet. Wenn es eine solche Ernte in jedem Jahr gäbe, würde es beinahe 3100 Jahre dauern, bis die Welt so viel anbaute, dass sie die ungeheure Forderung des Erfinders des Schachspiels zufriedenstellen könnte. Über 3000 Jahre dürften die Bäcker kein Weizenmehl verbacken, kein einziges Korn dürfte verlorengehen, und erst nach dieser Zeit könnte Sessa vielleicht seine Belohnung dafür bekommen, dass er der Menschheit das Schachspiel schenkte.

In Wirklichkeit ist Sessas Forderung noch aussichtsloser. Wir haben nämlich vorausgesetzt, dass Jahr für Jahr 2 Milliarden Hektoliter Weizen geerntet wurden, was im großen und ganzen dem heutigen Stand der Welternte entspricht.

Es steht jedoch fest, dass der Getreideertrag in früheren Jahrhunderten viel niedriger war. Wir müssen uns nämlich vergegenwärtigen, dass gerade die Länder, die jetzt den meisten Weizen erzeugen, z.B. die Sowjetunion oder Kanada, noch unlängst so gut wie nichts produzierten; auch war die Bevölkerungszahl der ganzen Erde vor 100 oder 200 Jahren, verglichen mit dem heutigen Stand, etwa nur halb so groß. Wenn man das alles in Betracht zieht, kommt man zu folgendem Schluss:

Seit Menschengedenken hat die Erde nicht so viel Weizen erzeugt, dass es möglich wäre, die "unschuldige" Forderung Sessas zu befriedigen.

3.2 Vom Zweiersystem

Der Umstand, dass man mit Hilfe von zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, ..., 9 leicht jede natürliche Zahl, der man in der täglichen Praxis begegnet, darstellen kann, ist allen unseren Mitmenschen gut bekannt, auch denjenigen, die sonst mit Mathematik nichts zu tun haben.

Die Art und Weise, wie man diese Darstellung mit Hilfe von zehn Ziffern zustande

bringt, heißt das Zehnersystem (das dekadische System), da die 10 seine Basis ist. Von der Schule her wissen wir, dass z.B. die Darstellung 4705 im Zehnersystem die Zahl

$$4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \quad \text{oder} \quad 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

bedeutet. Außer dem Zehnersystem haben sich auch noch Reste früher gebrauchter Zahlensysteme erhalten.

Bis heute werden Taschentücher in Packungen zu zwölf Stück (Dutzend) und bisweilen auch Geschirrsätze für zwölf Personen verkauft. Früher verkaufte man manche Kleinwaren auch im "Gros" ; ein Gros bedeutet zwölf Dutzend oder 144 Stück. Ein anderes handelsübliches Maß war in älterer Zeit auch das Schock. Bis heute zählt man mancherorts Eier nach Schock. Ein Schock enthält 60 Stück.

Ein Zahlensystem mit der Basis 60 hat sich auch bei Zeitangaben und Winkelmessungen erhalten. Die Grundeinheit dieses Systems ist eine Sekunde (Zeit- oder Winkelsekunde), 60 Sekunden bilden eine Zeit- oder Winkelminute und 60 Minuten eine Stunde oder einen Grad¹⁰). So bedeutet z.B. 5 h 27 min 35 s 5 Stunden, 27 Minuten, 35 Sekunden; 128°17'43" gibt die Winkelgröße 128 Grad, 17 Minuten und 43 Sekunden an.

Wenn man etwa die Angaben des ersten Beispiels in Sekunden ausdrücken will, muss man berücksichtigen, dass die Basis des Systems die Zahl 60 ist. 5 h 27 min 35 s sind daher $5 \cdot 60^2 + 27 \cdot 60 + 35 = 19655$ Sekunden.

Als Basis eines Zahlensystems kann eine beliebige natürliche Zahl dienen, die größer als eine ist. Wenn nicht angegeben ist, in welchem Zahlensystem man rechnet, wird jedoch stillschweigend stets das Zehnersystem vorausgesetzt. Sonst muss man ausdrücklich anführen, welche Basis man zugrunde legt. Hier machen wir uns eingehender mit dem sogenannten Zweiersystem vertraut, das als Basis die Zahl 2 hat.

Um eine gegebene natürliche Zahl in das Zweiersystem überführen zu können, wollen wir zunächst einige Potenzen der Zahl 2 angeben. Es gilt $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$.

Das Zweiersystem verwendet nur zwei Ziffern, nämlich die 0 und die 1. Wenn man z.B. die Zahl 29 in das Zweiersystem überführen soll, verfährt man folgendermaßen:

Man sieht, dass $2^4 = 16$ (weniger als 29) und dass $2^5 = 32$ (mehr als 29). Man subtrahiert $29 - 2^4 = 29 - 16 = 13$ und führt nun eine analoge Überlegung mit dem Rest 13 aus.

Man sieht, dass $2^3 = 8$ (weniger als 13) und dass $2^4 = 16$ (mehr als 13). Man subtrahiert $13 - 2^3 = 13 - 8 = 5$. Ferner sieht man, dass $2^2 = 4$ (weniger als 5) und dass $2^3 = 8$ (mehr als 5). Man subtrahiert $5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$. Im ganzen hat man also $29 - 2^4 - 2^3 - 2^2 = 1$ oder $29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$.

Das lässt sich in folgender Form schreiben

$$29 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

¹⁰Höhere Einheiten werden nicht verwendet.

Die Zahl 29 drückt man daher im Zweiersystem durch 11101 aus. Umgekehrt kann man auch Zahlen des Zweiersystems in das Zehnersystem überführen. So bedeutet z.B. die Darstellung 100110 die Zahl

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 4 + 2 = 38$$

Im Zweiersystem addiert man sehr einfach, denn es genügt, sich folgende Summen (die sogenannten Grundregeln der Addition) zu merken:

$$0 + 0 = 0 \quad , \quad 0 + 1 = 1 \quad , \quad 1 + 0 = 1 \quad , \quad 1 + 1 = 10$$

Als Beispiel der Summe mehrziffriger Zahlen addiere man $29 + 38$. Wir wissen bereits, wie man die Zahlen 29 und 38 im Zweiersystem ausdrückt; die Niederschrift der Summe wird analog dem Zehnersystem durchgeführt:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Die gesuchte Summe ist also 1000011 (im Zweiersystem); diese Zahl bedeutet:

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 2 + 1 = 67$$

In der Tat ist $29 + 38 = 67$.

Auch das Multiplizieren ist im Zweiersystem sehr einfach, denn "das kleine Einmaleins" besteht aus folgenden Produkten¹¹

$$0 \cdot 0 = 0 \quad , \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Als Beispiel multipliziere man die Zahlen 29 und 38, freilich im Zweiersystem ausgedrückt. Die Niederschrift ist analog der des Zehnersystems:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \quad \cdot \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Das gesuchte Produkt ist also 10 001 001 110 (im Zweiersystem); wir überführen es ins Zehnersystem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ = 1024 + 64 + 8 + 4 + 2 = 1102 \end{aligned}$$

Die Multiplikation lässt sich im Zehnersystem kontrollieren; in der Tat ist $29 \cdot 38 = 1102$.

¹¹Sie heißen auch Grundregeln der Multiplikation.

Ein Nachteil des Zweiersystems sind die verhältnismäßig vielstelligen Zahlen. Wir haben gesehen, dass z.B. die Zahl 1102, die im Zehnersystem eine vierziffrige Zahl ist, im Zweiersystem eine elfziffrige Darstellung verlangt.

Diese Schwierigkeit ist jedoch kein Hindernis für den Gebrauch des Zweiersystems in der modernen Technik. Das System wird nämlich in modernen elektronischen Rechenmaschinen angewandt, die eine große Anzahl miteinander verknüpfter Stromkreise enthalten. Jeder Stromkreis bedeutet eine Ziffer. Ausgeschaltet bedeutet er die Ziffer 0, eingeschaltet 1.

Die moderne Wissenschaft und Technik machen von diesen Maschinen immer mehr Gebrauch, die die Durchführung numerischer Berechnungen, vor allem durch wesentliche Abkürzung der für die einzelnen Rechenoperationen notwendigen Zeit, von Grund auf verändert haben.

Während früher Berechnungen, die eine Million arithmetischer Operationen verlangten, sich an der Grenze der Realisierungsmöglichkeit bewegten, lösen die modernen elektronischen Rechenmaschinen oft Aufgaben mit einigen Milliarden arithmetischer Operationen. Diese Maschinen kommen in den verschiedensten wissenschaftlichen und technischen Disziplinen zur Anwendung.

So befindet sich z.B. ein Meteorologe, der mathematische Methoden für seine Wettervorhersagen benutzen möchte, oft in arger Zeitnot: Er kann nämlich seiner Arbeit nicht mehrere Tage widmen, denn dann würde sein Wetterbericht keinen Wert mehr haben, er käme zu spät. Die Maschine kürzt die für die Berechnungen notwendige Zeit auf ein Minimum ab.

Auch die Weltraumforschung kommt nicht ohne komplizierte Rechanlagen aus, die in sehr kurzer Zeit Kontrollberechnungen der Raketenbahn durchführen können, eine beständige Verfolgung der Bewegung künstlicher Satelliten ermöglichen und wissenschaftliche Daten, welche die in Satelliten und kosmischen Raketen angebrachten Instrumente aussenden, fast augenblicklich verarbeiten.

3.3 Stammbüche

Das alte Ägypten zeichnete sich durch seine große Kultur aus, von der zahlreiche bis auf den heutigen Tag erhaltene Denkmäler zeugen. Es ist selbstverständlich, dass die Entwicklung der Landwirtschaft, der Baukunst und der ganzen damaligen Technik gewisse mathematische Kenntnisse voraussetzte.

Die Mathematik von damals war zwar ganz anders beschaffen, hatte andere Ziele und andere Arbeitsmethoden als die von heute, aber ihre Leistungen, wenigstens einige davon, rufen bei den Historikern, die sich mit dem Studium der altägyptischen Kultur befassen, immer noch große Bewunderung hervor.

Zu den besten Kennern der ägyptischen Geschichte zählt der deutsche Mathematiker O. Neugebauer, dessen Arbeiten aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts in der Geschichte der ägyptischen Mathematik viel Interessantes entdeckt haben. Besondere Aufmerksamkeit wandte Neugebauer dem ägyptischen Bruchrechnen zu, in dem die

in der täglichen Praxis am häufigsten vorkommenden Brüche eine bedeutende Stelle einnehmen.

Außer den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... verwendet man bei Berechnungen sehr oft die Begriffe "Hälfte", "Drittel", "Viertel", die manchmal in gewissem Sinne fast die Bedeutung von neuen Einheiten erlangen. Für diese Brüche hatte bereits die altägyptische Schrift besondere Symbole; spezielle Zeichen besaßen die Ägypter auch für "Ergänzungen" dieser Brüche, d.h. für die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$.

Große Beachtung schenkten die ägyptischen Mathematiker den sogenannten Stammbrüchen, das sind Brüche in der Form

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Die heutige Terminologie versteht also unter Stammbruch jenen (positiven) Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine beliebige natürliche Zahl ist?

Der Begriff des Stammbruchs hat eine ziemlich lange Geschichte; davon zeugt auch der Umstand, dass einige moderne Sprachen für den Stammbruch einen besonderen Namen haben (französisch: fraction primaire, englisch: unit fraction, polnisch: ulamek prosty, tschechisch: kmenný zlomek).

Neugebauer hat für die Stammbrüche in der modernen Mathematik eine zweckmäßige Schreibweise eingeführt, die wir auch in diesem Kapitel benutzen wollen. Statt des Bruchs $\frac{1}{n}$ werden wir nur \overline{n} (gelesen "n quer") schreiben. Es gilt also z.B.

$$\overline{6} + \overline{3} + \overline{2} = 1 \quad (1)$$

wovon man sich nach der Umschrift

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

überzeugen kann.

Die altägyptischen Mathematiker kannten eine Reihe Formeln, die der Formel (1) ähnlich waren. In ihren Aufzeichnungen findet man außer der Gleichung (1) noch folgende

$$\begin{aligned} \overline{30} + \overline{42} &= \frac{2}{35} & \overline{20} + \overline{124} + \overline{155} &= \frac{2}{31} & \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301} &= \frac{2}{43} \\ \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890} &= \frac{2}{89} & \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606} &= \frac{2}{101} \end{aligned}$$

Die damaligen Rechner leiteten freilich aus den angeführten Formeln noch keine allgemeineren Gesetzmäßigkeiten ab.

Es ist interessant, dass der Begriff des Stammbruchs in letzter Zeit wieder die Aufmerksamkeit einiger Mathematiker erregt hat; es wurden Resultate gefunden, die in ihrer Gesamtheit fast so etwas wie eine neue mathematische Disziplin bilden, mit einer Reihe gelöster Fragen, aber auch mit einigen bisher ungelösten Problemen.

Auf diesem Gebiet haben im letzten Jahrzehnt insbesondere die polnischen Mathematiker W. Sierpiński und A. Schinzel und der ungarische Mathematiker P. Erdős gearbeitet.

Wir wollen einige ihrer Ergebnisse wenigstens flüchtig skizzieren.

Eine Zahl, die man als Summe von s Stammbrüchen ausdrücken kann, nennt man die Zahl der Form A_s . So sind z.B. alle Stammbrüche Zahlen der Form A_1 . Der Bruch $\frac{2}{3}$ hat keine Form A_1 , sondern die Form A_2 denn es gilt

$$\frac{2}{3} = \overline{3} + \overline{3}$$

Es lässt sich beweisen, dass jede Zahl der Form A_s auch die der Form A_{s+1} ist. Aus dem, was wir über die Zahlen A_s gesagt haben, folgt, dass es rationale Zahlen sind, d.h., sie lassen sich als Bruch mit einem ganzen Zähler und einem ganzen Nenner ausdrücken. Wenn umgekehrt eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gegeben ist, kann man die Frage stellen, ob sie eine Zahl der Form A_s ist (für $s = 1, 2, 3, \dots$).

Da der Fall der Zahlen der Form A_1 im ganzen uninteressant ist (man weiß, dass es lauter Stammbrüche sind), ergibt sich von selbst die Frage, wie wohl die Zahlen der Form A_2 aussehen mögen, die nicht zugleich Zahlen der Form A_1 sind.

Es ist leicht ersichtlich, dass z.B. alle Brüche, deren Zähler 2 und deren Nenner eine beliebige natürliche ungerade Zahl ist, hierher gehören, also die Brüche¹²

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{7}$$

Man verfolge jetzt die Brüche der Form $\frac{3}{n}$, wo n eine natürliche Zahl ist. Wenn n durch drei dividierbar ist (d.h. $n = 3, 6, 9, 12, \dots$), kann man den Bruch $\frac{3}{n}$ durch drei kürzen; man sieht also, dass dieser Fall zu den Zahlen der Form A_1 (zu den Stammbrüchen) führt. Wenn n durch drei nicht dividierbar ist, wird die Sache komplizierter. So lässt sich z.B. beweisen, dass der Bruch $\frac{3}{7}$ nicht eine Zahl der Form A_2 ist, während z.B. jeder der Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{8}$ eine Zahl der Form A_2 ist, wie folgende Gleichungen zeigen:

$$\frac{3}{5} = \overline{2} + \overline{10} \quad ; \quad \frac{3}{8} = \overline{3} + \overline{24}$$

Nachdem wir Zahlen der Form A_2 kennengelernt haben, wollen wir noch kurz auf Zahlen der Form A_3 eingehen. Aus den vorhergehenden Überlegungen wissen wir bereits, dass jeder der Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ (wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist) eine Zahl der Form A_3 ist.

Der Untersuchung des Bruchs $\frac{4}{n}$ haben die Mathematiker große Aufmerksamkeit gewidmet. Der ungarische Mathematiker P. Erdős hat nämlich vor einiger Zeit die Vermutung ausgesprochen, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ der Bruch $\frac{4}{n}$ eine Zahl der Form A_3 ist.

Seine Vermutung wurde bisher weder bewiesen noch widerlegt, ihre Gültigkeit bestätigte sich jedoch für alle natürlichen Zahlen $n < 141\,649$. So gilt z.B. für $n = 5$:

$$\frac{4}{5} = \overline{2} + \overline{5} + \overline{10}$$

¹²Es ist z.B. $\frac{2}{7} = \overline{7} + \overline{7}$.

so dass die Zahl $\frac{4}{5}$ wirklich die Form A_3 hat.

Wir wollen jedoch hier nicht näher auf diese Frage eingehen; denn diese Problematik setzt erhebliche mathematische Kenntnisse voraus und überschreitet den Rahmen unserer Überlegungen.

Abschließend möchten wir bemerken, dass mit Hilfe der Stammbrüche manche bekannten Ergebnisse übersichtlicher gemacht werden können. So haben z.B. die Physiker die Wellenlängen der Linien n des Wasserstoffspektrums gemessen.

Es hat sich herausgestellt, dass für die Wellenfrequenz ν (d.h. für den umgekehrten Wert der Wellenlänge) die Formel

$$\nu = R (\overline{s^2} - \overline{n^2})$$

gilt, wobei R eine Konstante und s, n geeignete natürliche Zahlen sind.

3.4 Aufgaben

3.1. Ein Buch hat 498 Seiten, die in der oberen Ecke numeriert sind.

Wie viele Ziffern werden dazu verwendet? Wie viele Male wurde bei der Numerierung die Ziffer 0 angewendet?

3.2. Eine Stenotypistin schreibt auf der Maschine die Reihe der natürlichen Zahlen (ohne Zeichenräume) 12345678910111213 ... Welche Ziffer wird sie mit dem hundertsten Anschlag schreiben?

3.3. Man stelle sich vor, dass man auf das erste Feld eines normalen Schachbretts einen Pfennig legt und auf jedes folgende einen Pfennig mehr als auf das vorhergehende. Berechnen Sie, wie viele Pfennige auf dem ganzen Schachbrett sind.

3.4. Wodurch ist die folgende Multiplikationsaufgabe $142\ 857 \cdot 264\ 513$ interessant?

*3.5. An einer Tafel wurde eine Multiplikationsaufgabe (im Zehnersystem) aufgeschrieben, jemand hat jedoch die Ziffern verwischt, so dass nur vier Einsen leserlich geblieben sind. Kann man die fehlenden Ziffern, an deren Stelle Sterne gedruckt sind, ergänzen?

$$\begin{array}{r}
 1 * * . * * \\
 \hline
 * * * 1 \\
 * * * 1 \\
 \hline
 * * * 1 *
 \end{array}$$

*3.6. Die Zahl 5^{100} ist unvorstellbar groß, trotzdem kann man auch ohne Rechenmaschine ihren Wert annähernd angeben.

Berechnen Sie, wie viele Ziffern 5^{100} bei einer Niederschrift im Zehnersystem hat; geben Sie einige erste und letzte Ziffern dieser Niederschrift an.

3.7. Wie viele natürliche a) dreiziffrige, b) n-ziffrige Zahlen hat das Zehnersystem?

3.8. Wie viele natürliche a) dreiziffrige, b) n-ziffrige Zahlen hat das Zweiersystem?

3.9. Wie viele dreiziffrige natürliche Zahlen (im Zehnersystem) kann man niederschreiben, wenn man nur die Ziffern 5, 6, 7, 8 benutzen darf? Wie viele gerade Zahlen sind darunter?

3.10. Wie viele dreiziffrige natürliche Zahlen kann man im Zehnersystem schreiben, wenn man nur die Ziffern 0, 1, 2, 3 benutzen darf?

3.11. a) Die Zahl 333 ist aus dem Zehner- in das Zweiersystem zu überführen.

b) Die Zahl 1111 ist aus dem Zweier- in das Zehnersystem zu überführen.

*3.12. Welche natürliche Zahl wird im Zweiersystem mit gleichen Ziffern und gleicher Ziffernfolge niedergeschrieben wie im Zehnersystem?

3.13. Fordern Sie Ihren Freund auf, sich eine beliebige Zahl kleiner als 64 zu denken und anzugeben, in welcher dieser sechs Querspalten die Tabelle II (nächste Seite) sie vorkommt.

Die gedachte Zahl findet man leicht, indem man die ersten Zahlen in den angegebenen Querspalten addiert. Wie ist das möglich?

Tabelle II

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	62	63
4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47	52	53	54	55	60	61	62	63
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47	56	57	58	59	60	61	62	63
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63

3.14. Den Bruch $\frac{16}{64}$ kann man "kürzen", indem man im Zähler und im Nenner die Ziffer 6 weglässt; man bekommt so den Bruch $\frac{1}{4}$. Interessanterweise erreicht man dasselbe Resultat, wenn man Zähler und Nenner durch die Zahl 16 dividiert (dieses Kürzen haben wir in der Schule gelernt).

Es sind andere Beispiele von Brüchen zu finden, die man "kürzen" kann, indem man im Zähler und im Nenner die gleiche Ziffer weglässt.

*3.15. Manchmal sind wir von dem Resultat einer Rechenaufgabe überrascht und. Wissen nicht, ob es sich um Zufälligkeiten oder um eine tiefere Gesetzmäßigkeit handelt. Interessant sind z.B. diese Wurzelziehungen:

$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \quad ; \quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{15}} \quad ; \quad \sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$$

$$\sqrt[4]{2\frac{2}{15}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{15}} \quad ; \quad \sqrt[5]{2\frac{2}{31}} = 2 \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{31}}$$

Warum ist in diesen Beispielen die Vereinfachung so "einfach"?

3.16. Es ist zu zeigen, dass der Bruch $\frac{3}{11}$ auch als Summe zweier Stammbrüche ausgedrückt werden kann.

**3.17. Es ist zu zeigen, dass sich die Zahl 2 als Summe einer endlichen Anzahl voneinander verschiedener Stammbrüche ausdrücken lässt, deren Nenner ungerade Zahlen sind.

3.18. Zum Schluss noch zwei Fragen, auf die wir keine erschöpfende Antwort verlangen:

a) Kann man die Zahl 10 so schreiben, dass man alle zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, ..., 9 benutzt, jede von ihnen jedoch nur einmal? Bei der Niederschrift kann man Addition und Brüche verwenden.

b) Dasselbe ist für die Zahl 100 zu versuchen.

4 Vielecke

4.1 Konvexe Gebilde in der Ebene

Wenn man eine Untersuchung anstellte, welche Gebilde in der Ebene im Schulunterricht, in den Zeichnungen unserer Ingenieure und in der täglichen Praxis am häufigsten vorkommen, würde man feststellen, dass die sogenannten konvexen (nach außen gewölbten) Gebilde die größte Bedeutung haben.

Ein Gebilde in der Ebene wird konvex genannt, wenn zwei beliebige Punkte X und Y im Inneren des Gebildes sich durch eine Strecke XY verbinden lassen, die ebenfalls gänzlich in diesem Gebilde liegt. Eine Gerade, eine Strecke oder ein Kreis sind Beispiele konvexer Gebilde in der Ebene.

Hingegen ist das in Bild 25 dargestellte Gebilde nicht konvex; denn die Punkte X_0, Y_0 , gehören ihm zwar an, aber die Strecke X_0Y_0 liegt nicht ganz in dem gegebenen Gebilde. In diesem Kapitel wenden wir unsere Aufmerksamkeit einer bestimmten Art konvexer Gebilde in der Ebene zu, nämlich den konvexen (nach außen gewölbten) Vielecken.

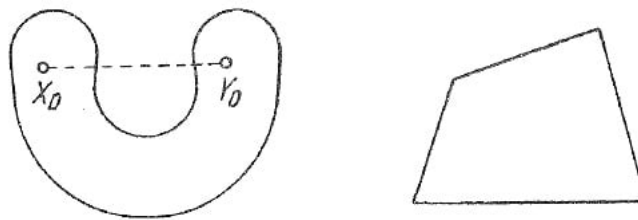


Bild 25 und 26

Es ist leicht ersichtlich, dass jedes Dreieck ein konvexes Vieleck ist. Unter Vielecken kann man jedoch sowohl konvexe Gebilde (Bild 26) als auch Gebilde finden, die nicht konvex sind (in Bild 27 "stört" z.B. das Punktpaar X_1, Y_1); ähnlich verhält es sich mit anderen Vielecken.

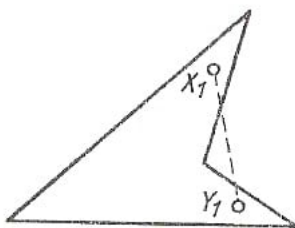


Bild 27

Vielecken dürfte der Leser in der Mathematik bereits öfters begegnet sein, so dass wir daher von einigen sehr anschaulichen Grundbegriffen (wie Scheitel, Seite, Diagonale, Innenwinkel des Vielecks) absehen können.

Dagegen halben wir es für notwendig, uns bei der Definierung des Flächeninhalts des Vielecks ein wenig aufzuhalten, denn trotz der scheinbar großen Anschaulichkeit der Gebilde in der Ebene ist eine mathematische Definition dieser Begriffe keineswegs einfach. Wir erinnern daher an den Hauptgedanken:

Vor der Berechnung des Flächeninhalts muss man stets wissen, welches Quadrat man als Einheitsquadrat festlegt oder welches Quadrat den Inhalt 1 hat.

Für das Einheitsquadrat wählt man z.B. 1 m^2 (ein Quadrat, dessen Seite die Größe von 1 m hat) oder 1 cm^2 u.a. Bei Berechnungen geht man dann von folgenden zwei Grundeigenschaften aus:

1. Gebilde, die man so aufeinanderlegen kann, dass sie sich decken, haben gleiche Inhalte.
2. Wenn sich ein Gebilde aus einigen sich nicht überdeckenden Gebilden zusammensetzt, ist sein Inhalt der Summe der Inhalte dieser Gebilde gleich.

Bereits in der ältesten Zeit, aus der uns schriftliche Mitteilungen erhalten sind, waren die Menschen imstande, die Größe ihrer Felder und die Grundrisse ihrer Bauten zu messen. Meistens ging es dabei um die Flächeninhalte konvexer Vielecke - Rechtecke, Quadrate, Dreiecke. Sehr früh hat man auch einfache Rechenausdrücke für diese Inhalte entdeckt:

Der Inhalt eines Rechtecks mit den Seiten a, b ist $A = a \cdot b$, der Inhalt eines Dreiecks mit der Seite a und der zugehörigen Höhe h_a ist $A = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ u. ä.

Erst in späteren Zeiten hat man diese Formeln mathematisch begründet und bewiesen. Um in den weiteren Ausführungen unseren Gedankengang nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir hier noch an einige notwendige Begriffe erinnern:

Wenn man zum Ausdruck bringen will, dass ein Vieleck n Ecken hat, spricht man kurz von einem n —Eck (die Zahl n muss ganz und größer als 2 sein).

Wie bekannt, ist die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° gleich. Es lässt sich beweisen, dass die Summe der Innenwinkel in einem konvexen n —Eck $(n - 2) \cdot 180^\circ$ beträgt.

Einen Sonderfall konvexer Vielecke stellen Sehnenvielecke dar. Ein konvexes n -Eck $A_1A_2A_3\dots A_n$ heißt Sehnenvieleck, wenn man einen Kreis k konstruieren kann, der durch sämtliche Eckpunkte $A_1A_2A_3\dots A_n$ geht.

Die Kreislinie k heißt eine dem n -Eck umschriebene Kreislinie, die Seiten des n -Ecks sind die Sehnen im Kreis k (daher der Name Sehnen- n -Eck.)

Wie bekannt, lässt sich jedem Dreieck ein Kreis umschreiben; daher ist das Dreieck ein Sehnenvieleck. Unter konvexen Vierecken gibt es sowohl Sehnenvierecke (z.B. Rechtecke) als auch Vierecke, die keine Sehnenvierecke sind (der Leser wird selbst Beispiele finden).

Ein Sehnenvieleck, dessen Seiten gleich lang sind, heißt regelmäßiges Vieleck. Statt "regelmäßiges Dreieck" sagt man jedoch gleichseitiges Dreieck; statt "regelmäßiges Viereck" wird der Name Quadrat gebraucht.

4.2 Regelmäßige Vielecke

Unter den regelmäßigen Vielecken haben zuerst das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, das regelmäßige Fünfeck und das Sechseck die Aufmerksamkeit der Menschen auf sich gezogen.

Bereits der berühmte altgriechische Mathematiker Pythagoras (6. Jh. v.u.Z.) wusste, dass sich diese vier Vielecke mit Zirkel und Lineal genau konstruieren lassen. Der Umstand, dass sich die Griechen der Antike mit Konstruktionen regelmäßiger Vielecke befassten, ist ein Zeugnis dafür, dass sie diese Gebilde bei ihrem Handwerk, ihrer

Baukunst und bei der täglichen Arbeit benötigten. Es waren jedoch nicht immer nur Ornamente und Baugrundrisse, bei denen diese geometrischen Gebilde benutzt wurden. Der Mensch des Altertums und des Mittelalters unterlegte diesen Formen oft eine abergläubische Bedeutung und schrieb ihnen magische Kraft zu.

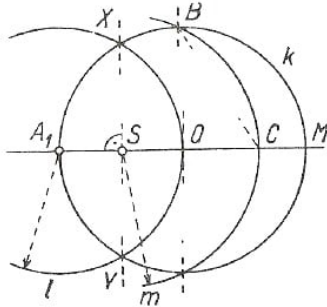


Bild 28

In Bild 28 ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser r konstruiert; man wähle darin einen Durchmesser A_1OM , konstruiere einen Hilfskreis l mit dem Mittelpunkt A_1 und dem Halbmesser r .

Die Kreise k, l schneiden sich in den Punkten X, Y , so dass XY die Mittelsenkrechte der Strecke A_1O ist. Man beschreibe ferner einen Kreis m , der den Mittelpunkt S hat und durch den Punkt B geht, (der Punkt B ist einer der Endpunkte des Durchmessers, der senkrecht auf dem Durchmesser A_1OM steht).

Wenn man den gemeinsamen Punkt des Kreises m und des Radius OM mit C bezeichnet, so kann man beweisen, dass die Strecke BC die Seite des gesuchten regelmäßigen Fünfecks ist.

Ein regelmäßiges Siebeneck war ein weiteres Gebilde, dessen Konstruktion bereits im Altertum von Archimedes (3. Jh. v.u.Z.) versucht wurde. Langjährige, vergebliche Bemühungen einer Reihe von Mathematikern wiesen darauf hin, dass sich dieses Vieleck mit Lineal und Zirkel wahrscheinlich nicht konstruieren lässt.

Freilich hat man Näherungslösungen für diese Aufgabe gefunden (so ist z.B. in Bild 28 die Strecke SX annähernd gleich der Größe einer Seite des regelmäßigen, dem Kreis k eingeschriebenen Siebenecks).

Erst der deutsche Mathematiker C. F. Gauß (1777-1855) hat diese Forschungen zum Abschluss gebracht, indem er nachwies, welche regelmäßigen Vielecke sich mit Lineal und Zirkel konstruieren lassen und welche nicht. Es gilt folgender Satz:

Ein regelmäßiges n -Eck lässt sich mit Lineal und Zirkel gerade dann konstruieren, wenn n eine Zahl der Form

$$n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

ist, wobei s eine ganze positive Zahl oder Null ist und p_1, p_2, \dots, p_k wechselseitig verschiedene Primzahlen der Form $2^{2^m} + 1$ sind.

Aus diesem Satz folgt, dass sich ein regelmäßiges Siebeneck mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren lässt, denn die Primzahl 7 hat nicht die Form $2^{2^m} + 1$.

Dagegen ist es möglich, ein regelmäßiges Siebzehneck mit Hilfe der zwei Zeichenmittel zu konstruieren, denn $17 = 2^{2^2} + 1$. Diese Konstruktion hat C. F. Gauß schon als

Neunzehnjähriger angegeben.

Wie werden wir zweckmäßig vorgehen, wenn wir ein regelmäßiges Vieleck (als Konstruktionsteil oder Ornament) mit einer größeren Seitenzahl konstruieren sollen? Am besten wählen wir wohl die Methode der Berechnung, denn die geometrische Konstruktion belastet das Resultat immer mit kleinen Fehlern, die durch die Unvollkommenheit unserer Zeichengeräte verschuldet werden. Eine Berechnung kann man hingegen gewöhnlich mit beliebiger Näherung durchführen.

Wir können eine Tabelle, die uns die Aufgabe erleichtert, folgendermaßen zusammenstellen:

	n	$r : a$	n	$r : a$	n	$r : a$
	3	0,577	9	1,462	15	2,405
	4	0,707	10	1,618	16	2,563
Tabelle III	5	0,851	11	1,775	17	2,721
	6	1,000	12	1,932	18	2,879
	7	1,152	13	2,089	19	3,038
	8	1,307	14	2,247	20	3,196

In der ersten Spalte der Tabelle III ist die Seitenzahl eines regelmäßigen n -Ecks angegeben, in der zweiten der Näherungswert des Bruches r/a , wobei r der Halbmesser eines dem n -Eck umschriebenen Kreises und a die Seite des n -Ecks sind.¹³

Wenn jetzt z.B. ein regelmäßiges Siebzehneck mit der Seite $a = 4$ cm zu konstruieren ist, werden wir folgendermaßen verfahren:

Tabelle III entnehmen wir $r : a \approx 2,721$ für das Siebzehneck, so dass der Durchmesser des unserem Siebzehneck umschriebenen Kreises $r \approx 4 \cdot 2,721 = 10,884$ ist.

Nach Aufrunden erhält man $r \approx 10,9$ cm. Wir konstruieren also einen Kreis mit dem Halbmesser 10,9 cm und tragen auf dessen Umfang die Länge 4 cm siebzehnmal ab. Auf diese Weise ist das regelmäßige Siebzehneck angenähert konstruiert.

4.3 Geometrie der Bienenwaben

Ja, auch so ein kleines Wesen wie die Biene hat mit Geometrie zu tun: Die Bienen "konstruieren" ihr Leben lang geometrische Gebilde, deren Regelmäßigkeit erstaunlich ist.

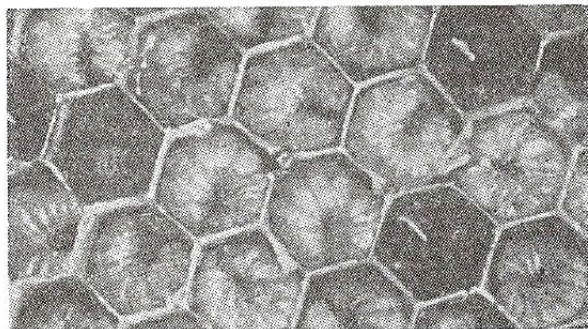
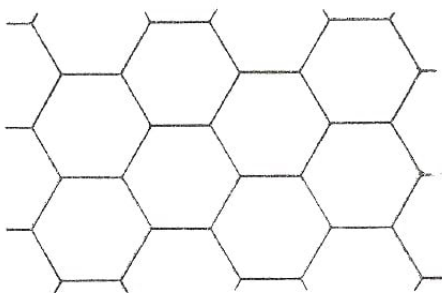


Bild 29 a und b

¹³Der Frage der Zusammenstellung der Tabelle III sind die Aufgaben 4.9. und 4.10. gewidmet.

Beim flüchtigen Blick auf eine Bienenwabe sieht man sechseckige Öffnungen. Ein senkrechter Schnitt zur Längsachse der Zelle ergibt ein regelmäßiges Sechseck (Bilder 29a, 29b) mit der Seitenlänge 2,71 mm. Die Genauigkeit ist so groß, dass Réaumur sogar einmal vorschlug, die Dimensionen der Bienenzelle zur Grundlage des Systems der Längenmaße zu nehmen. Der Leser wird sich Gedanken machen, warum Bienenzellen gerade diese sechseckige Form haben. Gewiss nicht deshalb, damit der Anblick einer Bienenwabe unserem Auge wohltue; der Grund ist vielmehr in dem Bestreben zu suchen, mit dem vorhandenen Baumaterial möglichst großen Raum einzuschließen, also mit Wachs zu sparen.

Zum Ausfüllen einer Ebene mit kongruenten regelmäßigen Vielecken könnte man jedoch auch andere Gebilde als das Sechseck wählen.

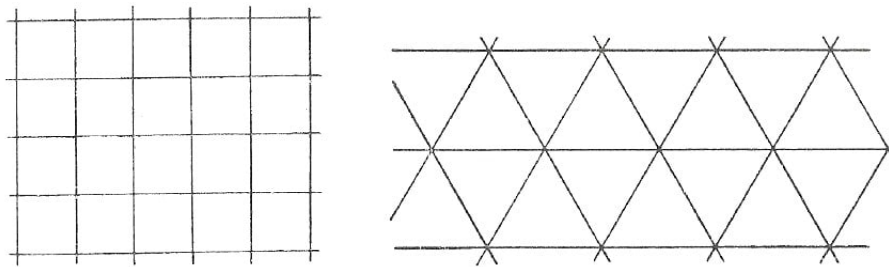


Bild 30 und 31

Bild 30 veranschaulicht das für kongruente Quadrate, und in Bild 31 ist die Ebene mit gleichseitigen Dreiecken bedeckt. Wir fragen, ob noch andere Ausfüllungen der angeführten Art zu finden sind.

Die kongruenten regelmäßigen n -Ecke sollen die Ebene lückenlos ausfüllen. Die Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen n -Ecks ist

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Damit bei jedem Scheitelpunkt des n -Ecks die Ebene "völlig" ausgefüllt wird, muss die Zahl 360° (d.h. die Größe des Vollwinkels) durch die Zahl $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ ohne Rest teilbar sein. Man erhält den Quotienten

$$360^\circ : \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

der einer ganzen Zahl gleich sein soll. Die Zahl $2 + \frac{4}{n-2}$ ist ganz, wenn man $n = 3$, 4 oder 6 setzt. Falls jedoch $n > 6$, ist der Nenner $n - 2$ größer als 4, so dass der Bruch $\frac{4}{n-2}$ echt ist. Man kann daher nur drei Ausfüllungen finden, die man auch in den Bildern 29a, 30 und 31 sieht.

Wäre es vielleicht ökonomischer, wenn die Bienenzelle einen quadratischen Querschnitt oder den eines gleichseitigen Dreiecks hätte? Wir wollen diese Frage durch eine Berechnung beantworten.

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite s_3 ist $\frac{s_3^2}{4}\sqrt{3}$, der Inhalt

eines Quadrats mit der Seite s_4 ist s_4^2 , und der eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite s_6 gleicht dem Sechsfachen der Zahl $\frac{s_6^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (denn dieses Sechseck lässt sich aus sechs einander nicht überdeckenden gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen), also

$$6 \cdot \frac{s_6^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3s_6^2}{2} \sqrt{3}$$

Man setze diesen Inhalt jeweils einer Flächeneinheit gleich und berechne den Umfang des zugehörigen Vielecks. Vorher muss man jedoch die Größe der Seiten s_3 , s_4 , s_6 bestimmen.

Für das gleichseitige Dreieck ergibt sich:

$$s_3^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{3} \approx 2,309 \quad \text{oder} \quad s_3 \approx 1,52$$

Für das Quadrat ist $s_4^2 = 1$ oder $s_4 = 1$. Für das regelmäßige Sechseck ist

$$s_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9} \sqrt{3} \approx 0,385 \quad \text{oder} \quad s_6 \approx 0,62$$

Man berechne nun den Umfang dieser n-Ecke. Der Umfang des gleichseitigen Dreiecks ist

$$u_3 = 3s_3 \approx 3 \cdot 1,52 = 4,56$$

Der Umfang des Quadrats ist $u_4 = 4s_4 = 4$. Der Umfang des regelmäßigen Sechsecks ist

$$u_6 = 6s_6 \approx 6 \cdot 0,62 = 3,72$$

Man sieht, dass von den Zahlen u_3 , u_4 , u_6 s die letzte am kleinsten ist. Wir können daher zusammenfassend feststellen:

Eine Fläche von der Größe 1 wird am ökonomischsten von einem Sechseck begrenzt. Das ist zugleich die Antwort auf die gestellte Frage.

4.4 Vom Parkettlegen

Wenn man die Pflasterung eines Weges entwerfen soll, wird man wohl nicht nur praktischen, sondern auch ästhetischen Gesichtspunkten Rechnung tragen wollen. Es ist daher erwünscht, dass die Herstellung der Pflastersteine einfach sei (man wählt keine zu komplizierten Formen) und dass der gepflasterte Weg einen ansprechenden Eindruck mache (darum gibt man den Pflastersteinen die Form regelmäßiger Vielecke).

Früher fand man Gefallen an verschiedenartig getäfelten Fußböden, wie wir sie in einigen historischen Bauten noch besichtigen können. Im weiteren Verlauf unserer Lektüre werden wir Beispielen solcher Parkettböden begegnen, die interessante und bizarre Ornamente bilden.

Wir sollen also eine ebene Fläche mit Vielecken so ausfüllen, dass kein Teil der Fläche leer bleibt und dass sich nirgends zwei Vielecke überdecken. Eine solche Ausfüllung der Ebene heißt Parkettierung.

Die von uns gestellten Forderungen umreißen freilich das Problem noch zu allgemein; meistens wird verlangt, dass die Vielecke regelmäßig oder kongruent oder regelmäßig und kongruent sein sollen.

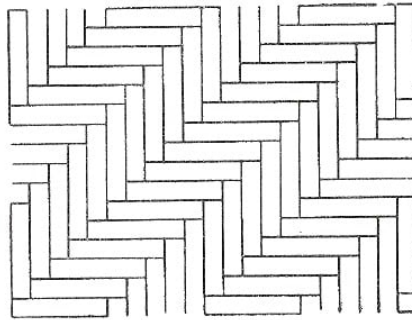


Bild 32

Einem Beispiel des Parkettierens mit regelmäßigen und kongruenten Vielecken sind wir bereits in dem Abschnitt "Geometrie der Bienenwaben" (Bilder 29a, 29b, 30, 31) begegnet.

Außer den angeführten drei Ausfüllungen kann man in dieser Art des Parkettlegens keine andere finden.

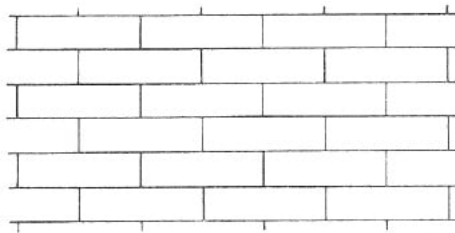


Bild 33

In Wohnungen wird das Parkettholz am häufigsten so verlegt, wie es Bild 32 zeigt; hier geht es um die Ausfüllung der Ebene mit kongruenten Rechtecken (sie bilden das sogenannte "Fischgrätenmuster"). Kongruente Rechtecke können freilich eine Ebene auch auf eine andere Art decken, wie es Bild 33 zeigt; dieses Muster erinnert an einen vertikalen Schnitt durch Mauerwerk.

4.5 Parkett - vielfältig gemustert

In Bild 29a sieht man, dass in den Eckpunkten jedes Sechsecks drei Vielecke zusammenstoßen. Wir wollen jetzt alle Ausfüllungen der Ebene mit regelmäßigen (nicht notwendigerweise kongruenten) Vielecken suchen, bei denen in jedem Scheitelpunkt des Vielecks diese drei Gebilde zusammenstoßen.

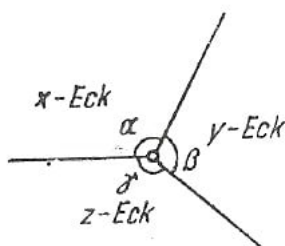


Bild 34

Man bezeichnet die Seitenzahl dieser drei Vielecke der Reihe nach mit x, y, z (Bild 34). Die Größe des Innenwinkels im x -Eck (im Gradmaß ausgedrückt) ist durch die Zahl

$$\alpha = \frac{(x - 2) \cdot 180^\circ}{x}$$

gegeben. Analoge Formeln kann man auch für das y -Eck und z -Eck (die Größen der Innenwinkel werden hier mit β, γ bezeichnet) schreiben.

Es gilt $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ oder

$$\frac{(x-2) \cdot 180^\circ}{x} + \frac{(y-2) \cdot 180^\circ}{y} + \frac{(z-2) \cdot 180^\circ}{z} = 360^\circ$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch 180° dividiert, erhält man

$$\frac{(x-2)}{x} + \frac{(y-2)}{y} + \frac{(z-2)}{z} = 2$$

und nach weiterer Vereinfachung die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Wenn also im Scheitelpunkt das x -Eck, y -Eck und z -Eck einander berühren, gilt für die Zahlen x, y, z notwendig die Gleichung (1).

Das Problem wird also in die Aufgabe umgewandelt, drei positive Zahlen x, y, z so zu bestimmen, dass die Beziehung (1) gilt. Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten, in der man eine Lösung nur in ganzen Zahlen sucht, heißt unbestimmte (diophantische) Gleichung.¹⁴ Unsere Aufgabe über das Parkettlegen wird somit zur Aufgabe, eine unbestimmte Gleichung (1) zu lösen. Es lässt sich beweisen¹⁵, dass die Gleichung (1) folgende Lösungen hat:

$$\begin{aligned} (x=3, y=7, z=42), \quad (x=3, y=8, z=24), \quad (x=3, y=9, z=18), \\ (x=3, y=10, z=15), \quad (x=3, y=12, z=12), \quad (x=4, y=5, z=20), \\ (x=4, y=6, z=12), \quad (x=4, y=8, z=8), \quad (x=5, y=5, z=10), \\ (x=6, y=6, z=6) \end{aligned}$$

Außer den angeführten zehn Zahlentripeln befriedigt die Gleichung (1) kein anderes Tripel (abgesehen von der Zahlenvertauschung, die z.B. das Tripel $x=3, y=7, z=42$ etwa in das Tripel $x=42, y=3, z=7$ u.ä. umwandelt).

Es fragt sich nun, ob dem Tripel $x=3, y=7, z=42$, zu dem wir in der vorhergehenden Überlegung gelangt sind, eine Ausfüllung der angeführten Art entspricht. Wenn dies der Fall sein sollte, müssten wir das Dreieck ABC in dieser Ausfüllung (Bild 35) in Betracht ziehen.

Der Scheitelpunkt A würde zugleich auch Scheitelpunkt des bestimmten (Nachbar-) Siebenecks und eines bestimmten (Nachbar-) Zweiundvierzecks sein.

Man wähle die Bezeichnung der Scheitelpunkte so, wie es in Bild 35 angegeben ist (die Seite AB gehört dem Siebeneck, die Seite AC dem Zweiundvierzeck an).

¹⁴Der Name diophantische Gleichung geht auf den griechischen Mathematiker Diophantos (3. Jh. v. Z.) zurück.

¹⁵S. auch die Aufgabe 4.14.

Der schraffierte Teil in Bild 35 würde dann weder dem Siebeneck (da würden im Scheitelpunkt B zwei Siebenecke einander berühren) noch dem Zweiundvierzigeck angehören (da würden im Scheitelpunkt C zwei Zweiundvierzigecke zusammenstoßen). Man sieht also, dass man dem Tripel $x = 3, y = 7, z = 42$ keine Ausfüllung der Ebene zuteilen kann.

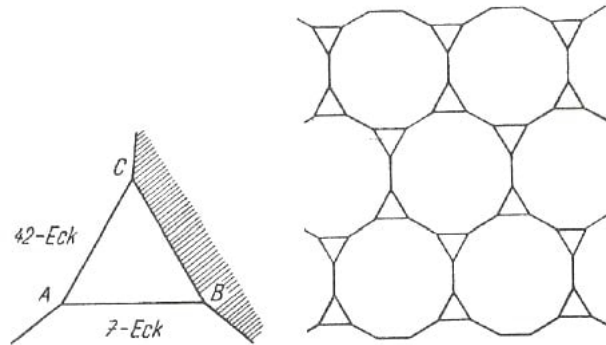


Bild 35 und 36

Analog lässt sich zeigen, dass die weiteren Tripel $(x = 3, y = 8, z = 24)$, $(x = 3, y = 9, z = 18)$ und $(x = 3, y = 10, z = 15)$ nicht zu dem erwünschten Ergebnis führen. Das Tripel $x = 3, y = 12, z = 12$ liefert jedoch bereits das Ergebnis, das in Bild 36 veranschaulicht ist.

Das Tripel $x = 4, y = 5, z = 20$ führt auch zu keiner Lösung, denn man kann um ein Fünfeck herum die Ebene nicht so decken, dass ein Quadrat stets ein Zwanzigeck ablösen würde; auch das Tripel $x = 5, y = 5, z = 10$ führt zu keiner Lösung.

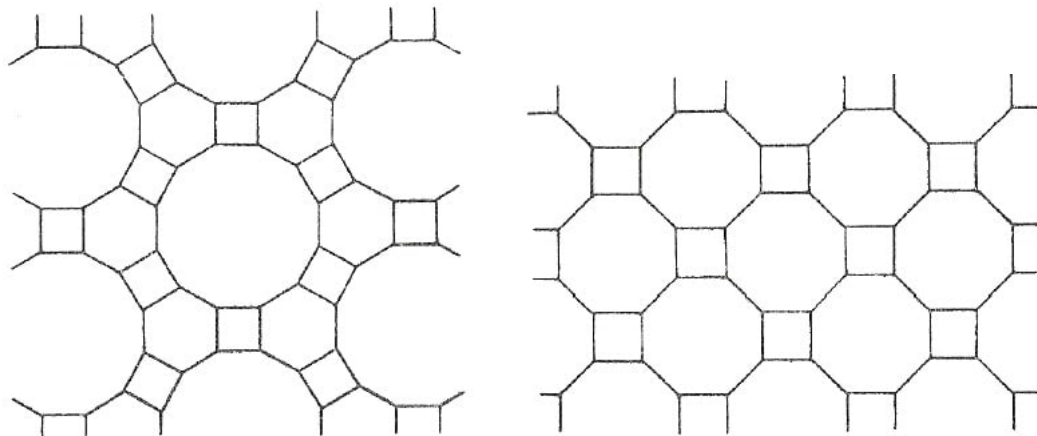


Bild 37 und 38

Hingegen entsprechen den Tripeln $(x = 4, y = 6, z = 12)$, $(x = 4, y = 8, z = 8)$ und $(x = 6, y = 6, z = 6)$ die Ausfüllungen der Ebene, wie sie in den Bildern 37, 38 und 29a veranschaulicht sind.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Parkettierungsaufgabe insgesamt die vier in den Bildern 36, 37, 38 und 29a veranschaulichten Lösungen hat.

4.6 Aufgaben

4.1. Man stelle sich vor, dass ein gegebenes regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ längs der Diagonale AC zerschnitten ist. Es sind die durch das Zerschneiden entstandenen Drei-

und Vierecke näher zu beschreiben; berechnen Sie die Größe ihrer Innenwinkel.

4.2. Das gegebene regelmäßige Fünfeck $ABCDE$ ist längs zweier Diagonalen AC , BD zu zerschneiden. Beschreiben Sie näher die vier entstandenen Teile und berechnen Sie die Größe ihrer Innenwinkel.

4.3. Das gegebene regelmäßige Fünfeck $ABCDE$ zerschneidet man längs der drei Diagonalen AC , BD , BE . Beschreiben Sie genauer die sechs entstandenen Teile und berechnen Sie ihre Innenwinkel.

*4.4. In dem gegebenen regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ sind die Diagonalen AC und BD gezogen; ihr Schnittpunkt ist mit X bezeichnet. Berechnen Sie das Verhältnis der Strecken AX , XC .

4.5. Ein aus Papier geschnittenes Modell eines regelmäßigen Fünfecks zerteile man längs aller seiner Diagonalen. Einer der so entstandenen Teile hat wieder die Form eines regelmäßigen Fünfecks.

Wieviel Prozent des Flächeninhalts des ursprünglichen Fünfecks beträgt der Inhalt dieses Fünfeckteils?

4.6. Die in Bild 37 veranschaulichten Pflastersteine sind in drei Farben (z.B. rot, gelb und schwarz) so zu färben, dass je zwei Steine, die eine Seite gemeinsam haben, in verschiedenen Farben gehalten sind.

4.7. Bestimmen Sie, in wieviel Punkten sich die Diagonalen eines regelmäßigen Sechsecks schneiden.

*4.8. Unter allen konvexen Sechsecken ist das Beispiel eines Sechsecks zu finden, dessen Diagonalen sich in möglichst vielen Punkten schneiden. Wieviel Schnittpunkte der Diagonalen entstehen dabei?

*4.9. Gegeben ist das regelmäßige n -Eck $A_1A_2A_3\dots A_n$. Man bezeichnet mit a die Größe seiner Seite, mit r den Halbmesser des dem n -Eck umschriebenen Kreises. Berechnen Sie den Quotienten $\frac{r}{a}$.

4.10. Es ist die numerische Berechnung des Quotienten $\frac{r}{a}$ für ein regelmäßiges Siebzehneck durchzuführen.

4.11. Die Größe der Strecke SX in Bild 28 ist angenähert der Größe der Seite eines dem Kreis k eingeschriebenen Siebenecks gleich. Berechnen Sie den Näherungswert dieser Konstruktion.

4.12. Gegeben ist das konvexe Siebeneck $A_1A_2A_3\dots A_7$.

Wie viele Dreiecke, deren Scheitelpunkte in denen des gegebenen Siebenecks liegen und deren Seiten dessen Diagonalen sind, können gefunden werden?

4.13. Es sind alle regelmäßigen Vielecke zu finden, bei denen die Größe des Innenwinkels (im Gradmaß) durch eine ganze Zahl angegeben ist.

****4.14.** Bestimmen Sie alle ganzen positiven Zahlen, x, y, z , die die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

befriedigen.¹⁶

4.15. Auf wievielfache Weise kann man die Summe $a + b + c + d$ so einklammern, dass in jeder Klammer zwei Summanden stehen; dabei kann der Summand eine beliebige der Zahlen a, b, c, d oder die eingeklammerte Summe sein. Die Reihenfolge der Zahlen a, b, c, d soll unverändert bleiben. Es ist zu zeigen, wie diese Aufgabe mit der Zerlegung eines konvexen Fünfecks in Dreiecke (mit Hilfe von Diagonalen) zusammenhängt.

¹⁶Es ist eine Gleichung, deren Lösung wir aus dem Haupttext des Kapitels von Vielecken in die Aufgaben verlegt haben. Mit dieser Aufgabe können sich jene Leser befassen, die mit Ungleichheiten zu rechnen verstehen. Man sieht, dass es hier eigentlich um die Zerlegung der Zahl $\frac{1}{2}$ in die Summe von drei Stammbrüchen geht (vgl. das Kapitel "Stammbrüche").

5 Geometrie ohne Lineal

5.1 Das Sieben-Brücken-Problem

Die meisten unserer Leser dürften bereits vor die Aufgabe gestellt worden sein, ein gegebenes Bild (Haus, menschliche Figur, Ornament) in einem Zug zu zeichnen. Dabei wird verlangt, jede Linie nur einmal zu durchlaufen.

Natürlich muss das Bild, das wir zeichnen sollen, "zusammenhängend" sein:

Zwischen je zwei Punkten der Skizze muss eine Linienverbindung möglich sein. So stellen vier Strecken, mit denen der Umfang eines Quadrats gebildet wird, ein zusammenhängendes Bild dar, während zwei konzentrische Kreise kein solches Bild ergeben. Wir wollen uns hier also nur mit zusammenhängenden Bildern beschäftigen, wie sie z.B. in den Bildern 39 und 40 veranschaulicht sind.

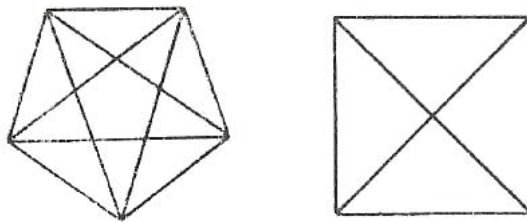


Bild 39 und 40

Wenn man ein Fünfeck samt allen seinen Diagonalen (Bild 39) mit einem Zug zu zeichnen versucht, erkennt man, dass dies nicht schwierig ist; das scheinbar "einfachere" Quadrat mit seinen Diagonalen (Bild 40) mit einem Zug zu zeichnen gelingt jedoch nicht.

Was ist der Grund dafür? Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir einen Blick in die Geschichte werfen. Die Aufgabe, Bilder mit einem Zuge zu zeichnen, ist ungefähr 250 Jahre alt. Es war kein Geringerer als der berühmte Leonhard Euler, der sich bereits um das Jahr 1736 mit den Bild 39 "Bildern auf einen Zug" beschäftigt hat.

In seiner Arbeit taucht diese Aufgabe als das berühmte "Problem der sieben Brücken der Stadt Königsberg" (heute Kaliningrad) auf.

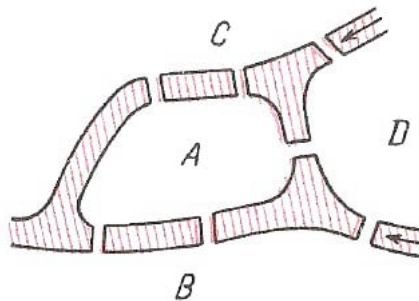


Bild 41

In Königsberg bildete zu Eulers Zeit der Pregel eine Insel; sie konnte, wie aus Bild 41 hervorgeht, über 7 Brücken erreicht werden. Die Strömungsrichtung ist durch Pfeile angegeben, die Insel mit dem Buchstaben A bezeichnet, das linke Ufer mit B, das rechte Ufer mit C und der Raum zwischen den beiden Flussarmen (im Bild rechts) ist D.

Es lässt sich heute schwer sagen, wer als erster die Frage stellte, ob man alle die sieben Brücken nacheinander passieren könne, ohne eine Brücke auszulassen oder mehr als einmal zu überschreiten. Vielleicht war einer der lustigen Zechbrüder, die in fortgeschrittener Nachtstunde über die Brücken nach Hause gingen, der Autor der bekannten Aufgabe.

Mancher wird sich an der Lösung des Problems versucht haben, aber niemand hatte Erfolg. Auch Euler hörte davon, und in diesem Augenblick wurde aus dem Scherz der Königsberger Zechbrüder ein ernstes mathematisches Problem.

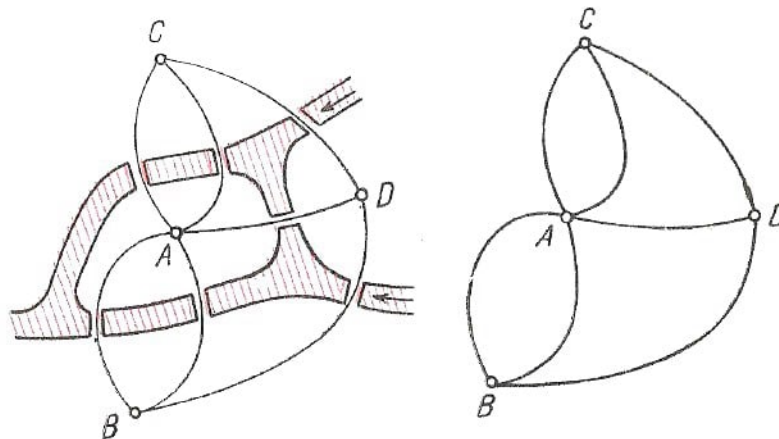


Bild 42 und 43

Wir wollen von allen Nebensächlichkeiten der Aufgabe absehen, um die Antwort leichter finden zu können. Statt der Felder A , B , C , D wähle man in der Ebene einen (mit dem betreffenden Buchstaben bezeichneten) Punkt.

Da von der Insel A zum Ufer B zwei Brücken führen, verbinde man die Punkte A , B mit zwei Bögen. Auch an das Ufer C gelangt man von der Insel über zwei Brücken, so dass man auf der Skizze wieder zwei Bögen zwischen A und C zeichnet. Das Feld D verbindet mit der Insel eine Brücke, so dass zwischen A , D nur ein einziger Bogen gezeichnet wird. Wie ersichtlich, gibt es zwischen den Ufern B und C keine (direkte) Brückenverbindung, weshalb die Punkte B , C mit keinem Bogen verbunden sind. Wenn man eine solche Konstruktion auch für das übriggebliebene Paar BD und CD durchführt, bekommt man das durch schwarze Linien in Bild 42 veranschaulichte Ergebnis.

Wenn es möglich wäre, alle Brücken so zu passieren, wie es die Aufgabe verlangt, müsste man das Bild 42 (natürlich mit Ausnahme der Flussarme und Brücken) in einem Zug zeichnen können.

Wir wollen also dem schwarz gezeichneten Teil in Bild 42, den wir in Bild 43 noch einmal für sich wiedergegeben haben, unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Man sieht, dass Bild 43 nicht mit einem Zug gezeichnet werden kann.

In einem der Petersburger Akademie der Wissenschaften im Jahre 1736 vorgelegten Beitrag hat Euler nachgewiesen, dass die Sieben-Brücken-Aufgabe nicht lösbar ist, dass man also jene sieben Brücken nicht so passieren kann, wie es die Aufgabe verlangt. Überdies formulierte Euler in seiner Arbeit einen Lehrsatz, nach dem man gleich feststellen kann, ob sich ein Bild mit einem Zug zeichnen lässt oder nicht. Wir wollen uns

hier mit diesem Satz näher bekannt machen.

In den Bildern 39, 40 und 43 fallen uns Punkte auf, von denen wenigstens drei Linien ausgehen. In Bild 39 sind das teils die Ecken des Fünfecks, teils die Schnittpunkte seiner Diagonalen (im ganzen also 10 solcher Punkte). Wir wollen diese Punkte die Knotenpunkte des Bildes nennen. Auch den Punkt, von dem gerade eine Linie ausgeht, wollen wir Knotenpunkt nennen, ein Knotenpunkt ist also z.B. der Endpunkt einer Strecke. Die Linienzahl, die auf dem gegebenen Bild von einem seiner Knotenpunkte ausgeht, heißt der Grad dieses Knotenpunktes.¹⁷ So gibt es z.B. 10 Knotenpunkte in Bild 39, die alle vierten Grades sind.

Nun kann man bereits den Satz über das Bilderzeichnen in einem Zug aussprechen: Eine notwendige und genügende Bedingung dafür, ein gegebenes zusammenhängendes Bild mit einem Zug zu zeichnen, ist, dass dieses Bild gerade zwei Knotenpunkte ungeraden Grades oder gar keinen solchen enthalte. Im ersten Fall beginnt der Zug in einem jener zwei Knotenpunkte ungeraden Grades und endet im anderen Knotenpunkt.

Das ist also der Grund, warum die Aufgabe mit den sieben Brücken in Königsberg nicht lösbar ist. Wenn man nämlich den schwarz gezeichneten Teil in Bild 42 ansieht, entdeckt man vier Knotenpunkte ungeraden Grades.

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass es für die Aufgabe, Bilder mit einem Zug zu zeichnen, ganz unwesentlich ist, ob die Linien (Bögen), die wir zeichnen, gerade oder krumm, lang oder kurz sind. Wenn man z.B. in Bild 39 die Strecken durch Kreisbögen ersetzte, würde sich nichts an der untersuchten Eigenschaft ändern: Das deformierte Bild 39 kann man wieder in einem Zug zeichnen, während sich das deformierte Bild 40 nicht in einem Zug konstruieren lässt.

Diese Aufgabe gehört nämlich zu jenem Zweig der Mathematik, der sich in den letzten Jahrzehnten besonders entwickelt hat und Topologie heißt. Die Topologie (mit einem älteren Namen *analysis situs*) studiert also ganz andere Eigenschaften geometrischer Gebilde als diejenigen, an die der Leser von der Schule her gewöhnt ist; man könnte sie kurz als "Geometrie ohne Lineal" charakterisieren.

5.2 Was sind Bäume?

Wir wollen jetzt den einfachen Bildern, die Bäume heißen, unsere besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Der Name wurde übrigens recht treffend gewählt; denn ein solches Bild ähnelt der Skizze eines Baumes, wie sie ein kleines Kind zeichnen würde.

"Baum" wird ein zusammenhängendes Bild genannt, das aufhört, zusammenhängend zu sein, wenn man einen seiner Bögen "zerreißt".

So stellt z.B. Bild 44 einen Baum dar; Bild 45 ist kein Baum: Das "Zerreißen" des Bogens, das man in Bild 46 sieht, führt nämlich wieder zu einem zusammenhängenden Bild.

¹⁷Wir beschränken uns hier begreiflicher Weise auf Bilder, die nur eine endliche Knotenpunktzahl haben und durch endliche Linienzahl gebildet sind.



Bild 44 und 45

Unter Bäume (vom mathematischen Standpunkt aus) rechnet man auch Bilder, die mit diesem botanischen Begriff überhaupt keine oder nur eine sehr geringe Ähnlichkeit haben; die Bedingung des Zusammenhangs müssen sie freilich erfüllen. Beispiele der gleichen Bäume sieht man in den Bildern 47a und 47b.

Der Baum des Bildes 44 hat 12 Knotenpunkte und 11 Bögen (jeder Bogen verbindet zwei Knotenpunkte), also einen Knotenpunkt mehr als Bögen. Ähnlich ist in den Bildern 47a und 47b die Zahl der Knotenpunkte um eins größer als die der Bögen ($22 = 21 + 1$ und $26 = 25 + 1$). Durch mathematische Induktion lässt sich folgender Lehrsatz beweisen:

Für jeden Baum ist die Zahl der Knotenpunkte um eins größer als die der Bögen. Ist umgekehrt auf einem zusammenhängenden Bild die Zahl der Knotenpunkte um eins größer als die der Bögen, ist dieses Bild ein Baum.

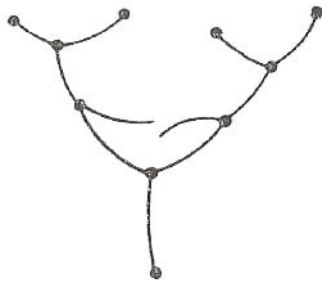


Bild 46

Es ist interessant, dass sich in jüngster Vergangenheit zahlreiche Mathematiker mit dem Studium der Bäume beschäftigt haben. Man muss gleich hinzufügen, dass es sehr ernste und für die Praxis wichtige Gründe waren, die sie zu diesem Studium führten.

So wurde bereits 1847 G. Kirchhoff zu Betrachtungen über Bäume geführt, als er sich mit den verschiedenen Möglichkeiten der elektrischen Stromverzweigung befasste, und später (in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts) schrieb A. Cayley mehrere Artikel, die sich mit der Anwendung dieses Begriffs in der organischen Chemie beschäftigten. Wir wollen diese Problematik näher betrachten.

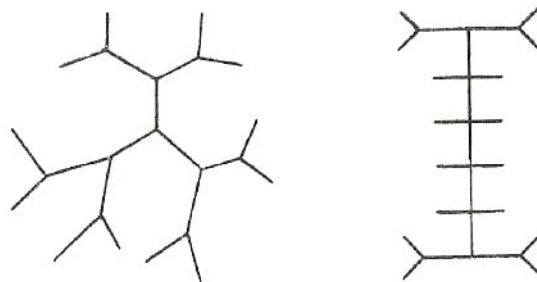
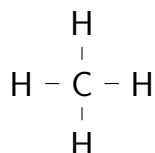


Bild 47

Von der Schule wissen wir noch, dass die Moleküle eines organischen Stoffes durch eine empirische oder durch eine Strukturformel dargestellt werden können. So ist z.B. die empirische Formel des Paraffins C_nH_{2n+2} , wo C ein Kohlenstoffatom, H ein Wasserstoffatom und n eine natürliche Zahl bezeichnet.

So erhält man für $n = 1, 2, 3, \dots$ der Reihe nach Methan CH_4 , Äthan C_2H_6 , Propan C_3H_8 usw. Das Suchen der betreffenden Strukturformel kann man offensichtlich auf die Aufgabe zurückführen, ein zusammenhängendes Bild zu konstruieren, dessen Knotenpunkte die Atome des fraglichen Kohlen- oder Wasserstoffes und dessen Bögen die betreffenden "Valenzstriche" sind. So ist z.B. die Strukturformel des Methans



Es lässt sich leicht zeigen, dass die Strukturformel jedes der Paraffine einen Baum darstellt:

Die Zahl der Knotenpunkte des konstruierten Bildes ist nämlich $n + (2n + 2) = 3n + 2$. Man weiß ferner, dass Kohlenstoff C vierwertig, Wasserstoff H dagegen einwertig ist. Die Zahl $4n + 1 \cdot (2n + 2)$ drückt also die zweifache Zahl aller Bögen (jeder Bogen endet in zwei Knotenpunkten) aus, so dass die wirkliche Zahl der Bögen $\frac{1}{2}(6n - 2) = 3n + 1$ ist.

Die Knotenpunktzahl ist also um eins größer als die der Bögen, und damit ist die Bedingung für einen Baum erfüllt.

Die Chemiker interessieren sich dafür, wie viele "verschiedene" Bäume man (bei der gegebenen Zahl n) der Formel C_nH_{2n+2} zuordnen kann. Die Erklärung dessen, was man unter "verschiedenen" Bäumen versteht, bereitet freilich gewisse Schwierigkeiten. Wir wollen uns hier daher statt mit einer genauen mathematischen Definition mit einer Veranschaulichung begnügen, die übrigens (wenigstens für den Zweck unserer Überlegungen) das Ganze recht gut erfasst.

Man stelle sich folgendes Baummodell vor: Die Knotenpunkte des Baumes sollen kleine Metallringe sein, wobei die Zweige durch Gummischnüre zwischen jeweils zwei Ringen dargestellt sind. Dann entspricht es unserem Zweck, jene zwei Modelle für "einander gleich" anzusehen, die man durch Anspannen einiger Gummiverbindungen in miteinander übereinstimmende Formen überführen kann.

Dabei darf keine Verbindung zerrissen und anders geknüpft werden, auch dürfen keine neuen Metallringe (Baumknotenpunkte) hinzugefügt werden. Zwei Baummodelle, die einander nicht gleich sind, werden dann verschieden genannt. Wir bitten den Leser zu überlegen, ob die zwei in Bild 48 dargestellten Bäume einander gleich sind.



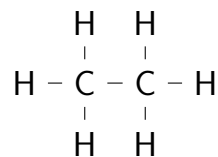
Bild 48

Kehren wir jedoch wieder zu der Formel C_nH_{2n+2} zurück und zu der Frage, wie viele Bäume ihr entsprechen. Wir wollen Beispiele von Strukturformeln untersuchen, in denen n eine kleine Zahl ist.

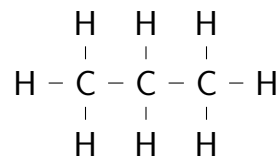
Die ersten drei Glieder der Paraffinreihe (für $n = 1, 2, 3$) sind nur in einer einzigen Form bekannt; man kennt nur ein einziges Methan CH_4 ein einziges Äthan CH_6 und ein einziges Propan C_3H_8 .

Mit dem Glied C_4H_{10} begegnet man einer Erscheinung, die in der Chemie Isomerie heißt: Es sind nämlich zwei Butane bekannt, die beide die empirische Formel C_4H_{10} haben, sich jedoch durch chemische Eigenschaften - und auch durch die Strukturformel - voneinander unterscheiden (Normal-Butan und Iso-Butan).

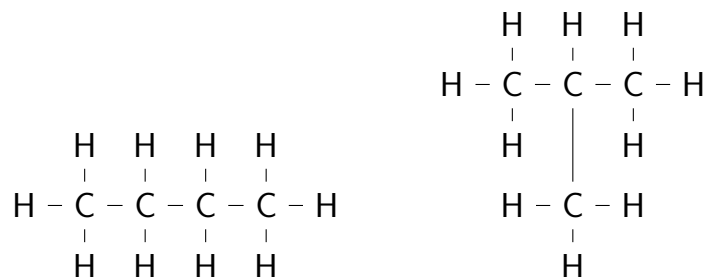
Für weitere Glieder der Paraffinreihe liegen die Verhältnisse noch komplizierter. Diese Tatsachen, an die man sich aus den Chemiestunden vielleicht noch erinnert, stimmen auch mit unserer Baumlehre überein. Die Strukturformel für Methan, CH_4 , haben wir schon angeführt, und man findet leicht, dass es keine andere Formel für CH_4 , geben kann. Dem Äthan C_2H_6 entspricht eine einzige Strukturformel,



und dieselbe Eindeutigkeit findet man für Propan C_3H_8 das die Strukturformel



hat. Die Formel des Butans, C_4H_{10} , kann man jedoch bereits durch zwei verschiedene Bäume darstellen, wie diese Schemas zeigen:

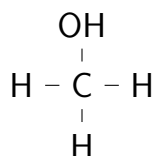


Es lässt sich beweisen, dass außer den angeführten zwei Anordnungen der Formel C_4H_{10} kein anderer Baum mehr entspricht.

Bei unseren Überlegungen sind wir von einem mathematischen Spiel ausgegangen und auf einem für die Praxis sehr nützlichen Gebiet der Mathematik angelangt: Wir haben

festgestellt, dass man durch geometrische Überlegungen die Höchstzahl der Strukturformeln eines organischen Stoffes bestimmen kann. Nun ist es fraglich, ob die "vorausgesagten" Verbindungen in der Natur wirklich existieren oder ob sie wenigstens von den Chemikern in den Laboratorien hergestellt werden können.

Von diesem Standpunkt aus haben die Paraffinderivate - die Alkohole $C_nH_{2n+1}OH$, deren Strukturformeln wiederum in Baumform gegeben sind, eine interessante Geschichte gehabt; so entspricht z.B. der Formel CH_3OH der Baum



Bereits 1874 wusste Cayley auf Grund mathematischer Erwägungen, dass man sich theoretisch acht Pentanderivate, Pentanole, mit der empirischen Formel $C_5H_{11}OH$ vorstellen kann, aber in seiner Zeit waren bloß zwei bekannt. Der deutsche Mathematiker W. Ahrens, Autor eines umfangreichen Buches über Unterhaltungsmathematik, kommentierte 1901 Cayleys Voraussage, indem er sagte, dass "von den theoretisch möglichen acht Verbindungen sieben bekannt sind". Die neuesten Lehrbücher der organischen Chemie führen jedoch schon das Verzeichnis aller acht Pentanole an. Das ist ein überzeugendes Beispiel für die Zusammenarbeit zwischen Chemie und Mathematik.

5.3 Aufgaben

5.1. Zeichnen Sie ein Rechteck $ABCD$ und darin die Diagonale AC . Kann man das Bild mit einem Zug zeichnen?

5.2. Zeichnen Sie zwei konzentrische Kreise. In dem größeren sind zwei senkrecht aufeinander stehende Durchmesser zu konstruieren. Lässt sich dieses Bild mit einem Zug zeichnen?

5.3. Zeichnen Sie ein regelmäßiges Sechseck mit allen möglichen Diagonalen; ist es möglich, dieses Bild mit einem Zug zu zeichnen?

5.4. Welches regelmäßige n -Eck (in dem $n > 6$) mit allen möglichen Diagonalen lässt sich mit einem Zug zeichnen und welches nicht?

*5.5. Auf einem gegebenen Bild ist die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades stets einer geraden Zahl gleich. Geben Sie Gründe an, warum das der Fall ist!

5.6. Wie man weiß, kann das in Bild 40 veranschaulichte Quadrat mit den beiden Diagonalen nicht mit einem Zug gezeichnet werden. Es ist die Mindestzahl der Züge zu finden, mit denen sich das Bild zeichnen lässt.

5.7. Es ist die Mindestzahl der Züge zu finden, mit denen man das Bild der Aufgabe 5.2. zeichnen kann.

5.8. Wieviel Strukturformeln entsprechen dem Pentan C_5H_{12} ?

5.9. Bild 49 stellt einen Plan mit drei Häusern und drei Brunnen dar. Die Bewohner wollten hier Wege, die sich nicht kreuzen, so führen, dass jedes Haus mit jedem Brunnen in Verbindung steht. Es lässt sich beweisen, dass man diese neun Wege auf dem Bilde nicht konstruieren kann. Man kann nämlich höchstens acht Wege anlegen, wenn kein Schnittpunkt entstehen soll; diese acht Wege sind zu zeichnen.

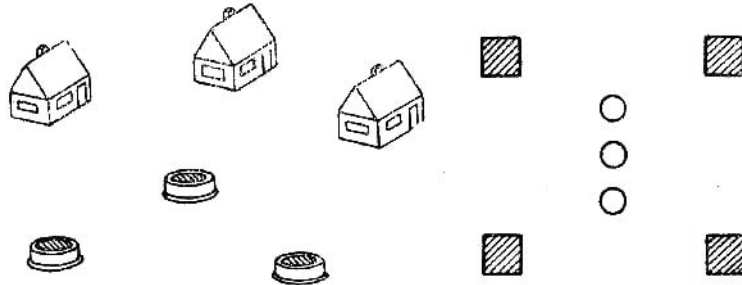


Bild 49 und 50

5.10. In einer Ziegelei gibt es drei Produktionszentren und vier Lager. Von jedem Zentrum (in Bild 50 durch einen Kreis veranschaulicht) soll eine Schmalspurbahn zu jedem Lager (in Bild 50 veranschaulicht durch ein Quadrat) führen.

Wenn sich in einem bestimmten Punkt zwei Bahnen kreuzen, würde es zu technischen Schwierigkeiten führen, über dieselbe Kreuzung noch eine weitere Bahn zu leiten. Unter dieser Voraussetzung soll die Mindestzahl der Kreuzungen im Plan für die Streckenführung angegeben werden.

Es lässt sich beweisen, dass wenigstens zwei Kreuzungen entstehen; es soll ein Streckenplan vorgeschlagen werden, der gerade mit diesen zwei Kreuzungen auskommt.

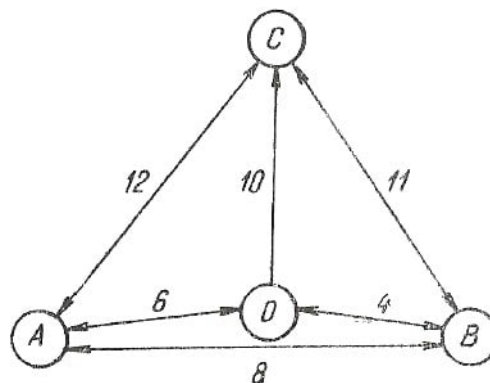


Bild 51

5.11. Bild 51 stellt eine Lageskizze von vier Gemeinden A , B , C , D dar; darin sind auch die gegenseitigen Entfernungen dieser Gemeinden (in Kilometern) angegeben. Alle vier Gemeinden sollen so an das Stromnetz angeschlossen werden, dass je zwei entweder direkt oder über die übrigen Gemeinden verbunden sind und dass die Gesamtlänge des Netzes möglichst klein bleibt. Entwerfen Sie die Leitungsführung.

*5.12. Gegeben sind drei Gefäße. Das erste hat einen Inhalt von 8 Litern und ist bis an den Rand mit Wasser gefüllt, das zweite einen von 5 Litern, das dritte einen von 3 Litern; das zweite und das dritte sind leer.

Durch Umfüllen ist zu erreichen, dass im ersten Gefäß vier und im zweiten ebenfalls vier Liter Wasser sind. Wie geht man vor, wenn man kein Meßgefäß zur Hand hat?

6 Mathematische Paradoxa und Rätsel

6.1 Knochelei im Restaurant

Manche Rätsel sehen scheinbar wie mathematische Probleme aus, in Wirklichkeit sind sie aber nur "Fallen" für unaufmerksame Leser, sogenannte Paradoxa¹⁸. Wir wollen hier ein Beispiel anführen, das in verschiedenen Abänderungen bekannt ist, obwohl manchmal auch ein erfahrener Rätsellöser das "Problem" nicht erklären kann.

Zwei Freunde bezahlen in einem Gasthaus ihre Rechnung:

Der Geschäftsführer hat ihnen 50 Mark berechnet, nach ihrem Weggang jedoch festgestellt, dass die Zeche nur 45 Mark betragen hat. Um seinen Fehler gutzumachen, schickt er den Gästen einen Lehrling mit den irrtümlich berechneten 5 Mark nach. Die beiden Freunde sind über die Aufmerksamkeit des Leiters erfreut, geben dem Lehrling 1 Mark als Trinkgeld und teilen sich die restlichen 4 Mark. Berechnen wir nun, welche Beträge im Umlauf waren.

Jeder der zwei Freunde bezahlte ursprünglich 25 Mark, da jedoch jeder 2 Mark zurückbekam; betrug seine Zeche 23 Mark. Beide zusammen haben also 46 Mark bezahlt. Dem Lehrling fiel 1 Mark zu, so dass $46 \text{ Mark} + 1 \text{ Mark} = 47 \text{ Mark}$. Wo sind die drei Mark hingeraten?

Der Text dieses Rätsels ist so suggestiv formuliert, dass viele Menschen der Täuschung erliegen und freilich vergebens zu überlegen beginnen, was den Fehlbetrag verursacht hat. Man könnte sagen, dass es eher um einen Buchhaltungs- als um einen mathematischen Scherz geht, wie wir gleich sehen werden.

Wir stellen uns eine "Lohnliste" zusammen, aus der ersichtlich sein soll, wie die beschriebenen "Finanztransaktionen" verliefen. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass auf jeder Zeile der Tabelle die Summe der "Einnahmen" der Summe der "Ausgaben" gleich sein muss. Jede Zeile stellt nämlich eine solche Finanztransaktion dar, die letzte Zeile hält dann das Schlussergebnis fest.

Tabelle IV

1. Freund		2. Freund		Betriebsleiter		Lehrling	
Einnahme	Ausgabe	Einnahme	Ausgabe	Einnahme	Ausgabe	Einnahme	Ausgabe
-	25	-	25	50	-	-	-
-	-	-	-	-	5	5	-
2,50	-	2,50	-	-	-	-	5
-	0,50	-	0,50	-	-	1	-
-	23	-	23	45	-	1	-

Der Text des Rätsels hat uns also dadurch getäuscht, dass er die Ausgaben beider Freunde mit der Einnahme des Lehrlings zusammenzählte und die Summe mit den ursprünglichen fünfzig Mark verglich.

Die Einnahme des Lehrlings (1 Mark) ist aber genauso wie die Einnahme des Leiters in der Ausgabe der beiden Freunde inbegriffen.

¹⁸Ein Paradox oder Paradoxon heißt eine Erscheinung oder ein Ausspruch, der scheinbar widersinnig ist.

6.2 Wellblech - so oder so?

Der Querschnitt des in Bild 52 veranschaulichten Wellblechs bildet eine Wellenlinie, die aus kongruenten Halbkreisen vom Halbmesser r (in Zentimetern gemessen) besteht. Dieses Blech wird in zwei Sorten gefertigt:

Die eine hat Halbkreise vom Halbmesser $r_1 = 2$ cm, die andere Halbkreise vom Halbmesser $r_2 = 1$ cm; beide Blechsorten haben die gleiche Breite (in Bild 52 mit b bezeichnet). Es ist festzustellen, bei welcher Sorte mehr Material verbraucht wird.

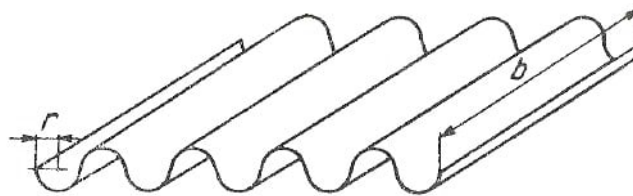


Bild 52

Man kontrolliert den Materialverbrauch, indem man berechnet, wieviel laufende Meter Flachblech von derselben Breite wie das Wellblech man (in beiden Fällen) braucht, um dieselbe Länge (z.B. 100 cm) Wellblech zu produzieren.

Auf 100 cm Länge gehen $\frac{100}{2r_1}$ Halbkreise mit dem Halbmesser r_1 und $\frac{100}{2r_2}$ Halbkreise mit dem Halbmesser r_2 . Jeder der Halbkreise hat den Radius r_1 bzw. r_2 , so dass die Gesamtlänge des flachen Materials

$$\frac{100}{2r_1} \cdot \pi r_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{100}{2r_2} \cdot \pi r_2$$

ist. Man sieht, dass die Größen r_1, r_2 bei der Berechnung wegfallen; man bekommt das Resultat $50\pi \approx 157$, das von den Halbmessern r_1, r_2 unabhängig ist.

Zur Erzeugung von 100 cm Wellblech braucht man in beiden Fällen etwa 157 cm Flachblech; der Materialverbrauch ist für beide Sorten gleich.

6.3 Zahnräder

Wir wollen uns mit einer interessanten Eigenschaft der Zahnräder bekannt machen; doch wollen wir zunächst die Zahnräder beschreiben, die wir im Sinne haben. (Ich mache darauf aufmerksam, dass dieses Kapitel sich an Leser wendet, die das Rechnen mit goniometrischen Funktionen beherrschen.)

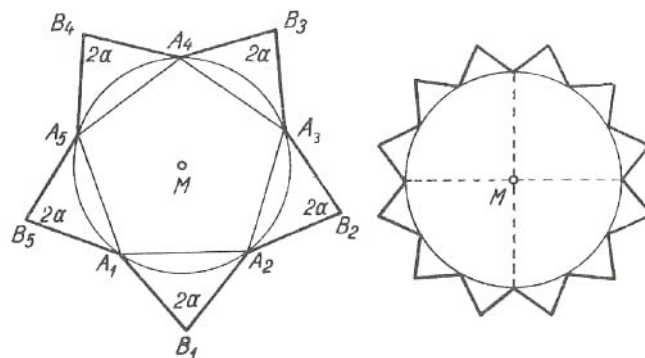


Bild 53

In einer Ebene ist ein (Hilfs-)Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Halbmesser r gegeben. Man schreibt dem Kreis ein regelmäßiges k -Eck $A_1A_2\dots A_k$ ein und konstruiert über jeder seiner Seiten $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$ als Basis "nach außen hin" ein gleichschenkliges Dreieck mit dem angegebenen Winkel 2α bei den Hauptscheitelpunkten $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$.

Die Scheitelpunkte $A_1B_1A_2B_2A_3B_3\dots A_kB_k$ gehören einem bestimmten, nicht konvexen Vieleck an, das ungefähr die Form eines Zahnrads hat; man bezeichne dieses Vieleck kurz mit V_k . (In Bild 53a ist für $\alpha = 40^\circ$ das Vieleck V_5 konstruiert, und in Bild 53b ist für $\alpha = 40^\circ$ das Vieleck V_{12} gezeichnet.)

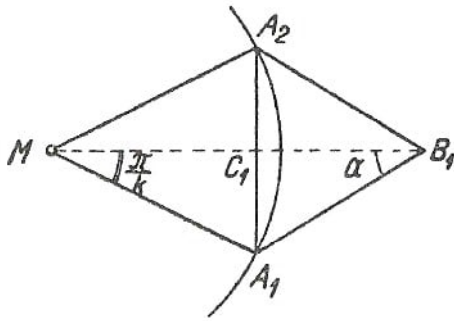


Bild 54

Um den Flächeninhalt und den Umfang des Gebildes V_k berechnen zu können, muss man zunächst die Längen MB_1, A_1B_1 bestimmen. Bild 54 veranschaulicht einen Teil des Vielecks V_k , wobei C_1 der Fußpunkt der durch M gehenden Höhe des Dreiecks MA_1A_2 ist.

Der Zentriwinkel A_1MA_2 entspricht dem k -ten Teil des Vollwinkels; drückt man die Winkelgröße im Bogenmaß aus, dann beträgt der Vollwinkel 2π , und die Größe des Winkels A_1MA_2 ist $\frac{2\pi}{k}$. Ferner gilt $A_1MC_1 = \frac{\pi}{k}$, d.h. $C_1A_1 = \sin \frac{\pi}{k}$, $MC_1 = \cos \frac{\pi}{k}$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $A_1C_1B_1$ berechnet man

$$A_1B_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\sin \alpha}, \quad B_1C_1 = \sin \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha$$

Der Inhalt des Dreiecks A_1MA_2 ist $\sin \frac{\pi}{k} \cdot \cos \frac{\pi}{k}$, der Inhalt des Dreiecks $A_1B_1A_2$ ist $\sin^2 \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha$. Daraus ergibt sich für den Inhalt des ganzen Vielecks V_k :

$$\begin{aligned} k \left(\sin \frac{\pi}{k} \cdot \cos \frac{\pi}{k} + \sin^2 \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha \right) &= k \sin \frac{\pi}{k} \cdot \cos \frac{\pi}{k} \left(1 + \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\cos \frac{\pi}{k}} \cdot \cot \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} k \sin \frac{2\pi}{k} \left(1 + \tan \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha \right) = \pi \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{k}} \cdot \left(1 + \tan \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha \right) \end{aligned}$$

Es ist zu erwarten, dass sich mit wachsendem k dieser Inhalt dem Inhalt eines Einheitskreises, d.h. der Zahl π , nähert.

Die Zähne an solchen Zahnrädern werden (mit zunehmendem k) immer kleiner, und das ganze Zahnrad "ähnelte" dann einem Kreis. Tatsächlich hat diese "Ähnlichkeit" etwas für sich, wie die höhere Mathematik mit Hilfe des Limesbegriffes beweist. Einen genauen mathematischen Beweis wollen wir hier nicht bringen; wir begnügen uns mit einer Näherungslösung.

Von der Schule her erinnert man sich noch, dass für sehr kleine Winkel $\sin \alpha = \alpha$ ¹⁹ und damit $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ gilt. Für hinreichend große k ist also die Zahl $\left(\sin \frac{2\pi}{k}\right) : \frac{2\pi}{k}$, die in dem Ausdruck für den Inhalt des Gebildes V_k vorkommt, angenähert gleich 1; für ein solches k ist $\frac{\pi}{k}$ sehr klein, $\tan \frac{\pi}{k}$ ist "fast" gleich Null.

Man sieht hier schon leicht ein, wie berechtigt die Vermutung war, dass der Flächeninhalt des Gebildes V_k angenähert der Zahl π gleich ist.

Man berechne nunmehr den Umfang des Vielecks V_k . Für diesen Umfang gilt

$$2k \cdot \overline{A_1 B_1} = 2k \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\sin \alpha}$$

Nach der Anschauung hätte man den Eindruck, dass sich mit anwachsendem k dieser Umfang dem Umfang eines Einheitskreises, d.h. der Zahl 2π , nähert. Zu diesem Schluss könnte man entweder nach der vorangehenden Überlegung kommen oder auf Grund des Umstandes, dass die Entfernung

$$\overline{MB_1} = \cos \frac{\pi}{k} + \sin \frac{\pi}{k} \cdot \cot \alpha$$

bei anwachsendem k der Zahl 1 "nahekommt". Dieser Schluss wäre jedoch falsch. Es lässt sich beweisen, dass sich die Umfänge der Gebilde V_k der Zahl $\frac{2\pi}{\sin \alpha}$ nähern, die für keinen spitzen Winkel 2π gleich, sondern stets größer ist. Die den Umfang des Gebildes V_k ausdrückende Zahl kann man nämlich in der Form

$$\frac{2\pi}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}}$$

schreiben, wobei der letzte Bruch - wie bereits bekannt - der Zahl 1 "nahekommt"; das Ganze "nähert sich" also der Zahl

$$\frac{2\pi}{\sin \alpha}$$

Zu jeder Zahl L größer als 2π kann man sogar den spitzen Winkel α herausfinden, indem sich die Umfänge der Vielecke V_3, V_4, V_5, \dots der Zahl L nähern (obwohl freilich die Flächeninhalte dieser Vielecke dem Flächeninhalt eines Einheitskreises nahekommen). Wir wollen uns dieses Resultat noch an einem numerischen Beispiel erläutern.

Man wähle einen Einheitskreis mit dem Halbmesser 1 m; dann suche man einen solchen spitzen Winkel α , dass wir, wenn wir das Gebilde V_k (mit einer "hinreichend großen" Anzahl Scheitelpunkte) umgehen, ungefähr den gleichen Weg zurückgelegt haben wie beispielsweise von Prag nach Bratislava (396 km). Alle Längen werden bei der Berechnung in Metern angeführt.

Es geht um eine Lösung der Gleichung

$$\frac{2\pi}{\sin \alpha} = 396000 \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = \frac{\pi}{198 \cdot 10^3}$$

¹⁹Nach den vierstelligen Tafeln ist z.B. $\sin 0^\circ 10' = \arcsin 0^\circ 10' = 0,0029$; $\sin 0^\circ 20' = \arcsin 0^\circ 20' = 0,0058$; $\sin 0^\circ 30' = \arcsin 0^\circ 30' = 0,0087$ u.ä..

Der Sinuswert ist hier sehr klein, so dass man die Tafeln der goniometrischen Funktionen überhaupt nicht anwenden kann. Bekanntlich kann man aber für eine Näherungsberechnung $\sin \alpha = \alpha$ setzen und erhält:

$$\alpha = \frac{\pi}{198 \cdot 10^3}$$

Für α (im Gradmaß) ergibt sich

$$\frac{\pi}{198 \cdot 10^3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1^\circ}{1100}$$

in Sekunden sind das $\frac{3600''}{1100}$ oder etwa $3\frac{1}{4}$ Sekunden.

Wenn man für diesen Winkel das Vieleck V_k mit einem genügend großen k konstruiert, ist sein Umfang ungefähr ebenso lang wie der Weg von Prag nach Bratislava. So ist z.B. bereits für $k = 20$ dieser Umfang

$$\frac{2 \cdot 20 \cdot \sin 9^\circ}{\sin \alpha} = 40 \cdot 0,1564 : \frac{\pi}{198 \cdot 10^3} \approx 394000$$

was der Entfernung Prag-Bratislava ziemlich nahekommt.

Abschließend soll bemerkt werden, dass die Probleme, die wir hier in der Ebene gelöst haben, sich analog auch im Raum studieren lassen. Anstatt von einem Kreis geht man von einem senkrechten Kreiszylinder aus, wie es bereits gegen Ende des vorigen Jahrhunderts der deutsche Mathematiker G. A. Schwarz getan hat.

Die betreffenden Berechnungen und die eingehende Untersuchung dieser Aufgabe sind freilich schwieriger als die planimetrischen Beispiele, die wir in diesem Kapitel angeführt haben.

6.4 Aufgaben

6.1. Man stelle sich einfachheitshalber die Erde als eine vollkommen glatte Kugel vor; um ihren Äquator soll ein elektrisches Kabel gelegt werden. Der Draht ist bereits gelegt; er berührt den Boden, und seine Länge gleicht daher der des Äquators, d.h., sie beträgt 40000 km.

Um wieviel Meter muss man schätzungsweise diese Leitung verlängern, wenn sie an 10 cm hohen Isolatoren befestigt werden soll?

6.2. Eine Strecke AB von der Länge l ist gegeben. Sie ist in n gleiche Teile $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}B$ zu teilen, und es sind gleichseitige Dreiecke $AP_1C_1, P_1P_2C_2, P_2P_3C_3, \dots, P_{n-1}BC_n$ zu konstruieren (Bild 55).

Man berechne die Summe der Umfänge aller dieser Dreiecke. Wie hängt diese Summe von der Zahl n ab?

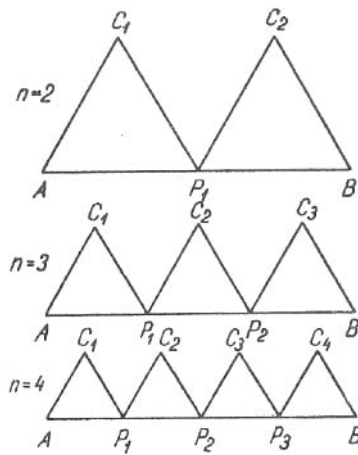


Bild 55

6.3. Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte von Dreiecken, wie sie in der vorhergehenden Aufgabe beschrieben wurden, und stellen Sie fest, wie diese Summe von der Zahl n abhängt.

*6.4. Über einer Tischplatte in der Form eines Rechtecks mit den Ecken $ABCD$ schwirrt eine Fliege. Welche Kurven beschreibt sie, wenn für ihren Schwerpunkt S unabänderlich

$$AS^3 + SC^2 = BS^2 + SC^2 \quad \text{gilt?}$$

6.5. Emil, Johann, Karl und Rudolf haben auf dem Hof Fußball gespielt und ein Fenster eingeschlagen. Als der Fall untersucht wurde, sagten sie folgendermaßen aus:

Emil: "Das Fenster hat Karl oder Rudolf eingeschlagen."

Johann: "Rudolf hat's getan."

Karl: "Ich habe das Fenster nicht eingeschlagen."

Rudolf: "Ich auch nicht."

Ihr Lehrer, der die Jungen gut kannte, sagte: "Drei von ihnen sprechen immer die Wahrheit." Wer hat also das Fenster eingeschlagen?

6.6. Der Mensch hat höchstens 150000 Haare auf dem Kopf. Gibt es in Prag wenigstens zwei Menschen, die die gleiche Anzahl Haare haben? (Prag hat ungefähr eine Million Einwohner.)

6.7. In einer Klasse sind 40 Schüler. Kann man ohne eingehendere Kenntnis behaupten, dass es unter ihnen wenigstens vier Schüler gibt, die in demselben Monat geboren wurden? Könnte man sich dafür verbürgen, dass es in dieser Klasse fünf im gleichen Monat geborene Schüler gibt?

6.8. Ein Junge hatte sieben scheinbar ganz gleiche Knöpfe, von denen je zwei verschiedene Massen hatten. Es ist zu zeigen, wie man auf einer gleicharmigen Waage ohne Wägestücke den schwersten Knopf finden kann. Reicht ein sechsmaliges Abwiegen?

6.9. Auf dem Tisch liegen drei scheinbar gleiche Würfel, von denen einer (der falsche) sich von den übrigen durch seine Masse unterscheidet. Man weiß jedoch nicht, ob er schwerer oder leichter als die übrigen zwei Würfel ist. Man hat eine gleicharmige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung und darf höchstens zweimal wiegen. Kann man dabei

den falschen Würfel finden?

*6.10. Auf dem Tisch liegen sieben scheinbar gleiche Würfel, deren einer (der falsche) sich von dem Rest durch seine Masse unterscheidet. Analog der Aufgabe 6.9. ist der falsche Würfel herauszufinden, wenn man höchstens dreimal wiegen kann.²⁰

6.11. Sonderbarerweise greift die Mathematik auch in die Theorie der Literatur ein, wie wir in folgender Aufgabe zeigen wollen.

Der tschechische Dichter Jaroslav Vrchlický hat die lyrische Form der provenzalischen Dichtung, die sogenannte Sestine, in die tschechische Poesie eingeführt. In Deutschland wurde sie bereits im Zeitalter des Barocks und im 19. Jahrhundert vor allem von Friedrich Rückert gepflegt.

Die Sestine war ein reimloses Gedicht in sechs Strophen mit einem dreizeiligen Geleit. Jede Strophe hatte sechs Verse; wenn man die Wörter am Versende in der ersten Strophe der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet, hat die zweite Strophe am Versende dieselben Wörter, doch in der Reihenfolge 6, 1, 5, 2, 4, 3; analog findet man die Reihenfolge der Schlusswörter in den folgenden Strophen.

Das Gesamtschema einer Sestine ist also:

1, 2, 3, 4, 5, 6; 6, 1, 5, 2, 4, 3; 3, 6, 4, 1, 2, 5;
5, 3, 2, 6, 1, 4; 4, 5, 1, 3, 6, 2; 2, 4, 6, 5, 3, 1

Wenn man bei der Reihenfolge 2, 4, 6, 5, 3, 1 in der sechsten Strophe wieder dieselbe Abwandlung anwendet, kehrt man zur ursprünglichen Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6 zurück (eine siebente Strophe gibt es jedoch in der Sestine nicht).

Dem Leser wird nun die Frage vorgelegt: Es ist ein "Sestinenschema" zusammenzustellen, das in jeder Strophe acht (bzw. zehn) Verse aufweist. Wieviel Strophen hat eine solche "Sestine"?

²⁰Die Aufgaben 6.9. und 6.10. zeigen, wie wichtig es ist, an die Lösung der verschiedenen Aufgaben mit Bedacht heranzutreten. Die sieben Würfel, von denen in der Aufgabe 6.10. die Rede ist, kann man durch Abwiegen von je zwei 21mal vergleichen, eine logische Überlegung verkürzt diesen Prozess zu dreimaligem Abwiegen.

7 Keine Angst vor Textaufgaben!

7.1 Was ist eine eingekleidete Aufgabe?

Es besteht kein Zweifel darüber, dass uns unsere Umgebung eine Reihe Anregungen zu mathematischen Problemen bietet. So entstehen wichtige und weniger wichtige, schwierige und einfache Aufgaben, die in Lehrbüchern Textaufgaben heißen. Es gibt eine ganze Lehre von den Textaufgaben, in der diese in Gruppen (Typen) geteilt werden, teils nach dem Inhalt, teils nach der Art der Auflösung. Mit dieser Einteilung der Textaufgaben wollen wir uns hier nicht weiter befassen; wir müssen jedoch beachten, dass Textaufgaben grundsätzlich in zwei Gruppen zerfallen.

Die erste Gruppe umfasst Textaufgaben, die eine unmittelbare Verbindung zu technischen und wirtschaftlichen Bereichen, Produktion, Verkehr, Finanzwesen u.ä. haben; diese Aufgaben werden Aufgaben mit polytechnischen Motiven genannt; in der zweiten Gruppe finden wir alle übrigen:

verschiedene Spiele, wie das Erraten des Alters bestimmter Personen, der Erbschaft, einer gedachten Zahl unter gegebenen Bedingungen u. a. In diesem Kapitel wollen wir uns mit der ersten Gruppe beschäftigen.

Jede der Aufgaben besteht aus den Bedingungen und der Fragestellung. Unter den Bedingungen versteht man Zahlenangaben und die Beschreibung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit. In den Aufgaben mit polytechnischen Motiven verlangt man, dass die Frage wirklichkeitsnah formuliert ist und dass der beschriebene Vorgang realisierbar und sinnvoll ist.

Wir wollen als Beispiel eine Aufgabe anführen, die diese Forderung nicht erfüllt, obwohl sie scheinbar "der Praxis" entnommen ist.

Ein Wasserbehälter, der die Form eines hohlen Quaders und einen Inhalt von 100 hl hat, füllt sich durch Zufluss in $8\frac{3}{4}$ Stunden. Im Boden ist eine Öffnung, durch die sich der (volle) Behälter in 11 Stunden leert.

Wann wird der Behälter voll, wenn man gleichzeitig das Zufluss- und Ausflussrohr öffnet?

Diese Aufgabe kommt (mit kleinen Abweichungen) bereits in mathematischen Sammlungen des vorigen Jahrhunderts vor und wird gewöhnlich folgendermaßen gelöst:

Man berechnet zuerst, wieviel Wasser in einer Stunde zugeführt wird. Man dividiert

$$100 \text{ hl} : 8\frac{3}{4} \text{ h} = 100 \text{ hl} : \frac{35}{4} \text{ h} = \frac{80 \text{ hl}}{7 \text{ h}} = 11\frac{3}{7} \text{ hl/h}$$

Ähnlich berechnet man, wieviel Wasser in einer Stunde ausfließt:

$$100 \text{ hl} : 11 \text{ h} = 9\frac{1}{11} \text{ hl/h}$$

In jeder Stunde verbleibt also im Behälter die Zuflussmenge

$$11\frac{3}{7} \text{ hl/h} - 9\frac{1}{11} \text{ hl/h} = 2\frac{26}{77} \text{ hl/h}$$

Der ganze Behälter füllt sich also in der Zeit

$$100 \text{ hl} : 2\frac{26}{77} \text{ hl/h} = \frac{7700 \text{ h}}{180} = \frac{385 \text{ h}}{9} = 42\frac{7}{9} \text{ h}$$

Die Aufgabe und ihre Lösung weisen zwei bedeutende Mängel auf (auf die unlängst der slowakische Mathematiker Pavel Bartoš hingewiesen hat).

Erstens hat die Handlung, von der die Rede ist, keinen praktischen Sinn, und zweitens - kommt es zu dem Resultat, mit dem die Aufgabe rechnet, gar nicht. Der wirkliche Behälter, von dem in den Bedingungen der Aufgabe gesprochen wird, würde sich bei "gleichzeitigem Öffnen des Zufluss- und Ausflussrohrs niemals füllen.

Bei der Lösung hat man nämlich eine wichtige physikalische Erkenntnis außer acht gelassen: Das Wasser fließt um so schneller aus dem Behälter, je voller er ist (genauer beschreibt die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit die sogenannte Torricellische Formel). Davon wird das Endresultat wesentlich beeinflusst.²¹

Die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen den gegebenen Angaben, zwischen der Frage und den Angaben, und die Entscheidung, welches Rechenverfahren zur Beantwortung der gestellten Frage führt, sind einzelne Etappen, die man bei der Lösung etwas komplizierter Textaufgaben überwinden muss.

Das verlangt meist unsere ganze Aufmerksamkeit, unseren ganzen Scharfsinn und das kritische Erfassen sämtlicher Details der Aufgabe. Wir können uns die in der Praxis auftretenden Probleme nicht "aussuchen"; nur in einigen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen werden manchmal die Probleme so verteilt, dass man bereits auf den ersten Blick sieht, wie die Aufgabe zu lösen ist.

Je schwieriger eine der Praxis entnommene Aufgabe ist, desto wichtiger wird gewöhnlich ihre Lösung für die Wirtschaft oder Technik sein. Viele Verbesserungen in Technik und Produktion sind deshalb zustande gekommen, weil ein schwieriges mathematisches Problem gelöst werden konnte.

Die in dieses letzte Kapitel eingereihten Aufgaben beweisen, wie auch scheinbar alltägliche Erscheinungen, die uns umgeben, Anlass zu ernsthaften Aufgabenstellungen bieten können.

7.2 Wir verpacken Streichholzschachteln

Eine Streichholzschachtel hat die Seiten $a = 17 \text{ mm}$, $b = 37 \text{ mm}$, $c = 52 \text{ mm}$. Es ist eine Zehnschachtelpackung zu entwerfen, für die möglichst wenig Einschlagpapier verbraucht wird.

Eine Zehnschachtelpackung hat die Form eines Quaders. Jeder Leser hat eine solche Packung schon in der Hand gehabt, so dass er weiß, wie die Schachteln darin geordnet sind (je zwei Nachbarschachteln berühren sich mit den entsprechenden kongruenten Wänden). Man bezeichne die Seiten der Packung mit A , B , C ; dabei liegen x a -Längen der Kante (der Länge) A an (es gilt, dass $A = a \cdot x$), y b -Längen der Kante B

²¹Die Lösung, die die Torricellische Formel berücksichtigt ist mathematisch viel komplizierter; daher ist sie hier nicht angeführt.

($B = b \cdot y$) und z c -Längen der Kante C ($C = c \cdot z$).

Das Volumen der ganzen Packung ist $ABC = abxyz$; da abc das Volumen einer Schachtel bezeichnet, gibt das Produkt zu $x \cdot y \cdot z$ die Anzahl der Schachteln in der Packung an, also $x \cdot y \cdot z = 10$. Da x, y, z nur ganze positive Zahlen sein können, gibt es neun Möglichkeiten, die aus der folgenden Tabelle ersichtlich sind:

Tabelle V	x	1	1	10	1	1	2	2	5	5
	y	1	10	1	2	5	1	5	1	2
	z	10	1	1	5	2	5	1	2	1

Der Papierverbrauch für eine Packung ist durch die Oberflächengröße des aus zehn Schachteln bestehenden Quaders (abgesehen vom Randeinschlag) ausgedrückt. Die Oberfläche des Quaders ist

$$2AB + 2AC + 2BC = 2(abxy + acxz + bcyz)$$

Da die Oberfläche möglichst klein sein soll, muss auch die Zahl $W = abxy + acxz + bcyz$ möglichst klein sein.

Man berechne die Zahl W in den angegebenen neun Fällen:

Für $x = 1, y = 1, z = 10$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 1 \cdot 1 + 17 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 10 + 37 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 10 = 629 + 8840 + 19240 = 28709$$

Für $x = 1, y = 10, z = 1$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 1 \cdot 10 + 17 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 1 + 37 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 1 = 6290 + 884 + 19240 = 26414$$

Für $x = 10, y = 1, z = 1$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 10 \cdot 1 + 17 \cdot 52 \cdot 10 \cdot 1 + 37 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 1 = 6290 + 8840 + 1924 = 17054$$

Für $x = 1, y = 2, z = 5$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 1 \cdot 2 + 17 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 5 + 37 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 5 = 1258 + 4420 + 19240 = 24918$$

Für $x = 1, y = 5, z = 2$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 1 \cdot 5 + 17 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 2 + 37 \cdot 52 \cdot 5 \cdot 2 = 3145 + 1768 + 19240 = 24153$$

Für $x = 2, y = 1, z = 5$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 1 + 17 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 5 + 37 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 5 = 1258 + 8840 + 9620 = 19718$$

Für $x = 2, y = 5, z = 1$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 5 + 17 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 1 + 37 \cdot 52 \cdot 5 \cdot 1 = 6290 + 1768 + 9620 = 17678$$

Für $x = 5, y = 1, z = 2$ ist

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 1 + 17 \cdot 52 \cdot 5 \cdot 2 + 37 \cdot 52 \cdot 1 \cdot 2 = 3145 + 8840 + 3848 = 15833$$

Für $x = 5, y = 2, z = 1$ ist schließlich

$$W = 17 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 2 + 17 \cdot 52 \cdot 5 \cdot 1 + 37 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 1 = 6290 + 4420 + 3848 = 14558$$

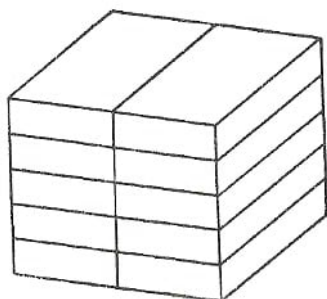


Bild 56

Wie ersichtlich, ist das Resultat $W = 14558$, das wir als letztes ermittelt haben, kleiner als alle vorangehenden Resultate. Auf diese Weise haben wir also die ökonomischste Packung gefunden.

Der Leser kann sich überzeugen, dass die bei uns verkauften Streichhölzer wirklich so verpackt sind, wie es Bild 56 veranschaulicht.

Diese Packung hat freilich (abgesehen von dem gerade ermittelten Mindestverbrauch an Papier) noch eine Reihe anderer Vorteile (die Oberfläche ist verhältnismäßig reißfest u.ä.).

7.3 Wir mischen Flüssigkeiten

In Physik, Chemie und täglicher Praxis begegnet man oft Aufgaben, nach denen bestimmte Mengen verschiedener Stoffe zu mischen sind. Es wurden verschiedene Rechenregeln zur Lösung solcher Aufgaben erdacht, die manchmal unter dem Sammelnamen "Mischungsrechnung" erscheinen.

Für den Studierenden ist es jedoch besser, wenn er jede Aufgabe selbständig löst. Eine Rechenregel oder -anweisung kann man leicht vergessen oder verlieren, während man eine Aufgabe, die man bereits einmal selbständig gelöst hat, auch nach längerer Zeit wieder lösen kann.

Nehmen wir uns folgendes Beispiel vor:

Wie bekannt, vermischen sich Alkohol und Wasser in beliebigem Verhältnis. Einen wievielprozentigen Alkohol bekommt man, wenn man 300 g vierzigprozentigen und 700 g siebzigprozentigen Alkohol vermischt?

Man vergegenwärtige sich zunächst, dass 40prozentiger Alkohol 40 % reinen Alkohol und 60 % Wasser enthält. Die erste Lösung (300 g) enthält also 120 g reinen Alkohol und 180 g Wasser. Die zweite Lösung ist 70prozentig, enthält also 70 % reinen Alkohol und 30 % Wasser. In 700 g sind also 490 g reiner Alkohol und 210 g Wasser enthalten.

Wenn man beide Alkohollösungen mischt, erhält man $300 \text{ g} + 700 \text{ g} = 1000 \text{ g}$ Lösung, in der $120 \text{ g} + 490 \text{ g} = 610 \text{ g}$ reiner Alkohol und $180 \text{ g} + 210 \text{ g} = 390 \text{ g}$ Wasser enthalten sind.

Nun heißt es, die Lösungszusammensetzung in Prozenten ausdrücken. Da 1 % von 1000 g 10 g sind, sind 610 g gerade 61 % der Gesamtmasse, so dass der gemischte Alkohol 61prozentig ist.

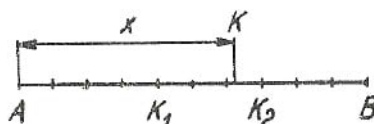


Bild 57

Dieses Beispiel lässt sich durch ein interessantes Diagramm veranschaulichen (Bild 57). Man wähle die Strecke AB , deren Länge gleich 1 ist. Der Punkt A soll reines Wasser, der Punkt B reinen Alkohol bezeichnen.

Die a % Wasser und b % Alkohol enthaltende Lösung (wobei $a + b = 100$ ist) kann man durch einen bestimmten Punkt K auf der Strecke AB folgendermaßen veranschaulichen:

Wir stellen uns A als einen sehr kleinen Gegenstand (den sogenannten "Massenpunkt") vor, der eine Masse von a Einheiten (z.B. Gramm) verkörpert, und sehen in B einen Massenpunkt von b Einheiten (Gramm); man findet dann den Punkt K als Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt (im physikalischen Sinne des Wortes) dieses Systems zweier Massenpunkte.²²

Es lässt sich auch sagen, dass die Strecke AK der Massenanteil ist, der in der Lösung auf Alkohol, und die Strecke KB der Massenanteil, der auf Wasser entfällt. Umgekehrt stellt jeder Punkt K auf der Strecke AB eine bestimmte Lösung von Wasser und Alkohol dar, deren Verhältnis sich aus dem Diagramm leicht herauslesen lässt.

Wenn man also z.B. 40prozentigen Alkohol (unser erster Fall) darstellen soll, findet man auf der Strecke AB den Punkt K_1 , indem AK_1 10% der Streckengröße AB gleich ist. Der 70prozentige Alkohol ist dann auf demselben Bild durch den Punkt K_2 dargestellt. Der Übersicht halber ist die Strecke AB in Bild 57 in zehn Teile zerlegt, wobei jeder Teil 10 % bedeutet.

Man stelle sich nun K_1 als einen Massenpunkt von 300 g (Masse der ersten Lösung) und K_2 als einen Massenpunkt von 700 g (Masse der zweiten Lösung) vor.

In der Physik lernt man, dass ein solches System durch einen einzigen Massenpunkt K von $300 \text{ g} + 700 \text{ g} = 1000 \text{ g}$ ersetzt werden kann; die Lage des Punktes K innerhalb der Strecke K_1K_2 findet man ebenso wie die des Schwerpunktes, es gilt daher

$$KK_1 \cdot 300 = KK_2 \cdot 700$$

Wenn $AK = x$, dann gilt $KK_1 = x - 0,4$, $KK_2 = 0,7 - x$, so dass man die Gleichung

$$(x - 0,4) \cdot 300 = (0,7 - x) \cdot 700$$

erhält. Daraus folgt:

$$3(x - 0,4) = 7(0,7 - x)$$

$$3x - 1,2 = 4,9 - 7x$$

$$10x = 6,1$$

$$x = 0,61 = 61\%$$

Auf diese Weise haben wir also die Zusammensetzung des durch Vermischen entstandenen Alkohols berechnet (vgl. die vorangehende Lösung). Es lässt sich beweisen, dass das angeführte Diagramm für zwei beliebige Lösungen verwendbar ist.

²²In der Physik versteht man unter dem Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Systems der zwei Massenpunkte A, B den auf der Strecke AB liegenden Punkt K , wobei das Produkt der Entfernung KA und der Masse a dem Produkt der Entfernung KB und der Masse b gleich ist, also $KA \cdot a = KB \cdot b$.

7.4 Ein Transportproblem

Unsere Transportunternehmen haben verantwortliche Aufgaben bei der Verteilung der Rohstoffe zu lösen, mit denen Bergwerke und andere Fundstätten die Betriebe beliefern. Man stelle sich eine Landkarte vor, auf der einige Gruben und einige Industriebetriebe eingezeichnet sind. Die Betriebe beziehen aus diesen Gruben einen Rohstoff (z.B. Kohle) und verbrauchen gerade so viel, wie in den Gruben gefördert wird.

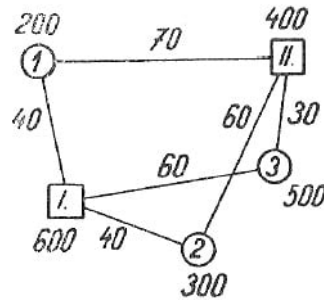


Bild 58

Sollte man nun einen Verteilungsplan zusammenstellen, dann würde man die Rohstoffverteilung möglichst ökonomisch gestalten; die Kohle darf, um Betriebsstoffe zu sparen und die Transportkosten niedrig zu halten, nicht unnütz nach entlegenen Verbrauchsstätten befördert werden.

In Bild 58 sind drei Bergwerke durch Ringe und zwei Industriebetriebe durch Quadrate dargestellt. Die Zahlen bei den Ringen bedeuten die geförderte Menge in Tonnen (für einen bestimmten Zeitabschnitt), und bei den Quadraten ist für die gleiche Zeit der Verbrauch der Fabriken bezeichnet.

Man sieht, dass der Gesamtabbau der drei Gruben $200 + 300 + 500$ dem Gesamtverbrauch beider Fabriken $600 + 400$ gleich ist. Auf dem Plan sind schematisch auch die möglichen Transportwege und die zugehörigen Entfernungen (in Kilometern) eingezeichnet. Wir wollen für dieses Gebiet den wirtschaftlichsten Verteilungsplan entwerfen.

Man bezeichne mit x_{11} die Fracht, die nach diesem Entwurf aus der ersten Grube in den ersten Betrieb befördert wird, x_{12} ist die aus dem ersten Bergwerk in die zweite Fabrik beförderte Fracht usw.

Die Summe $x_{11} + x_{12}$ entspricht der Gesamtproduktion der ersten Grube, also $x_{11} + x_{12} = 200$.

Die Summe $x_{11} + x_{21} + x_{31}$ ist dem Kohlenverbrauch in der ersten Fabrik gleich, also $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600$. So kann man folgendes Gleichungssystem zusammenstellen:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} &= 200 \\
 x_{21} + x_{22} &= 300 \\
 x_{31} + x_{32} &= 500 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 600 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 400
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dieses System enthält fünf Gleichungen mit sechs Unbekannten. Wir suchen jedoch nicht alle Lösungen dieses Systems, sondern nur solche, in denen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{32}$ eine

positive Zahl oder gleich Null ist. Überdies wünschen wir, dass der Ausdruck

$$W = 40x_{11} + 70x_{12} + 40x_{21} + 60x_{22} + 60x_{31} + 30x_{32}$$

möglichst klein ist. Wenn m der Preis in Mark ist, den der Transport von 1 t über eine Entfernung von 1 km kostet, dann bezeichnet z.B. $40x_{11} \cdot m$ die Transportkosten für x_{11} Tonnen aus der ersten Grube in die erste Fabrik, also ist $W \cdot m$ der Ausdruck für die gesamten Transportkosten. Darum bemühen wir uns, $W \cdot m$ (also auch W) möglichst klein zu gestalten.

Dem Ausdruck W geben wir folgende Form:

$$W = 40(x_{11} + x_{12}) + 30x_{12} + 40(x_{21} + x_{22}) + 20x_{22} + 60(x_{31} + x_{32}) - 30x_{32}$$

Setzt man für die Klammerausdrücke die Werte des Gleichungssystems (1) ein, so erhält man die Gleichung

$$W = 40 \cdot 200 + 30x_{12} + 40 \cdot 300 + 20x_{22} + 60 \cdot 500 - 30x_{32}$$

Aus der letzten Gleichung des Systems (1) folgt

$$x_{32} = 400 - x_{12} - x_{22}$$

so dass man W weiter vereinfachen kann:

$$\begin{aligned} W &= 8000 + 30x_{12} + 12000 + 20x_{22} + 30000 - 30(400 - x_{12} - x_{22}) \\ &= 50000 + 30x_{12} + 20x_{22} - 12000 + 30x_{12} + 30x_{22} = 38000 + 60x_{12} + 50x_{22} \end{aligned}$$

Der Ausdruck W wird also dann am kleinsten sein, wenn $x_{12} = 0$ und $x_{22} = 0$ ist; wir müssen uns allerdings noch davon überzeugen, ob sich für diese Werte aus dem System (1) die Zahlen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{32}$ als positiv (oder gleich Null) ergeben. Dies ist wirklich der Fall:

$$x_{11} = 200, \quad x_{21} = 300, \quad x_{31} = 100, \quad x_{32} = 400$$

Der ökonomischste Verteilungsplan, den wir gerade gefunden haben, ist in Bild 59 veranschaulicht (die Zahlen bezeichnen hier im Gegensatz zu Bild 58 die zu transportierende Kohlenmenge).

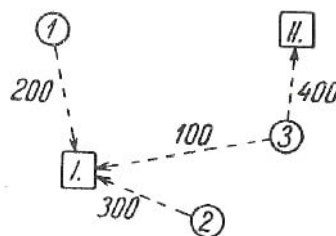


Bild 59

Wenn der Produktions- und Verbrauchsplan von Rohstoffen komplizierter ist als in Bild 58 angegeben, reicht zur rechnerischen Lösung des Transportproblems das schulmäßige, in diesem Kapitel besprochene Verfahren nicht aus.

Über Transport- und Verkehrsprobleme wurde bereits eine umfangreiche Literatur herausgegeben, in der sehr anspruchsvolle, zur Lösung führende Methoden beschrieben sind. Es muss erwähnt werden, dass in den letzten Jahren auf diesem Gebiet auch einige tschechoslowakische Mathematiker bedeutsame Erfolge erzielt haben.

7.5 Das arithmetische Mittel

Es ist nicht immer leicht, eine große Gruppe Zahlenangaben, die sich bei einer Untersuchung oder einem Experiment angehäuft haben, übersichtlich zu machen.

Dem Gedächtnis können verschiedene Diagramme und Schemas, aber auch Übersichtstafeln und einige charakteristische Rechenausdrücke zu Hilfe kommen. Eines der bekanntesten Verfahren ist das sogenannte arithmetische Mittel, dem unsere weitere Aufmerksamkeit gelten soll.

Die statistische Auswertung hat insbesondere im Verlauf des letzten Jahrzehnte - auch in unseren Schulen Einzug gehalten: Die Schüler und Studenten verfolgen ihren Fortschritt in den einzelnen Semestern, der Fortgang in verschiedenen Fächern wird untersucht, und die Lehrer beobachten die Zahl der versäumten Unterrichtsstunde für die vergangenen Abschnitte des Schuljahrs.

Die Auswertung der Ergebnisse bei solchem Wettbewerb stützt sich vorwiegend auf die Berechnung des arithmetischen Mittels. Auch in der technischen Literatur ist das arithmetische Mittel oft bedeutungsvoll:

So lesen wir z.B., dass eine Glühlampe durchschnittlich eine Lebensdauer von 1000 Stunden hat, dass der jährliche Durchschnittsverbrauch von Kohle für einen Haushalt 25 dt beträgt usw.

Man stelle sich vor, dass n Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ gegeben sind. Unter dem arithmetischen Mittel dieser Zahlen versteht man dann die Zahl

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

Wir wollen diese Definition an einem Beispiel erläutern:

Eine Gruppe Schüler eines Interessenzirkels hatte die Dicke einer Metallplatte zu messen; um ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, verwendeten die Schüler eine Messschraube und wiederholten die Messung 10mal mit folgenden Ergebnissen (in Millimetern):

2, 10; 2, 15; 2, 13; 2, 21; 2, 16; 2, 17; 2, 18; 2, 12; 2, 15; 2, 13.

Wie man sieht, weichen die gewonnenen Resultate etwas voneinander ab; wir wollen daher das arithmetische Mittel dieser Werte berechnen. Zu diesem Zweck muss man zunächst

$$2, 10 + 2, 15 + 2, 13 + 2, 21 + 2, 16 + 2, 17 + 2, 18 + 2, 12 + 2, 15 + 2, 13 = 21, 50$$

addieren und dann die Division $21,50 : 10 = 2,15$ durchführen. Das gesuchte arithmetische Mittel ist also $x = 2,15$.

Die Erfahrungen vieler Praktiker zeigen (neben theoretischen Erwägungen), dass man sich der wirklichen (gesuchten) Dicke der Platte am meisten gerade durch dieses arithmetische Mittel nähert. Die Schüler geben daher am Ende des Experiments an, dass die Platte 2,15 mm dick ist.

Wir wollen nun einige Eigenschaften des arithmetischen Mittels kennenlernen. Man betrachte wieder die gegebenen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ die das arithmetische Mittel zu haben, und bilde die Differenzen

$$x - x_1, \quad x - x_2, \quad x - x_3, \quad \dots, \quad x - x_n$$

Diese Differenzen nennt man Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Man berechnet leicht, dass die Summe der Abweichungen vom arithmetischen Mittel gleich Null ist. Es gilt nämlich

$$(x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_3) + \dots + (x - x_n) = nx - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

Aus der Formel (1) folgt $nx = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$, so dass man nach weiterer Vereinfachung

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = 0$$

erhält. Damit ist die gesuchte Summe der Abweichungen berechnet.

Kehren wir wieder zu jenen Zahlen zurück, die die Schülergruppe bei der Messung der Metallplatte gefunden hat. Die Abweichungen vom arithmetischen Mittel sind hier der Reihe nach: 0,05; 0; 0,02; -0,06; -0,01; -0,02; -0,03; 0,03; 0; 0,02.

Die Summe der positiven Abweichungen ist $0,05 + 0,02 + 0,03 + 0,02 = 0,12$, die der negativen $-0,06 - 0,01 - 0,02 - 0,03 = -0,12$, so dass die Summe aller Abweichungen vom arithmetischen Mittel wirklich gleich Null ist. Das ist zugleich eine Kontrolle der Berechnung der Zahl x .

Eine weitere Eigenschaft des arithmetischen Mittels lässt sich wieder durch eine einfache Berechnung ableiten. Man geht von den gegebenen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ aus und vermindert jede von ihnen um dieselbe Zahl p . Auf diese Weise bekommt man n neue Zahlen:

$$x_1 - p, \quad x_2 - p, \quad x_3 - p, \quad \dots \quad x_n - p$$

Um ihr arithmetisches Mittel zu berechnen, addiert man zunächst

$$(x_1 - p) + (x_2 - p) + (x_3 - p) + \dots + (x_n - p) = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - np = nx - np$$

und dividiert dann durch die Zahl n ; man erhält

$$\frac{nx - np}{n} = \frac{n(x - p)}{n} = x - p$$

Das abgeleitete Resultat kann dann in diesem Satz zusammengefasst werden:

Wenn jede der gegebenen Zahlen um dieselbe Zahl p vermindert wird, wird auch das arithmetische Mittel dieser Zahlen um die Zahl p vermindert.

Wir wollen an einem numerischen Beispiel die Nützlichkeit dieses Satzes bei praktischen Berechnungen zeigen. Wenn wir z.B. das arithmetische Mittel der zehn Zahlen bestimmen sollen, mit denen wir uns bereits zweimal beschäftigt haben, ist es von Vorteil, so vorzugehen:

Wir suchen die kleinste der Zahlen heraus; es ist die Zahl 2,10. Diese Zahl subtrahieren wir von allen gemessenen Werten, so dass wir folgende Resultate bekommen:

$$0; 0,05; 0,03; 0,11; 0,06; 0,07; 0,08; 0,02; 0,05; 0,03;$$

von diesen Zahlen finden wir dann sehr leicht (auch im Kopf) das arithmetische Mittel:

$$\frac{0 + 0,05 + 0,03 + 0,11 + 0,06 + 0,07 + 0,08 + 0,02 + 0,05 + 0,03}{10} = \frac{0,50}{10} = 0,05$$

Das arithmetische Mittel der ursprünglichen zehn Zahlen ist also $2,10 + 0,05 = 2,15$, was natürlich mit unserer vorhergehenden Berechnung übereinstimmt.

Wir überlassen es dem Leser, sich von der weiteren Eigenschaft des arithmetischen Mittels zu überzeugen (analog derjenigen, die wir gerade besprochen haben); diese Eigenschaft ist in dem Satz ausgedrückt:

Wenn man jede der gegebenen Zahlen mit derselben Zahl p multipliziert, wird auch das arithmetische Mittel dieser Zahlen mit der Zahl p multipliziert.

Auch diese Eigenschaft lässt sich vorteilhaft ausnutzen. Wenn man z.B. das arithmetische Mittel einiger Dezimalzahlen (wie es in unserem numerischen Beispiel der Fall war) berechnen soll, kann man durch Weglassen des Dezimalkommas die Aufgabe in eine mit ganzen Zahlen umwandeln.

Alle angeführten Eigenschaften des arithmetischen Mittels, weisen darauf hin, dass man mit diesem Ausdruck leicht rechnet. Übrigens geht aus der Formel (1) hervor, dass man das arithmetische Mittel an Hand von nur zwei Rechnungsarten (Addieren und Dividieren) berechnen kann. Das hat große Bedeutung; denn diese Rechnungsarten werden dann leicht, z.B. von den üblichen Rechenmaschinen, durchgeführt.

Das arithmetische Mittel hat jedoch auch Mängel. Einer von ihnen ist der Umstand, dass es von einem zufälligen Fehler ziemlich stark beeinflusst wird. Wir wollen das an einem Beispiel deutlich machen.

Setzen Wir voraus, dass die Schüler bei ihrer letzten Messung einen "groben" Fehler begangen und. das Resultat 1,93 mm erhalten hätten. Dann wäre das arithmetische Mittel 2,13 mm, also um ungefähr 1% kleiner gewesen als der im Text berechnete Wert.

In der statistischen Praxis wird jedoch auch der sogenannte Median (aus dem lateinischen Eigenschaftswort *medius* = der mittlere) gebraucht, der ähnliche Eigenschaften wie das arithmetische Mittel hat, auf große zufällige Fehler jedoch nicht so stark reagiert. Die Berechnung des Medians wird folgendermaßen durchgeführt:

Wenn n Zahlen gegeben sind, ordnen wir sie zunächst nach der Größe (von der kleinsten zu der größten). Bei ungeradem n ist der gesuchte Median die mittlere der so geordneten Zahlen. Wenn n eine gerade Zahl ist, entspricht der gesuchte Median dem arithmetischen Mittel der zwei mittleren Zahlen.

Wir wollen den Median für die Zahlengruppe unseres numerischen Beispiels heraussuchen. Zunächst müssen wir die gemessenen Werte nach ihrer Größe ordnen 2,10; 2,12; 2,13; 2,13; 2,15; 2,15; 2,16; 2,17; 2,18; 2,21.

Die zwei mittleren Glieder sind 2,15 und 2,15, ihr arithmetisches Mittel ist 2,15. Das ist also der gesuchte Median. Wie man sieht, würde der grobe Fehler (1,93 mm), den wir oben erwähnt haben, auf den Median keinen Einfluss haben.²³

Wenn die Anzahl der Werte, mit denen man arbeitet, nicht zu groß ist, findet man den Median verhältnismäßig leicht. Der Median hat aber auch eine Reihe Nachteile, mit denen sich der Leser in den Lehrbüchern der mathematischen Statistik bekannt machen kann. Seine Verwendung ist daher im ganzen beschränkt, und die Aufgaben, von denen wir in diesem Kapitel gesprochen haben, bleiben berechtigterweise dem arithmetischen Mittel vorbehalten.

7.6 Aufgaben

7.1. In welchem Verhältnis muss man 40prozentigen mit 70prozentigem Alkohol vermischen, um 50prozentigen Alkohol zu bekommen?

*7.2. Das Schriftmetall (Letternmetall), mit dem die Druckereien arbeiten, ist eine Legierung von drei Metallen - Antimon, Zinn und Blei. Je nach ihrem Verhältnis bekommt man verschiedene Schriftmetallarten, die sich durch Schmelzpunkt, Härte, Abnutzung beim Druck u.ä. voneinander unterscheiden.

Aus zwei bereits im Druck verwendeten Schriftmetallarten soll ein neues Schriftmetall hergestellt werden. Die erste Art enthält 20 % Antimon, 5 % Zinn und 75 % Blei, die andere 14 % Antimon, 7 % Zinn und 79 % Blei. Die Arten vermischt man im Verhältnis 2 : 3. Welche Zusammensetzung hat das neue Schriftmetall?

7.3. Zwischen zwei Städten A , B verkehren zwei Autobusse, die auf der Strecke eine einzige Haltestelle in der Gemeinde C haben. Das Verhältnis der Entfernungen der Orte A , C und B , C ist 4 : 5. Beide Autobusse fahren gleichzeitig aus A und B in entgegengesetzter Richtung und erreichen die Endstation auch zu gleicher Zeit nach $1\frac{1}{2}$ Stunden; überdies hält jeder Autobus 10 Minuten in der Gemeinde C . Es ist festzustellen, an welcher Stelle der Strecke sich die Autobusse treffen.

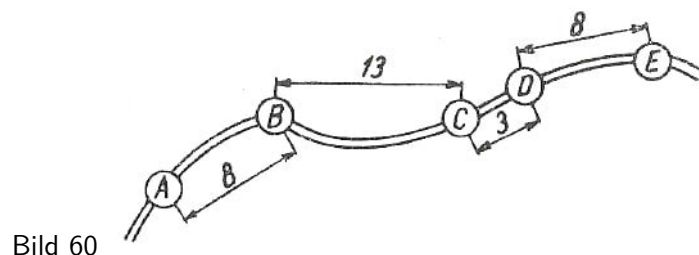


Bild 60

7.4. An einer Landstraße liegen fünf Gemeinden (man bezeichne sie der Reihe nach mit A , B , C , D , E), die voneinander 8 km, 13 km, 3 km und 8 km entfernt sind (Bild 60). In einer dieser Gemeinden soll ein Warenlager eingerichtet werden, das in alle fünf Gemeinden liefert. Welche Gemeinde ist als Standort des Lagers zu wählen, wenn man weiß, dass die Gemeinde A 450, die Gemeinde B 600, die Gemeinde C 150, die Gemeinde

²³Der Umstand, dass der Median hier mit dem arithmetischen Mittel übereinstimmt, ist nur ein Zufall. In vielen Fällen haben wir es mit zwei voneinander verschiedenen Zahlen zu tun, deren Unterschied jedoch gewöhnlich klein ist.

D 900 und die Gemeinde E 400 Einwohner hat? (Der Leser mag über die Bedeutung der Einwohnerzahl in dieser Aufgabe selbst entscheiden.)

7.5. Die Arbeiter einer Transportgesellschaft fahren ein großes Vergnügungsschiff zu einem See. Der Transport dieser schweren Fracht, die auf dem Landwege vor sich ging, hat auch bei der Jugend große Aufmerksamkeit hervorgerufen.

Kurt interessierte sich für die Länge des Schiffes, er möchte wissen, wieviel Schritte das Deck misst. Er hoffte, der Transport werde auf einige Augenblicke stocken und er werde durch Abschreiten die ungewöhnliche Fracht nachmessen können. Das Schiff bewegt sich jedoch auf der Landstraße zwar langsam, aber ohne zu halten. Kurt, der beste Mathematiker der Klasse, weiß bald Rat

Er geht zunächst am Straßenrand in der Fahrtrichtung von einem Ende des Schiffes zum anderen und stellt fest, dass er dazu 120 Schritte braucht; dann macht er kehrt und stellt fest, dass er gegen die Fahrtrichtung 30 Schritte benötigt.

Genügen schon diese zwei Angaben, die Länge des Schiffes zu berechnen? (Es sei vermerkt, dass Kurt weder die Transportgeschwindigkeit noch die seiner Schritte kennt.)

*7.6. Eine Zuckerfabrik verarbeitet in 8 Stunden ungefähr 6500 dt Zuckerrüben; der Wasserverbrauch zum Waschen beträgt annähernd 150 % der Rübenmasse. Es ist zu entscheiden, ob zum Rübenwaschen zwei Zufuhrrohre genügen, deren jede einen Durchmesser von 20 cm hat (die Wassergeschwindigkeit ist 1 m/s).

7.7. Die geförderte Steinkohle enthält 2 % Wasser. Nach einiger Zeit vergrößert sich durch Einfluss der Witterungsverhältnisse der Wassergehalt auf 13 %. Um wieviel Prozent nimmt die Masse der Kohle zu?

7.8. Fünf gleich gewandte Maurer haben eine Mauer zur Hälfte binnen 14 Tagen errichtet. Um den geplanten Termin einzuhalten, soll der restliche Teil in 6 Tagen gebaut werden. Wieviel Maurer müssen zusätzlich eingesetzt werden?

7.9. Hefte, Bücher und Kanzleipapier werden gewöhnlich in standardisierten Formaten hergestellt. Die Grundform ist ein Rechteck mit einer Fläche von 1 m^2 (dieses Format wird mit A0 bezeichnet); daraus entstehen weitere Formate A1, A2, A3, ... durch sukzessives Halbieren der Länge.

Dabei wird verlangt, dass das Verhältnis $\frac{\text{Länge}}{\text{Breite}}$ in allen Breite Rechtecken gleich bleibt (oder dass die Rechtecke einander ähnlich sind).

Berechnen Sie die Länge und die Breite für die einzelnen Formate A0, A1, A2, ...

7.10. Zwei Klassen halfen bei der Hopfenernte. Die erste, in der 31 Schüler waren, arbeitete 9 Tage und pflückte im ganzen 2242 Viertel; die andere, mit 33 Schülern, erntete in 8 Tagen 2125 Viertel; dabei hatte jedoch ein Schüler dieser Klasse nur 4 Tage gearbeitet, weil er krank war. Welche Klasse erzielte bei der Ernte die bessere Leistung?

7.11. Eine Stahllieferung wurde auf Kohlenstoffgehalt (in Prozent) untersucht. Zwanzig Proben gaben folgende Resultate:

0,06	0,07	0,07	0,07	0,09
0,08	0,06	0,09	0,08	0,07
0,08	0,08	0,08	0,06	0,08
0,06	0,10	0,06	0,13	0,11

Berechnen Sie, welche Messung vom arithmetischen Mittel am meisten abweicht.

7.12. Das Beispiel mit der Messung der Plattendicke ist durch folgende Berechnung zu ergänzen: Erheben Sie die Abweichungen vom arithmetischen Mittel in die zweite Potenz, und bestimmen Sie dann das arithmetische Mittel dieser Zahlen.

8 Lösungen der Aufgaben

1.1. a) Man schreibt auf jedes Feld des Schachbretts eine Zahl, die angibt, wieviel Züge von da aus der Springer machen kann; man bekommt dann folgendes Quadratschema:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Die gesuchte Anzahl der Züge wird durch die Summe aller Zahlen in diesem Schema ausgedrückt, d.h., durch die Zahl $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 8 + 24 + 80 + 96 + 128 = 336$. Der Springer kann also im ganzen 336 Züge ausführen.

b) Analog wie im Absatz a) stellt man fest, dass die Dame im ganzen 1456 Züge machen kann.

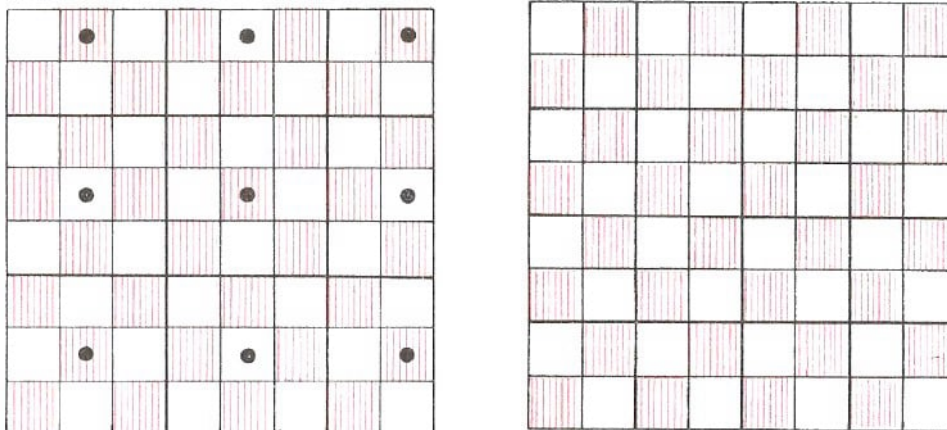


Bild 61 und 62

1.2. Es zeigt sich, dass die kleinste zur Besetzung des Schachbretts notwendige Figurenzahl 9 und die größte 16 ist. In Bild 61 ist ein Schachbrett mit 64 Feldern dargestellt; man teile es so in neun Teile, wie in Bild 61 durch die stärkeren Linien angegeben wird.²⁴

Wenn man die entstandene Zerlegung des Schachbretts näher ins Auge fasst, sieht man, dass in jedem dieser neun Teile sich (wenigstens) ein Feld finden lässt, das nur der König angreifen kann, der in demselben Teil des Schachbretts steht (in Bild 61 sind diese "inneren" Felder aller neun Teile des Schachbretts durch Punkte gekennzeichnet).

Hieraus folgt, dass es wenigstens 9 Könige sein müssen. Wenn man nun die neun Könige z.B. auf jene neun Felder stellt, die in Bild 61 gekennzeichnet sind, so sieht man,

²⁴Auf dieser Einteilung des Schachbretts beruht der ganze "Knif" der Lösung. Zur logischen Vollständigkeit der Überlegung ist es gar nicht notwendig zu beschreiben, wie man zur Lösung gelangt ist, wenn auch z.B. das Herausfinden der Zerlegung in Bild 61 ein gewisses Nachdenken erfordert.

dass in dieser Stellung jedes freie, nicht gekennzeichnete Feld (wenigstens) von einem König angegriffen ist und dass kein König einen andern bedroht.

Analog stellt man fest, dass man auf einem Schachbrett höchstens 16 Könige der gegebenen Aufgabe gemäß aufstellen kann.

In Bild 62 ist wieder ein Schachbrett skizziert und durch stärkere Linien in 16 Teile zerlegt, wobei jeder dieser Teile 4 Felder des Schachbretts enthält. Es ist leicht einzusehen, dass man auf jedes von ihnen allenfalls einen König stellen kann, wenn verlangt wird, dass kein König einen anderen bedrohe. Auf das ganze Schachbrett können auf diese Weise höchstens 16 Könige gestellt werden.

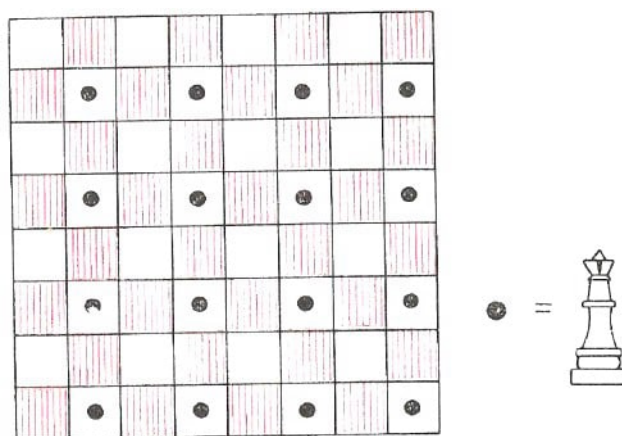


Bild 63

Wenn man nun die 16 Könige z. B. so aufstellt, wie es Bild 63 zeigt, sieht man, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Anmerkung: Es ist leicht nachzuweisen, dass die soeben erwähnten Aufstellungen der neun bzw. sechzehn Könige nicht die einzigen Lösungen der Aufgabe sind. Der Leser kann selbst herausfinden, dass sich auf einem normalen Schachbrett auch 10, 11, 12, 13, 14 oder 15 Könige so aufstellen lassen, dass jedes freie Feld wenigstens von einem König und kein König von einem anderen angegriffen wird.

1.3. Die Aufgabe hat eine Reihe von Lösungen. Die Damen kann man z.B. auf die Felder d6, e5, f4, g8, h7 stellen.

1.4. Die Damen stellt man z.B. auf die Felder c6, e3, f8, h5.

1.5. Der Spieler A kann den Sieg erzwingen, wenn er die strategischen Zahlen 5, 21, 37, 53, 69, 85 besetzt.

1.6. Wenn es auf einem Häufchen mehr Spielmarken als auf dem andern gibt, kann der Spieler A den Sieg erzwingen, wenn er vom größeren Häufchen so viele Spielmarken wegnimmt, dass beide Häufchen die gleiche Zahl an Spielmarken aufweisen.

Nach jedem Zug des Spielers B muss freilich der Spieler A so viele Spielmarken wegnehmen, dass die Häufchen wieder die gleiche Zahl enthalten. Wenn also der Spieler B mit einem Häufchen zu Ende ist, nimmt der Spieler A den Rest vom andern Häufchen und wird Sieger.

Wenn allerdings beide Häufchen vor Spielbeginn dieselbe Zahl Spielmarken aufweisen, ist der Spieler A im Nachteil. Den Sieg kann dann der Spieler B erringen, wenn er sich an die eben gegebene Weisung hält.

1.7. Wenn einer der Haufen eine größere Zahl Spielmarken als der andere hat, kann der Spieler A den Sieg erzwingen, indem er vom größeren Haufen so viel Spielmarken wegnimmt, dass die beiden Haufen gleich werden.

Diesen Grundsatz behält der Spieler A nach jedem Zug des Spielers B so lange bei, bis der Spieler B entweder alle Spielmarken eines Haufens fortnimmt oder von einem Haufen eine einzige Spielmarke übriglässt.

In beiden Fällen kann der Spieler A damit antworten, dass er seinem Gegner eine einzige Marke übriglässt.

Wenn beide Häufchen die gleiche Zahl von Spielmarken (wenigstens zwei) enthalten, ist der Spieler A im Nachteil.

Den Sieg kann dann der Spieler B erzwingen, wenn er sich nach der oben angeführten Anweisung richtet.

1.8. a) Bestimmen wir zunächst die Zahl aller möglichen Gewinne im dritten Rang. Es gewinnt der Spieler, dessen Tip sich von dem richtigen Resultat entweder dadurch unterscheidet, dass zwei Einser (an deren Stelle ein Zweier oder ein Kreuz steht) fehlen, oder dadurch, dass statt des richtigen einen Zweiers ein Einser oder ein Kreuz steht.

Die zwei Einser, die der Spieler nicht erraten hat, können an einer beliebigen der x -Stellen auftreten, was $\binom{x}{2}$ Möglichkeiten entspricht. Statt ihrer kann auf dem Ticket der Tip 2 2 oder 2 x oder x 2 oder x x stehen, was vier Möglichkeiten ergibt.

Die Anzahl der Tips im dritten Rang, der sich von dem richtigen Resultat durch zwei Einser unterscheidet, ist also

$$4 \cdot \binom{x}{2} = 4 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 2x(x-1)$$

Man berechnet die Anzahl der Tips im dritten Rang, die sich von der richtigen Lösung dadurch unterscheidet, daß der Spieler einen Zweier nicht erraten hat.

Die Zahl der Zweier im richtigen Tip ist y ; man hat also y Möglichkeiten, einen falschen Zweier zu wählen. Anstatt des Zweiers steht hier der Einser oder das Kreuz, was zwei Möglichkeiten entspricht. Man sieht also, dass die Anzahl der Tips im dritten Rang, die sich von der richtigen durch einen Zweier unterscheidet, $2y$ ist.

Die Anzahl aller möglichen Gewinne im dritten Rang ist also

$$2x(x-1) + 2y$$

b) Nun wollen wir die Anzahl aller möglichen Gewinne im vierten Rang bestimmen. Man erreicht ihn, indem man drei Einser nicht errät, oder indem ein Einser und ein Zweier fehlt, oder schließlich durch Verlust eines Kreuzes.

Drei nicht erratene Einser kann man auf $\binom{x}{3}$ fache Weise wählen; statt dessen kann auf dem Ticket eine beliebige dieser acht Möglichkeiten vorkommen:

$$222; 22x; 2x2; x22; 2xx; x2x; xx2; xxx$$

Die Anzahl der Tips mit dem Verlust von drei Einsern ist daher

$$8 \cdot \binom{x}{3} = 8 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

Man berechnet die Anzahl der Tips, die sich von der richtigen durch einen Einser und einen Zweier unterscheiden. Den Einser kann man auf x -fache, den Zweier auf y -fache Weise wählen, den Einser und den Zweier also auf xy -fache Weise verlieren.

Statt eines richtigen Einsers kann ein falscher Zweier oder ein falsches Kreuz (zwei Möglichkeiten) und statt eines richtigen Zweiers ein Einser oder ein Kreuz (zwei Möglichkeiten) stehen. Wenn man diese Fälle kombiniert, erhält man $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, so dass die Anzahl aller durch den Ausfall des Einsers und Zweiers entstandenen Tips $4xy$ ist.

Schließlich berechnet man die Anzahl der durch den Ausfall eines Kreuzes entstandenen Tips. Ein Kreuz kann man auf z -fache Weise wählen, und es kann durch einen Einser oder einen Zweier ersetzt werden (zwei Möglichkeiten). Die Anzahl dieser Tips ist also $2z$.

Zusammenfassend ist also die Anzahl aller möglichen Gewinne im vierten Rang

$$\frac{4}{3}x(x-1)(x-2) + 4xy + 3z$$

1.9.

Rang	Zahl der Tips
erster	1
zweiter	8
dritter	36
vierter	132

1.10. Dieser Fall tritt ein, wenn lauter Einser verlost werden. Dann kann der zweite Rang 24 Tips gewinnen.

1.11. Man benutzt die Resultate der Aufgabe 1.8, nach denen der dritte Rang $Q = 2x(x-1) + 2y$ Tips gewinnen kann.

Man weiß, dass die Zahlen x, y, z durch die Beziehung $x + y + z = 12$ verknüpft sind. Man wähle also sukzessiv $x = 0, 1, 2, \dots, 12$ und ergänze es durch ein möglichst großes y . Dieser größte Wert $y = 12 - x$ (bei $z = 0$). Für $y = 12 - x$ ist $Q = 2x^2 - 4x + 24 = 2((x-1)^2 + 11)$, Daraus ist ersichtlich, dass Q für $x = 12$ am größten ist.

Im dritten Rang entsteht die größte Anzahl möglicher Tips, wenn lauter Einser gezogen werden. Dann können 264 Tips im dritten Rang gewinnen.

1.12. Die Anzahl der Gewinne im zweiten Rang ist

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 = 258$$

im dritten Rang

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{43 \cdot 42}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 21 = 13545$$

und im vierten Rang

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 4 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 = 246820$$

Die Begründung der Berechnung sei dem Leser überlassen.

1.13. Eine Ecke eines regelmäßigen Vierflachs muss mit der Zahl 4 bezeichnet werden. Man stelle sich vor, dass das Vierflach auf einer horizontalen Ebene (auf einem Tisch) so liegt, dass die mit 4 bezeichnete Ecke nach oben weist. Für die Bezeichnung der übrigen drei Ecken mit den Zahlen 1, 2, 3 gibt es zwei Möglichkeiten:

Man numeriert sie entweder so, dass beim Blick von oben auf die Tischebene die Zahlen 1, 2, 3 so aufeinander folgen wie die Zahlen auf einem Zifferblatt, oder umgekehrt. Demnach können also die Ecken eines regelmäßigen Vierflachs auf zweierlei Art numeriert werden.

Es sei hinzugefügt, dass mit Hilfe der Numerierung eines regelmäßigen Vierflachs die organische Chemie das optische Verhalten einiger asymmetrischer Kohlenstoffverbindungen (z.B. der Milchsäure) erklärt. Der asymmetrische Kohlenstoff C^* ist ein Kohlenstoff, der durch seine vier "Valenzarme" vier verschiedene (einwertige) Elemente oder Elementengruppen bindet.

Um erklären zu können, warum dieselbe chemische Verbindung einmal in einer rechtsdrehenden und ein andermal in einer linksdrehenden Form vorkommt, stelle man sich (nach van't Hoff und Le Bel) den asymmetrischen Kohlenstoff inmitten eines regelmäßigen Vierflachs vor; seine Valenzen tendieren nach den Eckpunkten dieses Vierflachs. Da es bekanntlich nur zweierlei Bezeichnungen der Eckpunkte gibt, sind auch nur zwei Verbindungsformen - eine rechts- und eine linksdrehende - möglich.²⁵

1.14. Ein Beispiel des gesuchten magischen Quadrats zeigt folgendes Schema:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

3.1. Bei der Numerierung des Buches kommen 9 einziffrige Zahlen (d.h. 9 Ziffern), 90 zweiziffrige Zahlen (d.h. 180 Ziffern) und 399 dreiziffrige Zahlen (d.h. 1197 Ziffern) vor. Im ganzen also $9 + 180 + 1197 = 1386$ Ziffern.

Die Ziffer 0 kommt bei der Niederschrift einziffriger Zahlen überhaupt nicht vor, bei der Niederschrift zweiziffriger Zahlen ist sie in neun Fällen (9 Nullen) notwendig. Von den

²⁵Diese Bezeichnungen drücken die Fähigkeit einiger chemischer Stoffe aus, die Ebene des polarisierten Lichtes nach links oder rechts zu drehen.

dreiziffrigen Zahlen nimmt man zunächst Zahlen, die kleiner als 110 (11 Nullen) sind, ferner Zahlen größer als 109 und kleiner als 200 (weitere 9 Nullen). Zur Niederschrift aller dreiziffrigen Zahlen, die kleiner als 500 sind, sind also $4 \cdot (11 + 9) = 80$ Nullen notwendig.

Da die Zahl 499, die bei der Paginierung nicht vorkommt, keine Null enthält, ist die gesuchte Nullenzahl $9 + 80 = 89$.

3.2. Zur Niederschrift aller einziffrigen Zahlen sind 9 Anschläge notwendig. Es bleiben noch 91 Anschläge übrig, die zur Niederschrift der zweiziffrigen Zahlen erforderlich sind. Es gilt, dass $91 = 2 \cdot 45 + 1$.

Die Schreiberin wird also noch 45 zweiziffrige Zahlen (deren letzte 54 ist) und mit dem hundertsten Anschlag die erste Ziffer der Zahl 55 niederschreiben.

3.3. Ein Leser, der von der Schule her die arithmetischen Reihen kennt, wird diese Aufgabe leicht lösen. Wir bieten jedoch eine Lösung, die die Kenntnis dieses Teils des Unterrichtsstoffs nicht voraussetzt. Man sieht, dass die Summe

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 63 + 64$$

zu berechnen ist. Um uns die Berechnung zu erleichtern, stellen wir die Reihenfolge der Summanden auf geeignete Weise um und setzen dann die einzelnen Paare in Klammern. Wir bekommen dabei

$$(1 + 64) + (2 + 63) + (3 + 62) + \dots + (31 + 34) + (32 + 33)$$

Die Summe der Summanden in jeder Klammer ist gleich 65, so dass die gesuchte Summe $65 \cdot 32 = 2080$ ist.

Auf dem ganzen Schachbrett liegen also 20,80 Mark.

3.4. Wenn man die Multiplikation schriftlich ausführt, sieht die Niederschrift folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{r}
 142857 \cdot 264513 \\
 \hline
 428571 \\
 142857 \\
 714285 \\
 571428 \\
 857142 \\
 285714 \\
 \hline
 37787533641
 \end{array}$$

3.5. Der Kürze wegen bezeichne man die einzelnen Stellen des Schemas mit den Buchstaben A, B, C, ... wie folgt:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad A \quad B \quad \cdot \quad C \quad D \\
 \hline
 E \quad F \quad G \quad 1 \\
 H \quad I \quad J \quad 1 \\
 \hline
 K \quad L \quad M \quad 1 \quad N
 \end{array}$$

Man sieht, dass $N = 1$, daher $G = 0$. D kann nicht gleich 1 sein, denn auf der zweiten Zeile steht eine vierziffrige Zahl.

Das Produkt BD endet mit der Ziffer 1, wie auf der zweiten Zeile zu sehen ist; daher $B = 9$, $D = 9$ oder $B = 7$, $D = 3$ oder $B = 3$, $D = 7$. Wir wollen jeden dieser drei Fälle gesondert untersuchen.

a) Wenn $B = 9$, $D = 9$ ist, dann ist $BD = 81$. Da $G = 0$, muss das Produkt AD oder 9A mit der Ziffer 2 enden (dann ist nämlich $2 + 8 = 10$).

Das Produkt 9A endet mit einer Zwei nur für $A = 8$. Auf der ersten Zeile steht also die Zahl 189.

Welche Möglichkeit besteht für die Ziffer C? Das Produkt BC oder 9C endet mit der Ziffer 1; daraus folgt, dass $C = 9$. Nun kennen wir auch den zweiten Faktor und können leicht die ganze Multiplikation ergänzen.

b) Der Fall $B = 7$, $D = 3$ führt zu keiner Lösung. Die auf der ersten Zeile stehende Zahl beginnt nämlich mit einer Eins, so dass sein Dreifaches dreiziffrig (kleiner als 600) ist. Auf der zweiten Zeile soll jedoch eine vierziffrige Zahl stehen.

c) Wenn $B = 3$, $D = 7$, dann $BD = 21$. Das Produkt AD oder 7A muss also mit der Ziffer 8 enden (dann ist nämlich $8 + 2 = 10$); das tritt für $A = 4$ ein. Auf der ersten Zeile steht also die Zahl 143. Analog wie im Absatz a) überzeugt man sich, dass $C = 7$. Dadurch erhalten wir auch den zweiten Faktor.

Zusammenfassung: Die Aufgabe hat zwei Lösungen

$$\begin{array}{r} 189 \cdot 99 \\ \underline{1701} \\ 1701 \\ \hline 18711 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 143 \cdot 77 \\ \underline{1001} \\ 1001 \\ \hline 11011 \end{array}$$

3.6. Die Anzahl der Ziffern 5^{100} bestimmt man mit Hilfe einer Logarithmentafel. Es gilt $\log 5^{100} = 100 \cdot \log 5$. Wenn man vierstellige Logarithmen benutzt, erhält man

$$\log 5^{100} \approx 100 \cdot 0,6990 = 69,90$$

Hieraus folgt, dass die Zahl 5^{100} im Dezimalsystem 70 Ziffern hat. Die vierstelligen Logarithmen genügen jedoch nicht einmal dazu, (durch Logarithmierung) wenigstens die erste Ziffer der Zahl 5^{100} (von links gezählt) zu berechnen. Aus diesen Tafeln ist nur ersichtlich, dass die erste Ziffer 7 oder 8 ist.

Will man ein genaueres Resultat gewinnen, so muss man mit einem auf eine größere Zahl von Dezimalstellen berechneten Logarithmus 5 rechnen. So gilt bei einer Berechnung auf 9 Dezimalstellen: $\log 5 \approx 0,698970004$; $\log 5^{100}$ ist also $\approx 69,8970$, und durch Einsicht in vierstellige Tafeln stellt man fest, dass die Zahl 5^{100} mit der Ziffer 7 beginnt; beim Logarithmieren mit Hilfe fünfstelliger Logarithmen sieht man, dass die ersten zwei Ziffern der Zahl 5^{100} 78 sind. Die Zahl 5^{100} kann man angenähert in der Form $7,8 \cdot 10^{69}$ niederschreiben.

Die Gruppe der Ziffern, mit denen die Zahl 5^{100} endet, kann man logarithmisch nicht berechnen, es hilft jedoch folgende Überlegung: Wenn man die Potenzen 5^2 , 5^3 , 5^4 ,

5^5 , ... verfolgt, sieht man, dass alle mit den Ziffern 25 enden (es genügt, sich zu vergegenwärtigen, dass man 5^{n+1} erhält, indem man 5^n mit fünf multipliziert). Die Zahl 5^{100} endet also mit den Ziffern 25.

Die dritte Ziffer von rechts kann man jedoch auch bestimmen, denn die Potenzen $5^3, 5^4, 5^5, 5^6, \dots$, enden abwechselnd mit den Ziffern 125 (bei ungeradem Exponenten) und mit 625 (bei geradem Exponenten). Die Potenz 5^{100} hat einen geraden Exponenten (100), endet also mit der Ziffernfolge 625. Auf ähnliche Weise könnte man auch die vierte Ziffer von rechts herausuchen usw.

3.7. a) 900; b) $9 \cdot 10^{n-1}$.

3.8. a) 4; b) 2^{b-1} .

3.9. An die erste Stelle von links kann man eine beliebige der vier Ziffern 5, 6, 7, 8 (vier Möglichkeiten) setzen, an die zweite ebenso eine beliebige dieser Ziffern (vier Möglichkeiten) und schließlich an die dritte auch eine beliebige dieser Ziffern (vier Möglichkeiten). Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist also $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Um zu bestimmen, wie viele dieser 64 Zahlen gerade sind, erinnere man sich zunächst, dass im Dezimalsystem alle natürlichen Zahlen gerade sind, die mit einer der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 enden.

Man berechne also zunächst, wie viele Zahlen, die Gegenstand unserer Betrachtungen waren, mit der Ziffer 6 enden.

Jede dieser Zahlen kann an erster Stelle von links eine beliebige der Ziffern 5, 6, 7, 8 (vier Möglichkeiten) haben, an zweiter Stelle auch jede dieser Ziffern (vier Möglichkeiten) und an letzter Stelle die Ziffer 6 (eine Möglichkeit). Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist also $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$. Man kann also 16 mit der Ziffer 6 endende Zahlen finden.

Gleich groß ist offensichtlich auch die Anzahl der mit der Ziffer 8 endenden dreiziffrigen Zahlen.

Die Gesamtzahl der geraden Zahlen in unserer Aufgabe ist 32.

3.10. Man muss analog wie in der gerade besprochenen Aufgabe vorgehen. Zunächst muss man sich aber vergegenwärtigen, dass keine der dreiziffrigen Zahlen mit einer Null beginnen darf. An die erste Stelle von links kann jede beliebige der drei Ziffern 1, 2, 3 (drei Möglichkeiten), an die zweite jede der vier Ziffern 0, 1, 2, 3 (vier Möglichkeiten) und schließlich an die letzte Stelle ebenfalls jede der vier Ziffern 0, 1, 2, 3 (vier Möglichkeiten) kommen. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist also $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

3.11. a) Es gilt, dass $333 = 2^8 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$, so dass der Zahl 333 im Zweiersystem die Niederschrift 101 001 101 entspricht.

b) Im Dezimalsystem findet man die Zahl $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

3.12. Man stellt fest, wieviel Ziffern die gesuchte Zahl haben kann; man bezeichne diese Anzahl mit k . Die größte k -ziffrige Zahl im Zweiersystem ist die Zahl

$$a = 1 \cdot 2^{k-1} + 1 \cdot 2^{k-2} + 1 \cdot 2^{k-3} + \dots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Durch die beschriebene Operation erhält man $a = 2^k - 1$.

Die kleinste k -ziffrige Zahl im Zehnersystem ist die Zahl $b = 10^{k-1}$. Für $k = 1$ ist $a = 1$, $b = 1$; die Zahl 1 ist also sowohl im Zehner- als auch im Zweiersystem gleich dargestellt.

Eine andere natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft lässt sich jedoch nicht finden, da man beweisen kann, dass für andere k die Zahl a kleiner als die Zahl b ist. Es gilt nämlich

$$a = 2^k - 1 < 2^k = 2^{k-1} \cdot 2 < 2^{k-1} \cdot 5^{k-1} = 10^{k-1} = b$$

oder $a < b$.

3.13. Wenn man alle Zahlen, die in den Tabellen vorkommen, in das Zweiersystem überführt, sieht man, dass die an der Spitze jeder Tabelle angeführten Zahlen der Reihe nach folgende sind: 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 und 2^5 . In der ersten Tabelle kommen gerade die Zahlen vor, die im Zweiersystem das Glied 2^0 enthalten, in der zweiten Tabelle gerade diejenigen mit dem Glied 2^1 usw.; in der letzten, sechsten Tabelle sind gerade jene Zahlen, die das Glied 2^5 enthalten. Es genügt also, die ersten Zahlen der betreffenden Tabellen zu addieren, um die gedachte Zahl festzustellen.

Erläutern wir diesen "Trick" noch an einem Beispiel. Unser Freund mag sich z.B. die Zahl 39 gedacht haben. Diese Zahl findet man in der ersten, zweiten, dritten und sechsten Tabelle.

Man addiert also $1 + 2 + 4 + 32 = 39$. Man sieht, dass die Summe $1 + 2 + 4 + 32$ oder $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^5$ oder

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

die Niederschrift der Zahl 39 im Zweiersystem ist.

3.14. Die Aufgabe befriedigen natürlich neun Brüche

$$\frac{11}{11}; \quad \frac{22}{22}; \quad \frac{33}{33}; \quad \dots; \quad \frac{99}{99}$$

Weitere Beispiele, die man auf diese Weise "kürzen" kann, sind folgende:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}; \quad \frac{49}{98} = \frac{1}{2}$$

Es lässt sich beweisen, dass es zusammen mit dem Fall $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$, der im Text dieser Aufgabe angeführt ist, die einzigen Brüche mit der vorgeschriebenen Eigenschaft sind.

Anmerkung: Weiteres Suchen würde uns zeigen, dass z.B. im Zähler und im Nenner des Bruches $\frac{1212}{32118}$ die Zahlengruppe 21 weggelassen werden kann. Man erhält denselben Bruch $\frac{12}{318}$, den wir erhalten würden, wenn wir Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches durch die Zahl 101 dividieren. Wir überlassen es dem Leser, weitere analoge Beispiele zu finden.

3.15. Dies sind spezielle Fälle einer Formel, die sich leicht ableiten lässt. Man bezeichne

mit n, p zwei beliebige natürliche Zahlen größer als 1. Dann gilt

$$\sqrt[n]{p + \frac{p}{p^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{p(p^n - 1) + p}{p^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{p^{n+1} - p + p}{p^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{p^{n+1}}{p^n - 1}} = p \cdot \sqrt[n]{\frac{p}{p^n - 1}}$$

Für $n = 2, p = 3$ erhält man z.B. $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$, das erste Beispiel des Textes.

3.16. Man benutze die Neugebauersche Methode, die Stammbrüche auszudrücken. Es gilt $\frac{3}{11} = \overline{4} + \overline{44}$ (oder der Bruch $\frac{3}{11}$ ist eine Zahl der Form A_2).

3.17. Durch Berechnung kann man sich von der Gültigkeit der Gleichung

$$2 = \overline{1} + \overline{3} + \overline{5} + \overline{7} + \overline{9} + \overline{15} + \overline{21} + \overline{27} + \overline{35} + \overline{45} + \overline{105} + \overline{945}$$

überzeugen.

Es ist zu erwähnen, dass die Beantwortung der Frage in dieser Aufgabe zwar kurz ist, das Herausfinden des hier angegebenen Resultate jedoch sehr mühsam. Das dürfte wohl auch der Leser erfahren haben, der ihre selbständige Lösung gesucht hat.

3.18. Wir führen zwei Lösungen für jede der Fragen an; der Leser mag jedoch versuchen, noch andere Antworten zu finden:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 10 &= 8\frac{35}{70} + 1\frac{46}{92} \\ 10 &= 2\frac{15}{30} + 7\frac{48}{96} \\ \text{b)} \quad 100 &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 \\ 100 &= 0 + 93 + 5 + 1 + \frac{6}{7} + \frac{4}{28} \end{aligned}$$

4.1. Die Größe des Innenwinkels in einem regelmäßigen Fünfeck ist (im Gradmaß ausgedrückt)

$$\alpha_5 = \frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

sie ist also 108° . Durch Zerschneiden des Fünfecks $ABCDE$ ²⁶ entstehen ein Dreieck ABC und ein Viereck $ACDE$. Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, so dass seine Innenwinkel bei den Scheitelpunkten A, C die gleiche Größe haben; man berechnet sie wie folgt:

$$\frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$$

(Der Winkel beim Scheitelpunkt B hat natürlich 108° .)

Das Viereck $ACDE$ ist ein regelmäßiges Trapez mit den Grundlinien AC . Man stellt dies fest, indem man die Größe seiner Innenwinkel berechnet. Die Größe des Winkels beim Scheitelpunkt A ist $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, und gleich groß ist der Winkel beim Scheitelpunkt C .

²⁶Wir bitten den Leser, sich selbst das Bild zu zeichnen

Nun zu den Innenwinkeln bei den Scheitelpunkten A, E ; es gilt $72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$, so dass nach dem bekannten Satz von den anliegenden Winkeln die Geraden AC, DE parallel sind und das Viereck $ACDE$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

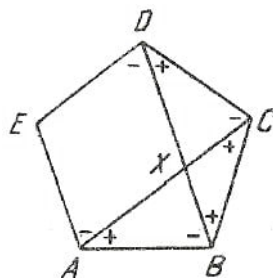


Bild 64

4.2. Man bezeichne den Schnittpunkt der Diagonalen AC, BD (Bild 64) mit X . Die Winkel, deren Größe der Aufgabe 4.1. zufolge 36° sind, sind in Bild 64 mit einem Pluszeichen, diejenigen, die 72° haben, mit einem Minuszeichen versehen.

Das Dreieck BCX ist gleichschenklig, denn seine Innenwinkel bei den Scheitelpunkten B, C sind 36° groß; der Innenwinkel bei X ist also $180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$. Die Dreiecke ABX und CDX sind kongruent, denn sie stimmen in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln überein (der Satz "WSW"); wir werden uns daher nur mit einem von ihnen befassen, z.B. mit dem ersten Dreieck.

Man berechnet die Größe seines Innenwinkels beim Scheitelpunkt X ; sie ist $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$. Das Dreieck ABX hat also zwei Innenwinkel von der Größe 72° und ist demnach gleichschenklig. Die Strecken AB und AX sind also gleich, das Viereck $AXDE$ ist daher ein Rhombus. Die Größe von drei Innenwinkeln ist bereits bekannt; man berechnet leicht, dass der Innenwinkel beim Scheitelpunkt X 108° ist.

Damit ist die Aufgabe gelöst.

4.3. Der Leser ergänzt sich Bild 64 selbst, indem er darin noch die Diagonale BE zieht und mit dem Buchstaben Y den gemeinsamen Punkt der Diagonalen AC und BE bezeichnet. Es ist leicht festzustellen, dass die Dreiecke ABY und BCX sowie die Dreiecke AYE und CXD kongruent sind.

Das Dreieck BXY ist gleichschenklig, und das Viereck $XDEY$ ist ein gleichschenkliges Trapez. In allen sechs durch Zerschneidung entstandenen Teilen kommen nur Winkelgrößen von $36^\circ, 72^\circ$ und 108° vor.

4.4. Benutzen wir das beim Lösen der vorhergehenden Aufgabe vom Leser konstruierte Bild. Die Größe der Strecke XY bezeichnen wir mit s , die Größe der Strecke AY , mit t . Wenn wir uns die Dreiecke ABX und BXY näher ansehen, finden wir darin zwei Paare kongruenter Innenwinkel. Diese Dreiecke sind also ähnlich (nach dem Satz "WW" von der Ähnlichkeit der Dreiecke). Die Größe des Schenkels im (gleichschenkligen) Dreieck ABX ist $s + t$, die Größe des Schenkels im (gleichschenkligen) Dreieck BXY ist t ; ihr Verhältnis (das sogenannte Ähnlichkeitsverhältnis) ist $(s + t) : t$.

Die Größe der Basis im Dreieck ABX ist t , die der Basis im Dreieck BXY ist s ; das Ähnlichkeitsverhältnis ist $t : s$. Beide Verhältnisse müssen gleich sein:

$$t : s = (s + t) : t \quad (1)$$

Nach Vereinfachung erhält man

$$t^2 = s \cdot (s + t) \quad ; \quad t^2 = s^2 + st \quad ; \quad s^2 + st - t^2 = 0$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch die Zahl t^2 (die nicht gleich Null ist) dividiert, erhält man

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \frac{s}{t} + 1 = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $\frac{s}{t}$. Man berechnet die Diskriminante $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind damit

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{1,2}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die zweite Wurzel $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ist negativ, so dass sie dem Quotienten zweier positiver Zahlen $\frac{s}{t}$ nicht gleich sein kann. Man schließt sie daher aus. Die erste Wurzel $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ist positiv, denn $\sqrt{5} \approx 2,236$, so dass

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{-1 + 2,236}{2} = 0,618$$

Diese erste Wurzel ist der gesuchte Quotient $\frac{s}{t}$. Es ist also

$$s = \frac{1}{2}t(-1 + \sqrt{5}) \approx 0,618t$$

Um das Verhältnis der Strecken AX , XC zu berechnen, geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} AX : XC &= \frac{s+t}{t} = \frac{\frac{1}{2}t(-1 + \sqrt{5}) + t}{t} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{-1 + \sqrt{5} + 2}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \frac{1 + 2,236}{2} = 1,618 \end{aligned}$$

Anmerkung: Das Verhältnis (1) drückt aus, dass der Punkt X die Diagonale AC so in zwei Teile teilt, dass die Größe des kleineren Teiles zu der des größeren sich wie die Größe des größeren Teiles zu der der ganzen Strecke verhält.

Eine solche Teilung der Strecke heißt der "Goldene Schnitt". In der Vergangenheit entstand eine ganze Literatur über den Goldenen Schnitt wegen seiner "Wichtigkeit" für das menschliche Leben. Die Vertreter der "Theorie" des Goldenen Schnittes erklärten, dass antike Bauten und Statuen nach den Grundsätzen des Goldenen Schnittes ausgeführt worden seien, dass berühmte Maler mit dem Goldenen Schnitt in ihren Bildern gerechnet hätten und dass sich auch in der Natur (bei Pflanzen und Tieren) dieses Prinzip verfolgen ließe.

Genaue Messungen haben jedoch erwiesen, dass diese Vermutungen einer wissenschaftlichen Grundlage entbehren; denn es ergab sich meistens nur eine sehr grobe Übereinstimmung mit dem Goldenen Schnitt. Da, wo diese Übereinstimmung genauer zu sein

schien (und das war nur auf wenige Fälle beschränkt), handelte es sich offensichtlich nur um einen Zufall.

4.5. Wir benutzen alle Bezeichnungen aus der vorangehenden Aufgabe. Ferner bezeichnen wir den Inhalt des großen regelmäßigen Fünfecks mit A_1 und den seines fünfeckigen Teils mit A_2 . Da je zwei regelmäßige Fünfecke ähnlich sind, kann man das Verhältnis zwischen A_1 und A_2 folgendermaßen ausdrücken:

Wir berechnen zunächst das Ähnlichkeitsverhältnis als den Quotienten der Größe der Seite des gegebenen regelmäßigen Fünfecks und der seines fünfeckigen Teils. Wenn man dieses Ähnlichkeitsverhältnis als k bezeichnet, dann gilt

$$\begin{aligned} k &= \frac{s+t}{s} = \frac{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})+t}{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})} = \frac{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5}+2)}{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{-1+5} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1}{4}(6+2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}3+\sqrt{5} \end{aligned}$$

Aus der Lehre über die Ähnlichkeit von Vielecken weiß man, dass $A_1 = k^2 \cdot A_2$, dass also $A_2 = \frac{1}{k^2}A_1$. Man berechnet also zunächst k^2 ; es gilt

$$k^2 = \left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^2 = \frac{1}{4}(9+6\sqrt{5}+5) = \frac{1}{4}(14+6\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$$

Ferner bestimmt man $\frac{1}{k^2}$, es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right)^2} = \frac{2}{7+3\sqrt{5}} = \frac{2(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} = \frac{2(7-3\sqrt{5})}{49-25} \\ &= \frac{2}{4}(7-3\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(7-3\sqrt{5}) \approx \frac{1}{2}(7-3 \cdot 2,236) = 0,146 \end{aligned}$$

Man bekommt das angenäherte Verhältnis $A_2 \approx 0,164A_1$; in Prozenten ausgedrückt, bedeutet das gefundene Resultat, dass der Flächeninhalt A_2 etwa 16,4% des Flächeninhalts A_1 ausmacht.

4.6. Die Pflastersteine kann man z.B. folgendermaßen färben: alle Zwölfecke rot, alle Sechsecke gelb und alle Quadrate schwarz.

4.7. Auf dem Bild, das sich der Leser selbst zeichnen mag, sieht man, dass die Diagonalen 13 Schnittpunkte haben.

4.8. Es können höchstens 15 Schnittpunkte entstehen, wie folgende Überlegung zeigt: Wenn sich zwei Diagonalen in einem (inneren) Punkt schneiden, bilden die Randpunkte dieser Diagonalen die Ecken eines konvexen Vierecks. Von den sechs Scheitelpunkten des Sechsecks wählt man also je vier, was sich auf $\binom{6}{4}$ fache Weise durchführen lässt.

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

so dass man Wirklich höchstens 15 Schnittpunkte finden kann. Das Bild des Sechsecks, dessen Diagonalen sich in 15 Punkten schneiden, mag sich der Leser selbst zeichnen.

4.9. Zur Lösung dieser Übung ist die Kenntnis der goniometrischen Funktionen erforderlich.

Man bezeichne mit O die Mitte des einem gegebenen n -Eck umschriebenen Kreises. (Wir überlassen es wieder dem Leser, sich das Bild zu konstruieren.) Das Dreieck A_1A_2O ist gleichschenkelig, seine Schenkel OA_1 , OA_2 sind dem Halbmesser r gleich.

Die Größe des Winkels A_1OA_2 ist $\omega = \frac{360^\circ}{n}$. Man konstruiere im Dreieck A_1A_2O die Höhe OB ; das Dreieck $OB A_1$ ist rechtwinklig, und es gilt $OA_1 = r$, $A_1B = \frac{a}{2}$, $\angle A_1OB = \frac{1}{2}\omega$. Das Verhältnis $\frac{A_1B}{OA_1}$ ist dem Sinus des Winkels $\frac{1}{2}\omega$ gleich, also

$$\frac{A_1B}{OA_1} = \sin \frac{1}{2}\omega$$

Nach Einsetzen erhält man

$$\frac{\frac{a}{2}}{r} = \sin \frac{180^\circ}{n}$$

nach weiterer Vereinfachung:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Auf diese Weise ist das gesuchte Verhältnis berechnet.

4.10. Man gehe von dem Resultat der vorhergehenden Übung aus und setze $n = 17$. Es gilt $\frac{180^\circ}{17} \approx 10^\circ 35' 18''$. Für weitere Berechnungen benutzen wir vierstellige logarithmische Tafeln:

$$\log \frac{r}{a} \approx -\log 2 - \log \sin 10^\circ 35' 18'' \approx -0,3010 - (9,2642 - 10) = 0,4348$$

Daraus folgt, dass $\frac{r}{a} \approx 2,721$, was mit der Angabe in der Tabelle III übereinstimmt.

4.11. Die Strecke SX kann man für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks A_1OX halten, so dass ihre Größe

$$\frac{r}{2}\sqrt{3} \approx r \cdot 0,8660$$

ist. Nach dem Resultat der Aufgabe 4.9. ist die Größe der Seite eines dem Kreis mit dem Halbmesser r eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks:

$$2r \sin \frac{180^\circ}{7} \approx 2r \cdot \sin 25^\circ 43' \approx 2r \cdot 0,4339 = r \cdot 0,8678$$

Man sieht, dass diese Näherungskonstruktion eine Seite ergibt, die etwa um $r \cdot 0,0018$ kleiner ist, als sie sein sollte. Dies ist eine ziemlich gute Näherung, denn bei dem Halbmesser $r = 1$ m ist die konstruierte Seite um weniger als 2 mm kleiner.

4.12. Die Aufgabe hat 7 Lösungen. Die gesuchten Dreiecke sind $A_1A_3A_5$, $A_1A_3A_6$, $A_1A_4A_6$, $A_2A_4A_6$, $A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_5A_7$.

4.13. In einem n -Eck ist die Größe des Innenwinkels (im Gradmaß) durch

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \quad \text{oder} \quad \alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

gegeben. Die Zahl α_n ist eine ganze Zahl nur dann, wenn $\frac{360^\circ}{n}$ eine ganze Zahl ist oder wenn 360° durch n (restlos) aufgeht.

Man sucht daher alle Divisoren der Zahl 360 heraus (es können nur Zahlen größer als 2 sein); wir haben $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360$.

Wir haben im ganzen 22 der Aufgabe entsprechende Vielecke gefunden.

4.14. Man kann voraussetzen, dass die Bezeichnung der Zahlen mit x, y, z so gewählt ist, dass $x \leq y \leq z$. Dann ist

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$$

und es gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x} \quad \text{oder} \quad x \leq 6$$

Es muss jedoch auch $\frac{1}{2} > \frac{1}{x}$ oder $x > 2$ sein. Für die Zahl x hat man also vier Möglichkeiten $x = 3, 4, 5$ oder 6 . Wir wollen eine jede näher analysieren.

a) Wenn $x = 3$, geht die gegebene Gleichung in die Form

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

über. Doch

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}, \quad \text{so daß} \quad \frac{1}{6} \leq \frac{2}{y} \quad \text{oder} \quad y \leq 12$$

Da jedoch $\frac{1}{6} > \frac{1}{y}$ oder $y > 6$ gilt, hat man (wobei stets $x = 3$) für die Zahl y sechs Möglichkeiten; $y = 7, 8, 9, 10, 11$ oder 12 .

Wenn man $x = 3, y = 7$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{42}$ oder $z = 42$; das Tripel $(3, 7, 42)$ befriedigt das Verhältnis (1).

Wenn man $x = 3, y = 8$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{24}$ oder $z = 24$; das Tripel $(3, 8, 24)$ ist eine weitere Lösung der Gleichung (1).

Wenn man $x = 3, y = 9$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{18}$ oder $z = 18$; das Tripel $(3, 9, 18)$ befriedigt die Gleichung.

Wenn man $x = 3, y = 10$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{15}$ oder $z = 15$; das Tripel $(3, 10, 15)$ befriedigt die Gleichung.

Wenn man $x = 3, y = 11$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{5}{66}$; diesem Bruch entspricht keine ganze Zahl z .

Wenn man $x = 3$, $y = 12$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ oder $z = 12$; das Tripel $(3, 12, 12)$ ist eine weitere Lösung der Gleichung (1).

b) Wir wollen jetzt Lösungen suchen, in denen $x = 4$. Man setzt $x = 4$ in die Gleichung (1) ein; man erhält

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}, \quad \text{muss} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{2}{y} \quad \text{sein oder} \quad y \leq 8$$

Zugleich muss jedoch gelten

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{y} \quad \text{oder} \quad y > 4$$

Für y kommen also die Zahlen 5, 6, 7 oder 8 in Betracht.

Wenn man $x = 4$, $y = 5$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{20}$ oder $z = 20$; das Tripel $(4, 5, 20)$ ist eine weitere Lösung der Gleichung (1).

Wenn man $x = 4$, $y = 6$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ oder $z = 12$; das Tripel $(4, 6, 12)$ ist eine weitere Lösung.

Wenn man $x = 4$, $y = 7$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{3}{28}$; diesem Bruch entspricht keine ganze Zahl z .

Wenn man $x = 4$, $y = 8$ in die Gleichung (1) einsetzt, hat man $\frac{1}{z} = \frac{1}{8}$ oder $z = 8$; das Tripel $(4, 8, 12)$ ist eine weitere Lösung der Gleichung (1).

c) Ferner wollen wir solche Lösungen suchen, in denen $x = 5$. Man setzt $x = 5$ in die Gleichung (1) ein; man erhält

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{10} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}, \quad \text{muss} \quad \frac{3}{10} \leq \frac{2}{y} \quad \text{sein oder} \quad y \leq \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Da jedoch $y \geq x = 5$, kommen nur zwei Zahlen in Betracht: $y = 5$ oder $y = 6$.

Wenn man $x = 5$, $y = 5$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{10}$ oder $z = 10$; das Tripel $(5, 5, 10)$ ist eine weitere Lösung der Gleichung (1).

Wenn man $x = 5$, $y = 6$ in die Gleichung (1) einsetzt, hat man $\frac{1}{z} = \frac{2}{15}$; dem Bruch entspricht jedoch keine ganze Zahl z .

d) Man nehme schließlich den Fall $x = 6$. Man setze wieder $x = 6$ in die Gleichung (1) ein. Man erhält

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}, \quad \text{muss} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{2}{y} \quad \text{sein oder} \quad y \leq 6$$

Da jedoch $y \geq x = 6$, hat man für y die einzige Lösung $y = 6$.

Wenn man $x = 6, y = 6$ in die Gleichung (1) einsetzt, erhält man $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ oder $z = 6$; das Tripel $(6, 6, 6)$ ist die letzte Lösung der Gleichung (1), die wir hier gefunden haben.

Die vorangehenden Berechnungen kann man zum folgenden Schluss zusammenfassen: Die Gleichung (1) hat insgesamt 10 Lösungen, nämlich $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6)$. 4.15. Man kann die Summe auf fünffache Weise einklammern:

$$[(a+b)+c]+d; \quad [a+(b+c)]+d; \quad (a+b)+(c+d); \quad a+[(b+c)+d]; \quad a+[b+(c+d)]$$

Eine Seite des konvexen Hilfsfünfecks bezeichne man mit aa , die übrigen dann der Reihe nach mit a, b, c, d . Man zerlege das Fünfeck durch Diagonalen in Dreiecke, wie es in Bild 65 veranschaulicht ist. Das erste Schema der Abbildung entspricht der Einklammerung $[(a+b)+c]+d$, die übrigen vier der Reihe nach den übrigen vier Möglichkeiten.

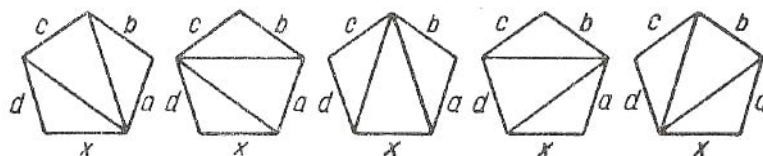


Bild 65

Anmerkung: Eine allgemeine Beantwortung der oben erwähnten Frage haben bereits 1838 Catalan und Rodrigues gebracht. Sie haben festgestellt, dass die Anzahl der Möglichkeiten, ein konvexes n -Eck (durch Diagonalen) in Dreiecke zu zerlegen, durch die Formel

$$u_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4n-14)(4n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)/n-1}$$

gegeben ist.

5.1. Es ist möglich, denn das Bild hat zwei Knotenpunkte ungeraden Grades (Punkte A, C).

5.2. Es ist nicht möglich, denn das Bild enthält 4 Knotenpunkte ungeraden Grades.

5.3. Es ist nicht möglich, denn das Bild enthält 5 Knotenpunkte ungeraden (fünften) Grades.

5.4. Wenn n eine gerade Zahl ist, kann man das Bild nicht mit einem Zug zeichnen; dieses Bild enthält nämlich gerade n Knotenpunkte $(n-1)$ ten Grades, wobei $n-1$ eine ungerade Zahl ist. Wenn n eine ungerade Zahl ist, kann man das Bild mit einem Zuge zeichnen; hier sind nämlich alle Knotenpunkte geraden Grades.

5.5. Auf dem gegebenen Bild bezeichne man mit s_k die Anzahl der Knotenpunkte k -ten Grades. Man bilde die Zahl

$$x = 1s_1 + 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + 6s_6 + 7s_7 + \dots \quad (1)$$

Die drei Punkte am Ende dieser Gleichung bedeuten, dass man das Addieren fortsetzen soll, solange man s_k als eine von der Null verschiedene Zahl finden kann. Man sieht leicht ein, dass x eine gerade Zahl ist.

Die rechte Seite der Gleichung (1) drückt nämlich die Zahl der Bögen aus, die sukzessiv von den Knotenpunkten ersten, dritten, vierten, fünften ... Grades ausgehen. x drückt also das Zweifache aller Bögen aus, die man überhaupt auf dem Bild finden kann. Daher gilt, dass $x = 2y$, wobei y eine geeignete natürliche Zahl ist. Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form

$$2y = (s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \dots) + (2s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 + 6s_7 + \dots)$$

Hieraus folgt

$$s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \dots = 2y - (2s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 + 6s_7 + \dots) \quad (2)$$

Die Zahl $s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \dots$ stellt die Anzahl der Knotenpunkte dar, die ungeraden Grades sind. Die Gleichung (2) drückt diese Zahl als Differenz zweier gerader Zahlen aus; $s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \dots$ ist somit ebenfalls eine gerade Zahl.

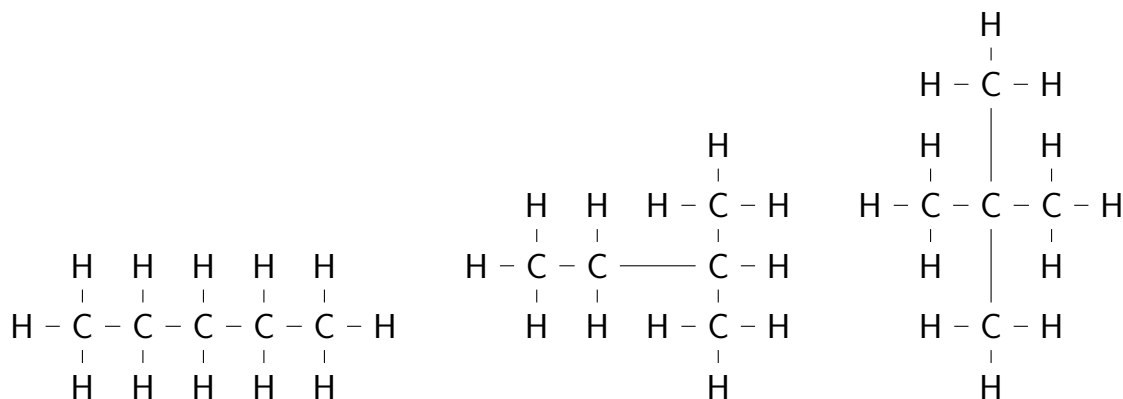
Anmerkung: Die Behauptung, mit der wir uns soeben beschäftigt haben, war bereits L. Euler bekannt.

5.6. Das Bild lässt sich mit zwei Zügen zeichnen. Mit dem ersten Zug kann man den Umfang und eine Diagonale, mit dem zweiten die andere Diagonale zeichnen. Allgemein hat die Mindestzahl der Züge, mit denen sich ein gegebenes Bild zeichnen lässt, bereits im vorigen Jahrhundert der deutsche Mathematiker J. Listing bestimmt. Sein Satz lautet:

Wenn ein gegebenes Bild z Knotenpunkte ungeraden Grades hat, lässt es sich mit $\frac{1}{2}z$ Zügen zeichnen; eine kleinere Anzahl von Zügen genügt nicht.

5.7. Das Bild lässt sich mit zwei Zügen zeichnen.

5.8. Man kann diese drei Strukturformeln finden:



Die Chemiker kennen in der Tat drei Isomeren des Pentans: Normal-Pentan, Iso-Pentan, Tetramethyl-Methan.

5.9. Die Wege kann man z.B. so führen, wie es das Bild 66 veranschaulicht.

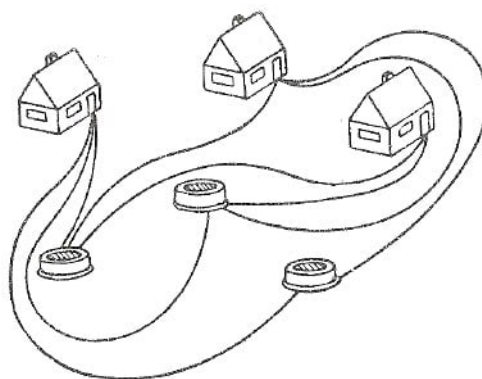


Bild 66

5.10. Es gibt mehrere Möglichkeiten für die Streckenführung, eine davon zeigt Bild 67, wo beide Kreuzungen durch auffallende Punkte markiert sind. Mit dieser Aufgabe hat sich 1954 der polnische Mathematiker K. Zarankiewicz befasst. (Sein Artikel wurde in der Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae*, Jg. 1954, S. 134-145 abgedruckt.)

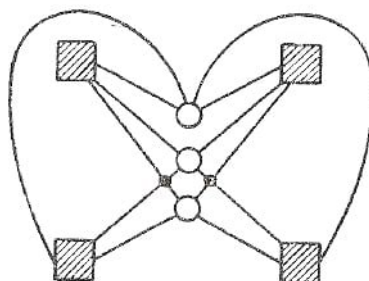


Bild 67

5.11. Man verbinde die Gemeinde D der Reihe nach mit den Gemeinden A, B, C; auf diese Weise entsteht eine 20 km lange Leitung. Man wird bemerkt haben, dass diese Leitung ein von uns Baum genanntes Bild formt. Wenn der Plan mehr als vier Gemeinden enthält, ist die Aufgabe, sie durch die kürzeste elektrische Leitung zu verbinden, viel schwieriger.

Unter ganz allgemeinen Bedingungen hat im Jahre 1926 Professor Boruvka dieses Problem gelöst; in der letzten Zeit haben sich einige tschechoslowakische Mathematiker erneut mit dieser Aufgabe befasst.

5.12. Man bezeichne sukzessiv mit x, y, z die Anzahl der Liter, die (zu einer bestimmten Zeit) im ersten, zweiten, dritten Gefäß enthalten sind. Die Zahlen x, y, z sind ganze Zahlen, und es gilt von ihnen

$$x + y + z = 8 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 8 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 5 \quad ; \quad 0 \leq z \leq 3$$

Natürlich werden wir beim Umfüllen nur jene Zustände in Betracht ziehen, bei denen wenigstens ein Gefäß leer oder eins voll ist. Es muss also mindestens eine dieser sechs Gleichungen befriedigt sein:

$$x = 0 \quad ; \quad x = 8 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad y = 5 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad z = 3$$

Man überzeugt sich leicht, dass alle die angeführten Bedingungen gerade bei den fol-

genden sechzehn Tripeln erfüllt sind:²⁷

800, 710, 701, 620, 602, 530, 503, 440, 413, 350, 323, 251, 233, 152, 143, 053

Die Aufgabe wird besonders übersichtlich, wenn man sie durch folgendes Diagramm veranschaulicht:

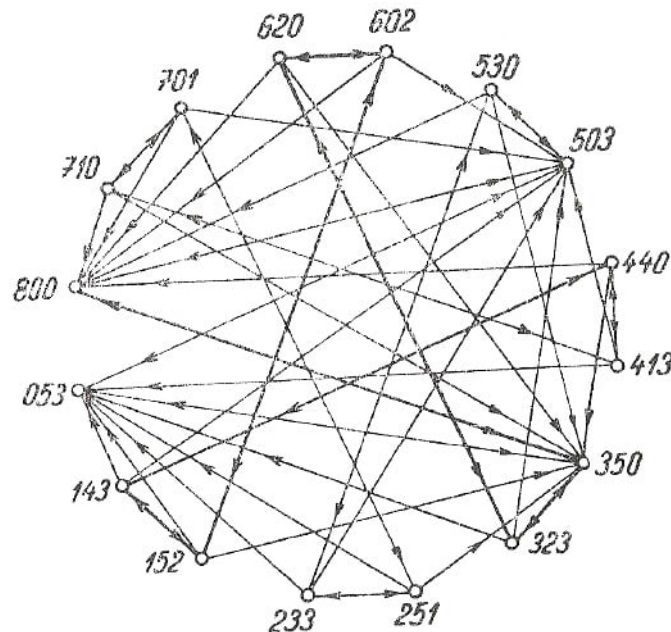


Bild 68

In einer Ebene wählt man 16 Punkte (in Bild 68 sind diese Punkte der Übersichtlichkeit wegen auf der Peripherie einer nicht gezeichneten Kreislinie liegend dargestellt); jedem von ihnen ordnet man eines der gefundenen Tripel zu. Aus dem mit dem Tupel xyz bezeichneten Punkt führt man einen Pfeil in den mit dem Tripel $x'y'z'$ bezeichneten Punkt gerade dann, wenn man den Zustand $x'y'z'$ aus dem xyz -Zustand durch nur eine Umfüllung gewinnen kann; auf diese Weise entstehen in Bild 68 im ganzen 58 Pfeile. Nach dem Text der Aufgabe soll man nun aus dem Zustand 800 in den Zustand 440 gelangen, wobei man nur in den durch die Pfeile bezeichneten Richtungen vorgehen darf.

Man findet leicht die kürzeste Lösung der gestellten Aufgabe; man verwendet dazu sieben Strecken; die Lösung ist in Bild 68 durch stärkere Linien veranschaulicht. Es gibt jedoch auch andere Lösungen, die zu finden wir dem Leser überlassen können (wir verraten nur, dass die Aufgabe insgesamt 16 Lösungen hat).

Anmerkung: Diese Aufgabe ist über 500 Jahre alt, die hier gebrachte grafische Lösung legte jedoch erst 1894 der französische Mathematiker G. Brunel vor.

6.1. Auf den ersten Blick scheint es, als müsse man die Leitung um einige hundert oder auch tausend Meter verlängern, um sie gleichmäßig auf dem ganzen Äquator um 10 cm

²⁷Das Tripel 800 bedeutet, dass das erste Gefäß 8 Liter enthält (voll ist), während das zweite und das dritte leer sind. Das Tripel 710 bedeutet, dass das erste Gefäß 7 Liter, das zweite 1 Liter enthält und das dritte leer ist; ähnliche Bedeutung haben auch die übrigen Tripel.

heben zu können. Man überprüfe jedoch diese Vermutung durch eine Berechnung.²⁸

Man bezeichne mit r den in cm ausgedrückten Halbmesser der Erde (es gilt $r \approx 638\,000\,000$ cm). Die ursprüngliche Länge der Leitung kann man dann durch $2\pi r$ (wobei $\pi \approx 3,14$), diejenige der Leitung in einer Höhe von 10 cm über der Erdoberfläche durch $2\pi(r + 10)$ ausdrücken. Der Unterschied zwischen diesen Längen ist dann die gesuchte Verlängerung:

$$2\pi(r + 10) - 2\pi r = 20\pi \text{ cm} \approx 62,8 \text{ cm}$$

Die Berechnung hat uns das überraschende Resultat gebracht, dass man den Draht nur ungefähr um 63 cm verlängern muss, um das beabsichtigte Experiment durchführen zu können.

6.2. Die Seite jedes Dreiecks ist $\frac{l}{n}$, der Umfang $\frac{3l}{n}$ und die Summe dieser Umfänge also

$$n \cdot \frac{3l}{n} = 3l$$

Wie man sieht, ist das Resultat von der Zahl n unabhängig.

6.3. Man erinnere sich, dass der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite a

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ist. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $\frac{l}{n}$ hat also den Flächeninhalt

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4n^2}$$

und die Summe n solcher Flächeninhalte ist also

$$n \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4n^2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4n}$$

Man sieht, dass mit anwachsendem n dieses Resultat stets kleiner wird und sich der Null "nähert".

6.4. Die Fliege kann in beliebigen Bahnen über dem Tisch, in der Ebene des Tisches und unter dem Tisch fliegen, wobei das Verhältnis

$$AS^2 + SC^2 = BS^2 + SD^2$$

stets erfüllt bleibt.

Wir wollen das zunächst für einen beliebigen in der Ebene des Tisches liegenden Punkt S_0 beweisen. Man bezeichne $AB = a$, $BC = b$, man wähle ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wie es Bild 69 zeigt.

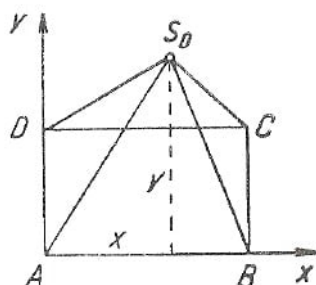


Bild 69

²⁸Die in unserer Aufgabe beschriebenen Bedingungen lassen sich natürlich nicht verwirklichen; an dem Problem ist aber sein paradoxes Resultat interessant.

Der Punkt S_0 hat dann die Koordinaten $[x, y]$. Es gilt:

$$AS_0^2 = x^2 + y^2$$

$$S_0C^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

so dass

$$AS_0^2 + S_0C^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$$

Ferner gilt

$$BS_0^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad ; \quad S_0D^2 = x^2 + (y - b)^2$$

so dass

$$BS_0^2 + S_0D^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$$

Hieraus folgt:

$$AS_0^2 + S_0C^2 = BS_0^2 + S_0D^2$$

Wenn sich die Fliege in der Höhe h über (oder unter) dem Tisch in dem Punkt S befindet, führt man durch den Punkt S eine Senkrechte zur Tischebene und bezeichnet den Fußpunkt dieser Senkrechten mit S_0 . Es gilt:

$$AS^2 = h^2 + AS_0^2; \quad SC^2 = h^2 + S_0C^2; \quad BS^2 = h^2 + BS_0^2; \quad SD^2 = h^2 + S_0D^2$$

Daraus folgt schon leicht die Gleichung $AS^2 + SC^2 = BS^2 + SD^2$.

6.5. Emil wird als Übeltäter von Karl und Rudolf, Johann wieder von Karl und Rudolf und. Karl von Emil und Rudolf angegeben. Keiner dieser drei Jungen kann also der Täter sein, denn nach der Erklärung des Lehrers muss der Schuldige von drei Verhörten genannt werden.

Rudolf wurde von Emil, Johann und Karl, d.h. von drei Jungen, beschuldigt. Er hat also das Fenster eingeschlagen.

6.6. Da ein Mensch höchstens 150000 Haare auf dem Kopf hat, kann man gerade 150001 Gruppen formen.

In die erste Gruppe reiht man alle die Prager Bürger ein, die kein Haar haben (die Anzahl der Haare ist 0), in die zweite die mit einem Haar, in die dritte diejenigen mit zwei Haaren. So fährt man fort, so dass in die letzte Gruppe die Bürger eingereiht werden, die gerade 150000 Haare haben.

Es ist ganz gut möglich, dass in eine der angeführten Gruppen gar keine Bürger eingereiht werden. Da jedoch die Stadt Prag mehr als 150001 Einwohner hat, muss es wenigstens in einer Gruppe mehr (mindestens zwei) Menschen geben. Diese Bürger werden die gleiche Anzahl Haare haben.²⁹

6.7. Wenn im Januar höchstens drei Schüler geboren worden wären, im Februar auch höchstens drei, im März auch usw., hätte die Klasse höchstens $3 \cdot 12 = 36$ Schüler gehabt. Da sie jedoch 40 Schüler hat, kann man vier (möglicherweise auch mehr) im selben Monat geborene Schüler ausfindig machen. Ohne nähere Kenntnisse über die

²⁹Diese Art Überlegung, die in den Aufgaben 6.6. und 6.7. vorkommt, wird Schubfachprinzip genannt.

Klasse gewonnen zu haben, können wir freilich nicht wissen, ob es im Januar, Februar oder einem anderen Monat der Fall war.

Man kann sich aber nicht verbürgen, dass in der Klasse fünf Schüler sind, die im selben Monat geboren wurden. Es könnte z.B. vorkommen, dass in jedem der zehn Monate (Januar bis Oktober) vier Schüler, im November und Dezember dagegen keine geboren wurden.

6.8. Der Junge kann folgendermaßen vorgehen: Er legt auf jede Waagschale je einen beliebigen Knopf; das Abwiegen zeigt ihm, welcher Knopf leichter ist. Diesen Knopf nimmt er von der Schale weg und ersetzt ihn durch einen dritten. Bei diesem (zweiten) Abwiegen wird wieder der leichtere Knopf ermittelt, der durch einen vierten ersetzt wird. So fährt der Junge fort, bis alle sieben Knöpfe abgewogen sind. Beim letzten (sechsten) Abwiegen bleibt auf einer Waagschale der gesuchte schwerste Knopf liegen.

6.9. Der Kürze wegen bezeichne man die Würfel der Reihe nach mit A, B, C. Dann gehen wir folgendermaßen vor.

Wir legen A auf eine Schale und B auf die andere (erstes Abwiegen). Wenn es zum Massenausgleich kommt, ist keiner der Würfel A, B falsch, sondern der Würfel C. (Ohne weiteres Abwiegen lässt sich jedoch nicht sagen, ob C leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist.)

Wenn es beim ersten Abwiegen zu keinem Massenausgleich kommt, ist einer der Würfel A, B falsch. Der Würfel C ist daher nicht falsch und kann bei weiterer Kontrolle benutzt werden.

Man leert die Waagschalen und legt auf eine den Würfel A, auf die andere den Würfel C (zweites Abwiegen). Wenn es jetzt zum Massenausgleich kommt, so ist der Würfel A normal, und falsch ist also der übrigbleibende Würfel B. (Vom ersten Abwiegen weiß man auch, ob B leichter oder schwerer als der Normal-Würfel ist.) Wenn es beim zweiten Abwiegen zu keinem Massenausgleich kommt, bedeutet das, dass A falsch ist; aus dem Ergebnis ist auch ersichtlich, ob der falsche Würfel leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist.

Wir haben damit gezeigt, dass zum Herausfinden des falschen Würfels tatsächlich ein zweimaliges Abwiegen genügt.

6.10. Der Kürze wegen bezeichne man die Würfel der Reihe nach mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G. Beim Abwiegen geht man z.B. so vor:

Auf eine Schale legt man die Würfel A, B, auf die andere die Würfel C, D (erstes Abwiegen). Man muß dabei zwei Fälle unterscheiden: a) es kommt zum Massenausgleich ; b) es kommt nicht zum Massenausgleich.

a) Wenn es zum Massenausgleich kommt, bedeutet das, dass keiner der Würfel A, B, C, D falsch ist. Man kann daher jeden beliebigen davon zur Kontrolle der übrigen Würfel E, F, G benutzen. Man entfernt die Würfel A, B, C, D von den Waagschalen und fährt folgendermaßen fort:

Auf eine Schale legt man A, auf die andere E (zweites Abwiegen). Wenn die Schalen nicht gleiche Massen enthalten, bedeutet es, dass der Würfel E falsch ist. Das Suchen

ist damit zu Ende. (Dadurch wird auch erwiesen, ob der falsche Würfel leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist.)

Wenn es beim zweiten Abwiegen zum Massenausgleich kommt, sind wir noch nicht fertig: Wir leeren die Waagschalen; auf die eine legen wir den Würfel A und auf die andere den Würfel F (drittes Abwiegen). Wenn es jetzt nicht zum Massenausgleich kommt, bedeutet es, dass der Würfel F falsch ist. (Zugleich ist auch ermittelt, ob der falsche Würfel leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist.)

Wenn es beim dritten Abwiegen zum Massenausgleich kommt, bedeutet es, dass der Würfel F nicht falsch ist. Daraus folgt, dass der übriggebliebene Würfel G falsch sein muss (wobei man jedoch nicht sagen kann, ob der falsche Würfel leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist, es sei denn, wir würden noch ein weiteres - viertes - Abwiegen durchführen).

b) Man kehre zum ersten Abwiegen zurück, bei dem auf der einen Schale die Würfel A, B und auf der anderen die Würfel C, D liegen. Wenn es bei diesem Abwiegen zu keinem Massenausgleich kommt, ist einer der Würfel A, B, C, D falsch. Die übrigen drei Würfel E, F, G sind nicht falsch, und man kann daher jeden beliebigen von ihnen (z.B. E) bei weiterer Kontrolle benutzen.

Man entferne von einer Schale den Würfel A und zugleich von der anderen Schale den Würfel C. Auf der einen Schale liegt jetzt also B, auf der anderen D (zweites Abwiegen). Kommt es zu keinem Massenausgleich, ist einer der Würfel B, D falsch. Es genügt also z.B., von der Schale den Würfel B wegzunehmen und an seine Stelle den Würfel E zu legen, von dem man weiß, dass er nicht falsch ist (drittes Abwiegen).

Wenn es jetzt zum Massenausgleich kommt, bedeutet es, dass der Würfel B falsch ist. (Dadurch wird auch zugleich festgestellt, ob der falsche Würfel leichter oder schwerer ist als die übrigen.) Wenn es jedoch beim dritten Abwiegen zu keinem Massenausgleich kommt, ist D der falsche Würfel (man sieht auch zugleich, ob er leichter oder schwerer als der Normalwürfel ist).

Es bleibt noch der Fall übrig, wenn es beim zweiten Abwiegen zu keinem Massenausgleich kommt. Dieser Fall bedeutet, daß einer der Würfel A, C, die wir nach dem ersten Abwiegen von den Schalen weggenommen haben, falsch sein muss.

Wir leeren daher beide Schalen; auf die eine legen wir den Würfel A und auf die andere den Würfel E (drittes Abwiegen). Wenn es jetzt nicht zum Massenausgleich kommt, ist A falsch (man sieht auch, ob er leichter oder schwerer als der normale ist).

Beim Massenausgleich ist der Würfel C falsch. (Ohne weiteres Abwiegen ist nicht zu ermitteln, ob er leichter oder schwerer ist als die übrigen Würfel.)

Damit wurde gezeigt, dass zum Herausfinden des falschen Würfels in jedem Falle ein dreimaliges Wiegen genügt.

6.11. Einer "Sestine", die in jeder Strophe acht Verse hätte, würde dieses Schema entsprechen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4; 4, 8, 5, 1, 3, 7, 6, 2; 2, 4, 6, 8, 7, 5, 3, 1.

Eine solche "Sestine" hätte also vier Strophen.

Analog kann sich der Leser selbst überzeugen, dass die "Sestine", deren Strophe zehn Verse hat, sechs Strophen enthält.

7.1. Man nimmt 95 Masseinheiten des ersten und y Masseinheiten des zweiten Alkohols. In der ersten Menge sind $\frac{40}{100}x$ Masseinheiten reinen Alkohols und $\frac{60}{100}x$ Masseinheiten von Wasser, in der zweiten Menge sind $\frac{70}{100}y$ Masseinheiten reinen Alkohols und $\frac{30}{100}y$ Masseinheiten von Wasser enthalten. Den Bedingungen der Aufgabe gemäß gilt

$$\frac{40x}{100} + \frac{70y}{100} = \frac{60x}{100} + \frac{30y}{100}$$

Nach einer Vereinfachung erhält man das Verhältnis

$$4x + 7y = 6x + 3y \quad \rightarrow \quad 2y = x \quad \rightarrow \quad x : y = 2 : 1$$

Der Alkohol ist im Verhältnis 2 : 1 zu mischen.

7.2. Das Verhältnis 2 : 3, in dem die Rohstoffe gemischt wurden, bedeutet, dass man 2 k Masseinheiten der ersten und 3 k Masseinheiten der zweiten Sorte verbraucht hat. Der Antimongehalt (in Masseinheiten ausgedrückt) ist:

$$\begin{array}{ll} \text{im ersten Schriftmetall} & 0,20 \cdot 2 \, k = 0,40 \, k \\ \text{im zweiten Schriftmetall} & 0,14 \cdot 3 \, k = 0,42 \, k \\ \text{in der neuen Legierung} & 0,82 \, k \end{array}$$

Die Gesamtmasse der neuen Legierung ist 5 k (Masseinheiten); nun berechnet man, wieviel Prozent Antimon die resultierende Legierung enthält:

$$0,82k : 0,05k = 82 : 5 = 16,4$$

Der Zinngehalt (in Masseinheiten) ist folgender:

$$\begin{array}{ll} \text{im ersten Schriftmetall} & 0,05 \cdot 2 \, k = 0,10 \, k \\ \text{im zweiten Schriftmetall} & 0,07 \cdot 3 \, k = 0,21 \, k \\ \text{in der neuen Legierung} & 0,31 \, k \end{array}$$

Jetzt berechnet man, wieviel Prozent Zinn die resultierende Legierung enthält:

$$0,31k : 0,05k = 31 : 5 = 6,2$$

Der Bleigehalt (in Masseinheiten) ist folgender:

$$\begin{array}{ll} \text{im ersten Schriftmetall} & 0,75 \cdot 2 \, k = 1,50 \, k \\ \text{im zweiten Schriftmetall} & 0,79 \cdot 3 \, k = 2,37 \, k \\ \text{in der neuen Legierung} & 3,87 \, k \end{array}$$

Man berechnet, wieviel Prozent Blei die resultierende Legierung enthält:

$$3,87k : 0,05k = 387 : 5 = 77,4$$

Wir haben also gefunden, dass das neue Schriftmetall 16,4 % Antimon, 6,2 % Zinn und 77,4 % Blei enthält.

Abschließend wollen wir bemerken, daß wir die Schlussberechnung (den Bleiinhalt im neuen Schriftmetall betreffend) nur der Kontrolle halber ausgeführt haben; denn wir kennen die Summe $16,4 + 6,2 + 77,4 = 100$.

7.3. Wir wollen zeigen, dass sich die Autobusse gerade in der Gemeinde C treffen (was freilich nicht bedeutet, dass sie dort gleichzeitig ankommen). Wenn man die Haltezeit in C abzieht, dauert die Fahrzeit von A nach B gerade 80 Minuten.

Davon entfallen $\frac{4}{9}$ auf die Strecke AC und der Rest, $\frac{5}{9}$, auf die Strecke CB. Man berechnet

$$\frac{4}{9} \cdot 80 = \frac{320}{9} = 35\frac{5}{9} \quad ; \quad \frac{5}{9} \cdot 80 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9} \quad ; \quad 44\frac{4}{9} - 35\frac{5}{9} = 8\frac{8}{9}$$

Der aus B kommende Autobus kommt also in C um $8\frac{8}{9}$ Minuten später an als der aus A kommende. Da der Aufenthalt in C länger als $8\frac{8}{9}$ Minuten ist, treffen sich die Autobusse tatsächlich in der Gemeinde C.

7.4. Wenn man dieses Problem lösen will, muss man sich zunächst darüber klar werden, was die in der Aufgabe enthaltenen Angaben bedeuten. Die Einwohnerzahl in den einzelnen Gemeinden kann der Betriebsleitung angenähert zeigen, wie sich der Verbrauch der Erzeugnisse gestalten wird. Es lässt sich annehmen, dass das Verhältnis der Fahrtenanzahl in die einzelnen Gemeinden (für einen größeren Zeitabschnitt) etwa $450 : 600 : 150 : 900 : 400$ sein wird.

So wird man in einem Jahr nach A $450k$ Fahrten, nach B, C, D, E dann der Reihe nach $600k$, $150k$, $900k$, $400k$ unternehmen müssen, wobei k eine positive Zahl ist, die davon abhängt, wieviel Erzeugnisse man jährlich (auf einen Einwohner) plant.

Das Warenlager wird dort eingerichtet, von wo aus die geplante Verteilung der Erzeugnisse am billigsten wird. Wenn man es in A errichten würde, wäre die in einem Jahr bei den Hin- und Herfahrten zurückgelegte Kilometeranzahl

$$450k \cdot 0 + 600k \cdot 8 + 150k \cdot (8 + 13) + 900k(8 + 13 + 3) + 400k(8 + 13 + 3 + 8) \\ = 4800k + 3150k + 21600k + 12800k = 42350k$$

Wenn das Lager in B errichtet wird, beträgt diese Anzahl

$$450k \cdot 8 + 600k \cdot 0 + 150k \cdot 13 + 900k(13 + 3) + 400k(13 + 3 + 8) \\ = 3600k + 1950k + 14400k + 9600k = 29550k$$

Errichtet man das Warenlager- in der Gemeinde C, wird die Kilometeranzahl

$$450k(8 + 13) + 600k \cdot 13 + 150k \cdot 0 + 900k \cdot 3 + 400k \cdot (3 + 8) \\ = 9450k + 7800k + 2700k + 4400k = 24350k$$

betragen. Befände sich das Lager in der Gemeinde D, würde die Kilometeranzahl

$$450k(8 + 13 + 3) + 600k(13 + 3) + 150k \cdot 3 + 900k \cdot 0 + 400k \cdot 8 \\ = 10800k + 9600k + 450k + 3200k = 24050k$$

sein. Wenn schließlich das Warenlager in der Gemeinde E errichtet würde, müsste man jährlich

$$450k(8 + 13 + 3 + 8) + 600k(13 + 3 + 8) + 150k(3 + 8) + 900k \cdot 8 + 400k \cdot 0 \\ = 14400k + 14400k + 1650k + 7200k = 37650k$$

Kilometer zurücklegen.

Wir haben der Reihe nach folgende Resultate erhalten: 42350 k , 29550 k , 24350 k , 24050 k , 37650 k ; aus ihnen ist ersichtlich, dass es am günstigsten sein wird, das Warenlager in der Gemeinde D zu errichten.

7.5. Man bezeichne die Schiffslänge (in Schritten) mit x . Bevor Kurt einen Schritt macht, rückt das Schiff um y seiner Schritte auf der Landstraße vorwärts.

Bevor also Kurt 120 Schritte macht, wird sich das andere Ende des Schiffes, dem er zustrebt, um $120y$ Schritte vorwärtsbewegt haben. Man sieht, dass die Länge der 120 Schritte Kurts $x + 120y$ gleich ist. Für die entgegengesetzte Richtung sind 30 Schritte längs des Schiffes erforderlich.

Inzwischen hat sich jedoch das andere Frachtende um die Länge $30y$ genähert, so dass $x - 30y = 30$ gilt. So haben wir das Gleichungssystem

$$x + 120y = 120 \quad ; \quad x - 30y = 30$$

erhalten.

Man kann es z.B. durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Gleichung lösen. Man erhält $120y + 30y = 120 - 30$ oder $150y = 90$. Hieraus folgt

$$y = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$$

Wenn man dieses Resultat in die zweite Gleichung unseres Systems einsetzt, erhält man

$$x - 30 \cdot \frac{3}{5} = 30$$

oder $x = 48$. Wir haben festgestellt, dass das Schiff 48 Schritte Kurts misst.

7.6. Man berechnet die Wassermenge (in Kubikdezimetern), die je Stunde durch ein Rohr zufließt, d.h., man bestimmt das Volumen eines Rotationszylinders mit dem Baisshalbmesser 1 dm und der Höhe 36000 dm:

$$V = \pi \cdot 1 \text{ dm}^2 \cdot 36000 \text{ dm} = 36000\pi \text{ dm}^3$$

In 8 Stunden fließen also durch zwei Rohre $8 \cdot 2 \cdot V$ Wasser, d.h. ungefähr 1810000 Liter zu. Zum Waschen sind jedoch nur etwa 9750 dt notwendig, d.h. 975000 Liter, so dass die beiden Rohre genügen.

7.7. Jede Dezitonne frisch gewonnener Kohle enthält 2 kg Wasser, so dass die Masse gänzlich trockener Kohle 98 kg wäre. Durch Einfluss von Witterungsverhältnissen enthält die Kohle später 13 % Wasser, also 87 % trockener Kohle; daher entsteht aus

jeder Dezitonne eine Masse, von der 87 % 98 kg entsprechen. Man berechnet $98 : 87 \approx 1,126$, was 1 % gleich ist.

Die Masse jeder Dezitonne ist also angenähert auf 112,6 kg gestiegen, d.h., sie hat sich um etwa 12,6 % vergrößert.

7.8. Wenn fünf Maurer in 14 Tagen die Aufgabe zur Hälfte erfüllt haben, leistet ein Maurer in einem Tag ungefähr $\frac{1}{140}$ der Arbeit. In sechs Tagen leisten 5 Maurer $\frac{5 \cdot 6}{140} = \frac{3}{14}$ der Arbeit; man berechne, ein wie großer Teil der Arbeit noch übrigbleibt:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{14} = \frac{14 - 7 - 3}{14} = \frac{2}{7}$$

Es bleiben also $\frac{2}{7}$ der Arbeit übrig. Die Zahl der Arbeiter, die diesen Teil in 6 Tagen bewältigen, erhält man, wenn man

$$\frac{2}{7} : \frac{6}{140} = \frac{2}{7} \cdot \frac{140}{6} = 6\frac{2}{3}$$

dividiert.

Man wird dem Bau also noch weitere 7 Arbeiter zuweisen müssen; dann lässt sich freilich erwarten, dass die Arbeit früher als in den festgesetzten Tagen geleistet wird.

Anmerkung: Bei Aufgaben dieser Art muss man sich vergegenwärtigen, dass die Berechnung nur eine Näherung ist. Es kommt hier nämlich sehr wesentlich auf die Arbeitsfähigkeiten der einzelnen Maurer (die fast nie ganz gleich sind) an sowie auf die Arbeitsbedingungen während der einzelnen Tage.

Man muss auch darauf achten, dass die Frage, die wir stellen, sinnvoll bleibt. Wenn man z.B. in der Frage der Aufgabe 7.8. verlangte, dass die Maurer die zweite Hälfte der Mauer in einem Tag fertigbauen sollten, würde man leicht errechnen, dass noch 65 Maurer erforderlich waren. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass 70 Maurer die Aufgabe während eines Tages nicht erfüllen könnten, da sie einander im Wege stünden.

7.9. Man bezeichne die Länge des standardisierten Formats A0 mit a und die Breite mit b (in Millimetern). Das Format A1 ist also ein Rechteck mit den Seiten $\frac{a}{2}$, b ; $\frac{a}{2}$ ist offensichtlich die Breite und b die Länge des Formats A1, denn sonst wäre die Forderung der Ähnlichkeit nicht erfüllt. Es gilt also

$$a : b = b : \frac{a}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{2} = b^2$$

Da a, b positive Zahlen sind, folgt daraus, dass

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = b \quad \text{oder} \quad a : b = \sqrt{2}$$

Dadurch haben wir das Seitenverhältnis des genormten Formats berechnet.

Da der Inhalt des Formats A0 1000000 mm^2 ist, erhalten wir die Gleichung $a \cdot b = 1000000 \text{ mm}^2$. In diese setzen wir nun $a = b\sqrt{2}$; wir erhalten, dass $b^2\sqrt{2} = 1000000 \text{ mm}^2$ oder dass

$$b = \frac{1000}{\sqrt[4]{2}} \text{ mm}$$

Ein Leser, der logarithmieren kann, berechnet leicht, dass $b \approx 841$ mm gleich ist. Es gilt nämlich $\sqrt{2} \approx 1,414$, so dass $\sqrt[4]{2} \approx \sqrt{1,414} \approx 1,19$, und daher $b \approx 1000 \text{ mm} : 1,19$.

Die Division führt wieder zu einer Näherung $b \approx 841$ mm.

Ferner berechnet man, dass $a = b\sqrt{2} \approx 1189$ mm.

Das genormte Format A0 ist also ein Rechteck, 841 mm breit und 1189 mm lang. Das Seitenverhältnis der Formate A1, A2, A3, ... berechnet man schon leicht (man rundet sie auf Millimeter ab). Das Format A1 ist 594 mm breit und 841 mm lang, A2 420 mm breit und 594 mm lang, A3 297 mm breit und 420 mm lang usw.

7.10. Man berechnet, wieviel Viertel durchschnittlich je Tag auf einen Schüler entfallen sind. Den Ertrag von 2242 Vierteln dividieren wir durch den Quotienten $9 \cdot 31 = 279$. Es gilt $2242 : 279 \approx 8,03$; in der ersten der beiden Klassen hat jeder Schüler durchschnittlich 8,03 Viertel täglich gepflückt.

Die zweite Klasse hat folgendermaßen gearbeitet: für 4 Tage 33 Schüler und für 4 Tage nur 32 Schüler. Man wird den Ertrag von 2125 Vierteln durch die Zahl $4 \cdot 33 + 4 \cdot 32 = 260$ dividieren. Es gilt $2125 : 260 \approx 8,17$; in der zweiten Klasse hat also jeder Schüler durchschnittlich 8,17 Viertel täglich gepflückt. Die Leistung der zweiten Klasse war also besser.

7.11. Ohne jedes Rechnen sieht man, dass das Ergebnis 0,13 von der Gruppe der übrigen Zahlenangaben auffallend absticht. Durch Berechnung überzeugt man sich auch leicht, dass gerade die Probe 0,13 die größte Abweichung vom arithmetischen Mittel aufweist.

Wenn man alle zwanzig Zahlenangaben addiert, bekommt man 1,58; das arithmetische Mittel ist also 0,079. Von diesem arithmetischen Mittel weicht wirklich die Messung 0,13 am meisten ab; die entsprechende Abweichung vom arithmetischen Mittel ist $0,079 - 0,13 = -0,051$.

7.12. Die Abweichungen vom arithmetischen Mittel sind 0,05; 0; 0,02; -0,06; -0,01; -0,02; -0,03; 0,03; 0; 0,02, ihre zweiten Potenzen 0,0025; 0; 0,0004; 0,0036; 0,0001; 0,0004; 0,0009; 0,0009; 0; 0,0004, die Summe dieser zweiten Potenzen ist 0,0092 und das gesuchte arithmetische Mittel also 0,00092.

Anmerkung: Analoge Berechnungen sind in der Praxis häufig, insbesondere, wenn man feststellen will, in welchem Maße die gemessenen Werte, um das arithmetische Mittel "gehäuft", oder "gestreut" sind. Das Resultat dieser Berechnung wird Streuung genannt. In unserem numerischen Beispiel kann man sehen, dass die gemessenen Werte sich um das arithmetische Mittel 2,15 "häufen", so dass auch die Streuung klein ist (0,00092).