

---

**Manfred Rehm**

**Strecke, Kreis, Zylinder**

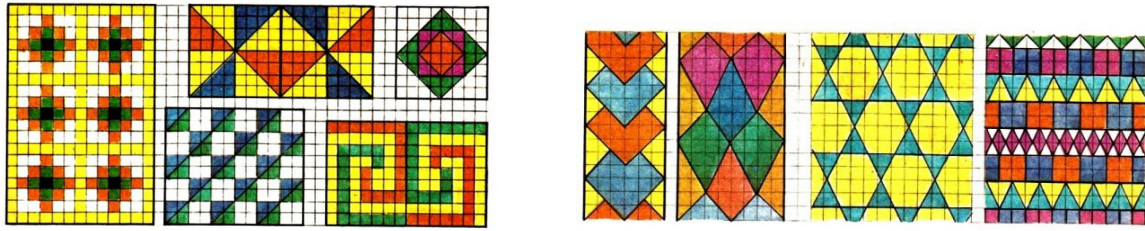
Abbildungen von Gerd Ohnesorge  
1977 Kinderbuchverlag Berlin  
MSB: Nr. 91  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2020

<https://mathematikalpha.de>

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Allerlei Muster</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Dreieck</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Flächenmessung</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Kegel</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Kreis</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Kugel</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Längenmessung</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Mit Lineal, Zeichendreieck und Zirkel</b>	<b>16</b>
<b>9</b>	<b>Netze von Körpern</b>	<b>18</b>
<b>10</b>	<b>Ohne abzusetzen</b>	<b>19</b>
<b>11</b>	<b>Parallelogramm</b>	<b>20</b>
<b>12</b>	<b>Prisma</b>	<b>22</b>
<b>13</b>	<b>Pyramide</b>	<b>23</b>
<b>14</b>	<b>Quader</b>	<b>25</b>
<b>15</b>	<b>Quadrat</b>	<b>26</b>
<b>16</b>	<b>Raummessung</b>	<b>28</b>
<b>17</b>	<b>Rechteck</b>	<b>30</b>
<b>18</b>	<b>Strecke, Punkt, Gerade, Strahl</b>	<b>31</b>
<b>19</b>	<b>Trapez</b>	<b>33</b>
<b>20</b>	<b>Umfang von Figuren</b>	<b>34</b>
<b>21</b>	<b>Viereck</b>	<b>36</b>
<b>22</b>	<b>Winkel</b>	<b>38</b>
<b>23</b>	<b>Würfel</b>	<b>40</b>
<b>24</b>	<b>Zylinder</b>	<b>42</b>

# 1 Allerlei Muster



Diese farbigen Ziermuster bestehen nur aus einfachsten geometrischen Figuren, aus Quadraten, Rechtecken oder rechtwinkligen Dreiecken.

Ist es nicht erstaunlich, wie schön und interessant sie trotzdem sind? Das angedeutete Karogitter macht das Nachzeichnen leicht. Am schönsten wirken sie, wenn man beim Zeichnen Karopapier nur unterlegt, so dass die Karos im fertigen Muster nicht zu sehen sind.

Beim Anfertigen dieser beiden Zierbänder, insbesondere bei den Drachenvierecken, ist darauf zu achten, dass sie wirklich alle deckungsgleich werden. Mit den folgenden beiden Mustern kann man nicht nur ein Band, sondern eine Fläche von beliebiger Größe verzieren, indem man sie mit Quadraten, Dreiecken oder Sechsecken lückenlos und vollständig bedeckt.

Fußwege und Plätze ließen sich so mit entsprechend geformten Pflasterplatten gestalten. Manchmal findet man solche Muster in Museen, alten Schlössern oder Kirchen, deren Fenster aus farbigen Glasstückchen zusammengesetzt sind.

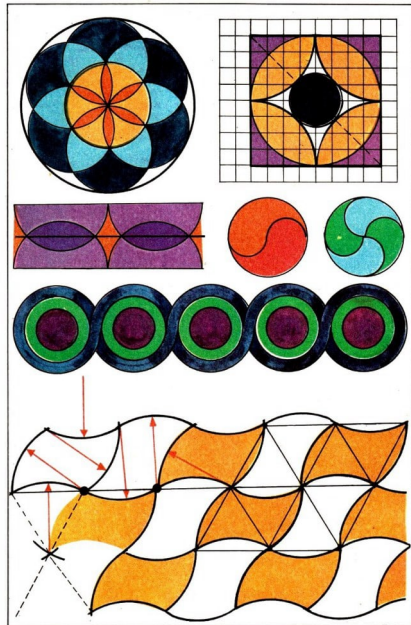
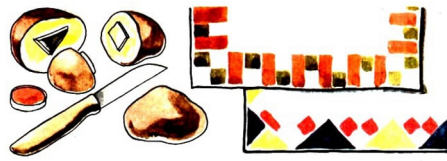
Wer etwas nachdenkt und probiert, wird gewiss solche Ziermuster selbst entwerfen können. Auch Kreise lassen sich dafür nutzen. Die linke Figur (S. 4 links oben) zum Beispiel besteht aus sieben gleichgroßen Kreisen, die einander schneiden. Ebenso einfach ist das Zierband mit einander schneidenden Halbkreisen. Die rechte Figur dagegen ist etwas schwieriger. Sie setzt sich zusammen aus einem Quadrat, aus vier Viertelkreisen, deren Mittelpunkte die Eckpunkte des Quadrates sind, und aus zwei Kreisen, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrates ist. Der große Kreis berührt von innen das Quadrat, der kleine von außen die vier Viertelkreise.

Wer das Muster von S. 4 links unten nachzeichnen will, muss genau hinsehen. Man benötigt dazu als Untergrund ein "Gitter", das aus aneinandergrenzenden gleichseitigen Dreiecken besteht. Am besten ist es, wenn man sich zunächst ein solches Gitter so herstellt, dass man es durch Transparentpapier gut erkennen kann. Dann schlägt man, wie in der Zeichnung zu erkennen ist, eine Vielzahl von Kreisbögen um die Gitterpunkte. Wer es schafft, hat sicher Freude an diesem ausgefallenen Muster.

Ziermuster lassen sich auch praktisch nutzen. Aus einer (nicht zu kleinen) Kartoffel oder (nicht zu großen) Kohlrübe kann man sich einen Stempel ausschneiden und damit zum Beispiel den Rand einer weißen Stoffserviette farbig bedrucken.

Als Farbe eignet sich dafür vor allem Malfarbe für Textilien. Zu Beginn sollte man allerdings nur Muster wählen, die sich aus sehr einfachen Figuren zusammensetzen, da

das Schneiden eines solchen Stempels nicht ganz leicht ist.



**Drachenviereck (siehe Viereck)**

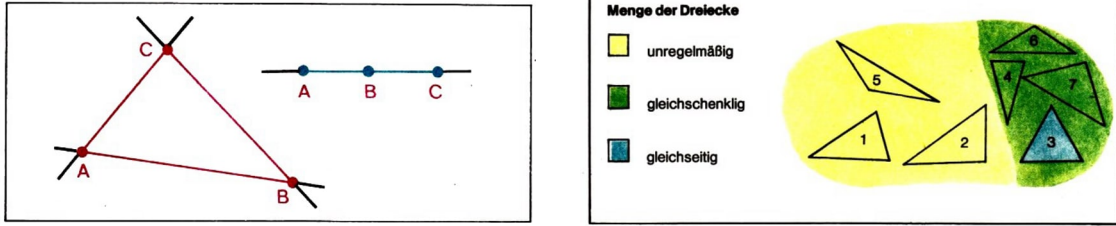
## 2 Dreieck



An diesen Gegenständen kann man eine Vielzahl von Dreiecken entdecken. Jedes Dreieck wird bestimmt durch drei Eckpunkte. Sie liegen in keinem Fall auf ein und derselben Geraden. Drei Punkte einer Geraden bestimmen nämlich kein Dreieck.

Die drei Verbindungsstrecken der Eckpunkte eines Dreiecks heißen Seiten. Sie schließen eine Dreiecksfläche ein, die aus allen Punkten, die auf den drei Seiten und im Innern des Dreiecks liegen, besteht. Zum Dreieck selbst rechnet man nur die Punkte, die auf den Seiten liegen.

Manchmal, zum Beispiel bei einem Gittermast, kommt es auf das Dreieck an, dagegen bei einem Dreieckssegel auf die Dreiecksfläche.

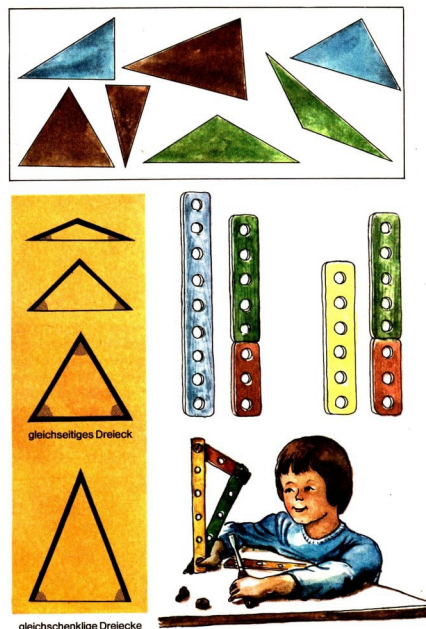


Die Seiten eines Dreiecks können untereinander verschieden lang sein. Es gibt aber auch Dreiecke, bei denen zwei oder gar alle drei Seiten gleich lang sind. Solche Dreiecke nennt man gleichschenklige Dreiecke, und die gleich langen Seiten heißen Schenkel des Dreiecks.

Gleichschenklige Dreiecke enthalten aber auch mindestens zwei gleich große Winkel. Man erkennt leicht, dass die Dreiecke [3], [4], [6] und [7] gleichschenkelig sind, da in ihnen mindestens zwei Seiten gleich lang sind. Das Dreieck [3] hat sogar drei gleich lange Seiten. Solche speziellen gleichschenkligen Dreiecke heißen gleichseitig. In ihnen sind alle Winkel gleich groß. Die Dreiecke [1], [2] und [5] nennt man dagegen unregelmäßig.

Die Menge der Dreiecke lässt sich also aufspalten in die Menge der unregelmäßigen und die Menge der gleichschenkligen Dreiecke, die als Teilmenge die Menge der gleichseitigen Dreiecke enthält.

So unterschiedlich lang die Seiten eines Dreiecks auch sein können, beliebig vorgehen lassen sie sich allerdings nicht. Man merkt das zum Beispiel, wenn man mit den Lochstäben eines Baukastens einen dreieckigen Rahmen herstellen will.



Mit den Stäben links kann dies nicht gelingen, da der rote und grüne Stab zusammen nicht länger als der blaue sind. Mit den Stäben rechts dagegen kann man einen solchen Rahmen leicht bauen. Aus drei gegebenen Strecken lässt sich also nur dann ein Dreieck bilden, wenn jeweils zwei Strecken zusammen länger sind als die dritte.



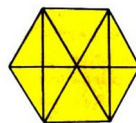
Hat man nun einen dreieckigen Rahmen gebaut, so ist es nicht möglich, dessen Form zu verändern. Er ist stabil. So lassen sich auch die vielen Dreiecke erklären, die man an Kränen und Gittermasten sieht, denen sie Festigkeit und Halt geben. Auch beim Bau einer Holztür befestigt man zusätzlich ein Brett, um Dreiecke zu erhalten. Sonst würde sie sich bald verziehen.



Die an den Eckpunkten jedes Dreiecks liegenden Winkel können ebenso wie seine Seiten verschieden groß sein. Manche sind rechte Winkel, manche kleiner oder auch größer als ein rechter Winkel.

Denkt man sich aber für jedes Dreieck die Winkel aneinandergesetzt, so würden sie zusammen stets einen Winkel bilden, der doppelt so groß ist wie ein rechter Winkel. Dreiecke können also höchstens einen Winkel enthalten, der mindestens so groß wie ein rechter Winkel ist. Sonst würden die drei Winkel zusammen größer als zwei rechte Winkel sein. Dreiecke mit einem rechten Winkel nennt man rechtwinklig. Solche Dreiecke sind zum Beispiel [1] und [6]. Dreiecke mit einem Winkel, der größer als ein rechter Winkel ist, zum Beispiel [5] und [7], heißen stumpfwinklig. Alle übrigen (zum Beispiel [2], [3] und [4]) nennt man spitzwinklige Dreiecke. In ihnen ist jeder Winkel kleiner als ein rechter Winkel.

Die Menge der Dreiecke lässt sich daher auch aufspalten in die Menge der spitzwinkligen, die Menge der rechtwinkligen und die Menge der stumpfwinkligen Dreiecke.



Diese Figur enthält insgesamt 22 verschiedene Dreiecke. Versuch einmal, alle herauszufinden und festzustellen, wieviel davon spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig, gleichschenkelig, gleichseitig oder unregelmäßig sind.

## 3 Flächenmessung

Jana will mit ihrem Vater zwei Teppiche kaufen. Der eine soll 4 m lang und 3 m breit sein, der andere 3 m lang und 2 m breit. Sie wundert sich, dass der größere doppelt so teuer wie der kleinere ist, obwohl er an jeder Seite nur ein Meter länger ist und beide Teppiche aus dem gleichen Material bestehen.



Der Vater erklärt ihr, dass die große Teppichfläche gerade zweimal so groß wie die kleine ist. Wie aber lässt sich die Größe oder, wie man besser sagt, der Inhalt einer solchen Fläche bestimmen?



Im praktischen Leben ist es häufig erforderlich, Flächeninhalte zu ermitteln. Der Preis einer Fensterscheibe hängt - wie bei einem Teppich - davon ab, wie groß ihre Fläche ist.

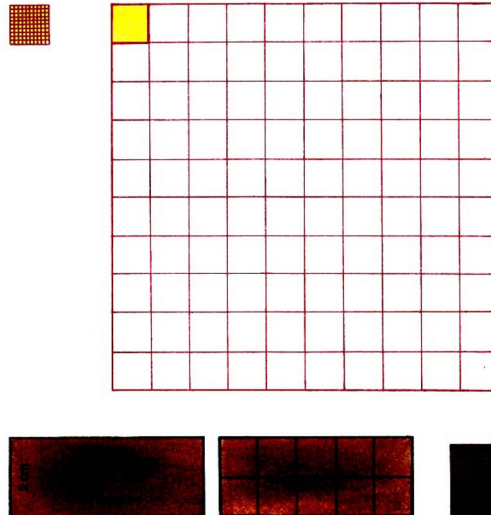
Will man einen Fußboden oder eine Wand streichen, so muss man für den Kauf der Farbe die Größe der zu streichenden Fläche wissen. Und genauso ist es, wenn man in einem Garten Gras ansäen will. Die Menge des erforderlichen Samens wird bestimmt von der Größe der anzulegenden Rasenfläche.

Es ist also notwendig, Flächen zu messen. Dazu benötigt man ein Flächenmaß, eine sogenannte Einheitsfläche, mit der die zu messende Fläche verglichen werden kann. Solche Flächenmaße sind Quadrate, deren Seitenlängen gleich einem Längenmaß sind, also 1 m, 1 dm, 1 cm oder 1 mm.

Beim Messen sehr großer Flächen benutzt man als Maß auch ein Quadrat der Seitenlänge 1 km. Diese Flächenmaße bezeichnet man entsprechend mit Quadratmeter, Quadratdezimeter, Quadratzentimeter, Quadratmillimeter oder aber Quadratkilometer. Daneben gibt es auch noch die beiden Flächenmaße Ar und Hektar. Sie entsprechen Quadraten, deren Seiten 10 m beziehungsweise 100 m lang sind.

Flächenmaße	Abkürzung	Seitenlänge des Einheitsquadrats	
Quadratmillimeter	mm <sup>2</sup>	1 mm	
Quadratzentimeter	cm <sup>2</sup>	1 cm	1 cm <sup>2</sup> = 100 mm <sup>2</sup>
Quadratdezimeter	dm <sup>2</sup>	1 dm	1 dm <sup>2</sup> = 100 cm <sup>2</sup>
Quadratmeter	m <sup>2</sup>	1 m	1 m <sup>2</sup> = 100 dm <sup>2</sup>
Ar	a	10 m	1 a = 100 m <sup>2</sup>
Hektar	ha	100 m	1 ha = 100 a
Quadratkilometer	km <sup>2</sup>	1 km	1 km <sup>2</sup> = 100 ha

Welches Flächenmaß man jeweils verwendet, hängt davon ab, ob die zu messende Fläche groß oder klein ist und wie genau man sie messen will. Die Fläche des braunen Rechtecks wird man gewiss in Quadratzentimetern und die eines Teppichs in Quadratmetern angeben, große Ackerflächen dagegen in Hektar und die Flächen ganzer Länder in Quadratkilometern.



Hundert Einheiten eines Flächenmaßes ergeben stets das nächst größere Flächenmaß. Misst man nun eine Rechtecksfläche mit einer dieser Flächeneinheiten, so ermittelt man, wieviel davon in dem Rechteck enthalten sind.

Den Inhalt der braunen Rechtecksfläche, deren Seiten 2 cm und 5 cm lang sind, kann man bestimmen, indem man sie mit  $\text{cm}^2$ -Einheitsquadraten auslegt.

Da man dafür 10 solcher Einheitsquadrate benötigt, beträgt ihr Flächeninhalt  $10 \text{ cm}^2$ .

Genauso lässt sich der Inhalt der roten Rechtecksfläche ermitteln. Als Maßeinheit kommt hier natürlich  $\text{mm}^2$  in Frage. Die Teppichflächen könnte man durch Auslegen mit Einheitsquadraten der Seitenlänge 1 m messen.

Bei Rechtecksflächen kann man den Inhalt aber auch ohne Auslegen ermitteln. Da bei dem braunen Rechteck an der unteren Seite 5 Einheitsquadrate anliegen und insgesamt 2 solcher Streifen das Rechteck überdecken, müssen es  $5 \cdot 2$  Einheitsquadrate sein. So lassen sich auch die rechteckigen Teppichflächen berechnen:

Abmessungen	Flächeneinheit	Anzahl der Quadrate	Flächeninhalt
2 m, 3 m	$\text{m}^2$	$2 \cdot 3 = 6$	$6 \text{ m}^2$
3 m, 4 m	$\text{m}^2$	$3 \cdot 4 = 12$	$12 \text{ m}^2$

Der größere Teppich ist also tatsächlich doppelt so groß und daher doppelt so teuer wie der kleinere.

Schwieriger wird es, wenn man den Inhalt von nicht rechteckigen Flächen bestimmen soll. Dreiecks- oder gar Kreisflächen lassen sich auf keinen Fall auf diese Weise auslegen. Überleg einmal, wie man wenigstens annähernd den Inhalt solcher Flächen ermitteln kann.

**Gerade (siehe Strecke, Punkt, Gerade, Strahl)**

## 4 Kegel

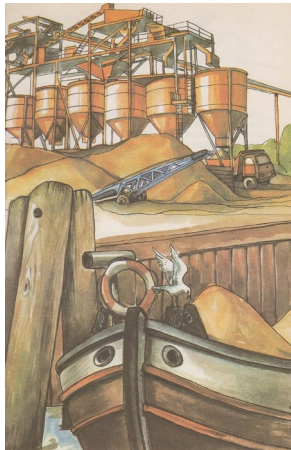
Wenn Uwe losen Sand aus seiner Hand rieseln lässt, ohne sie dabei zu bewegen, so entsteht ein kleiner Sandberg von der Form eines Kegels.



Genau das gleiche geschieht, wenn Kies von einem Förderband abkippt: Ein kegelförmiger Kieshaufen wird aufgeschüttet, ein Schüttkegel entsteht.



Auf Gegenstände von der Form eines Kegels treffen wir auch bei anderen Gelegenheiten. Die Dächer runder Türme oder mancher Zirkuszelte sind ebenso kegelförmig wie der vordere Teil eines gut angespitzten Bleistiftes oder die Spitzen von Raketenflugzeugen, wie unterschiedlich groß diese Gegenstände auch sein mögen und aus welchem Material sie auch bestehen.



Beschneidet man eine spitze Einkaufstüte so, dass alle Punkte des Schnittrandes von der Tütenspitze gleich weit entfernt sind, und formt den Rand dann zu einem Kreis, so erhält die Tüte ebenfalls die Form eines Kegels.

Schneidet man sie nun längs einer durch die Tütenspitze gehenden geraden Linie auf - zum Beispiel längs der Klebnaht - und breitet das Papier auf dem Tisch aus, so sieht man, dass es die Form eines Kreisausschnitts hat.

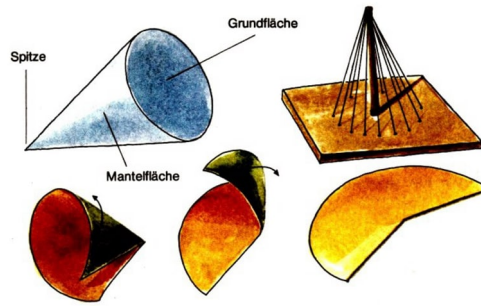
Umgekehrt kann man aus einem solchen Kreisteil wieder einen Kegel herstellen. Auf diese Weise kann man sich bequem einen Silvesterhut aus Buntpapier kleben. Natürlich darf man dabei nicht den Kleberand vergessen.



An unserer Kegel-Tüte lassen sich recht gut Eigenschaften eines Kegels erkennen. Jeder Kegelskörper hat eine Spitze.

Er wird begrenzt von einer ebenen (bei der Kegel-Tüte allerdings unsichtbaren) kreisförmigen Grundfläche und von einer gekrümmten Fläche, dem Kegelmantel. Obwohl diese Mantelfläche gekrümmt ist, lässt sie sich in eine ebene Fläche "abwickeln".

Aus diesem Grund sind kegelförmige Strandhüte sehr praktisch. Man kann sie als flache "Scheibe" im Koffer mitnehmen.



In der Technik wird manchmal auch ein Gegenstand als Kegel bezeichnet, der eigentlich nur ein Teil eines Kegels ist, nämlich ein Kegelstumpf. Genau genommen ist es nicht gerechtfertigt, die in der Zeichnung unten links abgebildeten Zahnräder als Kegelräder zu bezeichnen, da ihre Grundform nicht die eines Kegels, sondern die eines Kegelstumpfes ist.

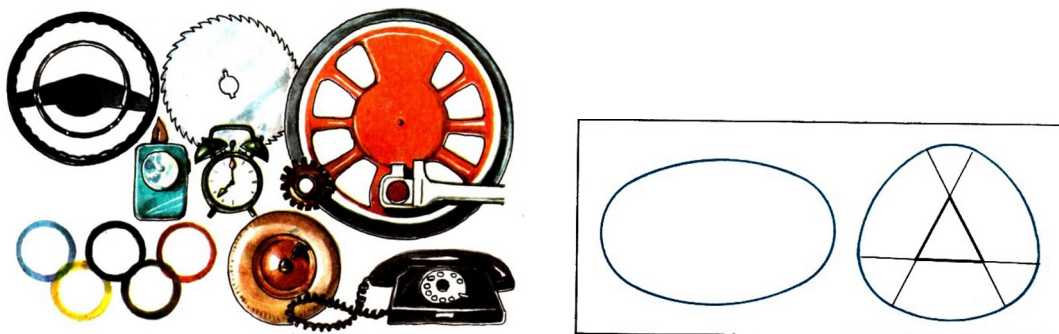
Ebenso ist es mit dem oberen Teil eines Trichters oder den oberen oder unteren Teilen der Behälter auf diesem Auto. Und wie steht es mit einem Zuckerhut oder Verkehrsgel?

Auch die Kegel eines Kegelspiels haben nicht die Form eines mathematischen Kegels. Vor einigen hundert Jahren allerdings kegelte man tatsächlich noch mit echten Kegeln.

Obwohl die Spielkegel seit dieser Zeit ihre Form mehrmals änderten, behielten Sie ihren Namen.

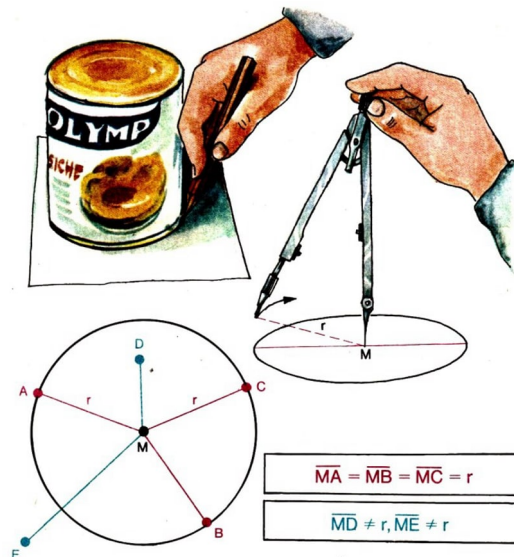
## 5 Kreis

Kreise kann man überall entdecken, sei es am Sägeblatt einer Kreissäge, an den Rädern der Fahrzeuge oder am Riesenrad im Berliner Kulturpark. Unsere Münzen sind ebenso kreisrund wie viele unserer Verkehrszeichen. Und manche Kreise haben sogar eine tiefere Bedeutung, wie zum Beispiel die fünf olympischen Ringe, die den friedlichen Wettkampf von Sportlern aller Erdteile ausdrücken sollen.



Nicht alle "runden" Kurven sind aber auch Kreise. Die blauen Kurven hier gehören natürlich nicht dazu.

Will man einen Kreis zeichnen, so kann man es ähnlich machen wie Mutter, wenn sie Plätzchen aus ausgerolltem Kuchenteig mit einer Tasse sticht. Man legt einfach eine Tasse, Dose oder Münze auf das Papier und umfährt sie außen mit einem Bleistift.

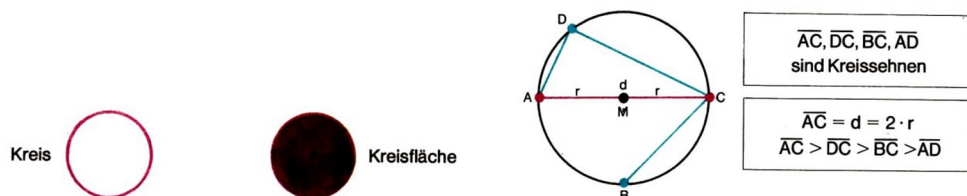


Genauer und weitaus vielfältiger lassen sich Kreise allerdings mit einem Zirkel zeichnen. Den Punkt, in dem man die Zirkelspitze aufsetzt, nennt man Mittelpunkt des Kreises. Mit welchen Punkten des Kreises man den Mittelpunkt auch immer verbindet, stets sind diese Verbindungsstrecken gleich groß. Jede dieser Strecken nennt man Kreisradius. Die Zirkelöffnung bestimmt also den Radius und damit die Größe des Kreises.



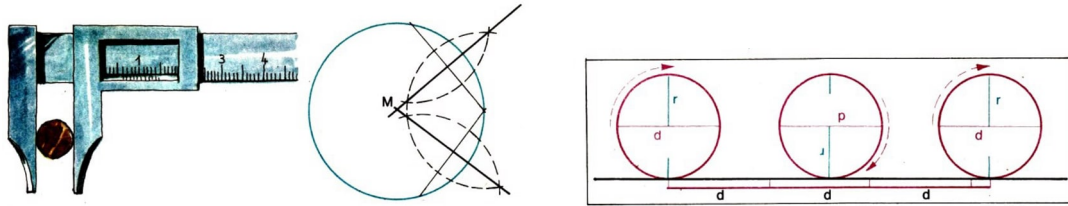
Ein Gärtner, der ein Blumenbeet von der Form eines Kreises mit einem Radius von 2 m anlegen will, kann dazu selbstverständlich keinen Zirkel verwenden. Er benutzt statt dessen einen Pflock und eine Schnur.

Ein Kreis ist also eine geschlossene Linie, die aus allen denjenigen Punkten besteht, die vom Mittelpunkt des Kreises den gleichen Abstand haben.



Wählt man auf einem Kreis verschiedene Punkte, so können sie unterschiedlich weit voneinander entfernt sein. Am weitesten voneinander entfernt liegen Kreispunkte, die sich auf dem Kreis genau gegenüberliegen.

Man erhält zwei solche Punkte, indem man durch den Kreismittelpunkt eine beliebige Gerade zieht. Die Verbindungsstrecke beider Punkte nennt man Durchmesser des Kreises. Jeder Durchmesser ist also doppelt so lang wie ein Radius des Kreises.



Ob man wohl bei einem mit Hilfe einer Tasse gezeichneten Kreis dessen Mittelpunkt bestimmen kann? Selbstverständlich könnte man es durch Probieren versuchen. Genauer ist es, wenn man drei verschiedene Punkte dieses Kreises durch zwei Strecken verbindet, diese halbiert und in den Halbierungspunkten dieser Strecken Senkrechte errichtet.

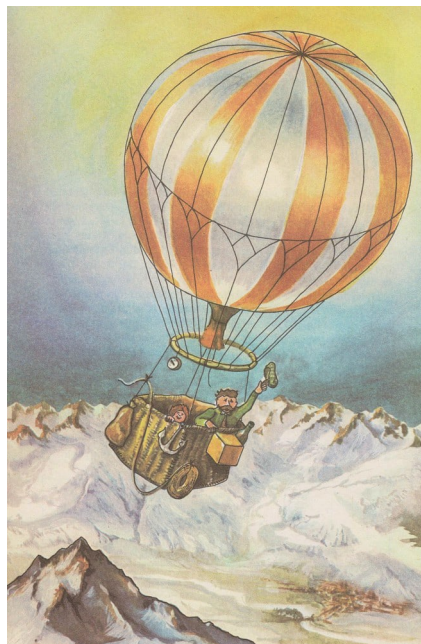
Der Schnittpunkt dieser Senkrechten muss der Mittelpunkt des Kreises sein.

Obwohl der Kreis weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt, hat er doch eine Länge. Man kann sie zum Beispiel praktisch annähernd ermitteln, indem man einen Kreis aus Pappe ausschneidet und längs einer geraden Linie abrollt.

Beim Vergleich der Abrollstrecke, also der Kreislänge, mit dem Kreisdurchmesser stellt man fest, dass die Kreislänge etwas größer als das Dreifache des Durchmessers ist. Dies ist den Menschen bereits seit Jahrtausenden bekannt.

Die Kreislänge lässt sich selbstverständlich genauer bestimmen. Will man aber zum Beispiel nur wissen, wie lang der Rand des vom Gärtner anzulegenden Blumenbeetes ist, so reicht es aus, das Dreifache des Durchmessers zu berechnen, also  $3 \cdot 4 = 12$  m. Die Umrandung wird also etwa 12,5 m lang sein.

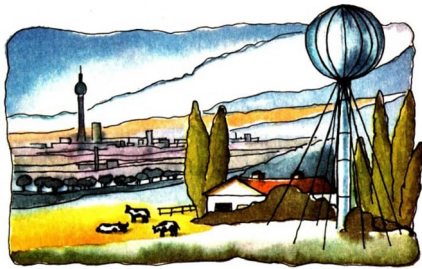
## 6 Kugel



Körper, die die Form einer Kugel haben, finden wir in unserer Umwelt sehr häufig. Wer hat nicht schon einmal mit einem Ball oder mit Murmeln gespielt! Und wer kennt



nicht die große Kugel am Berliner Fernsehturm! Nicht ganz so groß sind die Kugeln, die mancherorts auf schlanken Türmen thronen und voller Trinkwasser sind; mit dem Wasser eines solchen Wasserturms kann oft ein ganzer Ort versorgt werden.



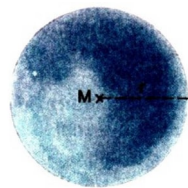
Manchmal sind die Kugelkörper aber auch nicht so sichtbar und sehr viel kleiner. Wer schon einmal ein Fahrrad repariert hat, wird dabei gewiss an den Radachsen die Kugellager entdeckt haben, die die Räder möglichst reibungslos rollen lassen. Und noch winziger und kaum erkennbar ist die Kugel an der "Spitze" eines Kugelschreibers.

Für einen Mathematiker ist eine Kugel ein geometrischer Körper, der von einer Fläche (Oberfläche) begrenzt wird, die nach allen Richtungen gleichmäßig gekrümmt ist.

Nicht alle Körper mit einer gekrümmten Oberfläche sind aber auch Kugeln. Ein Hühnerkugeln ist keine Kugel, da es zwar eine gekrümmte, aber nicht gleichmäßig gekrümmte Schale besitzt.

Am stärksten ist es an der Spitze gekrümmt. Und wo am wenigsten? Im Gegensatz zu Zylinder und Kegel ist es bei einer Kugel nicht möglich, eine Linealkante so an die Oberfläche zu legen, dass sie vollständig auf ihr aufliegt. Die Kugeloberfläche enthält also keine geraden Linien.

Daher ist es auch nicht möglich, ein Stück eines Gummiballes auszubreiten, ohne es zu zerreißen oder zu dehnen. Die Oberfläche einer Kugel lässt sich also nicht wie bei Zylinder oder Kegel auf einer ebenen Fläche abwickeln.

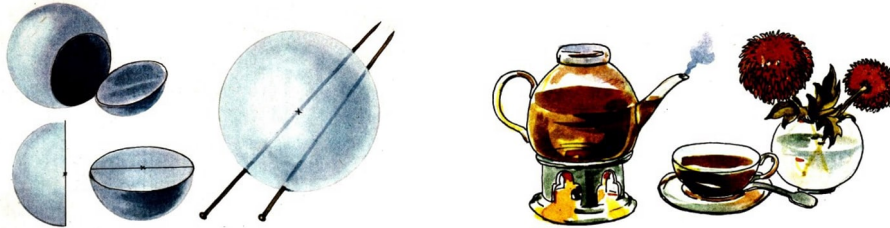


Jede Kugel hat - ebenso wie jeder Kreis - einen Mittelpunkt, von dem alle Punkte auf der Kugel gleich weit entfernt liegen. Jede Strecke, die einen Punkt der Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt verbindet, nennt man wie beim Kreis Radius. Alle Kugelradien sind gleich lang.

An einer aus Plastilin geformten Kugel lassen sich weitere Eigenschaften entdecken. Schneidet man sie mit einem Messer durch, entsteht als Schnittfläche stets eine Kreisfläche. Am größten ist dieser Kreis, wenn der Schnitt durch den Kugelmittelpunkt verläuft.

Durchsticht man die Plastilinkugel mit einer Stricknadel, so stellt der im Innern der Kugel steckende Teil der Nadel eine Kugelsehne dar. Diese verbindet geradlinig zwei Punkte der Kugeloberfläche.

Wie beim Kreis sind die Sehnen durch den Mittelpunkt am längsten. Sie heißen Durchmesser der Kugel und sind doppelt so lang wie ein Kugelradius.



Kugelkörper lassen sich, wie jeder weiß, leicht in alle Richtungen rollen. Das wird beim Murmelspiel ebenso ausgenutzt wie bei einem Kugellager oder Kugelschreiber. Warum aber gibt man den Behältern moderner Wassertürme Kugelform?

Das liegt daran, dass eine Kugel unter allen Körpern mit gleich großem Rauminhalt die kleinste Oberfläche hat. Da der Wasserbehälter nur an seiner Oberfläche Wärme abgibt oder aufnimmt, erwärmt sich das in ihm enthaltene Wasser bei Sonnenbestrahlung weniger und kühlt bei Frost auch weniger ab als in jedem andersgeformten Behälter. Und aus dem gleichen Grunde bleibt in einer kugelförmigen Kanne Tee recht lange heiß.

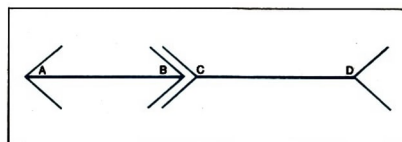
## 7 Längenmessung



Will Dirk feststellen, welche der beiden Holzleisten länger ist, so braucht er sie nur aneinanderzuhalten.

Anders ist es, wenn er die Breite des dunkelbraunen Schrankes mit der des hellbraunen vergleichen will. Vielleicht kann er sich behelfen, indem er die Breite beider Schränke schätzt. Allerdings ist dieses Verfahren recht unsicher, wenn sich die beiden Längen nur wenig voneinander unterscheiden.

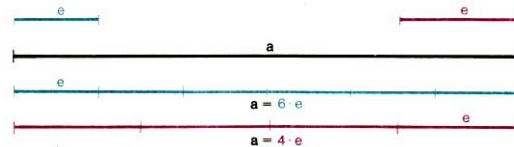
Vergleich einmal nach Augenmaß die Entfernung zwischen den Punkten A und B mit der zwischen C und D! Ob du richtig geschätzt hast, lässt sich leicht durch Abtragen der einen Strecke auf der anderen feststellen. Längere Strecken allerdings vergleicht man zweckmäßiger, indem man sie misst.





Beim Messen einer gegebenen Strecke gibt man eine sogenannte Einheitsstrecke vor und vergleicht die Längen der gegebenen Strecke und der Einheitsstrecke. Man überprüft, wie oft man diese, zum Beispiel mit Hilfe eines Zirkels, auf der gegebenen Strecke nacheinander abtragen kann.

So lässt sich die schwarze Strecke sowohl mit der roten als auch mit der blauen Einheitsstrecke messen. Sie ist viermal so groß wie die rote und sechsmal so groß wie die blaue Einheitsstrecke.



In früheren Zeiten hat man die Längen meistens mit Hilfe von Einheitsstrecken gemessen, die vom menschlichen Körper abgeleitet waren: Handspanne, Fußlänge, Armlänge oder Elle, Schrittlänge.

Da diese Längenmaße von Land zu Land, teilweise sogar von Ort zu Ort verschieden waren, brachte man an manchen Rathäusern Eisenstäbe an, durch die für einen Ort die Länge einer Elle, eines Fußes oder einer Spanne einheitlich vorgeschrieben wurde. Die unterschiedlichen Einheitsmaße erschwerten im Alltag sehr das Vergleichen von Längen. Es entstand ein immer stärker werdendes Bedürfnis nach einem einheitlichen Längenmaß.

Vor fast 200 Jahren wurde in Frankreich als Einheitsmaß der Länge das Meter eingeführt. Seine Länge wurde an einem in Paris aufbewahrten Metallstab festgelegt. Dieses Einheitsmaß der Länge wurde im Laufe der Zeit von mehr und mehr Ländern übernommen. Von ihm wurden weitere Längenmaße abgeleitet.

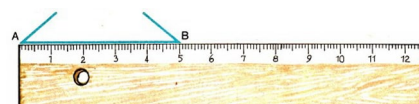
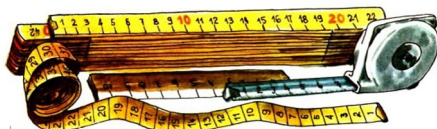
Längenmaße	Abkürzung	
Meter	m	1 m
Dezimeter	dm	10 dm = 1 m
Zentimeter	cm	100 cm = 1 m
Millimeter	mm	1000 mm = 1 m

Zehn Einheiten eines Längenmaßes ergeben stets das nächst größere Längenmaß:

$$10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}, 10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}, 10 \text{ dm} = 1 \text{ m}$$

Welches Längenmaß man jeweils verwendet, hängt davon ab, ob die zu messende Strecke kurz oder lang ist, und davon, wie genau man die Strecke messen will.

Zum Beispiel wird man die Längen der Seitenkanten eines Schulheftes oder eines Fotos in Zentimetern oder Millimetern, die Breite eines Fußballplatzes oder die Höhe eines Hauses dagegen in Metern angeben. Bei sehr großen Längen allerdings, wie zum Beispiel den Entfernungen zwischen verschiedenen Orten, benutzt man als Längenmaß das Kilometer (km):  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ .



Die Maßeinheiten Zentimeter und Millimeter findet man auf den meisten Linealen und auf Maßbändern und Gliedermaßstäben abgetragen.

Mit einem Lineal lassen sich am leichtesten die zu vergleichenden Streckenlängen zwischen den Punkten A und B und zwischen C und D messen. Man stellt fest, dass beide Längen 5 cm betragen, da jede fünfmal so lang ist wie die Längeneinheit 1 cm.

Wer hätte das sofort gesehen?! Und wieviel Zentimeter lang sind die schwarze, die blaue und die rote Strecke?

Überprüfe auch einmal die Länge eines nicht angespitzten Bleistifts! Er muss 177 mm lang sein. Diese Länge kann man auch mit Hilfe des nächstgrößeren Längenmaßes cm angeben:  $177 \text{ mm} = 170 \text{ mm} + 7 \text{ mm} = 17 \text{ cm} + 7 \text{ mm}$ .

Dafür schreibt man auch kürzer 17,7 cm. Umgekehrt bedeutet 20,5 cm dasselbe wie  $20 \text{ cm} + 5 \text{ mm}$  oder  $200 \text{ mm} + 5 \text{ mm}$  oder 205 mm. Was aber bedeutet 0,5 dm?

Manchmal braucht man die Länge einer Strecke tatsächlich nur ungefähr, durch Schätzen, zu ermitteln. Dann ist es nützlich, wenn man die Längen leicht zugänglicher Vergleichsstrecken kennt. Am einfachsten ist es, wenn man gewisse Abstände am eigenen Körper misst und sich merkt. Dann hat man solche Vergleichsstrecken stets bei sich.



Zum Beispiel kann man sich die Entfernung zwischen dem gespreizten Daumen und dem gespreizten kleinen Finger, den Abstand zwischen den Enden des Zeige- und Mittelfingers oder die Länge des rechten Armes merken. Weiß man nun, dass der Abstand zwischen dem gespreizten Zeige- und dem Mittelfinger 8 cm beträgt, und kann man ihn an der einen Kante des Deckels dieses Buches etwa dreimal abtragen, so weiß man, dass dieses Buch ungefähr 24 cm hoch ist.

So lässt sich manche Länge zumindest annähernd bestimmen, auch wenn kein Maßband oder Lineal zur Hand ist.

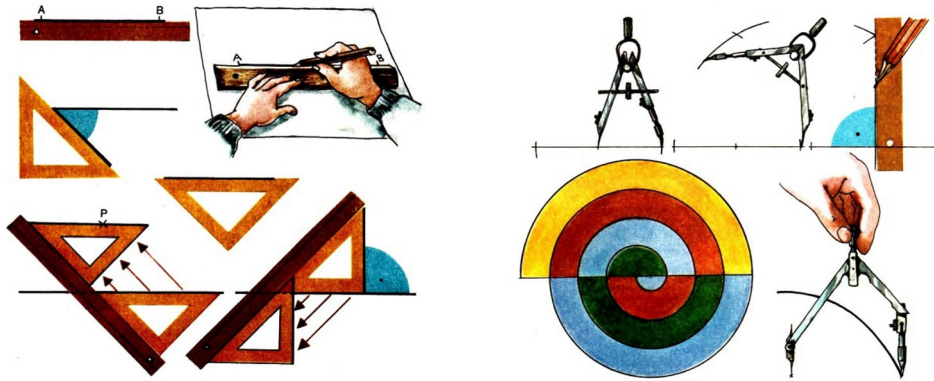
## 8 Mit Lineal, Zeichendreieck und Zirkel

Zum Zeichnen von Strecken, Geraden oder Winkeln benutzt man als Hilfsmittel meistens Lineal oder Zeichendreieck.

Soll man zum Beispiel zwei Punkte durch eine Strecke verbinden, legt man die Kante des Lineals so, dass die Punkte unmittelbar an dieser Kante liegen und man längs der Kante die gerade Verbindungslinie ziehen kann. Ebenso einfach ist es, wenn man zu einer gegebenen Geraden eine zweite zeichnen soll, die parallel zu ihr verläuft.

Hierfür benötigt man aber bereits Lineal und Zeichendreieck. Beide werden so angelegt,

wie man es in der linken Zeichnung sieht. Dann verschiebt man das Zeichendreieck so, dass dessen eine Kante am Lineal entlanggleitet.



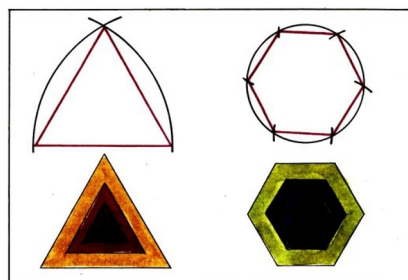
Alle Geraden, die man dann längs der langen Kante des Zeichendreiecks ziehen kann, sind parallel zur gegebenen Geraden. Es ist auch nicht schwer, zu einer Strecke oder Geraden eine zweite zu zeichnen, die senkrecht auf ihr steht.

Lineal und Zeichendreieck werden wieder so angelegt, wie man es in der Zeichnung sieht. Verschiebt man dann das Zeichendreieck längs der Linealkante, so kann man längs der einen kurzen Zeichendreieckskante Geraden zeichnen, die alle senkrecht zur gegebenen Geraden sind.

Ein Hilfsmittel zum Zeichnen von Kreisen ist der Zirkel.

Man muss darauf achten, dass die Zirkelspitze während des Zeichnens nicht verrutscht und die Zirkelöffnung nicht plötzlich größer oder kleiner wird.

Mit einem Zirkel lassen sich auch andere interessante Figuren und Kurven zeichnen. Diese Schneckenlinie zum Beispiel besteht aus lauter Halbkreisen mit verschiedenen Radien, die abwechselnd um die beiden markierten Punkte geschlagen worden sind. Der Mittelpunkt der unten liegenden Halbkreise ist stets der rechte, der Mittelpunkt der oben liegenden der linke der beiden Punkte.



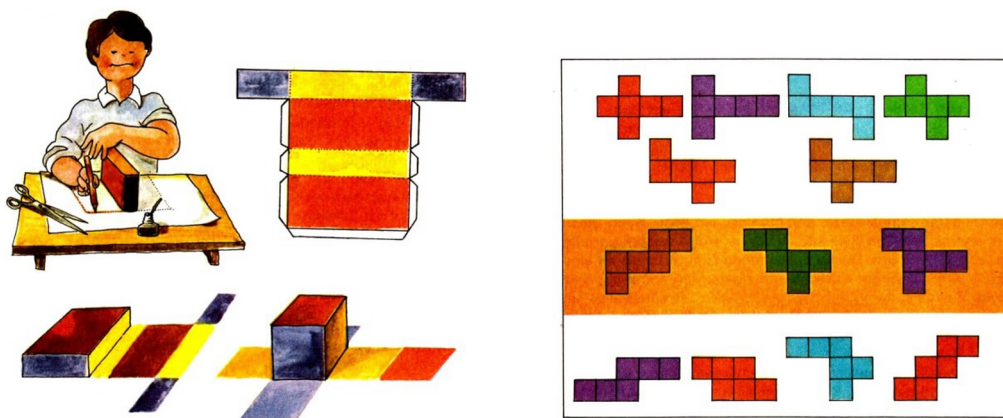
Auch manche Vielecke lassen sich mit Zirkel und Lineal genau zeichnen oder, wie man auch sagt, konstruieren.

Will man zum Beispiel ein gleichseitiges Dreieck konstruieren, so zeichnet man zunächst eine Seite dieses Dreiecks und schlägt anschließend um die Endpunkte dieser Seite Kreise, deren Radius genauso groß ist wie die Dreiecksseite. Verbindet man den einen Schnittpunkt dieser Kreise mit den Endpunkten der ersten Seite, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck.

Ein regelmäßiges Sechseck gewinnt man, indem man einen Kreis zeichnet und darauf dieselbe Zirkelspanne nacheinander sechsmal abträgt, so wie man es aus der Zeichnung erkennt. Verbindet man die Kreispunkte entsprechend miteinander, so erhält man ein Sechseck mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln.

Mit Zirkel und Lineal lassen sich auch viele andere regelmäßige Vielecke konstruieren.

## 9 Netze von Körpern



Kai überlegt, wie er die auf dem Tisch liegende Schachtel nachbauen kann. Da sie die Form eines Quaders hat, braucht er dazu sechs Rechtecksflächen.

Er legt die Schachtel mit einer der beiden größten Flächen auf ein Blatt Papier und umfährt diese mit einem scharf gespitzten Bleistift. Anschließend kippt er die Schachtel so über eine Kante, dass eine der mittelgroßen Flächen auf dem Papier liegt. Auch diese umfährt er mit dem Bleistift. Auf diese Weise zeichnet er alle sechs Flächen nach.

Die so entstandene Figur erinnert an eine Zeichnung auf einem Ausschneidebogen.

Man nennt sie Netz eines Quaders. In ihm hängen alle sechs Rechtecksflächen miteinander zusammen. Damit die Schachtel auch möglichst haltbar wird, überträgt er das Quadernetz mit einer Nadel auf eine dünne Pappe und überlegt, an welchen Rechtecksflächen kleine Ränder zum Kleben gelassen werden müssen. Danach schneidet er das Ganze aus, biegt es zu einem Quader und klebt aneinandergrenzende Rechtecksflächen zusammen.

Genauso kann man sich einen Würfel basteln. Zunächst zeichnet man ein Würfelnetz, um später möglichst wenig kleben zu müssen. Es besteht aus sechs gleich großen aneinanderhängenden Quadraten.

Wer sich Würfelnetze auf diese Weise verschafft hat, wird bemerkt haben, dass es verschiedene Netze für einen Würfel gibt. Sechs Netze lassen sich sehr schnell finden. Sie haben als Grundfigur vier nebeneinanderliegende Quadrate, an denen jeweils nach oben oder unten je ein Quadrat angesetzt ist.

Schwerer ist es, sich vorzustellen, dass auch die nächsten drei Würfelnetze sind. Am besten ist es, man zeichnet sie nach, schneidet sie aus und probiert, ob sie tatsächlich Würfel ergeben.





er begonnen wird.

Anders ist es bei dem roten Quadrat mit den Diagonalen und dem "Dach". Hier gibt es zwei Punkte, in denen jeweils drei Linien zusammentreffen. Und dennoch lässt sich diese Figur ohne abzusetzen zeichnen. Es gelingt, weil von einem dieser beiden Punkte der Linienzug ausgeht, nicht aber zu ihm zurückkehrt.

Er endet in dem anderen Punkt. Man kann also auch Figuren in einem Zug zeichnen, wenn zwei Punkte vorhanden sind, von denen eine ungerade Zahl von Wegen ausgeht. Mehr solcher Punkte darf es allerdings nicht geben, da eine Figur nur an einer Stelle begonnen beziehungsweise beendet werden kann.

Das blaue Quadrat hat vier Eckpunkte, in denen jeweils drei Linien zusammentreffen. Es lässt sich also nicht in einem Zuge zeichnen.

Jetzt fällt die Entscheidung nicht schwer, ob sich diese Figuren in einem Zuge zeichnen lassen. Warum muss es bei den roten Figuren gelingen? Versuch einmal, sie auf Transparentpapier in einem Zuge nachzuzeichnen. Und warum braucht man sich bei der blauen Figur gar nicht erst anzustrengen?

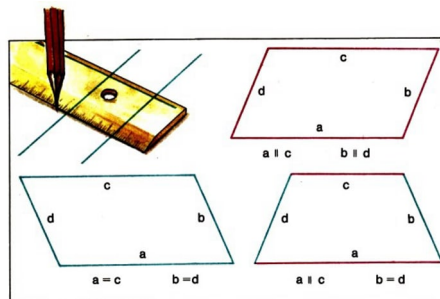


Diese Überlegungen lassen sich auch nutzen, wenn zum Beispiel Pakete verschnürt werden sollen, ohne dass die Schnur irgendwo doppelt liegt oder zerschnitten wird. Für diese Verschnürungen hier muss es möglich sein, denn an den "Knotenpunkten" treffen jeweils zwei oder vier Linien zusammen. Probier es einmal!

## 11 Parallelogramm

Zeichnet man zwei Paare paralleler Geraden - und zwar so, dass das erste Geradenpaar von dem zweiten geschnitten wird -, so entsteht ein Viereck.

In ihm sind jeweils gegenüberliegende Seiten zueinander parallel. Ein solches Viereck nennt man Parallelogramm, die Fläche, die es umschließt, Parallelogrammfläche.



Schneidet man zum Beispiel aus durchsichtiger roter und grüner Folie zwei Streifen (mit parallelen Rändern) und hält diese, etwas gegeneinander verdreht, gegen ein helles Fenster, so sieht man deutlich eine dunkle Parallelogrammfläche. Und die roten Parallelogrammflächen an den Warnzeichen auf den Straßen vor Bahnübergängen sind gewiss



jedem bekannt.

In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten nicht nur zueinander parallel, sondern auch gleich lang.

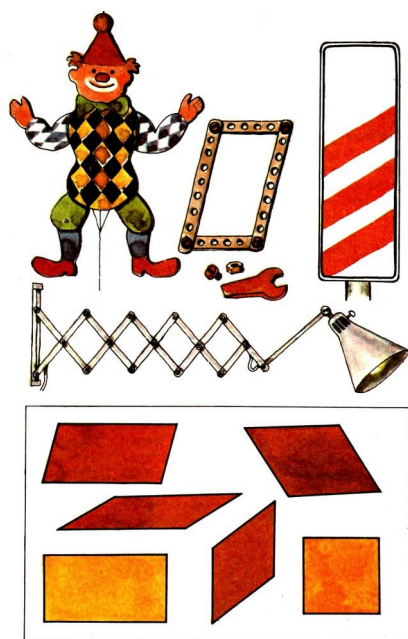
Aber auch das Umgekehrte ist richtig: Wenn in einem Viereck jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Dieses rot-blaue Viereck ist natürlich kein Parallelogramm. In ihm sind zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang, aber nicht parallel und die beiden anderen zueinander parallel, aber nicht gleich lang.

Besonders einfach lassen sich Parallelogrammfiguren mit Hilfe von zwei Paaren gleich langer Stäbe legen. Auch mit Lochstäben eines Holz- oder Metallbaukastens lässt sich ein Rahmen von der Form eines Parallelogramms herstellen.

Allerdings ist ein solcher Rahmen recht beweglich. Man sagt daher, das Parallelogramm sei im Gegensatz zum Dreieck keine stabile Figur.

Diese Eigenschaft nutzt man aus bei dem Scherengitter eines Tores oder dem Schwenkarm einer verstellbaren Lampe. Die Beweglichkeit liegt daran, dass es beliebig viele verschiedene Parallelogramme mit zwei Paaren gleich länger Strecken als Seiten gibt.



Wer genau hingeschaut hat, wird unter den Parallelogrammen auch Rechtecke und Quadrate entdeckt haben, denn in ihnen sind ebenfalls jeweils gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang. Daher enthält die Menge aller Parallelogramme nicht nur alle rot gezeichneten, sondern auch die gelben Parallelogramme, die zugleich Rechtecke oder Quadrate sind.

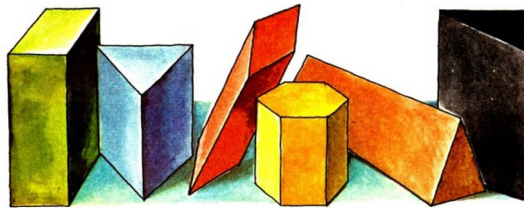
Quadrate sind Parallelogramme, bei denen nicht nur je zwei Seiten, sondern sogar alle vier Seiten gleich lang sind. Aber nicht alle Parallelogramme mit vier gleich langen Seiten sind auch Quadrate. An dieser Gleiskreuzung kann man zum Beispiel ein solches Parallelogramm erkennen.



Parallelelogramme haben noch manche andere interessante Eigenschaft. Verbindet man in einem Parallelelogramm jeweils gegenüberliegende Eckpunkte durch seine Diagonalen, so schneiden sie einander so, dass der Schnittpunkt sowohl Mittelpunkt der einen als auch der anderen Diagonalen ist.

Außerdem sind in jedem Parallelelogramm die Winkel an den gegenüberliegenden Eckpunkten gleich groß. Schneidet man also aus Papier ein Parallelelogramm aus und reißt eine Papierecke davon ab, so muss sie genau auf die gegenüberliegende Papierecke passen.

## 12 Prisma



Jeden dieser Körper nennt man Prisma. Betrachtet man die uns umgebenden Gegenstände etwas genauer, so stellt man fest, dass nicht wenige von ihnen die Form solcher Prismen haben.

Manche unangespitzten Bleistifte oder Schraubenköpfe haben zum Beispiel die Form des gelben Prismas. Viele Schachteln sehen genauso aus wie das grüne, einige mit Süßigkeiten gefüllte aber auch wie das rote oder blaue Prisma.

Auch die Sprunglatte beim Hochsprung ist von der Form des blauen Prismas. Schon schwerer zu erkennen ist, dass die Bodenräume unter dem braunen Satteldach oder dem schwarzen Pultdach ebenfalls prismenförmig sind.



Woran aber kann man erkennen, dass ein Gegenstand die Form eines Prismas hat? Jedes Prisma wird begrenzt von mehreren ebenen Flächenstücken, die zusammen seine Oberfläche bilden.

Bei dem blauen Prisma sind es 5, beim grünen 6 und beim gelben sogar 8 solcher Teilflächen. Unter diesen Flächen gibt es nun stets mindestens zwei, die völlig deckungsgleich sind und die einander genau gegenüberliegen, wobei die übrigen Flächen Rechtecksflächen sind.

Beim blauen, braunen und schwarzen Prisma ist dies jeweils ein Paar von Dreiecksflächen.

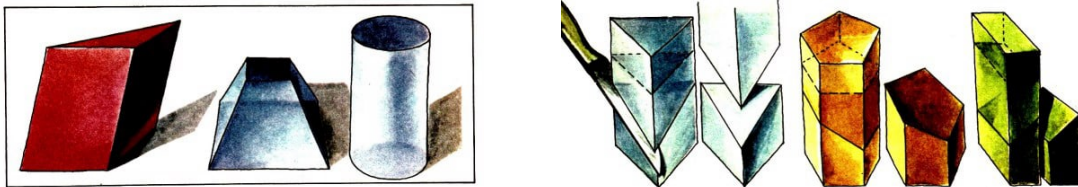
Jede dieser Flächen nennt man Grundfläche des Prismas. Die übrigen (in diesem Fall also die drei Rechtecksflächen) heißen Seitenflächen. Man bezeichnet daher diese Prismen als dreiseitige Prismen.

Beim grünen und roten Prisma sind die Grundflächen jeweils ein Paar deckungsgleicher Vierecksflächen. Sie heißen vierseitige Prismen, da sie vier rechteckige Seitenflächen haben.

Und wie wird man das gelbe Prisma nennen? Das grüne Prisma ist zugleich auch ein Quader. Jeder Quader ist nämlich ein Prisma.

Bei einem quaderförmigen Prisma kann jede Rechtecksfläche als Grundfläche angesehen werden. Grundflächen von Prismen können also sehr verschieden sein. In jedem Fall aber sind sie zwei deckungsgleiche Vielecksflächen, die zueinander parallel liegen.

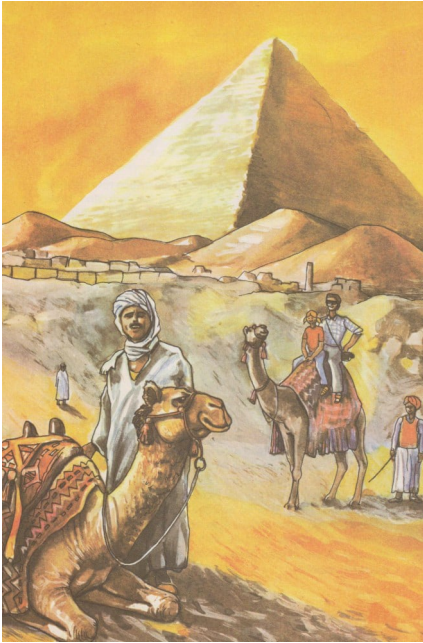
Der Mathematiker rechnet allerdings auch diesen roten Körper zu den Prismen hinzu. Die Seitenflächen bei ihm sind keine Rechtecksflächen, aber auf jeden Fall Parallelogrammflächen. Dagegen sind die beiden Körper rechts natürlich keine Prismen. Welche Eigenschaften haben sie dennoch mit ihnen gemeinsam?



**Punkt (siehe Strecke, Punkt, Gerade, Strahl)**

## 13 Pyramide

Diese gewaltigen Bauwerke in Ägypten wurden vor mehr als 4000 Jahren errichtet. Sie haben fast unversehrt diese lange Zeit überdauert. Manche sind etwa so hoch wie drei oder vier zehnstöckige Hochhäuser aufeinandergetürmt. Sie wurden von Hunderttausenden von Sklaven unter unvorstellbaren Qualen aus Kalksteinblöcken geschaffen, allein für den Zweck, als Grabdenkmäler der altägyptischen Könige zu dienen. Man nennt diese Bauwerke Pyramiden.



Diese Grab-Pyramiden stehen auf einer quadratischen Grundfläche und haben vier schräge Wände von der Form gleichseitiger Dreiecke, die oben zusammenstoßen. Baumeister späterer Zeit ahmten diese Körperform nach, wichen aber dabei zum Teil von der Form der quadratischen Grundfläche ab. Auch heutzutage sind manche Gegenstände unserer Umwelt pyramidenförmig.



Wie aber lässt sich erkennen, ob ein Gegenstand die Form einer Pyramide hat? In der Geometrie versteht man unter einer Pyramide einen Körper mit ganz bestimmten Eigenschaften. Wir erkennen sie, wenn wir die hier gezeichneten geometrischen Pyramiden vergleichen. Jede Pyramide wird begrenzt von mehreren ebenen Flächenstücken, die zusammen ihre Oberfläche bilden.

Stets gibt es mindestens einen Eckpunkt, in dem, mit Ausnahme eines dieser Flächenstücke, alle übrigen zusammenstoßen. Dieser Punkt heißt Spitze der Pyramide.

Die dort zusammenstoßenden Flächenstücke nennt man Seitenflächen. Sie sind in jedem Fall Dreiecksflächen. Die grüne Pyramide hat vier, die braune sechs, die rote drei solcher Flächen als Seitenflächen. Man nennt sie daher entsprechend vierseitige, sechsseitige oder dreiseitige Pyramiden.

Das übriggebliebene Flächenstück heißt Grundfläche.

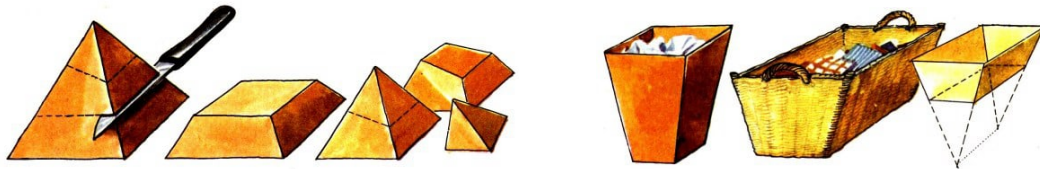
Die grüne Pyramide hat als Grundfläche ein Viereck, die braune ein Sechseck und die rote ein Dreieck. In jedem Fall ist die Grundfläche eine Vielecksfläche. Bei der roten Pyramide kann sogar jeder Eckpunkt Spitze und entsprechend jede Dreiecksfläche Grundfläche sein.



Ein Pyramidenmodell lässt sich leicht herstellen mit Hilfe von Stricknadeln (als Pyramidenkanten) und Plastilinkügelchen (als Eckpunkte).

Bei einer dreiseitigen Pyramide benötigt man dazu 6 Stricknadeln und 4 Plastilinkügelchen, da sie 6 Kanten und 4 Eckpunkte hat.

Wieviel Stricknadeln und Plastilinkügelchen sind aber für eine vierseitige oder sechsseitige Pyramide erforderlich?



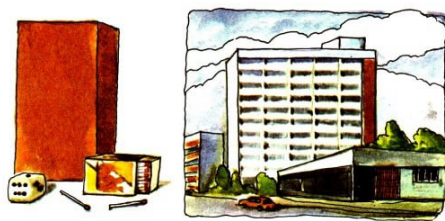
Aus Plastilin, einer großen Kartoffel oder Rübe lässt sich auch leicht eine drei- oder vierseitige Pyramide ausschneiden.

Schneidet man diese Plastilin-Pyramiden - wie in der Zeichnung - parallel zur Grundfläche durch, so entstehen jeweils zwei Teilkörper.

Einer davon ist wieder eine Pyramide. Den anderen nennt man Pyramidenstumpf. Die Form eines Pyramidenstumpfes haben zum Beispiel manche Schüttbehälter oder Papierkörbe. Dieser Waschkorb allerdings gehört, wie man sieht, nicht zu den Pyramidenstümpfen.

## 14 Quader

Felsen, Bäume, Pflanzen, ja fast alle Gegenstände in der Natur weisen vielfältige und sehr unregelmäßige Formen auf. Betrachtet man dagegen Gegenstände, die von Menschen hergestellt sind, so fällt auf, wie einfach und gleichmäßig sie oft geformt sind. Diese Gegenstände hier sind von besonders einfacher Form, nämlich von der eines Quaders.

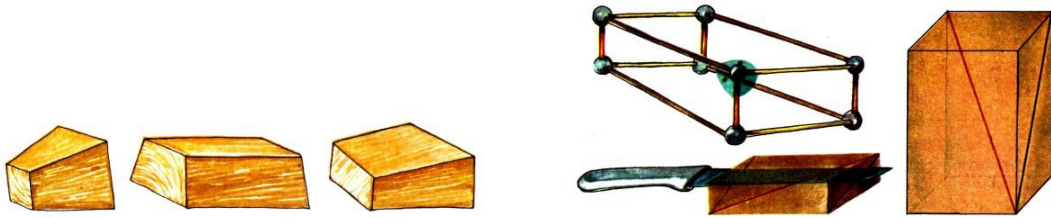


Welche Eigenschaften muss ein solcher Gegenstand haben?

An einer Streichholzschachtel oder einem Ziegelstein zum Beispiel erkennt man, dass ein Quader begrenzt wird von sechs Rechtecksflächen, die zusammen die Oberfläche des Quaders bilden. Jeweils gegenüberliegende Rechtecksflächen sind dabei völlig gleich, sie haben die gleichen Seitenlängen.

Der Quader ist der geometrische Körper, der uns unter den von Menschen geschaffenen Gegenständen am häufigsten begegnet. Die Form eines Quaders haben viele Häuser, die meisten Zimmer und manche Schränke. Aber auch ein rechteckiges Stück Pappe, und sei es noch so dünn, ist quaderförmig.

Und wie steht es mit einem Spielwürfel? Auch er wird begrenzt durch sechs (sogar quadratische) Rechtecksflächen, von denen jeweils gegenüberliegende deckungsgleich sind. Auch er gehört also, wie jeder Würfel, zu den Quadern. (Natürlich ist nicht jeder Quader auch ein Würfel!) Warum aber gehören diese Holzbalken nicht zu den Quadern?



Einen Quader aus kleinen Holzstäbchen kann jeder selbst basteln. Man braucht dazu insgesamt zwölf Hölzchen als Kanten.

Davon müssen jeweils vier Stück gleich lang sein, denn an einem Quader kann es höchstens drei verschieden lange Kanten geben. Um die aneinanderstoßenden Hölzchen zusammenzuhalten, braucht man noch acht kleine Plastinkügelchen als Eckpunkte.

An jeder Ecke stoßen drei Kanten zusammen, wobei je zwei davon einen rechten Winkel bilden. Und wieviel Rechtecksflächen stoßen an jeder Ecke zusammen?

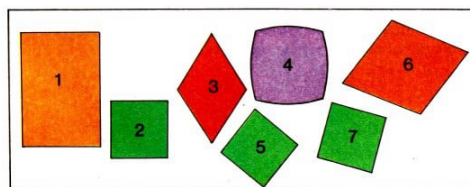
Überleg auch einmal, auf wieviel verschiedenen Wegen längs der Quaderkanten man von der links - unten - vorn liegenden Ecke zur gegenüberliegenden Ecke rechts - oben - hinten gelangen kann!

In Quadern gibt es wie bei Rechtecken Strecken, die man Diagonalen nennt. Sie verbinden die gegenüberliegenden Ecken miteinander. Jeder Quader hat also vier Diagonalen. Sie sind alle gleich lang. Man darf diese Diagonalen nicht verwechseln mit denen der Rechtecksflächen, die den Quader begrenzen.

Jede Rechtecksdiagonale ist kürzer als jede Quaderdiagonale. Aus Plastilin lässt sich leicht ein Quader-Modell schneiden, an dem man manche Quader-Eigenschaft erkennen kann.

## 15 Quadrat

Es bereitet gewiss niemandem Schwierigkeiten, in dieser Menge von Figuren die Quadrate herauszufinden. Sie begegnen uns so häufig, dass wir sie meistens sofort erkennen.

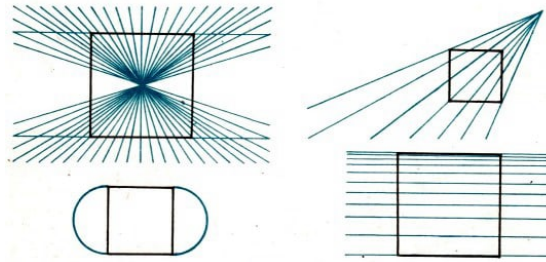


Manchmal hält man aber dennoch eine Figur für kein Quadrat, obwohl sie es tatsächlich ist. Wer würde sich wohl nach einem ersten Hinsehen bei den schwarzen Figuren für Quadrate entscheiden!

Durch die vielen Linien lässt man sich leicht täuschen.

Will man also entscheiden, ob ein Quadrat vorliegt, muss man die Figur auf die Eigenschaften überprüfen, die jedem Quadrat zukommen.



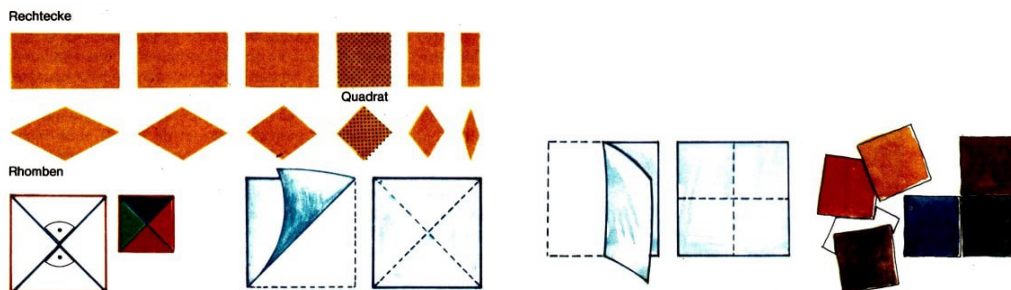


Auf jeden Fall muss sie ein Viereck sein. Daher fällt die Figur [4] trotz ihrer vier Ecken sofort heraus. Ferner müssen alle Seiten gleich lang sein, so dass auch die Figur [1] ausscheidet. Da außerdem an den Eckpunkten rechte Winkel sein müssen, fallen auch [3] und [6] weg. Alle diese Eigenschaften haben nur die Figuren [2], [5] und [7]. Sie sind Quadrate.

Diese haben aber noch weitere wichtige Eigenschaften. Da in ihnen die vier Winkel rechte Winkel sind, sind alle Quadrate zugleich Rechtecke.



Quadrate sind aber auch spezielle Rhomben, da alle vier Seiten gleich lang sind. Als Rechtecke und Rhomben sind sie zugleich auch Parallelogramme und haben daher alle deren Eigenschaften.



Verbindet man in einem Quadrat jeweils gegenüberliegende Eckpunkte miteinander, erhält man Diagonalen. Wie in jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander, und sie sind wie in jedem Rechteck gleich lang.

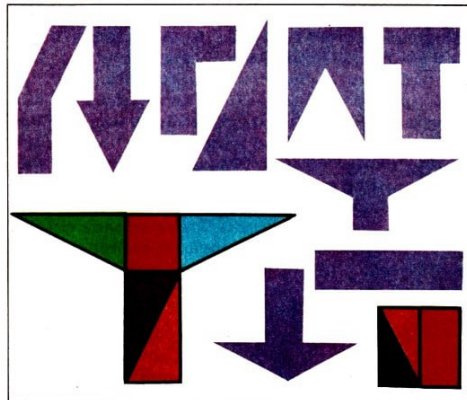
Wie in jedem Rhombus stehen sie aber auch senkrecht aufeinander. Sie teilen also das Quadrat in vier gleich große rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke.

Diese Eigenschaften erkennt und nutzt man, wenn man zum Beispiel ein quadratisches Tuch oder ein ausgeschnittenes Papier-Quadrat längs einer Diagonalen faltet. Dabei kommen zwei Quadratseiten mit angrenzenden Seiten zur Deckung. Faltet man entsprechend weiter, so fallen auch diese beiden Seitenpaare genau aufeinander.

Es liegen nun alle vier Seiten übereinander und ebenso die vier gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecke, in die die Diagonalen das Quadrat zerlegen. Wer alles wieder auseinanderfaltet, wird manche Eigenschaft direkt "ablesen" können.

Da das Quadrat ein Rechteck ist, lässt es sich auch so falten, dass eine Quadratseite auf

die gegenüberliegende fällt. Faltlinien sind in diesem Fall die beiden Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verbinden, also die Mittellinien des Quadrats. Durch sie wird es in vier kleinere, aber untereinander gleich große Quadrate zerlegt.



Jetzt ist es gewiss auch nicht schwierig, aus mehreren gleich großen Quadraten ein größeres Quadrat zusammenzusetzen.

Sollen dessen Seiten doppelt so lang sein wie bei den gegebenen Quadraten, so braucht man dazu vier Stück. Wieviel aber werden benötigt, wenn die Seiten drei- oder viermal so lang werden sollen?

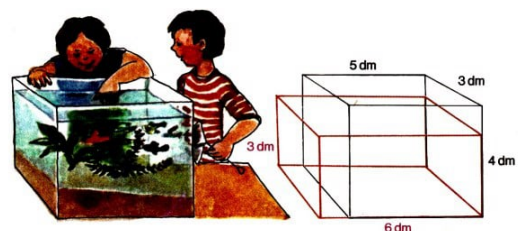
Wer Spaß am Zusammensetzen von Figuren hat, kann auch ein Papier-Quadrat so zerschneiden, wie man es in der Zeichnung rechts erkennt, und aus den Teilstücken die abgebildeten Figuren legen. Gewiss schwieriger ist es, aus den fünf Teilen der linken Figur in Gedanken ein Quadrat zu legen.

## 16 Raummessung

Peter zeigt Achim sein Aquarium. "Meins ist zwar 1 dm länger, dafür aber 1 dm flacher als deins", meint Achim.

"Es ist also ganz genauso groß." Ob Achim wohl recht hat?

Aquarium	Länge	Breite	Höhe
von Peter	5 dm	3 dm	4 dm
von Achim	6 dm	3 dm	3 dm



Wie lässt sich die Größe, genauer gesagt der Rauminhalt eines solchen Aquariums bestimmen?

Will man den Rauminhalt eines Körpers messen, benötigt man dazu ein Raummaß, einen Körper also, mit dessen Rauminhalt der zu messende Rauminhalt verglichen werden kann. Solche Raummaße sind Würfel, deren Kantenlänge gleich einem Längenmaß, also gleich 1 mm, 1 cm, 1 dm oder 1 m sind. Man nennt sie Einheitswürfel.

Die durch sie festgelegten Raummaße bezeichnet man entsprechend mit Kubikmillimeter, Kubikzentimeter, Kubikdezimeter oder Kubikmeter.

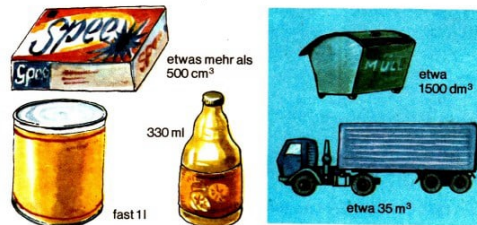
Tausend Einheiten eines Raummaßes ergeben dabei stets das nächstgrößere Raummaß.

Raumaße	Abkürzung	Kantenlänge des Einheitswürfels	
Kubikmillimeter	mm <sup>3</sup>	1 mm	
Kubikzentimeter	cm <sup>3</sup>	1 cm	1 cm <sup>3</sup> = 1000 mm <sup>3</sup>
Kubikdezimeter	dm <sup>3</sup>	1 dm	1 dm <sup>3</sup> = 1000 cm <sup>3</sup>
Kubikmeter	m <sup>3</sup>	1 m	1 m <sup>3</sup> = 1000 dm <sup>3</sup>

Welches Raumaß man jeweils verwendet, hängt davon ab, wie genau man einen Rauminhalt messen will und ob dieser groß oder klein ist.

Kleine Rauminhalte, wie bei einem Päckchen Waschpulver oder einer Kremdose, wird man in Kubikmillimeter oder Kubikzentimeter angeben, größere, wie bei einem Müllbehälter oder einem großen Container, in Kubikdezimeter oder Kubikmeter.

Bei Flüssigkeiten verwendet man allerdings als Maß meistens Liter und, davon abgeleitet, Milliliter und Hektoliter. Ein Liter entspricht etwa einem Kubikdezimeter<sup>1</sup>.

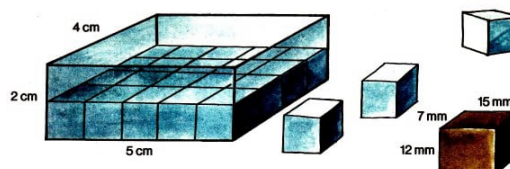


Milliliter	1 ml	(etwa 1 cm <sup>3</sup> )	
Liter	1 l	(etwa 1 dm <sup>3</sup> )	1000 ml = 1 l
Hektoliter	1 hl	(etwa 100 dm <sup>3</sup> )	1 hl = 100 l

Misst man nun einen Quader mit einer Raumeinheit, so ermittelt man, wieviel Einheitswürfel in ihm enthalten sind. Den Rauminhalt dieses blauen Quaders mit den Kanten 4 cm, 2 cm und 5 cm kann man bestimmen, indem man ihn in Gedanken mit Würfeln der Kantenlänge 1 cm auslegt.

Zunächst legt man eine Reihe dieser Würfel längs einer Kante, zum Beispiel einer der Länge 5 cm. Das ergibt eine Stange von 5 Einheitswürfeln. Vier Stangen werden benötigt, um den Boden vollständig auszulegen. Das ergibt eine Schicht von  $4 \cdot 5 = 20$  Würfeln.

Und zwei Schichten füllen den Quader vollständig aus. Also passen genau  $2 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 20 = 40$  Einheitswürfel in den Quader. Da jeder verwendete Einheitswürfel den Rauminhalt 1 cm<sup>3</sup> hat, hat der blaue Quader den Rauminhalt 40 cm<sup>3</sup>.



<sup>1</sup>1964 wurde auf der 12. Generalkonferenz für Maß und Gewicht die Definition von 1793 wiederhergestellt, seither ist ein Liter wieder exakt ein Kubikdezimeter, Anm. St. Polster

Bei dem braunen Quader wird man andere Einheitswürfel benutzen. Versuch einmal, seinen Rauminhalt in einer geeigneten Maßeinheit anzugeben! Und genauso kann man den Rauminhalt einer Streichholzschachtel oder eines Päckchens Kakao bestimmen, nur dass man hier zuvor noch Länge, Breite und Höhe messen muss.

Auf diese Weise kann man natürlich auch den Rauminhalt der beiden quaderförmigen Aquarien bestimmen.

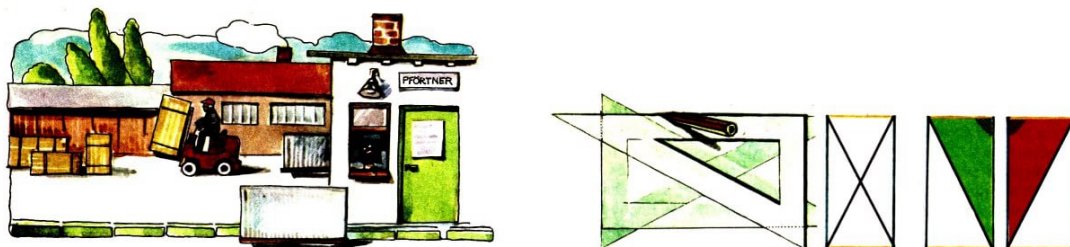
Abmessungen	Raummaß	Anzahl der Einheitswürfel	Rauminhalt
5 dm, 3 dm, 4 dm	$\text{dm}^3$	$5 \cdot 3 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$	$60 \text{ dm}^3$
6 dm, 3 dm, 3 dm	$\text{dm}^3$	$6 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54$	$54 \text{ dm}^3$

Bei Aquarien gibt man den Inhalt allerdings meistens in Litern an. In Peters Aquarium passen also etwa 60 Liter, in Achims etwa 54 Liter. Achim hat daher nicht recht, sein Aquarium ist kleiner.

## 17 Rechteck

Rechtecken begegnen wir täglich - ob in der Wohnung, auf der Straße, beim Einkaufen, auf dem Sportplatz oder in einer Fabrik. Die Wand, das Bild daran, die Fensterscheiben, das Straßen- und Nummernschild, die Seitenflächen der Schachtel und der Kiste oder auch die Spielfläche eines Fußballplatzes haben die Form von Rechtecken.

Auch die Seiten dieses Buches oder jedes Schreibheftes, alle Postkarten, viele Tischplatten, die meisten Kuchenbleche sind rechteckig.



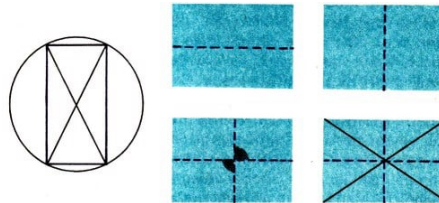
Will man Rechtecke beschreiben, muss man ihre Eigenschaften nennen. Jedes Rechteck ist ein Viereck, das an jedem Eckpunkt einen rechten Winkel hat. Außerdem sind in ihm gegenüberliegende Seiten jeweils gleich lang und parallel. Jedes Rechteck ist also zugleich auch ein Parallelogramm, allerdings ein solches, das rechte Winkel enthält.

Eine Rechtecksfläche kann man sich leicht durch mehrfaches Falten eines beliebigen Papierstücks herstellen. Zunächst faltet man es so, dass ein scharfer Knick entsteht, und danach so, dass ein Teil der ersten Knickkante genau auf deren anderen Teil fällt. So erhält man einen rechten Winkel. Wiederholt man nun entsprechend an jeder Knickkante diesen Vorgang, ergeben sich Knickkanten, die von selbst einen rechten Winkel bilden. Die erhaltene Figur ist ein Rechteck.

Wenn ein Viereck also drei rechte Winkel enthält, so ist in jedem Fall auch der vierte ein rechter Winkel und das Viereck daher ein Rechteck. Es reicht also aus, drei Winkel zu überprüfen.

Diagonalen. Sie sind in jedem Rechteck gleich lang. Wer es nicht glaubt, misst einmal nach. Man kann es aber auch begründen.

Denkt man sich das gleiche Rechteck zweimal gezeichnet - einmal mit der einen, einmal mit der anderen Diagonalen - und zum Beispiel das grüne Dreieck ausgeschnitten, so muss es genau auf das rote Dreieck passen, denn die beiden blauen Seiten kommen dabei ebenso zur Deckung wie die beiden gelben und die beiden rechten Winkel. Dann aber müssen auch die beiden schwarzen Diagonalen zur Deckung kommen.



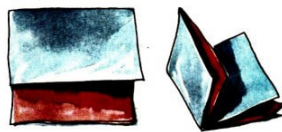
Diese sind aber nicht nur gleich lang, sondern sie halbieren auch einander. Ihr Schnittpunkt liegt also von jedem Eckpunkt gleich weit entfernt. Daher gibt es immer einen Kreis, der genau durch die vier Eckpunkte verläuft. Man nennt ihn Umkreis des Rechtecks. Sein Mittelpunkt heißt auch Mittelpunkt des Rechtecks.

Diesen Punkt kann man aber auch auf andere Weise erhalten. Ein ausgeschnittenes Papier-Rechteck lässt sich stets so falten, dass dessen eine Seite auf die ihr gegenüberliegende Seite fällt.

Die beiden möglichen Faltachsen halbieren jeweils die beiden anderen Seiten. Man nennt sie daher Mittellinien des Rechtecks.

Sie stehen stets senkrecht aufeinander und schneiden einander genau im Mittelpunkt des Rechtecks. Dieser ist also zugleich auch Schnittpunkt der Mittellinien.

Denkt man sich ein rechteckiges Zeichenblatt, das auf der Oberseite rot und auf der Unterseite blau ist, längs einer Mittellinie so gefaltet, dass dabei die rote Fläche nach innen kommt, erhält man als Reihenfolge der Farben: blau-rot-rot-blau.



Welche Reihenfolge aber erhält man, wenn man diese Faltungen weiter fortsetzt? Es ist gar nicht so schwer, darüber etwas auszusagen.

Wer es nicht erkennt, probiert einmal.

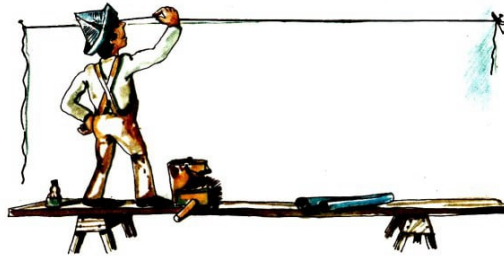
**Rhombus (siehe Quadrat)**

## 18 Strecke, Punkt, Gerade, Strahl

Wenn der Maler diese mit Farbpulver bestäubte Schnur an der Wand spannt, etwas abhebt und schnell wieder loslässt, so entsteht ein gerader Strich zwischen den beiden Stellen, an denen die Schnur festgehalten wird.



Solch eine gerade Linie nennt der Mathematiker Strecke, wenn man einmal davon absieht, dass dieser Strich eigentlich zu dick für eine Strecke ist.

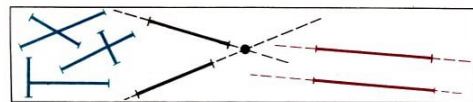
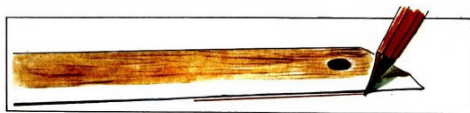


Genauer ist es schon, wenn man eine gerade Linie längs eines Lineals mit einem sehr gut gespitzten Bleistift zeichnet. Würde man allerdings diese Linie unter einem starken Vergrößerungsglas betrachten, so könnte man dabei ganze Graphitgebirge entdecken. Diese Tatsache lässt man natürlich bei einer Strecke völlig außer acht.

Was aber ist wesentlich? Man erkennt es recht gut an der etwas elastischen Schnur des Malers.

Das Abschnellen der Schnur wäre nicht möglich, wenn sie sich nicht etwas ausdehnen würde. Sie ließe sich dann nicht abheben, da die Schnur zwischen den beiden Stellen, an denen sie festgehalten wird, straff gespannt immer die kürzeste Verbindung angibt. Eine Strecke ist nämlich stets die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten.

Diese Punkte heißen Endpunkte der Strecke. Man muss sie beim Zeichnen stets deutlich kennzeichnen. Zwei beliebige Punkte lassen sich immer nur durch eine einzige Strecke verbinden.



Auf Grund dieser Eigenschaft der Strecke lässt sich übrigens ein Lineal einfach überprüfen. Man zeichnet durch zwei Punkte längs der Linealkante eine Linie, dreht anschließend das Lineal um und zeichnet durch diese beiden Punkte längs der Kante erneut eine Linie.

Fallen beide Linien nicht zusammen, so ist das Lineal nicht einwandfrei.

Zeichnet man zwei verschiedene Strecken, so können sie, wie zum Beispiel die blauen Streckenpaare, jeweils genau einen Punkt gemeinsam haben. Man sagt, die Strecken schneiden einander in einem Punkt. Beim roten oder schwarzen Streckenpaar dagegen gibt es keinen gemeinsamen Punkt. Dennoch besteht zwischen ihnen ein erheblicher Unterschied.

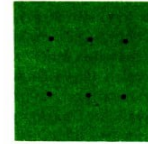
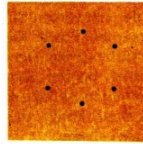
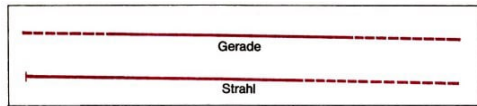
Denkt man sich nämlich diese Strecken jeweils nach beiden Seiten hin beliebig verlängert, so haben die geradlinigen Verlängerungen des schwarzen Streckenpaares genau einen Punkt, des roten Streckenpaares dagegen keinen Punkt gemeinsam.

Solche nirgendwo begrenzten geraden Linien, die man genaugenommen niemals zeichnen, sondern stets nur in Gedanken erfassen kann, nennt der Mathematiker Geraden. Zwei Geraden können sich also entweder in genau einem Punkt schneiden, oder sie



haben keinen Punkt gemeinsam. Man sagt dann, die Geraden verlaufen parallel zueinander.

Verlängert man eine Strecke in Gedanken unbegrenzt geradlinig nur über einen ihrer Endpunkte, so erhält man einen Strahl. Der andere Endpunkt der Strecke heißt Anfangspunkt des Strahls.



In jedem dieser farbigen Felder findet man sechs Punkte markiert. Durch je zwei dieser Punkte lässt sich genau eine Gerade ziehen. Wieviel verschiedene Geraden gibt es dabei links und wieviel rechts?

Wer es nicht sieht, paust die Punkte durch und zeichnet die Geraden. Warum aber erhält man rechts vier Geraden weniger als links? Und wieviel verschiedene Paare paralleler Geraden gibt es jeweils?

Etwas schwieriger ist es anzugeben, wieviel verschiedene Schnittpunkte es jeweils insgesamt unter den Geraden gibt. Wer links nicht auf 33 und rechts nicht auf 17 Stück kommt, hat gewiss nicht beachtet, dass sich zwei (unbegrenzte) Geraden auch außerhalb des Farbfeldes schneiden können.

## 19 Trapez

Gewiss hat jeder schon einmal einen Artisten an einem Trapez gesehen. Diese "Zirkus-Schaukel" hat die gleiche Form wie dieses rote Viereck, in dem zwei Seiten zueinander parallel sind. Ein solches Viereck bezeichnet der Mathematiker als Trapez.

Trapeze findet man aber auch an manchen einfachen Brücken und Gittermasten und, wenn man etwas großzügig ist, an den Tragflächen von Flugzeugen. Auch Giebelseiten von Häusern sind zuweilen trapezförmig. Sogar "unsichtbare" Trapeze gibt es. Einen Eisenbahndamm müsste man erst senkrecht zur Fahrtrichtung durchschneiden, um seinen Querschnitt als Trapez zu erkennen.



Wird aber ein Baumstamm mit einer Gattersäge zerschnitten, so sehen Seitenflächen der entstehenden Bretter zwar fast aus wie Trapeze, sind aber genaugenommen keine,

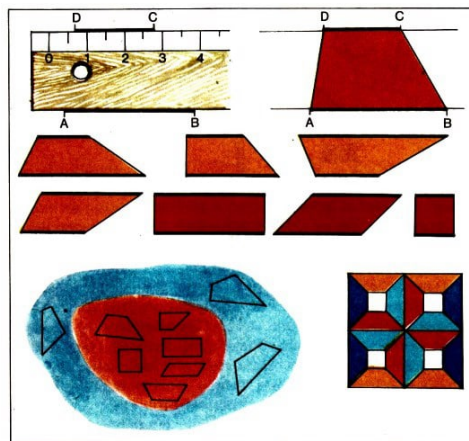
da sie nicht ausschließlich geradlinig begrenzt sind. Und ebenso ist es bei einer Bogenbrücke.

Eine Figur ist also nur dann ein Trapez, wenn sie ein Viereck ist und mindestens ein Paar paralleler Seiten hat. Diese Seiten nennt man Grundseiten, die beiden anderen Schenkel des Trapezes.

Bei manchen Trapezen, zum Beispiel bei einer Schaukel, sind die beiden Schenkel gleich lang. Sie heißen gleichschenklige Trapeze.

Trapeze lassen sich leicht zeichnen. Man zeichnet zunächst zwei parallele Geraden, markiert darauf jeweils zwei verschiedene Punkte und verbindet diese. So kann man die unterschiedlichsten Trapeze erhalten.

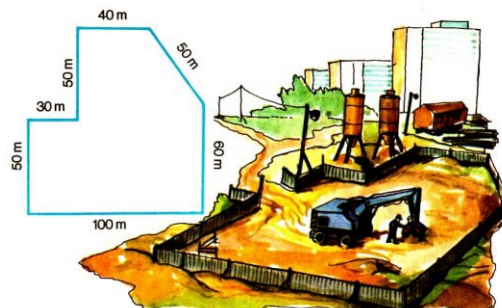
Genauso ist es, wenn man einen Papierstreifen mit parallelen Rändern schneidet und diesen entsprechend faltet.



Man könnte einwenden, dass nicht alle diese Figuren tatsächlich Trapeze seien, da dabei auch Parallelogramme, Rechtecke und Quadrate entstehen können. Aber auch in diesen Vierecken gibt es gewiss ein Paar, ja sogar zwei Paare paralleler Seiten.

Daher enthält die Menge der Trapeze auch die Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate. In diesen speziellen Trapezen kann jede Seite als Grundseite angesehen werden. Wie lässt sich das erklären?

## 20 Umfang von Figuren



Eine Baustelle soll eingezäunt werden. Ihr Gelände hat die Form eines Siebenecks. Der Bauleiter, der den Bretterzaun bestellen muss, lässt das Grundstück vermessen. Dann

addiert er alle gemessenen Seitenlängen:  $100\text{ m} + 60\text{ m} + 50\text{ m} + 40\text{ m} + 50\text{ m} + 30\text{ m} + 50\text{ m} = 380\text{ m}$ .

Er berechnet also den Umfang des Siebenecks. Dieser beträgt 380 m. Soviel Bretterzaun muss daher bestellt werden.

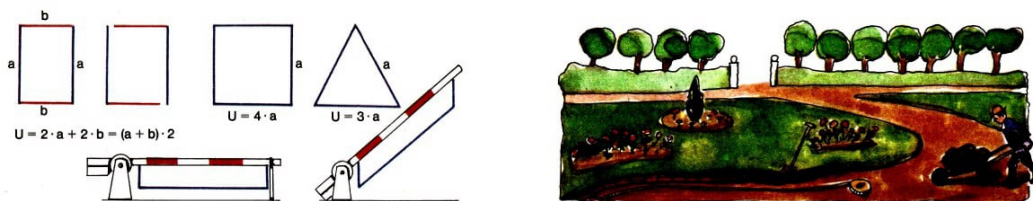
Der Umfang eines beliebigen Vielecks lässt sich also leicht bestimmen, wenn man dessen Seitenlängen kennt. Er ist gleich der Summe dieser Seitenlängen.

Auch wenn in einem Wohnzimmer die Fußboden- oder die Tapetenleisten erneuert werden sollen, ist es nützlich, den Umfang des Vielecks zu kennen, das der Fußboden oder die Decke des Zimmers bildet. Dieser Umfang gibt die Gesamtlänge der Leisten an, die gekauft werden müssen.

Hat das Zimmer zum Beispiel die Form eines Rechtecks mit den Seiten 5 m und 4 m, so könnte man seinen Umfang  $U$  bestimmen, indem man rechnet:  $U = 5\text{ m} + 4\text{ m} + 5\text{ m} + 4\text{ m} = 18\text{ m}$ .

Einfacher aber wäre:  $U = 2 \cdot 5\text{ m} + 2 \cdot 4\text{ m} = 18\text{ m}$ . Möglich wäre aber auch:  $U = (5\text{ m} + 4\text{ m}) \cdot 2 = 18\text{ m}$ .

Beim Rechteck braucht man also zur Bestimmung des Umfangs nicht nacheinander alle Seiten zu addieren, sondern man kann auch einfacher entweder beide Seitenlängen verdoppeln und dann addieren oder beide Seitenlängen addieren und danach verdoppeln.



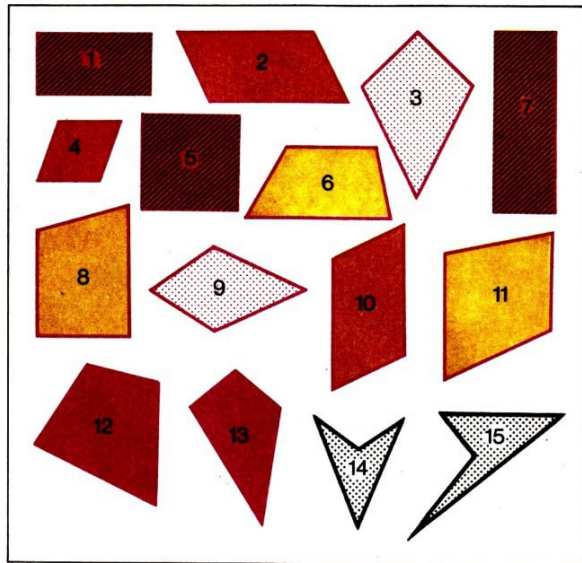
Genauso ist es beim Parallelogramm, da in ihm ebenfalls gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Es gibt aber auch Vielecke, bei denen die Bestimmung des Umfangs noch einfacher ist, nämlich dann, wenn jeweils alle Seiten gleich lang sind.

Schwieriger dagegen ist es, den Umfang von krummlinigen Figuren zu bestimmen. Soll man zum Beispiel diese Grünfläche mit Ziegelsteinen einfassen und zuvor die Anzahl der erforderlichen Steine ermitteln, so wird man den Umfang wohl am zweckmäßigsten mit Hilfe eines Maßbandes messen.

Etwas einfacher ist es, wenn die Grünfläche kreisförmig ist. Der Umfang, besser die Länge eines Kreises lässt sich ermitteln, wenn man seinen Durchmesser kennt. Er ist etwas mehr als dreimal so groß wie der Durchmesser.

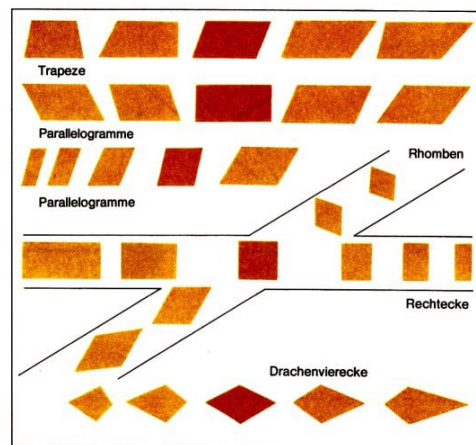
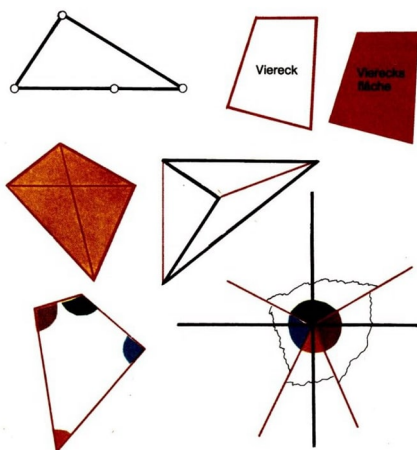
Hätte also die Grünfläche die Form eines Kreises, so brauchte man mit einem Maßband nur dessen Durchmesser zu messen. Beträgt dieser zum Beispiel 20 m, so ist der Umfang etwas größer als  $3 \cdot 20\text{ m} = 60\text{ m}$ , etwa 63 m.

## 21 Viereck



Diese Figuren heißen Vierecke. In allen findet man vier Seiten und vier Eckpunkte. Jeweils drei dieser Eckpunkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Würde es nämlich drei solche Punkte geben, so könnte die Figur höchstens ein Dreieck sein. Die vier Seiten schließen eine Vierecksfläche ein, die aus allen Punkten im Innern des Vierecks und aus den Punkten der vier Seiten besteht.

Verbindet man in einem Viereck jeweils gegenüberliegende Punkte miteinander durch Strecken, so erhält man dessen Diagonalen. Nicht immer (wie zum Beispiel bei den schwarzen Vierecken) liegen beide Diagonalen innerhalb der Vierecksfläche. Solche Vierecke wollen wir im weiteren aber ausschließen.



Die Winkel an den Eckpunkten der Vierecke können verschieden groß sein. Manche davon sind rechte Winkel, manche kleiner oder größer als ein rechter Winkel. Denkt man sich aber für jedes Viereck dessen Winkel aneinandergefügt, so würden sie zusammen stets einen Winkel bilden, der genauso groß ist wie vier rechte Winkel zusammen.

Daher gibt es kein Viereck, in dem alle Winkel kleiner als ein rechter Winkel sind,



denn sonst würden alle Winkel zusammengenommen kleiner als vier rechte Winkel sein. Wenigstens einer muss also ein rechter Winkel oder größer als ein solcher sein. Ebenso können auch nicht alle Winkel größer als ein rechter Winkel sein.

Wir wollen nun etwas Ordnung in die Menge der roten Vierecke bringen. Man kann zum Beispiel untersuchen, ob es in ihnen Paare paralleler Seiten gibt oder aber Paare gleich langer Seiten. Man kann sie aber auch ordnen, indem man die Winkel an den Eckpunkten untersucht.

Zunächst wollen wir alle Vierecke herausfinden, die mindestens zwei parallele Seiten enthalten. Wer die Menge durchmustert, wird feststellen, dass diese Eigenschaft die Vierecke [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8], [10] und [11] haben.

Diese Vierecke nennt man Trapeze.

Prüft man nun, ob es darunter auch solche mit zwei Paaren paralleler Seiten gibt, so stellt man fest, dass diese Eigenschaft nur die Vierecke [1], [2], [4], [5], [7] und [10] aufweisen.

Diese Trapeze nennt man auch Parallelogramme.

Bei diesen Parallelogrammen wollen wir nun die Winkel näher betrachten. In welchen von ihnen kommen rechte Winkel vor? Nur in den Parallelogrammen [1], [5] und [7]. In ihnen gibt es sogar vier rechte Winkel. Solche Parallelogramme nennt man auch Rechtecke.

Man kann die Parallelogramme aber auch auf gleiche Seitenlängen hin untersuchen. Jedes Parallelogramm hat zwei Paare gleich langer Seiten. Es gibt aber auch welche, nämlich [4] und [5], bei denen alle vier Seiten gleich lang sind. Solche Parallelogramme heißen auch Rhomben.

Das Viereck [5] ist also Rechteck und Rhombus zugleich. Solche Vierecke heißen Quadrate. Quadrate sind also Parallelogramme, in denen alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.



Beginnt man bei der Untersuchung der Vierecke dagegen von vornherein mit den Seitenlängen, so erhält man eine andere Ordnung der Vierecke. Zum Beispiel könnte man prüfen, ob Vierecke vorkommen, in denen es mindestens ein Paar gleich langer Nachbarseiten gibt. [3], [4], [5], [9] und [13] sind solche Vierecke. Diese haben keinen besonderen Namen.

Unter ihnen gibt es aber auch solche, die zwei Paare gleich langer Nachbarseiten enthalten. Es sind die Vierecke [3], [4], [5] und [9]. Sie heißen Drachenvierecke. Ein Drachenviereck, in dem nicht nur benachbarte, sondern alle Seiten gleich lang sind, ist



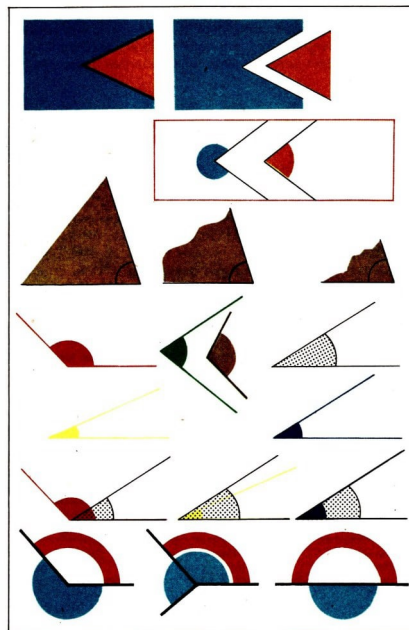
natürlich der Rhombus.

Die Rhomben [4] und [5] sind also Parallelogramme und Drachenvierecke zugleich. Und das Quadrat [5] ist nicht nur ein Trapez, sondern zugleich auch Parallelogramm, Rechteck, Drachenviereck und Rhombus.

## 22 Winkel

Zeichnet man auf ein Blatt Papier zwei verschiedene Strahlen, die von einem gemeinsamen Anfangspunkt ausgehen, so wird die ebene Fläche des Papiers in zwei Teile zerlegt.

Jeden dieser Teile nennt man Winkel. Dabei werden die beiden Strahlen sowohl dem einen als auch dem anderen Teil zugerechnet. Jeder Winkel wird also gebildet durch zwei verschiedene Strahlen, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben. Die beiden Strahlen nennt man Schenkel, ihren gemeinsamen Anfangspunkt Scheitel des Winkels. Um zu kennzeichnen, welcher Teil der Ebene jeweils als Winkel gemeint ist, zeichnet man darin einen kleinen Kreisbogen ein.



Genau genommen kann man einen Winkel niemals vollständig zeichnen, da für die (in einer Richtung unbegrenzten) beiden Strahlen stets nur mehr oder weniger lange Strecken gezeichnet werden können.

Schneidet man also einen auf Papier gezeichneten Winkel aus und reißt davon, so wie in der Zeichnung, Stücke ab, so verändert sich der Winkel natürlich nicht. Alle diese "Papier-Winkel" stellen den gleichen Winkel dar, da man sich die jeweiligen Schenkel stets als unbegrenzte Strahlen denken muss.

Winkel lassen sich der Größe nach vergleichen. Will man zum Beispiel die rot, gelb oder blau gezeichneten Winkel mit dem schwarz gezeichneten vergleichen, so kann man die ersten drei Winkel abpausen und das Papier so verschieben, dass jeweils ein Schenkel

mit einem des schwarzen Winkels (so wie in der Zeichnung dargestellt) zur Deckung kommt.

Man sieht:

Der rote Winkel ist größer, der gelbe kleiner als der schwarze Winkel, und der blaue und der schwarze Winkel sind gleich groß. Und wie fällt der Vergleich bei dem braunen und dem grünen Winkel aus?

Auf gleiche Weise kann man feststellen, dass von den beiden Winkeln, die zu zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt gehören, jeweils einer der größere ist - mit einer Ausnahme allerdings!

Liegt nämlich der eine Strahl auf der Verlängerung des anderen, so sind die beiden Winkel gleich groß. Jeden dieser Winkel bezeichnet man als gestreckten Winkel.

Schneidet man einen auf Papier gezeichneten gestreckten Winkel aus und faltet ihn so, dass seine Schenkel aufeinanderfallen, entsteht ein Winkel, der halb so groß ist wie ein gestreckter.

Solche Winkel heißen rechte Winkel. Man findet sie unter anderem an Zeichendreiecken, mit deren Hilfe sie sich schnell und einfach zeichnen lassen. Rechte Winkel werden besonders gekennzeichnet.



Ob ein Zeichendreieck tatsächlich rechtwinklig ist, kann man überprüfen, indem man mit ihm zunächst einen rechten Winkel zeichnet und dann an diesem Winkel - so wie in der Zeichnung dargestellt - einen zweiten rechten Winkel anträgt.

Da zwei rechte Winkel zusammen einen gestreckten Winkel ergeben, muss ein Schenkel des einen die Verlängerung eines Schenkels des anderen rechten Winkels sein. Ist dies beim Zeichnen nicht der Fall, so ist das Zeichendreieck ungenau.

spitzer Winkel	rechter Winkel	stumpfer Winkel	gestreckter Winkel	überstumpfer Winkel
kleiner als ein rechter Winkel		größer als ein rechter Winkel		größer als ein gestreckter Winkel
		kleiner als ein gestreckter Winkel		

Winkel, die nicht rechte oder gestreckte Winkel sind, erhalten besondere Namen, je nachdem, ob sie größer oder kleiner als diese sind.

Winkel begegnen uns häufig in unserer Umgebung. Wo zum Beispiel findet man an den Gegenständen hier spitze, rechte oder stumpfe Winkel? Und wo sind gestreckte oder überstumpfe Winkel zu sehen?



Will man die Größe eines Winkels genauer angeben, so muss man ihn messen. Dazu braucht man einen sogenannten Einheitswinkel, mit dem man den gegebenen Winkel vergleicht. Man überprüft, wie oft er in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Es ist üblich, ihn so festzulegen, dass 90 Einheitswinkel genau einen rechten Winkel ergeben. Als Maßeinheit verwendet man bei der Winkelmessung Grad, kurz  $^{\circ}$ . Ein Einheitswinkel beträgt also  $1^{\circ}$ , ein rechter Winkel  $90^{\circ}$ .

Und wieviel Grad beträgt ein gestreckter Winkel? Winkel lassen sich sehr einfach messen mit einem Winkelmesser.



In der rechten Zeichnung ist eine Vielzahl von Winkeln enthalten.

Versuch einmal, sie herauszufinden und festzustellen, welche davon spitze, welche rechte, welche stumpfe und welche überstumpfe Winkel sind!

Ob es unter diesen Winkeln auch solche gibt, die gleich groß sein müssen? Es ist gewiss nicht leicht, alle 6 spitzen, 8 rechten, 6 stumpfen und 20 überstumpfen Winkel zu finden.

## 23 Würfel

Der Würfel ist der einfachste geometrische Körper.



Seinen Namen hat er vom Spielwürfel, wie wir ihn zum Werfen beim Würfelspiel benutzen. Dennoch unterscheidet sich der geometrische Würfel vom Spielwürfel.

In der Geometrie interessiert uns an den Gegenständen unserer Umgebung, also zum Beispiel an einem Spielwürfel, Margarinewürfel oder Spielzeugklötzchen weder das Material, aus dem sie hergestellt sind, noch deren Farbe. Wichtig dagegen aber sind deren Form und Maße.

Alle diese Gegenstände bezeichnet man in der Geometrie als würfelförmige Gegenstände oder kurz als Würfel.

Welche Eigenschaften muss ein Gegenstand haben, wenn er ein Würfel sein soll?

Der geometrische Würfel wird, wie jeder geometrische Körper, begrenzt durch eine Fläche, auch Oberfläche genannt, die in diesem Fall aus sechs gleich großen Quadraten besteht.

Daher ist zum Beispiel die Bezeichnung "Würfelzucker" für unseren Stückenzucker nicht gerechtfertigt, denn die Zuckerstücke werden nicht von Quadraten begrenzt. Er müsste eigentlich Quaderzucker heißen. In Ungarn dagegen gibt es tatsächlich Würfel-Zucker.

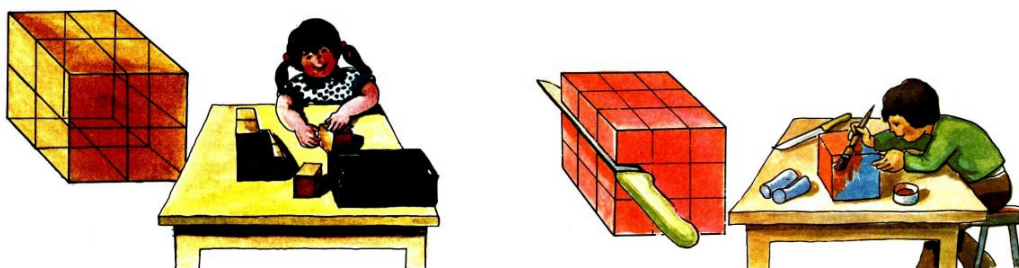


Diesen Würfel kann jeder selbst herstellen. Man braucht dazu außer Holzstäbchen nur etwas Plastilin, um die aneinanderstoßenden Hölzchen zusammenzuhalten. An diesem Modell erkennt man leicht, dass jeder Würfel zwölf Kanten besitzt, die alle gleich lang sind, und acht Eckpunkte, auch Ecken genannt.

An jeder Kante grenzen zwei der sechs Quadrate aneinander. An jeder Ecke stoßen drei dieser Quadrate, zugleich aber auch drei Kanten zusammen. Je zwei dieser Kanten bilden einen rechten Winkel.

Im Würfel gibt es entsprechend wie beim Quadrat Strecken, die man Diagonalen nennt. Sie verbinden die im Würfel gegenüberliegenden Ecken miteinander.

Jeder Würfel hat vier solcher Diagonalen, die alle gleich lang sind. Man darf diese Würfel-Diagonalen nicht verwechseln mit den Diagonalen der Quadrate, die den Würfel begrenzen. Diese sind kürzer als die Würfel-Diagonalen.



Vor Elke liegen lauter gleich große würfelförmige Holzklötzchen. Sie möchte aus ihnen einen Würfel zusammensetzen, dessen Kantenlänge doppelt so groß ist wie die der kleinen Klötzchen.

Wieviel Stück braucht sie wohl dafür?

Sie probiert und stellt fest, dass es 8 Stück sein müssen: 2 für eine untere Kante,  $2 \cdot 2 = 4$  für die ganze untere Quadratfläche,  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  für den Würfel insgesamt.

Und wieviel wären es, wenn die Kantenlänge drei- oder Viermal so groß ist wie die der kleinen Klötzchen?

Peter macht es umgekehrt. Er hat aus blauem Plastilin einen Würfel geformt und außen rot angestrichen. Nun schneidet er den Würfel zweimal parallel zur oberen Quadratfläche, anschließend genauso zur linken und schließlich ebenso zur vorderen Quadratfläche so durch, dass dabei kleine, untereinander gleich große Würfel entstehen.

Es müssen  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  Stück sein.

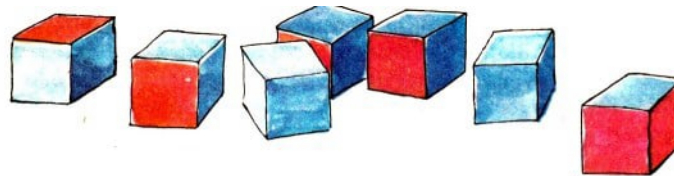
Da der große Plastilinwürfel außen rot angestrichen war, haben einige Teilwürfel ebenfalls rote Quadratflächen. Wieviel Teilwürfel gibt es nun mit genau drei roten Quadratflächen?

Die Anzahl lässt sich leicht ermitteln. Diese Teilwürfel müssen an den Ecken des großen Würfels gelegen haben. Also haben 8 Stück drei rote Quadratflächen.

Und wieviel haben genau zwei rote Quadratflächen?

Sie müssen an den Kanten des großen Würfels gelegen haben, nicht aber an dessen Ecken. An jeder Kante lag also genau ein solcher Würfel. Daher haben 12 Teilwürfel zwei rote Quadratflächen. Die Würfel mit genau einer roten Quadratfläche lagen genau in der Mitte jeder der sechs Quadratflächen des großen Würfels. Es gibt also 6 Stück davon.

Bisher haben wir  $8 + 12 + 6 = 26$  Teilwürfel untersucht. Was aber ist mit dem siebenundzwanzigsten?



## 24 Zylinder

Täglich treffen wir auf Gegenstände, die die Form eines Zylinders haben, seien es Konservendbüchsen, Kochtöpfe, runde Bleistifte, Regenrohre, Anschlagsäulen, Papier- und Abfallkörbe oder runde Baumstämme.

Diese Gegenstände unterscheiden sich im Material, aus dem sie hergestellt sind, darin, ob sie hohl sind oder nicht, ob sie liegen oder stehen, ob sie hoch oder flach sind.

Gemeinsam aber ist ihnen, dass sie begrenzt werden von einer krummen Fläche und zwei ebenen kreisrunden Flächenstücken. Am leichtesten erkennt man die Eigenschaften eines Zylinders, wenn man eine Konservendose zur Hand nimmt.





Zunächst wollen wir die beiden Dosendeckel vergleichen. Dazu stellen wir die Dose auf ein Zeichenblatt, einmal mit dem einen, dann mit dem anderen Deckel unten, und umfahren sie jeweils unten mit einem Bleistift. In beiden Fällen ergeben sich gleich große Kreise.



Jeder geometrische Zylinderkörper wird tatsächlich begrenzt von zwei gleich großen Kreisflächen, die man seine Grundflächen nennt. Diese gleich großen Grundflächen findet man also bei allen zylinderförmigen Gegenständen.

Manchmal allerdings, wie zum Beispiel bei Körben oder Rohren, ist die eine oder andere Grundfläche nicht sichtbar. Aber auch in diesen Fällen kann man sich Kreisflächen vorstellen, die diese "offenen" Zylinder verschließen.

Wir wollen nun die gekrümmte Wandfläche der Dose untersuchen. Legt man, so wie in der Zeichnung, von außen an die Dose eine Linealkante an, so erkennt man, dass sie vollständig auf der Wandfläche aufliegt.

Diese Zylinderfläche oder, wie man auch sagt, Mantelfläche des Zylinders enthält also trotz ihrer Krümmung auch Strecken.

Man sieht solche in der Mantelfläche enthaltenen Strecken deutlich an den geraden Metallstäben mancher Abfallkörbe.

Rollt man die Konservendose auf einer ebenen Fläche, so liegt sie stets längs einer geraden Linie auf, und niemals ist auch nur der geringste Zwischenraum zwischen ihr und der ebenen Fläche. Diese Eigenschaft wird bei einer Straßenwalze ausgenutzt.

Dadurch ist es auch möglich, den Papiermantel der Konservendose senkrecht zu einer Grundfläche aufzuschneiden und auf ebener Fläche vollständig auszubreiten. Man erhält so eine Rechtecksfläche.

Umgekehrt lässt sich aus einer rechteckigen Papierfläche leicht die Mantelfläche eines Zylinders gewinnen. Der geometrische Zylinderkörper wird also, außer von zwei gleich großen Kreisflächen, begrenzt von einer gekrümmten Mantelfläche, die unendlich viele Strecken enthält und die sich als Rechtecksfläche "abwickeln" lässt.

Der Mathematiker bezeichnet übrigens auch Körper, bei denen - wie bei dieser Kaffeebüchse - die gleich großen Grundflächen keine Kreise sind oder - wie bei diesem Rohr - die Grundflächen nicht genau übereinander liegen, als Zylinder.

Ein Bierfass gehört aber auf keinen Fall zu den Zylindern, obwohl es von zwei gleich großen Grundflächen und einer gekrümmten Mantelfläche begrenzt wird. In diesem Fall lässt sich die Mantelfläche nicht "abwickeln".

Man merkt dies auch daran, dass solche Biertonnen beim Rollen wackeln. Auch dieser Eimer ist kein Zylinder, da die beiden kreisförmigen Grundflächen nicht gleich groß sind.

Dagegen wird man natürlich einen langen Draht oder eine große kreisförmige Fenster-scheibe, so dünn sie auch sein mögen, zu den Zylindern hinzurechnen.

