

---

**A.S. Smogorschewski**

**Lobatschewskische Geometrie**

Übersetzung: D. Schmidt  
1978 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig  
MSB: Nr. 96  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

Der russische Mathematiker Lobatschewski veröffentlichte im 19. Jahrhundert ein geometrisches System, das sich wesentlich von der im Altertum entwickelten und nach Euklid benannten Geometrie unterscheidet.

Die Möglichkeit einer derartigen Geometrie hatte revolutionierende Wirkungen nicht nur in der Mathematik, sondern im gesamten naturwissenschaftlichen und sogar philosophischen Denken, da die Geometrie Euklids als denknötwendig angesehen worden war.

Der Bruch, der im geometrischen Denken erfolgte, hatte in der gesamten Mathematik nachhaltige Wirkungen, da die Wendung zum axiomatischen Denken vollzogen wurde. In der Physik sah man sich unerwartet der Frage gegenüber, welche Struktur der Kosmos habe.

## **Vorwort**

Das Ziel des vorliegenden Heftes ist es, die Leser mit den grundlegenden Aussagen der nichteuklidischen Geometrie Lobatschewskis bekannt zu machen.

Der berühmte russische Gelehrte N. I. Lobatschewski war ein hervorragender Wissenschaftler. Ihm gelang eine der größten mathematischen Entdeckungen, der Aufbau eines geometrischen Systems, das von der euklidischen Geometrie verschieden ist. Kurze biographische Angaben über N. I. Lobatschewski findet der Leser im 1. Kapitel unseres Heftes.

Die Geometrien Euklids und Lobatschewskis haben viele Gemeinsamkeiten, verschieden sind nur die Definitionen. Sätze und Formeln, die mit dem Parallelenaxiom verbunden sind. Damit wir selbst verstehen, worin dieser Unterschied besteht, untersuchen wir, wie die grundlegenden geometrische Begriffe entstanden und sich entwickelten. Diesen Fragen widmet sich das 2. Kapitel.

Zum Verständnis des Heftes sind außer den Schulkenntnissen der Planimetrie auch Kenntnisse der geometrischen Transformation notwendig, die man als Inversion bezeichnet. Im 3. Kapitel geben wir einen Überblick über ihre wichtigsten Eigenschaften.

Wir hoffen, dass sich der Leser ohne große Mühe mit dem Inhalt dieses Kapitels vertraut machen kann, das ebenso wie das 10. Kapitel in unserem Heft eine sehr wichtige, wenn auch eine Hilfsrolle spielt.

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Leben und Werk N. I. Lobatschewskis</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Die axiomatische Methode in der Geometrie</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Inversion</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Ein Modell der Lobatschewskischen Ebene</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Kreise in der Lobatschewskischen Ebene</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Abstandslinien</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Grenzkreise</b>	<b>34</b>
<b>8</b>	<b>Einige Sätze der Lobatschewskischen Geometrie</b>	<b>35</b>
<b>9</b>	<b>Ergänzende Bemerkungen</b>	<b>38</b>
<b>10</b>	<b>Natürliche Logarithmen und Hyperbelfunktionen</b>	<b>39</b>
<b>11</b>	<b>Längen hyperbolischer Geradenstücke</b>	<b>43</b>
<b>12</b>	<b>Grundlegende Formeln der hyperbolischen Trigonometrie</b>	<b>46</b>
<b>13</b>	<b>Die Längen einiger Kurven in der Lobatschewskischen Geometrie</b>	<b>50</b>
<b>14</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>53</b>

# 1 Leben und Werk N. I. Lobatschewskis

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski wurde am 20. November 1792, nach der neuen Zeitrechnung am 1. Dezember, als Sohn eines kleinen Beamten geboren. Seine Mutter, eine energische und kluge Frau, musste nach dem frühen Tod des Vaters ihn und seine beiden Brüder allein aufziehen. Sie ermöglichte jedoch allen Söhnen trotz größter finanzieller Not den Besuch des Kasaner Gymnasiums.

N. I. Lobatschewski besuchte das Kasaner Gymnasium von 1802 bis 1807 und die dortige Universität von 1807 bis 1811. Das Studium verlief für ihn sehr erfolgreich, da er eine herausragende mathematische Begabung besaß. Nach Beendigung des Studiums wurde ihm die Möglichkeit gegeben, sich auf eine Universitätslaufbahn vorzubereiten. Schon 1816 wurde er zum Professor ernannt.

Die Lehrtätigkeit Lobatschewskis hinterließ in der Erinnerung seiner Schüler vielfältige Eindrücke. Seine Vorlesungen zeichneten sich durch eine klare und vollständige Darlegung aus. Da er in den verschiedensten Wissenschaftszweigen umfangreiche Kenntnisse besaß, war es ihm möglich, nicht nur Vorlesungen über mathematische Disziplinen, sondern auch über Mechanik, Physik, Astronomie, Geodäsie und Topographie zu halten.

Lobatschewski wurde 1827 zum Rektor der Kasaner Universität gewählt und bekleidete dieses Amt fast zwanzig Jahre lang.

Dem talentierten und energischen Mann, der mit allen Problemen der Hochschulausbildung vertraut war, gelang es, die Kasaner Universität in eine vorbildliche Hochschule zu verwandeln. Auf Grund seiner Initiative begann die Universität die "Gelehrten Schriften" herauszugeben, wurde der großzügige Aufbau der Universitätsgebäude eingeleitet und das astronomische Observatorium eröffnet.

Weltweite Anerkennung fanden die wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschewskis. Durch die Schaffung der nichteuklidischen Geometrie wurde sein Name unsterblich, sie wird nach ihm Lobatschewskische Geometrie genannt.<sup>1</sup>

Am 11. (23.) Februar 1826 trug er auf einer Sitzung der physikalisch-mathematischen Fakultät der Kasaner Universität erstmalig über die von ihm gemachte Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie vor. Die erste schriftliche Darstellung ihrer Grundlagen war seine Arbeit "Über die Anfangsgründe der Geometrie", die 1829 bis 1830 im "Kasaner Boten" erschien.

Die Forschungsergebnisse Lobatschewskis wurden von der Mehrheit seiner Zeitgenossen nicht verstanden. Deshalb beurteilten sie seine geometrischen Arbeiten sowohl in Russland als auch im Ausland negativ. Die Ideen des russischen Gelehrten waren zu kühn und einschneidend, sie stimmten nicht mit den damals in der Wissenschaft herrschenden Ansichten überein.

Erst nach dem Tode fanden seine Arbeiten allgemeine Anerkennung.

---

<sup>1</sup>Die andere Bezeichnung hyperbolische Geometrie hängt damit zusammen, dass in ihr die Geraden wie auch die Hyperbeln in der euklidischen Geometrie zwei unendlich ferne Punkte haben (vgl. 4. Kapitel).

Lobatschewski war jedoch durch die Kritik nicht von der Richtigkeit seiner Überlegungen und Schlussfolgerungen abzubringen, sondern setzte beharrlich die Untersuchung des von ihm geschaffenen geometrischen Systems fort. Er veröffentlichte eine Reihe von Arbeiten, die mit Fragen der nichteuklidischen Geometrie verbunden waren. Die letzte Arbeit, die er kurz vor seinem Tode beendete, musste, da er erblindet war, nach seinem Diktat geschrieben werden.

Die wissenschaftliche Arbeit Lobatschewskis blieb nicht auf geometrische Untersuchungen beschränkt, sondern wir verdanken ihm auch einige grundlegende Arbeiten zur Algebra und Analysis. Das von ihm gefundene Verfahren zur angenäherten Lösung algebraischer Gleichungen ist sehr originell und leicht anwendbar.

Seine philosophischen Ansichten waren ausgeprägt materialistisch. Er schrieb, dass das sicherste Mittel zur Überprüfung wissenschaftlicher Ergebnisse das Experiment, also die Praxis, ist. Er forderte einen Mathematikunterricht, der die Schüler befähigt, Erscheinungen unserer Umwelt mathematisch zu interpretieren.

1846 wurde Lobatschewski von seinen Verpflichtungen an der Universität enthoben und zum Gehilfen des Kurators des Kasaner Schulbezirks ernannt. Obwohl das formal eine Beförderung war, konnte sich die Obrigkeit auf diese Weise des progressiv gesinnten Rektors entledigen.

Lobatschewski wurde noch mehr als in seiner Rektorenzeit in der Forschungsarbeit eingeschränkt. Deshalb konnte er sich mit dem Verlassen der Universität, mit der er sein ganzes Leben über verbunden war, nur schwer abfinden. Er starb am 12. (24.) Februar 1856.

1896 wurde zur Erinnerung an diesen hervorragenden Wissenschaftler ein Denkmal gegenüber dem Kasaner Universitätsgebäude errichtet.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Eine ausführlichere Biographie Lobatschewskis findet der Leser in dem von einem Autorenkollektiv herausgegebenen Buch: Biographien bedeutender Mathematiker, Verlag Volk und Wissen, Berlin 1975.

## 2 Die axiomatische Methode in der Geometrie

Wir erläutern in diesem Kapitel die wichtigsten Entwicklungsetappen der Geometrie seit dem Altertum, um die Rolle der Axiome in der Geometrie besser verstehen zu können.

Die Geometrie nahm ihren Ursprung in den Ländern des alten Orients, in denen vor einigen tausend Jahren in Verbindung mit den Erfordernissen der Landvermessung, der Architektur und der Astronomie wichtige Regeln für die praktische Messung von Winkeln, des Flächeninhaltes gewisser Figuren und des Volumens einfacher Körper entstanden. Diese Regeln wurden empirisch, also durch die Erfahrung, erhalten und allem Anschein nach mündlich überliefert.

Daher treffen wir mitunter in den ältesten uns überlieferten mathematischen Texten auf Anwendungen geometrischer Gesetze, ohne jedoch einen Versuch zu finden, diese anzugeben.

Im Laufe der Zeit vergrößerte sich der Umfang der Objekte, auf die die erworbenen geometrischen Kenntnisse angewendet wurden. So ergab sich die Notwendigkeit, die geometrischen Gesetzmäßigkeiten in allgemeinerer Form anzugeben. Dadurch wurde in der Geometrie der Übergang von konkreten zu abstrakten Begriffen hervorgerufen.

Es erwies sich zum Beispiel, dass die für die Messung eines rechtwinkligen Grundstückes bekannte Regel auch für die Messung der Fläche von Teppichen, der Oberfläche von Mauern usw. benutzt werden konnte. Als Ergebnis entstand der abstrakte Begriff des Rechtecks.

So bildete sich die Wissenschaft heraus, die Geometrie genannt wurde. Am Anfang war sie eine rein empirische Wissenschaft, alle Resultate entstanden also unmittelbar aus der Erfahrung.

Die Entwicklung der Geometrie beschränkt sich erst einen neuen Weg, als bemerkt wurde, dass gewisse Aussagen keiner empirischen Begründung bedürfen, wenn sie aus anderen durch streng logische Schlussfolgerungen erhalten werden können. In der Geometrie bildeten sich daher zwei unterschiedliche Arten von Aussagen heraus.

Die einen, die später als Axiome bezeichnet wurden, entstanden aus der Erfahrung, die anderen, die Sätze, wurden aus den Axiomen logisch abgeleitet. Da die logische Begründung, die weder spezielle Hilfsmittel noch zahlreiche ermüdende Messungen erforderte, in technischer Hinsicht also viel einfacher als die empirische war, ergab sich für die Wissenschaftler naturgemäß die Aufgabe, die Geometrie auf eine minimale Anzahl von Axiomen zurückzuführen.

Dadurch änderte sich die Arbeit der Geometer, deren Tätigkeit in den Bereich des logischen Denkens überführt wurde.

Es zeigte sich, dass alle möglichen geometrischen Beziehungen aus einer beschränkten Anzahl von Axiomen logisch gefolgert werden konnten. Das war jedoch nur deshalb möglich, weil die Geometrie von allen Eigenschaften der Körper, außer denen der räumlichen Ausdehnung, abstrahiert. Die Geometrie wandelte sich so aus einer empirischen in eine deduktive Wissenschaft mit der für den heutigen Zustand charakteristischen

axiomatischen Darstellungsweise.<sup>3</sup>

Die erste uns überlieferte systematische Darstellung der Geometrie sind die "Elemente" von Euklid, die ungefähr 300 Jahre vor unserer Zeitrechnung geschrieben wurden. Diese Arbeit ist so aufgebaut, dass den Definitionen und Axiomen die Beweise der Sätze und die Lösungen der Aufgaben folgen.

Jeder neue Satz wird mit Hilfe der Axiome und der vorher bewiesenen Sätze gezeigt. Nur die Axiome werden nicht bewiesen, sondern nur angegeben.

Die "Elemente" Euklids wurden zweitausend Jahre lang von den Wissenschaftlern als absolut richtig anerkannt. Eine Stelle dieser Arbeit schien jedoch nicht völlig richtig zu sein. Wir meinen das Parallelenaxiom, das man wie folgt formulieren kann:

Wenn eine Gerade zwei Geraden schneidet und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist, dann schneiden sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert.<sup>4</sup>

An der Richtigkeit des euklidischen Parallelenaxioms bestand kein Zweifel, unklar war nur, ob es wirklich ein Axiom ist oder aus den anderen Axiomen der "Elemente" Euklids gefolgert werden kann, also den Sätzen zuzuordnen ist.

Die ersten Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, scheiterten bei dem früher erwähnten Bestreben, die Anzahl der geometrischen Aussagen, die nur einer empirischen Begründung bedürfen, zu verkleinern.

Im Laufe der Zeit änderte sich die Situation. Der empirische Ursprung der Axiome wurde vergessen, und man sah sie, unabhängig von irgendwelchen praktischen Erfahrungen als wahr an.<sup>5</sup> Dadurch kam man zu der Überzeugung, dass das Parallelenaxiom in Wirklichkeit kein Axiom ist, da es wegen seiner Kompliziertheit nicht als von vornherein wahr anzuerkennen ist.

Folglich müsste man es beweisen können.

Zahlreiche Versuche in dieser Richtung erbrachten jedoch kein positives Resultat. Die zum Misserfolg verurteilten Versuche verschlangen eine Unmenge geistiger Arbeiten während vieler Jahrhunderte und waren die Strafe für eine idealistische Deutung des Wesens der Axiome.

Die meisten Scheinbeweise des euklidischen Parallelenaxioms bestanden darin, dass es durch eine äquivalente Aussage ersetzt wurde. Solche Aussagen sind beispielsweise die

---

<sup>3</sup>Als deduktiv wird eine Wissenschaft bezeichnet, in der jede neue Erkenntnis auf rein logischem Wege aus Bekanntem abgeleitet wird.

<sup>4</sup>In den Geometrielehrbüchern wird das euklidische Parallelenaxiom durch die folgende äquivalente Aussage ersetzt: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man nur eine Gerade legen, die zu der gegebenen Geraden parallel ist. Dabei werden zwei Axiome der euklidischen oder jeder anderen Geometrie äquivalent genannt, wenn jedes aus dem anderen unter der Annahme folgt, dass alle restlichen Axiome gültig bleiben.

<sup>5</sup>Es ist klar, dass ein Blindgeborener, dem später durch eine Operation die Sehkraft gegeben wird, in der ersten Zeit nach der Operation einen Würfel nicht von einer Kugel unterscheiden kann, wenn er sie nicht betasten darf. Das beweist die Notwendigkeit des Experiments für die richtige Wahrnehmung geometrischer Figuren, ohne die man nicht mit den geometrischen Begriffen arbeiten kann.

folgenden:

Senkrechte und Geneigte zu einer gegebenen Geraden schneiden sich.

Zu einem gegebenen Dreieck existiert immer ein ähnliches, aber nicht kongruentes Dreieck.

Der geometrische Ort der Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben und auf einer Seite von ihr liegen, ist eine Gerade.

Durch drei beliebige Punkte kann man entweder eine Gerade oder einen Kreis legen.

Wir zeigen später, dass diese Aussagen falsch sind, wenn das euklidische Parallelenaxiom nicht gilt. Nehmen wir daher eine der angeführten Aussagen als Axiom, so gehen wir von der Richtigkeit dessen aus, was erst bewiesen werden soll.

Lobatschewski beschritt bei seinen Untersuchungen über die Parallelen einen anderen Weg. Er begann auch mit Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, bemerkte jedoch bald, dass einer von ihnen zu einem vollkommen unerwarteten Ergebnis führte.

Bei diesem Versuch wurde die indirekte Beweismethode benutzt. Sie bestand in folgender Überlegung. Wenn das euklidische Parallelenaxiom eine Folgerung aus den anderen Axiomen der "Elemente" ist und man im Gegensatz dazu annimmt, es gibt durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden in der durch sie definierten Ebene wenigstens zwei Geraden, die die gegebene Gerade nicht schneiden, so muss diese Annahme früher oder später zu einem Widerspruch führen.

Lobatschewski bemerkte jedoch, indem er unter dieser Annahme immer neue Folgerungen betrachtet, die mit der euklidischen Geometrie unverträglich sind, dass diese ein harmonisches und widerspruchsfreies System bilden, das dazu geeignet ist, die Grundlage für eine neue wissenschaftliche Theorie zu werden.

So wurde das Fundament für die nichteuklidische Geometrie gelegt, dessen Parallelenaxiom sich von dem euklidischen unterscheidet und mit der oben angegebenen Vermutung übereinstimmt. Wir bezeichnen es als Lobatschewskisches Parallelenaxiom.<sup>6</sup>

Damit ist jedoch noch nicht bewiesen, dass keine der unzähligen Folgerungen aus dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom zu einem Widerspruch führt. Lobatschewski skizzierte eine Lösung dieses Problems. Er wies darauf hin, dass die Widerspruchsfreiheit der von ihm geschaffenen Geometrie aus der Möglichkeit, sie zu arithmetisieren, folgen muss.

Damit ist gemeint, dass die Lösung einer beliebigen geometrischen Aufgabe auf arithmetische Berechnungen und analytische Umformungen zurückgeführt werden kann, indem man die schon von ihm entwickelte hyperbolische Trigonometrie anwendet. Andere Wissenschaftler fanden später strenge Beweise für die Widerspruchsfreiheit der Lobatschewskischen Geometrie.

Lobatschewskis Untersuchungen über die hyperbolische Geometrie waren außerordent-

---

<sup>6</sup>Später wurde klar, dass es außer der Geometrie, die Lobatschewski entdeckte, noch viele andere nichteuklidische Geometrien gibt.



lich umfangreich. Sie umfassten den elementaren Teil, die Trigonometrie, die analytische Geometrie und die Differentialgeometrie. Durch die Anwendung der mit seiner Geometrie zusammenhängenden Methoden fand er über 200 neue Formeln zur Berechnung bestimmter Integrale.

Seine Zeitgenossen und auch seine Schüler hielten die Entdeckung Lobatschewskis für völlig unsinnig und eine grobe Missachtung der Gesetze der Logik und des gesunden Menschenverstandes.<sup>7</sup> Man darf sich über eine solche Reaktion auf seine genialen Ideen nicht wundern, da sie gewohnten Vorstellungen widersprechen.

Ebenso feindselig begegnete man auch dem heliozentrischen Weltbild des Kopernikus, das bestritt, was völlig klar schien, und behauptete, was völlig unvorstellbar war. Es erforderte schon sehr tiefgehende Überlegungen, um die Zulässigkeit der Existenz zweier verschiedener Geometrien zu verstehen. Wir werden auch dazu einige Gedanken darlegen, um diesen Sachverhalt verständlich zu machen.

In jeder Wissenschaft haben die einfachsten Begriffe eine große Bedeutung. In der euklidischen Geometrie sind es solche Begriffe wie Punkt, Gerade und Ebene. Diese Bezeichnungen bleiben auch in der nichteuklidischen Geometrie erhalten.

Als "Gerade" wird die kürzeste Verbindung zweier Punkte und als "Ebene" die Fläche bezeichnet, die die Eigenschaft hat, dass jede "Gerade", die mit ihr zwei Punkte gemeinsam hat, in ihr liegt. Beispielsweise bezeichnet man in der sphärischen Geometrie als "Ebene" bzw. "Gerade" die Kugeloberflächen bzw. ihre Großkreise. Diese Bezeichnungen sind gerechtfertigt, da in jeder beliebigen Geometrie die "Gerade" die einfachste Kurve ist, die die wichtigste Eigenschaft der euklidischen Geraden hat, und die "Ebene" die einfachste Fläche ist, die die wichtigste Eigenschaft der euklidischen Ebene besitzt.<sup>8</sup>

Wir wollen jetzt einige Besonderheiten der sphärischen Geometrie ergänzen. Zur Veranschaulichung werden wir sie als Geometrie auf der Oberfläche eines Globus betrachten. Es ist leicht einzusehen, dass sich zwei "Geraden" dieser Geometrie, z.B. zwei Meridiane, immer in zwei entgegengesetzten Punkten des Globus schneiden.

Weiterhin ist die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks stets größer als zwei Rechte. Beispielsweise sind in dem Dreieck, das durch ein Viertel des Äquators und die Bögen zweier Meridiane (Abb. 1) begrenzt wird, alle drei Winkel Rechte.<sup>9</sup>

---

<sup>7</sup>Man darf natürlich nicht ohne Unterschied alle Zeitgenossen Lobatschewskis verdächtigen, dass sie unfähig waren, seine Entdeckung zu verstehen. Viele äußerten ihre Meinung möglicherweise deshalb nicht, weil die Arbeiten Lobatschewskis nicht in ihren wissenschaftlichen Interessenbereich fielen. Es ist aber auch bekannt, dass der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß und der ungarische Geometer Janos Bolyai, die unabhängig von Lobatschewski auf die Idee der Existenz einer nichteuklidischen Geometrie kamen, seine Meinung teilten. Gauß, der fürchtete, nicht verstanden und verspottet zu werden, trat nie öffentlich für die Unterstützung der Ideen Lobatschewskis ein. Bolyai zog sich sogar von der Beschäftigung mit der Mathematik zurück, da er sah, dass seine Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie, die er 1832 publizierte, keine Beachtung fanden. Daher musste Lobatschewski ganz auf sich gestellt für die Richtigkeit seiner Ideen kämpfen.

<sup>8</sup>Wir bemerken, dass es in der projektiven Geometrie keinen Abstandsbegriff zwischen Punkten gibt. Im Fall einer solchen Geometrie ist die gegebene Übertragung der Begriffe "Gerade" und "Ebene" nicht möglich.

<sup>9</sup>Als Winkel zwischen zwei Kurven in einem ihrer Schnittpunkte bezeichnet man den Winkel zwischen den Tangenten in diesem Punkt.

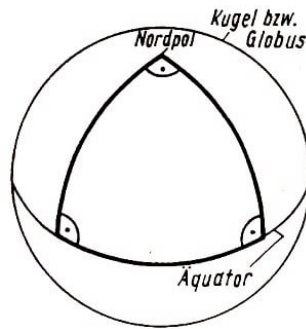


Abb. 1

Es ist bekannt, dass man in der Geographie neben dem Globus auch verschiedene Karten der Erdoberfläche verwendet. Dem entspricht das Studium der sphärischen Geometrie mit Hilfe sphärischer Karten.

Man muss dabei nur wissen, wie sich aus der Darstellung der Kurven in der Karte ihre tatsächlichen Längen und die tatsächlichen Größen der Winkel zwischen ihnen ergeben. Die Schwierigkeit liegt darin, dass man in der Karte eine Verzerrung des Bildes erhält, die nicht überall gleich ist.

In einer Erdkarte, die nach dem Merkatorentwurf hergestellt wurde <sup>10</sup> (Abb. 2), entsprechen den Meridianen parallele Geraden.

Die zu diesen orthogonalen Geraden stellen die Breitenkreise dar. Dabei entspricht einem Abschnitt von  $1^\circ$ , unabhängig von seiner geographischen Breite, ein und dieselbe Länge, obgleich in Wirklichkeit die Länge der Breitenkreise um so kleiner wird, je größer ihre Breite ist.

Da eine Fläche zwei Dimensionen hat, bezeichnet man eine Geometrie, die die Figuren auf dieser Fläche untersucht, als zweidimensional, und eben diese Fläche als zweidimensionalen Raum.

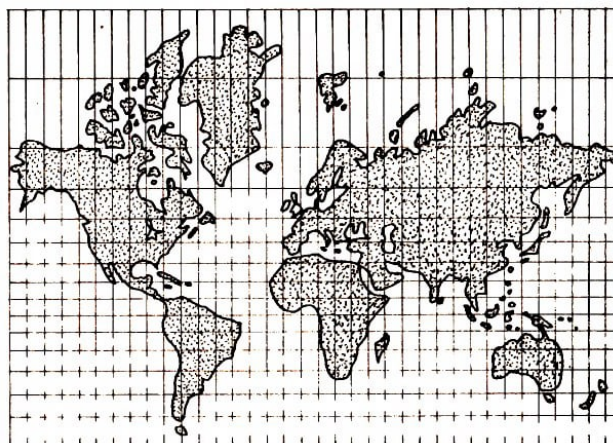


Abb. 2

Von alters her kennt man zwei Arten zweidimensionaler Geometrien, erstens die ebene euklidische und zweitens die sphärische Geometrie. Die Tatsache, dass eine nichteuklidische Geometrie, und zwar die sphärische, existiert, beachteten die Mathematiker nicht besonders, da sie die Kugeloberfläche im dreidimensionalen euklidischen Raum

<sup>10</sup>Gerhart Merkator (1512-1594) war ein bedeutender flämischer Kartograph. Das von ihm 1569 vorgeschlagene kartographische Abbildungsverfahren erhielt allgemeine Verbreitung, vor allem bei der Herstellung von Meereskarten.

betrachteten. Daher wurden die nichteuklidischen Eigenschaften der Kugeloberfläche nicht als solche erkannt.

Durch die Untersuchungen Lobatschewskis wurde man sich nicht nur darüber klar, dass Flächen mit nichteuklidischen Eigenschaften denkbar sind, sondern auch dreidimensionale nichteuklidische Räume. Der Begriff der dreidimensionalen nichteuklidischen Geometrie kann verwundern, wenn man nicht die folgenden Erläuterungen gibt.

Die Untersuchungsergebnisse gewisser Erscheinungen lassen sich manchmal bequem in geometrischer Form darstellen. So werden Daten über das Wachstum der Arbeitsproduktivität mitunter als graphische Darstellung oder als Diagramm angegeben.

Es ist klar, dass man mit Hilfe geometrischer Bilder die verschiedenartigsten Zusammenhänge, die keine direkten Beziehungen zur Geometrie haben, beschreiben kann. Wenn die graphische Darstellung für das angeführte Beispiel als Kurve in der euklidischen Ebene gegeben ist, so wird offenbar die zweidimensionale Geometrie angewandt.

In komplizierteren Fällen benutzt man dreidimensionale oder sogar höherdimensionale euklidische und nichteuklidische Geometrien. Daraus folgt nicht, dass diese stets räumliche Beziehungen beschreiben, denn es gibt Theorien, die zu ihrer Formulierung geometrische Bezeichnungen benutzen, deren Inhalte aber nichts mit einer räumlichen Vorstellung zu tun haben.

So kann man dem dreidimensionalen Raum als vierte Dimension die Zeit zuordnen und kommt so zum Begriff des vierdimensionalen Raumes, in dem gewisse Zeitspannen als Strecken dargestellt werden können. In den meisten Fällen ist ein solches Herangehen jedoch nur scheinbar anschaulich, obwohl es bis zu einem gewissen Grade die Analyse der mit dieser Methode untersuchten Erscheinungen erleichtert.

Die nichteuklidischen Geometrien erweisen sich als richtig, da ihre Aussagen erfolgreich auf praktische Probleme angewandt werden können. Die Tatsache, dass diese Aussagen geometrische Bezeichnungen benutzen, spielt dabei keine wesentliche Rolle, da die geometrischen Formulierungen leicht so verändert werden können, dass sie Eigenschaften der untersuchten Gegenstände und Erscheinungen angeben.

Wir erinnern daran, dass bei den Anwendungen der Mathematik oft Begriffe durch andere ersetzt werden, wenn eine Theorie zur Untersuchung qualitativ verschiedener Erscheinungen dient, die sich aber denselben mathematischen Gesetzen unterordnen.

Über die dreidimensionalen Geometrien muss noch gesagt werden, dass sie unabhängig von anderen Anwendungen als Hypothesen betrachtet werden können, die zur Beschreibung der Eigenschaften des Weltalls benutzt werden. Die Frage, welche dieser Hypothesen besser der Wirklichkeit entspricht, kann nur auf dem Wege der experimentellen Prüfung ihrer Aussagen gelöst werden.

Wir bemerken die für die weiteren Darlegungen wichtige Tatsache, dass man in der euklidischen Ebene mehrere Modelle der Lobatschewskischen Ebene konstruieren kann. Genauso verhielt es sich mit der Kugeloberfläche, die man auf verschiedene Arten auf die Ebene abbilden konnte. Unserem Heft liegt eines dieser möglichen Modelle zugrunde.

Die Lobatschewskische Geometrie erhielt erst allgemeine Anerkennung, nachdem im Jahre 1868 der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami gefunden hatte, dass im euklidischen Raum eine Fläche existiert, die die Eigenschaften der Lobatschewskischen Ebene besitzt, genauer eines Teils dieser Ebene, wenn man die kürzesten Linien auf dieser Fläche als "Geraden" bezeichnet.

Diese Entdeckung, die bald zur Konstruktion der verschiedensten Modelle der Lobatschewskischen Ebene führte, überzeugte die Wissenschaftler von der Richtigkeit der Ideen des großen russischen Geometers, gaben den Anstoß zu einem gründlichen Studium seiner Werke und legten den Grundstein zu einer Vielzahl von Untersuchungen auf dem Gebiet der nichteuklidischen Geometrie.

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie stellt die Physiker vor die außerordentlich wichtige Frage, ob der Weltraum euklidisch ist, wie man früher annahm. Ist das nicht der Fall, zu welchem Typ eines nichteuklidischen Raumes gehört er?<sup>11</sup> Um dieses Problem zu lösen, ist es notwendig, die Richtigkeit der Axiome experimentell zu überprüfen.

Dabei ist klar, dass mit der Vervollkommnung der Messmethoden die Zuverlässigkeit der erzielten Versuchsergebnisse wächst und die Möglichkeit besteht, dass die Entscheidung durch Details herbeigeführt wird, die bisher der Aufmerksamkeit der Wissenschaftler entgingen.

Deshalb kehrte Lobatschewski zu einer materialistischen Deutung der Axiome als Aussagen zurück, die grundlegende geometrische Eigenschaften des Raumes angeben, die die Menschen aus der Erfahrung als wahr akzeptieren.

Man kann heute noch nicht auf eine vollständige Beantwortung der Frage nach der geometrischen Struktur der Welt rechnen. Es sei aber erwähnt, dass auf der Grundlage zahlreicher Daten der Relativitätstheorie die Welt als nichteuklidisch angesehen werden kann, jedoch mit komplizierteren geometrischen Eigenschaften als der Lobatschewskische Raum. Die heftigste Erschütterung erhielt die Überzeugung, dass unser Weltall euklidisch ist, durch die Entdeckung des physikalischen Gesetzes, nach dem es keine Geschwindigkeit gibt, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigt.

Jetzt können wir auch auf die mitunter zu hörende Frage antworten, welche der beiden Geometrien wahr ist, die euklidische oder die Lobatschewskische Geometrie. In Bezug auf die zweidimensionale euklidische und die sphärische Geometrie entsteht eine analoge Frage nicht, da völlig klar ist, dass sie beide wahr sind. Jede von ihnen hat ihre eigenen Anwendungsgebiete, und die Formeln der euklidischen und der sphärischen Geometrie können nicht auf Figuren der jeweils anderen Geometrie angewandt werden.

Dasselbe ist auch im Verhältnis der verschiedenen dreidimensionalen Geometrien richtig, da jede von ihnen logisch widerspruchsfrei ist und Anwendungen in bestimmten Gebieten findet, die nicht notwendig geometrischen Charakter haben. Sie versagen jedoch, wenn man ihren Sätzen universellen Charakter zuschreibt.

Was den geometrischen Aufbau der Welt angeht, so gehört diese Frage, wie wir schon

---

<sup>11</sup>Bei der Betrachtung dieser Frage muss man auch damit rechnen, dass der Weltraum möglicherweise inhomogen ist, d.h., dass sein geometrischer Aufbau nicht überall gleich ist.

erwähnten, in den Bereich der Physik und kann daher nicht mit den Mitteln der reinen Geometrie gelöst werden.

Eine Besonderheit besteht unter anderem darin, dass keine Geometrie die Verhältnisse der Ausdehnung mit absoluter Genauigkeit wiedergibt, da wegen des molekularen Aufbaus der Materie kein Körper existiert, der die geometrischen Eigenschaften einer idealen Kugel besitzt. Daher ergibt die Anwendung geometrischer Gesetze auf die Lösung konkreter Aufgaben unvermeidlich angenäherte Resultate. Deshalb führt unsere Vorstellung vom geometrischen Aufbau der Welt zu der begründeten Überzeugung, dass eine bestimmte Geometrie besser als die anderen die tatsächlichen Verhältnisse der Ausdehnung beschreibt.

Daraus, dass man in der Relativitätstheorie die Formeln der nichteuklidischen Geometrie anwendet, folgt noch nicht notwendig, dass man die euklidische Geometrie ad acta legen kann, wie das mit der Astrologie, der Alchemie und ähnlichen Pseudowissenschaften geschah.

Beide Geometrien stellen ein Instrument zur Untersuchung räumlicher Körper dar, wobei die erste genauere Betrachtungen durchzuführen erlaubt und die zweite für die Lösung der meisten in praktischer Hinsicht wichtigen Probleme hinreichend genaue Ergebnisse liefert. Sie zeichnet sich zusätzlich durch große Einfachheit aus und wird deshalb immer eine breite Anwendung finden.

Am Ende unseres kurzen Überblicks bemerken wir noch einmal, dass es Lobatschewski war, der die Entwicklung dieser Ideen hervorrief. Die wissenschaftlichen Verdienste dieses hervorragenden Wissenschaftlers bestehen nicht nur darin, dass er das tausendjährige Geheimnis um das Parallelenaxiom lüftete, sondern die Bedeutung seiner Forschungen ist erheblich größer.

Indem Lobatschewski eines der euklidischen Axiome einer kritischen Analyse unterwarf, legte er den Grundstein für die Überprüfung gewisser Grundlagen des euklidischen Systems.

Das führte zu einer Ausarbeitung wissenschaftlicher Prinzipien für den axiomatischen Aufbau der Geometrie und anderer mathematischer Disziplinen.

Außerdem führte die Entdeckung der hyperbolischen Geometrie die Wissenschaft der räumlichen Formen aus dem engen Rahmen des euklidischen Systems heraus. Die Lobatschewskische Geometrie fand unmittelbare Anwendungen in der Theorie der bestimmten Integrale und in anderen Gebieten der Mathematik.

Lobatschewski rief die Erforschung solcher Fragen der Mathematik ins Leben, die bis dahin nicht entstehen konnten. Darunter ist die Frage nach der geometrischen Struktur der Welt.

Ohne seine Entdeckung hätte die Relativitätstheorie, eine der größten Errungenschaften der modernen Physik, nicht entwickelt werden können. Außerdem erarbeiteten die Wissenschaftler, ausgehend von seinen Untersuchungen, eine Theorie, die es gestattet, die Prozesse im Innern des Atomkerns zu berechnen.

Wir wollen zum Schluss auch die erkenntnistheoretische Bedeutung der Ideen des großen russischen Mathematikers erwähnen. In der Geometrie herrschte im Verlauf von vielen

Jahrhunderten eine idealistische Anschauung vor, die aus der Philosophie Platos entsprang, die dem euklidischen Axiomensystem einen absoluten Charakter zuschrieb und ihren experimentellen Ursprung leugnete. Lobatschewski brach entschieden mit diesem Standpunkt und führte die Geometrie auf eine materialistische Position zurück.

### 3 Inversion

Wir betrachten eine Vorschrift, mit deren Hilfe man von einer beliebigen geometrischen Figur zu einer anderen übergehen kann, die vollständig durch die erste bestimmt ist. Eine solche Vorschrift wird als geometrische Abbildung bezeichnet.

Zu den am häufigsten benutzten geometrischen Abbildungen gehören neben den Parallelverschiebungen, den Ähnlichkeitstransformationen, den Drehungen und den Projektionen auch die Inversionen. Sie werden in der Mathematik z.B. bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben, in der Funktionentheorie und bei der Untersuchung von Modellen der Lobatschewskischen Ebene verwendet.

Wir geben in diesem Kapitel die Definition der Inversion und der mit ihr zusammenhängenden Begriffe an. Außerdem betrachten wir eine Reihe ihrer wichtigsten Eigenschaften.

In einer Ebene  $\alpha$  sei neben einem Kreis  $k$  mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $O$  ein von  $O$  verschiedener Punkt  $A$  gegeben. Auf der Halbgeraden  $OA$  wählen wir einen Punkt  $A'$  so, dass das Produkt der Strecken  $OA$  und  $OA'$  gleich dem Quadrat des Radius  $r$  des Kreises  $k$  ist:

$$OA \cdot OA' = r^2 \quad (1)$$

Wir vereinbaren, dass wir die Punkte  $A$  und  $A'$  symmetrisch zum Kreis  $k$  nennen.

Wenn einer der Punkte  $A, A'$  außerhalb des Kreises  $k$  liegt, so befindet sich der andere im Innern von  $k$  und umgekehrt, denn aus der Ungleichung  $OA > r$  schließen wir, wenn wir (1) beachten, dass  $OA' < r$  ist. Liegt der Punkt  $A$  oder  $A'$  auf dem Kreis  $k$ , so fallen  $A$  und  $A'$  offenbar zusammen.

Wir betrachten die Abbildung 3, in der  $AB$  eine Tangente an den Kreis  $k$  und  $BA'$  eine zu  $OA$  orthogonale Gerade sind. Da  $OA'$  die Projektion der Kathete  $OB$  des rechtwinkligen Dreiecks  $OAB$  auf die Hypotenuse  $OA$  ist, erhalten wir

$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2 \quad (2)$$

Also sind  $A$  und  $A'$  symmetrisch zu  $k$ . Daraus ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Konstruktion des Punktes  $A'$  bzw.  $A$ , wenn  $A$  bzw.  $A'$  gegeben ist.

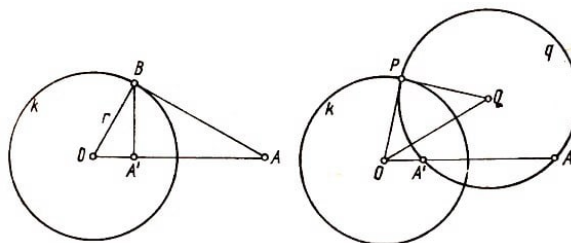


Abb. 3, 4

Zwei Kreise heißen zueinander orthogonal, wenn sie sich unter einem rechten Winkel schneiden, d.h., wenn die Tangenten in einem ihrer Schnittpunkte orthogonal zueinander sind. Gleichbedeutend damit ist, dass die Radien, die durch diesen Punkt gehen, aufeinander senkrecht stehen.

Satz 1. Wenn ein Kreis  $q$  durch die zwei verschiedenen Punkte  $A$  und  $A'$  verläuft, die zum Kreis  $k$  symmetrisch liegen, so sind die Kreise  $k$  und  $q$  zueinander orthogonal.

Es sei  $P$  einer der Schnittpunkte der Kreise  $k$  und  $q$  (Abb. 4). Da  $OP$  der Radius des Kreises  $k$  ist, erhält (1) die Gestalt  $OA \cdot OA' = OP^2$ .

Andererseits ist das Produkt der Strecken  $OA$  und  $OA'$  gleich dem Quadrat der Tangente vom Punkt  $O$  an den Kreis  $q$ . Daher ist  $OP$  Tangente an  $q$ . Folglich sind die Radien  $OP$  und  $QP$  der gegebenen Kreise und daher auch die Kreise selbst zueinander orthogonal.

Wir erinnern daran, dass ein beliebiger Kreis, der durch zwei verschiedene Punkte geht, die zu einer Geraden symmetrisch liegen, diese unter einem rechten Winkel schneidet. Die Analogie dieser Eigenschaft mit der im Satz 1 bewiesenen Aussage führte zu einer Erweiterung des Symmetriebegriffes auf den Fall zweier Punkte, die zu einem Kreis so liegen, dass ein beliebiger durch sie verlaufender Kreis orthogonal zu dem gegebenen Kreis ist.

Satz 2. Wenn zwei Kreise  $k$  und  $q$  zueinander orthogonal sind, so schneidet eine Gerade, die durch den Mittelpunkt  $O$  des Kreises  $k$  geht und den Kreis  $q$  trifft, diesen in Punkten, die zu  $k$  symmetrisch liegen.

Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden mit  $q$  durch  $A$  und  $A'$  und einen der gemeinsamen Punkte der Kreise  $k$  und  $q$  durch  $P$  (Abb. 4). Da die gegebenen Kreise zueinander orthogonal sind, ist die Gerade  $OP$  Tangente an  $q$ . Es gilt dann  $OA \cdot OA' = OP^2$ , so dass folgt, dass die Punkte  $A$  und  $A'$  zum Kreis  $k$  symmetrisch liegen.

Satz 3. Sind ein Dreieck  $OAB$ , wobei  $O$  der Mittelpunkt des Kreises  $k$  ist, und die Punkte  $A'$ ,  $B'$ , die zu  $A$ ,  $B$  symmetrisch zum Kreis  $k$  sind, gegeben, dann gilt

$$\angle OAB = \angle OB'A' \quad \text{und} \quad \angle OBA = \angle OA'B'$$

Wir betrachten die Abbildung 5. Aus der Gleichheit

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

die aus (1) folgt, erhalten wir  $OA : OB' = OB : OA'$ . Also sind die Dreiecke  $OAB$  und  $OB'A'$ , die den  $\angle AOB$  gemeinsam haben, ähnlich. Daraus schließen wir die Behauptung des Satzes.

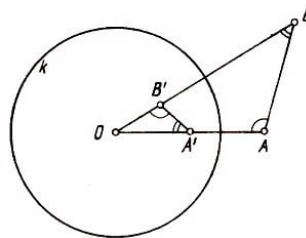


Abb. 5

Wir bemerken, dass man dem Viereck  $ABB'A'$  einen Kreis umschreiben kann, da  $\angle A'AB + \angle A'B'B = 2R$ , wenn wir mit  $B$  den rechten Winkel bezeichnen. Aus Satz 1 folgt, dass dieser Kreis zu  $k$  orthogonal ist.



Wir betrachten jetzt die Abbildung der Ebene  $\alpha$  in sich, bei der jeder Punkt in den zum Kreis  $k$  symmetrischen Punkt abgebildet wird. Diese Abbildung bezeichnen wir als Inversion.

Der Kreis  $k$  heißt der Grundkreis der Inversion und sein Mittelpunkt der Inversionspol. Wenn eine Figur  $F$  durch die Inversion an  $k$  in  $F'$  übergeht, so sagt man, dass  $F$  zu  $F'$  und  $F'$  zu  $F$  symmetrisch zum Kreis  $k$  sind. Wir bemerken noch, dass es zum Inversionspol keinen Punkt gibt, mit dem er zum Grundkreis symmetrisch ist.

Es ist leicht einzusehen, dass die Punkte, die außerhalb der Kreisscheibe liegen, die durch den Grundkreis der Inversion beschränkt wird, in die Punkte dieser Kreisscheibe, ausgenommen den Inversionspol, abgebildet werden. Die Umkehrung dieser Aussage ist offenbar auch richtig. Dabei gehen die Punkte des Grundkreises in sich über. Eine Gerade, die durch den Inversionspol  $O$  geht, wird in sich abgebildet, doch geht dabei der Punkt  $O$  verloren.

Satz 4. Die Inversion bildet eine Gerade  $l$ , die nicht durch den Inversionspol geht, in einen Kreis ab, der durch den Inversionspol verläuft.

Sei  $A$  der Fußpunkt des Lotes vom Inversionspol  $O$  auf die Gerade  $l$ . Außerdem sei  $B$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $l$ .  $A'$  und  $B'$  sind die Punkte, die mit  $A$  und  $B$  zum Grundkreis  $k$  symmetrisch sind (Abb. 6).

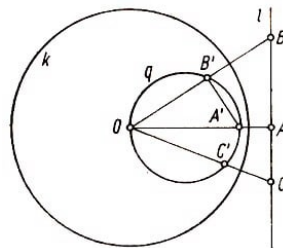


Abb. 6

Wir konstruieren einen Kreis  $q$  über  $OA'$  als Durchmesser. Da nach Satz 3  $\angle OB'A' = \angle OAB$ , gilt  $\angle OB'A' = R$ . Folglich liegt der Punkt  $B'$  auf dem Kreis  $q$ .

Andererseits sei  $C'$  ein beliebiger von  $O$  verschiedener Punkt des Kreises  $q$ . Die Gerade  $OC'$  schneidet dann  $l$  in einem gewissen Punkt  $C$ , der, wie man leicht sieht, durch die gegebene Inversion in den Punkt  $C$  abgebildet wird. Damit ist der Satz bewiesen.

Man muss jedoch erwähnen, dass die Gerade  $l$  in die Figur abgebildet wird, die aus dem Kreis  $q$  ohne den Punkt  $O$  besteht.

Wir bemerken noch, dass der Mittelpunkt des Kreises  $q$  auf dem Lot von  $O$  auf  $l$  liegt. Schneidet die Gerade  $l$  den Grundkreis nicht, so liegt der Kreis  $q$  im Inneren von  $k$ . Wird  $k$  durch  $l$  in einem gewissen Punkt berührt, so berührt auch  $q$  den Grundkreis in demselben Punkt.

Haben dagegen  $l$  und  $k$  zwei Schnittpunkte, so verläuft auch  $q$  durch diese.

Satz 5. Eine Inversion bildet einen Kreis  $q$ , der durch den Inversionspol geht, in eine Gerade ab, die nicht durch den Inversionspol verläuft.

Wir betrachten drei verschiedene Punkte  $O$ ,  $A$  und  $B$  des Kreises  $q$ , wobei  $O$  der Inversionspol ist.  $A'$ ,  $B'$  seien die Punkte, die zu  $A$ ,  $B$  symmetrisch zum Grundkreis  $k$

sind. Nach Satz 4 wird die Gerade  $A'B'$  in den Kreis abgebildet, der durch  $O$ ,  $A$  und  $B$  geht, also auf  $q$ . Daraus folgt jedoch, dass  $q$  in die Gerade  $A'B'$  übergeht.

Satz 6. Eine Inversion bildet einen Kreis, der nicht durch den Inversionspol verläuft, in einen Kreis ab, der auch nicht durch den Inversionspol geht.

Sei  $k$  der Grundkreis der Inversion mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $O$  und  $q$  der gegebene Kreis, der nicht durch  $O$  verläuft (Abb. 7).

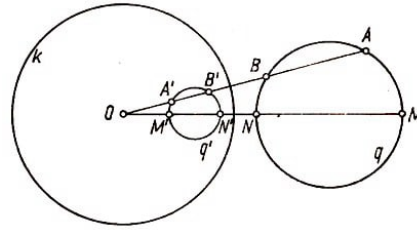


Abb. 7

Wir wählen auf  $q$  einen beliebigen Punkt  $A$  und bezeichnen durch  $B$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $OA$  mit  $q$ .  $A'$  und  $B'$  sind wieder die Punkte, die mit  $A$  und  $B$  zum Kreis  $k$  symmetrisch liegen.

Dann gilt

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

Daraus folgt

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \quad \text{und} \quad OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4 \quad (2)$$

Das Produkt  $OA \cdot OB = g$  ändert sich nicht, wie aus der elementaren Geometrie bekannt ist, wenn der Punkt  $A$  auf  $q$  seine Lage verändert. Also ist  $g$  eine Konstante, die positiv ist, wenn  $O$  außerhalb von  $q$  liegt, und negativ ist, wenn sich  $O$  im Innern von  $q$  befindet, da im letzten Fall die Strecken  $OA$  und  $OB$  entgegengesetzt gerichtet sind. Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir

$$OA' \cdot OB' = \frac{r^4}{g} \quad \text{und damit} \quad \frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g^2}{r^4}$$

oder, wenn wir (2) beachten,

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$$

Das Vorzeichen haben wir richtig gewählt, da die Strecken  $OB$  und  $OB'$  die gleiche Richtung haben. Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Figuren, die durch die Punkte  $A$  und  $B'$  beschrieben werden, ähnlich sind.

Damit ist die Behauptung bewiesen, dass der Punkt  $B'$  einen Kreis beschreibt, den wir mit  $q'$  bezeichnen. Der Inversionspol  $O$  ist dabei das Ähnlichkeitszentrum für die Kreise  $q$  und  $q'$ .  $O$  liegt außerhalb der Kreise  $q$  und  $q'$ , wenn  $g > 0$ , und im Innern, wenn  $g < 0$  gilt.

Berührt  $q$  den Kreis  $k$  in einem gewissen Punkt, dann auch  $q'$  in demselben Punkt.

Schneiden sich dagegen die Kreise  $k$  und  $q$ , so geht  $q'$  auch durch die Schnittpunkte. Ein Kreis  $q$ , der zu  $k$  orthogonal ist, wird durch die Inversion an  $k$  in sich selbst abgebildet, d.h.,  $q'$  fällt mit  $q$  zusammen. Das ist eine unmittelbare Folge aus Satz 2. Wenn die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Kreise  $k$  und  $q$  den Kreis  $q$  in den Punkten  $M$  und  $N$  schneidet, so ist die Strecke  $M'N'$ , wobei  $M'$  und  $N'$  die zu  $M$  und  $N$  symmetrischen Punkte am Kreis  $k$  sind, Durchmesser von  $q'$  (Abb. 7). Diese Tatsache kann man zur Konstruktion des Kreises  $q'$  verwenden. Wir bemerken noch, dass die Mittelpunkte der Kreise  $q$  und  $q'$  nicht zum Grundkreis  $k$  symmetrisch sind.

Satz 7. Die Schnittpunkte zweier Kreise  $p$  und  $q$ , die zu  $k$  orthogonal sind, liegen zum Kreis  $k$  symmetrisch.

Dieser Satz ist offensichtlich richtig, da die Kreise  $p$  und  $q$  durch die Inversion an  $k$  in sich abgebildet werden. Also vertauschen die Schnittpunkte  $A$  und  $A_1$  ihre Plätze (Abb. 8).

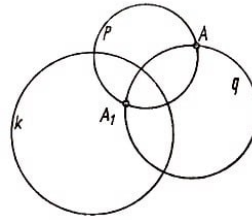


Abb. 8

Satz 8. Wenn  $M$  und  $M'$  zwei zum Kreis  $k$  symmetrische Punkte zweier zu  $k$  symmetrischer Kurven  $m$  und  $m'$  sind, so verlaufen die Tangenten an  $m$  und  $m'$  in den Punkten  $M$  und  $M'$  entweder zur Geraden  $MM'$  senkrecht oder bilden mit ihr ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis  $MM'$ .

Wir wählen auf  $m$  einen von  $M$  verschiedenen Punkt  $N$  und konstruieren den zu  $N$  bzgl.  $k$  symmetrischen Punkt  $N'$  (Abb. 9).

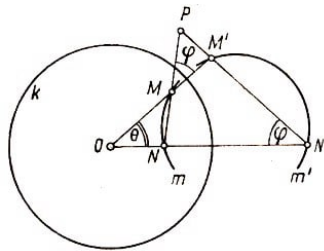


Abb. 9

Es ist klar, dass  $N'$  auf  $m'$  liegt. Die Geraden  $MM'$  und  $NN'$  gehen durch den Mittelpunkt  $O$  des Kreises  $k$ .

Wir zeichnen die Geraden  $MN$  und  $M'N'$ , die sich im Punkt  $P$  schneiden mögen. Wenn

$$\angle MON = \theta \quad , \quad \angle OMN = \varphi$$

so gilt wegen Satz 3  $\angle ON'M' = \varphi$ . Daher ist im Dreieck  $MM'P$

$$\angle PMM' = \varphi \quad , \quad \angle MM'P = \varphi + \theta$$

Der Winkel  $\theta$  strebe dann unter der Bedingung gegen Null, dass  $M$  fest bleibt. Dabei gehen in der Grenze die Sekanten  $MN$  und  $M'N'$  in die Tangenten an  $m$  und  $m'$  in den Punkten  $M$  und  $M'$  über. Das Dreieck  $MM'P$  wird dabei gleichschenkelig, da

$$\lim_{\theta \rightarrow 0}(\varphi + \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi + \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 9. Die Inversionen ändern die Größen der Winkel nicht.

Wir betrachten die Kurven  $m$  und  $n$ , die sich im Punkt  $A$  schneiden. Durch die Inversion am Kreis  $k$  mögen  $m, n, A$  in  $m', n', A'$  abgebildet werden. Aus Satz 8 folgt, dass der Winkel zwischen den Tangenten an  $m'$  und  $n'$  im Punkt  $A'$  gleich dem Winkel zwischen den Tangenten an  $m$  und  $n$  im Punkt  $A$  ist. Das war aber gerade zu beweisen.

Abbildungen, die die Größen der Winkel nicht ändern, heißen konform. Aus dem vorigen Satz folgt, dass die Inversion eine konforme Abbildung ist.

## 4 Ein Modell der Lobatschewskischen Ebene

Wir betrachten eine Ebene  $\omega$  und in ihr eine Gerade  $u$ , die  $\omega$  in die Halbebenen  $\tau$  und  $\tau'$  teilt. Die Halbebene  $\tau$  sei das Modell eines gewissen zweidimensionalen Raumes  $H$ . Wir werden zwischen der Länge  $s$  einer Kurve im Raum  $H$  und der Länge  $\sigma$  ihres Bildes in dem Modell unterscheiden. Die Größe  $s$  bezeichnen wir als hyperbolische und  $\sigma$  als euklidische Länge.

Die Längenmessung in dem von uns betrachteten Modell möge den folgenden Prinzipien gehorchen.

1. Die hyperbolische Länge einer Strecke  $MN$ , die zur Geraden  $u$  parallel ist und sich im Abstand  $y$  von ihr befindet, sei  $MN/y$ , d.h. gleich dem Quotienten aus der euklidischen Länge der Strecke und ihrem euklidischen Abstand von  $u$ .
2. Wenn  $\sigma$  die euklidische und  $s$  die hyperbolische Länge eines Kurvenstücks ist, so gelte die Ungleichung

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}$$

sofern  $y \neq 0$  ist.  $y$  ist dabei der kleinste und  $y'$  der größte euklidische Abstand der Kurvenpunkte von  $u$  (Abb. 10). Ausgeschlossen ist jetzt natürlich der Fall, dass das Kurvenstück eine Strecke einer zu  $u$  parallelen Geraden ist, also 1. Anwendung findet.

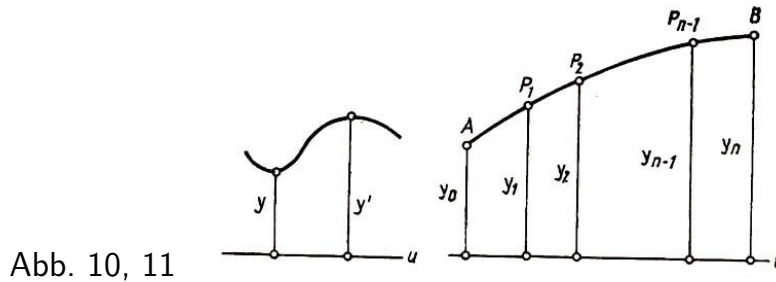


Abb. 10, 11

Später werden wir sehen, dass der Raum  $H$ , dessen Modell beiden Prinzipien genügt, die Lobatschewskische Ebene ist.

Ausgehend von den beschriebenen Grundsätzen ist es nicht schwierig, eine Methode anzugeben, um die hyperbolische Länge bestimmen zu können. Wir betrachten zuerst die hyperbolische Länge  $s$  eines Kurvenstücks  $AB$ , das die Eigenschaften hat, dass der Abstand eines Punktes von der Geraden  $u$  wächst, wenn er sich auf diesem Bogen von  $A$  nach  $B$  bewegt. Außerdem sei das Kurvenstück zusammenhängend und die Entfernung des Punktes  $A$  von  $u$  nicht Null (Abb. 11).

Wir markieren auf dem Bogen  $AB$  von  $A$  nach  $B$  laufend die Punkte

$$A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B \quad (*)$$

Die Größen

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$$

geben die euklidischen Abstände der Punkte  $(*)$  von der Geraden  $u$ , die euklidischen Längen der Bogenstücke  $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$  und die euklidischen Längen der Sehnen

an, die zu den einzelnen Bögen gehören. Damit bilden wir die Summen

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_n}, \quad \Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}}, \quad Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n}$$

Aus dem 2. Prinzip folgt

$$\Sigma < s < \Sigma' \quad (3)$$

da  $0 < y_0 < y_1 < \dots < y_n$  gilt. Wir betrachten jetzt die Differenz

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1} (y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2} (y_2 - y_1) + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n} (y_n - y_{n-1})$$

Der rechte Teil dieser Gleichung wächst, wenn jede der Größen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  durch die größte, die wir durch  $\sigma'$  bezeichnen, und jeder Nenner durch  $y_0^2$  ersetzt wird. Daher gilt

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \dots + y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_n - y_0)$$

Wenn  $\sigma'$  gegen Null strebt, erhalten wir aus dieser Ungleichung, dass die Differenz  $\Sigma' - \Sigma$  auch gegen Null geht.

Wir schreiben jetzt die Summe  $Z$  als

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$$

Wenn wir mit  $\alpha$  den kleinsten und  $\beta$  den größten der Quotienten

$$\frac{\zeta_1}{\sigma_1}, \frac{\zeta_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$$

bezeichnen, so erhalten wir

$$\alpha \Sigma \leq Z \leq \beta \Sigma \quad (4)$$

Lässt man die Zahl  $n$  unbeschränkt wachsen und jede der Größen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  und folglich auch  $\sigma'$  gegen Null streben, dann konvergieren die Differenz  $\Sigma' - \Sigma$ , wie oben gezeigt wurde, gegen Null und  $\alpha, \beta$  gegen Eins.<sup>12</sup>

Zusammen damit folgt aus den Ungleichungen (3) und (4), dass jede der Summen  $\Sigma, \Sigma', Z$  gegen denselben Grenzwert strebt. Dieser Grenzwert ist gleich der hyperbolischen Länge  $s$  des Kurvenstücks  $AB$ .

Da nur die Summe  $Z$  leicht zu berechnen ist, denn in ihr treten keine euklidischen Längen von Bögen, sondern nur von Strecken auf, gilt

$$s = \lim Z = \lim \left( \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n} \right) \quad (5)$$

Der Grenzübergang ist dabei unter den oben beschriebenen Bedingungen durchzuführen.

<sup>12</sup>Es ist bekannt, dass der Quotient aus Sehne und Bogen gegen 1 strebt, wenn die Länge des Bogens gegen Null geht.

Wir bemerken noch, dass man in der Gleichung (5) für jedes  $y_i$  die Entfernung eines beliebigen Punktes des Bogens  $P_i P_{i+1}$  von der Geraden  $u$  nehmen kann. Dadurch ändert sich zwar im allgemeinen die Summe  $Z$ , jedoch nicht ihr Grenzwert.

Zerlegt man ein Stück einer gewissen Kurve in eine endliche Anzahl von Teilen, die den Bedingungen genügen, die oben im Zusammenhang mit dem Kurvenstück  $AB$  gefordert wurden, so ist ihre hyperbolische Länge die Summe der hyperbolischen Längen ihrer Teile. So kann man den Bogen  $AD$ , der in Abb. 12 dargestellt ist, in die Teile  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  zerlegen. Wir sehen jedoch, dass die Unterteilung des Bogens  $CD$  von  $D$  aus nach  $C$  erfolgen muss.

Wir betrachten jetzt geometrische Abbildungen, die die Halbebene  $\tau$  so in sich abbilden, dass die hyperbolische Länge eines beliebigen Kurvenstücks, das in dieser Halbebene liegt, gleich der hyperbolischen Länge desselben Bogens in der neuen Lage ist.

Solche Abbildungen werden wir hyperbolische Bewegungen nennen. Dieser Begriff ist analog dem der Bewegung in der euklidischen Ebene definiert. Dort ist z.B. eine Drehung um einen ihrer Punkte und einen gewissen Winkel eine Bewegung. Wir werden Figuren  $F$  und  $F_1$  als hyperbolisch gleich (kongruent) bezeichnen, wenn es eine hyperbolische Bewegung gibt, die  $F$  in  $F_1$  abbildet.

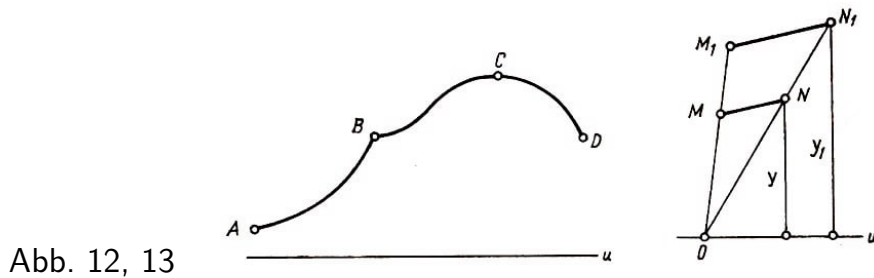


Abb. 12, 13

Wir untersuchen jetzt die einfachsten hyperbolischen Bewegungen.

1. Jeder Punkt der Halbebene  $\tau$  werde in ein und denselben zu  $u$  parallelen Richtung um den gleichen Betrag verschoben.

Offenbar wird jede Figur durch diese Abbildung in eine hyperbolisch kongruente überführt, da sich weder ihre euklidischen Abmessungen noch die Entfernungen ihrer Punkte von  $u$  ändern. Daraus können wir schließen, dass eine euklidische Verschiebung der Halbebene  $\tau$  längs der Geraden  $u$  eine hyperbolische Bewegung ist.

2. Eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Zentrum in einem beliebigen Punkt  $O$  der Geraden  $u$  und einem positiven Koeffizienten bilde eine Strecke  $MN$  in die Strecke  $M_1N_1$  ab (Abb. 13). Durch  $y$  und  $y_1$  bezeichnen wir die Abstände der Punkte  $N$  und  $N_1$  von der Geraden  $u$ . Da die Dreiecke  $OMN$  und  $OM_1N_1$  ähnlich sind, gilt  $MN/y = M_1N_1/y_1$ . Zusammen mit (5) folgt daraus, dass sich bei der beschriebenen Abbildung die hyperbolische Länge eines beliebigen Kurvenstücks nicht ändert.

Daher ist eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Zentrum auf der Geraden  $u$  und positivem Koeffizienten eine hyperbolische Bewegung. Den Ähnlichkeitskoeffizienten muss man positiv wählen, damit die Strecke  $M_1N_1$  wieder in der Halbebene  $\tau$  und nicht in  $\tau'$  liegt.

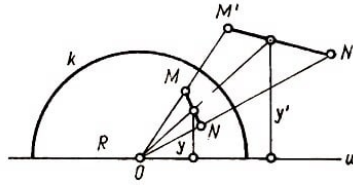


Abb. 14

3. Wir betrachten die Inversion an einem Kreis  $k$ , der einen beliebigen Radius  $R$  haben kann, dessen Mittelpunkt  $O$  jedoch auf der Geraden  $u$  (Abb. 14) liegt.  $M$  und  $N$  seien zwei Punkte mit hinreichend kleinem Abstand und  $M'$  und  $N'$  die zum Kreis  $k$  symmetrischen Punkte dazu.

Durch  $y$  und  $y'$  bezeichnen wir die Abstände der Schnittpunkte der Winkelhalbierenden zum Winkel  $MON$  mit den Strecken  $MN$  und  $M'N'$ . Da die Dreiecke  $OMN$  und  $ON'M'$  ähnlich sind, gilt

$$\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$$

Daraus schließen wir mit (5), dass sich bei der gegebenen Abbildung die hyperbolische Länge eines beliebigen Kurvenstücks nicht ändert. Folglich ist die Inversion an einem Kreis  $k$  eine hyperbolische Bewegung, wenn der Mittelpunkt auf der Geraden  $u$  liegt. Der Radius von  $k$  kann dabei beliebig sein.

4. Schließlich ist leicht einzusehen, dass die Spiegelung an einer Geraden, die auf  $u$  senkrecht steht, auch eine hyperbolische Bewegung ist.

Wir bemerken, dass jede der betrachteten hyperbolischen Bewegungen eine konforme Abbildung ist. Diese Eigenschaft ist für die Verschiebungen der Halbebene  $\tau$  längs der Geraden  $u$ , für die Ähnlichkeitsabbildungen und die Spiegelungen offensichtlich klar. Die Konformität der Inversion wurde schon im 2. Kapitel nachgewiesen.

Da eine hyperbolische Bewegung eine beliebige Figur in eine hyperbolisch gleiche überführt, besitzt diese Eigenschaft auch jede Abbildung, die sich als Folge hyperbolischer Bewegungen darstellen lässt. Daher ist eine solche Abbildung auch eine hyperbolische Bewegung. Wir erwähnen noch ohne Beweis, dass man jede hyperbolische Bewegung als Aufeinanderfolge endlich vieler der oben betrachteten hyperbolischen Bewegungen darstellen kann.

Wir wollen jetzt zeigen, dass durch die definierten Prinzipien der Längenmessung in der Halbebene  $\tau$  ein Modell der Lobatschewskischen Geometrie verwirklicht wird. Dazu benötigen wir in der Halbebene  $\tau$  gewisse Figuren, die durch die gleichen Eigenschaften wie die entsprechenden Figuren der euklidischen Geometrie definiert werden, sich jedoch von diesen möglicherweise unterscheiden.

Wir werden daher für sie die Bezeichnungen der euklidischen Geometrie übernehmen und mit dem Attribut "hyperbolisch" versehen. Als hyperbolische Gerade bezeichnen wir in diesem Sinne die Kurve, die zwei beliebige ihrer Punkte mit dem kürzesten hyperbolischen Abstand verbindet. Analog ist ein hyperbolischer Kreis der geometrische Ort aller Punkte, die sich in der gleichen hyperbolischen Entfernung von einem gegebenen Punkt befinden.

Wir wollen zuerst näher untersuchen, welche Kurven der Halbebene  $\tau$  hyperbolische



Geraden sind.

Die euklidischen Halbgeraden, die auf der Geraden  $u$  senkrecht stehen, sind z.B. hyperbolische Geraden. Das wird durch die folgenden Überlegungen klar.

Die Punkte  $A$  und  $B$  mögen auf einer zu  $u$  orthogonalen Geraden liegen (Abb. 15). Wir verbinden diese Punkte durch das Geradenstück  $AmB$  und durch irgendeine Kurve  $AnB$ .  $a$  und  $b$  seien zwei zu  $u$  parallele Geraden, die einen hinreichend kleinen Abstand voneinander haben und die das Geradenstück  $AmB$  in  $C$  und  $D$  und die Kurve  $AnB$  in  $E$  und  $F$  schneiden.

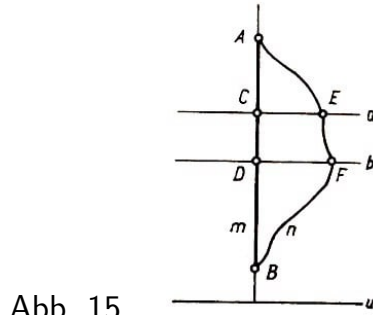


Abb. 15

Die euklidische Länge der Strecke  $CD$  ist kleiner als die des Bogenstücks  $EF$ . Da man ihre hyperbolischen Längen durch  $CD/y$  und  $EF/y$  berechnen kann, wenn  $y$  die Entfernung des Punktes  $D$  bzw.  $F$  von der Geraden  $u$  ist, folgt, dass die hyperbolische Länge der Strecke  $CD$  kleiner als die des Kurvenstücks  $EF$  ist.

Sie sind nur dann gleich, wenn das Bogenstück  $EF$  ein zu  $u$  orthogonales euklidisches Geradenstück ist. Dieser Fall kann jedoch nicht immer eintreten, da sonst  $AnB$  mit  $AmB$  zusammenfallen müsste. Damit ist gezeigt, dass die hyperbolische Länge des Geradenstücks  $AmB$  kleiner als die des Bogens  $AnB$  ist. Das war aber gerade zu beweisen.

Wir zeigen jetzt, dass die Halbkreise in  $\tau$ , die durch die euklidischen Kreise  $k$  gegeben sind, deren Mittelpunkte auf  $u$  liegen, auch hyperbolische Geraden sind. Die Gerade  $u$  möge  $k$  in den Punkten  $A$  und  $B$  schneiden (Abb. 16).

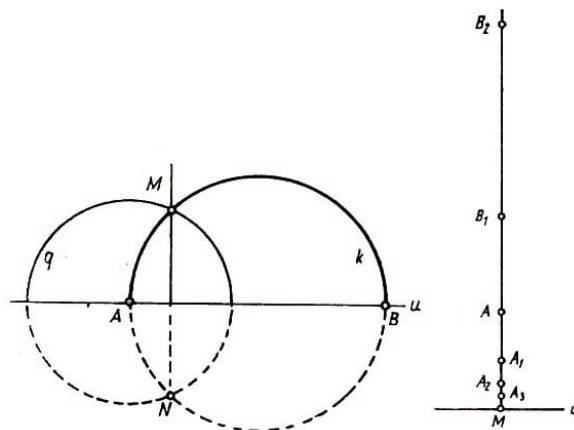


Abb. 16, 17

Wir konstruieren einen Kreis mit dem Mittelpunkt in  $A$  und benutzen ihn als Grundkreis einer Inversion.  $M$  und  $N$  mögen die Schnittpunkte von  $k$  und  $q$  sein. Durch die

Inversion an  $q$  wird der Kreis  $k$ , der durch den Inversionspol geht, in die Gerade  $MN$  abgebildet (vgl. Kapitel 3).

Da die Inversion eine hyperbolische Bewegung ist und die Gerade  $MN$  auf  $u$  senkrecht steht, wird der Halbkreis  $k$  durch eine hyperbolische Bewegung in eine hyperbolische Gerade überführt. Folglich ist dieser Halbkreis auch eine hyperbolische Gerade.

Die hyperbolischen Geraden der Halbebene  $\tau$  sind damit die euklidischen Halbgeraden, die zur Geraden  $u$  senkrecht sind, und die euklidischen Halbkreise, deren Mittelpunkte auf  $u$  liegen. Mit Hilfe des unten angeführten Axioms 1 ergibt sich, dass keine weiteren hyperbolischen Geraden existieren.

In einem beliebigen Punkt  $M$  der Geraden  $u$  errichten wir jetzt das Lot (Abb. 17), das in der Halbebene  $\tau$  liegt, wählen auf ihm einen Punkt  $A$  und konstruieren zu  $A$  die Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots$  so, dass

$$AA_1 = A_1M, A_1A_2 = A_2M, A_2A_3 = A_3M, \dots$$

gilt. In Worten ausgedrückt bedeutet das, dass  $A_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $AM$ ,  $A_2$  der Mittelpunkt der Strecke  $A_1M$  usw. ist.

Wir betrachten dann die Ähnlichkeitsabbildung mit dem Zentrum in  $M$  und dem Koeffizienten  $1/2$ . Diese Abbildung ist eine hyperbolische Bewegung, die die Punkte  $A, A_1, A_2, \dots$  in die Punkte  $A_1, A_2, A_3, \dots$  überführt.

Daraus folgt, dass die hyperbolischen Längen der Strecken  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$  gleich sind. Die von uns durchgeführte Konstruktion führt also zu einer Zerlegung der hyperbolischen Geraden  $AM$  vom Punkt  $A$  aus in Strecken  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$  gleicher hyperbolischer Länge.

Wie wir sehen, erreichen wir dabei niemals den Punkt  $M$ , unabhängig davon, wieviel solche Strecken wir auch betrachten.  $M$  heißt daher uneigentlicher oder auch unendlich ferner Punkt der hyperbolischen Geraden  $AM$ . Da  $M$  ein beliebiger Punkt der Geraden  $u$  war, ist auch jeder andere Punkt der Geraden  $u$  ein uneigentlicher Punkt der Halbebene  $\tau$ .

Die Zerlegung der hyperbolischen Geraden  $AM$  in Strecken gleicher hyperbolischer Länge kann man auch in entgegengesetzter Richtung ausführen. Dabei erhält man Strecken  $AB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$  (Abb. 17). Auch diese Zerlegung ist nicht endlich.

Daraus folgt, dass der uneigentliche Punkt der Geraden im Sinne der euklidischen Geometrie auch uneigentlicher Punkt der hyperbolischen Geraden  $AM$  ist. Jeder Punkt der hyperbolischen Geraden  $AM$ , außer den zwei oben ausgezeichneten, hat einen endlichen hyperbolischen Abstand von  $A$ , da er für eine hinreichend große natürliche Zahl  $n$  entweder auf der Strecke  $AA_n$  oder  $AB_n$  liegt. Also hat die hyperbolische Gerade  $AM$  und daher jede beliebige hyperbolische Gerade genau zwei uneigentliche Punkte. Ist die hyperbolische Gerade ein euklidischer Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf der Geraden  $u$ , so sind die Schnittpunkte mit  $u$  ihre uneigentlichen Punkte.

Wir erinnern daran, dass eine euklidische Gerade nur einen uneigentlichen Punkt hat. Das ist der gemeinsame Punkt einer gegebenen Geraden mit allen Parallelen.

Jetzt können wir leicht nachweisen, dass in der Halbebene  $\tau$  alle Axiome der ebenen

Lobatschewskischen Geometrie erfüllt sind. Wir beschränken uns jedoch auf zwei.

Axiom 1. Durch zwei verschiedene Punkte kann man genau eine hyperbolische Gerade legen.

Wenn die gegebenen Punkte  $A$  und  $B$  auf einer zu  $u$  orthogonalen euklidischen Geraden liegen, so ist diese die gesuchte hyperbolische Gerade. Ist das nicht der Fall, so suchen wir auf der Geraden  $u$  den Punkt  $N$ , der gleich weit von  $A$  und  $B$  entfernt ist, und konstruieren den euklidischen Halbkreis mit dem Mittelpunkt  $N$  und dem Radius  $NA$  (Abb. 18).

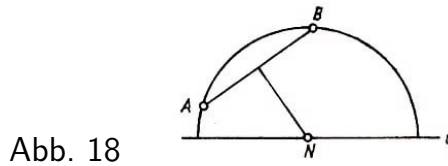


Abb. 18

Das ist die gesuchte hyperbolische Gerade.

Wir müssen noch zeigen, dass durch die Punkte  $A$  und  $B$  keine zwei verschiedenen hyperbolischen Geraden  $l$  und  $l'$  gehen können. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass  $A$  und  $B$  auf einer zu  $u$  orthogonalen Geraden  $l$  (Abb. 19) liegen, da der andere Fall auf diesen mit Hilfe einer entsprechenden hyperbolischen Bewegung zurückgeführt werden kann.

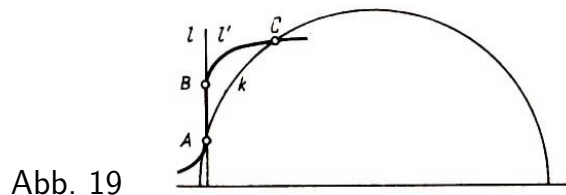


Abb. 19

Bei dieser Anordnung der Punkte  $A$  und  $B$  wird die kürzeste hyperbolische Verbindung zwischen ihnen, wie oben gezeigt wurde, nur durch die euklidische Gerade  $l$  gegeben. Daher fallen längs der Strecke  $AB$   $l$  und  $l'$  zusammen.

Wir nehmen jetzt an, dass der Punkt  $C$  auf  $l'$ , aber nicht auf  $l$  liegt.  $B$  befinde sich auf  $l'$  zwischen  $A$  und  $C$ . Das Kurvenstück  $AC$  des euklidischen Halbkreises  $k$ , dessen Mittelpunkt auf  $u$  liegt, ist ein Teil einer hyperbolischen Geraden, die auf der Strecke  $AC$  nicht mit  $l'$  zusammenfällt. Das ist jedoch, wie wir wissen, unmöglich.

Also sind  $l$  und  $l'$  identisch. Daraus folgt, dass es außer den euklidischen Halbgeraden, die zu  $u$  senkrecht sind, und den euklidischen Halbkreisen mit den Mittelpunkten auf  $u$  keine weiteren hyperbolischen Geraden gibt. Durch zwei beliebige Punkte verläuft eine eindeutig bestimmte hyperbolische Gerade, die eine der beiden möglichen Formen hat.

Zwei hyperbolische Geraden heißen parallel, wenn sie einen gemeinsamen uneigentlichen Punkt haben. Speziell sind die hyperbolischen Geraden, die sich als zu  $u$  orthogonale Geraden darstellen, zueinander parallel. Ihr gemeinsamer uneigentlicher Punkt in der Halbebene  $\tau$  ist derselbe, den auch die euklidische Ebene  $\omega$  hat.

Axiom 2. Durch einen Punkt  $P$ , der nicht auf einer hyperbolischen Geraden  $p$  liegt, kann man Zwei hyperbolische Geraden legen, die zu  $p$  parallel sind.

Wir bezeichnen die uneigentlichen Punkte der hyperbolischen Geraden  $p$  durch  $A$  und  $B$  (Abb. 20).

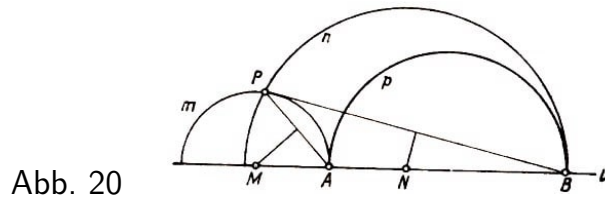


Abb. 20

Durch  $P$  und  $A$  bzw.  $P$  und  $B$  legen wir einen euklidischen Halbkreis  $m$  mit dem Mittelpunkt  $M$  auf der Geraden  $u$  bzw.  $n$  mit dem Mittelpunkt  $N$  auf  $u$ . Die euklidischen Halbkreise  $m$  und  $n$  sind die gesuchten hyperbolischen Geraden. Sie verlaufen zur hyperbolischen Geraden  $p$  in unterschiedlichen Richtungen parallel,  $m$  in Richtung von  $B$  nach  $A$  und  $n$  in Richtung von  $A$  nach  $B$ .

Durch den Punkt  $P$  können drei Arten hyperbolischer Geraden verlaufen:

1. Geraden, die  $p$  schneiden,
2. Geraden, die zu  $p$  parallel sind,
3. Geraden, die zu  $p$  weder parallel sind noch diese Gerade schneiden.

Es existieren unendlich viele hyperbolische Geraden der ersten und dritten Art, jedoch nur zwei der zweiten. Um eine hyperbolische Gerade erster Art zu konstruieren, muss man um einen beliebigen Punkt  $K$  der Strecke  $MN$  als Mittelpunkt einen Halbkreis  $k$  mit dem Radius  $KP$  konstruieren (Abb. 21).

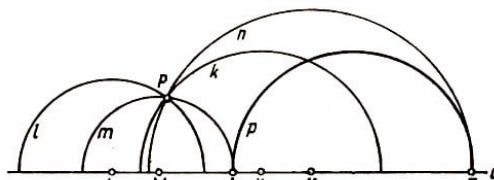


Abb. 21

Wenn man die gleiche Konstruktion mit einem beliebigen außerhalb der Strecke  $MN$  liegenden Punkt  $L$  der Geraden  $u$  als Mittelpunkt wiederholt, so erhalten wir eine hyperbolische Gerade  $l$  des dritten Typs (Abb. 21). Damit ist klar, dass das Axiom 2 genau dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom entspricht, wie es im 2. Kapitel formuliert wurde.

Wenn zwei hyperbolische Geraden sich nicht schneiden und nicht parallel sind, so bezeichnet man sie als divergierend. Beispielsweise divergieren die Geraden  $p$  und  $l$  (Abb. 21).

Da in der Halbebene  $\tau$  die Axiome erfüllt sind, gelten auch die Sätze der Lobatschewskischen Geometrie. Die Halbebene  $\tau$  ist daher mit der oben definierten Längenmessung ein Modell der Lobatschewskischen Ebene in der euklidischen Ebene. Es ist sehr lehrreich, dieses Modell mit einer Erdkarte im Merkatorentwurf zu vergleichen.

Bei dieser werden Meridiane als parallele Geraden dargestellt, und die zu diesen orthogonalen Geraden entsprechen den Breitenkreisen (vgl. Abb. 2). Die Geraden sind auf der Kugel die Großkreise, insbesondere die Meridiane.

Die Breitenkreise sind, wenn wir den Äquator ausschließen, keine Geraden, obwohl sie in der Karte als euklidische Geraden dargestellt werden. Analog verhält es sich in der Halbebene  $\tau$  mit den euklidischen Geraden, die zu  $u$  senkrecht sind, und den Geraden, die zu  $u$  parallel verlaufen. Die zuerst erwähnten sind hyperbolische Geraden, die anderen jedoch nicht.

Ausführlich wird über diese im 7. Kapitel gesprochen. Außerdem wird die Länge von einem Grad eines Breitenkreises kleiner, wenn ihre Breite zunimmt. Bei dem Merkatorwurf hat jedoch jeder Bogen, der einem Grad eines Breitenkreises entspricht, unabhängig von der geographischen Breite die gleiche Länge. Das gleiche Verhalten beobachten wir auch in der Halbebene  $\tau$ , wie wir aus den Prinzipien der Längenmessung ersehen.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass das Modell  $\tau$  konform ist. Das bedeutet, dass die euklidischen Größen der Winkel in diesem Modell gleich den tatsächlichen in der Lobatschewskischen Ebene sind. Wir beweisen das zuerst für den Fall des rechten Winkels.

Dazu konstruieren wir einen Halbkreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  auf der Geraden  $u$  und errichten in  $M$  die zu  $u$  orthogonale Gerade  $p$  (Abb. 22).

Wir betrachten die Winkel 1, 2, 3 und 4, die durch die hyperbolischen Geraden  $k$  und  $p$  gebildet werden. Es existiert eine hyperbolische Bewegung, die Spiegelung an  $p$ , die die Winkel 1 in 2 und 3 in 4 abbildet, und eine hyperbolische Bewegung, die Inversion an  $k$ , die die Winkel 1 in 3 und 2 in 4 überführt.

Daraus folgt, dass in der Lobatschewskischen Ebene, wie auch im Modell  $\tau$ , die Winkel 1, 2, 3 und 4 gleich sind. Folglich sind es alles rechte Winkel.

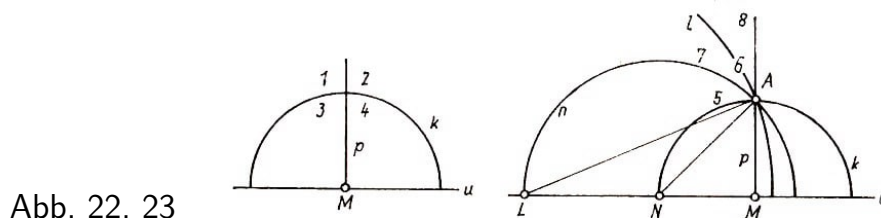


Abb. 22, 23

Wir ergänzen die Figur in der Abb. 22 dadurch, dass wir den Schnittpunkt der Kurven  $k$  und  $p$  mit  $A$  und einen der Schnittpunkte der Kurven  $k$  und  $u$  durch  $N$  (Abb. 23) bezeichnen. Wir konstruieren einen euklidischen Halbkreis  $n$  mit dem Radius  $NA$  um den Mittelpunkt  $N$ .

Er teilt den Winkel 1, wie es in der Abb. 22 gezeigt wird, in die zwei Winkel 5 und 6, deren euklidische Größen, wie man leicht nachweist, gleich sind.

Die Inversion an  $n$  bildet  $k$  in  $p$  und  $p$  in  $k$  ab. Daher vertauschen 5 und 6 ihre Plätze. Daraus folgern wir, dass nicht nur die euklidischen, sondern auch die hyperbolischen Größen der Winkel 5 und 6 gleich sind. Also ist in der Lobatschewskischen Ebene, wie auch im Modell  $\tau$ , jeder von ihnen gleich der Hälfte eines rechten Winkels.

Wir bezeichnen durch  $L$  den Schnittpunkt der Kurven  $u$  und  $n$ , der auf derselben Seite von  $M$  wie auch  $N$  liegt, und konstruieren um  $L$  als Mittelpunkt einen Kreis  $l$  mit dem Radius  $LA$  (Abb. 23).

Er teilt den Winkel 6 in die Winkel 7 und 8. Es ist unschwer zu sehen, dass

$$\angle 8 = \angle NAL = \frac{1}{4}R$$

gilt. Da aber  $\angle 6 = \frac{1}{2}R$ , folgt  $\angle 7 = \frac{1}{4}R$ . Also sind die Winkel 7 und 8 euklidisch gleich. Ihre hyperbolischen Größen sind auch gleich, da bei der Inversion am Kreis 1 diese Winkel ihre Plätze vertauschen.

Analog zeigt man, dass die Winkel, die im Modell  $\tau$  die euklidischen Größen  $\frac{1}{8}R$ ,  $\frac{1}{16}R$ , ... haben, dieselbe Größe auch in der Lobatschewskischen Ebene besitzen. Da man sich jeden Winkel als endliche oder unendliche Summe von Summanden der Gestalt

$$R, \frac{1}{2}R, \frac{1}{4}R, \frac{1}{8}R, \frac{1}{16}R, \dots$$

denken kann, ist die Konformität des Modells gezeigt.

## 5 Kreise in der Lobatschewskischen Ebene

Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, welches Aussehen die Kreise im Modell  $\tau$  haben.

Durch einen Punkt  $M$  der Geraden  $u$  legen wir die euklidische Gerade  $p$ , die zu  $u$  senkrecht ist, und wählen auf ihr in der Halbebene  $\tau$  zwei beliebige Punkte  $B$  und  $C$  (Abb. 24,  $MB > MC$ ).

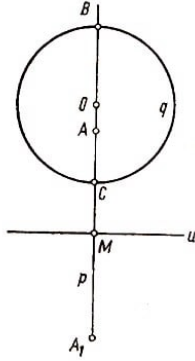


Abb. 24

Auf  $p$  konstruieren wir einen Punkt  $A$  so, dass die Gleichung

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM} \quad (6)$$

erfüllt ist. Daraus schließen wir, dass die hyperbolischen Längen der Strecken  $CA$  und  $AB$  gleich sind, da die Ähnlichkeitsabbildung mit dem Zentrum in  $M$  und dem Koeffizienten  $CM/AM$  die Strecke  $AB$  in  $CA$  überführt.

(Anmerkung: Wegen  $BM \frac{CM}{AM} = BM \frac{AM}{BM} = AM$  bzw.  $AM \frac{CM}{AM} = CM$  geht  $B$  in  $A$  bzw.  $A$  in  $C$  über.)

Wir bezeichnen durch  $O$  die euklidische Mitte der Strecke  $BC$  und konstruieren um  $O$  als Mittelpunkt einen euklidischen Kreis  $q$  mit dem Radius  $OB$ .  $A_1$  sei der Punkt, der aus  $A$  durch Spiegelung an  $u$  hervorgeht. Da

$$OA = OM - AM, \quad OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM$$

folgt

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2 \quad (7)$$

Weiter gilt

$$OM = \frac{1}{2}(BM + CM) \quad \text{und wegen (6)} \quad AM^2 = BM \cdot CM$$

Damit kann man (7) die Gestalt

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM = \frac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 4BM \cdot CM)$$

oder

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM - CM)^2 \quad (8)$$

geben. Da

$$\frac{1}{2}(BM - CM) = OB \quad \text{erhält man aus (8)} \quad OA \cdot OA_1 = OB^2$$

Aus der letzten Gleichung erkennen wir, dass die Punkte  $A$  und  $A_1$  auch symmetrisch zum Kreis  $q$  sind.

Wir zeigen jetzt, dass die hyperbolischen Abstände aller Punkte der Kurve  $q$  von  $A$

gleich sind. Dazu legen wir durch  $A$  und  $A_1$  einen beliebigen euklidischen Kreis  $n$  (Abb. 25).

Da sein Mittelpunkt  $N$  auf der Geraden  $u$  liegt, ist der Teil, der in der Halbebene  $\tau$  ist, eine hyperbolische Gerade.  $n$  und  $q$  mögen sich in den Punkten  $D$  und  $E$ ,  $n$  und  $u$  dagegen in den Punkten  $F$  und  $G$  schneiden.

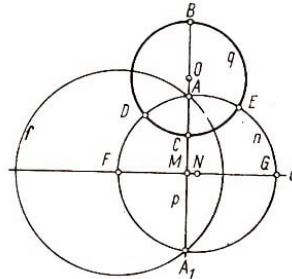


Abb. 25

Wir konstruieren um  $F$  als Mittelpunkt einen euklidischen Kreis  $f$  mit dem Radius  $FA$ . Die Kreise  $q$  und  $f$  sind zueinander orthogonal, da  $f$  durch die Punkte  $A$  und  $A_1$  geht, die zu  $q$  (vgl. 3. Kapitel) symmetrisch sind. Daher wird der Kreis  $q$  durch die Inversion an  $f$  in sich selbst abgebildet.

Weiter wird durch dieselbe Inversion die Gerade  $p$ , die nicht durch den Inversionspol  $F$  geht, in den Kreis  $n$  transformiert, da er durch die Punkte  $F$ ,  $A$  und  $A_1$  verläuft.

Also werden die Bögen  $AD$  und  $AE$  des Kreises  $n$  in die Strecken  $AB$  und  $AC$  der Geraden  $p$  überführt. Folglich sind die hyperbolischen Längen der Strecken  $AD$  und  $AE$  der hyperbolischen Geraden  $n$  gleich den hyperbolischen Längen der Strecken  $AB$  und  $AC$  der hyperbolischen Geraden  $p$ .

Mit anderen Worten ausgedrückt heißt das, dass die hyperbolischen Abstände der Punkte  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $E$  vom Punkt  $A$  gleich sind. Damit ist bewiesen, dass sein hyperbolischer Kreis in unserem Modell durch einen euklidischen Kreis dargestellt wird, der keinen Punkt mit der Geraden  $u$  gemeinsam hat. Der Mittelpunkt  $A$  stimmt aber nicht mit dem Mittelpunkt des entsprechenden euklidischen Kreises überein.

Wir bemerken noch die einfache Folgerung, dass jede hyperbolische Gerade, die durch  $A$  verläuft, den Kreis  $q$  unter einem rechten Winkel schneidet. Diese Aussage entspricht der gleichen Eigenschaft, die auch der Durchmesser eines euklidischen Kreises hat.



## 6 Abstandslinien

Wir betrachten eine zu  $u$  orthogonale Gerade  $p$  und eine zu  $u$  geneigte Gerade  $g$ , die  $u$  in dem gemeinsamen Punkt  $M$  schneiden.

$P_1Q_1$  und  $P_2Q_2$  seien die euklidischen Kreisbögen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $M$  oder, anders ausgedrückt, die Strecken zweier hyperbolischer Geraden  $m_1$  und  $m_2$  (Abb. 26).

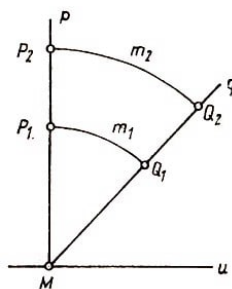


Abb. 26

Da  $m_1$  und  $m_2$   $p$  unter einem rechten Winkel schneiden, sind die hyperbolischen Längen der Bögen  $P_1Q_1$  und  $P_2Q_2$  gleich den hyperbolischen Entfernungen der Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  von der hyperbolischen Geraden  $p$ . Diese hyperbolischen Längen sind gleich, da der Bogen  $P_1Q_1$  durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum in  $M$  in den Bogen  $P_2Q_2$  überführt werden kann.

Daraus schließen wir, dass die Kurve  $q$  der geometrische Ort der Punkte ist, die von der hyperbolischen Geraden  $p$  den gleichen hyperbolischen Abstand haben. Eine solche Kurve bezeichnet man als Abstandslinie und die zugehörige hyperbolische Gerade  $p$  als ihre Basis. Abstandslinien sind, wie aus den Ergebnissen des 4. Kapitels folgt, keine hyperbolischen Geraden.

Die Vermutung, dass der geometrische Ort der Punkte, die sich in derselben Entfernung und auf einer Seite einer gegebenen Geraden befinden, eine Gerade ist, widerspricht der Definition der Abstandslinien und damit dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom. Sie ist dem euklidischen Parallelenaxiom gleichwertig.

Wir bemerken, dass hyperbolische Geraden, die zur Basis einer Abstandslinie senkrecht sind, diese unter einem rechten Winkel schneiden. Das ist sofort aus Abb. 26 zu ersehen.

Eine Inversion an einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden  $u$  liegt, aber von  $M$  verschieden ist, bildet  $q$  in einen euklidischen Kreis ab. Er schneidet, wie auch die hyperbolische Gerade, die Gerade  $u$ . Sein Mittelpunkt liegt jedoch nicht auf  $u$ .

Also sind im Modell  $\tau$  die Abstandslinien entweder euklidische Halbgeraden, die die Gerade  $u$  unter einem spitzen oder stumpfen Winkel schneiden, oder Bögen euklidischer Kreise, die die Gerade  $u$  schneiden, deren Mittelpunkte jedoch nicht auf  $u$  liegen. Man überzeugt sich leicht, dass es keine weiteren Abstandslinien gibt.

## 7 Grenzkreise

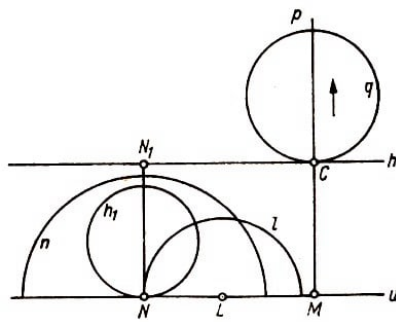


Abb. 27

Wir betrachten den Durchmesser  $p$  des Kreises  $q$ , der senkrecht zur Geraden  $u$  ist, und bezeichnet mit  $C$  den Schnittpunkt mit  $q$ , der  $u$  am nächsten liegt (Abb. 27). Wenn man den Punkt  $C$  festhält, den Radius des Kreises  $q$  aber unbeschränkt vergrößert und dabei den Mittelpunkt nur auf der Geraden  $p$  in der durch den Pfeil angezeigten Richtung sich verändern lässt, so geht  $q$  in der Grenze in eine euklidische Gerade  $h$  über, die zu  $u$  parallel ist.

Die Kurve  $h$  ist keine hyperbolische Gerade. Sie wird als Grenzkreis bezeichnet. Die Grenzform eines Kreises mit unbeschränkt wachsendem Radius, von dem ein Punkt und die Tangente in diesem Punkt festgehalten werden, ist in der euklidischen Geometrie eine Gerade, in der Lobatschewskischen Geometrie jedoch nicht, wie wir gesehen haben.

Wir untersuchen die hyperbolische Bewegung, die durch die Inversion am Kreis  $n$ , dessen Mittelpunkt  $N$  auf der Geraden  $u$  liegt (Abb. 27), gegeben ist. Sie bildet die Kurve  $h$  in den euklidischen Kreis  $h_1$  ab, der durch  $N$  geht und dessen Mittelpunkt auf dem gemeinsamen Lot  $NN_1$  der euklidischen Geraden  $n$  und  $h$  liegt. Daraus folgt, dass  $h_1$  die Gerade  $u$  berührt. Die Grenzkreise sind in unserem Modell  $\tau$  daher entweder die euklidischen Geraden, die zu  $u$  parallel sind, oder die euklidischen Geraden, die  $u$  berühren.

Wir legen jetzt durch  $N$  einen euklidischen Kreis  $l$  mit dem Mittelpunkt  $L$  auf der Geraden  $u$ , (Abb. 27). Da die Radien der euklidischen Kreise  $h_1$  und  $l$  zueinander senkrecht sind, schneidet die hyperbolische Gerade  $l$  den Grenzkreis  $h_1$  unter einem rechten Winkel. Daraus schließen wir, dass alle hyperbolischen Geraden, die durch einen uneigentlichen Punkt eines Grenzkreises gehen - sie werden als ihre Achsen bezeichnet -, diese Kurve unter einem rechten Winkel schneiden.

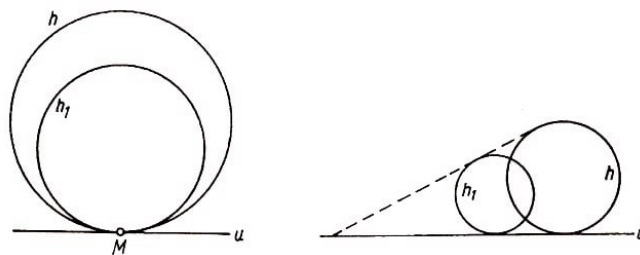


Abb. 28, 29

Ein beliebiger Grenzkreis  $h$  ist hyperbolisch jedem anderen Grenzkreis  $h_1$  gleich, d.h., es existiert eine hyperbolische Bewegung, die  $h$  in  $h_1$  abbildet. Die dazu benötigten hyperbolischen Bewegungen sind die folgenden: Ähnlichkeitsabbildungen mit dem Zentrum auf der Geraden  $u$ , wenn  $h$  und  $h_1$  euklidische Geraden, die zu  $u$  parallel verlaufen, oder euklidische Kreise unterschiedlicher Radien sind, die durch  $u$  berührt werden (Abb. 28 und 29), Verschiebungen längs  $u$ , wenn  $h_1$  und  $h$  euklidische Kreise gleicher Radien sind, die durch  $u$  berührt werden, Inversionen mit dem Pol auf  $u$ , wenn eine der Kurven  $h$ ,  $h_1$  eine euklidische Gerade ist, die zu  $u$  parallel ist, und die andere ein euklidischer Kreis, der von  $u$  berührt wird.

## 8 Einige Sätze der Lobatschewskischen Geometrie

Satz 1. Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck kleiner als  $2R$ .

Wir betrachten zuerst das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  (Abb.30). Die Seiten  $a, b, c$  sind: eine Strecke einer zu  $u$  orthogonalen Geraden, ein Bogen eines euklidischen Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  und ein Bogen eines euklidischen Kreises mit dem Mittelpunkt  $N$ . Der Winkel bei  $C$  ist ein Rechter. Der Winkel bei  $A$  ist gleich dem Winkel zwischen den Tangenten an die Kreise  $b$  und  $c$  im Punkt  $A$  oder, was dasselbe ist, der Winkel zwischen den Radien  $NA$  und  $MA$  dieser Kreise. Schließlich gilt noch  $\angle ABC = \angle BNM$ .

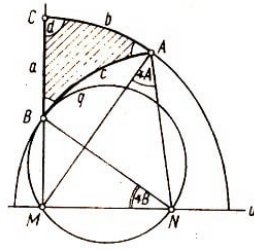


Abb. 30

Wir konstruieren einen euklidischen Kreis  $q$  mit  $BN$  als Durchmesser. Er hat mit dem Kreis  $c$  nur den Punkt  $B$  gemeinsam, da sein Durchmesser der Radius des Kreises  $c$  ist. Daher liegt  $A$  außerhalb der Kreisscheibe, die durch  $q$  begrenzt wird. Folglich gilt

$$\angle BAC = \angle MAN < \angle MBN$$

Daraus leiten wir wegen  $\angle MBN + \angle ABC = R$

$$\angle BAC + \angle ABC < R \quad (9)$$

und damit  $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB < 2R$  ab, was gerade zu beweisen war.

Wir bemerken, dass mit Hilfe einer geeigneten hyperbolischen Bewegung jedes rechtwinklige Dreieck so angeordnet werden kann, dass eine seiner Katheten auf einer zu  $u$  orthogonalen euklidischen Geraden liegt. Also kann man unsere Überlegungen auf ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck anwenden, um die Ungleichung (9) zu beweisen.

Wenn ein schiefwinkliges Dreieck gegeben ist, so zerlegen wir es durch eine seiner Höhen in zwei rechtwinklige Dreiecke. Die Summe der spitzen Winkel dieser Dreiecke ist gleich der Summe der Winkel des gegebenen schiefwinkligen Dreiecks. Daraus schließen wir, wenn wir die Ungleichung (9) beachten, dass der Satz für beliebige Dreiecke richtig ist.

Satz 2. Die Winkelsumme in einem Viereck ist kleiner als  $4R$ .

Um diesen Satz zu beweisen, muss man das Viereck nur durch eine seiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegen.

Satz 3. Zwei divergierende Geraden haben genau ein gemeinsames Lot.

Eine der divergierenden Geraden sei in der Halbebene  $\tau$  durch eine zu  $u$  orthogonale

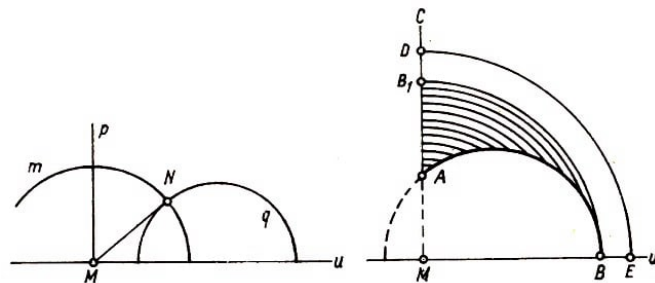
euklidische Gerade  $p$  gegeben, die  $u$  im Punkt  $M$  schneidet. Die andere sei der euklidische Halbkreis  $q$ , dessen Mittelpunkt auf  $u$  liegt.  $p$  und  $q$  haben nach Voraussetzung keinen Punkt gemeinsam (Abb. 31).

Eine solche Anordnung zweier divergierender hyperbolischer Geraden in der Halbebene  $\tau$  kann man stets mittels einer geeigneten hyperbolischen Bewegung erreichen. Wir legen von  $M$  aus die euklidische Tangente  $MN$  an  $q$  und konstruieren den euklidischen Halbkreis  $m$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $MN$ . Es ist klar, dass  $m$  eine hyperbolische Gerade ist, die sowohl  $p$  als auch  $q$  unter rechtem Winkel schneidet. Daher ist  $m$  in der Halbebene  $\tau$  das gesuchte gemeinsame Lot der divergierenden Geraden.

Zwei divergierende Geraden können keine zwei Lote gemeinsam haben, da sonst ein Viereck mit vier rechten Winkeln existieren würde, was Satz 2 widerspricht.

Satz 4. Die rechtwinklige Projektion eines Schenkels eines spitzen Winkels auf den anderen Schenkel ist eine Strecke (keine Halbgerade wie in der euklidischen Geometrie).

Abb. 31, 32



Die Richtigkeit des Satzes wird durch die Abb. 32 klar, in der die Strecke  $AB_1$  die rechtwinklige Projektion des Schenkels  $AB$  des spitzen Winkels  $BAC$  auf den Schenkel  $AC$  ist.

In derselben Abbildung ist der Bogen  $DE$  des euklidischen Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  zur hyperbolischen Geraden  $AC$  senkrecht. Diese orthogonale Gerade schneidet aber die geneigte Gerade  $AB$  nicht. Folglich widerspricht die Vermutung, dass sich eine orthogonale und eine geneigte Gerade zu denselben Geraden immer schneiden, dem Lobatschewskischen Parallelaxiom. Sie ist dem euklidischen Parallelaxiom gleichbedeutend.

Satz 5. Sind die Winkel eines Dreiecks  $ABC$  den entsprechenden Winkeln des Dreiecks  $A'B'C'$  gleich, so sind die Dreiecke kongruent.

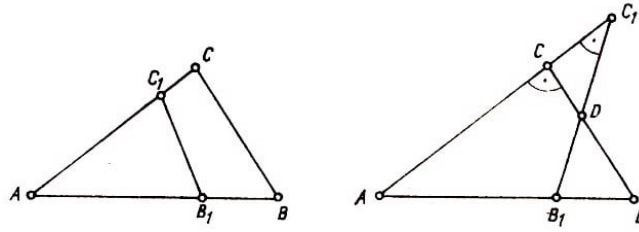
Wir nehmen das Gegenteil an und tragen auf den Strahlen  $AB$  und  $AC$  die Strecken  $AB_1 = A'B'$  und  $AC_1 = A'C'$  ab. Es ist klar, dass die Dreiecke  $AB_1C_1$  und  $A'B'C'$  zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gemeinsam haben. Die Punkte  $B_1$  und  $C_1$  fallen nicht mit  $B$  und  $C$  zusammen, da sonst die gegebenen Dreiecke gleich wären, was der Annahme widerspricht.

Wir betrachten die folgenden Möglichkeiten.

Der Punkt  $B_1$  bzw.  $C_1$  möge zwischen  $A$  und  $B$  bzw.  $A$  und  $C$  liegen (Abb. 33, in dieser und der folgenden Abbildung sind die hyperbolischen Geraden der Einfachheit halber als euklidische Geraden dargestellt). Man überzeugt sich leicht, dass die Winkelsumme

im Viereck  $BCC_1B_1$  gleich  $4R$  ist. Das ist aber wegen Satz 2 unmöglich.

Abb. 33, 34



Der Punkt  $B_1$  bzw.  $C$  möge zwischen  $A$  und  $B$  bzw.  $A$  und  $C$ , liegen (Abb. 34). Wir bezeichnen mit  $D$  den Schnittpunkt der Strecken  $BC$  und  $B_1C_1$ . Da  $\angle ACB = \angle A'B'C'$  und  $\angle A'C'B' = \angle AC_1B_1$ , ist  $\angle ACB = \angle AC_1B_1$ . Das ist aber unmöglich, da der Winkel  $ACB$  ein Außenwinkel zum Dreieck  $CC_1D_1$ .<sup>13</sup>

Analog schließt man auch in den restlichen Fällen. Der Satz ist damit bewiesen, da die von uns aufgestellte Behauptung zu einem Widerspruch führt. Aus Satz 5 folgt, dass es in der Lobatschewskischen Geometrie keine Dreiecke gibt, die zueinander ähnlich, aber nicht kongruent sind.

<sup>13</sup>Der Beweis der Tatsache, dass ein Außenwinkel eines Dreiecks größer als die nicht angrenzenden Innenwinkel ist, hängt nicht vom Parallelenaxiom ab.

## 9 Ergänzende Bemerkungen

Aus der Betrachtung unseres Modells kann man eine Reihe wichtiger Schlussfolgerungen ziehen.

Jedem Satz der Lobatschewskischen Geometrie entspricht in unserem Modell in der Ebene 17 ein gewisser Satz der euklidischen Geometrie. Daher hätte das Vorhandensein eines Widerspruchs in der Lobatschewskischen Geometrie einen Widerspruch in der euklidischen Geometrie zur Folge. Daher ist die Lobatschewskische Geometrie widerspruchsfrei.

Die Kenntnis der Geometrie Lobatschewskis erleichtert oft das Entdecken der Fehler in den Beweisversuchen des euklidischen Parallelenaxioms. In der Mehrheit der Fälle bestehen sie darin, dass Annahmen gemacht werden, die diesem Axiom äquivalent sind. Um sich von deren Unbeweisbarkeit zu überzeugen, genügt es zu zeigen, dass sie dem Lobatschewskischen Parallelenaxiom widersprechen.

So gingen wir auch bei den drei früher betrachteten Beispielen vor, bei der Bestimmung des geometrischen Ortes der Punkte, die von einer Geraden gleich weit entfernt sind, der Untersuchung des Schnittpunktes einer zu einer gegebenen Geraden orthogonalen und geneigten Geraden und bei der Frage nach der Existenz ähnlicher, aber nicht gleicher Dreiecke.

Wir führen noch ein Beispiel an. Farkas Bolyai, der Vater des oben erwähnten Janos Bolyai, schlug einen Beweis des euklidischen Parallelenaxioms vor, der sich auf die Behauptung gründete, dass man durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, immer einen Kreis legen kann. Bolyai hielt diese Aussage für richtig, sie gilt jedoch in der Lobatschewskischen Geometrie nicht, da durch drei Punkte der Lobatschewskischen Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, entweder ein Kreis, ein Grenzkreis oder eine Abstandslinie geht.

Folglich kann man nicht immer durch drei solche Punkte einen Kreis legen.

Daraus folgt, dass die Vermutung F. Bolyais mit dem euklidischen Parallelenaxiom gleichbedeutend ist. Damit ist sein Beweis nicht stichhaltig.

Lobatschewski benutzte bei seinen Untersuchungen keine Modelle der hyperbolischen Ebene. Diese Methode wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Eugenio Beltrami (1835-1900) in einer Arbeit dargestellt, die 1868, zwölf Jahre nach dem Tode des großen russischen Geometers, erschien.

Das Modell der Lobatschewskischen Ebene, das wir in diesem Buch betrachten, unterscheidet sich ganz wesentlich von dem Beltramis und wurde von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré (1854-1912) eingeführt.

## 10 Natürliche Logarithmen und Hyperbelfunktionen

In diesem Kapitel werden mathematische Kenntnisse vermittelt, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen.<sup>14</sup>

Zuerst betrachten wir einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen. Dazu führen wir die Bezeichnungen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (10)$$

ein, in denen  $n$  eine natürliche Zahl ist. Es gilt dann offenbar

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalten wir

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_n}{n} \quad (12)$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (13)$$

$$\text{und} \quad b_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Zerlegen wir den rechten Teil der letzten Gleichung in Faktoren, so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(n+1)} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Wir vergrößern jetzt den Ausdruck (14), indem wir jeden Faktor  $1 + \frac{1}{n+1}$  in der eckigen Klammer durch  $1 + \frac{1}{n}$  ersetzen. Das führt nach Vereinfachungen zu der Ungleichung

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Daraus folgt wegen (12)

$$b_n - a_{n+1} > b_n - a_n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} > a_n$$

Damit ist gezeigt, dass die Folge  $a_n$  monoton wächst.

<sup>14</sup>Die hier behandelten Fragen werden in den folgenden Büchern ausführlicher dargestellt: A. I. Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen, VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin 1956; W. G. Scherwatow, Hyperbelfunktionen, VEB Dt. Verl. d. Wiss., Berlin 1956.

Wir ersetzen jetzt in der eckigen Klammer des Ausdrucks (14) jeden Faktor  $1 + \frac{1}{n}$  durch  $1 + \frac{1}{n+1}$ . Dadurch wird (14) verkleinert, und wir erhalten nach Vereinfachung die Ungleichung

$$b_n - a_{n+1} > \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \quad (15)$$

Es ist leicht einzusehen, dass

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (16)$$

gilt. In der Tat errechnet sich daraus

$$\frac{1}{n} > \frac{n+2}{(n+1)^2} \quad \text{oder} \quad (n+1)^2 > n(n+2)$$

Die Richtigkeit der letzten Ungleichung ist aber trivial. Aus (15), (16) und (13) erhalten wir

$$b_n - a_{n+1} > b_{n+1} - a_{n+1} \quad \text{oder} \quad b_n > b_{n+1}$$

Die Folge  $b_n$  ist also monoton fallend.

Da  $a_1 = 2$  und  $b_1 = 4$ , schließen wir aus dem Vorhergehenden, dass

$$2 \leq a_n \leq b_n < 4$$

Daraus folgt mit (12) die Ungleichung

$$b_n - a_n < \frac{4}{n} \quad (17)$$

Da  $a_n$  monoton wächst,  $b_n$  monoton fällt und die Differenz  $b_n - a_n$  gegen Null strebt, folgt aus (17), dass die Größen  $a_n$  und  $b_n$  gegen denselben Grenzwert streben, den man gewöhnlich durch den Buchstaben  $e$  bezeichnet. Daher gilt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (18)$$

Auf Grund der obigen Überlegungen ist

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (19)$$

Für  $n = 1$  erhalten wir speziell

$$2 < e < 4 \quad (20)$$

Die Zahl  $e$  ist irrational und hat ungefähr den Wert 2,71828. Aus der Ungleichung (19) folgt die Näherungsgleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e \quad (21)$$



Der auftretende Fehler ist dabei kleiner als die Differenz  $b_n - a_n$ , also kleiner als  $\frac{4}{n}$ . Es sei  $x < 1$  eine positive rationale Zahl. Wir werden die natürliche Zahl  $n$  so wählen, dass  $nx = k$  eine ganze Zahl wird. Wegen (19) erhalten wir

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k < e^x < \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x}$$

Daher gilt die Näherungsgleichung

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx e^x \quad (22)$$

Der Fehler ist kleiner als

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+w} - \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)^x - 1\right] < \frac{xe^x}{k} \quad (23)$$

Außerdem erhalten wir mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 1 + x + \frac{k(k-1)}{2k^2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6k^3}x^3 + \dots + \frac{1}{k^k}x^k \quad (24)$$

Daraus folgt

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx 1 + x \quad (25)$$

Den auftretenden Fehler bezeichnen wir durch  $\sigma$ . Es ist klar, dass

$$\sigma = \frac{x^2}{2} \left[ \frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{3k^2}x + \dots + \frac{2}{k^k}x^{k-2} \right] < \frac{x^2}{2}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^2}{2(1-x)} \quad (26)$$

gilt. Aus (22), (25) und (26) schließen wir dann

$$e^x \approx 1 + x \quad (27)$$

mit einem Fehler, der  $\frac{x^2}{2(1-x)}$  nicht überschreitet, da der Grenzwert des Ausdrucks  $\frac{xe^x}{k}$  (vgl. 23) Null ist, wenn  $k$  unbegrenzt wächst. Der Fehler kann beliebig klein gemacht werden, wenn  $x$  hinreichend kleine Werte annimmt.

Die Formel (27) ist auch in dem Fall richtig, wenn  $x < 1$  eine positive irrationale Zahl ist. Davon kann man sich überzeugen, indem man  $x$  durch eine rationale Zahl annähert. Wir bemerken, dass die Formel (27) auch für negative Zahlen  $x$  richtig bleibt, deren Absolutbetrag kleiner als 1 ist. In diesem Fall überschreitet der Fehler den Wert  $\frac{x^2}{2(1+x)}$  nicht.

Aus (22) und (24) kann man noch eine Näherungsgleichung erhalten; die noch genauer als (27) ist. Da  $k \rightarrow \infty$ , ist der Grenzwert des dritten Gliedes des rechten Teils von (24) gleich  $\frac{1}{2}x^2$ . Daher gilt

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad (28)$$

Diese Formel wendet man an, wenn  $x$  so klein ist, dass die Größe  $x^3$  vernachlässigt werden kann. Die Abschätzung des Fehlers werden wir an dieser Stelle nicht angeben.

Wir betrachten jetzt die Logarithmen mit der Basis  $e$ , die in der höheren Mathematik eine überaus wichtige Rolle spielen. Sie werden natürliche Logarithmen genannt.

Durch  $\ln x$  bezeichnet man dann den natürlichen Logarithmus einer Zahl  $x$ . Wegen der bekannten Eigenschaften der Logarithmen gilt  $\ln 1 = 0$  und  $\ln e = 1$ . Wenn wir die beiden Seiten von (27) logarithmieren, erhalten wir die Näherungsgleichung

$$\ln(1+x) \approx x \quad (29)$$

die man anwenden kann, wenn  $x$  hinreichend klein ist.

Mit Hilfe der Zahl  $e$  definiert man die Hyperbelfunktionen wie den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus, die wir abkürzend durch  $\sinh x$  und  $\cosh x$  bezeichnen.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (30)$$

Der Tangens hyperbolicus und der Cotangens hyperbolicus, die wir durch  $\tanh x$  und  $\coth x$  abkürzen, werden durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (31)$$

definiert.

Die Hyperbelfunktionen besitzen mehrere Eigenschaften, die denen der gleichnamigen trigonometrischen Funktionen entsprechen. Auf Einzelheiten können wir nicht eingehen, sondern verweisen auf das oben erwähnte Buch von W. G. Scherwatow.

Für hinreichend kleine Wert der Größe  $x$  erhalten wir aus (27), (30) und (31) die Näherungsgleichungen

$$\sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx 1, \quad \tanh x \approx x \quad (32)$$

und aus (28), (30) und (31)

$$\sinh x \approx x, \quad \cosh x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad \tanh x \approx \frac{2x}{2+x^2} \quad (33)$$

## 11 Längen hyperbolischer Geradenstücke

In diesem Kapitel werden wir zeigen, wie man die hyperbolische Länge von Strecken hyperbolischer Geraden berechnen kann.

Wir betrachten zuerst eine euklidische Halbgerade in der Halbebene  $\tau$ , die zur Geraden  $u$  senkrecht ist und den Fußpunkt  $M$  hat (Abb. 35).

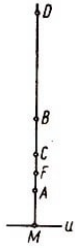


Abb. 35

Auf ihr seien die Punkte  $A, B, C, D$  so angeordnet, dass

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC}$$

oder, was das gleiche ist,

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}$$

gilt.

Wenn wir die beiden letzten Quotienten mit  $\mu$  bezeichnen, sehen wir, dass durch die Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum in  $M$  und dem Koeffizienten  $\mu$  die Strecke  $CD$  in die Strecke  $AB$  abgebildet wird. Daher sind die hyperbolischen Längen dieser Strecken gleich. Daraus folgt, dass die hyperbolische Länge einer Strecke  $AB$ , wir bezeichnen diese durch  $AB_h$ , durch das Verhältnis  $MB/MA$  charakterisiert wird oder, anders ausgedrückt, eine gewisse Funktion dieses Quotienten ist.

Wir zeigen, dass man für diese Funktion den Logarithmus nehmen kann, d.h., man kann

$$AB_h = \log \frac{MB}{MA} \quad (34)$$

setzen. Es sei  $F$  ein Punkt der Strecke  $AB$ . Dann gilt

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}$$

Logarithmieren wir diese Gleichung, so erhalten wir wegen (34)

$$AB_h = AF_h + FB_h$$

Diese Gleichung entspricht der Additionsregel für Strecken.

In (34) kann man einen Logarithmus mit beliebiger, aber für alle Strecken derselben positiven Basis (ungleich 1) wählen. Um Übereinstimmung mit der Darstellung im 4. Kapitel zu erhalten, ist es notwendig, den natürlichen Logarithmus zu wählen. Daher geht (34) in

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA} \quad (35)$$

über. In der Tat erhalten wir aus

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln \left( 1 + \frac{AB}{MA} \right)$$

wenn die Strecke  $AB$  hinreichend klein im Vergleich zur Strecke  $MA$  ist, wegen (29) und (35)

$$AB_h \approx \frac{AB}{MA}$$

Diese Formel entspricht dem Prinzip, das wir im 4. Kapitel gefordert haben.

Wir bemerken, dass die hyperbolischen Längen der Strecken  $AB$  und  $BA$ , die nach Formel (35) berechnet werden, dem Absolutbetrag nach gleich sind, aber verschiedene Vorzeichen haben:

Daraus folgt, dass bei der Messung einer umgekehrt gerichteten Strecke die hyperbolische Länge das Vorzeichen ändert. Wenn die Richtung der Strecke für uns gleichgültig ist, nimmt man im rechten Teil der Formel (35) den absoluten Betrag des Logarithmus.

Wir betrachten jetzt den euklidischen Halbkreis  $q$  mit dem Mittelpunkt  $M$  auf der Geraden  $u$ , der  $u$  in den Punkten  $N'$  und  $N$  schneidet, und die euklidische Senkrechte zu  $u$  im Punkt  $M$ , die  $q$  im Punkt  $A$  trifft (Abb. 36).

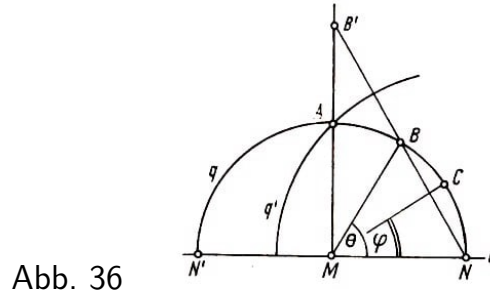


Abb. 36

Es sei  $B$  ein Punkt des Bogens  $AN$ . Wir suchen die euklidische Gerade  $NB$  und bezeichnen durch  $B'$  ihren Schnittpunkt mit  $MA$ . Es ist nicht schwer, sich von der Gleichheit der Strecken  $AB$  und  $AB'$  der hyperbolischen Geraden  $q$  und  $MA$  zu überzeugen.

Tatsächlich, die Inversion am Kreis  $q'$  mit dem Radius  $NA$  und dem Mittelpunkt  $N$  bildet  $q$  in die euklidische Gerade  $MA$  ab. Dabei geht  $A$  in sich und  $B$  in  $B'$  über, da  $B$  und  $B'$  auf einer euklidischen Geraden liegen, die durch den Pol  $N$  der Inversion geht. Also gilt

$$AB_h = AB'_h = \ln \frac{MB'}{MA}$$

Wir bezeichnen den Winkel  $NMB$  durch  $\theta$ . Dann ist  $\angle MNB = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$  und

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \tan \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \cot \frac{\theta}{2}$$

Daraus folgt

$$AB_h = \ln \cot \frac{\theta}{2} \quad (36)$$

Wenn  $C$  ein Punkt des Bogens  $BN$  (Abb. 36) ist und  $NMC = \varphi$ , so erhalten wir aus (36)

$$AC_h = \ln \cot \frac{\varphi}{2} \quad , \quad BC_h = AC_h - AB_h = \ln \cot \frac{\varphi}{2} - \ln \cot \frac{\theta}{2}$$

Damit gilt

$$BC_h = \ln \left( \cot \frac{\varphi}{2} \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \right) \quad (37)$$

Die von uns erhaltene Formel enthält sowohl den Fall, dass die hyperbolische Gerade, die die gegebene Strecke enthält, eine euklidische Halbgerade, als auch den Fall, dass sie ein euklidischer Halbkreis ist.

## 12 Grundlegende Formeln der hyperbolischen Trigonometrie

Wir betrachten in der Halbebene  $\tau$  das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  (Abb. 37). Die Seite  $BC$  ist eine Strecke der euklidischen Geraden  $OB$  ( $OB \perp u$ ),  $CA$  ein Bogen des euklidischen Kreises mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt  $O$  und  $AB$  ein Bogen des euklidischen Kreises mit dem Radius  $l$  und dem Mittelpunkt  $M$ .

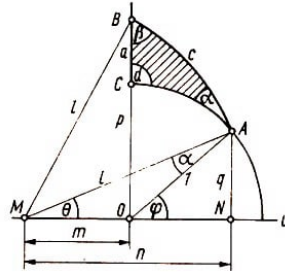


Abb. 37

Die Winkel bezeichnen wir durch  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  und  $\angle ACB = R$ . Der letzte Winkel ist also ein Rechter. Vom Punkt  $A$  fallen wir das Lot  $AN$  auf die Gerade  $u$  und führen die Bezeichnungen

$$OB = p, NA = q, MO = m, MN = n, \angle NMA = \theta, \angle NOA = \varphi$$

ein. Die hyperbolischen Längen der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  des gegebenen Dreiecks seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  im Gegensatz zu den euklidischen Längen  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ .

Wir bemerken, dass

$$\angle OAM = \alpha, \quad \angle OMB = \beta$$

gilt, da die Tangenten im Punkt  $A$  an die Schenkel des Winkels  $h$  senkrecht zu den Schenkeln des Winkels  $OAM$  sind und ebenso die Tangenten im Punkt  $B$  an die Schenkel des Winkels  $\beta$  senkrecht auf den Schenkeln des Winkels  $OMB$  stehen.

Wir untersuchen jetzt eine Reihe von Beziehungen zwischen den betrachteten Größen. Aus den Dreiecken  $OBM$  und  $OAM$  ersehen wir

$$p^2 = l^2 - m^2, \quad 1 = l^2 + m^2 - 2mn (= OA^2)$$

Daraus folgt

$$p^2 - 1 = 2m(n - m), \quad p^2 + 1 = 2(l^2 - mn) \quad (38)$$

Wegen (35) erhalten wir  $a = \ln \frac{p}{1} = \ln p$ . Daher gelten

$$\begin{aligned} e^a &= p, & \sinh a &= \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 - 1}{2p} \\ e^{-a} &= \frac{1}{p}, & \cosh a &= \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 + 1}{2p} \end{aligned}$$

Wenn wir Gleichung (38) anwenden, ergibt sich daraus

$$\sinh a = \frac{m(n-m)}{p}, \quad \cosh a = \frac{l^2 - mn}{p} \quad (39)$$

In dem Dreieck  $OAN$  ist

$$\sin \varphi = q, \quad \cos \varphi = n - m \quad (40)$$

so dass wir

$$\cot \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + n - m}{q}, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}$$

nachweisen. Da wegen (36)

$$b = \ln \cos \frac{\varphi}{2}$$

gilt, folgt

$$e^b = \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - n + m}{q}$$

Daraus erhalten wir

$$\sinh b = \frac{n - m}{q}, \quad \cosh b = \frac{1}{q} \quad (41)$$

Weiter finden wir, wenn wir die Dreiecke  $OEM$  und  $OAN$  betrachten,

$$\sin \theta = \frac{q}{l}, \quad \cos \theta = \frac{n}{l}, \quad \sin \beta = \frac{p}{l}, \quad \cos \beta = \frac{m}{l} \quad (42,43)$$

Damit sind nach kleinen Umformungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cot \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{l + n}{q}, & \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{l - n}{q} \\ \tan \frac{\beta}{2} &= \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{l - m}{p}, & \cot \frac{\beta}{2} &= \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{l + m}{p} \end{aligned}$$

bewiesen. Da wegen (37)

$$c = \left( \ln \cot \frac{\theta}{2} \tan \frac{\beta}{2} \right)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} e^c &= \cot \frac{\theta}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{(l + n)(l - m)}{pq} = \frac{l^2 + ln - lm - mn}{pq} \\ e^{-c} &= \tan \frac{\theta}{2} \cot \frac{\beta}{2} = \frac{(l - n)(l + m)}{pq} = \frac{l^2 - ln + lm - mn}{pq} \end{aligned}$$

Wir erhalten dann

$$\sinh c = \frac{l(n - m)}{pq}, \quad \cosh c = \frac{l^2 - mn}{pq} \quad (44)$$

Schließlich ersehen wir aus dem Dreieck  $OAM$

$$\alpha = \varphi - \theta$$

Beachten wir (40) und (42), so wird

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta = \frac{qn - q(n-m)}{l} \\ \cos \alpha &= \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta = \frac{n(n-m) + q^2}{l} = \frac{n(n-m) + l^2 - n^2}{l}\end{aligned}$$

wenn  $q^2 = l^2 - n^2$ , und damit gilt

$$\sin \alpha = \frac{qm}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{l^2 - mn}{l} \quad (45)$$

Aus (39), (41), (43), (44) und (45) erhalten wir dann

$$\tanh a = \frac{m(n-m)}{l^2 - mn}, \quad \tanh b = n - m, \quad \tanh c = \frac{l(n-m)}{l^2 - mn} \quad (46)$$

$$\tan \alpha = \frac{qm}{l^2 - mn}, \quad \cot \alpha = \frac{l^2 - mn}{pm} \quad (47)$$

$$\tan \beta = \frac{p}{m}, \quad \cot \beta = \frac{m}{p} \quad (48)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (38), (41), (43)-(48) kann man leicht die Richtigkeit der folgenden Formeln ableiten; es sind die grundlegenden Relationen der hyperbolischen Trigonometrie:

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cos b \quad (49)$$

$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin \alpha \quad (50)$$

$$\sinh b = \sinh c \cdot \sin \beta \quad (51)$$

$$\tanh a = \sinh b \cdot \tan \alpha \quad (52)$$

$$\tanh b = \sinh a \cdot \tan \beta \quad (53)$$

$$\tanh a = \tanh c \cdot \cos \beta \quad (54)$$

$$\tanh b = \tanh c \cdot \cos \alpha \quad (55)$$

$$\cos \alpha = \cosh a \cdot \sin \beta \quad (56)$$

$$\cos \beta = \cosh b \cdot \sin \alpha \quad (57)$$

$$\cosh c = \cot \alpha \cdot \cot \beta \quad (58)$$

Den Formeln (49)-(58) kann man eine allgemeinere Form geben, wenn man die Größen  $a, b, c$  durch  $a/r, b/r, c/r$  ersetzt. Das ist mit einer Maßstabsänderung der hyperbolischen Längen gleichbedeutend, wobei  $r$  eine Konstante ist, die allen Strecken gemeinsam ist.



Es ist charakteristisch, dass für hinreichend kleine Werte der Größen  $a, b, c$  aus den erhaltenen Relationen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks Näherungsformeln folgen, die den Formeln der euklidischen Trigonometrie entsprechen. Verwendet man z.B. (32) und (33), so erhalten wir aus (50), (52) und (54)

$$a \approx c \sin \alpha, \quad a \approx b \tan \alpha, \quad a \approx c \cos \beta$$

Aus (49) wird dann

$$1 + \frac{1}{2}c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}b^2\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}c^2 \approx \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a^2b^2$$

Vernachlässigt man den letzten Summanden des rechten Teils wegen seiner Kleinheit, so erhalten wir

$$c^2 \approx a^2 + b^2$$

Daher entspricht Formel (49) dem Pythagoreischen Lehrsatz der euklidischen Geometrie.

## 13 Die Längen einiger Kurven in der Lobatschewskischen Geometrie

Zuerst berechnen wir die Länge eines Bogens eines Grenzkreises. In der Abb. 38 ist der Bogen  $ADB$  eines euklidischen Kreises mit dem Mittelpunkt  $O$  auf der Geraden  $u$  eine Strecke einer hyperbolischen Geraden.

Die euklidische Strecke  $AB$ , die zu  $u$  parallel ist, ist der Bogen eines Grenzkreises. Wir bezeichnen ihre hyperbolischen Längen durch  $2a$  und  $2s$ . Wenden wir (36) an, so erhalten wir  $a = \ln \cot \frac{\theta}{2}$  und damit  $\cot \frac{\theta}{2} = e^a$ . Weiter ergibt sich durch Anwendung der im 4. Kapitel formulierten Prinzipien der Längenmessung

$$s = \frac{AC}{OC} = \cot \theta = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^a - e^{-a})$$

Daraus folgt, wenn wir die Definition des Sinus hyperbolicus beachten,

$$s = \sinh a \quad (59)$$

also  $2s = 2 \sinh a$ . Die Länge eines Bogens eines Grenzkreises ist daher gleich dem Zweifachen des Sinus hyperbolicus der halben Sehnenlänge, die diesen Bogen begrenzt. Wenn  $a < s$  ist, so folgt aus (59)

$$a < \sinh a \quad (a > 0) \quad (60)$$

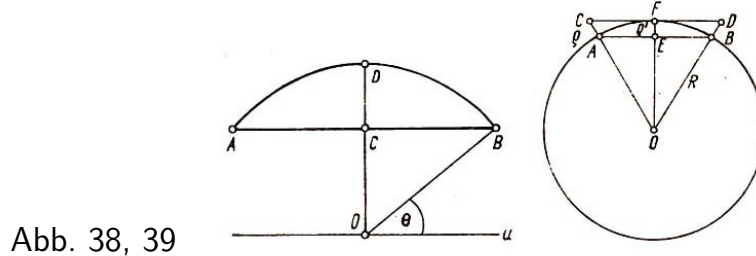


Abb. 38, 39

Jetzt wollen wir die Länge eines Kreises berechnen. Wir beweisen zuerst zwei Hilfssätze. Wenn  $a$  eine hinreichend kleine positive Zahl ist, so gilt  $\tanh a < a$ .<sup>15</sup> Das ist offenbar richtig, da aus (33)

$$\tanh a \approx \frac{2a}{2 + a^2} < a$$

folgt, wenn  $a > 0$ .

Berücksichtigt man, dass die Umfänge der einem Kreis vom Radius 1 einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecke bei unbeschränkt wachsender Zahl  $n$  gegen denselben Grenzwert streben, der gleich der Länge des Kreises ist, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin \frac{2R}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \tan \frac{2R}{n} = 2\pi \quad (61)$$

Jetzt können wir die Länge  $s$  eines hyperbolischen Kreises mit dem Radius  $R$  berechnen. Wenn wir von Längen sprechen, seien im weiteren stets hyperbolische Längen gemeint.

<sup>15</sup>Wir bemerken ohne Beweis, dass diese Ungleichung für jede positive Zahl  $a$  richtig ist.

$AB$  und  $CD$  seien die Seiten der dem Kreis einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecke.<sup>16</sup>

Wir bezeichnen ihre Umfänge durch  $p$  und  $P$  und die Längen der Strecken  $AC$  und  $EF$  durch  $\rho$  und  $\rho'$ . Man vergleiche dazu Abb. 39, in der die hyperbolischen Figuren wie vereinbart als euklidische Figuren dargestellt sind.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken  $OAE$  und  $OCF$ ,  $O$  ist der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, erhalten wir wegen (52) und (50)

$$\tanh AE = \sinh OE \cdot \tan \frac{2R}{n}, \quad \sinh CF = \sinh OC \cdot \sin \frac{2R}{n}$$

oder

$$\tanh \frac{p}{2n} = \sinh(R - \rho') \cdot \tan \frac{2R}{n} \quad (62)$$

$$\sinh \frac{P}{2n} = \sinh(R + \rho') \cdot \sin \frac{2R}{n} \quad (63)$$

Die Zahl  $n$  sei hinreichend groß, so dass  $\tanh \frac{p}{2n} < \frac{p}{2n}$ . Da  $\frac{P}{2n} < \sinh \frac{P}{2}$  wegen (60) gilt, erhalten wir aus (62) und (63), wenn man sie gliedweise mit  $2n$  multipliziert,

$$\sinh(R - \rho') \cdot 2n \tan \frac{2R}{n} < p < s < P < \sinh(R + \rho) \cdot 2n \sin \frac{2R}{n} \quad (64)$$

Beachtet man, dass  $\rho$  und  $\rho'$  gegen  $\theta$  streben, wenn  $n$  unbeschränkt wächst, so kommt man mit (61) zu dem Schluss, dass das erste und letzte Glied der Ungleichungskette (64) gegen denselben Grenzwert  $2\pi \sinh R$  streben, der mit  $s$  übereinstimmt. Damit ist bewiesen, dass

$$s = 2\pi \sinh R$$

gilt. In der Lobatschewskischen Geometrie ergibt sich also die Länge eines Kreises durch den Sinus hyperbolicus seines Radius multipliziert mit  $2\pi$ .

Zum Schluss wollen wir noch die Länge von Bögen der Abstandslinien berechnen. Die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , die sich in den euklidischen Entfernungen  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  von der Geraden  $u$  befinden, mögen die Strecke  $AB$  in  $n$  euklidisch gleiche Teile zerlegen. Die euklidischen Längen der Strecken  $OB$  und  $AB$  seien  $y_n$  und  $\zeta$  (Abb. 40,  $OB \perp u$ ).

Wir betrachten die Bögen  $AA', P_1P'_1, \dots, BB'$  euklidischer Kreise, die den gemeinsamen Mittelpunkt  $O$  haben und Senkrechte darstellen, die die Punkte der Abstandslinie  $OB$  auf ihre Basis  $OB$  zurückführen. Die hyperbolische Länge  $h$  jeder dieser Senkrechten wird offenbar durch die Formel (36), die Gleichung  $h = \ln \cot \frac{\theta}{2}$ , berechnet. Wir

<sup>16</sup>Es sei  $A$  ein Punkt des hyperbolischen Kreises  $q$  mit dem Mittelpunkt  $O$ . Wir konstruieren den Winkel  $AOM = 2R/m$ , wobei  $m$  eine gegebene natürliche Zahl ist, und legen durch den Punkt  $A$  die Tangente an den Kreis  $q$ . Wenn sich die Tangente und die Halbgerade  $OM$  schneiden, so bezeichnen wir den Schnittpunkt mit  $B$ . Tritt dieser Fall ein, so ist die Strecke  $AB$  die Hälfte einer Seite eines dem Kreis  $q$  umbeschriebenen regulären  $m$ -Ecks. Existiert kein Schnittpunkt  $B$ , so kann man um  $q$  weder ein reguläres  $m$ -Eck noch ein reguläres  $n$ -Eck konstruieren, wenn die ganze Zahl  $n$  ( $n > m$ ) hinreichend groß gewählt wird.

bezeichnen die hyperbolischen Längen des Bogens  $A'B'$  der gegebenen Abstandslinie und der Strecke  $AB$  ihrer Basis durch  $s$  und  $a$ . Da die euklidischen Abstände der Punkte  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$

von der Geraden  $uy_1 \sin \theta, y_2 \sin \theta, \dots, y_n \sin \theta$  sind, aber die euklidischen Längen jedes der Teile, in die die Strecken  $AB$  und  $A'B'$  zerlegt werden,  $\frac{\zeta}{n}$  sind, erhalten wir wegen der Ergebnisse aus dem 4. Kapitel  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} Z$  und  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} Z'$ , wobei

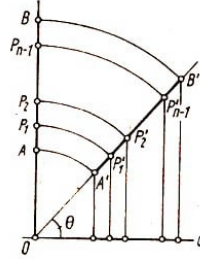


Abb. 40

$$Z = \frac{\zeta}{n} \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n} \right) \quad , \quad Z' = \frac{\zeta}{n} \left( \frac{1}{y_1 \sin \theta} + \frac{1}{y_2 \sin \theta} + \dots + \frac{1}{y_n \sin \theta} \right)$$

Daraus folgt

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\sin \theta}$$

Da der Quotient der Größen  $Z'$  und  $Z$  stets konstant ist, gilt

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \left( \cot \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^h + e^{-h}) = \cosh h$$

Also gilt

$$s = a \cosh h$$

Die Länge eines Bogens einer Abstandslinie ist gleich der Länge der senkrechten Projektion dieses Bogens auf die Basis der Abstandslinie multipliziert mit dem Cosinus hyperbolicus der Entfernung ihrer Punkte von der Basis.

# 14 Schlussbemerkungen

Zum Schluss wollen wir den Leser noch mit einigen Sätzen der Lobatschewskischen Geometrie bekannt machen, die besonders originell und wichtig sind. Die Beweise werden jedoch nicht gegeben. Vor allem soll über eine Fläche im euklidischen Raum berichtet werden, die wir beiläufig im 2. Kapitel erwähnt haben.

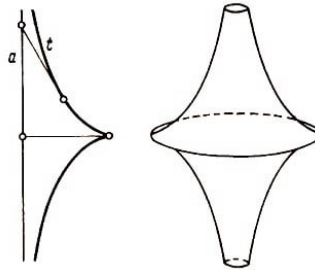


Abb. 41, 42

In Abb. 41 ist die euklidische Ebene abgebildet und in ihr eine Gerade  $a$  und eine mit  $a$  verbundene Kurve  $t$ , die Traktrix, die die folgende Eigenschaft besitzt:

Die Strecke der Tangente in einem beliebigen Punkt von  $t$ , die zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden  $a$  liegt, hat eine Länge, die nicht von der Wahl des Berührungspunktes abhängt.

Die Fläche, die aus der Traktrix durch Rotation um  $a$  entsteht, bezeichnet man als Pseudosphäre (Abb. 42). Die Pseudosphäre ist die Fläche, die Beltrami untersuchte und von der er zeigte, dass sie durch die Eigenschaften charakterisiert wird, die für Teile der Lobatschewskischen Ebene gelten, wenn man als "Geraden" die kürzesten Linien auf ihr wählt. Ähnlich existiert im Lobatschewskischen Raum eine Fläche, auf der die ebenen Eigenschaften des euklidischen Raumes erfüllt sind, wenn man den Begriff "Gerade" ebenso wie oben deutet.

Sie heißt Grenzfläche, da sie durch Rotation eines Grenzkreises um eine ihrer Achsen entsteht.

Wir gehen jetzt noch einige der einfachsten Sätze an, die für die Lobatschewskische Geometrie charakteristisch sind.

**Satz 1.** Zwei parallele Geraden nähern sich asymptotisch in Richtung ihrer Parallelität, d.h., die Entfernung eines Punktes einer dieser Geraden von der anderen kann beliebig klein gemacht werden, und divergieren unbeschränkt in der entgegengesetzten Richtung.

**Satz 2.** Die Gerade  $c$  möge die divergierenden Geraden  $a$  und  $b$  in den Punkten  $A$  und  $B$  schneiden. Die Länge der Strecke  $AB$  wird am kleinsten, wenn  $c$  mit der gemeinsamen Senkrechten der gegebenen divergierenden Geraden zusammenfällt. Auf beiden Seiten der gemeinsamen Senkrechten divergieren die Geraden  $a$  und  $b$  unbeschränkt.

**Satz 3.** Die Fläche des Dreiecks  $ABC$  ist gleich

$$r^2(\pi - \angle BAC - \angle ACB - \angle BCA)$$

wobei die Größen der Winkel im Bogenmaß genommen werden.

$r$  ist die im 12. Kapitel erwähnte Konstante, die für alle Dreiecke gleich ist. Den größten Flächeninhalt  $\pi r^2$  haben die Dreiecke, deren Winkel alle gleich Null sind. In Abb. 43 ist ein solches Dreieck schraffiert dargestellt.

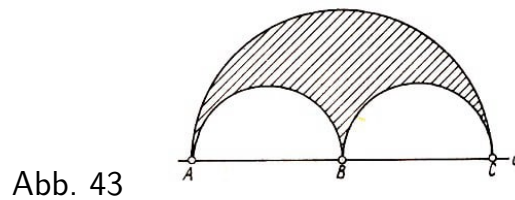


Abb. 43

Satz 4. Die Größe eines einem Kreise eingeschriebenen Winkels ist nicht immer gleich der Hälfte des Bogens, der durch die Schenkel aus dem Kreis herausgeschnitten wird. Über dem Durchmesser ist der Winkel stets spitz, jedoch kein Rechter, wie in der euklidischen Geometrie.

Satz 5. Wenn eine beliebige ganze Zahl  $n > 6$  gegeben ist, so kann man einen solchen Kreis konstruieren, dass die Seiten eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen  $n$ -Ecks gleich dem Radius sind. Die Seiten eines einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen 6-Ecks sind immer größer als der Radius.

Satz 6. In der Lobatschewskischen Geometrie kann man in gewissen Fällen die Quadratur des Kreises ausführen.

Das heißt, zu einer Kreisscheibe ein "Quadrat" (genauer einen regelmäßigen Rhombus, da es in der hyperbolischen Geometrie kein Viereck mit vier rechten Winkeln gibt) gleichen Flächeninhalts unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal konstruieren. In der euklidischen Geometrie ist die Quadratur des Kreises, wie bekannt, nicht ausführbar.

Die von uns betrachteten Beispiele zeigen, wie groß mitunter die Unterschiede zwischen Sätzen der euklidischen und Lobatschewskischen Geometrie sind.

Wir haben in dem vorliegenden Buch erste Schritte auf dem Gebiet der hyperbolischen Geometrie zurückgelegt. Es war das Ziel dieser Arbeit, dass in dem Leser durch die Darlegung der Grundzüge dieser bemerkenswerten Wissenschaft das Interesse geweckt wurde, sich näher mit der Spezialliteratur, darunter den Werken N. I. Lobatschewskis, zu beschäftigen.