
E. Quaisser, H.-J. Sprengel

Räumliche Geometrie

1981 Deutscher Verlag der Wissenschaften

MSB: Nr. 103

Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

Bevor es richtig losgeht,

Es kommt also nicht so sehr darauf an,
dass ein Buch die richtigen Leser,
als vielmehr darauf, dass die Leser
die für sie richtigen Bücher finden.

A. Polgar

möchten wir unserem Leser einiges zum Anliegen unseres Büchleins sagen, denn schon die Vorstellungen und Erwartungen zum Thema "Räumliche Geometrie" sind recht unterschiedlich.

Aus Erfahrungen bei der fachlichen Ausbildung von Lehrern und bei der außerunterrichtlichen Tätigkeit in mathematischen Zirkeln wissen wir, dass Schwierigkeiten in der räumlichen Geometrie bereits zu einem erheblichen Teil ihre Ursache darin finden, dass grundlegende Begriffe und Beziehungen im Anschauungsraum - insbesondere Aussagen über Lage und Senkrechtsein zwischen Punkten, Geraden und Ebenen sowie grundlegende anordnungsgeometrische Sachverhalte - nicht ausreichend bekannt sind.

Dazu kommen Unsicherheiten beim Beweisen bezüglich der möglichen Voraussetzungen und bezüglich der Methoden. Hier möchte dieses Büchlein helfen.

Dem Leser wird eine Reihe von Basissätzen der räumlichen Geometrie vermittelt: Eingedenk der Tatsache, dass auch die Geometrie durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden ist, haben wir einige Erfahrungssätze, die einsichtig und einfach erscheinen, an den Anfang gestellt. Darauf wird das Weitere - insbesondere die Lösung der Aufgaben - aufgebaut, ohne zusätzlich Anleihen bei der Anschauung machen zu müssen.

Wir haben uns auf die Grundgebilde Punkte, Gerade, Ebene und Kugel beschränkt und die Ausführungen lieber durch zahlreiche Aufgaben statt durch neue Begriffe angereichert.

Ein weiteres Prinzip waren für uns vergleichende Betrachtungen zwischen der ebenen und der räumlichen Geometrie (Analogiebetrachtungen), die einerseits ebenfalls zur Motivierung verwendet werden, denen aber auch ein ganzes Kapitel gewidmet ist.

Im Sinne einer Exkursion wollen wir auf ganz bestimmten Wegen unsere Leser zu Kenntnissen und Erkenntnissen führen. Die Wege verlaufen möglichst geradlinig mit unterschiedlichem Steigungsgrad, die Wege kreuzen sich, bilden ein Netz; man muss sie nicht in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen. Nur mit dem ersten Kapitel möchte der Anfang gemacht werden. Viele Fortsetzungen und Ergänzungen sind möglich.

Bei unserem Leser setzen wir nur wenig voraus. Er sollte Kenntnisse von den einfachsten ebenflächig begrenzten Körpern besitzen, einen einfachen räumlichen Sachverhalt an seiner Darstellung mittels Parallelprojektion ablesen können, mit einfachen Symbolen der Mengenlehre umgehen können und nicht zuletzt bereit sein, aktiv (mit Papier, Bleistift und Zeichengeräten) mitzuarbeiten.

Es erschien uns wichtig, dass möglichst viele Aufgaben unter einem bestimmten Gesichtspunkt zusammengestellt wurden, so dass dieses Büchlein gerade auch als ein fundiertes Aufgabenmaterial - insbesondere für Arbeitsgemeinschaften und Klubs Junger Mathematiker - verwendet werden kann. Die verwendeten Aufgaben stammen nur zum geringeren Teil von den Autoren selbst.

Vielfach konnte die Urheberschaft nicht geklärt werden, so dass nur bei den Aufgaben aus den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und der Internationalen Mathematikolympiade ein Quellenhinweis erfolgt.

Wir hoffen, dass dieses Büchlein - insbesondere das erste Kapitel - auch eine nützliche Ergänzung zu Hochschullehrbüchern wie dem Band 6 "Geometrie I" aus der Reihe "Mathematik für Lehrer" ist.

In seine inhaltliche Gestaltung ist manches aus der Geometrieausbildung eingeflossen, wie sie an der Pädagogischen Hochschule in Potsdam unter der Leitung von Prof. Klotzek betrieben wird.

Für die freundlichen und vielfältigen Hinweise, die uns bei der Arbeit hilfreich waren, danken wir den Herren Prof. Dr. G. Geise und Prof. Dr. H. Bausch und Dr. P. Kobelt. Unser Dank gilt auch dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die gute Zusammenarbeit sowie dem VEB Druckhaus "Maxim Gorki" für die sorgfältige Arbeit.

Potsdam, im Sommer 1980

E. Quaisser, H.-J. Sprengel

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	5
1.1	Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Lage zueinander	5
1.2	Wir projizieren, schneiden und verbinden	10
1.3	Halbebenen, Halbräume und ihre Nützlichkeit für anordnungsgeometrische Sachverhalte	14
1.4	Vom Senkrechtsein	18
1.5	Einfache Beziehungen zwischen Kreisen, Kugeln, Geraden und Ebenen .	23
2	Räumliche Konstruktionen	26
2.1	Was ist eine räumliche Konstruktion?	26
2.2	Nochmals vom Senkrechtsein	29
2.3	Weitere Beispiele	31
3	Analogiebetrachtungen	34
3.1	Was wir unter einer Analogie verstehen wollen	34
3.2	Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen	37
3.3	Wir finden neue Probleme	41
3.4	Doch Vorsicht ist geboten!	43
4	Volumina	45
4.1	Was ist der Rauminhalt?	45
4.2	Zerlegen und Ergänzen	51
4.3	Extrema	56
5	Einige Lösungsanmerkungen	66
6	Literatur	69

1 Grundlagen

Wir sollten uns mit großen Problemen beschäftigen,
solange sie noch ganz klein sind.
J. Rutkowska

1.1 Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Lage zueinander

Die Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade und Ebene sind durch Abstraktion aus der uns umgebenden Realität entstanden. Daher ist es auch oft leicht, geeignete Dinge aus unserer Umgebung zu finden, die wiederum der Veranschaulichung geometrischer Sachverhalte dienen.

So nutzen wir die Tischplatte zur Veranschaulichung einer Ebene, und die uns in einem Zimmer umgebenden "vier Wände" können uns zusammen mit Fußboden und Decke den Schnitt von mehreren Ebenen demonstrieren.

Daher erscheint uns auch ein Satz wie etwa "Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden" auf Grund unserer Anschauung, unserer Erfahrung als selbstverständlich.

Andererseits hat wohl jeder auch schon gemerkt, wie schnell uns unsere Erfahrung und Anschauung verlassen können, vielleicht schon, wenn eine Ebene einen Würfel schneidet (und wir uns die Schnittfigur vorstellen sollen).

Beginnen wir zunächst mit den "Selbstverständlichkeiten".

Als ersten Erfahrungssatz formulieren wir

(1.1) Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es genau eine Gerade g , die diese Punkte enthält.

Diese Gerade wird Verbindungsgerade von A und B genannt und mit g_{AB} bezeichnet. Sind g und h zwei Geraden, so kann nach der Menge der gemeinsamen Punkte folgende Fallunterscheidung getroffen werden:

- a) g und h haben alle Punkte gemeinsam ($g = h$), d.h., sie sind identisch;
- b) g und h haben genau einen Punkt gemeinsam ($g \cap h = \{P\}$), d.h., sie schneiden sich;
- c) g und h haben keinen Punkt gemeinsam ($g \cap h = \emptyset$), und es gibt eine Ebene, in der sie beide enthalten sind;
- d) g und h haben keinen Punkt gemeinsam, und sie sind in keiner gemeinsamen Ebene enthalten; in diesem Fall nennt man g und h zueinander windschiefe Geraden.

Wegen (1.1) können aus logischen Gründen keine weiteren Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden auftreten.

An dieser Stelle schon wird unser Vorgehen deutlich. Wir haben zwar den Satz (1.1), ohne ihn zu beweisen, als "Erfahrungssatz" vorangestellt, die möglichen Lagebeziehungen dann aber ohne weitere Berufung auf die Anschauung streng logisch geschlussfolgert.

Eine Gerade g heißt parallel zu einer Geraden h ; (und man schreibt $g \parallel h$) genau dann,

wenn Fall a) oder c) gilt.

Jetzt entnehmen wir wiederum der Anschauung

(1.2) Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade h , die zu g parallel ist und durch P geht (Parallelenaussage).

(1.3) Die Parallelität zwischen Geraden ist transitiv, d.h., aus $g \parallel h$ und $h \parallel f$ folgt $g \parallel f$.

Bereits aus der Definition ergibt sich, dass die Parallelität eine reflexive und symmetrische Beziehung ist, d.h., dass jede Gerade zu sich selbst parallel ist und dass $h \parallel g$ aus $g \parallel h$ folgt).¹

Unter der Richtung einer Geraden g wird die Menge aller zu g parallelen Geraden verstanden.²

Wir wenden uns nun den Lagebeziehungen zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε zu und treffen unsere Fallunterscheidung wiederum nach der Menge der gemeinsamen Punkte:

- a) alle Punkte von g liegen in ε ($g \subset \varepsilon$), d.h., g liegt in ε ;
- b) g hat mit ε genau einen Punkt gemeinsam ($g \cap \varepsilon = \{P\}$), d.h., g schneidet ε ;
- c) g und ε haben keinen gemeinsamen Punkt ($g \cap \varepsilon = \emptyset$).

Weitere Fälle gibt es nicht. Das begründet der Erfahrungssatz

(1.4) Sind A und B verschiedene Punkte in einer Ebene ε , so liegt ihre Verbindungsgerade g_{AB} in ε .

Eine Gerade g heißt parallel zu einer Ebene ε (und man schreibt $g \parallel \varepsilon$) genau dann, wenn Fall a) oder c) gilt.

Entsprechend unserer bisherigen Weise betrachten wir die Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen ε und η :

- a) ε und η haben alle Punkte gemeinsam ($\varepsilon = \eta$), d.h., sie sind identisch;
- b) ε und η haben genau eine Gerade gemeinsam ($\varepsilon \cap \eta = g$), d.h., sie schneiden sich;
- c) ε und η haben keinen gemeinsamen Punkt ($\varepsilon \cap \eta = \emptyset$).

Weitere Fälle können nicht auftreten. Wie oben begründen wir das mit dem folgenden Erfahrungssatz:

(1.5) Haben zwei verschiedene Ebenen einen Punkt gemeinsam, so ist ihr Durchschnitt (d.h. die Menge ihrer gemeinsamen Punkte) eine Gerade.

Eine Ebene ε heißt parallel zu η ; (kurz $\varepsilon \parallel \eta$ genau dann, wenn Fall a) oder c) gilt. Diese Beziehung ist reflexiv und symmetrisch.

Ein weiterer Erfahrungssatz ist (man betrachte dazu Abb. 1a)

¹Allgemein nennt man eine reflexive, symmetrische und transitive Relation eine Äquivalenzrelation.

²Die Richtungen sind gerade die Äquivalenzklassen bezüglich der Parallelitätsrelation.

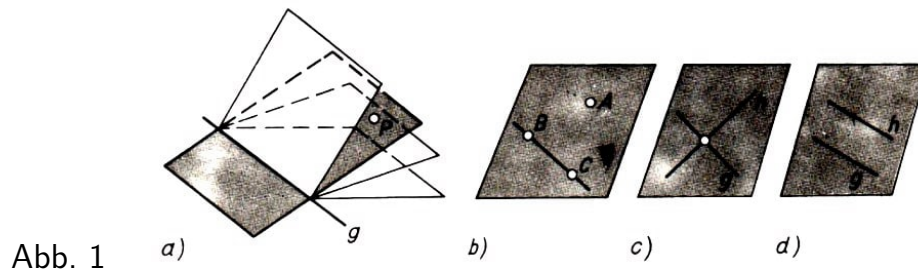


Abb. 1

(1.6) Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g , die nicht durch P geht, gibt es genau eine Ebene η , die P und g enthält.

Diese Ebene η wird die Verbindungsebene von P und g genannt und mit ε_{Pg} bezeichnet.

Entsprechend ist nun eine Verbindungsebene auch durch drei Punkte A, B, C bestimmt, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen (kurz: die nicht kollinear sind) oder durch zwei sich schneidende Geraden g, h oder durch zwei verschiedene parallele Geraden g, h (Abb. 1b-d); wir bezeichnen diese Ebene mit ε_{ABC} bzw. mit ε_{gh} .

Diese Aussage ist jetzt nicht nur ein akzeptabler Erfahrungssatz, sondern auch eine unmittelbare Konsequenz aus unseren bisherigen Aussagen. Denn beispielsweise gibt es bei der ersten Vorgabe nach (1.1) die Verbindungsgerade g_{BC} von B und C , die nach Voraussetzung nicht A enthalten kann, so dass nun wegen (1.6) eine Ebene η existiert, die neben A noch g_{BC} und damit erst recht auch die Punkte B, C enthält.

Eine weitere Ebene mit dieser Eigenschaft würde nach (1.4) auch die Gerade g_{BC} enthalten; dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage in (1.6).

Von praktischer Bedeutung für den Nachweis von Parallelität zwischen Ebenen ist der folgende Satz:

(1.7) Satz. Sind g und h zwei sich schneidende Geraden, die beide zu einer Ebene η parallel sind, so ist ihre Verbindungsebene ε_{gh} parallel zu η .

Wir beweisen ihn mit Hilfe unserer bisherigen Aussagen indirekt. Angenommen, es wäre $\varepsilon_{gh} \not\parallel \eta$, dann würden sich diese beiden Ebenen in einer Geraden f schneiden. Die Gerade f ist zu wenigstens einer der Geraden g und h nicht parallel (sonst wäre $g \parallel h$ nach (1.1)), etwa bezüglich g . Dann schneiden sich f und g , da beide in der Ebene ε_{gh} liegen; ihr Schnittpunkt sei P . Damit wäre

$$g \cap \eta = (g \cap \varepsilon_{gh}) \cap \eta = g \cap (\varepsilon_{gh} \cap \eta) = g \cap f = \{P\}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $g \parallel \eta$ ist.

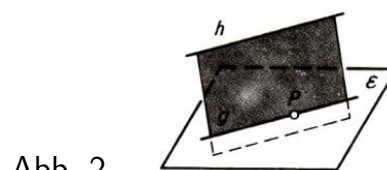


Abb. 2

Dieses mengentheoretische Arbeiten wie am Ende des Beweises ist natürlich frei von einer anschaulichen Denkweise. Es steht aber einer anschaulichen Betrachtungsweise

nicht entgegen. Denn auch wenn man die Beweisidee rein anschaulich gefunden hat, kann man und sollte man den Beweis derartig kurz, exakt und übersichtlich notieren.

Als Aufgabe beweise man in dieser Art die beiden folgenden Sätze:

(1.8) Satz. Schneidet eine Ebene ε zwei zueinander parallele Ebenen α und β , so sind die Schnittgeraden zueinander parallel.

(1.9) Satz. Liegt die Gerade g in der Ebene ε und ist $\varepsilon \parallel \eta$, so ist $g \parallel \eta$.

Weitere einfache Beziehungen werden durch die folgenden drei Sätze ausgedrückt:

(1.10) Satz. Ist h zu einer Geraden g parallel und $g \subset \varepsilon$, so ist $h \parallel \varepsilon$.

(1.11) Satz. Ist $h \parallel \varepsilon$, so gibt es durch jeden Punkt P der Ebene ε genau eine Gerade g , die in ε liegt und zu h parallel ist (Abb. 2).

Satz (1.11) ist eine Umkehrung von (1.10).

(1.12) Satz. Zu jeder Ebene ε und zu jedem Punkt P des Raumes gibt es genau eine Ebene η , die durch P geht und parallel zu ε ist.

Wir stellen dem Leser frei, diese Aussage mit Hilfe der bisherigen zu beweisen oder sie als Erfahrungssätze zu akzeptieren. Insbesondere ergibt sich aus (1.12), dass die Parallelität von Ebenen transitiv ist (vgl. auch (1.3)).

Aus der ebenen Geometrie ist bekannt, dass sich drei Geraden paarweise schneiden können, ohne einen gemeinsamen Punkt zu besitzen. Darauf bezogen ist für den Raum der folgende Satz bemerkenswert:

(1.13) Satz. Schneiden sich drei Geraden f , g und h paarweise und liegen sie in keiner gemeinsamen Ebene, so haben sie genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis (Abb. 3). Nach Voraussetzung bilden je zwei der Geraden f , g , h eine Verbindungsebene, und diese Ebenen schneiden sich wegen (1.5) paarweise längs dieser Geraden, da f , g , h nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es sei nun P der Schnittpunkt von f und g .

Dann ist P offenbar in den Verbindungsebenen ε_{hf} und ε_{gh} und damit in ihrem Durchschnitt, d.h. in der Schnittgeraden $h = \varepsilon_{hf} \cap \varepsilon_{gh}$ enthalten.

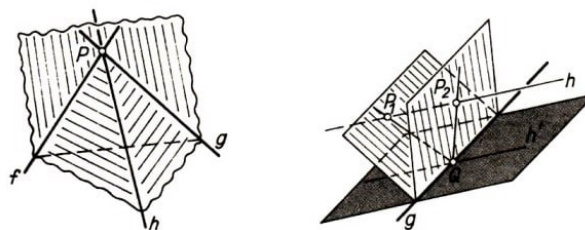


Abb. 3 und 4

Mehr als einen gemeinsamen Punkt können die Geraden jedoch nicht besitzen, sonst wäre (entgegen der Voraussetzung) $f = g = h$ nach (1.1).

Man erkennt leicht, dass mit dem Satz (1.13) der folgende äquivalent ist:

(1.14) Satz. Drei Ebenen, die sich paarweise so schneiden, dass wenigstens zwei der

Schnittgeraden nicht parallel sind, haben genau einen Punkt gemeinsam.

Im folgenden betrachten wir zwei windschiefe Geraden g und h und leiten zwei Sätze ab, die auch für die Lösung von Aufgaben Bedeutung haben.

Ist P_1 ein Punkt aus h , so gilt $P_1 \notin g$, und wegen (1.6) gibt es genau eine Ebene η_1 , die durch g und P_1 geht, nämlich ihre Verbindungsebene.

Für einen weiteren Punkt P_2 auf h erhalten wir entsprechend eine Ebene η_2 , (vgl. Abb. 4). Diese Ebene ist von η_1 verschieden; andernfalls wäre $P_2 \in \eta_1$, und damit läge nach (1.4) auch die Gerade $g_{P_1P_2} = h$ in η_1 . Dies widerspricht der Voraussetzung, dass g und h in keiner Ebene gemeinsam liegen.

Auf diese Weise wird also jedem Punkt aus h genau eine Ebene durch g zugeordnet. Werden damit alle Ebenen durch g erfasst? Diese Frage ist äquivalent mit der Frage nach den zu h parallelen Ebenen durch g , denn jede Ebene η mit $h \nparallel g$ schneidet natürlich h in einem Punkt P .

Zur Klärung wählen wir auf g einen Punkt Q und betrachten anstelle der Punkte auf h die Geraden durch Q in der Verbindungsebene ε_{Qh} . Jede derartige Gerade ist von g verschieden, da g nicht in ε_{Qh} liegt, und sie bildet demnach zusammen mit g eine Verbindungsebene η .

Umgekehrt schneidet jede Ebene η durch g die Ebene ε_{Qh} , denn aus $\eta \parallel \varepsilon_{Qh}$ würde $\eta = \varepsilon_{Qh}$ wegen $Q \in \eta, \varepsilon_{Qh}$ folgen, und damit würden g und h in einer Ebene liegen. Diese Zuordnung zwischen den Ebenen durch g und den Geraden in ε_{Qh} durch Q ist eineindeutig. (Warum?)

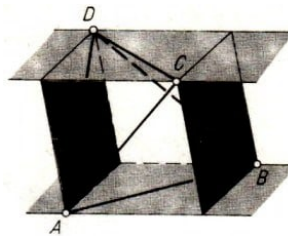


Abb. 5

Die Parallele h' zu h durch den Punkt Q liegt in der Ebene ε_{Qh} , da $\varepsilon_{h'h} = \varepsilon_{Qh}$ ist. Die Ebene $\varepsilon_{gh'}$ ist nun die einzige Ebene durch g , die h nicht schneidet, denn h' ist die einzige Gerade in ε_{Qh} durch den Punkt Q , die h nicht schneidet.

Unsere ausführliche Diskussion ergibt

(1.15) Satz. Sind g und h windschiefe Geraden, so gibt es durch g genau eine Ebene η , für die $h \parallel \eta$ ist.

Dieses Ergebnis erhält man aus unseren bisherigen Aussagen auch kürzer. So ergibt sich etwa die Existenzaussage aus Satz (1.10). Uns lag jedoch daran, in einem Prozess von Schneiden und Verbinden, also von sehr elementaren geometrischen "Lage"-Operationen, Einsichten zu gewinnen.

Eine Folgerung aus Satz (1.15) ist

(1.16) Satz. Sind g und h windschiefe Geraden, so gibt es durch jeden Punkt P genau

eine Ebene η , zu der g und h parallel sind.

(1.17) Aufgabe. Ist $ABCD$ ein Tetraeder, dann gibt es genau ein (und nur ein) Parallelepiped, in dem die Kanten des Tetraeders Flächendiagonalen sind.

Diese Aussage bedeutet anschaulich, dass ein Tetraeder in besonderer Weise durch ein Parallelepiped umschrieben werden kann. Wir führen jetzt den

Beweis. Durch je zwei Gegenkanten können, da sie windschief sind, nach Satz (1.15) zwei zueinander parallele Ebenen gelegt werden (vgl. Abb. 5). Jedes solche Paar paralleler Ebenen wird von einem der anderen beiden geschnitten; diese Schnittgeraden sind nach Satz (1.8) parallel zueinander. Auf diese Weise erzeugen die sechs Ebenen also tatsächlich ein Parallelepiped mit der gewünschten Eigenschaft. - Ein anderes kann es nicht geben, da es durch zwei Gegenkanten genau ein Paar zueinander parallelen Ebenen gibt.

Man löse nun selbständig folgende Aufgabe:

(1.18) Aufgabe. Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so gibt es eine Ebene, die von den Geraden g_{AB} , g_{BC} , g_{CD} und g_{DA} in Punkten E , F , G bzw. H so geschnitten wird, dass $EFGH$ ein Parallelogramm ist. Man beschreibe alle Ebenen mit dieser Eigenschaft!

1.2 Wir projizieren, schneiden und verbinden

Jeder hat seine eigene Sicht,
aber nicht jeder sieht etwas.
B. Winawer

Die folgende räumliche Betrachtung führt uns zu einem Satz, der in der ebenen Geometrie eine tragende Rolle spielt. Wir gehen von einer Ebene ε mit einem darin liegenden Dreieck ABC aus und verbinden seine Ecken mit einem beliebig gewählten Punkt $0 \notin \varepsilon$ (vgl. Abb. 6a). Diese Verbindungsgeraden a , b , c schneiden wir mit einer beliebig gewählten Ebene $\eta \neq \varepsilon$, die nicht durch 0 geht, und erhalten drei Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 , die auch ein Dreieck bilden. (Sonst lägen A, B, C auf einer Geraden.)

Da A_1, B_1 in der Ebene ε_{0AB} liegen, gilt dies auch für ihre Verbindungsgerade $g_{A_1B_1}$ und deshalb schneiden sich g_{AB} und $g_{A_1B_1}$ oder es ist $g_{AB} \parallel g_{A_1B_1}$.

Im ersten Fall müssen sich η und ε in einer Geraden s schneiden, auf der dann der Schnittpunkt von g_{AB} und $g_{A_1B_1}$ liegt; im zweiten Fall ist $g_{AB} \parallel s$ mit $s = \varepsilon \cap \eta$, oder die Ebenen ε und η sind parallel zueinander.

Entsprechendes kann nun für die Geradenpaare g_{BC} , $g_{B_1C_1}$ und g_{CA} , $g_{C_1A_1}$ gesagt werden. Schneiden sich ε und η , so kann nur höchstens eines der drei betrachteten Geradenpaare zueinander parallel sein. Insgesamt erhalten wir:

(i) Zwei der Paare entsprechender Verbindungsgeraden (Seiten) der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ - etwa g_{AB} , $g_{A_1B_1}$ und g_{BC} , $g_{B_1C_1}$ - schneiden sich in Punkten F und D , und das dritte Paar g_{CA} , $g_{C_1A_1}$ schneidet sich auf $s = g_{FD}$ oder ist zu s parallel, oder die entsprechenden Verbindungsgeraden sind alle parallel zueinander.

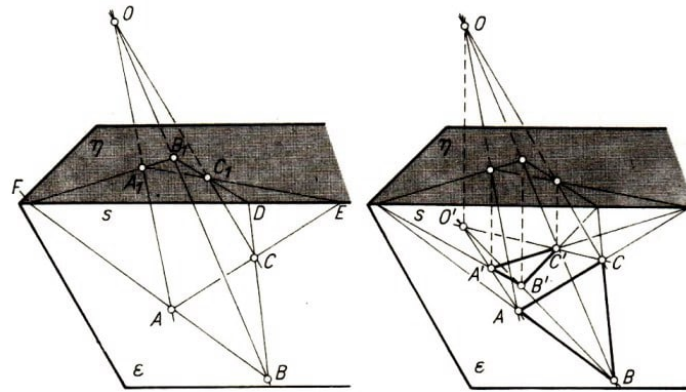


Abb. 6

Diese Eigenschaft geht nicht verloren, wenn wir durch eine Parallelprojektion auf die Ebene ε den Punkt O in O' und das Dreieck $A_1B_1C_1$ in $A'B'C'$ abbilden, bei der weder a , b noch c Projektionsgeraden sind (vgl. Abb. 6b).

In Abb. 7a-d sind einige mögliche Resultate aufgezeigt, wobei wir den Leser mit Abb. 7d auch auf gewisse Spezialfälle aufmerksam machen möchten.

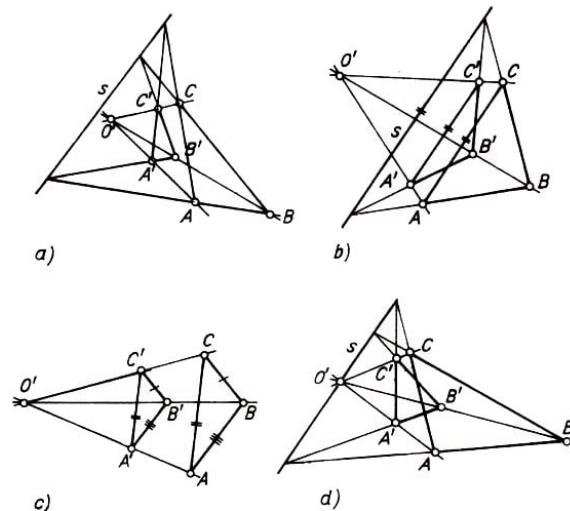


Abb. 7

Die räumlichen Betrachtungen führten uns zu dem folgenden Satz der ebenen Geometrie.

Satz von Desargues³. Liegen in einer Ebene zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ so, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ voneinander verschieden sind und durch einen gemeinsamen Punkt O' gehen, dann gilt für die Paare g_{AB} , $g_{A'B'}$; g_{BC} , $g_{B'C'}$ und g_{CA} , $g_{C'A'}$ entsprechender Verbindungsgeraden (Seiten) der Dreiecke die Eigenschaft (i).

Dieser Satz spielt bei der Begründung der ebenen Geometrie eine fundamentale Rolle. Er ist zwar aus einfachen räumlichen Lagebeziehungen beweisbar, nicht aber aus Lagebeziehungen der ebenen Geometrie.

Mit unseren vorgestellten Betrachtungen ist bereits eine Beweismöglichkeit skizziert.

In der folgenden Aufgabengruppe sind ebenflächig begrenzte Körper in Kavalierperspektive vorgegeben. In diesen Abbildungen selbst sind konstruktiv die Schnittlinien

³Girard Desargues, 1593-1662, französischer Baumeister und Kriegingenieur in Lyon, seit 1626 Geometer in Paris.

anzugeben, die durch den Schnitt mit einer vorgegebenen Ebene entstehen. Bezüglich der zugrunde liegenden Darstellungsart ist nur von Bedeutung, dass sie eine Parallelprojektion ist.

Wesentlich ist dann

(1.19) Satz. Bei einer Parallelprojektion (und damit speziell in der Kavaliersperspektive) sind die Bilder paralleler Geraden, die nicht in Projektionsrichtung liegen, selbst parallele Geraden. (Beweis als Übungsaufgabe.)

Und nun zur angekündigten Aufgabe, die eine Klausuraufgabe bei der XVII. OJM der DDR war:

(1.20) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 8a-c ist der Schnitt der Ebene ε_{PQR} mit den Seitenflächen des Quaders $ABCDEFGH$ konstruktiv anzugeben. Dabei sei P stets ein Punkt der Seitenfläche $EFGH$ und im ersten Fall (Abb. 8a) $g_{QR} \parallel g_{BC}$.⁴

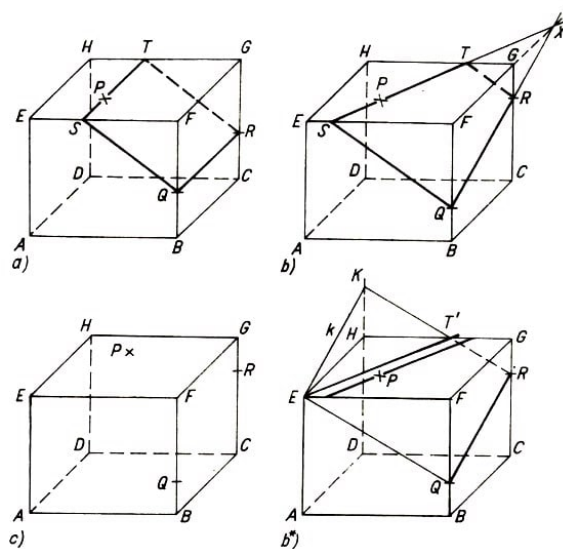


Abb. 8

Im ersten Fall ist die Parallele h zu g_{QR} durch P sowohl in ε_{PQR} als auch in der Ebene durch E, F, G, H enthalten, denn wegen $h \parallel g_{PR}$, $g_{QR} \parallel g_{BC}$ und $g_{BC} \parallel g_{FG}$ ist auch $h \parallel g_{FG}$. Demnach ist h die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

Sie schneidet die Kanten EF und GH in Punkten S und T . (Dies scheint offensichtlich klar zu sein. Nach einer Begründung befragt, kommen wir jedoch in Verlegenheit.

Wir werden uns deshalb im nächsten Abschnitt mit einigen elementaren "anordnungsgeometrischen" Sachverhalten auseinandersetzen. In der Schule fallen solche Betrachtungen gewöhnlich ganz weg.) Die gesuchte Schnittkurve ist nun der geschlossene Streckenzug⁵ $QRTSQ$. Auf Grund des Satzes (1.19) kann er in der Abbildung selbst durch Parallelziehen konstruktiv bestimmt werden.

Im zweiten Fall ist g_{QR} nicht parallel zu g_{FG} , und da beide Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen (nämlich in der Ebene durch B, C, G, F), schneiden sie sich in

⁴Unsere Abb. 8a und 8b entsprechen nicht mehr denjenigen der Aufgabenstellung, da wir in sie bereits das Konstruktionsergebnis eingetragen haben.

⁵Unter einem Streckenzug $ABCDE$ versteht man die Vereinigung der Strecken AB, BC, CD und DE .

einem Punkt X (Abb. 8b). Weil dieser Punkt in den Ebenen ε_{PQR} und ε_{EFG} liegt und diese voneinander verschieden sind, ist g_{PX} ihre Schnittgerade.

Man stellt anhand der Abbildung fest, dass auf Grund der Lage von Q und R der Punkt X auf der Verlängerung von FG über G hinaus liegt. Die Lage von P bewirkt, dass g_{PX} die Kante EF in einem Punkt S schneidet. Demnach schneidet g_{SX} auch die Kante GH ; der Schnittpunkt sei T . (Beim letzten Schluss wird wiederum ein Mangel an einer solchen Begründung wie oben spürbar.)

Die Strecken SQ und RT liegen in Seitenflächen des Quaders. Demnach ist schließlich $QRTSQ$ die gesuchte Schnittkurve. Übrigens ist $g_{SQ} \parallel g_{TR}$ (warum?) und damit $SQRT$ ein Trapez.

Den dritten Fall überlassen wir nun dem Leser als Aufgabe.

Es gibt für Aufgabe (1.20) eine Fülle weiterer Lösungsmöglichkeiten. Für den zweiten Fall wollen wir eine aufgreifen, die (wie im ersten Fall) stärker von Parallelitäten Gebrauch macht.

Zunächst legen wir eine Ebene durch Q , R und E . Diese schneidet nach Satz (1.8) die Ebene durch A , D , H , E in einer zu g_{PR} parallelen Geraden k (Abb. 8b*). Die Geraden k und g_{DH} schneiden sich in einem Punkt K . (Sonst wäre $k \parallel g_{DH}$ und damit $g_{QR} \parallel g_{CG}$)

Man stellt anhand der Abbildung fest, dass K auf der Verlängerung von DH über H hinaus liegt. Folglich schneidet g_{RK} die Kanten in einem Punkt T' . (Auch hier fehlt wieder eine anordnungsgeometrische Begründung!)

Die Gerade $g_{ET'}$ ist nun die Schnittgerade der Ebene ε_{QRE} mit der durch die "Deckfläche" des Quaders bestimmten Ebene ε_{EFG} . Zur entsprechenden Schnittgeraden der vorgegebenen Ebene ε_{QRP} gelangt man jetzt, indem man die Parallele zu $g_{ET'}$ durch P legt. Das Weitere läuft dann wie bei der ersten Lösung ab.

Halt! Bei sorgfältiger zeichnerischer Überprüfung (und dazu fordern wir den Leser nachdrücklich auf) stellen wir fest, dass das Ergebnis nicht mit der Geraden g_{ST} aus der ersten Lösung übereinstimmt.

(1.21) Aufgabe. Wo steckt der Fehler in unserer Überlegung?

Wer allzu leichtfertig unseren Darlegungen gefolgt ist, der möge sich spätestens hier vornehmen, scheinbar anschaulich klare Sachverhalte kritisch zu überdenken. Keinesfalls wollen wir unserem "reingefallenen" Leser den Mut nehmen; vielleicht ist es tröstlich zu wissen, dass unter anderen auch befähigten und erfolgreichen Schülern sowie tätigen Mathematikern ein derartiger Fehler unterlaufen ist.

An den folgenden beiden Aufgaben - einer einfachen und einer relativ anspruchsvollen - kann sich der Leser selbst prüfen, inwieweit er einfache räumliche Sachverhalte zur Lösung analoger Problemstellungen erfolgreich einsetzen kann.

(1.22) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 9 ist der Schnitt der Ebene ε_{PQR} mit den Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ konstruktiv anzugeben.

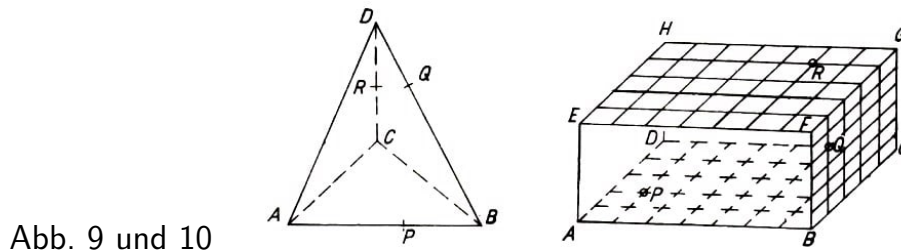


Abb. 9 und 10

(1.23) Aufgabe. In Abb. (Kavalierperspektive) 10 ist der Schnitt der Ebene ε_{PQR} mit den Seitenflächen des Quaders $ABCDEFGH$ konstruktiv anzugeben. Dabei sind P , Q und R Punkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$ bzw. $GFEH$, und die Gitternetze auf diesen Seitenflächen dienen zur Festlegung der Punkte.

1.3 Halbebenen, Halbräume und ihre Nützlichkeit für anordnungsgeometrische Sachverhalte

Ordnung und Unordnung kann man lernen,
es ist Gewohnheit.
Jean Paul

Im letzten Abschnitt wurde wiederholt ein Mangel spürbar: Die Existenz von Schnittelementen (z.B. von Strecken) konnte nur rein anschaulich begründet werden. Wir wollen daher in diesem Kapitel einige anordnungsgeometrische Grundlagen bereitstellen und an einigen Beispielen zeigen, wie man damit eine Fülle weiterer anordnungsgeometrischer Sachverhalte dann streng logisch behandeln kann.

Dazu setzen wir die Begriffe Strecke und Strahl als bekannt voraus. Die Strecke mit den Endpunkten A und B , die wir mit \overline{AB} bezeichnen, besteht aus A , B und allen Punkten von g_{AB} , die zwischen A und B liegen. Das Innere dieser Strecke (d.h. $AB \setminus \{A, B\}$) wird mit AB bezeichnet (Abb. 11 a).

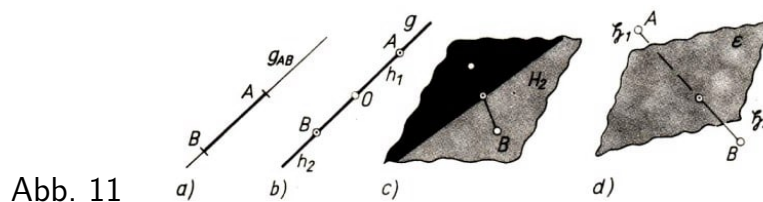


Abb. 11

Wählen wir auf einer beliebigen Geraden g einen Punkt O , so haben wir die Vorstellung, dass durch O die Menge der restlichen Punkte von g (d.h. $g \setminus \{O\}$) in genau zwei Teilmengen h_1 und h_2 zerlegt wird (Abb. 11b), die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen:

Zwei verschiedene Punkte A , B liegen in der gleichen Teilmenge, wenn $O \notin AB$ ist, und sie liegen in verschiedenen Teilmengen, wenn $O \in AB$ ist. Diese Teilmengen heißen recht treffend Halbgeraden mit dem Scheitel O . Fügen wir diesen Punktmengen noch jeweils O hinzu, dann liegen Strahlen vor. Eine Halbgerade ist durch ihren Scheitel O und einen Punkt A , den sie enthält, bestimmt; man bezeichnet sie mit OA^+ .

Der Vorstellung entnehmen wir, dass analoge Sachverhalte in einer Ebene bezüglich

einer Geraden und im Raum bezüglich einer Ebene bestehen.

Ist g eine Gerade in einer Ebene ε , so wird $\varepsilon \setminus g$ durch g in genau zwei Teilmengen H_1 und H_2 so zerlegt, dass $A \in H_1$ und $B \in H_2$, genau dann gilt, wenn AB von g geschnitten wird. Die Mengen H_1 und H_2 heißen Halbebenen von ε bezüglich g (Abb. 11c).

Ist ε eine Ebene im Raum und \mathfrak{P} die Menge aller Raumpunkte, so wird $\mathfrak{P} \setminus \varepsilon$ durch ε in genau zwei Teilmengen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 , so zerlegt, dass $A \in \mathfrak{H}_1$ und $B \in \mathfrak{H}_2$ genau dann gilt, wenn AB von ε geschnitten wird. Die Mengen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 heißen Halbräume bezüglich ε (Abb. 11 d).

Konvexe Punktmenge sind dadurch ausgezeichnet, dass sie mit zwei verschiedenen Punkten A und B auch AB enthalten. Aus der Definition der Halbebenen und Halbräume ergibt sich, dass sie konvex sind.

Wir wollen das Bereitgestellte gleich erproben.

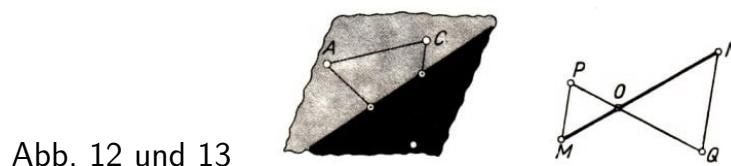
(1.24) Satz. Schneidet eine Gerade eine Seite (Strecke!) eines Dreiecks, liegt sie in der durch das Dreieck bestimmten Ebene und geht sie durch keine Ecke des Dreiecks, so schneidet sie genau eine der beiden anderen Dreiecksseiten.

Beweis. Die Gerade g schneide die Seite \overline{AB} des Dreiecks ABC . Wegen $A, B, C \notin g$ liegen A und B auf verschiedenen Halbebenen von ε_{ABC} bezüglich g , etwa $A \in H_1$ und $B \in H_2$, und es muss entweder $C \in H_1$ oder $C \in H_2$ gelten (Abb. 12).

Im ersten Fall ist $CA \cap g = \emptyset$ und $BC \cap g = \emptyset$, im zweiten $BC \cap g = \emptyset$ und $CA \cap g = \emptyset$.

In entsprechender Weise und völlig frei von zusätzlichen Anleihen bei der Anschauung lassen sich nun die folgenden Aufgaben lösen:

(1.25) Aufgabe. Eine Ebene schneide zwei gegenüberliegende Kanten⁶ eines Tetraeders, ohne durch eine Tetraederecke zu gehen. Welches Schnittverhalten besteht gegenüber den restlichen vier Kanten?



(1.26) Aufgabe. Eine Ebene schneidet zwei von einer Ecke ausgehende Kanten eines Tetraeders, ohne selbst durch eine Tetraederecke zu gehen. Welches Schnittverhalten besteht gegenüber den restlichen vier Kanten?

Der Leser wird uns nach der Lösung zustimmen, dass uns die Halbräume mit ihren einfachen charakteristischen Eigenschaften in einer kurzen, einfachen Weise zum Ergebnis führen.

Nun wollen wir aber im Eifer nicht den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen verges-

⁶Das heißt auf windschiefen Geraden liegende Kanten.

sen. Wir wenden uns wieder der Aufgabe (1.20) zu und betrachten zunächst die offene Frage im zweiten Fall (vgl. dazu Abb. 8b).

Es ist hier $G \in FX$ und $S \in EF$ sowie $g_{EF} \parallel g_{HG}$ und $g_{FG} \parallel g_{EH}$; zusätzlich sei U der Schnittpunkt der Geraden g_{SX} und g_{EH} .

Jetzt ist der folgende Hilfssatz nützlich.

(1.27) Satz. Ist $O \in MN$ und sind $P, Q \notin g_{MN}$ Punkte mit $g_{MP} \parallel g_{NQ}$ und $O \in g_{PQ}$, dann gilt $O \in PQ$ (Abb. 13).

Dieser Hilfssatz ergibt sich leicht durch einen indirekten Schluss aus dem Satz (1.24). Mit ihm erhält man nun schrittweise aus den obigen Voraussetzungen $S \in XU$ (wegen $S \in EF$), $T \in XS$ (wegen $G \in FX$), also $T \in XU$ und damit $T \in HG$, was zu zeigen war.

Im ersten Fall (vgl. dazu Abb. 8a) ist davon auszugehen, dass P innerer Punkt des konvexen Vierecks $EFGH$ ist. Was heißt das im Rahmen unserer bereitgestellten Begriffe?

Das heißt, der Punkt P liegt in allen Halbebenen von ε_{EFG} bezüglich der Geraden $g_{EF}, g_{FG}, g_{GH}, g_{HE}$, die jeweils die übrigen zwei Punkte des Vierecks $EFGH$ enthalten. Bezüglich der Parallelen h zu g_{FG} durch P , die ganz in ε_{EFG} liegt, sind wegen $E, F, H \notin h$ sowohl E, H als auch F, G Punkte ein und derselben Halbebene.

Lägen nun E und F auch in der gleichen Halbebene bezüglich h , so läge P nicht in der Halbebene bezüglich g_{EH} , in der F liegt, oder P nicht in der Halbebene bezüglich g_{FG} , in der E liegt. Dies widerspricht der Voraussetzung für P . Also liegen E, F sowie G, H in verschiedenen Halbebenen bezüglich h , was zu zeigen war.

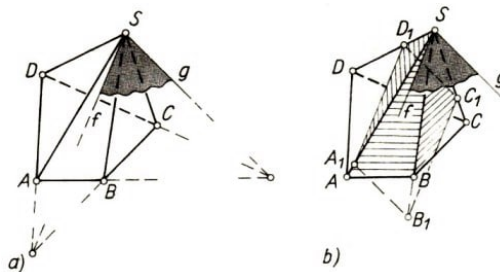


Abb. 14

(1.28) Aufgabe.⁷ Es sei $ABCD S$ eine Pyramide mit einem konvexen Viereck $ABCD$ als Grundfläche. Man beweise, dass es eine Ebene gibt, die die Kanten SA, SB, SC und SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Bei der Lösung interessieren wir uns insbesondere dafür, wo die Konvexität der Grundfläche $ABCD$ eingeht.

Wenn es überhaupt eine Lösung gibt, muss wegen $g_{A'D'} \parallel g_{B'C'}$ die Ebene $\varepsilon_{A'B'C'}$ parallel zur Schnittgeraden f der Ebenen ε_{ADS} und ε_{BCS} sein. (Sonst wäre $g_{A'D'} \nparallel g_{B'C'}$) Entsprechendes gilt nun auch bezüglich der Schnittgeraden g der Ebenen ε_{ABS} und ε_{DCS} . Nach Voraussetzung sind f und g verschieden (Abb. 14a).

Da wir also eine Ebene ε suchen, die notwendig zu f und g parallel ist, betrachten wir

⁷Nach Aufgabe 171213 der OJM der DDR.

zunächst eine Ebene η_1 mit $\eta_1 \parallel \varepsilon_{fg}$ und $S \notin \eta_1$, die durch einen beliebig gewählten Punkt $A_1 \in SA$ geht (Abb. 14b). Schneiden sich g_{AB} und g_{CD} in einem Punkt E , dann liegt E auf g , und E ist kein Punkt von \overline{AB} , da $ABCD$ konvex ist.

Folglich liegen die Punkte A und B in einer gemeinsamen Halbebene von ε_{ABS} bezüglich g . Entsprechendes gilt, wenn $g_{AB} \parallel g_{CD}$ ist, da dann $g_{AB} \parallel g$ gilt. Da der Schnittpunkt B , von η_1 mit der Geraden g_{SB} gleichzeitig der Schnittpunkt der Parallelen zu g durch A_1 mit der Geraden g_{SB} ist und A_1 in SA^+ liegt, muss nun B , sogar auf der Halbgeraden SB^+ liegen.

Durch völlig analoge Betrachtungen ergibt sich weiter, dass η_1 die Halbgeraden SC^+ und SD^+ in Punkten C_1 und D_1 schneidet. Und überdies ist $g_{A_1B_1} \parallel g \parallel g_{C_1D_1}$ und $g_{D_1A_1} \parallel f \parallel g_{B_1C_1}$ und damit A, B, C, D , ein Parallelogramm.

Die Punkte B_1, C_1 und D_1 brauchen nicht in SB, SC bzw. SD zu liegen (Abb. 14 b).

Ist $B_1 \notin SB$, so wählen wir einen Punkt $B_2 \in SB$ und legen durch ihn die zu η_1 parallele Ebene η_2 . Wegen $\eta_2 \parallel \varepsilon_{fg}$ liegt η_2 zusammen mit den Punkten A, B, C, D in einem Halbraum bezüglich ε_{fg} , so dass auch η_2 die Halbgeraden SA^+, SB^+, SC^+, SD^+ schneidet; die Schnittpunkte seien a_2, B_2, C_2, D_2 . Entscheidend ist aber, dass mit $B_2 \in SB_1$ und $g_{A_1B_1} \parallel g_{A_2B_2}$ auch $A_2 \in SA_1$ (nach Satz (1.23)) und damit erst recht $A_2 \in SA$ gilt. Außerdem ist nun offenbar auch $A_2B_2C_2D_2$ ein Parallelogramm. Auf diese Weise erhalten wir spätestens nach zwei weiteren derartigen Schritten eine Ebene ε mit der gewünschten Eigenschaft.

Die Konvexität von $ABCD$ ist tatsächlich auch notwendig. Denn gibt es eine Ebene ε entsprechend der Aufgabenstellung, so liegen, da $A'B'C'D'$ konvex ist, die Punkte C', D' in einem gemeinsamen Halbraum bezüglich ε_{ABS} , und in diesem liegen wegen $C' \in SC$ und $D' \in SD$ auch die Punkte C und D . Dann sind C, D in einer gemeinsamen Halbebene von ε_{ABC} bezüglich g_{AB} . Entsprechend liegen die Punkte D, A in einer gemeinsamen Halbebene von ε_{ABC} bezüglich g_{BC} . Folglich ist $ABCD$ ein konvexes Viereck.

(1.29) Aufgabe. In wie viele Teile wird der Raum von n Ebenen höchstem zerlegt?

(Anleitung: Man kläre zunächst, in wie viele Teile eine Ebene durch n in ihr liegende Geraden zerlegt wird, wenn je zwei von ihnen sich schneiden und keine drei einen gemeinsamen Punkt besitzen.)

(1.30) Aufgabe. Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel. In wie viele Teile wird er durch die Ebenen $\varepsilon_{BDE}, \varepsilon_{ACF}, \varepsilon_{BDG}, \varepsilon_{ACH}, \varepsilon_{BEG}, \varepsilon_{CFH}$ und ε_{DEG} zerlegt?

Am Schluss dieses Abschnitts möchten wir noch zwei Begriffe mit Hilfe von Halbebenen bzw. Halbräumen darstellen.

Sind p und q zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Scheitelpunkt O , so nennt man die Menge $\{p, q\}$ einen Winkel und bezeichnet ihn mit $\angle(p, q)$.

Für den Winkel aus den Halbgeraden OA^+ und OB^+ verwenden wir die bekannte Bezeichnung $\angle AOB$ (Abb. 15 a.).

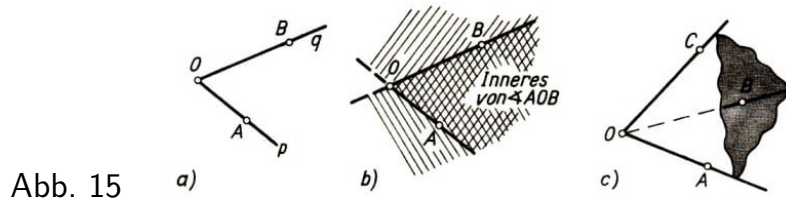


Abb. 15

Das Innere eines Winkels $\angle AOB$, bei dem A, O, B nicht auf einer Geraden liegen, lässt sich nun einfach durch Halbebenen erklären: Es ist der Durchschnitt der Halbebene bezüglich g_{OA} , die den Punkt B enthält, mit der Halbebene, die durch g_{OB} begrenzt wird und A enthält (Abb. 15 b). Entsprechendes erklären wir im Raum.

Es seien O, A, B, C vier Punkte, die in keiner gemeinsamen Ebene liegen, d.h., sie bilden die Ecken eines Tetraeders, und wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}_A, \mathfrak{H}_B$ bzw. \mathfrak{H}_C den Halbraum bezüglich ε_{OBC} , der A enthält, den Halbraum bezüglich ε_{OCA} , der B enthält, bzw. den Halbraum bezüglich ε_{OAB} , der C enthält.

Dann heißt die Punktmenge $\mathfrak{H}_A \cap \mathfrak{H}_B \cap \mathfrak{H}_C$ das Innere des Raumwinkels (oder der räumlichen Ecke) mit der Spitze O und den Halbkanten OA^+, OB^+, OC^+ (Abb. 15c).

1.4 Vom Senkrechtsein

Drei Dinge richtig begriffen zu haben bedeutet mehr,
als von Dutzend Dingen oberflächlich gehört zu haben.
H. Duncker

Aus der Geometrie in einer Ebene ist folgende Beziehung bekannt: Eine Gerade g ist senkrecht zu einer Geraden h - kurz $g \perp h$. Sie wird in verschiedener Weise erklärt, z.B. über rechte Winkel oder über Spiegelungseigenschaften. Wir setzen diese Relation hier als gegeben und bekannt voraus, ebenso die folgenden Eigenschaften.

(1.31) Ist $g \perp h$, dann sind g und h zwei sich schneidende Geraden, und es ist $h \perp g$. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g in einer Ebene ε gibt es in ε genau eine Gerade h durch P mit $g \perp h$.

Wenn f, g, h in einer gemeinsamen Ebene liegen und $f \perp g$ ist, dann gilt $f \perp h$ genau dann, wenn $h \parallel g$ ist.

Für senkrecht bzw. Senkrechte werden auch die Bezeichnungen orthogonal bzw. Orthogonale oder Lot⁸ verwendet.

Entsprechend bezeichnete Beziehungen gibt es auch zwischen einer Geraden und einer Ebene sowie zwischen zwei Ebenen. Es entspricht unserer Erfahrung und Vorstellung, zu definieren:

Eine Gerade g heißt senkrecht zu einer Ebene ε - kurz $g \perp \varepsilon$ - genau dann, wenn g die Ebene ε in einem Punkt P schneidet und zu jeder Geraden k senkrecht ist, die durch

⁸Es ist verbreitet, auch senkrechte Strecken als Lot zu bezeichnen. Wir werden nur in einigen Fällen ebenfalls davon Gebrauch machen.

P geht und in ε liegt (Abb. 16). Wir möchten dazu auf Sachverhalte in der Realität hinweisen.

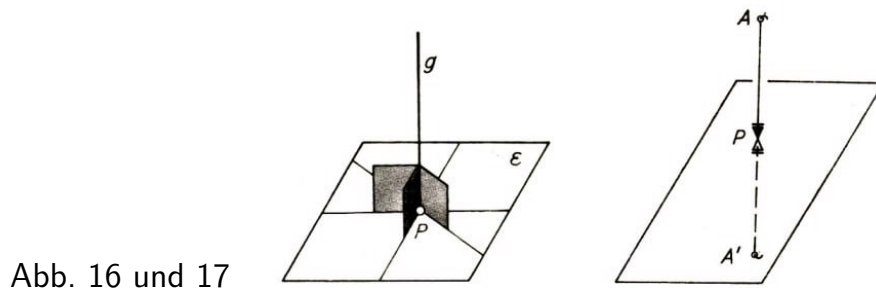


Abb. 16 und 17

Lässt man von einem Befestigungspunkt A ein Bleilot frei über einem waagerechten Ebenenstück, etwa über einer Wasserfläche, hängen (Abb. 17), so bestätigt eine Messung, dass jede Gerade h durch den Berührungspunkt P des Lotes mit der Ebene eine zum Lot senkrechte Gerade ist. (Das ist hier eine Konsequenz aus physikalischen Gesetzen über die Schwerkraft.)

Man kann anstelle dieser Überprüfung aber auch das Spiegelbild A' von A an der Wasserfläche beobachten und stellt fest, dass A , P , A' auf einer Geraden liegen (Abb. 17).

Jede Halbgerade mit dem Anfangspunkt P , die in der waagerechten Ebene liegt, bildet mit PA'^+ einen Winkel, der bei der Spiegelung das Bild desjenigen Winkels ist, den diese Halbgerade mit PA^+ bildet. Demnach sind diese Winkel gleichgroße Nebenwinkel und damit rechte Winkel. Die letzte Betrachtung lässt sich generell an jedem spiegelnden Ebenenstück anstellen.

Damit wird auch folgender Erfahrungssatz einsichtig:

(1.32) Zu jeder Ebene ε gibt es durch jeden Punkt A genau eine Gerade g , die senkrecht zu ε ist (Existenz und Eindeutigkeit eines Ebenenlotes).

Für das Ebenenlot ist folgende Eigenschaft bemerkenswert und von praktischer Bedeutung:

(1.33) Satz. Ist P der Fußpunkt des Lotes von einem Punkt A auf eine Ebene ε mit $A \notin \varepsilon$, dann ist für jeden Punkt $Q \neq P$ der Ebene ε die Länge $|AQ|$ stets größer als die Länge $|AP|$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist APQ ein Dreieck und $g_{AP} \perp g_{QP}$ (Abb. 18). Damit ist $\angle APQ$ ein rechter Winkel, und nach bekannten Eigenschaften über rechtwinklige Dreiecke gilt $|AQ| > |AP|$.

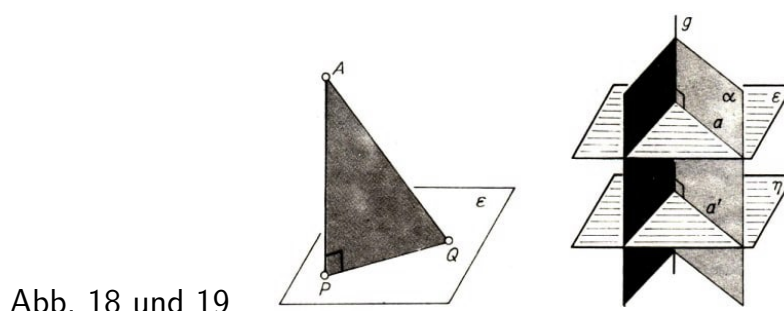


Abb. 18 und 19

(1.34) Aufgabe. Man beweise: Die Eigenschaft $|AQ| > |AP|$ für alle Punkte $Q \neq P$ aus ε ist auch hinreichend dafür, dass P der Fußpunkt des Lotes von A auf ε ist.

(1.36) Satz. Ist eine Gerade g senkrecht zu zwei Ebenen ε und η , so gilt $\varepsilon \parallel \eta$.

Beweis. Wir legen durch g zwei verschiedene (Hilfs-)Ebenen α und β . Diese schneiden die Ebenen ε und η in Geraden a, a' und b, b' (Abb. 19), und es gilt $a \neq b$ und $a' \neq b'$ wegen $\alpha \neq \beta$. Damit ist $\varepsilon = \varepsilon_{ab}$ und $\eta = \varepsilon_{a'b'}$.

Aus $g \perp \varepsilon, \eta$ folgt nach Definition $g \perp a, a'$ und $g \perp b, b'$. Da diese Geraden in der Ebene α bzw. β liegen, ist nach (1.31) $a \parallel a'$ und $b \parallel b'$. Auf Grund der Sätze (1.10) und (1.7) erhält man nun $\varepsilon_{ab} \parallel \varepsilon_{a'b'}$.

(1.36) Aufgabe. Man beweise folgende Umkehrung zu Satz (1.35): Ist $g \perp \varepsilon$ und $\varepsilon \parallel \eta$, so ist auch $g \perp \eta$.

Eine Ebene ε heißt senkrecht zu einer Ebene η - kurz $\varepsilon \perp \eta$ - genau dann, wenn es in der Ebene ε eine Gerade g gibt, die senkrecht zu η ist (Abb. 20a).

Aus $\varepsilon \perp \eta$ folgt jetzt allein aus logischen Gründen leicht, dass sich ε und η schneiden. Wir erwarten natürlich auch noch $\eta \perp \varepsilon$, d. h. die Symmetrie dieser Relation. Sie ist unseren Vorstellungen nach eine Selbstverständlichkeit, ergibt sich aber nicht unmittelbar aus der Definition, da diese "unsymmetrisch" bezüglich ε und η formuliert ist.

Wir betonen, dass diese Eigenschaft aus den anderen hier genannten ableitbar ist. (Ein entsprechender Hinweis wird an späterer Stelle noch gegeben.)

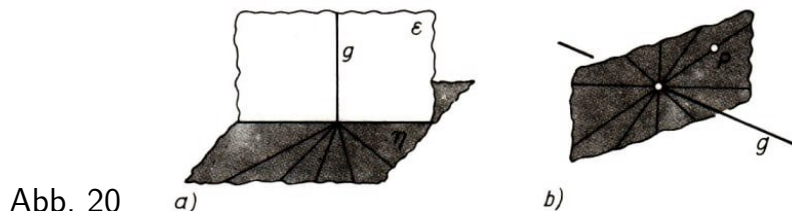


Abb. 20

Auf Grund der großen anschaulichen Einsichtigkeit wollen wir das als Erfahrungssatz voraussetzen:

(1.37) Ist $\varepsilon \perp \eta$, so ist auch $\eta \perp \varepsilon$.

Der Erfahrung entnehmen wir weiterhin

(1.38) Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g gibt es eine Ebene, die durch P geht und auf der die Gerade g senkrecht steht (Existenz einer Lotebene; Abb. 20b).

Die Einzigkeit der Lotebene folgt sofort aus dem Satz (1.35). Die Aussagen (1.32), (1.37) und (1.38) stehen offenbar in Analogie zu den Aussagen (1.31) der ebenen Geometrie.

Der folgende Satz ist von großer praktischer Bedeutung für den Nachweis der Orthogonalität einer Geraden zu einer Ebene.

(1.39) Satz. Schneiden sich zwei Geraden f, h in einem Punkt P und ist eine dritte Gerade g durch P senkrecht zu f und h , so ist g senkrecht zur Verbindungsebene von f und h .

Beweis. Nach (1.38) gibt es eine Ebene η durch P mit $g \perp \eta$. Wir legen durch f und g bzw. h und g die Verbindungsebene ε_{fg} bzw. ε_{hg} (Abb. 21 a). Diese schneiden die Ebene η in Geraden f' bzw. h' , auf denen P liegt. Wegen $g \perp \eta$ ist $g \perp f'$ und $g \perp h'$. Nun sind in der Ebene ε_{fg} die Geraden f und f' Lote durch P auf g . Nach (1.31) ist dann $f' = f$; entsprechend ergibt sich $h' = h$. Damit ist $\varepsilon_{fh} = \varepsilon_{f'h'} = \eta$ und schließlich $g \perp \varepsilon_{fg}$.

Jetzt kann man einen Beweis für (1.37) recht kurz führen.

(1.40) Aufgabe. Man beweise:

- a) Aus $g \perp \varepsilon$ und $g \parallel h$ folgt $h \perp \varepsilon$.
- b) Aus $g \perp \varepsilon$ und $h \perp \varepsilon$ folgt $g \parallel h$.

(1.41) Satz. Ist β eine Lotebene und g eine Lotgerade zu einer Ebene α und $g \cap \beta \neq \emptyset$, so liegt g in der Ebene β .

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in β eine Gerade b mit $b \perp \alpha$. Außerdem ist $g \perp \alpha$, so dass nun $g \parallel b$ (nach (1.40b)) und damit $g \parallel \beta$ (nach Satz (1.10)) gilt. Da aber g wenigstens einen Punkt mit der Ebene β gemeinsam hat, muss $g \subset \beta$ sein.

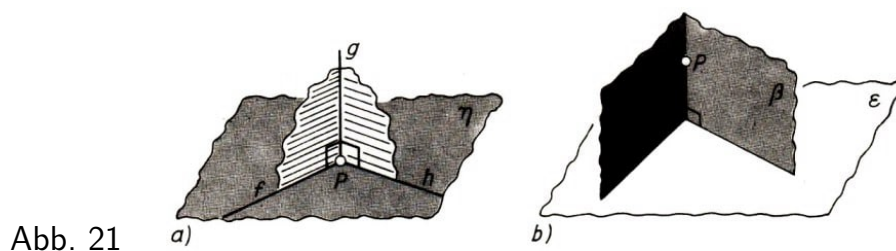


Abb. 21

(1.42) Satz. Schneiden sich zwei Ebenen α und β in einer Geraden g und ist ε eine zu α und β senkrechte Ebene, so ist auch die Gerade g senkrecht zu ε (Abb. 21 b).

Beweis. Es sei P irgendein Punkt auf g und h das Lot von P auf die Ebene ε . Der vorhergehende Satz hat zur Folge, dass h sowohl in α als auch in β liegt und damit die Schnittgerade g sein muss.

(1.43) Satz. Zu jeder Gerade g und jeder Ebene α gibt es eine Ebene β durch g mit $\beta \perp \alpha$. Die Ebene β (Lotebene durch eine Gerade auf eine Ebene) ist sogar eindeutig bestimmt, wenn g nicht senkrecht zu α ist.

Beweis. Es sei A ein Punkt auf g und a das Lot von A auf die Ebene α . - Ist $g \perp \alpha$, dann ist $g = a$, und damit besitzt jede Ebene durch g die geforderte Eigenschaft. - Andernfalls schneiden sich g und a (in A), und die Ebene ε_{ga} erfüllt die Forderung (Abb. 22). Damit ist die Existenzbehauptung vollständig bewiesen.

Die Eindeutigkeit liegt aber auf der Hand, denn eine Ebene β mit $g \subset \beta$ und $\beta \perp \alpha$ muss nach Satz (1.41) auch a enthalten und damit die Ebene ε_{ga} sein.

Im folgenden greifen wir eine Lagebeziehung zwischen Geraden auf, die wir bereits eingehend in Abschnitt 1.1 betrachtet haben, hier jedoch unter einem neuen Aspekt. Es geht um den Abstand windschiefer Geraden. Was ist darunter zu verstehen?

Sind a und b windschiefe Geraden, so betrachten wir alle Abstände $|AB|$, die je zwei

Punkte $A \in a$ und $B \in b$ besitzen. Das Minimum dieser Abstände heißt der Abstand der windschiefen Geraden a und b .

Mit einer solchen Erklärung ist jedoch nicht gesichert, dass es das Minimum dieser Abstände überhaupt gibt. (Ist beispielsweise P ein Punkt der Geraden g_{AB} , der nicht in der Strecke AB liegt, so existiert kein Minimum für die Abstände des Punktes P von den inneren Punkten der Strecke.)

Falls das Minimum existiert, bliebe noch die Frage, von welchen Punktpaaren es gebildet wird.

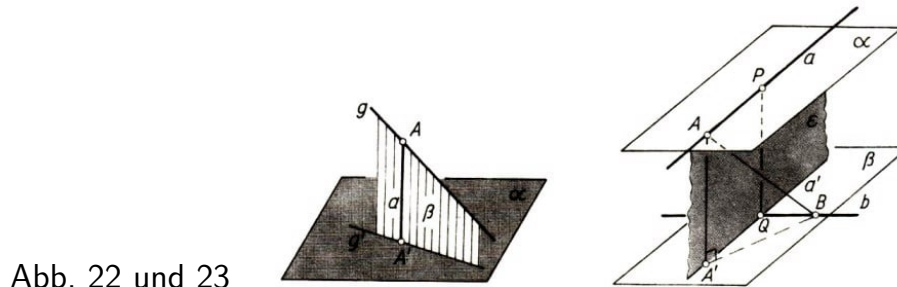


Abb. 22 und 23

Diese beiden Fragen wollen wir jetzt klären, indem wir kräftig von den in Abschnitt 1.1 erarbeiteten Einsichten Gebrauch machen.

Nach dem Satz (1.15) existieren (genau) zwei Ebenen α durch a und β durch b , die zueinander parallel sind. Weiterhin gibt es nach Satz (1.43) durch a eine Ebene ε , die senkrecht zur Ebene α ist und deshalb die Ebene β in einer Geraden a' schneidet (Abb. 23).

Wegen $a' \parallel a$ (siehe Satz (1.8)) sind die Geraden a' und b nicht parallel zueinander; ihr Schnittpunkt sei Q , und das Lot zu β durch Q schneidet die Gerade a in einem Punkt P .

Sind nun $A \in a$ und $B \in b$ beliebige Punkte und ist A' der Schnittpunkt des Lotes zu β durch A mit der Geraden a' , so gilt $|AB| > |AA'|$ nach Satz (1.33), falls $A \neq P$ oder $B \neq Q$ und außerdem $|AA'| = |PQ|$ ist.

Damit erhielten wir

(1.44) Satz. Sind a und b windschiefe Geraden, so gibt es genau zwei Punkte $P \in a$ und $Q \in b$ derart, dass $|PQ| \leq |AB|$ für alle $A \in a$ und $B \in b$ gilt. Überdies ist $g_{PQ} \perp a$ und $g_{PQ} \perp b$.

Abschließend möchten wir noch auf eine Erweiterung der Orthogonalität zweier Geraden hinweisen, die für die Anwendung der Geometrie recht nützlich ist.

Wir nennen eine Gerade a im weiten Sinne orthogonal zu einer Gerade b und schreiben dafür $a \vdash b$ genau dann, wenn es auf b einen Punkt B so gibt, dass die Parallele c zu a durch B senkrecht zu b ist (Abb. 24).

Offenbar ist nach (1.31) mit dieser Parallelen c auch die Parallele c' zu jedem anderen Punkt $B' \in b$ senkrecht zu b , so dass die Definition von $a \vdash b$ unabhängig von der Wahl eines Punktes aus b ist. Ferner ist diese Relation symmetrisch, d.h., aus $a \vdash b$ folgt $b \vdash a$.

(1.45) Aufgabe. Man beweise die Symmetrie der Orthogonalitätsrelation.

Schließlich folgt aus $a \vdash b$ und $a' \parallel a$ offensichtlich $a' \vdash b$ (Invarianz gegenüber Parallelität).

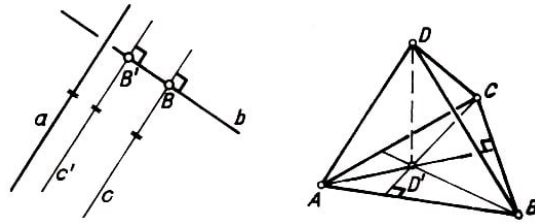


Abb. 24 und 25

Allein folgende Sicht aus der Vektorrechnung verdeutlicht die Natürlichkeit der Verallgemeinerung.

Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} Richtungsvektoren der Geraden a und b , dann ist $a \vdash b$ gleichwertig damit, dass der Vektor \mathbf{a} senkrecht zum Vektor \mathbf{b} ist.

(Bezüglich der Vektorrechnung müssen wir den Leser auf entsprechende Literatur verweisen. Hier reichen bereits die entsprechenden Abschnitte in den Mathematiklehrbüchern der Klassen 11 und 12 aus.)

(1.46) Aufgabe. Sind zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraeders zueinander orthogonal im weiten Sinne, dann auch das dritte Paar.

(Lösungshinweise: Abb. 25 möchte zu einer Lösung anregen; eine weitere Anregung bietet Abb. 5. Den interessierten Leser möchten wir auf den Artikel von G. Omen in der Schülerzeitschrift "alpha", 8. Jg. 1974, S. 76-77, hinweisen.)

Durch Abb. 26 wird sichtbar, dass die in (1.46) behauptete Eigenschaft für \vdash eine Analogie zum Höhensatz für die Geradenorthogonalität \perp in einer Ebene darstellt.

Ziel dieses Abschnittes war es, von der bekannten Orthogonalität zwischen Geraden ausgehend, zu weiteren Orthogonalitäten im Raum zu führen. Dabei wurde sichtbar, dass zusammen mit den Eigenschaften der Geradenorthogonalität in einer Ebene wenige zusätzliche Eigenschaften ausreichen, um recht zügig eine Fülle weiterer wesentlicher Eigenschaften für die betrachteten Orthogonalitäten abzuleiten, ohne Anleihen an räumlicher Vorstellung und Erfahrungssätzen aufnehmen zu müssen.

(Natürlich lässt sich die Ausgangsposition, deren Erweiterung hier im wesentlichen aus den Erfahrungssätzen (1.32 ; Existenz und Eindeutigkeit eines Ebenenlotes) und (1.36; Existenz einer Lotebene auf eine Gerade) besteht, erheblich abschwächen. Doch dies steht außerhalb der Zielstellung.)

1.5 Einfache Beziehungen zwischen Kreisen, Kugeln, Geraden und Ebenen

Im folgenden bezeichnen $K(M, r)$ und $K(M; A)$ den Kreis (die Kugel) mit dem Mittelpunkt M , der den Radius r besitzt bzw. der durch den Punkt A geht.

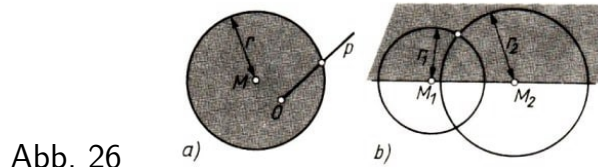


Abb. 26

Aus der ebenen Geometrie ist für Kreise bekannt:

- (1.47) a) Liegt der Scheitel O einer Halbgeraden p im Innern eines Kreises $K(M, r)$, d.h., ist $|OM| < r$, so hat p mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam (Abb. 26a).
 b) Sind $K(M_1, r_1)$ und $K(M_2, r_2)$ zwei Kreise mit $M_1 \neq M_2$, für die die Längen r_1, r_2 und $|M_1M_2|$ die Dreiecksungleichung erfüllen⁹, so gibt es in jeder Halbebene bezüglich $g_{M_1M_2}$ genau einen gemeinsamen Punkt der beiden Kreise (Abb. 26b).

In Analogie dazu wollen wir einige einfache Beziehungen von Kugeln zu Geraden, Ebenen und Kugeln bereitstellen.

- (1.48) Satz. Liegt der Scheitel O einer Halbgeraden p im Innern einer Kugel $K(M, r)$, so hat p mit der Kugel genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis. Es gibt eine Ebene η , die M und p enthält. Wegen $|MO| < r$ schneidet in dieser Ebene der Kreis $K(M, r)$ die Halbgerade p in einem Punkt A (nach (1.47a)). Mit $|MA| = r$ ist A ein gemeinsamer Punkt von p und der Kugel $K(M, r)$. Gäbe es einen weiteren Punkt B mit dieser Eigenschaft, so würde er auch auf dem betrachteten Kreis in η liegen; dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage in (1.47-a).

- (1.49) Satz. Enthält eine Ebene ε einen inneren Punkt einer Kugel $K(M, r)$, so schneidet die Ebene ε die Kugel längs eines Kreises.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt B aus ε , für den $|MB| < r$ ist. Der Fußpunkt des Lotes von M auf ε sei N ; für ihn gilt $|MN| \leq |MB|$ (nach Satz (1.33)), so dass auch er ein innerer Punkt der Kugel ist (Abb. 27).

Es sei jetzt p eine Halbgerade aus ε mit dem Scheitel N ; sie schneidet die Kugel $K(M, r)$ in (genau) einem Punkt $A \neq N$.

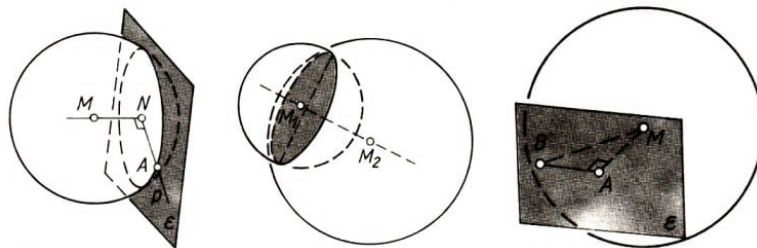


Abb. 27-29

Alle Punkte P des Kreises $K(N; A)$ in ε liegen auch auf der Kugel, da für $M \neq N$ die Dreiecke MNA und MNP kongruent sind. (Denn die Winkel $\angle MNA$ und $\angle MNP$ sind beide rechte Winkel.) Die Existenz weiterer gemeinsamer Punkte von ε und der Kugel $K(M, r)$ würde sofort zu einem Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage im Satz (1.48) führen. Also ist $K(M, r) \cap \varepsilon = K(M; A)$.

⁹Das heißt $r_1 < r_2 + |M_1M_2|$, $r_2 < r_1 + |M_1M_2|$, $|M_1M_2| < r_1 + r_2$.

(1.50) Satz. Sind $K_1(M_1, r_1)$ und $K_2(M_2, r_2)$ zwei Kugeln mit $M_1 \neq M_2$, für die die Längen r_1, r_2 und M_1, M_2 die Dreiecksungleichung erfüllen, so ist $K_1 \cap K_2$ ein Kreis, der auf einer zu $g_{M_1 M_2}$ senkrechten Ebene und dessen Mittelpunkt auf $g_{M_1 M_2}$ liegt (Abb. 28).

Beweis als Aufgabe.

(1.51) Satz. Durch jeden Punkt A einer Kugel $K(M, r)$ gibt es genau eine Ebene ε , die mit der Kugel keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Überdies ist $g_{MA} \perp \varepsilon$.

Beweis (Abb. 29). Durch A gibt es eine Ebene ε mit $g_{MA} \perp \varepsilon$ (siehe (1.38)). Für jeden Punkt $B \neq A$ aus ε ist $|MA| < |MB|$ nach Satz (1.33), so dass B nicht auf der Kugel liegen kann. Damit ist die Existenz bewiesen.

Zu jeder von ε verschiedenen Ebene η durch A ist g_{MA} nicht senkrecht. Der Fußpunkt N des Lotes von M auf η ist dann von A verschieden, und demnach gilt $|MN| < |MA| = r$, d.h., η besitzt einen inneren Punkt der Kugel. Also ist ε die einzige Ebene durch A mit der gewünschten Eigenschaft.

Die in diesem Satz ausgezeichneten Ebenen heißen Tangentialebenen der Kugel.

(1.62) Aufgabe. Für drei Kugeln wird vorausgesetzt, dass sie einen Punkt P gemeinsam haben und durch P keine Gerade geht, die Tangente für alle drei Kugeln ist. Man zeige, dass diese Kugeln dann noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen.

2 Räumliche Konstruktionen

Es ist falsch zu glauben,
dass nur der Dichter Phantasie braucht.
Das ist ein dummes Vorurteil!
Sogar in der Mathematik braucht man sie ...
W.I. Lenin

2.1 Was ist eine räumliche Konstruktion?

Konstruktionen sind uns hinreichend aus der ebenen Geometrie bekannt.

Genauer gesagt, handelt es sich dabei zumeist um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, und fast jeder unserer Leser wird wohl damit die Vorstellung einer Zeichnung verbinden, die, schrittweise aus vorgegebenen Punktmengen sich entwickelnd, schließlich die geforderte Punktmenge (ob nun Kreis, Dreieck oder eine andere geometrische Figur) darstellt. Eine Zeichnung kann aber nur in einer Zeichenebene ausgeführt werden, was ist dann aber eine räumliche Konstruktion?

Natürlich können wir räumliche Gebilde durch ebene Bilder veranschaulichen, wie wir das ja mittels der Parallelprojektion auch in unseren bisherigen Darlegungen getan haben. Aber eine solche Anfertigung von Bildern zur Veranschaulichung entspricht wohl nicht unserer Vorstellung von einer Konstruktion.

Und wenn in diesem Zusammenhang von einer Konstruktion die Rede ist wie in (1.20), handelt es sich doch um eine ebene Konstruktion, denn die vorgegebene Punktmenge ist die in einer Ebene, und die Konstruktionsschritte sind in der Ebene auszuführen (wenn auch zur Begründung natürlich die dem Bild zugrunde liegenden räumlichen Verhältnisse erhalten müssen). Aber wie sollte es auch anders sein?

Wir müssen uns an dieser Stelle überhaupt einmal über den Begriff Konstruktion verständigen.

Schlagen wir in einem Wörterbuch der lateinischen Sprache nach, so finden wir etwa: "constructio" - Bau oder "construo" - erbauen.

Das stimmt sehr gut mit unseren Vorstellungen einer geometrischen Konstruktion überein; nur welches sind die Baumaterialien und wo ist der Bauplatz?

Entscheidend für die genaue Beantwortung dieser Frage ist, dass die Begriffe der Geometrie durch Abstraktion entstanden sind und somit nur in unserem Bewusstsein existieren, streng genommen kann also der "Bauplatz" für geometrische Konstruktionen nur in unserem Kopf liegen!

Da geometrische Begriffe durch Abstraktionen aus der uns umgebenden Realität entstanden sind, ist es sehr leicht, auch umgekehrt in der Realität eine Veranschaulichung eines geometrischen Begriffes zu finden, für die Gerade etwa einen gespannten Faden ("linum" lat. Bindfaden aus Flachs) oder eine mit dem Lineal gezeichnete Linie, für den Punkt eine Einstichstelle im Papier ("pungere" lat. stechen).

Da nun bei einer Konstruktion in der Ebene der Zusammenhang zwischen der Zeich-

nung auf einem Blatt Papier und der eigentlichen abstrakten Konstruktion so direkt und "offensichtlich" ist, scheint es für das Verständnis des jeweiligen mathematischen Problems unerheblich, was man sich unter der Konstruktion vorstellt, einen abstrakten Vorgang oder einen Zeichenvorgang, nicht so für den Raum!

Und wenn von der Konstruktion mit Zirkel und Lineal die Rede ist, bezieht sich natürlich die Angabe dieser Zeichengeräte auf die Durchführung der Zeichnung. Für den abstrakten Vorgang der Konstruktion bedeutet es, dass nur bestimmte Punktmengen, nämlich Geraden und Kreise, in die Konstruktionsschritte einbezogen werden dürfen. Wir stellen entsprechend unserer Erfahrung zunächst einmal die Zeichenoperationen zusammen, die wir mit Zirkel und Lineal durchführen können:

(2.1) das Zeichnen einer Geraden (besser: eines Geradenstückes) mit dem Lineal durch zwei auf dem Zeichenblatt markierte Punkte,

(2.2) das Zeichnen eines Kreises mit dem Zirkel um den als Mittelpunkt markierten Punkt M mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der Länge einer gezeichneten Strecke AB ist.

Im folgenden bedeuten Linien Geraden oder Kreise.

(2.3) Zu zwei gezeichneten (nicht identischen) Linien werden die ihnen gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) markiert.

(2.4) Es werden beliebig gewählte Punkte in der Zeichenebene (speziell auf bereits gezeichneten Linien) markiert.

Durch Abstraktion erhalten wir aus diesen Zeichenoperationen die folgenden vier Konstruktionsschritte:

(2.1') Konstruktion einer Geraden durch zwei vorgegebene Punkte.

(2.2') Konstruktion eines Kreises um einen vorgegebenen Punkt M mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der einer vorgegebenen Strecke AB ist.

Im folgenden bedeuten Konstruktionslinien Geraden oder Kreise.

(2.3') Konstruktion der gemeinsamen Punkte zweier vorgegebener (nicht identischer) Konstruktionslinien.

(2.4') Festlegung eines Punktes in der Ebene (speziell auf Konstruktionslinien).¹⁰

Eine ebene Konstruktion ist dann eine endliche Folge von Konstruktionsschnitten der Art (2.1') bis (2.4').

Mit diesen Betrachtungen ist wohl auch deutlich geworden, dass die Auszeichnung von Gerade und Kreis in der Konstruktion historisch darauf zurückzuführen ist, dass Lineal und Zirkel eben die einfachsten Zeichengeräte sind. Aus der

¹⁰Wir machen darauf aufmerksam, dass wir im obigen Text (ab (2.1)) die Begriffe Punkt, Gerade, Kreis mit zweierlei Bedeutung verwendeten, in (2.1) bis (2.4) als Bezeichnung für die Ergebnisse der Zeichenoperationen auf einem Zeichenblatt, in (2.1') bis (2.4') als Bezeichnung für abstrakte geometrische Begriffe.

Beschränkung ergab sich unter anderem für die Mathematiker die interessante Frage, welche Figuren überhaupt (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar sind. Markant ist z.B. die Entdeckung des 18jährigen Gauß, dass das regelmäßige 17-Eck in diesem Sinne konstruierbar ist!¹¹

Nachdem die Konstruktionen mit dem Zirkel allein von Georg Mohr¹² unbeachtet geblieben waren, bewies Lorenzo Mascheroni¹³, dass alle Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal möglich sind, auch mit dem Zirkel allein durchführbar sind. (Natürlich wird dabei eine Strecke als konstruiert angesehen, wenn ihre Endpunkte konstruiert sind.) Das Problem der Konstruierbarkeit führte auf viele interessante Fragen, deren Beantwortung z.T. auch Zusammenhänge zwischen typisch geometrischen und nicht geometrischen Problemkreisen der Mathematik aufdeckte.

Im Fall der räumlichen Geometrie können wir nun nicht von der Abstraktion von Zeichenoperationen ausgehen, denn eine Zeichnung im Raum ist uns eben nicht möglich. Dagegen bleibt uns wieder die Möglichkeit, wie bereits mehrfach erprobt, Erkenntnisse der Ebene auf den Raum "sinngemäß" (oder "in Analogie") zu übertragen. Wir bleiben im Abstrakten und legen in Analogie zu (2.1') bis (2.4') für den Raum die folgenden Konstruktionsschritte fest:

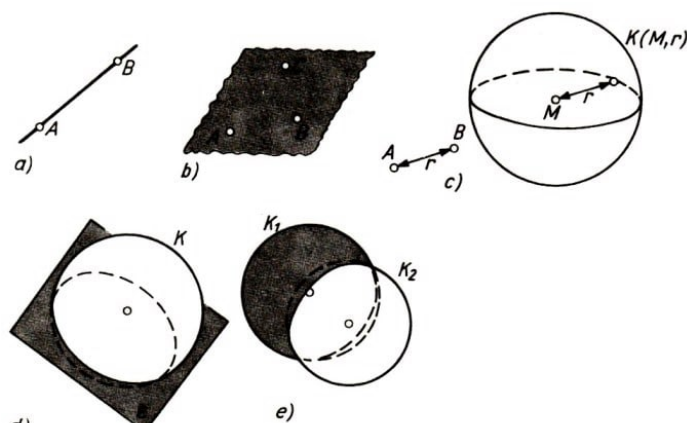


Abb. 30

(2.0) Konstruktion einer Geraden durch zwei vorgegebene und voneinander verschiedene Punkte (vgl. Abb. 30a)¹⁴.

(2.1'') Konstruktion einer Ebene durch drei vorgegebene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen (vgl. Abb. 30b).

(2.2'') Konstruktion einer Kugel um einen vorgegebenen Punkt M mit demjenigen Radius, dessen Länge gleich der einer vorgegebenen Strecke s ist (vgl. Abb. 30c).

Im folgenden bedeutet Fläche Ebene oder Kugel.

¹¹Im Emblem der OJM der DDR finden wir das regelmäßige 17-Eck wieder.

¹²Dänischer Mathematiker, 1640-1698.

¹³Italienischer Mathematiker, 1750-1800.

¹⁴Diese und die folgenden Abbildungen veranschaulichen nur den Sachverhalt und sind nicht mit einer Realisierung der Konstruktion im Raum mit Hilfe von "Zeichengeräten für den Raum", die ja höchstens gedanklich möglich ist, zu verwechseln - was die Anfertigung von Modellen nicht ausschließt!

(2.3'') Konstruktion der gemeinsamen Punkte (Schnittlinien) zweier vorgegebener (nicht identischer) Flächen (vgl. Abb. 30d-e).

(2.4'') Festlegung eines beliebigen Punktes im Raum (speziell auf einer bereits konstruierten Linie oder Fläche).

(2.5) Konstruktionen nach (2.1') bis (2.4') in einer bereits konstruierten Ebene.

Unter einer räumlichen Konstruktion verstehen wir nun eine endliche Folge von Konstruktionsschritten der Art (2.0), (2.1'') bis (2.4'') und (2.5).

Den Nutzen räumlicher Konstruktionen sehen wir in der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens und im (konstruktiven) Existenznachweis gewisser geometrischer Objekte.

2.2 Nochmals vom Senkrechtsein

Aus Abschnitt 1.4 wissen wir, dass es zu jeder Ebene ε und jedem Punkt $A \notin \varepsilon$ genau ein Lot von A auf ε gibt (Aussage (1.32)).

(2.6) Aufgabe. Gegeben seien im Raum eine Ebene ε und ein Punkt $A \notin \varepsilon$. Man konstruiere das Lot von A auf ε .

Da wir bereits wissen, dass das Lot eindeutig existiert, genügt zur Lösung der Aufgabe die Angabe einer Folge von Konstruktionsschritten und der Beweis, dass im Ergebnis dieser Folge eine Gerade konstruiert wurde, die die Eigenschaften des Lotes hat.

Konstruktion:

1. Wir legen nach (2.4'') einen Punkt $E \in \varepsilon$ fest.
2. Wir konstruieren nach (2.2'') die Kugel $K(A, r)$ um A mit $r = |AE|$.
3. Wir konstruieren nach (2.3'') die Menge \mathfrak{M} der gemeinsamen Punkte von ε und $K(A, r)$.

Gilt $\mathfrak{M} = \{E\}$, so ist die Konstruktion (bis auf die Verbindung von A und E) abgeschlossen.

Enthält \mathfrak{M} außer E einen weiteren Punkt, so ist \mathfrak{M} nach Abschnitt 1.5 ein Kreis K_1 . Wir setzen in diesem Fall die Konstruktion fort.

4. Wir konstruieren in ε nach (2.5) den Mittelpunkt N des Kreises K_1 (vgl. Abb. 31).

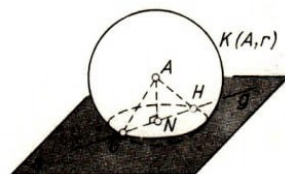


Abb. 31

5. Wir konstruieren nach (2.0) die Gerade durch A und N .

Behauptung. Der nach 1. bis 3. konstruierte Punkt E bzw. der nach 1. bis 4. konstruierte Punkt N ist der Fußpunkt des Lotes von A auf ε .

Beweis. Wäre im Fall $\mathfrak{M} = \{E\}$ die Gerade g_{AE} nicht orthogonal zu ε , so ergäbe sich ein Widerspruch zu Satz (1.51).

Im Fall $\mathfrak{M} = K_1$ legen wir in ε eine beliebige Gerade g durch N . Wegen (1.47) hat diese zwei Schnittpunkte G und H mit K_1 . Es gilt $|GN| = |NH|$, $|AG| = |AH| = r$ und $|AN| = |AN|$. Damit sind die Dreiecke GNA und HNA kongruent, und folglich sind die beiden Winkel $\angle ANG$ und $\angle ANH$ rechte.

Mit $g_{AN} \perp g$ für alle Geraden $g \in \varepsilon$ durch N ist gezeigt, dass die konstruierte Gerade g_{AN} das Lot von A auf ε ist.

(2.7) Aufgabe. Gegeben seien im Raum zwei windschiefe Geraden a und b . Man konstruiere zwei Punkte $A \in a$ und $B \in b$ so, dass $|AB|$ kleiner oder gleich der Länge einer jeden Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten von a und b ist.

Die Existenz und Eindeutigkeit derartiger Punkte haben wir bereits in 1.4 (siehe Satz (1.44)) bewiesen. Hier wollen wir diese Punkte durch eine räumliche Konstruktion gewinnen (und in diesem Sinne einen konstruktiven Existenzbeweis erbringen).

Konstruktion:

1. Wir legen nach (2.4") voneinander verschiedene Punkte $A_1, A_2 \in a$ und $B_1, B_2 \in b$ fest (vgl. Abb. 32).
2. Wir konstruieren nach (2.1") die Ebene $\varepsilon_{A_1A_2B_1}$.
3. Wir konstruieren nach (2.5) in $\varepsilon_{A_1A_2B_1}$ die zu a parallele Gerade c durch B_1 .
4. Wir legen nach (2.4") einen von B_1 verschiedenen Punkt C auf c fest und konstruieren nach (2.1") die Ebene $\varepsilon_{B_1B_2C} = \varepsilon_{bc}$.
5. Wir konstruieren wie in (2.6) den Fußpunkt A'_1 des Lotes von A_1 auf die Ebene ε_{bc} .
6. Wir konstruieren nach (2.3") die Schnittgerade a' der beiden Ebenen ε_{bc} und $\varepsilon_{A'_1A_2A_1}$.
7. Wir konstruieren nach (2.5) den Schnittpunkt B der Geraden b und a' .
8. Wir konstruieren nach (2.5) in der Ebene $\varepsilon_{aa'}$ den Schnittpunkt A von a mit der Parallelen zu $g_{A'_1A_1}$ durch B .

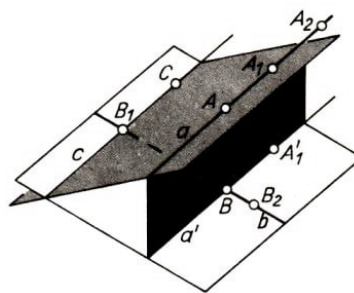


Abb. 32

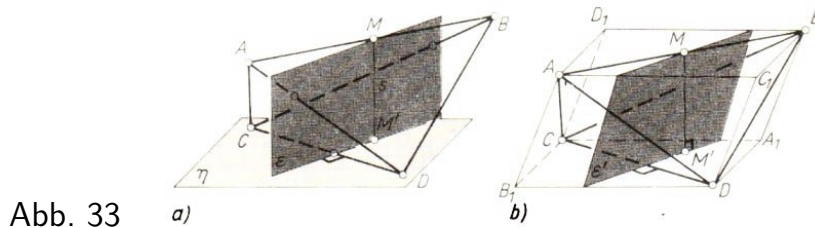
Beweis.

Man erkennt leicht, dass alle Konstruktionsschritte bis auf die Wahl von Punkten sogar eindeutig ausführbar sind. Auf Grund unserer Konstruktionsschritte 3., 5. und 8. gilt $a \parallel c$, $g_{A'_1A_1} \perp \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{ba'}$, $g_{AB} \parallel g_{A_1A'_1}$ und folglich $a \parallel a'$ (nach Satz (1.10) und (1.11)), $g_{AB} \perp b, a'$ (nach (1.40a)), also auch $g_{AB} \perp a$. Damit ist nach Satz (1.44) bewiesen, dass unsere obige Konstruktion die gesuchten Punkte erzeugt.

2.3 Weitere Beispiele

(2.8) Aufgabe. Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$. Man konstruiere eine Ebene ε , die AB halbiert und senkrecht auf g_{CD} steht.

Da der Mittelpunkt M von AB eindeutig bestimmt ist, existiert nach (1.38) die zu konstruierende Ebene ε eindeutig. Die Konstruktion bereitet keine Schwierigkeiten. Wie in (2.7) konstruieren wir eine zu G_{AB} parallele Ebene η , die durch g_{cd} geht. Entsprechend (2.6) konstruieren wir das Lot von M auf η ; der Fußpunkt des Lotes sei M' (Abb. 33a). Durch M' konstruieren wir in η eine Senkrechte s zu g_{CD} . Die Ebene ε_{sM} ist dann wegen (1.40a) und (1.39) senkrecht zu g_{CD} , also die gesuchte Ebene.



Damit haben wir die Aufgabe gelöst, und wie es in der Absicht solcher Aufgaben liegt, uns eine Vorstellung von der Lage dieser Ebene im Raum verschafft. Sollten wir nun allerdings auf dieser Vorstellung aufbauend, z.B. beweisen, dass die sechs Ebenen dieser Art sich in genau einem Punkt schneiden, so würde sie wohl dazu kaum ausreichen. Weitaus einsichtigere Vorstellungen erzeugt die folgende Konstruktion.

Wir greifen das Ergebnis der Aufgabe (1.17) auf und konstruieren (wie in (2.7)) zu jedem Paar windschiefer Tetraederkanten das Paar paralleler Ebenen. Die Schnitte dieser Ebenen ergeben die Kanten eines Parallelepipeds $B_1DA_1CAC_1BD_1$ (vgl. Abb. 33b). $g_{D_1C_1}$ halbiert AB in M .

Jetzt konstruieren wir eine Ebene ε' , die in M auf $g_{C_1D_1}$ senkrecht steht. Wegen $g_{CD} \parallel g_{D_1C_1}$ folgt aus (1.40a), dass ε' auch senkrecht zu g_{CD} ist, d.h., ε' ist identisch mit der obigen Ebene ε .

Auf diese Art haben wir aber die zusätzliche Erkenntnis gewonnen, dass in ε alle diejenigen Punkte liegen, die von C_1 und D_1 gleichen Abstand haben. Konstruieren wir nun, ausgehend von A_1C_1 und B_1C_1 zwei weitere Ebenen dieser Art, so haben die drei so konstruierten Ebenen nach Satz (1.14) genau einen gemeinsamen Punkt P . Dieser hat dann von A_1 , B_1 , C_1 und D_1 den gleichen Abstand.

Wir können also um P mit $r = |A_1P|$ eine Kugel konstruieren (Umkugel des Tetraeders $A_1B_1C_1D_1$). Die restlichen drei Ebenen, die durch die Mittelpunkte von A_1D_1 bzw. A_1B_1 bzw. B_1D_1 gehen und auf diesen Strecken senkrecht stehen, müssen aber ebenfalls P enthalten. Damit schneiden sich alle Ebenen in P .

Dieses Beispiel zeigt wieder, dass nicht nur das Auffinden irgendeiner Lösung wichtig ist, sondern gerade die Lösungsvarianten interessant sind.

(2.9) Aufgabe. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Man konstruiere dazu ein Tetraeder, dessen vier Seitenflächen zum Dreieck ABC kongruent sind.

Wir analysieren zunächst, welche Bedingungen zur Lösung notwendig sind. Dazu sei

$ABCD$ ein Tetraeder, dessen Seitenflächen zum Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$ und $c = |AB|$ kongruent sind.

Dann gilt notwendig $|AD| = a$, $|BD| = b$ und $|CD| = c$ (Abb. 34a), da sich aus den weiteren zunächst möglichen Annahmen $|AD| = b$ oder $|AD| = c$ ein Widerspruch ergibt.

Die Kugeln $K(A, a)$ und $K(B, b)$ schneiden sich, da a, b, c die Dreiecksungleichung erfüllen, in einem Kreis K_c , der in einer zu g_{AB} senkrechten Ebene η liegt und dessen Mittelpunkt auf g_{AB} liegt (vgl. Satz (1.50)).

Dieser Kreis K_c schneidet die Halbebene von ε_{ABC} bezüglich g_{AB} , in der C liegt, in einem Punkt C_1 (vgl. Abb. 34b und c).

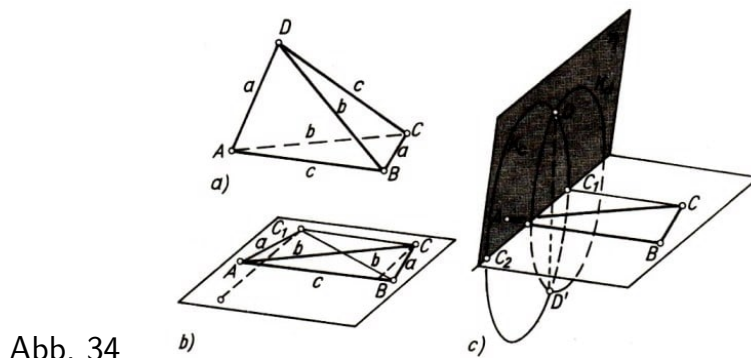


Abb. 34

Wegen $|C_1, A| = a$ und $|C_1, B| = b$ ist $ABCC_1$ ein (gegebenenfalls überschlagenes) Trapez mit $g_{AB} \parallel g_{CC_1}$. Folglich ist C_1 der Fußpunkt des Lotes von C auf die Ebene η , in der der Kreis K_c liegt. Da D nicht in der Ebene ε_{ABC} enthalten ist, gilt $D \neq C_1$. Nach Satz (1.49) schneidet dann die Kugel $K(C, c)$ die Ebene η in einem Kreis K_d , dessen Mittelpunkt C_1 ist. Der Punkt D ist gemeinsamer Punkt der Kreise K_c und K_d .

Demnach muss sich eine Lösung, falls sie existiert, durch folgende einfache Konstruktion ergeben:

1. Wir konstruieren den Schnittkreis K_c der Kugeln $K(A, a)$ und $K(B, b)$ und die Ebene η , die den Kreis K_c enthält.
2. Wir konstruieren den Schnittkreis K_d der Kugel $K(C, c)$ mit der Ebene η .
3. Wir konstruieren einen Schnittpunkt D der Kreise K_c und K_d in der Ebene η .

Zum Beweis genügt zu bemerken, dass nach Konstruktion $|DA| = a$, $|DB| = b$ und $|DC| = c$ ist und damit die Dreiecke BAD , DCB und CDA zu dem Dreieck ABC kongruent sind.

Zur Vollständigkeit der Lösung bleibt schließlich zu klären, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung bestehen und wie viele (bis auf Kongruenz) verschiedene Lösungen möglich sind. Dieser Teil der Lösung einer Konstruktionsaufgabe wird in der Literatur häufig als Determination bezeichnet.

Aus den in der Analyse gegebenen notwendigen Bedingungen folgt $|C_1C| < c$. Dann müssen aber im gleichschenkligen Trapez $ABCD$, die Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ spitze Winkel sein. Aus analogen Gründen trifft das auch für $\angle BCA$ zu, so dass die Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC eine notwendige Bedingung für die Existenz einer

Lösung ist.

Sie ist auch hinreichend. Wir betrachten dazu unsere einzelnen Konstruktionsschritte und prüfen deren Realisierbarkeit.

Die Konstruktion von K , ist stets (und in eindeutiger Weise) möglich, da a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind. Die Existenz (und Eindeutigkeit) von K_d im zweiten Konstruktionsschritt ist dadurch gegeben, dass die Innenwinkel bei A und B des Dreiecks ABC spitz sind und damit $|C_1C| < c$ ist.

Schließlich folgt aus der Spitzwinkligkeit von $\angle BCA$, dass C außerhalb des Kreises in ε_{ABC} mit dem Durchmesser AB ist und somit $|CC_2| > |AB| = c$ gilt. Der Radius von K_d ist dann kleiner als $|C_1C_2|$, und deshalb schneiden sich (entsprechend dem dritten Konstruktionsschritt) die Kreise K_c und K_d in zwei (bezüglich $g_{C_1C_2}$ symmetrisch liegenden) Punkten D und D' .

Damit ist gezeigt, dass die Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC für die Existenz einer Lösung auch hinreichend ist.

Da D und D' bei der Spiegelung an der Ebene ε_{ABC} ineinander übergehen, gibt es bis auf Kongruenz genau eine Lösung.

(2.10) Aufgabe. Zu vorgegebener Länge a und Einheitslänge 1 konstruiere man ein Tetraeder, für das 1, a , a die Längen der Kanten einer Seitenfläche und 1, 1, a die Längen der diesen Kanten gegenüberliegenden Tetraederkanten sind.

(2.11) Aufgabe. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Man konstruiere alle Punkte P des Raumes, die nicht in der Ebene ε_{ABC} liegen und für die $g_{PA} \perp g_{PB}$, $g_{PB} \perp g_{PC}$ und $g_{PC} \perp g_{PA}$ ist.

(Ist die Spitzwinkligkeit des Dreiecks dazu notwendig?)

3 Analogiebetrachtungen

Man muss vom Alten lernen,
Neues zu machen.
B. Brecht

3.1 Was wir unter einer Analogie verstehen wollen

Analogie - das ist ein häufiges, in unterschiedlichen Zusammenhängen gebrauchtes Fremdwort. In der deutschen Sprache könnte man dafür etwa "Ähnlichkeit" setzen.

Mit "Ähnlichkeit" ist aber nicht der geometrische Begriff gemeint, sondern eine Übereinstimmung von zwei verschiedenen Aussagen oder Strukturen in gewissen wesentlichen Teilen. Was dabei die "gewissen wesentlichen Teile" sind, hängt allerdings stark vom Betrachter ab.

Wir haben bereits in den vorangegangenen Kapiteln auf "Ähnlichkeiten" zwischen Sachverhalten der ebenen und räumlichen Geometrie hingewiesen, insbesondere kann man sich von Begriffserklärungen der ebenen Geometrie anregen lassen, "ähnliche" für den Raum einzuführen, wie das in den Abschnitten 1.3 bis 1.5 und 2.1 geschehen ist.

Außer diesen Möglichkeiten gilt es, eine Fülle anderer "Ähnlichkeiten" zu finden und vor allem auch nutzbar zu machen. Dass dabei der Begriff "analog" unscharf ist, d.h. gar nicht streng festliegt, welche Sachverhalte "analog" sind, ist kein Nachteil, sondern macht den eigentlichen Reiz der Anwendung aus. Wir beginnen mit einfachen Beispielen.

Es gibt Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen:

(3.1) In der Ebene gilt: Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, dann haben sie genau einen Punkt gemeinsam.

(3.1') Im Raum gilt: Wenn zwei Ebenen nicht parallel sind, dann haben sie genau eine Gerade gemeinsam (vgl. (1.5)).

Ersetzt man in (3.1) "Ebene" durch "Raum" und "Gerade" durch "Ebene" und "Punkt" durch "Gerade", so erhält man (3.1').

Die Aussagen (3.1) und (3.1') nennen wir zueinander analog, (Ebene, Raum), (Gerade, Ebene) und (Punkt, Gerade) Paare analoger Begriffe.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

(3.2) In der Ebene existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Nach obigem Ersetzungsprinzip würde sich folgende richtige Aussage ergeben:

Im Raum existieren drei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Es wäre aber auch sinnvoll, eine zu (3.2) analoge Aussage wie folgt zu bilden:

(3.2') Im Raum existieren vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Aus der Analogie von (3.2) und (3.2') würde sich (Dreieck, Tetraeder) als weiteres Paar analoger Begriffe anbieten.

Wählen wir noch eine Definition als Beispiel:

(3.3) Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt (dieser Ebene) den gleichen Abstand haben.

Ersetzt man in (3.3) "Ebene" durch "Raum" und "Punkt" durch "Gerade" (und natürlich "Kreis" durch ein neues Wort), so entsteht zwar wiederum eine Definition, von deren Nützlichkeit wir uns aber erst noch zu überzeugen hätten.

Ersetzt man in (3.3) dagegen nur "Ebene" durch "Raum" und "Kreis" durch "Kugel", so entsteht gerade eine uns bereits bekannte Definition; daher erscheint es uns sinnvoll, (Kreis, Kugel) als ein weiteres Paar analoger Begriffe anzusehen.

Damit ist auch an Beispielen gezeigt, dass der Analogiebegriff kein strenger Begriff ist, dass es z.B. keinen Formalismus gibt, der es ermöglicht, zu einer gegebenen Formulierung die analoge zu konstruieren.

Trotzdem kann die Analogiemethode von großem methodischem Wert sein. Wir können sie etwa benutzen, um zu einer Aufgabe der ebenen Geometrie eine analoge der räumlichen Geometrie aufzufinden bzw. umgekehrt uns beim Lösen einer schwierigen räumlichen Aufgabe die Problemstellung zunächst am analogen (einfacheren!) ebenen Problem deutlich zu machen, d.h., Lösungsmöglichkeiten aufzudecken.

Wir betrachten ein erstes Beispiel:

(3.4) Aufgabe. In einer Ebene sind drei Punkte A , B , C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden (in dieser Ebene) gibt es, so dass die drei Punkte A , B , C jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?

Da es keinen Formalismus zur Erzeugung eines analogen räumlichen Sachverhaltes gibt, müssen wir selbst entscheiden, welche der formal möglichen analogen Formulierungen wir auswählen. Unter Beachtung von (3.2) und (3.2') wählen wir:

(3.4') Aufgabe. Im Raum sind vier Punkte A , B , C , D gegeben, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so dass die vier Punkte A , B , C , D jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?

Es ist nun zu erwarten, dass sich die Analogie nicht nur auf die Aufgabenstellung, sondern auch auf die Lösung bezieht; sagen wir besser, dass es Lösungen gibt, die als zueinander analog zu betrachten sind.

Wir lösen jetzt die Aufgabe (3.4) und gehen dabei zunächst davon aus, dass es eine Gerade g mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Auf dieser kann keiner der Punkte A , B , C liegen, sonst müssten sie entgegen der Voraussetzung alle auf einer Geraden (nämlich auf g) liegen. Wir können nun folgende vollständige Fallunterscheidung vornehmen:

Fall 1: A , B , C liegen in ein und derselben Halbebene bezüglich g . Dann müssten A ,

B und C auf einer zu g parallelen Geraden liegen; dies widerspricht der Voraussetzung.

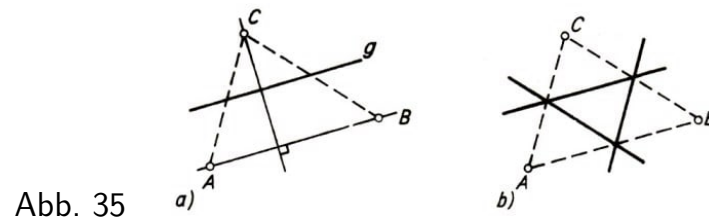


Abb. 35

Fall 2: Genau einer der drei Punkte wird durch g von den übrigen getrennt; o.B.d.A. treffe das für C zu. Auf Grund der Voraussetzung in (3.4) muss nun g parallel zu der Geraden g_{AB} sein und das Lot von C auf g_{AB} halbieren (Abb. 35a). Damit ist g eindeutig bestimmt.

Umgekehrt besitzt eine derartige Gerade offensichtlich die in (3.4) genannten Eigenschaften.

Da jeder der drei Punkte auf diese Weise durch eine Gerade von den beiden anderen separiert werden kann, gibt es genau drei Geraden mit der gewünschten Eigenschaft (Abb. 35b).

Wir lösen die Aufgabe (3.4'), indem wir die von uns zur Formulierung der Aufgabe verwendete Analogie berücksichtigen. Eine Ebene ε mit den gewünschten Eigenschaften kann auch hier durch keinen der vorgegebenen Punkte gehen.

Fall 1: A, B, C, D liegen in ein und demselben Halbraum bezüglich ε . Dann liegen diese Punkte auf einer zu ε parallelen Ebene; dies widerspricht jedoch der Voraussetzung von (3.4').

Fall 2: Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen getrennt; o.B.d.A. treffe das für D zu. Dann muss ε parallel zu der Ebene ε_{ABC} sein und das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren (vgl. Abb. 36 a). Eine solche Ebene ε ist damit eindeutig bestimmt. Da jeder der vier Punkte separiert werden kann, gibt es bezüglich des zweiten Falles genau vier Ebenen der verlangten Art.

Man erkennt, dass wir bis zu dieser Stelle die Lösung von der zu (3.4) mit den entsprechenden Ersetzungen abgeschrieben haben. In vielen Büchern sparen sich die Autoren berechtigt solche Ausführungen und würden etwa schreiben, dass die Lösung analog zu der des ebenen Problems erfolgt.

Einen wesentlichen Unterschied zur Aufgabe (3.4) gibt es allerdings. Unsere Fallunterscheidung ist noch nicht vollständig!

Fall 3: In jedem Halbraum bezüglich ε liegen genau zwei der vier Punkte; O.B.d.A. mögen die Punkte A und B einem Halbraum gemeinsam angehören.

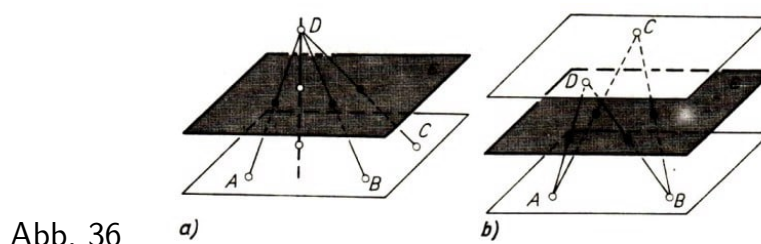


Abb. 36

Die Geraden g_{AB} und g_{CD} sind zueinander windschief, da sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden (vgl. Abschnitt 1.1). Zu zwei windschiefen Geraden existiert nach Satz (1.16) genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch g_{AB} und g_{CD} . Zu diesen beiden Ebenen existiert genau eine parallele Ebene ε , die von beiden Ebenen (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat (vgl. Abb. 36b).

Da es genau drei Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Halbräume aufzuteilen, haben wir im dritten Fall genau drei Ebenen der gesuchten Art. (Diese sind offensichtlich auch voneinander verschieden.)

Die Antwort auf (3.4') lautet also: Es gibt sieben verschiedene Ebenen der gesuchten Art.

3.2 Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen

Der echte Schüler lernt aus dem Bekannten
das Unbekannte entwickeln.
J. W. v. Goethe

Wie schon erwähnt - und wohl mit Aufgabe (3.4) und (3.4') deutlich geworden ist -, kann man die Analogiemethode mitunter auch benutzen, um ein räumliches Problem zu lösen. Man formuliert ein analoges ebenes Problem, löst zunächst dieses, weil es vertrauter ist, und versucht danach die Lösungsschritte auf das ursprüngliche Problem zu übertragen. Wir betrachten die folgende Aufgabe als Beispiel:

(3.5) Aufgabe. Im Raum sind fünf Punkte gegeben, die weder in einer Ebene noch auf einer Kugel liegen. Wie viele verschiedene Ebenen oder Kugeln gibt es, so dass die fünf Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene oder Kugel haben?

Offensichtlich ist diese Aufgabe als Fortsetzung von Aufgabe (3.4') gedacht. Eine analoge Aufgabe in der Ebene zu formulieren fällt uns daher leicht:

(3.5') Aufgabe. In der Ebene sind vier Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden noch auf einem Kreis liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise gibt es, so dass die vier Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden oder einem solchen Kreis haben?

Zur Lösung von (3.5') bemerken wir zunächst, dass eine Gerade g oder ein Kreis K mit der angegebenen Eigenschaft die Ebene (ausschließlich der Geraden- bzw. Kreispunkte) vermöge der Halbebenen bzw. des Inneren und Äußeren des Kreises in zwei Teile T_1 und T_2 zerlegt.

Fall 1: Alle Punkte liegen in einer der Teilebenen. Dann müssen sie, da sie von der Geraden g oder dem Kreis K gleichen Abstand haben, auf einer (zu g parallelen) Geraden oder einem (zu K konzentrischen) Kreis liegen, ganz im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall 2: Genau einer der Punkte (etwa mit P bezeichnet) liege in T_1 ; die anderen drei

Punkte liegen dann in T_2 . Diese drei Punkte liegen sicher auf einer Geraden oder auf einem Kreis (dem Umkreis des Dreiecks; sein Mittelpunkt sei M).

Bei der ersten Lage existiert genau eine Gerade der gesuchten Art (vgl. die Lösung zu (3.4)). Liegen die drei Punkte auf einem Kreis K_1 , so existiert genau ein Kreis K der gesuchten Art. Dieser Kreis K muss zu K_1 konzentrisch sein und PQ halbieren, wobei Q der Schnittpunkt von g_{mp} mit K_1 ist (Abb. 37a). In diesem Fall gibt es also genau vier verschiedene Geraden oder Kreise. (Vgl. dazu die Lösung zu (3.4).)

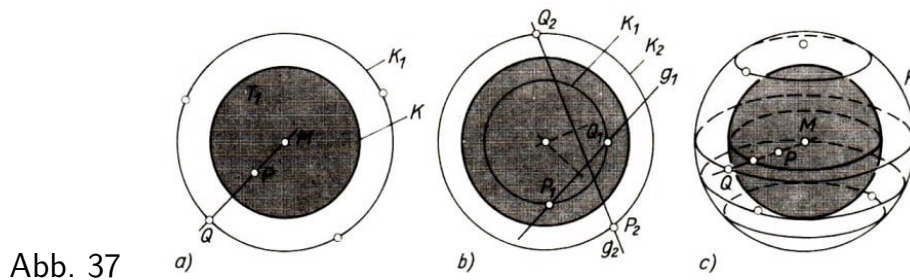


Abb. 37

Fall 3: Genau zwei der Punkte (etwa P_1, Q_1) liegen in T_1 ; die beiden anderen Punkte (P_2, Q_2) dann in T_2 . Wir betrachten die Verbindungsgeraden g_1, g_2 von P_1, Q_1 und P_2, Q_2 .

Gilt $g_1 \parallel g_2$, so existiert genau eine Gerade, die zu g_1 und g_2 parallel ist und von g_1 und g_2 (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat. (Vgl. die Lösung zu (3.4').)

Sind aber g_1 und g_2 nicht parallel, so existieren genau zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit $P_1, Q_1 \in K_1$ und $P_2, Q_2 \in K_2$. (Vgl. Abb. 37b; den Existenznachweis erbringt man leicht konstruktiv.)

Zu diesen zwei konzentrischen Kreisen gibt es genau einen dritten, der von K_1 und K_2 und damit von den vier Punkten gleichen Abstand hat. Wir erhalten also stets entweder genau eine Gerade oder genau einen Kreis der gewünschten Art. Da es genau drei Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Teilebenen zu verteilen, existieren im dritten Fall genau drei Geraden oder Kreise der gesuchten Art. (Vgl. die Lösung zu (3.4').)

Als Ergebnis der Aufgabe (3.5') erhalten wir demnach: Es gibt genau sieben verschiedene Geraden oder Kreise der gesuchten Art. Interessant ist, dass man allerdings nicht von vornherein angeben kann, wie viele davon Geraden und wie viele davon Kreise sind. Das hängt von der speziellen Lage der Punkte ab! (Der Leser betrachte dazu einmal verschiedene Fälle.)

Mit dieser Lösung haben wir praktisch auch die Lösung von (3.5). Der Leser kann sie "völlig analog" zu (3.5') selbst durchführen. (Man betrachte dazu auch die zu Abb. 37a analoge Abb. 37 c.) Im Unterschied zu den Aufgaben (3.4), (3.4') entsteht für das räumliche Problem sogar kein weiterer Fall!

Wir hoffen, dass nach diesen Demonstrationsbeispielen der Leser die folgenden Aufgaben bei einigen Hinweisen auch selbst lösen kann:

(3.6) Aufgabe. Gegeben seien ein regelmäßiges Tetraeder und ein Punkt P im Innern

des Tetraeders. u, v, x und y seien die Abstände des Punktes P von den vier Tetraederflächen, und h sei die Höhe des Tetraeders. Man beweise dass $u + v + x + y = h$ gilt.

(3.7) Aufgabe. Welche Lage muss ein Quader zu einer gegebenen Ebene ε einnehmen, damit die Fläche seiner senkrechten Parallelprojektion auf ε möglichst groß ist?

Dass man bei der Lösung von (3.6) das Paar (Dreieck, Tetraeder) als Paar analoger Begriffe heranzieht, ist zu erwarten. Die analoge ebene Aufgabe (3.6') ist leicht formuliert und auch schnell bewiesen, wenn man das Dreieck mittels P in Teildreiecke zerlegt und die Formel für den Flächeninhalt benutzt.

Erinnern wir uns an (Gerade, Ebene) als Paar analoger Begriffe, so wäre als Vorbetrachtung in der Ebene zur Lösung von (3.7) zunächst die Projektion eines Rechtecks auf eine Gerade g zu betrachten. Dabei wird die Projektion offensichtlich am größten, wenn eine Diagonale des Rechtecks parallel zu g verläuft. Welche durch drei(!) Eckpunkte des Quaders bestimmte Ebene wird also wohl parallel zu ε liegen?

In den bisherigen Beispielen waren solche Lösungen für das ebene Problem ausgewählt, die leicht auf ein räumliches übertragen werden konnten. Das braucht natürlich nicht für jede Lösung der Fall zu sein.

Als Klausuraufgabe der VIII. IMO wurde unter anderem die folgende Aufgabe gestellt:

(3.8) Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt der einem regelmäßigen Tetraeder umbeschriebenen Kugel und den vier Eckpunkten des Tetraeders kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt des Raumes und den Eckpunkten des Tetraeders.

Dazu finden wir leicht:

(3.8') Aufgabe. Es ist zu beweisen, dass die Summe der Abstände zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks und den drei Eckpunkten des Dreiecks kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen jedem anderen Punkt der Ebene und den Eckpunkten des Dreiecks.

Für (3.8') gibt es nun verschiedene schöne Beweise, wir führen zwei an.

1. Beweis. Das Dreieck sei ABC , und P sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Wir drehen das Dreieck APC um 60° um den Punkt A (vgl. Abb. 38a).

Diese Drehung führt P in P' und C in C' über. Dabei gilt $|PC| = |P'C'|$, und wegen der Gleichseitigkeit des Dreiecks APP' gilt auch $|AP| = |PP'|$. Damit ist die Summe der Abstände des Punktes P von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich der Länge des Streckenzuges $BPP'C'$.

Da C' unabhängig von der Lage von P fest ist, ist die Länge des Streckenzuges genau dann minimal, wenn P und P' auf der Strecke BC' liegen. Daraus folgt dann leicht die Behauptung.

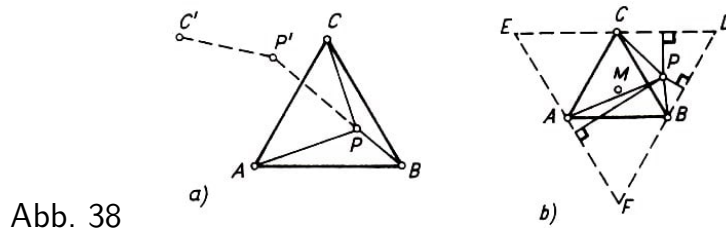


Abb. 38

2. Beweis. Durch die Eckpunkte A , B und C lege man Geraden, die zu der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Dreiecksseite parallel verlaufen.

Es entsteht ein zweites gleichseitiges Dreieck DEF (vgl. Abb. 38b). Für den Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC sind MA , MB und MC Lote auf die Seiten des Dreiecks DEF , und mit (3.6') gilt $|MA| + |MB| + |MC| = h$, wobei h die Höhe des gleichseitigen Dreiecks DEF ist.

Ist nun P ein von M verschiedener Punkt, so bleibt zwar die Summe seiner Abstände von den Seiten des Dreiecks DEF gleich h , aber die Entfernung von mindestens einem der Eckpunkte des Dreiecks ABC wird größer als der Abstand von der Seite des Dreiecks DEF , auf der dieser Eckpunkt liegt. Damit wird für jeden von M verschiedenen Punkt die Abstands- summe größer als h .

So elegant beide Beweise sind, es dürfte schwerfallen, den ersten auf (3.8) zu übertragen. Die Übertragung des zweiten Beweises ist aber mit (3.6) nur noch eine Formsache. Dieses Beispiel zeigt auch, wie wichtig es sein kann, für ein Problem mehrere Lösungswege zu kennen.

Man löse die folgende Aufgabe der XIV. IMO:

(3.9) Aufgabe. Es seien vier voneinander verschiedene parallele Ebenen gegeben. Man zeige, dass ein regelmäßiges Tetraeder existiert, welches in jeder der gegebenen Ebenen einen Eckpunkt hat.

Dass die Analogiemethode nützlich ist, um statt des räumlichen Problems zunächst eines im vertrauteren Milieu der Ebene zu untersuchen, haben wir mit unseren Beispielen wohl hinreichend belegt. Es wäre aber falsch, die Analogiemethode nur in dieser Richtung anzuwenden.

Man denke nur daran, dass der Satz von Desargues (vgl. Abschnitt 1.1) im Raum viel leichter zu beweisen ist als in der Ebene (wozu man sogar noch weitere Voraussetzungen braucht), oder man betrachte das folgende Beispiel:

(3.10) Aufgabe. In einer Ebene seien drei Kreise so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch die gemeinsamen Sehnen zweier Kreise bestimmt sind, in genau einem Punkt schneiden (Abb. 39a).

Wir formulieren ein dazu analoges räumliches Problem, indem wir die Paare (Kreis, Kugel), (Punkt, Gerade) und (Gerade, Ebene) berücksichtigen.

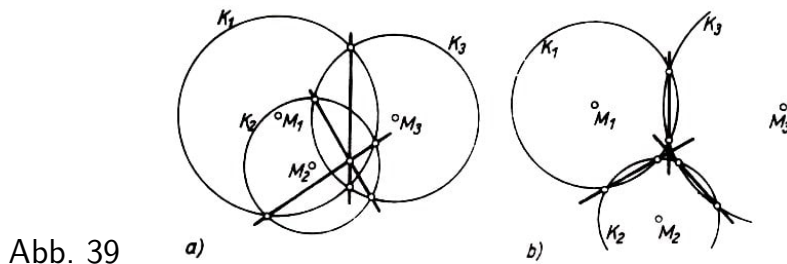


Abb. 39

(3.10') Aufgabe. Im Raum seien drei Kugeln so gegeben, dass sie einen inneren Punkt gemeinsam besitzen und ihre Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es ist zu zeigen, dass sich die drei Ebenen, die jeweils durch die Schnitkreise zweier Kugeln bestimmt sind, in genau einer Geraden schneiden.

Durch die Mittelpunkte der drei Kugeln K_1, K_2, K_3 ist genau eine Ebene ε bestimmt. Die Kugeln besitzen einen gemeinsamen inneren Punkt.

Folglich schneiden sich K_1 und K_2 und dieser Schnittkreis schneidet K_3 in genau zwei Punkten P und Q . Da P und Q zu jeder der drei Kugeln gehören, muss g_{PQ} in jeder Ebene, die jeweils durch einen Schnittkreis bestimmt ist, liegen. Die drei Ebenen schneiden sich also in g_{PQ} . Da die Gesamtkonfiguration symmetrisch bezüglich der Ebene ε ist, gilt $g_{PQ} \perp \varepsilon$.

Damit ist (3.10') gelöst, und (3.10)? Man schaue nur richtig hin, d.h. senkrecht auf die Ebene ε . Die senkrechte Projektion der räumlichen Anordnung von (3.10') auf die Ebene ε ergibt gerade die Behauptung aus (3.10).

Ergänzend stellt sich noch die folgende Aufgabe.

(3.10*) Aufgabe. Gelten die Behauptungen in (3.10') und (3.10) auch noch, wenn man anstelle eines gemeinsamen inneren Punktes von K_1, K_2, K_3 schwächer nur fordert, dass sich K_1, K_2, K_3 paarweise schneiden? (Vgl. dazu Abb. 39 b.).

Die bisherigen Beispiele dürfen natürlich nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Auffinden des geeigneten analogen Problems mitunter viel Mühe bereiten kann, dass das formal konstruierte analoge Problem gar nicht immer lösbar sein muss und dass schließlich, wenn eine Lösung für das analoge Problem gefunden ist, diese - wie mit Aufgabe (3.8) angedeutet - nicht unbedingt analog auf das ursprüngliche zu übertragen ist.

3.3 Wir finden neue Probleme

An jeder Sache etwas zu sehen suchen,
was noch niemand gesehen und
woran noch niemand gedacht hat.
G. Chr. Lichtenberg

Sicherlich wird es noch sehr viel mehr zueinander analoge Probleme der ebenen und räumlichen Geometrie geben. Gehen wir auf die Suche!

Ausgangspunkt soll das Paar (Dreieck, Tetraeder) sein. Von der ebenen Geometrie kennen wir etwa die Satzgruppe über Ecktransversalen im Dreieck.

Wir wählen als Satz:

(3.11) Satz. Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt und teilen sich innen im Verhältnis 2:1.

Ersetzen wir "Seite des Dreiecks" durch "Fläche des Tetraeders", so ergibt sich die Frage, was wohl "Flächenmitte" in Analogie zur "Seitenmitte" sein soll.

Betrachten wir den Mittelpunkt einer Seite als den Punkt, der die Seite in zwei gleich lange Strecken teilt, so wäre das analoge Objekt eine Gerade, die die Fläche in zwei gleich große Teile zerlegt. So wie die Seitenhalbierende von einem Eckpunkt ausgeht, müsste dann unsere "flächenhalbierende" Ebene von einer Kante ausgehen.

Zu jeder Tetraederfläche gibt es aber drei solche Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden. In Abb. 40 wählten wir als zu halbierende Fläche die Dreiecksfläche BCD . Die drei möglichen Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die durch A und S - den Schwerpunkt des Dreiecks BCD - geht. Wir nennen eine solche Gerade Schwerlinie. Jetzt zeichnet sich ein neues Problem ab:

(3.11') Aufgabe. Man beweise, dass sich die vier Schwerlinien eines Tetraeders in genau einem Punkt schneiden. Existiert in diesem Fall ein festes Teilungsverhältnis analog zum ebenen Problem?

Nicht so bekannt wie (3.11) ist der folgende Satz.

(3.12) Satz. Ist R der Umkreis- und r der Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks, so gilt $R \geq 2r$.

Sucht man nach einer eleganten Lösung von (3.12) und des analogen räumlichen Problem, so kann man bei den beiden vorangegangenen eine Anregung suchen!

(3.12') Aufgabe. Man formuliere und beweise das zum Satz (3.12) analoge räumliche Problem.

In der Natur unseres unscharfen Analogiebegriffes liegt es, dass man, ausgehend von einem ebenen Problem, verschiedene räumliche Analogien vermuten kann. Das zeigt das folgende Beispiel. Wir gehen von einem bekannten Satz der ebenen Geometrie aus.

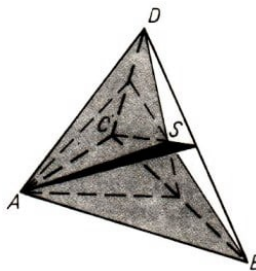


Abb. 40

(3.13) Satz. In jedem Parallelogramm gilt, dass die Summe der Quadrate aller Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Diagonalenlängen ist.

So wie in der Ebene ein Parallelogramm als Schnitt von zwei Paaren paralleler Geraden entsteht, entsteht im Raum als Schnitt von drei Paaren paralleler Ebenen ein Parallelepipiped $ABCDEFGH$. Die Ecken je zweier Raumdiagonalen des Parallelepipeds bilden

ein Parallelogramm, auf welches (3.13) anwendbar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |BH|^2 + |DF|^2 &= 2|DB|^2 + 2|BF|^2 \\ |AG|^2 + |CE|^2 &= 2|AC|^2 + 2|CG|^2 \end{aligned}$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt

$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2 = 2(|DB|^2 + |AC|^2) + 2|BF|^2 + 2|CG|^2$$

und die nochmalige Anwendung des Satzes (3.13) auf das Parallelogramm $ABCD$

$$|AG|^2 + |BH|^2 + |CE|^2 + |DF|^2 = 4|AB|^2 + 4|BC|^2 + 4|BF|^2$$

d.h., in jedem Parallelepiped ist die Summe der Quadrate aller Kantenlängen gleich der Summe der Quadrate aller Raumdiagonalenlängen.

Lässt man seiner Phantasie etwas mehr Lauf, so kann man ein Parallelogramm mit den eingezeichneten Diagonalen (allerdings auch jedes nichtspezielle Viereck einschließlich seiner Diagonalen) als Projektion eines Tetraeders auffassen und sich die Frage stellen, ob zwischen den Quadraten der Kantenlängen des Tetraeders auch eine allgemeingültige Beziehung besteht. Tatsächlich gilt

(3.13') Aufgabe. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate zweier windschiefer Kanten kleiner als die Summe der Quadrate aller anderen Tetraederkantenlängen.

Dass diese Analogie nicht an den Haaren herbeigezogen ist, lässt sich vielleicht damit belegen, dass (3.13) beim Beweis eine wesentliche Rolle spielen kann.

Ein Spezialfall von (3.13) ist der Satz des Pythagoras, aus dem sich entsprechende, aber auch neue analoge Sätze ableiten lassen.¹⁵

3.4 Doch Vorsicht ist geboten!

In zweifelhaften Fällen entscheide
man sich für das Richtige.
K. Kraus

Natürlich wollen wir mit unseren vielen Beispielen vom Nutzen der Analogiemethode überzeugen. Andererseits darf sie nicht überschätzt werden, und schon gar nicht wollen wir zu voreiligen Analogieschlüssen verleiten.

In jedem Dreieck schneiden sich die Höhen in genau einem Punkt, im Tetraeder dagegen muss das nicht der Fall sein. Die hier angebrachte Analogie wäre die durch (1.46) ausgedrückte! Und wem dieses Beispiel zu offensichtlich ist, den erinnern wir an Aufgabe (3.8) und (3.8').

Während sich für (3.8') die angegebenen Beweise auch auf beliebige spitzwinklige Dreiecke übertragen lassen, gilt das für (3.8), bezogen auf beliebige Tetraeder, nicht.

¹⁵Vgl. G. Polya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd. 1, Basel-Stuttgart 1966, S. 63ff.

Für das ebene Problem lässt sich dieser Minimalitätspunkt stets konstruieren, für ein beliebiges Tetraeder existiert zwar auch ein solcher Punkt, der sich aber im Sinne des Kapitels 2 im allgemeinen nicht konstruieren lässt.

Weiterer Überzeugungskraft wird es wohl nicht bedürfen, um zu zeigen, dass nicht jedes zu einem ebenen Problem vermutete räumliche Analogon wahr sein muss.

Kräftiger muss man vielleicht vor dem Fehlschluss warnen, dass Probleme, die in der Ebene nicht lösbar sind, im Raum "erst recht" unlösbar bleiben. Dazu ein Beispiel.

(3.14) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel mit der Kantenlänge n und eine beliebige Anzahl von Körpern K , die sich - wie in Abb. 41a dargestellt - aus vier Würfeln der Kantenlänge 1 zusammensetzen. Der Würfel soll mit Körpern K vollständig ausgefüllt werden. Für welche natürlichen Zahlen n ist diese Aufgabe lösbar?

Da die Körper K aus vier kongruenten Würfeln zusammengesetzt sind, ist für ungerade n die Aufgabe nicht lösbar. Für gerade n gilt $n \geq 4$ wegen der Form der Körper K .

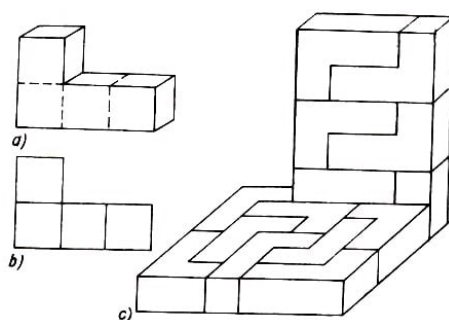


Abb. 41

Ist es nun möglich, ein $n \times n$ -Felder-Schachbrett mit Figuren der Form, wie sie in Abb. 41b dargestellt werden, auszulegen, so ist offensichtlich auch das räumliche Problem gelöst. Dies gelingt leicht für ein 4×4 -Felder-Schachbrett, und damit ist sowohl das ebene als auch das räumliche Problem für alle $n = 4k$ (k ist eine natürliche Zahl) gelöst.

(3.15) Aufgabe. Für ein 6×6 -Felder-Schachbrett ist das ebene Problem nicht lösbar.

Wie Abb. 41c zeigt, ist das räumliche analoge Problem sehr wohl lösbar. Damit ergibt sich dann leicht, dass (3.14) für alle geraden Zahlen n lösbar ist.

(3.16) Aufgabe. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines festen ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind. Man beweise: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind, und es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

4 Volumina

Palmström rechnet mit v. Korf zu Haus
den Kubikinhalt der Alpen aus
(denn er denkt die Alpen sich als einen
Würfel aus Touristen, Kühen und Steinen)
Chr. Morgenstern

4.1 Was ist der Rauminhalt?

Die Frage erscheint leicht, wenn nicht gar überflüssig. Täglich gehen wir mit materiellen Körpern um und sind es auch gewohnt, ihr Volumen zu berechnen oder abzuschätzen. Handelt es sich noch um "Hohlkörper", so lässt sich selbst bei komplizierten Formen das Volumen physikalisch durch das Ausfüllen mit einer Flüssigkeitsmenge und einem anschließenden Vergleich in einem genormten Gefäß ermitteln.

Ausgehend davon, scheint es uns einleuchtend, dass es sicherlich einen geeigneten Abstraktionsprozess gibt, auch den mathematischen Begriff Rauminhalt einer räumlichen Figur exakt zu erklären.

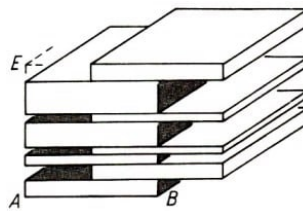


Abb. 42

Ähnlich dachten wohl auch die Mathematiker von Archimedes bis Gauß, ihnen ging es weniger darum, den Inhalt von Körpern zu definieren, als ihn zu berechnen.

Die Fragestellung hat sich jedoch als eine grundlegende mathematische Problemstellung erwiesen, mit der sich, Generationen von Mathematikern beschäftigt haben.

Folgendes einfaches Beispiel einer räumlichen Figur, auf das wir später nochmals kurz eingehen, soll die Schwierigkeiten etwas verdeutlichen.

Wir gehen aus von einem Würfel W mit der Kantenlänge 1 cm; dieser hat einen Rauminhalt von 1 cm^3 . Jetzt zerlegen wir diesen Würfel durch n Ebenen, die parallel zur Würfelfläche $ABCD$ liegen, in $n+1$ Teilkörper. Den zweiten, vierten und sechsten Teilkörper verschieben wir in der Richtung von \overrightarrow{AB} um 0,5 cm; wir erhalten dadurch etwa einen Körper W^* , wie er in Abb. 42 dargestellt ist.

Diesem Körper werden wir ohne Zögern wieder den Rauminhalt 1 cm^3 zuordnen, selbst dann, wenn n eine sehr große Zahl ist.

Im nächsten Schritt wollen wir aber statt der Teilkörper ebene Schnittflächen verschieben. Wir können uns dazu auf der Kante AE von A ausgehend sowohl alle rationalen als auch alle irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als Höhenzahlen über der Grundfläche $ABCD$ markiert denken. Genau die Ebenen, die AE in einem Punkt mit irrationaler Höhenzahl schneiden, verschieben wir wie oben; es entsteht eine Punktmenge W^{**} .

Kommt dieser wohlbestimmten räumlichen Punktmenge ein Rauminhalt zu? An einem solchen Beispiel wird sichtbar, dass zur Entscheidung dieser Frage eine exakte Definition notwendig ist. Es ist aber allein schon aus Platzgründen hier nicht möglich, eine eingehende Grundlegung des Begriffs Rauminhalt zu bieten.

(Den interessierten Leser verweisen wir unter anderem auf die "Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. V, Geometrie", Berlin 1971).

Hier können wir nur einige grundlegenden Eigenschaften des Rauminhalts hervorheben, die unser weiteres Arbeiten rechtfertigen, die aber auch zur Definition des Begriffs wesentlich sein können.

Überdies beschränken wir uns weitgehend im ganzen vierten Kapitel (wiederum aus Platzgründen) auf Polyeder, zunächst auf konvexe Polyeder.

Das Vorgehen lässt aber den Blick frei zur Einbeziehung weiterer räumlicher Figuren. Weiterhin setzen wir voraus, dass jeder ebenen einfachen n -Ecksfläche unter Zugrundelegung eines Einheitsquadrats eindeutig ein (Flächen-) Inhalt zugeordnet werden kann (etwa durch Zerlegung in Dreiecksflächen und die bekannte Dreiecksformel für den Inhalt).

Das Innere konvexer Polyeder ist identisch mit dem Durchschnitt endlich vieler Halbräume (vgl. Abschnitt 1.2), falls dieser Durchschnitt beschränkt ist und wenigstens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte enthält. In diesem Sinne ist das Tetraeder das einfachste konvexe Polyeder.

Wir beginnen damit, dass wir einem bestimmten Polyeder einen bestimmten Inhalt zuordnen. Im Zusammenhang mit den Forderungen nach Einheiten im Handel, in Physik und Technik wurde die Länge einer bestimmten Strecke als Längeneinheit festgelegt und Meter (m) genannt.

Entsprechend wird einem Würfel W_1 mit der Kantenlänge 1 m der Rauminhalt 1 m^3 zugeordnet. Dabei ist die Maßeinheit insbesondere für praktische Belange wesentlich, für rein mathematische Betrachtungen würde es auch ausreichen, mit den Maßzahlen zu arbeiten und dementsprechend einen Würfel als Einheitswürfel auszuzeichnen und ihm das Volumen] zuzuordnen.

Davon machen wir auch im folgenden Gebrauch. Wir gehen also von der Eigenschaft aus, eine Einheit für den Rauminhalt festlegen zu können. Diese Eigenschaft des Rauminhalts heißt Normiertheit.

Weiterhin verlangen wir, wiederum mit dem Blick auf praktische Anwendungen, dass der Rauminhalt eines konvexen Polyeders, das aus endlich vielen konvexen Polyedern besteht, die paarweise keinen inneren Punkt gemeinsam haben, gleich der Summe der Rauminhalte dieser Teilkörper ist. Diese Eigenschaft des Rauminhalts wird Additivität genannt.

Im weiteren heißt ein Polyeder P in Polyeder P_1, \dots, P_n zerlegt oder aus P_1, \dots, P_n zusammengesetzt, wenn $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ (im Sinne der Vereinigung von Punktmengen) und P_1, \dots, P_n paarweise keine inneren Punkte gemeinsam besitzen.

Als weitere Selbstverständlichkeit erscheint die Eigenschaft, dass kongruente Polyeder den gleichen Rauminhalt besitzen (Invarianz gegenüber Bewegungen).

Hat nun z.B. ein Quader Q die Maßzahlen a , b und c der Kantenlängen, wobei a , b und c natürliche Zahlen (größer Null) sind, so lässt sich Q in $a \cdot b \cdot c$ Würfel zerlegen, die zum Einheitswürfel kongruent sind, und wir können nach den bisherigen Eigenschaften dem Quader den Rauminhalt abc zuordnen.

Wie erhalten wir aber dann z.B. für ein Tetraeder das Volumen, das sich ja offensichtlich nicht aus Würfeln W_1 zusammensetzen lässt? Diese Problematik beginnt übrigens schon bei einem Quader, wenn eine der Zahlen a, b, c keine natürliche Zahl ist! Es gilt aber immer¹⁶

$$|a| \leq a < [a] + 1, \quad |b| \leq b < [b] + 1, \quad |c| \leq c < [c] + 1 \quad (4.1)$$

Daraus folgt zunächst einmal rein arithmetisch

$$V'_1 \leq V < V''_1 \quad \text{mit} \quad (4.2)$$

$$V'_1 = [a] \cdot [b] \cdot [c], \quad V = a \cdot b \cdot c, \quad V''_1 = ([a] + 1) \cdot ([b] + 1) \cdot ([c] + 1)$$

Geometrisch betrachtet, ist aber V'_1 das Volumen eines Quaders Q' , der sich in Einheitswürfel zerlegen lässt und ganz in dem Quader Q enthalten ist, und V''_1 das Volumen eines Quaders Q'' , der sich in Einheitswürfel zerlegen lässt und den Quader Q enthält.

Von dem Rauminhalt erwarten wir nun weiterhin die Eigenschaft der Monotonie, d.h., der Inhalt eines Polyeders P_1 ist größer als der Inhalt des Polyeders P_2 , wenn P_2 echt in P_1 enthalten ist ($P_1 \supset P_2$). Damit muss für das Volumen V_Q des Quaders Q (wobei die Existenz von V_Q nur anschaulich nicht in Frage steht)

$$V'_1 \leq V_Q < V''_1$$

gelten. Unterteilen wir jede Längeneinheit in zehn gleiche Teile, dann wird einerseits der Würfel W_1 in 1000 Würfel W_2 zerlegt, die wegen der Additivität alle das Volumen 10^{-3} haben. Andererseits existieren natürliche Zahlen n , p , r (kleiner als 10) derart, dass die Ungleichungen (4.1) wie folgt "verfeinert" werden können:

$$\begin{aligned} |a| \leq \frac{n}{10} \leq a < [a] + \frac{n+1}{10}, \quad |b| \leq \frac{p}{10} \leq b < [b] + \frac{p+1}{10} \\ |c| \leq \frac{r}{10} \leq c < [c] + \frac{r+1}{10} \end{aligned} \quad (4.1')$$

Durch entsprechende Produktbildung erhalten wir

$$V'_2 \leq V_Q < V''_2$$

wobei V'_2 das Gesamtvolumen von Würfeln der Art W_1 und W_2 ist, die alle in Q enthalten sind, und V''_2 das Volumen der Würfel, die in ihrer Gesamtheit Q umfassen. Damit gilt

$$V'_1 \leq V'_2 \leq V_Q < V''_2 \leq V''_1$$

¹⁶ $[a]$ bedeutet dabei wie üblich die größte ganze Zahl, die a nicht übertrifft.

Aus der arithmetisch offensichtlichen Verfeinerung von (4.1) durch (4.1)' folgt, dass $V_1' < V_2'$ oder $V_2'' < V_1''$ gilt. V_Q wird also durch V_2' und V_2'' genauer abgeschätzt. Das Verfahren solcher Verfeinerung kann nun fortgesetzt werden, dabei wird jede Kantenlänge a, b, c durch ein Intervall mit rationalen Intervallenden beliebig genau beschrieben und damit auch V_Q .

Die Verfeinerung kann man solange fortsetzen, bis die Differenz $V_i'' - V_i'$ eine beliebig klein gewählte positive Zahl unterschreitet. Das kann mit den mathematischen Begriffen Folge und Grenzwert genauer dargelegt werden.

Die Verfeinerung von a, b und c ergibt eine Folge $\{V_i'\}$ und eine Folge $\{V_i''\}$ von positiven rationalen Zahlen, für die $V_i'' - V_i'$ mit wachsendem i monoton gegen Null geht.

Der gemeinsame Grenzwert der Folgen $\{V_i'\}$ und $\{V_i''\}$ ist dann abc , und wegen $V_i' \leq V_Q < V_i''$ muss dieser Grenzwert auch V_Q sein. (Aus unseren Überlegungen ergibt sich überdies auch die Existenz des Rauminhalts V_Q von Q , nämlich durch die Existenz des gemeinsamen Grenzwertes der Folgen $\{V_i'\}$ und $\{V_i''\}$.)

Mit dem so gewonnenen Volumen für einen beliebigen Quader können wir zunächst jedem geraden dreiseitigen Prisma einen Rauminhalt zuordnen und damit schließlich jedem Tetraeder. Jedes Polyeder ist aber in Tetraeder zerlegbar, und damit ist wegen der Additivität jedem Polyeder ein Rauminhalt zugeordnet.

Für den ersten Schritt benutzen wir die Eigenschaft der Invarianz des Rauminhalts gegenüber Bewegungen.

Jedes gerade dreiseitige Prisma $ABCA'B'C'$ kann - wie in Abb. 43a dargestellt - zu einem Quader $ABDEA'B'D'E'$ ergänzt werden. Legt man dann durch $g_{CC'}$ eine zu BD parallele Ebene, so entstehen zwei Paare kongruenter Körper, die wegen der Invarianz volumengleich sind. Das Prisma besitzt demnach das Volumen

$$V_P = \frac{1}{2}V_Q = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BD| \cdot |AA'|$$

und dies kann gelesen werden als .

$$V_P = G \cdot h \quad (4.3)$$

wobei G der Flächeninhalt der Grundfläche und $h := |AA'|$ die Höhe des Prisma ist.

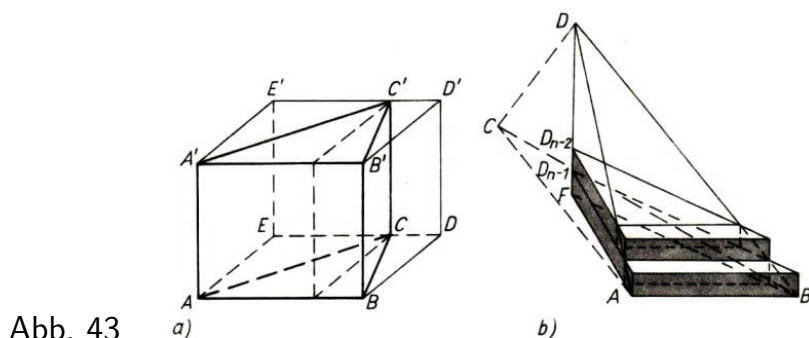


Abb. 43

Mit den Methoden der Infinitesimalrechnung, deren Verwendung wir bei der Herleitung des Quadvolumens genügend deutlich gemacht haben, kann das Volumen V_T eines Tetraeders ermittelt werden. Abb. 43b zeigt, wie dabei dreiseitige Prismen (mit der Volumenformel (4.3)) zugrunde gelegt werden können. Man erhält nach Rechnung

$$V_T = \frac{1}{3}G \cdot h \quad (4.4)$$

wobei G der Flächeninhalt einer Seitenfläche und h die zugehörige Höhe des Tetraeders ist.

Jede Pyramide $A_1A_2\dots A_nS$ mit einem einfachen n -Eck $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$) als Grundfläche und der Spitze S lässt sich in Tetraeder mit der gemeinsamen Ecke S zerlegen, indem man die Grundfläche in Dreiecke zerlegt.

Da der Flächeninhalt G der Grundfläche gleich der Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke ist und die Zerlegungstetraeder gleiche Höhe h besitzen, ergibt sich aus (4.4) auf Grund der Additivität für den Rauminhalt V der Pyramide die bekannte Volumenformel

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h \quad (4.5)$$

Man überlege bei der folgenden Aufgabe zunächst gut, welches eine günstige Wahl für die Grundfläche ist!

(4.6) Aufgabe. Gegeben seien ein Tetraeder $ABCD$ mit dem Volumen V und ein zweites $A'B'C'D$ mit dem Volumen V' so, dass $A' \in AD$, $B' \in BD$, $C' \in CD$ ist. Man beweise, dass

$$\frac{V}{V'} = \frac{|AD|}{|A'D|} \cdot \frac{|BD|}{|B'D|} \cdot \frac{|CD|}{|C'D|}$$

ist.

Wir haben in unseren bisherigen Ausführungen versucht, sichtbar zu machen, wie gewissen Körpern ein Rauminhalt zugeordnet werden kann, und haben dabei bestimmte Eigenschaften des Rauminhalts zugrunde gelegt. Das lässt sich über die von uns bisher behandelten Körper - nämlich alle (konvexen) Polyeder - hinaus erweitern.

Dagegen ist der im Text zu Abb. 42 vorgestellten räumlichen Figur kein Rauminhalt zuzuordnen, da der Grenzwert der Rauminhalte der Polyeder, die in der Figur enthalten sind, den Wert $\frac{1}{2}$, aber der untere Grenzwert für die Polyeder, die die Figur umfassen, den Wert $\frac{3}{2}$ besitzt.

Näher wollen wir hier nicht auf diese Grundlagenprobleme eingehen. Wir möchten aber noch an einem Beispiel zeigen, dass die oben verwendeten infinitesimalen Methoden auch zur Lösung von Aufgaben nützlich sind.

Der VII. IMO entnehmen wir folgende Aufgabe:

(4.7) Aufgabe. Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$. Die Kante AB habe die Länge a , die Kante CD die Länge b . Der Abstand der durch AB und CD bestimmten windschiefen Geraden sei d . Das Tetraeder werde durch eine zu den Gegenkanten AB und CD parallele Ebene ε in zwei Teile zerlegt.

Man berechne das Verhältnis der Rauminhalte beider Teile, wenn das Verhältnis k des Abstandes der Geraden g_{AB} von der Ebene ε und des Abstandes der Geraden g_{CD} von der Ebene ε bekannt ist.

Die Existenz der Ebene ε ergibt sich aus Satz (1.16), der Abstand d ist uns aus Satz (1.44) und Aufgabe (2.7) geläufig. Jede Zahl k lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch eine rationale Zahl $\frac{m_k}{n_k}$ annähern.

Nach dem Strahlensatz wird dann auch BC im Verhältnis $m_k : n_k$ geteilt, $s = m_k + n_k$ kann dann als eine Anzahl von gleichlangen Strecken betrachtet werden, in die BC unterteilt wird; s kann bei festem k beliebig groß gewählt werden, da $\frac{m_k}{n_k}$ entsprechend erweitert werden kann.

Durch jeden dieser $s - 1$ Teilungspunkte legen wir Ebenen ε' parallel zu s , die das Tetraeder wegen der Parallelität zu AB und CD in Parallelogrammen mit den Seitenlängen x und y schneiden (vgl. Abb. 44).

Teilt ε' die Strecke BC im Verhältnis $m : n$, so folgt aus dem Strahlensatz $x = \frac{a \cdot n}{s} m$ $y = \frac{b \cdot m}{s}$ mit x, y entsprechend Abb. 44.

Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms ist $c \cdot xy$, wobei c der Sinus eines Parallelogrammwinkels ist; c ist also für alle Ebenen ε' eine Konstante. Zu einem jedem Parallelogramm können wir nun ein vierseitiges Prisma mit der Höhe $\frac{d}{s}$ betrachten, so dass die Gesamtheit dieser Prismen einmal dem Tetraeder eingeschrieben ist, zum anderen das Tetraeder enthält. Wir beschränken uns hier auf die dem Tetraeder eingeschriebenen Prismen. Für deren Volumen V' gilt

$$V' = \sum_{m=1}^s c \cdot x \cdot y \cdot \frac{d}{s}$$

Mit $m + n = s$ und den obigen Ausdrücken für x und y folgt

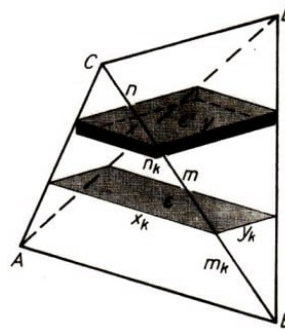


Abb. 44

$$V' = \sum_{m=1}^s cabd \frac{m(s-m)}{s^3} = \frac{cabd}{s^3} \sum_{m=1}^s (ms - m^2)$$

Für denjenigen unserer Teilkörper, der AB als Kante enthält, erhalten wir analog ein Volumen V'_k , nur ist der obere Summationsindex $m_x = \frac{ks}{1+k}$. Mit den Formeln

$$\sum_{m=1}^r m = \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^r m^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

erhalten wir

$$V' = \frac{cabd}{s^3} \left[\frac{s^2(s+1)}{2} - \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \right] = \frac{cabd}{6} \left[1 - \frac{1}{s^2} \right]$$

und

$$V'_k = \frac{cabd}{s^3} \left[\frac{1}{2} s \frac{sk}{1+k} \left(\frac{sk}{1+k} + 1 \right) - \frac{1}{6} \frac{sk}{1+k} \left(\frac{sk}{1+k} + 1 \right) \left(\frac{2sk}{1+k} + 1 \right) \right]$$

$$V'_k = \frac{cabd}{6} \cdot \frac{1}{(1+k)^3} \left[3k^2 + k^3 + \frac{3k + 3k^2}{s} - \frac{k + 2k^2 + k^3}{s^2} \right]$$

Da bei hinreichend großem s alle Brüche mit dem Nenner s bzw. s^3 beliebig klein werden, ergeben sich mit obigen Betrachtungen die Volumina für das gesamte Tetraeder und einen der Teilkörper zu

$$V = \frac{cabd}{6} \quad \text{bzw.} \quad V = \frac{cabd}{6} \cdot \frac{k^3(3+k)}{(1+k)^3}$$

Das gesuchte Verhältnis q ist dann¹⁷

$$V_k : (V - V_k) = \frac{k^2(3+k)}{(1+k)^3} : \left(1 - \frac{k^2(3+k)}{(1+k)^3} \right)$$

$$q = k^2 \frac{3+k}{(1+k)^3}$$

(4.8) Aufgabe. Wählt man auf zwei windschiefen Geraden g und h zwei Strecken $AB \subset g$ und $CD \subset h$ vorgegebener Länge a und b , so hat das Tetraeder stets denselben Inhalt, unabhängig von der Lage der Strecken auf den Geraden.

4.2 Zerlegen und Ergänzen

man muss mehr sehen als sich sagen lassen
G. Chr. Lichtenberg

Zerlegen und Ergänzen sind wichtige Methoden zur Bestimmung des Rauminhalts von Körpern. Wir beschränken uns hier - wie bereits gesagt - auf Polyeder.

Ziel ist es, die Aufgabenstellung möglichst auf eine Aufgabe über bekannte und einfache Körper zurückzuführen. Das Finden geeigneter Zerlegungen bzw. Ergänzungen ist gleichzeitig eine gute Schulung für das räumliche Vorstellungsvermögen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

¹⁷Der Lösungsweg zeigt, dass die Aufgabe selbstverständlich kürzer mittels der Integralrechnung gelöst werden kann.

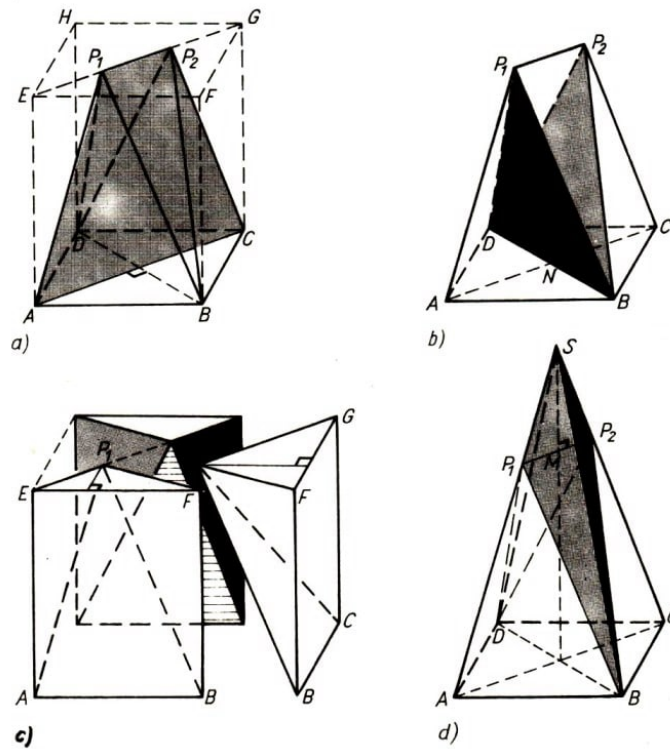


Abb. 45

(4.9) Aufgabe. Es sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ (Seitenlänge a) und der Höhe h . Dabei sollen die Punkte E, F, G bzw. H senkrecht über den Punkten A, B, C bzw. D liegen.

Die Flächendiagonale EG sei durch die Punkte P_1 und P_2 so geteilt, dass $|EP_1| = |P_1P_2| = |P_2G|$ ist. Es ist das Volumen V_0 des konvexen Polyeders $ABCDP_1P_2$ zu berechnen. (Dieser Körper hat die Kanten $P_1A, P_1B, P_1D, P_2B, P_2C, P_2D$ sowie AB, BC, CD, DA und P_1P_2 Abb. 45a.)

Eine naheliegende und einfache Lösung ergibt sich, indem wir den Körper längs der Kanten AP_1 und CP_2 durch einen ebenen Schnitt zerlegen (Abb. 45a). Dies ist möglich, da die Punkte P_1 und P_2 auf der zu AC parallelen Geraden g_{EG} liegen. Dabei zerfällt er in zwei kongruente und damit inhaltsgleiche Pyramiden mit gemeinsamer Grundfläche ACP_2P_1 .

Diese Fläche ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseitenlängen $a\sqrt{2}$ und $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$ und der Höhe h ; sie besitzt demnach den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \left(a\sqrt{2} + \frac{1}{3}a\sqrt{2} \right) \cdot h = \frac{2}{3}\sqrt{2}ah$$

Die Höhen der Pyramiden betragen $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, da BD senkrecht auf der Schnittebene durch A, C, G und E steht und durch AC halbiert wird. Also ist das gesuchte Volumen

$$V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}ah \right) \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{4}{9}a^2h$$

Eine weitere einfache Zerlegung erhält man mittels ebener Schnitte durch B, D, P_1 bzw. B, D, P_2 (vgl. Abb. 45b).

Wegen $P_1P_2 \parallel AC$ und $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{2}{3}|AN|$ verhalten sich die Höhen der Pyramiden¹⁸ BDP_1P_2 und BDP_1A wie 2:3, und damit ist

$$V(BDP_1P_2) = \frac{2}{3}V(BDP_1A)$$

Ferner sind die Pyramiden BDP_1A und $BDCP_2$ kongruent. Folglich gilt

$$V_0 = 2V(BDP_1A) + \frac{2}{3}V(BDP_1A) = \frac{8}{3}V(BDP_1A) = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{3} \frac{a^2}{2} h \right) = \frac{4}{9}a^2h$$

Geht man von der Entstehung des Körpers aus, so liegt es nahe, zunächst den Rauminhalt jener Teile zu bestimmen, die vom ursprünglichen Quader abgetrennt wurden. Dazu könnte folgende Vorstellung bestehen, die Abb. 45c vermittelt.

Diese Teile sind leicht zu berechnen. Da sind zunächst die Pyramide $ABFEP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $CDHGP_2$; ihre Grundflächen haben den Inhalt ah , und die entsprechenden Höhen sind gleich der Dreieckshöhe von P_1 auf die Seite EF (des Dreiecks $EF P_1$), also aus Ähnlichkeitsgründen gleich $\frac{1}{3}|FG| = \frac{1}{3}a$. Demnach ist das Volumen dieser Pyramiden

$$V_1 = \frac{1}{3}(ah)\frac{1}{3}a = \frac{1}{9}a^2h$$

Ferner sind die Pyramide $BCGFP_1$ und die dazu kongruente Pyramide $DAEHP_2$ abzutrennen. Völlig analoge Überlegungen ergeben für sie den Rauminhalt

$$V_2 = \frac{1}{3}(ah)\frac{2}{3}a = \frac{2}{9}a^2h$$

Insgesamt erhalten wir

$$V_0 = ah^2 - 2V_1 - 2V_2 = \frac{3}{9}a^2h$$

Dies stimmt nicht mit den bisherigen Ergebnissen überein! Wo steckt der Fehler?

Natürlich, die zweite Abspaltung ist nicht richtig! Sie setzt voraus, dass CP_1 und BP_2 in einer gemeinsamen Ebene liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da wegen $P_1P_2 \parallel AC$ die Ebene $\varepsilon_{CP_1P_2}$ die Grundfläche $ABCD$ längs AC schneidet.

Wir wollen nun den Fehler schnell beheben. Anstelle der Pyramide $BCGFP_1$ sind einfach die Pyramiden P_1P_2FB und $BCGFP_2$ zu nehmen. Der Inhalt des Dreiecks P_1P_2F ist wegen $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|EG|$ gleich dem Drittel des Inhalte von EGF , also $\frac{1}{6}a^2$. Folglich ist

$$V(P_1P_2FB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}a^2 \cdot h = \frac{1}{18}a^2h$$

Die Pyramide $BCGFP_2$ ist kongruent zu $ABFEP_1$. Demnach ist nun

$$V_0 = a^2h - 4V_1 - 2V(P_1P_2FB) = \frac{4}{9}a^2h$$

¹⁸Hier und im folgenden geben bei der Bezeichnung der Pyramiden der letztgenannte Punkt die Spitze und die vorhergehenden Punkte die Ecken der zugehörigen Grundfläche an.

Zur Lösung der Aufgabe könnte auch versucht werden, den Körper durch Anfügen von einfachen Körpern zu einem einfachen Körper mit bekannter Volumenformel zu ergänzen.

Die Verlängerungen der Kanten AP_1 und CP_2 schneiden sich in einem Punkt S . Das Dreieck ACS ist gleichschenkelig. Aus dem Körper entsteht nun durch Anfügen der zueinander kongruenten Pyramiden P_1P_2SB und P_1P_2SD die Pyramide $ABCDS$ (vgl. Abb. 45d).

Es sei M der Mittelpunkt von P_1P_2 . Wegen $P_1P_2 \parallel AC$ und $|P_1P_2| = \frac{1}{3}|AC|$ ist $|SM| : (|SM| + h) = 1 : 3$ und damit $|SM| = \frac{1}{2}h$. Dann ist

$$V(ABCDS) = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{3}{2}h = \frac{1}{2}a^2h$$

Zur Inhaltsbestimmung der Pyramide P_1P_2SB benutzen wir den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}a \right) \frac{1}{2}h = \frac{1}{12}ah$ der Grundfläche P_1P_2S und die Höhe $\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$, also ist

$$V(P_1P_2SB) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12}\sqrt{2}ah \right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a \right) = \frac{1}{36}a^2h$$

Zusammen ergibt sich dann

$$V_0 = \frac{1}{2}a^2h - 2 \cdot \frac{1}{36}a^2h = \frac{4}{9}a^2h$$

Der Körper lässt sich durchaus noch in anderer geeigneter Weise zerlegen (z.B. so, dass ein Teil die Pyramide $ABCDM$ ist) oder ergänzen (etwa zu einem Pyramidenstumpf oder zu einem dreiseitigen Prisma mit EG als Mantelkante), und wir empfehlen dem Leser, diesen Möglichkeiten nachzugehen bzw. neue zu suchen.

Zum Schluss dieser Aufgabe möchten wir auch auf Möglichkeiten hinweisen, Ergebnisse der Integralrechnung zu nutzen. So bietet sich hier die Simpson-Formel, speziell die Keplersche Fassformel an. (Eine leicht zugängliche Literatur ist dazu unter anderem die "Kleine Enzyklopädie Mathematik".)

(4.10)¹⁹ Aufgabe. In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Auf einer Ebene ε' , die zu ε parallel ist, liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, dass die Strecken AA' , BB' , CC' , DD' , EE' und FF' auf ε senkrecht stehen.

Gegeben seien die Länge a von AC sowie der Abstand h zwischen den Ebenen ε und ε' . Man berechne hieraus das Volumen V des Polyeders, das genau die Strecken AC , CE , EA , $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB' , AF' , CB' , CD' , ED' und EF' als Seitenkanten hat (vgl. Abb. 46).

Wir lösen jetzt eine Aufgabe, in der es um das Verhältnis von Rauminhalten geht.

(4.11)²⁰ Aufgabe. Gegeben sei eine vierseitige Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer

¹⁹Nach Aufgabe 161046 der OJM der DDR.

²⁰Nach Aufgabe 131033 der OJM der DDR.

Grundfläche. Alle acht Kanten dieses Körpers haben die Länge a . Die Mittelpunkte der Kanten BS und CS seien E bzw. F . Eine Ebene durch die Punkte A, E, F zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper (Abb. 47). Man berechne das Verhältnis der Volumina dieser Teilkörper.

Zunächst ist festzustellen, dass die Schnittebene ε_{AEF} durch den Eckpunkt D der Pyramide geht. Nach Festlegung der Punkte E und F ist nämlich $g_{EF} \parallel g_{BC}$ und wegen $g_{BC} \parallel g_{AD}$ dann auch $g_{EF} \parallel g_{AD}$. Nach Satz (1.10) ist dann AD in der Schnittebene ε_{AEF} enthalten.

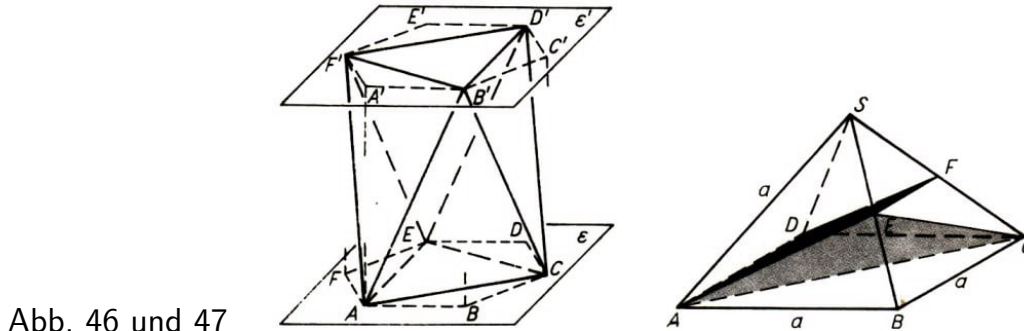


Abb. 46 und 47

Durch die Vorgabe der Kantenlängen ist man geneigt, die Aufgaben durch Berechnungen der Rauminhalte der Teilkörper zu lösen. Der Leser wird feststellen, dass dies relativ aufwendig ist. Da nur nach dem Verhältnis der Volumina gefragt ist, wollen wir eine Lösung über geeignete Vergleiche erzielen. Das gelingt recht kurz auf folgende Weise.

Wir zerlegen den Teilkörper $ABCDEF$ durch einen Schnitt mit ε_{ACE} in die Pyramiden $AEFDC$ und $ABCE$ (vgl. Abb. 47). Es sei $V' = V(AEFDS)$, V_2 das Volumen des Teilkörpers $ABCDEF$, $V_{21} = V(AEFDC)$ und $V_{22} = V(ABCE)$. Dann ist $V_{21} = V_1$, da beide Pyramiden gleiche Grundflächen und wegen $|CF| = |SF|$ gleichgroße Höhen besitzen.

Weiterhin ist $V_{22} = \frac{1}{4}V(ABCD S)$, da neben der Grundfläche auch die Höhe der Pyramide $ABCE$ wegen $|EB| = \frac{1}{2}|SB|$ halb so groß ist wie die der Pyramide $ABCD S$. Folglich ist

$$V_1 = \frac{1}{2}(V(ABCD S) - V_{22}) = \frac{3}{8}V(ABCD S)$$

und damit

$$V_1 : V_2 = \frac{3}{8} : \left(1 - \frac{3}{8}\right) = 3 : 5$$

Wir empfehlen dem Leser, die folgende Aufgabe unter Beachtung von Aufgabe (1.25) und mit ähnlichen Zerlegungen oder Ergänzungen wie bisher selbständig zu lösen.

(4.12) Aufgabe. Jede durch die Mitte zweier Gegenkanten eines Tetraeders verlaufende Ebene zerlegt das Tetraeder in zwei inhaltsgleiche Teile.

(4.13) Aufgabe. Gegeben seien eine Pyramide $A_1A_2A_3A_4$, eine Ebene ε sowie eine Gerade $g \nparallel \varepsilon$. Die zu ε parallele Ebene ε_i durch A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) schneidet g in einem Punkt B_i . Nun sei noch eine Zahl $0 < k < 1$ vorgegeben.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 durch $C_i \in A_i B_i$ mit $|C_i B_i| = k|A_i B_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Man bestimme das Verhältnis $V(C_1 C_2 C_3 C_4)$ zu $V(A_1 A_2 A_3 A_4)$ (vgl. Abb. 48).

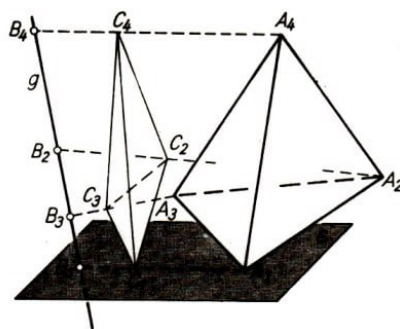


Abb. 48

Mit der Lösung dieser Aufgabe wollen wir gleichzeitig zeigen, wie nützlich es mitunter sein kann, zunächst mit einem Spezialfall zu beginnen.

Wir nehmen zunächst an, dass drei der Ebenen ε_i zusammenfallen; o.B.d.A. sei $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ und damit $B_1 = B_2 = B_3$. Dann geht $C_1 C_2 C_3$ aus $A_1 A_2 A_3$ durch eine zentrale Stauchung mit dem Stauchungsfaktor k hervor, d.h., die Grundflächen der zu betrachtenden Pyramiden verhalten sich wie $k^2 : 1$.

Da $\varepsilon_4 \parallel \varepsilon_1$ gilt, haben beide Pyramiden gleiche Höhe, und das gesuchte Volumenverhältnis ist ebenfalls $k^2 : 1$.

Gilt nun im zweiten Fall nur noch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so haben wir $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ und $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$ zu unterscheiden.

Im Fall $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ ergibt sich mit der Aufgabe (4.8) wieder das Verhältnis $k^2 : 1$. Im Fall $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_4$ schneidet ε_1 die Strecke $A_3 A_4$ (bzw. deren Verlängerung) in A_5 und die vorgegebene Pyramide wird in zwei Pyramiden zerlegt (bzw. mittels einer zweiten zu einer dritten ergänzt). Die zu betrachtenden Volumina setzen sich additiv (bzw. subtraktiv) zusammen, und damit bleibt das nach dem ersten Fall für die Teilpyramiden gültige Verhältnis auch für den zweiten Fall gültig.

Sind nun im allgemeinen Fall keine zwei der Ebenen ε_i identisch, so benutze man eine davon als Schnittebene für $A_1 A_2 A_3 A_4$. Auf die durch den Schnitt entstandenen Teilpyramiden trifft dann jeweils Fall 2 zu. Damit ergibt sich auch im allgemeinen Fall das gesuchte Verhältnis $k^2 : 1$.

Zum Abschluss sei dem Leser empfohlen, die folgende Aufgabe mittels einer Ergänzung (unter Verwendung von (1.17)) zu lösen.

(4.14) Aufgabe. Man berechne das Volumen eines Tetraeders, dessen zueinander windschiefe Kanten jeweils gleich lang sind (mit den Längen a, b, c).

4.3 Extrema

Was wäre zu wählen:

Der Beste unter den Schlechten zu sein oder
der Schlechteste unter den Besten? (F. Hebbel)

Der Beste, der Schlechteste, das Größte, das Kleinste sind Extrema. Selbstverständlich wollen wir uns hier nur mit Extremwerten beschäftigen, d.h. zahlenmäßig Erfassbares betrachten.

Extremwertaufgaben tauchen schon sehr früh in der Mathematik auf. Euklid beweist in den "Elementen":

(*) Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang ist das Quadrat dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.

An dieser Aufgabe tritt schon das Typische hervor: Es wird nach dem größten (oder kleinsten) Wert gefragt, den eine Größe (bei (*) Flächeninhalt eines Rechtecks) unter bestimmten Bedingungen (bei (*) gegebener Umfang) annehmen kann.

Solche Aufgaben treten häufig in der Technik auf, wobei dort etwa der Aufwand minimiert wird, aber auch in der Natur finden wir optimale Lösungen, die denen einer Extremwertaufgabe entsprechen. So geben die Bienen den Waben eine solche Form, dass bei gegebenem Volumen der Waben so wenig Wachs wie möglich verbraucht wird und die einzelnen Waben ohne Zwischenräume aneinandergesetzt werden können.

Bei der Lösung von Extremwertaufgaben spielt gewöhnlich die Differentialrechnung eine große Rolle. Wir wollen aber auf diese Methode hier verzichten, vielmehr gerade demonstrieren, dass auch elementare Methoden sehr viel zu leisten vermögen. Entsprechend unserem Hauptanliegen des Kapitels 4 beschränken wir uns dabei auf "Volumenaufgaben".²¹

(4.15) Aufgabe. Gegeben seien drei Strecken mit gemeinsamem Endpunkt und die Summe $l = a + b + c$ ihrer Längen. Welche Winkel müssen die Strecken miteinander bilden und in welchem Verhältnis müssen die Streckenlängen zueinander stehen, damit dass von den drei Strecken aufgespannte Tetraeder maximales Volumen hat?

Die Lösung nehmen wir entsprechend der Fragestellung in zwei Schritten vor. a , b , c seien zunächst beliebig, aber fest gewählt. Dann können in (4.4) sowohl G als auch h unabhängig voneinander maximal gewählt werden.

Zwei Strecken vorgegebener Länge spannen genau dann ein Dreieck von maximalem Inhalt auf, wenn sie senkrecht aufeinander stehen, und h wird genau dann maximal, wenn es die Länge der dritten Strecke (O.B.d.A. sei diese c) annimmt.

Folglich spannen drei Strecken vorgegebener Länge genau dann ein Tetraeder von maximalem Volumen auf, wenn sie paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Damit ist die Frage nach den von den Strecken eingeschlossenen Winkeln - unabhängig von deren Länge - beantwortet! Es bleibt noch festzustellen, ob durch die Veränderung der Streckenlängen bei konstanter Summe l das Volumen weiterhin vergrößert werden kann.

Dazu verwenden wir das Ergebnis der oben genannten Extremwertaufgabe (*) von Euklid. Als Grundfläche der möglichen Tetraeder benutzen wir ein bereits als rechtwinklig erkanntes Dreieck; das hat aber den halben Flächeninhalt eines Rechtecks mit dem Umfang $2(a + b)$. Nach (*) ist demnach der Flächeninhalt genau dann maximal, wenn

²¹Auch auf "anwendungssträchtige" Formulierungen haben wir bewusst verzichtet.

$a = b$ gilt. Da es aber gleichgültig ist, welche der Flächen des Tetraeders als Grundfläche betrachtet wird, hätte man auch $a = c$ erhalten können.

Folglich müssen alle drei Strecken gleichlang gewählt werden. Drei Strecken mit den Längen $\frac{1}{3}l$, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, lösen die gestellte Aufgabe.

(4.16) Aufgabe. Man formuliere zu der Extremwertaufgabe (*) von Euklid eine analoge räumliche Aufgabe²² und löse diese.

Bei den folgenden Aufgaben werden wir solche Beispiele betrachten, die häufig mittels Methoden der Differentialrechnung gelöst werden. Dazu muss zunächst die Größe, die extremal werden soll, in Abhängigkeit von einer für die Aufgabe charakteristischen Variablen dargestellt werden.

Die so konstruierte Funktion wird dann allerdings von uns hier mit elementaren Methoden auf Extremwerte untersucht.

(4.17) Aufgabe. Wir betrachten vierseitige Pyramiden, deren Kanten alle, bis auf eine Mantelkante, die Länge 1 haben. Die Länge dieser einen Mantelkante bestimme man nun so, dass das Volumen der Pyramide maximal wird.

Zur Lösung betrachten wir Abb. 49 und verwenden die dort eingetragenen Bezeichnungen. Es gelte $|AS| = x$, und alle anderen Kantenlängen seien 1. Es kommt zunächst darauf an, das Volumen V in Abhängigkeit von x auszudrücken. Da bis auf AS alle Kanten gleiche Länge haben, ergibt sich:

- (i) $ABCD$ ist ein Rhombus,
- (ii) der Fußpunkt F des Lotes von S liegt auf ε_{ABC} auf AC ,
- (iii) $\triangle DBS \cong \triangle DBC$.

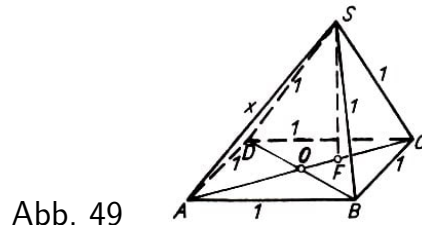


Abb. 49

Aus (i) und (iii) folgt $|AO| = |OC| = |OS|$, d.h., S liegt auf dem Thaleskreis um O mit dem Radius $r = |AO|$. Folglich ist ASC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei S . Demnach gilt wegen (ii)

$$|AC| \cdot |SF| = x \cdot 1$$

und wir können die Höhe $h = |SF|$ der Pyramide mittels x und $r = |AO|$ ausdrücken:

$$h = \frac{x}{2r}$$

Außerdem ergibt sich aus der Rechtwinkligkeit des Dreiecks ASC die Beziehung

$$(2r)^2 = 1 + x^2 \tag{iv}$$

²²Vgl. Abschnitt 3.3.

Für die Grundfläche G gilt wegen (i)

$$G = 2|AO| \cdot |OB| \quad \text{bzw.} \quad G = 2r \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

Das gesuchte Volumen V lässt sich also nach (4.5) in Abhängigkeit von x und r darstellen:

$$V = \frac{1}{3} 2r \sqrt{1 - r^2} \cdot \frac{x}{2r}$$

Da V genau dann maximal wird, wenn $36V^2$ maximal ist, betrachten wir $36V^2 = (4 - 4r^2)x^2$. Mit (iv) folgt daraus $36V^2 = (3 - x^2)x^2$. Mit $z = x^2$ erhalten wir

$$36V^2 = -z^2 + 3z \quad \text{bzw.} \quad 36V^2 = -\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad (\text{v})$$

Die Form (v) ist gerade so gewählt worden, dass es offensichtlich wird, dass der maximale Wert für $z = \frac{3}{2}$, d.h. für $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ angenommen wird.

Aus (v) ist auch ablesbar, dass das maximale Volumen den Wert $\frac{1}{4}$ hat. Aus dem Lösungsweg ist ersichtlich, dass der Wert $\sqrt{\frac{3}{2}}$ auch tatsächlich angenommen werden kann. Damit ist die gesuchte Kantenlänge ermittelt.

Bei quadratischen Funktionen (wie in (v)) lassen sich die Extrema immer finden, indem man wie oben die quadratische Ergänzung sucht.²³ Naturgemäß führen aber Volumenaufgaben häufig auf Funktionen dritten Grades, wie das sehr bekannte folgende Problem.

(4.18) Aufgabe. Gegeben sei eine quadratische Blechplatte mit der Seitenlänge a . An den Ecken sollen gleichgroße Quadrate so ausgeschnitten werden, dass der durch Aufbiegen der "Ränder" aus diesem Netz entstehende quaderförmige (oben offene) Behälter maximales Volumen erhält.

Welche Seitenlänge x müssen die ausgeschnittenen Quadrate haben?

Zeichnet man das Netz des gesuchten Behälters, so liest man für das Volumen V

$$V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x$$

ab. Demnach soll ein Produkt dreier Faktoren maximal werden. Ein solches Produkt tritt z.B. im Radikanden des geometrischen Mittels auf. Wir setzen folgenden Satz als bekannt voraus:

Sind u, v, w positive Zahlen, so gilt

$$\sqrt[3]{u \cdot v \cdot w} \leq \frac{u + v + w}{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $u = v = w$. Ist nun in

$$u \cdot v \cdot w \leq \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3$$

²³Vgl. dazu I.P. Natanson, Einfachste Maxima- und Minima-Aufgaben, MSB Nr. 15.

die rechte Seite eine Konstante, so stellt diese für die linke Seite eine obere Grenze dar und kann nur in dem Fall erreicht werden, in dem alle Faktoren gleich groß sind. In unserem Fall gilt

$$V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot x \leq \left(\frac{2a - 3x}{3} \right)^3$$

und damit ist die rechte Seite leider keine Konstante; das lässt sich aber leicht erreichen! Es ist nämlich

$$4V = (a - 2x) \cdot (a - 2x) \cdot (4x) \leq \left(\frac{2a}{3} \right)^3$$

Der maximale Wert für $4V$ ist demnach $\left(\frac{2a}{3} \right)^3$ und wird nur im Fall

$$a - 2x = a - 2x = 4x$$

angenommen, d.h. für $x = \frac{a}{6}$.

Da es möglich ist, Quadrate der Seitenlänge $\frac{a}{6}$ auszuschneiden, ist damit die Aufgabe gelöst.

Bei den folgenden Aufgaben kann man auch die eben demonstrierte Methode verwenden, nur wird es schwieriger sein, sie zur Anwendung zu bringen.

(4.19) Aufgabe. Wir betrachten regelmäßige, gerade, sechseitige Doppelpyramiden $S_1A_1A_2A_3A_4A_5A_6S_2$ mit $x = |A_iA_{i+1}|$ ($i = 1, \dots, 6$ und $A_7 = A_1$) und $y = \frac{1}{2}|S_1S_2|$. Man ermittle das Verhältnis $\frac{y}{x}$ für den Fall, dass

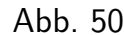
- a) bei vorgegebener Oberfläche das Volumen maximal wird,
- b) bei vorgegebenem Volumen die Oberfläche minimal wird.

(4.20) Aufgabe. Man ermittle alle die Punkte im Inneren eines gegebenen Tetraeders, für die das Produkt ihrer Abstände von den Flächen maximal wird.

Andere, für räumliche Extremwertaufgaben charakteristische Problemstellungen sind solche, bei denen ein (oder mehrere) Körper in einem anderen unterzubringen sind. Bei solchen "Packungsproblemen" sind entweder möglichst viele Körper vorgegebener Art und Größe oder eine vorgegebene Anzahl von Körpern möglichst großen Volumens in einem vorgegebenen Körper zu verpacken. Wir wollen das an einem Beispiel demonstrieren.

(4.21) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel W mit der Kantenlänge 3 und eine beliebige Anzahl von Quadern Q mit den Kantenlängen 2, 2, 1. Man ermittle die größte Anzahl von Quadern Q , die man in den Würfel W packen kann.

Eine notwendige Bedingung ist sehr schnell gefunden; da das Würfelvolumen 27 und ein Quadvolumen 4 betragen, kann man höchstens sechs Quader Q in W verpacken. Dass fünf Quader Q in W zu verpacken sind, sieht man wohl leicht.



Da Unmöglichkeitsbeweise bei diesem Aufgabentyp meistens sehr schwierig sind, sollte man zunächst einen Existenzbeweis versuchen. Den ersten Quader legt man in eine der Würfecken A , die nächsten beiden muss man nun so legen, dass möglichst wenig Platz "verloren geht". Dann kann man z.B. eine Packung erhalten, die wir in Abb. 50a veranschaulicht haben.

(4.22) Aufgabe. Gegeben seien ein Würfel W mit der Kantenlänge 5 und eine beliebige Anzahl von Quadern Q mit den Kantenlängen 3, 2, 1. Man ermittle die größte Anzahl von Quadern Q , die man in den Würfel W packen kann.

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 2. Wir betrachten regelmäßige Oktaeder derart, dass auf jeder Seitenfläche des Würfels (wenigstens) eine Ecke des Oktaeders liegt.

Wir gehen von der Existenz eines derartigen Oktaeders aus und bezeichnen seine Ecken mit R, S, T, U, V, W derart, dass sie - wie in Abb. 51c - auf den Seitenflächen des Würfels $ABCDEFGH$ liegen. Der Mittelpunkt M des Oktaeders ist (wegen dessen Regelmäßigkeit) Mittelpunkt der Strecken RW, SU und VT . Folglich liegt er sowohl auf der Ebene, die Symmetrieebene zwischen den Seitenflächen $ABCD$ und $EFGH$

des Würfels ist, als auch auf den Symmetrieebenen von $BCGF$, $DAEH$ und $CDHG$, $ABFE$.

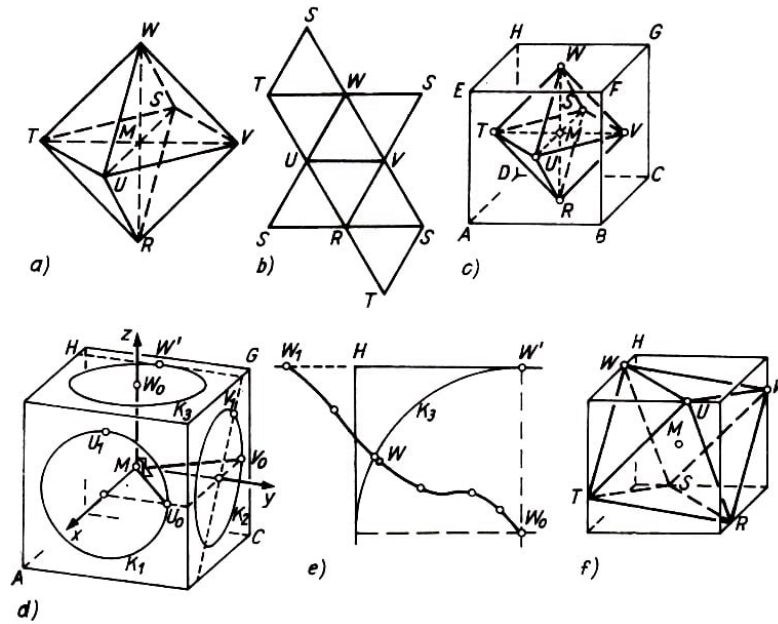


Abb. 51

Der Punkt M ist demnach der Schnittpunkt dieser Ebenen und damit gleichzeitig Mittelpunkt des Würfels.

Die Frage nach dem kleinsten Oktaeder und seinem Volumenverhältnis zum Würfel kann jetzt leicht beantwortet werden. Nach den letzten Überlegungen ist dafür notwendig, aber auch hinreichend, dass R ein Punkt der Seitenfläche $ABCD$ ist, der den kürzesten Abstand zum Mittelpunkt M des Würfels besitzt, also dass R der Fußpunkt des Lotes von M auf ε_{ABC} und damit der Mittelpunkt der Seitenfläche $ABCD$ ist. Die übrigen Seitenflächenmittelpunkte bilden zusammen mit R offensichtlich ein Oktaeder, und dieses ist das einzig mögliche dieser Größe.

Sein Volumen V_0 kann man sich leicht dadurch bestimmen, dass man das Oktaeder bezüglich $STUV$ in zwei kongruente gerade Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $\sqrt{2}$ und der Höhe 1 zerlegt. Es beträgt demnach $V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$. Das Verhältnis von Oktaedervolumen zu Würfelvolumen V_W ist dann

$$V_o : V_W = \frac{4}{3} : 8 = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

Jedes andere Oktaeder hat - falls es existiert - ein größeres Volumen und damit ein Verhältnis zu V_W , des größer als $\frac{1}{6}$ ist.

Nun ergibt sich die naheliegende Frage, ob es zu jeder reellen Zahl $t > \frac{1}{6}$ ein Oktaeder mit $V_O : V_W = t$ gibt.

Natürlich kann dabei t nicht beliebig groß gewählt werden. Offenbar kann die Länge von MR höchstens gleich der von MA , also höchstens gleich $\sqrt{3}$ sein. Angenommen, es existiert ein Oktaeder dieser Art, dann ist sein Volumen $V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Also muss $t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ sein.

Wir leiten zur Lösung des Problems weitere Bedingungen aus der Existenz eines Oktaeders ab. Da R, S, T, U, V, W auf einer Kugel um den Mittelpunkt M des Würfels liegen, müssen sich diese Punkte bezüglich der jeweiligen Seitenflächen auf gleichgroßen Kreisen um den zugehörigen Seitenflächenmittelpunkt befinden.

Sind s und r die Radiuslängen der Umkugel des Oktaeders bzw. dieser Kreise, so gilt

$$s^2 = 1 + r^2 \quad , \quad t = V_O : V_W = \frac{1}{6}s^2$$

und damit

$$t = \frac{1}{6}(1 + r^2)\sqrt{1 + r^2}$$

Wir beschränken uns bezüglich der Frage zunächst auf Oktaeder mit $0 < r \leq 1$, also auf $\frac{1}{6} < t \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0,47$.

Nun scheinen diese notwendigen Bedingungen für die Lage der Punkte R, S, T, U, V, W noch recht großzügig zu sein, so dass man bei oberflächlicher Betrachtung die Hoffnung hegen könnte, eine Lösung bereits zu erzielen, indem man den Punkt U auf dem Kreis K_1 bezüglich der Seitenfläche $ABFE$ noch beliebig vorgeben kann.

Folgendes Beispiel zeigt, dass dies nicht möglich ist. Wir wählen als U den Punkt U_0 auf K_1 ; der der Kante BF am nächsten liegt (Abb. 51 d). Damit ist aber bereits V auf dem Kreis K_2 der Seitenfläche $BCGF$ eindeutig bestimmt. Denn wegen

$$MU \perp MV \tag{i}$$

muss V derjenige Punkt V_0 von K_2 sein, der von CG den kürzesten Abstand hat. Nun ist noch MU und MV parallel zu ε_{ABC} , so dass wegen

$$MW \perp MU \quad \text{und} \quad MW \perp MV$$

für den Punkt W nur der Mittelpunkt der Seitenfläche $EFGH$ möglich ist.

Das steht aber im Widerspruch dazu, dass W auf dem Kreis K_3 bezüglich dieser Seitenfläche liegt. Demnach gibt es kein Oktaeder, bei dem U die obige spezielle Lage besitzt.

Zur weiteren Untersuchung führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein (vgl. Abb. 51d).

Der Koordinatenursprung sei M und die x -, y - und z -Achse seien so gewählt, dass die jeweiligen Einheitspunkte der Koordinatenachsen gerade die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABFE$, $BCGF$ bzw. $EFGH$ sind. (Dies ist möglich, da die Kantenlänge des Würfels 2 beträgt.)

Die Punkte U, V, W haben dann die Koordinaten $(1, y_1, z_1)$, $(x_2, 1, z_2)$ bzw. $(x_3, y_3, 1)$ mit

$$y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + z_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = r^2 \tag{iii}$$

Für festes $0 < r \leq 1$ lassen wir U auf dem Kreis K_1 von dem Punkt U_0 mit $y_1 = r$ und $z_1 = 0$ bis zum Punkt U_1 mit $y_1 = 0$ und $z_1 = r$ alle Kreispunkte kontinuierlich durchlaufen.

Aus der Bedingung (i) ergibt sich dann für den Punkt V die Gleichung

$$x_2 + y_1 + z_1 z_2 = 0 \quad (\text{iv})$$

denn $MU \perp MV$ ist gleichwertig damit, dass das Skalarprodukt der Vektoren $(1, y_1, z_1)$ und $(x_2, 1, z_2)$ den Wert Null besitzt. (Man kann (iv) auch elementar mit dem pythagoreischen Satz bestätigen.)

Die Gleichung (iv) mit den Variablen x_2, z_2 besitzt unter der Nebenbedingung (iii) stets eine Lösung; man erhält nämlich durch Quadrieren aus (iv)

$$\begin{aligned} x_2^2 + 2x_2 y_1 + y_1^2 &= z_1^2 (r^2 - x_2^2) \\ \left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{y_1}{1+z_1^2} \pm \frac{z_1^2}{1+z_1^2} \sqrt{1+r^2} \\ z_2 &= -\frac{x_2+y_1}{z_1} \quad (\text{falls } z_1 \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{v}) \end{aligned}$$

bei denen $1 + z_1^2 > 0$ und $1 + r^2 > 0$ ist.

Wir betrachten nun nur den Punkt V mit

$$x_2 = -\frac{y_1}{1+z_1^2} - \frac{z_1^2}{1+z_1^2} \sqrt{1+r^2}$$

Für $U = U_0 (y_1 = r, z_1 = 0)$ muss V der Punkt V_0 mit $x_2 = -r, z_2 = 0$ wegen (iv) und (iii) sein, was bereits an früherer Stelle einsichtig wurde.

Den Punkten U_0, V_0 ist durch die Bedingung (ii) genau ein Punkt W_0 auf der Ebene ε_{EFG} zugeordnet; er ist - wie wir bereits feststellten - der Mittelpunkt des Kreises K_3 , liegt also im Inneren von K_3 .

Nun lassen wir U auf K_1 von U_0 aus nach U_1 kontinuierlich die Kreispunkte durchlaufen. (Mit trigonometrischen Funktionen kann dieser Sachverhalt genauer dadurch beschrieben werden, dass $y_1 = r \cdot \cos \alpha$; und $z_1 = r \cdot \sin \alpha$ gesetzt und der Winkel α das Intervall $0 \cdot \frac{\pi}{2}$ bis $1 \cdot \frac{\pi}{2}$ durchläuft.)

Die Koordinaten x_2, z_2 von V ändern sich dann stetig (d.h. ohne Sprünge), was an den Gleichungen (v) ersichtlich ist. Der zu U, V jeweils nach (ii) zugehörige Punkt W beschreibt demnach auf der Seitenebene ε_{EFG} eine stetige Kurve (Abb. 51e). Für die Endlage U_1 mit $y_1 = 0$ und $z_1 = r$ erhält man aus (v) für V_1 die Koordinaten

$$x_2 = -\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}$$

Abb. 51d zeigt, wie man die Endlage V_1 von V einfach konstruieren kann. Die zu $U_1 M$ senkrechte Ebene durch M muss nämlich die Ebene ε_{EFG} in einer Geraden schneiden, die Tangente an den Kreis K_3 durch den Punkt W' ($x_3 = -r, y_3 = 0, z_3 = 1$) ist.

Demnach liegt W_1 ebenfalls auf dieser Tangente und damit nicht im Innern von K_3 . (Es gilt sogar $W_1 \neq W'$.) Da W in der Ebene ε_{EFG} eine stetige Kurve beschreibt, muss diese wenigstens einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis K_3 besitzen.²⁴

²⁴Abb. 51e zeigt die Bahn von W für den Fall $r = 1$. Den markierten Punkten entsprechen äquidistante Punkte (Punkte mit gleichem Abstand) auf dem Kreisbogen $U_0 U_1$.

Damit haben wir folgendes nennenswertes Ergebnis:

Zu jeder reellen Zahl $\frac{1}{6} < t \leq \frac{1}{3}\sqrt{2}$ gibt es (wenigstens) ein Oktaeder mit $V_O : V_W = t$.

Im Bereich $1 \leq r \leq \sqrt{2}$, d.h. $\frac{1}{3}\sqrt{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, wollen wir uns bei der Suche nach Lösungen darauf beschränken, dass U, V und damit auch S, T auf Kanten des Würfels liegen. Aus Symmetriegründen genügt es, von dem Punkt U mit $y_1 = \sqrt{r^2 - 1}$ und $z_1 = 1$ auszugehen. Dann erhalten wir aus (v) für V

$$x_2 = \frac{-\sqrt{r^2 - 1} \pm \sqrt{r^2 + 1}}{2}, \quad z_2 = -\frac{-\sqrt{r^2 - 1} \pm \sqrt{r^2 + 1}}{2}$$

Nun muss nach unserer Voraussetzung neben $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ noch $|x_2| = 1$ oder $|z_2| = 1$ sein. Daraus ergibt sich $\sqrt{r^2 - 1} = \frac{1}{2}$ und damit $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ sowie

$$x_2 = -1, \quad z_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad z_1 = 1$$

Für den durch diese Punkte U und V und die Bedingung (ii) auf ε_{EFG} bestimmten Punkt W gilt (wie man leicht nachprüft)

$$x_3 = -\frac{1}{2}, \quad y_3 = -1$$

Da nun $x_3^2 + y_3^2 = \frac{5}{4} = r^2$ ist, liegt hier eine Lösung vor (Abb. 51f).

Sie ist bis auf Kongruenz die einzige Lösung, bei der U und V auf Kanten des Würfels liegen. Insbesondere folgt daraus, dass es für $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ keine Lösung gibt.

Das zuletzt erhaltene Oktaeder hat ein besonders "schönes" Volumenverhältnis zum Würfel; es ist $t = \frac{9}{16}$.

5 Einige Lösungsanmerkungen

Zu (1.8). Man benutze $g \cap h = (\alpha \cap \varepsilon) \cap (\beta \cap \varepsilon) = (\alpha \cap \beta) \cap \varepsilon$.

Zu (1.9). Man benutze $g \cap \eta = (g \cap \varepsilon) \cap \eta = g \cap (\varepsilon \cap \eta)$.

Zu (1.20). Eine Lösung des dritten Teils zeigt Abb. 52a.

Zu (1.22). Vgl. Abb. 52b.

Zu (1.23). Eine Lösung zeigt Abb. 52c. Sie geht von einer (Hilfs-) Ebene durch g_{PR} aus, die zu g_{AB} parallel ist.

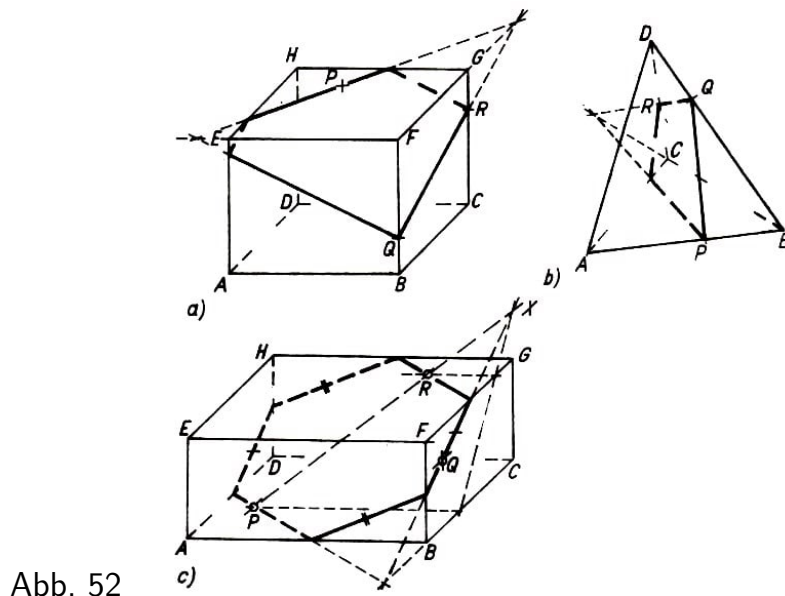


Abb. 52

Zu (1.29). $A(n)$ bezeichne die Anzahl der Ebenen- bzw. Raumteile. Für eine Ebene gilt $A(k+1) = A(k) + (k+1)$, und daraus folgt

$$A(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

mit Hilfe eines induktiven Beweises. Entsprechend erhält man für den Raum

$$A(k+1) = A(k) + \left(1 + \frac{k(k+1)}{2}\right)$$

und damit

$$A(n) = \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}$$

Zu (1.30). Der Würfel wird in 21 Teilkörper zerlegt (vgl. Abb. 53): 8 regelmäßige Tetraeder, die jeweils eine Würfecke als Ecke besitzen; 12 Tetraeder, die jeweils eine Würfelkante als Kante besitzen; 1 Oktaeder, dessen Ecken die Mitten der Seitenflächen des Würfels sind.

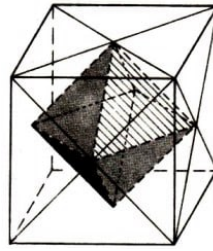


Abb. 53

Zu (1.46). Eine weitere Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung ist folgende: Aus $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ und $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$ folgt

$$\vec{BD} \cdot \vec{AC} = (\vec{BC} + \vec{CD}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{CD} \cdot (\vec{AD} + \vec{CB} + \vec{DC}) = \vec{CD} \cdot \vec{AB} = 0$$

Zu (1.52). Man zeige zunächst indirekt, dass sich je zwei der Kugeln schneiden müssen. Der Schnittkreis $K_1 \cap K_2$ hat mit der Kugel K_3 neben P noch einen weiteren Punkt gemeinsam.

Zu (2.10). Zur Lösung kann ähnlich wie bei der Aufgabe (2.9) vorgegangen werden. Mit Hilfe einer Abb. 34b entsprechenden Figur erhält man, dass für die Konstruktion eines Tetraeders die Bedingung

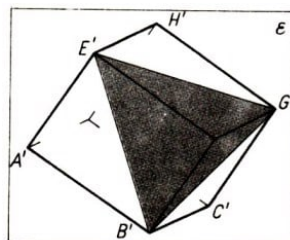
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

notwendig und hinreichend ist.

Zu (2.11). Ein Punkt P mit den geforderten Eigenschaften muss notwendigerweise auf den Kugeln mit den Durchmessern AB , BC bzw. CA liegen; die Lösung besteht aus zwei Punkten. Da der ebene Schnitt einer räumlichen Ecke eines Quaders stets ein spitzwinkliges Dreieck ergibt, ist die Spitzwinkligkeit auch eine notwendige Bedingung.

Zu (3.7). Der Flächeninhalt des konvexen Sechsecks $A'B'C'G'H'E'$, der Projektion des Quaders, ist doppelt so groß wie der des Dreiecks $B'E'G'$ (Abb. 54). Er ist maximal, wenn $\varepsilon_{BGE} \parallel \varepsilon$ ist.

Zu (3.11'). Der Schnittpunkt der Schwerlinien teilt diese im Verhältnis 3:1.



1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
1		1	1	1	1
2				2	2
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2

Abb. 54 und 55

Zu (3.12). Sind K , L , M die Seitenmitten des Dreiecks ABC , so gilt $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor 2. Ist R' der Umkreisradius von $\triangle KLM$, so gilt $R = 2R' \geq 2r$.

Zu (3.12'). Analoge Überlegungen ergeben $R \geq 3r$.

Zu (3.15). Wir ordnen den Feldern des 6×6 -Schachbretts die Zahlen 1 bzw. 2 entsprechend Abb. 55 zu. Zur Überdeckung würden genau $36 : 4 = 9$ Figuren wie in Abb. 41 b benötigt werden. Die Summe der Felderzahlen dieser Figuren ist stets ungerade, so dass damit die Gesamtsumme der Felderzahlen für das 6×6 -Schachbrett ungerade wäre.

Zu (3.16). Angenommen, es existiert ein gleichseitiges Dreieck, so berechnet man seinen Flächeninhalt einerseits durch Addition bzw. Subtraktion von Trapez- und Dreiecksflächen mit rationalem Ergebnis.

Andererseits ergibt $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl. Für das Tetraeder vergleiche Abb. 5.

Zu (4.8). Man ergänze wie in Abb. 5. Grundfläche und Höhe des Parallelepipeds bleiben unverändert!

Zu (4.10). $V = \frac{1}{3}a^2h\sqrt{3}$.

Zu (4.14). Mit der Idee von Abb. 5 erhält man

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

Zu (4.16). Unter allen Quadern von gegebener Oberfläche ist der Würfel derjenige mit dem größten Volumen.

Zu (4.19). Mit der wesentlichen Beziehung

$$0^2 = 27x^4 + 18x^2y^2 + 18x^2y^2 \geq 3\sqrt[3]{27x^4 \cdot 18x^2y^2 \cdot 18x^2y^2} = 9\sqrt[3]{6^2V^4}$$

erhält man $\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Zu (4.20). Die Bedingung wird genau vom Schwerpunkt erfüllt. (Bei der Lösung kann das Volumen wesentliche Hilfsgröße sein.)

Zu (4.22). 20 Quader.

Ausführliche Darstellungen der Lösungen zu den gestellten Aufgaben findet man in P. Pernutz, Aufgaben zur räumlichen Geometrie; Diplomarbeit, PH Potsdam 1981 (59 Seiten, 62 Abbildungen).

6 Literatur

- [1] Behnke, H., F. Bachmann, K. Fladt und W. Süss, Grundzüge der Mathematik, Band II: Geometrie, Göttingen 1960.
- [2] Böhm, J., u.a., Geometrie I, Mathematik für Lehrer, Band 6, 5. Aufl., Berlin 1988.
- [3] Cohn-Vossen, S., und D. Hilbert, Anschauliche Geometrie, Berlin 1932.
- [4] Coxeter, H. S. M., Unvergängliche Geometrie, Basel-Stuttgart 1963 (Autorisierte Übersetzung aus dem Englischen).
- [5] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bände IV, 2. Aufl.; V: Geometrie, Berlin 1980 bzw. 1971 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [6] Fücke, R., K. Kirch und H. Nickel, Darstellende Geometrie, 11. Aufl., Leipzig 1983.
- [7] Hajos, G., Einführung in die Geometrie, Leipzig 1970 (Übersetzung aus dem Ungarischen).
- [8] Hilbert, A., Wir wiederholen; Räumliche Geometrie, Leipzig 1983.
- [9] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl., Leipzig-Berlin 1913.
- [10] Lenz, H., Grundlagen der Elementarmathematik, 3. Aufl., Berlin 1975/ München-Wien 1976.
- [11] Lötzbeyer, Ph., Geometrie und geometrischen Zeichnen für die Oberstufe höherer Lehranstalten, 11. Aufl., Dresden 1937.
- [12] Müller, K. P., Raumgeometrie in der Schule und für die Schule, math. did. 4 (1981), 155-168.