

---

**Alois Kufner**

**Raum und Entfernung**

Übersetzung: Friedericke Thiele  
1981 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig  
MSB: Nr. 104  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

---

# Vorwort

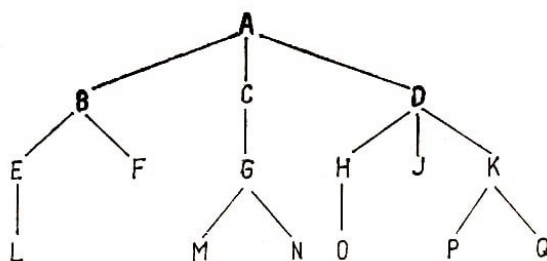
Lieber Leser!

Die erste Reaktion auf den Titel dieses Büchleins wird vermutlich sein: Das ist etwas aus der Geometrie, und viel Interessantes werden wir hier nicht erfahren. Jeder versteht unter dem Abstand zweier Orte ihre kürzeste Entfernung entlang der Luftlinie; was heißt aber "kürzeste" Entfernung?

Beispielsweise fliegt ein Briefträger nicht in der Luft und geht nicht durch Wände, sondern er benutzt den kürzesten Weg auf der Straße. Auch in der euklidischen Geometrie ist es oft notwendig, den Abstand auf verschiedene, manchmal komplizierte Weise zu definieren, und damit befasst sich das erste Kapitel.

Bekanntlich sind Mathematiker ein vom Verallgemeinern und Abstrahieren besessenes Völkchen. Nachdem sie schon zahlreiche Eigenschaften der verschiedensten Entfernungsbegriffe erkannt hatten, analysierten sie deren Gemeinsamkeiten und suchten nach charakteristischen Eigenschaften, um daraus den Abstand zu definieren. So wurde eine neue Struktur geboren, genannt metrischer Raum; ihm ist das zweite Kapitel gewidmet.

Wenn Mathematiker etwas verallgemeinern, stellen sie stets Vergleiche mit den bisherigen Ergebnissen an. Das bedeutet aber, dass immer wieder Modelle neuer mathematischer Theorien geschaffen werden. So war es auch mit dem metrischen Raum, und es zeigte sich, dass auch nichtgeometrische Modelle möglich sind, wie die folgende Abbildung verdeutlicht:



Diese Abbildung stellt einen Teil irgendeines Stammbaumes dar, und die Buchstaben bezeichnen (der Einfachheit halber) Männer; wer wessen Vater, Sohn oder Großvater ist, lässt sich leicht ablesen. Offenbar sind  $D$  und  $L$  entferntere Verwandte als  $H$  und  $Q$ . Wo tritt in diesem Beispiel aber ein Abstand auf?

Der kürzeste Weg zwischen  $D$  und  $L$  besteht aus vier Verbindungslinien, zwischen  $H$  und  $Q$  sind es dagegen nur drei. Die Menge der Männer ( $A, B, C, \dots, Q$ ) mit einer so interpretierten Entfernung ist ein neues, anschauliches Modell für einen metrischen Raum, das endlich und nichtgeometrisch ist.

Am Ende des zweiten Kapitels stehen wir am Scheideweg; der Begriff des Abstandes ist so stark und wirksam, dass es möglich zu sein scheint, auf ihm die gesamte Geometrie aufzubauen.

Beispielsweise lässt sich die Strecke  $AB$  wie folgt definieren

$$\overline{AB} = \{X | \delta(A, X) + \delta(B, X) = \delta(A, B)\}$$

---

wobei  $\delta(A, B)$  den Abstand der Punkte  $A$  und  $B$  bezeichnet.  
Entsprechend können wir den Strahl, die Gerade, die Kreislinie usw. definieren.

Aber hat denn der Abstand nur jene charakteristischen Eigenschaften, welche wir ihm beim Definieren des metrischen Raumes gaben? Wenn ja, dann würden die eingeführten geometrischen Gebilde sehr ungewöhnliche Eigenschaften haben, z. B. könnten durch zwei verschiedene Punkte unendlich viele Geraden verlaufen.

Für die Mathematik ist dies ein deutlicher Hinweis, weitere Eigenschaften einzuführen, damit sich zum Schluss irgendeine "ordentliche" Geometrie ergibt, z.B. die euklidische Geometrie.

Diesen Weg beschreitet der Autor aber nicht. Er verwendet zwar mit dem Begriff der Umgebung eine weitere Anregung aus der Geometrie, benutzt ihn aber lediglich zur Vorbereitung des Studiums nichtgeometrischer Eigenschaften des metrischen Raumes. Kurzum, er geht couragiert auf dem Weg weiter, der hin zur Analysis und zur Topologie führt. Dem grundlegenden topologischen Begriff der offenen Menge ist das dritte Kapitel gewidmet.

Im vierten Kapitel wird die Tragweite der Begriffe offene Menge und Umgebung erläutert. All das lässt sich zwar geometrisch illustrieren, jedoch sind die Begriffe und auch die behandelten Sätze hauptsächlich außerhalb der Geometrie von Bedeutung.

Das fünfte Kapitel ist für Leser geeignet, die sich gern mit abstrakten Überlegungen befassen. Manch einer wird dem hier behandelten Stoff wahrscheinlich erst später auf den Geschmack kommen, spätestens dann, wenn er mit solchen Begriffen wie Stetigkeit, Grenzwert, Supremum, Infimum und mit gleichmäßiger Stetigkeit näher vertraut ist.

Der Leser sollte gründlich alle Definitionen durchdenken, auch den eingefügten Exkursen Aufmerksamkeit schenken und die gestellten Aufgaben ausführlich lösen. Erfahrungsgemäß zeigt sich erst beim Lösen von Aufgaben, wie sicher er die mathematische Theorie beherrscht und zu welchen Abschnitten er noch einmal zurückkehren sollte.

Mit dem Studium dieses Büchleins und dem ausführlichen Lösen aller Aufgaben wird der Leser sein Wissen über Raum und Entfernung wesentlich erweitern. Dabei viel Erfolg!

Jan Vyšín

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Abstand im euklidischen Raum</b>	<b>7</b>
<b>2 Metrik und metrischer Raum</b>	<b>22</b>
<b>3 Offene Mengen</b>	<b>36</b>
<b>4 Inneres und Rand einer Menge, abgeschlossene Mengen</b>	<b>48</b>
<b>5 Konvergenz im metrischen Raum</b>	<b>59</b>
<b>6 Schlussbemerkungen</b>	<b>71</b>

## Einleitung

Aus dem täglichen Leben weiß jeder, dass Entfernung ein sehr relativer Begriff ist. Zum Beispiel hat schon mancher Tourist auf einer Landkarte den Weg des geplanten Marsches ausgemessen und sein Ergebnis für verlässlich gehalten, dann aber festgestellt, dass er in dem unebenen Terrain viel längere Strecken zurücklegen musste. Er hatte nicht beachtet, dass sein Messinstrument die Höhenunterschiede auf der Landkarte nicht berücksichtigen kann.

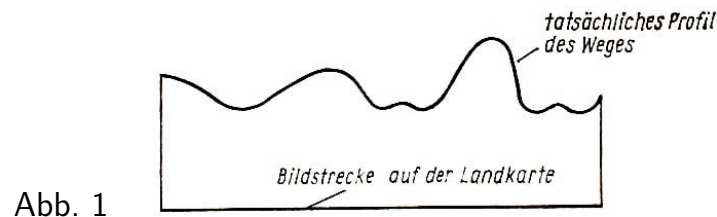


Abb. 1

Auch wenn unser naiver Tourist auf einer "idealen" Ebene ginge, würden sich seine der Landkarte entnommenen Angaben von der tatsächlichen Entfernung unterscheiden. Das ist deshalb der Fall, weil die Erdoberfläche bekanntlich keine Ebene ist, wir sie auf Landkarten aber als Ebene darstellen.

Die Entfernung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  einer Kugeloberfläche projiziert man in die Ebene; bei Zentralprojektion auf die Strecke  $A_1B_1$ , bei Parallelprojektion auf die Strecke  $A_2B_2$ .

Die Abbildung 2 zeigt, dass die gewählte Projektionsart sowie bei der Zentralprojektion auch noch die Lage des Projektionszentrums  $S$  von Bedeutung sind.

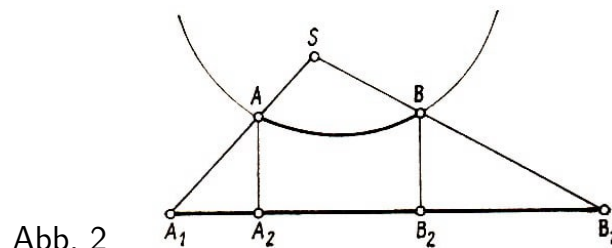


Abb. 2

Die Abbildung verdeutlicht dies, und die Kartographen wissen genau, dass bei der Darstellung eines Terrains auf der Landkarte die Entfernung nicht exakt wiedergegeben werden kann, weil die Kugel keine Fläche ist, die sich in die Ebene abwickeln lässt, und deshalb projizieren sie so, dass entstandene Verzerrungen minimal bleiben.

Beispiel: Die Länge eines Halbkreises mit dem Radius  $r$  berechnet sich  $\pi r$ , und bei Parallelprojektion entsteht eine Bildstrecke der Länge  $2r$ ; es kommt also zu einer Verkürzung der tatsächlichen Entfernung im Verhältnis  $\frac{\pi}{2} = 1,57\dots$ . Bei Zentralprojektion vom Kreismittelpunkt aus ist die projizierte Halbkreislinie sogar die gesamte unendliche Gerade.

Es zeigt sich also, dass die Entfernung auch im täglichen Leben kritisch betrachtet werden muss und dieser Begriff nicht zu verabsolutieren ist.

Wir werden uns daher im weiteren näher mit dem Begriff der Entfernung befassen, allerdings wird es nicht die Entfernung sein, welche uns täglich in vielfältiger Weise begegnet, sondern wir wollen den Abstand in einer Welt genau definierter mathematischer Objekte untersuchen.

# 1 Abstand im euklidischen Raum

Zuerst werden wir mit Objekten arbeiten, welche aus der Schule oder auch aus der Mathematischen Schülerbücherei bekannt sind; mit der Geraden (eindimensionaler euklidischer<sup>1</sup> Raum  $E_1$ ), mit der Ebene (zweidimensionaler euklidischer Raum  $E_2$ ) und mit dem bekannten dreidimensionalen euklidischen Raum  $E_3$ .

Die Punkte der Geraden bezeichnen wir mit  $x = (x_1)$ , die Punkte der Ebene mit  $x = (x_1, x_2)$  und die Punkte des Raumes mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , wobei  $x_1, x_2, x_3$  reelle Zahlen sind.

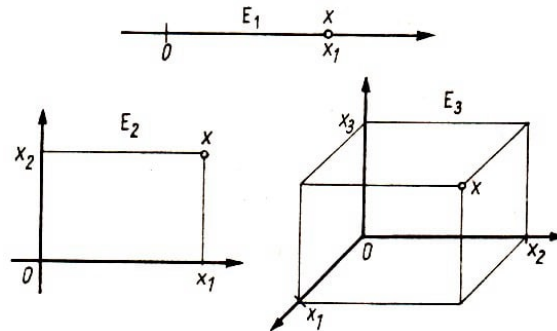


Abb. 3

In diesen Räumen kennen wir folgende Entfernungen:

Auf der Geraden  $E_1$  bezeichnet das Symbol  $d(x, y)$  den Abstand des Punktes  $x = (x_1)$  vom Punkt  $y = (y_1)$ . Die Definition lautet:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| \quad (1)$$

In der Ebene  $E_2$  ist der Abstand  $d(x, y)$  des Punktes  $x = (x_1, x_2)$  vom Punkt  $y = (y_1, y_2)$  folgendermaßen definiert:<sup>2</sup>

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2)$$

Entsprechend ist im Raum  $E_3$  der Abstand  $d(x, y)$  des Punktes  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vom Punkt  $y = (y_1, y_2, y_3)$  definiert:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (3)$$

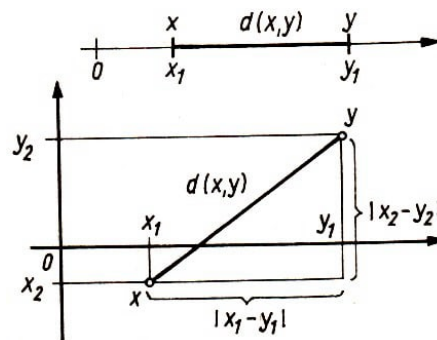


Abb. 4

<sup>1</sup>Euklid von Alexandria (365?-300? v.u.Z.), Mathematiker, soll hauptsächlich in Alexandria gewirkt haben.

<sup>2</sup>Der Leser beachte, dass in Abb. 4 auf der waagerechten Achse jeweils die ersten Koordinaten und auf der senkrechten Achse jeweils die zweiten Koordinaten der Punkte  $x$  und  $y$  abgetragen werden.

Bemerkung 1: In allen drei Fällen bezeichnen wir den Abstand mit  $d(x, y)$ . Das ist konsequent, denn Formel (1) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} \quad (1^*)$$

Die Formeln (1) und (2) sind spezielle Fälle von (3), denn die Punkte aus  $E_1$  haben die Form  $(x_1, 0, 0)$  und sind somit Sonderfälle der Punkte aus  $E_3$ ; entsprechend haben die Punkte aus  $E_2$  die Form  $(x_1, x_2, 0)$ .

Wir nennen  $d(x, y)$  euklidischen Abstand und betrachten nun ausführlich seine Eigenschaften:

**A** Vor allem ist  $d(x, y)$  stets eine nichtnegative Zahl, d.h.

$$d(x, y) \geq 0 \quad (4)$$

wobei der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  genau dann gleich Null ist, wenn beide Punkte identisch sind:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (5)$$

Wir erinnern uns, dass die Identität der Punkte  $x = (x_1, x_2, x_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$  bedeutet, dass  $x_1 = y_1; x_2 = y_2; x_3 = y_3$  gilt, und wir zeigen die Gültigkeit von (4) und (5):

Die Ungleichung (4) folgt aus der Definition (3) des Abstandes  $d(x, y)$ ; für  $x = y$  ist nach dieser Definition die Zahl  $d(x, y)$  gleich Null.

Ist dagegen  $d(x, y) = 0$ , so gilt auch  $[d(x, y)]^2 = 0$ , und aus (3) folgt

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 0$$

Diese Summe dreier nichtnegativer Zahlen ist genau dann gleich Null, wenn jeder einzelne Summand gleich Null ist, also für

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0, \quad x_3 - y_3 = 0$$

Folglich ist  $x_i = y_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , und somit gilt  $x = y$ .

**B** Außerdem ist der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  gleich dem Abstand des Punktes  $y$  vom Punkt  $x$ :

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (6)$$

Der Beweis folgt wieder aus der Definition von  $d(x, y)$ :

Weil  $(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2$  für  $i = 1, 2, 3$  ist, erhalten wir die Gleichung (6) direkt aus (3).

**C** In einem Dreieck mit den Eckpunkten  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist die Länge einer Seite nicht größer als die Summe der Längen der beiden übrigen Seiten.<sup>3</sup> Mit anderen Worten, der Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $z$  ist nicht größer als die Summe aus dem Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  und dem Abstand des Punktes  $y$  vom Punkt  $z$ .

---

<sup>3</sup>Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen, kann dieses Dreieck auch entarten. In  $E_1$  ist dies immer so.



Es ist möglich, dies in Form der sogenannten Dreiecksungleichung aufzuschreiben:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (7)$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung wird zwar durch Abbildung 5 verdeutlicht, wir werden uns aber nicht allein auf die Anschauung verlassen, damit es uns nicht wie jenem eingangs erwähnten Touristen ergeht. Wir beweisen daher die Gültigkeit der Ungleichung (7) und stellen uns dazu erst einmal einige Hilfsmittel bereit:

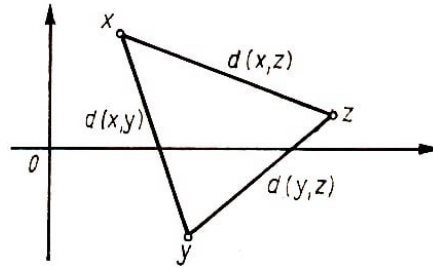


Abb. 5

Erster Exkurs: Es seien  $a$  und  $b$  beliebige reelle Zahlen. Dann ist auch die Zahl  $(a - b)$  reell, und folglich ist die Zahl  $(a - b)^2$  nichtnegativ, d.h.

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

daraus folgt

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Diese Ungleichung gilt für je zwei reelle Zahlen  $a, b$ . Wählen wir spezielle  $a$  und  $b$ , beispielsweise  $a = \sqrt{\alpha}$  und  $b = \sqrt{\beta}$  mit den nichtnegativen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , so erhalten wir die Ungleichung

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (8)$$

Es seien auch  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  nichtnegative Zahlen, und wir definieren die positiven Zahlen  $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$  und  $B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ .

Wählen wir in (8)  $\alpha = \frac{\alpha_i^2}{A}$  und  $\beta = \frac{\beta_i^2}{B}$ , so erhalten wir für  $i = 1, 2, 3$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1\beta_1}{\sqrt{AB}} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1^2}{A} + \frac{\beta_1^2}{B} \right) \\ \frac{\alpha_2\beta_2}{\sqrt{AB}} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2^2}{A} + \frac{\beta_2^2}{B} \right) \\ \frac{\alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_3^2}{B} \right) \end{aligned}$$

und durch Addition auf beiden Seiten entsteht die Ungleichung

$$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{B} \right) = 1$$

(die letzte Gleichung folgt aus der obengenannten Definition der Zahlen  $A$  und  $B$ ). Nach Multiplikation mit der nichtnegativen Zahl  $\sqrt{AB}$  erhalten wir dann die sogenannte Höldersche<sup>4</sup> Ungleichung

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Diese Ungleichung gilt für alle reellen Zahlen  $\alpha_i$  und  $\beta_i$ . Wir haben zwar bei dieser Herleitung verlangt, dass  $A > 0$  und  $B > 0$  seien, jedoch gilt (9) natürlich auch für  $A = 0$  und  $B = 0$ . Die Ungleichung hat dann die Form  $0 \leq 0$ . (Man beweise das!)

Aus der Ungleichung (9) folgt eine weitere wichtige Beziehung, die sogenannte Minkowskische<sup>5</sup> Ungleichung

$$\sqrt{(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2} \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} \quad (10)$$

welche für alle reellen Zahlen  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  gilt.

Um die Gültigkeit dieser Ungleichung (10) zu zeigen, setzen wir

$$C = (\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2$$

und können schreiben

$$C = [\gamma_1(\gamma_1 + \delta_1) + \gamma_2(\gamma_2 + \delta_2) + \gamma_3(\gamma_3 + \delta_3)] + [\delta_1(\gamma_1 + \delta_1) + \delta_2(\gamma_2 + \delta_2) + \delta_3(\gamma_3 + \delta_3)]$$

Wenden wir nun auf die zwei Ausdrücke in den eckigen Klammern jeweils die Höldersche Ungleichung (9) an (in der ersten Klammer steht  $\gamma_i$  für  $\alpha_i$ ,  $(\gamma_i + \delta_i)$  für  $\beta_i$  usw., d.h., allgemein gilt  $\alpha_i = \gamma_i$  und  $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$ ; für die zweite Klammer gilt entsprechend  $\alpha_i = \delta_i$  und  $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$ , für  $i = 1, 2, 3$ ), dann erhalten wir

$$\begin{aligned} C &\leq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}[(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}}[(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{C}[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

Für  $C = 0$  gilt die Ungleichung (10). Ist  $C \neq 0$  (nach Definition gilt dann  $C > 0$ ), so genügt es, die vorhergehende Ungleichung durch die Zahl  $\sqrt{C} > 0$  zu dividieren, und wir erhalten sofort die Minkowskische Ungleichung (10).

Ende des ersten Exkurses

Nun können wir auch die Dreiecksungleichung (7) beweisen:

Diese ergibt sich aus (10), wenn wir  $\gamma_i = x_i - y_i$  und  $\delta_i = y_i - z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , setzen, denn dann ist  $\gamma_i + \delta_i = x_i - z_i$  und es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2} \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Otto Hölder (1859-1937), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Leipzig.

<sup>5</sup>Hermann Minkowski (1864-1909), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Zürich und Göttingen.

Unter Verwendung der Punkte  $x, y$  und  $z$  entspricht dies der Dreiecksungleichung (7).

Fassen wir die drei Eigenschaften des euklidischen Abstandes zusammen, welche wir bereits bewiesen haben:

A:  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,

B:  $d(x, y) = d(y, x)$  für je zwei Punkte  $x, y$ ,

C:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für je drei Punkte  $x, y, z$ .

Unser Abstand  $d$  hat jedoch eine Reihe weiterer Eigenschaften. Wir definieren für  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  und für die reelle Zahl  $\alpha$  die Summe  $x + y$  sowie das Produkt  $\alpha x$ :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Man beweise, dass gilt:

D:  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$  für je drei Punkte  $x, y, z$ ,

E:  $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$  für je zwei Punkte  $x, y$  und für jede reelle Zahl  $\alpha$

Wir beschränken uns im weiteren auf die Eigenschaften A, B, C und versuchen, den Entfernungsbegriff auf weniger anschauliche Mengen als die Menge der Punkte des euklidischen Raumes zu verallgemeinern. Dabei werden wir uns bemühen, möglichst wenig Bedingungen an diese Mengen zu stellen und möglichst wenig neue Begriffe einzuführen.

Würden wir auch die Eigenschaften D und E verwenden, müssten wir die Summe zweier Elemente der Menge und ihr  $\alpha$ -faches einführen, und das wäre schon eine wesentliche Einschränkung.

Beispiel 1: Kehren wir zu unserem Touristen und zu seinem blinden Vertrauen zur Landkarte zurück. Er verstand unter der Entfernung zweier Punkte des  $E_3$  den euklidischen Abstand ihrer Bildpunkte in der Ebene  $E_2$ , d.h. auf der Landkarte.

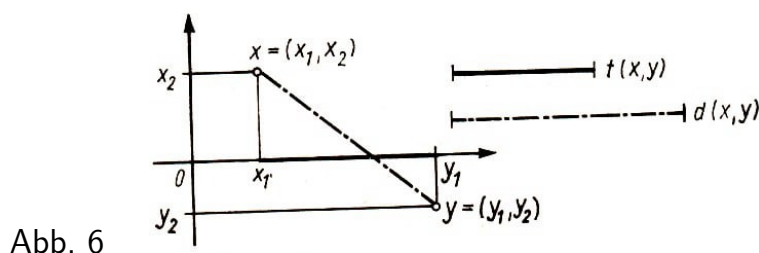


Abb. 6

Wir verzichten auf eine weitere Dimension und definieren einen neuen Abstand  $t(x, y)$  als euklidischen Abstand der Bildpunkte  $x_1$  und  $y_1$  auf der entsprechenden Achse (siehe dazu Abbildung 6):

$$t(x, y) = |x_1 - y_1| \quad (11)$$

Hat dieser neue Abstand in der Ebene wieder die Eigenschaften A bis C? Die Eigenschaften B und C sind offensichtlich erfüllt, denn für  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  und

$z = (z_1, z_2)$  gilt

$$t(x, y) = |x_1 - y_1| = |-(y_1 - x_1)| = |y_1 - x_1| = t(y, x)$$

$$t(x, z) = |x_1 - z_1| = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| = t(x, y) + t(y, z)$$

Es ist auch  $t(x, y) \geq 0$ , und für  $x = y$  gilt  $t(x, y) = 0$ . Die Implikation  $\Rightarrow$  aus Eigenschaft A ist jedoch nicht erfüllt, denn obwohl die Punkte  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (x_1, y_2)$  für  $x_2 \neq y_2$  verschieden sind, gilt  $t(x, y) = |x_1 - x_1| = 0$  (siehe Abbildung 7).

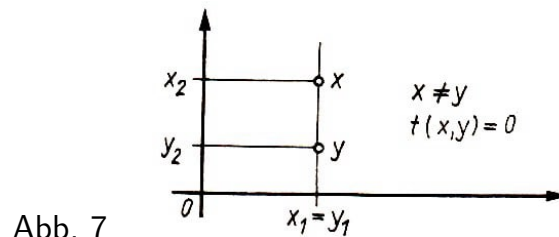


Abb. 7

Beispiel 2: Stellen wir uns ein Wesen vor, dessen Welt eine Kreislinie in der Ebene ist und das sich auf diesem Kreis lediglich im Uhrzeigersinn bewegen kann. Dieses Wesen will nun seine Bewegung auf dem Kreis messen. Wir bezeichnen deshalb mit  $b(x, y)$  die Entfernung, welche unser Wesen zurücklegt, wenn es sich vom Punkt  $x$  zum Punkt  $y$  bewegt.

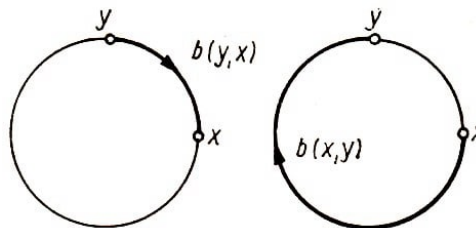


Abb. 8

Wie Abb. 8 zeigt, hat der Abstand  $b$  bereits nicht mehr unsere Eigenschaft B, denn für die betrachteten Punkte aus Abbildung 8 ist der Abstand  $b(y, x)$  etwa dreimal kleiner als der Abstand  $b(x, y)$ , folglich gilt  $b(x, y) \neq b(y, x)$ .

(Die Gleichung  $b(x, y) = b(y, x)$  gilt dann und nur dann, wenn die Punkte  $x$  und  $y$  auf dem gleichen Durchmesser unseres Kreises liegen.)

Aufgabe 1: Hat der Abstand  $b$  aus Beispiel 2 die Eigenschaften A und C?

Der Abstand  $r$ , den wir in Beispiel 1 definierten, hat nicht alle Eigenschaften A bis C, obgleich er auf anschauliche Art definiert worden ist und wir unsere Erfahrungen mit Darstellungen auf Landkarten ausnutzten. Weil nicht einmal der Abstand  $b$  aus Beispiel 2 alle drei Eigenschaften aufweist, stellt sich natürlich die Frage, ob überhaupt irgendein aus der Anschauung heraus definierter Abstand existiert, welcher die Eigenschaften A, B und C besitzt.

Führen wir nun zwei Beispiele dafür an, dass solche Abstände tatsächlich existieren. Der Abstand  $t(x, y)$  war "schlecht definiert", weil er die "Höhenunterschiede" der Punkte  $x$  und  $y$  nicht in Betracht zog. Wir wollen zeigen, wie dieser "topographische" Mangel zu beseitigen ist.

Bemerkung 2: Der Abstand  $b(x, y)$  im Beispiel 2 hat ungewöhnliche Eigenschaften, denn auch die "Lebensbedingungen" unseres "Wesens auf der Kreislinie" sind ungewöhnlich. Wenn jedoch ein Abstand die Eigenschaft B hat, so brauchen wir nicht mehr zwischen dem Abstand des Punktes  $x$  vom Punkt  $y$  und dem Abstand des Punktes  $y$  vom Punkt  $x$  zu unterscheiden, sondern wir sprechen dann nur noch von dem Abstand der Punkte  $x$  und  $y$ .

Beispiel 3: Stellen wir uns eine in einer Ebene liegende Stadt vor, deren Straßen ein rechtwinkliges Netz bilden, und verdeutlichen wir uns die Aufgabe des Briefträgers, welcher ein Telegramm vom Ort  $x$  an den Ort  $y$  zu befördern hat.

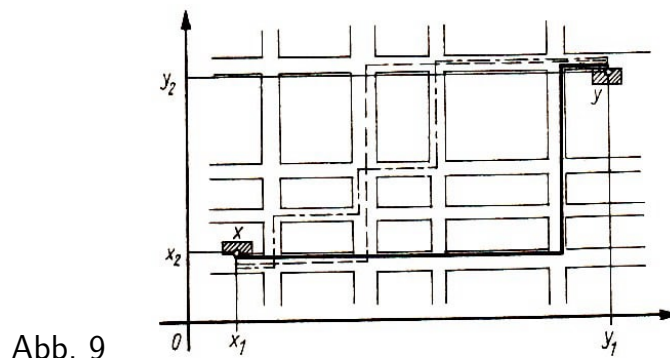


Abb. 9

Der Briefträger will begreiflicherweise den kürzesten Weg wählen. Es stehen aber mehrere Möglichkeiten zur Auswahl, und drei von ihnen sind in Abb. 9 eingezeichnet. Ein kürzerer Weg existiert nicht, denn der Briefträger kann nur die vorhandenen Straßen benutzen.

Unsere Stadt liegt in der Ebene  $E_2$ , und ordnen wir den beiden Punkten  $x$  und  $y$  die Koordinaten  $(x_1, x_2)$  und  $(y_1, y_2)$  zu, so ist die Länge des Weges, den der Briefträger zurücklegen muss, gleich der Summe der Längen der Bildstrecken von  $xy$  auf beiden Koordinatenachsen. Wir bezeichnen diesen "postalischen" Abstand mit  $p(x, y)$ . Dann gilt

$$P(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Wir zeigen, dass dieser Abstand unsere drei Eigenschaften A, B und C hat:

A: Aus (12) folgt sofort, dass  $p(x, y) \geq 0$  ist, und für  $x = y$  gilt  $p(x, y) = 0$ . Es genügt daher, die Gültigkeit der Implikation  $p(x, y) = 0 \rightarrow x = y$  zu beweisen.

Ist aber  $p(x, y) = 0$ , so müssen beide Summanden gleich Null sein, d.h.  $|x_1 - y_1| = 0$  und  $|x_2 - y_2| = 0$ . Daraus folgt  $x_1 = y_1$  und  $x_2 = y_2$ , also auch  $x = y$ .

$$\begin{aligned} B: \quad p(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |-(y_1 - x_1)| + |-(y_2 - x_2)| \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = p(y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C: \quad p(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \\ &\leq (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|) \\ &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = p(x, y) + p(y, z) \end{aligned}$$

Es genügt also, zum "schlecht definierten" Abstand  $t(x, y)$  noch die Entfernung der Bildpunkte  $x_2$  und  $y_2$  auf der entsprechenden Achse hinzuzufügen, und es entsteht der "gut definierte" Abstand  $p(x, y)$ .

Bemerkung 3: Aus Gründen der Anschaulichkeit beschränken wir uns auf die Ebene  $E_2$ , aber ebenso wie der euklidische Abstand  $d$  kann auch der Abstand  $p$  in  $E_1$  und  $E_3$  definiert werden.

In  $E_1$  gilt

$$p(x, y) = |x_1 - y_1|$$

und in  $E_3$  ist

$$p(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

Dass auch dann für  $p$  die Eigenschaften A, B und C gelten, beweise der Leser selbst!

Auf der Geraden  $E_1$  ergibt unser "postalischer" Abstand  $p$  nichts Neues, dort gilt  $p(x, y) = d(x, y)$ . Jedoch in  $E_2$  und in  $E_3$  stellt  $p$  schon eine neue Qualität dar.

Bezüglich der gleichen Bezeichnung  $p$  in  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  gilt auch hier unsere Bemerkung 1.

Beispiel 4: Wir definieren in  $E_2$  noch einen neuen Abstand:

$$m(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \quad (13)$$

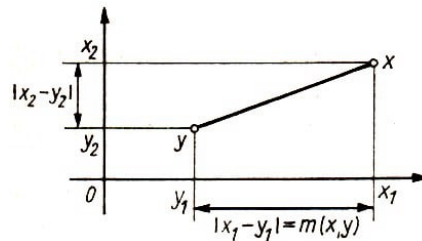


Abb. 10

Der Abstand zweier Punkte  $x$  und  $y$  in der Ebene ist also jetzt definiert als die größere von beiden Bildstrecken bei Projektion der Strecke  $xy$  auf die Koordinatenachsen. Auch dieser Abstand  $m$  hat die Eigenschaften A bis C:

A: Aus (13) geht sofort hervor, dass  $m(x, y) \geq 0$  und dass  $m(x, y) = 0$  für  $x = y$  ist. Setzen wir nun voraus, dass  $m(x, y) = 0$  gilt, dann muss die größere der beiden nichtnegativen Zahlen  $|x_1 - y_1|$ ,  $|x_2 - y_1|$  gleich Null sein, folglich müssen beide gleich Null sein:  $|x_1 - y_1| = 0$  und  $|x_2 - y_2| = 0$ , d.h.  $x = y$ .

B:  $m(x, y) = m(y, x)$ , denn  $|x_i - y_i| = |-(y_i - x_i)| = |y_i - x_i|$ ,  $i = 1, 2$ .

Zweiter Exkurs:

Es seien  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $A$  und  $B$  reelle Zahlen. Der Leser beweise selbst, dass folgende Beziehungen gültig sind:

Für  $a \leq A$  und  $b \leq B$  ist  $\max(a, b) \leq \max(A, B)$  (14).

$$\max(a + c, b + d) \leq \max(a, b) + \max(c, d) \quad (15)$$

Ende des zweiten Exkurses

C: Es gilt

$$\begin{aligned} m(x, z) &= \max(|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|) \\ &= \max[|(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)|, |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)|] \end{aligned}$$

Weil  $|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$  ist folgt aus (14)

$$m(x, z) \leq \max[|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|]$$

und wegen (15) gilt dann

$$m(x, z) \leq \max[|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|] + \max[|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|] = m(x, y) + m(y, z)$$

Bemerkung 4: Wiederum können wir diesen Abstand  $m$  auch in  $E_1$  definieren:

$$m(x, y) = \max[|x_1 - y_1|] = |x_1 - y_1|$$

und auch in  $E_3$ :

$$m(x, y) = \max[|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|]$$

Qualitativ erhalten wir also einen unterschiedlichen Abstand nur in  $E_2$  und in  $E_3$ .

Wir lernten bisher drei Typen von Abständen kennen,  $d$ ,  $p$  und  $m$ , welche alle die Eigenschaften A, B, C hatten. Während in  $E_1$

$$d(x, y) = p(x, y) = m(x, y) \tag{16}$$

ist, gilt in  $E_2$  die Ungleichung

$$d(x, y) \leq p(x, y) \leq \sqrt{2}d(x, y) \tag{17}$$

für je zwei Punkte  $x, y$  aus  $E_2$ .

Wir beweisen nun (17): Die erste Ungleichung ergibt sich sofort aus der offensichtlichen Ungleichung

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$$

Setzen wir hier  $\alpha = |x_1 - y_1|$  und  $\beta = |x_2 - y_2|$ , so erhalten wir die erste Ungleichung in (17) durch Wurzelziehen.

Im ersten Exkurs bewiesen wir  $2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$ , folglich gilt

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

und mit gleicher Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  sowie erneutem Radizieren geht daraus die zweite Ungleichung in (17) hervor.

Eine ähnliche Beziehung gilt in  $E_2$  zwischen den Abständen  $d$  und  $m$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}d(x, y) \leq m(x, y) \leq d(x, y) \tag{18}$$

Wir beweisen (18): Weil  $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  ist und entsprechend  $|\beta| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  gilt, ist auch  $\max(|\alpha|, |\beta|) \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , und daraus folgt die zweite Ungleichung in (18).

Außerdem ist

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 2 \max(\alpha^2, \beta^2) = 2[\max(|\alpha|, |\beta|)]^2$$

oder  $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ , und daraus geht die erste Ungleichung in (18) hervor.

Aus (17) und (18) erhalten wir folgende Beziehung zwischen den Abständen  $p$  und  $m$ :

$$\frac{1}{2}p(x, y) \leq m(x, y) \leq p(x, y) \quad (19)$$

Der Leser beweise (19) selbst!

Ähnliche wechselseitige Abschätzungen der drei Abstandstypen  $d$ ,  $p$  und  $m$  - allerdings mit anderen Konstanten - können auch in  $E_3$  abgeleitet werden.

Wir empfehlen dem Leser, sich die Bedeutung der Ungleichungen (17), (18) und (19) an einem Bild zu illustrieren und zu beweisen, dass die Konstanten, welche in diesen Ungleichungen auftreten, nicht besser gewählt werden können.

In (17) gilt beispielsweise das Gleichheitszeichen der ersten Ungleichung, wenn wir  $x = (0, 0)$  und  $y = (a, 0)$  wählen, wobei  $a$  eine von Null verschiedene Zahl ist, denn dann gilt  $d(x, y) = p(x, y) = |a|$ .

In der zweiten Ungleichung in (17) entsteht Gleichheit für  $x = (0, 0)$  und  $y = (a, a)$ ,  $a \neq 0$ , denn dann ist  $p(x, y) = 2|a|$  und  $d(x, y) = \sqrt{2}|a|$ .

Wir wählen nun als Abstandsbegriff den euklidischen Abstand  $d(x, y)$ . Wenn sich die beiden Punkte  $x$  und  $y$  unbeschränkt voneinander entfernen, so wächst auch die Zahl  $d(x, y)$  unbeschränkt. Aus den Ungleichungen (17) und (18) bzw. aus den Gleichungen (16) geht hervor, dass auch die Zahlen  $p(x, y)$  und  $m(x, y)$  unbeschränkt wachsen. Das kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$d(x, y) \rightarrow \infty \Rightarrow p(x, y) \rightarrow \infty, m(x, y) \rightarrow \infty \quad (20)$$

Wir führen nun ein Beispiel eines Abstandes an, wo dies nicht der Fall sein muss:

Beispiel 5: Der Abstand  $s(x, y)$  der Punkte  $x$  und  $y$  auf der Geraden  $E_1$  wird wie folgt definiert:

Wir konstruieren einen Kreis  $k$  mit dem Radius  $R$ , welcher die Gerade  $E_1$  im Punkt  $O$  berührt. Den Punkt auf  $k$ , der auf dem gleichen Durchmesser wie der Punkt  $O$  liegt, bezeichnen wir mit  $S$ . Den Punkt  $x = (x_1)$  auf  $E_1$  verbinden wir mit  $S$ , und diese Verbindungslinie schneidet den Kreis  $k$  im Punkt  $x^* = (x_1^*, x_1^*)$ .

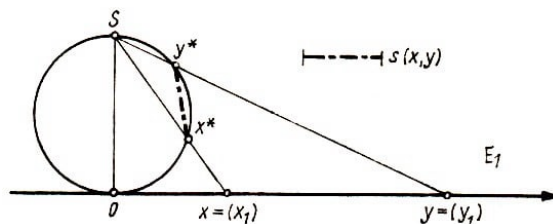


Abb. 11



Für dessen Koordinaten gilt

$$x_1^* = \frac{4R^2 x_1}{4R^2 + x_1^2}, \quad x_2^* = \frac{2Rx_1^2}{4R^2 + x_1^2} \quad (21)$$

(Man führe die zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes  $x^*$  notwendigen Berechnungen selbst aus!) Damit ordnen wir jedem Punkt  $x$  auf  $E_1$  eindeutig einen Punkt  $x^*$  auf dem Kreis  $k$  zu, also entstehen Punkte in  $E_1$ .

Jedem Punkt auf  $E_1$  entspricht genau ein Punkt auf  $k$ , und auch umgekehrt entspricht jedem Punkt auf  $k$  (mit Ausnahme des Punktes  $S$ ) genau ein Punkt auf  $E_1$ . Aus der Formel (21) ist auch zu ersehen, dass gilt:

$$x^* \neq y^* \Leftrightarrow x \neq y$$

Nun setzen wir

$$s(x, y) = d(x^*, y^*) \quad (22)$$

d.h., als Abstand  $s(x, y)$  der Punkte  $x$  und  $y$  in  $E_1$  definieren wir den euklidischen Abstand der ihnen in  $E_2$  zugeordneten Punkte  $x^*$  und  $y^*$ .

Dieser Abstand  $s$  hat die Eigenschaften A bis C, denn er beruht auf dem Abstandsbegriff  $d$ , und die Zuordnung zwischen den Punkten  $x$  und  $x^*$  ist eineindeutig.

Der Abstand  $s$  gehört also zu den "gut definierten" Abständen. Von  $d$ ,  $p$  und  $m$  unterscheidet er sich unter anderem dadurch, dass

$$s(x, y) \leq 2R \quad \text{für alle Punkte } x, y \text{ auf } E_1$$

gilt, denn die Punkte  $x^*$  und  $y^*$  liegen immer auf der Kreislinie  $k$ , und ihr euklidischer Abstand in  $E_2$  kann daher nicht größer sein als der Durchmesser des Kreises  $k$ . Der Abstand  $s$  hat folglich nicht die Eigenschaft (20).

Bemerkung 5: So eine Entfernung wäre im Alltag sehr praktisch: Wir würden  $R = 1$  km wählen, und keine Entfernung könnte größer als 2 km sein. Dies wäre uns oft sehr recht!

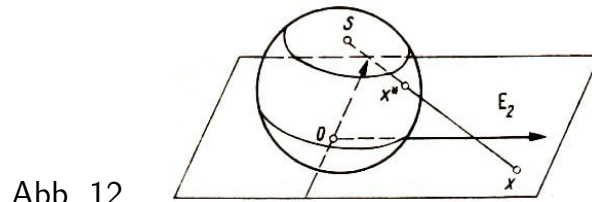


Abb. 12

Bemerkung 6: Ganz analog können wir auch in der Ebene vorgehen: Wir konstruieren eine Kugel, welche die Ebene berührt, und dem Punkt  $x$  aus dieser Ebene  $E_2$  ordnen wir den Kugeldurchstoßpunkt  $x^*$  der Verbindungsline der Punkte  $S$  und  $x$  zu. Diese Zuordnung wird in Abbildung 12 dargestellt und heißt stereographische Projektion. Dann setzen wir für die Punkte  $x, y$  aus  $E_2$

$$s(x, y) = d(x^*, y^*) \quad (23)$$

wobei  $d$  der euklidische Abstand in  $E_3$  ist.

Aufgabe 2: Wenn wir die Punkte  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$  in der Ebene  $E_2$  mit Hilfe komplexer Zahlen darstellen, wenn wir also  $\xi = x_1 + ix_2$ ,  $\eta = y_1 + iy_2$  setzen, dann gilt

$$d(x, y) = |\xi - \eta|$$

wobei rechts der übliche Ausdruck für den absoluten Betrag einer komplexen Zahl steht. Man beweise, dass der Abstand  $s$  aus (23) mit Hilfe absoluter Beträge komplexer Zahlen wie folgt zu erklären ist:

$$s(x, y) = \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{(1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2)}}$$

Wir kennen jetzt bereits vier Typen "gut definierter" Entfernungen in der Ebene  $E_2$ , nämlich die Abstände  $d$ ,  $p$ ,  $m$  und  $s$ , und wollen noch zwei weitere Abstände in der Ebene einführen. Der erste Typ verallgemeinert die Abstände  $d$  und  $p$ :

Beispiel 6: Es gelte  $p \geq 1$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . Wir definieren den Abstand  $d_p(x, y)$ :

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (24)$$

Es ist sofort zu sehen, dass die Abstände  $d$  und  $p$  spezielle Fälle dieses Abstandes sind; den euklidischen Abstand erhalten wir für  $p = 2$  und die "postalische" Entfernung für  $p = 1$ :  $d = d_2$ ,  $p = d_1$ .

Daher ist zu erwarten, dass auch der Abstand  $d_p$  die Bedingungen A, B und C erfüllen wird. Die Gültigkeit von A und B kann der Leser sicher selbst beweisen. Die Eigenschaft C ergibt sich aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\left[ \sum_{i=1}^n |\gamma_i + \delta_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \sum_{i=1}^n |\delta_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (25)$$

deren Spezialfall (10) wir bereits kennenlernten und die für  $p > 1$  aus der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \left[ \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{p}{p-1}, p > 1 \quad (26)$$

folgt. In beiden Ungleichungen ist  $n$  eine natürliche Zahl, und  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sind beliebige komplexe Zahlen.

Die Dreiecksungleichung (im  $E_2$ )

$$d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z)$$

erhalten wir aus (25), wenn wir  $n = 2$ ,  $\gamma_i = x_i - y_i$  und  $\delta_i = y_i - z_i$ ,  $i = 1, 2$ , wählen.

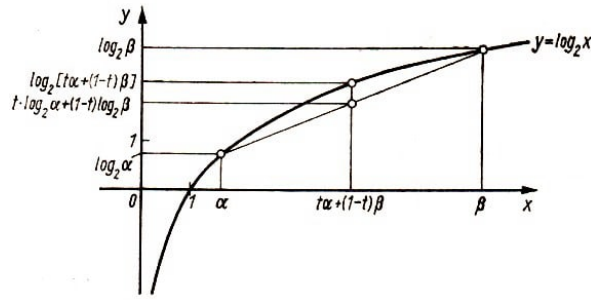


Abb. 13

Dritter Exkurs: Wir deuten hier den Beweis der Ungleichungen (25) und (26) an. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Beweises aus dem ersten Exkurs, und wir setzen voraus, dass  $p > 1$  ist, denn für  $p = 1$  folgt (25) sofort aus der elementaren Ungleichung  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Die Strecke, die zwei Punkte des Graphen der Funktion  $y = \log_2 x$  verbindet, liegt unterhalb dieses Graphen, d.h., für  $0 < \alpha \leq \beta$  gilt:

$$t \log_2 \alpha + (1 - t) \log_2 \beta \leq \log_2 [t\alpha + (1 - t)\beta] \quad (*)$$

(s. Abb. 13; jeder Punkt der Abszissenstrecke  $\alpha\beta$  kann in der Form  $t\alpha + (1 - t)\beta$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , geschrieben werden, und jeder Punkt, welcher auf der die Punkte  $(\alpha, \log_2 \alpha)$ ,  $(\beta, \log_2 \beta)$  verbindenden Strecke liegt, ist in der Form

$$(t\alpha + (1 - t)\beta, t \log_2 \alpha + (1 - t) \log_2 \beta), \quad 0 \leq t \leq 1$$

ausdrückbar). Die Ungleichung (\*) kann wie folgt geschrieben werden:

$$\log_2(\alpha^t \beta^{1-t}) \leq \log_2 [t\alpha + (1 - t)\beta], \quad 0 \leq t \leq 1$$

Daraus geht  $\alpha^t \beta^{1-t} \leq t\alpha + (1 - t)\beta$  hervor. Wählen wir  $t = \frac{1}{p}$ , so wird  $1 - t = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$  sein, und wir erhalten die Ungleichung

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \alpha + \frac{1}{q} \beta \quad (27)$$

welche für alle  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und für  $p > 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$  gilt.

Wenn wir  $A = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p$ ,  $B = \sum_{i=1}^n |\beta_i|^p$  setzen sowie  $A > 0$ ,  $B > 0$  annehmen und die Ungleichung (27) fortlaufend benutzen, zuerst für  $\alpha|\alpha_1|^p/A$ ,  $\beta = |\beta_1|^q/B$ , dann für  $\alpha|\alpha_2|^p/A$ ,  $\beta = |\beta_2|^q/B$  usw. bis  $\alpha|\alpha_n|^p/A$ ,  $\beta = |\beta_n|^q/B$ , so erhalten wir  $n$  Ungleichungen. Durch deren Addition entsteht

$$\frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i|}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und das ist eigentlich schon die Ungleichung (26). Für  $A = 0$  oder  $B = 0$  ist auch  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| = 0$ , und die Ungleichung (26) gilt ebenfalls (ausführlich ist dieser Beweisgang

für einen etwas einfacheren Fall im ersten Exkurs angeführt).

Die Ableitung der Ungleichung (27) aus (26) ähnelt abermals unserem Vorgehen im ersten Exkurs: Es genügt zu schreiben

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^n |\gamma_i + \delta_i|^p = \sum_{i=1}^n |\gamma_i + \delta_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |\delta_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} \end{aligned}$$

und auf die beiden letzten Summen die Ungleichung (26) anzuwenden; einmal für  $\alpha_i = |\gamma_i|$ ,  $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$ , ein andermal für  $\alpha_i = |\delta_i|$ ,  $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$ .

Man führe den hier skizzierten Beweisgang einschließlich einer Diskussion der Fälle  $C = 0$ ,  $C > 0$  ausführlich durch!

Endes des dritten Exkurses

Beispiel 7: Wir definieren in  $E_2$  den Abstand  $b(x, y)$  der Punkte  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  mit der Vorschrift

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|}$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  positive Konstanten sind. Auch dieser Abstand entspricht den Bedingungen A bis C. Die Gültigkeit der Bedingungen A und B beweise der Leser wieder selbst!

Die Dreiecksungleichung C geht aus der Ungleichung

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \quad (29)$$

hervor, welche für jedes Paar reeller Zahlen  $\alpha$ ,  $\beta$ . Wenn wir nämlich  $\alpha = x_i - y_i$ ,  $\beta = y_i - z_i$ ,  $i = 1, 2$ , wählen, wird  $\alpha + \beta = x_i - z_i$  sein, so dass wir

$$\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

erhalten. Wird diese Ungleichung mit einer positiven Zahl  $c_i$  multipliziert, entstehen zwei Ungleichungen (für  $i = 1$  und für  $i = 2$ ), und nach ihrer Addition gilt:

$$b(x, z) \leq b(x, y) + b(y, z)$$

Ebenso wie der Abstand  $s$  geht auch  $b$  nicht gegen unendlich, wenn  $d(x, y)$  unbeschränkt wächst. Es gilt nämlich

$$b(x, y) < c_1 + c_2$$

für alle Punkte  $x, y$  aus  $E_2$  wegen  $\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} < 1$ .

Bemerkung 7: Es ist wieder möglich, einen analogen Abstand auch auf der Geraden  $E_1$  zu definieren:

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|}$$

und in  $E_3$ :

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|} + c_3 \frac{|x_3 - y_3|}{1 + |x_3 - y_3|}$$

Vierter Exkurs: Wir beweisen abschließend die Ungleichung (29):

(I) Wenn wenigstens eine der Zahlen  $\alpha, \beta$  gleich Null ist, so gilt in (29) das Gleichheitszeichen.

(II) Wenn beide Zahlen ungleich Null sind und wenn sie gleiche Vorzeichen haben, kann vorausgesetzt werden, dass  $\alpha > 0, \beta > 0$  ist. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$  und

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} &= \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} = \frac{\alpha}{1 + \alpha + \beta} + \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta} \\ &< \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{\beta}{1 + |\beta|} \end{aligned}$$

denn es ist  $1 + \alpha + \beta > 1 + \alpha$  oder  $\frac{1}{1 + \alpha + \beta} < \frac{1}{1 + \alpha}$  und entsprechend  $1 + \alpha + \beta > 1 + \beta$  oder  $\frac{1}{1 + \alpha + \beta} < \frac{1}{1 + \beta}$ .

(III) Wenn beide Zahlen  $\alpha, \beta$  ungleich Null sind und wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, so können wir mit Blick auf die Symmetrie der Formel (29) bezüglich  $\alpha$  und  $\beta$  voraussetzen, dass  $|\alpha| \geq |\beta| > 0$  ist. Dann gilt  $0 \leq |\alpha + \beta| < |\alpha|$  und folglich auch

$$|\alpha + \beta|(1 + |\alpha|) = |\alpha + \beta| + |\alpha + \beta| \cdot |\alpha| < |\alpha| + |\alpha + \beta| \cdot |\alpha| = |\alpha|(1 + |\alpha + \beta|)$$

Wenn wir diese Ungleichung mit der positiven Zahl  $\frac{1}{1 + |\alpha|} \cdot \frac{1}{1 + |\alpha + \beta|}$  multiplizieren, so erhalten wir

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|}$$

und daraus folgt (29).

Ende des vierten Exkurses

## 2 Metrik und metrischer Raum

Bisher haben wir einige Abstandstypen in der Ebene kennengelernt, welche durchweg die Bedingungen A bis C erfüllen.

Wir verallgemeinern nun unsere Erkenntnisse und übertragen den Begriff der Entfernung auf allgemeine, nicht näher beschriebene Mengen.

Definition 1: Es sei  $M$  irgendeine Menge, deren Elemente wir mit  $x, y, z, \dots$  bezeichnen. Wir sagen, dass auf der Menge  $M$  die Metrik  $\rho$  definiert ist, wenn jedem geordneten Paar von Elementen  $x, y$  aus  $M$  eine nichtnegative Zahl zugeordnet wird, welche wir mit

$$\rho(x, y)$$

d.h. Abstand des Elementes  $x$  vom Element  $y$ , bezeichnen<sup>6</sup> und welche folgende Eigenschaften hat:

A:  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

B:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  für je zwei Elemente  $x, y$  aus  $M$ ,

C:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  für je drei Elemente  $x, y, z$  aus  $M$ .

Bemerkung 8: Die Definition 1 ist eigentlich zu ausführlich. Es würde bereits die Definition 1\* genügen:

Definition 1\*: Auf der Menge  $M$  ist eine Metrik definiert, wenn jedem geordneten Paar von Elementen  $x, y$  aus  $M$  eine reelle Zahl  $\rho(x, y)$  zugeordnet werden kann, die folgende

A\*:  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

B\*:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  für je drei Elemente  $x, y, z$  aus  $M$ .

Wir beweisen, dass damit bereits alle Bedingungen der Definition 1 erfüllt sind:

1. Wenn wir in B\*  $z = x$  setzen, erhalten wir unter Verwendung von A\*

$$0 = \rho(x, x) \leq \rho(y, x) + \rho(y, x) = 2\rho(y, x)$$

Daraus folgt  $\rho(y, x) \geq 0$  für je zwei Elemente  $x, y$  aus  $M$ , d.h., die Zahl  $\rho(x, y)$ , von der wir nur annahmen, dass sie reell sei, ist sogar nichtnegativ.

2. Wenn wir in B\*  $z = y$  setzen, erhalten wir unter abermaliger Verwendung von A\*

$$\rho(x, y) \leq \rho(y, x) + \rho(y, y) = \rho(y, x) \quad \text{d.h.} \quad \rho(x, y) \leq \rho(y, x)$$

für  $x, y$  aus  $M$ .

Weil  $x$  und  $y$  beliebige Elemente sind, können wir sie vertauschen und erhalten die ebenfalls gültige Ungleichung

$$\rho(y, x) \leq \rho(x, y)$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen geht B hervor.

---

<sup>6</sup> $\rho(x, y)$  ist eine reelle Zahlenfunktion, die auch Abstandsfunktion genannt wird.

3. Weil nun die Bedingung B erfüllt ist, können wir in  $B^*$  für  $\rho(y, x)$  auch  $\rho(x, y)$  schreiben und haben die Dreiecksungleichung C.

Wir werden im weiteren die "anschaulichere" Definition 1 benutzen, aus welcher die Analogie der Metrik und des euklidischen Abstandes hervorgeht.

Definition 2: Die Menge  $M$ , versehen mit einer Metrik  $\rho$ , nennen wir metrischen Raum, und wir bezeichnen ihn mit dem Symbol

$$\{M, \rho\}$$

Wenn es möglich ist, auf der Menge  $M$  eine andere Metrik  $\sigma$  zu definieren, wenn also je zwei Elementen  $x, y$  aus  $M$  eine nichtnegative Zahl  $\sigma(x, y)$  zugeordnet werden kann, welche wieder die Eigenschaften

$$A: \sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$B: \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$

$$C: \sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

hat, so ist damit abermals ein metrischer Raum

$$\{M, \sigma\}$$

bestimmt, welcher von  $\{M, \rho\}$  verschieden ist, falls  $\rho$  und  $\sigma$  verschiedene Metriken sind, d.h. wenn wenigstens für ein Paar der Elemente  $x, y$  aus  $M$  gilt:

$$\rho(x, y) \neq \sigma(x, y)$$

Deshalb heben wir beim Bezeichnen des metrischen Raumes ausdrücklich neben der Menge  $M$  auch die Metriken  $\rho$  bzw.  $\sigma$  hervor.

Beispiel 8: Inzwischen sind uns folgende metrische Räume bekannt:

$$\{E_2, d\} \quad (30)$$

$$\{E_2, p\} \quad (\text{siehe Beispiel 3}) \quad (31)$$

$$\{E_2, m\} \quad (\text{siehe Beispiel 4}) \quad (32)$$

$$\{E_2, s\} \quad (\text{siehe Bemerkung 6}) \quad (33)$$

$$\{E_2, d_p\}, p > 1, p \neq 2 \quad (\text{siehe Beispiel 6}) \quad (34)$$

$$\{E_2, b\} \quad (\text{siehe Beispiel 7}) \quad (35)$$

Obwohl als Menge  $M$  stets die Ebene  $E_2$  verwendet wurde, handelt es sich um sechs verschiedene metrische Räume, weil sich die Metriken unterscheiden.

Beim Ordnen der verschiedenen Metriken wird folgende Definition nützlich sein:

Definition 3: Auf der Menge  $M$  seien zwei Metriken  $\rho$  und  $\sigma$  definiert. Wir nennen diese Metriken äquivalent, wenn zwei Konstanten  $k > 0$  und  $K > 0$  existieren, so dass für alle Elemente  $x, y$  aus  $M$  gilt:

$$k\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq K\rho(x, y) \quad (36)$$

Bemerkung 9: Aus der Formel (36) folgt

$$\frac{1}{K}\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \frac{1}{k}\sigma(x, y) \quad (37)$$

Beispiel 9: Die Metriken  $d$ ,  $p$ ,  $m$  sind äquivalente Metriken auf der Menge  $E_2$ , was aus den Formeln (17), (18) und (19) ersichtlich ist. Demgegenüber sind die Metriken  $d$  und  $s$  nicht äquivalent, denn bei Äquivalenz müsste eine positive Zahl  $K$  existieren mit

$$d(x, y) \leq Ks(x, y)$$

für alle  $x, y$  aus  $E_2$ , und es wäre also

$$d(x, y) \leq 2KR \quad (38)$$

für alle  $x, y$  aus  $E_2$ . Es genügt aber bereits,  $x = (0, 0)$ ,  $y = (4KR, 0)$  zu wählen, damit  $d(x, y) = 4KR > 2KR$  gilt, was ein Widerspruch zur Ungleichung (38) ist. Folglich sind  $d$  und  $s$  nicht äquivalent.

Wir führen nun einige Beispiele für metrische Räume an:

Beispiel 10: Es sei  $M$  die Menge aller Oberligamannschaften der DDR-Fußballmeisterschaft 1980/81. Es sind dies 14 Mannschaften, die wir mit  $a_1, a_2, \dots, a_{14}$  bezeichnen. Die Anzahl der nach Abschluss der Saison erreichten Pluspunkte bezeichnen wir mit  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 14$  (siehe Tabelle 1):

Tab. 1: DDR-Meisterschaft 1980/81 (Fußball)

1.	BFC Dynamo	39 : 13
2.	FC Carl Zeiss Jena	36 : 16
3.	1. FC Magdeburg	34 : 18
4.	Dynamo Dresden	34 : 18
5.	FC Vorwärts Frankfurt/O.	31 : 21
6.	1. FC Lok Leipzig	28 : 24
7.	FC Rot-Weiß Erfurt	27 : 25
8.	HFC Chemie	25 : 27
9.	FC Karl-Marx-Stadt	21 : 31
10.	FC Hansa Rostock	20 : 32
11.	Sachsenring Zwickau	18 : 34
12.	Wismut Aue	18 : 34
13.	Stahl Riesa	17 : 35
14.	Chemie Böhlen	16 : 36

Wir definieren auf dieser Menge  $M$  den "Abstand"  $\rho$  zweier "Elemente", d.h. zweier Mannschaften, durch folgende Vorschrift:

$$\rho(a_i, a_j) = |b_i - b_k| \quad (39)$$

Ein so definierter "Abstand" erfüllt die Bedingungen B und C, jedoch nicht die Bedingung A.



Beispielsweise ist der "Abstand" der "Elemente" Aue und Zwickau gleich Null, obwohl es sich um verschiedene Elemente handelt, d.h., die Implikation

$$\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

gilt nicht. Folglich ist  $\rho$  keine Metrik, und es liegt auch kein metrischer Raum vor.

Ein metrischer Raum lässt sich hingegen mit Hilfe der Menge  $N$  bilden, deren "Elemente" die ersten sechs Viererbobs der XIII. Olympischen Winterspiele sind.

Sie wurden hier  $a_1, a_2, \dots, a_6$  genannt. Mit  $b_i, i = 1, 2, \dots, 6$  bezeichnen wir die Gesamtfahrzeit (siehe Tabelle 2), und nach Gleichung (39) definieren wir einen Abstand  $\rho$ .

Diese Tabelle zeigt, dass den einzelnen Mannschaften stets verschiedene Zeiten zugeordnet werden, so dass

$$\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

gilt. Folglich ist die Bedingung A erfüllt, und wir erhalten den metrischen Raum  $\{N, \rho\}$ .

Tab. 2: XIII. Olympische Winterspiele in Lake Placid 1980 (Viererbob)

1.	DDR 1	3 : 59,92 min
2.	Schweiz I	4 : 00,87 min
3.	DDR II	4 : 00,97 min
4.	Österreich I	4 : 02,62 min
5.	Österreich II	4 : 02,95 min
6.	Schweiz II	4 : 03,69 min

Beispiel 11: Es sei  $p \geq 1$ , und  $M$  sei die Menge aller (unendlichen) Folgen  $(x_i)$  der komplexen Zahlen  $x_i$  mit der Eigenschaft, dass die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

konvergiert. Auf dieser Menge  $M$  definieren wir die Metrik wie folgt: Wenn  $x = (x_i)$  und  $y = (y_i)$  ist, so setzen wir

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (40)$$

Dann ist  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Der Ausdruck (40) ist sinnvoll, d.h., er ist endlich, denn es gilt die Minkowskische Ungleichung

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p \right)^{1/p}$$

(dies ist eine Analogie zur Ungleichung (26), allerdings für eine unendliche Reihe). Setzen wir in (41)  $\alpha_i = x_i$  und  $\beta_i = -y_i$ , so gilt

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty$$

weil  $x$  und  $y$  zu  $M$  gehören.

Folglich ist  $\rho(x, y)$  endlich. Wir empfehlen dem Leser, selbst zu beweisen, dass eine so definierte Metrik 9 wirklich die Eigenschaften A bis C hat; die Dreiecksungleichung geht aus (41) hervor, wenn wir dort für  $x = (x_i)$ ,  $y = (y_i)$  und  $z = (z_i)$   $\alpha_i = x_i - y_i$  und  $\beta_i = y_i - z_i$  wählen.

Fünfter Exkurs: Wir führen die Begriffe Supremum (obere Grenze) und Infimum (untere Grenze) für eine Menge reeller Zahlen ein.

Es sei  $K$  eine beliebige Menge reeller Zahlen; wir nennen die Zahl  $G$  das Supremum der Menge  $K$  und schreiben

$$G = \sup K$$

wenn diese Zahl  $G$  folgende zwei Eigenschaften hat:

- (1) für jede Zahl  $t$  aus  $K$  ist  $t \leq G$ ,
- (2) zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert eine Zahl  $t_\varepsilon$  aus  $K$ , abhängig von  $\varepsilon$ , so dass gilt

$$t_\varepsilon > G - \varepsilon$$

Wir bezeichnen als eine obere Schranke der Menge  $K$  jede Zahl  $\kappa$ , für welche gilt  $t \leq \kappa$  für alle  $t$  aus  $K$ .

Das Supremum der Menge  $K$  ist die kleinste obere Schranke von  $K$ . Der Begriff Supremum ist eine Verallgemeinerung des Begriffes Maximum:

Wenn die Menge  $K$  endlich ist,  $K = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ , so ist  $\sup K = \max(t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Der Unterschied zwischen Supremum und Maximum besteht darin, dass das Maximum der Menge  $K$  immer ein Element von  $K$  ist, während das Supremum  $G$  nicht zur Menge  $K$  gehören muss.

Beispiel: Wir wählen für die Menge  $K$  das offene Intervall  $(0, 1)$ . Dann ist  $\sup K = 1$  und gehört nicht zu  $K$ . Ein Maximum der Menge  $K$  existiert nicht. Wählen wir für  $K$  das halboffene Intervall  $(0, 1]$ , dann ist  $\sup K = 1$  Element der Menge  $K$  und gleich dem Maximum.

Hat die Menge  $K$  keine obere Schranke, so setzen wir

$$\sup K = +\infty$$

Ist  $K$  eine unendliche Folge,  $K = (t_i)$ , dann gebrauchen wir statt der Bezeichnung  $\sup K$  die Bezeichnung  $\sup t_i$ .

Es sei  $K$  wieder eine beliebige Menge reeller Zahlen; wir nennen die Zahl  $g$  das Infimum der Menge  $K$  und schreiben

$$g = \inf K$$

wenn  $g$  folgende zwei Eigenschaften hat:

- (1\*) für jede Zahl  $t$  aus  $K$  ist  $t \geq g$ ,
- (2\*) zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert eine Zahl  $T_\varepsilon$  aus  $K$ , abhängig von  $\varepsilon$ , so dass gilt

$$T_\varepsilon < g + \varepsilon$$

Wir bezeichnen als eine untere Schranke der Menge  $K$  jede Zahl  $\lambda$ , für welche gilt:  $t \geq \lambda$  für jedes  $t$  aus  $K$ .

Das Infimum der Menge  $K$  ist die größte untere Schranke von  $K$ . Der Begriff Infimum ist eine Verallgemeinerung des Begriffes Minimum. Hat die Menge  $K$  keine untere Schranke, so setzen wir

$$\inf K = -\infty$$

Einer der grundlegenden Sätze der Theorie der reellen Zahlen lautet:

Wenn die Menge  $K$  der reellen Zahlen nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist, dann existiert ihr Supremum  $G$  (bzw. ihr Infimum  $g$ ) und ist eindeutig bestimmt.

Ende der fünften Exkurses

Beispiel 12: Es sei  $N$  die Menge aller beschränkten Folgen  $(x_i)$ , d.h., das Element  $x = (x_i)$  gehört zu  $N$ , wenn eine Zahl  $c$ , die vom Element  $x$  abhängen kann, existiert, so dass

$$|x_i| \leq c$$

für alle natürlichen Zahlen  $i$  gilt. Diese Menge ist umfassender als die Menge  $M$  aus dem Beispiel 11, denn das Element  $(1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots)$  gehört zu  $N$  (es genügt,  $c = 1$  zu wählen), aber nicht zu  $M$ . (Man beweise dies!) Wir definieren auf der Menge  $N$  die Metrik  $\sigma$ :

Für  $x = (x_i)$  und  $y = (y_i)$  aus  $N$  ist

$$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| \quad (42)$$

Dann erhalten wir einen metrischen Raum  $\{N, \sigma\}$ :

A:  $x = y$  bedeutet, dass  $x_i = y_i$  gilt für  $i = 1, 2, \dots$ . Offensichtlich ist  $\sigma(x, y) \geq 0$  und  $\sigma(x, y) = 0$  für  $x = y$ .

Ist dagegen  $\sigma(x, y) = 0$ , so gilt auch  $\sup_i |x_i - y_i| = 0$ , und aus  $|x_j - y_j| \leq \sup_i |x_i - y_i|$  für jede natürliche Zahl  $j$  folgt  $x_j = y_j$  für  $j = 1, 2, \dots$ , d.h.  $x = y$ .

$$B: \quad \rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| = \sup_i |-(y_i - x_i)| = \sup_i |y_i - x_i| = \sigma(x, y)$$

C: Es ist

$$\begin{aligned} |x_i - z_i| &= |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \\ &\leq \sup_i |x_i - y_i| + \sup_i |y_i - z_i| = \sigma(x, y) + \sigma(y, z) \end{aligned}$$

Nach der Definition des Supremums ist dann auch

$$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - z_i| \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

Die Zahl  $\sigma(x, y)$  in (42) ist sinnvoll, denn  $x = (x_i)$  und  $y = (y_i)$  gehören zu  $N$ , d.h., es ist  $|x_i| \leq C$ ,  $|y_i| \leq D$ , und deshalb gilt

$$\sup_i \leq \sup_i (|x_i| + |y_i|) \leq C + D < \infty$$

Beispiel 13: Es sei  $Q$  die Menge aller unendlichen Folgen  $x = (x_i)$ . Auch hier ist es möglich, eine Metrik einzuführen; es genügt, für  $x$  und  $y$  aus  $Q$  einen Abstand  $\tau$  wie folgt festzulegen

$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \quad (43)$$

und  $\{Q, \tau\}$  ist ein metrischer Raum. Auch die durch (43) definierte Zahl ist sinnvoll, denn es ist

$$\tau(x, y) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Der Leser beweise selbst, dass  $\tau$  die Bedingungen A und B erfüllt (bei der Bedingung A ist auszunutzen, dass die Summe jeder unendlichen Reihe mit nichtnegativen Summanden genau dann gleich Null ist, wenn alle Summanden gleich Null sind); die Bedingung C geht aus der Ungleichung (29) hervor, ähnlich wie im Beispiel 7.

Beispiel 14: Es sei  $P$  die Menge aller Polynome einer Veränderlichen  $t$ , die auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind. Die Elemente  $x$  aus  $P$  haben also die Form

$$x = x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sind komplexe Zahlen, und die Veränderliche  $t$  durchläuft das Intervall  $[0, 1]$ .

Wir definieren auf der Menge  $P$  die Metrik  $\pi$ : Für  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$  aus  $P$  sei<sup>7</sup>

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \quad (44)$$

Auf den Abbildungen 14 und 15 sind zwei Spezialfälle dargestellt: Im ersten ist  $x = x(t) = t$ ,  $y = y(t) = t^2$  und  $|x(t) - y(t)| = t - t^2$ , so dass

$$\pi(x, y) = \left| x\left(\frac{1}{2}\right) - y\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{4}$$

gilt; im zweiten ist  $x = x(t) = \frac{1}{2}$ ,  $y = y(t) = -2t + 2$  und

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| -2t + \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

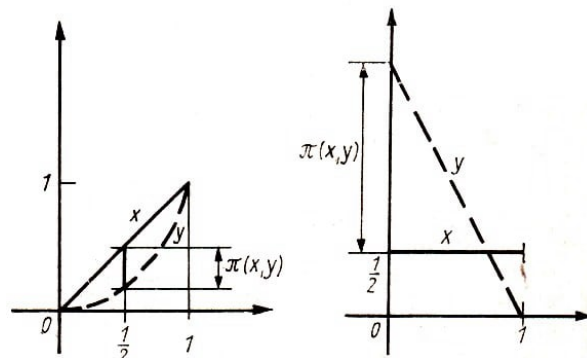


Abb. 14, 15

<sup>7</sup>Mit dem Symbol  $\max_{0 \leq t \leq 1} g(t)$  bezeichnen wir die größte der Zahlen  $g(t)$ , wenn  $t$  das Intervall  $[0, 1]$  durchläuft. Ist die Funktion  $g$  ein Polynom, so existiert tatsächlich eine Zahl  $t_0$  aus dem Intervall  $[0, 1]$ , so dass  $\max_{0 \leq t \leq 1} g(t) = g(t_0)$  ist; z.B. für die Funktion  $g(t) = t - t^2$  ist das die Zahl  $t_0 = \frac{1}{2}$ .

Auch hier erhalten wir einen metrischen Raum  $\{P, \pi\}$ :

A:  $x = y$  bedeutet, dass  $x(t) = y(t)$  gilt für jedes  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Aus (44) folgt  $\pi(x, y) \geq 0$  und  $\pi(x, y) = 0$  für  $x = y$ .

Ist dagegen  $\pi(x, y) = 0$ , geht aus der Ungleichung

$$|x(s) - y(s)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

hervor, dass  $x(s) = y(s)$  für jedes  $s$  aus dem Intervall  $[0, 1]$  gilt, und folglich ist  $x = y$ .

B: Die Symmetrie der Metrik  $\pi$  ist offensichtlich.

C: Für jedes  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$  gilt:

$$\begin{aligned} |x(t) - z(t)| &= |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \leq [|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|] \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - z(t)| = \pi(x, y) + \pi(y, z) \end{aligned}$$

Es ist deshalb auch

$$\pi(x, z) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - z(t)| \leq \pi(x, y) + \pi(y, z)$$

Wir haben also einige neue metrische Räume gefunden. Allerdings wird der aufmerksame Leser bemerkt haben, dass einige der uns bereits bekannten metrischen Räume Spezialfälle der hier angeführten metrischen Räume sind.

Wenn wir in den Beispielen 11, 12 und 13 eine spezielle Untermenge der Folgen  $(x_i)$  wählen, in welcher alle Glieder vom dritten ab gleich Null sind, dann entsteht eine Menge von Folgen der Art  $(x_1, x_2, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Sind dabei die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  reell, so erhalten wir aus dem metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  (Beispiel 11) einen metrischen Raum, welcher für  $p = 2$  mit dem metrischen Raum  $\{E_2, d\}$ , für  $p = 1$  mit dem metrischen Raum  $\{E_2, p\}$  bzw. im allgemeinen Fall  $p > 1$  mit dem metrischen Raum  $\{E_2, d_p\}$  identisch ist.

Aus dem metrischen Raum  $\{N, \sigma\}$  (Beispiel 12) erhalten wir auf diesem Wege  $\{E_2, m\}$ . (Man beweise dies!)

Aus dem metrischen Raum  $\{Q, \tau\}$  (Beispiel 13) entsteht der metrische Raum  $\{E_2, b\}$  (Beispiel 7 mit  $c_1 = \frac{1}{2}$  und  $c_2 = \frac{1}{4}$ ).

Das resultiert aus folgender allgemeiner Behauptung:

**Satz 1:** Es seien  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $N$  eine Untermenge der Menge  $M : N \subset M$ . Wir betrachten die Metrik  $\rho(x, y)$  nur für die Elemente  $x$  und  $y$  aus der Menge  $N$ . Dann ist auch  $\{N, \rho\}$  ein metrischer Raum.

Der Beweis ist einfach: Die Metrik  $\rho(x, y)$ , ursprünglich definiert für  $x, y$  aus  $M$ , betrachten wir diesmal nur für  $x$  und  $y$  aus der Menge  $N \subset M$ . Auch dann werden die Bedingungen A bis C für alle  $x, y$  und  $z$  aus  $N$  erfüllt, denn  $x, y$  und  $z$  gehören auch zu  $M$ , und dort gelten die Eigenschaften A bis C.

**Beispiel 15:** Für die Mengen  $M, N, Q$  aus den Beispielen 11, 12, 13 gilt

$$M \subset N \subset Q$$

Wegen Satz 1 ist es möglich, metrische Räume  $\{N, \tau\}$  und  $\{M, \tau\}$  mit Hilfe des metrischen Raumes  $\{Q, \tau\}$  zu bilden und den metrischen Raum  $\{M, \sigma\}$  mit Hilfe von  $\{N, \sigma\}$ .

Wie schon bei Verwendung der Ebene  $E_2$  (siehe Beispiel 8) erhalten wir auch mit den Mengen  $M$  bzw.  $N$  verschiedene metrische Räume  $\{M, \rho\}$ ,  $\{M, \sigma\}$  und  $\{M, \tau\}$  bzw.  $\{N, \sigma\}$  und  $\{N, \tau\}$ .

Wir haben gesehen, dass es möglich ist, die Metrik aus der Menge  $M$  in die Menge  $N \subset M$  zu übertragen. Im umgekehrten Fall muss man allerdings nicht immer erfolgreich sein. Die Erweiterung der Metrik von der Menge  $M$  auf eine  $M$  umfassende Menge wird nicht immer sinnvoll sein.

Beispiel 16: Im Beispiel 12 zeigten wir, dass die Metrik  $\rho$  aus Beispiel 11 nicht sinnvoll ist für jene Elemente aus  $N$ , die nicht zur ursprünglichen Menge  $M$  gehören.

Die Elemente  $x = (0, 0, 0, \dots)$  und  $y = (1, 1, 1, \dots)$  gehören zu  $N$ , aber die Zahl  $\rho(x, y)$  ist nicht sinnvoll, weil die zugehörige Reihe in (40) nicht konvergiert.

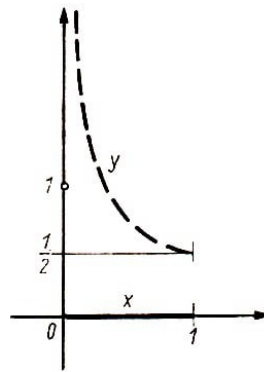


Abb. 16

Beispiel 17: Wenn wir statt der Menge  $P$  aus Beispiel 14 die Menge  $F$  aller Funktionen, die auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind, betrachten würden, so wäre es nicht möglich, nach (44) einen metrischen Raum  $\{F, \pi\}$  mit der Metrik  $\pi$  zu bilden.

Bereits für die beiden Funktionen aus der Menge  $F$   $x = x(t) = 0$  für alle  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$ ,

$$y = y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & \text{für } t > 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

(s. Abb. 16) geht  $|x(t) - y(t)|$  gegen Unendlich, wenn  $t$  gegen Null geht. Der Ausdruck  $|x(t) - y(t)|$  hat daher für  $t \in [0, 1]$  kein Maximum.

Wir haben also Mengen betrachtet, in denen auf verschiedene Art und Weise eine Metrik eingeführt wurde. Es stellt sich nun die Frage, ob für jede beliebige Menge  $M$  eine Metrik  $\rho$  mit den Eigenschaften A, B und C definiert werden kann. Diese Frage ist zu bejahen:

Satz 2: Es sei  $M$  eine Menge; dann existiert eine Metrik  $\rho$ , so dass  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum ist.

Den Beweis führen wir durch, indem wir einfach eine passende Metrik  $\rho$  konstruieren:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y; \quad x, y \in M \\ 1 & \text{für } x \neq y; \quad x, y \in M \end{cases} \quad (45)$$

Ein so definierter Ausdruck  $\rho$  hat tatsächlich die Eigenschaften A bis C:

A: Diese Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition der Zahl  $\rho$ :  $\rho(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$  gilt.

B: Die Symmetrie folgt auch unmittelbar aus der Definition der Zahl  $\rho(x, y)$ .

C: Für  $x = z$  ist  $\rho(x, z) = 0$ , und folglich gilt

$$0 \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Für  $x \neq z$  ist  $\rho(x, z) = 1$ ; und es gibt zwei Möglichkeiten:

(a)  $y \neq x$  und gleichzeitig  $y \neq z$ ; dann ist  $\rho(x, y) = \rho(y, z) = 1$ , und die Dreiecksungleichung gilt, denn sie hat die Form  $1 \leq 1 + 1 = 2$ .

(b) Es sei  $y \neq x$  und  $y = z$  oder  $y = x$  und  $y \neq z$ ; dann ist eine der Zahlen  $\rho(x, y), \rho(y, z)$  gleich Null, und die andere ist gleich Eins. Auch hier gilt die Dreiecksungleichung wieder, denn sie hat die Form  $1 \leq 0 + 1 = 1$  bzw.  $1 \leq 1 + 0 = 1$ .

Satz 2 lässt sich auch wie folgt formulieren: Jede Menge ist metrisierbar, d.h., es ist möglich, auf ihr eine Metrik zu definieren.

Wir behalten uns aber den Terminus der Metrisierbarkeit für einen anderen Begriff vor (siehe Bemerkung 24 in Kapitel 5).

Die Metrik (45) aus Satz 1 ist allerdings sehr "arm", denn zum Angeben der Entfernung zweier Elemente haben wir nur zwei Möglichkeiten: 0 und 1.

Die Metrik (45) kann man auch in der Ebene  $E_2$  veranschaulichen, und ein Vergleich mit der euklidischen Metrik  $d$  zeigt dann, was uns dabei verlorenggeht. Die Metrik  $\rho$  aus (45) ist auch die einfachste mögliche Metrik und hat vor allem eine theoretische Bedeutung.

Im weiteren sehen wir, dass bei ihrem Gebrauch die Begriffe, die wir anführen, nichts Interessantes ergeben; der mit dieser Metrik versehene Raum ist für uns relativ unbedeutend. Satz 2 rechtfertigt allerdings die Existenz dieser Metrik und gibt ihr einen Sinn.

In jeder Menge existiert also wenigstens eine Metrik, nämlich die triviale Metrik  $\rho$  aus (45). Es bleibt noch die Antwort auf folgende Frage offen:

Wieviele Metriken existieren auf einer gegebenen Menge  $M$ ?

Die Antwort lautet: Wenn die Menge  $M$  wenigstens zwei verschiedene Elemente enthält, so gibt es unendlich viele Metriken. Das folgt aus

Satz 3: Wenn  $\rho$  eine Metrik auf der Menge  $M$  ist, dann wird auch durch den Ausdruck

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \quad (46)$$

eine Metrik auf  $M$  definiert.

Den Beweis überlassen wir dem Leser. Dass  $\rho_1$  die Eigenschaften A und B hat, ist sofort aus (46) ersichtlich. Die Dreiecksungleichung C beweist man mit Hilfe der Ungleichung (29).

Weil für  $\alpha > 0$  auch  $\alpha \neq \frac{\alpha}{1+\alpha}$  gilt, ist die Metrik  $\rho_1(x, y)$  bereits verschieden von der Metrik  $\rho(x, y)$ , wenn in der Menge  $M$  zwei verschiedene Elemente existieren. Für  $x \neq y$  ist nach A nämlich  $\rho(x, y) > 0$ , folglich gilt  $0 < \rho_1(x, y) \neq \rho(x, y)$ . Es ist sogar

$$\rho_1(x, y) \leq \rho(x, y)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn  $\rho(x, y) = 0$  ist. (Man beweise das mit Hilfe der Formel (46)!)

Jetzt ist es möglich, eine weitere Metrik  $\rho_2$  auf  $M$  durch die Vorschrift

$$\rho_2(x, y) = \frac{\rho_1(x, y)}{1 + \rho_1(x, y)}$$

zu bilden, welche abermals von der Metrik  $\rho_1$  verschieden ist. So können wir nach und nach verschiedene Metriken entsprechend der Formel

$$\rho_{n+1}(x, y) = \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bilden. Wir erhalten eine unendliche Folge verschiedener Metriken auf derselben Menge  $M$ , für welche

$$\rho_{n+1}(x, y) \leq \rho_n(x, y) \leq \dots \leq \rho_1(x, y) \leq \rho(x, y)$$

gilt, und daher existiert auch eine Folge verschiedener metrischer Räume

$$\{M, \rho\}, \{M, \rho_1\}, \{M, \rho_2\}, \{M, \rho_3\}, \dots$$

Aufgabe 3: Man untersuche, ob für  $x = (x_1)$  und  $y = (y_1)$  aus  $E_1$  durch den Ausdruck

$$\rho(x, y) = \left| \frac{x_1}{1 + \sqrt{1 + x_1^2}} - \frac{y_1}{1 + \sqrt{1 + y_1^2}} \right|$$

eine Metrik auf  $E_1$  definiert ist!

Aufgabe 4: Es sei  $\rho$  eine Metrik auf der Menge  $M$ . Man entscheide, ob die Ausdrücke  $\sigma$ ,  $\tau$  und  $\omega$ , die auf folgende Weise definiert sind

$$\sigma(x, y) = [\rho(x, y)]^2, \quad \tau(x, y) = \min[\rho(x, y), 1], \quad \omega(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}$$

auch Metriken auf  $M$  sind, d.h. ob sie den Bedingungen A, B und C genügen! Analog entscheide man, ob durch die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y) \\ \kappa(x, y) &= \sqrt{[\rho_1(x, y)]^2 + [\rho_2(x, y)]^2} \\ \lambda(x, y) &= \max[\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)] \end{aligned}$$



Metriken auf  $M$  definiert werden, wenn man weiß, dass  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei Metriken auf der Menge  $M$  sind!

Kehren wir zur euklidischen Ebene  $E_2$  zurück. Wir sahen schon im Kapitel 1, dass bereits zwischen der euklidischen Metrik  $d$  und der Metrik  $b$  in (28) ein wesentlicher Unterschied vorhanden war, der darauf beruhte, dass die Zahl  $b(x, y)$  bei keiner Wahl der Elemente  $x$  und  $y$  eine im voraus gegebene positive Zahl übertraf. Andererseits konnte die Zahl  $d(x, y)$  bei passender Wahl der Elemente  $x$  und  $y$  beliebig groß werden. Das bringt uns zur Einführung eines neuen Begriffes:

Definition 4: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Wenn eine positive Zahl  $K$  so existiert, dass

$$\rho(x, y) \leq K \quad (47)$$

für alle  $x, y$  aus  $M$  gilt, dann sagen wir, dass der metrische Raum  $\{M, \rho\}$  beschränkt ist. Existiert keine derartige Zahl  $K$ , d.h.,  $\rho(x, y)$  könnte jeden beliebig großen Wert annehmen, dann sagen wir, dass der metrische Raum  $\{M, \rho\}$  unbeschränkt ist.

Beispiel 18: Die metrischen Räume  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_2, p\}$ ,  $\{E_2, m\}$ ,  $\{E_2, d_p\}$  sind unbeschränkt; die metrischen Räume  $\{E_2, s\}$  und  $\{E_2, b\}$  sind beschränkt. (Man bestimme die entsprechende Zahl  $K$ !) Der metrische Raum  $\{Q, \tau\}$  aus Beispiel 13 ist beschränkt.

Beispiel 19: Der metrische Raum  $\{P, \pi\}$  aus Beispiel 14 ist unbeschränkt. Wenn nämlich  $K$  eine beliebige positive Zahl ist, dann genügt es, in  $P$  die Elemente  $x = x(t) = 0$  und  $y = y(t) = 2Kt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , zu wählen, und es wird

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |2Kt| = 2K > K$$

Aufgabe 5: Man beweise (mit passenden Elementen  $x, y$ ), dass die metrischen Räume  $\{M, \rho\}$  aus Beispiel 11 und  $\{N, \sigma\}$  aus Beispiel 12 unbeschränkt sind!

Die Menge  $M$  möge aus einer endlichen Anzahl von Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestehen. Dann ist auch die Menge der Abstände der einzelnen Punkte der Menge  $M$  endlich; sie besteht aus den Zahlen

$$\rho(x_i, x_k); \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

Aus der endlichen Anzahl dieser Zahlen suchen wir die größte und wählen diese als Konstante  $K$  in (47). Damit haben wir bewiesen:

Wenn die Menge  $M$  nur eine endliche Anzahl von Elementen hat, dann ist der metrische Raum  $\{M, \rho\}$  beschränkt.

Beispiel 20: Der metrische Raum  $\{N, \sigma\}$  aus Beispiel 10 ist also beschränkt. Man beachte, dass es in der vorangegangenen Betrachtung gar nicht darauf ankam, wie die betrachtete Metrik  $\rho$  beschaffen war.

Beispiel 18 zeigt allerdings, dass bei einer Menge  $M$ , welche unendlich viele Elemente hat, die Eigenschaften der Metrik schon eine wesentliche Rolle spielen. Für jede Menge  $M$  lässt sich eine solche Metrik konstruieren, für die der entstandene metrische Raum beschränkt ist. Das zeigen die folgenden zwei Beispiele:

Beispiel 21: Der metrische Raum  $\{M, \rho\}$  mit einer beliebigen Menge  $M$  und der durch (45) gegebenen trivialen Metrik  $\rho$  ist beschränkt; es genügt,  $K = 1$  zu wählen.

Beispiel 22: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein unbeschränkter metrischer Raum, und es sei  $\rho_1$  die durch (46) definierte Metrik auf  $M$ . Dann ist  $\{M, \rho_1\}$  ein beschränkter metrischer Raum. Das ergibt sich aus Satz 3, und es ist wieder möglich,  $K = 1$  zu wählen.

Die Metrik ist eine Verallgemeinerung der Entfernung zweier Punkte. Im Alltag können wir aber auch die Entfernung eines Punktes von einer Menge und die Entfernung zweier Mengen voneinander messen; die Metrik ermöglicht es uns, diese Begriffe auch im allgemeinen metrischen Raum einzuführen.

Definition 5: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum, und  $S$  sei eine Untermenge der Menge  $M$ . Als Abstand des Punktes  $x$  aus  $M$  von der Menge  $S$  in  $\{M, \rho\}$  bezeichnen wir die Zahl  $\rho(x, S)$ , die bestimmt ist durch

$$\rho(x, S) = \inf_{y \in S} \rho(x, y)$$

Es seien  $S$  und  $T$  zwei Untermengen der Menge  $M$ . Als Abstand der Mengen  $S$  und  $T$  in  $\{M, \rho\}$  bezeichnen wir die Zahl  $\rho(T, S)$ , die bestimmt ist durch

$$\rho(T, S) = \inf_{x \in T} \rho(x, S)$$

Bemerkung 10: Den Abstand  $\rho(T, S)$  der Mengen  $T$  und  $S$  können wir auch wie folgt definieren:

$$\rho(T, S) = \inf_{x \in T, y \in S} \rho(x, y)$$

d.h. als Infimum der Menge  $K$  aller Zahlen  $\rho(x, y)$ , wobei  $x$  die Menge  $T$  und  $y$  die Menge  $S$  durchläuft. Es ist auch möglich, den Abstand der Menge  $S$  von dem Element  $x$  aus  $M$  in  $\{M, \rho\}$  zu definieren durch

$$\rho(S, x) = \inf_{y \in S} \rho(x, y)$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft B der Metrik  $\rho$  ist klar, dass gilt:  $\rho(S, x) = \rho(x, S)$ .

Aufgabe 6: Man zeige, dass  $\rho(x, S) \geq 0$ ,  $\rho(T, S) \geq 0$  und dass  $\rho(T, S) = \rho(S, T)$  ist! Wenn  $S$ ,  $T$  und  $P$  drei Untermengen der Menge  $M$  sind, dann gilt die Dreiecksungleichung

$$\rho(S, T) \leq \rho(S, x) + \rho(x, T)$$

für jeden Punkt  $x$  aus der Menge  $P$  und offensichtlich auch für jeden Punkt  $x$  aus  $M$ . Es gilt aber nicht die Dreiecksungleichung der Form

$$\rho(S, T) \leq \rho(S, P) + \rho(P, T)$$

(Hinweis: Es genügt, die Mengen  $S$  und  $T$  so zu wählen, dass sie einen positiven Abstand haben, und für die Menge  $P$  eine Menge zu wählen, welche sowohl mit der Menge  $S$  als auch mit der Menge  $T$  gemeinsame Punkte hat. Dann verwende man die

Überlegungen aus Beispiel 25.)

Beispiel 23: Wenn das Element  $x$  zur Menge  $S$  gehört, gilt  $\rho(x, S) = 0$ . Es genügt nämlich, für  $y$  das Element  $x$  zu wählen, denn dann ist  $\rho(x, y) = \rho(x, x) = 0$ , und für die übrigen Elemente  $y$  aus  $M$ , welche von  $x$  verschieden sind, folgt aus der Eigenschaft A:  $\rho(x, y) > 0$ .

Beispiel 24: Betrachten wir den metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ , in dem  $M$  eine beliebige Menge und  $\rho$  die in (45) erklärte Metrik ist.

Für  $x = y$  gilt dort  $\rho(x, y) = 1$ . Ist  $S$  eine Untermenge von  $M$  und ist  $x$  ein Element der Menge  $M$ , welches nicht in  $S$  liegt, so gilt  $\rho(x, y) = 1$  für alle Elemente  $y$  aus  $S$ , und daraus folgt  $\rho(x, S) = 1$ .

Liegt das Element  $x$  in der Menge  $S$ , so gilt nach dem vorhergehenden Beispiel  $\rho(x, S) = 0$ .

Beispiel 25: Es seien  $S$  und  $T$  zwei Untermengen einer Menge  $M$ . Haben sie das gemeinsame Element  $x_0$ , dann ist ihr Abstand gleich Null:  $\rho(S, T) = 0$ .

Weil  $x_0$  in  $S$  liegt, ist nämlich nach Beispiel 23  $\rho(x_0, S) = 0$ ; für die übrigen Punkte  $x$  aus  $T$  gilt  $\rho(x, S) \geq 0$ , und es ist  $\inf_{x \in T} \rho(x, S) = 0$ .

Bemerkung 11: Die Behauptungen aus den Beispielen 23 und 25 können wie folgt notiert werden:

- (a)  $x$  liegt in  $S \Rightarrow \rho(x, S) = 0$ ,
- (b)  $S$  und  $T$  haben einen gemeinsamen Punkt  $\Rightarrow \rho(S, T) = 0$ .

Es ist nicht möglich, diese Implikationen umzukehren. Wir zeigen das im folgenden Kapitel anhand von Beispielen: zur Implikation (a) siehe Beispiel 29; zur Implikation (b) siehe Beispiel 34.

### 3 Offene Mengen

Die Metrik ist mit der Verallgemeinerung des Begriffes euklidischer Abstand in  $E_2$  oder in  $E_3$  und mit dem Übertragen dieses Begriffes auf allgemeine Mengen verbunden. Wir können deshalb umgekehrt in diesen allgemeinen Mengen die Begriffe einführen, welche uns aus der Ebene oder aus dem Raum bereits vertraut sind.

Es sei  $a = (a_1, a_2, a_3)$  ein Punkt in  $E_3$ ,  $a = (a_1, a_2)$  ein Punkt in  $E_2$ , und  $r$  sei eine positive Zahl. Zum Inneren einer Kugel in  $E_3$  bzw. eines Kreises in  $E_2$  mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $r$  gehören alle Punkte  $x$  aus  $E_3$  bzw. aus  $E_2$ , deren euklidischer Abstand vom Punkt  $a$  kleiner als  $r$  ist. Für diese Punkte  $x$  gilt:

$$d(x, a) < r$$

Die Punkte  $x$ , für welche

$$d(x, a) = r$$

gilt, bilden eine Kugeloberfläche (Sphäre) in  $E_3$  bzw. eine Kreislinie in  $E_2$ .

Bei der Definition des Kugelinneren und der Kugeloberfläche ist der Abstand also ein wichtiger Begriff. Unter Verwendung der Metrik können wir analoge Begriffe im metrischen Raum einführen.

Definition 6: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum,  $a$  sei ein Element der Menge  $M$  und  $r$  eine positive Zahl. Die Menge der Elemente  $x$  aus  $M$ , welche der Ungleichung

$$\rho(x, a) < r \quad (48)$$

genügen, bezeichnen wir mit  $K(a, r)$  und nennen sie offene Kugel (im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ ) mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $r$ . Die Menge aller  $x$  aus  $M$ , für welche

$$\rho(x, a) = r \quad (49)$$

gilt, bezeichnen wir mit  $S(a, r)$  und nennen sie Sphäre (im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ ) mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $r$ . Die Menge der Elemente  $x$  aus  $M$ , für welche

$$\rho(x, a) \leq r \quad (50)$$

gilt, bezeichnen wir mit  $\overline{K(a, r)}$  und nennen sie abgeschlossene Kugel (im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ ) mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $r$ .

Beispiel 26: Im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  ist  $K(a, r)$  das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $a$  und dem Radius  $r$ ;  $S(a, r)$  ist die Kreislinie, welche diesen Kreis begrenzt, und mit  $\overline{K(a, r)}$  bezeichnen wir den Kreis einschließlich seiner Kreislinie (siehe Abbildung 17).

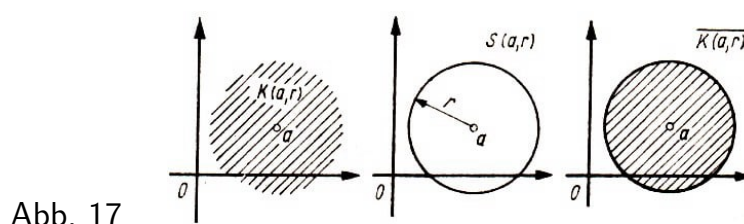


Abb. 17

Beispiel 27: Es sei  $M$  die Menge der Punkte  $x = (x_1, x_2)$  aus der Ebene  $E_2$ , deren Koordinaten  $x_1, x_2$  ganze Zahlen sind. Dann gilt  $M \subset E_2$ , und nach Satz 1 ist  $\{M, d\}$  abermals ein metrischer Raum.

Wir wählen nun für den Mittelpunkt  $a$  den Punkt  $(2, 1)$ . Die Menge  $K(a, 3)$  besteht aus den in Abbildung 18 hervorgehobenen 25 Punkten, die Menge  $S(a, 3)$  aus den vier angekreuzten Punkten.

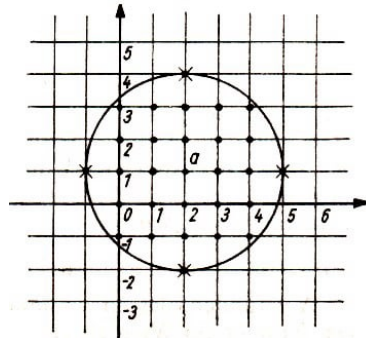


Abb. 18

Die Menge  $K(a, 1)$  besteht nur aus dem Punkt  $a$ , die Menge  $S(a, 1)$  aus den vier Punkten  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$  und  $(2, 0)$  (s. Abb. 19).

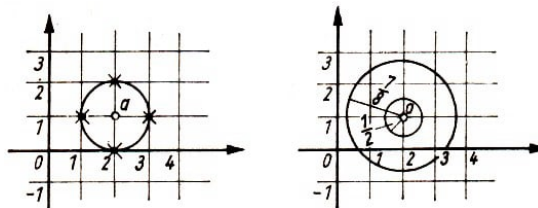


Abb. 19, 20

Die Menge  $K(a, \frac{1}{2})$  enthält wieder nur den Punkt  $a$ ; die Menge  $S(a, \frac{1}{2})$  enthält keinen Punkt, ebenso die Menge  $S(a, \frac{7}{8})$  (s. Abb. 20).

Beispiel 28: Wir betrachten den metrischen Raum  $\{M, d\}$  aus dem vorangegangenen Beispiel. Für zwei verschiedene Punkte  $y, z$  aus  $M$  gilt  $d(y, z) \geq 1$ .

Betrachten wir die Menge  $\subset M$  und den Abstand  $d(x, S)$  des Punktes  $x$  aus  $M$  von der Untermenge  $S$  (siehe Definition 5), dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- (a) es ist  $x$  aus  $S$ , und dann gilt nach Beispiel 23  $d(x, S) = 0$ , oder
- (b) das Element  $x$  gehört nicht zu  $S$ . Dann ist  $d(x, y) \geq 1$  für jedes  $y \in S$ , und es ist auch  $d(x, S) \geq 1$ . Die Situation ist also ähnlich der im Beispiel 24.

Beispiel 29: Wir betrachten in  $\{E_3, d\}$  eine offene Kugel  $K(a, r)$ , wählen  $a = (0, 0, 0)$  und bezeichnen diese offene Kugel mit dem Buchstaben  $S$ . Dann liegt der Punkt  $x = (r, 0, 0)$ ,  $r > 0$ , nicht in  $S$ ; jedoch gilt

$$d(x, S) = 0$$

Wir beweisen das: Es gilt  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $y$  aus  $S$ , und folglich ist auch  $d(x, S) \geq 0$ . Wenn  $d(x, S) = \alpha > 0$  wäre, müsste  $d(x, y) \geq \alpha$  für alle  $y$  aus  $S$  sein.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $\alpha < r$  voraussetzen. Untersuchen wir nun den Punkt  $y = (r - \frac{1}{2}\alpha, 0, 0)$ , der wegen  $d(y, a) = r - \frac{1}{2}\alpha < r$  in  $S$  liegt, dann

erhalten wir

$$d(y, a) = \sqrt{r - (r - \frac{1}{2}\alpha)]^2} = \frac{1}{2}\alpha$$

d.h., wir haben einen Punkt  $y$  in  $S$  gefunden, dessen Abstand vom Punkt  $x$  kleiner als  $\alpha$  ist. Das ist aber ein Widerspruch zu  $d(x, y) \geq \alpha > 0$  für alle  $y$  aus  $S$ , und folglich muss  $\alpha = 0$  sein, d.h.  $d(x, S) = 0$ .

Dieses Beispiel zeigt also, dass in der Bemerkung 11 die Implikation (a) nicht umkehrbar ist.

Bemerkung 12: Im weiteren werden wir wie üblich für den Terminus "offene Kugel" einfach den Terminus "Kugel" gebrauchen, während wir bei der abgeschlossenen Kugel  $\overline{K(a, r)}$  ihre Abgeschlossenheit stets betonen.

Die Menge  $K(a, r)$  wird oft auch als Umgebung des Punktes  $a$  (oder ausführlicher als  $r$ -Umgebung des Punktes  $a$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ ) bezeichnet.

Beispiel 30: Es sei  $M$  die Menge von Punkten  $x = (x_1, x_2)$  aus  $E_2$ , für deren zweite Koordinate  $x_2 \geq 0$  gilt, d.h., die Menge  $M$  ist die obere Halbebene einschließlich der Abszissenachse.

Nach Satz 1 ist  $\{M, d\}$  wieder ein metrischer Raum, und die geometrische Gestalt der Kugel  $K(a, r)$  in  $\{M, d\}$  hängt von der Lage des Punktes  $a$  ab (s. Abb. 21):

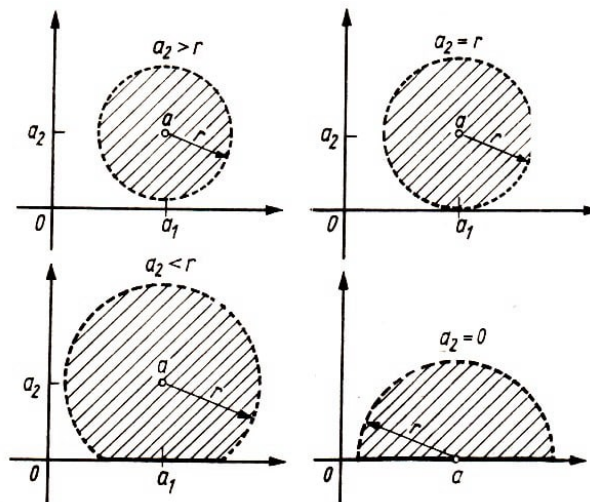


Abb. 21

Wenn  $a = (a_1, a_2)$  und  $a_2 \geq r$  ist, dann bildet die Kugel  $K(a, r)$  das gesamte Innere des Kreises; wenn  $0 < a_2 < r$  ist, bildet die Kugel  $K(a, r)$  nur einen Teil des Inneren dieses Kreises, und zu  $K(a, r)$  gehören auch die Punkte auf der Sehne. Wenn schließlich  $a_2 = 0$  ist, dann bildet die Kugel  $K(a, r)$  das Innere des Halbkreises (einschließlich des Durchmessers).

Beispiel 31: Es sei  $M$  eine beliebige Menge, und  $Q$  sei die durch (45) gegebene Metrik aus Satz 2. Dann besteht die Kugel  $K(a, r)$

- (a) nur aus dem Punkt  $a$ , wenn  $r \leq 1$  ist,
- (b) aus allen Punkten der Menge  $M$ , wenn  $r > 1$  ist.

Die Sphäre  $S(a, r)$  enthält keinen Punkt bei  $r < 1$  oder  $r > 1$ . Wenn  $r = 1$  ist,

dann gehören zu  $S(a, r)$ , d.h. zu  $S(a, 1)$ , alle Punkte der Menge  $M$  mit Ausnahme des Punktes  $a$ .

Weil wir uns tagtäglich im Raum  $E_3$  bewegen und an den euklidischen Abstand  $d(x, y)$  gewöhnt sind, leben wir in der Vorstellung, dass eine Kugel immer "rund" sein muss. Diese Vorstellung wurde bereits durch unsere Beispiele 27, 30 und 31 in Frage gestellt, und auch in der Ebene, in der wir den Abstand mit der "postalischen" Metrik  $p(x, y)$  messen, verliert die Kugel ihre "runde" Form:

Beispiel 32: Wir wählen in  $\{E_2, p\}$  den Punkt  $a = (0, 0)$ . Die Kugel  $K(a, r)$  wird dann aus allen Punkten  $x = (x_1, x_2)$  gebildet, für welche gilt

$$|x_1| + |x_2| < r$$

Diese Ungleichung wird durch die Punkte  $(x_1, x_2)$  erfüllt, welche in dem Bereich liegen, der durch die Geraden  $x_1 + x_2 = r$ ,  $x_1 - x_2 = r$ ,  $-x_1 + x_2 = r$  und  $-x_1 - x_2 = r$  begrenzt wird (s. Abb. 22).

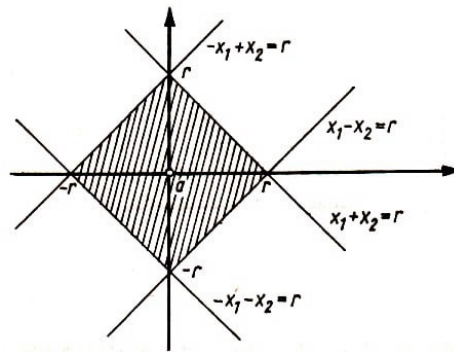


Abb. 22

In  $\{E_2, p\}$  ist also die Kugel  $K(a, r)$  ein Quadrat, genauer das Innere eines Quadrates, mit der Seitenlänge  $r\sqrt{2}$ , welches den Mittelpunkt  $a$  hat und dessen Diagonalen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Sphäre  $S(a, r)$  wird dann vom Rand dieses Quadrates gebildet.

Beispiel 33: Ähnlich wie in  $\{E_2, p\}$  hat auch die Kugel im metrischen Raum  $\{E_2, m\}$  "kantige" Gestalt:

Wenn wir den gleichen Punkt  $a$  wie im Beispiel 32 wählen, wird die Kugel  $K(a, r)$  aus den Punkten  $x = (x_1, x_2)$  gebildet werden, für welche

$$\max(|x_1|, |x_2|) < r$$

gilt. Diese Ungleichung wird von allen Punkten  $(x_1, x_2)$  erfüllt, die in dem Bereich liegen, der durch die Geraden  $x_1 = r$ ,  $x_1 = -r$ ,  $x_2 = r$  und  $x_2 = -r$  begrenzt wird (s. Abb. 23).

In  $\{E_2, m\}$  ist die Kugel  $K(a, r)$  also ebenfalls ein Quadrat mit der Seitenlänge  $2r$ , welches den Mittelpunkt  $a$  hat und dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Sphäre  $S(a, r)$  wird dann vom Rand dieses Quadrates gebildet.

Beispiel 34: Wir betrachten im metrischen Raum  $\{E_2, m\}$  aus Beispiel 33 zwei offene Kugeln:  $S = K(a, 1)$ ,  $T = K(b, 1)$  mit  $a = (0, 1)$  und  $b = (0, -1)$  (s. Abb. 24).

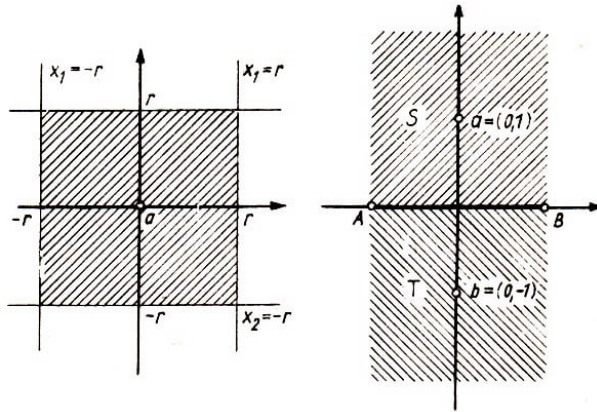


Abb. 23 und 24

Diese Mengen haben keinen gemeinsamen Punkt, jedoch ist ihr Abstand gleich Null:

$$m(S, T) = 0$$

Wenn wir nämlich mit  $P$  die Strecke  $AB$  aus Abb. 24 bezeichnen, lässt sich zeigen, dass

$$m(x, S) = 0 \quad , \quad m(x, T) = 0$$

für jeden Punkt  $x$  aus  $P$  gilt. Den Beweis führt man ähnlich wie im Beispiel 29. Nach der Dreiecksungleichung aus Aufgabe 6 ist

$$0 \leq m(S, T) \leq m(S, x) + m(x, T) = 0 + 0 = 0 \quad \text{d.h.} \quad m(S, T) = 0$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Implikation (b) in Bemerkung 11 nicht umkehrbar ist.

Aufgabe 7: Man überlege, wie die Kugeln in den metrischen Räumen  $\{E_3, p\}$  und  $\{E_3, m\}$  aussehen werden! (Es werden gewisse Würfel sein.)

Die geometrische Gestalt der Kugel  $K(a, r)$  in der Ebene  $E_2$  kann also bei verschiedenen Metriken sehr unterschiedlich sein.

Andererseits ist es möglich, zu einem gegebenen geometrischen Gebilde in der Ebene, welches allerdings bestimmte Bedingungen erfüllen muss, eine Metrik  $\rho$  so zu finden, dass dieses Gebilde im metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$  eine Kugel mit dem Radius 1 darstellt.

Es sei in der Ebene irgendein ebenes Gebilde  $\mathcal{U}$  gegeben, welches folgende Eigenschaften hat:

- (1) Es enthält den Koordinatenursprung  $(0, 0)$ .
- (2) Es ist konvex, d.h., wenn  $x$  und  $y$  zwei Punkte aus  $\mathcal{U}$  sind, dann liegt die Strecke, welche diese Punkte verbindet, ganz in  $\mathcal{U}$ .
- (3) Es ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, d.h., wenn ein Punkt  $(x_1, x_2)$  in  $\mathcal{U}$  liegt, dann liegt auch der Punkt  $(-x_1, -x_2)$  in  $\mathcal{U}$ .
- (4) Es ist offen, d.h., wenn  $x$  ein Punkt aus  $\mathcal{U}$  ist, dann existiert eine Zahl  $\varepsilon > 0$ , so dass die "Kugel"  $K(x, \varepsilon)$  beim Gebrauch der euklidischen Metrik (also im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$ ) auch in  $\mathcal{U}$  liegt, wobei die Zahl  $\varepsilon$  vom Punkt  $x$  abhängig sein kann.



Weil  $\mathcal{U}$  konvex ist, schneidet jeder Strahl, der vom Koordinatenursprung ausgeht, den Rand des Bereiches  $\mathcal{U}$  in genau einem Punkt. Wenn nun  $x$  ein beliebiger Punkt aus  $E_2$  ist, dann bezeichnen wir mit  $x^*$  den Schnittpunkt des Strahls, der durch den Punkt  $x$  und den Ursprung  $0$  festgelegt ist, mit dem Rand von  $\mathcal{U}$  (s. Abb. 25).

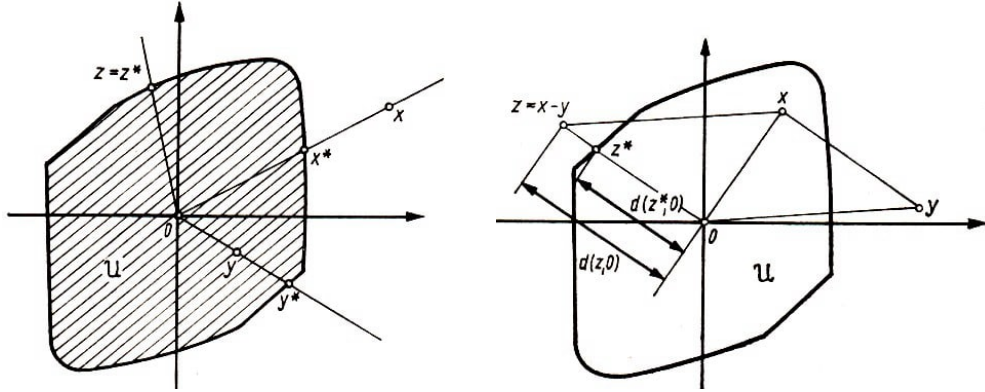


Abb. 25,26

Der Punkt  $x^*$  ist durch den Punkt  $x$  eindeutig bestimmt, und wir definieren die Metrik  $\rho$ :

$$\rho(x, y) = \frac{d(z, 0)}{d(z^*, 0)}$$

wobei  $z = x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$  gilt und  $z^*$  der Punkt vom Rand des Bereiches  $\mathcal{U}$  ist, der dem Punkt  $z$  entspricht (siehe Abb. 26).

Wir werden hier nicht beweisen, dass (51) tatsächlich eine Metrik definiert, dass also  $\rho(x, y)$  die Eigenschaften A bis C aus der Definition 1 hat. Wir wollen aber erwähnen, dass die Eigenschaft (3), die Symmetrie des Bereiches  $\mathcal{U}$  bezüglich des Ursprungs, für die Symmetrie der Metrik  $\rho$  bedeutsam ist, d.h. für die Eigenschaft B, und dass die Eigenschaft (2), die Konvexität des Gebildes  $\mathcal{U}$ , für den Beweis der Dreiecksungleichung benutzt wird, also für die Eigenschaft C.

Mit Hilfe der Metrik  $\rho$  aus (51) erhalten wir einen metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$ , und es gilt die Behauptung:

Im metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$  ist die Kugel  $K(0, 1)$  mit dem ebenen Gebilde  $\mathcal{U}$  identisch.

Beweis: (a) Wenn  $x$  ein Punkt aus  $\mathcal{U}$  ist, dann liegt der zugehörige Punkt  $x^*$  auf dem Strahl  $0x$  hinter dem Punkt  $x$ ; es gilt

$$d(x, 0) < d(x^*, 0) \quad \text{oder} \quad \rho(x, 0) < 1$$

Das bedeutet, dass alle Punkte aus  $\mathcal{U}$  gleichzeitig in der Kugel  $K(0, 1)$  liegen, d.h., es ist  $\mathcal{U} \subset K(0, 1)$ .

(b) Liegt der Punkt  $x$  nicht im Bereich  $\mathcal{U}$ , dann gibt es zwei Möglichkeiten :

(b1)  $x$  liegt auf dem Rand des Bereiches  $\mathcal{U}$ , dann ist  $x^* = x$ ,  $d(x, 0) = d(x^*, 0)$ , d.h.  $\rho(x, 0) = 1$ ;

(b2) der Punkt  $x^*$  liegt auf dem Strahl  $0x$  vor dem Punkt  $x$ , dann ist  $d(x^*, 0) < d(x, 0)$ , d.h., es gilt  $\rho(x, 0) > 1$ .

Im Falle (b) ist also  $\rho(x, 0) \geq 1$ , folglich liegt dieser Punkt  $x$  nicht in der Kugel  $K(0, 1)$ .

Wir empfehlen dem Leser, dass er sich die vorhergehenden Betrachtungen anhand einer Skizze veranschaulicht. Dem Fall (a) entspricht der Punkt  $y$  aus Abb. 25, dem Fall (b1) der Punkt  $z$  und dem Fall (b2) der Punkt  $x$ . Gleichzeitig hat der Leser bei diesen Betrachtungen sicherlich bemerkt, dass der Rand des Bereiches  $\mathcal{U}$  mit der Sphäre  $S(0, 1)$  identisch ist.

Bisher haben wir uns allerdings darauf verlassen, dass wir aus der geometrischen Anschauung wissen, was mit dem Rand gemeint ist. Im weiteren werden wir diesen Begriff präzisieren (s. dazu Kap. 4).

**Bemerkung 13:** Wir können also zu einem bestimmten ebenen Gebilde  $\mathcal{U}$  eine Metrik  $\rho$  so konstruieren, dass die Gestalt von  $\mathcal{U}$  die Gestalt der Kugel  $K(0, 1)$  im metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$  vorausbestimmt.

Der Leser ist sicher imstande, die Bedingungen (1) - (4) anzugeben, die  $\mathcal{U}$  erfüllen muss, wenn es sich um ein dreidimensionales Gebilde  $\mathcal{U}$  handelt. Es muss allerdings betont werden, dass das Übertragen dieser Betrachtungen aus der Ebene  $E_2$  oder aus dem Raum  $E_3$  auf allgemeine Mengen  $M$  nicht immer möglich ist.

Damit zu irgendeiner Untermenge  $\mathcal{U}$  der Menge  $M$  eine Metrik  $\rho$  so konstruiert werden könnte, dass  $\mathcal{U}$  mit einer gewissen Kugel im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  identisch wäre, müsste die Menge  $M$  zunächst eine bestimmte Struktur haben: es müsste die Summe zweier Punkte aus  $M$  und das  $\alpha$ -fache der Elemente aus  $M$  definiert sein, damit es überhaupt möglich wäre, von einer "Strecke" in  $\mathcal{U}$  zu sprechen [siehe Eigenschaft (2)] oder von "symmetrischen Elementen" [siehe Eigenschaft (3)].

Eine ähnliche Situation begegnete uns schon auf Seite 14 bei der Betrachtung unserer Eigenschaften D und E der Metrik  $d$ .

Nun können wir den wichtigen Begriff der offenen Menge einführen:

**Definition 7:** Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Wir sagen, dass die Menge  $S \subset M$  eine offene Menge im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ist, wenn zu jedem Element  $x$  aus  $S$  eine positive Zahl  $r = r(x)$  so existiert, dass die Kugel  $K(x, r)$  ganz in  $S$  liegt.

**Bemerkung 14:** Unter Verwendung der in Bemerkung 12 erwähnten Terminologie können wir sagen, dass die Menge  $S \subset M$  offen im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ist, wenn mit jedem Punkt  $x$  aus  $S$  auch eine gewisse Umgebung dieses Punktes in  $S$  liegt.

**Beispiel 35:** Die Menge  $M$ , die Grundmenge des metrischen Raumes  $\{M, \rho\}$ , ist eine offene Menge in  $\{M, \rho\}$ . Nach Definition 6 ist jede Kugel  $K(x, r)$  in  $\{M, \rho\}$  aus Punkten der Menge  $M$  gebildet und liegt daher vollständig in  $M$ .

Auch die leere Menge  $\emptyset$  ist eine offene Menge in  $\{M, \rho\}$ : dann ist jede "Kugel" mit dem "Mittelpunkt" in  $\emptyset$  eine leere Menge und liegt vollständig in der leeren Menge  $\emptyset$ . Daher gilt folgender Satz:

**Satz 4:** Die Menge  $M$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind offene Mengen im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ .

**Beispiel 36:** Wir betrachten in der Ebene  $E_2$  drei Mengen. Die Menge  $S_1$  besteht aus dem Inneren des Halbkreises ohne den Kreisbogen  $\widehat{AB}$  und ohne die Strecke  $AB$ , die

Menge  $S_2$  aus dem Inneren des Halbkreises ohne den Kreisbogen  $\widehat{AB}$ , aber einschließlich der Strecke  $AB$ , und die Menge  $S_3$  besteht aus dem Inneren des Halbkreises, aus dem Kreisbogen  $\widehat{AB}$  und aus der Strecke  $AB$ .

Die Menge  $S_1$  ist offen in den metrischen Räumen  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_2, p\}$ ,  $\{E_2, m\}$ , denn für jeden Punkt  $x$  aus  $S_1$  kann in entsprechenden Räumen eine Kugel mit dem Mittelpunkt in  $x$  so konstruiert werden, dass die Kugel abermals vollständig in  $S_1$  liegt (diese Kugeln sind in Abb. 27a veranschaulicht, vgl. auch die Beispiele 32 und 33).

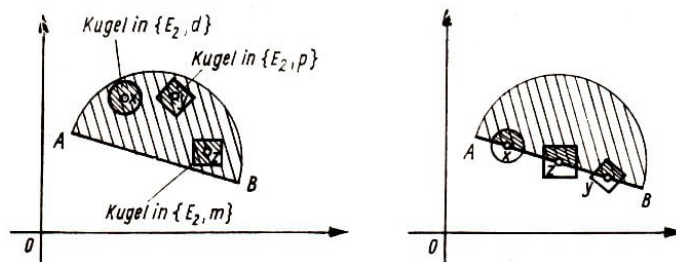


Abb. 27 a und b

Die Menge  $S_2$  ist demgegenüber in keinem dieser metrischen Räume offen, und ebenso ist es mit der Menge  $S_3$ . Wenn wir nämlich den Punkt  $x$  auf der Strecke  $AB$  wählen, d.h. sowohl in  $S_2$  als auch in  $S_3$ , dann wird ein Teil der Kugel in jedem dieser Räume außerhalb der Mengen  $S_2$  und  $S_3$  liegen. In Abb. 27b ist das der nicht schraffierte Teil der Kugeln.

**Aufgabe 8:** Man zeige, dass die Kugel  $K(a, r)$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  eine offene Menge ist!

**Beispiel 37:** Wir betrachten die Menge  $S_2$  aus Beispiel 36 und den metrischen Raum  $\{S_2, p\}$ . Nach Satz 4 ist die Menge  $S_2$  offen in  $\{S_2, p\}$ , nach Beispiel 36 ist sie aber keine offene Menge im metrischen Raum  $\{E_2, p\}$ .

**Beispiel 38:** Wir betrachten in der Ebene  $E_2$  die Menge  $S$ , welche aus einem einzigen Punkt  $a$  besteht. Diese Menge ist in keinem der metrischen Räume aus Beispiel 36 offen:

Jede Kugel  $K(a, r)$  in irgendeinem dieser metrischen Räume enthält nämlich nach Beispiel 26, 32 und 33 neben dem Punkt  $a$  noch eine Reihe weiterer Punkte der Ebene und kann deshalb nicht vollständig in  $S$  liegen (was in diesem Fall bedeuten würde, mit dem Punkt  $a$  identisch zu sein).

Eine ähnliche Situation wie im Beispiel 37 tritt in dem folgenden Beispiel ein:

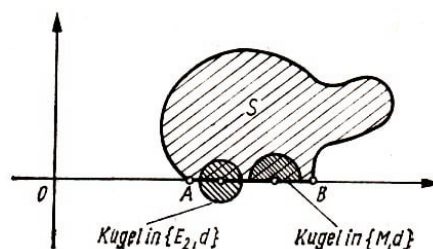


Abb. 28

**Beispiel 39:** Wir betrachten den Bereich  $S$  in der Ebene  $E_2$  dargestellt in Abb. 28. Die Strecke  $AB$  soll dabei zur Menge  $S$  gehören, die restliche, den Bereich  $S$  begrenzende

Kurve soll nicht zu  $S$  gehören.

Dann ist die Menge  $S$  offen im metrischen Raum  $\{M, d\}$  aus Beispiel 30, sie ist aber nicht offen im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$ . Der Grund ist aus der Abbildung ersichtlich: Ähnlich wie bei der Menge 32 im Beispiel 36 "stören" auch im Raum  $\{E_2, d\}$  die Punkte auf der Strecke  $AB$ , denn für solche Punkte  $x$  enthält jede Kugel  $K(x, r)$  in  $\{E_2, d\}$  Punkte, welche nicht in  $S$  liegen.

Demgegenüber liegt die Kugel  $K(x, r)$  (im metrischen Raum  $\{M, d\}$ ) auch für diese Punkte  $x$  in der Menge  $S$ , siehe Beispiel 30.

Aus den Beispielen 37 und 39 geht hervor, dass dieselbe Menge  $S$  in einem metrischen Raum  $\{M_1, \rho_1\}$  offen sein kann, in einem anderen metrischen Raum  $\{M_2, \rho_2\}$  jedoch nicht offen sein muss, wobei allerdings  $S \subset M_1$  und  $S \subset M_2$  vorausgesetzt werden muss.

Deshalb haben wir in der Definition 7 konsequent formuliert, dass die Menge "offen in  $\{M, \rho\}$ " ist. Im weiteren werden wir auf den Nachtrag "in  $\{M, \rho\}$ " verzichten, wenn aus dem Zusammenhang deutlich wird, um welchen metrischen Raum es sich handelt.

In den Beispielen 37 und 39 waren die Metriken  $\rho_1$  und  $\rho_2$  stets die gleichen, im Beispiel 37 verwendeten wir  $p$  und im Beispiel 39  $d$ , so dass die Eigenschaft der Menge  $S$  "offen zu sein in  $\{M, \rho\}$ " nur von der Menge  $M$  abhing. In den weiteren Beispielen wird hervorgehoben, dass auch die Metrik  $\rho$  diese Eigenschaft der Menge  $S$  beeinflussen kann.

Beweisen wir zuerst diese Behauptung:

Satz 5: Es sei  $M$  eine beliebige Menge, und  $\rho$  sei die durch (45) in Satz 2 gegebene Metrik. Dann gilt: Im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ist jede Menge  $S \subset M$  offen.

Beweis: Es sei  $S$  eine beliebige Menge in  $M$ , und es sei  $x$  ein Punkt aus  $S$ . Wenn wir  $r < 1$  wählen, dann wird die Kugel  $K(x, r)$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  nur aus dem Punkt  $x$  gebildet (siehe Beispiel 31); sie liegt also vollständig in  $S$ .

Das gilt für jeden Punkt aus  $S$ , und deshalb ist die Menge  $S$  offen in  $\{M, \rho\}$ .

Beispiel 40: Wählen wir in Satz 5 als Menge  $M$  die Ebene  $E_2$ , dann ist im metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$  jede Menge der Ebene offen, also auch die Mengen  $S_2$  und  $S_3$  aus Beispiel 36 und die aus einem Punkt bestehende Menge des Beispiels 32, obwohl sie keine offenen Mengen im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  sind.

Die Metrik  $\rho$  aus Satz 2 ist zwar unkompliziert, aber aus Satz 5 geht hervor, dass es mit Hilfe dieser Metrik wahrscheinlich nicht möglich sein wird, die Untermengen  $S \subset M$  näher zu charakterisieren und einzuteilen. Beispiel 40 illustriert dies anschaulich:

In  $\{E_2, \rho\}$  sind unter dem Gesichtspunkt des Offenseins alle Mengen von gleicher "Qualität", während z.B. in  $\{E_2, d\}$  die Struktur der Untermengen  $S$  unter diesem Gesichtspunkt wesentlich vielfältiger ist.

Es sei die Menge  $M$  gegeben, und es seien  $\rho_1, \rho_2$  zwei Metriken auf  $M$ . Außerdem bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}_1$  das System aller offenen Mengen in  $\{M, \rho_1\}$  und mit  $\mathcal{S}_2$  das System aller offenen Mengen in  $\{M, \rho_2\}$ .

Dann ist es oft hilfreich, die Antwort auf folgendes Problem zu kennen: Welche Eigenschaften müssen die Metriken  $\rho_1$  und  $\rho_2$  haben, damit die Menge  $S \subset M$ , wenn sie in das System  $\mathcal{S}_1$  gehört, auch in das System  $\mathcal{S}_2$  gehört?

Auf diese Frage antwortet teilweise der folgende Satz:

Satz 6: Es seien mit  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei Metriken auf der Menge  $M$  definiert, und es möge eine positive Konstante  $c$  so existieren, dass für alle Elemente  $x$  und  $y$  aus  $M$  gilt:

$$\rho_1(x, y) \leq c\rho_2(x, y) \quad (52)$$

Daraus folgt: Wenn die Menge  $S \subset M$  offen in  $\{M, \rho_1\}$  ist, dann ist sie auch in  $\{M, \rho_2\}$  offen.

Beweis: Wir bezeichnen mit  $K_1(a, r)$  eine Kugel in  $\{M, \rho_1\}$  und mit  $K_2(a, r)$  eine Kugel in  $\{M, \rho_2\}$ . Es möge die Menge  $S$  offen in  $\{M, \rho_1\}$  sein, d.h., für jedes Element  $x$  aus  $S$  existiert eine Zahl  $r = f(x)$ , so dass die Kugel  $K_1(x, r)$  vollständig in  $S$  liegt.

Wir betrachten nun in  $\{M, \rho_2\}$  die Kugel  $K_2(x, r/c)$ , wobei  $c$  die Konstante aus der Ungleichung (52) ist. Wenn  $z$  ein Punkt aus dieser Kugel ist, dann gilt:

$$\rho_2(x, z) < \frac{r}{c}$$

Aus der Ungleichung (52) ergibt sich dann:

$$\rho_1(x, z) \leq c\rho_2(x, z) < c \frac{r}{c} = r$$

Das bedeutet aber, dass  $\rho_1(x, z) < r$  oder dass der Punkt  $z$  aus der Kugel  $K_2(x, r/c)$  auch in der Kugel  $K_1(x, r)$  liegt. Dies gilt für jeden Punkt aus der Kugel  $K_2(x, r/c)$ , so dass diese Kugel vollständig in der Kugel  $K_1(x, r)$  liegt.

Diese Kugel wiederum liegt aber vollständig in der Menge  $S$ , und deshalb liegt auch die gesamte Kugel  $K_2(x, r/c)$  in  $S$ . Damit haben wir zu dem gegebenen Element  $x$  aus  $S$  die verlangte positive Zahl  $r/c$  gefunden, und die Menge  $S$  ist folglich offen in  $\{M, \rho_2\}$ .

Bemerkung 15: Wenn wir für die Systeme der offenen Mengen in den metrischen Räumen aus Satz 6 die Bezeichnungen  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  gebrauchen, dann ist es möglich, die Behauptung des Satzes 6 wie folgt zu formulieren:

Wenn (52) gilt und die Menge  $S \subset M$  in das System  $\mathcal{S}_1$  gehört, dann gehört sie auch in das System  $\mathcal{S}_2$ . Aus (52) ergibt sich also

$$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \quad (53)$$

Das System  $\mathcal{S}_2$  kann allerdings viel umfassender sein als das System  $\mathcal{S}_1$ ; es können Mengen  $S$  existieren, welche in  $\{M, \rho_2\}$  offen und in  $\{M, \rho_1\}$  nicht offen sind.

Bemerkung 16: Die Bedeutung von Ungleichung (52) sollte aber nicht überschätzt werden. Aus den vorangegangenen Beispielen geht nämlich hervor (s. Beispiel 40), dass jede in  $\{E_2, d\}$  offene Menge auch offen in  $\{E_2, \rho\}$  ist, wobei  $\rho$  die Metrik (45) ist.

Dabei gilt aber für beide Metriken eine zu (52) analoge Beziehung nicht; dann müsste nämlich eine positive Konstante  $c$  so existieren, dass für alle Punkte  $x, y$  der Ebene

$$d(x, y) \leq c\rho(x, y) \leq c \quad (54)$$

wäre, wegen - wie wir bereits wissen -  $\rho(x, y) \leq 1$ . Die Ungleichungen (54) erfüllen aber nicht alle Punkte der Ebene; es genügt,  $x = (0, 0)$  und  $y = (2c, 0)$  zu wählen. Aus Satz 6 ergibt sich folgende Behauptung:

Wenn  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei äquivalente und auf der Menge  $M$  definierte Metriken sind (siehe Definition 3), dann sind alle offenen Mengen in  $\{M, \rho_1\}$  auch offen in  $\{M, \rho_2\}$ , und umgekehrt sind alle offenen Mengen in  $\{M, \rho_2\}$  auch offen in  $\{M, \rho_1\}$ .

Beweis: Wenn die Metriken  $\rho_1$  und  $\rho_2$  äquivalent sind, dann gilt die Ungleichung (52), und nach Bemerkung 15 ist  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ .

Gleichzeitig existiert aber eine Konstante  $C > 0$ , so dass auch die Ungleichung

$$\rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$$

gilt, und nach Bemerkung 15 ist dann  $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ . Das bedeutet, dass  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$  ist, und genau dies wollten wir beweisen.

Beispiel 41: Aus Beispiel 9 ergibt sich, dass die offenen Mengen im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  auch in den metrischen Räumen  $\{E_2, p\}$  und  $\{E_2, m\}$  offen sind und umgekehrt.

Sechster Exkurs: In der modernen Mathematik begegnen wir sehr oft den sogenannten topologischen Räumen. Wir werden sie hier nicht analysieren, sondern erwähnen sie vor allem deshalb, weil in ihnen gerade der Begriff der offenen Menge eine wichtige Rolle spielt.

Wir wollen nur erwähnen, dass jeder metrische Raum  $\{M, \rho\}$  gleichzeitig ein topologischer Raum ist und dass zwei metrische Räume  $\{M, \rho_1\}$  und  $\{M, \rho_2\}$  mit äquivalenten Metriken  $\rho_1$  und  $\rho_2$  denselben topologischen Raum bestimmen.

Ende des sechsten Exkurses

Siebenter Exkurs: Der Leser kennt sicher den Begriff der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt. Wenn  $f$  eine Funktion der reellen Veränderlichen  $t$  ist, die für alle reellen Zahlen  $t$  definiert ist, so sagen wir, dass  $f$  im Punkt  $a$  aus  $E_1$  stetig ist, wenn gilt:

Zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert eine positive, von  $\varepsilon$  abhängige Zahl  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , so dass  $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$  für alle  $t$  mit  $|t - a| < \delta$  gilt.

Wenn wir uns erinnern, wie der euklidische Abstand  $d$  in  $E_1$  definiert ist, dann können wir diese Forderung wie folgt schreiben:

$$d(t, a) < \delta = d[f(t), f(a)] < \varepsilon$$

oder auch:

$t$  liegt in der Kugel  $K(a, \delta) \Rightarrow f(t)$  liegt in der Kugel  $K(f(a), \varepsilon)$ , oder schließlich - ohne die Zahlen  $\varepsilon$  und  $\delta$  zu verwenden - können wir formulieren:

Zu jeder Kugel (in  $\{E_1, d\}$ ) mit dem Mittelpunkt  $f(a)$  (wir bezeichnen sie mit  $\mathcal{K}$ ) existiert eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $a$ , welche mit Hilfe der Funktion  $f$  vollständig in die Kugel  $\mathcal{K}$  abgebildet wird.

Diese Formulierung ermöglicht es, den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt auch auf abstrakte Mengen und auf eine Abbildung  $F$  zu übertragen, welche den Punkten des metrischen Raumes  $\{M, \rho\}$  die Punkte eines anderen metrischen Raumes  $\{N, \sigma\}$  zuordnet:

Wenn jedem Element  $x$  aus  $M$  ein eindeutig bestimmtes Element  $F(x)$  aus  $N$  zugeordnet wird, dann sagen wir, dass die Abbildung  $F$  (von  $M$  in  $N$ ) im Punkt  $a \in M$  stetig ist, wenn zu jeder Kugel  $K_1$  mit dem Mittelpunkt  $F(a)$  im metrischen Raum  $\{N, \sigma\}$  eine Kugel  $K_2$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  mit dem Mittelpunkt  $a$  existiert, welche mit Hilfe der Abbildung  $F$  vollständig in die Kugel  $K_1$  abgebildet wird.

Aufgabe: Man veranschauliche sich den Begriff der Stetigkeit einer Abbildung im Punkt eines metrischen Raumes an verschiedenen konkreten Fällen!

Man überlege sich, was die Stetigkeit einer Abbildung  $F$  von  $\{E_2, d\}$  in  $\{E_2, d\}$  bedeutet.

Im Beispiel 5 haben wir die Abbildung der Geraden  $E_1$  in die Ebene  $E_2$  definiert, und in der Bemerkung 6 definierten wir analog die Abbildung der Ebene  $E_2$  in den Raum  $E_3$ . Sind diese Abbildungen stetig?

Ende des siebenten Exkurses

## 4 Inneres und Rand einer Menge, abgeschlossene Mengen

Bei solchen Mengen in der Ebene, wie zum Beispiel dem Bereich  $S$  aus Abb. 28, können wir bestimmen, welcher Punkt "innen", welcher "auf dem Rand der Menge  $S$ ", welcher "außerhalb" liegt.

Es existieren allerdings auch weniger anschauliche ebene Gebilde, bei denen eine ähnliche Entscheidung schon wesentlich schwerer ist, bei denen unsere Intuition versagt und uns auf einen Irrweg führen kann.<sup>8</sup> Diese intuitiv verständlichen Begriffe können wir mit Hilfe der Metrik auch in allgemeineren Mengen einführen.

Es seien also  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $S$  eine Untermenge der Menge  $M$ . Bevor wir die Elemente von  $M$  in drei Gruppen bzgl.  $S$  einteilen, bezeichnen wir mit dem Symbol

$$M - S$$

die Menge aller Elemente aus  $M$ , welche nicht zu  $S$  gehören. Die Menge  $M - S$  nennen wir Komplement der Menge  $S$  (hinsichtlich der Menge  $M$ ).

Definition 8: (1) Das Element  $x$  aus  $M$  ist ein innerer Punkt der Menge  $S$ , wenn eine positive Zahl  $r = r(x)$  so existiert, dass die Kugel  $K(x, r)$  vollständig in  $S$  liegt.

(2) Das Element  $x$  aus  $M$  ist ein äußerer Punkt der Menge  $S$ , wenn eine positive Zahl  $r = r(x)$  so existiert, dass die Kugel  $K(x, r)$  keinen Punkt aus  $S$  enthält, also vollständig in  $M - S$  liegt.

(3) Das Element  $x$  aus  $M$  ist ein Randpunkt der Menge  $S$ , wenn in jeder Kugel  $K(x, r)$  mit dem Mittelpunkt  $x$ , d.h. für jeden Radius  $r > 0$ , ein Element der Menge  $S$  und gleichzeitig ein Element der Menge  $M - S$  liegt.

Die Menge aller inneren Punkte der Menge  $S$  bezeichnen wir mit<sup>9</sup>  $\mathcal{I}(S)$  und nennen sie Inneres der Menge  $S$  bezüglich des metrischen Raumes  $\{M, \rho\}$ .

Die Menge aller äußeren Punkte der Menge  $S$  bezeichnen wir mit<sup>10</sup>  $\mathcal{E}(S)$  und nennen sie Äußeres der Menge  $S$  bezüglich des metrischen Raumes  $\{M, \rho\}$ . Die Menge aller Randpunkte der Menge  $S$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{H}(S)$  und nennen sie Rand der Menge  $S$  bezüglich  $\{M, \rho\}$ .

Aus der Definition 8 ergeben sich verschiedene Folgerungen, die wir als Bemerkungen festhalten wollen:

Bemerkung 17: Man beachte den Unterschied zwischen dem Äußeren der Menge  $S$  und dem Komplement  $M - S$ : Zum Komplement  $M - S$  gehört jedes Element aus  $M$ , welches nicht in  $S$  liegt, wogegen  $\mathcal{E}(S)$  nur die Elemente aus  $M$  enthält, welche nicht zu  $S$  einschließlich einer gewissen Kugel gehören, deren Mittelpunkt das betreffende

<sup>8</sup>Mit verschiedenen, oftmals "unanschaulichen" Mengen kann sich der Leser z.B. im Buch N.J. Wilenkin: Unterhaltsame Mengenlehre. Leipzig 1973, bekannt machen.

<sup>9</sup>Abgeleitet vom französischen Wort "intérieur" (innen).

<sup>10</sup>Abgeleitet vom französischen Wort "extérieur" (außen).



Element selbst ist.

Bemerkung 18: Die inneren Punkte der Menge  $S$  können nicht gleichzeitig äußere Punkte sein: Die Punkte aus  $\mathcal{I}(S)$  liegen nämlich in  $S$ , während die Punkte aus  $\mathcal{E}(S)$  nicht dort liegen. Man kann auch sagen: Das Innere  $\mathcal{I}(S)$  ist eine Teilmenge von  $S$

$$\mathcal{I}(S) \subset S \quad (55)$$

während das Äußere  $\mathcal{E}(S)$  eine Teilmenge von  $M - S$  ist:

$$\mathcal{E}(S) \subset M - S \quad (55^*)$$

Diese Beziehungen gelten dabei für jede Menge  $S \subset M$ . Die Beziehung des Randes  $\mathcal{H}(S)$  zur ursprünglichen Menge  $S$  ist nicht eindeutig zu charakterisieren; für verschiedene Mengen können verschiedene Fälle eintreten (siehe Beispiel 42).

Ein Randpunkt kann allerdings weder ein innerer noch ein äußerer Punkt sein: Aus Teil (3) der Definition 8 geht nämlich hervor, dass kein  $r$  existiert (und daher auch keine Kugel), für welchen die Bedingungen aus Teil (1) oder (2) erfüllt wären.

Schließlich ist es möglich zu zeigen, dass die Randpunkte der Menge  $S$  alle die Punkte der Menge  $M$  sind, welche weder innere noch äußere Punkte sind: Wenn nämlich ein Punkt  $x$  aus  $M$  kein Randpunkt ist, dann bedeutet dies entweder,

(a) dass eine bestimmte Kugel  $K(x, r)$  existiert, d.h. eine bestimmte positive Zahl  $r$ , so dass diese Kugel keinen Punkt aus  $S$  enthält; dann liegt aber diese Kugel vollständig in  $M - S$ , und der Punkt  $x$  ist folglich ein äußerer Punkt der Menge  $S$ ; oder

(b) es existiert eine bestimmte Kugel  $K(x, r)$ , d.h. eine bestimmte positive Zahl  $r$ , so dass diese Kugel keinen Punkt aus  $M - S$  enthält; dann liegt aber diese Kugel ganz in  $S$ , und der Punkt  $x$  ist daher ein innerer Punkt der Menge  $S$ .

Die Menge  $M$  können wir also als Vereinigung dreier wechselseitig elementfremder Mengen auffassen; Inneres, Äußeres und Rand der Menge  $S$ :

$$M = \mathcal{I}(S) \cup \mathcal{E}(S) \cup \mathcal{H}(S) \quad (56)$$

Diese Beziehung gilt für jede Menge  $S \subset M$ .

Bemerkung 19: Aus Definition 8 ist sofort auch ersichtlich, dass ein äußerer Punkt der Menge  $S$  ein innerer Punkt der Menge  $M - S$  ist:

$$\mathcal{E}(S) = \mathcal{I}(M - S) \quad (57)$$

und dass umgekehrt ein innerer Punkt der Menge  $S$  ein äußerer Punkt der Menge  $M - S$  ist:

$$\mathcal{I}(S) = \mathcal{E}(M - S) \quad (58)$$

Die Ränder beider Mengen sind dabei gleich:

$$\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(M - S) \quad (59)$$

Beispiel 42: Im Beispiel 36 definierten wir drei Mengen in der Ebene  $E_2$ . Der Leser wird feststellen, dass alle drei Mengen das gleiche Innere haben, nämlich die Menge  $S_1$ :

$$\mathcal{I}(S_1) = \mathcal{I}(S_2) = \mathcal{I}(S_3) = S_1$$

dass sie das gleiche Äußere haben:

$$\mathcal{E}(S_1) = \mathcal{E}(S_2) = \mathcal{E}(S_3) = E_2 - S_3$$

d.h. eine Ebene, aus welcher wir eine Halbkreisfläche sowie den Kreisbogen und die Strecke herausnehmen, welche diese Fläche begrenzen, und dass sie den gleichen Rand haben, welchen der Halbkreis  $\widehat{AB}$  und die Strecke  $AB$  bilden:

$$\mathcal{H}(S_1) = \mathcal{H}(S_2) = \mathcal{H}(S_3)$$

Die Beziehung zwischen der Menge  $S_i$  und ihrem Rand  $\mathcal{H}(S_i)$  gibt dabei die Möglichkeiten an, die vorkommen können:

Der Rand  $\mathcal{H}(S_1)$  ist kein Teil der Menge  $S_1$  (folglich ist er ein Teil der Menge  $E_2 - S_1$ ); ein Teil des Randes  $\mathcal{H}(S_2)$  gehört zu  $S_2$  (nämlich die Strecke  $AB$ ), während andererseits ein Teil des Randes nicht zu  $S_2$  gehört (nämlich der Bogen  $\widehat{AB}$ ); bei der Menge  $S_3$  ist der gesamte Rand  $\mathcal{H}(S_3)$  ein Teil der Menge  $S_3$ .

Diese Betrachtungen können wir dabei in den metrischen Räumen  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_2, p\}$  und  $\{E_2, m\}$  durchführen.

Beispiel 43: Wir betrachten den metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  und in ihm eine Menge  $S$ , die aus einem einzigen Punkt  $a$  gebildet wird. Diese Menge hat kein Inneres:  $\mathcal{I}(S) = \emptyset$ ; dabei ist der Punkt  $a$  sein eigener Rand:  $\mathcal{H}(S) = S$ .

Aus (56) geht dann  $\mathcal{S} = E_2 - S$  hervor. Die Menge  $T$ , gebildet zum Beispiel aus der Strecke  $AB$  (oder aus dem Kreisbogen  $\widehat{AB}$ ) der Abb. 27, hat dieselben Eigenschaften:  $\mathcal{H}(T) = T$ ,  $\mathcal{I}(T) = \emptyset$  und  $\mathcal{E}(T) = E_2 - T$ .

Wir werden die Begriffe Inneres, Äußeres und Rand der Menge in weiteren Beispielen nicht mehr illustrieren, empfehlen aber dem Leser, sich in den vorangegangenen Beispielen diese Begriffe selbst zu verdeutlichen. Vor allem sollte er beweisen, dass der Rand der Kugel  $K(a, r)$  in den metrischen Räumen  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_2, p\}$  und  $\{E_2, m\}$  die Sphäre  $S(a, r)$  ist.

Wir führen nun zwei Beispiele an, welche zeigen, dass die Begriffe Inneres, Äußeres und Rand einer Menge - ebenso wie der Begriff der offenen Mengen - vom gewählten metrischen Raum abhängen.

Beispiel 44: Wir betrachten die Menge  $S$  aus Abb. 28 (siehe Beispiel 39). Wenn wir die Menge  $S$  als Untermenge der Ebene ansehen, dann wird sie ähnliche Eigenschaften wie die Menge  $S_2$  aus Beispiel 42 haben: ihr Inneres  $\mathcal{I}(S)$  in  $\{E_2, d\}$  wird eine Menge bilden, welche entsteht, wenn wir aus  $S$  die Strecke  $AB$  entfernen, während ihren Rand  $\mathcal{H}(S)$  in  $\{E_2, d\}$  die Strecke  $AB$  und die Kurve  $\widehat{AB}$  aus Abb. 28 bilden.

Wenn wir aber die Menge  $S$  als Untermenge von  $M$  aus Beispiel 30 ansehen, d.h.

als Untermenge der oberen Halbebene einschließlich der Abszissenachse, dann wird ihr Inneres  $\mathcal{I}(S)$  (in  $\{M, d\}$ ) die gesamte Menge  $S$  bilden. Zum Inneren gehört diesmal auch die Strecke  $AB$ , was aus der Gestalt der Kugel im metrischen Raum  $\{M, d\}$  hervorgeht (s. Beispiel 30), und den Rand  $\mathcal{H}(S)$  in  $\{M, d\}$  bildet nur die Kurve  $\widehat{AB}$ .

Beispiel 45: Oben empfohlen wir dem Leser zu zeigen, dass in  $\{E_2, d\}$  der Rand der Kugel  $K(a, r)$  die Sphäre  $S(a, r)$  ist. Dieser anschaulich völlig klare Fakt ist nicht automatisch in andere metrische Räume zu übertragen.

Im Raum  $\{M, d\}$  aus Beispiel 27 ist die Sphäre  $S(a, r)$  kein Rand von  $K(a, r)$ . Wir beweisen dies:

Wenn wir z.B. den Punkt  $b = (2, 4)$  aus  $M$  wählen, welcher auf der Sphäre  $S(a, 3)$  aus Abb. 18 liegt, dann wird die Kugel  $K(b, \frac{1}{2})$  aus einem einzigen Punkt  $b$  gebildet; diese Kugel enthält also keinen Punkt der Menge  $K(a, 3)$ , und deshalb kann sie nicht zum Rand  $\mathcal{H}(K(a, 3))$  gehören.

Umgekehrt gilt: Der Punkt  $b$  und somit die gesamte Kugel  $K(b, \frac{1}{2})$  liegt in  $M - K(a, 3)$  und gehört daher zu  $\mathcal{E}(K(a, 3))$ .

Im Raum  $\{M, d\}$  aus Beispiel 27 gilt also für jede Kugel  $K$ :  $K = \mathcal{I}(K)$ ,  $M - K = \mathcal{E}(K)$ , und der Rand  $\mathcal{H}(K)$  ist die leere Menge.

Aufgabe 9: Man beweise durch Vergleichen des ersten Teils der Definition 7 mit der Definition 8 folgenden Satz!

Satz 7 : Es seien  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $S$  eine beliebige Untermenge der Menge  $M$ . Dann gilt:

- (1) Das Innere  $\mathcal{I}(S)$  der Menge  $S$  ist eine offene Menge im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ .
- (2) Die Menge  $S$  ist offen in  $\{M, \rho\}$  genau dann, wenn sie mit ihrem Inneren identisch ist, d.h. wenn gilt  $\mathcal{I}(S) = S$ .

Definition 9: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Wir nennen die Menge  $S \subset M$  abgeschlossen in  $\{M, \rho\}$ , wenn ihr Komplement  $M - S$  eine offene Menge im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ist.

Beispiel 46: Die abgeschlossene Kugel  $\overline{K(a, r)}$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ist in diesem Raum eine abgeschlossene Menge.

Wir beweisen das (der Leser fertige sich eine Skizze an!): Das Komplement  $M - \overline{K(a, r)}$  wird nach der Definition der offenen Kugel aus den Punkten  $x \in M$  gebildet, für welche  $\rho(a, x) > r$  ist. Wir wählen also einen beliebigen, aber festen Punkt  $x$  aus dem Komplement  $M - \overline{K(a, r)}$  und bezeichnen mit  $R$  seinen Abstand vom Punkt  $a$ :  $\rho(a, x) = R$ .

Dann ist  $R > r$ , und wenn wir  $r^* = \frac{1}{2}(R - r)$  setzen, dann wird  $r^* > 0$  sein.

Wir zeigen, dass die Kugel  $K(x, r^*)$  vollständig in  $M - \overline{K(a, r)}$  liegt:

Es sei  $y$  ein beliebiger Punkt aus der Kugel  $K(x, r^*)$ , d.h., es sei  $\rho(x, y) < r^*$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\rho(a, x) \leq \rho(x, y) + \rho(a, y) \quad , \quad \rho(a, y) \geq \rho(a, x) - \rho(x, y)$$

Aber es gilt  $\rho(a, x) = R$  und  $-\rho(x, y) > -r^*$ , und deshalb ist

$$\rho(a, y) > R - r^* = R - \frac{1}{2}(R - r) = \frac{1}{2}(R + r) > \frac{1}{2}(r + r) = r$$

wegen  $R > r$ . Der Punkt  $y$  liegt also in  $M - \overline{K(a, r)}$ , und weil  $y$  ein beliebiger Punkt der Kugel  $K(x, r^*)$  ist, liegt in  $M - \overline{K(a, r)}$  diese gesamte Kugel. Damit haben wir aber zum gegebenen Element  $x$  aus  $M - \overline{K(a, r)}$  die in Definition 7 erwähnte Zahl  $r^* > 0$  gefunden, und nach dieser Definition ist die Menge  $M - \overline{K(a, r)}$  offen.

Das Komplement dieser Menge (bezüglich  $M$ ) ist aber die abgeschlossene Kugel  $K(a, r)$ , und diese ist nach Definition 9 eine abgeschlossene Menge.

Beispiel 47: Aus (56) geht hervor, dass das Komplement der Menge  $\mathcal{J}(S)$  die Menge  $\mathcal{E}(S) \cup \mathcal{H}(S)$  ist. Weil die Menge  $\mathcal{J}(S)$  nach Behauptung (!) des Satzes 7 offen ist, muss die Menge

$$\mathcal{E}(S) \cup \mathcal{H}(S)$$

abgeschlossen sein in  $\{M, \rho\}$ . Diese Behauptung gilt für jede Menge  $S \subset M$ , und wenn wir sie auf die Menge  $M - S$  anwenden, dann wird auch die Menge

$$\mathcal{E}(M - S) \cup \mathcal{H}(M - S)$$

als abgeschlossen erkannt. Daher erhalten wir mit (58) und (59) sofort diesen Satz:

Satz 8: Es seien  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $S$  eine beliebige Untermenge von  $M$ . Dann ist die Menge

$$\mathcal{J}(S) \cup \mathcal{H}(S)$$

abgeschlossen in  $\{M, \rho\}$ .

Beispiel 48: Die Menge  $\mathcal{E}(S)$  ist Inneres der Menge  $M - S$  und ist nach Satz 7 eine offene Menge. Auch  $\mathcal{J}(S)$  ist eine offene Menge, und deshalb ist auch

$$\mathcal{J}(S) \cup \mathcal{E}(S)$$

eine offene Menge. (Man beweise das!) Das Komplement dieser offenen Menge (bezüglich  $M$ ) ist nach (56) der Rand  $\mathcal{H}(S)$ ; wir haben also bewiesen, dass der Rand einer beliebigen Menge  $S \subset M$  eine abgeschlossene Menge in  $\{M, \rho\}$  ist.

Beispiel 49: Wir betrachten von neuem die metrischen Räume und die Mengen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  aus Beispiel 36 (siehe auch Beispiel 42). Die Menge  $S_1$  ist offen. Das ergibt sich jetzt z.B. aus Satz 7, denn im Beispiel 42 haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{J}(S_1) = S_1$  gilt.

Die Menge  $S_3$  ist demgegenüber abgeschlossen, denn nach Beispiel 42 ist  $\mathcal{E}(S_3) = E_2 - S_3$ , nach (57) ist  $\mathcal{E}(S_3) = \mathcal{J}(E_2 - S_3)$ , und daraus folgt  $\mathcal{J}(E_2 - S_3) = E_2 - S_3$ .

Nach Satz 7 ist daher die Menge  $E_2 - S_3$  offen. Und schließlich geht aus der Behauptung (2) des Satzes 7 abermals hervor, dass die Menge  $S_2$  weder offen noch abgeschlossen ist;  $S_2$  umfasst nämlich einen Teil des Randes  $\mathcal{H}(S_2)$ , so dass  $\mathcal{J}(S_2) = S_2$  nicht gilt, und die Menge  $E_2 - S_2$  ist auch nicht offen, denn sie enthält einen Teil des Randes

$\mathcal{H}(S_2) = \mathcal{H}(E_2 - S_2)$ , so dass  $\mathcal{J}(E_2 - S_2) = E_2 - S_2$  nicht gilt.

Beispiel 50: Kehren wir zum Raum  $\{M, d\}$  aus Beispiel 45 zurück und bezeichnen wir mit  $K$  eine Kugel in diesem Raum.

Nach Aufgabe 8 ist  $K$  eine offene Menge in  $\{M, d\}$ , und wegen Satz 7 gilt  $\mathcal{J}(K) = K$ . Im Beispiel 45 haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{H}(K) = \emptyset$  ist, folglich gilt

$$\mathcal{J}(K) \cup \mathcal{H}(K) = \mathcal{J}(K) = K$$

Satz 8 ist aber die Menge  $\mathcal{J}(K) \cup \mathcal{H}(K)$  abgeschlossen in  $\{M, d\}$ , d.h., die Menge  $K$  ist abgeschlossen in  $\{M, d\}$ . Wir zeigten also, dass die Kugel  $K$  in  $\{M, d\}$  gleichzeitig offen und abgeschlossen ist!

In jedem metrischen Raum existieren Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Satz 9: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Dann sind die Mengen  $M$  und  $\emptyset$  gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $\{M, \rho\}$ .

Der Beweis geht aus Satz 4 und aus der Definition 9 hervor: Das Komplement der Menge  $M$  bezüglich  $M$  ist die leere Menge  $\emptyset$ ; diese ist nach Satz 4 offen in  $\{M, \rho\}$ , und damit ist die Menge  $M$  abgeschlossen.

Ähnlich ist das Komplement der Menge  $\emptyset$  bezüglich  $M$  die Menge  $M$  selbst; diese ist nach Satz 4 offen in  $\{M, \rho\}$ , und damit ist nach Definition 9 die Menge  $\emptyset$  abgeschlossen. Aus Satz 5 und aus der Definition 9 geht auch sofort hervor, dass im Raum  $\{M, \rho\}$ , wobei  $M$  eine beliebige Menge ist und  $\rho$  die in (45) erklärte Metrik, jede Menge  $S \subset M$  gleichzeitig offen und abgeschlossen ist.

Derartige Mengen wirken einigermaßen "störend". Zum Glück sind aber in den üblicherweise verwendeten metrischen Räumen  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_3, d\}$  und auch in ähnlichen die Mengen  $E_2$  bzw.  $E_3$  sowie die leere Menge  $\emptyset$  die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen; das werden wir hier allerdings nicht beweisen.

Wir wollen noch ein Beispiel einer Menge anführen, die offen und abgeschlossen ist, und dabei die Abhängigkeit dieser Eigenschaft vom metrischen Raum zeigen.

Beispiel 51: Wir betrachten in der Ebene  $E_2$  zwei Kreise, den Kreis  $M_1$  mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und mit dem Radius 1 sowie den Kreis  $M_2$  mit dem Mittelpunkt  $(3, 1)$  und dem Radius 2 (siehe Abb. 29). Die Kreislinien selbst zählen wir dabei nicht zu den Mengen  $M_1$  und  $M_2$ .

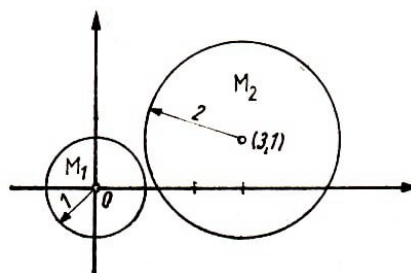


Abb. 29

Es sei  $M = M_1 \cup M_2$ , und nach Satz 1 ist  $\{M, d\}$  ein metrischer Raum. Wir können

uns leicht überzeugen, dass sowohl  $M_1$  als auch  $M_2$  offene Mengen in  $\{M, d\}$  sind. Dabei ist aber  $M_1$  das Komplement der offenen Menge  $M_2$  bezüglich  $M$ .

Daher ist  $M_1$  eine abgeschlossene Menge in  $\{M, d\}$ , und die Menge  $M_2$  ist auch abgeschlossen als Komplement der offenen Menge  $M_1$ .

Die Mengen  $M_1$  und  $M_2$  sind also in  $\{M, d\}$  offen und abgeschlossen. Dagegen sind sie in  $\{E_2, d\}$  typische offene Mengen (siehe beispielsweise Aufgabe 8).

Wir führen zum Schluss dieses Kapitels noch einen wichtigen Begriff ein:

**Definition 10:** Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum. Wir sagen, dass das Element  $x$  aus  $M$  ein Abschließungspunkt der Menge  $S \subset M$  ist, wenn in jeder Kugel  $K(x, r)$ , d.h. für jede positive Zahl  $r$ , wenigstens ein Element der Menge  $S$  liegt.

Die Menge aller Abschließungspunkte nennen wir Abschließung der Menge  $S$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ , und wir bezeichnen sie mit  $\bar{S}$ .

Wir führen einige Eigenschaften der Abschließung  $\bar{S}$  an:

(1) Vor allem enthält  $\bar{S}$  die Menge  $S$ :

$$S \subset \bar{S} \quad (60)$$

Wenn nämlich  $x$  ein Element aus  $S$  ist, so liegt in jeder Kugel  $K(x, r)$  wenigstens ein Element aus  $S$ , und zwar das Element  $x$  selbst.

(2) Aus Teil (3) der Definition 8 geht sofort hervor, dass auch jeder Randpunkt der Menge  $S$  zu  $\bar{S}$  gehört:

$$\mathcal{H}(S) \subset \bar{S} \quad (61)$$

(3) Aus Teil (2) der Definition 8 geht schließlich hervor, dass die äußeren Punkte der Menge  $S$  nicht zu  $\bar{S}$  gehören:

$\mathcal{E}(S) \cap \bar{S} = \emptyset$ . Für  $x$  aus  $\mathcal{E}(S)$  existiert nämlich wenigstens eine Zahl  $r = f(x)$ , so dass die Kugel  $K(x, r)$  keinen Punkt aus  $S$  enthält, und damit ist die Bedingung aus der Definition 10 nicht erfüllt.

Weil aus (54) und (56) hervorgeht, dass  $M = S \cup \mathcal{E}(S) \cup \mathcal{H}(S)$  gilt, erhalten wir aus den Eigenschaften (1) - (3) der Abschließung  $\bar{S}$  sofort diese Folgerung:

$$\bar{S} = S \cup \mathcal{H}(S) \quad (= \mathcal{I}(S) \cup \mathcal{H}(S)) \quad (62)$$

Wir können also statt (56) auch schreiben:

$$M = \bar{S} \cup \mathcal{E}(S) \quad (63)$$

Daraus geht folgender Satz hervor:

**Satz 10:** Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum, und  $S$  sei eine beliebige Untermenge der Menge  $M$ . Dann ist ihre Abschließung  $\bar{S}$  eine abgeschlossene Menge in  $\{M, \rho\}$ .

**Beweis:** Nach (63) und nach der Eigenschaft (3) der Abschließung  $\bar{S}$  ist die Menge  $\bar{S}$  das Komplement des Äußeren  $\mathcal{E}$ . Die Menge  $\mathcal{E}(S)$  ist aber offen, z.B. nach Satz 7, denn sie ist das Innere der Menge  $M - S$ .

Außerdem gilt sogar:

Satz 11: Die Menge  $S \subset M$  ist abgeschlossen in  $\{M, \rho\}$  genau dann, wenn sie mit ihrer Abschließung identisch ist, d.h. wenn  $S = \bar{S}$  gilt.

Beweis: (a) Es sei  $S = \bar{S}$ . Die Menge  $\bar{S}$  ist nach Satz 10 abgeschlossen in  $\{M, \rho\}$ , und folglich ist auch die Menge  $S$  abgeschlossen.

(b) Ist  $S$  abgeschlossen, dann ist die Menge  $M - S$  offen, d.h., nach Satz 7 gilt  $\mathcal{J}(M - S) = M - S$ . Aber es ist auch  $\mathcal{J}(M - S) = \mathcal{J}$ , so dass wir  $\mathcal{E}(S) = M - S$  erhalten oder  $S = M - \mathcal{E}(S)$ .

Gleichzeitig ist aber nach (63)  $\bar{S} = M - \mathcal{E}(S)$ , und daraus folgt  $S = \bar{S}$ .

Abermals werden wir den Begriff der Abschließung nicht weiter an Beispielen illustrieren. Die Menge  $\bar{S}$  ist nämlich durch  $S$  und  $\mathcal{H}(S)$  bestimmt, und der Leser kann leicht feststellen, wie die Abschließungen der Mengen in den vorangegangenen Beispielen aussehen.

Aufgabe 10: Man beweise, dass die Abschließung  $\bar{S}$  die kleinste abgeschlossene Menge ist, welche die Menge  $S$  enthält (es ist also zu beweisen: Wenn  $T$  eine abgeschlossene Menge in  $\{M, \rho\}$  ist und wenn  $S \subset T$  gilt, dann ist auch  $\bar{S} \subset T$ )!

Aufgabe 11: Analog beweise man, dass es sich bei dem Inneren  $\mathcal{J}(S)$  der Menge  $S$  um die größte offene in  $S$  enthaltene Menge handelt (es ist also zu beweisen: Wenn  $G$  eine offene Menge ist und wenn  $G \subset S$  gilt, dann ist auch  $G \subset \mathcal{J}(S)$ )!

In der Bemerkung 17 haben wir auf den Unterschied zwischen dem Komplement der Menge  $S$  (bezüglich  $M$ ) und ihrem Äußeren  $\mathcal{E}(S)$  aufmerksam gemacht:

Wenn  $x$  ein Punkt aus  $\mathcal{E}(S)$  ist, existiert eine Kugel  $K(x, r)$ , welche vollständig in  $\mathcal{E}(S)$  liegt, und der Punkt  $x$  ist von der Menge  $S$  abgetrennt.

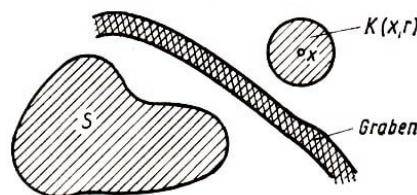


Abb. 30

Diesen Sachverhalt können wir im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  illustrieren: Um von der Menge  $S$  aus den Punkt  $x$  aus  $\mathcal{E}(S)$  zu erreichen, müssen wir "einen Graben überschreiten". Dies veranschaulicht Abb. 30, und die Lage des Grabens hängt verständlicherweise von der Lage des Punktes  $x$  ab.

Diese Abbildung zeigt auch, dass der Punkt  $x$  "hinreichend weit" von der Menge  $S$  entfernt ist, d.h., der Abstand des Punktes  $x$  aus  $\mathcal{E}(S)$  von der Menge  $S$  ist positiv:

$$d(x, S) > 0$$

Wir werden noch sehen (s. Beispiel 54), dass dies in jedem metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  gilt. Gleichzeitig wird dadurch aber auch deutlich, dass die Mengen, welche wir in diesem Kapitel eingeführt haben, mit Hilfe des Abstandes eines Punktes von der Menge charakterisierbar sind (wie in Definition 5 eingeführt).

Beispiel 52: Wir betrachten in einem allgemeinen metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  die Menge  $S \subset M$  und ihren Rand  $\mathcal{H}(S)$ . Dann gilt:

Wenn  $x$  aus  $\mathcal{H}(S)$  ist, dann ist  $\rho(x, S) = 0$ .

Wir beweisen das und wählen  $r = \frac{1}{n}$ . Weil  $x$  zu  $\mathcal{H}(S)$  gehört, liegt nach Teil (3) der Definition 8 in der Kugel  $K(x, \frac{1}{n})$  irgendein Element  $x_n$  aus  $S$ ; es gilt also

$$\rho(x, x_n) < \frac{1}{n} \quad (64)$$

Solche Elemente finden wir für jede natürliche Zahl  $n$ , und aus der Ungleichung (64) geht hervor, dass wir stets ein Element  $y$  aus  $S$  so bestimmen können, dass der Abstand  $\rho(x, y)$  beliebig klein wird. Daraus folgt aber  $\inf_{y \in S} \rho(x, y) = 0$ , und die Behauptung ist bewiesen.

Beispiel 53: Es sei  $S$  eine offene Menge in  $\{M, \rho\}$ . Dann ist  $\mathcal{I}(S) = S$ , und die Elemente des Randes  $\mathcal{H}(S)$  gehören nicht zu  $S$ .

Nach dem vorhergehenden Beispiel haben die Randpunkte  $\mathcal{H}(S)$  von der Menge  $S$  einen verschwindend kleinen Abstand, obgleich sie nicht zu  $S$  gehören. Mit anderen Worten:

Aus  $\rho(x, S) = 0$  muss noch nicht hervorgehen, dass der Punkt  $x$  in der Menge  $S$  liegt. Mit dieser Tatsache haben wir uns für spezielle metrische Räume schon in den Beispielen 29 und 34 bekannt gemacht ; dieses Beispiel rechtfertigt also die Implikation (a) in Bemerkung 11.

Man veranschauliche diese allgemeine Erkenntnis z.B. an den Mengen  $S_1, S_2$  und  $S_3$  aus Beispiel 36 (unter Berücksichtigung des Beispiels 42)!

Mit Hilfe des Abstandes eines Punktes von einer Menge ist es möglich, auch die Abschließung und den Rand einer Menge  $S$  vollständig zu beschreiben.

Satz 12: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum, und  $S$  sei eine Untermenge der Menge  $M$ . Das Element  $x$  aus  $M$  gehört genau dann in die Abschließung  $\bar{S}$  der Menge  $S$ , wenn gilt:

$$\rho(x, S) = 0 \quad (65)$$

Beweis: (a) Wegen (62) ist  $\bar{S} = S \cup \mathcal{H}(S)$ . In den Beispielen 23 und 52 haben wir gezeigt, dass die Elemente aus  $S$  und aus  $\mathcal{H}(S)$  von  $S$  den Abstand Null haben, und deshalb ist auch für die Elemente  $x$  aus  $\bar{S}$  der Abstand  $\rho(x, S) = 0$ . Die Bedingung (65) ist also notwendig.

(b) Ist dagegen (65) erfüllt, dann bedeutet dies laut Definition des Infimums (siehe fünften Exkurs):

Zu einer beliebigen positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert ein Element  $y_\varepsilon$  aus  $S$  mit  $\rho(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$ . Der Punkt  $y_\varepsilon$  liegt also in der Kugel  $K(x, \varepsilon)$ .

Weil das für jede solche Kugel gilt, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$ , enthält jede von diesen Kugeln einen Punkt der Menge  $S$ , und das bedeutet, dass das Element  $x$  zur Abschließung  $\bar{S}$  gehört.



Beispiel 54: Aus Satz 12 geht hervor, dass die Zahl  $\rho(x, S)$  verschieden von Null und somit genau dann positiv ist, wenn  $x$  nicht zu  $\overline{S}$  gehört. Nach (62) ist  $\overline{S} = \mathcal{I}(S) \cup \mathcal{H}(S)$ , und der Punkt  $x$ , welcher nicht zu  $\overline{S}$  gehört, muss folglich in  $\mathcal{E}(S)$  liegen. Damit erhalten wir

$$\rho(x, S) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{E}(S)$$

und bestätigen somit, was Abb. 30 für einen speziellen metrischen Raum illustriert hat.

Satz 13: Unter der Voraussetzung des Satzes 12 gilt: Das Element  $x$  aus  $M$  gehört zum Rand  $\mathcal{H}(S)$  der Menge  $S$  genau dann, wenn gilt:

$$\rho(x, S) = \rho(x, M - S) = 0 \quad (66)$$

Beweis: (a) Möge das Element  $x$  zu  $\mathcal{H}(S)$  gehören, dann ist laut Beispiel 52  $\rho(x, S) = 0$ . Weil wegen (59)  $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}(M - S)$  ist, gehört  $x$  auch zu  $\mathcal{H}(M - S)$ , und abermals nach Beispiel 52 gilt  $\rho(x, M - S) = 0$ . Folglich ist (66) notwendig.

(b) Es mögen nun die Bedingungen (66) erfüllt sein. Aus  $\rho(x, S) = 0$  geht nach Satz 12 hervor, dass  $x$  zu  $\overline{S} = S \cup \mathcal{H}(S)$  gehört, und aus  $\rho(x, M - S) = 0$  geht nach demselben Satz hervor, dass  $x$  auch zu

$$\overline{M - S} = (M - S) \cup \mathcal{H}(M - S) = (M - S) \cup \mathcal{H}(S)$$

gehört (wir benutzten (59)). Das Element  $x$  gehört also gleichzeitig zu den Mengen  $S \cup \mathcal{H}(S)$  und  $(M - S) \cup \mathcal{H}(S)$ , und weil sich die Mengen  $S$  und  $M - S$  gegenseitig ausschließen, muss  $x$  zur Menge  $\mathcal{H}(S)$  gehören. Folglich ist (66) hinreichend.

Randpunkte der Menge  $S$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  sind also genau die Punkte der Menge  $M$ , welche die Entfernung Null sowohl von der Menge  $S$  als auch von ihrem Komplement  $M - S$  haben. Weil (66) laut Satz 12 aussagt, dass  $x$  gleichzeitig in der Menge  $S$  und in der Menge  $\overline{M - S}$  liegt, muss der Punkt  $x$  aus  $\mathcal{H}(S)$  im Durchschnitt dieser Mengen liegen:

$$\mathcal{H}(S) = \overline{S} \cap \overline{(M - S)}$$

Abermals empfehlen wir dem Leser, dass er sich den Inhalt der Sätze 12 und 13 an Mengen in den verschiedenen metrischen Räumen klarmacht, mit denen wir uns bisher beschäftigten.

Wir vereinbaren hier folgendes: Wir werden sagen, dass das Element  $x$  aus der Menge  $M$  "weit" von der Menge  $S \subset M$  entfernt liegt (im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$ ), wenn sein Abstand von der Menge  $S$  positiv ist (die Zahl  $\rho(x, S)$  kann dabei auch sehr klein sein, wesentlich ist nur, dass sie größer als Null ist).

Das bedeutet also, dass eine Kugel  $K(x, r)$  existiert, welche mit der Menge  $S$  keine gemeinsamen Punkte hat, und dass der Punkt  $x$  von der Menge  $S$  durch irgendeinen "Graben" abgetrennt ist (s. Abb. 30).

Dagegen sagen wir, dass der Punkt  $x$  "nahe" bei der Menge  $S$  liegt, wenn  $\rho(x, S) = 0$  ist; dann existiert kein Graben, welcher den Punkt  $x$  von der Menge abtrennen würde.

Im Rahmen dieser Übereinkunft können wir die Ergebnisse der vorangegangenen Beispiele und Sätze formulieren:

- (1) Zu dem Äußeren  $\mathcal{E}(S)$  der Menge  $S$  gehören genau die Punkte  $x$  aus  $M$ , welche "weit" von  $S$  entfernt liegen (Beispiel 54).
- (2) Die Abschließung  $\overline{S}$  der Menge  $S$  wird durch die Punkte  $x$  aus  $M$  gebildet, welche "nahe" bei der Menge  $S$  liegen (Satz 12).
- (3) Den Rand  $\mathcal{H}(S)$  der Menge  $S$  bilden genau die Punkte  $x$  aus  $M$ , welche "nahe" bei der Menge  $S$  liegen und gleichzeitig auch "nahe" bei ihrem Komplement  $M - S$  (Satz 13).
- (4) Zu dem Inneren  $\mathcal{I}(S)$  der Menge  $S$  gehören genau die Punkte  $x$  aus  $M$ , welche "weit" von dem Komplement  $M - S$  der Menge  $S$  entfernt liegen (das geht hervor aus (1) und aus  $\mathcal{I}(S) = \mathcal{E}(M - S)$ ).

## 5 Konvergenz im metrischen Raum

Wir erwähnen zuerst einige Begriffe und Aussagen über Folgen reeller Zahlen. Es sei also  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen, und  $a_0$  sei eine reelle Zahl. Wir sagen, dass die Folge  $(a_n)$  gegen die Zahl  $a_0$  konvergiert. Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a_0 \quad (67)$$

wenn zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine natürliche Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so existiert, dass für alle  $n > N$  gilt:

$$|a_n - a_0| < \varepsilon \quad (68)$$

Wenn wir sagen, dass die Folge  $(a_n)$  konvergiert, meinen wir damit, dass irgendeine Zahl  $a_0$  so existiert, dass gilt:

$$a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Offensichtlich konvergiert die Folge  $(a_n)$  genau dann gegen die Zahl  $a_0$ , wenn die Folge  $(a_n - a_0)$  gegen Null konvergiert. Wenn  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei Folgen sind, wenn

$$|b_n| \leq |a_n| \quad \text{für alle } n > N$$

gilt, wobei  $N$  irgendeine natürliche Zahl ist, und wenn außerdem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  gilt, dann ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Es gilt das Bolzano<sup>11</sup>-Cauchysche<sup>12</sup> Kriterium:

Die Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann, wenn zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine Zahl  $N_1 = N_1(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle  $m > N_1$  und  $n > N_1$

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (69)$$

ist. So viel zu einigen Grundbegriffen. Wir sehen, bei der Konvergenz ist wesentlich, dass der Abstand der Zahlen  $a_n$  und  $a_0$ , d.h. die Zahl  $|a_n - a_0|$ , für hinreichend große  $n$  genügend klein wird. Es ist deshalb zu erwarten, dass es mit Hilfe der Metrik, welche den Abstand verallgemeinert, möglich ist, den Begriff der Konvergenz auch in allgemeinen metrischen Räumen einzuführen.

Definition 11: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum,  $x_0$  sei ein Element aus  $M$  und  $(x_n)$  eine Folge von Elementen aus der Menge  $M$ . Wir sagen, dass die Folge  $(x_n)$  gegen das Element  $x_0$  im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  konvergiert (Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{oder} \quad x_n \rightarrow x_0 \quad (70)$$

wenn die Folge der nichtnegativen Zahlen  $a_n = \rho(x_n, x_0)$  gegen Null strebt, wenn also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0 \quad (71)$$

<sup>11</sup>Bernhard Bolzano (1781-1848), Mathematiker, wirkte in Prag.

<sup>12</sup>Augustin Cauchy (1789-1857), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Paris.

gilt. Wir sagen außerdem, dass die Folge  $(x_n)$  konvergiert oder konvergent ist in  $\{M, \rho\}$ , wenn ein Element  $x_0$  aus  $M$  existiert, gegen welches sie konvergiert. Dieses Element  $x_0$  nennen wir dann den Limes oder Grenzwert der Folge  $(x_n)$ .

Bemerkung 20: Wenn wir (71) entsprechend der zu Beginn dieses Kapitels definierten Konvergenz von Zahlenfolgen formulieren, dann bedeutet die Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{M, \rho\}$ , dass zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine natürliche Zahl  $N = N(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle  $n > N$  gilt:

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad (72)$$

Der Abstand der Elemente  $x_n$  und  $x_0$  in  $\{M, \rho\}$  muss also genügend klein sein. Eine Analogie zwischen (72) und (68) ist leicht zu erkennen.

Beispiel 55: Die Konvergenz einer Zahlenfolge  $(a_n)$ , wie wir sie am Anfang des Kapitels anführten, ist nichts anderes als die Konvergenz im metrischen Raum  $\{E_1, d\}$ .

Beispiel 56: Es sei  $(x_n)$  eine Folge von Punkten des Raumes  $E_3$ :  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})$ . Die Konvergenz dieser Folge gegen den Punkt  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  im metrischen Raum  $\{E_3, p\}$  bedeutet, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_{n1} - x_{01}| + |x_{n2} - x_{02}| + |x_{n3} - x_{03}|) = 0$$

ist. Weil  $0 \leq |x_{ni} - x_{0i}| \leq p(x_n, x_0)$  für  $i = 1, 2, 3$  gilt, konvergiert auch die Zahlenfolge  $(x_{ni} - x_{0i})$  gegen Null, d.h., die Folge  $(x_{ni})$  konvergiert gegen die Zahl  $x_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Aus der Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{E_3, p\}$  folgt also die Konvergenz dreier Zahlenfolgen:

$$x_{n1} \rightarrow x_{01}; \quad x_{n2} \rightarrow x_{02}; \quad x_{n3} \rightarrow x_{03}$$

Mit anderen Worten: Die Folge der ersten Koordinaten der Punkte  $x_n$  konvergiert gegen die erste Koordinate des Grenzwertes  $x_0$ , die Folge der zweiten Koordinaten der Punkte  $x_n$  konvergiert gegen die zweite Koordinate des Punktes  $x_0$ , und die Folge der dritten Koordinaten der Punkte  $x_n$  konvergiert gegen die dritte Koordinate des Punktes  $x_0$ . Deshalb nennen wir die Konvergenz in  $\{E_3, p\}$  auch koordinatenweise Konvergenz.

Beispiel 57: Im Beispiel 14 haben wir den metrischen Raum  $\{P, \pi\}$  eingeführt. Wir definieren nun in diesem Raum eine Folge von Polynomen  $x_n = x_n(t)$ :

$$x_n(t) = \frac{1}{n}t^n + 1$$

für  $0 \leq t \leq 1$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$

Eine so definierte Folge  $(x_n)$  konvergiert in  $\{P, \pi\}$  gegen das Element (das Polynom)  $x_0 = x_0(t)$ , welches wie folgt erklärt ist:  $x_0(t) = 1$  für alle  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$ .

Es gilt nämlich

$$\pi(x_n, x_0) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n}t^n + 1 - 1 \right| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n}t^n \right| = \frac{1}{n}$$

d.h., die Folge  $(\pi(x_n, x_0))$  ist die Zahlenfolge  $(\frac{1}{n})$ , und diese konvergiert gegen Null. Daraus folgt  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  in  $\{P, \pi\}$ .

Beispiel 58: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein beliebiger metrischer Raum, und in ihm sei eine Folge  $(x_n)$  gegeben, welche folgende Eigenschaft hat: Von einem bestimmten Index  $N_0$  an wird in ihr beständig das Element  $x_0$  aus  $M$  wiederholt, d.h., für  $n \geq N_0$  ist  $x_n = x_0$ ; die Elemente  $x_1, x_2, \dots, x_{N_0-1}$  können dabei beliebige Elemente aus  $M$  sein. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ in } \{M, \rho\}$$

Es genügt nämlich, zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  als Zahl  $N = N(\varepsilon)$  aus der Definition 11 unsere Zahl  $N_0$  zu wählen: Für  $n > N_0$  ist  $x_n = x_0$ , und daher gilt  $\rho(x_n, x_0) = 0 < \varepsilon$ , so dass (72) erfüllt ist.

Beispiel 59: Es sei  $M$  eine beliebige Menge und  $\rho$  die durch (45) erklärte Metrik  $M$ . Dann gilt: Die Folge  $(x_n)$  der Elemente aus  $M$  konvergiert gegen das Element  $x_0$  aus  $M$  genau dann, wenn von einem bestimmten Index  $N_0$  an alle Elemente der Folge identisch mit dem Element  $x_0$  sind.

Dies ergibt sich aus dem vorhergehenden Beispiel und auch daraus, dass andernfalls (wenn also für jedes  $N > 0$  irgendein Index  $n > N$  existieren würde, so dass  $x_n \neq x_0$  folgte)  $\rho(x_n, x_0) = 1$  wäre und deshalb (72) mit  $\varepsilon < 1$  nicht erfüllt sein könnte für alle  $n > N$ .

Die konvergenten Folgen in unserem metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  haben also eine sehr einfache Struktur:

$$(x_1, x_2, \dots, x_N, x_0, x_0, x_0, \dots, x_0, x_0, x_0, \dots)$$

d.h., von einem bestimmten Index  $N$  an wiederholt sich stets das Element  $x_0$ , welches auch der Grenzwert dieser Folge ist.

Die Zahl  $N$  kann dabei auch sehr groß sein und für verschiedene Folgen dieses Typs verschieden. Andere konvergente Folgen gibt es in diesem metrischen Raum nicht.

Aufgabe 12: Man zeige, dass derartige Überlegungen auch im metrischen Raum  $\{M, d\}$  aus Beispiel 27 gelten!

Beispiel 60: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein beliebiger metrischer Raum, und es möge die Menge  $M$  wenigstens zwei verschiedene Elemente  $x_1$  und  $x_2$  enthalten. Die Folge

$$(x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots, x_1, x_2, \dots) \tag{73}$$

ist dann nicht konvergent in  $\{M, \rho\}$ .

Wir beweisen das indirekt:

Wegen  $x_1 \neq x_2$  gilt  $\rho(x_1, x_2) = r > 0$ . Wir setzen voraus, dass unsere Folge einen Limes  $x_0$  hat, und wählen für  $\varepsilon$  in der Definition 11 die Zahl  $\frac{1}{2}r$ .

Dann existiert eine Zahl  $N$ , so dass für  $n > N$   $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}r$  gilt, d.h., es ist  $\rho(x_1, x_0) < \frac{1}{2}r$  und auch  $\rho(x_2, x_0) < \frac{1}{2}r$ .

Die Elemente  $x_n$  sind für  $n > N$  wechselweise die Elemente  $x_1$  und  $x_2$ . Aus der Dreiecksungleichung C geht

$$r = \rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_0) + \rho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$$

hervor, d.h.  $r < r$ , und das ist der gesuchte Widerspruch. Die Folge (73) hat deshalb in  $\{M, \rho\}$  keinen Limes.

Der Leser wird sicher weitere Beispiele von Folgen finden, die nicht konvergieren. Es gilt aber folgender Satz:

Satz 14: Jede konvergente Folge in  $\{M, \rho\}$  kann nur einen Limes haben.

Beweis: Es sei  $(x_n)$  eine Folge von Elementen der Menge  $M$ , und es sollen Elemente  $x_0$  und  $y_0$  aus  $M$  existieren, so dass gilt  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{M, \rho\}$  und gleichzeitig  $x_n \rightarrow y_0$  in  $\{M, \rho\}$ .

Wir zeigen, dass  $x_0 = y_0$  sein muss.

Deshalb setzen wir  $x_0 \neq y_0$  voraus und schreiben  $\rho(x_0, y_0) = r > 0$ . Wir wählen für  $\varepsilon$  in der Definition 11 die Zahl  $\frac{1}{2}r$ . Wegen  $x_n \rightarrow x_0$  existiert eine Zahl  $N_1 = N_1(\varepsilon)$ , so dass für  $n > N_1$   $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}r$  ist, und wegen  $x_n \rightarrow y_0$  existiert eine Zahl  $N_2 = N_2(\varepsilon)$ , so dass für  $n > N_2$   $\rho(x_n, y_0) < \frac{1}{2}r$  ist.

Wenn wir mit  $N$  die größere der Zahlen  $N_1, N_2$  bezeichnen, so gilt für  $n > N$  nach der Dreiecksungleichung:

$$r = \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$$

d.h.  $r < r$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung  $x_0 \neq y_0$ , und deshalb muss  $x_0 = y_0$  sein.

Bemerkung 21: Kehren wir noch zur Definition 11 und zur Bemerkung 20 zurück. Nach (72) liegt in der Kugel  $K(x_0, \varepsilon)$  ein Element der Folge  $(x_n)$ ; tatsächlich liegen dort sogar alle Elemente dieser Folge vom Index  $(N + 1)$  an. Wir können das folgendermaßen ausdrücken:

Wenn das Element  $x_0$  der Limes der Folge  $(x_n)$  in  $\{M, \rho\}$  ist, dann liegen in jeder Kugel  $K(x_0, \varepsilon)$ , d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$ , unendlich viele Elemente der Folge  $(x_n)$ .

Damit kommen wir zu einem neuen Begriff :

Definition 12: Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum, und  $(x_n)$  sei eine Folge von Elementen der Menge  $M$ . Wir sagen, dass das Element  $x_0$  aus  $M$  ein Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$  ist, wenn in jeder Kugel  $K(x_0, r)$ , d.h. für jedes  $r > 0$ , unendlich viele Elemente der Folge  $(x_n)$  liegen.

Der Vergleich von Definition 12 mit der Bemerkung 21 führt zu folgender Behauptung:

Jeder Limes einer Folge ist ein Häufungspunkt dieser Folge.

Das Gegenteil gilt allerdings nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 61: Kehren wir zur Folge aus Beispiel 60 zurück. Diese Folge hat keinen Limes, sie hat aber Häufungspunkte. Ein Häufungspunkt ist das Element  $x_1$ , denn jede Kugel  $K(x_1, r)$  enthält unendlich viele Elemente der Folge (73): das erste, dritte, fünfte usw., d.h. alle Elemente mit einem ungeraden Index. Aus den gleichen Gründen ist auch das Element  $x_2$  ein Häufungspunkt der Folge (73).

Dieses Beispiel zeigt auch, dass für die Häufungspunkte der Folgen die Analogie zum Satz 14 nicht gilt!

Ähnlich wie die Begriffe in den vorhergehenden Kapiteln hängt auch der Begriff der Konvergenz von dem jeweiligen metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  ab. Es zeigt dies das folgende Beispiel; zuerst aber beweisen wir noch einen einfachen Satz:

**Satz 15:** Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $S \subset M$ . Weiter sei  $(x_n)$  eine Folge von Elementen aus  $S$ . Wenn diese Folge in  $\{S, \rho\}$  gegen das Element  $x_0$  konvergiert, dann konvergiert sie auch in  $\{M, \rho\}$  gegen dasselbe Element.

**Beweis:** Wegen  $S \subset M$  ist nach Satz 1 auch  $\{S, \rho\}$  ein metrischer Raum. Wenn die Folge  $(x_n)$  in  $\{S, \rho\}$  konvergiert, existiert ein Element  $x_0$  aus  $S$ , so dass  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ist, d.h., zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  existiert eine Zahl  $N$ , so dass für  $n > N$   $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$  gilt.

Weil aber  $x_0$  auch zu  $M$  gehört und die Metrik in  $M$  die gleiche wie in  $S$  ist, folgt daraus  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{M, \rho\}$ , und der Satz ist bewiesen.

**Beispiel 62:** Es sei  $I$  das offene Intervall  $(0, 1)$ . Dann gilt  $I \subset E_1$ , und nach Satz 1 ist  $\{I, d\}$  ein metrischer Raum. Wir wählen in  $I$  die Folge  $(x_n)$ , deren Elemente wie folgt definiert sind:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wir können zeigen, dass die Zahlenfolge  $(x_n)$  gegen 1 konvergiert; das bedeutet nach Beispiel 55, dass gilt:

$$x_n \rightarrow 1 \quad \text{in} \quad \{E_1, d\}$$

Allerdings konvergiert im metrischen Raum  $\{I, d\}$  die Folge  $(x_n)$  nicht. Der Beweis erfolgt wieder indirekt:

Wir setzen voraus, dass ein Element  $x_0$  aus  $I$  existiert, welches ein Limes der Folge  $(x_n)$  in  $\{I, d\}$  ist. Das Element  $x_0$  liegt in  $I$ , d.h., es gilt  $0 < x_0 < 1$ .

Nach Satz 15 konvergiert die Folge  $(x_n)$  auch in  $\{E_1, d\}$  gegen  $x_0$ . Das bedeutet aber, dass unsere Folge in  $\{E_1, d\}$  gleichzeitig gegen 1 und gegen  $x_0$  konvergiert. Nach Satz 14 muss dann  $x_0 = 1$  sein, und das steht im Widerspruch zu  $x_0 < 1$ .

Nach Satz 15 geht aus der Konvergenz im metrischen Raum  $\{S, \rho\}$  schon die Konvergenz im umfassenderen metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  hervor, während die Umkehrung der Implikation nicht gelten muss, wie Beispiel 62 zeigte.

Soll die umgekehrte Implikation gelten, dann muss die Menge  $S$  in  $\{M, \rho\}$  abgeschlossen sein.

**Satz 16:** Es sei  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum, und es sei  $S \subset M$  eine abgeschlossene Menge in  $\{M, \rho\}$ . Wenn  $(x_n)$  eine Folge von Elementen aus  $S$  ist, welche in  $\{M, \rho\}$  konvergiert, dann konvergiert sie auch in  $\{S, \rho\}$ .

**Beweis:** Weil die Folge  $(x_n)$  in  $\{M, \rho\}$  konvergiert, existieren ein Element  $x_0$  aus  $M$  und eine Zahl  $N = N(\varepsilon)$ , so dass

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N \quad (*)$$

ist. Die Elemente  $x_n$  liegen in  $S$ , und vergleichen wir die Bemerkung 21 mit der Definition 10, so sehen wir, dass das Element  $x_0$  in der Abschließung  $\overline{S}$  der Menge  $S$  liegt. Die Menge  $S$  ist aber in  $\{M, \rho\}$  abgeschlossen, d.h., nach Satz 11 gilt  $S = \overline{S}$ , und folglich liegt das Element  $x_0$  in  $S$ . Dann folgt aus der Beziehung (\*)  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  in  $\{S, \rho\}$ , d.h., die Metrik ist in beiden Räumen gleich, und der Satz ist bewiesen.

Beispiel 63: Die Menge  $I$  aus Beispiel 62 war in  $\{E_1, d\}$  nicht abgeschlossen, denn sie ist dort die Kugel  $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Wenn wir für die Menge  $I$  ein halboffenes Intervall  $(0, 1]$  wählen würden, entfielen die Schwierigkeiten für die Folge  $(\frac{n}{n+1})$ , aber die gleichen Komplikationen würden z.B. für die Folge  $(2^{-n})$  entstehen.

Erst dann, wenn wir für  $I$  das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  wählen, wird für jede Folge von Elementen aus  $I$  die Konvergenz in  $\{I, d\}$  identisch mit der Konvergenz in  $\{E_1, d\}$  sein.

In den vorangegangenen Beispielen betrachteten wir zwei metrische Räume  $\{M_1, \rho_1\}$  und  $\{M_2, \rho_2\}$ , welche sich nur in den Grundmengen unterschieden. Jetzt wollen wir eine feste Grundmenge mit verschiedenen Metriken untersuchen. Folgender Satz gilt:

Satz 17: Es seien mit  $\rho_1, \rho_2$  zwei Metriken auf der Menge  $M$  definiert, und es möge eine positive Konstante  $c$  so existieren, dass für alle Elemente  $x$  und  $y$  aus  $M$  gilt:

$$\rho_2(x, y) \leq c\rho_1(x, y) \quad (74)$$

Dann gilt: Wenn die Folge  $(x_n)$  der Elemente aus  $M$  in  $\{M, \rho_1\}$  konvergent ist, dann ist sie auch in  $\{M, \rho_2\}$  konvergent und hat dort den gleichen Grenzwert.

Beweis: Es möge  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{M, \rho_1\}$  sein, und es sei  $\varepsilon$  eine positive Zahl. Dann existiert eine Zahl  $N = N(\varepsilon)$ , so dass

$$\rho_1(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{für } n > N$$

ist. Wegen (74) gilt dann aber

$$\rho_2(x_n, x_0) \leq c\rho_1(x_n, x_0) < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \quad \text{für } n > N$$

und daraus folgt  $x_n \rightarrow x_0$  in  $\{M, \rho_2\}$ .

Beispiel 64: Im Satz 3 konstruierten wir zur Metrik  $\rho$  auf  $M$  eine weitere Metrik  $\rho_1$ :

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \quad (75)$$

Weil  $\rho_1(x, y) \leq \rho(x, y)$  gilt (siehe Seite 39), folgt aus der Konvergenz in  $\{M, \rho_1\}$  auch die Konvergenz in  $\{M, \rho\}$ .

Aus Satz 17 geht folgende Behauptung hervor:

Wenn  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei äquivalente Metriken auf der Menge  $M$  sind (siehe Definition 3), dann ist jede Folge, welche in  $\{M, \rho_1\}$  konvergiert, auch konvergent in  $\{M, \rho_2\}$ , und



andererseits ist jede Folge, welche in  $\{M, \rho_2\}$  konvergiert, auch in  $\{M, \rho_1\}$  konvergent.

Beweis: Für beide äquivalente Metriken gilt nicht nur (74); es existiert auch eine positive Konstante  $C$ , so dass für alle  $x$  und  $y$  aus  $M$

$$\rho_1(x, y) \leq C \rho_2(x, y)$$

ist, und daraus geht nach Satz 17 hervor, dass eine in  $\{M, \rho_2\}$  konvergente Folge auch in  $\{M, \rho_1\}$  gegen denselben Limes konvergiert.

Beispiel 65: Weil die Metriken  $d, p, m$  auf  $E_2$  äquivalent sind (siehe Beispiel 9), ist eine Folge  $(x_n)$  von Punkten der Ebene gleichzeitig in allen Räumen  $\{E_2, d\}$ ,  $\{E_2, p\}$  sowie  $\{E_2, m\}$  konvergent (bzw. nicht konvergent) und hat im Falle der Konvergenz überall denselben Limes.

Weil ähnlich wie im Beispiel 56 gezeigt werden kann, dass Konvergenz in  $\{E_2, p\}$  koordinatenweise Konvergenz bedeutet, liegt auch bei der Konvergenz in  $\{E_2, d\}$  und  $\{E_2, m\}$  koordinatenweise Konvergenz vor.

Die Bedeutung der Ungleichung (74) sollten wir allerdings nicht überschätzen. Sie ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass sich die Konvergenz aus dem Raum  $\{M, \rho_1\}$  in den Raum  $\{M, \rho_2\}$  übertragen lässt, keinesfalls aber eine notwendige Bedingung. Dies zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel 66: Es seien  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $\rho_1$  die Metrik aus Beispiel 64. Setzen wir voraus, dass die Folge  $(x_n)$  in  $\{M, \rho_1\}$  gegen das Element  $x_0$  konvergiert, dann existiert zu der gegebenen positiven Zahl  $\eta$  eine Zahl  $N = N(\eta)$ , so dass  $\rho_1(x_n, x_0) < \eta$  für  $n > N$  ist.

Wählen wir die Zahl speziell in der Form  $\eta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$  mit  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\rho_1(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \text{für } n > N \quad (76)$$

Wenn wir die erste dieser Ungleichungen umformen, erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)\rho_1(x_n, x_0) &< \varepsilon \\ \rho_1(x_n, x_0) &< \varepsilon - \varepsilon\rho_1(x_n, x_0) = \varepsilon(1 - \rho_1(x_n, x_0)) \\ \frac{\rho_1(x_n, x_0)}{1 - \rho_1(x_n, x_0)} &< \varepsilon \end{aligned}$$

aber unter Berücksichtigung von (75) gilt

$$\frac{\rho_1(x_n, x_0)}{1 - \rho_1(x_n, x_0)} = \rho(x_n, x_0)$$

und daraus folgt

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{für } n > N \quad (77)$$

Das bedeutet aber, dass  $x_n \rightarrow x_0$  auch in  $\{M, \rho\}$  gilt. Dies ergänzt Beispiel 64, denn aus der Konvergenz in  $\{M, \rho_1\}$  folgt auch die Konvergenz in  $\{M, \rho\}$ .

Diese Schlussfolgerung könnten wir auch aus dem Satz 17 ziehen, wenn wir wüssten, dass eine positive Zahl  $C$  so existiert, dass für alle Elemente  $x$  und  $y$  aus  $M$

$$\rho(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$$

ist. So eine Beziehung muss aber nicht allgemein gelten.

Es genügt, für  $\{M, \rho\}$  den metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  zu wählen, und damit ist die Metrik  $\rho_1$  beschränkt, während die Metrik  $\rho$ , d.h. die Metrik  $d$ , unbeschränkt ist (siehe auch Bemerkung 16).

In der Einleitung dieses Kapitels erwähnten wir das Bolzano-Cauchysche Kriterium der Konvergenz von Zahlenfolgen. Gilt etwas Ähnliches auch in allgemeinen metrischen Räumen?

Definition 13: Es seien  $\{M, \rho\}$  ein metrischer Raum und  $(x_n)$  eine Folge von Elementen aus  $M$ . Wir sagen, dass diese eine Cauchy-Folge in  $\{M, \rho\}$  ist, wenn zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  eine natürliche Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so existiert, dass für alle  $m > N$  und  $n > N$  gilt:

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (78)$$

Bemerkung 22: (78) hat im metrischen Raum  $\{E_1, d\}$  die Form (69). In diesem metrischen Raum geht aber nach dem erwähnten Kriterium aus (78) schon (67) oder (68) hervor. Im allgemeinen metrischen Raum gilt nun folgender Satz:

Satz 18: Konvergiert die Folge  $(x_n)$  in  $\{M, \rho\}$ , dann ist sie auch eine Cauchy-Folge in  $\{M, \rho\}$ .

Beweis: Es sei  $x_0$  der Limes von  $(x_n)$ , d.h., es ist möglich, zur Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so zu finden, dass für  $n > N$   $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$  gilt.

Diese Zahl  $N$  ist schon die gesuchte Zahl aus der Definition 13; dann gilt nämlich auch  $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $m > N$ , und aus der Dreiecksungleichung folgt für diese  $m$  und  $n$ :

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_0) + \rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Das bedeutet aber, dass die Folge  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist.

Es ist möglich, das Bolzano-Cauchysche Kriterium auch wie folgt zu formulieren:

Die Folge  $(x_n)$  in  $\{E_1, d\}$  ist dann und nur dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Hierbei ist der Zusatz "in  $\{E_1, d\}$ " wichtig.

In allgemeinen metrischen Räumen muss daraus, dass eine Folge eine Cauchy-Folge ist, noch nicht hervorgehen, dass sie auch konvergent ist (zur Umkehrung der Implikation siehe Satz 18):

Beispiel 67: Wir betrachten den metrischen Raum  $\{I, d\}$  aus Beispiel 62. Die Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{n}{n+1}$  ist eine Cauchy-Folge in  $\{I, d\}$ : Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \left| \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} \right| = \left| \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{m}{m+1} - 1\right) \right| \\ &\leq \left| 1 - \frac{m}{m+1} \right| + \left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (*)$$

Es genügt nun, zu dem gegebenen  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so zu wählen, dass  $N \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$  wird, denn für  $m > N$  ist  $M > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ . Daraus erhalten wir  $m + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$  oder  $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ , und für  $n > N$  gilt analog  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ , so dass für  $m > N$  und  $n > N$  aus (\*) folgt:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Dabei konvergiert aber die Folge  $\left(\frac{n}{n+1}\right)$  nicht in  $\{I, d\}$ , so dass es in diesem Raum nicht möglich ist, die Umkehrung der Implikation aus Satz 18 zu bilden.

Bemerkung 23: Der im vorhergehenden Beispiel durchgeführte Beweis dafür, dass die Folge  $\left(\frac{n}{n+1}\right)$  eine Cauchy-Folge in  $\{I, d\}$  ist, war deshalb kompliziert, weil wir (78) direkt bewiesen haben.

Es ist aber auch möglich, diesen Beweis indirekt und ohne komplizierte Abschätzungen zu führen: Die Folge  $(x_n)$  konvergiert in  $\{E_1, d\}$  gegen 1 und ist deshalb nach Satz 18 eine Cauchy-Folge in  $\{E_1, d\}$ , d.h., für  $m > N = N(\varepsilon)$  und  $n > N$  ist  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

Die letzte Beziehung gilt aber auch in  $\{I, d\}$ , denn die Metrik ist hier die gleiche, und die Elemente  $x_n$  gehören zu  $I$ . Unsere Folge ist also eine Cauchy-Folge in  $\{I, d\}$ , was zu beweisen war.

Beispiel 68: Wir betrachten den metrischen Raum  $\{P, \pi\}$  aus Beispiel 14 und eine in ihm definierte Folge  $(x_n)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t \\ x_2 &= x_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 \\ x_3 &= x_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3; \quad \dots \\ x_n &= x_n(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \dots + \frac{1}{2^n}t^n; \quad , \dots \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 1$ . Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in  $\{P, \pi\}$ ; es gilt:

$$\begin{aligned} x_m(t) - x_n(t) &= \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}t^{n+2} + \dots + \frac{1}{2^m}t^m \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1} \left( 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \dots + \left(\frac{t}{2}\right)^{m-n-1} \right) \end{aligned}$$

(wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m > n$  voraussetzen). Die Summe in der Klammer ist nicht größer als die Summe der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{2}{2 - t}$$

so dass wir

$$x_m(t) - x_n(t) \leq \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1} \frac{2}{2 - t} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}$$

erhalten,  $0 \leq t \leq 1$ . Daher ist

$$\pi(x_m, x_n) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_m(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2^n}$$

und deshalb wird für  $n > N(\varepsilon) \geq \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$  auch  $\pi(x_m, x_n) < \varepsilon$  gelten.

Die Folge  $(x_n)$  ist aber in  $\{P, \pi\}$  nicht konvergent. Wenn wir nämlich die Zahlenfolge  $(x_n(t))$  für ein festes  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$  betrachten, dann ist sie eine Teilsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k$$

und folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{2}{2-t} = x_0(t)$$

Das gilt für jedes  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$ , und man kann zeigen, dass auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n, x_0) = 0$  ist. Die Funktion  $x_0(t)$  ist aber kein Polynom und gehört daher nicht zur Menge  $P$ .

Die vorangegangenen Beispiele zeigen, dass in der Menge der metrischen Räume die Analogie zum Bolzano-Cauchyschen Kriterium nicht gilt. Wir sondern deshalb aus der Menge aller metrischer Räume eine Gruppe ab.

**Definition 14:** Wir nennen den metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  vollständig, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus  $M$  in  $\{M, \rho\}$  einen Limes hat, d.h. wenn sie konvergiert.

Gemeinsam mit Satz 18 sagt also die Definition 14, dass im vollständigen metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  die Analogie zum erwähnten Kriterium gilt:

Die Folge  $(x_n)$  von Elementen aus  $M$  ist eine Cauchy-Folge in  $\{M, \rho\}$  genau dann, wenn sie in  $\{M, \rho\}$  konvergiert.

**Beispiel 69:** Der metrische Raum  $\{E_1, d\}$  ist vollständig, das geht aus dem Bolzano-Cauchyschen Kriterium und aus Beispiel 55 hervor. Vollständige metrische Räume sind auch die Räume  $\{E_i, d\}$ ,  $\{E_i, p\}$  und  $\{E_i, m\}$  für  $i = 2, 3$ .

Für den Raum  $\{E_3, p\}$  folgt dies auch aus Beispiel 56: Wenn  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $\{E_3, p\}$  ist, mit  $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3})$ , dann gilt auch

$$|x_{mi} - x_{ni}| \leq p(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{für } n > N$$

d.h., die Folgen  $(x_{ni})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sind Cauchy-Folgen in  $\{E_1, d\}$ . Weil dieser letzte Raum vollständig ist, existieren die Zahlen  $x_{0i} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni}$ ;  $i = 1, 2, 3$ , und der Punkt  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$  ist Grenzwert der Folge  $(x_n)$  in  $\{E_3, p\}$ .

Für  $\{E_3, d\}$  und  $\{E_3, m\}$  geht die Vollständigkeit aus der Äquivalenz der Metriken  $p$ ,  $m$  und  $d$  hervor. (Man beweise das!)

**Beispiel 70:** Die metrischen Räume  $\{P, \pi\}$  und  $\{I, d\}$  sind nicht vollständig. Dies folgt aus den Beispielen 68 und 67.

Beispiel 71: Wir betrachten auf der Geraden  $E_1$  die Menge  $R$  aller rationalen Zahlen. Nach Satz 1 ist  $\{R, d\}$  ein metrischer Raum, jedoch kein vollständiger metrischer Raum. Wenn wir nämlich

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ , setzen, dann sind die  $x_n$  rationale Zahlen, und die Folge  $(x_n)$  ist eine Folge in  $R$ . Diese Folge ist eine Cauchy-Folge in  $\{R, d\}$ , was ebenso wie in Bemerkung 23 aus der Tatsache folgt, dass sie einen Grenzwert in  $\{E_1, d\}$  hat - nämlich die Eulersche<sup>13</sup> Zahl  $e$ . Dabei ist aber die Folge  $(x_n)$  in  $\{R, d\}$  nicht konvergent, denn die Zahl  $e$  ist nicht rational und gehört folglich nicht zu  $R$ .

Es ist nicht immer leicht, die Vollständigkeit irgendeines konkreten metrischen Raumes zu beweisen. Jedoch ist die Mehrzahl der wichtigsten Räume vollständig, und wenn sich der Leser jener unvollständigen metrischen Räume  $\{M, \rho\}$  erinnert, mit denen wir uns bereits beschäftigt haben, wird er erkennen, dass es meist möglich ist, die Menge  $M$  durch entsprechende Elemente so zu ergänzen, dass eine etwas umfangreichere Menge  $\tilde{M}$  entsteht und der metrische Raum  $\{\tilde{M}, \rho\}$  vollständig wird.

So bildeten z.B. im Beispiel 71 alle rationalen Zahlen die Menge  $M$ , und die Ergänzung dieser Menge durch die irrationalen Zahlen ergibt die Menge  $\tilde{M} = E_1$  sowie einen vollständigen metrischen Raum  $\{E_1, d\}$ .

Im Beispiel 67 bildete ein offenes Intervall  $(0, 1)$  die Menge  $M$ , und als ergänzte Menge  $\tilde{M}$  verwendeten wir das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$ .

Diese Überlegungen lassen sich verallgemeinern, jedoch wollen wir hier nicht näher darauf eingehen, sondern, geben noch ein Beispiel eines bereits vollständigen metrischen Raumes an:

Beispiel 72: Es sei  $M$  eine beliebige Menge, und  $\rho$  sei die Metrik aus (45). Der metrische Raum  $\{M, \rho\}$  ist vollständig, denn ähnlich wie im Beispiel 59 lässt sich zeigen, dass in ihm die Folge  $(x_n)$  von Elementen aus  $M$  genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn sie folgende Form hat:

$$(x_1, x_2, \dots, x_N, x_0, x_0, x_0, \dots)$$

Das sind aber genau die Folgen, welche nach Beispiel 59 in  $\{M, \rho\}$  konvergieren.

Bemerkung 24: Der Begriff der Konvergenz ist in der Mathematik und auch in ihren Anwendungen sehr wichtig, denn oft sind wir nicht imstande, irgendeine Erscheinung exakt zu beschreiben oder zu erklären. Dann bilden wir eine Folge annähernder Beschreibungen, bei der mit jedem Schritt die Beschreibung genauer wird, so dass die entstandene Folge gegen die ursprüngliche Erscheinung "konvergiert".

Besonders deutlich wird dies bei verschiedenen numerischen Problemen.

Im metrischen Raum sind wir in einer sehr vorteilhaften Lage, weil wir die Konvergenz mit Hilfe der Metrik einführen können.

Manchmal stehen wir aber vor dem Problem, dass auf einer gegebenen Menge  $M$  bereits irgendeine Konvergenz ohne Verwendung einer Metrik definiert ist. In solchen

<sup>13</sup>Leonhard Euler (1707-1783), Mathematiker, wirkte hauptsächlich in Basel, Petersburg und Berlin.

Fällen stellt sich die Frage:

Existiert irgendeine Metrik  $\rho$  auf der Menge  $M$ , so dass die Konvergenz im metrischen Raum  $\{M, \rho\}$  mit der von vornherein gegebenen Konvergenz übereinstimmt?

Kann diese Frage bejaht werden, heißt die Menge  $M$  metrisierbar.

Solch eine Metrik muss aber nicht immer existieren, es können also auch Mengen  $M$  mit einer Konvergenz auftreten, die nicht metrisierbar sind.

Beispiel 73: Wir betrachten die Menge  $F$  aller Funktionen, die auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind (5. Beispiel 17).

(1) Auf der Menge  $F$  definieren wir die Konvergenz:  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , wobei  $x_0 = x_0(t)$  und  $x_n = x_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , auf dem Intervall  $[0, 1]$  definierte Funktionen sind, wenn für jedes  $t$  aus diesem Intervall eine Zahlenfolge  $(x_n(t))$  gegen die Zahl  $x_0(t)$  konvergiert. (Dies ist die sogenannte punktweise Konvergenz.)

Es lässt sich zeigen, dass dann keine Metrik auf  $F$  existiert, welche diese Konvergenz realisieren würde; der Beweis dieser Behauptung würde allerdings den Rahmen dieses Büchleins sprengen.

(2) Wir definieren auf der Menge  $F$  einen anderen Typ der Konvergenz:  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , wenn in Abhängigkeit von der Folge  $(x_n)$  ein Index  $N$  existiert, so dass für  $n > N$  und für jedes  $t$  aus dem Intervall  $[0, 1]$   $x_n(t) = x_0(t)$  gilt.

Dieser Konvergenz entspricht die Metrik  $\rho$  aus (45).

## 6 Schlussbemerkungen

In den vorangegangenen Kapiteln konnte sich der Leser mit einer kleinen Auswahl von Problemen vertraut machen, die bei der Verallgemeinerung des Begriffes "Entfernung" entstanden.

Die Auswahl der Probleme war dabei unsystematisch und natürlich eng begrenzt; eine Reihe weiterer Kapitel könnte dazu noch folgen. Aber schon aus den behandelten Beispielen geht hervor, wie vielgestaltig die Mathematik ist, wie sie einerseits oft unsere Intuition und die Zweckmäßigkeit der Dinge um uns herum bestätigt, andererseits wieder mit unerwarteten und auf den ersten Blick "unnatürlichen" Ergebnissen überrascht.

Den Schluss dieses Büchleins über Entfernungen und metrische Räume soll noch ein Beispiel bilden. Dazu führen wir in der Ebene  $E_2$  eine weitere Metrik ein, welche abermals eine Erscheinung erfasst, der wir im täglichen Leben oft begegnen:

Beispiel 74: Für die Punkte  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$  definieren wir in der Ebene  $E_2$  den Abstand  $h(x, y)$ :

- (1) Für  $x = y$  setzen wir  $h(x, y) = 0$ ,
- (2) wenn  $x \neq y$  ist und die durch  $x$  und  $y$  bestimmte Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft, dann setzen wir  $h(x, y) = d(x, y)$ ,
- (3) wenn  $x \neq y$  ist und die durch  $x$  und  $y$  bestimmte Gerade nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, dann setzen wir

$$h(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0)$$

(siehe Abbildung 31;  $d$  ist dabei der euklidische Abstand, und  $0$  ist der Koordinatenursprung).

Bei näherer Betrachtung stellt der Leser fest, dass  $h(x, y)$  diejenige Entfernung ist, die zurückgelegt werden muss, wenn man vom Punkt  $x$  zum Punkt  $y$  gelangen will, und zwar in einer Stadt, deren Straßenbahnlinien strahlenförmig vom Stadtzentrum, d.h. vom Koordinatenursprung, ausgehen.

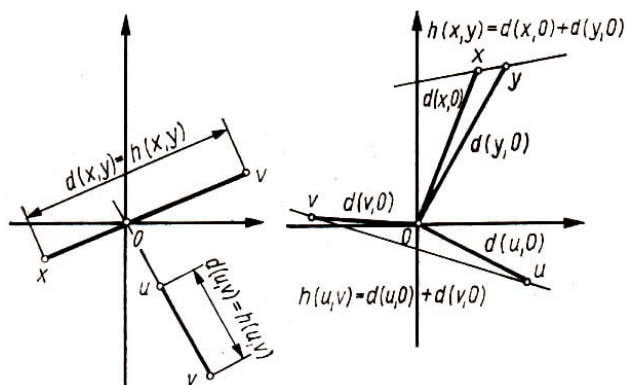


Abb. 31

Liegen die Punkte  $x$  und  $y$  nicht auf demselben Strahl, so müssen wir am Ort  $x$  in die Straßenbahn einsteigen, ins Zentrum fahren und dort in eine Bahn umsteigen, die

entlang des Strahles verkehrt, auf welchem der Ort  $y$  liegt. Solchen Situationen, in der Praxis meist dadurch noch kompliziert, dass die Straßen nicht geradlinig verlaufen, ist der Leser sicher schon in dieser oder jener Stadt begegnet.

Aufgabe 13: Man überzeuge sich davon, dass die Entfernung  $h$  aus Beispiel 74 tatsächlich die Bedingungen A, B und C erfüllt, die eine Metrik charakterisieren, und man stelle fest, was für eine geometrische Gestalt die Kugeln  $K(x, r)$  im metrischen Raum  $\{E_2, h\}$  haben!

Bemerkung 25: Beim Lösen von Aufgabe 13 stellte der Leser sicher fest, dass die Kugel  $K(0, 1)$  im metrischen Raum  $\{E_2, h\}$  die gleiche Gestalt hat wie im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$ . Er könnte sich nun die Frage stellen, wie das mit den Betrachtungen zusammenhängt, wo wir zu einem gegebenen ebenen Gebilde  $\mathcal{U}$  eine Metrik  $\rho$  so gefunden haben, dass  $\mathcal{U}$  die Kugel  $K(0, 1)$  im metrischen Raum  $\{E_2, \rho\}$  war. Tritt nicht irgendein Widerspruch auf?

Die erwähnte Metrik  $\rho$  war doch durch (51) eindeutig gegeben, und wir haben zum offensichtlich gleichen Gebilde - dem Kreis  $\mathcal{K}$  - zwei ganz verschiedene Metriken  $d$  und  $h$  so gefunden, dass der Kreis  $\mathcal{K}$  sowohl im metrischen Raum  $\{E_2, d\}$  als auch im metrischen Raum  $\{E_2, h\}$  die Kugel  $K(0, 1)$  ist.

Es handelt sich jedoch nur scheinbar um einen Widerspruch, denn aus (51) geht hervor, dass unsere dort festgelegte Metrik  $\rho$  eine zur Eigenschaft D der euklidischen Metrik  $d$  analoge Eigenschaft hat, d.h., es gilt

D\*:  $\rho(x + u, y + u) = \rho(x, y)$  für je drei Punkte  $x, y, u$  aus  $E_2$ .

(Man beweise das unter Verwendung der Eigenschaft D!)

Daraus geht dann hervor, dass jede Kugel  $K(a, 1)$  mit dem Radius 1 in  $\{E_2, \rho\}$  dieselbe Gestalt wie das Gebilde  $\mathcal{U}$  hat, und sie entsteht nur durch eine Verschiebung, bei welcher der Punkt  $O = (0, 0)$  in den Punkt  $a$  übergeht. Das kann man von den Kugeln  $K(a, 1)$  im metrischen Raum  $\{E_2, h\}$  nicht sagen:

Schon für  $a \neq (0, 0)$  haben sie eine andere Gestalt; z.B. wird für  $a = (2, 0)$  die Kugel  $K(a, 1)$  in  $\{E_2, h\}$  von einer Sehne der Länge 2 gebildet, die auf der Abszissenachse liegt und ihren Mittelpunkt im Punkt  $a$  hat.

Das bedeutet, dass die Metrik  $h$  keine Eigenschaft des Typs D hat und somit nicht durch Formeln der Form (51) dargestellt werden kann.

Abschließend wollen wir noch anmerken, dass die Zweifel, welche wir gerade zerstreut haben, überhaupt nicht entstanden wären, hätten wir bei der Definition der Metrik  $h$  als Punkt, in dem sich "alle sternförmig geordneten Straßenbahnlinien kreuzen", nicht gerade den Koordinatenursprung  $(0, 0)$ , sondern irgendeinen anderen Punkt gewählt.