

---

**B. Klotzek**

**Einführung in die  
Differentialgeometrie I**

1981 Deutscher Verlag der Wissenschaften  
MSB: Nr. 105  
Abschrift und LaTeX-Satz: 2021

<https://mathematikalpha.de>

## Vorwort

In der Differentialgeometrie ist eine Synthese von Differential- und Integralrechnung einerseits und Elementargeometrie andererseits zu beobachten.

Deshalb müssen einige Vorkenntnisse bezüglich dieser Teilgebiete vorausgesetzt werden. In zwei vorbereitenden Abschnitten werden die diesbezüglichen Begriffe und Aussagen zusammengestellt, wie sie zum überwiegenden Teil in den Lehrbüchern der Oberschule enthalten sind.

Hinsichtlich der Differentialrechnung wird dabei gleich auf Funktionen von mehreren Variablen einschließlich ihrer graphischen Darstellung und Stetigkeit, ihrer partiellen Ableitungen und des Satzes von Schwarz sowie der Taylorentwicklung hingewiesen, weil die angeführten Begriffe und Sätze für das zweite Kapitel, die Krümmungstheorie der Flächen, gebraucht werden.

Andererseits können die betreffenden Ausführungen bei der Vorbereitung auf das erste Kapitel, die Kurventheorie, zunächst übergangen werden.

Über das Niveau der Lehrbücher der Oberschule geht der Begriff der Differentialgleichung hinaus; der Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen wird beim Beweis des Fundamentalsatzes der Kurventheorie benötigt.

Die Zusammenstellung von Begriffen und Aussagen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie basiert ebenfalls auf den genannten Lehrbüchern. Es werden jedoch für das Vektorprodukt die wichtigsten Eigenschaften aufgeführt, der Entwicklungssatz angegeben und das Spatprodukt eingeführt. Der Abschnitt schließt mit einer Übersicht über alle Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Hervorzuheben ist noch die Verwendung von Matrizen und Determinanten bei der Darstellung von Koordinatentransformationen, linearen Gleichungssystemen und den diesbezüglichen Lösbarkeitsaussagen.

Der erste Abschnitt des Kapitels Kurventheorie beginnt mit einer Präzisierung des Kurvenbegriffs und endet mit Ausführungen zu den zulässigen Parameterdarstellungen.

Danach wird die Bogenlänge als natürlicher Parameter eingeführt. Im dritten Abschnitt erscheinen das begleitende Dreibein einer Kurve und die Frenetschen Formeln; sie stellen ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Lösung theoretischer und praktischer Aufgaben der Kurventheorie dar.

Hieran schließt sich die Ermittlung der Krümmung und Windung einiger spezieller Kurven an. Die Deutung von Krümmung und Windung wird im fünften Abschnitt fortgesetzt, indem Krümmungskreis und begleitende Schraubung ermittelt werden.

Mit Hilfe der Taylorentwicklung können die charakteristischen Näherungsparabeln der Projektion in die Schmiege-, Normal- bzw. rektifizierende Ebene entwickelt werden.

Der Fundamentalsatz der Kurventheorie klärt die Bedeutung von Krümmung und Windung für eine Kurve abschließend und gibt den Anlass zur Aufstellung ihrer natürlichen Gleichungen; insbesondere kann jetzt eine Übersicht über alle Kurven konstanter Krümmung und Windung gegeben werden.

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels werden Kurven behandelt, die in Anwendun-

gen besonders interessant sind: Böschungslinien, Klothoiden. Fadenevolventen und -evolventen (insbesondere Evolvente der Kettenlinie und Evolute der Ellipse), Zykloiden und Trochoiden als spezielle Rollkurven, Spiralen oder Schneckenlinien. Es sei nochmals hervorgehoben, dass sich die Kurventheorie an die Mathematikausbildung für Abiturienten anschließt.

Bei der Einführung in die Krümmungstheorie der Flächen im zweiten Kapitel werden ebenfalls geringe Vorkenntnisse vorausgesetzt, es werden jedoch der gesamte Inhalt der vorbereitenden Abschnitte und die wesentlichsten Aussagen der Kurventheorie benutzt. Die Gaußsche Parameterdarstellung einer Flächenkurve bezüglich einer zulässigen Parameterdarstellung der Fläche erfordert für die Berechnung des Tangentenvektors die Kettenregel bei Funktionen von mehreren Variablen. Andererseits hilft die geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen und der Kettenregel bei der Aneignung dieses Begriffs bzw. dieser Aussage aus der Differentialrechnung.

Die grundlegenden Begriffe der Flächentheorie wie Tangentialebene und begleitendes Dreibein werden zunächst am Beispiel des Graphen einer Funktion von zwei Variablen, der Drehfläche und der Regelfläche studiert. Die Behandlung der Regelflächen geht von ihrer Definition über hyperbolisches Paraboloid, einschaliges Hyperboloid, Kegel-, Zylinder- und Tangentenfläche als Beispielen zu den Torsen, für die eine vollständige Übersicht erarbeitet wird; an dieser Stelle konnte der Begriff der Hüllkurve organisch eingegliedert werden.

Die Behandlung der Längen-, Winkel- und Flächeninhaltsmessung im vierten Abschnitt schließt Anwendungen auf Drehflächen, Funktionen zweier Variablen, Kreis und Halbkugel ein. Im Zusammenhang mit der Einführung von Normal- und geodätischer Krümmung werden die Ableitungsgleichungen von Gauß aufgestellt und die zweiten Fundamentalgrößen eingeführt.

Hier beginnt die Darstellung der Krümmungstheorie der Flächen im engeren Sinne. Im sechsten und siebenten Abschnitt werden der Satz von Meusnier gefolgert, die Hauptkrümmungen als Extremwerte der Normalkrümmungen gefunden und der Satz von Euler ausgesprochen.

Nach der Definition der Gaußschen und der mittleren Krümmung mit Hilfe der Hauptkrümmungen findet nach Beispielen die Einführung von  $K$  nach Gauß ihren Platz; dabei werden die Ableitungsgleichungen von Weingarten entwickelt. Die Klassifikation der Flächenpunkte mit Hilfe der Gaußschen Krümmung wird geometrisch gedeutet und durch die Untersuchung der Dupinschen Indikatrix vertieft. Den Abschluss des zweiten Kapitels bilden Ausführungen über Minimalflächen, speziell über die Wendelfläche und das Katenoid.

Die vorliegende Einführung in die Differentialgeometrie, die in einem zweiten Bändchen durch die innere Geometrie einer Fläche und die Einführung in die Riemannsche Geometrie ergänzt wird, soll einerseits der Erweiterung der geometrischen Allgemeinbildung dienen und andererseits ein Hilfsmittel für die Anwendung der Differential- und Integralrechnung in der Praxis sein. Deshalb wurden die Grundzüge hinreichend

streng dargestellt und außerdem zahlreiche Beispiele ausgeführt. Ich hoffe, somit den Interessen von Schülern der Abiturklassen, Lehrern, Lehrerstudenten, Studenten naturwissenschaftlicher und technischer Richtungen wie auch Naturwissenschaftlern und Technikern zu entsprechen. Bezüglich des weiteren Ausbaus der Theorie sowie spezieller Anwendungen muss auf die Literatur verwiesen werden.

Die Kollegen J. Eichhorn, R. Sulanke und P. Wintgen haben das Entstehen dieser elementaren Einführung durch Gespräche gefördert, wofür ich ihnen danke, ebenso wie den Kollegen H. Wendland und B. Wernicke, die mich beim Korrekturlesen unterstützt haben.

Dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften bin ich zu Dank verpflichtet, denn ohne seine Aufmunterung wäre wohl kaum dieses Bändchen zustande gekommen; insbesondere möchte ich Frau E. Arndt für die sachkundige und umsichtige redaktionelle Bearbeitung des Manuskripts meinen Dank aussprechen. Schließlich bin ich dem VEB Druckerei "Thomas Müntzer" Bad Langensalza für die sorgfältige Arbeit sehr verbunden.

Potsdam, im Frühjahr 1981

B. Klotzek

# Inhaltsverzeichnis

|   |            |
|---|------------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>2</b>   |
| <b>0. Vorbereitung</b>  | <b>6</b>   |
| 0.1. Begriffe und Aussagen aus der Differential- und Integralrechnung . . . . .   | 6          |
| 0.2. Begriffe und Aussagen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie  | 11         |
| <b>1 Kurventheorie</b>  | <b>22</b>  |
| 1.1 Kurve und Parameterdarstellung . . . . .  | 22         |
| 1.2 Bogenlänge . . . . .  | 27         |
| 1.3 Begleitendes Dreiein und Frenetsche Formeln . . . . .   | 31         |
| 1.4 Krümmung und Windung einiger spezieller Kurven . . . . .  | 35         |
| 1.5 Weitergehende Deutung von Krümmung und Windung . . . . .  | 36         |
| 1.6 Projektion in die Schmiege-, Normal- bzw. rektifizierende Ebene und<br>Näherungskurve gemäß Taylorentwicklung . . . . . | 42         |
| 1.7 Der Fundamentalsatz der Kurventheorie . . . . .   | 45         |
| 1.8 Einige spezielle Kurven . . . . .   | 48         |
| <b>2 Einführung in die Krümmungstheorie einer Fläche</b>  | <b>61</b>  |
| 2.1 Parameterdarstellung einer Fläche und Flächenkurven . . . . .   | 61         |
| 2.2 Tangentialebene und begleitendes Dreiein . . . . .  | 66         |
| 2.3 Regelflächen und andere einparametrische Scharen von Kurven . . . . .   | 68         |
| 2.4 Bogenlänge von Flächenkurven und metrische Fundamentalgrößen . . . .  | 76         |
| 2.5 Normal- und geodätische Krümmung von Flächenkurven . . . . .  | 82         |
| 2.6 Krümmung und Normalkrümmung von Flächenkurven gleicher Tangente   | 85         |
| 2.7 Hauptkrümmungen . . . . .   | 88         |
| 2.8 Mittlere und Gaußsche Krümmung . . . . .  | 93         |
| 2.9 Die Indikatrix von Dupin . . . . .  | 95         |
| 2.10 Minimalflächen . . . . .   | 100        |
| <b>3 Literatur</b>  | <b>103</b> |
| <b>4 Bezeichnungen und Symbole</b>  | <b>105</b> |

## 0. Vorbereitung

### 0.1. Begriffe und Aussagen aus der Differential- und Integralrechnung

Funktionen  $y = f(x)$  sind oft für alle reellen Zahlen  $x$  erklärt, häufig jedoch nur für ein Intervall. Beispielsweise ist für die elektrische Leistung

$$N = N(U, I) = U \cdot I$$

oder für die Länge eines geradlinigen Weges bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung

$$s = s(b, t) = \frac{b}{2}t^2$$

in Bezug auf physikalische Vorgänge auf der Erde von vornherein eine Einschränkung hinsichtlich der vorkommenden physikalischen Größen  $U$  und  $I$  bzw.  $b$  und  $t$  zu fixieren.

Außerdem zeigen schon diese einfachen Beispiele, dass wir in den Anwendungen nicht nur Funktionen einer Variablen antreffen, sondern auch Funktionen von zwei und mehr Variablen. Sind nun beispielsweise für die Spannung  $U$  und die Stromstärke  $I$  je ein Intervall durch  $U_1 \leq U \leq U_2$  und  $I_1 \leq I \leq I_2$  vorgegeben, dann ist  $N = N(U, I)$  auf einem Rechteck der  $U, I$ -Ebene definiert; die Funktion selbst kann bezüglich eines dreidimensionalen Koordinatensystems mit der  $U$ -,  $I$ - und  $N$ -Achse als eine Fläche dargestellt werden, indem über jedem Punkt des Rechtecks der entsprechende Funktionswert abgetragen wird.

Wir unterscheiden offene Intervalle  $(a, b) := \{x : a < x < b\}$  und abgeschlossene Intervalle  $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ ; dabei wird im Fall des offenen Intervalls  $a = -\infty$  und  $b = +\infty$  zugelassen. Wir betrachten das Intervall  $I = [-1, \pi]$ . Darin gibt es ein größtes Element oder Maximum ( $\max_{x \in I} x = \pi$ ) und ein kleinstes Element oder Minimum ( $\min_{x \in I} x = -1$ ); es gilt  $-1, \pi \in I$  und  $I \leq \pi$  bzw.  $-1 \leq I$ .

Diese Eigenschaften besitzt das offene Intervall  $(-1, \pi)$  nicht; zwar gibt es Zahlen  $s$  mit  $I \leq s$ , beispielsweise  $s = 4, \pi^2$ , obere Schranken von  $I$ , aber es gilt dabei stets  $s \notin I$ .

Die Menge aller oberen Schranken von  $I$  hat ein kleinstes Element, nämlich  $\pi$ . Dieses Resultat ergibt sich aus einer allgemeinen Eigenschaft der reellen Zahlen: Jede nicht leere, nach oben (unten) beschränkte Menge  $M$  reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere (größte untere) Schranke, die obere (untere) Grenze, das Supremum (Infimum)

$$\sup M = \sup_{x \in M} x \quad (\text{Infimum } \inf M = \inf_{x \in M} x)$$

Bei Funktionen  $y = f(x)$  können verschiedene  $x$ -Werte dasselbe Bild besitzen; beispielsweise gilt bezüglich  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , sowohl  $2^2 = 4$  als auch  $(-2)^2 = 4$ . Gehören jedoch zu verschiedenen Argumenten  $x_1, x_2$  auch stets verschiedene Funktionswerte  $f(x_1), f(x_2)$ , dann kann eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  gebildet werden; aus  $y = f(x)$ ,

$x \in D$  (Definitionsbereich) und  $f(D) = W$  (Werte- oder Bildbereich) folgt für diese Funktion

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in W$$

Für die Umkehrbarkeit einer Funktion ist die strenge Monotonie hinreichend; dabei heißt  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , in  $D$  genau dann streng monoton wachsend, wenn aus  $x_1 < x_2$  stets  $f(x_1) < f(x_2)$  folgt; entsprechend heißt  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , in  $D$  genau dann streng monoton fallend, wenn  $f(x_1) > f(x_2)$  für  $x_1 < x_2$  gilt.

In Anwendungen benötigt man meist stetige Funktionen. Das Bild einer in einem Intervall stetigen Funktion einer Variablen kann gezeichnet werden, "ohne den Zeichenstift absetzen zu müssen". Dieser anschauliche Begriff kann wie folgt mathematisch exakt eingeführt werden.

Zunächst nennen wir die Menge aller Punkte der Zahlengeraden, die von einem Punkt  $z$  einen Abstand kleiner als eine positive Zahl  $\rho$  haben, eine  $\rho$ -Umgebung von  $z$ , in Zeichen  $U_\rho(z)$ .

Eine Funktion  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , heißt an der Stelle  $x \in D$  stetig genau dann, wenn es zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(x)$  eine  $\delta$ -Umgebung von  $x$  mit  $f(U_\delta(x) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$  gibt (Abb. 1).

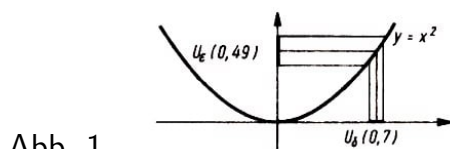


Abb. 1

Gilt für eine Folge mit Gliedern  $x_k \in D$ , dass sie gegen  $x$  konvergiert, dann strebt die Folge der Funktionswerte gegen  $f(x)$ :  $f(x_k) \rightarrow f(x)$ .

Eine Funktion  $f$  heißt genau dann in  $U \subseteq D$  stetig, wenn sie in jedem Punkt von  $U$  stetig ist. Sagt man gar, dass  $f$  stetig ist, dann ist  $f$  in jedem Punkt des Definitionsbereiches  $D$  stetig.

Diese Definitionen werden gleichlautend für Funktionen mit mehreren Variablen ausgesprochen, wobei sich "Umgebung" nicht mehr auf die Zahlengerade, sondern auf den Raum der (unabhängigen) Variablen bezieht. In unserem Beispiel  $N = N(U, I) = U \cdot I$  ist eine  $\delta$ -Umgebung eine Kreisscheibe der  $U, I$ -Ebene.

Eine Funktion  $f$ , die in einem abgeschlossenen<sup>1</sup> Intervall  $I$  (oder beschränkten abgeschlossenen Gebiet<sup>2</sup>) stetig ist, nimmt dort ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h., dass für die Menge der Funktionswerte, für den Wertebereich  $f(I)$ , Maximum  $\max_{x \in I} f(x)$  und Minimum  $\min_{x \in I} f(x)$  existieren.

Darüber hinaus nimmt sie jeden Wert zwischen Maximum und Minimum an wenigstens einer Stelle von  $I$  an (Zwischenwertsatz).

<sup>1</sup>Diese Voraussetzung ist unentbehrlich, denn die Funktion  $y = \cot x$  ist im offenen Intervall  $(0, \pi)$  stetig, sie besitzt dort aber weder ein Maximum noch ein Minimum.

<sup>2</sup>Bei einem Gebiet  $G$  gehört mit einem Punkt auch eine Umgebung von ihm zu  $G$ , und je zwei Punkte von  $G$  können durch einen in  $G$  liegenden Streckenzug verbunden werden.

Eine Funktion  $y = f(x)$  heißt an der Stelle  $x$  eines offenen Intervalls des Definitionsbereiches genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$  bezeichnet und Differentialquotient oder erste Ableitung an der Stelle  $x$  genannt.

Aus der Existenz der ersten Ableitung an der Stelle  $x$  folgt die Stetigkeit der Funktion  $f$  an dieser Stelle. Die Funktion  $f$  ist an allen Stellen  $x$  definiert, in denen  $y = f(x)$  differenzierbar ist.

Die Funktion  $y = f(x)$  heißt genau dann an der Stelle  $x$  stetig differenzierbar, wenn  $y' = f'(x)$  dort stetig ist.

Schließlich erhalten wir die  $(n+1)$ -te Ableitung an der Stelle  $x$  als Differentialquotient der  $n$ -ten Ableitung  $f^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), seine Existenz vorausgesetzt.

Die Bilder zweier Funktionen  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  berühren sich an der Stelle  $x$  von (wenigstens)  $(n+1)$ -ter Ordnung, falls in einer Umgebung  $U$  von  $x$   $(n+1)$ -te Ableitungen existieren und  $f(x) = g(x)$ ,  $f'(x) = g'(x)$ , ...,  $f^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x)$ ,  $n \geq 0$ , gilt.

Je größer  $n$  ist, um so besser wird eine der Funktionen von der anderen in der Umgebung  $U$  von  $x$  angenähert. Beide werden gemäß der Taylorentwicklung<sup>3</sup> von  $f$  an der Stelle  $x+h$  von einem Polynom  $n$ -ten Grades angenähert.

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R_n(x, h)$$

$$R_n(x, h) = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$R_n(x, h)$  ... Restglied von Lagrange<sup>4</sup>, ( $0 < \theta < 1$ )<sup>5</sup>

Für  $n = 0$  erhalten wir die charakteristische Beziehung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die rechte Seite können wir als Anstieg einer Sekante deuten, die linke Seite als Anstieg der Tangente in einem Zwischenpunkt (Abb. 2a).

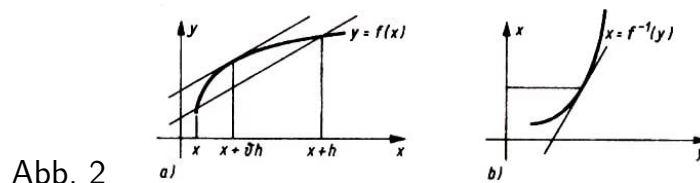


Abb. 2

<sup>3</sup>Brook Taylor (1685-1731).

<sup>4</sup>Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

<sup>5</sup>Wegen dieser Bedingung kann  $\theta + h$  Randpunkt von  $U$  sein, wenn  $f$  dort wenigstens noch stetig ist.



Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir noch folgende wichtige Aussage: Wenn in einem offenen Intervall  $f'$  stets positiv (negativ) ist, dann ist  $f$  streng monoton wachsend (fallend), und die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt dort die erste Ableitung (vgl. Abb. 2a, b)

$$\frac{dx}{dy} = f'^{-1}(y) = f'^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Werden bei einer Funktion von mehreren Variablen bis auf  $x_i$  alle Variablen konstant gelassen, so erhält man eine Funktion einer Variablen, auf die sich die Begriffe der Differentialrechnung anwenden lassen. Die Differentialquotienten werden dabei partielle Ableitungen genannt und für  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  mit

$$f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

bezeichnet. Auch hier können höhere Ableitungen gebildet werden, wobei "gemischte" Formen, d. h. Ableitungen nach verschiedenen Variablen, auftreten können. Beispielsweise gilt bezüglich gleichmäßig beschleunigter Bewegungen (alle möglichen konstanten  $b$  berücksichtigend)

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= bt, & \frac{\partial s}{\partial b} &= \frac{1}{2}t^2, \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= b, & \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial b} &= t = \frac{\partial^2 s}{\partial b \partial t}, & \frac{\partial^2 s}{\partial b^2} &= 0 \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung von zweiten Ableitungen drückt die Möglichkeit der Vertauschung der Differentiationsreihenfolge aus.

Die genauen Bedingungen dafür enthält der folgende Satz, der von H. A. Schwarz (1843-1921) bewiesen wurde: Sind in einem Gebiet  $f, f_{x_i}, f_{x_j}, f_{x_i x_j}$  stetige Funktionen, dann existiert außerdem  $f_{x_j x_i}$  in  $G$ , wobei  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$  gilt.

Auch die Taylorsche Formel besitzt eine Form für Funktionen von mehreren Variablen. Wenn wir die Existenz und Stetigkeit der vorkommenden Funktionen in einer Kreisscheibe voraussetzen, dann hat der Formelanfang speziell für Funktionen zweier Variablen die Gestalt

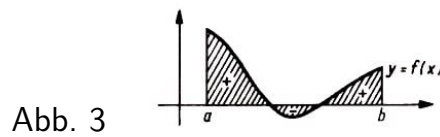
$$\begin{aligned} f(x + h_1, y + h_2) &= f(x, y) + \frac{h_1}{1!} f_x(x, y) + \frac{h_2}{1!} f_y(x, y) + \frac{h_1^2}{2!} f_{xx}(x, y) \\ &+ \frac{2h_1 h_2}{2!} f_{xy}(x, y) + \frac{h_2^2}{2!} f_{yy}(x, y) + \dots \end{aligned}$$

Falls wir den Prozess des Übergangs von einer Funktion  $y = f(x)$  zu ihrer ersten Ableitung umkehren wollen, stellen wir die Frage, ob es eine Funktion  $y = F(x)$  mit  $F'(x) = f(x)$  gibt;  $y = F(x)$  heißt eine Stammfunktion von  $y = f(x)$ .

Von großer Bedeutung ist die Tatsache, dass sich alle Stammfunktionen einer gegebenen Funktion  $f(x)$  nur um eine additive Konstante unterscheiden. Zum Begriff der Stammfunktion kann man auch über die Flächeninhaltsbestimmung gelangen: Der Inhalt

$$\int_a^b f(x) dx$$

der in Abb. 3 schraffierten Fläche, wobei unterhalb der  $x$ -Achse gelegene Teile als negativ angesehen werden, heißt bestimmtes (Riemannsches<sup>6</sup>) Integral; es existiert, wenn  $y = f(x)$  stetig ist.



Das bestimmte Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

als Funktion der oberen Grenze ist eine Stammfunktion von  $y = f(x)$ . Folglich gilt für eine beliebige Stammfunktion  $F$  einer auf dem Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktion  $f$

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Somit erweist sich für die meisten Anwendungen die Kenntnis der ersten Ableitung von elementaren Funktionen als unentbehrliches Hilfsmittel; u.a. wird die Beherrschung der Formeln<sup>7</sup>

$$\frac{d(ax^p)}{dx} = apx^{p-1}, \quad \frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \cos x, & \frac{d \cos x}{dx} &= -\sin x, & \frac{d \arcsin x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d \arctan x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, & \frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

erwartet. Gute Dienste leisten auch die allgemeineren Regeln

$$(u+v)' = u' + v', \quad (v \cdot v)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Die Ableitung einer mittelbaren Funktion  $y = f(x(t))$  führt zur Kettenregel

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Als Folgerung aus dieser Regel bzw. der Regel für ein Produkt  $uv$  erhält man

$$\int f(x) dx = \int f(x) \cdot \frac{dx}{dt} dt \quad (\text{Substitutionsregel})$$

<sup>6</sup>Bernhard Riemann (1826-1866)

<sup>7</sup>Für eine natürliche Zahl  $p$  darf  $x$  eine beliebige reelle Zahl sein; für beliebige ganze Zahlen  $p$  muss  $x = 0$  ausgeschlossen werden. Für reelle Zahlen  $p$  ist  $x > 0$  vorzusetzen.

bzw.

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \quad (\text{partielle Integration})$$

Die Kenntnis obiger Formeln gestattet uns beispielsweise, aus der Gleichung  $y' = e^x$  auf  $y = e^x + c$  zu schließen. Die Angabe einer Stammfunktion ist die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$g(x, y, y') = 0$$

für eine gesuchte Funktion  $y = f(x)$ ; eine Differentialgleichung zweiter Ordnung hätte das Aussehen  $g(x, y, y', y'') = 0$ . Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzt die Gestalt

$$y' + a(x)y + b(x) = 0$$

Mitunter werden gleichzeitig  $n$  Funktionen  $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$  gesucht, die Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \\ y = kx - a \end{array} \right\} \quad (*)$$

sind. Hierfür gibt es folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Sind die Funktionen  $a_{ij} = a_{ij}(x)$ ,  $b_h = b_h(x)$  im Intervall  $(a, b)$  stetig, dann gibt es zu gegebenen Zahlen  $x_0 \in (a, b)$  und  $\eta_1, \dots, \eta_n$  genau eine Lösung  $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$  mit dem Definitionsbereich  $(a, b)$ , für die  $f_1(x_0) = \eta_1, \dots, f_n(x_0) = \eta_n$  und  $(*)$  gilt.

Neben den bisher betrachteten gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es partielle Differentialgleichungen; sie enthalten partielle Ableitungen von gesuchten Funktionen mehrerer Variablen. Bezüglich aller weitergehenden Fragen, speziell nach weiteren Existenz- und Eindeutigkeitssätzen sowie nach Lösungsmethoden verweisen wir auf Bücher zur Theorie der Differentialgleichungen, etwa auf [10].

## 0.2. Begriffe und Aussagen aus der linearen Algebra und analytischen Geometrie

Vektoren des Raumes werden wir stets durch gerichtete Strecken veranschaulichen, wobei parallelgleiche gerichtete Strecken zu ein und demselben Vektor gehören (Abb. 4).

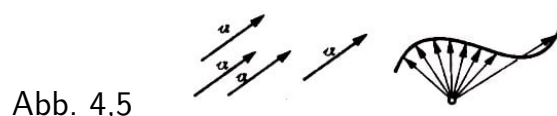


Abb. 4,5

Andererseits kann jeder Vektor durch eine gerichtete Strecke mit einem festen Anfangspunkt dargestellt werden; Scharen von solch gerichteten Strecken, von Ortsvektoren,

eignen sich gut zur Beschreibung von Kurven (Abb. 5).

Bei der Anwendung von Vektoren wird häufig mit ihnen gerechnet. Hinsichtlich ihrer Addition sind Assoziativität und Kommutativität

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad , \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

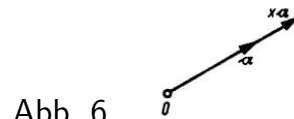
sowie ihre eindeutige Umkehrbarkeit. Zu gegebenen Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  gibt es genau einen Vektor  $\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$  besonders wichtig. Hieraus erhält man unter anderem die Existenz und Eindeutigkeit des Nullvektors  $\mathbf{o}$  mit

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$$

Für alle Vektoren  $\mathbf{a}$  und des Entgegengesetzten  $-\mathbf{a}$  für jeden Vektor  $\mathbf{a}$

$$-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

Daneben gibt es die Vervielfachung mit reellen Zahlen. Veranschaulichen wir die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $x\mathbf{a}$  durch gerichtete Strecken mit dem gemeinsamen Anfangspunkt  $O$ , dann liegen ihre Endpunkte mit  $O$  auf einer Geraden (Abb. 6).



Für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und reelle Zahlen  $x, y$  gilt

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (xy)\mathbf{a} = x(y\mathbf{a}), \quad (x+y)\mathbf{a} = x\mathbf{a} + y\mathbf{a}, \quad x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + x\mathbf{b}$$

Somit besteht  $x\mathbf{a} = \mathbf{o}$  genau dann, wenn  $x = 0$  oder  $\mathbf{a} = \mathbf{o}$  ist. Wegen  $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$  gilt außerdem'

$$(-x)\mathbf{a} = x(-\mathbf{a}) = -(x\mathbf{a})$$

Folglich ergibt  $x\mathbf{a} = y\mathbf{a}$  für  $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$  stets  $x = y$ . Allgemeiner gilt: Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  nichtkomplanare Vektoren, dann gibt es zu jedem Vektor  $\mathbf{v}$  reelle Zahlen  $x, y, z$  mit

$$\mathbf{v} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

( $\mathbf{v}$  als Linearkombination von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ), und aus  $\mathbf{v} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$  folgt  $x' = x, y' = y, z' = z$  (Koeffizientenvergleich).

Deshalb wird das Tripel  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  eine Basis genannt. Andererseits folgt aus  $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$

$$(x - x')\mathbf{a} + (y - y')\mathbf{b} + (z - z')\mathbf{c} = \mathbf{o}$$

Der obige Satz vom Koeffizientenvergleich ist somit gleichwertig mit der eindeutigen Linearkombination des Nullvektors mit Nullen

$$\bar{x}\mathbf{a} + \bar{y}\mathbf{b} + \bar{z}\mathbf{c} = \mathbf{o} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$$

die die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ausdrückt.

Offenbar gibt es verschiedene Basen des Raumes. Sind  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  und  $(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3)$  zwei Basen des Raumes, dann möchte man mitunter die Koordinaten  $x'_1, x'_2, x'_3$  eines beliebigen Vektors  $\mathbf{v}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3)$  aus den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  des Vektors  $\mathbf{v}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  berechnen.

Das gelingt, wenn man die Vektoren  $\mathbf{a}_i$  als Linearkombinationen der Vektoren  $\mathbf{a}'_k$  kennt:  
Aus

$$\mathbf{a}_i = \sum_k a_{ik} \mathbf{a}'_k \quad \text{und} \quad x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{v} = x'_1 \mathbf{a}'_1 + x'_2 \mathbf{a}'_2 + x'_3 \mathbf{a}'_3$$

folgt nach dem Einsetzen und dem Koeffizientenvergleich

$$x'_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + x_3 a_{31}$$

$$x'_2 = x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + x_3 a_{32}$$

$$x'_3 = x_1 a_{13} + x_2 a_{23} + x_3 a_{33}$$

oder - in Matrizenschreibweise -

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3)(a_{ik})$$

dabei ist die Determinante der Koeffizientenmatrix  $(a_{ik})$  von Null verschieden:  $|(a_{ik})| \neq 0$ .

Wir erinnern daran, dass verkettete Matrizen  $(a_{ik})$  und  $(b_{ik})$  (Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich Anzahl der Zeilen der zweiten) als Produkt eine Matrix  $(c_{ik})$  besitzen, wobei  $c_{ik}$  Produkt aus dem  $i$ -ten Zeilenvektor von  $(a_{ik})$  und dem  $k$ -ten Spaltenvektor von  $(b_{ik})$  ist:

$$c_{ik} = \sum_r a_{ir} b_{rk}$$

Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ. - Beispielsweise gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1)4 & 2 \cdot 5 + (-1)6 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = [2 \cdot 1 - 3(-1)] \cdot [1 \cdot 6 - 4 \cdot 5] = -70$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 21 \end{vmatrix} = (-2)21 - 7 \cdot 4 = -70$$

Für die Determinanten verketteter quadratischer Matrizen gilt allgemein folgender Multiplikationssatz

$$|(a_{ik})||b_{ik}| = |(a_{ir})(b_{rk})|$$

Die Berechnung einer Determinante kann stets durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte erfolgen; z. B. gilt

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & -5 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Bekanntlich lassen sich Matrizen mit reellen Zahlen vervielfachen und - gleicher Typ vorausgesetzt - addieren, was am Beispiel erläutert sei:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+5 & 5+2 \\ 3+(-2) & 4+1 & 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Hinsichtlich der Addition und Vervielfachung gelten die gleichen Regeln wie für Vektoren. Im Zusammenhang mit der Matrizenmultiplikation besteht Distributivität:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ ; es müssen beide Gleichungen angegeben werden, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

Durch "Spiegelung an der Hauptdiagonale" ergibt sich die Transponierte  $(a_{ik}^*)$  einer Matrix  $(a_{ik})$ ; es gilt  $a_{ik}^* = a_{ki}$ . Mit der Bezeichnung  $(a_{ik})^T := (a_{ik}^*)$  haben wir

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \quad (x\mathbf{A})^T = x\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad |\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$$

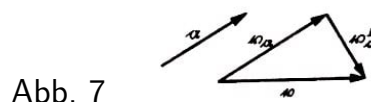
Jeder Vektor  $\mathbf{a}$ , der durch die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{PQ}$  veranschaulicht wird, besitzt als seinen Betrag  $|\mathbf{a}|$  die Maßzahl des Abstands von  $P$  und  $Q$  bezüglich einer Längeneinheit. Der Vektor  $\mathbf{e}$  heißt Einheitsvektor genau dann, wenn  $|\mathbf{e}| = 1$  ist. Allgemein gilt

$$|x\mathbf{a}| = |x||\mathbf{a}|$$

Im Falle  $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$  ist  $\mathbf{a}^0 := \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  ein Einheitsvektor.

Für Vektoren lassen sich die Relationen  $\parallel$  und  $\perp$  über die entsprechenden Relationen für gerichtete Strecken einführen; der Nullvektor sei zu allen Vektoren parallel und senkrecht. Jeder Vektor  $\mathbf{v}$  kann bezüglich eines Vektors  $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$  in eine Parallelkomponente  $\mathbf{v}_a$  und eine Normalkomponente  $\mathbf{v}_a^\perp$  zerlegt werden; dabei gilt (Abb. 7)

$$\mathbf{v}_a \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_a^\perp \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a^\perp$$



Unter dem Skalarprodukt  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  versteht man die Zahl

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{a} = \mathbf{o} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{o} \\ |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus dieser Definition liest man ab: Es gilt  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  ist. Die grundlegenden Eigenschaften des Skalarproduktes sind

$$\mathbf{a}\mathbf{a} > 0 \text{ für } \mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \quad \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$$

$$t(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (t\mathbf{a})\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{c}$$

für alle Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  und reelle Zahlen  $t$ . Wegen  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$  gilt

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Diese Formel wird häufig angewandt. Für die Berechnung des Skalarproduktes erhalten wir aus seinen obigen Eigenschaften:

Sind  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  paarweise senkrechte Einheitsvektoren (orthonormierte Basis) und ist  $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = \tilde{x}\mathbf{i} + \tilde{y}\mathbf{j} + \tilde{z}\mathbf{k}$ , dann gilt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x\tilde{x} + y\tilde{y} + z\tilde{z}$$

Das Tripel  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  wird im folgenden als (orientierendes) Dreibein vorausgesetzt, d. h., dass  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  nicht nur ein System paarweise senkrechter Einheitsvektoren darstellt, sondern auch ein Rechtssystem; bei der Drehung von  $\mathbf{i}$  in  $\mathbf{j}$  um  $90^\circ$  soll  $\mathbf{k}$  in Fortbewegungsrichtung einer Rechtsschraube zeigen.

Das Vektorprodukt oder (vektorielle) Kreuzprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad , \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

und im Fall  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$  ist  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ein Rechtssystem.

Hieraus erhalten wir  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  genau dann, wenn  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  ist. Außerdem ist

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \text{aber} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \text{usw.}$$

Sind  $x, y, z$  bzw.  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  die Koordinaten von  $\mathbf{a}$  bzw.  $\mathbf{b}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , dann gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \end{vmatrix}$$

Die wichtigsten Rechenregeln sind

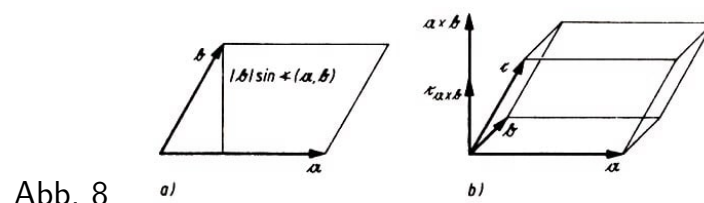
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad x(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (x\mathbf{a}) \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Offenbar ist  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  Maßzahl des Flächeninhalts des von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms (Abb. 8a).

Spannen  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  einen Spat auf (Abb. 8b), dann ist  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  wegen  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$  bis aufs Vorzeichen gleich der Maßzahl des Spatvolumens. Deshalb wird für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Spatprodukt genannt. Es gilt



$$abc = D(a, b, c) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

wobei die Spaltenvektoren die Koordinaten von  $a$ ,  $b$  und  $c$  enthalten. Die Vektoren  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind genau dann komplanar (linear abhängig), wenn  $abc = 0$  ist. Außerdem gilt

$$(a \times b)c = a(b \times c)$$

Der Vektor  $(a \times b) \times c$  steht auf  $a \times b$  senkrecht und ist folglich eine Linearkombination von  $a$  und  $b$  nach dem Entwicklungssatz sind die Koeffizienten Skalarprodukte:

$$(a \times b) \times c = -a(bc) + b(ca)$$

Jeder Vektor  $a$  des Raumes kann als Verschiebung gedeutet werden; das Bild  $P'$  eines Punktes  $P$  geben wir folgendermaßen an:

$$P' = P + a$$

Diese Schreibweise ist vor allem deshalb zweckmäßig, weil entsprechende Koordinaten addiert werden. Gilt beispielsweise  $P = (3, -2, 5)$  und  $a = (2, 1, -4)$ , dann ist  $P' = P + a = (3 + 2, -2 + 1, 5 - 4) = (5, -1, 1)$ .

Umgekehrt ist  $a = (5 - 3, -1 - (-2), 1 - 5)$ , so dass wir gelegentlich den durch  $\overrightarrow{PP'}$  bestimmten Vektor  $v(PP')$  mit  $P' - P$  oder  $r' - r$  ( $r'$ ,  $r$  Ortsvektoren von  $P'$  bzw.  $P$ ) bezeichnen. Außerdem gilt stets

$$(P + a) + b = P + (a + b)$$

Eine Gerade durch  $P$  mit dem Richtungsvektor  $a$  besitzt die Parametergleichung

$$X = P + ta, \quad t \in \mathbb{R}$$

Die von  $a, b$  ( $\nparallel a$ ) aufgespannte Ebene  $\varepsilon$  durch  $P$  wird mittels

$$X = P + ua + vb, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

beschrieben. Ohne Parameter kann die Ebene  $\varepsilon$  mit Hilfe eines zu ihr senkrechten Vektors  $s$  durch

$$(X - P)s = (r - p)s = 0$$

charakterisiert werden; dabei wird  $s$  ein Stellungsvektor von  $\varepsilon$  genannt, im Fall  $|s| = 1$  auch Normalvektor von  $\varepsilon$ .

Sollen z.B. die gemeinsamen Punkte der Geraden

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, 1, 1)$$

und der Ebene durch die Punkte  $A = (2, 1, 0)$ ,  $B = (-1, 1, 4)$ ,  $C = (0, 2, 3)$  ermittelt werden, dann können wir eine Parametergleichung für  $\varepsilon_{ABC}$  mit Hilfe von  $B - A$  und  $C - A$  aufstellen:

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + u(-3, 0, 4) + v(-2, 1, 3)$$



gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$t + 3u + 2v = 1$$

$$t - v = 1$$

$$t - 4u - 3v = -2$$

erhalten. Mit Hilfe des Kreuzproduktes ließe sich aber auch eine parameterfreie Gleichung erhalten:

$$[(x, y, z) - (2, 1, 0)](-4, 1, -3) = 0$$

Einsetzen führt über

$$(t - 1, t - 1, t + 2)(-4, 1, -3) = 0$$

zu dem "Gleichungssystem" mit einer Gleichung

$$6t + 3 = 0$$

Die Bestimmung der gemeinsamen Punkte zweier Ebenen kann zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten oder drei Gleichungen mit zwei Unbekannten führen. Solch Gleichungssystem kann stets als Matrizenungleichung geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

kurz als  $\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{b}$ . In dieser Form lassen sich die Lösbarkeitsbedingungen am übersichtlichsten formulieren. Dabei heißt  $\mathbf{A}$  Koeffizientenmatrix,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix und  $\mathbf{t}$  (gesuchter) Lösungsvektor.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren einer Matrix  $\mathbf{B}$  heißt deren Rang  $\rho(\mathbf{B})$ ;  $\rho(\mathbf{B})$  ist auch gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von  $\mathbf{B}$ .

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn  $\rho(\mathbf{A})$  auch Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist. Im Falle  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$  (homogenes Gleichungssystem) ist das stets der Fall; eine Lösung ist die triviale Lösung  $\mathbf{t} = \mathbf{o}$ .

Aus  $\mathbf{A}\mathbf{t}_1 = \mathbf{o}$  und  $\mathbf{A}\mathbf{t}_2 = \mathbf{o}$  folgt für eine Linearkombination  $\mathbf{t} = \lambda_1 \mathbf{t}_1 + \lambda_2 \mathbf{t}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{t} = \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{t}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{t}_2 = \mathbf{o}$$

d. h., dass alle Lösungen einen Vektorraum bilden; er hat die Dimension  $n - \rho(\mathbf{A})$ . Da wir aus  $\mathbf{A}\mathbf{t}_0 = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{o}$  bzw.  $\mathbf{A}\mathbf{t}_1 = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{t}_0 + \mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0) = \mathbf{A}\mathbf{t}_1 - \mathbf{A}\mathbf{t}_0 = \mathbf{o}$$

erhalten, ist  $\{\mathbf{t}_0 + \mathbf{t} : \mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{o}\}$  die Menge aller Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{b}$  mit der partikulären Lösung  $\mathbf{t}_0$ . Ist  $\mathbf{A}$  dabei eine quadratische Matrix mit  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , dann gilt  $\rho(\mathbf{A}) = n$ , und  $\mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  ist die eindeutige Lösung.

Gerade und Ebene werden durch lineare Gleichungen oder Gleichungssysteme beschrieben. Das trifft auf Kreis und Kugel nicht mehr zu. In der  $x - y$ -Ebene hat der Kreis  $k(0, r)$  mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius  $r$  die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die im Raum eine Kreiszylinderfläche kennzeichnet (Abb. 9).

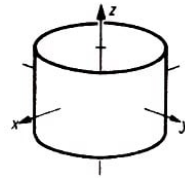


Abb. 9

Für den Kreis kann auch eine Parameterdarstellung angegeben werden:

$$P = O + r \cos ti + r \sin tj$$

Hier ist aber nicht zu erkennen, dass wir mit einer Gleichung zweiten Grades auskommen. In der analytischen Geometrie kann man sich eine Übersicht über alle Kurven und Flächen mit solchen Gleichungen verschaffen.

Durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems (Hauptachsentransformation) erhält man, wenn man die Koordinaten mit  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnet, zunächst zwei Möglichkeiten für die Gleichung (mit  $\lambda_i \neq 0$ ):

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_\rho x_\rho^2 + a^* = 0$$

(dabei ist der Ursprung Mittelpunkt) oder

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_\rho x_\rho^2 + 2a_{\rho+1}x_{\rho+1} = 0$$

Die Fallunterscheidung wird nun für  $n = 2$  (Kurven in einer Ebene) und für  $n = 3$  (Flächen im Raum) durch die Auflistung der möglichen Koeffizienten verfeinert. Unter der Voraussetzung  $a^* \neq 0$  setzen wir für  $1 \leq i \leq \rho$

$$a_i^{-2} := -\lambda_i : a^* \text{ für } -\lambda_i : a^* > 0$$

$$a_i^{-2} := \lambda_i : a^* \text{ für } \lambda_i : a^* > 0$$

sonst einfach  $a_i^{-2} := \lambda_i$  für  $\lambda_i > 0$  und  $a_i^{-2} := -\lambda_i$  für  $\lambda_i < 0$ .

Es gibt folgende Möglichkeiten, wenn wir wieder  $x, y, z$  statt  $x_1, x_2, x_3$  und  $a, b, c$  statt  $a_1, a_2, a_3$  schreiben:

$n = 2$  **Kurven in der Ebene**

$\rho$  Gleichung      Kurve oder Entartung

2  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$       Ellipse (für  $a = b$  Kreis)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$       Hyperbel

$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$        $\emptyset$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$        $\{O\}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$       Paar sich schneidender Geraden

1  $\frac{x^2}{a^2} = 1$       Paralleleradenpaar  
 $-\frac{x^2}{a^2} = 1$        $\emptyset$

$\rho$  Gleichung      Kurve oder Entartung

1  $\frac{x^2}{a^2} = 0$       Gerade (Doppelgerade)

$\frac{x^2}{a^2} + 2by = 0$       Parabel

Abb.

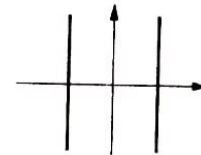
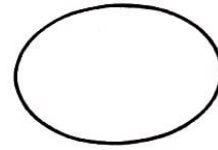
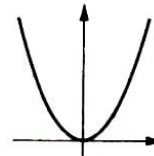
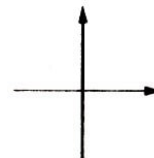


Abb.



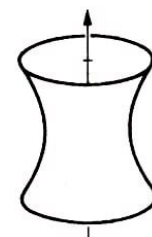
$n = 3$  **Flächen im Raum**

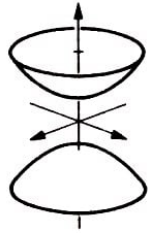
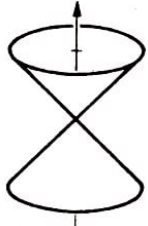
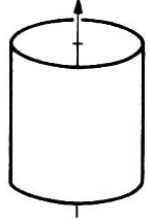
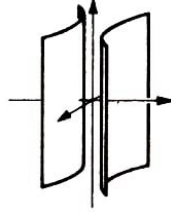
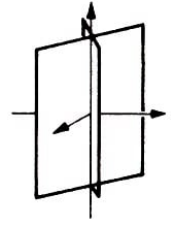
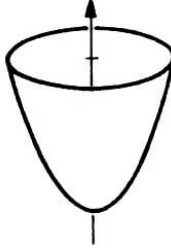
$\rho$  Gleichung      Kurve oder Entartung

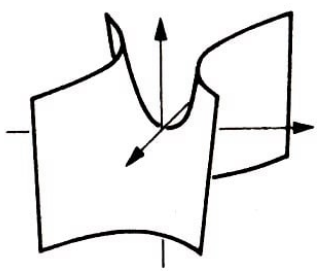
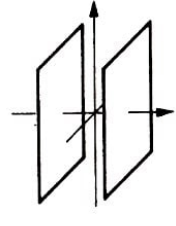
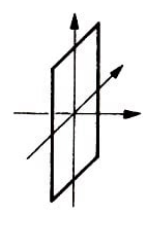
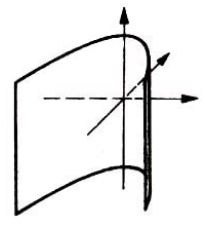
3  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$       Ellipsoid (für  $a = b = c$  Kugel)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$       einschaliges Hyperboloid

Abb.



| $\rho$ | Gleichung   | Kurve oder Entartung                                       | Abb.  |
|--------|---|--|---|
| 3      | $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ | zweischaliges Hyperboloid<br>$\emptyset$<br>$\{O\}$        |    |
|        | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$   | Kegel ( $a = b$ Rotationskegel)                            |    |
| 2      | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   | elliptischer Zylinder                                      |   |
| 2      | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  | hyperbolischer Zylinder<br>$\emptyset$<br>Gerade (z-Achse) |  |
|        | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$   | schneidendes Ebenenpaar                                    |  |
|        | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0$   | elliptisches Paraboloid                                    |  |

| $\rho$ | Gleichung                                       | Kurve oder Entartung              | Abb.  |
|--------|---|-----------------------------------|---|
|        |   |                                   |    |
| 2      | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0$   | hyperbolisches Paraboloid         |   |
|        |   |                                   |    |
| 1      | $\frac{x^2}{a^2} = 1$<br>$-\frac{x^2}{a^2} = 1$ | Parallelebenenpaar<br>$\emptyset$ |   |
|        |   |                                   |   |
|        | $\frac{x^2}{a^2} = 0$                           | Doppelebene                       |   |
|        |   |                                   |  |
|        | $\frac{x^2}{a^2} + 2by = 0$                     | parabolischer Zylinder            |   |

# 1 Kurventheorie

## 1.1 Kurve und Parameterdarstellung

Ursprünglich waren Linie und Fläche Begriffe, die bei der Betrachtung der Gegenstände der Umwelt durch Abstraktion gewonnen und für die Herstellung von Gegenständen mit gewünschtem Aussehen benötigt wurden.

Als spezielle Linien und Flächen wurden beispielsweise gerade Linien und ebene Flächen eingeführt. Das können wir in den Elementen des Euklid (365 ?-300 v.u.Z.) beobachten; für den Umgang mit diesen Begriffen in der Praxis werden in den sogenannten Definitionen folgende Beschreibungen angegeben:

Ein Punkt ist, was keine Teile hat.

Eine Linie breitenlose Länge.

Die Enden einer Linie sind Punkte.

Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

Die Enden einer Fläche sind Linien.

Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.

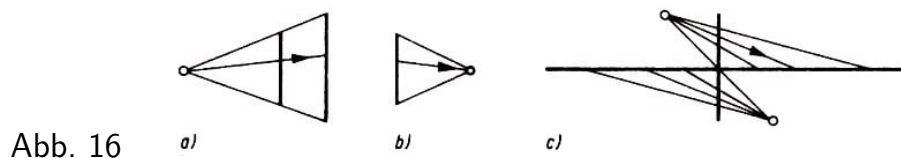
... (Vgl. [6], S. 1.)

Im Geometrieunterricht an unseren Schulen werden Geraden und Ebenen als undefinierte Begriffe benutzt. Später werden einige spezielle Kurven wie Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel erklärt und mehr oder weniger ausführlich behandelt.

Eine brauchbare Definition des Begriffes Kurve, wie wir statt Linie sagen, ist keineswegs einfach. Die anschauliche Version "Bahn eines Punktes"

$$P = P(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (1)$$

d. h. eine Abbildung einer Strecke der Zeitachse in den Raum, ist noch zu allgemein. In Abb. 16 ist zu sehen, wie eine Strecke auf eine Strecke (Abb. 16a), auf einen Punkt (Abb. 16b), genauer: auf die einelementige Punktmenge  $\{A'\}$ , bzw. wie eine offene Strecke auf eine Gerade projiziert werden kann (Abb. 16c).



Neben diesen Abbildungen einer Strecke können weitere Beispiele angegeben werden, die mit unseren Vorstellungen von einer "Bahn eines Punktes" nicht zu vereinbaren sind. So lässt sich eine Strecke, die wir als Intervall  $[0, 1]$  einer Zahlengeraden ansehen, eineindeutig auf ein Einheitsquadrat abbilden:

Jedem Punkt  $Z$  der Strecke (Abb. 17a) entspricht eine reelle Zahl  $z$ ; dieser Zahl ordnen wir im Fall  $z \neq 0$  einen Dezimalbruch zu, wobei wir das eindeutig tun können, indem

wir statt der endlichen Dezimalbrüche wie z.B. 0,2 Dezimalbrüche mit der Periode 9 (im Beispiel 0,199...) verwenden:

$$Z \rightarrow z = 0, z_1 z_2 \dots z_n \dots$$

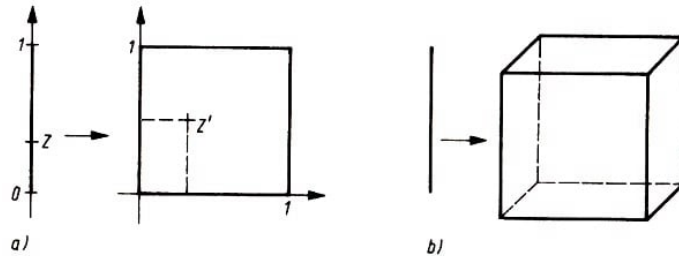


Abb. 17

Dem Dezimalbruch  $0, z_1 z_2 \dots$  ordnen wir ein Paar  $(x, y)$  von reellen Zahlen zu, indem wir Ziffernkolonnen bilden, bei denen einzig die letzte Ziffer von 0 verschieden ist, und aus den Kolonnen mit ungerader bzw. gerader Nummer zwei neue Dezimalbrüche  $x = 0, x_1 x_2 \dots$  und  $y = 0, y_1 y_2 \dots$  bilden; beispielsweise erhalten wir aus

$$z = 0, \underline{350810020004076009} \dots$$

die beiden Dezimalbrüche

$$x = 0, \underline{30800207009} \dots, \quad y = 0, 5100046 \dots$$

Dem Paar  $(x, y)$  entspricht ein Punkt  $Z'$  im Einheitsquadrat der  $x, y$ -Koordinatenebene (Abb. 17a). Indem wir noch  $z = 0$  dem Paar  $(x, y) = (0, 0)$  zuordnen, erhalten wir eine eindeutige Abbildung der Einheitsstrecke auf ein Einheitsquadrat.

Offenbar kann man analog eine Einheitsstrecke auf einen Einheitswürfel eindeutig abbilden (Abb. 17b). Wir bemerken, dass sich eine Strecke sogar eindeutig der Menge aller Punkte des Raumes zuordnen lässt.

Die Abbildungen in den letzten Beispielen sind nicht stetig. Wir können sie ausschließen, wenn wir unter Kurve eine "verbogene Strecke" verstehen, d.h. das Bild einer Strecke bei einer Abbildung  $\varphi$ , bei der es für jeden Punkt  $X$  der Strecke eine Umgebung  $U(X)$  gibt, in der  $\varphi$  eindeutig ist (Abb. 18), und bei der für jedes "Genauigkeitsmaß"  $\varepsilon > 0$  in der Strecke jeder Punkt  $X$  eine Umgebung  $U$  mit  $\varphi(U) \subseteq U_\varepsilon(\varphi(X))$  besitzt (Stetigkeit von  $\varphi$ ) und umgekehrt (Stetigkeit von  $\varphi^{-1}$ ).

Für differentialgeometrische Untersuchungen ist diese Erklärung auch noch zu allgemein; die notwendige Spezialisierung setzt den Begriff des Tangentenvektors voraus (Abb. 19):

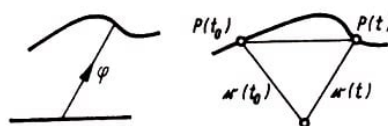


Abb. 18,19

Um einen solchen Vektor in  $P_0 = P(t_0)$  zu erhalten, betrachten wir einen benachbarten Punkt  $P = P(t)$  und bilden

$$\frac{\mathbf{v}(P_0P)}{t - t_0} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \left( \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Existiert  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$ , d.h., dass

$$\dot{x} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad \dot{y} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \quad \dot{z} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0},$$

die erste Ableitung<sup>8</sup> sämtlicher Koordinatenfunktionen, vorhanden sind, dann wird

$$\dot{P}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad (2)$$

Tangentenvektor genannt. Entsprechend sind

$$\ddot{P}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{P}(t) - \dot{P}(t_0)}{t - t_0} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \quad (3)$$

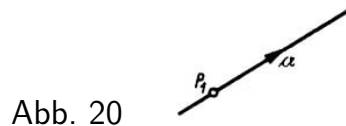
$$\ddot{\ddot{P}}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\ddot{P}(t) - \ddot{P}(t_0)}{t - t_0} = (\ddot{\ddot{x}}(t), \ddot{\ddot{y}}(t), \ddot{\ddot{z}}(t)) \quad (4)$$

erklärt. Wenn  $\dot{P}(t)$ ,  $\ddot{P}(t)$ ,  $\ddot{\ddot{P}}(t)$  existieren und stetig sind, wird  $P = P(t)$  dreimal stetig differenzierbar genannt.

Diese Begriffe gestatten nun, die für die späteren Ausführungen entscheidende Erklärung bezüglich des Kurvenbegriffes auszusprechen; als Variable benutzen wir weiterhin  $t$ , wobei in  $t \in I$  durch  $I$  ein Intervall reeller Zahlen gekennzeichnet wird; wird kein Intervall angegeben, so variiert  $t$  auf der Menge aller reellen Zahlen oder einem (evtl. früher angegebenen) Intervall.

Definition.  $P = P(t)$ ,  $t \in I$ , heißt (zulässige) Parameterdarstellung eines Kurvenstückes genau dann, wenn  $P = P(t)$  für alle  $t \in I$  wenigstens dreimal stetig differenzierbar ist und  $\dot{P}(t) \neq \mathbf{o}$  gilt.

Beispiele



(1.1) Gerade (Abb. 20):  $P(t) = P_1 + t\alpha$ ,  $\alpha \neq \mathbf{o}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Wegen  $P(t) = (x_1 + tx, y_1 + ty, z_1 + tz)$  gilt

$$\dot{P}(t) = (x, y, z) = \alpha \neq \mathbf{o}$$

$$\ddot{P}(t) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$$

$$\ddot{\ddot{P}}(t) = (0, 0, 0) = \mathbf{o}$$

<sup>8</sup>Die Bezeichnung der Ableitungen einer Funktion mit Hilfe von  $\dot{\phantom{x}}$ ,  $\ddot{\phantom{x}}$  usw. geht auf Isaac Newton (1642-1727) zurück, der etwa gleichzeitig mit Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) die Infinitesimalrechnung entwickelt hatte.



d.h., dass eine zulässige Parameterdarstellung vorliegt.

(1.2) Kreis (Abb. 21):  $P(t) = O + r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j}$ ,  $r \neq 0$ . Aus  $P(t) = (r \cos t, r \sin t, 0) = 0 + \mathbf{r}(t)$  folgt

$$\dot{P}(t) = (-r \sin t, r \cos t, 0) = -r \sin t \mathbf{i} + r \cos t \mathbf{j}$$

$$\ddot{P}(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0) = -r \cos t \mathbf{i} - r \sin t \mathbf{j} = -\mathbf{r}(t)$$

$$\ddot{\ddot{P}}(t) = (r \sin t, -r \cos t, 0) = r \sin t \mathbf{i} - r \cos t \mathbf{j}$$

wegen  $\dot{P}^2 = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2$  gilt  $\dot{P} \neq \mathbf{0}$ , so dass auch hier eine zulässige Parameterdarstellung vorliegt.

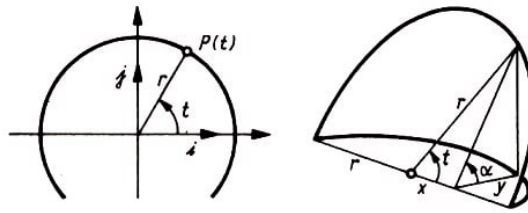


Abb. 21,22

(1.3) Ellipse als Bild eines Kreises bei Parallelprojektion. Setzen wir  $a := r$  und  $b := r \cos \alpha$ , dann gilt zunächst  $x = r \cos t$  und  $y = \cos \alpha \cdot (r \sin t)$  (Abb. 22), d.h.

$$P(t) = (a \cos t, b \sin t, 0) = O + a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$$

Somit erhalten wir

$$\dot{P}(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0) = -a \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j}$$

$$\ddot{P}(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0) = -a \cos t \mathbf{i} - b \sin t \mathbf{j}$$

$$\ddot{\ddot{P}}(t) = (a \sin t, -b \cos t, 0) = a \sin t \mathbf{i} - b \cos t \mathbf{j}$$

wobei  $\dot{P} \neq \mathbf{0}$  ist, denn aus  $\dot{P}^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = 0$  folgte  $a^2 \sin^2 t = b^2 \cos^2 t = 0$ ,  $\sin^2 t = \cos^2 t = 0$  und schließlich  $\sin t = \cos t = 0$  im Widerspruch dazu, dass  $\sin t = 0$  nur für  $t = k\pi$  und  $\cos t = 0$  nur für  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k$  ganze Zahl) gilt.

(1.4) Schraubenlinie (Abb. 23). Da sich die Schraubenlinie auf einem Zylinder vom Radius  $r$  befindet, für den die  $z$ -Achse die Zylinderachse ist, gilt  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  und  $z = ht$  für eine Konstante  $h \neq 0$ , d. h.

$$P(t) = (r \cos t, r \sin t, ht) = O + r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j} + ht \mathbf{k}$$

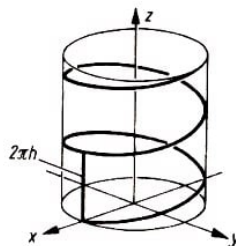


Abb. 23

Auch dieses Beispiel ist eine zulässige Parameterdarstellung, denn es gilt

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= (-r \sin t, r \cos t, h) = -r \sin t \mathbf{i} + r \cos t \mathbf{j} + h \mathbf{k} \\ \ddot{P}(t) &= (-r \cos t, -r \sin t, 0) = -r \cos t \mathbf{i} - r \sin t \mathbf{j} \\ \ddot{\ddot{P}}(t) &= (r \sin t, -r \cos t, 0) = r \sin t \mathbf{i} - r \cos t \mathbf{j}\end{aligned}$$

und

$$\dot{P}^2 = r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + h^2 = r^2 + h^2 \neq 0, \quad \text{d.h. } \dot{P} \neq \mathbf{o}$$

Die Resultate  $\dot{P}$ ,  $\ddot{P}$ ,  $\ddot{\ddot{P}}$  hätten wir rascher gewonnen, wenn wir die Differentiationsregeln für eine Summe bzw. bei einem konstanten Faktor formal auf  $P(t) = P_1 + t\mathbf{a}$  angewandt hätten:  $\dot{P} = \mathbf{a}$ ,  $\ddot{P} = \mathbf{o}$ ,  $\ddot{\ddot{P}} = \mathbf{o}$ .

Dieses Vorgehen wird durch die folgenden Regeln gerechtfertigt:

Für konstante Funktionen  $P(t) = P_1$  bzw.  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$  gilt  $\dot{P}_1 = \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{o}$ . Sind  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ,  $f = f(t)$ ,  $t = t(s)$  differenzierbar, dann gelten die Regeln

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})' &= \dot{\mathbf{a}} \pm \dot{\mathbf{b}} && \text{(Summenregel)} \\ (f\mathbf{a})' &= \dot{f}\mathbf{a} + f\dot{\mathbf{a}} && \text{(Produktregeln)} \\ (\mathbf{a}\mathbf{b})' &= \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} && \text{(Skalarprodukt)} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})' &= \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} && \text{(Kreuzprodukt)} \\ \dot{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= D(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) + D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{c}}) && \text{(Spatprodukt)} \\ \frac{d}{ds}\mathbf{v}(t(s)) &= \dot{\mathbf{v}}\frac{dt}{ds} && \text{(Kettenregel)}\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Regeln erhalten wir aus den entsprechenden Regeln der Differentialrechnung. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\mathbf{b})' &= (a_x(t)b_x(t) + a_y(t)b_y(t) + a_z(t)b_z(t))' \\ &= (\dot{a}_x(t)b_x + a_x\dot{b}_x) + (\dot{a}_y(t)b_y + a_y\dot{b}_y) + (\dot{a}_z(t)b_z + a_z\dot{b}_z) \\ &= (\dot{a}_x(t)b_x + \dot{a}_y(t)b_y + \dot{a}_z(t)b_z) + (a_x\dot{b}_x + a_y\dot{b}_y + a_z\dot{b}_z) = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} \\ \frac{d}{ds}\mathbf{v}(t(s)) &= \left( \frac{d}{ds}x(t(s)), \frac{d}{ds}y(t(s)), \frac{d}{ds}z(t(s)) \right) = \left( \dot{x}\frac{dt}{ds}, \dot{y}\frac{dt}{ds}, \dot{z}\frac{dt}{ds} \right) = \dot{\mathbf{v}}\frac{dt}{ds}\end{aligned}$$

Wie die Beispiele (1.2) und (1.3) lehren, ist eine zulässige Parameterdarstellung im allgemeinen nicht eindeutig. Beispielsweise gilt dort stets  $P(t + 2\pi) = P(t)$ .

Allgemein ist jedoch  $\dot{P}(t) \neq \mathbf{o}$ , d.h., dass für jeden Parameterwert  $t$  wenigstens einer der Funktionswerte  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  bzw.  $\dot{z}(t)$  nicht verschwindet.

Es sei etwa  $\dot{x}(t) \neq 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $\dot{x}(t)$  gibt es zu  $\varepsilon := |\dot{x}(t)| > 0$  eine Umgebung  $U_\delta(t)$  derart, dass aus  $\tau \in U_\delta(t)$

$$|\dot{x}(\tau) - \dot{x}(t)| < |\dot{x}(t)|$$

folgt, dass  $\dot{x}(\tau)$  zwischen 0 und  $2 \cdot \dot{x}(t)$  liegt. Unter dieser Voraussetzung ist  $x(t)$  streng monoton und somit  $P = P(t)$  eindeutig. Insgesamt gilt der

Satz 1.1. Es sei  $P = P(t)$  eine zulässige Parameterdarstellung eines Kurvenstückes. Dann gibt es zu jedem Parameterwert  $t$  eine Umgebung  $U_\delta(t)$  derart, dass  $P = P(\tau)$  für  $\tau \in U_\delta(t)$  eineindeutig ist.

Eine zulässige Parameterdarstellung ist - anders ausgedrückt - im Kleinen umkehrbar eindeutig.

### Aufgaben

1. Man berechne  $\dot{P}, \ddot{P}, \ddot{\ddot{P}}$  für die Parameterdarstellung einer Ellipse aus dem Beispiel (1.3) mit Hilfe obiger Regeln und vergleiche die erhaltenen Ergebnisse mit den früher erhaltenen Resultaten.

2. Ist  $P(t) = O + ti + at^2j$  eine zulässige Parameterdarstellung der Parabel  $y = ax^2$  ?

3\*. Es sei  $P(t) = O + a \cosh ti + h \sinh tj$ .

a) Man zeige, dass die Hyperbelgleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  erfüllt ist.

Anleitung. Die Funktionen  $\cosh$  (cosinus hyperbolicus) und  $\sinh$  (sinus hyperbolicus) sind definiert durch (vgl. Abb. 24)

$$\cosh t := \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad , \quad \sinh t := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

folglich gilt nach den binomischen Formeln  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ .

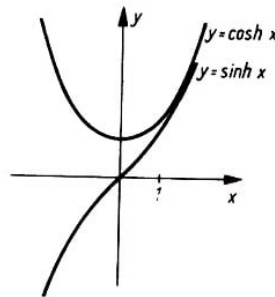


Abb. 24

b) Man berechne  $\dot{P}, \ddot{P}, \ddot{\ddot{P}}$  und prüfe, ob eine zulässige Parameterdarstellung vorliegt. Anleitung. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \frac{d}{dt} \sinh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t \geq 1$$

und folglich  $\dot{P}^2 \geq b^2 \cosh^2 t \geq b^2 > 0$ .

## 1.2 Bogenlänge

Eine Parameterdarstellung eines Kurvenstückes versetzt uns in die Lage, für die Untersuchung seiner Eigenschaften analytische Hilfsmittel wie die Differential- und Integralrechnung einzusetzen. Andererseits besitzen Kurven die verschiedenartigsten Parameterdarstellungen. Neben der Darstellung

$$P(t) = O + a \cos ti + b \sin tj$$

für eine Ellipse kann auch

$$P(t) = O + ti + b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}j \quad -a \leq t \leq a$$

für einen Ellipsenbogen gewählt werden. In dieser Situation können wir Gefahr laufen, eine "Besonderheit", einer Kurve festzustellen, die sich allein aus der gewählten besonderen Parameterdarstellung ergibt. Dieser Gefahr können wir entgehen, indem wir uns auf einen ausgezeichneten, geometrisch erklärten Parameter, die Bogenlänge, beziehen.

An die Definition der Länge eines Bogens  $AB$  bezüglich einer Parameterdarstellung  $P = P(t)$  mit  $A = P(a)$  und  $B = P(b)$  können wir wie folgt herangehen (Abb. 25):

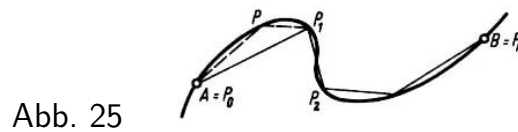


Abb. 25

Wir bilden alle Näherungspolygone  $P_0P_1P_2...P_n$ . Ein Näherungspolygon besitzt die Eigenschaft, dass die den Punkten  $P_0, P_1, ..., P_n$  zugeordneten Parameterwerte  $t_0, t_1, ..., t_n$  streng monoton geordnet sind:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b \quad (5)$$

umgekehrt, bestimmt jede Zerlegung (5) ein Näherungspolygon  $P_0P_1P_2...P_n$ . Bezeichnen wir die Zerlegung (5) mit  $\mathbf{Z}$  und setzen wir  $\mathbf{v}_k := \mathbf{v}(P_{k-1}P_k)$ , dann können wir die Länge  $l_{\mathbf{Z}}$  des Näherungspolygons  $P_0P_1P_2...P_n$  in der Form

$$l_{\mathbf{Z}} = \sum_{k=1}^n |\mathbf{v}_k|$$

angeben.

Die Wahl eines Zwischenpunktes  $P$  (vgl. Abb. 25) führt nach der Dreiecksungleichung - in Abb. 25 etwa  $|\mathbf{v}_1| \leq |\mathbf{v}(P_0P)| + |\mathbf{v}(PP_1)|$  - zu einem Näherungspolygon größerer (evtl. auch gleicher) Länge. Somit wird man die kleinste obere Schranke, die obere Grenze für die Längen sämtlicher Näherungspolygone als Länge  $l_{\widehat{AB}}$  des Bogens  $\widehat{AB}$  ansehen:

$$l_{\widehat{AB}} := \sup_{\mathbf{Z}} l_{\mathbf{Z}}$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz der oberen Grenze ist für eine nichtleere Menge reeller Zahlen die Existenz einer oberen Schranke. Wir wollen uns die geistreiche Konstruktion eines Kurvenbogens ohne Länge versagen, jedoch die sogenannte Rektifizierbarkeit<sup>9</sup> bei zulässiger Parameterdarstellung beweisen: Gilt  $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,

<sup>9</sup>Rektifizierbar heißt sinngemäß streckbar. Nicht rektifizierbare Bögen befinden sich z.B. auf der von Kochschen Kurve (vgl. [B]).

dann können wir die Koordinaten von  $\mathbf{v}_k$  nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ausdrücken:

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})\dot{x}(\xi_k), & t_{k-1} < \xi_k < t_k \\ y(t_k) - y(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})\dot{y}(\eta_k), & t_{k-1} < \eta_k < t_k \\ z(t_k) - z(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})\dot{z}(\zeta_k), & t_{k-1} < \zeta_k < t_k \end{aligned}$$

Als stetige Funktionen nehmen  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  und  $\dot{z}$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  ihr Maximum und ihr Minimum an; mit der Konstanten  $K := \max(\max \dot{x}, \max \dot{y}, \max \dot{z})$  gilt

$$|\dot{P}| = |(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \leq K\sqrt{3}$$

für  $t \in [a, b]$ . Es folgt

$$l_{\mathbf{z}} = \sum_{k=1}^n |\mathbf{v}_k| = \sum_{k=1}^n |(\dot{x}(\xi_k), \dot{y}(\eta_k), \dot{z}(\zeta_k))| \leq K\sqrt{3} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = K\sqrt{3}(b - a) \quad (6)$$

d. h., dass  $P = P(t)$  rektifizierbar ist.<sup>10</sup>

Die Formelzeile (6) führt zu der Vermutung

$$l_{AB} = \int_a^b |\dot{P}| dt \quad (7)$$

die auch bewiesen werden kann; wir verzichten hier darauf.

Die Anwendung von (7) ergibt im Fall des Kreises (vgl. Beispiel (1.2)) mit  $a = 0$  und  $b = 2\pi$  dessen Umfang

$$\int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

und im Fall der Schraubenlinie

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{r^2 + h^2}$$

Dieses Resultat erhalten wir elementargeometrisch, wenn wir den Zylindermantel mit der Schraubenlinie in eine Ebene abwickeln: das fragliche Kurvenstück geht in die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über, dessen Katheten die Längen  $2\pi r$  und  $2\pi h$  (Ganghöhe) besitzen; nach dem Satz des Pythagoras<sup>11</sup> erhalten wir wiederum  $2\pi \sqrt{r^2 + h^2}$ .

Wir betrachten jetzt die Funktion

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\dot{P}(\tau)| d\tau \quad (8)$$

<sup>10</sup>Für diesen Beweis haben wir nicht dreimal stetige Differenzierbarkeit, sondern nur einmal stetige Differenzierbarkeit benötigt. Folglich sind schon alle glatten Kurven rektifizierbar.

<sup>11</sup>Pythagoras von Samos (580?-500? v.u.Z.).

Wegen  $\dot{s}(t) = |\dot{P}| > 0$  ist diese Funktion streng monoton wachsend, und es existiert stets eine Umkehrfunktion

$$t = t(s) \quad (9)$$

die dreimal stetig differenzierbar ist, denn nach der Kettenregel erhalten wir (im Gegensatz zu den Ableitungen nach  $t$  gebrauchen wir zur Bezeichnung der Ableitungen nach  $s$  den sonst üblichen  $'$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= t'(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{|\dot{P}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{P}\dot{P}}} = (\dot{P}\dot{P})^{-1/2} \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= t''(s) = -\frac{1}{2}(\dot{P}\dot{P})^{-3/2} \cdot 2\dot{P}\ddot{P} \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{\dot{P}\ddot{P}}{(\dot{P}\dot{P})^2} \\ \frac{d^3t}{ds^3} &= t'''(s) = \frac{4(\dot{P}\ddot{P})^2 - (\ddot{P}^2 + \dot{P}\ddot{P})\dot{P}^2}{(\dot{P}\dot{P})^3\sqrt{\dot{P}\dot{P}}} \end{aligned}$$

In Bezug auf das Beispiel (1.2) erhalten wir<sup>12</sup>  $s(t) = rt$  und  $t = \frac{s}{r}$ , so dass sich durch Einsetzen und Differenzieren

$$\begin{aligned} \bar{P}(s) &= O + r \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} + r \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \\ \bar{P}'(s) &= -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j} \neq \mathbf{0} \\ \bar{P}''(s) &= -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \\ \bar{P}'''(s) &= -\frac{1}{r^2} \sin \frac{s}{r} \mathbf{i} - \frac{1}{r^2} \cos \frac{s}{r} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

ergibt, d. h. eine zulässige Parameterdarstellung.

Schließlich ist

$$\bar{P}(s) := P(t(s)), \quad s(t_1) \leq s \leq s(t_2) \quad (11)$$

stets eine zulässige Parameterdarstellung mit dem natürlichen Parameter  $s$  bzw. eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge  $s$ . Zum Beweis dieser Behauptung differenzieren wir  $\bar{P}(s)$ :

$$\begin{aligned} \bar{P}'(s) &= \dot{P} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{P}}{|\dot{P}|} \neq \mathbf{0} \\ \bar{P}''(s) &= \ddot{P} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{P} \frac{d^2t}{ds^2} \\ \bar{P}'''(s) &= \ddot{P} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\ddot{P} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \dot{P} \frac{d^3t}{ds^3} \end{aligned}$$

Die allgemeinen Aussagen, die sich auf die Existenz einer Umkehrfunktion stützen, sind - wie wir später erkennen werden - für die Lösung theoretischer und praktischer Aufgaben von großer Bedeutung. Um ihre spätere Anwendung zu erleichtern, sollen

<sup>12</sup>Hier wird wie meist auch später auf additive Konstanten verzichtet.

hier noch zwei Folgerungen herausgestellt werden:

1. Offenbar ist  $\bar{P}'(s)$  für alle  $s$  ein Einheitsvektor; gilt umgekehrt  $|\dot{P}(t)| = 1$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , dann gilt  $s = t$  nach (8); zusammenfassend formulieren wir das

Kriterium 1.2. Bezüglich der Parameterdarstellung  $P = P(t)$  ist  $t$  genau dann gleich der Bogenlänge  $s$ , wenn  $|\dot{P}(t)| = 1$  gilt.

2. Auch wenn sich die Integration (8) nicht elementar ausführen lässt, kann  $\bar{P}''(s)$  aus einer gegebenen Parameterdarstellung berechnet werden. Unter Berücksichtigung der Resultate für  $\frac{dt}{ds}$  und  $\frac{d^2t}{ds^2}$  gilt

$$\bar{P}''(t) = \frac{1}{\dot{P}^2} \left( \ddot{P} - \frac{\dot{P}\ddot{P}}{\dot{P}\dot{P}} \dot{P} \right) \quad (12)$$

Aufgaben

1. Man gebe für die Schraubenlinie (vgl. Beispiel (1.4)) eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge an und berechne  $\bar{P}'(s)$  und  $\bar{P}''(s)$ .

2. Man berechne  $\bar{P}''(s)$  an der Stelle  $t = 0$

a) für eine Ellipse nach Beispiel (1.2),

b\*) für eine Parabel bzw. eine Hyperbel nach Aufgabe 2 bzw. 3\* des Abschnitts 1.1.

### 1.3 Begleitendes Dreibein und Frenetsche Formeln

Für viele Untersuchungen einer Kurve ist es vorteilhaft, in jedem Punkt ein Koordinatensystem einzuführen, das dem Verlauf der Kurve angepasst ist. Bei wachsendem Parameter drängt sich die Vorstellung von einem die Kurve "begleitenden Dreibein" auf.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts dürfen wir von einer Darstellung  $P = P(s)$  mit dem natürlichen Parameter  $s$  ausgehen. Folglich gilt für den Einheitsvektor  $P'(s)$  offenbar

$$P'(s) \cdot P'(s) = 1$$

daraus folgt

$$P''(s) \cdot P'(s) + P'(s) \cdot P''(s) = 0 \quad \text{d. h.} \quad P'(s) \cdot P''(s) = 0$$

Im Fall  $P''(s) \neq 0$  definieren wir das begleitende Dreibein im Punkt  $P(s)$ :

$$\mathbf{t}(s) := P'(s) \quad (\text{Tangentenvektor})$$

$$\mathbf{n}(s) := \frac{P''(s)}{|P''(s)|} \quad (\text{Normalenvektor, 13})$$

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) \quad (\text{Binormalenvektor})$$

Wegen  $P'P'' = 0$  gilt  $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$ . Somit stehen diese Einheitsvektoren paarweise aufeinander senkrecht, und sie bilden ein Rechtssystem (Abb. 26).

Abb. 26



Der Name Tangentenvektor ist gerechtfertigt, da es sich um einen Richtungsvektor der Tangente in  $P(s)$  handelt. Außerdem wird eine zur Tangente senkrechte Gerade Normale genannt; daher erklärt sich die Benennung von  $\mathbf{n}(s)$  und  $\mathbf{b}(s)$ .

Neben dem Hauptfall  $P''(s) \neq \mathbf{0}$  haben wir noch den Fall  $P''(s) = \mathbf{0}$  zu untersuchen. Gilt  $P''(s) = \mathbf{0}$  einem  $s$ -Intervall  $I$ , dann muss  $P'(s) = \mathbf{c}$  mit einem konstanten Einheitsvektor  $\mathbf{c}$  und folglich

$$P(s) = P_1 + s\mathbf{c} \quad (\text{Strecke})$$

gelten. Da umgekehrt  $P'(s) = \mathbf{0}$  für Geraden gilt (vgl. Beispiel (1.1) mit einem Einheitsvektor  $\mathbf{a}$ ), ist  $P'(s) = \mathbf{0}$ ,  $s \in I$ , kennzeichnend für den geradlinigen Verlauf.

Gilt jedoch  $P''(s_0) = \mathbf{0}$  und mit Ausnahme von  $s_0$  in einer Umgebung von  $s_0$  stets  $P''(s) \neq \mathbf{0}$ , dann sind Sonderbetrachtungen notwendig; mitunter kann für solche Punkte auch ein Dreiein in einer befriedigenden Art und Weise festgelegt werden (vgl. Beispiel (1.8)).

Zusammenfassend können wir feststellen, dass ein begleitendes Dreiein  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  existiert, wenn

$$k(s) := |P''(s)| \quad (14)$$

die Krümmung oder Flexion in  $P(s)$ , nicht verschwindet.

Um die für die Definition des begleitenden Dreieins wesentlichen Vektoren  $P'(s)$  und  $P''(s)$  zu deuten, denken wir bei  $P = P(s)$  wieder an die "Bahn eines Punktes" im Raum. Dann stellt  $P'(s)$  einen Geschwindigkeitsvektor mit dem konstanten Betrag 1 dar.

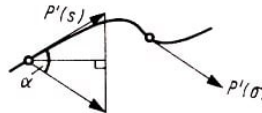


Abb. 27

Wegen (Abb. 27)

$$\frac{|P'(\sigma) - P'(s)|}{|\sigma - s|} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{|\sigma - s|} \approx \frac{\alpha}{|\sigma - s|}$$

und

$$\lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{P'(\sigma) - P'(s)}{\sigma - s} = P''(s)$$

gilt

$$|P''(s)| = \omega := \lim_{\sigma \rightarrow s} \frac{\alpha}{\sigma - s}$$

d. h., dass  $|P''(s)|$  eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ausdrückt, wegen  $\mathbf{b} \perp P'(s)$ ,  $P''(s)$  wird dabei die Binormale  $P = P(s) + t\mathbf{b}$  als Drehachse betrachtet. Der Vektor  $P''(s)$  selbst kann als Änderungsgeschwindigkeit von  $P'(s)$  gedeutet werden.



Dabei kennzeichnet  $|P''(s)| = 0$  für ein Intervall geradlinigen Verlauf, während  $|P''(s)|$  sonst als Maß für die Abweichung vom geradlinigen Verlauf angesehen werden kann. Für einen Kreis erhalten wir nach (10) offensichtlich

$$k(s) = |\overline{P}''(s)| = \frac{1}{r}$$

d. h., dass die Krümmung eines Kreises konstant und in Übereinstimmung mit unserer Anschauung umgekehrt proportional seinem Radius ist.

Durch obige Überlegungen angeregt, fragen wir nach der Änderung der Vektoren des begleitenden Dreibeins beim Fortschreiten auf der Kurve. Dazu machen wir folgenden Ansatz, wobei wir statt  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  kurz  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= a_{11}\mathbf{t} + a_{12}\mathbf{n} + a_{13}\mathbf{b} \\ \mathbf{n}'(s) &= a_{21}\mathbf{t} + a_{22}\mathbf{n} + a_{23}\mathbf{b} \\ \mathbf{b}'(s) &= a_{31}\mathbf{t} + a_{32}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten steht uns die Gleichungskette  $\mathbf{t}'(s) = P''(s) = k\mathbf{n}$ , d. h.  $a_{11} = a_{13} = 0$  und  $a_{12} = k$ , zur Verfügung. Da  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  ein Dreibein ist ( $\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$  und  $\mathbf{t}\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{t} = 0$ ), können wir nach  $a_{ik}$  auflösen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{t}'\mathbf{t} = 0, & a_{12} &= \mathbf{t}'\mathbf{n} = k, & a_{13} &= \mathbf{t}'\mathbf{b} = 0 \\ a_{21} &= \mathbf{n}'\mathbf{t}, & a_{22} &= \mathbf{n}'\mathbf{n}, & a_{23} &= \mathbf{n}'\mathbf{b}, & a_{31} &= \mathbf{b}'\mathbf{t}, & a_{32} &= \mathbf{b}'\mathbf{n}, & a_{33} &= \mathbf{b}'\mathbf{b} \end{aligned}$$

Wegen  $\mathbf{t}\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathbf{n} = \mathbf{b}\mathbf{b} = 1$  gilt  $\mathbf{t}'\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{t}' = 0$ , d.h.  $\mathbf{t}\mathbf{t}' = \mathbf{b}\mathbf{n}' = \mathbf{b}\mathbf{b}' = 0$ .

Aus  $\mathbf{t}\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{t} = 0$  folgt  $\mathbf{t}'\mathbf{n} + \mathbf{t}\mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{n}'\mathbf{b} + \mathbf{n}\mathbf{b}' = 0$  und  $\mathbf{b}'\mathbf{t} + \mathbf{b}\mathbf{t}' = 0$ , d.h.  $a_{12} = -a_{21}$ ,  $a_{23} = -a_{32}$  und  $a_{13} = -a_{31}$ .

Damit sind bis auf  $a_{23}$  und  $a_{32}$  alle Koeffizienten bestimmt. Mit der Festlegung

$$w(s) := \mathbf{n}'\mathbf{b} = -\mathbf{n}\mathbf{b}' \quad (17)$$

Windung oder Torsion in  $P(s)$ , erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}' &= k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -k\mathbf{t} + w\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -w\mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

die Frenetschen Formeln, wobei sämtliche Koeffizienten und Vektoren Funktionen von  $s$  sind. '

Entdeckt wurden diese Formeln 1847 von F. J. Frenet (1816-1868, veröffentlicht 1852) und 1851 von A. Serret (1819-1885). Sie bilden eines der wichtigsten Hilfsmittel bei der Lösung der Aufgaben der Kurventheorie.

Da  $k(s) = 0$  für ein Intervall geradlinigen Verlauf kennzeichnet, liegt es nahe, für  $w(s) = 0$ ,  $s \in I$ , eine geometrische Deutung zu suchen:

In  $I$  ergibt sich der Reihe nach, dass  $\mathbf{b}' = \mathbf{o}$  gilt und  $\mathbf{b}$  ein konstanter Einheitsvektor  $\mathbf{c}$  ist. Aus  $P'(s) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}\mathbf{b} = 0$  bzw.  $\mathbf{r}'(s)\mathbf{c} = 0$  erhalten wir durch Integration  $(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0)\mathbf{c} = \mathbf{c}$ ,

wobei sich für die Konstante  $c$  stets ein Vektor  $\mathbf{c}_0$  mit  $\mathbf{c}_0 \mathbf{c} = c$  finden lässt. Das ergibt mit  $\mathbf{c}_1 := \mathbf{r}_0 + \mathbf{c}_0$

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{c}_1) \mathbf{c} = 0$$

d. h., dass  $P(s)$  in einer Ebene  $\varepsilon$  durch den Punkt  $P_1 := O + \mathbf{c}_1$  liegt, für die  $\mathbf{c}$  ein Normalvektor ist (Abb. 28).

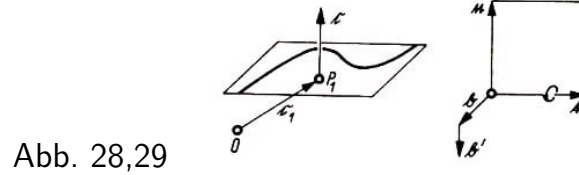


Abb. 28,29

Ist umgekehrt  $P = P(s)$  für  $s \in I$  eine ebene, aber nicht geradlinige Kurve, dann gibt es zueinander senkrechte Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  mit

$$P(s) = P_1 + a_1(s)\mathbf{e}_1 + a_2(s)\mathbf{e}_2$$

folglich sind  $\mathbf{t}(s) = P'(s)$ ,  $P''(s)$  und somit auch  $\mathbf{n}(s)$  und  $\mathbf{n}'(s)$  Linearkombinationen von  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$ :

$$\begin{aligned} P'(s) &= a_1'(s)\mathbf{e}_1 + a_2'(s)\mathbf{e}_2 = \mathbf{t}(s), \\ P''(s) &= a_1''(s)\mathbf{e}_1 + a_2''(s)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{a_1''}{\sqrt{a_1''^2 + a_2''^2}}\mathbf{e}_1 + \frac{a_2''}{\sqrt{a_1''^2 + a_2''^2}}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Wir können von der Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  der betrachteten Ebene zur Basis  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  übergehen, so dass  $\mathbf{n}'(s)$  als Linearkombination von  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  eine Linearkombination von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  allein sein muss.

Nach den Frenetschen Formeln ist das nur für  $w(s) = 0$  möglich. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass  $w(s) = 0$ ,  $s \in I$ , für ebenen Verlauf kennzeichnend ist.

Allgemein wird man  $w(s)$  als Maß für die Abweichung vom ebenen Verlauf auffassen. Die Windung kann ähnlich der Krümmung (vgl. (15)) als Winkelgeschwindigkeit gedeutet werden (Abb. 29):

Dort war  $k(s) = |P''(s)| = |\mathbf{t}'(s)| = |k(s)\mathbf{n}|$ ; wegen  $\mathbf{b}'(s) = -w(s)\mathbf{n}$  können wir die Änderung der Binormalen als Drehung um die Tangente deuten, die gleichzeitig Drehung der von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannten Ebene ist. Somit kennzeichnet  $w(s)$  das "Herauswinden" der Kurve aus dieser Ebene. (Auf die Deutung des Vorzeichens von  $w(s)$  gehen wir im Abschnitt 1.5 noch ein.)

### Aufgabe

Man bestimme das begleitende Dreiein

- eines Kreises mit Hilfe von (10),
- einer Schraubenlinie (vgl. Beispiel (1.4) und (12), wobei wegen  $\dot{P}\ddot{P} = 0$  hier  $\mathbf{t} = |\dot{P}|^{-1}\dot{P}$  und  $\mathbf{n} = |\ddot{P}|^{-1}\ddot{P}$  gilt).

## 1.4 Krümmung und Windung einiger spezieller Kurven

Beispiele

(1.5) Gerade:  $P(s) = P_1 + s\mathfrak{a}$ ,  $|\mathfrak{a}| = 1$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Wegen  $P'(s) = \mathfrak{a}$  und  $P''(s) = \mathfrak{o}$  gilt

$$k(s) = 0 \quad , \quad w(s) := 0$$

(1.6) Kreis:  $P(s) = O + r \cos \frac{s}{r} \mathfrak{i} + r \sin \frac{s}{r} \mathfrak{j}$ ,  $r > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Nach (10) gilt außerdem  $P''(s) = -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \mathfrak{i} - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \mathfrak{j}$ , und folglich  $|P''(s)| = \frac{1}{r}$  für diese ebene Kurve konstant, d. h.

$$k(s) = \frac{1}{r} \quad , \quad w(s) = 0$$

(1.7) Krümmung einer Ellipse in ihren Scheiteln (vgl. Beispiel (1.3)). Aus  $P(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$ ,  $\dot{P}(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0)$  und  $\ddot{P}(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0)$  können wir, obwohl

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \cos^2 \tau} d\tau$$

nicht elementar ausgewertet werden kann, mit Hilfe von (12) die gestellte Aufgabe lösen:

$$\overline{P}''(0) = \frac{1}{\dot{P}^2} \left( \ddot{P} - \frac{\dot{P} \ddot{P}}{\dot{P}^2} \dot{P} \right) = \frac{1}{b^2} (-a\mathfrak{i} - 0 \cdot b\mathfrak{j}) = -\frac{a}{b^2} \mathfrak{i}$$

Daraus erhalten wir  $k(0) = \frac{a}{b^2}$ . Im Punkt  $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ergibt sich analog  $\frac{b}{a^2}$  für die Krümmung.

(1.8) Krümmung der Parabel  $y = ax^2$  im Scheitel (vgl. Aufgabe 2 zu Abschnitt I.I). Wegen

$$\begin{aligned} P(t) &= (t, at^2, 0) \\ \dot{P}(t) &= (1, 2at, 0), & \dot{P}(0) &= (1, 0, 0) \\ \ddot{P}(t) &= (0, 2a, 0), & \ddot{P}(0) &= (0, 2a, 0) \end{aligned}$$

gilt  $\dot{P}(0) \cdot \dot{P}(0) = 1$ ,  $\dot{P}(0) \cdot \ddot{P}(0) = 0$  und somit

$$\overline{P}''(0) = 1 \cdot \ddot{P}(0) = (0, 2a, 0)$$

Als gesuchte Krümmung ergibt sich  $k(0) = 2|a|$ .

(1.9) Verschwindende Krümmung in einem isolierten Punkt. Bei der biquadratischen Parabel  $y = x^4$  (Abb. 30) erhalten wir aus der Parameterdarstellung  $P(t) = (t, t^4, 0)$

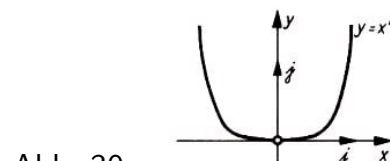


Abb. 30

$$\dot{P}(t) = (1, 4t^3, 0), \quad \dot{P}^2 = 1 + 16t^2, \quad \ddot{P}(t) = (0, 12t^2, 0), \quad \dot{P}\ddot{P} = 48t^5$$

Wegen der Darstellung

$$\begin{aligned} \overline{P}''(t) &= \frac{1}{1 + 16t^2} \left( \ddot{P} - \frac{48t^5}{1 + 16t^6} \dot{P} \right) = \left( -\frac{48t^5}{(1 + 16t^6)^2}, \frac{12t^2(1 + 16t^6) - 48t^5 \cdot 4t^3}{(1 + 16t^6)^2}, 0 \right) \\ &= \frac{12t^2}{(1 + 16t^6)^2} (-4t^3, 1, 0) \end{aligned}$$

gilt  $\overline{P}''(t) = 0$  genau dann, wenn  $t = 0$  ist. Somit verschwindet die Krümmung lediglich für  $t = 0$ , d. h. im Ursprung.

An der Stelle  $t = 0$  lässt sich folgendermaßen das begleitende Dreibein erklären:  $\mathbf{t} = \mathbf{i}$ ,

$$\mathbf{n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{P}''}{|\overline{P}''|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4t^3\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{16t^6 + 1}} = \mathbf{j}$$

und damit  $\mathbf{b} = \mathbf{k}$ .

(1.10) Schraubenlinie. Ebenso wie Gerade und Kreis besitzt eine Schraubenlinie konstante Krümmung und Windung (vgl. Beispiel (1.4)):

$$k(s) = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad w(s) = \frac{h}{r^2 + h^2} \quad (19)$$

Dabei kennzeichnet  $w > 0$  (bzw.  $h > 0$ ) eine Rechtsschraube (Abb. 23) und  $w < 0$  (bzw.  $h < 0$ ) eine Linksschraube. Den rechnerischen Nachweis der Gültigkeit dieser Formeln überlassen wir dem Leser als Aufgabe.

### Aufgaben

1. Man berechne für eine Schraubenlinie Krümmung und Windung, indem man auf der Grundlage der Resultate der Aufgabe 1 zu Abschnitt 1.2 eine Darstellung mit dem natürlichen Parameter  $s$  benutzt.
2. Man zeige für eine kubische Parabel  $y = x^3$ , dass
  - a) nur im Ursprung die Krümmung verschwindet - und dass
  - b) in diesem Punkt (sogenannter Wendepunkt) keine sinnvolle (d.h. stetig differenzierbare) Festlegung des begleitenden Dreibeins möglich ist. Vgl. dazu Beispiel (1.9)!

## 1.5 Weitergehende Deutung von Krümmung und Windung

Gegeben sei die Parameterdarstellung  $P = P(s)$  einer Kurve.

A. Krümmung. Wir suchen im Fall  $k(s_0) \neq 0$  einen Kreis, der die Kurve in  $P(s_0)$  möglichst gut annähert. Für ihn ist vor allem der Mittelpunkt  $M$  gesucht; denn mit  $M$  erhalten wir den Radius  $r = |\mathbf{p}(MP(s_0))|$ , und wegen der geforderten Annäherung muss der Kreis in der von  $M$  und der Kurventangente in  $P(s_0)$  bestimmten Ebene liegen.

Im folgenden sehen wir zunächst  $M$  und damit  $r$  als gegeben an und betrachten die Funktion (Abb. 31 a)

$$f(s) := (\mathbf{v}(MP(s)))^2 - r^2$$

sie stellt ein gewisses Maß für die Abweichung des Abstands der Punkte  $M$  und  $P(s)$  von  $r$ , d. h. für die Abweichung der Kurve von der Kugel  $K(M, r)$  um  $M$  mit dem Radius  $r$  dar. Gemäß Taylorentwicklung liegt gute Berührung vor, wenn

$$f(s_0) = 0 \quad , \quad f^{(\nu)}(s_0) = 0$$

für möglichst viele  $\nu = 1, 2, \dots$  gilt. Sind  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{r}(s)$  die Ortsvektoren von  $M$  bzw.  $P(s)$ , dann können diese Forderungen unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln umformuliert werden. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} f(s) &= (\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})^2 - r^2 \\ f'(s) &= 2(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{r}'(s) = 2(\mathbf{r}_s - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{t} \\ f''(s) &= 2\mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{t} + 2(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})\mathbf{t}' = 2 + 2k(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})\mathbf{n} \\ f'''(s) &= 2[k'(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})\mathbf{n} + k\mathbf{t}\mathbf{n} + k(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})(-k\mathbf{t} + w\mathbf{b})] = 2(\mathbf{r}(s) - \mathbf{m})[-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + kw\mathbf{b}] \\ &\dots \end{aligned}$$

Die beiden ersten Forderungen ergeben

$$\begin{aligned} f(s_0) &= (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m})^2 - r^2 = 0, \quad \text{d. h. } P(s_0) \in K(M, r) \\ f'(s_0) &= 2(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \text{d. h. } \mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m} \perp \mathbf{t} \end{aligned}$$

Wir machen den Ansatz  $\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m} = x\mathbf{n}(s_0) + y\mathbf{b}(s_0)$  und erhalten nach der dritten Forderung

$$f''(s_0) = 2(1 + k(x\mathbf{n} + y\mathbf{b})\mathbf{n}) = 2(1 + kx) = 0$$

d. h. sofort

$$x = -\frac{1}{k(s_0)}$$

Die vierte Forderung führt über

$$f'''(s_0) = 2\left(-\frac{1}{k}\mathbf{n} + y\mathbf{b}\right)[-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + kw\mathbf{b}] = 2\left(-\frac{k'}{k} + kwy\right) = 0$$

zur Bestimmung von  $y$ :

$$y = \begin{cases} \frac{k'}{k^2w} & \text{für } w(s_0) \neq 0 \\ \text{beliebig} & \text{für } w(s_0) = k'(s_0) = 0 \end{cases}$$

dagegen lässt sich die vierte Bedingung für  $w(s_0) = 0$  und  $k'(s_0) \neq 0$  nicht erfüllen.

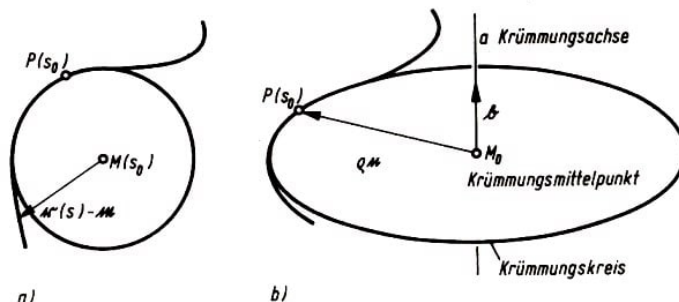


Abb. 31

Die Mittelpunkte aller Kugeln mit  $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$  genügen nach obigem Ansatz der Gleichung

$$M = P(s_0) + \frac{1}{k}\mathbf{n} - y\mathbf{b}$$

sie liegen auf der Geraden  $a$  durch  $M(s_0) := P(s_0) + \frac{1}{k}\mathbf{n}$  mit dem Richtungsvektor  $\mathbf{b}$  (Abb. 31 b). Die Gerade  $a$  wird Krümmungsachse genannt. Sie ist parallel zur Binormalen der Kurve in  $P(s_0)$ .

In allen Kugeln mit  $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ , d. h. in allen Kugeln durch  $P(s_0)$  mit  $M \in a$  liegt ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $M_0 = M(s_0)$ , der Krümmungskreis (Abb. 31b).  $M_0 = M(s_0)$  heißt Krümmungsmittelpunkt und  $\rho(s_0) := \frac{1}{k(s_0)}$  Krümmungsradius.

In Verallgemeinerung des Zusammenhanges von Krümmung und Radius eines Kreises gilt der

Satz 1.3. Die Krümmung  $k(s)$  einer Kurve ist gleich dem Kehrwert des Krümmungsradius  $\rho(s)$ , d. h.

$$k(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises

$$M(s) = P(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s) = P(s) + \rho^2(s)P''(s)$$

ist zur Angabe einer Gleichung für ihn bedeutsam ( $\rho, k, \mathbf{t}, \mathbf{n}$  an der Stelle  $s_0$ ):

$$K(s) = M(s_0) + \rho \sin k(s - s_0)\mathbf{t} - \rho \cos k(s - s_0)\mathbf{n}$$

Der Krümmungskreis berührt die Kurve in  $P(s_0)$  von mindestens zweiter Ordnung, denn es gilt

$$\begin{aligned} K(s_0) &= M(s_0) - \rho\mathbf{n} = P(s_0), \\ K'(s_0) &= \cos k(s_0 - s_0)\mathbf{n} + \sin k(s_0 - s_0)\mathbf{t} = \mathbf{t} = P'(s_0), \\ K''(s_0) &= -k \sin k(s_0 - s_0)\mathbf{t} + k \cos k(s_0 - s_0)\mathbf{n} = k\mathbf{n} = P''(s_0). \end{aligned}$$

Eine Kugel mit Berührung von wenigstens dritter Ordnung existiert für  $w(s_0) \neq 0$  oder  $w(s_0) = k'(s_0) = 0$ . Ihr Mittelpunkt ist

$$M = P(s_0) + \frac{1}{k}\mathbf{n} - \frac{k'}{k^2 w}\mathbf{b}, \quad w(s_0) \neq 0$$

bzw.

$$M = P(s_0) + \frac{1}{k}\mathbf{n} - y\mathbf{b}, \quad w(s_0) = k'(s_0) = 0, \quad y \text{ beliebig.}$$

Solche Kugeln heißen Schmiegekugeln.

Der Krümmungsmittelpunkt bezüglich eines Punktes eines Kreises ist offensichtlich der Kreismittelpunkt. Für die Scheitel einer Ellipse (vgl. Beispiel (1.7)) führt die Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte zu folgendem Ergebnis:

Wegen  $k(0) = \frac{a}{b^2}$  und  $\mathbf{n}(0) = -\mathbf{i}$  erhalten wir

$$M(0) = P(0) + \rho \mathbf{n} = O + a\mathbf{i} - \rho\mathbf{i} = O + \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\mathbf{i}$$

Dieser Punkt lässt sich durch eine einfache Konstruktion ermitteln (Abb. 32 a): Wegen der Ähnlichkeit der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke bestehen die Proportionen

$$\frac{u}{b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{v}{a} = \frac{a}{b}$$

d.h.  $u = \frac{b^2}{a} = \rho(0)$  und  $v = \frac{a^2}{b} = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Das Lot vom Punkt  $(a, b)$  auf die Verbindungsgerade der Punkte  $P(0)$  und  $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$  trifft die Achsen in den gesuchten Krümmungsmittelpunkten.

Die Krümmungskreise in den Scheiteln sind ein wichtiges Konstruktionshilfsmittel für das Ziehen einer Ellipse; denn werden um die Krümmungsmittelpunkte diese Kreise als Hilfslinien geschlagen (Abb. 32 b), dann kann mit dem Kurvenlineal bereits eine formschöne Näherungskurve für die Ellipse ausgezogen werden.

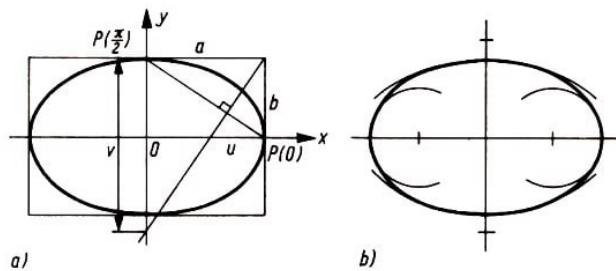


Abb. 32

B. Windung. Um im Fall  $k(s_0) > 0$  und  $w(s_0) \neq 0$  Krümmung und Windung der Kurve zu deuten, fragen wir nach einer Schraubenlinie, welche die Kurve wie der Krümmungskreis von wenigstens zweiter Ordnung berührt; denn die konstante Windung der Schraubenlinie darf als Prototyp der Windung aufgefasst werden.

Zuerst leiten wir noch einige Formeln über die Schraubenlinie

$$S(s) = O + r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} + r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} + \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{k} \quad (20)$$

her. Für jede Kurve ist das begleitende Dreiein ein ausgezeichnetes Koordinatensystem. Um die Achse der Schraubenlinie mit seiner Hilfe zu beschreiben, stellen wir fest, dass  $\mathbf{k}$  wegen  $\mathbf{k} \perp \mathbf{n}$  eine Linearkombination von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  sein muss (Abb. 33).

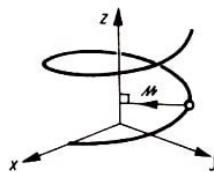


Abb. 33

Zur Berechnung der Koeffizienten werden die Vektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{t}$  benötigt:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} = S' &= -\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} + \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{k} \\ S'' &= -\frac{r}{r^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} - \frac{r}{r^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} \\ \mathbf{n} = \frac{P''}{|P''|} &= -\cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} \\ \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{k}\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$k = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad w = \frac{h}{r^2 + h^2}$$

(vgl. (19) im Beispiel (1.10)) gilt

$$w\mathbf{t} + k\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{t} \quad (21)$$

Wir suchen eine Schraubenlinie  $P = S(s)$ , die  $P = P(s)$  im Punkt  $P(s_0)$  gut annähert. Später können wir zeigen, dass es auf eine Lösung des folgenden Gleichungssystems (der Index  $S$  weist dabei auf die Schraubenlinie hin)

$$\begin{aligned}S(0) &= P(s_0), \quad \mathbf{t}_S(0) = \mathbf{t}(s_0), \quad \mathbf{n}_S(0) = \mathbf{n}(s_0) \Rightarrow \mathbf{b}_S(0) = \mathbf{b}(s_0) \\ k_S(0) &= k := k(s_0), \quad w_S(0) = w := w(s_0)\end{aligned}$$

zutrifft. Nach (20) sind ein geeignetes Koordinatensystem  $O$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sowie  $r$  und  $h$  zu bestimmen. Aus (19) folgt

$$k^2 + w^2 = \frac{1}{h^2 + h^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + w^2}}$$

nach (21) gilt demzufolge

$$\mathbf{k} = \frac{w\mathbf{t} + k\mathbf{b}}{\sqrt{k^2 + w^2}}$$

Aus (19) folgt aber auch

$$\left. \begin{aligned} r &= k(r^2 + h^2) = \frac{k}{k^2 + w^2} \\ h &= w(r^2 + h^2) = \frac{w}{k^2 + w^2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Nunmehr kann ein geeignetes Koordinatensystem angegeben werden:

$$\begin{aligned}O &:= P(s_0) + r\mathbf{n}(s_0) = P(s_0) + \frac{k}{k^2 + w^2} \mathbf{n}(s_0) \\ \mathbf{i} &:= -\mathbf{n}(s_0) \\ \mathbf{j} &:= \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{n}(s_0) \times \mathbf{k} = \frac{k\mathbf{t}(s_0) - w\mathbf{b}(s_0)}{\sqrt{k^2 + w^2}}\end{aligned}$$



Für (20) gilt bezüglich des soeben bestimmten Koordinatensystems mit (22) der Reihe nach

$$\begin{aligned} S(0) &= O + r\mathbf{i} = (P(s_0) + r\mathbf{n}(s_0)) + r(-\mathbf{n}(s_0)) = P(s_0) \\ S'(s) &= -\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} + \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} + \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{k} \\ S'(0) &= \frac{k}{\sqrt{k^2 + w^2}} \mathbf{j} + \frac{w}{\sqrt{k^2 + w^2}} \mathbf{k} = \frac{k^2 \mathbf{t} - kw \mathbf{b} + w^2 \mathbf{t} + kw \mathbf{b}}{k^2 + w^2} = \mathbf{t}(s_0) = P'(s_0) \\ S''(s) &= -\frac{r}{r^2 + h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{i} - \frac{r}{r^2 + h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}} \mathbf{j} \\ S''(0) &= -\frac{r}{r^2 + h^2} \mathbf{i} = k\mathbf{n}(s_0) = P''(s_0) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Übereinstimmung im begleitenden Dreiein für  $s = 0$  der Schraubenlinie bzw.  $s = s_0$  der Kurve.

Satz 1.4. Durch jeden Punkt einer Kurve mit positiver Krümmung und nicht verschwindender Windung gibt es eine Schraubenlinie, die dort dieselbe Krümmung und Windung besitzt und die Kurve von wenigstens zweiter Ordnung berührt.

Da  $w > 0$  und  $h > 0$  äquivalent sind und  $h > 0$  eine Rechtsschraube  $P = S(s)$  kennzeichnet, ist auch die Kurve für  $w > 0$  im betrachteten Punkt näherungsweise eine Rechtsschraube. Entsprechend wird die Kurve für  $w < 0$  im betrachteten Punkt durch eine Linksschraube angenähert.

Da die konstruierte Schraubenlinie vom betrachteten Punkt abhängt, spricht man von der begleitenden Schraubenlinie bzw. Schraubung der Kurve. Entscheidendes Hilfsmittel zur Ermittlung der begleitenden Schraubung ist der Vektor (Vektor von Darboux und Cesaro)<sup>13</sup>

$$\mathfrak{d}(s) = w\mathbf{t} + k\mathbf{b}$$

Dieser Vektor charakterisiert die Drehung des begleitenden Dreieins: Ist  $\mathfrak{d}$  Vektor der Winkelgeschwindigkeit ( $|\mathfrak{d}| = \frac{d\varphi}{dt}$ ) einer Drehbewegung, dann gilt (Abb. 34a, b)

$$|\dot{\mathbf{v}}| = \frac{d\varphi}{dt} |\mathbf{v}| \sin \angle(\mathfrak{d}, \mathbf{v}) = |\mathfrak{d}| |\mathbf{v}| \sin \angle(\mathfrak{d}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} \perp \mathfrak{d}, \mathfrak{d} \mathbf{v}$$

oder einfach

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathfrak{d} \times \mathbf{v}$$

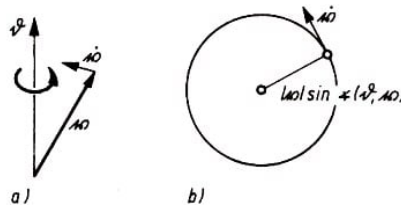


Abb. 34

<sup>13</sup>Das Hauptwerk von Gaston Darboux (1842-1917) hat den Titel "Lecons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométriques du calcul infinitésimal". Erneston Cesaro (1859-1906).

Bezüglich des Vektors von Darboux und Cesaro erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} \times \mathfrak{t} &= (w\mathfrak{t} + k\mathfrak{b}) \times \mathfrak{t} = k\mathfrak{n} = \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{d} \times \mathfrak{n} &= (w\mathfrak{t} + k\mathfrak{b}) \times \mathfrak{n} = w\mathfrak{b} - k\mathfrak{t} = \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{d} \times \mathfrak{b} &= (w\mathfrak{t} + k\mathfrak{b}) \times \mathfrak{b} = -w\mathfrak{n} = \mathfrak{b}'\end{aligned}$$

d. h., dass  $\mathfrak{d}$  die (momentane) Drehbewegung des begleitenden Dreieins (mit  $\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{k^2 + w^2}$ ) kennzeichnet.

### Aufgaben

1. Es sei  $c > 0$ . Man gebe einen Kreis an, für dessen Krümmung  $k = c$  gilt.
2. Es sei  $c > 0$  und  $d \neq 0$ . Man ermittle eine Schraubenlinie mit  $k = c$  und  $w = d$ .
3. Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die begleitende Schraubung die betrachtete Kurve von wenigstens dritter Ordnung berührt. (Dazu betrachte man den Beweis des obigen Satzes, in dem die Berührung von wenigstens zweiter Ordnung konstatiert wurde.)

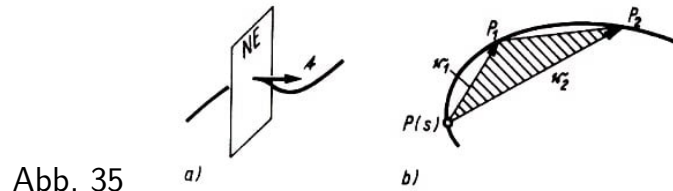
## 1.6 Projektion in die Schmiege-, Normal- bzw. rektifizierende Ebene und Näherungskurve gemäß Taylorentwicklung

Unter der Voraussetzung der  $(n + 1)$ -mal stetigen Differenzierbarkeit der Koordinatenfunktionen  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  und  $z = z(s)$  kann für sie eine Taylorentwicklung vorgenommen werden. Somit erhalten wir folgende Taylorentwicklung bezüglich der Parameterdarstellung  $P = P(s)$ :

$$P(s + h) = P(s) + \frac{h}{1!}P'(s) + \frac{h^2}{2!}P''(s) + \dots + \frac{h^n}{n!}P^{(n)}(s) + \mathfrak{r}_n(s, h) \quad (23)$$

Zunächst werden wir diese Entwicklung für  $n = 2$  anwenden.

Wir betrachten einen Kurvenpunkt  $P(s)$ . Die in  $P(s)$  zu  $\mathfrak{t}$  senkrechte Ebene (Abb. 35a) heißt Normalebene (NE). Für  $k(s) \neq 0$  erhalten wir wie folgt eine weitere mit der Kurve verbundene Ebene (Abb. 35b):



Es sei  $P_1 := P(s + h_1)$  und  $P_2 := P(s + h_2)$  mit  $0 \neq h_1, h_2, h_2 - h_1$ . Da  $k(s + h) \neq 0$  in einer Umgebung von  $P(s)$  gilt, dürfen wir voraussetzen, dass  $P, P_1, P_2$  nicht kollinear sind; es sei  $\varepsilon$  die Ebene durch diese Punkte.

Wie betrachten  $P(s)$  als Ursprung und können  $P_1, P_2$  und einen beliebigen Punkt  $X \in \varepsilon$  durch ihre Ortsvektoren  $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$  bzw.  $\mathfrak{r}$  charakterisieren. Wegen  $X \in \varepsilon$  gilt  $\mathfrak{r} \perp \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2$ ,

$\lambda \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  für jede reelle Zahl  $\lambda$ . Bei der Angabe eines Stellungsvektors  $\lambda \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$  können wir über  $\lambda \neq 0$  noch verfügen. Nach (23) gilt

$$P_i = P(s) + h_i P'(s) + \frac{1}{2} h_i^2 P''(s) + \mathbf{r}_2(s, h_i), \quad i = 1, 2$$

und folglich

$$\lambda \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \lambda \left( h_1 \cdot \frac{1}{2} h_2^2 - h_2 \cdot \frac{1}{2} h_1^2 \right) P' \times P'' + \lambda \mathbf{r}(s, h_1, h_2)$$

Setzen wir jetzt

$$\lambda = \frac{2}{h_1 h_2 (h_2 - h_1)}$$

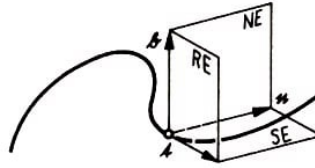
dann gilt  $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \lambda \mathbf{r}(s, h_1, h_2) = \mathbf{o}$  und folglich

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \lambda \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = P'(s) \times P''(s) = \mathbf{t} \times k\mathbf{n} = k\mathbf{b}$$

Die für  $k(s) \neq 0$  eindeutig bestimmte, zu  $\mathbf{b}(s)$  senkrechte Ebene durch  $P(s)$  heißt Schmiegeebene im Punkt  $P(s)$ ; sie wird von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannt.

Die zu  $\mathbf{r}(s)$  senkrechte Ebene durch  $P(s)$  heißt rektifizierende Ebene.<sup>14</sup>

Abb. 36



In Abb. 36 sind die Koordinatenebenen SE, NE und RE des begleitenden Dreibeins, d. h. Schmiege-, Normal- und rektifizierende Ebene, dargestellt.

Für die weitere Auswertung von (23) setzen wir viermal stetige Differenzierbarkeit voraus. Um den Vektor

$$\mathbf{v}(s, h) := \frac{h}{1!} P'(s) + \frac{h^2}{2!} P''(s) + \frac{h^3}{3!} P'''(s) + \mathbf{r}_3(s, h)$$

in der Form  $\mathbf{n}(s, h) = x\mathbf{t} + y\mathbf{n} + z\mathbf{b}$  entwickeln zu können, benutzen wir die Formeln

$$P'(s) = \mathbf{t}$$

$$P''(s) = \mathbf{t}' = k\mathbf{n}$$

$$P'''(s) = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + kw\mathbf{b}$$

und erhalten die sogenannte kanonische Entwicklung von  $\mathbf{v}(s, h)$  und damit auch von  $P(s + h) = P(s) + \mathbf{v}(s, h)$ :

$$\mathbf{v}(s, h) = \left( h - \frac{k^2}{6} h^3 \right) \mathbf{t} + \left( \frac{k}{2} h^2 + \frac{k'}{6} h^3 \right) \mathbf{n} + \frac{k w}{6} h^3 \mathbf{b} + \mathbf{r}_3(s, h)$$

---

<sup>14</sup>Sie wird auch Streckebene genannt.

Dabei ist  $\mathbf{r}_3(s, h)$  in  $h$  von vierter Ordnung, d. h., dass sich  $h^4$  ausklammern lässt:  $\mathbf{r}_3(r, h) = h^4 \cdot \bar{\mathbf{r}}(r, h)$  mit beschränktem  $\bar{\mathbf{r}}(s, h)$  für  $|h| < \varepsilon$ .

Aus der kanonischen Entwicklung ergibt sich gemäß dem obigen Ansatz

$$\begin{aligned}x &= h + h^3(\dots) \\x^2 &= h^2 + h^4(\dots) \\y &= \frac{k}{2}x^2 + h^3(\dots)\end{aligned}$$

d. h., dass für  $k \neq 0$  die Projektion der Kurve in die Schmiegeebene in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $P(s)$  mit  $|h| < \varepsilon$  sehr gut von der Parabel  $y = \frac{k}{2}x^2$  angenähert wird (vgl. Abb. 37a).

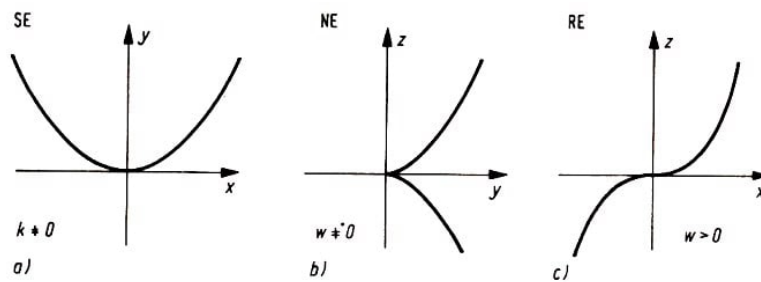


Abb. 37

Um die Annäherung der Projektion in die Normalebene zu ermitteln, bilden wir

$$\begin{aligned}z^2 &= \left( \frac{k}{6}h^3 + h^4(\dots) \right)^2 = \frac{k^2}{36}h^6 + h^7(\dots) \\y^3 &= \left( \frac{k}{2}h^2 + h^3(\dots) \right)^2 = \frac{k^2}{8}h^6 + h^7(\dots)\end{aligned}$$

hieraus folgt

$$z^2 = \frac{2w^2}{9k}y^3 + h^7(\dots)$$

Die Projektion der Kurve in die Normalebene wird für  $w(s) \neq 0$  durch die Neilsche Parabel  $z^2 = \frac{2w^2}{9k}y^3$  angenähert (vgl. Abb. 37 b). Man überzeuge sich im Fall der Schraubenlinie von der Richtigkeit des erhaltenen Resultates, indem man die Umgebung eines Punktes beim "Vorbeischauen" in Richtung der Tangente beobachtet.

Schließlich untersuchen wir das Bild der Kurve beim "Betrachten in Richtung der Hauptnormalen". Wegen

$$x^3 = h^3 + h^5(\dots) \quad \text{gilt} \quad z = \frac{k}{6}x^3 + h^4(\dots)$$

so dass für  $w \neq 0$  die Projektion der Kurve in die rektifizierende Ebene durch die kubische Parabel  $z = \frac{k}{6}x^3$  angenähert wird (Abb. 37 c).

#### Aufgaben

1. Man bestimme den Krümmungsmittelpunkt der Näherungsparabel  $y = \frac{k}{2}x^2$  in der

Schmiegeebene und vergleiche die Krümmungskreise von Kurve und Näherungsparabel.

2. Man gebe im Fall  $k = 2$  und  $w = -3$  (Linksschraube) die Neilsche Parabel in der Normalebene und die kubische Parabel in der rektifizierenden Ebene durch eine Zeichnung an.

## 1.7 Der Fundamentalsatz der Kurventheorie

In den obigen Abschnitten kann die Bedeutung von Krümmung und Windung für die geometrischen Eigenschaften einer Kurve schon in einem gewissen Maße erkannt werden. Der Fundamentalsatz klärt die Rolle von Krümmung und Windung für den Verlauf einer Kurve durch seine Eindeutigkeitsaussage endgültig. Außerdem enthält er eine weitreichende Existenzaussage.

Es sei  $P = P(s)$  eine zulässige Parameterdarstellung einer Kurve. Wegen  $k(s) = |P''(s)| = \sqrt{P''P''} \geq 0$  ist die Krümmung  $k = k(s)$  im Fall  $k(s) = 0$  stetig differenzierbar, denn es gilt

$$k'(s) = \frac{P''P'''}{\sqrt{P''P''}}$$

Die Windung

$$w = w(s) = \mathbf{n}'\mathbf{b} = \left( \frac{P''}{|P''|} \right)' \left( P' \times \frac{P''}{|P''|} \right)$$

ist eine stetige Funktion von  $s$ , wobei ihre Definition  $P''(s) \neq 0$  bzw.  $k(s) \neq 0$  voraussetzt. Diese Aussagen lassen sich wie folgt umkehren:

**Fundamentalsatz.** Im Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  sei  $k = k(s)$  eine stetig differenzierbare, positive Funktion und  $\bar{w} = \bar{w}(s)$ , eine stetige Funktion. Weiterhin sei  $P_0$  ein Punkt und  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ein (orthonormiertes) Dreibein, d.h.  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ik}$ <sup>15</sup> und  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 = 1$ . Dann gibt es genau eine Kurve  $P = P(s)$ , die in  $I$  definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

1.  $s$  ist der natürliche Parameter, die Bogenlänge,
2.  $P(0) = P_0$ ,  $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$ ,
3.  $k(s) = \bar{k}(s)$ ,  $w(s) = \bar{w}(s)$  für alle  $s \in I$ .

**Beweis. Eindeutigkeit.** Notwendige Bedingung für eine gesuchte Kurve  $P = \bar{P}(s)$  ist das System Frenetscher Formeln, wobei 1. bis 3. gelten, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}'(s) &= \bar{k}(s)\bar{\mathbf{n}}(s) \\ \bar{\mathbf{n}}'(s) &= -\bar{k}(s)\bar{\mathbf{t}}(s) + \bar{w}(s)\bar{\mathbf{b}}(s) \\ \bar{\mathbf{b}}'(s) &= -\bar{w}(s)\bar{\mathbf{n}}(s) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

<sup>15</sup>Das Kroneckersymbol  $\delta_{ik}$  ist folgendermaßen definiert:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

Leopold Kronecker (1823-1891).

mit  $\bar{P}(0) = P_0$  und

$$\bar{\mathbf{t}}(0) = \mathbf{e}_1, \quad \bar{\mathbf{n}}(0) = \mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{e}_3 \quad (25)$$

Sobald umgekehrt eine Lösung für das System (24) mit den neuen Differentialgleichungen (jede Gleichung in (24) fasst drei Gleichungen mit den Koordinatenfunktionen zusammen!) für neun gesuchte Koordinatenfunktionen mit (25) gefunden wurde, erfüllt

$$P = \bar{P}(s) = P_0 + \int_0^s \bar{\mathbf{t}}(\sigma) d\sigma \quad (26)$$

alle Bedingungen in 2.; nach einem Satz über lineare Differentialgleichungen ist (24) mit den Anfangsbedingungen (25) eindeutig lösbar. Somit gibt es höchstens eine gesuchte Funktion  $P = P(s)$ , nämlich  $P(s) = \bar{P}(s)$  mit  $\bar{P}(s)$  gemäß (26).

Existenz. Hier ist die Frage zu stellen, ob (26) zulässige Parameterdarstellung einer Kurve ist, die 1. bis 3. erfüllt.

a) Mit  $P(s) = \bar{P}(s)$  können wir dreimal stetige Differenzierbarkeit konstatieren, denn nach (26) und (24) gilt

$$\begin{aligned} P'(s) &= \bar{\mathbf{t}}(s), \\ P''(s) &= \bar{\mathbf{t}}'(s) = \bar{k}(s)\bar{\mathbf{n}}(s), \\ P'''(s) &= \bar{k}'(s)\bar{\mathbf{n}}(s) + \bar{k}(s)[-\bar{k}(s)\bar{\mathbf{t}} + \bar{w}(s)\bar{\mathbf{b}}] \end{aligned}$$

Für den weiteren Beweis formulieren wir (24) neu: Die Koeffizientenmatrix wollen wir wieder wie bei der Herleitung der Frenetschen Formeln mit  $(a_{ik})$  bezeichnen; außerdem setzen wir  $\mathbf{b}_1(s) := \bar{\mathbf{t}}(s)$ ,  $\mathbf{b}_2(s) := \bar{\mathbf{n}}(s)$  und  $\mathbf{b}_3(s) := \bar{\mathbf{b}}(s)$ . Dann gilt

$$\mathbf{b}_i'(s) = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \mathbf{b}_k \quad (24)$$

Nach diesen Festlegungen setzen wir das begonnene Beweisprogramm fort, indem wir zeigen, dass

b)  $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_k = \delta_{ik}$  und  $(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \mathbf{b}_3 = 1$  für alle  $s \in I$  gilt:

Es sei  $b_{ik}(s) := \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k$ .

Nach (25) ist  $b_{ik}(0) = \delta_{ik}$ . Das System der Differentialgleichungen

$$b_{ik}' = (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_k)' = \sum_r (a_{ir} \mathbf{b}_r \mathbf{b}_k + \mathbf{b}_i a_{kr} \mathbf{b}_r) = \sum_r (a_{ir} b_{rk} - b_{ir} a_{rk})$$

hat neben  $b_{ik}(s) = \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k$  die Lösung  $\delta_{ik}$ ; denn bezüglich der linken Seite haben wir  $\delta_{ik}' = 0$ , bezüglich der rechten Seiten

$$\sum_r (a_{ir} \delta_{rk} - \delta_{ir} a_{rk}) = a_{ik} - a_{ik} = 0$$

Nach dem oben schon benutzten Satz über die Lösung von Differentialgleichungssystemen, speziell der Eindeutigkeitsaussage, gilt  $b_{ik}(s) = \delta_{ik}$ , d. h., dass die Vektoren  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind.

Folglich besitzt die Funktion

$$f(S) := (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_3$$

nur die Werte 1 und -1. Da  $f(0) = 1$  nach (25) gilt und diese Funktion stetig ist, haben wir  $f(s) = 1$  für alle  $s \in I$ .

C) Wegen  $\bar{\mathbf{t}}^2 = \mathbf{b}_1^2 = 1$  ist  $s$  natürlicher Parameter.

d) Bezüglich des begleitenden Dreibeins erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= P'(s) = \bar{\mathbf{t}}(s) \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{P''(s)}{|P''(s)|} = \frac{\bar{\mathbf{t}}'(s)}{|\bar{\mathbf{t}}'(s)|} = \bar{\mathbf{n}}(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{b}(s) = \bar{\mathbf{b}}(s)$$

e) Hinsichtlich der Krümmung und Windung haben wir ebenfalls das angestrebte Ziel erreicht:

$$k(s) = \mathbf{t}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}'\bar{\mathbf{n}} = \bar{k}(s) \quad , \quad w(s) = -\mathbf{b}'\mathbf{n} = -\bar{\mathbf{b}}'\bar{\mathbf{n}}' = \bar{w}(s)$$

w.z.b.w.

Die wichtigsten Folgerungen aus diesem Satz bezüglich beliebiger Kurven lauten:

1. Wenn wir

$$k = k(s) \quad , \quad w = w(s) \quad (27)$$

von einer Kurve kennen, dann ist sie bis auf Bewegung im Raum (Wahl von  $P_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) eindeutig bestimmt. Alle Kurven mit gegebenen Funktionen (27) sind untereinander kongruent.

2. Jede Eigenschaft einer Kurve, jede geometrische Größe, lässt sich mit Hilfe von Krümmung  $k(s)$  und Windung  $w(s)$  beschreiben. Krümmung und Windung bilden ein unabhängiges und vollständiges Invariantensystem der Kurve.

Definition. Für eine Kurve  $P = P(s)$  sind (27) die natürlichen Gleichungen.

Hinsichtlich der Kurven konstanter Krümmung und Windung - als solche sind uns bisher Gerade, Kreis und Schraubenlinie bekannt (vgl. die Beispiele (1.5), (1.6) und (1.10) im Abschnitt 1.4) - können wir nach dem Fundamentalsatz eine vollständige Übersicht gewinnen:

a) Ist  $P = P(s)$  eine ebene Kurve konstanter Krümmung  $k \neq 0$ , dann betrachten wir den Krümmungskreis in einem Punkt  $P(s_0)$ . Da er die Kurve von wenigstens zweiter Ordnung berührt, besitzen Kurve und Krümmungskreis in  $P(s_0)$  dasselbe begleitende Dreibein. Nach dem Fundamentalsatz ist die ebene Kurve ( $w = 0$ ) Teilmenge des Krümmungskreises.

b) Ist  $P = P(s)$  eine nicht ebene Kurve konstanter Krümmung  $k$  und konstanter Windung  $w$ , dann betrachten wir in einem Punkt  $P(s_0)$  die begleitende Schraubenlinie. Da sie die Kurve von wenigstens zweiter Ordnung berührt, haben beide Kurven in  $P(s_0)$

dasselbe begleitende Dreibein. Nach dem Fundamentalsatz ist die nicht ebene Kurve  $P = P(s)$  Teilmenge der Schraubenlinie.

Zusammenfassend formulieren wir den

Satz 1.5. Gerade, Kreis und Schraubenlinie sowie Teile davon sind die einzigen Kurven konstanter Krümmung und Windung.

Bisher haben wir lediglich aus der Eindeutigkeitsaussage des Fundamentalsatzes gefolgert. Seine Existenzaussage kann nur im Zusammenhang mit der Theorie der Differentialgleichungen genutzt werden. Oft haben gerade geometrische Fragestellungen zur Weiterentwicklung dieser Theorie beigetragen.

Krümmung und Windung bilden ein vollständiges Invariantensystem einer Kurve. Zweifellos wird damit die Frage aufgeworfen, ob noch andere Invariantensysteme existieren. Zunächst stellen wir fest, dass

$$|\mathbf{t}'| = k \quad \text{und} \quad |\mathbf{b}'| = |w|$$

gilt. Offenbar ist auch  $|\mathbf{n}'| = \sqrt{k^2 + w^2}$  eine Invariante; wir setzen  $g(s) := |\mathbf{n}(s)|$  (ganze bzw. Lancretsche<sup>16</sup> Krümmung) und überlassen es dem Leser, mit Hilfe der ganzen Krümmung neue Invariantensysteme aufzustellen.

Aufgabe

Man prüfe, ob  $g = g(s)$  und  $w = w(s)$  ein vollständiges Invariantensystem ist, und formuliere gegebenenfalls einen neuen Fundamentalsatz.

## 1.8 Einige spezielle Kurven

Die Auswahl der Klassen von Kurven, die im folgenden näher untersucht werden, erfolgte unter dem Aspekt der Bedeutung für Anwendungen. In der Praxis werden meist Aussagen über Flächen benötigt, jedoch können Einsichten bezüglich der Kurventheorie sehr nützliche Anwendung finden - sei es, dass Straßen im Gelände durch Kurven "ersetzt" werden oder dass geeignete Schnitte bei zylindrischen bzw. kegeligen Oberflächen schon wesentliche praxisrelevante Aussagen über die Fläche gestatten.

Andererseits werden wir die Kurventheorie im Rahmen der Flächentheorie weiterentwickeln, weil die dort ohnehin bereitzustellenden Hilfsmittel eine gesonderte Behandlung solcher Themen wie Kurven bezüglich nichtkartesischer Koordinatensysteme der Ebene oder Hüllkurven hier im Rahmen der Kurventheorie als nicht zweckmäßig erscheinen lassen.

### a) Böschungslinien

Straßen mit konstantem Anstieg erfordern eine gleichmäßige Motorleistung und erübrigen vor allem unerwünschtes Schalten. Wir können solche Straßen als verallgemeinerte schiefe Ebenen auffassen (Abb. 38):

---

<sup>16</sup>Lancret 1802.



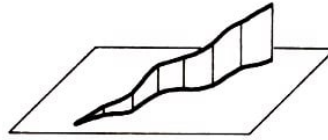


Abb. 38

Wir stellen die Straße durch ein Kurvenstück dar und fällen von jedem Punkt auf eine horizontale Ebene das Lot; bei Abwicklung des entstandenen Flächenstückes in eine Ebene ergibt sich eine rechtwinklige Dreiecksfläche.

Eine Kurve konstanten Anstiegs ist bei senkrechter Achse die Schraubenlinie. Unabhängig von den Begriffen "vertikal" und "horizontal", die sich geometrisch ohne Willkür (etwa Auszeichnung der  $x,y$ -Ebene) nicht präzisieren lassen, erklären wir

**Definition.** Eine Kurve  $P = P(s)$  heißt genau dann Böschungslinie (allgemeine Schraubenlinie), wenn es einen Einheitsvektor  $\mathfrak{e}$  derart gibt, dass  $P'(s)\mathfrak{e}$  konstant ist, etwa  $P'\mathfrak{e} = \cos \alpha$  mit konstanter Winkelgröße  $\alpha$ .

Für eine Böschungslinie  $P = P(s)$  folgt aus  $P'(s)\mathfrak{e} = \cos \alpha$  zunächst  $P''(s)\mathfrak{e} = 0$  und  $P''(s) \perp \mathfrak{e}$ .

Unter der Voraussetzung  $k(s) = 0$  gilt  $\mathfrak{n} \perp \mathfrak{e}$  und folglich  $\mathfrak{b}'(s)\mathfrak{e} = -w\mathfrak{n}(s)\mathfrak{e} = 0$ , d. h., dass auch  $\mathfrak{b}(s)\mathfrak{e}$  konstant ist.

Es sei  $c_1 := \mathfrak{t}(s)\mathfrak{e} = P'(s)\mathfrak{e} = \cos \alpha$  und  $c_2 := \mathfrak{b}(s)\mathfrak{e}$ . Wegen  $0 = \mathfrak{n}'(s)\mathfrak{e} = (-k\mathfrak{t} + w\mathfrak{b})\mathfrak{e} = -kc_1 + wc_2$  und  $c_2 \neq 0$  (sonst wäre wegen  $k(s) = 0$  offensichtlich  $c_1 = c_2 = 0$  und  $\mathfrak{e} \perp \mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$  im Widerspruch zu  $|\mathfrak{e}| = 1$ ) muss  $w (= \frac{c_1}{c_2})$  proportional zu  $k(s)$  sein.

Es sei nun umgekehrt  $w(s) = c \cdot k(s)$  für eine Kurve  $P = P(s)$ . Zur Konstante  $c$  gibt es eine Winkelgröße  $\alpha$  mit  $c = \cot \alpha$ . Um zu beweisen, dass eine Böschungslinie vorliegt, benötigen wir einen geeigneten Vektor  $\mathfrak{e}$ ; wir machen den Ansatz

$$\mathfrak{e}(s) = \cos \alpha \mathfrak{t}(s) + \sin \alpha \mathfrak{b}(s)$$

Offenbar gilt  $|\mathfrak{e}(s)| = 1$  und  $P'(s)\mathfrak{e}(s) = \cos \alpha \mathfrak{t}^2 = \cos \alpha$  wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}'(s) &= \cos \alpha \cdot k(s)\mathfrak{n}(s) + \sin \alpha \cdot (-w(s)\mathfrak{n}(s)) \\ &= \mathfrak{n}(s)[k(s) \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cot \alpha k(s)] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ist  $\mathfrak{e}(s) = \mathfrak{e}$  ein konstanter Vektor. Insgesamt gilt der

**Satz 1.6 (Saint-Venant<sup>17</sup>), 1844).**  $P = P(s)$  ist genau dann eine Böschungslinie, wenn es eine Konstante  $c$  mit  $w(s) = c \cdot k(s)$  gibt.

Sonderfälle einer Böschungslinie sind alle Geraden ( $k(s) = w(s) = 0$ ), alle ebenen Kurven ( $c = 0$ ) und alle Schraubenlinien ( $k, w$  konstant).

### Aufgabe

Man zeige, dass alle nichtebenen Böschungslinien konstanter Krümmung Schraubenlinien sind.

<sup>17</sup>Adhemar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886).

b) Klothoide (Cornusche<sup>18</sup> Spirale)

Ein Fahrzeug hat bei geradlinigem und bei kreisförmigem Verlauf einer Straße oder eines Schienenstranges eine feste Einstellung der lenkbaren Räder. Den Übergang von der einen Stellung der Räder zur anderen wollen wir durch eine konstante Lenkradgeschwindigkeit realisieren:

$$\frac{d\omega}{ds} = c \neq 0, \quad \text{d.h.} \quad \omega = cs$$

wenn wir von einer additiven Konstante absehen. Nach (14) und (15) erhalten wir

$$k(s) = |P''(s)| = \omega = cs$$

Für eine ebene Kurve ergibt das die natürlichen Gleichungen (E. Cesaro)

$$k(s) = cs, \quad w(s) = 0$$

Messen wir den Drehwinkel  $\varphi$  des Tangentenvektors stets von der positiven  $x$ -Achse aus, dann ist

$$\omega = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{c}{2}s^2 = \frac{s^2}{2a^2} \quad \text{für} \quad c > 0$$

(bis auf eine additive Konstante), d. h. bezüglich der  $x, y$ -Ebene

$$P'(s) = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \left( \cos \frac{s^2}{2a^2}, \sin \frac{s^2}{2a^2} \right)$$

$$x(s) = \int \cos \frac{s^2}{2a^2} ds, \quad y(s) = \int \sin \frac{s^2}{2a^2} ds$$

Die Substitution  $\varphi = \frac{s^2}{2a^2}$  ergibt wegen  $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{cs} = \frac{a^2}{s} = \frac{a}{\sqrt{2\varphi}}$  die Gleichungen

$$x(\varphi) = a \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2\varphi}} d\varphi, \quad y(\varphi) = a \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2\varphi}} d\varphi,$$

die Substitution  $s = a\sqrt{\pi}\tau$  ergibt die in der Optik auftretenden Fresnelschen Integrale<sup>19</sup>

$$x(\tau) = a\sqrt{\pi} \int_0^\tau \cos \frac{\pi\tau^2}{2} d\tau, \quad y(\tau) = a\sqrt{\pi} \int_0^\tau \sin \frac{\pi\tau^2}{2} d\tau$$

so dass  $x = y = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}$  die asymptotischen Punkte für  $\tau \rightarrow \infty$  charakterisieren (Abb. 39a).

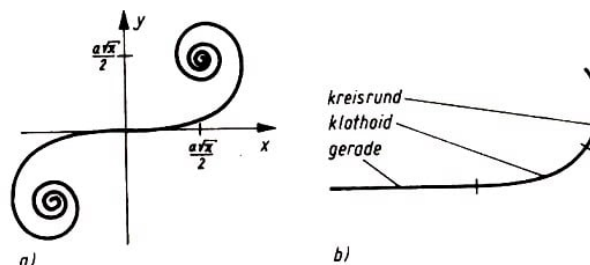


Abb. 39

<sup>18</sup>Nach Marie Alfred Cornu (1841-1902).

<sup>19</sup>Augustin Fresnel (1788-1827).

Als Übergangsbogen zwischen einer Strecke und einem Kreisbogen wird ein derartiges Stück einer geeigneten Klothoide (Wahl der Konstante  $c$ ) bestimmt, dass bezüglich des Koordinatensystems die Strecke auf der negativen  $x$ -Achse abgetragen ist und der Kreisbogen dort beginnt, wo die Klothoide die Krümmung  $\frac{1}{r}$  ( $r$  zum Kreisbogen gehöriger Radius) erreicht hat (Abb. 39 b). Im Straßenbau spricht man von Anrampung.

Aufgabe

Man berechne für eine Klothoide  $P = P(s)$  aus der Integraldarstellung  $P''(s)$  und  $k(s)$ .

c) Evolventen und Evoluten einiger Kurven

Es sei  $P = P(s)$  eine Kurve. Die Punktmenge

$$Q(s) := P(s) + v(s) \cdot P'(s) \quad (28)$$

für die  $s$  im allgemeinen kein natürlicher Parameter ist, wird durch die Forderung

$$\dot{Q}(s) = P'(s) + v'(s)t(s) + v(s)t'(s) \perp t(s)$$

zu einer Orthogonaltrajektorie der Tangenten der Kurve  $P = P(s)$ . Wegen

$$0 = t(t + v't + vk\mathbf{n}) = 1 + v'(s)$$

ergibt (28) über  $v'(s) = -1$  sofort  $v(s) = s_0 - s$  und damit die Filarevolvente bzw. Fadenevolvente

$$Q(s) = P(s) + (s_0 - s)P'(s) \quad (29)$$

mit der ersten Ableitung

$$\dot{Q}(s) = (s_0 - s)P''(s) = (s_0 - s)k(s)\mathbf{n}(s) \quad (30)$$

Eine Filarevolvente entsteht als Bahn eines Fadenknotens, wenn der Faden zunächst auf der Kurve liegt (der Knoten dabei auf  $P(s_0)$ ) und der Faden dann derart abgewickelt wird, dass der gespannte abgewickelte Teil in der jeweiligen Tangente liegt (Abb. 40); der abgewickelte Faden hat bis zum Knoten die Länge  $s_0 - s$ .

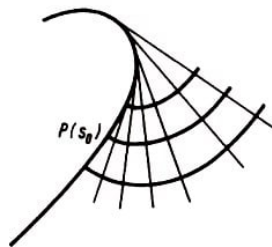


Abb. 40

Ein Pendel, dessen Aufhängung zwischen zwei "Backen" erfolgt, an die sich der Faden legt und wieder ablöst, beschreibt ebenfalls eine Fadenevolvente; solche Pendel werden beispielsweise in der Physik untersucht (vgl. auch (1) Rollkurven).

Die Darstellung (29) ist zulässig, wenn  $P = P(s)$  viermal stetig differenzierbar,  $s \neq s_0$  und  $k(s) \neq 0$  ist.

$P = P(s)$  heißt Filarevolute von  $P = Q(s)$  gemäß (29). Bei Kurven einer Ebene  $\varepsilon$  spricht man kurz von Evolventen und Evoluten. Unter den Voraussetzungen  $k(s) > 0$ ,  $w(s) = 0$  und  $s \neq s_0$  erhalten wir, wenn wir den natürlichen Parameter der Evolvente mit  $a$  bezeichnen, der Reihe nach

$$\ddot{Q}(s) = -k(s)\mathbf{n}(s) + (s_0 - s)k'(s)\mathbf{n}(s) + (s_0 - s)k(s)(-k(s)\mathbf{n}(s))$$

$$\overline{Q}'(s) = \begin{cases} \mathbf{n}(s) & \text{für } s < s_0 \\ -\mathbf{n}(s) & \text{für } s_0 < s \end{cases}$$

und wegen  $\overline{Q}''(s) \perp \overline{Q}' = \pm \mathbf{n}(s)$ , d.h.  $\overline{Q}''(s) = \lambda \mathbf{t}(s)$ ,

$$\overline{Q}''(s) = \ddot{Q} \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 + \dot{Q} \frac{d^2s}{d\sigma^2} = \frac{1}{\dot{Q}^2} \left( \ddot{Q} - \frac{\dot{Q}\ddot{Q}}{\dot{Q}^2} \right) = -\frac{(s_0 - s)k^2}{(s_0 - s)^2 k^2} \mathbf{t} = -\frac{1}{s_0 - s} \mathbf{t}(s) = \frac{1}{s - s_0} \mathbf{t}(s)$$

$$\overline{\mathbf{n}}(s) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{für } s_0 < s \\ -\mathbf{t} & \text{für } s < s_0 \end{cases}$$

$$k_{\text{evol}} = \begin{cases} \frac{1}{s - s_0} & \text{für } s_0 < s \\ -\frac{1}{s - s_0} & \text{für } s < s_0 \end{cases}$$

d. h., dass die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente

$$M_{\text{evol}} = Q(s) + \frac{1}{k_{\text{evol}}} \overline{\mathbf{n}}(s) = Q(s) + (s - s_0) \mathbf{t}(s)$$

$$= P(s) + (s_0 - s)P'(s) + (s - s_0)P'(s) = P(s)$$

die Evolute bilden.<sup>20</sup>

Wir betrachten nun die Menge der Krümmungsmittelpunkte einer beliebigen ebenen Kurve  $P = P(s)$ . Wie uns vom Beispiel des Kreises bekannt ist, braucht diese Menge keine Kurve zu sein. Doch wann existiert ein Tangentenvektor?

Wegen  $w(s) = 0$  gilt

$$M(s) = P(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s),$$

$$\dot{M}(s) = P'(s) + \rho'(s)\mathbf{n}(s) + \rho(s)\mathbf{n}'(s) = \mathbf{t} + \rho'\mathbf{n} + \rho(-k\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \rho'\mathbf{n} - \mathbf{t} = \rho'(s)\mathbf{n}(s)$$

d. h., dass  $\dot{M}(s) \neq \mathbf{0}$  und nicht konstanter Krümmungsradius bzw. nicht konstante Krümmung der Kurve  $P = P(s)$  - kein Kreisbogen - äquivalent sind. Bezeichnen wir die Bogenlänge von  $P = M(s)$  mit  $\sigma$ , dann gilt

$$|\dot{M}(s)| = \begin{cases} \rho'(s) & \text{für } \rho'(s) > 0 \\ -\rho'(s) & \text{für } \rho'(s) < 0 \end{cases}$$

und folglich

$$\sigma(s) = \begin{cases} \rho(s) & \text{für } \rho'(s) > 0 \\ -\rho(s) & \text{für } \rho'(s) < 0 \end{cases}$$

<sup>20</sup>Christiaan Huygens (1629-1695) hat 1673 die Evolute als Einhüllende der Normalen der Evolvente gekennzeichnet.

Für die zu  $P = M(s) = \overline{M}(\sigma)$  gehörige Schar von Evolventen erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(\sigma(s)) &= \overline{M}(\sigma) + (\sigma_0 - \sigma)\overline{M}'(\sigma) = [P(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)] + (\rho_0 - \rho(s))\mathbf{n}(s) \\ &= P(s) + \rho_0\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

insbesondere für  $\rho_0 = 0$  die ursprüngliche Kurve.

Zusammenfassend gilt der

**Satz 1.7.** Jede ebene Kurve nirgends konstanter Krümmung besitzt genau eine Evolute, nämlich die Menge der Krümmungsmittelpunkte.<sup>21</sup>

Evolventen und Evoluten finden vielfache Anwendung, z. B. bei der Evolventenverzahnung und beim Zykloidenpendel von Huygens. Das liegt an der Deutung ersterer als Fadenevolvente und der Charakterisierung zweiterer als Menge von Krümmungsmittelpunkten. Wir wollen abschließend zwei Beispiele rechnerisch behandeln.

(1.11) Evolvente der Kettenlinie  $y = a \cosh \frac{x}{a}$ .

Diese Kurve ergibt sich als Gleichgewichtsfigur eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren, homogenen, schweren Seiles, das in zwei nicht übereinanderliegenden Punkten befestigt ist; sie wird deshalb auch Seilkurve genannt. Wir berechnen eine Evolvente aus einer Parameterdarstellung der Kettenlinie

$$P(t) = O + ti + a \cosh \frac{t}{a} \mathbf{j}$$

$$\dot{P}(t) = \mathbf{i} + \sinh \frac{t}{a} \mathbf{j}$$

$$\dot{P}^2 = 1 + \sinh^2 \frac{t}{a} = \cosh^2 \frac{t}{a}$$

$$s(t) = \int_0^t \cosh \frac{t}{a} dt = a \sinh \frac{t}{a}$$

$$\overline{P}'(t) = \dot{P} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{P}(t)}{\cosh \frac{t}{a}}$$

$$Q(t) = P(t) - s\overline{P}'(t) = O + \left(t - a \tanh \frac{t}{a}\right) \mathbf{i} + \left(a \cosh \frac{t}{a} - a \sinh \frac{t}{a} \cdot \tanh \frac{t}{a}\right) \mathbf{j}$$

$$Q(t) = O + \left(t - a \tanh \frac{t}{a}\right) \mathbf{i} + \frac{a}{\cosh \frac{t}{a}} \mathbf{j}$$

Diese Evolvente heißt Traktrix (Traktorie von Huygens) oder Schleppkurve (Abb. 41).

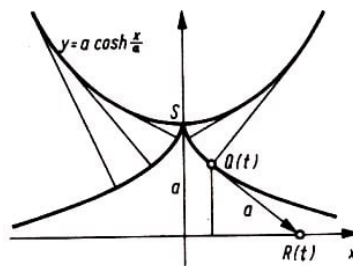


Abb. 41

<sup>21</sup>Die übrigen Evoluten sind Böschungslinien.

Zur Rechtfertigung des Namens berechnen wir den Abstand eines ihrer Punkte  $Q(t)$  vom Schnittpunkt  $R(t)$  seiner Tangente mit der  $x$ -Achse: Mit

$$\dot{Q}(t) = \left(1 - \frac{\cosh^2 \frac{t}{a} + \sinh^2 \frac{t}{a}}{\cosh^2 \frac{t}{a}}\right) \mathbf{i} + \frac{-\sinh \frac{t}{a}}{\cosh^2 \frac{t}{a}} \mathbf{j} = \tanh^2 \frac{t}{a} \mathbf{i} - \frac{\tanh \frac{t}{a}}{\cosh \frac{t}{a}} \mathbf{j}$$

machen wir den Ansatz

$$R(t) := Q(t) + \lambda \dot{Q}(t) = f(t) \mathbf{i}$$

aus der daraus folgenden Gleichung

$$\frac{a}{\cosh \frac{t}{a}} + \lambda \frac{-\tanh \frac{t}{a}}{\cosh \frac{t}{a}} = 0$$

erhalten wir  $\lambda = a \coth \frac{t}{a}$  und den gesuchten Abstand  $|\lambda \dot{Q}| = a$  wegen

$$(\lambda \dot{Q})^2 = a^2 \tanh^2 \frac{t}{a} + \frac{a^2}{\cosh^2 \frac{t}{a}} = a^2 \frac{\sinh^2 \frac{t}{a} + 1}{\cosh^2 \frac{t}{a}} = a^2$$

d. h., dass ein schwerer Punkt in  $S$  an einem undehnbaren Faden der Länge  $a$ , dessen Ende  $R(t)$  sich zunächst im Ursprung  $O$  befindet, bei der Bewegung von  $R$  längs der  $x$ -Achse die Schleppkurve  $P = Q(t)$  beschreibt. Sie befindet sich oberhalb der  $x$ -Achse, hat bei  $S$  eine Spitze und nähert sich der  $x$ -Achse beidseitig asymptotisch (Abb. 41).

(1.12) Evolute einer Ellipse.

Es kommt hier darauf an, die Menge aller Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen (vgl. Abschnitt 1.5 A). Aus der Parameterdarstellung

$$P(t) = O + a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$$

erhalten wir (vgl. Anleitung zur folgenden Aufgabe)

$$M(t) = O + \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t \mathbf{i} + \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t \mathbf{j}$$

oder in parameterfreier Darstellung mit der linearen Exzentrizität  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

eine Astroide oder Sternkurve (Abb. 42).

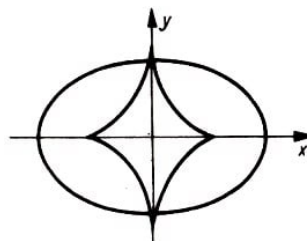


Abb. 42

# Aufgabe

Man berechne die Evolute der Ellipse.

Anleitung. Man berechne  $\dot{P}$  und  $\ddot{P}$  mit deren Hilfe sich  $\overline{P}''(t)$  nach (12) und

$$k^2(t) = (\overline{P}''(t))^2 = \frac{a^2 b^2}{(\dot{P})^3} = \frac{1}{\rho^2(t)}$$

$$M(t) = P(t) + \rho^2(t) \overline{P}''(t)$$

bestimmen lassen.

## d) Rollkurven.

Wenn eine starre ebene Kurve  $k_1$ , die Polkurve, auf einer zweiten  $k_2$ , der Polbahn, gleitfrei abrollt, beschreibt ein mit der Fläche von  $k_1$  verbundener Punkt  $P$  eine Rollkurve. Die für Anwendungen wichtigsten Fälle entstehen beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden oder einem anderen Kreis.

Es sei  $k_1(M, r)$  ein Kreis vom Radius  $r$ , wobei sich  $P$  auf einer vom Mittelpunkt  $M$  ausgehenden Halbgeraden im Abstand  $a$  von  $M$  befinde (Abb. 43).

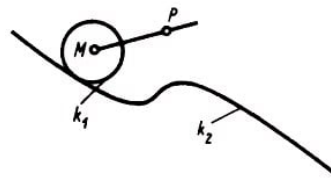


Abb. 43

Die folgende Übersicht vermittelt die wichtigsten Sonderformen für den Fall, dass  $k_2$  eine Gerade oder ein Kreis vom Radius  $R$  ist; dabei ist noch darauf zu achten, ob  $k_1$  innen oder außen auf  $k_2$  abrollt; für  $P \in k_1$  gibt es verschiedene Zykloiden, für  $P \in k_1$  Trochoiden (vgl. auch die folgende Tabelle).

|                            | $k_2$ Gerade   | $k_1$ Kreis vom Radius $R$<br>$M$ außerhalb $k_2$              | $M$ innerhalb $k_2$ ( $r < R$ )                                  |
|----------------------------|--|--|--|
| $a = r$<br>( $P \in k_1$ ) | (gemeine) Zykloide<br>oder Radkurve                      | (gemeine) Epizykloide  | (gemeine) Hypozykloide   |
| $a < r$                    | verkürzte, gestreckte<br>Zykloide oder Trochoide         | verkürzte, verschlungene<br>Epizykloide oder<br>Epitrochoide   | verkürzte, gestreckte<br>Hypozykloide oder<br>Hypotrochoide      |
| $a > r$                    | verlängerte,<br>verschlungene Zykloide<br>oder Trochoide | verlängerte, verschlungene<br>Epizykloide oder<br>Epitrochoide | verlängerte, verschlungene<br>Hypozykloide oder<br>Hypotrochoide |
| $a$ beliebig               | Zykloide   | Epizykloide  | Hypozykloide   |

Zykloiden sind zu beobachten, wenn ein Rad mit einem Fleck oder Bolzen auf einer Straße oder Schiene rollt; daher kommt der Name Radkurve. Gemeine Zykloiden be-

gegenen uns als Brachistochronen<sup>22</sup> und beim Zykloidenpendel.<sup>23</sup>

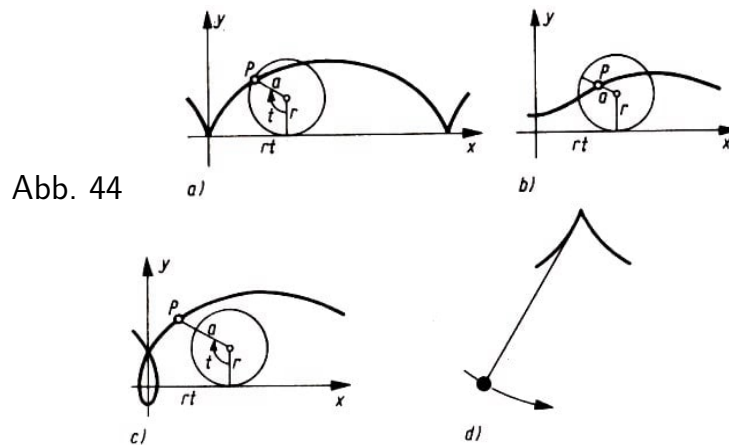


Abb. 44

Eine Gleichung der Zykloiden mit dem in Bogenmaß anzugebenden Wälzwinkel  $t$  erhalten wir folgendermaßen (Abb. 44a, b, c): Wegen

$$rt = x + a \sin t, \quad r = y + a \cos t$$

erhält eine gesuchte Parameterdarstellung die Gestalt

$$P(t) = O + (rt - a \sin t)\mathbf{i} + (r - a \cos t)\mathbf{j}$$

Daraus ergibt sich z. B. die Bogenlänge der gemeinen Zykloide ( $a = r$ )

$$s(t) = \int_0^t r \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \int_0^t 2r \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

unter der Voraussetzung  $0 \leq t \leq 2\pi$  ist

$$s(t) = -4r \cos \frac{t}{2} \Big|_0^t = 4r - 4r \cos \frac{t}{2}$$

d. h., dass der Bogen zwischen zwei Spitzen die Länge  $8r$  besitzt.

Die Gleichungen der Epi- und Hypozykloiden lauten

$$P(t) = O + \left[ (R \pm r) \cos t \mp a \cos \frac{R \pm r}{r} t \right] \mathbf{i} + \left[ (R \pm r) \sin t - a \sin \frac{R \pm r}{r} t \right] \mathbf{j}$$

Diese Kurven schließen sich, falls  $\frac{r}{R}$  eine rationale Zahl ist. Die gemeine Epizykloide mit  $R = r$  ist die Kardioid oder Herzkurve (Abb. 45a), die gemeine Hypozykloide mit  $R = 4r$  eine Astroide oder Sternkurve (Abb. 45b).

<sup>22</sup>Es handelt sich um eine derartige Verbindungskurve zweier Punkte ungleicher Höhe, dass ein nur unter dem Einfluss der Schwerkraft gleitender Massenpunkt in kürzester Zeit vom höheren zum tiefer gelegenen Punkt gelangt. Die 1696 von Johann Bernoulli (1667-1748) gestellte Preisfrage nach der Form der Kurve wurde von ihm und seinem Bruder Jakob (1654-1705) gelöst: Sie ist ein Zykloidenbogen, falls die Punkte nicht übereinanderliegen.

<sup>23</sup>Ein gewöhnliches Pendel ist nicht isochron, d. h., dass die Schwingungsdauer von der Größe des Ausschlages abhängt. Huygens fand 1673 ein isochrones Pendel, das Zykloidenpendel: Die Aufhängung erfolgt derart, dass der Faden auf einem Zykloidenbogen mit Spitze abrollt (Abb. 44 d); dabei beschreibt der schwingende Massenpunkt eine Evolvente. Die gemeine Zykloide wird deshalb auch Tautochrone genannt.



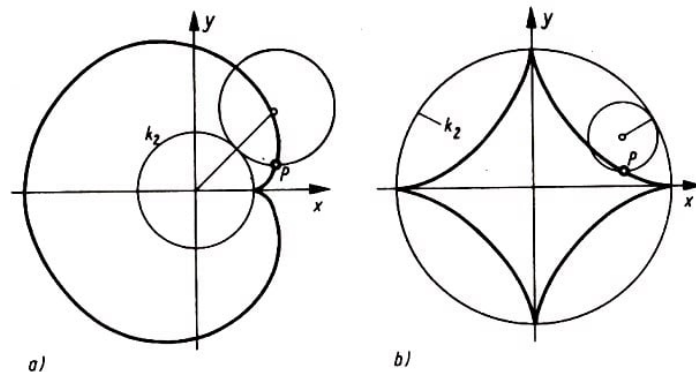


Abb. 45

Neben den ausführlicher behandelten Rollkurven seien abschließend noch die Rollkurven erwähnt, die beim Abrollen der Kegelschnitte von deren Brennpunkten erzeugt werden, die Delaunayschen<sup>24</sup> Kurven. Im Fall der Parabel erhält man eine Kettenlinie; deshalb werden die übrigen Delaunayschen Kurven elliptische bzw. hyperbolische Kettenlinien genannt.

### Aufgabe

Man leite aus den obigen Gleichungen für die Epi- (oberes Vorzeichen) und Hypozykloiden (unteres Vorzeichen) die parameterfreien Gleichungen für die Kardioiden ( $R = r = a$ )

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 4r^2[(x - r)^2 + y^2]$$

und die Astroide ( $R = 4r = 4a$ )

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

(vgl. die Evolute der Ellipse) her.

### e) Spiralen oder Schneckenlinien

Für eine ebene Spirale ist der Abstand  $r$  eines Punktes vom Ursprung eine streng monotone Funktion des von der positiven  $x$ -Achse aus gemessenen Drehwinkels  $\varphi$  :  $r = f(\varphi)$ . Die Böschungslinien werden als nichtebene Spiralen aufgefasst.

Spiralen begegnen uns vielfach in Physik und Technik; besonders bekannt sind Spiralfedern, etwa bei der Unruhe einer Uhr. Hier wollen wir einige Beispiele ebener Spiralen näher untersuchen.

(1.13) Archimedische<sup>25</sup> Spirale  $r = a\varphi$  (Abb. 46 a).

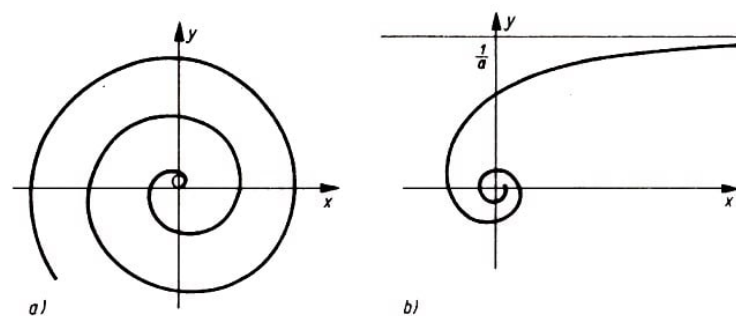


Abb. 46

<sup>24</sup>Nach Charles Eugene Delaunay (1814-1872).

<sup>25</sup>Archimedes von Syrakus (287 ?-212 v. u. Z.).

Diese Kurve entsteht als Bahn eines Punktes auf einer Halbgeraden, wenn die Halbgerade mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihren Anfangspunkt rotiert und der Punkt sich in Bezug auf die Halbgerade mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Es sei  $a > 0$ . Eine Parameterdarstellung bezüglich des Drehwinkels  $t \geq 0$  hat die folgende Gestalt

$$P(t) = O + at \cos t \mathbf{i} + at \sin t \mathbf{j}$$

bzw. für den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t)$  von  $P(t)$

$$\mathbf{r}(t) = at \cos t \mathbf{i} + at \sin t \mathbf{j}$$

Wegen der Beziehung

$$|\mathbf{r}(t + 2\pi) - \mathbf{r}t| = 2\pi a$$

haben zwei aufeinanderfolgende "Schneckengänge" konstanten Abstand  $a^*$  (Abb. 46a). Für die Krümmung, deren detaillierte Berechnung wir dem Leser überlassen (vgl. folgende Aufgabe), erhält man

$$k(t) = \frac{t^2 + 2}{a(1 + t^2)^{3/2}}$$

insbesondere  $k(0) = \frac{2}{a}$  bzw.  $\rho(0) = \frac{a}{2}$ . Um den Krümmungsmittelpunkt bestimmen zu können, berechnen wir nach (12)

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (a \cos t - at \sin t)\mathbf{i} + (a \sin t + at \cos t)\mathbf{j}, & \dot{P}(0) &= a\mathbf{i} \\ \ddot{P}(t) &= (-2a \sin t - at \cos t)\mathbf{i} + (2a \cos t - at \sin t)\mathbf{j}, & \ddot{P}(0) &= 2a\mathbf{j} \\ \overline{P}''(t) &= \frac{1}{a^2} \ddot{P}(0) = \frac{2}{a}\mathbf{j} \end{aligned}$$

d. h., dass für  $t = 0$  das Intervall  $[0, a]$  Durchmesser des Krümmungskreises ist. Bei der Spiegelung der archimedischen Spirale am Einheitskreis entsteht die

(1.14) hyperbolische Spirale  $r = \frac{1}{a\varphi}$  ( $a, \varphi > 0$ ). Für sie ist der Ursprung ein asymptotischer Punkt und  $y = \frac{1}{a}$ , eine Parallele zur  $x$ -Achse, eine Asymptote (Abb. 46b): Aus der Parameterdarstellung

$$P(t) = O + \frac{1}{at} \cos t \mathbf{i} + \frac{1}{at} \sin t \mathbf{j}$$

folgt offensichtlich

$$y = \frac{1}{at} \sin t < \frac{1}{a} \quad \text{für} \quad t \geq 1$$

und für  $0 < t < 1$  wegen  $\frac{\sin t}{t} < 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  zunächst die Ungleichung  $y < \frac{1}{a}$  sowie

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = \frac{1}{a}$$

Die Asymptote ist Bild des oben betrachteten Krümmungskreises der archimedischen Spirale.

(1.15) Logarithmische Spirale  $r = r_0 e^{a\varphi}$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $r_0 = 1$  gesetzt werden. Die logarithmische Spirale wird wegen

$$r(\varphi + 2k\pi) = e^{a(\varphi + 2k\pi)} = e^{2ak\pi} \cdot e^{a\varphi}$$

für jede ganze Zahl  $k$  bei der Dehnung mit dem Zentrum  $O$  und dem Dehnungskoeffizienten  $e^{2ak\pi}$  auf sich abgebildet (Abb. 47).

Aus der Parameterdarstellung

$$P(t) = O + e^{at} \cos t \mathbf{i} + e^{at} \sin t \mathbf{j} = O + \mathbf{r}(t)$$

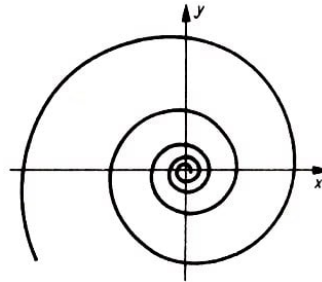


Abb. 47

berechnen wir eine weitere, für Anwendungen wichtige Eigenschaft:

$$\dot{P}(t) = (ae^{at} \cos t - e^{at} \sin t)\mathbf{i} + (ae^{at} \sin t + e^{at} \cos t)\mathbf{j}$$

$$\dot{P}\mathbf{r} = e^{2at}(a \cos^2 t - \sin t \cos t + a \sin^2 t + \sin t \cos t) = ae^{2at}$$

$$\dot{P}^2 = e^{2at}(a^2 \cos^2 t - 2a \sin t \cos t + \sin^2 t + a^2 \sin^2 t + 2a \sin t \cos t + \cos^2 t) = e^{2at}(a^2 + 1)$$

$$\mathbf{r}^2 = e^{2at}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2at}$$

$$\frac{\dot{P}\mathbf{r}}{|\dot{P}||\mathbf{r}|} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

wegen des konstanten Winkels  $\angle(\dot{P}, \mathbf{r})$  werden Bögen logarithmischer Spiralen für die schneiden rotierender Schneidwerkzeuge (z. B. Häckselmaschinen) und bei Turbinenrädern verwendet, wegen des konstanten Winkels  $\angle(\dot{P}, \mathbf{r})$  wird diese Spirale auch gleichwinklige Spirale genannt.

Abschließend ermitteln wir die natürlichen Gleichungen der logarithmischen Spirale:

$$\ddot{P}(t) = e^{at}(a^2 \cos t - 2a \sin t - \cos t)\mathbf{i} + e^{at}(a^2 \sin t + 2a \cos t - \sin t)\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}\ddot{P} &= e^{2at}(a^3 \cos t - 2a^2 \sin t \cos t - a \cos^2 t - a^2 \sin t \cos t + 2a \sin^2 t + \sin t \cos t \\ &\quad + a^3 \sin^2 t + 2a^2 \sin t \cos t - a \sin^2 t + a^2 \sin t \cos t + 2a \cos^2 t - \sin t \cos t) \\ &= e^{2at}(a^3 - a + 2a) = a(a^2 + 1)e^{2at} \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{P}\ddot{P}}{\dot{P}^2} = a$$

$$\overline{P}''(t) = \frac{1}{\dot{P}^2} \left( \ddot{P} - \frac{\dot{P}\ddot{P}}{\dot{P}^2} \dot{P} \right) = \frac{e^{-at}}{1+a^2} [(-a \sin t - \cos t)\mathbf{i} + (a \cos t - \sin t)\mathbf{j}]$$

$$\overline{P}''^2 = \frac{e^{-2at}}{(1+a^2)^2} (a^2 \sin^2 t + 2a \sin t \cos t + \cos^2 t + a^2 \cos^2 t - 2a \sin t \cos t + \sin^2 t) = \frac{e^{-2at}}{1+a^2}$$

$$k(t) = \frac{e^{-2at}}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1+a^2}}$$

Andererseits gilt

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e^{at} \sqrt{1+a^2} dt = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{at} = \frac{r\sqrt{1+a^2}}{a}$$

und somit  $k(s) = \frac{1}{as}$ ,  $w(s) = 0$  ein Gegenstück zu den natürlichen Gleichungen der Klothoide.

Der Fall  $a < 0$  bringt für die archimedische Spirale ( $\varphi \leq 0$ ), die hyperbolische Spirale ( $\varphi < 0$ ) und die logarithmische Spirale lediglich die Spiegelung an der  $x$ -Achse, also nichts wesentlich Neues.

Aufgabe

Man berechne die Krümmung  $k(t)$  der archimedischen Spirale.

## 2 Einführung in die Krümmungstheorie einer Fläche

### 2.1 Parameterdarstellung einer Fläche und Flächenkurven

In Analogie zum Vorgehen in der Kurventheorie betrachten wir Flächen als Bilder von ebenen Gebieten<sup>26</sup>  $G$ , d. h.<sup>27</sup>

$$P = P(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)), \quad (u^1, u^2 \in G) \quad (31)$$

(vgl. Abb. 48). Wird ein Parameter, z. B.  $u^2$ , als konstant betrachtet, dann können wir an eine Parameterdarstellung einer Kurve denken; für einen konstanten Parameter  $u^2$  erhalten wir eine  $u^1$ -Linie (in Abb. 48 ausgezogen), bei konstantem  $u^1$  eine  $u^2$ -Linie (in Abb. 48 punktiert). Die  $u^i$ -Linien werden auch Parameterlinien genannt.

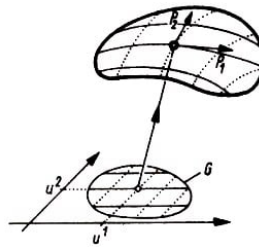


Abb. 48

Zunächst setzen wir voraus, dass sich aus (31) zulässige Parameterdarstellungen der  $u^1$ - und  $u^2$ -Linien ergeben. Tangentenvektoren der  $u^i$ -Linien werden, um sie einfach voneinander unterscheiden zu können, nicht mit Hilfe von  $\dot{\phantom{x}}$  bzw.  $\dot{\phantom{y}}$  bezeichnet, sondern mittels

$$P_i = \frac{\partial P(u^1, u^2)}{\partial u^i} \quad (32)$$

In der Differentialrechnung spricht man bei (32) von partiellen Ableitungen. Es können auch höhere Ableitungen gebildet werden: Betrachten wir bei  $P_1$  nun  $u_1$  als konstant, dann ist

$$P_{12} = \frac{\partial^2 P(u^1, u^2)}{\partial u^1 \partial u^2} := \frac{\partial P_1(u^1, u^2)}{\partial u^2}$$

die partielle Ableitung von  $P_1$  nach  $u^2$  usw. Im folgenden betrachten wir Parameterdarstellungen, die für die weiteren Überlegungen notwendige Voraussetzungen erfüllen und somit "zulässig" sind:

**Definition.** Eine Parameterdarstellung (31) heißt genau dann zulässig, wenn  $P = P(u^1, u^2)$  bzw.  $x = x(u^1, u^2)$ ,  $y = y(u^1, u^2)$ ,  $z = z(u^1, u^2)$  dreimal stetig differenzierbar und  $P_1, P_2$  nicht parallel sind.

Bei einer zulässigen Parameterdarstellung  $P = P(u^1, u^2)$  wird über die etwas früher erhobene Forderung nach der Existenz von  $P_1 \neq 0$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{111}$  sowie von  $P_2 \neq 0$ ,  $P_{22}$ ,

<sup>26</sup>Bei einem ebenen Gebiet  $G$  gehört mit einem Punkt auch eine Umgebung von ihm zu  $G$ , und je zwei Punkte von  $G$  können durch eine in  $G$  liegende Kurve verbunden werden.

<sup>27</sup>Die hochgestellten Indizes bei  $u^1$  und  $u^2$  erhalten später in der Summenkonvention Albert Einsteins (1879-1955) eine wichtige Bedeutung und damit Rechtfertigung.

$P_{222}$  (für konstanten Parameter  $u^2$  bzw.  $u^1$  sollte sich eine zulässige Parameterdarstellung der  $u^1$ - bzw.  $u^2$ -Linien ergeben!) hinaus noch verlangt, dass  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{112}$ ,  $P_{211}$ ,  $P_{122}$ ,  $P_{212}$  und  $P_{221}$  existieren und dass  $P_1 \times P_2 \neq \mathbf{o}$  (gleichwertig mit  $P_1 \nparallel P_2$ ) für alle  $(u^1, u^2) \in G$  gilt.

Nach einem Satz der Differentialrechnung von H. A. Schwarz kommt es bei stetigen partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der Differentiationen an; folglich gilt

$$P_{12} = P_{21}, \quad P_{112} = P_{121} = P_{211}, \quad P_{122} = P_{212} = P_{221}$$

für alle  $(u^1, u^2) \in G$ .

Beispiel: (2.1) Zylinder(fläche) mit (der  $z$ -Achse als) Drehachse (Abb. 49):

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + u^1 \mathbf{k}$$

Für konstanten Parameter  $u^2$  erhalten wir eine Mantellinie ( $u^1$ -Linie), für konstanten Parameter  $u^1$  als  $u^2$ -Linie einen Breitenkreis. Es gilt

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{k} \\ P_2 &= -r \sin u^2 \mathbf{i} + r \cos u^2 \mathbf{j} \nparallel P_1 \\ P_{11} &= P_{12} = P_{21} = \mathbf{o} = P_{111} \\ P_{22} &= -r \cos u^2 \mathbf{i} - r \sin u^2 \mathbf{j} \\ P_{222} &= r \sin u^2 \mathbf{i} - r \cos u^2 \mathbf{j} \\ P_{112} &= P_{121} = P_{211} = \mathbf{o} = P_{221} = P_{212} = P_{122} \end{aligned}$$

Setzen wir  $u^1 = u^1(t) = ht$  ( $h \neq 0$ ) und  $u^2 = u^2(t) = t$ , dann erhalten wir in der Drehzylinderfläche die Kurve

$$\mathbf{r}(t) = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j} + ht \mathbf{k}$$

d. h. eine Schraubenlinie (vgl. Beispiel (1.4) und Abb. 23).



Abb. 49

Allgemein ergibt die Gaußsche Parameterdarstellung<sup>28</sup>

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t) \quad (33)$$

nach Einsetzen in (31) eine Kurve dieser Fläche, wenn (33) eine zulässige Parameterdarstellung einer Kurve der  $u^1, u^2$ -Ebene ist, d. h., wenn die Funktionen in (33) dreimal

<sup>28</sup>Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

stetig differenzierbar sind und  $(\dot{u}^1, \dot{u}^2) \neq (0, 0)$  für alle  $t$  gilt: Ist weder  $u^1(t)$  noch  $u^2(t)$  in einer Umgebung von  $t$  konstant, dann folgt aus

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{v}(P(u^1(t), u^2(t))P(u^1(\tau), u^2(\tau)))}{\tau - t} \\ &= \frac{\mathfrak{v}(P(u^1(t), u^2(t))P(u^1(\tau), u^2(t)))}{\tau - t} + \frac{\mathfrak{v}(P(u^1(\tau), u^2(t))P(u^1(\tau), u^2(\tau)))}{\tau - t} \\ &= \frac{\mathfrak{v}(P(u^1(t), u^2(t))P(u^1(\tau), u^2(t)))}{u^1(\tau) - u^2(t)} \cdot \frac{u^1(\tau) - u^1(t)}{\tau - t} \\ &+ \frac{\mathfrak{v}(P(u^1(\tau), u^2(t))P(u^1(\tau), u^2(\tau)))}{u^2(\tau) - u^2(t)} \cdot \frac{u^2(\tau) - u^2(t)}{\tau - t} \end{aligned}$$

beim Grenzübergang  $\tau \rightarrow t$  wegen der Stetigkeit von  $P_2$

$$\dot{P}(t) = P_1 \dot{u}^1 + P_2 \dot{u}^2 \quad (34)$$

die Kettenregel; bei konstantem  $u^1(t)$  bzw.  $u^2(t)$  gilt (34) trivialerweise. Die Voraussetzungen  $P_1 \nparallel P_2$  und  $(\dot{u}^1, \dot{u}^2) \neq (0, 0)$  ergeben noch  $\dot{P}(t) \neq \mathfrak{o}$ .

Es ist nun nicht mehr schwer, mit Hilfe der Kettenregel und den anderen Differentiationsregeln  $\ddot{P}$  und  $\ddot{P}$  zu berechnen und als stetig zu erkennen; dazu werden stetige Ableitungen  $\ddot{u}^i$ ,  $\ddot{u}^i$  ( $i = 1, 2$ ) benötigt.

Wir möchten noch hervorheben, dass für stetig differenzierbare Funktionen  $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(u^1, u^2)$ ,  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$  allgemein die Kettenregel

$$\dot{\mathfrak{v}}(u^1(t), u^2(t)) = \mathfrak{v}_1 \cdot \dot{u}^1 + \mathfrak{v}_2 \cdot \dot{u}^2 \quad (34^*)$$

gültig ist.

Beispiel: (2.2) Der graphischen Darstellung einer Funktion  $z = f(x, y)$  kann die Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) = O + u^1 \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + f(u^1, u^2) \mathbf{k}$$

zugeordnet werden. Handelt es sich hierbei um eine zulässige Parameterdarstellung? Offensichtlich ist die dreimal stetige Differenzierbarkeit von  $P = P(u^1, u^2)$  gleichwertig mit der dreimal stetigen Differenzierbarkeit von  $f$ . Speziell gilt

$$P_1 = \mathbf{i} + f_1 \mathbf{k} \quad , \quad P_2 = \mathbf{j} + f_2 \mathbf{k} \nparallel P_1$$

Das Bild einer Funktion zweier Veränderlicher ist also nur dann eine Fläche mit zulässiger Parameterdarstellung, wenn sie dreimal stetig differenzierbar ist.

(2.3) Drehflächen. Die Drehzylinderfläche ist Sonderfall einer allgemeineren Flächenklasse. Wieder sei die  $z$ -Achse die Drehachse, die Fläche jedoch durch Drehung einer beliebigen Kurve, einer Erzeugenden (Abb. 50), in der Halbebene  $x \geq 0$  der  $x, z$ -Ebene mit dem natürlichen Parameter

$$\mathfrak{e}(s) = x(s) \mathbf{i} + z(s) \mathbf{k}, \quad x(s) \geq 0 \quad (35)$$

gebildet. Es gilt

$$\mathfrak{e}'(s) = x'(s) \mathbf{i} + z'(s) \mathbf{k}, \quad |\mathfrak{e}'(s)| = 1$$

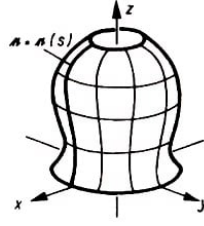


Abb. 50

Für einen konstanten Parameter  $s$  beschreibt ein rotierender Punkt einen Kreis vom Radius  $r = x(s)$ , während die  $z$ -Koordinate  $z = z(s)$  unverändert bleibt, d.h.

$$P(s, \varphi) = O + x(s) \cos \varphi \mathbf{i} + x(s) \sin \varphi \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}$$

bzw. nach Umbenennung der Variablen

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + z(u^1) \mathbf{k} \quad (36)$$

Die  $u^1$ -Linien, die sämtlich zur Erzeugenden kongruent sind, werden Meridiane, die  $u^2$ -Linien Breitenkreise genannt.

Da  $r = x(s)$  und  $z = z(s)$  dreimal stetig differenzierbar sind, können wir auch  $P = P(u^1, u^2)$  dreimal stetig differenzieren; speziell gilt

$$P_1 = r' \cos u^2 \mathbf{i} + r' \sin u^2 \mathbf{j} + z' \mathbf{k} \quad , \quad P_2 = -r \sin u^2 \mathbf{i} + r \cos u^2 \mathbf{j} \nparallel P_1$$

und somit

$$P_1 \times P_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r' \cos u^2 & r' \sin u^2 & z' \\ -r \sin u^2 & r \cos u^2 & 0 \end{vmatrix} = -z' r \cos u^2 \mathbf{i} - z' r \sin u^2 \mathbf{j} + rr' \mathbf{k}$$

woraus

$$(P_1 \times P_2)^2 = (rz')^2 + (rr')^2 = r^2(r'^2 + z'^2) = r^2 > 0$$

für alle Kurven  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$  mit  $r = x(s) > 0$  folgt.

Bezüglich (36) können wir eine Flächenkurve  $r = r(t)$  mit den Gaußschen Parametern

$$u^1 = ht \quad (h \neq 0) \quad , \quad u^2 = t \quad (37)$$

und dem Tangentenvektor

$$\dot{\mathbf{t}} = P_1 h + P_2$$

betrachten. Im Fall der Parameterdarstellung der Drehzylinderfläche gemäß Beispiel (2.1) erhielten wir mit Hilfe von (37) eine Schraubenlinie, die auf Grund des konstanten Winkels  $\angle(\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{k})$  eine Böschungslinie ist.

Allerdings ist dieses Ergebnis von der Parameterdarstellung der Zylinderfläche abhängig; denn auch

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + (u^1 + (u^1)^3) \mathbf{k}$$

ist eine zulässige Parameterdarstellung der Drehzylinderfläche, für die (37) aber eine Flächenkurve  $r = r(t)$  mit

$$\cos \angle(\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{k}) = \frac{\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{k}}{|\dot{\mathbf{t}}|} = \frac{(1 + 3(u^1)^2)h}{\sqrt{(1 + 3(u^1)^2)^2 h^2 + r^2}}$$



bestimmt, für die folglich  $\angle(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t})$  nicht konstant ist. Wir fragen deshalb, ob es eine Parameterdarstellung (33) einer Flächenkurve  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  derart gibt, dass mit ihrer Hilfe eine Böschungslinie mit konstantem Winkel  $\angle(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t})$  beschrieben wird?

Hier suchen wir nur für einen Drehkegel<sup>29</sup> (Abb. 51) mit

$$\mathbf{r}(s) = s \sin \alpha \mathbf{i} - s \cos \alpha \mathbf{k}, \quad (s > 0)$$

die Antwort auf die aufgeworfene Frage, wobei wir an

$$u^1 = s = t, \quad u^2 = u^2(t) \quad (33')$$

denken. Es gilt

$$\dot{\mathbf{r}} = P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot u^2, \quad \dot{\mathbf{r}}^2 = P_1^2 + P_2^2 (u^2)^2 = 1 + r^2 (u^2)^2$$

und damit

$$\cos \angle(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t}) = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + r^2 (u^2)^2}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + s^2 \sin^2 \alpha (u^2)^2}}$$

d. h., dass für eine Böschungslinie der Radikand konstant sein muss, etwa

$$1 + s^2 \sin^2 \alpha (u^2)^2 = c^2 \geq 1$$

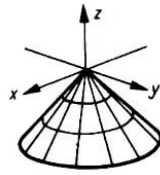


Abb. 51

Daraus folgt für die gesuchte Funktion  $u^2 = u^2(t) = u^2(s)$

$$u^2 = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{s \sin \alpha}, \quad u^2 = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{\sin \alpha} \ln s + c_1 \quad \text{mit} \quad u^1 = s$$

(Gaußsche Parameter einer Böschungslinie auf einem Kegel).

Aufgaben

1. Man zeige, dass

$$P(u^1, u^2) = O + R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + R \cos \theta \mathbf{k}$$

mit den Polarkoordinaten  $\theta = \frac{u^1}{R}$ ,  $0 < \theta < \pi$ , und  $\varphi = u^2$  eine zulässige Parameterdarstellung einer Kugel(fläche) vom Radius  $R$  ist.

2. Man prüfe, ob eine Böschungslinie auf einem Drehkegel zugleich eine Loxodrome ist (einen konstanten Winkel  $\angle(\dot{\mathbf{r}}, P_1)$  bildet), und zeige, dass ihre Projektion in eine zur Kegelachse senkrechte Ebene eine logarithmische Spirale ist.

<sup>29</sup>Man denke an die Projektierung einer Straße (Böschungslinie), die auf einen kegelförmigen Berg führen soll.

## 2.2 Tangentialebene und begleitendes Dreibein

Es sei  $P = P(u^1, u^2)$  eine zulässige Flächenparameterdarstellung,  $P$  ein beliebiger Flächenpunkt und  $P(t) = P(u^1(t), u^2(t))$  eine beliebige Flächenkurve durch  $P$ . Ihr Tangentenvektor

$$\dot{P} = P_1 \dot{u}^1 + P_2 \dot{u}^2$$

liegt in der von  $P_1$  und  $P_2$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon$  durch den betrachteten Punkt (Abb. 52).

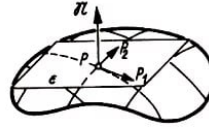


Abb. 52

Haben wir eine weitere zulässige Darstellung der Fläche mit den Parametern  $\bar{u}^1$  und  $\bar{u}^2$ , dann liegen die Tangentenvektoren  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  der  $\bar{u}^1$ - bzw.  $\bar{u}^2$ -Linien durch  $P$  in der Ebene  $\varepsilon$ . Die Ebene  $\varepsilon$  durch  $P$  ist folglich unabhängig von der Wahl der Flächenparameter; sie wird Tangentialebene genannt. Auf ihr stehen  $P_1 \times P_2$  bzw.

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2) := \frac{P_1 \times P_2}{|P_1 \times P_2|}$$

der Normalvektor, senkrecht. Das Tripel  $P_1, P_2, \mathfrak{N}$  heißt begleitendes Dreibein der Fläche, obwohl zwar ein Rechtssystem mit

$$P_1, P_2 \perp \mathfrak{N} \quad , \quad \mathfrak{N}^2 = 1$$

vorliegt, aber im allgemeinen  $P_1, P_2$  keine zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind. Werden für die  $\bar{u}^1$ - bzw.  $\bar{u}^2$ -Linien Gaußsche Parameter

$$u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \quad , \quad u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \quad (38)$$

angegeben, dann lässt sich die Unabhängigkeit der Tangentialebene von der Wahl der Parameter aus

$$\bar{P}(\bar{u}^2, \bar{u}^2) := P(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \quad (39)$$

mit der Kettenregel errechnen:

$$\bar{P}_1 = P_1 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + P_2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \quad , \quad \bar{P}_2 = P_1 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + P_2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2}$$

da  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$  nicht parallel sind, gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} \neq \bar{P}_1 \times \bar{P}_2 &= (P_1 \times P_2) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + (P_2 \times P_1) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\ &= (P_1 \times P_2) \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \right) \end{aligned}$$

d. h., dass die Basistransformation durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{pmatrix}$$

vermittelt wird, für deren Determinante, die Funktionaldeterminante.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (40)$$

gilt. Umgekehrt definieren dreimal stetig differenzierbare Funktionen (38) mit (40) stets einen Übergang zu neuen zulässigen Parametern, eine zulässige Parametertransformation. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir wie oben  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$ , wobei  $\bar{P}_1 \nparallel \bar{P}_2$  nach (40) besteht; die dreimal stetige Differenzierbarkeit von (39) ergibt sich ebenfalls nach Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{12} = & \left( P_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + P_{12} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \right) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + P_1 \cdot \frac{\partial^2 u^1}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2} \\ & + \left( P_{21} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + P_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \right) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + P_2 \cdot \frac{\partial^2 u^2}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2} \end{aligned}$$

usw.

Zulässige Parametertransformationen sind für die Ermittlung geometrischer Eigenschaften bedeutsam, zumal in der Flächentheorie kein so wirkungsvolles Hilfsmittel wie der natürliche Parameter für die Kurventheorie zur Verfügung steht.

Beispiel einer zulässigen Parametertransformation ist stets die Vertauschung der Parameter: Aus  $u^1 = \bar{u}^1$  und  $u^2 = \bar{u}^2$  folgt nach (39)

$$\bar{P}_1 = P_2, \quad \bar{P}_2 = P_1$$

Damit gilt für den auf der Tangentialebene senkrechten Normalvektor

$$\bar{\mathfrak{N}} = \frac{\bar{P}_1 \times \bar{P}_2}{|\bar{P}_1 \times \bar{P}_2|} = \frac{P_2 \times P_1}{|P_2 \times P_1|} = \frac{-P_1 \times P_2}{|-P_1 \times P_2|} = -\frac{P_1 \times P_2}{|P_1 \times P_2|} = -\mathfrak{N}$$

Allgemein kann festgestellt werden, dass die Vektoren  $P_1, P_2$  des begleitenden Dreibeins von der Wahl der Flächenparameter abhängen, während  $\mathfrak{N}$  bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Die für die Ermittlung von geometrischen Eigenschaften der Fläche notwendigen zulässigen Parametertransformationen können wir später in einem gewissen Maße umgehen, indem wir uns auf die Invarianz von Tangentialebene bzw. Flächennormale und die Kurventheorie stützen.

Aufgaben

1. Man berechne bezüglich der Parameterdarstellungen in den Beispielen (2.1), (2.2)

und (2.3) sowie der Aufgabe 1 des vorigen Abschnitts den Normalvektor  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2)$  der Drehzylinderfläche, des Bildes einer Funktion von zwei Veränderlichen, der Drehflächen und der Kugel.

2. Man transformiere im Beispiel (2.1) die Parameter nach der Vorschrift

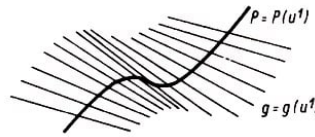
$$u^1 = \bar{u}^1 + \bar{u}^2, \quad u^2 = \bar{u}^1 - \bar{u}^2$$

und berechne  $\mathfrak{N}$ , nachdem man sich von der Zulässigkeit dieser Transformation überzeugt hat.

## 2.3 Regelflächen und andere einparametrische Scharen von Kurven

Der Name Regelfläche wurde vom französischen *surface réglée* (geradlinige Fläche) abgeleitet. Diese Flächen kann man sich wie folgt durch eine bewegliche Gerade erzeugt denken (Abb. 53):

Abb. 53



Ein Punkt einer Geraden beschreibt eine "Bahn"

$$P = P(u^1)$$

wobei für jedes  $u^1$  die Richtung der Geraden durch einen Einheitsvektor

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(u^1)$$

bestimmt wird. Ein beliebiger Punkt  $P$  der Geraden  $g = g(u^1)$  besitzt die Gleichung

$$P = P(u^1, u^1) = P(u^1) + u^2 \mathfrak{a}(u^1) \quad (41)$$

Es liegt eine zulässige Parameterdarstellung vor, wenn

1.  $P = P(u^1)$  und  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(u^1)$  dreimal stetig differenzierbar sind und
2.  $P_1 \times P_2 = (\dot{P}(u^1) + u^2 \dot{\mathfrak{a}}(u^1)) \times \mathfrak{a}(u^1) \neq \mathbf{0}$ , d.h.  $\dot{P} + u^2 \dot{\mathfrak{a}} \nparallel \mathfrak{a}$ , gilt.

Wir fassen (41) mit 1. und 2. als Definition der Regelfläche auf.

Beispiele

(2.4) Hyperbolisches Paraboloid (Abb. 14b). Seine Definitionsgleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \quad (42a)$$

Hieraus ist zu ersehen, dass für konstantes  $z \neq 0$ , d. h. in den Ebenen parallel zur  $x, y$ -Ebene, durch (42a) Hyperbeln bestimmt werden; die  $x, z$ -Ebene ( $y = 0$ ) und die  $y, z$ -Ebene ( $x = 0$ ) schneiden die Fläche (42a) in Parabeln.

Die Gleichung (42a) ist äquivalent zu

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0 \quad (42b)$$

und somit auch äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad , \quad \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0 \quad (42c)$$

bzw. zu dem Gleichungssystem

$$\lambda' = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad , \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \lambda' + 2cz = 0 \quad (42d)$$

Somit wird das hyperbolische Paraboloid von den Schnittgeraden gebildet, die für jedes  $\lambda$  bzw.  $\lambda'$  entstehen, d. h., dass diese Fläche zwei Scharen von Geraden enthält. Um eine Darstellung (41) zu erhalten, kann etwa  $P(u^1) = O + u^1(ai + bj)$ , d. h. die Gerade mit  $\lambda' = 0$ , gewählt und  $\alpha(u^1)$  aus (42c) und  $\lambda = 2u^1$  bestimmt werden.

(2.5) Einschaliges Hyperboloid (Abb. 12a). In der analytischen Geometrie wird die Definitionsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (43a)$$

verwendet. Zur Motivierung des Namens kann festgestellt werden, dass die Ebenen  $x = 0$ ,  $y = 0$  oder allgemein  $y = mx$ , d. h. die  $y, z$ -Ebene, die  $x, z$ -Ebene, sogar eine beliebige Ebene durch die  $z$ -Achse, die Fläche (43 a) in Hyperbeln schneiden.

Für  $a = b$  erhält man eine Drehfläche (vgl. Beispiel (2.3)), ein einschaliges Rotationshyperboloid, das für die Herstellung von Getrieben mit "hyperbolischen Rädern" auf windschiefen Achsen bzw. den Bau von Kühltürmen von Bedeutung ist.

Die Ebenen  $x = \pm a$  schneiden das einschalige Hyperboloid wegen  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  bzw.  $z = \pm \frac{c}{b}y$  in je zwei Geraden.

Im Fall des einschaligen Rotationshyperboloides liegt somit eine Regelfläche vor, weil mit Hilfe von  $P(u^1) = O + a \cos u^1 i + a \sin u^1 j$  und der Geraden  $x = a$ ,  $z = \frac{c}{b}y$  zunächst  $\alpha(0)$  und dann  $\alpha(u^1)$  für eine Darstellung (41) berechnet werden kann.

Um im Fall  $a = b$  ebenfalls zu diesem Resultat zu gelangen, geben wir die zu (43a) äquivalente Gleichung

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (43b)$$

an. Die Gleichung (43b) ist genau dann erfüllt, wenn das Gleichungssystem

$$\alpha \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \beta \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad , \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \beta = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \alpha \quad (43c)$$

bzw. das Gleichungssystem

$$\alpha' \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \beta' \quad , \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \beta' = \alpha' \left(1 - \frac{x}{a}\right) \alpha \quad (43d)$$

erfüllt wird. Nach (43c) und (43d) erhalten wir die Punkte des einschaligen Hyperboloids jeweils als Schnitt zweier Ebenen, d. h., dass auf ihm ebenfalls zwei Scharen von Geraden liegen.

Die Ergebnisse der Beispiele (2.4) und (2.5) lassen sich folgendermaßen umkehren:

**Satz 2.1.** Jede Regelfläche mit zwei Geradenscharen, bei der zwei Geraden genau dann windschief sind, wenn sie der gleichen Schar angehören, ist entweder ein hyperbolisches Paraboloid oder ein einschaliges Hyperboloid.

Der Beweis kann in der analytischen Geometrie ohne Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung geführt werden:

Wir wählen drei Geraden  $f_0, f_1, f_2$  der einen Schar und zwei Geraden  $g_0, g_1$  der zweiten Schar, die  $f_0, f_1, f_2$  in den Punkten  $O, P, Q, R, S, T$  treffen (Abb. 54).

Dann ist  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  mit  $\mathbf{a}_1 := O - R$ ;  $\mathbf{a}_2 := P - O$  und  $\mathbf{a}_3 = Q - P$  eine Basis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $T = O = +\mathbf{a}_1$ . Eine beliebige Gerade  $g$  der zweiten Schar mit  $f_0, f_1 \nparallel g$  ist Schnitt der Ebenen  $\varepsilon_{OXY} = \varepsilon_{OPY}$  bzw.  $\varepsilon_{QXY} = \varepsilon_{QRX}$ , wobei

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu - 1 & x \\ 0 & 1 & \mu & y \\ 0 & 0 & \mu & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mu - 1 & x \\ 1 & \mu & y \\ 0 & \mu & z \end{vmatrix} = -(\mu - 1)z + \mu x = \mu(x - z) + z = 0 \quad (\text{I})$$

und

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & \lambda & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & \lambda & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & y-z \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & x-z+1 \end{vmatrix} \\ = -\lambda(x-z+1) + (y-z) = 0 \quad (\text{II})$$

deren Gleichungen sind. Außerdem müssen  $f_2$  und  $g$  komplanar, d. h.  $\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - c\mathbf{a}_3$ ,  $(\mu - 1)\mathbf{a}_1 + (\mu - \lambda(\mathbf{a}_2 + \mu\mathbf{a}_3)$  linear abhängig sein:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu - 1 \\ -\lambda & -1 & \mu - \lambda \\ 0 & -c & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \mu - \lambda \\ -c & \mu \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & \mu - 1 \\ -c & \mu \end{vmatrix} \\ = -\mu + c(\mu - \lambda) + \lambda(\mu + c(\mu - 1)) = -\mu(1 + c + \lambda + \lambda c) - 2c\lambda$$

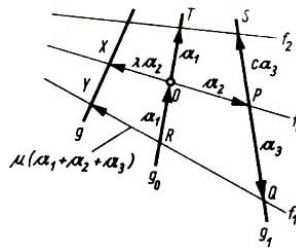


Abb. 54

Daraus folgt nach (1)

$$\begin{aligned} 0 &= -\mu(x-z)(1-c-\lambda-c\lambda) - 2c\lambda(x-z) = z(1-c-\lambda-c\lambda) - 2c\lambda(x-z) \\ &= \lambda[(c-1)z - 2cx] + (1-c)z \end{aligned}$$

und somit nach (II)

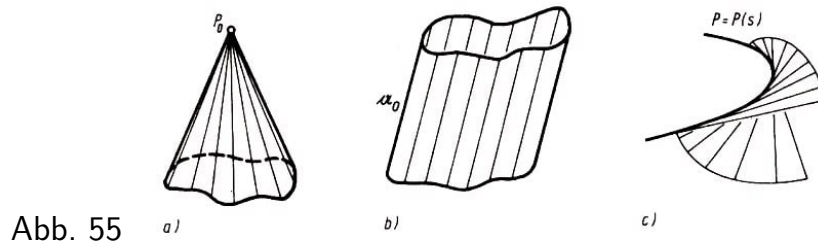
$$0 = (y-z)[(c-1)z - 2cx] + (1-c)(x-z+1)z$$

d. h., dass die Punkte der Fläche eine Gleichung zweiten Grades erfüllen.

Wir überlassen dem Leser die Argumentation dafür, dass die Regelfläche auch für  $g \parallel f_0$  oder  $g \parallel f_1$  eine Fläche zweiter Ordnung ist.

Durch Fallunterscheidung lässt sich nunmehr zeigen, dass unter den nichtebenen Flächen zweiter Ordnung nur hyperbolisches Paraboloid und einschaliges Hyperboloid zwei Geradenscharen enthalten.

Unter den Flächen zweiter Ordnung besitzen die Kegel und Zylinder eine Geradenschar. Diese Flächen werden allgemein wie folgt definiert:



Beispiele

(2.6) Die Kegelfläche (Abb. 55a) ist eine Regelfläche (41) mit konstanter Funktion  $P = P(u^1) = P_0$  (vgl. Abb. 51 mit einer Drehkegelfläche und Abb. 12c). Aus der Zulässigkeit der Parameterdarstellung folgt  $u^2 \neq 0$  (ausgeschlossene Kegelspitze) und  $\dot{\alpha} \neq 0$ , d. h., dass  $\alpha(u^1)$  nicht konstant ist.

(2.7) Die Zylinderflächen (Abb. 55 b) werden unter den Regelflächen (41) durch eine Konstante  $\alpha = \alpha(u^1) = \alpha_0$  gekennzeichnet (vgl. die Drehzylinderfläche in Abb. 49). Hier darf  $P(u^1)$  nicht konstant sein.

Im Fall der Kegel- und Zylinderfläche heißen die Geraden  $g(u^1)$  Mantellinien.

(2.8) Tangentenflächen (Abb. 55 c). Es sei  $P = P(s)$  eine Kurve mit dem natürlichen Parameter  $s$ . Wir betrachten eine Regelfläche mit der Bahn  $P = P(s)$  und dem Feld der Richtungsvektoren  $\alpha = P'(s)$ , d. h.

$$P(u^1, u^2) := P(u^1) + u^2 P'(u^1) \quad (44)$$

Nach den Frenetschen Formeln gilt

$$P_1 \times P_2 = (P'(u^1) + u^2 P''(u^1)) \times P'(u^1) = u^2 k \mathbf{n} \times \mathbf{t} = -u^2 k \mathbf{b}$$

so dass eine zulässige Parameterdarstellung vorliegt, wenn  $P = P(s)$  viermal stetig differenzierbar ist und sowohl  $u^2$  als auch  $k = k(s)$  von Null verschieden sind. Für  $u^2 = 0$

erhält man  $P = P(u^1)$ , die ursprüngliche Kurve, welche Gratlinie, Rückkehrkante oder Striktionslinie der Tangentenfläche (44) genannt wird.

Im folgenden befassen wir uns mit einer speziellen Klasse von Regelflächen, die wir zunächst kennzeichnen:

**Definition.** Eine Regelfläche heißt genau dann Torse, wenn die Tangentialebene in einem Punkt der erzeugenden Gerade  $g(u^1)$  gleichzeitig Tangentialebene für alle Punkte von  $g(u^1)$  ist.

Beispiele für Torsen sind Kegel-, Zylinder- und Tangentenflächen, jedoch weder einschaliges Hyperboloid noch ein hyperbolisches Paraboloid. Für die rechnerische Überprüfung der Eigenschaft einer Regelfläche, Torse zu sein, kann ein einfaches Kriterium angegeben werden:

Eine Regelfläche ist genau dann eine Torse, wenn der Normalvektor  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2)$  durch  $u^1$  bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt ist, d. h.

$$\mathfrak{N}_2 = \mathbf{o}$$

Im Beispiel der Kegelfläche gilt<sup>30</sup>

$$P_1 \times P_2 = (\dot{P} + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a} = u^2 \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}$$

$$\mathfrak{N}(u^1, u^2) = \pm \frac{\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}}{|\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}|}, \quad \mathfrak{N}_2 = \mathbf{o}$$

im Beispiel der Zylinderfläche

$$P_1 \times P_2 = \dot{P} \times \mathbf{a}, \quad \mathfrak{N}(u^1, u^2) = \frac{\dot{P} \times \mathbf{a}}{|\dot{P} \times \mathbf{a}|}, \quad \mathfrak{N}_2 = \mathbf{o}$$

und im Beispiel der Tangentenfläche<sup>31</sup>

$$\mathfrak{N}(u^1, u^2) = \mp \mathbf{b}(u^1), \quad \mathfrak{N}_2 = \mathbf{o}$$

Für spätere Überlegungen stellen wir ein weiteres Torsenkriterium bereit:

**Satz 2..2** Eine Regelfläche (41) ist genau dann Torse, wenn das Spatprodukt  $\dot{P} \mathbf{a} \dot{\mathbf{a}}$  verschwindet, d. h.  $\dot{P} \mathbf{a} \dot{\mathbf{a}} = 0$ .

**Beweis.** Wegen  $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = 1$  gilt  $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2 = 0$ , d. h.  $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{N}_2$ . Somit ist  $|\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}_2| = |\mathfrak{N}_2|$ , und  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}_2 = \mathbf{o}$  charakterisiert eine Torse.

Es sei  $g = g(u^1, u^2) := (P_1 \times P_2)^2$ . Dann gelten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\dot{P} + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a} \\ \mathfrak{N}_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \right) (\dot{P} + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a} + \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} + \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \right) \sqrt{g} \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}_2 &= \mathfrak{N} \times \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} \right) = \frac{1}{g} [(\dot{P} + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a}] \times (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}) = \frac{1}{g} (\dot{P} \times \mathbf{a}) \times (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{a}) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

<sup>30</sup>Für  $u^2 > 0$  ist das obere, für  $u^2 < 0$  das untere Vorzeichen zu nehmen.

<sup>31</sup>Für  $u^2 > 0$  ist das obere, für  $u^2 < 0$  das untere Vorzeichen zu nehmen.



und nach dem Entwicklungssatz  $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = -\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c})$

$$\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}_2 = \frac{1}{g}[-\dot{P}(\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}(\dot{P}\dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{a})] = -\frac{\mathfrak{a}}{g}(\dot{P}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}})$$

Somit ist  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{o}$  seinerseits gleichwertig mit  $\dot{P}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}} = 0$ , w.z.b.w.

Abschließend beweisen wir den folgenden

**Satz 2.3.** Die Menge der Torsen besteht aus Kegel-, Zylinder- und Tangentenflächen sowie aus Zusammensetzungen solcher Flächen.

**Beweis.** Nach der obigen Ermittlung von  $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{o}$  für Kegel-, Zylinder- und Tangentenflächen haben wir zu zeigen, dass jede Torse eine solche Fläche bzw. eine Zusammensetzung von ihnen ist.

Bei einer Torse  $P(u^1, u^2) = P(u^1) + u^2\mathfrak{a}(u^1)$  dürfen wir o. B. d. A.  $\dot{P}\mathfrak{a} = 0$  voraussetzen. Denn anderenfalls setzen wir  $\bar{u}^1 := u^1$ ,  $\bar{u}^2 := u^2 + \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1$  und nehmen die Parametertransformation

$$u^1 = \bar{u}^1, \quad u^2 = \bar{u}^2 - \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1$$

vor, die wegen der nicht verschwindenden Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\dot{P}\mathfrak{a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

offenbar zulässig ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^1) &= P(\bar{u}^1) + (\bar{u}^2 - \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1)\mathfrak{a}(\bar{u}^1) = P(\bar{u}^1) - \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1\mathfrak{a}(\bar{u}^1) + \bar{u}^2\mathfrak{a}(\bar{u}^1) \\ &= \bar{P}(\bar{u}^1) + \bar{u}^2\mathfrak{a}(\bar{u}^1) \end{aligned}$$

mit  $\bar{P}(\bar{u}^1) := P(\bar{u}^1) - \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1\mathfrak{a}(\bar{u}^1)$ , wobei

$$\dot{\bar{P}}\mathfrak{a} = (\dot{P} - (\dot{P}\mathfrak{a})\mathfrak{a} - \int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1\dot{\mathfrak{a}})\mathfrak{a} = -\int \dot{P}\mathfrak{a}d\bar{u}^1\dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = 0$$

wegen  $\dot{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = 0$  infolge von  $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 1$  gilt.

Unter der Voraussetzung  $\dot{P}\mathfrak{a} = 0$  nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:

**Fall 1:**  $\dot{P} = \mathfrak{o}$  auf einem Intervall. Dann ist  $P(u^1) = P_0$  ein fester Punkt und  $P = P(u^1, u^2)$  eine Kegelfläche.

**Fall 2:**  $\dot{P} \neq \mathfrak{o}$ , wobei wir o. B. d. A.  $u^1$  als natürlichen Parameter der Kurve  $P = P(u^1)$  voraussetzen dürfen. Dann ist  $P'$  ein Einheitsvektor und das Dreiein  $P', \mathfrak{a}, \mathfrak{N}$  orthonormiert; für  $\mathfrak{a}'$  machen wir den Ansatz  $\mathfrak{a}' = aP' + b\mathfrak{a} + c\mathfrak{N}$ , woraus sich  $a = \mathfrak{a}'P'$ ,  $b = \mathfrak{a}'\mathfrak{a} = 0$  und schließlich

$$c = \mathfrak{a}'\mathfrak{N} = \mathfrak{a}' \left( \frac{1}{\sqrt{g}}(P' + u^2\mathfrak{a}') \times \mathfrak{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}}P'\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = 0$$

nach 45) für unsere Torse ergibt, d. h.  $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}'P')P'$ .

Fall 2a:  $\alpha' P' = 0$  für ein Intervall, d. h.  $\alpha' = 0$ . Es muss  $\alpha(u^1) = \alpha_0$  konstant und  $P = P(u^1, u^2)$  eine Zylinderfläche sein.

Fall 2b:  $\alpha \alpha' P' \neq 0$  (gilt für ein ganzes Intervall). Wir machen für eine Flächenkurve den Ansatz

$$R(u^1) := P(u^1, v(u^1)) = P(u^1) + v(u^1)\alpha(u^1)$$

wobei wir über die Funktion  $v = v(u^1)$  noch verfügen können. Zunächst gilt

$$R'(u^1) = P' + v\alpha' + v'\alpha = P'(1 + v(\alpha' P')) + v'\alpha$$

Wir setzen  $v(u^1) := -\frac{1}{\alpha' P'}$  und haben schließlich

$$R'(u^1) = v'\alpha$$

d. h., dass  $P = P(u^1, u^2)$  für  $v' \neq 0$  eine Tangentenfläche und für  $v' = 0$  in einem Intervall eine Kegelfläche ist.

Damit ist der Satz bewiesen, denn nach unseren bisherigen Überlegungen können nur noch einzelne  $u^1$ -Werte unberücksichtigt sein, und in den entsprechenden Geraden  $g(u^1)$  werden die Teile der Fläche zusammengesetzt.

Die Regelflächen sind einparametrische Geradenscharen  $g = g(u^1)$ . Analog sind Drehflächen einparametrische Scharen von Kurven, nämlich der Meridiane.

Eine beliebige Fläche lässt sich als Schar der  $u^1$ -Linien, aber auch als Schar der  $u^2$ -Linien auffassen; der Scharparameter ist dabei  $u^2$  bzw.  $u^1$ .

Bei der Auffassung der Fläche als Schar von Kurven ist zweifellos der einfachste Fall, eine Schar von Geraden zu betrachten. Vom Standpunkt der Elementargeometrie kann eine Schar von Kreisen als nächster Fall Interesse beanspruchen. Bei einer Röhrenfläche schneiden die Normalebenen einer Kurve  $P = P(s)$  aus der Fläche (untereinander kongruente) Kreise  $k(P(s), r)$  heraus:

$$P(u^1, u^2) = P(u^1) + r \cos u^2 \mathbf{n}(u^1) + r \sin u^2 \mathbf{b}(u^1)$$

Für sie gilt

$$P_1 = P' + r \cos u^2 \mathbf{n}' + r \sin u^2 \mathbf{b}' = (1 - kr \cos u^2) \mathbf{t} - wr \sin u^2 \mathbf{n} + wr \cos u^2 \mathbf{b}$$

$$P_2 = -r \sin u^2 \mathbf{n} + r \cos u^2 \mathbf{b}$$

$$P_1 \times P_2 = -r(1 - kr \cos u^2)(\cos u^2 \mathbf{n} + \sin u^2 \mathbf{b})$$

da eine in der Praxis verwendete Röhrenfläche für alle  $u^2$  definiert sein muss, ergibt sich die Bedingung

$$r < \frac{1}{k(u^1)} \quad \text{für alle } u^1$$

Bei dieser Parameterdarstellung stehen die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien aufeinander senkrecht (orthogonales Netz), wenn  $P_1 P_2 = wr^2 = 0$  gilt, d. h., wenn die Kurve  $P = P(s)$  eben ist.

Ein Beispiel dafür ist der Torus, bei dem  $P = P(s)$  ein Kreis vom Radius  $R > r$  ist. Die Bedingung ist nicht notwendig; bei einer Änderung der Parameterdarstellung lässt sich auch für nicht ebene Kurven  $P = P(s)$  ein orthogonales Netz der  $u^1$ - und  $u^2$ -Linien erreichen (vgl. die folgende Aufgabe 2).

Mit dem Begriff der einparametrischen Kurvenschar ist der Begriff der Hüllkurve, Einhüllenden oder Enveloppe verbunden:

Eine Hüllkurve  $P = P(s)$  berührt jede Kurve einer einparametrischen Schar  $P = P(s, t)$ . Um eine einfache Bedingung für die Hüllkurve der Schar zu erhalten, setzen wir voraus, dass die Menge der Berührungspunkte der Kurven der Schar infolge geeigneter Wahl der Kurvenparameter  $t$  für einen von  $s$  abhängigen Parameterwert  $t(s)$  angenommen wird, d. h.  $P(s) = P(s, t(s))$ .

Wegen der vorausgesetzten Berührung müssen für alle  $s$  die Tangenten übereinstimmen, d. h.

$$P'(s, t)|_{t=t(s)} \parallel \dot{P}(s, t(s))$$

oder, wenn wir den Scharparameter mit  $u^1$  und den Parameter der Kurven mit  $u^2$  bezeichnen,

$$P_1(u^1, u^2) \times P_2(u^1, u^2)|_{u^2=u^2(u^1)} = \mathbf{0} \quad (46)$$

Diese Bedingung gestattet es, bei vorliegender Kurvenschar  $P = P(u^1, u^2)$  gegebenenfalls eine Einhüllende zu finden. Diese Bedingung ist natürlich für die Gratlinie einer Tangentenfläche mit  $u^2(u^1) = 0$  erfüllt (Abb. 55 c).

Falls hinreichend viele Kurven einer Schar gezeichnet wurden, sind die Konturen einer Einhüllenden leicht zu erkennen. Wir behandeln abschließend ein Beispiel.

(2.9) Kreisschar (Abb. 56).

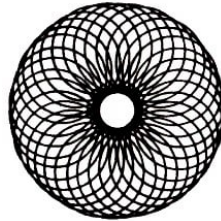


Abb. 56

Es sei

$$P(u^1, u^2) = P(u^1) + r \sin u^2 \mathbf{t}(u^1) + r \cos u^2 \mathbf{n}(u^1)$$

wobei die Mittelpunkte  $P(u^1)$  auf einem Kreis liegen, d. h.

$$P(s) = O + R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}$$

hieraus erhalten wir

$$\mathbf{t}(s) = -\sin \frac{s}{R} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{R} \mathbf{j} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}(s) = -\cos \frac{s}{R} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}$$

Wegen

$$P_1 = \mathbf{t} + kr \sin u^2 \mathbf{n} - kr \cos u^2 \mathbf{t} \quad , \quad P_2 = r \cos u^2 \mathbf{t} - r \sin u^2 \mathbf{n}$$

führt die Bedingung (46) zu

$$\mathbf{o} = P_1 \times P_2 = [-r \sin u^2 - kr^2 \sin u^2 \cos u^2 + kr^2 \sin u^2 \cos u^2] \mathbf{b} = -r \sin u^2 \mathbf{b}$$

und folglich zu  $\sin u^2 = 0$ , d. h.  $u^2 = 0, \pi$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} P_o(u^1) &= P(u^1) + r\mathbf{n} = O + (R-r) \cos \frac{u^1}{R} \mathbf{i} + (R-r) \sin \frac{u^1}{R} \mathbf{j}, \\ P_\pi(u^1) &= P(u^1) - r\mathbf{n} = O + (R+r) \cos \frac{u^1}{R} \mathbf{i} + (R+r) \sin \frac{u^1}{R} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Für  $r \neq R$  haben wir zwei einhüllende Kreise mit den Radien  $|R-r|$  und  $R+r$  erhalten.

Aufgaben

1. Man gebe die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien der Wendelfläche

$$P(u^1, u^2) = O + u^2(\cos u^1 \mathbf{i} + \sin u^1 \mathbf{j}) + au^1 \mathbf{k}$$

und  $P = P(u^1)$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u^1)$  gemäß (41) an, um zu zeigen, dass keine Torse vorliegt.

2. Man zeige, dass die von den Hauptnormalen bzw. Binormalen einer Kurve erzeugte Regelfläche genau dann eine Torse ist, wenn die Kurve in einer Ebene verläuft.

3. Man verwende für eine Röhrenfläche die Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) = P(u^1) + r \cos u^1 (\cos f(u^1) \mathbf{n} + \sin f(u^1) \mathbf{b}) + r \sin u^1 (-\sin f(u^1) \mathbf{n} + \cos f(u^1) \mathbf{b})$$

und prüfe, unter welchen Bedingungen für  $f$  die  $u^1$ - und  $u^2$ -Linien ein orthogonales Netz bilden.

4. Man bestimme für die Geradenschar  $P(x, t) = O + t\mathbf{i} + (2xt - x^2)\mathbf{j}$  die Einhüllende näherungsweise durch Zeichnen hinreichend vieler Geraden (verschiedene  $x$ -Werte!) und rechnerisch mittels (46).

## 2.4 Bogenlänge von Flächenkurven und metrische Fundamentalgrößen

In der Fläche  $P = P(u^1, u^2)$  sei eine Kurve mit der Gaußschen Parameterdarstellung  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$  gegeben, d. h.

$$P(t) = P(u^1(t), u^2(t))$$

Bei der Berechnung der Bogenlänge wird<sup>32</sup>

$$\dot{P}^2 = (P_i \dot{u}^i)^2 = (P_i \dot{u}^i)(P_k \dot{u}^k) = P_i P_k \dot{u}^i \dot{u}^k$$

<sup>32</sup>Hier bedienen wir uns der Einsteinschen Summenkonvention: Statt  $\sum_{i=1}^2 P_i \dot{u}^i$  schreiben wir einfach  $P_i \dot{u}^i$ ; über einen unten und einen oben stehenden Index ist zu summieren.

benötigt. Offenbar sind die Koeffizienten  $P_i P_k$  unabhängig von der speziellen Kurve. Wir formulieren deshalb folgende

Definition. Die Skalarprodukte  $g_{ik} = g_{ik}(u^1, u^2) := P_i P_k$  heißen metrische Fundamentalgrößen.

Es gilt

$$g_{ii} = P_i^2 > 0 \quad , \quad g_{12} = P_1 P_2 = P_2 P_1 = g_{21}$$

d. h., dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

in der Hauptdiagonale sämtlich positive Glieder besitzt und symmetrisch ist. Weiterhin ist nach dem Entwicklungssatz und der Definition von  $g$

$$\begin{aligned} |g_{ik}| &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g_{11}P_1^2 - g_{21}P_1P_2 = (g_{11}P_2 - g_{21}P_1)P_2 \\ &= [-P_1(P_2P_1) + P_2(P_1P_1)]P_2 = [(P_1 \times P_2) \times P_1]P_2 \\ &= (P_1 \times P_2) \cdot (P_1 \times P_2) = g > 0 \end{aligned}$$

Außerdem bestimmt die Matrix  $(g_{ik})$  wegen

$$g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k > 0 \Leftrightarrow (\dot{u}^1, \dot{u}^2) \neq (0, 0)$$

eine positiv definite quadratische Form.

Die  $g_{ik}$  gestatten die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve der Fläche mit Hilfe ihrer Gaußschen Parameterdarstellung:

$$s(t) = \int \sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k} dt \quad (47)$$

Sie können aber auch zur Berechnung des Schnittwinkels zweier Flächenkurven herangezogen werden: Die Flächenkurven  $P = P(t)$  und  $P = Q(t)$  mögen sich im Punkt  $S$  schneiden (Abb. 57), o. B. d. A. sei  $P(0) = S = Q(0)$ .

Ferner seien  $u^i = u^i(t)$  die Gaußschen Parameter der Flächenkurve  $P = P(t)$  und  $u^i = v^i(t)$  die von  $P = Q(t)$ . Wegen  $\dot{P}\dot{Q} = |\dot{P}||\dot{Q}|\cos\angle(\dot{P}, \dot{Q})$  gilt

$$\cos\angle(\dot{P}, \dot{Q}) = \frac{g_{ik}\dot{u}^i\dot{v}^k}{\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\sqrt{g_{ik}\dot{v}^i\dot{v}^k}}$$

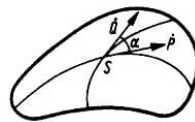


Abb. 57

Allgemein haben wir für Vektoren  $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2)$  und  $\mathfrak{y} = (\eta_1, \eta_2)$  der Tangentialebene

$$\cos\angle(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{g_{ik}\xi^i\eta^k}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}\sqrt{g_{ik}\eta^i\eta^k}} \quad (48)$$

Außerdem gilt folgende Flächeninhaltsformel<sup>33</sup>

$$F = \iint_B \Re P_1 P_2 du^1 du^2 = \iint_B \sqrt{g} du^1 du^2 \quad (49)$$

wobei  $B$  ein Bereich (Gebiet mit seinen Begrenzungspunkten) ist.

Beispiele

(2.10) Drehflächen (vgl. Beispiel (2.3)). Es gilt

$$g_{11} = P_1^2 = r'^2 + z'^2 = 1, \quad g_{12} = g_{21} = P_1 P_2 = 0 \quad (\text{orthogonales Netz})$$

$$g_{22} = P_2^2 = r^2, \quad g = |g_{ik}| = r^2$$

(2.11) Funktionen zweier Variablen (vgl. Beispiel (2.2)). Wir erhalten

$$g_{11} = 1 + f_1^2, \quad g_{12} = g_{21} = f_1 f_2$$

$$g_{22} = 1 + f_2^2, \quad g = 1 + f_1^2 + f_2^2$$

Dabei ist  $u^i$  die Bogenlänge der  $u^i$ -Linien genau dann, wenn  $g_{ii} = 1$ , d. h.  $f_i = 0$  gilt; die Fläche stellt dann eine Zylinderfläche mit Mantellinien dar, die zu einer Koordinatenachse parallel sind; auf ihr bilden die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien ein orthogonales Netz.

Es können  $u^1$  und  $u^2$  nur dann beide Bogenlänge sein, wenn die Fläche zur  $x, y$ -Ebene parallel, wenn  $f$  konstant ist.

(2.12) Ebene in kartesischen Koordinaten:  $P(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$ .

Wegen  $P_1 = i$  und  $P_2 = j$  gilt  $g_{ik} = \delta_{ik}$ , d. h.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und  $g = 1$ .

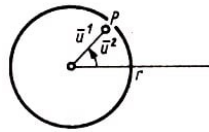


Abb. 58

(2.12') Ebene in Polarkoordinaten (Abb. 58):

$$\overline{P}(\overline{u}^1, \overline{u}^2) = (\overline{u}^1 \cos \overline{u}^2, \overline{u}^1 \sin \overline{u}^2, 0)$$

d. h.  $u^1 = \overline{u}^1 \cos \overline{u}^2$ ,  $u^2 = \overline{u}^2 \sin \overline{u}^2$ . Die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \cos \overline{u}^2 & -\overline{u}^1 \sin \overline{u}^2 \\ \sin \overline{u}^2 & \overline{u}^1 \cos \overline{u}^2 \end{vmatrix}$$

<sup>33</sup>Die Gleichheit der Integrale ergibt sich aus  $\Re P_1 P_2 \Re(P_1 \times P_2) = \frac{1}{\sqrt{g}}(P_1 \times P_2) \cdot (P_1 \times P_2) = \sqrt{g}$ ; die Entstehung des Integranden wird im Anhang skizziert (vgl. Abb. 61 a).

verschwindet gerade für  $\bar{u}^1 = 0$ ; somit ist die Parametertransformation mit Ausnahme des Ursprunges zulässig.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 &= (\cos \bar{u}^2, \sin \bar{u}^2, 0) \\ \bar{P}_2 &= (-\bar{u}^1 \sin \bar{u}^2, \bar{u}^1 \cos \bar{u}^2, 0) \\ \bar{g}_{11} &= 1, \quad \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0, \quad \bar{g}_{22} = (\bar{u}^1)^2, \quad \bar{g} = (\bar{u}^1)^2\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir den Kreisflächeninhalt<sup>34</sup>

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{\bar{g}} d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \bar{u}^1 d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \bar{u}^2 = \pi r^2$$

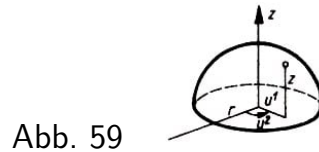


Abb. 59

(2.13) Halbkugel in Zylinderkoordinaten (Abb. 59):

$$P(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2 \sin u^2, \sqrt{r^2 - (u^1)^2})$$

Wir berechnen zunächst  $P_1, P_2$  und dann die metrischen Fundamentalgrößen und deren Determinante:

$$\begin{aligned}P_1 &= \left( \cos u^2, \sin u^2, -\frac{u^1}{\sqrt{g}} \right) \\ P_2 &= (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 0) \\ g_{11} &= 1 + \frac{(u^1)^2}{r^2 - (u^1)^2} = \frac{r^2}{r^2 - (u^1)^2} \\ g_{21} &= g_{12} = 0, \quad g_{22} = (u^1)^2, \quad g = \frac{r^2 (u^1)^2}{r^2 - (u^1)^2}\end{aligned}$$

Um auch hier die Flächeninhaltsformel erfolgreich auswerten zu können, denken wir an die Substitution  $u := r^2 - (u^1)^2$ . Wegen  $\frac{du}{du^1} = -2u^1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{g} du^1 du^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^r -\frac{r}{2} u^{-1/2} \frac{du}{du^1} du^1 du^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^0 -\frac{r}{2} u^{-1/2} du du^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -ru^{1/2} \right]_{r^2}^0 du^2 = \int_0^{2\pi} r^2 du^2 = 2\pi r^2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich wie in der Elementargeometrie  $4\pi r^2$  als Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius  $r$ .

<sup>34</sup>Da die Parameterdarstellung für  $\bar{u}^1 = 0$  nicht zulässig ist, müssten die Integrationsgrenzen  $\varepsilon, r$  statt  $0, r$  und der Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachtet werden.

Anhang. Invarianz der Bogenlänge und des Flächeninhaltes bei Parametertransformationen

Bei unseren obigen Überlegungen sind wir davon ausgegangen, dass Bogenlänge und Flächeninhalt invariante (von der Art der Beschreibung unabhängige) Größen sind. Andererseits besitzen wir Berechnungsformeln, die sich auf eine bestimmte Parameterdarstellung der Fläche beziehen.

Im folgenden wollen wir nachrechnen, dass zulässige Parametertransformationen tatsächlich Bogenlänge und Flächeninhalt unverändert lassen. Dieser Nachweis besitzt eine allgemeine Bedeutung:

Nach dem vorgeführten Muster können wir bei einer beliebigen Berechnungsformel nachweisen, ob eine mit ihrer Hilfe erklärte Größe geometrisch ist. Insbesondere kann jeder, dem (49) nicht vertraut ist, erkennen, dass dadurch eine von der speziellen Parameterdarstellung unabhängige Größe definiert wird.

Zunächst stellen wir ohne Beweis ein paar allgemeine Aussagen vor.

Es sei  $\chi$  eine zulässige Parameterdarstellung und

$$\varphi : (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \rightarrow (u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

eine zulässige Parametertransformation (dreimal stetig differenzierbare Abbildung mit einer von Null verschiedenen Funktionaldeterminante (40)). Somit ist  $\psi := \chi \circ \varphi$  eine zulässige Parameterdarstellung (Abb. 60). Außerdem ist  $\varphi$  in einer Umgebung eines jeden Punktes umkehrbar,

$$\varphi^{-1} : (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \rightarrow (\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2))$$

dreimal stetig differenzierbar und  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  mit der Koordinatendarstellung

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

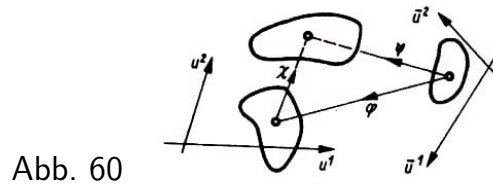


Abb. 60

identische Abbildung. Daraus folgt mit

$$a_k^i := \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \quad , \quad \bar{a}_k^i := \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k}$$

zunächst

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{u}^k} = \delta_k^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^r} \cdot \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^k} = \bar{a}_r^i a_k^r$$

d. h.

$$(\bar{a}_r^i)(a_k^r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (\bar{a}_k^i) = (\bar{a}_k^i)^{-1}$$



so dass  $\varphi^{-1}$  wegen  $|\bar{a}_k^i| = |a_k^i|^{-1} \neq 0$  ebenfalls eine zulässige Parametertransformation ist.

Hieraus ergibt sich, wenn wir wie üblich  $P(u^1, u^2) := \chi(u^1, u^2)$  und

$$\bar{P}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \psi(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = P(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

setzen, folgende Transformationsgleichung für die metrischen Fundamentalgrößen:

$$\bar{g}_{ik} = \bar{P}_i \bar{P}_k = P_r a_i^r \cdot P_s a_k^s = a_i^r g_{rs} a_k^s$$

d. h.

$$(\bar{g}_{ik}) = (a_i^r)^T (g_{rs}) (a_k^s) \quad (50)$$

Beispielsweise gilt beim Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten einer Ebene (vgl. die Beispiele (2.12) und (2.12'))

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u^2 & \sin u^2 \\ -u^1 \sin u^2 & u^1 \cos u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u^2 & -u^1 \sin u^2 \\ \sin u^2 & u^1 \cos u^2 \end{pmatrix}$$

Mit (50) ergibt sich folgendermaßen die Invarianz der Bogenlänge bei Parametertransformation:

Es sei  $\bar{u}^k = \bar{u}^k(u^1(t), u^2(t))$  eine Flächenkurve. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{\bar{P}}^2 &= \bar{g}_{ij} \dot{\bar{u}}^i \dot{\bar{u}}^j = (\dot{\bar{u}}^i)^T (\bar{g}_{ij}) (\dot{\bar{u}}^j) = (\bar{a}_r^i \dot{u}^r)^T (a_i^k)^T (g_{kl}) (a_j^i) (\bar{a}_s^j \dot{u}^s) \\ &= (\dot{u}^r)^T [(\bar{a}_r^i)^T (a_i^k)^T] (g_{kl}) [(a_j^i) (a_s^j)] (\dot{u}^s) = (\dot{u}^r)^T (\delta_r^k)^T (g_{kl}) (\delta_s^i) (\dot{u}^s) \\ &= (\dot{u}^k)^T (g_{kl}) (\dot{u}^l) = g_{kl} \dot{u}^k \dot{u}^l = \dot{P}^2 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir  $\int |\dot{\bar{P}}| dt = \int |\dot{P}| dt$ . Dieses Resultat folgt auch aus

$$\dot{\bar{P}} = \bar{P}_k \dot{\bar{u}}^k = P_i a_k^i \bar{a}_l^k \dot{u}^l = P_i \delta_l^i \dot{u}^l = P_i \dot{u}^i = \dot{P}$$

(invariante Differentialform).

Um abschließend (bis aufs Vorzeichen) die Invarianz des Flächeninhalts bei Parametertransformation zu skizzieren, denken wir zunächst an die Annäherung eines von  $u^1$ - und  $u^2$ -Linien begrenzten Flächenstückes durch eine Parallelogrammfläche, deren Inhalt sich mit Hilfe des Volumens eines darauf stehenden Spates der Höhe 1 angeben lässt (Abb. 61 a):

$$\mathfrak{N}(P_1 du^1)(P_2 du^2) = \mathfrak{N} P_1 P_2 du^1 du^2 = \sqrt{g} du^1 du^2$$

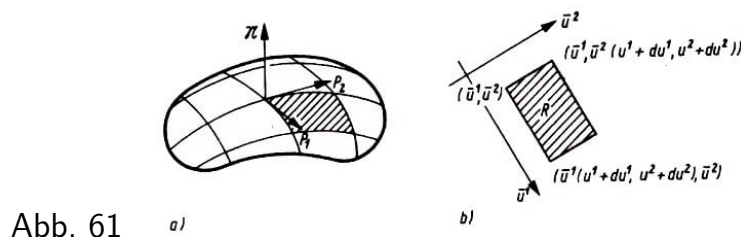


Abb. 61 a)

b)

Beim Übergang zu neuen Flächenparametern betrachten wir zunächst die Seitenlängen des in Abb. 61 b schraffierten Rechtecks  $R$ :

$$\begin{aligned}\bar{u}^1(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \bar{u}^1(u^1, u^2) &\approx d\bar{u}^1 := \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} du^2 \\ \bar{u}^2(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - \bar{u}^2(u^1, u^2) &\approx d\bar{u}^2 := \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} du^2\end{aligned}$$

hieraus lesen wir folgende Abbildungsgleichung ab:

$$\begin{pmatrix} d\bar{u}^1 \\ d\bar{u}^2 \end{pmatrix} = (\bar{a}_j^i) \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Der Flächeninhalt von  $R$  wird durch  $d\bar{u}^1 d\bar{u}^2$  angenähert; da sich bei der linearen Abbildung (51) jeder Inhalt mit der Determinante der Abbildungsmatrix multipliziert, gilt

$$d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = |\bar{a}_j^i| du^1 du^2 \quad (52)$$

Somit erhalten wir folgendermaßen die gewünschte Invarianz des Flächeninhalts (bis aufs Vorzeichen):

$$\begin{aligned}\iint_B \sqrt{g} d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 &= \iint_B \sqrt{|(a_i^r)^T (g_{rs}) (a_j^s)|} |\bar{a}_k^j| du^1 du^2 = \iint_B \sqrt{g |a_j^i|^2} |\bar{a}_k^j| du^1 du^2 \\ &= \iint_B \sqrt{g} \operatorname{sgn} |a_j^i| du^1 du^2 = \operatorname{sgn} |a_j^i| \iint_B \sqrt{g} du^1 du^2\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Man gebe eine Berechnungsformel für den Flächeninhalt einer Drehfläche an (vgl. (2.10)) und berechne damit a) einen Drehzylindermantel, b) einen Drehkegelmantel, c) die Kugeloberfläche.
2. Man berechne für eine Wendelfläche

$$P(u^1, u^2) = O + u^2(\cos u^1 \mathbf{i} + \sin u^1 \mathbf{j}) + au^1 \mathbf{k}$$

- a) die Länge der  $u^1$ -Linien mit  $u^2 = 0$  bzw.  $u^2 = r > 0$  für  $u^1 \in [0, 2\pi]$ ,  
b\*) den Flächeninhalt für  $u^1 \in [0, 2\pi]$  und  $u^2 \in [0, r]$ .

## 2.5 Normal- und geodätische Krümmung von Flächenkurven

Wir wollen das Krümmungsverhalten von Flächen studieren, indem wir Flächenkurven untersuchen. Hierbei wird eine "Zerlegung" der Krümmung einer Flächenkurve in einen Anteil bezüglich der Flächennormalen und einen Anteil bezüglich der Tangentialebene von besonderer Bedeutung sein.

Es sei  $u^i = u^i(s)$  die Gaußsche Parameterdarstellung einer Kurve der Fläche  $P = P(u^1, u^2)$ , wobei  $s$  die Bogenlänge ist. Nach der Einsteinschen Summenkonvention ist

$$P' = P_i u'^i, \quad P'' = P_i u''^i + P_{ik} u'^i u'^k = k(s) \mathbf{n}(s) \quad (53)$$

Andererseits werden wir  $P''$  bezüglich  $P_1, P_2, \mathfrak{N}$  (begleitendes Dreibein der Fläche) darstellen. Zunächst setzen wir

$$P'' = k_n(s)\mathfrak{N} + k_g(s)\epsilon \quad (54)$$

wobei  $\epsilon$  einen Einheitsvektor der Tangentialebene, d. h.  $\epsilon^2 = 1$  und  $\mathfrak{N}\epsilon = 0$ , bezeichnet, über den wir noch geeignet verfügen (vgl. (56)).

Wegen  $P'P' = 1$  gilt bekanntlich  $P'P'' = 0$  und folglich

$$0 = P'P'' = k_n\mathfrak{N}P' + k_g\epsilon P' = k_g\epsilon P' \quad (55)$$

Fall 1:  $k_g \neq 0$ . Neben  $\mathfrak{N} \perp P'$ ,  $\epsilon$  gilt nach (55) noch  $\epsilon \perp P'$ . Wir können das Vorzeichen von  $k_g$  so festlegen, dass für die paarweise orthogonalen Einheitsvektoren  $\mathfrak{N}$ ,  $P'$ ,  $\epsilon$  noch

$$\mathfrak{N} \times P' = \epsilon \quad (56)$$

(Abb. 62) gilt.

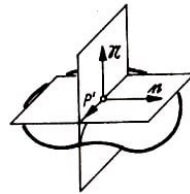


Abb. 62

Fall 2:  $k_g = 0$ . Hier kann o. B. d. A. der Vektor  $\epsilon$  gemäß (56) gewählt werden.

Wie der Wechselstromwiderstand im Zeigerdiagramm in Ohmschen und induktiven Widerstand "zerlegt" wird, können wir (54) als "Zerlegung" der Krümmung  $k = |P''|$  der Flächenkurve in die Normalkrümmung  $k_n(s)$  und die geodätische Krümmung  $k_g(s)$  deuten (Abb. 63).

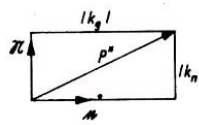


Abb. 63

Dabei gilt stets

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2 \quad (57)$$

Indem wir eine Darstellung von  $P''$  bezüglich  $P_1, P_2, \mathfrak{N}$  anstreben, setzen wir (vgl. (53))

$$P_{ik} = \Gamma_{ik}^1 P_1 + \Gamma_{ik}^2 P_2 + L_{ik} \mathfrak{N} = \Gamma_{ik}^r P_r + L_{ik} \mathfrak{N} \quad (58)$$

Da es sich um die Darstellung der Ableitungen der Vektoren  $P_1, P_2$  des begleitenden Dreibeins der Fläche bezüglich dieses Dreibeins handelt, ist (58) ein Analogon der Frenetschen Formeln; die Formeln (58) werden Ableitungsgleichungen von Gauß genannt. (Es fehlt in dieser Analogie noch die Darstellung von  $\mathfrak{N}_1$  und  $\mathfrak{N}_2$  bezüglich des begleitenden Dreibeins der Fläche, die wir erst in Abschnitt 2.8 als Ableitungsgleichungen von Weingarten kennenlernen.)

Zunächst werden wir hauptsächlich mit den zweiten Fundamentalgrößen  $L_{ik}$ , (vgl. die Koeffizienten in den Frenetschen Formeln) arbeiten. Für sie gilt  $L_{ik} = P_{ik}\mathfrak{N}$ ; wegen  $P_i\mathfrak{N} = 0$  haben wir  $P_{ik}\mathfrak{N} + P_i\mathfrak{N}_k = 0$  und somit

$$L_{ik} = P_{ik}\mathfrak{N} = -P_i\mathfrak{N}_k = -P_k\mathfrak{N}_i \quad (59)$$

Die Determinante der zweiten Fundamentalgrößen wird mit  $L$  bezeichnet:

$$L := |L_{ik}| = |L_{ik}(u^1, u^2)|$$

Neben der Darstellung der Normalkrümmung über (54)

$$k_n(s) = P''\mathfrak{N} \quad (60)$$

erhalten wir nach (53) und (58)

$$P'' = P_r(u''^r + \Gamma_{ik}^r u'^i u'^k) + \mathfrak{N} L_{ik} u'^i u'^k \quad (61)$$

und somit

$$k_n(s) = L_{ik} u'^i u'^k \quad (62)$$

Die Christoffelsymbole  $\Gamma_{jk}^i$  und die geodätische Krümmung  $k_g$  werden erst später in den Abschnitten 3.3 und 3.6 (Bd. II) eingehend untersucht.

Beispiel

(2.14) Zweite Fundamentalgrößen bei Drehflächen. Nach dem Beispiel (2.3) kennen wir für

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

bereits die Vektoren

$$\begin{aligned} P_1 &= r' \cos u^2 \mathbf{i} + r' \sin u^2 \mathbf{j} + z' \mathbf{k} \\ P_2 &= -r \sin u^2 \mathbf{i} + r \cos u^2 \mathbf{j} \\ P_1 \times P_2 &= -r z' \cos u^2 \mathbf{i} - r z' \sin u^2 \mathbf{j} + r r' \mathbf{k} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathfrak{N} = -z' \cos u^2 \mathbf{i} - z' \sin u^2 \mathbf{j} + r' \mathbf{k}$$

Zur Berechnung der zweiten Fundamentalgrößen stellen wir zunächst

$$\begin{aligned} P_{11} &= r'' \cos u^2 \mathbf{i} + r'' \sin u^2 \mathbf{j} + z'' \mathbf{k} \\ P_{12} &= -r' \sin u^2 \mathbf{i} + r' \cos u^2 \mathbf{j} = P_{21} \\ P_{22} &= -r \cos u^2 \mathbf{i} - r \sin u^2 \mathbf{j} \end{aligned}$$

bereit. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} L_{11} &= -r'' z' + r' z'', & L_{12} &= 0 = L_{21}, & L_{22} &= r z' \\ L &= |L_{ik}| = (z'' r' - z' r'') r z' \end{aligned}$$

Für welche Drehflächen gilt ausschließlich  $L = 0$ ?

Fall 1:  $z' = 0$  für  $u^1 \in (a, b)$ . Dann ist  $z$  konstant, und es liegt eine "gelochte" Kreisscheibe vor (Abb. 64a).

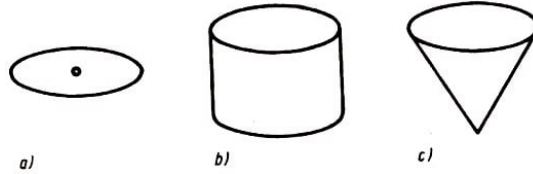


Abb. 64

Fall 2:  $r' = 0$  für  $u^1 \in (a, b)$ . Dann ist  $r$  konstant. Es liegt eine Zylinderfläche vor (Abb. 64b).

Fall 3:  $r' \neq 0$  und  $z' \neq 0$ ,

$$\left(\frac{z'}{r'}\right)' = \frac{z''r' - z'r''}{r'^2} = 0$$

für  $u^1 \in (a, b)$ . Dann ist  $\frac{z'}{r'} \neq 0$  konstant, etwa  $z' = cr'$ . Wir erhalten  $z = cr + d$ , d. h., dass die geradlinige Erzeugende eine Kegelfläche beschreibt (Abb. 64c).

Da die Erzeugende eine glatte Kurve ist, schließen sich diese Fälle gegenseitig aus.

Aufgabe

Man zeige, dass für eine Kurve in einer Ebene  $k_n = 0$  und  $|k_g| = k$  gilt.

## 2.6 Krümmung und Normalkrümmung von Flächenkurven gleicher Tangente

Im folgenden werden in einer Fläche  $P = P(u^1, u^2)$  alle Kurven  $u^i = u^i(s)$  bzw.  $u^i = v^i(s)$  durch einen festen Punkt  $P_0$  betrachtet; es sei etwa  $P(u^1(0), u^2(0)) = P_0 = P(v^1(0), v^2(0))$ . Aus der Übereinstimmung der Tangentenvektoren an dieser Stelle,

$$P_i u'^i = P_i v'^i$$

folgt  $u'^i(0) = v'^i(0)$  und somit  $L_{ik} u'^i u'^k = L_{ik} v'^i v'^k$ , d. h. Übereinstimmung in der Normalkrümmung.

Aber auch aus  $P_i v'^i = -P_i u'^i$  ergibt sich dieses Resultat, denn aus dieser Gleichung folgt  $v'^i(0) = -u'^i(0)$  und somit  $L_{ik} v'^i v'^k = L_{ik} (-u'^i)(-u'^k) = L_{ik} u'^i u'^k$ . Zusammenfassend gilt der

**Satz 2.4.** Alle Flächenkurven, die in einen Punkt ein und dieselbe Tangente haben, besitzen dort die gleiche Normalkrümmung.

Der Zusammenhang von Krümmung und Normalkrümmung für alle Kurven gleicher Tangente in  $P_0$  kann wegen

$$k_n(0) = P''\mathfrak{N} = k\mathfrak{n}\mathfrak{N} = k \cos \angle(\mathfrak{n}, \mathfrak{N}) \quad (63)$$

im Fall  $k, k_n \neq 0$  durch

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_n} \cos \angle(\mathfrak{n}, \mathfrak{N}) \quad (64)$$

ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich für den Krümmungsmittelpunkt  $M = P_0 + \frac{1}{k}\mathfrak{n}$ , dass er auf dem Thaleskreis über der von  $P_0$  und  $N = P_0 + \frac{1}{k_n}\mathfrak{N}$  begrenzten Strecke in der Normalebene der Kurve liegt (Abb. 65).

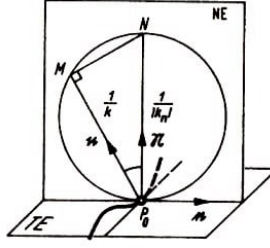


Abb. 65

Insgesamt gilt der

Satz 2.5 (Meusnier<sup>35</sup>), 1776). Die Krümmungsmittelpunkte aller sich in  $P_0$  berührender Flächenkurven liegen in der gemeinsamen Normalebene auf einem Kreis, der die Fläche in  $P_0$  berührt und  $\frac{1}{|k_n|}$  zum Durchmesser hat.

In einer Umgebung von  $P_0$  schneidet die von der gemeinsamen Tangente und der Flächennormalen aufgespannte Ebene aus der Fläche eine Kurve heraus, für die  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{n}$  und somit  $k_n = \pm k$  gilt.

Beispiele

(2.15) Kugel von Radius  $R$ . Nach der obigen Bemerkung erwarten wir  $k_n = \pm \frac{1}{R}$ . Dieses Resultat wollen wir jedoch mit Hilfe von (62) bestätigen. Wir betrachten die Kugel als Drehfläche (vgl. Beispiel (2.14)) mit  $r(s) = R \cos \frac{s}{R}$  und  $z(s) = R \sin \frac{s}{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} L_{11} &= r' z'' - r'' z' = \frac{1}{R} \sin^2 \frac{s}{R} + \frac{1}{R} \cos^2 \frac{s}{R} = \frac{1}{R} \\ L_{12} &= L_{21} = 0 \\ L_{22} &= r z' = R \cos^2 \frac{s}{R} = \frac{r^2}{R} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den Ergebnissen des Beispiels (2.10) führt zur Feststellung von

$$L_{ik} = \frac{1}{R} g_{ik}$$

Damit gilt

$$k_n = L_{ik} x^i x^k = \frac{1}{R} g_{ik} x^i x^k = \frac{1}{R}$$

in allen Richtungen, die durch Einheitsvektoren  $(x^1, x^2)$  in der Tangentialebene charakterisiert seien.

(2.16) Hyperbolisches Paraboloid. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir  $a = b = c = 1$  voraus, so dass die Fläche durch die Gleichung  $x^2 - y^2 + 2z = 0$  oder durch die Parameterdarstellung

$$P(u^1, u^2) = \left( u^1, u^2, \frac{(u^2)^2 - (u^1)^2}{2} \right)$$

<sup>35</sup>Jean Baptiste Marie Meusnier (1754-1793).

charakterisiert sei (Abb. 66). Es gilt

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 0, -u^1), & P_2 &= (0, 1, u^2) \\ P_{11} &= (0, 0, -1), \end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir  $u^1 = u^2 = 0$  (Ursprung). Dort gilt  $\mathfrak{N}(0, 0) = (0, 0, 1)$  und somit

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (L_{ik}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

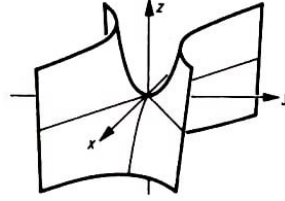


Abb. 66

Der Vektor  $\mathfrak{r} = x^r P_r = \cos \alpha P_1 + \sin \alpha P_2$  liegt in der zum Ursprung gehörigen Tangentialebene; er ist wegen  $g_{ik} x^i x^k = 1$  ein Einheitsvektor. Die von  $\alpha$  abhängige Normalkrümmung  $f(\alpha)$  kann folgendermaßen errechnet werden:

$$f(\alpha) = \cos \alpha, \sin \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -\cos 2\alpha$$

Sie nimmt für  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$  den Wert Null an; in diesen Richtungen gilt  $y = \pm x$  und demzufolge  $z = 0$ , d. h., dass in diesen Richtungen die Tangentialebene Geraden aus der Fläche herauschneidet. Wir können außerdem Extremwerte der Normalkrümmung ermitteln:

$$f'(\alpha) = 2 \sin 2\alpha, \quad f''(\alpha) = 4 \cos 2\alpha$$

Die erste Ableitung verschwindet genau dann, wenn  $\alpha$  ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  ist; außerdem gilt  $f''\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos k\pi \neq 0$ . Die Extremwerte der Normalkrümmung sind

$$k_n^{(1)} = f(0) = -1, \quad k_n^{(2)} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Sie werden in der Richtung der  $x$ -Achse bzw. der  $y$ -Achse angenommen.

In den Beispielen haben wir bereits markante Sonderfälle für Flächenpunkte kennengelernt:

**Definition.** Ein Flächenpunkt heißt genau dann Nabelpunkt, wenn die Normalkrümmung unabhängig von der Richtung eine Konstante  $c$  ist; für  $c = 0$  spricht man von einem Flachpunkt. Ein Flächenpunkt heißt Sattelpunkt genau dann, wenn Richtungen existieren, in denen die Normalkrümmung verschiedene Vorzeichen besitzt.

**Aufgabe**

Die Krümmungskreise der Flächenkurven mit ein und derselben Tangente in  $P_0$  bilden eine Kugel, die Meusnierkugel.

## 2.7 Hauptkrümmungen

Wie in Abschnitt 2.6 betrachten wir in einer Fläche  $P = P(u^1, u^2)$  einen festen Punkt  $P_0$ . Wir suchen Anzahl und Lage der Extremwerte der Normalkrümmung  $k_n^{\tau}$  in Abhängigkeit von der Richtung  $\tau$  in der Tangentialebene.

Definition. Die Extremwerte der Normalkrümmung  $k_n^{\tau}(u_0^1, u_0^2)$  in einem Punkt  $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$  heißen Hauptkrümmungen, die zugehörigen Richtungen entsprechend Hauptkrümmungsrichtungen.

Es sei  $\tau = x^1 P_1 + x^2 P_2$  ein Einheitsvektor, d. h.  $g_{ik} x^i x^k = 1$ . Die Gleichung

$$f(x^1, x^2) := g_{11} x^1 x^1 + g_{12} x^1 x^2 + g_{21} x^2 x^1 + g_{22} x^2 x^2 = g_{ik} x^i x^k = 1$$

lässt sich stets nach  $x$  und nach  $x^2$  auflösen. Wenn  $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} \neq 0$  ist, dann existiert  $\frac{dx^1}{dx^2}$  wegen

$$\frac{f(x^1, x^2) - f(x_0^1, x_0^2)}{x^1 - x_0^1} \cdot \frac{x^1 - x_0^1}{x^2 - x_0^2} + \frac{f(x^1, x^2) - f(x^1, x_0^2)}{x^2 - x_0^2} = 0$$

für  $f(x^1, x^2) = f(x_0^1, x_0^2) = 1$ , und es ist

$$f_1 \frac{dx^1}{dx^2} + f_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx^1}{dx^2} = -\frac{f_2}{f_1} \quad (65)$$

Da außerdem aus  $f_1(x_0^1, x_0^2) = f_2(x_0^1, x_0^2) = 0$  zunächst

$$\begin{aligned} 2P_1 \tau_0 &= 2P_1(x_0^1 P_1 + x_0^2 P_2) = 2(g_{11} x_0^1 + g_{12} x_0^2) = f_1(x_0^1, x_0^2) = 0 \\ 2P_2 \tau_0 &= 2P_2(x_0^1 P_1 + x_0^2 P_2) = 2(g_{21} x_0^1 + g_{22} x_0^2) = f_2(x_0^1, x_0^2) = 0 \end{aligned}$$

und dann  $x_0^1 = x_0^2 = 0$  sowie der Widerspruch  $g_{ik} x_0^i x_0^k = 0$  folgte, dürfen wir  $f_1(x_0^1, x_0^2) \neq 0$  oder  $f_2(x_0^1, x_0^2) \neq 0$  und damit die Existenz von  $\frac{dx^1}{dx^2}$  oder  $\frac{dx^2}{dx^1}$  künftig voraussetzen.

A. Notwendige Bedingungen für die Existenz von Extremwerten der Normalkrümmung: Wir setzen zunächst voraus, dass für  $\tau_0 = P_i x_0^i$  ein Extremwert angenommen wird, dass o. B. d. A.  $f_1(x_0^1, x_0^2) \neq 0$  gilt und dass somit  $\frac{dx^1}{dx^2}$  existiert. Für die Funktion

$$h(x^2) := k_n^{\tau} = L_{11} x^1(x^2) x^1(x^2) + 2L_{12} x^1(x^2) x^2 + L_{22} x^2 x^2$$

ergibt sich die notwendige Bedingung

$$h'(x_0^2) = \frac{\partial L_{ik} x^i x^k}{\partial x^1} \cdot \frac{dx^1}{dx^2} + \frac{\partial L_{ik} x^i x^k}{\partial x^2} = 0 \quad (66)$$

Nach (65) gilt für  $\tau_0$

$$\frac{\partial g_{ik} x^i x^k}{\partial x^1} \cdot \frac{dx^1}{dx^2} + \frac{\partial g_{ik} x^i x^k}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g_{ik} x^i x^k}{\partial x^1} \neq 0 \quad (67)$$



Um aus den Gleichungen (66) und (67) die Ableitung  $\frac{dx^1}{dx^2}$  zu eliminieren, bestimmen wir für  $\tau_0$  eine Zahl  $\lambda$  (Lagrangescher Multiplikator) mit

$$\frac{\partial L_{ik} x^i x^k}{\partial x^1} - \lambda \frac{\partial g_{ik} x^i x^k}{\partial x^1} = 0 \quad (68.1)$$

und erhalten, indem wir zu (66) das  $\lambda$ -fache von (67) addieren, noch

$$\frac{\partial L_{ik} x^i x^k}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial g_{ik} x^i x^k}{\partial x^2} = 0 \quad (68.2)$$

Da die Fundamentalgrößen  $g_{ik}$  und  $L_{ik}$  richtungsunabhängig sind, erhalten (68.1,2) das Aussehen

$$\begin{aligned} 2L_{11}x^1 + 2L_{12}x^2 - \lambda(2g_{11}x^1 + 2g_{12}x^2) &= 0 \\ 2L_{21}x^1 + 2L_{22}x^2 - \lambda(2g_{21}x^1 + 2g_{22}x^2) &= 0 \end{aligned}$$

diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$(L_{ik} - \lambda g_{ik})x^k = 0, \quad i = 1, 2 \quad (69)$$

Es gibt genau dann eine Lösung  $\tau \neq 0$  des homogenen Gleichungssystems (69), wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als 2 ist, wenn

$$|L_{ik} - \lambda g_{ik}| = 0$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L_{11} - \lambda g_{11} & L_{12} - \lambda g_{12} \\ L_{21} - \lambda g_{21} & L_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} &= (L_{11} - \lambda g_{11})(L_{22} - \lambda g_{22}) - (L_{12} - \lambda g_{12})^2 \\ &= L_{11}L_{22} - L_{12}^2 - \lambda(g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - g_{12}L_{21} - g_{21}L_{12}) \\ &\quad + \lambda^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) = L - \lambda(\dots) + g\lambda^2 \end{aligned}$$

ist nichttriviale Lösbarkeit von (69) gleichwertig zu

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \frac{1}{g}(g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - g_{12}L_{21} - g_{21}L_{12}) + \frac{L}{g} = 0 \quad (70)$$

Wegen dieser notwendigen Bedingung gibt es in dem Fall, dass die Koeffizientenmatrix von (69) für kein  $\lambda$  den Rang Null hat, zu jedem  $\lambda$  mit (70) genau eine Richtung extremaler Normalkrümmung als Lösung von (69), insgesamt höchstens zwei Richtungen dieser Eigenschaft.

Existiert jedoch eine Zahl  $\lambda$  mit  $(L_{ik}) = \lambda(g_{ik})$ , dann ist die notwendige Bedingung (69) für alle Richtungen erfüllt.

B<sub>1</sub>. Im Fall  $(L_{ik}) = \lambda(g_{ik})$  ist die notwendige Bedingung auch hinreichend:

Aus  $(L_{ik}) = \lambda(g_{ik})$  folgt  $k_n^\tau = L_{ik}x^i x^k = \lambda g_{ik}x^i x^k = \lambda$  für alle Richtungen  $\tau$ ; es liegt also ein Nabelpunkt vor.

Es sei bemerkt, dass hiervon auch die Umkehrung gilt. Denn ist  $P_0$  ein Nabelpunkt mit  $k_n^{\mathfrak{r}} = c$  in allen Richtungen  $\mathfrak{r}$ , dann gibt es, da nach (70) höchstens zwei  $\lambda$ -Werte mit (69) existieren, ein  $\lambda$  mit (69) für wenigstens zwei Richtungen, so dass der Lösungsraum von (69) zweidimensional und der Rang von  $(L_{ik} - \lambda g_{ik})$  gleich Null ist, d. h.  $(L_{ik}) = \lambda(g_{ik})$ ; nun muss aber  $c = \lambda$  sein. Zusammenfassend gilt der

Satz 2.6. Der Punkt  $P_0$  ist genau dann Nabelpunkt mit der Normalkrümmung  $\lambda$  in allen Richtungen, wenn  $(L_{ik}) = \lambda(g_{ik})$  gilt.

B<sub>2</sub>. Im allgemeinen erfassen wir alle Richtungen

$$\mathfrak{r} = \frac{P_i y^i}{\sqrt{g_{ik} y^i y^k}}$$

mit  $y^1 := \cos \alpha$ ,  $y^2 := \sin \alpha$  und  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , so dass

$$f(\alpha) := k_n^{\mathfrak{r}}$$

eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist und dort wenigstens ein Maximum und ein Minimum annimmt. Somit müssen die Lösungen von (70) stets reell sein.

Satz 2.7. Es gibt genau zwei Richtungen extremaler Normalkrümmung, oder  $k_n^{\mathfrak{r}}$  ist im betrachteten Punkt konstant.

Die Bestimmung des größten und des kleinsten Wertes der Normalkrümmung kann recht leicht erfolgen: Zur Lösung  $\lambda_k$  von (70) möge die Lösung  $\mathfrak{r}_k = x_{(k)}^i P_i$  von (69) gehören, wobei  $g_{ij} x_{(k)}^i x_{(k)}^j = 1$  sei. Aus (69) folgt

$$L_{ij} x_{(k)}^i - \lambda_k g_{ij} x_{(k)}^i = 0, \quad j = 1, 2 \quad ; \quad L_{ij} x_{(k)}^i = \lambda_k g_{ij} x_{(k)}^i \quad j = 1, 2 \quad (71)$$

und nach Multiplikation mit  $x_{(k)}^i$  und Addition

$$L_{ik} x_{(k)}^i x_{(k)}^k = \lambda_k g_{ik} x_{(k)}^i x_{(k)}^k = \lambda_k \quad (72)$$

Zusatz. Die Lösungen von (70) sind die Hauptkrümmungen im betrachteten Punkt.

Aus (71) lässt sich statt (72) auch

$$L_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j = \lambda_1 g_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j, \quad L_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j = \lambda_2 g_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j \quad (73.1, 73.2)$$

und folglich

$$(\lambda_2 - \lambda_1) g_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j = 0$$

gewinnen.

Fall 1:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Wegen  $g_{ij} x_{(1)}^i x_{(2)}^j = 0$  gilt  $\mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{r}_2$ .

Fall 2:  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Die Gleichheit von Maximum und Minimum besagt, dass  $P_0$  Nabelpunkt ist.

Zusatz. Es gibt stets zwei zueinander senkrechte Richtungen extremaler Normalkrümmung. Dabei liegt ein Nabelpunkt vor, oder diese Richtungen sind eindeutig bestimmt.

Zur Lösung  $\lambda_k$  von (70) möge nach wie vor die Lösung  $\mathbf{r}_k$  von (69) gehören, wobei wir noch o. B. d. A.  $\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2$  voraussetzen. Dann ist  $\mathbf{r} := \cos \alpha \mathbf{r}_1 + \sin \alpha \mathbf{r}_2$  ein Einheitsvektor (Abb. 67).

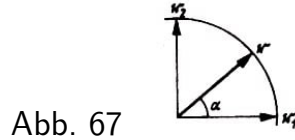


Abb. 67

Die Normalkrümmung  $k_n^{\mathbf{r}}$  lässt sich auf Grund der Distributivität der Matrizenmultiplikation folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} k_n^{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}^T (L_{ik}) \mathbf{r} = (\cos \alpha \mathbf{r}_1 + \sin \alpha \mathbf{r}_2)^T (L_{ik}) (\cos \alpha \mathbf{r}_1 + \sin \alpha \mathbf{r}_2) \\ &= \cos^2 \alpha \mathbf{r}_1^T (L_{ik}) \mathbf{r}_1 + \cos \alpha \sin \alpha \mathbf{r}_1^T (L_{ik}) \mathbf{r}_2 + \sin \alpha \cos \alpha \mathbf{r}_2^T (L_{ik}) \mathbf{r}_1 + \sin^2 \alpha \mathbf{r}_2^T (L_{ik}) \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

dabei erhalten wir nach (72) und (73) der Reihe nach

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T (L_{ik}) \mathbf{r}_1 &= \lambda_1 \\ \mathbf{r}_1^T (L_{ik}) \mathbf{r}_2 &= 0, \quad \text{wegen } \mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2^T (L_{ik}) \mathbf{r}_1 &= 0, \quad \text{wegen } \mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2^T (L_{ik}) \mathbf{r}_2 &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Damit gilt der

Satz von Euler.<sup>36</sup>

Gehören zu den orthogonalen Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  die Hauptkrümmungen  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  und gilt  $\mathbf{r} = \cos \alpha \mathbf{r}_1 + \sin \alpha \mathbf{r}_2$ , dann ist

$$k_n^{\mathbf{r}} = \cos^2 \alpha \lambda_1 + \sin^2 \alpha \lambda_2$$

Beispiele

(2.17) Torsen. Wegen  $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{o}$  gilt  $L_{i2} = -P_i \mathfrak{N}_2 = 0$ ,  $L = 0$  und somit

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \frac{1}{g}(\dots) = 0$$

Folglich verschwindet eine Hauptkrümmung; es sei etwa  $\lambda_1 = 0$ .

Die weitere Untersuchung gilt einigen Sonderfällen:

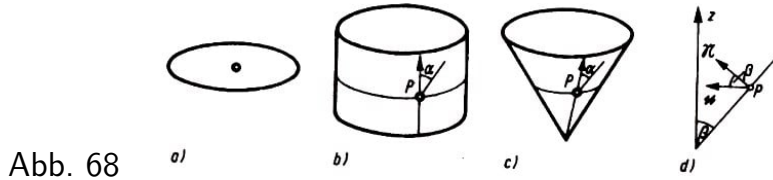
A. Drehtorsen mit der Erzeugenden  $\mathbf{e}(s) = r(s)\mathbf{i} + z(s)\mathbf{k}$ . Für sie gelten nach den Beispielen (2.10) und (2.14)

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (L_{ik}) = \begin{pmatrix} r'z'' - r''z' & 0 \\ 0 & rz' \end{pmatrix}$$

<sup>36</sup>Im Jahre 1760 von Leonhard Euler (1707-1783) aufgestellt.

Dabei ist  $g_{ik} = g_{ik}(u^1)$  und  $L_{ik} = L_{ik}(u^1)$ , d. h., dass die Fundamentalgrößen längs eines Breitenkreises konstant sind. Außerdem ist hier im Gegensatz zur obigen Feststellung gerade  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{o}$ , d. h.  $L_{i1} = 0$ . Wegen  $L = 0$  können wir die Resultate des Beispiels (2.14) benutzen, wobei wegen  $L_{11} = L_{21} = L_{12} = 0$  nur noch  $L_{22}$  interessiert.

a) Gelochte Kreisscheibe (Abb. 68 a). Wegen  $z' = 0$  gilt  $L_{22} = 0$ ,  $\lambda^2 = 0$  und schließlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Die Ebene besteht also nur aus Nabelpunkten, speziell Flachpunkten.



b) Drehzylinderfläche (Abb. 68 b). Es ist  $r$  konstant und somit  $z = s$ . Wir erhalten  $L_{22} = r$  und neben  $\lambda_1 = 0$  (Krümmung der Mantellinie)

$$\lambda_2 = \frac{1}{g}(\dots) = \frac{g_{11}}{g}L_{22} = \frac{1}{r^2} \cdot r = \frac{1}{r} \quad (\text{Krümmung des Breitenkreises})$$

Die Bestimmung der Hauptkrümmungsrichtungen gemäß (69) ergibt wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(1)}^1 \\ x_{(1)}^2 \end{pmatrix} = \mathfrak{o} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & r - \frac{1}{r}r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{(1)}^1 \\ x_{(1)}^2 \end{pmatrix} = \mathfrak{o}$$

$$x_{(1)}^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_{(2)}^1 = 0 \quad \text{und - wegen } x_{(1)}^1 = g_{11}x_{(1)}^1x_{(1)}^1 = 1 \quad \text{bzw.} \quad r^2(x_{(2)}^2)^2 = g_{22}x_{(2)}^2x_{(2)}^2 = 1$$

$$\mathfrak{r}_1 = \pm P_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{r}_2 = \pm \frac{1}{2}P_2$$

Für den von  $\alpha$  abhängigen Normalschnitt (Abb. 68 b) muss die Normalkrümmung nach dem Satz von Euler gerade  $k_n^\alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{r}$  sein.

c) Drehkegelfläche (Abb. 68 c). Es sei  $\beta$  die Größe des Winkels zwischen Drehachse und Mantellinie, so dass

$$r = s \sin \beta, \quad z = s \cos \beta + z_0$$

gesetzt werden kann. Mit  $L_{22} = r \cos \beta$  gilt neben  $\lambda_1 = 0$  (Krümmung der Mantellinie)

$$\lambda_2 = \frac{g_{11}}{g}L_{22} = \frac{1}{r} \cos \beta \quad (\text{Normalkrümmung des Breitenkreises})$$

Zu  $\lambda_1, \lambda_2$  gehören die Hauptkrümmungsrichtungen  $\mathfrak{r}_1 = \pm P_1$  bzw.  $\mathfrak{r}_2 = \pm \frac{1}{r}P_2$  wegen  $|\mathfrak{r}_1| = |\mathfrak{r}_2| = 1$  und

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \cos \beta \end{pmatrix} \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{o} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$$

Nach dem Satz von Euler stellt  $k_n^\alpha = \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta}{r}$  die Normalkrümmung eines von  $\alpha$  abhängigen Normalschnittes (Abb. 68c) dar. Schließlich ist  $\lambda_2$  nach dem Satz von

Meusnier die Scheitelkrümmung des Kegelschnittes, der von der zur Mantellinie durch den betrachteten Punkt senkrechten Ebene erzeugt wird (Abb. 68 d).

B. Tangentenfläche  $P(u^1, u^2) = P(u^1) + u^2 P'(u^1)$ . Die Berechnung von  $P_{ik}$ ,  $\mathfrak{N} = -\operatorname{sgn} u^2 \mathfrak{b}$  und der metrischen Fundamentalgröße führt zu

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{w}{k|u^2|}, \quad \mathfrak{r}_1 = \pm P_2 = \pm \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{r}_2 = \pm \mathfrak{n}$$

(vgl. die folgende Aufgabe).

Aufgabe

Man berechne für eine Tangentenfläche die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen.

## 2.8 Mittlere und Gaußsche Krümmung

Die Hauptkrümmungen in einem Punkt  $P_0$  gestatten die Einführung von weiteren, nur von  $P_0$  abhängigen Krümmungsbegriffen:

Definition. Das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen heißt mittlere Krümmung  $H$ , ihr Produkt Gaußsche Krümmung  $K$  der Fläche im betrachteten Punkt, d. h.

$$H := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad K := \lambda_1 \lambda_2$$

Flächen mit  $H = 0$  in allen Punkten heißen Minimalflächen.<sup>37</sup>

Aus der Definition folgt

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \tag{70'}$$

$$H = \frac{1}{2g}(g_{11}L_{22} - g_{12}L_{21} - g_{21}L_{12} + g_{22}L_{11})$$

$$K = \frac{L}{g}$$

wegen  $H^2 = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + K$  ist stets  $H^2 \geq K$ , wobei  $K$  negativ sein kann (vgl. hyperbolisches Paraboloid im Beispiel (2.16)).

Beispiele

(2.18) Für eine Kugel von Radius  $R$  gilt  $H = \frac{1}{R}$  und  $K = \frac{1}{R^2}$  (vgl. Beispiel (2.15)). Das hyperbolische Paraboloid  $x^2 - y^2 + 2z = 0$  hat im Ursprung verschwindende mittlere Krümmung und die Gaußsche Krümmung  $-1$ .

(2.19) Für Torsen gilt stets  $K = 0$ . Dabei nimmt die mittlere Krümmung für Drehzylinder-, Drehkegel- bzw. Tangentenfläche folgende Werte an:

$$H = \frac{1}{2r} \quad (r \text{ konstant}), \quad H = \frac{\cos \beta}{2r} = \frac{\cot \beta}{2s}, \quad H = -\frac{w}{2k|u^2|}$$

<sup>37</sup>Eine Seifenblase in einem (nicht notwendig ebenen) Drahtbügel bildet eine Fläche minimalen Flächeninhaltes, eine Minimalfläche. Auf den Beweis müssen wir hier verzichten.

Hieran lässt sich erkennen, dass mittlere und Gaußsche Krümmung nicht dieselbe Rolle wie Krümmung und Windung in der Kurventheorie spielen können; beispielsweise lässt sich zu einer Drehkegelfläche die Tangentenfläche einer geeigneten Böschungslinie so bestimmen, dass  $K$  und  $H$  für  $u^2 = s$  übereinstimmen (vgl. Aufgabe 3).

Die Einführung von  $H$  und  $K$  erfolgte recht formal. Wir wollen deshalb noch die Einführung von  $K$  durch Gauß vorstellen (Abb. 69):

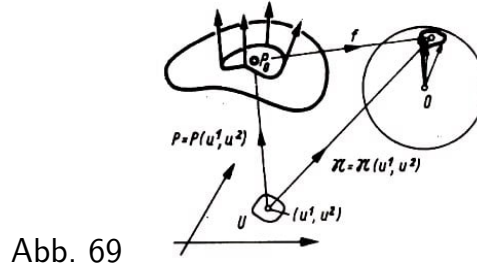


Abb. 69

Die Fläche wird vermöge

$$f : P(u^1, u^2) \rightarrow O + \mathfrak{N}(u^1, u^2)$$

in die Einheitskugel abgebildet. Im Beispiel einer Zylinderfläche erhalten wir als Bild einen Großkreis, im Beispiel einer Drehkegelfläche analog einen Breitenkreis; das Bild einer Kugel vom Radius  $R$  ist die volle Einheitskugel, wobei wir als Quotient der Flächeninhalte

$$\frac{4\pi}{4\pi R^2} = \frac{1}{R^2} = K$$

erhalten.

Um den Flächeninhalt des Bildes  $U'$  eines Gebietes  $U$  der  $u^1, u^2$ -Ebene (Abb. 69) bei der Abbildung  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u^1, u^2)$  zu ermitteln, denken wir daran, dass  $\mathfrak{N}(u^1, u^2)$  ein in  $O + \mathfrak{N}(u^1, u^2)$  auf der Einheitskugel senkrecht stehender Einheitsvektor ist.

Es sei nun  $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$  ein Punkt der Fläche  $P = P(u^1, u^2)$  und  $B$  der Abschluss<sup>38</sup> einer Umgebung  $U$  von  $(u_0^1, u_0^2)$ . Um das Krümmungsverhalten im Punkt  $P_0$  zu bestimmen, betrachten wir nach Gauß zunächst

$$\frac{\iint_B \mathfrak{N} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 du^1 du^2}{\iint_B \mathfrak{N} P_1 P_2 du^1 du^2} \quad (74)$$

als "durchschnittliche Krümmung" in einer Umgebung von  $P_0$ . Diese Festlegung stimmt gut mit anschaulichen Vorstellungen überein, denn bei einer "stark gekrümmten" Fläche werden sich die Normalvektoren stark "spreizen" und einen relativ großen Quotienten (74) ergeben.

Doch welchen Wert erhalten wir, wenn  $U$  auf  $(u_0^1, u_0^2)$  zusammenschrumpft? Zunächst gilt

$$\lim_{U \rightarrow (u_0^1, u_0^2)} \frac{\iint_B \mathfrak{N} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 du^1 du^2}{\iint_B \mathfrak{N} P_1 P_2 du^1 du^2} = \frac{\mathfrak{N} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N} P_1 P_2}$$

<sup>38</sup>Vereinigung von  $U$  und der Menge der Begrenzungsunkte von  $U$ .

Um einen Zusammenhang zu den schon eingeführten Krümmungsbegriffen zu erhalten, setzen wir

$$\mathfrak{N}_i = A_i^j P_j + B_i \mathfrak{N}$$

Es gilt  $B_i = 0$  wegen  $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{N}_i$  infolge von  $\mathfrak{N}^2 = 1$  bzw;  $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_i = 0$ . Weiterhin ist

$$-L_{ik} = \mathfrak{N}_i P_k = A_i^j P_j P_k = A_i^j g_{jk}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} -L_{11} & -L_{12} \\ -L_{21} & -L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Mit der Festlegung  $(g^{ik}) := (g_{ik})^{-1}$  erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -L_{11} & -L_{12} \\ -L_{21} & -L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

d. h.  $A_i^j = -L_{ir} g^{rj}$ . Das ergibt

$$\mathfrak{N}_i = -L_{ir} g^{rj} P_j \quad (75)$$

die Ableitungsgleichungen von Weingarten<sup>39</sup>.

Sie bilden - wie bereits einmal gesagt - zusammen mit den Ableitungsgleichungen (58) von Gauß das Analogon der Frenetschen Formeln. Nunmehr gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}P_1P_2} &= \frac{\mathfrak{N}(L_{1r}g^{rj}P_j \times L_{2s}g^{sk}P_k)}{\mathfrak{N}P_1P_2} = \frac{\mathfrak{N}P_1P_2(L_{1r}g^{r1} \cdot L_{2s}g^{r2} - L_{1r}g^{r2} \cdot L_{2s}g^{s1})}{\mathfrak{N}P_1P_2} \\ &= |L_{ir}g^{ri}| = |L_{ir}||g^{ri}| = \frac{L}{g} = K \end{aligned}$$

Somit haben wir eine schöne Charakterisierung von  $K$  erhalten.

Aufgaben

1. Man zeige für Minimalflächen  $K \leq 0$ .
2. Das arithmetische Mittel der Normalkrümmungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen ist stets gleich der mittleren Krümmung  $H$ .
3. Man bestimme zu gegebener Drehkegelfläche eine Böschungslinie derart, dass für deren Tangentenfläche  $K$  und  $H$  für  $u^2 = s$  dieselben Werte wie bei der Kegelfläche annehmen.

## 2.9 Die Indikatrix von Dupin

Das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung wird zur Klassifikation der Flächenpunkte herangezogen.

<sup>39</sup>Josef Weingarten (1836-1910).

Definition. Ein Punkt  $P$  einer Fläche  $P = P(u^1, u^2)$ , der kein Flachpunkt ist, heißt genau dann

- a) elliptisch, wenn  $K > 0$ ,
- b) hyperbolisch, wenn  $K < 0$ ,
- c) parabolisch, wenn  $K = 0$  ist.

Beispiele

(2.20) Auf der Kugel sind alle Punkte elliptisch; das trifft auch noch auf das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das zweischalige Hyperboloid zu. Auf dem hyperbolischen Paraboloid und dem einschaligen Hyperboloid liegen ausschließlich hyperbolische Punkte.

Nichtebene Torsen sind Beispiele für Flächen aus parabolischen Punkten; insbesondere gehören dazu elliptischer, hyperbolischer und parabolischer Zylinder sowie der Kegel unter den Flächen zweiter Ordnung.

Bekanntlich besteht eine Ebene nur aus Flachpunkten. Nichttrivialer Fall eines Flachpunktes ist der Ursprung bei der durch die biquadratische Parabel  $x = t, z = t^4$  erzeugten Drehfläche (Abb. 70):



Abb. 70

Die Erzeugende hat im Ursprung verschwindende Krümmung; wegen  $k^2 = k_n^2 + k_g^2$  gilt dort für alle Meridiane  $k_n = 0$ . Alle übrigen Punkte dieser Drehfläche sind elliptisch.

Wegen  $K = \frac{L}{g}$  kann die Klassifikation auch mit Hilfe von  $L$  statt  $K$  vorgenommen werden.

Die Namen der Klassifikation können eine eindrucksvolle Begründung erfahren. Dazu sei im betrachteten Punkt  $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$ , o. B. d. A.

$$u_0^1 = u_0^2 = 0 \quad , \quad P(u^1, u^2) = P(0, 0) + P_i(0, 0)u^i + \frac{1}{2}P_{ik}(0, 0)u^i u^k + \mathfrak{R}_3$$

die Taylorentwicklung. Wir betrachten den Schnitt mit der zur Tangentialebene parallelen Ebene

$$\mathfrak{N}(0, 0)(X - P(0, 0)) = \varepsilon$$

Nach den Ableitungsgleichungen (58) von Gauß gilt für die gemeinsamen Punkte von Fläche und Ebene

$$\varepsilon = \mathfrak{N}(P(u^2, u^2) - P(0, 0)) = \mathfrak{N}\left(P_i u^i + \frac{1}{2}P_{ik} u^i u^k + \mathfrak{R}_3\right) = \frac{1}{2}L_{ik} u^i u^k + R_3$$

oder

$$\pm 1 = L_{ik} \frac{u^i u^k}{2|\varepsilon|} + \frac{1}{|\varepsilon|} R_3$$



Mit der Substitution  $x^i := \frac{u^i}{\sqrt{2|\varepsilon|}}$  erhalten wir zunächst

$$\pm 1 = L_{ik} x^i x^k + \sqrt{2|\varepsilon|} R_3^*$$

und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Gleichung

$$L_{ik} x^i x^k = \pm 1 \quad (76)$$

Definition. Die Menge der Punkte  $X$  der Tangentialebene, die der Gleichung (76) genügen, heißt die Indikatrix von Dupin<sup>40</sup> in  $P_0$ .

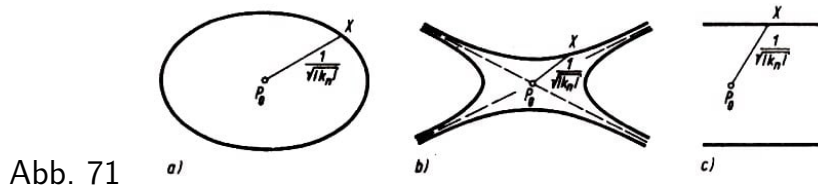


Abb. 71

Satz 2.8. Die Indikatrix von Dupin ist (Abb. 71)

- a) eine Ellipse, wenn  $P_0$  elliptisch,
- b) ein Paar konjugierter Hyperbeln (mit gemeinsamen Asymptoten), wenn  $P_0$  hyperbolisch,
- c) ein Parallelgeradenpaar, wenn  $P_0$  parabolisch,
- d)  $\emptyset$ , wenn  $P_0$  Flachpunkt

ist. Dabei hat  $X$  von  $P_0$  den Abstand  $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ .

Bezüglich a) bis c) ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der analytischen Geometrie, da  $L$  für diese Kurven zweiter Ordnung Diskriminante ist; die Behauptung d) ist trivial. Es sei nun  $\mathbf{r} = \mathbf{v}(P_0 X)$ . Dann ist

$$\mathbf{r} = x^i P_i = \sqrt{g_{ik} x^i x^k} \left( \frac{x^1}{\sqrt{g_{ik} x^i x^k}} P_1 + \frac{x^2}{\sqrt{g_{ik} x^i x^k}} P_2 \right)$$

wobei in der Klammer ein Einheitsvektor steht. Aus der Gleichungskette

$$\pm 1 = L_{kl} x^k x^l = g_{ij} x^i x^j \cdot L_{kl} \frac{x^k x^l}{\sqrt{g_{ij} x^i x^j}^2} = \mathbf{r}^2 k_n^{\mathbf{r}}$$

ergibt sich abschließend wie behauptet  $|\mathbf{r}| = \frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ .

Folgerung. Die Achsen der Indikatrix fallen mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammen. Bei a) und b) sind  $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$  und  $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$  die Längen der Halbachsen, wenn  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nach wie vor die Hauptkrümmungen bezeichnen.

<sup>40</sup>Charles Dupin (1784-1873).

Nabelpunkte haben entweder einen Kreis als Indikatrix, oder sie sind Flachpunkte.

Auf der Grundlage der Klassifikation lassen sich noch weitere Aussagen gewinnen:

a) Elliptischer Punkt:  $K > 0$ .

Dann haben die Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen und folglich alle Normalkrümmungen ein einheitliches Vorzeichen. Somit ist  $L_{ik}x^i x^k$  für  $(x^1, x^2) \neq (0, 0)$  entweder stets positiv oder stets negativ, d. h., dass eine hinreichend kleine Umgebung von  $P_0$  mit Ausnahme von  $P_0$  ganz in einem (offenen) Halbraum bezüglich der Tangentialebene durch  $P_0$  liegt (Abb. 72a).

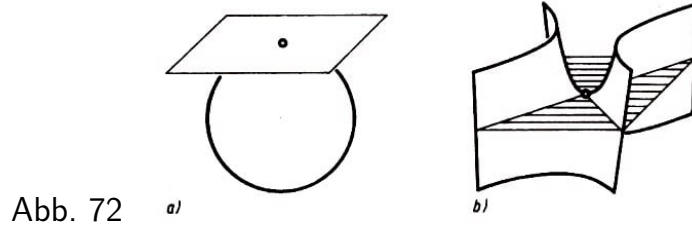


Abb. 72 a)

b)

b) Hyperbolischer Punkt (Sattelpunkt) :  $K < 0$ .

Da die Hauptkrümmungen verschiedene Vorzeichen besitzen, ist  $L_{ik}x^i x^k$  sowohl positiv als auch negativ. Folglich liegen in jeder Umgebung von  $P_0$  in beiden Halbräumen bezüglich der Tangentialebene Punkte der Fläche.

Genauer kann gesagt werden, dass die zur Tangentialebene senkrechten Ebenen durch die Asymptoten der Dupinschen Indikatrix in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $P_0$  die Teile der Fläche in den beiden Halbräumen bezüglich der Tangentialebene trennen (Abb. 72 b).

Dort schneidet die Tangentialebene die Fläche in zwei Kurven  $P = P_{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , für die die Asymptoten der Indikatrix Tangenten sind: Der Schnitt

$$0 = \mathfrak{N}(P(u^1, u^2) - P_0) = \frac{1}{2} L_{ik} u^i u^k + R_3^{**}$$

habe die Gaußsche Parameterdarstellung  $u^i = u_{(j)}^i(t)$  mit  $t = 0$  in  $P_0$ . Dann gilt

$$0 = L_{ik} \cdot \frac{u^i}{t} \cdot \frac{u^k}{t} + \frac{2R_3^{**}}{t^2}$$

woraus wir für  $t \rightarrow 0$

$$l_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$$

erhalten, d. h., dass der Tangentenvektor der Asymptotengleichung genügt, w. z. b. w.

c) Parabolische Punkte:  $K = 0$ , wobei etwa  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$  gilt.

Mit Ausnahme der Vielfachen von  $\mathbf{r}_1$  hat  $L_{ik}x^i x^k$  stets das Vorzeichen von  $\lambda_2$ . Eine hinreichend kleine Umgebung von  $P_0$  ohne die Punkte der Geraden  $P = P_0 + t\mathbf{r}_1$  liegt in einem Halbraum bezüglich der Tangentialebene durch  $P_0$  (Abb. 73 a).

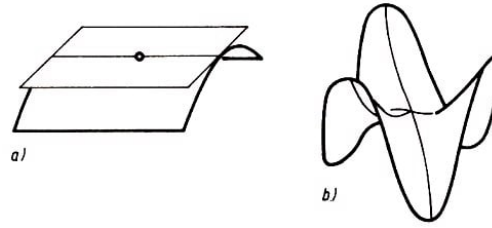


Abb. 73

d) Flachpunkte: Dort berühren sich Fläche und Tangentialebene von mindestens zweiter Ordnung. Nach unserer bisherigen Klassifikation muss das auch für den Scheitel eines sogenannten rotationssymmetrischen Affensattels (Abb. 73 b) zutreffen, bei dem neben den "Beinen" auch der "Schwanz" seine Berücksichtigung findet.

Die Achsen der Dupinschen Indikatrix können leicht angegeben werden, wenn die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien spezielle Flächenkurven sind:

Definition. Eine Flächenkurve, deren Normalkrümmung in jedem ihrer Punkte Hauptkrümmung ist bzw. verschwindet, heißt (Haupt-) Krümmungslinie bzw. Haupttangente (auch Asymptotenlinie).

In einer Ebene oder einer Kugelfläche ist jede Kurve eine Krümmungslinie, in einer Kegel-, Zylinder- oder Tangentenfläche ist jede Gerade zugleich Krümmungslinie und Haupttangente. Auf den Drehflächen sind die Meridiane und Breitenkreise Krümmungslinien (vgl. Aufgabe 1); im einschaligen Hyperboloid und im hyperbolischen Paraboloid sind die Geraden Asymptotenlinien.

Die Tangentenvektoren einer Asymptotenlinie erfüllen die Differentialgleichung

$$(L_{1i}g_{2k} - L_{2i}g_{1k})\dot{u}^i\dot{u}^k = 0$$

umgekehrt kann diese Differentialgleichung in einer geeigneten Umgebung jedes hyperbolischen Punktes wegen  $L < 0$  zur Bestimmung einer Parametertransformation genutzt werden, so dass die Asymptotenlinien die neuen  $u^i$ -Linien bilden.

Aus (69) erhält man mit  $\dot{u}^k$  statt  $x^k$  nach Eliminierung von  $\lambda$  für die Krümmungslinien die Differentialgleichung

$$(L_{11}g_{21} - L_{21}g_{11})\dot{u}^1\dot{u}^1 + (L_{11}g_{22} - L_{21}g_{12})\dot{u}^1\dot{u}^2 + (L_{12}g_{21} - L_{22}g_{11})\dot{u}^2\dot{u}^1 + (L_{12}g_{22} - L_{22}g_{12})\dot{u}^2\dot{u}^2 = 0$$

oder kürzer

$$(L_{1i}g_{2k} - L_{2i}g_{1k})\dot{u}^i\dot{u}^k = 0$$

Es ist nicht so leicht wie im Fall der Asymptotenlinien zu begründen, dass in einer geeigneten Umgebung jedes Nicht-Nabelpunktes die Krümmungslinien mit Hilfe dieser Differentialgleichung als  $\bar{u}^i$ -Linien eingeführt werden können.

Aufgaben

1. Man beweise auf der Grundlage der Ergebnisse der Beispiele (2.10) und (2.14), dass die Meridiane und Breitenkreise der Drehflächen Krümmungslinien sind.

2. Dupin hat die Fläche durch

$$P(u^1, u^2) = P_0 + P_i u^i + \frac{1}{2} P_{ik} u^i u^k \quad (77)$$

angenähert und diese Fläche mit Parallelen zur Tangentialebene geschnitten. Man zeige, dass (77) ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, ein parabolischer Zylinder oder die Tangentialebene darstellt, je nachdem, ob  $P_0$  elliptisch, hyperbolisch, parabolisch oder ein Flachpunkt ist.

## 2.10 Minimalflächen

Im Jahre 1760 stellte Joseph Louis Lagrange die Aufgabe, durch eine geschlossene und doppelpunktfreie glatte Kurve eine Fläche minimalen Flächeninhaltes zu legen.<sup>41</sup>

Obwohl sich namhafte Mathematiker mit dieser Aufgabe befasst und interessante Beiträge zu dieser Flächenklasse geliefert hatten, konnte ihre Lösung erst 1932 unabhängig voneinander von J. Douglas und T. Radó erbracht werden. Lagrange gelangte zu einer notwendigen Bedingung, die kurz durch  $H = 0$  für alle Punkte ausgedrückt werden kann. Trotz der fehlenden Umkehrung werden heute alle Flächen verschwindender mittlerer Krümmung Minimalflächen genannt.

**Satz 2.9.** Es sei  $P = P(u^1, u^2)$ ,  $(u^1, u^2) \in B$ , eine von der geschlossenen glatten Kurve  $K$  berandete Fläche minimalen Flächeninhaltes. Dann gilt  $H(u^1, u^2) = 0$  für alle  $(u^1, u^2) \in B$ .

Bevor wir einen Beweis skizzieren, wollen wir eine Anwendung in der Physik vorstellen: Eine Seifenblase in einem Drahtbügel bildet auf Grund der Oberflächenspannung, wenn wir von den geringen anderen Einflüssen, wie beispielsweise der Schwerkraft, absehen, eine Fläche minimalen Flächeninhaltes. Das gestattet es uns, Minimalflächen experimentell herzustellen.

Wir betrachten eine Schraubenlinie und ihr Bild bei der Spiegelung an ihrer Achse (Abb. 74). Die Seifenlamelle nimmt die Gestalt einer Wendelfläche an. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, dass die mittlere Krümmung einer Wendelfläche überall verschwindet (vgl. die folgende Aufgabe).

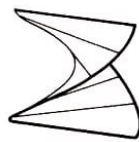


Abb. 74

Damit haben wir eine 1776 von Meusnier angegebene Minimalfläche kennengelernt; die andere ist eine spezielle Drehfläche. Sie kann experimentell erzeugt werden, indem zwei kreisförmige Drahtbügel in der Seifenlösung zunächst übereinander gelegt werden und dann in Richtung der gemeinsamen, auf ihren Ebenen senkrechten Symmetrieachse auseinander gezogen werden (Abb. 75).

<sup>41</sup>Es wird oft vom Plateauschen Problem gesprochen, obwohl Joseph Plateau (1801-1883) erst 1866 diese Aufgabe formuliert hat.

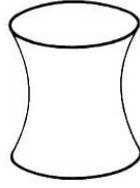


Abb. 75

Um zu einer analytischen Beschreibung dieser Fläche zu gelangen, betrachten wir eine beliebige Drehfläche (vgl. Beispiel (2.3))

$$P(u^1, u^2) = O + r \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^2 \mathbf{j} + z(u^1) \mathbf{k}$$

Für sie gilt nach dem Beispiel (2.10)

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2, \quad g = r^2$$

und nach Beispiel (2.14)

$$L_{11} = r' z'' - r'' z', \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{22} = r z'$$

Eine Drehfläche verschwindender mittlerer Krümmung erfüllt die Gleichung

$$H = \frac{1}{2g}(g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11}) = \frac{1}{2r^2}(r z' + r^2(r' z'' - r'' z')) = 0$$

bzw. die Differentialgleichung

$$r' z'' - \left( r'' - \frac{1}{r} \right) z' = 0 \quad (78)$$

Zur Bestimmung der Erzeugenden machen wir den Ansatz  $r = f(z)$  und erhalten aus (78)

$$\dot{f} z' z'' - \left( \ddot{f} z'^2 + \dot{f} z'' - \frac{1}{f} \right) z' = -\ddot{f} z'^3 + \frac{z'}{f} = 0$$

Es gilt folglich  $z' = 0$ , d. h., dass  $z$  konstant ist, oder

$$\ddot{f} z'^2 - \frac{1}{f} = 0$$

Wegen  $\dot{s}(z) = \sqrt{1 + \dot{f}^2}$  und  $z' = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{f}^2}}$  erhalten wir daraus

$$\ddot{f} f - (1 + \dot{f}^2) = 0 \quad (79)$$

Das ist eine Differentialgleichung der Kettenlinie  $r = a \cosh \frac{z}{a}$ , und aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt die Einzigkeit der Lösung, wenn beispielsweise  $f(0) = a$  und  $\dot{f}(0) = 0$  gefordert wird. Die Drehfläche wird deshalb Katenoid genannt; das Wort Kette ist aus dem lateinischen catena entstanden.

Zusammenfassend gilt der

Satz 2.10 (Bonnet<sup>42</sup>), 1860). Die einzigen nichtebenen Drehflächen verschwindender mittlerer Krümmung haben eine Kettenlinie als Erzeugende, sind Katenoide.

Wir skizzieren abschließend den Beweis des Satzes 2.9. Es sei  $P = P(u^1, u^2)$ ,  $(u^1, u^2) \in B$ , eine von der geschlossenen glatten Kurve  $K$  berandete Fläche minimalen Flächeninhalts. Eine "benachbarte" Fläche mit demselben Rand  $K$  kann in der Form

$$\tilde{P}(u^1, u^2) = P(u^1, u^2) + \varepsilon v(u^1, u^2) \mathfrak{N}(u^1, u^2)$$

angegeben werden, wenn  $v(u^1, u^2) = 0$  für alle  $(u^1, u^2)$  aus dem Rand von  $B$  gilt. Somit ist

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= P_1 + \varepsilon v_1 \mathfrak{N} + \varepsilon v \mathfrak{N}_1 = P_1 - \varepsilon v L_{1r} g^{rj} P_j + \varepsilon v_1 \mathfrak{N} \\ \tilde{P}_2 &= P_2 - \varepsilon v L_{2s} g^{sk} P_k + \varepsilon v_2 \mathfrak{N} \\ \tilde{g}_{11} &= g_{11} - 2\varepsilon v L_{1r} g^{rj} g_{j1} + \varepsilon^2(\dots) = g_{11} - 2\varepsilon v L_{11} + \varepsilon^2(\dots) \\ \tilde{g}_{12} &= g_{12} - 2\varepsilon v L_{12} + \varepsilon^2(\dots) = \tilde{g}_{21} \\ \tilde{g}_{22} &= g_{22} - 2\varepsilon v L_{22} + \varepsilon^2(\dots) \\ \tilde{g} &= \tilde{g}_{11} \tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12} \tilde{g}_{21} = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} - 2\varepsilon v (L_{11} g_{22} + L_{22} g_{11} - 2L_{12} g_{21}) + \varepsilon^2(\dots) \\ &= g(1 - 4\varepsilon v H) + \varepsilon^2(\dots) \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der benachbarten Fläche ist nur dann minimal, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \iint_B \sqrt{\tilde{g}} du^1 du^2 \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (80)$$

gilt. Aus (80) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_B \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{\tilde{g}} du^1 du^2 \Big|_{\varepsilon=0} = \iint_B - \frac{4vHg + \varepsilon(\dots)}{2\sqrt{g(1 - 4\varepsilon v H) + \varepsilon^2(\dots)}} \Big|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \\ &= -2 \iint_B v H \sqrt{g} du^1 du^2 \end{aligned}$$

Wie man in der Variationsrechnung durch geeignete Wahl von  $v$  zeigt, ist diese Gleichung wegen  $\sqrt{g} > 0$  nur dann erfüllt, wenn  $H(u^1, u^2) = 0$  für alle  $(u^1, u^2) \in B$  gilt. Damit ist der Beweis des Satzes 2.9 umrissen.

Aufgabe

Man zeige, dass jede Wendelfläche eine Minimalfläche ist.

<sup>42</sup>Ossian Bonnet (1819-1892).

### 3 Literatur

#### Reihen

[I] Studienbücherei, darin insbesondere Mathematik für Lehrer (hrsg. von W. ENGEL, S. BREHMER, M. SCHNEIDER, H. WUSSING), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[II] Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte (hrsg. von O. BEYER, H. ERFURTH, O. GREUEL T, H. KADNER, K. MANTEUFFEL, G. ZEIDLER), BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.

[III] Mathematik (Lehrbücher für die allgemeinbildende polytechnische Oberschule), Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin.

#### Lehrbücher

[1] ALEXANDROW, A. D., Die innere Geometrie der konvexen Flächen, Akademie-Verlag, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] BAKELMAN, I. J., Einführung in die Differentialgeometrie, Moskau 1973 (russisch)

[3] BLASCHKE, W., und H. REICHARDT, Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4] BREHMER, S., und H. BELKNER, Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra, 4. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

[5] BREHMER, S., und H. HAAR, Differentialformen und Vektoranalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

[6] EUKLID, Die Elemente, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1933-1937 (Übersetzung aus dem Griechischen von CLEMENS THAER).

[7] FICHTENHOLZ, G. M., Differential- und Integralrechnung, Bd. I, 12. Aufl., Bd. II, 8. Aufl., Bd. III, 9. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980, 1979 bzw. 1979 (Übersetzung aus dem Russischen).

[8] HAACK, W., Elementare Differentialgeometrie, Birkhäuser-Verlag. Basel und Stuttgart 1955.

[9] HILBERT, D., und S. COHN-VOSEN, Anschauliche Geometrie, Verlag von Julius Springer, Berlin 1932.

[10] KAMKE, E., Differentialgleichungen I, 6. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1969.

[11] KREYSZIG, E., Differentialgeometrie, 2. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1968.

[12] LAUGWITZ, D., Differentialgeometrie, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960.

[13] v. MANGOLDT, H., und K. KNOPP, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1, 15. Aufl.; Bd. 2, S. Hirzel-Verlag, Leipzig

- [14] NORDEN, A. P., Differentialgeometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [15] PICKERT, G., Analytische Geometrie, 7. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1976.
- [16] POGORELOW, A. W., Geometrie gekrümmter Oberflächen, Moskau 1969. (russisch)
- [17] RASCHEWSKI, P. K., Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übersetzung aus dem Russischen).
- RASCHEWSKI, P. K., Elementare Einführung in die Tensorrechnung, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966 (Übersetzung aus dem Russischen).
- [18] REICHARDT, H., Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.
- [19] RIEMANN, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 2. Aufl., Verlag von Julius Springer, Berlin 1921 (Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl).
- [20] ROTHE, R., Differentialgeometrie I, Walter de Gruyter & Co, Berlin 1944.
- [21] STRUBECKER, K., Differentialgeometrie I-III, Walter de Gruyter & Co, Berlin 1955, 1958 bzw. 1959.
- [22] SULANKE, R., und P. WINTGEN, Differentialgeometrie und Faserbündel, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin



## 4 Bezeichnungen und Symbole

|  |  |
|--|--|
| $\max$   | Maximum  |
| $\min$   | Minimum  |
| $\inf$   | untere Grenze, Infimum                                     |
| $\sup$   | obere Grenze, Supremum                                     |
| $f^{-1}$   | Umkehrfunktion   |
| $U_\rho(x)$  | $\rho$ -Umgebung von $x$                                   |
| $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  | partielle Ableitung  |
| $A = (a_{ik})$   | Matrix   |
| $ A  =  a_{ik} $   | Determinante   |
| $A^\tau = (a_{ik})^\tau$   | transponierte Matrix                                       |
| $A^{-1} = (a_{ik})^{-1}$   | inverse Matrix   |
| $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$  | parallele Vektoren   |
| $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$  | orthogonale bzw. senkrechte Vektoren                       |
| $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$   | Skalarprodukt  |
| $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$   | Vektorprodukt, vektorielles Kreuzprodukt                   |
| $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$   | Spatprodukt  |
| $P + \mathfrak{a}$   | Bild von $P$ bei der Verschiebung $\mathfrak{a}$           |
| $\mathfrak{v}(PP') = P' - P$   | durch $\overrightarrow{PP'}$ bestimmter Vektor             |
| $\rho(A)$  | Rang von $A$   |
| $P(t)$   | Parameterdarstellung einer Kurve                           |
| $\dot{P}(t)$   | Tangentenvektor, erste Ableitung                           |
| $\ddot{P}(t), \ddot{\ddot{P}}(t)$  | zweite bzw. dritte Ableitung                               |
| $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots$   | erste, zweite, ... Ableitung                               |
| $P'$   | Tangenten(einheits)vektor                                  |
| $P', P'', P'''$  | Ableitungen nach dem natürlichen Parameter, der Bogenlänge |
| $\mathfrak{t}(s)$  | Tangenten(einheits)vektor                                  |
| $\mathfrak{n}(s)$  | Hauptnormalenvektor  |
| $\mathfrak{b}(s)$  | Binormalenvektor   |
| $P(u^1, u^2)$  | Parameterdarstellung einer Fläche                          |
| $P_i = \frac{\partial P}{\partial u^i}, P_{ik} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^k}$ | partielle Ableitung  |
| $\mathfrak{N}(u^1, u^2)$   | Normalvektor   |
| $\mathfrak{N}_i$   | partielle Ableitung des Normalvektors                      |
| $P(u'), \mathfrak{a}(u^1), g(u^1)$   | vgl. Regelfläche   |
| $g_{ik}(u^1, u^2)$   | metrische Fundamentalgrößen                                |
| $\Gamma_{ij}^h$  | Christoffelsymbole   |
| $L_{ij}$   | zweite Fundamentalgrößen                                   |
| $k_g$  | geodätische Krümmung                                       |
| $k_n$  | Normalkrümmung   |
| $k_n^\tau$   | Normalkrümmung in der Richtung $\tau$                      |
| $H$  | mittlere Krümmung  |
| $K$  | Gaußsche Krümmung  |
| $\cosh t$  | cosinus hyperbolicus $t$ Hyperbelfunktionen                |
| $\sinh t$  | sinus hyperbolicus $t$                                     |
| $\tanh t$  | tangens hyperbolicus $t$                                   |